Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Aspectos Categóricos del Formalismo de Maupertius y de la Cuantización Topológica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Edgar Omar Velasquez Escamilla

TUTOR

Doctor Hernando Quevedo Cubillos

Ciudad Universitaria, CDMX, 2022

JURADO ASIGNADO:

DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR
DR. CÉSAR ALBERTO AGUILLON BARRERA
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
DRA. MELISA GUTIÉRREZ VIVANCO
DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

SITIO DONDE SE DESARROLLO EL TEMA:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DEPARTAMENTO DE GRAVITACIÓN Y TEORÍA DE CAMPOS

ASESOR DEL TEMA: HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
SUSTENTANTE: EDGAR OMAR VELÁSQUEZ ESCAMILLA

Dedicatoria
Para Snoby.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero como ayudante de investigador.
Agradezco igualmente el apoyo financiero que se me proporcionó durante el proyecto de investigación y que fue pilar para la realización de este trabajo.

Resumen

La teoría de categorías ha encontrado en la física, un área de explotación teórica donde conceptos como funtor y transformación natural tiene significado y así pretender hacer uso de dicha teoría para el desarrollo de teorías tan exóticas como lo son la teoría de cuerdas o la teoría M.
La tesis comienza con un capitulo dedicado a la teoría de categorías, donde se presentan las definiciones básicas como son: categorías, funtores, transformaciones naturales y conmutatividad de diagramas, que serán utilizadas a lo largo del texto.
Continuamos con una introducción a la topología diferencial, haciendo especial énfasis a la teoría de haces que serán los objetos básicos de la tesis. Luego abordaremos los conceptos de homología y cohomología en un sentido muy general dentro de las categorías abelianas para después dar paso a definiciones dentro de la topología algebraica, grupos de homologiá y cohomología son discutidos aquí, así como la definición general de una clase característica.
Antes de abordar el tema principal de la tesis, damos una breve introducción a la teoría cuántica de campos, especialmente en el procedimiento de cuantización. Esto ayudará al lector a seguir con las ideas dentro de la teoría de cuantización topológica ya que encuentran similitudes conforme se desarrolla la tesis y que será el ingrediente principal para nuestro análisis categórico. Éste es precisamente el núcleo de la tesis.
Aquí me gustaría hacer mención que el tratamiento sigue las riendas de un proceso bastante intuitivo y que quizá no logre pasar las expectativas de un conocedor en el área de las n-categorías, pero que en el fondo usa el mismo principio, así no pretendemos decepcionar al lector pero sí motivar en el sentido de que el análisis categórico hecho está enfocado en un área en pleno crecimiento, i.e, el área de la teoría topoló-

gica cuántica de campos está en la frontera del conocimiento y esperamos que el uso quizá un tanto inadecuado resulte al menos entretenido para quienes encuentren en la teoría de categorías un área para ampliar sus conocimientos matemáticos.

Índice de figuras

CONJUNTOS

R - números reales

Z - números enteros

N - números naturales.

FUNCIONES

$f : A \to B$ - una función entre conjuntos $A \equiv Dom\, f$ y $B \equiv Cod\, f$

$ker\, f = f^{-1}(e_B)$ - núcleo de f;

$Im\, f = f(A)$ - imagen de f;

$Coker\, f = Cod/Im\, f$ - conúcleo de f;

$Coim\, f = Dom\, f/ker\, f$ - coimagen de f;

Diagrama conmutativo requiriendo $h = g \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

DERIVACIONES

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ - derivada de f respecto a x;

$\dot{x}$ - derivada total de x respecto al tiempo;

$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ - derivada parcial respecto al tiempo;

$\partial_{x^i} \equiv \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ - derivada parcial coordenada;

d - derivada exterior;

d^n - operador cofrontera;

∂_n - operador frontera.

VARIEDADES SUAVES Y HACES FIBRADOS

Todas la variedades se asumen (a menos que se diga lo contrario) C^k-suaves, reales, finito-dimensionales, Hausdorff, paracompactas, conexas y sin frontera; las funciones se asumen C^k-suaves.

Se usan los símbolos $\otimes$, $\wedge$ para productos tensoriales y productos exteriores respectivamente, mientras que el símbolo $\wr$ se utliza para productos internos.

$T\mathcal{M}$ - haz tangente de la variedad $\mathcal{M}$;

$\pi_{\mathcal{M}} : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ - proyección natural;

$\pi : Y \to X$ - haz fibrado;

$(E, \pi, \mathcal{M}, V)$ - haz con espacio total E, base $\mathcal{M}$, proyección π y V fibra estándar.

GRUPOS

G - denota usualmente un grupo de Lie;

$GL(n)$ - grupo general lineal con coeficientes reales en dimensión n;

$SO(n)$ - grupo de rotaciones en dimensión n;

$H_n(\mathcal{M}) = ker\, \partial_n / Im\, \partial_{n-1}$ - enésimo grupo de homología de la variedad $\mathcal{M}$;

$H^n(\mathcal{M}) = ker\, d_n / Im\, d_{n-1}$ - enésimo grupo de cohomología de la variedad $\mathcal{M}$.

CATEGORÍAS

$\mathcal{S}$ - todos los conjuntos como objetos y todas las funciones entre ellos como morfismos;

$\mathcal{PS}$ - todos los conjuntos con punto base como objetos y todas las funciones entre ellos respetando punto base como morfismos;

$\mathcal{G}$ - todos los grupos como objetos y todos los homomorfismos entre ellos como morfismos;

$\mathcal{A}$ - todos los grupos Abelianos como objetos y todos los homomorfismos entre ellos como morfismos;

$\mathcal{T}$ - todos los espacios topológicos como objetos y todas las funciones continuas entre ellos como morfismos;

$\mathcal{PT}$ - todos los espacios topológicos con punto base como objetos y todas las funciones continuas respetando puntos base entre ellos como morfismos;

$\mathcal{TG}$ - todos los grupos topológicos como objetos y todas los homomorfismos continuos entre ellos como morfismos;

$\mathcal{LG}$ - todos los grupos de Lie como objetos y todas los homomorfismos suaves entre ellos como morfismos;

$\mathcal{M}_n$ - todos las variedades suaves n-dimensionales como objetos y todas los difeomorfismos entre ellos como morfismos.

$\mathcal{TB}$ - todos los haces tangentes como objetos y todas las funciones tangentes entre ellos como morfismos;

$\mathcal{T}^*\mathcal{B}$ - todos los haces cotangentes como objetos y todas las funciones cotangentes entre ellos como morfismos;

$\mathcal{FB}$ - todos los haces fibrados suaves como objetos y todas los homomorfismos suaves entre ellos como morfismos;

$\mathcal{CC}$ - todas las cadenas complejas como objetos y todas las funciones cadena entre ellas como morfismos.

OTROS SIMBOLOS

$i \equiv \sqrt{-1}$ - unidad imaginaria;

$\mathcal{A}_L$ - álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G;

H_* - teoría de homología;

H^* - teoría de cohomología;

$C^k(A, B)$- conjunto de funciones k-diferenciables entre conjuntos A y B;

$C^\infty(A, B)$- conjunto de funciones suaves entre conjuntos A y B;

$C^0(A, B)$- conjunto de funciones continuas entre conjuntos A y B.

$g \equiv g_{ij}$ - tensor métrico de Riemann;

Γ^i_{jk} - símbolos de Christoffel.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La topología algebraica es una rama de las matemáticas en la que se usan las herramientas del álgebra abstracta para estudiar los espacios topológicos. El objetivo básico es encontrar invariantes algebraicos que clasifican los espacios topológicos hasta el homeomorfismo, aunque normalmente muchos se clasifican hasta la equivalencia homotópica. La meta es clasificar los espacios topológicos. Un nombre antiguo para esta materia era el de topología combinatoria, que ponía el énfasis en cómo un espacio dado X podía construirse a partir de espacios más pequeños. El método básico que se aplica ahora en topología algebraica es el de investigar los espacios por medio de los invariantes algebraicos: por ejemplo relacionándolos con los grupos, que tienen bastante estructura utilizable, y de manera que se respete la relación de homeomorfismo de espacios [1].

Las dos formas principales como se hace esto son a través de los grupos fundamentales, o más en general la teoría de homotopía, y por medio de los grupos de homología y de cohomología. Los grupos fundamentales nos suministran información básica sobre la estructura de un espacio topológico; pero son a menudo no-abelianos y pueden ser difíciles de usar.

Los grupos de homología y cohomología, por otra parte, son abelianos, y en muchos casos importantes son finitamente generados. Los grupos abelianos finitamente generados pueden clasificarse completamente y son particularmente fáciles de usar. Varios resultados útiles se siguen inmediatamente de trabajar con grupos abelianos finitamente generados. El rango libre del grupo de n-homología de un complejo simplicial es igual al n-número de Betti, así que se pueden usar los grupos de homología de un complejo simplicial para calcular su característica de Euler-Poincaré. Así que la homología 'codifica' gran parte de la información topológica de un espacio topológico dado [2].

En general, todas las construcciones de la topología algebraica son funtoriales [3]: las nociones de categoría, funtor y transformación natural se originaron aquí. Los grupos fundamentales, de homología y cohomología no son sólo invariantes del espacio topológico subyacente, en el sentido de que dos espacios topológicos son homeomorfos si tienen asociados los mismos grupos; una aplicación continua de espacios induce un homomorfismo entre los grupos asociados, y estos homomorfismos pueden ser usados para probar la no existencia (o, más profundamente, la existencia) de aplicaciones. Entre sus tantas aplicaciones, podemos encontrar en el área de la física matemática, el uso de la topología algebraica para el estudio de las clases características asociadas a una estructura geométrica dada, que muchas veces fomaliza el concepto de espacio de configuración de sistemas clásicos. Más especificamente, en el área de teoria de campos, el uso de la topología algebraica ha ido en aumento, por ejemplo, en el desarrollo de la teoría topológica cuántica de campos (TTCC), que es una teoría cuántica de campos (TCC) que calcula invariantes topológicos [Apen. D].

Aunque las TTCC fueron desarroladas por físicos, ellas también son de interés matemático, relacionado, entre otras cosas, con la teoría de nudos y la teoría de tetravariedades en topología algebraica y la teoría de espacio modular en geometría algebraica (S. Donaldson, V. Jones, E. Witten y M. Kontsevich, han ganado la Medalla Fields por sus trabajos relacionados con la teoría de campos topológica).

Aquí abordaremos la metodología llamada cuantización topológica, que precisamente calcula invariantes topológicos y los interpreta desde el formalismo de Maupertius. Finalmente el propósito de esta tesis es tratar de traducir gran parte de la información al lenguaje de las categorías para poder hacer uso de esta herramienta y poder extender varias nociones físicas dentro de la cuantización topológica y comprender otras qué siguen en investigación [4].

Capítulo 2

Fundamentos de la Teoría de Categorías

2.1. Categorías

En la ciencia matemática moderna en el momento en que alguien define una nueva clase de objeto matemático, uno procede casi en el siguiente respiro a decir qué clase de funciones entre los objetos van a ser consideradas. Un marco de referencia general para lidiar con situaciones donde tengamos ciertos *objetos* y ciertas *funciones entre objetos*, como conjuntos y funciones, espacios vectoriales y operadores lineales, puntos en el espacio y caminos entre ellos, etc., da el metalenguaje moderno de categorías y funtores. Las categorías son universos matemáticos y los funtores son "proyecciones"de un universo a otro [5].

Una categoría es una estructura matemática genérica que consiste de una colección de *objetos* (conjuntos posiblemente con una estructura adicional), con una correspondiente colección de *flechas*, o *morfismos*, entre los objetos (en congruencia con la estructura adicional). Una categoría $\mathcal{K}$ está definida como un par $(Ob(\mathcal{K}), Mor(\mathcal{K}))$ de objetos $A, B, ... \in Ob(\mathcal{K})$ y morfismos $f : A \to B,\ g : B \to C, ... \in Mor(\mathcal{K})$ entre objetos, con la composición asociativa:

$$\circlearrowleft A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C = A \xrightarrow{f\circ g} C,$$

y un morfismo ciclo-identidad. Cabe destacar que en la literatura de topología, se usa diferente notación para $Mor(\mathcal{K})$, a saber, $Hom(\mathcal{K})$ [5].

Una categoría $\mathcal{K}$ es usualmente representada por un diagrama conmutativo (i.e., un diagrama con un *objeto inicial* A y *final* D común):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

Para hacer esto más preciso, decimos que una categoría K está definida si tenemos:

(1) Una *clase de objetos* $\{A, B, C, ...\}$ de $\mathcal{K}$ denotado por $Ob(\mathcal{K})$;

(2) Un *conjunto de morfismos* o *flechas* $Mor_{\mathcal{K}(A,B)}$ con elementos $f : A \to B$, definidos para cualquier par ordenado $(A, B) \in \mathcal{K}$, tal que para dos pares distintos $(A, B) \neq (C, D)$ en $\mathcal{K}$, tenemos $Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{K}}(C, D) = \emptyset$;

(3) Para cualquier tripleta $(A, B, C) \in \mathcal{K}$ con $f : A \to B$ y $g : B \to C$, existe una composición de morfismos

$$Mor_{\mathcal{K}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \ni (g, f) \to g \circ f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, C) \tag{2.1}$$

Si tenemos un morfismo $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, (escrito de otra forma como $f : A \to B$), o

$$A \xrightarrow{f} B$$

entonces $A = Dom(f)$ es el *dominio* de f, y B=Cod(f) es el *codominio* de f (del cual el *rango* de f es una subclase) y denotado por $B = ran(f)$.

Para hacer a $\mathcal{K}$ una categoría, está debe de cumplir además las siguientes propiedades:

1. *Asociatividad de morfismos*: para toda $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$, y $h \in Mor_{\mathcal{K}}(C, D)$, tenemos $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[d, "f"'] & D \\
B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

2. *Existencia de morfismo identidad*: para cada objeto $A \in Ob(\mathcal{K})$ existe un único morfismo identidad $1_A \in Mor_{\mathcal{K}}(A, A)$; para cualquiera dos morfismos $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$, composiciones con el morfismo identidad $1_B \in Mor_{\mathcal{K}}(B, B)$ da como resultado $1_B \circ f = f$ y $g \circ 1_B = g$, i.e., el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_B"] & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

La clase de todos los morfismos de la categoría $\mathcal{K}$ es denotado por

$$Mor(\mathcal{K}) = \bigcup_{A,B \in Ob(\mathcal{K})} Mor_{\mathcal{K}}(A, B). \tag{2.2}$$

Si para dos morfismos $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, A)$ la igualdad $g \circ f = 1_A$ es válida, entonces el morfismo g se dice que es *inversa izquierda* (o *retracción*) de f, y f *inversa derecha* (o *sección*) de g. Un morfismo que es ambos, inversa izquierda y derecha de f se dice inversa por los dos lados de f.

Un morfismo $m : A \to B$ es llamado *monomorfismo* en $\mathcal{K}$ (i.e., $1-1$, o función *inyectiva*), si para dos morfismos paralelos $f_1, f_2 : C \to A$ en $\mathcal{K}$ la igualdad $m \circ f_1 = m \circ f_2$ implica $f_1 = f_2$; en otras palabras, m es momorfismo si es *cancelable por la izquierda*. Cualquier morfismo con inversa izquierda es monomorfismo.

Un morfismo $e : A \to B$ es llamado *epimorfismo* en $\mathcal{K}$ (i.e., *sobre*, o función *sobreyectiva*), si para dos morfismos paralelos $g_1, g_2 : B \to C$ en $\mathcal{K}$ la igualdad $g_1 \circ e = g_2 \circ e$ implica $g_1 = g_2$; en tras palabras, e es epimorfismo si es *cancelable por la derecha*. Cualquier morfismo con inversa derecha es epimorfismo.

Un morfismo $f : A \to B$ es llamado isomorfismo en $\mathcal{K}$ (denotado como $f : A \cong B$) si existe un morfismo $f^{-1} : B \to A$ que es inversa por los dos lados de f en $\mathcal{K}$. La relación de isomorfismo es reflexiva, simétrica y transitiva, i.e., es una relación de equivalencia.

Por ejemplo, un isomorfismo en la categoría de conjuntos es llamado *biyección*, en la categoría de espacios topológicos es llamado $homeomorfismo$, en la categoría de variedades diferenciales es llamado $difeomorfismo$.

Un morfismo $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ es *regular* si existe un morfismo $g : B \to A$ en $\mathcal{K}$ tal que $f \circ g \circ f = f$. Cualquier morfismo con o inversa izquierda o inversa derecha es regular.

Un objeto T es un *objeto terminal* en $\mathcal{K}$ si para cada objeto $A \in Ob(\mathcal{K})$ existe una única flecha $A \to T$. Un objeto S es un *objeto inicial* en $\mathcal{K}$ si para cada objeto $A \in Ob(\mathcal{K})$ existe una única flecha $S \to A$. Un *objeto nulo* $Z \in Ob(\mathcal{K})$ es un objeto que es tanto inicial y terminal; éste es único bajo isomorfismos. Para cualesquiera dos objetos $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ existe un único morfismo $A \to Z \to B$ (la composición a través de Z), llamado el $morfismo$ *cero* de A a B.

La noción de subcategoría es análoga a la noción de subconjunto. Una subcategoría $\mathcal{L}$ de una categoría $\mathcal{K}$ se dice que es una completa subcategoría si y sólo si para cualesquiera dos objetos $A, B \in \mathcal{L}$), cada morfismo $A \to B$ de $\mathcal{L}$ está en $\mathcal{K}$.

Un *grupoide* es una categoría en la cual cada morfismo es invertible. Un grupoide típico es el grupoide fundamental $\Pi_1(X)$ de un espacio topológico X. Un objeto de $\Pi_1(X)$ es un punto $x \in X$, y un morfismo $x \to x'$ de $\Pi_1(X)$ es la clase de homotopía de caminos f de x a x'. La composición de caminos $g : x' \to x''$ y $f : x \to x'$ es el camino h que es 'f seguida de g'. La composición también se aplica a clases de homotopía, y hace a $\Pi_1(X)$ una categoría y un grupoide (la inversa de cualquier camino es el mismo camino recorrido en dirección contraria).

Un *grupo* es un grupoide con sólo un objeto, i.e., una categoría con un *objeto* en la cual todos los $morfismos$ son $isomorfismos$. Por lo tanto, si queremos generalizar el concepto de grupo, manteniendo la asociatividad como una propiedad esencial, obtenemos la noción de categoría [5].

Una categoría es *discreta* si cada morfismo es una identidad. Un *monoide* es una categoría con un objeto. Un *grupo* es un monoide en el cual sus morfismos tienen inversa por los dos lados bajo la composición.

El *álgebra homológica* fue la progenitora de la teoría de categorías. Generalizando la fórmula de Euler $f+v=e+2$ para las caras, vértices y aristas de un poliedro convexo. E.Betti definió *invariantes numéricos* de espacios por adición y substracción formal de caras de varias dimensiones; H.Poincaré formalizó esto e introdujo la homología. E.Noether extrajo el hecho que estos cálculos continúan en grupos abelianos, y que la operación ∂_n tomando una cara de dimensión n a la suma alternada de caras de dimensión $n-1$ que forman su frontera es un homomorfismo, y también satisface $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Hay muchas maneras de aproximar un espacio dado por poliedros, pero el cociente $H_n = Ker\partial_n / Im\partial_{n+1}$ es un invariante, el *grupo* de homología. Desde Noether, los grupos de homología han sido el objeto de estudio en lugar de sus dimensiones, que son los *números* de *Betti* [5].

