



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPAGACIÓN LIBRE DE ONDAS GRAVITACIONALES
EN TEORÍAS $f(R)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN FÍSICA

PRESENTA:

CYNTHIA MALDONADO GONZALEZ

TUTOR:

DR. FRANCISCO NETTEL RUEDA

Ciudad de México, 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Noel y Pascual Maldonado †
porque el tiempo no me alcanzo...*

Agradecimientos

"Las estrellas parecían lo suficientemente cercanas como para tocarlas y nunca antes había visto tantas. Siempre creí que el señuelo de volar es el atractivo de la belleza".

Amelia Earhart

"No tiembla la luz de las estrellas. Tiembla nuestra mirada, sabedora del enorme esfuerzo que esa luz ha realizado por hacerse ver".

Lorenzo Oliván

Pensar que esta noche por fin estoy escribiendo los agradecimientos que creí jamás llegarían, me llena de orgullo y nostalgia. Tratar de describir todo lo que este trabajo de tesis significa es demasiado abrumante que ni yo misma puedo digerir todas las emociones.

Esta tesis contiene todas las lágrimas e inseguridades que tuve que enfrentar durante mi travesía en la Facultad de Ciencias; representa todo el camino que tuve que recorrer para demostrarme que soy capaz de superar cualquier barrera que me coloque al frente. Me recuerda las muchas veces que me perdí al intentar aferrarme al pasado y la agitada transformación a la que me expuse para convertirme en la que ahora soy.

Ninguna transición habría sido posible sin el apoyo incondicional de las personas más importantes para mí. Este trabajo y esta versión de mí, está dedicada a ustedes.

A mi hermana, Alin, por recordarme durante las noches de desvelo que mi capacidad no tenía límites e impulsarme a confiar en mí, por acompañarme con un café en el comedor de la casa mientras yo intentaba mis tareas. Tus consejos y sonrisas muchas veces me han salvado de mí misma.

A mi mamá, Adela, porque pese a la divergencia de opiniones siempre estás enfrentando los problemas a mi lado; por los regaños dentro y fuera de mi vida profesional. Por haberme hecho consciente de las desigualdades y mostrarme lo crudo que puede ser el mundo.

A mi papá, Héctor, por nunca dudar de mí, por esperar pacientemente mis éxitos y callar mis fracasos. Por señalarme lo que la resiliencia puede lograr, por las palabras adecuadas en los momentos oportunos. Por construirme puentes cuando caí.

A mi novio, Brian, por enseñarme lo que una pareja puede lograr con los enfoques correctos, por no abandonarme cuando más lo necesité. Por celebrar mis triunfos y resguardarme en mis derrotas. Por aventurarme a nuevos horizontes y por el infinito amor que me has dado durante todos estos años. Este paso es nuestro.

A mi amigo, Saúl, por las breves pero valiosas conversaciones, por los consejos concretos pero certeros. Por los innumerables memes que me mantuvieron a flote algunas noches de escritura de esta tesis. Por mostrarme lo que una competencia sana puede alcanzar.

A mis compañeras de viaje, Carmen y Gaby, por hacerme descubrir que las memorias de las buenas amistades no se dispersan pese a la distancia e ideologías. Me hicieron crecer y madurar, gracias por acompañarme el tiempo que nos permitimos. Les recordaré siempre.

A mis roomies Ara y Maureen, por llenarme de experiencias a través de sus vivencias. Por hacerme reír cuando me abrumaban los pensamientos dentro de mi habitación. Y por creerme su divulgadora científica de primera mano.

A Pedro Quistian, por darme el empujón para continuar con mis sueños y estudiar Física. Por ayudarme a conocer a mis mejores amigos haciendo ciencia.

A mi asesor, Dr. Francisco Nettel, por la inmensa serenidad durante mi aprendizaje, por confiar y potenciar mis virtudes. Por brindarme la posibilidad de crecer profesionalmente a través de todas las oportunidades a las que me dio acceso. Infinitas gracias.

A mis sinodales, Dr. Mariano Chernicoff, Dra. Luisa Jaime por tomarse el tiempo para leer y corregir este trabajo; Dr. César López y Dr. Hernando Quevedo, por escucharme y retroalimentarme con sus críticas. Sus consejos siempre serán bien recibidos.

Finalmente, a ti, Cynthia. Por no ceder a la frustración y luchar incluso cuando las batallas se veían perdidas. Que este trabajo te sirva para recordar lo lejos que puedes llegar.

Índice general

Agradecimientos	II
Notación	VII
Introducción	VIII
1 Formalismo Matemático - Geometría Diferencial	1
§1.1 Espaciotiempo	1
§1.2 Derivada de Lie	4
§1.3 Conexión y Derivada Covariante	5
§1.4 Transporte Paralelo	6
§1.5 Curvatura	7
§1.6 Métrica	8
§1.7 Conexión de Levi-Civita	10
§1.8 Ecuación Geodésica	11
§1.9 Propiedades del Tensor de Curvatura	12
§1.10 Tensor de Ricci y Escalar de Curvatura	14
§1.11 Ecuación de Desviación Geodésica	15
2 Ecuaciones de Campo	17
§2.1 Principio de Equivalencia	17
§2.2 Tensor Energía - Momento	19
§2.3 Acción de Einstein-Hilbert	21
3 Límite de Campo Débil y Propagación Libre de Ondas Gravitacionales	26

§3.1 Ecuaciones de Campo Gravitacional Linealizadas	27
§3.2 Invariancia de Norma	29
§3.3 Elección de Norma	31
§3.3.1 Norma de Lorenz	32
§3.3.2 Norma de Radiación	34
§3.4 Ondas Gravitacionales	36
4 Teorías de Gravedad Modificada	38
§4.1 Teoría de Brans - Dicke	38
§4.2 Teorías $f(R)$	40
§4.2.1 Formalismo Métrico	41
§4.3 Equivalencia entre teorías: Brans-Dicke y $f(R)$	44
5 Límite de Campo Débil en $f(R)$ y Propagación Libre de Ondas Gravitacionales	47
§5.1 Ecuaciones para el Límite de Campo Débil de $f(R)$	49
§5.2 Fijación de $R_0 = 0$	50
§5.3 Invariancia de Norma	52
6 Resultados	53
§6.1 Análisis de las Ecuaciones Escalares	53
§6.2 Análisis de las Ecuaciones Tensoriales	55
§6.2.1 Transformación de Norma: Perturbación de Traza Invertida	55
§6.2.2 Redefinición de la Perturbación de Traza Invertida	58
§6.2.3 Modos de polarización: Perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$	65
§6.2.4 Modos de polarización: Perturbación $h_{\mu\nu}$	68
7 Conclusiones	72
A Equivalencia entre teoría de Brans-Dicke y teoría $f(R)$	74
B Equivalencia Jordan frame y Einstein frame	79

C	Ecuaciones de Campo bajo la aproximación robusta	85
D	Ecuaciones Escalar y Tensorial en $f(R)$ y $R = R_0 + R^{(1)}$	88
E	Solución a Ecuaciones de Campo - Transformaciones de Norma	91
§E.1	Parte I: Usando Relatividad General	91
§E.2	Parte II: Usando $f(R)$ con $R = R_0 + R^{(1)}$ y $R_0 = 0$	98
§E.3	Parte III: Definiendo una nueva perturbación de traza invertida	101

Índice de figuras

1.1	Representación de variedad	2
1.2	Desviación geodésica	15
3.1	Representación del pull-back de la métrica	29

Notación

- \mathcal{M} , Variedad diferencial;
- p , Evento sobre el espaciotiempo;
- $g_{\mu\nu}$, Métrica es espaciotiempo curvos;
- $\eta_{\mu\nu}$, Métrica de Minkowski;
- $h_{\mu\nu}$, Perturbación métrica;
- h , Traza de la perturbación;
- $\bar{h}_{\mu\nu}$, Perturbación de traza invertida;
- ϕ Mapeos;
- ϕ^* Pull-back, ϕ_* Push-forward;
- Φ Campo;
- $\gamma(t)$, Curvas parametrizadas;
- $\lambda(t)$, Curvas integrales;
- X , Espacio vectorial;
- $T_p\mathcal{M}$, Espacio tangente;
- $T_p^*\mathcal{M}$, Espacio dual;
- ∇ , Conexión;
- \mathcal{L} , Derivada de Lie;
- $\gamma_s(t)$, Familia de geodésicas uniparamétricas;
- ∇_μ , Derivada covariante asociada a la conexión métrica;
- $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$, D'Alambertiano;
- $T_{\mu\nu}$, Tensor energía-momento;
- $R_{\mu\nu}$, Tensor de Riemann;
- $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, Escalar de Ricci;
- $G_{\mu\nu}$, Tensor de Einstein;
- Ψ , Campos de materia;
- τ , Tiempo propio;
- S , Acción;
- K^μ , Vector de onda;
- q^μ , Vector de onda masiva;
- $\kappa := 8\pi G$;
- $(\nabla R)^2 := g^{\mu\nu} (\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R)$.

Introducción

Escritas en un lenguaje fino y con lucidez, las ecuaciones de campo publicadas en noviembre de 1915 por el físico alemán Albert Einstein, representaron y representarán uno de los grandes pilares de las teorías físicas; pues en ellas se concentra todo el formalismo de la relatividad general (RG). Gracias a su elegancia matemática, las ecuaciones de campo han sido capaces de superar las pruebas teórico-experimentales a las que han sido sometidas, por mencionar algunas destacan, la deflexión gravitatoria de la luz [1], la corrección al cálculo del perihelio de Mercurio [1] y el corrimiento al rojo gravitacional [2]; convirtiendo a la RG en una teoría estándar de gravedad que funciona muy bien a escalas de distancia del sistema solar [3]. Además, gracias a la validez de la existencia de las ondas gravitacionales el pasado septiembre de 2015 en el Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO) [4] fue posible comprobar experimentalmente la RG bajo un campo gravitacional fuerte.

No obstante, pese a la gran estructura física y matemática que la RG aporta, algunas investigaciones en cosmología y astrofísica, tales como el problema de la masa faltante (materia oscura) [5], el periodo de inflación en épocas tempranas y la aceleración tardía del Universo [6]; se han visto en la necesidad de proponer soluciones bajo el yugo de teorías que modifican la gravedad, pues bajo el contexto de la relatividad general, estas investigaciones no han encontrado respuestas plenamente satisfactorias.

En particular, las llamadas teorías de gravedad modificada $f(R)$ [7] [8] se han enfocado en dar cuenta de un modelo cosmológico que evite la inclusión de componentes oscuras y de campos inflatónicos, para ello modifican la teoría de la relatividad general al sustituir en la acción, el escalar de curvatura por una función de éste. Existen múltiples modelos

de $f(R)$, por mencionar algunos destacan, Starobinsky [9], Hu-Sawicki [10], Tsujikawa [7] [11] y el modelo exponencial [12].

Por otro lado, gracias a la detección directa de ondas gravitacionales por los interferómetros a LIGO/VIRGO [4], las recientes investigaciones han encauzado en proponer a éstas como una manera para probar teorías de gravedad modificada [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22].

Las ondas gravitacionales son ondulaciones en el espaciotiempo causadas por algunos de los procesos más violentos y energéticos del Universo, tales como, la colisión de agujeros negros, el colapso de núcleos estelares, los sistemas binarios de estrellas de neutrones coalescentes o estrellas enanas blancas. Estas ondas viajan a la velocidad de la luz a través del Universo y llevan consigo información sobre sus orígenes catastróficos, así como pistas inestimables de la naturaleza de la gravedad en sí misma.

Motivada por todo el contexto previo, en esta tesis se abordó el estudio de la propagación libre de las ondas gravitacionales en el límite de campo débil en un fondo de Minkowski bajo el marco de las teorías $f(R)$, dando paso a un formalismo de segundo orden para la métrica y el escalar de curvatura. Este trabajo se describe a través de siete capítulos.

El capítulo uno contiene un repaso de la herramienta matemática necesaria para comprender los principios de la RG. El segundo capítulo describe la importancia y deducción de las ecuaciones de campo a través de la variación de la acción de Einstein-Hilbert. En el tercer capítulo se estudia el formalismo matemático de las ondas gravitacionales en el yugo de la RG; mientras que, en el cuarto, se describen las teorías de gravedad modificada, haciendo hincapié en las teorías $f(R)$. El capítulo cinco contiene el desarrollo completo de las ecuaciones escalares y tensoriales fundamentales de esta tesis, cuyo análisis se describe minuciosamente en el capítulo seis. Finalmente, el último capítulo expone las conclusiones y/o motivaciones futuras del presente trabajo.

Capítulo 1

Formalismo Matemático - Geometría Diferencial

Los fenómenos naturales se estudian a través de teorías físicas compuestas de principios empíricos y de simetrías. En particular, la teoría de la relatividad general es una teoría física expresada de manera covariante que describe la geometría del espaciotiempo y la gravitación a través de las ecuaciones de campo.

1.1. Espaciotiempo

Previo a la definición formal de las ecuaciones de campo, habrá que describir el fondo sobre el que se trabajará. Este fondo es mejor conocido como *espaciotiempo* y se interpreta como un conjunto 4-dimensional con elementos etiquetados por tres dimensiones de espacio y una de tiempo [1]. Físicamente, representa al tejido sobre el cual existen eventos p separados entre sí por una distancia s .

Matemáticamente, el espaciotiempo se define como un par (\mathcal{M}, g) , donde \mathcal{M} es una variedad diferencial 4-dimensional y g la métrica con signatura lorentziana sobre \mathcal{M} [1] [23].

De manera informal, una variedad es un espacio con una topología complicada, que puede ser curvo, pero que en regiones locales se comporta como \mathbb{R}^n . Es decir, las variedades se forman de la unión suave de parches coordinados que localmente son como \mathbb{R}^n .

Para precisar la definición de variedad habrá que hacer uso de los *mapeos* y las *cartas*. Así, dados dos conjuntos \mathcal{M} y \mathcal{N} , un mapeo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una relación que asigna cada elemento de \mathcal{M} con un elemento de \mathcal{N} . Estos mapeos pueden ser únicamente inyectivos, suprayectivos; o bien, biyectivos; a éstos últimos se les conocen como *difeomorfismos* y otorgan la estructura diferencial a las variedades [1] [23].

Una *carta* o *sistema coordinado* consiste de un subconjunto abierto U de un conjunto \mathcal{M} junto con un mapeo inyectivo $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, la imagen $\phi(U)$ es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n [23].

A la colección indexada de cartas se le conoce como *atlas* y nos permite definir formalmente a las variedades. Así, una variedad \mathcal{M} es un conjunto \mathcal{M} junto con un atlas (U_α, ϕ_α) , tal que (ver figura 1.1):

1. La unión de U_α es igual a \mathcal{M} , es decir, U_α cubre \mathcal{M} ,
2. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces el mapeo diferenciable $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$.

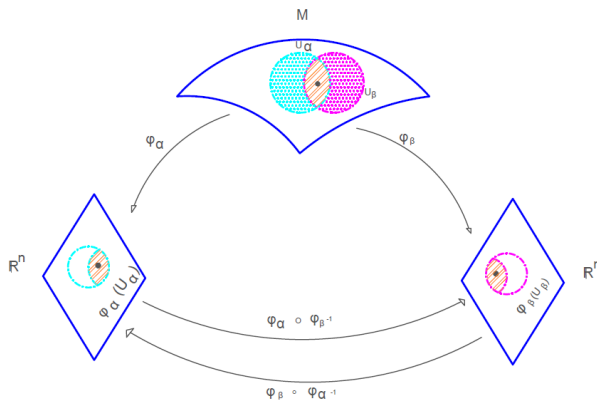


Figura 1.1: Representación de variedad

Sobre \mathcal{M} se definen funciones lineales $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}$ y curvas parametrizadas $\gamma(t)$ con el parámetro t , éstas últimas surgen de mapear intervalos en \mathbb{R} sobre \mathcal{M} . Al analizar el cambio en el parámetro t de f actuando sobre cada punto en $\gamma(t)$ se obtiene la *derivada direccional generalizada*; a través de la cual se define el concepto de *vector*. Un vector ξ en un punto p se entiende como el operador derivada direccional a lo largo de una curva γ a la cual es tangente; así, $\xi(f)$ es la derivada direccional de f a lo largo de γ en p [1] [23].

A cada punto $p \in \mathcal{M}$ se le asocia un conjunto con todos los posibles vectores a éste y es conocido como *espacio tangente* $T_p\mathcal{M}$. Este espacio puede ser identificado con el espacio de las derivadas direccionales a lo largo de curvas que atraviesan p . Los elementos de $T_p\mathcal{M}$ son vectores contravariantes y en notación indicial se representan como vectores con superíndices [1] [24].

A su vez, existe el *espacio dual* $T_p^*\mathcal{M}$ cuyos elementos son todos los mapeos lineales que actúan sobre vectores y que entregan valores reales, es decir $\omega : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Los elementos del espacio dual se conocen como vectores covariantes y su notación indicial se distingue por tener los índices abajo [1] [24].

Por lo tanto, es posible expresar cada elemento X del espacio tangente y ω del espacio dual como una combinación lineal de las bases $e_{(\mu)}$ y $\theta^{(\nu)}$ respectivamente, lo que conduce eventualmente a la definición de tensor [24].

Un *tensor* tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ es un mapeo multilineal que actúa sobre k -elementos de $T_p^*\mathcal{M}$ y l -elementos de $T_p\mathcal{M}$, esto es: $T : T_p^*\mathcal{M} \times T_p^*\mathcal{M} \times T_p^*\mathcal{M} \times \dots \times T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ [24].

Este grupo de mapeos multilineales se caracterizan por el número de componentes con las que cuentan y por su rango de la siguiente forma [24]:

a) Escalares, si son tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

b) Vectores, si son tensores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

c) Co-vectores o 1-formas, si son tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d) Métricas, si son tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ simétricos y no degenerados ,

e) Formas diferenciales, si son tensores $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ con $0 \leq p \leq n$ completamente anti-

métricos.¹

Entre variedades se pueden realizar múltiples mapeos, en particular los *difeomorfismos*, los cuales inducen dos mapeos de gran importancia: el *pull-back* (ϕ^*) y el *push-forward* (ϕ_*); y cuyas definiciones se enuncian a continuación [23]:

Considere dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} y un campo vectorial $X \in T_p\mathcal{M}$. Se define el push-forward de $X(f)$ por ϕ como la composición del campo vectorial X evaluado en una función $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con el mapeo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, es decir:

$$\phi_*X(f) = X(\phi^*f), \quad (1.1)$$

mientras que, el pull-back de una uno-forma ω actúa sobre el campo vectorial X como:

$$\phi^*\omega(X) = \omega(\phi_*X), \quad (1.2)$$

así, el pull-back de la métrica, dados dos campos vectoriales X y Y , se define como:

$$\phi^*g(X, Y) = g(\phi_*X, \phi_*Y). \quad (1.3)$$

Estos mapeos son importantes pues ayudan a definir la *derivada de Lie* que a su vez, como se verá, establece la noción de isometría.

1.2. Derivada de Lie

Ya que en cada elemento p del espaciotiempo existe un espacio vectorial $\xi \in T_p\mathcal{M}$ siempre es posible encontrar una *curva integral* $\lambda(t)$ dada una condición inicial. Una curva integral $\lambda(t)$ de un campo vectorial ξ sobre \mathcal{M} con condición inicial $\lambda(0) = p$, es una curva que pasa a través de p y tal que, para cada punto $p(t)$ en esta curva, su vector tangente $\lambda'(t)$, coincide con el valor $\xi|_{\lambda(t)}$.

A su vez, ξ define una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\phi_t : U \rightarrow \mathcal{M}$ que mapean campos vectoriales X en p en $\phi_t^*X|_{\phi_t(p)}$.

¹Un tensor T_{ij} es simétrico si $T_{ij} = T_{ji}$; y antisimétrico si $T_{ij} = -T_{ji}$, donde $T_{ij} = T(e_{(i)}, e_{(j)})$

Así, se define a la *derivada de Lie* de un campo vectorial ξ con respecto a X como [1]:

$$\mathcal{L}_\xi X|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X|_p - \phi_{t*} X|_p}{t}, \quad (1.4)$$

donde ϕ_{t*} representa el push-forward del vector $X|_p$ respecto al parámetro t . La derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi X|_p$ de un campo vectorial X depende de la dirección de ξ en el punto p y en los puntos vecinos. Físicamente, esta derivada puede entenderse como la derivada en un flujo de un fluido, donde los difeomorfismos representarían el "fluir sobre las curvas integrales" [1].

Sin embargo, debido a la vinculación inevitable de la derivada de Lie con los campos vectoriales ξ y su fuerte dependencia a las curvas integrales la convirtieron en una opción descartable para representar la generalización del operador derivada parcial en las variedades.

1.3. Conexión y Derivada Covariante

En la sección anterior se mencionó que la derivada de Lie es un operador no adecuado para generalizar el concepto de *derivada parcial*, pues tiene dependencia con las curvas integrales y los campos vectoriales. Por lo que, podría resultar tentador el hacer uso de las derivadas parciales que forman la base coordenada de los espacios tangentes $T_p\mathcal{M}$, sin embargo, éstas también son descartables pues tienen una dependencia con los sistemas coordenados.

Por lo tanto, se requiere de una estructura adicional que permita lograr obtener el operador derivada parcial; a esta estructura se le conoce como *conexión lineal* $\nabla: T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ [1] [25]. Una conexión en un punto $p \in \mathcal{M}$ es una regla que asigna a cada campo vectorial X en p un operador diferencial ∇_X el cual mapea campos vectoriales arbitrarios en campos vectoriales $\nabla_X Y$ donde [23]:

- $\nabla_X Y$ es un tensor en el argumento X , es decir, para cualquier función f, g y campos vectoriales X, Y, Z se cumple que $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

- $\nabla_X Y$ es lineal en Y , es decir, para cualquier campo Y, Z y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \nabla_X Y + \beta \nabla_X Z$;
- Para cualquier función f y campo vectorial Y se cumple $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Donde $\nabla_X Y$ es la *derivada covariante* de Y en la dirección de X en p . La derivada covariante requiere de una conexión que esté especificada en un sistema coordenado por un conjunto de coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ conocidos como *coeficientes de la conexión* [1], los cuales en general cuentan, con $n^3 = 64$ funciones independientes en la variedad para el caso de $n = 4$ dimensiones.

La definición matemática de la derivada covariante del campo vectorial Y es:

$$Y_{;\mu}^\sigma = [\nabla Y]_{\mu}^\sigma = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} Y^\sigma + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma Y^\nu \right] \text{ con } \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.5)$$

donde el último término representa a la generalización de la derivada parcial [1].

Cabe destacar que ni ∇_X ni los coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ representan tensores, pese a que $\nabla_X Y$ sea uno de categoría (1,0) [24]. Note que es posible definir tantas conexiones como se deseen, pues solo se necesita conocer cómo es el comportamiento de (1.5) sobre cada elemento p en la variedad. La importancia de la conexión, no solo radica en su fundamental papel para definir a la derivada covariante, sino que, además permite analizar el comportamiento entre vectores que viven en espacios vectoriales a través del *transporte paralelo*.

1.4. Transporte Paralelo

Al hablar de la derivada es común pensar en una tasa de cambio respecto a algo; sin embargo, para el caso de los tensores no es muy claro como estudiar este cambio y/o comparación dados diferentes puntos en el espaciotiempo.

Gracias a la derivada covariante se puede cuantificar la tasa de cambio instantánea de un campo tensorial a lo largo de una curva X del campo tensorial Y (i.e. $\nabla_X Y$). La idea de transportar paralelamente un vector es posible gracias a la conexión, la cual define una

manera específica de mantener un tensor constante a lo largo de una trayectoria. Así, a la noción de mover un vector manteniéndolo constante se le conoce como *transporte paralelo* [1].

La ecuación del transporte paralelo de un vector X a lo largo de una trayectoria $x^\mu(\lambda)$ se define como:

$$\frac{d}{d\lambda}X^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda}X^\rho = 0, \quad (1.6)$$

es decir, si se satisface que $\nabla_X Y = 0$, entonces Y será transportado paralelamente a lo largo de X [1].

1.5. Curvatura

Hablar del transporte paralelo motiva la discusión de la llamada *curvatura* del espacio-tiempo; el cual es un tensor que toma tres campos vectoriales y arroja otro; físicamente mide cuán diferente es una variedad plana de una curva a través del transporte paralelo. Esto es, si el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva regresa al mismo vector de tal manera que su diferencia sea cero, entonces se dice que la *variedad es plana*. Por el contrario, si el transporte paralelo es distinto de cero se tiene una *variedad curva*. Por lo que, es posible determinar si una variedad es curva o no, evaluando esta diferencia al hacer el transporte paralelo en una curva cerrada.

El *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann* se obtiene de la conexión ∇ ; y se caracteriza por ser un tensor (1,3) y cuyo actuar sobre los campos vectoriales se describe como [1] [25]:

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (1.7)$$

donde ∇_X es la derivada covariante en dirección del campo vectorial X y $\nabla_{[X, Y]}$ representa a la derivada covariante en dirección del conmutador; el cual se anula cuando X y Y son tomados como vectores de una base coordenada.

Existen ciertas propiedades del tensor de Riemann que vale la pena enunciar, sin embargo, primero se definirá formalmente a la métrica; dejando para las secciones posteriores la descripción de estas características.

1.6. Métrica

El espaciotiempo es una variedad Riemmaniana en la cual existe una colección de eventos; sobre este tejido se definen funciones, espacios vectoriales, espacios duales, mapeos diferenciales y campos tensoriales; dentro de estos últimos existe una categoría muy particular conocida como tensores métricos $g_{\mu\nu}$ con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

El tensor métrico $g_{\mu\nu} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es un tensor (0,2) definido en $p \in \mathcal{M}$. Al campo tensorial de tensores métricos se le conoce como *métrica* y satisface [1]:

- Ser no degenerada, es decir, si en todo punto no existe un vector distinto de cero X tal que, $g(X, Y) = 0$, para todo $Y \in T_p\mathcal{M}$.
- Ser simétrico, es decir $g(X, Y) = g(Y, X)$.

Si además cumple el ser positiva definida, i.e. $g(X, X) > 0$ para todo $X \neq 0 \in T_p\mathcal{M}$, entonces recibe el nombre de *métrica Riemanniana*; sin embargo, si existe $X \neq 0$ tal que $g(X, X) < 0$ entonces, se conoce como *métrica pseudo-Riemanniana*. Siendo esta última la de mayor interés, pues es la que caracteriza al espaciotiempo. La métrica del espaciotiempo plano o *espacio de Minkowski* se describe como [1]:

$$\eta = \eta_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu, \quad (1.8)$$

donde θ^μ representa la base del espacio cotangente, y:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

con esta métrica se define un producto interior sobre cada espacio tangente como

$$T_p\mathcal{M}: \eta(X, Y) = X \cdot Y.$$

En general, sobre un punto p en la variedad, la métrica g permite clasificar a los elementos de $T_p\mathcal{M}$ como:

$$\begin{cases} g(X, X) > 0, X \text{ es tipo espacio: spacelike,} \\ g(X, X) = 0, X \text{ es nulo: lightlike,} \\ g(X, X) < 0, X \text{ es tipo tiempo: timelike,} \end{cases} \quad (1.10)$$

esta clasificación es útil para estudiar la causalidad entre los eventos.

Observe que para los casos en los que el espaciotiempo no es de Minkowski, las componentes de la métrica se denotan como $g_{\mu\nu}$. Así, la distancia entre dos eventos en el fondo se obtiene a través del elemento de línea ds^2 , definido como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \text{ con } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.11)$$

La importancia de la métrica se debe a diversos aspectos, por mencionar algunos destacan [1], [25]:

1. La métrica determina la causalidad de los eventos.
2. La métrica permite el cálculo de la longitud de arco y del tiempo propio; el cual se define como el tiempo medido por un observador que viaja junto con su línea de mundo y cuya expresión matemática es:

$$\tau = \int \sqrt{-ds}. \quad (1.12)$$

3. La métrica determina el movimiento de partículas prueba ²
4. La métrica relaciona el espacio de vectores con base e_μ al espacio de formas o co-vectores con base θ^ν . Es decir, mapea vectores a vectores duales y viceversa, a través de ella y su inversa.

²Modelo idealizado de un objeto cuyas propiedades físicas, a excepción de la que se esté estudiando, son insignificantes; y que, por lo tanto, no influye en sí mismo en la geometría a través de la cual se mueve.

1.7. Conexión de Levi-Civita

Cuando las variedades diferenciales están equipadas con una métrica se les puede asignar una conexión de una manera particular al imponer una condición sobre ella y la conexión, esto es, debe satisfacerse que $\nabla g = 0$; lo cual implica que, cuando una variedad diferencial satisface $\nabla g = 0$, entonces existe una única conexión que es compatible con la métrica $g_{\mu\nu}$.

Si existe compatibilidad con la métrica y la conexión, se re-definen los coeficientes de ∇ en términos de $g_{\mu\nu}$, asignándoles el título de *símbolos de Christoffel*, cuya expresión es la siguiente [1]:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} [g_{\nu\rho,\sigma} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\sigma,\rho}]. \quad (1.13)$$

A la conexión asociada a los coeficientes (1.13) se le conoce como *conexión de Levi-Civita* [1].

Cabe mencionar que cuando en un sistema coordinado las componentes de la métrica son constantes, entonces el tensor de Riemann se anulará. Análogamente, si el tensor de curvatura se anula, entonces siempre será posible construir un sistema de coordenadas en el que las componentes de la métrica sean constantes.

Por lo tanto, si al calcular el tensor de Riemann dada una métrica, éste se anula entonces, se dice que la métrica es plana, si, por el contrario, éste no es cero, entonces se tiene una métrica para un espaciotiempo con curvatura.

En resumen, hasta este momento se ha visto que al imponer que los conjuntos abiertos se vean como \mathbb{R}^n y que todas las cartas coordinadas estén unidas diferencialmente, se crea un espacio topológico conocido como variedad; el cual está equipado con una gamma de espacios tangentes y cotangentes, tensores de varios rangos y la posibilidad de tomar la derivada de Lie.

Si a esta variedad se le agrega una métrica se obtiene una variedad Riemanniana o pseudo-Riemanniana. Sin embargo, independientemente de la métrica, es posible proponer una conexión que permita hacer derivadas covariantes; si, por el contrario, se impone com-

patibilidad con la métrica, entonces solo existirá una única conexión que la satisfaga. Al estudio de variedades con métricas y sus respectivas conexiones, se le llama geometría (pseudo)-Riemanniana.

1.8. Ecuación Geodésica

Resulta familiar el hecho de que en el espaciotiempo euclidiano la distancia más corta entre dos puntos sea la línea recta; sin embargo, en espacios curvos las trayectorias que minimizan la distancia son conocidas como *geodésicas* y surgen como consecuencia de transportar paralelamente el vector X sobre su propia curva integral, es decir, $\nabla_X X = 0$ [1].

La *ecuación geodésica* del vector X sobre la curva integral $\gamma(\lambda)$, con λ el parámetro de la curva, está dada por:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}x^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \text{ con } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.14)$$

Existen varias sutilezas involucradas en la definición de distancia en un espaciotiempo; por ejemplo, para trayectorias nulas³, la distancia siempre es cero; sin embargo, para trayectorias como tiempo (timelike) es más conveniente usar el tiempo propio para redefinir las geodésicas en términos de éste. Es decir, considerar a τ como el parámetro en lugar de λ . Al hacer esto se tiene que el vector tangente es la 4-velocidad U^μ y así, utilizando (1.11) y (1.12) se obtiene:

$$\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau, \quad (1.15)$$

de tal forma que al hacer la variación $\delta\tau$ y buscar los puntos estacionarios ($\delta\tau = 0$) se obtiene [1]:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (1.16)$$

³Trayectorias que siguen las partículas sin masa, $ds^2 = 0$

la expresión anterior representa a la *ecuación geodésica* del vector X bajo la conexión de Christoffel [1]. Por lo tanto, sobre una variedad con una métrica, el funcional extremal de longitud serán curvas que transportan paralelamente sus vectores tangentes con respecto a la conexión de Christoffel.

Una de las propiedades más importantes de las geodésicas se deduce del hecho de que dado un elemento $X|_p$, éste puede tener un carácter temporal, espacial o nulo gracias a (1.10). Así, en un espaciotiempo con una métrica lorentziana, el carácter relativo a una métrica compatible con la conexión - ya sea temporal, nulo o espacial -, nunca cambia. Además, de la sección anterior, se sabe que los coeficientes de la conexión permiten derivar punto a punto sobre el espacio de trabajo, en particular, si la métrica es compatible con la conexión, el transporte paralelo preservará la norma de los vectores transportados paralelamente y con ello la ortogonalidad.

1.9. Propiedades del Tensor de Curvatura

El tensor de curvatura sobre cualquier variedad se obtiene de la relación (1.7); sin embargo, si se trabaja con una variedad diferencial con una conexión de Levi-Civita, las componentes del tensor de curvatura se escriben en términos de los símbolos de Christoffel de la siguiente forma [1]:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \quad (1.17)$$

El tensor de Riemann con cuatro índices tiene n^4 componentes en un espaciotiempo n -dimensional y cumple con ser antisimétrico en μ , es decir:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\sigma\nu\mu}, \quad (1.18)$$

además, gracias a la conexión de Levi-Civita surgen otras simetrías que reducen el número de componentes independientes, enunciadas a continuación [1]:

1. Antisimetría en sus primeros dos índices, es decir:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu},$$

2. Antisimetría en sus dos últimos índices, esto es:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu},$$

3. Simetría en el intercambio de su primer par de índices con el segundo, es decir:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma},$$

4. La suma de permutaciones cíclicas de los tres últimos índices se anula, esto es:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0.$$

Al hacer un análisis de estas propiedades, se deduce que en 4 dimensiones espaciotemporales [1], el tensor de Riemann cuenta con 20 componentes independientes que representan los 20 grados de libertad en las segundas derivadas de la métrica y que no podrían descartarse pese a una elección adecuada de coordenadas; lo cual, refuerza la idea de que el tensor de Riemann mide la curvatura [1].

Además de las simetrías algebraicas, el tensor de curvatura obedece una identidad diferencial conocida como *identidad de Bianchi*, descrita a continuación:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \quad (1.19)$$

Al contraer la relación anterior con la métrica en los índices ρ y μ , se obtiene:

$$\nabla_\lambda R_{\sigma\nu} + (-\nabla_\nu R_{\sigma\lambda}) + \nabla_\mu R^\mu_{\sigma\nu\lambda} = 0. \quad (1.20)$$

Si ahora se contrae la relación (1.20) en los índices σ y ν se llega a:

$$\nabla_\lambda R - \nabla_\mu R^\mu{}_\lambda + (-\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda) = 0, \quad (1.21)$$

la cual puede reescribirse como:

$$\nabla_\mu (2R^\mu{}_\lambda - \delta^\mu{}_\lambda R) = 0, \quad (1.22)$$

así, a la relación (1.22) se le conoce como *identidad de Bianchi dos veces contraída*.