2.2. Funtores

En topología algebraica, se intenta asignar a cada espacio topológico X algún objeto $\mathcal{F}(X)$ de tal manera que para toda C^0-función $f : X \to Y$ existe una asignación de homomorfismos $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$. Una ventaja de este procedimiento es, e.g., que si uno está tratando de probar la no existencia de una C^0-función $f : X \to Y$ con ciertas propiedades, se puede demostrar de forma relativamente sencilla la no existencia de la correspondiente función algebraica $\mathcal{F}(f)$ y por tanto deducir que f podría no existir. En otras palabras, $\mathcal{F}$ se convierte en un homomorfismo de una categoría (e.g., la categoría de espacios topológicos, $\mathcal{T}$) a otra (e.g. la categoría de grupos, $\mathcal{G}$ o la categoría de grupos Abelianos, $\mathcal{A}$). Formalizando esta noción obtenemos la idea de un $funtor$ [5].

Un funtor es una *imagen* genérica que proyecta una categoría en otra.

Sea $\mathcal{K} = (Ob(\mathcal{K}), Mor(\mathcal{K}))$ una categoría $fuente$ (o dominio) y $\mathcal{L} = (Ob(\mathcal{L}), Mor(\mathcal{L}))$ la categoría $objetivo$ (o codominio).

Un funtor $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_O, \mathcal{F}_M)$ está definido como un par de funciones, $\mathcal{F}_O : Ob(\mathcal{K}) \to Ob(\mathcal{L})$ y $\mathcal{F}_M : Mor(\mathcal{K}) \to Mor(\mathcal{L})$, preservando la simetría categórica (i.e., conmutatividad de todos los diagramas) de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{L}$.

Más precisamente, un *funtor contravariente*, o simplemente un *funtor*, $\mathcal{F}_* : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ es una *imagen* en la categoría objetivo (o final) $\mathcal{L}$ de (todos los objetos y morfismos de) la categoría fuente (o inicial) $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{F}_* : \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow[k]{} & D \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(g)} \\ \mathcal{F}(C) & \xrightarrow[\mathcal{F}(k)]{} & \mathcal{F}(D) \end{array}$$

Similarmente, un *funtor contravariante* o *cofuntor*, $\mathcal{F}^* : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ es una *imagen dual* con las flechas revertidas:

$$\mathcal{F}^* : \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow[k]{} & D \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xleftarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(h)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{F}(g)} \\ \mathcal{F}(C) & \xleftarrow[\mathcal{F}(k)]{} & \mathcal{F}(D) \end{array}$$

En otras palabras, un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ de una categoría inicial $\mathcal{K}$ a una categoría final $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_O, \mathcal{F}_M)$ de funciones $\mathcal{F}_O : Ob(\mathcal{K}) \to Ob(\mathcal{L})$, $\mathcal{F}_M : Mor(\mathcal{K}) \to Mor(\mathcal{L})$, tal que:

1. Si $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, entonces $\mathcal{F}_M(f) \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_O(A), \mathcal{F}_O(B))$ en el caso de funtor *covariante* $\mathcal{F}_*$, y $\mathcal{F}_M(f) \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_O(B), \mathcal{F}_O(A))$ en el caso de un funtor *contravariante* $\mathcal{F}^*$;

2. Para todo objeto $A \in Ob(\mathcal{K}) : \mathcal{F}_M(1_A) = 1_{\mathcal{F}_O(A)}$;

3. Para toda $f, g \in Mor(\mathcal{K})$: si $cod(f) = dom(g)$, entonces
$\mathcal{F}_M(g \circ f) = \mathcal{F}_M(g) \circ \mathcal{F}_M(f)$ en el caso de funtor *covariante* $\mathcal{F}_*$, y
$\mathcal{F}_M(g \circ f) = \mathcal{F}_M(f) \circ \mathcal{F}_M(g)$ en el caso de funtor *contravariante* $\mathcal{F}^*$.

La teoría de categorías se origina en topología algebraica, que trata de asignar invariantes algebraicos a estructuras topológicas. La regla de oro en tales invariantes es que necesitan ser *funtores* [5]. Por ejemplo, el *grupo fundamental* π_1 es un funtor. La topología algebraica construye un grupo llamado *grupo fundamental* $\pi_1(X)$ para cualquier espacio topológico X, que mantiene el rastro de cuántos hoyos el espacio X tiene. Pero también, cualquier función entre espacios topológicos determina un homomorfismo $\phi : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ de los grupos fundamentales. Entonces el grupo fundamental es realmente un funtor $\pi_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$. Esto nos permite traducir completamente cualquier situación que involucre *espacios topológicos* y $funciones\ continuas$ entre ellos a una situación paralela que involucre *grupos* y $homomorfismos$, y por tanto reducir algunos problemas topológicos a problemas algebraicos.

También, la homología singular en una dimensión dada n asigna a cada espacio topológico X un grupo abeliano $H_n(X)$, su enésimo grupo de homología, y además a cada función continua $f : X \to Y$ de espacios topológicos un homomorfismo correspondiente $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ de grupos, y esto de cierta forma que $H_n(X)$ se convierte en un funtor $H_n : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$.

La idea principal en el *uso de* $funtores$ *en* topología es que H_n o π_n da una imagen algebraica no sólo de los espacios topológicos X, Y sino también de todas las funciones continuas $f : X \to Y$ entre ellos.

Similarmente, existe un funtor $\Pi_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$, llamado el funtor grupoide fundamental, que juega un papel muy básico en topología algebraica. Así es como obtenemos de cualquier espacio X su grupoide fundamental Π_1. Para decir qué es el grupoide $\Pi_1(X)$, necesitamos decir quiénes son sus objetos y sus morfismos. Los objetos en $\Pi_1(X)$ son sólo los puntos de X y los morfismos son sólo una clase de equivalencia de caminos en X. Más precisamente, un morfismo $f : x \to y$ en $\Pi_1(X)$ es sólo una clase de equivalencia de caminos continuos de x a y, donde dos caminos de x a y son equivalentes si uno puede ser deformado continuamente en el otro sin mover los puntos finales. (Si esta relación de equivalencia se cumple decimos que los dos caminos son homotópicos, y llamamos a las clases de equivalencia clases homotópicas de caminos).

Otros ejemplos de funtores covariantes que olvidan estructura:

1. De la categoría de espacios topológicos a la categoría de conjuntos; 'olvida' la estructura topológica.

2. De la categoría de espacios métricos a la categoría de espacios topológicos con

la topología inducida por la métrica; 'olvida' la métrica.

Para cada categoría $\mathcal{K}$, el *funtor identidad* $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ toma cada $\mathcal{K}$-objeto y cada $\mathcal{K}$-morfismo y lo lleva a el mismo.
Dada una categoría $\mathcal{K}$ y una subcategoría $\mathcal{L}$, tenemos el *funtor inclusión* $In : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$.
Dada una categoría $\mathcal{K}$, un *funtor diagonal* $\Delta : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ toma cada objeto $A \in \mathcal{K}$ y lo lleva al objeto (A, A) en la categoría producto $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.
Dada una categoría $\mathcal{K}$ y una categoría de conjuntos $\mathcal{S}$, cada objeto $A \in \mathcal{K}$ determina un *Hom*- funtor covariante $\mathcal{K}[A,] : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$, un *Hom*-funtor contravariante $\mathcal{K}[, A] : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$ y un *Hom*-bifuntor $\mathcal{K}[,] : \mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \to \mathcal{S}$.
Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ es un funtor fiel si para todo $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ y para toda $f, g \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ implica $f = g$; es un funtor total si para cada morfismo $h \in Mor_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$, existe $g \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ tal que $h = \mathcal{F}(g)$; es un encaje completo si es ambos total y fiel[5].

2.3. Transformaciones Naturales

Una *transformación natural* (i.e., un *morfismo funtorial*) $\tau : \mathcal{F} \rightharpoonup \mathcal{G}$ es un morfismo entre dos funtores de la misma varianza,

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \ \mathcal{K} \rightrightarrows \mathcal{L}$$

preservando la simetría categórica, i.e., preservando la conmutatividad de todos los diagramas.
Más precisamente, todos los funtores de la misma varianza de una categoría $\mathcal{K}$ a otra categoría $\mathcal{L}$ forman por si solas objetos de la categoría *funtorial* $\mathcal{L}^{\mathcal{K}}$.
Morfismos de $\mathcal{L}^{\mathcal{K}}$, llamados *transformaciones naturales*, están definidos como sigue:
Sea $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ dos funtores de la misma varianza de una categoría $\mathcal{K}$ a otra categoría $\mathcal{L}$. Una transformación natural $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \mathcal{G}$ es una familia de morfismos tales que para toda $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ en la categoría fuente $\mathcal{K}$, tenemos $\mathcal{G}(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ \mathcal{F}(f)$

en la categoría de llegada $\mathcal{L}$. Entonces decimos que la *componente* $\tau_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$ es *natural en A*.

Si pensamos de un funtor $\mathcal{F}$ una imagen en la categoría de llegada $\mathcal{L}$ de (todos los objetos y morfismos de) la categoría fuente $\mathcal{K}$, entonces una transformación natural τ representa un conjunto de morfismos transformando la imagen $\mathcal{F}$ en otra imagen $\mathcal{G}$, preservando la conmutatividad de todos los diagramas.

Una transformación natural invertible, tal que todas las componentes τ_A son isomorfismos es llamada *equivalencia natural* (o *isomorfismo natural*). En este caso, las inversas $(\tau)^{-1}$ en $\mathcal{L}$ son las componentes de un isomorfismo natural $(\tau)^{-1} : \mathcal{G} \overset{*}{\to} \mathcal{F}$. Equivalencias naturales se encuentran en las *construcciones meta − matemáticas* más importantes en topología algebraica, y como decían S. Eilenberg y S. MacLane, 'categoría' fue definida para poder definir 'funtor', y 'funtor' fue definido para poder definir 'transformación natural'.

Las transformaciones naturales pueden ser *compuestas* en dos formas distintas. Primero, tenemos una composición *ordinaria*: si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son tres funtores de una categoría fuente $\mathcal{A}$ a una categoría de llegada $\mathcal{B}$ y luego $\alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G} \dot{\to} \mathcal{H}$ son dos transformaciones naturales, entonces la fórmula

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A, \quad \textit{para toda } A \in \mathcal{A}, \tag{2.3}$$

define una nueva transformación natural $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{H}$. Esta regla de composición es claramente asociativa y posee una unidad $1_{\mathcal{F}}$ en cada funtor $\mathcal{F}$, cuya $\mathcal{A}$-componente es $1_{\mathcal{F}\mathcal{A}}$.

Segundo, tenemos el *producto Godement* de transformaciones naturales, usualmente denotado por $*$ [5]. Sea $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tres categorías, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ cuatro funtores tales que

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : \ \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$$

$$(\mathcal{H}, \mathcal{K}) : \ \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{C}$$

y $\alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{H} \dot{\to} \mathcal{K}$. Ahora en lugar de (1.3), la composición Godement está dada por $(\beta * \alpha)_A = \beta_{GA} \circ \mathcal{H}(\alpha_A) = \mathcal{K}(\alpha_A) \circ \beta_{\mathcal{F}A}$, *para toda* $A \in \mathcal{A}$ y esta define una nueva transformación natural $\beta * \alpha : \mathcal{H} \circ \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{K} \circ \mathcal{G}$. Finalmente, las dos composiciones de transformaciones naturales anteriores puede combinarse como

$$(\delta * \gamma) \circ (\beta * \alpha) = (\delta \circ \beta) * (\gamma \circ \alpha),$$

donde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son tres categorías, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ son seis funtores, y $\alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{H}$, $\beta : \mathcal{G} \dot{\to} \mathcal{K}$, $\gamma : \mathcal{H} \dot{\to} \mathcal{L}$, $\delta : \mathcal{K} \dot{\to} \mathcal{M}$ son cuatro transformaciones naturales.

Capítulo 3

Definiciones Básicas en Topología Diferencial

3.1. Variedades Diferenciables

Albert Einstein una vez dijo: "la naturaleza es simple sólo cuando es analizada localmente". ¿Por qué? Porque, localmente, cualquier sistema parece lineal, y por lo tanto completamente predecible y controlable [5]. La elaboración geométrica de esta idea fundamental produjo el concepto de variedad, un espacio topológico que localmente parece un espacio euclidiano R^n , pero globalmente puede ser totalmente diferente. Además, para poder hacer cálculo en las variedades, de la misma manera como lo hacemos en espacios ordinarios R^n , las variedades necesitan ser suaves (i.e., diferenciables las veces que sean necesarias, técnicamente denotado por C^k).

Consideremos un ejemplo clásico. Comparemos la superficie de una manzana con el plano euclidiano. Una pequeña vecindad de cada punto en la superficie de la manzana (excluyendo la raíz) se parece a un plano euclidiano (denotado por R^2), con sus geodésicas locales luciendo como líneas rectas. En otras palabras, una superficie suave es, localmente, topológicamente equivalente al plano euclidiano. El mismo concepto de geometría no lineal se mantiene en cualquier dimensión. Si la dimensión es alta, estaríamos lidiando con sistemas complejos. Por tanto, mientras que sistemas lineales continuo-temporales viven en el espacio Euclidiano, sistemas continuo-temporales complejos viven en variedades suaves, usualmente denotados por $\mathcal{M}$.

Finalmente, notemos que hay dos paradigmas dinámicos de variedad suave:
(i) La 4-variedad espacio-tiempo de Einstein, históricamente la primera y
(ii) La n-variedad de configuración, que es el concepto geométrico moderno.
Para tener un poco de intuición geométrica detrás del concepto de variedad, consideremos un conjunto $\mathcal{M}$ que es un candidato de una variedad. Cualquier punto $x \in \mathcal{M}$ tiene su carta (euclidiana), dada por una función biyectiva $\varphi_i : \mathcal{M} \to R^n$, con su imagen euclidiana $V_i = \varphi_i(U_i)$. Más preciso, una carta está definida por

$$\varphi_i : \mathcal{M} \supset U_i \ni x \mapsto \varphi_i(x) \in V_i \subset R^n \tag{3.1}$$

donde $U_i \subset \mathcal{M}$ y $V_i \subset R^n$ son conjuntos abiertos.
Claramente, cualquier punto $x \in \mathcal{M}$ puede tener diferentes cartas.
Consideremos el caso de dos cartas $\varphi_i, \varphi_j : \mathcal{M} \to R^n$, teniendo en sus imágenes dos conjuntos abiertos, $V_{ij} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ y $V_{ji} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$. Luego tenemos las funciones de transición φ_{ij} entre ellas,
$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : V_{ij} \to V_{ji}$ localmente dadas por $\varphi_{ij}(x) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x))$
Si las funciones de transición φ_{ij} existen, entonces decimos que las dos cartas φ_i y φ_j son compatibles. Las funciones de transición representan una (no lineal) transformación de coordenadas general, que es el núcleo del cálculo tensorial.
Un conjunto de cartas compatibles tales que para cada punto en la variedad tienen su imagen en al menos una carta es llamado un atlas [6]. Dos atlas son equivalentes si y sólo si todas sus cartas son compatibles, entonces su unión también es un atlas. Una estructura de variedad es una clase de atlas equivalentes.
Finalmente como las cartas fueron supuestamente biyectivas, ellas también pueden ser un homeomorfismos, en ese caso tendríamos una variedad topológica, o difeomorfismos, en este caso tendríamos una variedad suave.
Un poco más preciso, una variedad topológica (suave respectivamente) es un espacio

separable $\mathcal{M}$ tal que es localmente homeomorfo (difeomorfo respectivamente) al espacio euclidiano R^n, teniendo las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{M}$ es un espacio de Hausdorff: para cada par de puntos $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$, hay dos subconjuntos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subset \mathcal{M}$ tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$.
(2) $\mathcal{M}$ es un espacio segundo contable: Existe una base contable para la topología de $\mathcal{M}$.
(3) $\mathcal{M}$ es localmente euclidiano de dimensión n: Cada par de puntos de $\mathcal{M}$ tienen una vecindad que es homeomorfa (difeomorfa respectivamente) a un subconjunto abierto de R^n.

Esto implica que para cada punto $x \in \mathcal{M}$ existe un homeomorfismo (difeomorfismo respectivamente) $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq R^n$, donde U es una vecindad abierta de x en $\mathcal{M}$ y $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto en R^n. El par (U, φ) es llamada carta coordenada en el punto $x \in \mathcal{M}$, etc.

Dada una carta (U, φ), llamamos al conjunto U un dominio coordinado, o una vecindad coordinada de cada uno de sus puntos. Si además $\varphi(U)$ es una bola abierta en R^n, entonces U es llamada bola coordenada. La función φ es llamada una función (local) coordenada, y las funciones componentes $(x^1, ..., x^n)$ de φ, definida por $\varphi(m) = (x^1(m), ..., x^n(m))$, son llamadas coordenadas locales en U.
Dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ son llamadas compatibles si $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\varphi_2(U_2 \cap U_1)$ son subconjuntos abiertos de R^n . Una familia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cartas compatibles en $\mathcal{M}$ tales que U_α formen una cubierta de $\mathcal{M}$ es llamada un atlas. Las funciones $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ son llamadas funciones de transición, para el atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, donde $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ entonces tenemos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} & U_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{M} \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[dr, "\phi_\beta"] & \\ \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \arrow[rr, "\phi_{\alpha\beta}"'] & & \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \end{tikzcd}$$

Un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ para una variedad $\mathcal{M}$ es llamado C^k -atlas , si todas las funciones de transición $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ son funciones de clase C^k . Dos C^k-atlas son llamados C^k-equivalentes , si su unión es otra vez un C^k-atlas para $\mathcal{M}$. Una clase de equivalencia de C^k-atlas es llamada C^k-estructura en $\mathcal{M}$. En otras palabras, una estructura suave en $\mathcal{M}$ es un atlas suave maximal en $\mathcal{M}$, i.e., un atlas que no está contenido estrictamente en otro atlas suave más grande. Por una C^k-variedad $\mathcal{M}$, queremos decir una variedad topológica junto con una C^k-estructura y una carta en $\mathcal{M}$ será una carta perteneciendo a un atlas de la C^k-estructura [6]. Variedades suaves las denotaremos por C^∞-variedad, y la palabra suave es usada como sinónimo de ser C^∞.
A veces los términos sistema local de coordenadas o parametrización son usados en vez de cartas. Que $\mathcal{M}$ no esté definida con algún atlas particular, pero si con una clase de equivalencia de atlas, es una formulación matemática del principio general de covariancia. Todo sistema coordenado disponible es igualmente bueno. Una carta euclidiana puede ser suficiente para un subconjunto de R^n, pero este sistema coordenado no es preferible entre otros, tales que tal vez necesiten más cartas, pero es más conveniente en otros aspectos.

3.2. Funciones entre Variedades

Una función $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ con $\mathcal{M} \ni m \mapsto \varphi(m) \in \mathcal{N}$, es llamada una función suave, o C^k-función, si para cada $m \in \mathcal{M}$ y cada carta (V, ψ) en $\mathcal{N}$ con $\varphi(m) \in V$ exite una carta (U, ϕ) en $\mathcal{M}$ con $m \in U, \varphi(U) \subseteq V$, y $\Phi = \psi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$ es C^k, esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \supseteq U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & V \subseteq \mathcal{N} \arrow[d, "\psi"] \\ \phi(U) \arrow[r, "\Phi"'] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades suaves y sea $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una función suave. La función φ es llamada cubierta, o equivalentemente, $\mathcal{M}$ es cubierta para $\mathcal{N}$, si φ es sobreyectiva y cada punto $n \in \mathcal{N}$ admite una vecindad abierta V tal que $\varphi^{-1}(V)$ es la unión disjunta

de conjuntos abiertos, cada uno difeomorfos vía φ a V.
Una C^k-función $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es llamada difeomorfismo si φ es una biyección, $\varphi^{-1} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ existe y es C^k. Dos variedades son difeomorfas si existe un difeomorfismo entre ellas. Todas las variedades suaves y todas las funciones suaves entre ellas forman la categoría M.