1.10. Tensor de Ricci y Escalar de Curvatura

Al contraer el tensor de curvatura con la métrica se obtiene el llamado *tensor de Ricci*, expresado como [1]:

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

El tensor de Ricci asociado con la conexión de Levi-Civita es simétrico, es decir $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Al contraer (1.23) se llega al *escalar de curvatura* $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Finalmente, empleando las relaciones para el tensor de Riemann, Ricci, el escalar de Ricci y la identidad de Bianchi, se define al *tensor de Einstein* como [24]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.24)$$

el cual es simétrico gracias a las simetrías del tensor de Ricci y la métrica [1]. Además, de las identidades de Bianchi (1.22) el tensor $G_{\mu\nu}$ satisface:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.25)$$

1.11. Ecuación de Desviación Geodésica

En la Sección 1.8 se discutió a profundidad la importancia de las geodésicas, sin embargo, poco se habló de la forma en la que éstas se comparan a fin de poder determinar una aceleración relativa entre ellas. Para abordar esta discusión se necesita una familia de geodésicas uniparamétricas, con parámetro $\gamma_s(t)$ ⁴. A partir de las cuales se define una superficie suave que representa al conjunto de puntos $x^\mu(s, t) \in \mathcal{M}$, de tal forma que es posible definir dos campos vectoriales. Los vectores tangentes a la geodésica determinados por $T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ y los vectores de desviación $S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$ (ver Figura 1.2).

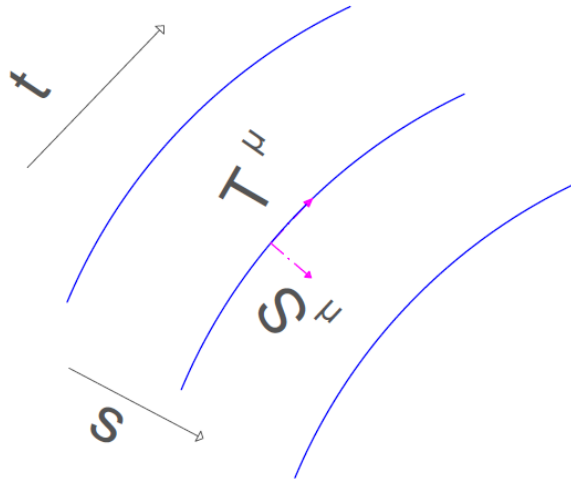


Figura 1.2: Desviación geodésica

Para comparar estas geodésicas, resultaría natural cuestionarse sobre la velocidad y/o aceleración relativa entre ellas, cuyas expresiones son [1]:

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu, \quad (1.26)$$

$$A^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu. \quad (1.27)$$

⁴Es decir, para cada $s \in \mathbb{R}$, γ_s es una geodésica parametrizada por el parámetro afín t . Donde, cualquier parámetro que esté relacionado con el tiempo propio, se conoce como parámetro afín.

Si además se considera a S y T como los vectores base de un sistema coordinado, entonces su conmutador se anula $[S, T] = 0$ y se cumple que [1]:

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu,$$

de modo que, al sustituir A^μ en la expresión anterior, se obtiene [1]:

$$A^\mu = \frac{D^2 S^\mu}{dt^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma. \quad (1.28)$$

A la relación (1.28) se le conoce como *ecuación de desviación geodésica* e indica que la aceleración relativa entre dos geodésicas vecinas es proporcional a la curvatura; en principios físicos, esta ecuación se interpreta como la manifestación de fuerzas de marea.⁵ En el siguiente capítulo se abordará la importancia de los difeomorfismos a fin de obtener el principio de covariancia, con el cual se asegura que todas las leyes de la física adoptan la misma forma para todos los observadores, siempre que sus marcos de referencia estén conectados a través de ellos.

⁵Fuerzas de marea: Fuerzas generadas debido a la no uniformidad del campo gravitacional y responsables de la existencia de las mareas en la Tierra.

Capítulo 2

Ecuaciones de Campo

En el capítulo anterior se mostró la herramienta matemática que utiliza la relatividad general para sustentar sus principios físicos; sin embargo, pese a la gran cantidad de elementos que se expusieron, aún no se han presentado a plenitud las ecuaciones de campo; las cuales, contienen toda la información que describe como la curvatura del espaciotiempo actúa sobre la materia para manifestarse como gravedad; y como la energía y el momento de las fuentes influyen en el espaciotiempo para crear la curvatura. Por ello, este capítulo consistirá en la deducción y análisis de éstas.

Las ecuaciones de campo se pueden derivar de dos formas; la primera versa de una lógica más física y hace uso de las relaciones para el *tensor de Riemann*, el *tensor de Ricci* y el *escalar de curvatura* a fin de obtener el *tensor de Einstein* y relacionarlo con el *tensor de energía-momento*; mientras que, la segunda consiste en emplear un *principio variacional* sobre la *acción de Einstein-Hilbert*. En particular, para esta tesis se utilizará el segundo método. Previo a este desarrollo se presentará el *principio de equivalencia*.

2.1. Principio de Equivalencia

Uno de los experimentos más importantes de la física fue el realizado por el científico italiano Galileo Galilei en la Torre de Pisa; cuando al dejar caer dos esferas de diferente masa demostró que cualquier objeto independientemente de su composición cae a la misma

velocidad bajo un campo gravitacional. Dando paso a lo que actualmente se conoce como *principio de equivalencia débil*, el cual afirma que la masa inercial¹ y la masa gravitacional² son iguales. Es decir, estableció el principio de equivalencia entre gravedad y aceleración [24].

Años más tarde, este principio fue complementado al incorporarle las ideas de la relatividad; para ello se hizo uso de un experimento hipotético en el cual se asumía que un observador dejaba caer dos cuerpos; primero, dentro de una caja en presencia de un campo gravitacional uniforme y después, dentro de una caja sellada herméticamente con aceleración constante sin la presencia de campos gravitacionales. Para ambos casos, el observador notaría que los dos cuerpos percibían el mismo comportamiento. Concluyendo que no hay manera de discernir entre los efectos de un campo gravitacional uniforme y de los efectos debidos a un marco uniformemente acelerado.

Einstein se dio cuenta de que para crear una teoría de gravedad completa, tenía que extender éste experimento a las demás leyes de la física, así, la generalización del principio de equivalencia débil, establece que para vecindades suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, las leyes de la física se reducirán a las de la relatividad especial, y será imposible detectar la existencia de un campo gravitacional mediante experimentos locales. A esta extensión se le conoce como *principio de equivalencia de Einstein* [1].

Observe que estos argumentos son válidos bajo las condiciones de localidad (i.e. regiones pequeñas del espaciotiempo) puesto que, al considerar regiones más grandes, en presencia de campos gravitacionales no uniformes, se obtienen inhomogeneidades gravitacionales conocidas como fuerzas de marea. Así, para el caso particular de la Tierra, si ésta estuviera en un campo gravitacional uniforme, caería libremente y no tendría mareas. Esto es, la presencia de las mareas son efectos no locales, porque surgen de la diferencia de la aceleración gravitatoria newtoniana de la Luna a través de la Tierra, o en otras palabras, de la desviación geodésica cerca de la Tierra. Por lo tanto, las fuerzas de marea son el único aspecto medible de la gravedad [24].

¹Masa inercial: Se define de la 2a ley de Newton y se entiende como un parámetro que indica la resistencia de inercia a la aceleración de un cuerpo sujeto a una fuerza.

²Masa gravitacional: Propiedad de un objeto o sistema que determina la fuerza de la interacción gravitacional con otros objetos, sistemas o campos gravitatorios.

Finalmente, al emplear el *principio de covariancia* para re-escribir las leyes de la física en lenguaje tensorial a fin de hacerlas independientes de coordenadas, se obtiene el *principio de equivalencia fuerte*, el cual indica que si la gravedad afecta a todas las partículas de la misma manera, entonces ésta es universal; por lo que, es conveniente describirla como una característica fundamental del espaciotiempo, en lugar de pensarla como una fuerza convencional. Es decir, lo que se experimenta como gravedad es en realidad una manifestación de la curvatura [1].

2.2. Tensor Energía - Momento

En la Subsección anterior se formalizó la idea de que la curvatura no puede negarse vía el principio de equivalencia. En éste, se mencionó la importancia del uso de tensores, los cuales se destacan por no tener ninguna dependencia con el observador. No obstante, existen cantidades que no son invariantes bajo cambios de coordenadas; por mencionar algunas destacan, la energía E y el 3-momento \mathbf{p} . En esta Sección se describirá al tensor que contiene toda la información sobre la energía y el momento de las fuentes; el llamado *tensor de energía momento*

El 4-momento de una partícula se define como:

$$\mathbf{p}^\mu = mU^\mu \text{ con } \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

con U^μ la 4-velocidad y m la masa de la partícula que es una cantidad fija independientemente del marco inercial. En un marco en reposo se satisface que $E = mc^2$ para un espaciotiempo plano, pero se ha establecido que $c = 1$, entonces se tiene que $\mathbf{p}^0 = m = E$; por lo tanto, la energía de una partícula corresponde a la componente temporal del momento. Mientras que, para un marco en movimiento se deben determinar las componentes de \mathbf{p}^μ para obtener una descripción completa del tensor $T_{\mu\nu}$.

A menudo se trabaja con múltiples partículas, por lo que, es conveniente describirlas a través de un sistema que sea capaz de estudiar todas las posibles 4-velocidades y 4-momentos involucrados. Este sistema se propone como un fluido perfecto.

Un fluido perfecto satisface el ser homogéneo, no viscoso, incapaz de conducir calor, ser estacionario, incompresible e irrotacional; de modo que, puede especificarse completamente a través de dos cantidades: la densidad de energía ρ y la presión isotrópica p .

Ya que este sistema está compuesto por múltiples partículas, resulta insuficiente un campo vectorial de 4-momentos para describir todos los términos de energía. Por ello, se utiliza un tensor simétrico $(2, 0)$ conocido como *tensor de energía-momento* $T^{\mu\nu}$; cuyas componentes espaciales T^{ij} representan los flujos de momento; así, la componente T^{00} corresponde al flujo de \mathbf{p}^0 en la dirección temporal x^0 . Los elementos fuera de la diagonal se asocian a los términos de corte, los cuales se anulan pues no se ha supuesto viscosidad.

Un término como T^{11} da la componente x de la fuerza ejercida por unidad de área de un elemento del fluido en esa dirección y, ya que la presión tiene 3 componentes en el marco en reposo y además es isotrópica, todas las componentes espaciales distintas de cero serán iguales, $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$. Haciendo que, los únicos números independientes sean $T^{00} = \rho$ y $T^{ii} = p$.

Por lo tanto, el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, en su marco en reposo y en un fondo plano, toma la siguiente forma [1]:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

la expresión general de $T^{\mu\nu}$ bajo cualquier marco de referencia es:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

2.3. Acción de Einstein-Hilbert

En física, la *acción* S es un funcional que se construye a través de la densidad lagrangiana \mathcal{L} integrada en el tiempo. Al considerar una teoría de campos en la que la variable dinámica corresponda a un conjunto de campos $\Phi^i(x)$, esta acción se representa como [1]:

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \nabla\Phi^i)\sqrt{-g}d^4x. \quad (2.4)$$

Con $d^4x\sqrt{-g}$ el elemento propio de volumen en un espaciotiempo curvo [24] y g es el determinante del tensor métrico.

A partir de esta cantidad S se puede obtener un resultado muy importante conocido como el *principio de mínima acción* o el *principio variacional de Hamilton* que establece que un sistema seguirá aquella trayectoria que extremice la acción, es decir $\delta S = 0$; donde δ representa la variación de cualquier parámetro particular del sistema por una cantidad infinitesimal lejos del valor tomado por el parámetro cuando la integral (2.4) es un extremo [26].

En el contexto de la RG, la variable dinámica corresponde a la métrica, por lo que, se debe determinar qué escalares se pueden hacer a partir de ella para que funcionen como lagrangiano. Para determinar este escalar, se parte del hecho de que las ecuaciones del campo gravitatorio deben contener derivadas no mayores al segundo orden de los campos Φ .

Pese a que el escalar de curvatura R contiene primeras y segundas derivadas de la métrica, éstas últimas se presentan de forma lineal. Gracias a esta linealidad, la integral del escalar puede transformarse mediante el teorema de Gauss, a una integral de una expresión que no contenga las segundas derivadas [27]. Por lo tanto, se propone a R como el escalar que funcionará como lagrangiano. Teniendo esto en cuenta, se llega a la *acción de Einstein-Hilbert* [1]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}R. \quad (2.5)$$

A partir de la acción anterior se determinan las ecuaciones de campo; para ello se debe hacer la variación de (2.5) respecto a la métrica, es decir:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R), \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g})R + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(R), \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g})R + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

donde se ha utilizado que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Para poder aplicar el principio de mínima acción es necesario tener en cuenta algunos detalles, a saber, las siguientes propiedades serán de gran utilidad:

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}) &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} (-g_{\gamma\mu} g_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\gamma}) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} (g_{\gamma}{}^{\nu} g_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\gamma}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} (g_{\gamma\sigma} \delta g^{\sigma\gamma}),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

y para δR se cumple que:

$$\delta R = \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = \delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \delta(\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta}) \\
&= g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\alpha} - g^{\mu\alpha} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{,\beta} \\
&= (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{,\alpha},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

por lo tanto:

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{,\alpha}. \tag{2.10}$$

Al sustituir (2.10) en la segunda integral de (2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} \delta R &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta \right)_{;\alpha} + \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta \right)_{;\alpha} + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Así, la primera integral de (2.11) se aborda con la variación de los símbolos de Christoffel definidos por:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{2} [g_{\beta\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\beta\alpha}) + g_{\beta\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\beta\alpha}) - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \nabla^\alpha \delta g^{\lambda\sigma}], \quad (2.12)$$

y se llega a:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta \right)_{;\alpha} = \int \sqrt{-g} d^4x \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} \nabla^\alpha (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\beta (\delta g^{\alpha\beta})). \quad (2.13)$$

La expresión (2.13) es una integral con respecto al elemento de volumen de la divergencia covariante de un vector; de acuerdo al teorema de Stokes, esto es igual a una contribución de frontera en el infinito, que se puede establecer en cero haciendo que la variación desaparezca en el infinito ($\delta S = 0$). Por lo tanto, este término no contribuye en nada a la variación total ³ [1].

Para abordar la primera integral de (2.6) se utilizará la relación (2.7), obteniendo:

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R = \int -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R d^4x. \quad (2.14)$$

³En realidad, el término límite incluiría no solo la variación métrica, sino también su primera derivada, que tradicionalmente no se establece en cero. Sin embargo, para los propósitos actuales no es relevante. Si se quisiera considerar lo que sucede en el límite, se tendría que incluir un término adicional en la acción [1].

De modo que la variación completa de la acción será:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int -d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Finalmente, al emplear la condición del principio de mínima acción $\delta S = 0$ se obtienen las *ecuaciones de campo con $T_{\mu\nu} = 0$* :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.16)$$

Para el caso en el que se tengan fuentes, se deberá modificar la acción (2.5) para agregar los términos de materia, proponiendo como acción a:

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (2.17)$$

donde S_H representa la acción de Einstein-Hilbert y S_M corresponde a la acción debida a los campos de materia Ψ incluidos en la teoría. Estos campos obedecen a ecuaciones que pueden expresarse como relaciones entre tensores sobre \mathcal{M} , en las que todas las derivadas con respecto a posición sean derivadas covariantes con respecto a la conexión definida por la métrica g [23]. Por su puesto, que se deberían de incluir todos los campos que se han observado experimentalmente, sin embargo, se podría postular la existencia de campos aún no detectados, por ejemplo, campos escalares [28].

La variación de (2.17) es:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (2.18)$$

para δS_M se cumple:

$$\begin{cases} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu}, \\ \frac{\delta S_M}{\delta \Psi} = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

entonces, se tiene que:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.20)$$

Finalmente, al hacer $\delta S = 0$ se deducen las *ecuaciones de campo*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

Las ecuaciones de campo se entienden como 10 ecuaciones diferenciales, parciales, no lineales, no homogéneas, de segundo orden acopladas.

Independientemente de la vía que se elija para su deducción, los términos involucrados son las componentes del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo, R el escalar de curvatura y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía momento.

Las 10 ecuaciones codifican las 10 componentes de la métrica, (pues los tensores involucrados en (2.21) tienen dos índices simétricos). Sin embargo, ya que la identidad de Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ representa 4 constricciones en $R_{\mu\nu}(x)$ entonces solamente habrá seis ecuaciones independientes para $g_{\mu\nu}$ [1].

Por lo tanto, si una métrica es solución a las ecuaciones de campo en un sistema coordenado x^μ , también lo será en otro sistema $x^{\mu'}$. Esto significa que hay cuatro grados de libertad no físicos en las 10 componentes de $g_{\mu\nu}$ representados por las cuatro funciones $x^{\mu'}(x^\mu)$ [1]. Físicamente, las ecuaciones de campo gravitacional relacionan la curvatura del espacio-tiempo con las fuentes gravitatorias; así, las fuentes estarán completamente descritas por el tensor energía-momento, mientras que la geometría espacio-temporal se estudiará perfectamente a través del tensor de curvatura.

Capítulo 3

Límite de Campo Débil y Propagación Libre de Ondas Gravitacionales

El formalismo matemático de las ondas gravitacionales parte con la aproximación de campo débil; la cual permite estudiar la dinámica del espaciotiempo a través del comportamiento de una perturbación $h_{\mu\nu}$ en la métrica. Este análisis se realiza con ayuda de las *ecuaciones de campo linealizadas*.

Es importante mencionar que pese a que las predicciones físicas de las ecuaciones de campo son las mismas en todos los sistemas de coordenadas; la cantidad de trabajo a realizar para obtenerlas, podría ser considerablemente más complejo si se hace una elección incorrecta de coordenadas. Por lo tanto, es extremadamente conveniente que el primer paso en la solución de cualquier problema en RG sea utilizar inteligentemente la libertad de elección de coordenadas que simplifiquen los cálculos [24].

Así, a fin de utilizar esta libertad, se impondrán dos requisitos, el primero de ellos consistirá en exigir que la métrica en un campo gravitacional débil sea invariante de Lorenz.

El segundo requisito versará en implementar la invariancia de norma, es decir, utilizar la libertad de elección a fin de construir una perturbación nueva $h_{\mu\nu}$ en un sistema coordenado adecuado sin alterar el comportamiento físico.