3.3. Haz co/tangente

En mecánica, a cada nD variedad de configuración $\mathcal{M}$ está asociado su $2nD$ variedad de fase-velocidad, denotado por $T\mathcal{M}$ llamado haz tangente de $\mathcal{M}$. La variedad original $\mathcal{M}$ es llamada variedad base de $T\mathcal{M}$. Hay también una función sobreyectiva $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, llamada proyección. Encima de cada punto $x \in \mathcal{M}$ hay un espacio tangente $T_x\mathcal{M} = \pi^{-1}(x)$ para $\mathcal{M}$ en x, que es llamada fibra. La fibra $T_x\mathcal{M} \subset T\mathcal{M}$ es el subconjunto de $T\mathcal{M}$, tal que el total haz tangente, $T\mathcal{M} = \bigsqcup_{m\in\mathcal{M}} T_x\mathcal{M}$, es la unión disjunta de los espacios tangentes $T_x\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ para todos los puntos $x \in \mathcal{M}$. Desde la perspectiva dinámica, la cantidad más importante en el concepto de haz tagente es la función suave $\upsilon : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ que es una inversa a la proyección π, i.e., $\pi \circ \upsilon = Id_{\mathcal{M}}$ $\pi(\upsilon(x)) = x$. Este es llamado el campo vectorial de velocidad. Su gráfica $(x, \upsilon(x))$ representa la sección cruzada del haz tangente $T\mathcal{M}$. Esto explica el término dinámico de fase-velocidad, dado al haz tangente $T\mathcal{M}$ de la variedad $\mathcal{M}$.

Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado, una C^0-función $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ se dice diferenciable en a si existe una carta (U, ϕ) en $\gamma(a)$ tal que el siguiente límite existe y es finito

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \gamma)(a) \equiv (\phi \circ \gamma)'(a) = \lim_{t\to a} \frac{(\phi \circ \gamma)(t) - (\phi \circ \gamma)(a)}{t - a} \tag{3.2}$$

Generalizando (1.2), tenemos la noción de curva en una variedad. Para una variedad suave $\mathcal{M}$ y un punto $m \in \mathcal{M}$ una curva en m es una C^0-función $\gamma : I \to \mathcal{M}$ de un intervalo $I \subset R$ a $\mathcal{M}$ con $0 \in I$ y $\gamma(0) = m$.
Dos curvas γ_1 y γ_2 que pasan por un punto $m \in U$ son tangentes en m respecto a la

carta (U,ϕ) si $(\phi\circ\gamma_1)'(0)=(\phi\circ\gamma_2)'(0)$. Por tanto, dos curvas son tangentes si tienen vectores tangentes idénticos (misma dirección y velocidad) en una carta local en una variedad.

Para una variedad suave $\mathcal{M}$ y un punto $m\in\mathcal{M}$, el espacio tangente $T_m\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ en m es el conjunto de clases de equivalencia de curvas en m:

$$T_m\mathcal{M}=\{[\gamma]_m:\gamma \quad \textit{es una curva en } m\in\mathcal{M}\} \tag{3.3}$$

Una C^k-función $\varphi:\mathcal{M}\ni m\mapsto\varphi(m)\in\mathcal{N}$ entre dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ induce una función lineal $T_m\varphi:T_m\mathcal{M}\to T_{\varphi(m)}\mathcal{N}$ para cada punto $m\in\mathcal{M}$, llamada función tangente, tal que el siguiente diagrama conmuta [5]

$$\begin{tikzcd} T_m\mathcal{M} \arrow[r, "T_m\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{M}}"'] & T_{\varphi(m)}\mathcal{N} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{N}}"] \\ \mathcal{M}\ni m \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(m)\in\mathcal{N} \end{tikzcd}$$

con la proyección natural $\pi_{\mathcal{M}}:T\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, dada por $\pi_M(T_m\mathcal{M})=m$, que toma valores en un vector tangente υ al punto $m\in\mathcal{M}$ al cual el vector está asociado i.e., $\upsilon\in T_m\mathcal{M}$.

Para una nD-variedad suave $\mathcal{M}$, su nD-haz tangente $T\mathcal{M}$ es la unión disjunta de todos sus espacios tangentes $T_m\mathcal{M}$ en todos los puntos $m\in\mathcal{M}$, i.e., $T\mathcal{M}=\bigsqcup_{m\in\mathcal{M}}T_m\mathcal{M}$.

Para definir una estructura suave en $T\mathcal{M}$, necesitamos especificar cómo construir coordenadas locales en $T\mathcal{M}$. Sean $(x^1(m),...,x^n(m))$ coordenadas locales de un punto $m\in\mathcal{M}$ y sean $(\upsilon^1(m),...,\upsilon^n(m))$ las componentes de un vector tangente en este sistema coordenado. Luego, los $2n$ números $(x^1(m),...,x^n(m),\upsilon^1(m),...,\upsilon^n(m))$ dan un sistema coordenado local en $T\mathcal{M}$.

$T\mathcal{M}=\bigsqcup_{m\in\mathcal{M}}T_m\mathcal{M}$ define una familia de espacios vectoriales parametrizados por $\mathcal{M}$.

La imagen inversa $\pi_{\mathcal{M}}^{-1}(m)$ de un punto $m\in\mathcal{M}$ bajo la proyección natural π_M es

el espacio tangente $T_m\mathcal{M}$. Este espacio es llamado la fibra del haz tangente sobre el punto $m \in \mathcal{M}$.
Una C^k-función $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ induce una función tangente lineal $T_\varphi : T\mathcal{M} \to T\mathcal{N}$ entre sus haces tangentes, i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T\mathcal{M} \arrow[r, "T\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{M}}"'] & T\mathcal{N} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{N}}"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Todos los haces tangentes y sus funciones tangentes forman la categoría $\mathcal{TB}$ que es el marco natural de la dinámica *Lagrangiana* [5].
Ahora podemos formular la versión global de la regla de la cadena. Si $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ son dos funciones suaves, entonces tenemos $T(\psi \circ \varphi) = T_\psi \circ T_\varphi$. En otras palabras, tenemos el funtor $T : \mathcal{M}_n \Rightarrow \mathcal{TB}$ de la categoría $\mathcal{M}_n$ de variedades suaves a la categoría $\mathcal{TB}$ de haces tangentes.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "(\psi\circ\varphi)"] & \\ \mathcal{N} \arrow[rr, "\psi"'] & & \mathcal{P} \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & T\mathcal{M} \arrow[dl, "T_\varphi"'] \arrow[dr, "T_{(\psi\circ\varphi)}"] & \\ T\mathcal{N} \arrow[rr, "T_\psi"'] & & T\mathcal{P} \end{tikzcd}$$

Una noción dual al espacio tangente $T_{m\mathcal{M}}$ a una variedad suave $\mathcal{M}$ en un punto m es su espacio cotangente $T_m^*\mathcal{M}$ en el mismo punto m. Similarmente al haz tangente, para una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión n, su haz cotangente $T^*\mathcal{M}$ es la unión disjunta de todos sus espacios cotangentes $T_m^*\mathcal{M}$ en todos los puntos $m \in \mathcal{M}$, i.e., $T^*\mathcal{M} = \bigsqcup_{m\in\mathcal{M}} T_m^*\mathcal{M}$. Luego, el haz cotangente de una n-variedad $\mathcal{M}$ es el haz vectorial $T^*\mathcal{M} = (T\mathcal{M})^*$, el haz (real) tangente dual de $T\mathcal{M}$.
Si $\mathcal{M}$ es una n-variedad, entonces $T^*\mathcal{M}$ es una $2n$-variedad. Para definir la estructura suave en $T^*\mathcal{M}$, necesitamos especificar cómo construir las coordenadas locales en $T^*\mathcal{M}$. Para hacer esto, sean $(x^1(m), ..., x^n(m))$ las coordenadas locales de un punto $m \in \mathcal{M}$ y sean $(p_1(m), ..., p_n(m))$ las componentes de un covector en este sistema

coordenado. Entonces los $2n$ números $(x^1(m),...,x^n(m),p_1(m),...,p_n(m))$ dan un sistema local de coordenadas en $T^*\mathcal{M}$. Esta es la idea básica que se usa para probar que de hecho $T^*\mathcal{M}$ es una $2n$-variedad.
$T^*\mathcal{M} = \bigsqcup_{m\in\mathcal{M}} T^*_m\mathcal{M}$ define una familia de espacios vectoriales parametrizado por $\mathcal{M}$, con la proyección conatural, $\pi^*_{\mathcal{M}} : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, dada por $\pi^*_{\mathcal{M}}(T^*_m\mathcal{M}) = m$, que toma un covector p en el punto $m \in \mathcal{M}$ al que está asociado i.e., $p \in T^*_m\mathcal{M}$. La imagen inversa $\pi^{-1}_{\mathcal{M}}(m)$ de un punto $m \in \mathcal{M}$ bajo la proyección conatural $\pi^*_{\mathcal{M}}$ es el espacio cotangente $T^*_m\mathcal{M}$. Este espacio es llamado la fibra del haz cotangente sobre el punto $m \in \mathcal{M}$.
En forma similar, una C^k-función $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ induce una función cotangente lineal $T^*_\varphi : T^*\mathcal{M} \to T^*\mathcal{N}$ entre sus haces cotangentes, i.e., el siguiente diagrama conmuta [5]

$$\begin{tikzcd} T^*\mathcal{M} \arrow[r, "T^*\varphi"] \arrow[d, "\pi^*_{\mathcal{M}}"'] & T^*\mathcal{N} \arrow[d, "\pi^*_{\mathcal{N}}"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Todos los haces cotangentes y sus funciones cotangentes forman la categoría $\mathcal{T}^*\mathcal{B}$ que es el marco natural para la dinámica *Hamiltoniana* [5].
Ahora podemos formular la versión dual global de la regla de la cadena. Si $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ son dos funciones suaves, entonces tenemos que $T^*(\psi \circ \varphi) = T^*\psi \circ^* \varphi$. En otras palabras, tenemos un cofuntor $T^* : \mathcal{M}_n \Rightarrow \mathcal{T}^*\mathcal{B}$ de la categoría $\mathcal{M}_n$ de variedades suaves a la categoría $\mathcal{T}^*\mathcal{B}$ de sus haces cotangentes.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "(\psi\circ\varphi)"] & \\ \mathcal{N} \arrow[rr, "\psi"'] & & \mathcal{P} \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & T^*\mathcal{M} & \\ T^*\mathcal{N} \arrow[ur, "T^*_\varphi"] & & T^*\mathcal{P} \arrow[ll, "T^*_\psi"] \arrow[ul, "T^*(\psi\circ\varphi)"'] \end{tikzcd}$$

3.4. Campos Tensoriales en Variedades

Un haz tensorial $\mathcal{T}$ asociado a una n-variedad suave $\mathcal{M}$ está definido como un producto tensorial de los haces tangente y cotangente:

$$\mathcal{T} = \bigotimes^{q} T^*\mathcal{M} \otimes \bigotimes^{p} T\mathcal{M} \tag{3.4}$$

Haces tensoriales son un caso especial de haces fibrados más generales.
Un campo tensorial de tipo (p, q) en una n-variedad $\mathcal{M}$ está definida como una sección suave $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{T}$ del haz tensorial $\mathcal{T}$. Los coeficientes del campo tensorial τ son C^k funciones suaves con p índices arriba y q índices abajo. La posición clásica de índices puede ser explicada en términos modernos como sigue. Si (U, ψ) es una carta en el punto $m \in \mathcal{M}$ con coordenadas locales $(x^1, ..., x^n)$, tenemos el campo de marcos [5]

$$\partial_{x^{i_1}} \otimes \partial_{x^{i_2}} \otimes ... \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes ... \otimes dx^{j_q} \tag{3.5}$$

para $i = \{1, ...n\}^p$ y $j = \{1, ...n\}^q$, sobre U de este haz tensorial, y para cualquier campo tensorial de tipo (p, q) τ tenemos

$$\tau \mid U = \tau^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} \partial_{x^{i_1}} \otimes \partial_{x^{i_2}} \otimes ... \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes ... \otimes dx^{j_q} \tag{3.6}$$

3.5. Pullback y Pushforward

En esta sección definiremos dos operaciones importantes, el pullback y pushforward.
Sea $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una C^k-función entre variedades y $f \in C^k(\mathcal{N}, R)$. Definimos el pull-back de f bajo φ por

$$\varphi^* f = f \circ \varphi \in C^k(\mathcal{M}, R) \tag{3.7}$$

Recordar que un campo vectorial X en una variedad $\mathcal{M}$ es una C^k-función $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ tal que $X(m) \in T_m\mathcal{M}$ para todos los puntos $m \in \mathcal{M}$ y $\pi_{\mathcal{M}} \circ X = Id_{\mathcal{M}}$, i.e.,

un C^K-campo vectorial en $\mathcal{M}$ es una C^k-sección del haz tangente $T\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$. Al conjunto de campos vectoriales lo denotamos por $\mathcal{X}^k(\mathcal{M})$.
Si f es un C^k-difeomorfismo y $X \in \mathcal{X}^k(\mathcal{M})$ un campo vectorial, el push-forward de X por φ está definido por

$$\varphi_* X = T_\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{X}^k(\mathcal{N}). \tag{3.8}$$

3.6. Haz Fibrado

Recordar que los haces tangentes y cotangentes $T\mathcal{M}$ y $T^*\mathcal{M}$, son casos especiales de objetos geométricos más generales llamados haces fibrados, donde la palabra fibra V de una función $\pi : Y \to X$ denota la preimagen $\pi^{-1}(x)$ de un elemento $x \in X$. Es un espacio que localmente parece un producto de dos espacios (de modo similar al que una variedad se parece a un espacio euclidiano), pero que puede poseer una estructura global diferente. Para tener una intuición visual detrás de este concepto geométrico fundamental, podemos decir que un haz fibrado Y es una generalización homeomorfa de un espacio producto $X \times V$, donde X y V son llamados la base y la fibra, respectivamente. $\pi : Y \to X$ es llamada proyección, $Y_x = \pi^{-1}(x)$ denota una fibra sobre un punto x de la base X, mientras que la función $f = \pi^{-1} : X \to Y$ define la sección cruzada, produciendo la gráfica $(x, f(x))$ en el haz Y (e.g., en el caso del haz tangente, $f = \dot{x}$ representa un campo vectorial de velocidad).

La razón principal del por qué necesitamos estudiar haces fibrados es porque todos los objetos dinámicos (incluidos vectores, tensores, formas diferenciales y potenciales de Gauge) son sus secciones cruzadas, representando generalizaciones de gráficas de funciones continuas [5].

Sea $\mathcal{M}$ una n-variedad con un atlas $\Psi_{\mathcal{M}}$ con las coordenadas locales $x^\alpha \in \mathcal{M}$,

$(\alpha = 1, ..., dim\mathcal{M})$, dado por

$$\Psi_{\mathcal{M}} = \left\{U_{\xi,\phi_\xi}\right\}, \ \ \phi_\xi(x) = x^\alpha e_\alpha \ \ (para\ toda\ x_\xi \subset \mathcal{M}), \tag{3.9}$$

donde $\{e_\alpha\}$ es una base fija de R^m. Sus haces tangente y cotangente $T\mathcal{M}$ y $T^*\mathcal{M}$ respectivamente, admiten atlas de las coordenadas inducidas $(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ y $(x^\alpha, \dot{x}_\alpha)$, relativas a las bases de fibras $\{\partial_\alpha\}$ y $\{dx^\alpha\}$, respectivamente. Para todos los elementos (i.e., puntos) $p \in T\mathcal{M}$ y $p^* \in T^*\mathcal{M}$, tenemos :

$$p = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha, \ \ p^* = \dot{x}_\alpha dx^\alpha, \ \ \partial_\alpha \wr dx^\alpha = \delta^\alpha_\alpha, \ \ (\alpha = 1, ..., dim\mathcal{M}) \tag{3.10}$$

Además, usaremos la siguiente notación:

$$\omega = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n, \ \ \omega_\alpha = \partial_\alpha \wr \omega, \ \ \omega_{\mu\alpha} = \partial_\mu \wr \partial_\alpha \wr \omega, \tag{3.11}$$

Si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ es una función suave, definimos la función tangente inducida Tf sobre f, dada por

$$Tf : T\mathcal{M} \to T\mathcal{M}', \ \ \dot{x}'^\alpha \circ Tf = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \tag{3.12}$$

Dada una variedad producto $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, π_1 y π_2 denotan las proyecciones naturales,

$$\pi_1 : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M}, \ \ \pi_2 : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}. \tag{3.13}$$

Ahora, como generalización homeomorfa de un espacio producto, un haz fibrado puede ser visto como o una construcción topológica o como construcción geométrica. Como construcción topológica, un haz fibrado es un caso particular de algo más general llamado fibraciones. Para dar una idea básica de esta construcción, sea $I = [0, 1]$. Una función $\pi : Y \to X$ se dice que tiene la propiedad de levantamiento de homotopía (PLH) respecto a un espacio topológico Z si para cada función $f : Z \to Y$ y homotopía $H : Z \times I \to X$ de $\pi \circ f$ existe una homotopia $V : Z \times I \to Y$ con $f = V_0$ y $\pi \circ V = H$. Vse dice que es un levantamiento de H. π es llamada fibración si tiene la (PLH) para todos los espacios Z y fibración débil si tiene la (PLH) para todos los discos D^n,

($n \geq 0$). Si $x \in X$ es el punto base, entonces $V = \pi^{-1}(x)$ es llamada la fibra de la fibración π. La proyección al primer factor, $\pi_1 : X \times V \to X$, es claramente una fibración y es llamada la fibración trivial sobre X con la fibra V.

Sin embargo, en aras de aplicar dinámica diferencial e integral en haces fibrados, usaremos la definición de coordenadas de haces, que define un haz fibrado Y como una conjunto de seis miembros $(Y, X, \pi, V, G, \Psi_Y)$, con:

(1) un espacio Y llamado espacio total, espacio haz o simplemente haz,

(2) un espacio X llamado espacio base,

(3) una función sobreyectiva $\pi : Y \to X$ llamada proyección,

(4) un espacio $V \subset Y$ llamado fibra

(5) un grupo topológico de transformación (o Lie) G de V llamado grupo del haz y

(6) un atlas de haz Ψ_Y

Algunos ejemplos clásicos de haces fibrados incluyen cualquier *producto cartesiano* $X \times V \to V$ (que es un haz sobre X con fibra V), la *banda de Möbius* (que es un haz fibrado no trivial sobre el círculo unitario S^1 con fibra dada por el intervalo $I = [0, 1]$; el haz trivial correspondiente es el cilindro), la *botella de Klein* (que puede ser visto un haz circular "torcido"sobre otro círculo; por tanto, el correspondiente haz trivial es el toro, $S^1 \times S^1$), una 3-*esfera* S^3 (que es un haz sobre S^2 con fibra S^1; en general, un haz esférico es un haz fibrado cuya fibra es una n-esfera), mientras que un espacio cubriente es un haz fibrado cuya fibra es un espacio discreto [5].

Propiedades principales de gráficas de funciones $f : X \to Y$ pasan a haces fibrados. Una gráfica de dicha función, $(x, f(x))$, se encuentra en el espacio producto $X \times V$, o en su generalización homeomorfa de haz. Una gráfica es siempre *uno a uno* y se proyecta sobreyectivamente en la base X.

Un caso especial de haz fibrado es el haz vectorial, en el que la fibra es un espacio vectorial. Casos especiales de haces fibrados que se usan en la dinámica de sistemas complejos son: haces vectoriales, afines, y principales.

Un haz fibrado también viene con una G-acción de grupo en sus fibras V, así que también puede ser llamado un G-haz. Esta acción de grupo representa las formas diferentes en que las fibras V pueden verse equivalente (e.g., el grupo G puede ser el grupo de homeomorfismos (grupo topológico) o difeomorfismos (grupo de Lie) de las fibras V; o, el grupo G en un haz vectorial es el grupo de transformaciones invertibles lineales, que refleja las descripciones equivalentes de un espacio vectorial usando diferentes espacios vectoriales de base). Un haz principal es un G-haz donde la fibra puede ser identificada con el grupo G en sí mismo y donde hay una acción derecha de G en el haz que preserva la fibra.
Haces fibrados no siempre se usan para generalizar funciones. A veces hay descripciones convenientes de variedades interesantes. Un ejemplo común es un haz de toro en el círculo.
Más especificamente, un haz fibrado, o un haz fibrado Y sobre una nD-base X está definido como una función sobreyectiva

$$\pi : Y \to X \tag{3.14}$$

donde Y admite un atlas Ψ_Y (un atlas de haz) de coordenadas de fibra

$$(x^\alpha, y^i), \quad x^\alpha \to x'^\alpha(x^\mu), \;\; y^i \to y'^i(x^\mu, y^j), \tag{3.15}$$

compatibles con la fibración (1.14), i.e., tal que x^α son coordenadas en la base X,

$$\pi : Y \ni (x^\alpha, y^i) \mapsto x^\alpha \in X \tag{3.16}$$

Esta condición es equivalente a que π sea una submersión, que significa que la función tangente $T_\pi : TY \to TX$ sea sobreyectiva. Esto también implica que π es una función abierta.
Un haz fibrado $Y \to X$ se dice *trivial* si es equivalente al producto cartesiano de variedades, $Y \cong X \times V$, i.e., definido como $\pi_1 : X \times V \to X$. Un haz fibrado sobre una base contraíble es siempre trivial.

Un haz fibrado $Y \to X$ se dice localmente trivial si existe un atlas fibra-coordenado Ψ_Y sobre una cubierta abierta $\{\pi^{-1}(U_\xi)\} \in Y$ del haz Y donde $\{U_\xi\} \in X$ es un cubierta abierta de la base X. En otras palabras, todos los puntos de la misma fibra $Y_x = \pi^{-1}(x)$ de un haz Y pueden ser cubiertos por la misma carta fibra-coordenada $\psi_\xi \in \Psi_Y$, así tenemos la variedad-fibra estándar V para todas las divisiones de haz

$$\psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \to U_\xi \times V \tag{3.17}$$

Para el propósito de hacer dinámica, los haces fibrados más importantes serán los que sean a su vez, variedades suaves. Un haz fibrado $Y \to X$ se dice suave (C^∞) si existe un variedad-fibra típica V y una cubierta abierta $\{U_\xi\}$ de X tal que Y es localmente difeomorfo a las divisiones

$$\psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \to U_\xi \times V, \tag{3.18}$$

pegadas juntas por las funciones suaves

$$\rho_{\xi\zeta} = \psi_\xi \circ \psi_\zeta : U_\xi \cap U_\zeta \times V \to U_\xi \cap U_\zeta \times V \tag{3.19}$$

en traslapes $U_\xi \cap U_\zeta$. Se sigue que fibras $Y_x = \pi^{-1}(x)$, (para todo $x \in X$), de un haz fibrado son sus subvariedades cerradas encajadas. Funciones de transición $\rho_{\xi\zeta}$ llenan la condición de cociclo

$$\rho_{\xi\zeta} \circ \rho_{\zeta\iota} = \rho_{\xi\iota} \tag{3.20}$$

en todos los traslapes $U_\xi \cap U_\zeta \cap U_\iota$. Cartas de trivialización (U_ξ, ψ_ξ) junto con funciones de transición $\rho_{\xi\zeta}$ constituyen un atlas de haz

$$\Psi_Y = \{(U_\xi, \psi_\xi), \rho_{\xi\zeta}\} \tag{3.21}$$

de un haz fibrado $Y \to X$. Dos atlas de haz se dicen *equivalentes* si su unión es también un atlas de haz, i.e., existe una única función de transición entre cartas de trivialización de diferentes atlas. Un haz fibrado $Y \to X$ está caracterizado por un

atlas de haz, y todos sus atlas son equivalentes. Todo haz fibrado suave $Y \to X$ admite un atlas de haz Ψ_Y sobre una cubierta finita $\{U_\xi\}$ de X.
Si $Y \to X$ es un haz fibrado, las coordenadas de fibra $(x^\alpha, y^i) \in Y$ se asumen que sean coordenadas de haz asociadas con el atlas de haz Ψ_Y, que es:

$$y^i(y) = (v^i \circ \pi_2 \circ \psi_\xi)(y), \quad (\pi(y) \in U_\xi \subset X,) \tag{3.22}$$

donde $v^i \in V \subset Y$ son coordenadas de la fibra estándar V de Y.
Funciones de haces fibrados (o funciones de haz), por definición, preservan su fibración, i.e., mandan fibras a fibras. Una función de un haz fibrado $\pi : Y \to X$ a otro haz fibrado $\pi' : Y' \to X'$ está definida como un par (Φ, f) de funciones de variedad tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

Un difeomorfismo de haz es llamado un automorfismo si es un isomorfismo sobre el mismo haz. En teoría de campos, cualquier automorfismo de un haz fibrado es tratado como una trasnformación de *gauge* [5].
Dado un haz $Y \to X$, toda función $f : X' \to X$ induce un haz $Y' = f^*Y$ que es llamado el pullback del haz Y por f tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"'] & Y' \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\pi^*"] \\ X & X' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

En particular, el producto $Y \times Y'$ sobre X de haces $\pi : Y \to X$ y $\pi' : Y' \to X$ es el pullback

$$Y \times Y' = \pi^* Y' = \pi'^* Y \tag{3.23}$$

Campos clásicos son descritos como secciones de haces fibrados. Una sección (global) de un haz fibrado $Y \to X$ está definido como una π inyección inversa de variedad

$s : X \to Y$, $s(x) \mapsto Y_x$, tal que $\pi \circ s = Id_X$. Esto es, una sección s manda cualquier punto $x \in X$ a la fibra $Y_x \subset Y$ sobre este punto. Una sección s es un encaje, i.e., $s(X) \subset Y$ es una subvariedad y es un subespacio topológico de Y es también una función cerrada, que manda subconjuntos cerrados de X en subconjuntos cerrados de Y. Similarmente se define una sección de un haz fibrado $Y \to X$ sobre una subvariedad de X. Dado un atlas de haz Ψ_Y y asociando unas coordenadas de haz (x^α, y^i), una sección s de un haz fibrado $Y \to X$ es representado por una colección de funciones locales $\{s^i = y^i \circ \psi_\xi \circ s\}$ en los conjuntos de trivialización $U_\xi \subset X$.
Un haz fibrado $Y \to X$ cuya fibra sea difeomorfa a un espacio Euclidiano R^m tiene una sección global. De forma más general, su sección sobre una subvariedad cerrada encajada (e.g. un punto) de X es extendida a una sección global.
En contraste, por una sección local nos referimos usualmente a una sección sobre un subconjunto abierto de la base X. Un haz fibrado admite una sección local alrededor de cada cada punto de su base, pero no necesita tener una sección global.

3.7. Haz Principal y Asociado

Recordar que un haz principal es un caso especial de un haz fibrado donde la fibra es un grupo G. Más específicamente, G es usualmente un grupo de Lie [Apen. B]. Un *haz principal* es un haz Y junto con una función sobreyectiva $\pi : Y \to X$ a una variedad base X. Cualquier fibra $\pi^{-1}(x)$ es un espacio isomorfo a G. Más aun, G actúa libremente y transitivamente sin fijar punto en las fibras, y esto hace a la fibra un espacio homogéneo. Se sigue que las órbitas de la G-acción son precisamente las fibras de $\pi : Y \to X$ y el espacio de órbitas Y/G es homeomorfo a la base X. Por ejemplo, en el caso de un haz circular ($G = S^1 \, \{e^{it}\}$), las fibras son círculos, que pueden ser rotados aunque ningún punto en particular corresponde a la identidad. Cerca de cada punto, las fibras pueden dar la estructura de grupo G en las fibras sobre una vecindad escogiendo un elemento en cada fibra como elemento identidad. Sin embargo, las fibras no pueden dar una estructura de grupo globalmente, excepto en el caso de un haz trivial.

Un haz principal importante es el *haz de marcos* de una variedad de Riemann. Este haz refleja las diferentes formas para dar una base ortonormal para vectores tangentes. En general, cualquier haz fibrado corresponde a un haz principal donde el grupo (del haz principal) es el grupo de isomorfismos de la fibra (del haz fibrado). Dado un haz principal $\pi : Y \to X$ y una acción de G en un espacio V, que podría ser una representación de grupo, está puede ser revertida para dar un haz asociado.

Una trivialización de un haz principal, un conjunto U en X tal que el haz $\pi^{-1}(U)$ sobre U, se expresa como $U \times G$, tiene la propiedad que el grupo G actúa a la izquierda y funciones de transición toman valores en G, actuando en las fibras por multiplicación derecha (así la acción de G en una fibra V es independiente de carta coordenada).

Dado un G-haz principal $\pi_P : P \to Q$, sea V una variedad provista de un acción efectiva izquierda $G \times V \to V, \ \ (g, v) \mapsto gv$ de un grupo de Lie G. Consideremos el cociente:

$$Y = (P \times V)/G \tag{3.24}$$

del producto $P \times V$ por la identificación de elementos (p, v) y $(pg, g^{-1}v)$ para todo $g \in G$. Usaremos la notación $(pG, G^{-1}v)$ para sus puntos. Sea $[p]$ la restricción de la función canónica sobreyectiva

$$P \times V \to (P \times V)/G \tag{3.25}$$

al subconjunto $\{p\} \times V$ así se cumple $[p]\,(v) = [pg]\,(g^{-1}v)$. Luego la función $Y \to Q$, $[p]\,(V) \mapsto \pi_P(p)$, hace el cociente Y un haz fibrado sobre Q.

notemos que, para cualquier G-haz, existe un G haz asociado principal. La peculiaridad del G-haz Y es que aparece canónicamente asociado a un haz principal P. De hecho, cada atlas de haz $\psi_P = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ de P determina un único atlas de haz asociado

$$\Psi = (U_\alpha, \psi_\alpha(q) = \left[z_{\alpha(q)}\right]^{-1}) \tag{3.26}$$

del cociente Y, y cada automorfismo de P también induce el correspondiente automorfimo de Y.

Capítulo 4

Una Introducción a la Topología Algebraica

4.1. Homotopía

Así como los homeomorfisos dividen a los espacios topológicos en clases, el concepto de homotopía hace lo mismo pero en las funciones entre dichos espacios.
Sea I un intervalo compacto unitario $I = [0, 1]$. Una homotopía de X a Y es una función continua $F : X \times I \to Y$. Para cada $t \in I$ tenemos $F_t : X \to Y$ definido por $F_t(x) = F(x, t)$ para todo $x \in X$. Las funciones F_t son llamadas etapas de la homotopía. Si $f, g : X \to Y$ son dos funciones continuas, decimos que f es homotópica a g, y escribimos $f \simeq g$ si existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ tal que $F_0 = f$ y $F_1 = g$. En otras palabras f puede ser deformada en g a través de las etapas F_t. Si $A \subset X$ es un subespacio, entonces F es una homotopía relativa a A si $F(a, t) = F(a, 0)$, para toda $a \in A$, $t \in I$.
La relación de homotopía $\simeq$ es una relación de equivalencia.
De este modo, el conjunto de todas las C^0-funciones $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X y Y, llamado el espacio de funciones y denotado por X^Y, está partido en clases de equivalencia bajo la relación $\simeq$. Las clases de equivalencia de f es denotado por $[f]$, y el conjunto de todas las clases de homotopía es denotado por $[X; Y]$.
Si α es una relación de equivalencia en un espacio topológico X y $F : X \times I \to Y$

es una homotopía tal que cada factor de etapa F_t a través de X/α, i.e., $x\alpha x'$ implica $F_t(x) = F_t(x')$, luego F induce una homotopía $F' : (X/\alpha) \times I \to Y$ tal que $F' \circ (p_\alpha \times 1) = F$.
La teoría de homotopía tiene un rango de aplicacíon por su cuenta fuera de la topología y geometría, por ejemplo, en probar el teorema de Cauchy en teoría de variable compleja, o en resolver ecuaciones no lineales de redes neuronales artificiales.

Un conjunto *basal* (S, s_0) es un conjunto S junto con un punto distinguido $S_0 \in S$. Similarmente, un espacio topológico basal (X, x_0) es un espacio X junto un punto distinguido $x_0 \in X$. Cuando estamos interesados con espacios basales (X, x_0), (Y, y_0), etc., siempre requerimos que todas las funciones $f : X \to Y$ preserven esos puntos base, i.e., $f(x_0) = y_0$, y todas las homotopías $F : X \times I \to Y$ sean relativas a los puntos base, i.e., $F(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I$. Denotamos las clases de homotopía de funciones que preservan puntos base por $[X, x_0; Y, y_0]$ (donde las homotopías son relativas a x_0). $[X, x_0; Y, y_0]$ es un conjunto basal con punto base f_0, la función constante: $f_0(x) = y_0$, para toda $x \in X$.
Un camino $\gamma(t)$ de x_0 a x_1 en un espacio topológico X es una función continua $\gamma : I \to X$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Por tanto X^I es el espacio de todos los caminos en X con la topología abierta-compacta. Introducimos una relación $\sim$ en X diciendo que $x_0 \sim x_1$ si y sólo si existe un camino $\gamma : I \to X$ de x_0 a x_1. $\sim$ es claramente una relación de equivalencia, y el conjunto de clases de equivalencia es denotado por $\pi_0(X)$.
Los elementos de $\pi_0(X)$ son llamados componentes-camino, o $0-$*componentes* de X. Si $\pi_0(X)$ contiene sólo un elemento, entonces a X se le llama conexo por caminos, o 0-conexo. Un camino cerrado, o lazo en X en el punto x_0 es un camino $\gamma(t)$ para el cual $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. El lazo inverso $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, para $0 \leq t \leq 1$. La homotopía de lazos es el caso particular del definido anteriormente para funciones continuas.
Si (X, x_0) es un espacio basal, entonces podemos considerar $\pi_0(X)$ como un conjunto basal con la 0-componente de x_0 como punto base. Si $f : X \to Y$ es una función entonces f manda 0-componentes de X a 0-componentes de Y y por tan-

to define una función $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Similarmente, una función que preserva puntos base $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce una función de conjuntos basales $\pi_0(f) : \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0)$. De esta manera definido π_0 representa un funtor de la categoría de espacios (con punto base) topológicos a la categoría de conjuntos (con punto base).

4.2. Categorías Abelianas e Introducción a los Objetos (Co)Homológicos

Una categoría *abeliana* es cierto tipo de categoría en la cual morfismos y objetos pueden ser sumados y en las cuales, núcleos y co-núcleos existen y tienen las propiedades usuales. El ejemplo prototipo motivante de categoría abeliana es la categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}$. Categorías abelianas son el marco para el álgebra homológica [5], [Apen. C].

Dado un homomorfismo $f : A \to B$ entre dos objetos $A \equiv Dom\, f$ y $B \equiv Cod\, f$ en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, entonces su *kernel*, *imagen*, *cokernel* y *coimagen* en $\mathcal{A}$ están definidas respectivamente como:

$$ker\, f = f^{-1}(e_B), \;\; Coker\, f = Cod\, f/Im\, f, Im\, f = f(A), \;\; Coim\, f = Dom\, f/Ker\, f,$$

donde e_B es una unidad de B.

En una categoría abeliana $\mathcal{A}$ una composición de morfismos

$$\bullet \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \bullet$$

es exacta en B si y sólo si $Im\, f \equiv Ker\, f$ o, equivalentemente, si $Coker\, f \equiv Coim\, g$.

Para cada morfismo f en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ las identidades triangulares se leen:

$$Ker(Coker(Ker\, f)) = Ker\, f, \;\; Coker(Ker(Coker\, f)) = Coker\, f.$$

El diagrama (con el objeto nulo 0)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

es una *sucesión corta exacta* cuando es exacta en A, en B y en C.
Como $0 \to A$ es el morfismo cero, exactitud en A significa sólo que f es $monomorfismo$ (i.e., *uno a uno*, o función inyectiva); dualmente, exactitud en C significa que g es $epimorfismo$ (i.e., supra, o función sobreyectiva). Por lo tanto, es equivalente a

$$f = Ker\, g, \quad g = Coker\, f.$$

Similarmente, la afirmación $h = Coker\, f$ se convierte en la afirmación de que la sucesión siguiente

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es exacta en B y en C. Clásicamente, tal sucesión fue llamada sucesión derecha corta exacta. Similarmente, $k = Ker\ f$ se expresa por una sucesión izquierda corta exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son categorías abelianas, un $funtor\ aditivo$ $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un funtor de a $\mathcal{A}'$ con

$$\mathcal{F}(f + f') = \mathcal{F}f + \mathcal{F}f$$

para cualquier par de flechas paralelas $f, f' : b \to c$ en $\mathcal{F}$. Se sigue que $\mathcal{F}0 = 0$.
En particular, un funtor es *exacto* si preserva núcleos y co-núcleos, que significa que

$$Ker(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(ker\, f) \ \ y \ \ Coker(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(Coker\, f);$$

entonces además preserva imágenes, coimágenes y lleva sucesiones exactas a sucesiones exactas.
Un funtor $\mathcal{F}$ es izquierdo exacto si y sólo si es aditivo y $Ker(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(Ker\ f)$ para

todo morfismo f: esta condición es equivalente al requerimiento de que $\mathcal{F}$ preserve sucesiones izquierdas cortas exactas. Similarmente un funtor $\mathcal{F}$ es derecho exacto si y sólo si es aditivo y $Coker(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(Coker\, f)$ para todo morfismo f: esta condición es equivalente al requerimiento de que $\mathcal{F}$ preserve sucesiones derechas cortas exactas. En una categoría abeliana $\mathcal{A}$, una *cadena compleja* es una sucesión

$$... \longrightarrow c_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} c_n \xrightarrow{\partial_n} c_{n-1} \longrightarrow ...$$

de morfismos, con $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para toda n. Dicha sucesión no necesita ser exacta en c_n; las desviación de la exactitud está medida por el enésimo *objeto homológico*

$$H_n c : Ker(\partial_n : c_n \to c_{n-1})/Im(\partial_{n+1} : c_{n+1} \to c_n).$$

Similarmente, una *cocadena compleja* es una sucesión

$$... \longrightarrow w_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} w_n \xrightarrow{d_n} w_{n-1} \longrightarrow ...$$

de morfismos, con $d_n d_{n+1} = 0$ para toda n. Dicha sucesión no necesita ser exacta en w_n; las desviación de la exactitud está medida por el n-ésimo *objeto cohomológico*

$$H^n w : Ker(d_{n+1} : w_n \to w_{n+1})/Im(d_n : w_{n-1} \to w_n).$$

Un *ciclo* es una cadena C tal que $\partial C = 0$. Una *frontera* es una cadena C tal que $C = \partial B$, para cualquier otra cadena B.
Un *cociclo* (una *forma cerrada*) es una cocadena w tal que $dw = 0$. Una *cofrontera* (una *forma exacta*) es una cocadena w tal que $w = d\theta$, para cualquier otra cocadena θ.