3.1. Ecuaciones de Campo Gravitacional Linealizadas

Un campo gravitacional débil se expresa al descomponer el tensor métrico en una métrica plana más una perturbación, es decir:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski con signatura $(-1,1,1,1)$ y $h_{\mu\nu}$ es el término asociado a la perturbación que satisface $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ bajo esta selección de coordenadas, lo que conduce a la siguiente relación a primer orden en la perturbación:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

con $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$.

La métrica expuesta en (3.1) debe ser invariante ante rotaciones y boost espacio-temporales; es decir, se exige una invariancia de Lorentz. Ya que (3.1) está formada por dos partes, es preciso notar que la parte correspondiente a la métrica $\eta_{\mu\nu}$ es invariante de Lorentz, por lo que, lo único que resta es exigir que la perturbación satisfaga $h_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} h_{\mu\nu}$; es decir que se transforme como un tensor $(0,2)$ bajo las transformaciones de Lorentz; y así asegurar que $g_{\mu\nu}$ sea invariante de Lorentz.

Para determinar la ecuación de movimiento que satisface la perturbación $h_{\mu\nu}$ se deben de examinar las ecuaciones de campo a primer orden; entonces, se parte de los símbolos de Christoffel a primer orden en la perturbación están dados por [1]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho(1)} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}). \quad (3.3)$$

Ya que los coeficientes de la conexión son cantidades de primer orden, las únicas contribuciones al tensor de Riemann vendrán de las derivadas de los términos a primer orden, pues el resto de ellos son cuadráticos en h .

De esta forma, se llega a la expresión matemática para el tensor de Riemann a primer orden en la perturbación [1]:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}). \quad (3.4)$$

Al calcular la traza del tensor de Riemann contrayendo sobre μ y ρ se obtiene el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}). \quad (3.5)$$

Además, se cumple que:

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu. \quad (3.6)$$

Note que la expresión (3.5) es simétrica en μ y ν , y que la relación (3.6) representa la traza de la perturbación. Al contraer el tensor de Ricci, se llega al escalar de curvatura, dado por:

$$R^{(1)} = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h, \quad (3.7)$$

con $\square \equiv -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Lo que conduce a la construcción del tensor de Einstein descrito por [1]:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esto permite escribir las *ecuaciones de campo linealizadas*, representadas de la siguiente forma [1]:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Note que no se han incluido correcciones de orden superior al tensor de energía-momento porque la cantidad de energía y momento debe ser en sí misma pequeña para el límite de campo débil, donde se satisface que las fuentes no provocan interacción fuerte, es decir, la curvatura no es tan grande. En otras palabras, el orden más bajo no desvanescente en $T_{\mu\nu}$ es automáticamente del mismo orden que la magnitud de la perturbación.

3.2. Invariancia de Norma

Es prudente cuestionarse si la representación de la perturbación (3.1) es única; puesto que, en esta relación no se establece un sistema coordenado preferencial, lo que implica que puede existir otro sistema coordenado en el que (3.1) se satisfaga pero con una perturbación $h'_{\mu\nu}$ tal que $h_{\mu\nu} \neq h'_{\mu\nu}$; y que siga satisfaciendo que $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$. Este detalle conduce a la noción de *invariancia de norma*.

La invariancia de norma, en este contexto, se caracteriza a través de un difeomorfismo ϕ que relacione el espaciotiempo plano de fondo \mathcal{M}_b con la métrica de Minkowski y el espaciotiempo físico \mathcal{M}_p con una métrica $g_{\alpha\beta}$ que obedece las ecuaciones de Einstein. Cada uno equipado con un campo tensorial y coordenadas x^μ y y^α respectivamente. La implementación de este difeomorfismo $\phi = \mathcal{M}_b \rightarrow \mathcal{M}_p$ resulta conveniente para realizar el pull-back $(\phi^*g)_{\mu\nu}$ de la métrica física, y así crear una teoría linealizada que tome lugar en un espaciotiempo de fondo plano (ver Figura (3.1)).

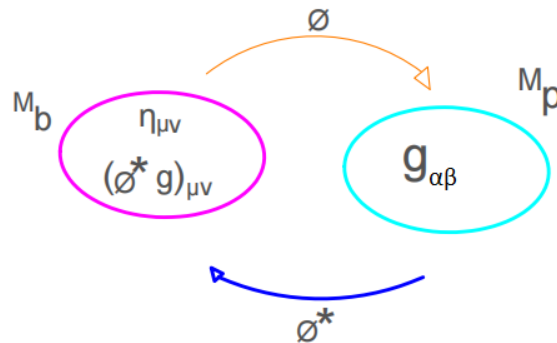


Figura 3.1: Representación del pull-back de la métrica

Así, la perturbación (3.1) en términos de este pull-back toma la siguiente forma [1]:

$$h_{\mu\nu} = (\phi^*g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

es decir, la perturbación resulta de la diferencia entre el pull-back de la métrica física y el de una métrica plana. Note que la relación anterior no asegura que las componentes de $h_{\mu\nu}$ sean pequeñas, sin embargo, si los campos gravitacionales son débiles en \mathcal{M}_p entonces para algunos difeomorfismos se cumplirá la condición $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Además, si $g_{\alpha\beta}$ satisface las ecuaciones de campo en el espacio físico, entonces $h_{\mu\nu}$ obedecerá las ecuaciones linealizadas sobre el espaciotiempo plano [1].

Se ha establecido que se requieren difeomorfismos que cumplan que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, pero es justo este el problema de la invariancia de norma, pues existen múltiples difeomorfismos permisibles entre los dos espaciotiempo.

Para puntualizar los requisitos del difeomorfismo se debe plantear un requerimiento en términos de la derivada de Lie; para ello se considera un campo vectorial $\xi^\mu(x)$ en el espaciotiempo de fondo, el cual genera una familia de difeomorfismos $\Psi_\epsilon : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathcal{M}_b$ para ϵ suficientemente pequeña. Es decir, esta familia uniparamétrica de difeomorfismos Ψ_ϵ proveen diferentes representaciones de la misma situación física mientras se mantenga la perturbación pequeña.

Se define a la familia de perturbaciones parametrizadas por ϵ como:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^\epsilon &= [(\phi \circ \Psi_\epsilon)^*g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \\ &= [\Psi_\epsilon^*(\phi^*g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando el hecho de que $(\phi^*g)_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^\epsilon &= \Psi_\epsilon^*(h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \\ &= \Psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) + \Psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ya que se consideran ϵ suficientemente pequeñas, se sigue que $\Psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) = h_{\mu\nu}$ al orden más bajo en la expansión, pero, además observe que $\Psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}$ conduce a la derivada de Lie de η respecto al campo vectorial ξ , por lo que, la expresión resultante está en términos de esta derivada, es decir [1]:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^\epsilon &= h_{\mu\nu} + \epsilon \left[\frac{\Psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} \right], \\ &= h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Al utilizar la derivada de Lie de la métrica respecto a un campo vectorial ξ^μ , se tiene que:

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}. \quad (3.14)$$

La expresión (3.14) se conoce como *transformación de norma* y describe cómo se transforma la perturbación de la métrica bajo difeomorfismos infinitesimales a lo largo de un campo vectorial ξ^μ e indica qué clase de perturbaciones en la métrica denotan espacios tiempo físicamente equivalentes; ya que, estas perturbaciones se relacionan a través de $2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}$ para algún campo vectorial ξ^μ . La invariancia de norma para la perturbación de la métrica se verifica al notar que no hay cambio alguno en la curvatura [1].

3.3. Elección de Norma

El motivo de esta sección es dar solución a las ecuaciones de campo linealizadas una vez elegida o fijada una norma. Fijar una norma implica hacer uso de las transformaciones de norma a fin de elegir convenientemente al campo vectorial ξ^μ . Esta elección adecuada recibe el nombre de *libertad de norma* [29].

3.3.1. Norma de Lorenz

Se ha visto que una transformación de norma generada por un campo vectorial ξ^μ satisface la relación (3.14), la cual puede reescribirse como:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad (3.15)$$

de tal forma que, las componentes de $h_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ difieran a primer orden debido a un difeomorfismo a lo largo de ξ^μ pero representen la misma situación física.

Se define a la *perturbación de traza invertida* $\bar{h}_{\mu\nu}$ como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (3.16)$$

de tal forma que el tensor de Einstein escrito en términos de (3.16) es [1] (ver Apéndice D)[1]:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\sigma (\partial_\mu \bar{h}_\nu)_\sigma - \frac{1}{2}\square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\sigma\rho}. \quad (3.17)$$

Al haber realizado el cambio de $h_{\mu\nu}$ a $\bar{h}_{\mu\nu}$ se ha eliminado toda la información de la traza de manera explícita en $G_{\mu\nu}^{(1)}$. Al aplicar la transformación de norma (3.15) sobre (3.16) se obtiene [29]:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma \xi^\sigma, \quad (3.18)$$

es decir, se ha definido un nuevo tensor $\bar{h}_{\mu\nu}^{new}$ en términos del viejo $\bar{h}_{\mu\nu}^{old}$. Note que se tendrán tantos $\bar{h}_{\mu\nu}^{new}$ como ξ^μ se utilicen.

Lo siguiente es elegir o fijar la norma. En particular, en la teoría linealizada se usa la *norma de Lorenz*, descrita por [1]:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0, \quad (3.19)$$

al aplicar ésta sobre (3.17), resultará que el primer y tercer término se anulan, de tal forma

que:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu}^{new}. \quad (3.20)$$

Para lograr que (3.20) se satisfaga, se utilizará la libertad de norma para determinar la ecuación que ξ^μ deberá obedecer.

Entonces, al calcular la divergencia de (3.18) se obtiene:

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \square\xi_\mu. \quad (3.21)$$

En general $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} \neq 0$, sin embargo, gracias a que es posible elegir a ξ^μ , se exige que éste sea solución a [1]:

$$\square\xi_\mu = -\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old}. \quad (3.22)$$

La ecuación anterior siempre tiene solución dadas las condiciones iniciales. Por lo tanto se puede asegurar que:

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0, \quad (3.23)$$

y al satisfacerse (3.23) se consigue que (3.20) se cumpla. Logrando así, fijar por completo la norma de Lorenz. Así, las ecuaciones de campo linealizadas bajo esta norma se reescriben como [29]:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

y en el espaciotiempo libre de fuentes, serán:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.25)$$

3.3.2. Norma de Radiación

En la Sección anterior se mostró que se puede utilizar un campo ξ^μ que permita elegir una norma, en particular la norma de Lorenz. No obstante, pese a haber hecho uso de la libertad de norma, aún es viable hacer otra transformación sin alterar la ya establecida.

Esta nueva transformación de norma es generada por un campo vectorial ζ^μ , que a su vez es regulado por la *libertad de norma residual o restringida* [29] [24].

La transformación de norma sobre $h_{\mu\nu}$ será:

$$h_{\mu\nu}^{new} = h_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu. \quad (3.26)$$

Al aplicar (3.26) sobre la traza invertida (3.16) se obtiene:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \zeta^\sigma. \quad (3.27)$$

Ya que (3.27) debe mantener fija la norma de Lorenz, se exige que

$$\square \zeta_\mu = 0, \quad (3.28)$$

pues así se cumpliría que:

$$\square(\xi_\mu + \zeta_\mu) = -\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}^{old}, \quad (3.29)$$

y si $\square \zeta_\mu = 0$, entonces

$$\square \xi_\mu = -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} \rightarrow -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.30)$$

En la Sección anterior se logró $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ en ausencia de fuentes al elegir la norma de Lorenz, por lo que ahora se impondrán dos requisitos más a fin de fijar la *norma de Coulomb o de radiación* [29].

Para fijar la norma de radiación se pide que $\bar{h}_{\mu\nu}$ sea libre de traza (*traceless*) y que las componentes \bar{h}_{0i} se anulen [29] [24].

Esto es:

$$\begin{cases} \bar{h} = 0, \\ \bar{h}_{0i} = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.31)$$

Utilizando la traza de (3.27) dada por:

$$\bar{h}^{new} = \bar{h}^{old} - 2\partial_\gamma \zeta^\gamma, \quad (3.32)$$

se puede lograr que $\bar{h} = 0$ si ζ^γ satisface:

$$\bar{h} = 2\partial_\gamma \zeta^\gamma, \quad (3.33)$$

y que $\bar{h}_{0i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) si se cumple:

$$-\bar{h}_{0i} = \partial_0 \zeta_i + \partial_i \zeta_0. \quad (3.34)$$

Empleando (3.28) se obtienen las condiciones iniciales para ζ_μ y $\frac{\partial \zeta_\mu}{\partial t}$. Así, las condiciones iniciales para obtener $\bar{h} = 0$ serán:

$$\begin{cases} \bar{h} = 2 \left(-\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\zeta} \right), \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 2 \left(-\nabla^2 \zeta_0 + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} \right), \end{cases} \quad (3.35)$$

y para $-\bar{h}_{0i}$:

$$\begin{cases} -\bar{h}_{0i} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x^i}, \\ -\frac{\partial \bar{h}_{0i}}{\partial t} = \nabla^2 \zeta_i + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^i \partial t}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Al hacer que $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisfaga la norma de Lorenz (3.19) y la norma de radiación (3.31) se llega a la *norma transversa sin traza*, que satisface $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}$ [1], [24], [29].

Además, de la norma de Lorenz y de radiación se sigue que:

$$\partial^\nu \bar{h}_{0\nu} = 0 \rightarrow \partial^0 \bar{h}_{00} = 0. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo linealizadas bajo la norma transversa sin traza son [24], [29]:

$$\square \bar{h}_{00} = -16\pi G T_{00}, \quad (3.38)$$

y al usar que $h_{00} = \bar{h}_{00}$, se reescriben como:

$$\nabla^2 h_{00} = -16\pi T_{00}. \quad (3.39)$$

En ausencia de fuentes se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 h_{00} = 0, \quad (3.40)$$

así, al considerar las condiciones de frontera en infinito, se sigue que $h_{00} = 0$ es la única solución (por el teorema de unicidad) en el espacio.

3.4. Ondas Gravitacionales

En las Secciones anteriores se dedujeron las ecuaciones de onda que una vez fijada una norma y asumiendo ausencia de fuentes deben resolverse; para la norma de Lorenz se obtuvo (3.25) y para la norma de Coulomb (3.40).

La solución más general de una ecuación de onda es la superposición de ondas salientes y entrantes, es decir:

$$h(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x} - ct) + A(\mathbf{x} + ct). \quad (3.41)$$

Por lo que, cualquier superposición de soluciones también es solución, en particular, podría suponerse una superposición de ondas planas.

Teniendo esto en mente, se propone que la siguiente onda plana satisfaga la ecuación (3.25):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{iK \cdot x} \quad (3.42)$$

con K^μ es el vector de onda que cumple $K \cdot x = \eta_{\mu\nu}K^\mu K^\nu$ y $A_{\mu\nu}$ es un tensor constante simétrico. Al sustituir (3.42) en $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, se tiene $\eta_{\mu\nu}K^\mu K^\nu = 0$.

Al aplicar la condición de norma de Lorenz sobre (3.42) se sigue:

$$\begin{aligned} \partial^\nu (A_{\mu\nu}e^{iK \cdot x}) &= 0, \\ K^\nu A_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Gracias a las condiciones impuestas por la norma de radiación, se tiene que:

$$A_{0\mu} = 0, \quad (3.44)$$

$$A^\mu{}_\mu = 0. \quad (3.45)$$

Lo que implica que existen 9 ecuaciones sobre $A_{\mu\nu}$ que imponen condiciones: 4 de ellas provistas por (3.43), una por (3.45) y las últimas 4 debidas a (3.44). Sin embargo, ya que (3.43) y (3.44) implican que $K^\nu A_{0\nu} = 0$ entonces, (3.43) para $\mu = 0$ no es independiente. Por lo tanto, solo se tienen 8 ecuaciones.

Al ser $A_{\mu\nu}$ simétrico cuenta con 10 componentes independientes, pero debido a las 8 restricciones impuestas por (3.43) y (3.44) solo restan dos componentes. Estas dos componentes representan los dos estados de polarización que tiene la onda gravitacional (3.42).

Capítulo 4

Teorías de Gravedad Modificada

El alcance de la relatividad general es tal, que ha sido capaz de validar todas las pruebas de sistema solar [3] [30], logrando describir la dinámica del Universo bajo el supuesto de una expansión acelerada producto de la energía oscura con presiones negativas. Sin embargo, en la búsqueda de respuestas que no incluyan términos inflacionarios y/o componentes oscuros (energía, materia), la RG ha presentado restricciones que han encaminado a nuevas motivaciones teóricas que encauzan en la formulación de teorías de gravedad modificada. Existen múltiples teorías de gravedad modificada, cada una con su correspondiente alternativa de gravedad, por mencionar algunas destacan, las teorías en dimensiones mayores como la teoría de Gauss-Bonet [31], las teorías puramente tensoriales como las bimétricas [32]; las de orden superior [14] [33] [34] [35] [36], las teorías con acoplamiento no mínimo entre materia y curvatura [21], las escalares-tensoriales como la teoría de Brans-Dicke [28] y las teorías escalares [7] [8], siendo éstas últimas dos las más comunes.

4.1. Teoría de Brans - Dicke

Unas de las modificaciones a la gravedad más habituales son las llamadas teorías escalares-tensoriales, en particular, la teoría propuesta por Brans-Dicke (BD) [35] [28]. Ésta postula una gravedad definida en un campo escalar $\Phi(x) = \frac{1}{G(t)}$, con G la constante de gravedad de Newton; es decir, asume que la constante gravitacional es sustituida por un campo

que varía en función de la localización del sistema. Esta teoría se describe a través de la siguiente acción:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\Phi R + \left(\frac{16\pi}{c^4} \mathcal{L} \right) - \omega \left(\frac{\Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha}}{\Phi} \right) \right], \quad (4.1)$$

donde \mathcal{L} representa el lagrangiano de densidad de materia, R el escalar de curvatura y ω un parámetro adimensional, cuyo valor no debe ser tan pequeño para despreciarse ni tan grande como para dominar la expresión, es decir, se debe asegurar que exista una diferencia controlada entre los efectos BD respecto a los de la RG; por lo tanto, $\omega \approx 1$. Finalmente, el tercer término de (4.1) será el que aporte la información dinámica.