4.3. Homología y Cohomología

Hay varios tipos de grupos de homología (simpliciales, singulares, celulares, etc.), pero todos ellos surgen de la misma manera, de una (posiblemente infinita) sucesión llamada *cadena compleja*

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \longleftarrow \ldots \xleftarrow{d_{p-1}} C_{p-1} \xleftarrow{d_p} C_p \xleftarrow{d_{p+1}} C_{p+1} \longleftarrow \ldots,$$

en la cual los C_p son *espacios vectoriales*, o más en general *grupos abelianos* (típicamente libres-generados), y las funciones $d_p : C_p \to C_{p-1}$ son funciones lineales (homomorfismos de grupos abelianos) que satisfacen la condición:

$$d_p \circ d_{p+1} = 0 \ \textit{para toda } p \geq 0. \tag{4.2}$$

Los elementos de C_p son llamados p-cadenas y las funciones d_p son llamadas operadores frontera. La intuición detrás de la condición (3.2) es que los elementos de la forma $d_p(c) \in C_{p-1}$ con $c \in C_p$ son fronteras, y una frontera no tiene frontera.
Como $d_p \circ d_{p+1} = 0$, tenemos $B_p(C) = Im\, d_{p+1} \subseteq Ker\, d_p = Z_p(C)$, entonces el cociente $Z_p(C)/B_p(C) = Ker\, d_p/Im\, d_{p+1}$ tiene sentido. El módulo cociente

$$H_p(C) = Z_p(C)/B_p(C) = Ker\, d_p/Im\, d_{p+1}$$

es el p-ésimo módulo de homología de la cadena compleja C. Elementos de Z_p son llamados p-ciclos y elementos de B_p son llamadas p-fronteras.
Al igual que en el capítulo anterior, podemos preguntarnos qué pasa si revertimos el sentido de las flechas de una cadena compleja. De manera abstracta, así es como se obtiene la cohomología.
Una cocadena compleja es una sucesión

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \longrightarrow C^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} C^p \xrightarrow{d^p} C^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} C^{p+2} \longrightarrow \ldots$$

Los elementos de C^p son llamados cocadenas y los morfismos d^p son llamadas funciones cofrontera. Esta vez, no es claro como funciones cofrontera surgen naturalmente. Como $d^{p+1} \circ d^p = 0$, tenemos $B^p = Im\, d^p \subseteq Ker\, d^{p+1} = Z^{p+1}$, entonces el cociente $Z^p/B^p = Ker\, d^{p+1}/Im\, d^p$ tiene sentido y el módulo cociente

$$H^p(C) = Z^p/B^p = Ker\, d^{p+1}/Im\, d^p$$

es el p-ésimo módulo de cohomología de la cocadena compleja C. Elementos de Z^p son llamados p-cociclos y elementos de B^p son llamados p-cofronteras.
A primera vista cohomología parece muy abstracta, así que veremos un ejemplo. Una forma de obtener una cocadena compleja es aplicar el operador (funtor) $Hom_Z(,G)$ a una cadena compleja C, donode G es cualquier grupo abeliano. Dado un grupo abeliano fijo A, para cualquier grupo abeliano B denotamos por $Hom_Z(B,A)$ el grupo abeliano de todos los homomorfismos de B a A. Dados cualesquiera dos grupos abelianos B y C, para cualquier homomorfismo $f : B \to C$, el homomorfismo $Hom_Z(f,A) : Hom_Z(C,A) \to Hom_Z(B,A)$ está definido por

$$Hom_Z(f,A)(\varphi) = \varphi \circ f \;\; para\ toda\ \varphi \in Hom_Z(C,A)$$

La función $Hom_Z(f,A)$ es denotada también por $Hom_Z(f,Id_A)$ o incluso $Hom_Z(f,Id)$. Observemos que el efecto de $Hom_Z(f,Id)$ en φ es precomponer φ con f.
Decimos que $Hom_Z(,Id)$ es un *funtor contravariante* (de la categoría de grupos abelianos en sí mismo). Luego dada una cadena compleja

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \longleftarrow ... \xleftarrow{d_{p-1}} C_{p-1} \xleftarrow{d_p} C_p \xleftarrow{d_{p+1}} C_{p+1} \longleftarrow ...,$$

podemos formar la cocadena compleja

$$0 \xrightarrow{Hom_Z(d_0,Id)} Hom_Z(C_0,G) \longrightarrow ... \longrightarrow Hom_Z(C_p,G) \xrightarrow{Hom_Z(d_{p+1},Id)} Hom_Z(C_{p+1},G) \longrightarrow ...$$

Obtenida aplicando $Hom_Z(,G)$ y denotada por $Hom_Z(C,G)$. La función cofrontera d^p está dada por

$$d^p = Hom_Z(d_{p+1}, Id)$$

que significa que para cualquier $f \in Hom_Z(C_p, G)$, tenemos

$$d^p(f) = f \circ d_{p+1}$$

Por tanto, para cualquier $(p+1)$-cadena $c \in C_{p+1}$ tenemos

$$(d^p(f))(c) = f(d_{p+1}(c)).$$

Obtenemos así los grupos de cohomología $H^p(Hom_Z(C, G))$ asociado con la cocadena compleja $Hom_Z(C, G)$. Los grupos de cohomología $H^p(Hom_Z(C, G))$ también se denotan por $H^p(C; G)$.

Hay al menos otras cuatro formas de definir grupos de cohomología de un espacio X formado directamente por una cocadena compleja sin usar una cadena compleja y *dualizandola* aplicando $Hom_Z(, G)$:

1. Si X es una variedad suave, entonces tenemos el *complejo de De Rham*, que usa los módulos de p-formas suaves $\mathcal{A}^p(X)$ y la derivada exterior $d^p : \mathcal{A}^p(X) \to \mathcal{A}^{p+1}(X)$. Los correspondientes grupos de cohomología son los grupos de cohomología de De Rham $H^p_{dR}(X)$. Estos son de hecho espacios vectoriales.

2. Si X es cualquier espacio y $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ cualquier cubierta abierta de X, podemos definir los grupos de cohomología de *Čech* $\check{H}^p(X, \mathcal{U})$ de una manera puramente combinatoria. Luego podemos definir la noción de refinamiento de una cubierta y definir los grupos de cohomología $\check{H}^p(X, G)$ con valores en un grupo Abelaino G usando un proceso de límite conocido como límite directo.

3. Si X es cualquier espacio, tenemos la cocadena compleja de Alexander-Spanier que nos lleva a los grupos de cohomología de Alexander-Spanier $A^p_{A-S}(X; G)$.

4. Cohomología de gavillas, basadas en funtores derivados y resoluciones inyectivas. Esta es la forma más general de cohomología de un espacio X donde los grupos

de cohomología $H^p(X, \mathcal{F})$ con valores en una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio X son definidos. Intuitivamente, esto quiere decir que el módulo $\mathcal{F}(U)$ de coeficientes en los cuales estos grupos toman valores podría variar con el dominio abierto $U \subseteq X$ [5].

4.4. Clases Características

Una clase característica es una forma de asociar a cada G-haz principal $\left\{P : E \xrightarrow{\pi} X\right\}$ en b_G (*conjunto de clases de isomorfismo* de G-haces principales sobre X) un elemento $c(P)$ de $H^*(X)$ (grupo de cohomología de X) [7], [11] tal que si tenemos un homeomorfismo entre dos espacios topológicos X e Y $f : X \to Y$, entonces

$$c(f^*P) = f^*c(P).$$

Vamos a anlizar la definición anterior. Primero, b_G es un funtor que va de la categoría de espacios topológicos $\mathcal{T}$ a la categoría de conjuntos $\mathcal{S}$

$$b_G : \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S}.$$

Además, $H^*(X)$ es el grupo de cohomología asociado a X según una teoría de cohomología que como vimos anteriormente, puede ser distinta en construcción, es por eso que la denotamos simplemente por H^* y este es también un funtor que va de la categoría de espacios topológicos $\mathcal{T}$ a la categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}$

$$H^* : \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{A}$$

. Por tanto, si tenemos que los funtores b_G y H^* son de la misma varianza,

$$(b_G, H^*) : \ \mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{A}$$

c es realmente una transformación natural entre dichos funtores, i.e., $c : b_G \dot{\to} H^*$[7].

Cabe mencionar que todo lo anterior tiene sentido si tenemos una *relación* entre dos espacios topológicos X e Y, i.e., el homeomorfismo f conecta la información dada en b_G y en H^*. Recordemos que la desviación de la exactitud de la cocadena compleja asociada a X es medida por el *objeto cohomológico* H^* por lo que la conexión entre dichos funtores expresada en c, conecta la exactitud de la cocadena compleja con lo que se aleja $b_G(X)$ de un producto cartesiano, i.e., si es trivial o no, o equivalentemente, si el haz asociado a X posee o no secciones. Así, las clases características son *invariantes globales* que miden la desviación de una estructura de producto local de una estructura de producto global.

Capítulo 5

Fundamentos de Teoría Cuántica de Campos

5.1. Intuición Física Moderna

En esta sección haremos una pequeña digresión en el campo de física moderna, que es el mayor cliente para la maquinería de la geometría diferencial. Podría decirse que los genios más influyentes que le dieron forma al mundo de la física del siglo XX, y al mismo tiempo mostraron el camino a la actual teoría física del todo, han sido:

1. En el primer tercio del siglo, había sido *Albert Einstein*.
2. En el segundo tercio del siglo, fue *Richard Feynman*.
3. Al final del siglo -y todavía hoy-, es *Edward Witten*.

Es bien sabido que *Einstein* tuvo tres periodos en su carrera científica:

1. Antes de 1905, cuando formuló la Relatividad Especial en una serie rápida de artículos publicados en Annalen der Physik (el diario de física más prestigioso de la época). Este primer período estuvo dominado por sus experimentos mentales, es decir, imágenes físicas concretas, descritas en el lenguaje de matemática no profesional. Podríamos decir que era casi pura visualización. Esta serie rápida

y potente de artículos (con suficientes matemáticas para ser aceptado por la comunidad científica) le dió una reputación de físico y científico líder [8], [9].

2. Aunque era una teoría original y brillante, la Relatividad Especial no estaba completa, lo que era obvio para Einstein. Entonces, se embarcó en el viaje de la relatividad general, incorporando la gravitación. Ahora, para este objetivo, sus matemáticas no eran lo suficientemente fuertes. Pasó 10 años peleando con la gravedad, usando geometría Riemanniana dura y hablando con el líder matemático de la época, *David Hilbert*. Al final, ambos presentaron las mismas ecuaciones gravitacionales de relatividad general (solo derivado de diferentes maneras) a Annalen der Physik en noviembre de 1915.

3. Aunque incluso hoy es considerada como la teoría física más elegante, la Relatividad General todavía no está completa: no puede vivir en el mismo mundo junto con la mecánica cuántica. Entonces, Einstein se embarcó en el último viaje de su vida, la búsqueda de la teoría *del campo unificado*, y él falló después de 30 años de lucha infructuosa con una tarea demasiado grande para un hombre.

La historia de *Feynman* es muy diferente. Toda su vida fue un científico profundamente original, similar al joven Einstein. Se negó a tomar la palabra de alguien por hecho, lo que significaba que tenía que reinventar por sí mismo casi toda la física. Le llevó cinco años de trabajo concentrado reinventar la mecánica cuántica. Al final, obtuvo una nueva versión de la mecánica cuántica que él (y solo él) podía entender [12]. En la física ortodoxa se dijo: supongamos que un electrón está en este estado en un momento determinado, entonces usted calcula su comportamiento futuro resolviendo la ecuación de Schrodinger. En vez de esto, Feynman dijo simplemente: el electrón hace lo que quiere. Una historia del electrón es cualquier camino posible en el espacio-tiempo. El comportamiento del electrón es sólo el resultado de sumar todas las historias de acuerdo a algunas reglas simples que Feynman resolvió. Su integral de camino y sus diagramas relacionados, desafiaban una base matemática rigurosa. Sin embargo, sigue siendo la herramienta de cálculo más poderosa en mecánica (y estadística) cuántica. Más tarde, Feynman lo generalizó para abarcar campos físicos, lo que condujo a su versión de la electrodinámica cuántica (el primer prototipo de una teoría cuántica de campos) y a su Premio Nobel. Toda su carrera, desconfiaba constantemente de las matemáticas oficiales e inventó las suyas apuntaladas con una intuición física directa. Si la historia hubiera terminado aquí, podríamos haber dicho que la física visual intuitiva está liderando el camino de la ciencia. Sin embargo, la historia no termina aquí. La principal autoridad en física contemporánea es *Ed Witten*, un físico que no recibió el Premio Nobel, pero si la Medalla Fields, junto con su teoría *de supercuerdas* [13]. Witten trabaja en el mismo lugar donde Einstein pasó los últimos 30 años de su vida, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Está soñando el sueño de Einstein: una teoría unificada del todo, utilizando las matemáticas más poderosas posibles. Su profecía entregada en un cambio de siglo, ha sido: En el siglo 21 las matemáticas estarán dominadas por la teoría de cuerdas. Cuando la teoría de supercuerdas llegó a la física en 1984 como una potencial teoría del universo, fue considerada por los físicos convencionales como poco mejor que la religión en términos de constituir una teoría viable y comprobable. En la teoría de cuerdas, las partículas fundamentales era como cuerdas, en lugar de partículas puntuales; el universo tenía 10 u 11 dimensiones, en lugar de cuatro; y la teoría misma existía en una energía tan lejos de las energías terrenales que tomó un salto de enorme fe para imaginar el día en que un experimento podría alguna vez probarla. En pocas palabras, la teoría de cuerdas parecía una búsqueda excesivamente esotérica, y que todavía lo es [14].

5.2. Paradigma de Modelación de Sistemas Dinámicos

En esta sección daremos un paradigma de modelado geométrico-diferencial de sistemas dinámicos complejos. Esto es esencialmente una receta en cómo desarrollar un formalismo covariante en variedades suaves, dada una situación física, biofísica, psicofísica o sociofísica, aquí llamada por el nombre genérico: situación física. Presentaremos esta receta en la forma de los siguientes cinco pasos.

1. Comenzamos con una situación física dada, el primer paso en su modelado predictivo y análisis, i.e., en aplicar una maquinería poderosa de geometría diferencial a ella, es asociar con esta situación, *dos* sistemas coordenados independientes, contituyendo dos variedades Riemannianas independientes. Denotemos a estos dos sistemas coordenados y a sus respectivas variedades como:

   $Coordenadas\ internas$: $x^i = x^i(t), (i = 1, ..., m)$, constituyendo la mD- $variedad$ $de\ configuración\ interna$: $\mathcal{M}^m \equiv \{x^i\}$

   $Coordenadas\ externas$: $y^e = y^e(t), (e = 1, ..., n)$, constituyendo la nD- $variedad$ $de\ configuración\ externa$: $\mathcal{N}^n \equiv \{y^e\}$ Por lo tanto, en este primer paso, asociamos a un sistema natural dado, no uno, sino dos variedades de suaves independientes de configuración, como ver un partido de fútbol desde dos satélites diferentes.

2. Una vez que hayamos definido de manera precisa dos variedades suaves, como dos maneras independientes de ver una situación física, podemos aplicar nuestro modelado geométrico-diferencial a ella y darle una interpretación natural física. Más precisamente, una vez que tengamos dos variedades Riemannianas suaves, $M^m \equiv \{x^i\}$ y $N^n \equiv \{y^e\}$ podemos formar dos funciones entre ellas:
   $f : N \to M,\ dada\ por\ la\ transformación\ coordenada:\ x^i = f^i(y^e)$
   $g : M \to N,\ dada\ por\ la\ transformación\ coordenada:\ y^e = g^e(x^i)$
   Si las matrices Jacobianas de estas dos funciones son no singulares (regulares), i.e., el determinante de dicha matriz es no cero, entonces estas dos funciones son mutuamente inversas, $f = g^{-1}$, y representan cinemática hacia delante y hacia atrás.

3. Aunque, las funciones f y g definen transformaciones de coordenadas completamente generales, y que son hasta el momento desconocidas, hay algo simple que podemos saber acerca de ellas (de cálculo). A saber, las correspondientes transformaciones infinitesimales son lineales y homogenas: de la función f tene-

mos (aplicando en todos lados la convención de suma de Einstein sobre índices repetidos)

$$dx^i = \frac{\partial f^i}{\partial y^e} dy^e \tag{5.1}$$

y de la función g tenemos

$$dy^e = \frac{\partial g^e}{\partial x^i} dx^i \tag{5.2}$$

Más aún, (4.1) implica la transformación lineal y homogenea de *velocidades internas*,

$$v^i \equiv \dot{x}^i = \frac{\partial f^i}{\partial y^e} \dot{y}^e, \tag{5.3}$$

mientras que (4.2) implica la transformación lineal y homogenea de *velocidades externas*,

$$u^e \equiv \dot{y}^e = \frac{\partial g^e}{\partial x^i} \dot{x}^i. \tag{5.4}$$

De este modo, hemos definido *dos campos vectoriales de velocidades*, el interno: $v^i = v^i(x^i, t)$ y el externo: $u^e = u^e(y^e, t)$ dadas respectivamente por dos sistemas no lineales de EDPs

4. El siguiente paso en nuestro modelo geométrico-diferencial es definir segundas derivadas en las funciones de variedad f y g, i.e., dos *campos vectoriales de aceleración*, que denotaremos por $a^i = a^i(x^i, \dot{x}^i, t)$ y $w^e = w^e(y^e, \dot{y}^e, t)$ respectivamente. Sin embargo, a diferencia de simple física en espacios Euclidianos, estos dos campos vectoriales de aceleración en variedades no son simples derivadas respecto al tiempo de los correspondientes campos vectoriales de velocidad ($a^i \neq \dot{x}^i$ y $w^e \neq \dot{u}^e$) debido a la existencia de las *conexiones de* $Levi - Civita$ $\bigtriangledown_{\mathcal{M}}$ y $\bigtriangledown_{\mathcal{N}}$ en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Definido propiamente, estos dos campos vectoriales de aceleración se leen respectivamente:

$$a^i = \dot{v}^i + \Gamma^i_{jk} v^j v^k = \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k, \; et \; w^e = \dot{u}^e + \Gamma^e_{hl} u^h u^l = \ddot{y}^e + \Gamma^e_{hl} \dot{y}^h \dot{y}^l.$$

donde Γ^i_{jk} y Γ^e_{hl} denotan los *símbolos de Christoffel* de segundo orden de las conexiones $\bigtriangledown_{\mathcal{M}}$ y $\bigtriangledown_{\mathcal{N}}$.

Por lo tanto, en el paso (3) dimos el modelo de primer nivel de nuestra situación física en la forma dos campos vectoriales ordinarios, dos campos vectoriales de primer orden. Para algunas simples situaciones (e.g., sistemas ecológicos) podríamos parar aquí. Usado terminología física, los llamamos campos vectoriales de velocidades. Siguiendo esto, en el paso (4) hemos definido dos campos vectoriales de segundo orden, como derivaciones de nuestros campos vectoriales previamente definidos. Usando terminología física, los llamamos campos vectoriales de aceleración.

5. Finalmente, siguiendo nuestra terminología física genérica, como paso natural siguiente esperaríamos definir algo como campos de fuerza de Newton-Maxwell genéricos. Y podemos de hecho hacerlo, con una pequeña sorpresa que fuerzas individuales involucradas en los dos campos de fuerza no serán vectores, pero si objetos duales llamados 1-formas. Formalmente, definimos los dos campos $covariantes\ de\ fuerza$ como

$$F_i = mg_{ij}a^j = mg_{ib}(\dot{v}^b + \Gamma^b_{jk}v^j v^k) = mg_{ib}(\ddot{x}^b + \Gamma^b_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k),$$
$$G_e = mg_{eh}w^h = mg_{eh}(\dot{u}^h + \Gamma^h_{el}u^e u^l) = mg_{eh}(\ddot{y}^h + \Gamma^h_{el}\dot{y}^e\dot{y}^l).$$

donde m es la masa de cada segmento (único, por simplicidad), mientras que $g_{ij} = g^{\mathcal{M}}_{ij}$ y $g_{eh} = g^{\mathcal{N}}_{eh}$ son los dos *tensores métricos de Riemann* [Apen. A], correspondientes a las variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Los dos campos de fuerza, F_i y G_e definidos anteriormente, son campos de fuerza genéricos correspondientes a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, que representan la *causa material* para la situación dada. Recordar que pueden ser campos de fuerza físicos, biofísicos, psicofísicos o sociofísicos. Físicamente hablando, son los *generadores* la dinámica y cinemática correspondiente. Las relaciones geométricas principales detrás de este paradigma forman el llamado *funtor covariante de fuerza* descrito en el siguiente diagrama (*)

$$\begin{tikzcd}
TT^*\mathcal{M} \arrow[rr, "\mathcal{F}_*", "F_i=mg_{ij}a^j"'] & & TT\mathcal{M} \\
T^*\mathcal{M}=\{x^i,p_i\} \arrow[u, "F_i=\dot{p}_i"] & & T\mathcal{M}=\{x^i,v^i\} \arrow[ll, "Legendre"'] \arrow[u, "a^i=\dot{\bar{v}}^i"'] \\
& M=\{x^i\} \arrow[ul, "p_i"] \arrow[ur, "v^i=\dot{x}^i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\dot{\bar{v}}^i = \dot{v}^i + \Gamma^i_{jk} v^j v^k = \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k.$$

donde $\mathcal{M} = \{x^i\}$ es la variedad de configuración, la parte izquierda del diagrama corresponde a la geometría *Simplética* y la parte derecha corresponde a la geometría *Riemanniana* [5].

5.3. Acciones y Cuantización

Es bien conocido que el desarrollo contemporáneo de la física teórica progresa acorde al *paradigma de acción* (el principio de acción es un concepto fundamental en física (de tanta importancia como la simetría), es muy poderoso para la física clásica, permitiendo que todas las ecuaciones de campo sean derivadas de una sola función, y simplificando la verificación de simetrías. En física cuántica la dinámica se formula necesariamente en términos de una acción (en el enfoque de integral de camino), o un Hamiltoniano equivalente (en los enfoques de Heisenberg y Schöodinger).), que sigue tres pasos esenciales [5]:

1. Para desarrollar una nueva teoría física, primero definimos una nueva *acción* $\mathcal{A}[w]$, un *funcional* en un *sistema de N variables* w^i, como una integral sobre el tiempo, del tiempo *inicial* t_0 al tiempo *final* t_1,

$$\mathcal{A}[w] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[w]\, dt. \tag{5.5}$$

Ahora, la naturaleza del integrando $\mathcal{L}[w]$ depende en si estamos lidiando con partículas o campos. En el caso de *partculas*, $\mathcal{L}[w] = L(q, \dot{q})$ es un *Lagrangiano*

ordinario finito-dimensional (usualmente la diferencia de energía cinética y potencial), definido a través del *Hamiltoniano* mecánico $H = H(q,p)$ (energía total del sistema) como $\mathcal{L}[w] = L(q,\dot{q}) = p_i\dot{q}^i - H(q,p)$, donde $q, \dot{q}, p$ son las coordenadas generalizas, velocidades y momento canónico, respectivamente.
En el caso de *campos* el integrando $\mathcal{L}[w]$ está más involucrado,

$$\mathcal{L}[w] = \int d^n q \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_q) \tag{5.6}$$

donde la integral está tomada sobre las *n coordenadas espaciales* (en particular, $n = 3$ para campos en espacios Euclidianos 3-dimensionales), mientras que $\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_q$ denotan variables de campo, velocidades y derivadas (parciales) de sus coordenadas, respectivamente. El subintegrando $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_q)$ es la *densidad Lagrangiana* del sistema, definida a través de la *densidad Hamiltoniana* del sistema $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\varphi, \pi, \pi_q)$ como $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_q) = \pi_i\dot{\varphi}^i - \mathcal{H}(\varphi, \pi, \pi_q)$, donde π, π_q son campo de momento (canónico), y las derivadas de sus coordenadas.

2. Variamos la acción $\mathcal{A}[w]$ usando el principio de mínima *acción*

$$\delta\mathcal{A}[w] = 0 \tag{5.7}$$

y usando técnicas de *cálculo variacional*, derivamos ecuaciones clásicas de campo y momento, como ecuaciones de $Euler - Lagrange$, describiendo el *camino extremo*, o *camino directo del sistema*: $t \mapsto w(t)$, de t_0 a t_1.
Otra vez, tenemos dos casos. La ecuación de partícula de Euler-Lagrange se lee

$$\partial_t L_{\dot{q}^i} = L_{q^i},$$

y puede ser reescrito en la forma Hamiltoniana, usando el *corchete* de *Poisson* (conmutador clásico) ; recordar que para cualesquiera dos funciones $A = A(q^k, p_k, t)$

y $B = B(q^k, p_k, t)$ su corchete de Poisson está definido como

$$[A, B]_{particle} = \left(\frac{\partial A}{\partial q^k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q^k} \right)$$

o como un par de ecuaciones canónicas

$$\dot{q}^i = \left[q^i, H\right], \;\; \dot{p}_i = [p_i, H]. \tag{5.8}$$

La ecuación de campo de Euler-Lagrange

$$\partial_q \mathcal{L}_{\partial_q \varphi^i} = \mathcal{L}_{\varphi^i}$$

en forma Hamiltoniana da un par de ecuaciones canónicas de campo

$$\dot{\varphi}^i = \left[\varphi^i, \mathcal{H}\right], \;\; \dot{\pi}_i = [\pi_i, \mathcal{H}], \tag{5.9}$$

Aquí los corchetes de campo de Poisson son ligeramente generalizados en el sentido de que las derivadas parciales ∂ son remplazadas con las derivadas variacionales correspondientes δ, i.e.,

$$[A, B]_{field} = \left(\frac{\delta A}{\delta q^k} \frac{\delta B}{\delta p_k} - \frac{\delta A}{\delta p_k} \frac{\delta B}{\delta q^k} \right)$$

3. Una vez que tengamos una descripción satisfactoria de campos y movimiento, podemos realizar la *cuantización de Feyman* de las ecuaciones clásicas, usando la misma acción $\mathcal{A}[w]$ pero ahora incluyendo todas las trayectorias en lugar de sólo la extrema.

   Reocordar que sistemas cuánticos tienen dos modos de evolución en el tiempo. El primero gobernado por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mid \psi\rangle = \hat{H} \mid \psi\rangle$$

   donde $\hat{H}$ es el operador (de energía) Hamiltoniano, $i = \sqrt{-1}$ y $\hbar$ es la constante de Planck dividida por $2\pi(\equiv 1$ en unidades naturales), que describe la evolución temporal de sistemas cuánticos cuando nos son perturbados por mediciones. Mediciones son definidas como interacciones del sistema con su ambiente. Mientras el sistema este lo suficientemente aislado de su ambiente, se sigue la ecuación de Schrödinger. Si una interacción con el ambiente toma lugar, i.e., una medición es realizda, el sistema colapsa o se reduce a un estado clásico permitido.

Un estado cuántico dependiente del tiempo está determinado por una función de onda normalizada, compleja $\psi = \psi(t)$, que es solución de la ecuación de Schrödinger. En palabras de Dirac, esta es una unidad vectorial *ket* $\mid \psi\rangle$ (que hace un producto escalar con el vector *dual* $\langle\psi \mid)$, que es un elemento del *espacio de Hilbert* $L^2(\psi)$ con una base coordenada (q^i). El estado del vector *ket* $\mid \psi\rangle$ está sujeto a la acción de *operadores Hermitianos* (u, operadores autoadjuntos), obtenido por el procedimiento de *cuantización* de cantidades mecánicas clásicas, y cuyos eigenvalores reales han sido medidos. La *superposición cuántica* es una generalización del principio algebraico de combinación lineal de vectores.

La (primera) cuantización puede ser realizada en tres *imágenes cuánticas*, a saber, la (S)- imagen de Schrödinger, en la cual, el vector *ket* $\mid \psi\rangle$ rota, y la base coordenada (q^i) está fija; la (H)-imagen de Heisenberg, en la cual, la bae coordenada rota y el vector de estado está fijo; y la interacción (I)-imagen de Dirac, en la cual, el vector de estado y la base coordenada rotan. A saber, para obtener la *amplitud de probabilidad* $\langle f|i\rangle$ de la *transición* del sistema de un *estado inicial* $i(w(t_0))$ al tiempo t_0 a un *estado final* $f(w(t_1))$ al tiempo t_1, ponemos la acción $\mathcal{A}[w]$ en la *integral de camino*, simbólicamente escrito como

$$\langle f|i\rangle = \int_\Omega \mathcal{D}[w]\, e^{i\mathcal{A}[w]} \tag{5.10}$$

donde Ω representa el espacio de *todas* las trayectorias del sistema $w^i(t)$ las cuales contribuyen a las transiciones de sistema con *igual probabilidad*, y la constante de Planck $\hbar$ implícita es normalizada a la unidad.

La integral funcional es usualmente calculada rompiendo el intervalo de tiempo

$[t_0, t_1]$ en puntos discretos y tomando el límite continuo.

El símbolo diferencial $\mathcal{D}[w]$ en la integral de camino (4.10), representando una (algo no riguroso) *medida de camino* define un producto

$$\mathcal{D}[w] = \prod_{i=1}^{N} dw^i$$

que en el caso de $partículas\ mecano-cuánticas$ se lee

$$\mathcal{D}[w] = \prod_{i=1}^{N} dq^i dp_i$$

y en el caso de *campos cuánticos* se lee

$$\mathcal{D}[w] = \prod_{i=1}^{N} d\varphi^i d\pi_i.$$

El esquema de integral de camino (4.10) es comunmente usado para calcular el *propagador* de un sistema arbitrario (cuántico), así como también $sistemas$ $estocásticos\ Markov-Gaussianos$ descritos por EDPs de *Langevin* o $Fokker-Planck$.

El método de cuantización más general el de integral de camino (4.10), puede ser reducido a la *regla de cuantización de Dirac* mas conocida, la cual usa una ecuación de partícula modificada para partículas cuánticas,

$$\dot{\hat{q}}^i = i\left\{\hat{H}, \hat{q}^i\right\}, \quad \dot{\hat{p}}_i = i\left\{\hat{H}, \hat{p}_i\right\}, \tag{5.11}$$

y una ecuación de campos modificada para campos cuánticos,

$$\dot{\hat{\varphi}}^i = i\left\{\hat{\mathcal{H}}, \hat{\varphi}^i\right\}, \quad \dot{\hat{\pi}}_i = i\left\{\hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi}_i\right\}, \tag{5.12}$$

donde las variables de coordenada y campo (de espacio Euclidiano ordinario) son remplazadas por los correspondientes $operadores\ Hermitianos$ (i.e., operadores autoadjuntos) en el *espacio complejo de* $Hilbert$ y el corchete de Poisson $[,]$ es remplazado por el *conmutador cuántico* $\{,\}$ (multiplicado por $-i$). Además, la regla de Dirac postula las *relaciones de incertidumbre de Heinsenberg* entre los pares canónicos de variables de coordenadas y campos, a saber,

$$\Delta q^i \cdot \Delta p_i \geq \frac{1}{2}, \quad \Delta \varphi^i \cdot \Delta \pi_i \geq \frac{1}{2}.$$

El *paradigma de acción*, descrito arriba, provee ambas descripciones clásicas y cuánticas, para cualquier teoría física nueva, incluso las que están por descubrirse. Representan una regla heurística en la búsqueda de una fuerza unificada de la naturaleza; la última teoría descrita de esta forma ha sido la celebrada teoria de *supercuerdas*.

5.4. Cuantización Topológica

La *cuantización topológica* surge del intento de usar la topología algebraica para obtener información sobre sistemas clásicos haciendo un análisis de los invariantes topológicos subyacentes en las variedades asociadas a dichos sistemas [15], [16]. El método de cuantización topológica (CT) se puede aplicar a cualquier *configuración de campo* cuya estructura geométrica permita la existencia de un *haz principal*. Esto se enuncia en el siguiente teorema (*)

Un sistema mecánico conservativo con k grados de libertad para el cual el *Hamiltoniano* es una cantidad conservada, puede ser representado por un haz fibrado principal $\mathcal{P}$ de dimensión $\frac{1}{2}k(k+1)$, con una variedad Riemanniana de base (σ, h), donde h es la métrica de *Jacobi*, Σ representa el espacio de configuración y $SO(k)$ es el grupo de estructura del haz $\mathcal{P}$, (para una demostración del teorema ver [4]).

Veremos más adelante la importancia de la métrica para el método de CT.

Daremos a continuación los pasos a seguir en el método CT

1. Se considera un sistema físico clásico conservativo con k grados de libertad con base en su *Lagrangiano*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q)$$

Ahora, la evolución del sistema puede ser descrito variando la *acción* $s = \int \mathcal{L} dt$

i.e., usamos el principio de mínima acción

$$\delta s = 0$$

2. En este paso introducimos el *formalismo de Maupertius* ya que en él se tiene información de la métrica que luego será clave a la hora de utilizar un tipo particular de invariante topológico, i.e., la clase característica de *Euler*.

   Vamos a reformular el principio de mínima acción de (1) de la *cuantización canónica* cambiando la acción por una nueva, llamada *acción reducida* s_0 definida

$$s_0 = \int ds, \;\; donde \;\; ds^2 = 2(E - V)h_{ij}dq^i dq^j \tag{5.13}$$

   donde q representan las coordenadas generalizadas, E la energía total del sistema, V la energía potencial y h la métrica de Jacobi; luego usaremos el principio de míníma acción para s_0.

   Notemos que la ecuación ds^2 define naturalmente la métrica g_{ij} por $g_{ij} = (E - V)h_{ij}$ y esta es la que se utiliza para definir al espacio base B del haz principal $\mathcal{P}$. $V(q)$ será diferente para cada sistema, y esto hará la CT distinta según sea el caso.

   Por simplicidad, se consideran sistemas invariantes bajo rotaciones, i.e., para cada $p \in B$ se tiene que $\pi^{-1}(p) \cong SO(k)$. La investigación de los invariantes topológicos del haz $\mathcal{P} : (\mathcal{E} \to B)$ es el principio de la CT.

3. Nos encontramos en momento de utilizar la herramienta algebraica a disposición introduciendo la clase de Euler $e(\mathcal{P})$, que está definida en términos de las componentes de la 2-forma de curvatura $\mathcal{R}^i_j$ de B,

$$e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2m}}\mathcal{R}^{i_1}_{i_2} \wedge \mathcal{R}^{i_3}_{i_4} \wedge \ldots \wedge \mathcal{R}^{i_{2m-1}}_{i_{2m}} = n$$

y a esta la vamos a integrar

$$\int e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\int \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2m}} \mathcal{R}^{i_1}_{i_2} \wedge \mathcal{R}^{i_3}_{i_4} \wedge \ldots \wedge \mathcal{R}^{i_{2m-1}}_{i_{2m}} = n.$$

A $\int e(\mathcal{P})$ se le llama *espectro topológico* y este es realmente el *espiritu* de la cuantización topológica.

Todo lo anterior lo podemos resumir en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta S=0(s=\int \mathcal{L}dt)"] \arrow[d, "f\mathcal{M}"'] & \mathcal{E}\mathcal{E} \arrow[d, "?"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "\int e(\mathcal{P})"] & \mathcal{E}\mathcal{T} \end{tikzcd}$$

en el, B representa la variedad asociada al espacio de configuración, $f\mathcal{M}$ representa el $formalismo\ de\ Maupertius$ necesario para poder traducir la información de B al haz, $\mathcal{P}$ es el haz fibrado principal asociado a B haciendo énfasis en la métrica extraída del $f\mathcal{M}$, arriba tenemos la descripción de la cuantización 'canónica' que culmina en $\mathcal{E}\mathcal{E}$, que significa espectro de energía y finalmente el paso de ir de $\mathcal{P}$ con el método de cuantización topológica con $e(\mathcal{P})$ a $\mathcal{E}\mathcal{T}$ que significa espectro topológico, es lo que concluye la investigación, no sin antes hacer incapie en la relación entre $\mathcal{E}\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}\mathcal{T}$ de la cual discutiremos al final de este apartado.

Vamos a considerar dos ejemplos para CT, un caso trivial y otro no trivial.

Supongamos el caso de una partícula libre:

$$V(q) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$$

además, tenemos

$$ds^2 = 2Eh_{ij}dq^idq^j, \;\; g_{ij} = 2Eh_{ij}$$

esto implica que las $trayectorias\ son\ l\acute{i}neas\ rectas$ luego g_{ij} es *plana* y esto nos dice

que *existe* un *sistema coordenado* en el cual $h_{ij} = \delta_{ij}$ (i.e., métrica Euclidiana), finalmente esto implica que tenemos *curvatura cero* y esto a su vez nos da que $e(\mathcal{P}) = 0$ y esto se interpreta en CT como que la partícula libre no está cuantizada.
Continuemos con el caso no trivial del *oscilador armónico*, aquí $h_{ij} = m\delta_{ij}$ (ya estamos considerando una métrica conforme donde al ser $V(q) \neq 0$ tenemos que $h_{ij} \neq \delta_{ij}$) y esto significa que

$$g_{ij} = 2m \left[E - \frac{1}{2}k_1(q^1)^2 - \frac{1}{2}k_2(q^2)^2 \right] \delta_{ij}$$

luego

$$e(\mathcal{P}) = \frac{-1}{2\pi}\mathcal{R}^1_2 = \frac{1}{4\pi}(\phi_{,11} + \phi_{,22})dq^1 \wedge dq^2$$

(donde las comas representan derivación y $g_{ij} := e^{\phi}\delta_{ij}$).
Para simplificar, establezcamos $k_2 = 0$, $k_1 = k$, $q^1 = q$ y así tenemos

$$\int e(\mathcal{P}) = \frac{-kb}{4\pi} \int \frac{E + \frac{1}{2}kq^2}{(E - \frac{1}{2}kq^2)^2} dq$$

y ahora integrando sobre q en el intervalo $[-q_0, q_0]$ se obtiene

$$\frac{bq_0}{q_0^2 - a^2} = n, \;\; a^2 = \frac{2E}{k}$$

finalmente el análisis de la relación de los parámetros que describen al *oscilador*, i.e., la energía E, la constante k, y q_0 más unos cálculos sencillos dan la forma del espectro de energía canónico

$$q_0 = \frac{1}{C} - \left[\frac{1}{C^2} + a^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \;\; C = \frac{2}{b}\left[\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right]; \;\; \omega = \left[\frac{k}{m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

de donde

$$si \;\; n = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \Rightarrow E_n = \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega$$

es el espectro del oscilador armónico usando cuantización canónica.
Para concluir está sección, la equivalencia entre $\mathcal{EE}$ y $\mathcal{ET}$, i.e., las técnicas clásicas

de cuantización canónica y la propuesta en la cuantización topológica, requiere la definición de algunos *conceptos cuánticos*, como lo es el de estado cuántico.

Capítulo 6

Aspectos Categóricos de la Cuantización Topológica

En la sección anterior hemos visto como, usando el formalismo de Maupertius más el teorema (*), podemos asociar a cada variedad de configuración $\mathcal{M}$ un haz fibrado principal $\mathcal{P}$ con grupo de estructura G isomorfo al grupo de rotaciones $SO(K)$. El formalismo de Maupertius es ideal para poder hacer la correspondencia entre cada variedad de configuración y su haz principal por medio de la métrica que se hace explícita en la acción reducida s_0.

Afirmamos que el formalismo de Maupertius $\mathcal{FM}$ puede ser visto como un funtor $\mathcal{FM}$ y la cuantización topológica $\mathcal{CT}$ es una forma de cuantificar una transformación natural entre el funtor $\mathcal{FM}$ y otro que definiremos más adelante. Esto no es más que un intento de abordar el proceso de categorización desde otro enfoque aplicado a la cuantización topológica. Estamos convencidos que el tratamiento aquí dado difiere sustancialmente en formalidad al presentado en [32], por lo que se pretende que en un futuro, este procedimiento se logre acoplar a [33] y continuar con la investigación en el área.