Optar por la teoría de Brans-Dicke implica cuestionar el principio de equivalencia fuerte (ver Capítulo 2) con el cual la RG asegura que las leyes de la física, incluido el contenido numérico (i.e constantes adimensionales), observadas localmente en un laboratorio en caída libre, son independientes de la posición y del tiempo. Por ser válido este principio, únicamente podría existir un campo gravitacional en el Universo y es la métrica. Sin embargo, en la teoría de Brans Dicke se propone un campo escalar auxiliar y, por tanto, el principio de equivalencia fuerte debe ser omitido.

Una de las principales características de las teorías escalares-tensoriales es que son invariantes bajo ciertas transformaciones llamadas *transformaciones conformes* [37], y con las cuales es posible relacionar dos teorías que se encuentren descritas en el marco de Jordan¹ o en el marco de Einstein²[37].

Así, se dice que dados dos espacios-tiempo \mathcal{M} y $\bar{\mathcal{M}}$, con métricas $g_{\mu\nu}$ y $\bar{g}_{\mu\nu}$ en los que se usan las mismas coordenadas x^μ , son conformes si están relacionados por la transformación conforme [37]:

$$\sqrt{\bar{g}} = \Omega^4 \sqrt{g}, \quad (4.2)$$

¹*Jordan Frame*: Es el marco en el que el campo escalar no está mínimamente acoplado con el tensor métrico. Es decir, que no se acopla directamente con la métrica.

²*Einstein Frame*: Es el marco en el que el campo escalar está mínimamente acoplado con la métrica. Es decir, que se acopla directamente con la métrica y no con sus derivadas.

y que satisfacen:

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu}; \quad (4.3)$$

$$d\bar{s}^2 = \Omega^2 ds^2. \quad (4.4)$$

4.2. Teorías $f(R)$

Las teorías de gravedad modificada $f(R)$ pertenecen al grupo de teorías escalares y plantean complementar la acción de Einstein-Hilbert al proponer sustituir en la acción el escalar R por una función $f(R)$ [8].

Una de las ventajas de las teorías $f(R)$ es su capacidad de encapsular características básicas de la gravedad a órdenes superiores sin tener que recurrir a componentes oscuros. Sus principales modelos son Starobinsky [9], Hu-Sawicki [10], Tsujikawa [7] [11] y el modelo exponencial [12]. En general, un modelo de $f(R)$ viable debe explicar la expansión tardía del Universo, abordar la etapa cosmológica dominada por la radiación seguida por la dominada por la materia y ser consistente con la restricción del sistema solar [13] [33] [34] [38]. Pese a que su principal contribución ha sido en el ámbito de la cosmología, estas teorías también son utilizadas para interpretar el comportamiento de lentes gravitacionales débiles [7] y agujeros negros de Kerr [39].

Existen tres formalismos basados en el principio variacional que se elija para estudiar las teorías $f(R)$. El formalismo métrico, en el que se hace la variación métrica estándar; el formalismo de Palatini, en el cual se asume que la métrica y la conexión son variables independientes por lo que se hace la variación respecto a ambas bajo el supuesto de que la acción de materia no depende de la conexión; y el formalismo de la métrica afín, en el cual se mantiene la variación de Palatini, pero se abandona la idea de que la acción de materia es independiente de la conexión. Para esta tesis, se utilizó el primero de ellos y será descrito en la siguiente sección.

Finalmente, cabe señalar que las teorías $f(R)$ tienen una equivalencia dinámica con las teorías escalares-tensoriales de Brans-Dicke [28]; en el formalismo métrico corresponde al caso $\omega = 0$ y en el formalismo de Palatini a $\omega = -3/2$.

4.2.1. Formalismo Métrico

Las teorías $f(R)$ inician con la variación respecto a la métrica de la acción:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.5)$$

con Ψ los campos de materia; es decir:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{d}{d\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} f(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \epsilon \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \epsilon g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \frac{d}{d\epsilon} \int d^4x [f'(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \epsilon \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \epsilon g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} + \\ &\quad \delta(\sqrt{-g}) (f(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \epsilon \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \epsilon g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \Big|_{\epsilon=0}] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [f'(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} + \delta(\sqrt{-g}) (f(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}))] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [f'(R) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) (\sqrt{-g}) + f(R) \delta(\sqrt{-g})]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizando la relación:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} (g_{\gamma\sigma} \delta g^{\sigma\gamma}), \quad (4.7)$$

en la ecuación (4.6), se sigue que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa} \int \left[f'(R) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) (\sqrt{-g}) + f(R) \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \right] d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left[f'(R) \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left[\delta g^{\mu\nu} (f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}) + \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} (f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Al sustituir la ecuación:

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{;\alpha}, \quad (4.9)$$

en el segundo término de (4.8) se obtiene:

$$\int \sqrt{-g} d^4x f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} f'(R) (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{;\alpha} d^4x. \quad (4.10)$$

De la variación de los símbolos de Christoffel dada por:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\beta} (\partial_{\beta} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\delta \partial_{\nu} g_{\mu\nu} + \delta \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \delta \partial_{\beta} g_{\mu\nu}), \quad (4.11)$$

se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} \delta g_{\mu\beta} &= \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma} \delta g_{\gamma\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^{\gamma} \delta g_{\mu\gamma} + \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\beta}, \\ \partial_{\mu} \delta g_{\beta\nu} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} \delta g_{\gamma\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\gamma} \delta g_{\nu\gamma} + \nabla_{\mu} \delta g_{\beta\nu}, \\ \partial_{\beta} \delta g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} \delta g_{\gamma\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^{\gamma} \delta g_{\mu\gamma} + \nabla_{\beta} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Al recordar que $\nabla(fv) = f\nabla v + df \otimes v$ y utilizando (4.12) se obtiene:

$$f'(R) (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{;\alpha} \equiv [(-(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) f'(R)) \delta g^{\mu\nu}]. \quad (4.13)$$

Así, al utilizar (4.13) en (4.10), la variación de (4.8) se ve como:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} (f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} (f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [(-(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) f'(R)) \delta g^{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - f'(R) (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

entonces:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square) f'(R), \quad (4.15)$$

con $g_{\mu\nu}\square = g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$.

Finalmente, al usar

$$\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

se llega a:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) representa las ecuaciones de campo de las teorías $f(R)$ y figuran como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden, puesto que R incluye segundas derivadas de la métrica.

Al contraer la ecuación (4.17) con la métrica:

$$\begin{aligned} f'(R)\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)\eta^{\mu\nu}g_{\mu\nu} - [\eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \eta^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\square]f'(R) &= \kappa\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\ f'(R)R - \frac{1}{2}4f(R) - [\square - 4\square]f'(R) &= \kappa T, \end{aligned} \quad (4.18)$$

se llega a la ecuación de la traza:

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T, \quad (4.19)$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ relaciona a R con T diferencialmente y no algebraicamente como en la relatividad general, donde $R = -\kappa T$.

Las ecuaciones de campo reescritas en su forma habitual se expresan como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{[\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R)]}{f'(R)}. \quad (4.20)$$

4.3. Equivalencia entre teorías: Brans-Dicke y $f(R)$

Hasta este momento se ha buscado hacer notar que no existe una receta que permita redefinir los nuevos campos auxiliares en las teorías que modifican la gravedad pues éstos pueden introducirse ya sea haciendo normalizaciones, transformaciones conformes o bien, simplemente redefiniendo campos a conveniencia.

No ha sido coincidencia el exponer especialmente dos teorías: La teoría de Brans-Dicke y las teorías $f(R)$, pues como se verá en los siguientes párrafos la gravedad $f(R)$ no es más que una representación particular de la teoría de Brans-Dicke con el parámetro $\omega = 0$ y $\omega = -3/2$ [28]. Cabe señalar que en $f(R)$ la materia está mínimamente acoplada con la métrica, por lo que, ésta es descrita bajo *Einstein frame*

Dos teorías se consideran dinámicamente equivalentes si, bajo una redefinición adecuada de los campos gravitacionales y de materia se pueden hacer coincidir sus ecuaciones de campo. Nótese que la misma declaración se puede hacer a nivel de la acción. La cuestión es distinguir entre teorías verdaderamente diferentes ó diferentes representaciones de la misma teoría [8].

A fin de mostrar la igualdad entre ambas teorías, se introducirá un nuevo campo χ a la acción de la teoría $f(R)$ (ver 4.5) para obtener su equivalente dinámicamente (ver Apéndice A), es decir:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (4.21)$$

Se comenzará con el primer término de (4.21), dejando el análisis de los términos de materia para el final de esta sección. Así, al variar respecto a χ se obtiene:

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0. \quad (4.22)$$

Observe que $\chi = R$ si $f''(\chi) \neq 0$; lo cual reproduce la acción (4.5). Es decir, la condición $f'' \neq 0$ en las teorías escalares tensoriales es necesaria para asegurar la equivalencia con la teoría de gravedad original.

Al redefinir el campo χ por $\Phi = f'(\chi)$ y haciendo:

$$V(\Phi) = \chi(\Phi)\Phi - f(\chi(\Phi)), \quad (4.23)$$

la acción toma la forma:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi R - V(\Phi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (4.24)$$

La relación (4.24) es la representación en el *Jordan frame* de la acción de la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 0$. Así, las ecuaciones de campo de la acción (4.24) son:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\Phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi} g_{\mu\nu} V(\Phi) + \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi). \quad (4.25)$$

$$R = V'(\Phi). \quad (4.26)$$

Al tomar la traza de (4.25) para posteriormente reemplazarle R en (4.26) se obtiene la expresión que determina la dinámica de Φ dadas las fuentes de materia, es decir:

$$3\square\Phi + 2V(\Phi) - \Phi \frac{dV}{d\Phi} = \kappa T. \quad (4.27)$$

Note que, para este caso particular la condición $\Phi = f'(R)$ garantiza que $f(R)$ es una representación de la teoría de Brans-Dicke con $\omega = 0$, es decir $\frac{d\Phi}{dR} = f'' \neq 0$. Sin embargo, esta condición es suficiente, pero no necesaria para la invertibilidad; el requisito complementario es el imponer que $f''(R)$ sea continua y biyectiva. Además, cuando f'' no está definida o se desvanece, la igualdad $\Phi = f'(R)$ y la equivalencia entre las dos teorías, no puede ser garantizada [8].

A fin de reescribir (4.24) en el marco de Einstein, se utilizará la siguiente *transformación conforme* (ver Apéndice B):

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}, \\ \Phi = f'(R) \rightarrow \tilde{\Phi}, \\ d\tilde{\Phi} = \sqrt{\frac{2\omega_0+3}{2\kappa}} \frac{d\Phi}{\Phi}. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Es decir, se ha mapeado una teoría escalar tensorial al marco de Einstein introduciendo el campo escalar $\tilde{\Phi}$ el cual se acopla mínimamente con la curvatura de Ricci.

Por lo tanto (4.24) se redefine como:

$$S^{(g)} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \tilde{\Phi} \partial_\alpha \tilde{\Phi} - U(\tilde{\Phi}) \right], \quad (4.29)$$

con $U(\tilde{\Phi}) = \frac{Rf'(R)-f(R)}{2\kappa(f'(R))^2}$. Al elegir $R = R(\tilde{\Phi})$, haciendo $\Phi \equiv f'(R) = e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\Phi}}$ y considerando que los términos de materia se modifican como $g_{\mu\nu} = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}$ y $\omega_0 = 0$, se logra que:

$$S_M = S_M(e^{-\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi) = S_M(e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.30)$$

con lo cual, se obtiene la acción completa en el *Einstein frame*:

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \tilde{\Phi} \partial_\alpha \tilde{\Phi} - U(\tilde{\Phi}) \right] + S_M(e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi). \quad (4.31)$$

Por lo tanto, se ha mostrado que las teorías de Brans-Dicke en el *Jordan frame* y las teorías $f(R)$ en el *Einstein frame* son dinámicamente equivalentes. Hacer esta demostración implicó el uso de un campo Φ , el cual fue expuesto a un mapeo escalar tensorial a través de las transformaciones conformes.

Capítulo 5

Límite de Campo Débil en $f(R)$ y Propagación Libre de Ondas Gravitacionales

En el Capítulo cuatro se dejó ver que las teorías de gravedad $f(R)$ son aquellas que postulan una función arbitraria a priori del escalar de Ricci R ; y cuyas ecuaciones de campo se describen a través de la relación (4.17). Estas teorías surgieron a fin de dar respuesta a problemas cosmológicos y astrofísicos; sin embargo, también han sido ampliamente utilizadas para estudiar la propagación de los modos de polarización de las ondas gravitacionales; concluyendo en la presencia de un nuevo grado de libertad escalar [16] [17] [18] [19] [20] [22] [35]; el cual las convierte en una herramienta clave para obtener información valiosa sobre objetos astronómicos y físicos del Universo temprano dependiendo de si las polarizaciones adicionales pueden o no detectarse [19].

En este capítulo se discutirá la manera en la que las ecuaciones de campo de $f(R)$ fueron manipuladas a fin de extraer una ecuación para el escalar R y otra para la métrica $g_{\mu\nu}$ [40]. Posteriormente, se mostrará la descomposición algebraica del escalar de curvatura, la métrica y el tensor energía-momento; y así obtener ecuaciones escalares y tensoriales a cero y primer orden en la perturbación.

La manipulación de (4.17) se realizó al sumar $\frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ y denotar $(\nabla R)^2 := g^{\mu\nu}(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R)$ (ver Apéndice C); llegando a la siguiente expresión:

$$f'G_{\mu\nu} - f''\nabla_\mu\nabla_\nu R - f'''(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(Rf' - f) + f''\square R + f'''(\nabla R)^2 \right] = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

donde $f := f(R)$, $f' := \partial_R f(R)$ y $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$.

Al tomar la traza de (5.1) se deduce:

$$\square R = \frac{1}{3f''} [\kappa T - 3f'''(\nabla R)^2 + 2f - Rf'], \quad (5.2)$$

con $T := T^\mu{}_\mu$. Finalmente, al sustituir (5.2) en (5.1) se llega a:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'} [f''\nabla_\mu\nabla_\nu R + f'''(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) - \frac{g_{\mu\nu}}{6}(Rf' + f + 2\kappa T) + \kappa T_{\mu\nu}]. \quad (5.3)$$

Hacer esta manipulación permitió que en lugar de abordar una ecuación de cuarto orden para la métrica (ver 5.1), fuese posible emplear dos ecuaciones de segundo orden; una correspondiente a la métrica (5.3), llamada *ecuación tensorial* y otra para el escalar de curvatura (5.2), nombrada *ecuación escalar*; donde ésta última, bajo la teoría linealizada se puede resolver de manera independiente a la perturbación a primer orden en la métrica. Las expresiones (5.2) y (5.3) fueron las ecuaciones elementales en la teoría $f(R)$ para esta tesis y cuyas soluciones se describen minuciosamente en el Capítulo 6. Las siguientes líneas versarán en la discusión de todos los detalles que se realizaron sobre (5.2) y (5.3) para su análisis. En particular, se discutirá la descomposición algebraica del escalar de curvatura $R = R_0 + R^{(1)}$, la elección de R_0 y la invariancia de norma.

5.1. Ecuaciones para el Límite de Campo Débil de $f(R)$

Previo a la solución de las ecuaciones para $g_{\mu\nu}$ y R , se realizó una descomposición algebraica hasta primer orden en la perturbación sobre R , $T_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$; donde $g_{\mu\nu}$ representa a la métrica plana más una perturbación, es decir:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Esta descomposición se vio motivada Del límite de campo débil, puesto que, bajo esta aproximación se hace uso de las ecuaciones de campo linealizadas (ver 3.9).

Además, es importante mencionar que a lo largo de todo este trabajo, no se asumió ningún modelo $f(R)$ particular; lo que difiere sustancialmente de las investigaciones previas sobre la propagación de las ondas gravitacionales [16] [17] [18] [19] [20] [22] [35]. No obstante, si se impusieron condiciones necesarias sobre los modelos $f(R)$ permisibles, es decir, se pide que $f''(R_0) \neq 0$ y $f(R_0) = 0$.

Al hacer la descomposición $R = R_0 + R^{(1)}$ y $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)}$ y sustituir en (5.2) y (5.3) respectivamente, se dedujeron las siguientes ecuaciones escalares y tensoriales (ver Apéndice D).

Ecuación escalar a orden cero

$$\square R_0 = \frac{2}{3}f_0 f_0''^{-1} - \frac{R_0 f_0'}{3} f_0''^{-1} - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 f_0''' f_0''^{-1}. \quad (5.5)$$

Ecuación escalar a primer orden

$$\begin{aligned} \square R^{(1)} - \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma(1)} \partial_\sigma R_0 - \partial_\mu \partial_\nu R_0 h^{\mu\nu} = \\ - \frac{1}{3} f_0''' f_0''^{-2} R^{(1)} [2f_0 - R_0 f_0' - 3\partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 \eta^{\mu\nu} f_0'''] + \\ \frac{1}{3} f_0''^{-1} [R^{(1)} f_0' + 3\partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 h^{\mu\nu} f_0''' - 3\eta^{\mu\nu} \partial_\mu R^{(1)} \partial_\nu R_0 f_0'''] \\ - 3\eta^{\mu\nu} \partial_\mu R_0 \partial_\nu R^{(1)} f_0''' - 3\eta^{\mu\nu} R^{(1)} \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 f_0^{(4)} - R_0 R^{(1)} f_0''], \quad (5.6) \end{aligned}$$

donde $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, $f_0 := f(R_0)$, $f'_0 := \partial_R f(R_0)$, $f''_0 := \partial_R^2 f(R_0)$, $f'''_0 := \partial_R^3 f(R_0)$, $f_0^{(4)} := \partial_R^4 f(R_0)$ y $\Gamma^{\sigma(1)}_{\mu\nu}$ los símbolos de Christoffel dados por (3.3).