Demostración

Antes de definir todo lo involucrado en la afirmación, tomemos como ejemplo-analogía lo siguiente.

Consideremos un morfismo suave entre variedades de configuración $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ para dos sistemas clásicos finito dimensionales. Cada uno va a estar completamente determinado por su función de potencial $V(q)$ y en consecuencia por su Lagrangiano y finalmente por su acción.

Sea $\mathcal{M}$ la variedad de configuración asociada al sistema de *tiro vertical* y $\mathcal{N}$ la variedad de configuración asociada al sistema de *tiro parabólico*.

Para simplificar, vamos a considerar a los dos sistemas en dos dimensiones.

Para el tiro vertical tenemos

$$\mathcal{M} = \{o_i\} = \{o_1, o_2\}\,, \;\; \mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}m\dot{o}_2^2 - mgo_2$$

y para el tiro parabólico

$$\mathcal{N} = \{q_i\} = \{q_1, q_2\}\,, \;\; \mathcal{L}_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2}m\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2\right] - mgq_2$$

notemos que si $q_1 = 0$ en la expresión anterior tenemos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 - mgq_2 = \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$$

Así, podemos considerar la *inclusion* ι de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ al ser el tiro vertical un caso particular del tiro parabólico un morfismo *aceptable* entre dichos objetos, donde ι codifica la información de los Lagrangianos y establece cierto formalismo en dicho morfismo, mas que entre variedades, si entre las funciones $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$.

$$\begin{tikzcd}
& T^*\mathcal{M} \arrow[r, "(\iota_*)_*"] \arrow[dl, "\mathcal{H}_{\mathcal{M}}"'] & T^*\mathcal{N} \arrow[dr, "\mathcal{H}_{\mathcal{N}}"] & \\
R & T\mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{L}_{\mathcal{M}}"] \arrow[u, "\mathcal{LE}"] \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{M}}"] & T\mathcal{N} \arrow[u, "\mathcal{LE}"] \arrow[r, "\mathcal{L}_{\mathcal{N}}"'] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{N}}"] & R \\
& \mathcal{M} \arrow[ul, "B"] \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{N} \arrow[ur, "A"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Existencia de A y B:

Demostración: Basta con definir

$$A := \mathcal{H}_{\mathcal{N}} \circ \mathcal{LE} \circ \pi_{\mathcal{N}}^{-1}$$

$$B := \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{LE} \circ \pi_{\mathcal{M}}^{-1}.$$

Así, la existencia de A y B está completamente determinada por :

1. La transformada de *Legendre* $\mathcal{LE}$;

2. Los Hamiltonianos $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ y

3. Si el haz fibrado principal asociado a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ son triviales o no (en este caso ambos lo son por construcción de los haces tangentes respectivamente), además que para cada i tenemos que $\pi_{\mathcal{M}}^{-1}(o_i), \pi_{\mathcal{N}}^{-1}(q_i) \cong SO(2)$.

(1) y (2) los tenemos por el funtor de fuerza.

Se justifica aquí la existencia de ι_* y $(\iota_*)_*$ ya que la función que describe el Hamiltoniano de una caída libre está en la función que describe al Hamiltoniano de un tiro parabólico, i.e.,

$$si \ \ \mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 - mgq_2$$

$$entonces, \ \ \mathcal{L}_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2} m \left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 \right] - mgq_2 = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$$

$$por \ \ lo \ \ tanto, \ \ \mathcal{H}_{\mathcal{M}} = p_2^2 + mgq_2 \ \ \Rightarrow \ \ \mathcal{H}_{\mathcal{N}} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + mgq_2 = \frac{p_1^2}{2m} + \mathcal{H}_{\mathcal{M}}.$$

Me gustaría agregar que la *necesidad* de hacer *conmutar* el diagrama anterior con los morfismos A y B y sobre todo por ι y sus morfismos inducidos ι_* y $(\iota_*)_*$ es por la exigencia natural de tener una *relación* entre los sistemas $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, donde tomamos en este caso la relación *ser un caso particular* como la relación fundamental entre dichos espacios. Cabe resaltar que para hacer nuestro análisis funtorial sólo necesitamos de una relación (suave) entre los objetos antes mencionados y establecer la definiciones y relaciones entre los objetos que van a estar en el análisis.

Para concluir nuestro ejemplo-analogía, ya hemos establecido las relaciones y definido los objetos involucrados, ahora pasaremos a los aspecto categóricos del ejemplo anterior. Veamos el siguiente diagrama (**)

$$\begin{tikzcd}
R & \mathcal{M} \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "FC"'] & \mathcal{N} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "FC"] & R \\
& \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}} \arrow[ul, "s_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}"] \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}} \arrow[ur, "s_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde FC es el funtor *formalismo canónico* que relaciona los dos sistemas $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ con su haz tangente respectivo, $s_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}}$, $s_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}$ son las acciones *canónicas* dadas por

$$s_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}} = \int \mathcal{L}_{\mathcal{N}} dt$$

$$s_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}} = \int \mathcal{L}_{\mathcal{M}} dt$$

y $\mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}}$ y estos dos codifican la información de los sub-diagramas de los funtores de fuerza de (6.1)

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathcal{N} \arrow[dr, "s_{\mathcal{L}_{\mathcal{N}}}"'] & T\mathcal{N} \arrow[l, "\mathcal{L}\mathcal{E}"'] \arrow[r, "\pi_{\mathcal{N}}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{\mathcal{N}}"'] & \mathcal{N} \arrow[dl, "A"] \\
& R &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
T^*\mathcal{M} \arrow[dr, "s_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}"'] & T\mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{L}\mathcal{E}"'] \arrow[r, "\pi_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{M} \arrow[dl, "B"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

Vamos a considerar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "FC"] & \mathcal{N} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "FC"] & \mathcal{O} \arrow[d, "FC"] \\
\mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}} \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}} \arrow[r, "g_*"] & \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{O}}
\end{tikzcd}$$

donde estamos tomando a la categoría de variedades diferenciables finitas $\mathcal{M}_n$ y a la categoría de haces fibrados $\mathcal{FB}$.

Notemos que si $f \in Mor_{Mn}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ entonces,

$$FC(f) = f_* \in Mor_{\mathcal{FB}}(P^{\pi}_{\mathcal{M}}, \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}}) \tag{6.2}$$

y como $P^{\pi}_{\mathcal{M}} = FC(\mathcal{M})$, $\mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}} = FC(\mathcal{N})$ tenemos $FC(f) = f_* \in Mor_{\mathcal{FB}}(FC(\mathcal{M}), FC(\mathcal{N}))$, por otra parte $I_{\mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}}} = I_{FC(\mathcal{M})}$, por tanto

$$FC(I_{\mathcal{M}}) = I_{\mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}}} = I_{FC(\mathcal{M})}.$$

Finalmente como $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y $g : \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ entonces $f_* = FC(f) : \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}}$ y $g_* = FC(g) : \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{N}} \to \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{O}}$ por lo tanto $g_* \circ f_* : \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{O}}$. Por otra parte, como $g \circ f : \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ entonces $(g \circ f)_* = FC(g \circ f) : \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{O}}$ y como $Dom\,(g_* \circ f_*) = \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}}$ y $Dom\,(g \circ f)_* = \mathcal{P}^{\pi}_{\mathcal{M}}$ tenemos que las funciones $g_* \circ f_*$ $(g \circ f)_*$ tienen la misma regla de correspondencia y el mismo dominio, por lo tanto son iguales, i.e.,

$$g_* \circ f_* = FC(g) \circ FC(f) = FC(g \circ f) = (g \circ f)_*$$

de donde concluimos que FC es un funtor convariante de la categoría de variedades diferenciables $\mathcal{M}_n$ a la categoría de haces fibrados $\mathcal{FB}$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(\mathcal{M}) & & H^*(\mathcal{N}) \arrow[ll, "f^*"'] & \\
(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R) \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "i"'] & \mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{FM}"'] \arrow[u, "H^*"] \arrow[d, "b_G"] \arrow[rr, "f"] & & \mathcal{N} \arrow[r, "\mathcal{FM}"] \arrow[u, "H^*"'] \arrow[d, "b_G"] & (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}, R) \arrow[ul, "e"'] \arrow[dl, "j"] \\
 & b_G\mathcal{M} & & b_G\mathcal{N} \arrow[ll, "f'^*"] &
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

el cual encontrará su justificación en cada una de sus partes.

Comencemos con el subdiagrama

$$\begin{tikzcd}
H^*(\mathcal{M}) & H^*(\mathcal{N}) \arrow[l, "f^*"'] \\
\mathcal{M} \arrow[u, "H^*"] \arrow[r, "f"] & \mathcal{N} \arrow[u, "H^*"']
\end{tikzcd}$$

donde H^* es el funtor de cohomología y $H^*(\mathcal{M})$ es el grupo de cohomología asociado a $\mathcal{M}$ respecto a la teoría de cohomología H^* que estemos considerando.

A continuación probaremos que H^* es un funtor contravariante de la categoría de cadenas complejas $\mathcal{CC}$ a la categoría de grupos Abelianos $\mathcal{A}$ (en el diagrama anterior hacemos el abuso de notación al usar a la categoría $\mathcal{M}_n$ donde para $\mathcal{M} \in Ob(\mathcal{M}_n)$ asociamos el complejo de cadenas $C \in Ob(\mathcal{CC})$ como la categoría fuente para el funtor H^*).

Una función cadena $f : C \to C'$ entre complejos de cadena C y C' es una familia de funciones

$$f = \{f_p\}_{p\geq 0}\,, \;\; con \;\; f_p : C_p \to C'_p$$

de tal modo que f hace conmutar todos los sub-diagramas

$$\begin{tikzcd}
C : \arrow[d, "f"] & C_{p+1} \arrow[r, "d_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}"] & C_p \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "f_p"] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & ... \arrow[r, "d_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
C' : & C'_{p+1} \arrow[r, "d'_{p+1}"'] & C'_p \arrow[r, "d'_p"'] & C'_{p-1} \arrow[r] & ... \arrow[r, "d'_1"'] & C'_0 \arrow[r, "d'_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

además, f induce un homomorfismo de grupos $H_p(f) : H_p(C) \to H_p(C')$

$$H_p(C) \equiv Ker\, d_p / Im\, d_{p+1} \xrightarrow{H_p(f)} Ker\, d'_p / Im\, d'_{p+1} \equiv H_p(C'). \tag{6.4}$$

Sea $f = Id_{C_i}$ para algún C_i entonces $H_p(Id_{C_i}) : H_p(C_i) \to H_p(C_i)$ pero esto es básicamente el morfismo *identidad* de $H_p(C_i)$ $Id_{H_p(C_i)}$, por lo tanto

$$H_p(Id_{C_i}) = Id_{H_p(C_i)}.$$

Si consideramos dos funciones cadena f y g entre las cadenas complejas C, C' y C'', $f : C \to C'$, $g : C' \to C''$ entonces

$$\begin{tikzcd}
C : \arrow[d, "f"] & C_{p+1} \arrow[r, "d_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}"] & C_p \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "f_p"] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & ... \arrow[r, "d_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
C' : \arrow[d, "g"] & C'_{p+1} \arrow[r, "d'_{p+1}"] \arrow[d, "g_{p+1}"] & C'_p \arrow[r, "d'_p"] \arrow[d, "g_p"] & C'_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{p-1}"] & ... \arrow[r, "d'_1"] & C'_0 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "g_0"] & 0 \\
C'' : & C''_{p+1} \arrow[r, "d''_{p+1}"'] & C''_p \arrow[r, "d''_p"'] & C''_{p-1} \arrow[r] & ... \arrow[r, "d''_1"'] & C''_0 \arrow[r, "d''_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

por (6.3) si $f : C \to C'$ y $g : C' \to C''$, entonces

$$H_p(C) \equiv Ker\, d_p/Im\, d_{p+1} \xrightarrow{H_p(f)} Ker\, d'_p/Im\, d'_{p+1} \equiv H_p(C'). \tag{6.5}$$

$$H_p(C') \equiv Ker\, d'_p/Im\, d'_{p+1} \xrightarrow{H_p(g)} Ker\, d''_p/Im\, d''_{p+1} \equiv H_p(C''). \tag{6.6}$$

lo cual implica que $H_p(f) \circ H_P(g) : H_p(C) \to H_p(C'')$.
Por otra parte si $g \circ f : C \to C''$, entonces

$$H_p(C) \equiv Ker\, d_p/Im\, d_{p+1} \xrightarrow{H_p(g\circ f)} Ker\, d''_p/Im\, d''_{p+1} \equiv H_p(C''). \tag{6.7}$$

por lo tanto, $H_p(g \circ f) = H_p(g) \circ H_p(f)$ y H_p es efecto un funtor covariante.
Una función co-cadena $f : C \to C'$ entre complejos de cadena C y C' es una familia de funciones

$$f = \{f^p\}_{p\geq 0}\,, \;\; con \;\; f^p : C^p \to C'^p$$

de tal modo que f hace conmutar todos los sub-diagramas

$$\begin{tikzcd}
C: \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"] & C^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f^0"] & C^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & ... \arrow[r] & C^p \arrow[r, "d^p"] \arrow[d, "f^p"] & C^{p+1} \\
C': & 0 \arrow[r, "d'^{-1}"'] & C'^0 \arrow[r, "d'^0"'] & C'^1 \arrow[r] & ... \arrow[r] & C'^p \arrow[r, "d'^p"'] & C'^{p+1}
\end{tikzcd}$$

además, f induce un homomorfismo de grupos $H^p(f) : H^p(C) \to H^p(C')$

$$H^p(C) \equiv Ker\, d^{p+1}/Im\, d^p \xrightarrow{H^p(f)} Ker\, d'^{p+1}/Im\, d'^p \equiv H^p(C'). \tag{6.8}$$

Sea $f = Id_{C^i}$ para algún C^i entonces $H^p(Id_{C^i}) : H^p(C^i) \to H^p(C^i)$ pero esto es básicamente el morfismo *identidad* de $H^p(C^i)$ $Id_{H^p(C^i)}$, por lo tanto

$$H^p(Id_{C^i}) = Id_{H^p(C^i)}.$$

Aún falta ver H^p es contravariante pero esto es sencillo si recordamos la sección

(4.3), dada una cadena compleja

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \longleftarrow \ldots \xleftarrow{d_{p-1}} C_{p-1} \xleftarrow{d_p} C_p \xleftarrow{d_{p+1}} C_{p+1} \longleftarrow \ldots,$$

podemos formar la cocadena compleja

$$0 \xrightarrow{Hom_Z(d_0,Id)} Hom_Z(C_0,G) \longrightarrow \ldots \longrightarrow Hom_Z(C_p,G) \xrightarrow{Hom_Z(d_{p+1},Id)} Hom_Z(C_{p+1},G) \longrightarrow \ldots$$

Obtenida aplicando $Hom_Z(,G)$ y denotada por $Hom_Z(C,G)$. La función cofrontera d^p está dada por

$$d^p = Hom_Z(d_{p+1}, Id)$$

que significa que para cualquier $f \in Hom_Z(C_p,G)$, tenemos

$$d^p(f) = f \circ d_{p+1}$$

Por tanto, para cualquier $(p+1)$-cadena $c \in C_{p+1}$ tenemos

$$(d^p(f))(c) = f(d_{p+1}(c)).$$

Obtenemos así los grupos de cohomología $H^p(Hom_Z(C,G))$ asociado con la cocadena compleja $Hom_Z(C,G)$. Los grupos de cohomología $H^p(Hom_Z(C,G))$ también se denotan por $H^p(C;G)$ y la contravarianza de H^p está dada por la contravarianza de $Hom_Z(,Id)$.
Para ver un prueba de la contravarianza del funtor b_G visitar la referencia [20].
Del diagrama (6.3) vamos a justificar ahora el sub-diagrama

$$\begin{tikzcd} & H^*(\mathcal{M}) \\ (\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R) \arrow[ur, "e"] & \mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{FM}"] \arrow[u, "H^*"'] \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{FM}$ representa el *formalismo de Maupertius* y es un funtor covariante de la categoría de variedades diferenciables finito dimensionales $\mathcal{M}_n$ a la categoría de haces fibrados $\mathcal{FB}$.

La demostración es básicamente la misma que dimos para FC con la ligera aclaración siguiente:

El funtor $\mathcal{FM}$ en estricto sentido tendría que ir de la categoría de espacios topológicos $\mathcal{T}$ a la categoría de haces fibrados $\mathcal{FB}$, ya que estamos teniendo en cuenta que tanto el funtor b_G como H^* su categoría fuente es $\mathcal{T}$, para H^* la categoría de cadenas complejas asociada a un espacio topológico que a su vez en la base de la construcción de la variedad que luego es usada para construir la clase de isomorfismos de haces principales que tienen como base dicha variedad.

La justificación de $\mathcal{FM}$ es la siguiente.

$\mathcal{FM}$ codifica la siguiente información:

El teorema 1 de [4] muestra la equivalencia entre las ecuaciones de movimiento del Lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ asociado al sistema $\mathcal{M}$

$$\ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma + g^{\alpha\beta}\partial_\beta V(q) = 0, \;\; donde \;\; \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma})$$

y las ecuaciones geodésicas

$$\frac{d^2q^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{ds}\frac{dq^\gamma}{ds} = 0, \;\; donde \;\; \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}h^{\alpha\lambda}(\partial_\beta h_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma h_{\beta\lambda} - \partial_\lambda h_{\beta\gamma})$$

con la métrica de Jacobi

$$ds^2 = h_{\alpha\beta}dq^\alpha \otimes dq^\beta = 2\left[E - V(q)\right] g_{\alpha\beta}dq^\alpha \otimes dq^\beta, \;\; con \;\; \frac{ds}{dt} = 2\left[E - V(q)\right]$$

Por lo que tenemos una relación entre el sistema $\mathcal{M}$ con su potencial asociado $V(q)$, i.e., $(\mathcal{M}, V(q))$ y el sistema $\mathcal{M}$ con la métrica ds, i.e., $(\mathcal{M}, ds)$.

Así podemos construir un nuevo sistema con la métrica como información fundamental para la construcción del haz principal, i.e., tenemos una relación entre $(\mathcal{M}, ds)$ y $(\mathcal{M}, h)$, luego una relación entre $(\mathcal{M}, h)$ a través de la curvatura R asociada a h a través de las ecuaciones de estructura de *Cartan* con el haz $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, i.e., $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R)$.

De [4] podemos ver que $(\mathcal{M}, ds)$ define una variedad de Riemann que no contiene información de $V(q)$, así lo que hace el formalismo de Maupertius $\mathcal{FM}$ es darnos un nuevo sistema $(\mathcal{M}, h)$ y a su vez $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R)$ que se utiliza en última instancia en la cuantización topológica CT. Lo anterior puede ser traducido en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{M}, V(q)) \arrow[r, leftrightarrow, "ec.geodesicas", "variacion\mathcal{L}_{\mathcal{M}}"'] \arrow[d, "\mathcal{FM}"] & (\mathcal{M}, ds) \arrow[d, "metrica"', "Jacobi"] \\
(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R) & (\mathcal{M}, h) \arrow[l, "Curvatura", "Cartan"']
\end{tikzcd}$$

Finalmente tenemos con e una forma de asociar a cada haz principal y en nuestro caso el sistema compuesto $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R)$ la clase característica de Euler e de $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ $e(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}) \in H^*(\mathcal{M})$ que va a estar en función de la curvatura

$$e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2m}}\mathcal{R}^{i_1}_{i_2} \wedge \mathcal{R}^{i_3}_{i_4} \wedge \ldots \wedge \mathcal{R}^{i_{2m-1}}_{i_{2m}} = n.$$

Aquí termina nuestra demostración.

Capítulo 7

Conclusiones

Hemos visto que el formalismo canónico, aplicado a un sistema en particular, (como *proceso*), puede ser visto como un morfismo que lleva la información de dicho sistema a otra estructura como lo es un haz fibrado

$$\begin{tikzcd}
 & T^*\mathcal{M} \arrow[r, "(\iota_*)_*"] \arrow[dl, "\mathcal{H}_\mathcal{M}"'] & T^*\mathcal{N} \arrow[dr, "\mathcal{H}_\mathcal{N}"] & \\
R & T\mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{L}_\mathcal{M}"] \arrow[u, "\mathcal{LE}"] \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, "\pi_\mathcal{M}"] & T\mathcal{N} \arrow[r, "\mathcal{L}_\mathcal{N}"'] \arrow[u, "\mathcal{LE}"'] \arrow[d, "\pi_\mathcal{N}"] & R \\
 & \mathcal{M} \arrow[ul, "B"] \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{N} \arrow[ur, "A"'] &
\end{tikzcd}$$

donde a través de una acción para cada sistema tenemos

$$\begin{tikzcd}
R & \mathcal{M} \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "FC"'] & \mathcal{N} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "FC"] & R \\
 & \mathcal{P}^\pi_\mathcal{M} \arrow[ul, "s_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}"] \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{P}^\pi_\mathcal{N} \arrow[ur, "s_{\mathcal{L}_\mathcal{N}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}^\pi_\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}^\pi_\mathcal{N}$ codifican la infomación de los sub-diagramas de los funtores de fuerza de (6.1)

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathcal{N} \arrow[dr, "s_{\mathcal{L}_\mathcal{N}}"'] & T\mathcal{N} \arrow[l, "\mathcal{LE}"'] \arrow[r, "\pi_\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_\mathcal{N}"'] & \mathcal{N} \arrow[dl, "A"] \\
 & R &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^*\mathcal{M} \arrow[dr, "s_{\mathcal{L}_\mathcal{M}}"'] & T\mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{LE}"'] \arrow[r, "\pi_\mathcal{M}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_\mathcal{M}"'] & \mathcal{M} \arrow[dl, "B"] \\
 & R &
\end{tikzcd}$$

Luego hemos hecho la analogía gracias al funtor de fuerza (6.1) para obtener, como diagrama, la información del formalismo canónico

$$
\begin{tikzcd}
 & H^*(\mathcal{M}) & H^*(\mathcal{N}) \arrow[l, "f^*"'] & \\
(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, R) \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "i"'] & \mathcal{M} \arrow[l, "\mathcal{FM}"'] \arrow[u, "H^*"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b_G"] & \mathcal{N} \arrow[r, "\mathcal{FM}"] \arrow[u, "H^*"'] \arrow[d, "b_G"] & (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}, R) \arrow[ul, "e"'] \arrow[dl, "j"] \\
 & b_G\mathcal{M} & b_G\mathcal{N} \arrow[l, "f'^*"] &
\end{tikzcd}
$$

donde nos hemos valido de la *funtorialidad* de H^* y b_G para afirmar que el formalismo de Maupertius $\mathcal{FM}$ resulta ser también una *cantidad funtorial* y el consecuencia, $\int e$ cuantifica una transformación natural para su interpretación física.
Así, podemos concluir que hay cierta similitud y concordancia entre la cuantización topológica y la cuantización canónica luego de haber hecho la traducción al lenguaje de la teoría de categorías y con ello establecimos los siguiente:

1. Una relación entre $\mathcal{FC}$ y $\mathcal{FM}$;

2. $\mathcal{FM}$ resulta ser una cantidad funtorial y

3. el cálculo de $\int e$ (espectro topológico), da una manera de cuantificar una cantidad categórica como lo es una transformación natural y puede ser interpretado físicamente.

Con esto queremos mostrar como la teoría de categorías han venido lentamente a ser vistas como una buena formar de formalizar teorías físicas en las cuales 'procesos' pueden ser dibujados como diagramas -por ejemplo, los diagramas de Feynman-, pero interpretados algebráicamente como operadores lineales.
¿Por qué las categorías resultan ser útiles en física?
L razón es muy simple. Una categoría consiste en 'objetos' $x, y, z, ...$ y morfismos entre objetos $f : x \to y$.
Un buen ejemplo es la categoría de espacios de Hilbert donde los objetos son espacios de Hilbert y los morfismos son operadores acotados. En física podemos pensar de un

objeto como un *espacio de estado* para algún sistema físico y un morfismo como un *proceso* tomando estados de un sistema a estados de otro (posiblemente el mismo). Esto es básicamente lo que se intenta en la presente tesis, creemos que es posible en un futuro hacer uso de la teoría de n-categorías en la cuantización topológica para comenzar a establecer definiciones de conceptos como los son *estados cuánticos*, que hasta el momento permanecen en construcción.

Appendices

Apéndice A

Tensor Métrico

En geometría Riemanniana, el tensor métrico es un tensor de rango 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en un espacio localmente euclídeo.

Una vez que se elige una base local, el tensor métrico aparece como una matriz, denotada convencionalmente como g. La notación g_{ij} se utiliza convencionalmente para las componentes del tensor. Así el tensor métrico g se expresa fijada una base coordenada (usando el convenio de suma de Einstein) como:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \qquad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

En física es muy común escribir la métrica como el cuadrado del elemento de longitud, dado que el tensor es simétrico la notación física es equivalente a la notación anterior:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

La longitud de un segmento de una curva dada parametrizada por t desde a hasta b se define como:

$$L = \int_a^b \left[g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

El ángulo entre dos vectores u y v (o entre dos curvas cuyos vectores tangentes son u y v) se define como:

$$cos\theta = \frac{g_{ij}u^iv^j}{[|g_{ij}u^iu^j||g_jv^iv^j|]^{\frac{1}{2}}}$$

Una métrica euclídea no es otra cosa que una métrica arbitraria definida sobre un espacio euclídeo. Un espacio métrico es euclídeo si en el tensor de curvatura es idénticamente nulo en todo el espacio. Cuando se usan coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo las componentes del tensor métrico son constantes y, por tanto, los símbolos de Christoffel son también nulos. Sin embargo, en muchos problemas conviene usar otro tipo de coordenadas, como por ejemplo las coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, en este caso aún cuando el espacio es euclídeo las componentes del tensor métrico expresado en estas coordenadas no son constantes, y los símbolos de Christoffel no se anulan. A continuación se dan algunos ejemplos de coordenadas frecuentes.

Los sistemas de coordenadas ortogonales se caracterizan porque en esos el tensor métrico tiene una forma diagonal. A continuación se presentan ejemplos de métricas para un espacio euclídeo, el hecho de que el espacio es localmente euclídeo queda reflejado en que el tensor de curvatura calculado para todas las métricas que siguen es idénticamente nulo.

Dado un tensor métrico euclidiano en dos dimensiones, dado en coordenadas cartesianas $(u^1, u^2) = (x, y)$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que $g_{11} = g_{22} = 1$ y $g_{12} = g_{21} = 0$

La longitud de una curva C parametrizada mediante el parámetro t se reduce a la fórmula familiar del cálculo (teorema de Pitágoras):

$$L_C = \int_C \left[\sum_{ij} g_{ij} du^i du^j\right]^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{ij} g_{ij} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right]^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[1\frac{du^1}{dt}\frac{du^1}{dt} + 0\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + 0\frac{du^2}{dt}\frac{du^1}{dt} + 1\frac{du^2}{dt}\frac{du^2}{dt}\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

o bien en la notación más familiar:

$$L_C = \int \left[dx^2 + dy^2\right]^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Apéndice B

Grupos de Lie

Recordar que una *álgebra* A es un espacio vectorial con un producto.
El producto debe tener la propiedad

$$a(uv) = (au)v = u(av),$$

para toda $a \in R$ y $u, v \in A$. Una función $\phi : A \to A'$ entre álgebras es llamada $homomorfismo$ si $\phi(u \cdot v) = \phi(u) \cdot \phi(v)$.
Una *álgebra de Lie* es una álgebra A donde la multiplicación, i.e., el *corchete de Lie* $(u, v) \mapsto [u, v]$, tiene las siguientes propiedades:

1. $[u, u] = 0$ para toda $u \in A$ y
2. $[u, [v, w]] + [w\,[u, v]] + [v, [w, u]] = 0$ para toda $u, v, w \in A$. La condición (2) es usualmente llamada $identidad\ de\ Jacobi$.

Un grupo de Lie es una variedad (de Banach) suave $\mathcal{M}$ que tiene a la vez una G-estructura de grupo consistente con su $\mathcal{M}$-estructura de variedad en el setido de que la *multiplicación de grupo*

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh \tag{B.1}$$

y la inversión de grupo

$$\nu : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1} \tag{B.2}$$

son funciones C^k.

Por ejemplo, cualquier nD-espacio vectorial de Banach V es un grupo de Lie Abeliano con las operaciones de grupo $\mu : V \times V \to V$, $\mu(x, y) = x + y$, y $\nu : V \to V$, $\nu(x) = -x$. La identidad es el vector cero. Llamamos a tal grupo de Lie un grupo vectorial.

Sean G y H dos grupos de Lie. Una función $G \to H$ se dice un morfismo de grupos de Lie (o su homomorfismo suave) si es homomorfimo como grupos abstractos y difeomorfismo como variedades diferenciables.

Similarmente, un grupo G que es a su vez un espacio topológico se dice *grupo topológico* si sus morfismos son continuos, i.e., C^0-funciones.

Para cada $g \in G$ con G un grupo de Lie, las siguientes funciones,

$$L_g : G \to G, \;\; h \mapsto gh,$$

$$R_h : G \to G, \;\; g \mapsto gh,$$

son llamadas funciones *traslación izquierda* y *derecha*. Como $L_g \circ L_h = L_{gh}$, y $R_g \circ R_h = R_{gh}$, se sigue que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$, entonces ambas L_g y R_g son difeomorfismos. Más aún $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$, i.e., las traslaciones izquierda y derecha conmutan.

Un campo vectorial X en G es llamado *campo vectorial izquierdo invariante* si para cada $g \in G$, $L_g^* X = X$, esto es, si $(T_h L_g)X(h) = X(gh)$ para toda $h \in G$, i.e., el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "TL_g"] & TG \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "L_g"'] & G \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

La correspondencia $G \to TG$ y $L_g \to TL_g$ define un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{LG} \Rightarrow \mathcal{LG}$ de la categoría de grupos de Lie $\mathcal{LG}$ en el mismo.

Apéndice C

Axiomas de Eilenberg-Steenrod

En matemáticas, específicamente en topología algebraica, los axiomas de Eilenberg-Steenrod son propiedades que las teorías de homología de espacios topológicos tienen en común. El ejemplo por excelencia de una teoría de homología que satisface los axiomas es la homología singular, desarrollada por Samuel Eilenberg y Norman Steenrod.

Se puede definir una teoría de homología como una secuencia de funtores que satisfacen los axiomas de Eilenberg-Steenrod. El enfoque axiomático, que se desarrolló en 1945, permite probar resultados, como la sucesión de Mayer-Vietoris, que son comunes a todas las teorías de homología que satisfacen los axiomas.

Si se omite el axioma de dimensión (descrito a continuación), los axiomas restantes definen lo que se llama una teoría de homología extraordinaria.
Teorías de cohomología $extraordinaria$ surgieron por primera vez en la teoría K y el $cobordismo$.
Los axiomas se aplican a una sucesión de funtores H_n de la categoría de pares (X, A) de espacios topológicos a la categoría de grupos Abelianos, junto con una transformación natural $\partial : H_i(X, A) \to H_{i-1}(A)$ llamada $función\ frontera$ (aquí $H_{i-1}(A)$ es la notación reducida de $H_{i-1}(A, \emptyset)$). Los axiomas son:

1. Homotopía: Funciones homotópicas inducen la misma función en homología, i.e., si $g : (X, A) \to (Y, B)$ es homotópica a $h : (X, A) \to (Y, B)$, entonces sus homomorfismos inducidos son los mismos.

2. Excision: Si (X, A) es un par y U es un subconjunto abierto de X tal que la cerradura de U está contenida en el interior de A, entonces la función de inclusión $i : (X/U, A/U) \to (X, A)$ induce un isomorfismo en homología.

3. Dimensión: Sea P el espacio con un sólo punto, entonces $H_n(P) = 0$ para toda $n \neq 0$.

4. Aditividad: Si $\coprod_\alpha X_\alpha$ es la unión disjunta de una famillia de espacios topológicos X_α, entonces
$$H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$$

5. Exactitud: Cada par (X, A) induce una sucesión larga exacta en homología, vía las inclusiones $i : A \to X$ y $j : X \to (X, A)$:
$$... \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{k} H_{n-1}(A) \longrightarrow ...,$$

   Si P es el espacio de un solo punto, entonces $H_0(P)$ es llamado el grupo de coeficientes. Por ejemplo, la homología singular tiene como coeficientes los números enteros.

Apéndice D

Axiomas de Atiyah-Segal

Las teorías de campo topológico conocidas caen en dos clases generales: TTCCs tipo-Schwarz y TTCCs tipo-Witten. Las segundas, también se refieren a veces, como teorías de campo cohomológico.

En TTCCs tipo-Schwarz, las funciones de correlación calculadas por la integral de camino son invariantes topológicos porque la integral y los observables de campo cuántico son explícitamente independientes de la métrica. Por ejemplo, en el modelo BF, el espacio-tiempo es una variedad bidimensional $\mathcal{M}$, los observables son construidas desde un formulario de una 2-forma F, un auxiliar escalar B y sus derivados. La acción (que determina la integral de camino) es

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}} BF$$

La métrica del espacio-tiempo no aparece en esta teoría, por lo que la teoría es explícitamente topológicamente invariante. Otro ejemplo más famoso es la teoría de Chern-Simons, que puede utilizarse para calcular invariantes de nudo.

En las TTCCs tipo-Witten, la invarianza topológica es más sutil. Por ejemplo el Lagrangiano para el modelo dependen explícitamente de la métrica, pero uno puede mostrar que el valor esperado de la función de partición y una clase especial de funciones de correlación son en realidad un difeomorfismo invariante.

Atiyah sugiere un conjunto de axiomas de la teoría cuántica topológica de campos (Atiyah, 1988) que fueron inspirado por los axiomas de teoría conforme de campos de G. Segal y la idea de Witten del significado geométrico de la supersimetría, (Witten, 1982). Los axiomas de Atiyah están construidos pegados a la frontera con una transformación diferenciable (topológica o continua), mientras con Segal con una transformación conforme. Estos axiomas han sido relativamente útiles para tratamientos matemáticos de TCCs tipo-Schwarz, aunque no es claro que capten toda la estructura de TCCs tipo-Witten. La idea básica es que una TTCC es un funtor de una determinada categoría de cobordismos a la categoría de espacios vectoriales.

De hecho, hay dos conjuntos diferentes de axiomas que razonablemente podrían llamarse axiomas de Atiyah. Estos axiomas difieren básicamente en si o no estudian una TTCC definida en una sóla n-variedad espacio-temporal de Riemann / Lorentz $\mathcal{M}$ fija, o una TTCC definida en todos las n-variedades espacio-temporales a la vez.

Sea Λ un anillo conmutativo con unidad. Atiyah propone originalmente los axiomas de una TTCC en dimensión d definida sobre un anillo base Λ como sigue, lo cual es similar a la categoría de espacios topológicos
Un Λ-módulo finitamente generado $Z(\Sigma)$, asociado a cada variedad Σ cerrada de dimensión d diferenciable (correspondiente al axioma de homotopía),
Un elemento de $Z(\mathcal{M}) \in Z(\partial\mathcal{M})$ asociado a cada variedad $\mathcal{M}$ lisa orientada de dimensión $d+1$ con frontera (correspondiente a un axioma aditivo).
Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas

1. Z es $funtorial$ con respecto a la orientación que preserva el difeomorfismo de Σ y $\mathcal{M}$,

2. Z es involutivo, es decir, $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$ donde Σ^* es Σ con orientación opuesta y $Z(\Sigma)^*$ denota el módulo dual,

3. Z es multiplicativa

4. $Z(\phi) = \Lambda$ para la d-variedad y $Z(\phi) = 1$ para la $d+1$-variedad vacía.

5. $Z(\mathcal{M}^*) = \overline{Z(M)}$ (el axioma Hermitiano).

Bibliografía

[1] Bredon, Glen E.. *Topology and Geometry, Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1993.

[2] Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[3] Ivorra Castillo, Carlos. *Topología Algebraica*, Universidad de Valencia.

[4] Hernando Quevedo, Francisco Nettel. *Topological quantization of the harmonic oscillator*, 2006 J: Math. Phys

[5] Ivancevic G. Vladimir, Ivancevic T. Tijana *Applied Differential Geometry, A Modern Introduction*, World Scientific, 2007.

[6] M. Boothby, William *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1986.

[7] Milnor, John W.; Stasheff, Jim *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies. 76. Princeton University Press, 1974.

[8] Einstein, Albert *On a Heuristic Point of View Concernig the Production and Transformation of Light*, Annales der Physik, 1905.

[9] Einstein, Albert *On the Electrodynamics of Moving Bodies*, Annales der Physik, 1905.

[10] Raoul Bott, Loring W. Tu *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982

[11] Robert R. Bruner, Michel Catanzaro, J. Peter May. *Characteristic classes*

[12] Bronw, Laurence Mark *Feynmans Thesis*, World Scientific, 2005.

[13] Witten, Edward *Global Anomalies in String Theory*, World Scientific, 1985.

[14] Kiritsis, Elias *String Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2007.

[15] Francisco Nettel, Hernando Quevedo, Moicés Rodríguez. *Topological spectrum of Mechanical Systems*, 2009 Reports on mathematical physics

[16] Leonardo Patiño, Hernando Quevedo *Topological quantization of gravitational fields*. 2005 Journal of Mathemtical Physics 46. 022502

[17] Orlando Álvarez. *Topological Quantization and Cohomology*. 1985 Communications in Mathematical Physics

[18] A. Cardona, A. Reyes *Geometría y Topología en Física Teórica*, 2006

[19] Manuel Pulido *Topología Algebraica: Homología Singular*. 2015 trabajo de fin de grado

[20] Mauricio Gómez *Introduction to Characteristic Classes*, University of Copenhagen

[21] Prerna Nadathur *An Introduction to Homology*. 2007

[22] Jean Gallier and Jocelyn Quaintance *A Gentle Introduction to Homology, Cohomology, and Sheaf Cohomology*. 2019 University of Pennsylvania

[23] Sergio Plaza *Topología Algebraica: Una introducción*. 2010 Universidad de Santiago de Chile

[24] Samuel Eilenberg, Norman Steenrod *Axiomatic approach to homology theory*. 1945 Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 31 117-120

[25] Glen Bredon *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematcs. 1993 Springer-Verlag

[26] Steve Awodey *Isomorphisms, Category Theory*. 2006 Oxford University Press p.11

[27] Michel Atiyah *Topological Quantum Field Theories*. 1989 Publications Mathématiques de I'IHÉS 68: 175-186

[28] Edward Witten *Topologicl sigma models*. 1988 Communications in Mathematical Physics 118:411-449

[29] Daniel Freed *Lectures on Topological Quantum Field Theory*. 1992 Departament of Mathematics University of Texas

[30] Jean-Louis Basdevant *Variational Principles in Physics*. 2007 Springer

[31] Chris Kottke *Bundles, Classifyng Spaces and Characteristic Classes*. 2012

[32] John C. Baez and Aaron Lauda *A prehistory of n-Categorical Physics*. 2009

[33] John C. Baez and John Huerta *An invitation to Higher Gauge Theory*. 2010, University of California