La sustitución de R en la ecuación tensorial fue ligeramente distinta, pues en ésta, además de utilizar la descomposición algebraica de R se empleó la definición del tensor de Einstein a primer orden (3.8). Obteniendo así, las siguientes expresiones:

Ecuación tensorial a orden cero

$$f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R_0 + f_0''' \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0' R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0] = 0. \quad (5.7)$$

Ecuación tensorial a primer orden

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} = & f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - f_0'' \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma(1)} \partial_\sigma R_0 + f_0''' \partial_\mu \partial_\nu R_0 R^{(1)} + f_0''' \partial_\mu R_0 \partial_\nu R^{(1)} + f_0''' \partial_\mu R^{(1)} \partial_\nu R_0 \\ & + f_0^{(4)} R^{(1)} \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)} - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0'' R_0 R^{(1)} - \frac{1}{6} h_{\mu\nu} f_0' R_0 - \frac{1}{6} h_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \kappa \eta_{\mu\nu} T + \kappa T_{\mu\nu}] \\ & - f_0'^{-2} f_0'' R^{(1)} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R_0 + f_0''' \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0' R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0], \quad (5.8) \end{aligned}$$

con:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} [\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h].$$

5.2. Fijación de $R_0 = 0$

Debido a que se tiene una ecuación para el escalar de curvatura R que podría considerarse independiente, en general, sería posible elegir a libertad el valor de R_0 . No obstante, ya que la ecuación escalar contiene la información necesaria para dar solución a la ecuación tensorial, el valor que se le asigne a R_0 debe ser consistente con la información física que contiene la ecuación de la métrica. Por lo tanto, al haber asumido un fondo plano en el que se debe cumplir que $R_{\mu\nu} = 0$, la única manera en la que (5.2) arroje un valor para R que sea consistente con (5.3) es haciendo $R_0 = 0$ y por ende $\square R_0 = 0$.

Entonces, al fijar $R_0 = 0$ en la ecuación escalar (5.5) se obtiene:

$$\frac{2}{3} \frac{f_0}{f_0''} = 0, \quad (5.9)$$

es decir, se deducen las condiciones sobre cualquier $f(R)$ permisible bajo este enfoque; esto es, $f_0'' = f''(R_0) \neq 0$ y $f_0 = f(R_0) = 0$.

Mientras que, la ecuación (5.6) se convierte en:

$$\square R^{(1)} = \frac{1}{3} f_0' f_0''^{-1} R^{(1)}, \quad (5.10)$$

la cuál debe mantener las condiciones impuestas por (5.9).

Por otro lado, al hacer $R_0 = 0$ sobre las ecuaciones tensoriales; a orden cero se obtiene:

$$f_0'^{-1} \left[\frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0 \right] = 0, \quad (5.11)$$

lo que conduce a la condición ya impuesta, $f_0 = f(R_0) = 0$.

Análogamente para la ecuación tensorial a primer orden se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\partial^\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma + \partial^\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu} \square h] = \\ f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)} - \frac{1}{3} \kappa \eta_{\mu\nu} T + \kappa T_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por lo tanto, se ha obtenido el conjunto completo de ecuaciones escalares y tensoriales a cero y primer orden, cuyas funciones $f(R)$ permisibles deben satisfacer $f_0 = f(R_0) = 0$ y $f_0'' = f''(R_0) \neq 0$ con $R_0 = 0$. Además, de las condiciones impuestas por la teoría de Brans-Dicke para asegurar su invertibilidad con $f(R)$, se requiere que $f''(R)$ sea continua y biyectiva [28]. Por lo tanto, las funciones $f(R)$ deben ser monótonamente crecientes y convexas [40].

5.3. Invariancia de Norma

Antes de pasar a la solución de las ecuaciones escalares y tensoriales, es importante rescatar que la invariancia de norma establecida en el Capítulo 3 (ver 3.15) prevaleció. Sin embargo, ésta solo fue utilizada sobre la ecuación tensorial, puesto que, al ser la curvatura una cantidad invariante de norma; no importa a cuantas transformaciones sea expuesto el escalar de curvatura, éste siempre será invariante.

Esta observación es de relevancia, pues en el siguiente capítulo se hará uso de las herramientas que provee la invariancia de norma para dar solución a las ecuaciones tensoriales de la teoría $f(R)$ vía la fijación de normas.

Capítulo 6

Resultados

En el Capítulo anterior se dedujeron las ecuaciones escalares y tensoriales a cero y primer orden que rigen la propuesta de gravedad modificada de la presente tesis. El objetivo de este capítulo versará en exponer su solución. Para ello, se ha asumido la propagación libre de los grados de libertad escalares y tensoriales; así como la descomposición algebraica $R = R_0 + R^{(1)}$ del escalar de curvatura con $R_0 = 0$.

Una vez obtenidas las ecuaciones de campo, se proseguirá con la determinación de las expresiones invariantes de norma acorde a las teorías $f(R)$. Esto permitirá elegir una norma adecuada para analizar la propagación libre de ondas gravitacionales.

6.1. Análisis de las Ecuaciones Escalares

Partiendo de (5.10) se realizó convenientemente la re-definición $\mu^2 \equiv \frac{1}{3}f'f''^{-1} > 0$ a fin de expresar la ecuación escalar como:

$$\square R^{(1)} = \mu^2 R^{(1)}, \quad (6.1)$$

la cual es la *ecuación de Klein Gordon* [41] y cuya solución general en un espacio de Minkowski es:

$$R^{(1)} = R^{(1)}(t - x) + R^{(1)}(t + x), \quad (6.2)$$

en particular, se puede elegir una onda plana, descrita por:

$$R^{(1)} = Ae^{iq \cdot \mathbf{x}}, \quad (6.3)$$

con q el vector de onda cuatro dimensional $q = (q^{(0)}, \mathbf{q})$, cuya componente cero relaciona la frecuencia con su energía a través de $q^{(0)} = \frac{\omega}{c} = p^{(0)} = E$; mientras que, sus componentes espaciales representan al momento lineal.

Debido a que la solución a la ecuación escalar a primer orden es una ecuación de onda, se esperaría que ésta se propagara a la velocidad de la luz; para verificarlo, la $R^{(1)}$ de (6.3) debe satisfacer (6.1). Así, al descomponer el D'alambertiano de (6.1) y evaluar $R^{(1)}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 R^{(1)} &= \partial_t^2 (Ae^{iq_0 \cdot x}) \\ &= q_0^2 R^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 R^{(1)} &= \nabla^2 (Ae^{iq \cdot x}) \\ &= -|q|^2 R^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Por lo tanto, se debe cumplir:

$$\square R^{(1)} = (-q_0^2 + |q|^2)R^{(1)}, \quad (6.6)$$

es decir, la solución (6.3) de (6.1) obedece la *relación de dispersión*, descrita por:

$$-q_0^2 + |q|^2 = -\mu^2, \quad (6.7)$$

la cual indica que la velocidad de grupo de la onda plana, descrita por:

$$v_g = \frac{d\omega(q)}{dq} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + \mu^2}} < 1, \quad (6.8)$$

con:

$$\omega(q) = \sqrt{q^2 + \mu^2}, \quad (6.9)$$

es menor que la velocidad de la luz.

Para que la onda viajara a la velocidad de la luz tendría que anularse el cuádrimomento, y así lograr que $q_0^2 = 0$. Al intentar imponer esta condición se llegaría a que el vector de onda q debe ser complejo. Lo que implicaría la presencia de términos atenuantes.

En resumen, la ecuación (6.3) describe grados de libertad masivos, es decir, grados que no se propagan a la velocidad de la luz pues se rigen por la relación de dispersión (6.7); la cual es no lineal y además dispersiva, pues la velocidad de grupo satisface que $\omega(q) = \sqrt{q^2 + \mu^2}$, de modo que, la velocidad de grupo sea $\frac{d\omega(q)}{dq} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + \mu^2}} < 1$.

6.2. Análisis de las Ecuaciones Tensoriales

6.2.1. Transformación de Norma: Perturbación de Traza Invertida

Para dar solución a las ecuaciones tensoriales se realizó un análisis similar al expuesto en el Capítulo 3, donde se habló de la utilidad de la libertad y transformación de norma (3.15) para fijar la norma de Lorenz y de radiación.

Siguiendo este razonamiento, se substituyó la *perturbación de traza invertida* (3.16) descrita por [29]:

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (6.10)$$

en el tensor de Einstein a primer orden (3.8) (ver Apéndice E, parte I), logrando que la ecuación tensorial (5.12) se reescribiera como:

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho\bar{h}^{\sigma\rho} + \partial^\sigma\partial_{(\nu}\bar{h}_{\mu)\sigma} = f_0'^{-1}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}f_0'R^{(1)}]. \quad (6.11)$$

Al aplicar la *norma de Lorenz* $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ sobre (6.11) se obtuvo (Ver Apéndice E, parte II):

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2 \left[\frac{f_0''}{f_0'} \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \right]. \quad (6.12)$$

Lo siguiente consistió en averiguar si era posible que $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ con $\bar{h}_{\mu\nu}$ la perturbación de traza invertida. En principio, se podría hacer $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ si se considera que $R^{(1)} = 0$, sin embargo, esta opción es trivial y no aporta algo nuevo respecto a lo ya establecido por la relatividad general.

La segunda opción versó en suponer $R^{(1)} \neq 0$. Así, de la ecuación escalar a primer orden (5.10) se dedujo que:

$$\frac{f_0''}{f_0'} \square R^{(1)} = \frac{1}{3} R^{(1)}, \quad (6.13)$$

la cual al ser sustituida en (6.12) condujo a:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{2f_0''}{f_0'} [\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)}], \quad (6.14)$$

gracias a las condiciones impuestas por las ecuaciones a orden cero, se tiene que $\frac{2f_0''}{f_0'} \neq 0$, por lo que, la única manera en la que se cumpliera $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ fue a través de la validez simultánea de la relación de dispersión (6.7) y de la expresión:

$$\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = 0. \quad (6.15)$$

De la ecuación (6.3) se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu R^{(1)} &= A \delta^\rho_\mu i \eta_{\sigma\rho} q^\sigma e^{i\eta_{\sigma\rho} q^\sigma x} \\ &= i A q_\mu e^{i q \cdot x}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

entonces,

$$\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} = i q_\mu i q_\nu R^{(1)} = -q_\mu q_\nu R^{(1)}. \quad (6.17)$$

Mientras que, de la ecuación escalar a primer orden, se sabe que:

$$\square R^{(1)} = \mu^2 R^{(1)} \Rightarrow -\eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = -\eta_{\mu\nu} \mu^2 R^{(1)}, \quad (6.18)$$

con μ^2 regido por (6.1); así:

$$\eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = \eta_{\mu\nu} (q_0^2 - |q|^2) R^{(1)}, \quad (6.19)$$

al sustituir (6.17) y (6.19) en (6.15) se obtuvo:

$$\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = R^{(1)} (-q_\mu q_\nu + \mu^2 \eta_{\mu\nu}), \quad (6.20)$$

es decir, se debía satisfacer:

$$R^{(1)} (-q_\mu q_\nu + \mu^2 \eta_{\mu\nu}) = 0, \quad (6.21)$$

y ya que $R^{(1)} \neq 0$, entonces, solo podría suceder que $-q_\mu q_\nu + \mu^2 \eta_{\mu\nu} = 0$ pero $\eta_{\mu\nu} \neq 0$, lo cual implica que:

$$\begin{cases} -q_0^2 + (-1)\mu^2 = 0, \\ -q_i^2 + \mu^2 = 0, \end{cases} \quad (6.22)$$

es decir:

$$\begin{cases} q_0^2 = -\mu^2, \\ q_i^2 = \mu^2. \end{cases} \quad (6.23)$$

Esto condujo a inconsistencias, pues de ser válidas las relaciones anteriores, se cumpliría que:

$$\begin{cases} \mu^2 + 3\mu^2 = -\mu^2, \\ 4\mu^2 = -\mu^2, \end{cases} \quad (6.24)$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, la relación de dispersión (6.7) y la expresión (6.15) no pudieron satisfacerse simultáneamente.

6.2.2. Redefinición de la Perturbación de Traza Invertida

A fin de evitar las inconsistencias expuestas en el análisis previo, se procedió con una redefinición de la *perturbación de traza invertida* y cuya motivación se encuentra en [17] [29]. Esta nueva definición se describe como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \quad (6.25)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \quad (6.26)$$

al sustituir (6.25) en la ecuación tensorial a primer orden (5.12) (Ver Apéndice E, Parte III) se obtuvo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu\bar{h}_\nu{}^\sigma + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu\bar{h}_\mu{}^\sigma - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{3\mu^2}[\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\square R^{(1)}] = \\ f_0'^{-1}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}f_0'R^{(1)}]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Lo siguiente fue calcular la transformación de norma de la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$, para ello se sustituyó (3.15) en (6.25), obteniendo así:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\xi^\sigma, \quad (6.28)$$

esto es, se definió un nuevo tensor $\bar{h}_{\mu\nu}^{new}$ en términos del viejo $\bar{h}_{\mu\nu}^{old}$. Por lo tanto, $\bar{h}_{\mu\nu}$ es intercambiable con una familia de métricas $h_{\mu\nu}^{\xi}$ que dependen de la elección de ξ . Todas las métricas pertenecientes a esta familia aportan la misma información física; es decir, la curvatura $R_{\nu\sigma\rho}^{\mu}$ no depende de ξ^{μ} .

El siguiente paso consistió en utilizar la *libertad de norma* (elegir ξ^{μ}) para fijar la *norma de Lorenz*. Al aplicar (3.19) sobre (6.27), el primer y tercer término se anulan, dejando así:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{3\mu^2}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}R^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\square R^{(1)}), \quad (6.29)$$

para que (6.29) se cumpliera, fue necesario determinar un ξ^{μ} adecuado. Para ello, se tomó la divergencia de la ecuación (6.28), obteniendo:

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \square\xi_{\mu}; \quad (6.30)$$

mientras que, para lograr que $\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0$ se tenía que cumplir:

$$\square\xi_{\mu} = -\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{old}. \quad (6.31)$$

La ecuación anterior siempre tiene solución una vez establecidos los valores iniciales, por lo tanto, se asegura que existe ξ_{μ} , tal que se satisface:

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0. \quad (6.32)$$

Por otro lado, de la ecuación escalar a primer orden se sabía que $R^{(1)} = \mu^{-2}\square R^{(1)}$; el cual, al ser sustituido en el lado derecho de (6.27) condujo a:

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{3\mu^2}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}R^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\square R^{(1)}) = f_0'^{-1}[f_0''\partial_{\mu}\partial_{\nu}R^{(1)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}f_0'R^{(1)}], \quad (6.33)$$

por lo que, dado que se asumió que $\frac{f_0''}{f_0'} = \frac{1}{3\mu^2}$, la ecuación anterior se reduce a:

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (6.34)$$

Logrando finalmente el haber fijado la *norma de Lorenz*; sin embargo, tal y como se ha discutido en las secciones previas, existe una *libertad de norma residual*, la cual permite hacer uso de la *norma de radiación*. Por lo que, las siguientes líneas se dedicaran a este procedimiento.

La transformación de norma generada por un campo vectorial ζ^μ debe satisfacer:

$$h_{\mu\nu}^{new} \rightarrow h_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu, \quad (6.35)$$

al aplicar (6.35) sobre la norma transversa invertida (6.25) (Ver Apéndice E, Parte III) se obtuvo la transformación de norma sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ descrita por:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \zeta^\sigma. \quad (6.36)$$

Para que la *norma de Lorenz* se mantuviese fija, se debía satisfacer:

$$\square \zeta_\mu = 0 \rightarrow \square(\xi_\mu + \zeta_\mu) = -\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}^{old}, \quad (6.37)$$

y, por lo tanto, se tendría que:

$$\square \xi_\mu = -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} \rightarrow -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (6.38)$$

Por otro lado, para fijar la *norma de Coulomb o de radiación* se debía cumplir que $\bar{h}_{\mu\nu}$ sea libre de traza (*traceless*) y que las componentes \bar{h}_{0i} se anulen.

Así, para verificar que $\bar{h}_{\mu\nu}$ cumplía el primer requisito, se calculó la traza de (6.36), obteniendo:

$$\bar{h}^{new} = \bar{h}^{old} - 2\partial_\sigma \zeta^\sigma, \quad (6.39)$$

al imponer $\bar{h} = 0$, ζ^σ debía satisfacer:

$$\bar{h} = 2\partial_\sigma \zeta^\sigma. \quad (6.40)$$

Por otro lado, para que $\bar{h}_{0i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) se satisficiera, las siguientes ecuaciones debían cumplirse:

$$-\bar{h}_{0i} = \partial_0 \zeta_i + \partial_i \zeta_0. \quad (6.41)$$

Por lo tanto, el ζ_μ que preservara la *norma de Lorenz*, tenía que obedecer $\square \zeta_\mu = 0$ y además, (6.40) y (6.41) para poder fijar la *norma de Coulomb*.

Así, las condiciones iniciales para resolver (6.40) fueron:

$$\begin{cases} \bar{h} = 2 \left(-\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\zeta} \right), \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 2 \left(-\nabla^2 \zeta_0 + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} \right); \end{cases} \quad (6.42)$$

y para (6.41):

$$\begin{cases} -\bar{h}_{0i} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x^i}, \\ -\frac{\partial \bar{h}_{0i}}{\partial t} = \nabla^2 \zeta_i + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^i \partial t}. \end{cases} \quad (6.43)$$

Finalmente, al haber hecho que $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisficiera la *norma de Lorenz* y la *norma de radiación*, se fijó la *norma transversa sin traza* (norma TT).

En relatividad general, se cumple que $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}$, lo que implica que si la traza $\bar{h} = 0$ entonces $h = 0$. Sin embargo, bajo la redefinición de la perturbación de traza invertida, esto no se cumplió.

Para verificarlo, se calculó la traza de (6.25), obteniendo:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} h - \frac{1}{3\mu^2} \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \\ \bar{h} &= -h - \frac{4}{3\mu^2} R^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

así, al hacer $\bar{h} = 0$ en (6.44) se tiene:

$$h = -\frac{4}{3\mu^2}R^{(1)}, \quad (6.45)$$

y ya que, en RG el que $\bar{h} = 0$ implica que $h = 0$, se concluye que para nuestro caso, cuando $\bar{h} = 0$, h cumple la relación (6.45); es decir, $\bar{h} \neq h$.

Al hacer $\bar{h}_{0i} = 0$ en (6.25), se obtuvo:

$$\bar{h}_{0i} = h_{0i} - \frac{1}{2}\eta_{0i}h - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{0i}R^{(1)} = h_{0i} = 0, \quad (6.46)$$

es decir, $\bar{h}_{0i} = h_{0i} = 0$.

Al hacer $\bar{h}_{00} = 0$ en (6.25) y usando (6.45) se dedujo que:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= h_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}h - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{00}R^{(1)} \\ &= h_{00} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{3\mu^2}R^{(1)} \\ &= h_{00} - \frac{2}{3\mu^2}R^{(1)} + \frac{1}{3\mu^2}R^{(1)} \\ &= h_{00} - \frac{1}{3\mu^2}R^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

entonces:

$$h_{00} = \frac{1}{3\mu^2}R^{(1)}. \quad (6.48)$$

Por lo tanto, la relación general entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$ se obtiene al sustituir la traza h en (6.26), es decir:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}. \quad (6.49)$$

En resumen, para la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ se cumple:

$$\bar{h} = -h - \frac{4}{3\mu^2} R^{(1)}, \quad (6.50)$$

$$\bar{h}_{00} = h_{00} - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}, \quad (6.51)$$

$$\bar{h}_{ii} = h_{ii} + \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)} \quad (6.52)$$

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij}, \quad (6.53)$$

$$\bar{h}_{0i} = 0. \quad (6.54)$$

Y si se considera que $\bar{h} = 0$, entonces las relaciones para $h_{\mu\nu}$ son:

$$h = -\frac{4}{3\mu^2} R^{(1)}, \quad (6.55)$$

$$h_{00} = \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}, \quad (6.56)$$

$$h_{ii} = \bar{h}_{ii} - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}, \quad (6.57)$$

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij}, \quad (6.58)$$

$$h_{0i} = 0. \quad (6.59)$$

Finalmente, al calcular la divergencia de (6.49), se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial^\nu h_{\mu\nu} &= \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} \partial^\nu R^{(1)}, \\ \partial^\nu h_{\mu\nu} &= -\frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} \partial^\nu R^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Por lo tanto, se ha mostrado que la perturbación $h_{\mu\nu}$ no es traceless ni transversa.

Lo siguiente es resolver la ecuación de onda $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, para ello se propuso como solución la siguiente onda plana:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{iK \cdot x}, \quad (6.61)$$

donde K y $A_{\mu\nu}$ satisfacen que:

$$\eta_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = 0 \rightarrow K^2 = 0. \quad (6.62)$$

Las componentes de $A_{\mu\nu}$, cumplen:

$$A^\mu{}_\mu = 0, \quad (6.63)$$

$$K^\nu A_{\mu\nu} = 0, \quad (6.64)$$

$$A_{0\mu} = 0. \quad (6.65)$$

Observe que, las expresiones (6.64) y (6.65) describen 4 ecuaciones respectivamente, mientras que, (6.63) contiene una ecuación. En total, 9 ecuaciones. Sin embargo, observe que las 4 ecuaciones de $A_{0\mu} = 0$ implican directamente que $K^\nu A_{0\nu} = 0$. Por lo tanto, no existen 4 ecuaciones pertenecientes a (6.64) sino 3.

Ya que $A_{\mu\nu}$ es simétrico, tiene 10 componentes independientes, de las cuales, 8 están restringidas debido a las normas; lo que deja únicamente 2 componentes independientes. Éstas corresponden a los 2 estados de polarización que tienen los grados de libertad de la onda gravitacional que se propagan a la velocidad de la luz.

En conclusión, las soluciones a la ecuación de onda de la perturbación (6.49) y descrita como:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)}, \quad (6.66)$$

serán:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{iK \cdot x} - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \quad (6.67)$$

y ya que de la ecuación escalar, se sabe que $R^{(1)} = Ae^{iq \cdot x}$ con $q \cdot x = \eta_{\mu\nu}q^a x^\nu$ y $q^2 = -\mu^2$, entonces, la relación (6.67) se convierte en:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{iK \cdot x} - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}Ae^{iq \cdot x}, \quad (6.68)$$

de tal forma que, el primer término de la ecuación (6.68) se propaga como un grado transversal no-masivo, es decir, a velocidad c . Mientras que, el segundo término de (6.68) se propagará no-transversalmente y será un grado de libertad masivo, pues no se pueden imponer condiciones sobre $\eta_{\mu\nu}$ tal y como se ha hecho con $A_{\mu\nu}$.

6.2.3. Modos de polarización: Perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$

En la Sección anterior se mostró que la onda plana (6.61) presentó grados de libertad masivos y grados que se propagaban transversalmente a la velocidad de la luz; éstos últimos tienen dos estados de polarización, los cuales se discutirán en este apartado.

Al fijar, sin pérdida de generalidad, la dirección de propagación de la onda $x^3 = z$, tal que $K^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, se tiene que, al evaluar en la relación de transversalidad (6.64):

- $\mu = 0, K^\nu A_{0\nu} = 0 \rightarrow A_{03} = 0,$
- $\mu = 1, K^0 A_{10} + K^3 A_{13} = 0 \rightarrow A_{13} = 0,$
- $\mu = 2, K^0 A_{20} + K^3 A_{23} = 0 \rightarrow A_{23} = 0,$
- $\mu = 3, K^0 A_{30} + K^3 A_{33} = 0 \rightarrow A_{33} = 0.$

Y ya que $\bar{h} = 0$, entonces $\bar{h}_{11} = -\bar{h}_{22}$.

Por lo tanto, la perturbación descrita en componentes toma la siguiente forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & 0 \\ 0 & \bar{h}_{12} & -\bar{h}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

Así, la onda plana propagándose en la dirección x^3 está completamente caracterizada por las componentes \bar{h}_{11} y \bar{h}_{12} definidos como:

$$\begin{aligned} h_+ &= \bar{h}_{11}, \\ h_\times &= \bar{h}_{12}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Para hacer un análisis del efecto físico del paso de las ondas gravitacionales, se debe considerar el movimiento de partículas prueba que estén bajo la presencia de ellas. Para ello, se utilizó la ecuación de desviación geodésica, descrita por:

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma, \quad (6.71)$$

con $U^\mu(x)$ el campo vectorial de las 4-velocidades y S^μ el vector de separación relativo. Esta ecuación se analiza a primer orden, por lo tanto, se toman partículas prueba moviéndose lentamente logrando que su 4-velocidad sea $U^\nu = (1, 0, 0, 0)$. Mientras que las componentes $R^\mu{}_{00\sigma}$ serán:

$$R^\mu{}_{00\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_0\partial_0\bar{h}_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu\bar{h}_{00} - \partial_\sigma\partial_0\bar{h}_{\mu 0} - \partial_\mu\partial_0\bar{h}_{\sigma 0}), \quad (6.72)$$

y si $\bar{h}_{\mu 0} = 0$, se sigue que:

$$R^\mu{}_{00\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_0\partial_0\bar{h}_{\mu\sigma}). \quad (6.73)$$

Así, para las partículas moviéndose lentamente, se tiene que $\tau = x^0 = t$ al orden más bajo, por lo que, la ecuación de desviación geodésica es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}_{\mu\sigma}. \quad (6.74)$$

Para el caso particular en el que la onda viaje en la dirección x^3 , solamente S^1 y S^2 resultarán afectadas; es decir, las partículas prueba solo se perturban en las direcciones perpendiculares al vector de onda.

Así, al estudiar el comportamiento por separado, se tiene que:

- Caso $h_\times = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 &= \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{h}_+ e^{iK_\sigma x^\sigma}), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 &= -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{h}_+ e^{iK_\sigma x^\sigma}). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Cuyas soluciones a primer orden son:

$$\begin{aligned} S^1 &= \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{iK_\sigma x^\sigma}\right) S^1(0), \\ S^2 &= \left(1 - \frac{1}{2} h_+ e^{iK_\sigma x^\sigma}\right) S^2(0). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Lo cual indica que las partículas separadas inicialmente en la dirección x^1 , oscilarán en la dirección x^1 , y de la misma forma en el caso de la dirección x^2 . Por lo tanto, si se inicia con un anillo de partículas en el plano $x - y$, a medida que la onda avance, las partículas tendrán un desplazamiento relativo entre ellas en el plano $x - y$ en forma de " + ".

- Caso $h_+ = 0$.

$$\begin{aligned} S^1 &= S^1(0) + \frac{1}{2}h_x e^{iK_\sigma x^\sigma} S^2(0), \\ S^2 &= S^2(0) + \frac{1}{2}h_x e^{iK_\sigma x^\sigma} S^1(0). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Para este caso, las partículas se desplazarán siguiendo un patrón del estilo ” \times ”.

6.2.4. Modos de polarización: Perturbación $h_{\mu\nu}$

Dada la onda plana (6.67) se sabe que el primer sumando de ésta corresponde a los grados de libertad que se propagan a la velocidad de la luz transversalmente, presentando dos modos de polarización y cuyo estudio se hizo en el apartado anterior.

Por otro lado, el segundo sumando de la onda plana corresponde a los grados de libertad masivos, los cuales no se propagan transversalmente; sin embargo, sí lo hacen de manera longitudinal. Para probarlo se utilizó la relación (6.49) cuyas componentes son:

$$h_{00} = \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}; \quad (6.78)$$

$$h_{11} = \bar{h}_{11} - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}; \quad (6.79)$$

$$h_{22} = \bar{h}_{22} - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}. \quad (6.80)$$

Utilizando que $\bar{h}_{22} = -\bar{h}_{11}$ y que $\bar{h}_{11} = h_+$ y $\bar{h}_{12} = h_\times$, se sigue que:

$$h_{11} = h_+ - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}, \quad (6.81)$$

$$h_{22} = -h_+ - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}. \quad (6.82)$$

Mientras que, para estudiar h_{33} , se usó el hecho de que $\bar{h}_{33} = 0$ con lo cual se obtuvo:

$$\begin{aligned} h_{33} &= \bar{h}_{33} - \frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}, \\ &= -\frac{1}{3\mu^2} R^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Es decir, la perturbación métrica $h_{\mu\nu}$ descrita en términos de sus 3 componentes independientes h_+ , h_x y $R^{(1)}$ se ve como:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^+ + h_{\mu\nu}^\times + h_{\mu\nu}^{R^{(1)}}, \quad (6.84)$$

con:

$$h_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6.85)$$

$$h_{\mu\nu}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_x & 0 \\ 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6.86)$$

$$h_{\mu\nu}^{R^{(1)}} = -\frac{1}{3\mu^2} R^{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.87)$$

Así, de la relación (6.87) se observa que para los modos masivos se tienen dos grados de libertad transversales y uno longitudinal que satisfacen la relación de dispersión (6.7).

Para estudiar el comportamiento físico se consideraron partículas prueba moviéndose lentamente en la dirección $x^3 = z$ y la ecuación de desviación geodésica a primer orden,

descrita por:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = R_{00\sigma}^\mu S^\sigma, \quad (6.88)$$

con:

$$R_{00\sigma}^\mu S^\sigma = \frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} (\partial_0^2 h_{\delta\sigma} + \partial_\sigma \partial_\delta h_{00} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\delta 0} - \partial_0 \partial_\delta h_{0\sigma}). \quad (6.89)$$

Así, para el caso:

- $\mu = 0 = t$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^t = 0, \quad (6.90)$$

pues $R_{00\sigma}^\mu = 0$.

- $\mu = 1 = x$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = R_{00j}^1 S^j \quad \text{con } j = 1, 2, 3. \quad (6.91)$$

- $\mu = 2 = y$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = R_{00j}^2 S^j \quad \text{con } j = 1, 2, 3. \quad (6.92)$$

- $\mu = 3 = z$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^3 = R_{00j}^3 S^j \quad \text{con } j = 1, 2, 3. \quad (6.93)$$

Entonces, para cada componente $h_{\mu\nu}^{R^{(1)}}$, la ecuación de desviación geodésica es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^t = 0, \quad (6.94)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = -\frac{1}{6\mu^2} \frac{\partial^2 R^{(1)}}{\partial t^2} S^1, \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{6\mu^2} \frac{\partial^2 R^{(1)}}{\partial t^2} S^2, \quad (6.96)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^3 = \frac{1}{6} R^{(1)} S^z. \quad (6.97)$$

Observe que, al utilizar la solución de la ecuación escalar dada por $R^{(1)} = Ae^{iq \cdot x}$ que puede verse como $R^{(1)} = Ae^{-i(\omega_q t - q^3 z)}$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 R^{(1)}}{\partial t^2} = -\omega_q^2 R^{(1)}, \quad (6.98)$$

y al sustituirla en las componentes $\mu = 1 = x$ y $\mu = 2 = y$, se llegó a:

$$\frac{\partial^2 S^t}{\partial t^2} = -\frac{\omega_q^2}{6\mu^2} R^{(1)} S^i. \quad (6.99)$$

Con esto, se tiene que, el comportamiento de las partículas prueba bajo los modos de propagación no masivos, será descrito a través las ecuaciones (6.94), (6.97) y (6.99). La solución y análisis de estas expresiones se llevará a cabo en futuros trabajos.

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se estudió la herramienta física y matemática que sustenta la relatividad general para mostrar la propagación libre de las ondas gravitacionales. Se utilizó la aproximación de campo débil ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) para obtener las ecuaciones linealizadas; las cuales se abordaron vía la fijación e invariancia de norma, obteniendo la ecuación de onda para la perturbación $h_{\mu\nu}$.

Posteriormente, se estudiaron las teorías de gravedad modificada, en particular las teorías $f(R)$. Haciendo una manipulación adecuada de las ecuaciones de campo correspondientes a estas teorías, se obtuvo una ecuación escalar para el escalar de Ricci (5.2) y otra tensorial para la métrica (5.3); ambas de segundo orden.

Al realizar la descomposición algebraica $R = R_0 + R^{(1)}$ con $R_0 = 0$ se dedujeron ecuaciones escalares y tensoriales a cero y primer orden. La ecuación escalar a orden cero condujo a las condiciones sobre las $f(R)$ permisibles: $f_0'' = f''(R_0) \neq 0$ y $f_0 = f(R_0) = 0$, monótonamente crecientes y convexas ($f' > 0, f'' > 0$). Lo cual permitió hacer un estudio para la propagación de ondas gravitacionales sin la necesidad de emplear ninguna $f(R)$ particular; pues únicamente se utilizaron las condiciones mínimas necesarias.

La ecuación escalar a primer orden es la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución fue una onda plana (6.3) que satisface la relación de dispersión (6.7). Lo que implicó la existencia de grados de libertad masivos.

Por otro lado, las ecuaciones tensoriales se resolvieron utilizando la transformación de

norma; se comenzó por utilizar la perturbación de traza invertida (3.16) con la cual se llegó a inconsistencias; lo que motivó una redefinición de la traza invertida (6.25) y al uso de la norma de Lorenz y de Coulomb, para fijar la norma transversa sin traza.

Bajo esta norma, se obtuvo la ecuación de onda para la perturbación $h_{\mu\nu}$ y cuya solución fue:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{iK \cdot x} - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \quad (7.1)$$

con la cual se concluyó que los términos $A_{\mu\nu}e^{iK \cdot x}$ se propagaban transversalmente a la velocidad de la luz, tal y como sucede en la RG; mientras que, el término $\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}$ se reproduce como un grado de libertad masivo con 2 grados de libertad transversales (6.85) y (6.86), y uno longitudinal (6.87) que satisface la relación de dispersión $q^2 = -\mu^2$; con lo cual se concluyó que estos grados se propagan con una velocidad de grupo menor que la de la luz.

Como trabajo a futuro, se buscaría determinar una interpretación al comportamiento de ciertos grados de libertad en términos de un medio dispersivo geométrico efectivo. Para ello, se podría complementar la teoría $f(R)$ utilizando otros fondos que no sean Minkowski. Asimismo, se sugiere e hacer un análisis a segundo orden, a fin de estudiar la producción de ondas gravitacionales.

Desde un punto de vista experimental, resulta motivante el averiguar si es posible observar este tipo de comportamientos en la naturaleza; para ello, se plantearía un arreglo experimental, con el cual LIGO fuese capaz de detectar y describir los efectos de los grados de libertad masivos de la onda gravitacional [16],[15].

Apéndice A

Equivalencia entre teoría de Brans-Dicke y teoría $f(R)$

En este apéndice se mostrará la equivalencia entre la teoría de Brans-Dicke con parámetro $\omega = 0$ y las teorías $f(R)$.

Recordando que la acción de Brans-Dicke es:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\Phi R + \left(\frac{16\pi}{c^4} \mathcal{L} \right) - \omega \left(\frac{\Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha}}{\Phi} \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

y que la acción de las teorías $f(R)$:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (\text{A.2})$$

Se utilizará un nuevo campo χ , tal que, la acción equivalente dinámicamente a (A.2) corresponda a:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (\text{A.3})$$

al variar respecto a χ , es decir $\chi \rightarrow \chi + \epsilon\delta\chi$ se obtiene:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \frac{d}{d\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi + \epsilon\delta\chi) + f'(\chi + \epsilon\delta\chi)(R - (\chi + \epsilon\delta\chi))] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (\text{A.4})$$

ya que $\frac{\delta S}{\delta g} = 0$ y $\frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0$, entonces se sigue:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f'(\chi)\delta\chi + f''(\chi)\delta\chi(R - (\chi + \epsilon\delta\chi)) \Big|_{\epsilon=0} - f'(\chi)\delta\chi \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f''(\chi)(R - \chi)] \delta\chi. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Por lo que, $\frac{\delta S}{\delta \chi} = f''(\chi)(R - \chi)$. Usando el principio de mínima acción $\delta S = 0$, se tiene que, $\frac{\delta S}{\delta \chi} = 0$, entonces:

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0, \quad (\text{A.6})$$

Al redefinir el campo χ por $\chi \rightarrow \chi(\Phi)$, $\Phi = f'(\chi)$ y considerando

$$V(\Phi) = \chi(\Phi)\Phi - f(\chi(\Phi)), \quad (\text{A.7})$$

es posible modificar únicamente el argumento de la acción (A.3), sin tomar en cuenta los términos de materia, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi) &= f(\chi) + f'(\chi)R - \chi f'(\chi) \\ &= \Phi R + f(\chi) - \chi\Phi \\ &= \Phi R + f(\chi(\Phi)) - \chi(\Phi)\Phi \\ &= \Phi R - V(\Phi). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Obteniendo así la siguiente acción:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi(R) - V(\Phi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi) \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi(R) - (\chi(\Phi)\Phi - f(\chi(\Phi)))] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi) \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi(R) + f(\chi(\Phi)) - \chi(\Phi)\Phi] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi). \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

La ecuación (A.9) es la representación de la acción de la acción de Brans-Dicke en el Jordan frame. A fin de obtener las ecuaciones de campo, habrá que hacer la variación de (A.9) respecto a la métrica ($g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$) y recordar que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta \sqrt{-g} [\Phi(R) - V(\Phi)] + \sqrt{-g} [\Phi \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \Phi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] + \delta S_M(g_{\mu\nu}, \Psi). \tag{A.10}$$

Para δS_M se cumple que:

$$\begin{cases} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu}, \\ \frac{\delta S_M}{\delta \Psi} = 0. \end{cases} \tag{A.11}$$

Por otro lado, se sabe que:

$$\begin{cases} \delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \\ \delta g_{\mu\nu} = -g_{\gamma\mu} g_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\gamma}, \end{cases} \tag{A.12}$$

por lo tanto:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\gamma\sigma} \delta g^{\sigma\gamma}. \tag{A.13}$$

Para δR se tiene que:

$$\delta R = \delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = \delta(R_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + \delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.14})$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta(R_{\mu\nu})g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta(\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta}) \\ &= g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\alpha} - g^{\mu\alpha}(\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{,\beta} \\ &= (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\beta})_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Haciendo las sustituciones se llega a las ecuaciones de campo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\Phi}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}g_{\mu\nu}V(\Phi) + \frac{1}{\Phi}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi - g_{\mu\nu}\square\Phi). \quad (\text{A.16})$$

Por otro lado, al variar (A.9) respecto a Φ (i.e. $\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon\delta\Phi$) y notando que $\frac{\delta S_M}{\delta\Phi} = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \frac{d}{d\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} [(\Phi + \epsilon\delta\Phi)R - V(\Phi + \epsilon\delta\Phi)] \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \frac{d}{d\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} [R\delta\Phi + \Phi\delta(R) + \delta\epsilon R\delta\Phi + \epsilon\delta R\delta\Phi - V(\Phi + \epsilon\delta\Phi)] \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [R\delta\Phi - V'(\Phi)\delta\Phi] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [R - V'(\Phi)] \delta\Phi. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando el principio de mínima acción $\frac{\delta S}{\delta\Phi} = 0$ se tiene que $R - V'(\Phi) = 0$; por lo tanto:

$$R = V'(\Phi). \quad (\text{A.18})$$

Al tomar la traza de las ecuaciones de campo dadas en (A.16) se obtiene:

$$g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = \frac{\kappa}{\Phi}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}V(\Phi) + \frac{1}{\Phi}(g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\square\Phi),$$

pero se sabe que $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$ y que $g^{\mu\nu}(-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}(nR) = -2R$ entonces se cumple que:

$$g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = R - 2R.$$

Entonces:

$$R - 2R = \frac{\kappa}{\Phi}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}V(\Phi) + \frac{1}{\Phi}(g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\square\Phi),$$

usando $\square = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} -R &= \frac{\kappa}{\Phi}T - \frac{1}{2\Phi}\delta^{\mu}_{\mu}V(\Phi) + \frac{1}{\Phi}(\square\Phi - \delta^{\mu}_{\mu}\square\Phi) \\ &= \frac{\kappa}{\Phi}T - \frac{n}{2\Phi}V(\Phi) + \frac{1}{\Phi}(\square\Phi - n\square\Phi). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Si $n=4$

$$\begin{aligned} &= \frac{\kappa}{\Phi}T - \frac{2V(\Phi)}{\Phi} + \frac{1}{\Phi}(-3\square\Phi) \\ &= \frac{1}{\Phi}[\kappa T - 2V(\Phi) - 3\square\Phi]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, al usar $R = V'(\Phi)$ se llega a la siguiente expresión:

$$3\square\Phi + 2V(\Phi) - \Phi\frac{dV}{d\Phi} = \kappa T. \quad (\text{A.21})$$

La ecuación (A.21) determina la dinámica de Φ dadas las fuentes de materia.

Apéndice B

Equivalencia Jordan frame y Einstein frame

A fin de escribir la relación (A.9) en el frame de Einstein es necesario introducir la siguiente transformación conforme:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu} \equiv \Phi g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

al redefinir el campo escalar $\Phi = f'(R) \rightarrow \tilde{\Phi}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d\tilde{\Phi} &= \sqrt{\frac{2\omega_0 + 3}{2\kappa}} \frac{d\Phi}{\Phi} \\ &= \sqrt{\frac{2\omega_0 + 3}{2\kappa}} \frac{d \ln \Phi}{d\Phi}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Definiendo $\tilde{\kappa}$ como;

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\frac{2\kappa}{2\omega_0 + 3}}, \quad (\text{B.3})$$

y eligiendo $\omega_0 = 0$ se cumple que $\tilde{\kappa}^2 = \frac{2\kappa}{3}$.

Por lo tanto, al hacer la transformación conforme $\Phi = f'(R) \rightarrow \tilde{\Phi}$ tal que se cumpla:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{\Phi} = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{d \ln \Phi}{d\Phi} \\ \Phi = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \\ = e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{2\omega_0+3}}\tilde{\Phi}}. \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

Entonces se satisface que:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\mu\nu} = e^{-\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \tilde{g}_{\mu\nu} \\ \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} g_{\mu\nu} \\ \det(g_{\mu\nu}) = e^{-2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \\ \sqrt{-\tilde{g}} = e^{2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \sqrt{-g}. \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Ya que se trabajará con *transformaciones conformes*, se requiere hacer uso de la siguiente expresión

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} \left[R - 2(D-1) \frac{\square \Omega}{\Omega} - (D-1)(D-4) g^{\mu\nu} \frac{\Omega_{,\mu} \Omega_{,\nu}}{\Omega^2} \right], \quad (\text{B.6})$$

y así tener:

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} R - 6\Omega^{-3} \Omega_{;\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.7})$$

donde el factor conforme será $\Omega^2 = e^{-\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}$ y $\Omega = \sqrt{e^{-\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}}$; que al sustituir en (B.7) se llega al el escalar R :

$$R = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \tilde{R} - 6 \left(e^{\frac{3\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}{2}} \right) \left(e^{-\frac{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}{2}} \right)_{;\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.8})$$

Usando el hecho de que:

$$\left(e^{-\frac{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}{2}} \right)_{,\mu} = -\frac{1}{2} \tilde{\kappa} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \tilde{\Phi}_{,\mu}, \quad (\text{B.9})$$

se sigue:

$$\begin{aligned}
 \left(e^{-\frac{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}{2}} \right)_{;\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\tilde{\kappa} \left(-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}_{,\nu} \right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\mu\nu} + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \\
 &= -\frac{1}{2}\tilde{\kappa} \left[-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}_{,\nu} + e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \right] \\
 &= \frac{1}{2}\tilde{\kappa}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \left[\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}_{,\nu} - \tilde{\Phi}_{,\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \right].
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

De modo que:

$$g^{\mu\nu} \left(e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \right)_{;\mu\nu} = \frac{1}{2}\tilde{\kappa}e^{-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \left[\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{,\mu} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{,\mu} + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \right]. \tag{B.11}$$

Al sustituir (B.11) en (B.8) se obtiene:

$$R = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{R} - \frac{3}{2}\tilde{\kappa}^2e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{,\mu} + 3\tilde{\kappa}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Phi}_{,\mu}^{,\mu} - 3\tilde{\kappa}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha}. \tag{B.12}$$

Multiplicando por $\sqrt{-g}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}$ a ambos lados de la expresión (B.12):

$$\sqrt{-g}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}R = \sqrt{-g}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \left[e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}R - 3\tilde{\kappa}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \left(\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{,\mu} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{,\mu} + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \right) \right],$$

empleando $\sqrt{-g} = e^{-2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}$ y $\Phi = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}$, se llega a:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g}\Phi R &= e^{-2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\sqrt{-g} \left[e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}R - 3\tilde{\kappa}e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \left(\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{,\mu} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{,\mu} + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \right) \right] \\
 &= \sqrt{-\tilde{g}} \left[R - 3\tilde{\kappa} \left(\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{,\mu} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{,\mu} + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Al sustituir (B.3) en la expresión anterior se deduce:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g}\Phi R &= \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} - \frac{3}{2}\frac{2\kappa}{3}\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{\prime\mu} - 3\tilde{\kappa}\sqrt{-\tilde{g}}\left[\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{\prime\mu}\right] \\
 &= \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} - \kappa\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{\prime\mu} - 3\tilde{\kappa}\sqrt{-\tilde{g}}\left[\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{\prime\mu}\right].
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Ya que se está buscando alterar la acción descrita en el Jordan frame, dada por:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}[\Phi R - V(\Phi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \\
 &= \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Phi R - \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}V(\Phi) + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi),
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

a fin de encontrar su análoga en el Einstein frame.

Se debe notar que, de los tres términos involucrados en (B.15), las modificaciones correspondientes a los términos de materia serán descritos por $g_{\mu\nu} = e^{\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}$ y $\omega_0 = 0$, así:

$$S' = S_M(e^{-\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi) = S_M(e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\Phi}}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi). \tag{B.16}$$

Mientras que, el primer término de (B.15) puede ser rectificado al emplear (B.14), esto es:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} - \kappa\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{\prime\mu} - 3\tilde{\kappa}\sqrt{-\tilde{g}}\left[\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{\prime\mu}\right] \\
 &= \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{\prime\mu}\right] - \frac{3\tilde{\kappa}}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{\prime\mu}\right].
 \end{aligned}$$

Usando $k = \frac{3}{2}\tilde{\kappa}^2$, se llega a:

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_{,\mu}\tilde{\Phi}^{\prime\mu}\right] - \frac{1}{\tilde{\kappa}}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\tilde{\Phi}_{,\alpha} - \tilde{\Phi}_{,\mu}^{\prime\mu}\right]. \tag{B.17}$$

El segundo término de (B.17) se anula gracias al teorema de Stokes. Mientras que, para desarrollar el segundo término de (B.15) se utiliza el hecho de que:

$$\begin{cases} \Phi &= f'(R) = e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\Phi}} \\ \chi(\Phi) &= R = R(\tilde{\phi}) = V'(\Phi) \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Al sustituir (B.18) en el segundo término de (B.15) y utilizando la definición de $V(\Phi)$ (A.7), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\chi(\Phi)\Phi - f(\chi(\Phi))] &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [Rf'(R) - f(R)] \\ &\text{pero } \sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}} e^{-2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{-2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}} [Rf'(R) - f(R)] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{Rf'(R) - f(R)}{e^{2\tilde{\kappa}\tilde{\Phi}}} \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{Rf'(R) - f(R)}{(f'(R))^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Finalmente, al definir $U(\tilde{\Phi}) = \frac{Rf'(R) - f(R)}{(f'(R))^2}$ se deduce:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [U(\tilde{\Phi})]. \quad (\text{B.20})$$

Por lo tanto, a partir de la acción en el Jordan frame (B.15) y empleando las expresiones (B.16), el primer término de (B.17) y (B.20) se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \Phi R - \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} V(\Phi) + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{,\mu} \tilde{\Phi}^{,\mu} \right] - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} U(\tilde{\Phi}) + S_M(e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\Phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi). \end{aligned}$$

Así, la expresión final de la acción en el Einstein frame, será:

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \tilde{\Phi} \partial_\alpha \tilde{\Phi} - U(\tilde{\Phi}) \right] + S_M \left(e^{-\sqrt{\frac{2\kappa\tilde{\Phi}}{3}}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi \right) \quad (\text{B.21})$$

Apéndice C

Ecuaciones de Campo bajo la aproximación robusta

Al sumar convenientemente una unidad $(\frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R_{\mu\nu})$ a las ecuaciones de campo obtenidas en el Capítulo 4 y descritas por:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{C.1})$$

se obtiene:

$$f'R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f'g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)f' = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{C.2})$$

donde $f := f(R)$, $f' := \partial_R f(R)$. Al utilizar $g_{\mu\nu}\square = g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$, se sigue que:

$$f'G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f'g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'g_{\mu\nu} - f'\nabla_\mu\nabla_\nu + f'g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{C.3})$$

Al emplear las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 -\nabla_\mu \nabla_\nu f' &= -\nabla_\mu (f'' \nabla_\nu R) \\
 &= -f'' \nabla_\mu \nabla_\nu R - f''' \nabla_\mu R \nabla_\nu R,
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f' &= g_{\mu\nu} [g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (f'' \nabla_\beta R)] \\
 &= g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} [f'' \nabla_\alpha \nabla_\beta R + f''' \nabla_\alpha R \nabla_\beta R] \\
 &= g_{\mu\nu} [f'' \square R + f''' (\nabla R)^2].
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Se puede re-escribir (C.3) de la siguiente manera:

$$f' G_{\mu\nu} - f'' \nabla_\mu \nabla_\nu R - f''' (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (R f' - f) + f'' \square R + f''' (\nabla R)^2 \right] = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{C.6}$$

con $(\nabla)^2 \equiv g^{\mu\nu} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R)$. Al calcular la traza de (C.6), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 f' G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} + f'' \nabla_\mu \nabla_\nu R + f''' (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (f' R - f) + f'' \square R + f''' (\nabla R)^2 \right] \\
 f' g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} &= \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + f'' g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R + f''' g^{\mu\nu} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) \\
 &\quad - g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (f' R - f) + f'' \square R + f''' (\nabla R)^2 \right],
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

y ya que:

- $f'' g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R = f'' \square R$,
- $f''' g^{\mu\nu} (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) = f''' (\nabla R)^2$,
- $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$,
- $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} 4R = -R$,

se sigue que:

$$\begin{aligned} -f'R &= \kappa T + f''\square R + f'''(\nabla R)^2 - 4 \left[\frac{1}{2}(f'R - f) + f''\square R + f'''(\nabla R)^2 \right], \\ &= \kappa T - 3f''\square R - 3f'''(\nabla R)^2 - 2f'R + 2f. \end{aligned}$$

Lo que conduce a:

$$\square R = \frac{1}{3f''} [\kappa T - 3f'''(\nabla R)^2 + 2f - f'R]. \quad (\text{C.8})$$

Finalmente al sustituir (C.8) en (C.3) se llega a:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'} \left[f''\nabla_\mu\nabla_\nu R + f'''(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) - \frac{g_{\mu\nu}}{6}(Rf' + f + 2\kappa T) + \kappa T_{\mu\nu} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Apéndice D

Ecuaciones Escalar y Tensorial en $f(R)$

$$\text{y } R = R_0 + R^{(1)}$$

Partiendo de la ecuación escalar (5.2) y tensorial (5.3) descritas respectivamente por:

$$\square R = \frac{1}{3f''} [\kappa T - 3f'''(\nabla R)^2 + 2f - Rf'], \quad (\text{D.1})$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'} [f''\nabla_\mu\nabla_\nu R + f'''(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) - \frac{g_{\mu\nu}}{6}(Rf' + f + 2\kappa T) + \kappa T_{\mu\nu}]. \quad (\text{D.2})$$

se realizó la sustitución algebraica de $R = R_0 + \epsilon R^{(1)}$ a través de un código en *Mathematica* con el cual se extrajeron las ecuaciones a cero y primer orden.

Al extraer los términos a orden cero, la **ecuación escalar a orden cero** es:

$$\square R_0 = \frac{2}{3}f_0f_0''^{-1} - \frac{R_0f_0'}{3}f_0''^{-1} - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu R_0\partial_\nu R_0f_0'''f_0''^{-1}, \quad (\text{D.3})$$

mientras que, la **ecuación escalar a primer orden** se describe por:

$$\begin{aligned} \square R^{(1)} - \eta^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma(1)} \partial_\sigma R_0 - \partial_\mu \partial_\nu R_0 h^{\mu\nu} &= -\frac{1}{3} f_0''' f_0''^{-2} R^{(1)} [2f_0 - R_0 f_0' - 3\partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 \eta^{\mu\nu} f_0'''] + \\ &\frac{1}{3} f_0''^{-1} [R^{(1)} f_0' + 3\partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 h^{\mu\nu} f_0'' - 3\eta^{\mu\nu} \partial_\mu R^{(1)} \partial_\nu R_0 f_0'' \\ &- 3\eta^{\mu\nu} \partial_\mu R_0 \partial_\nu R^{(1)} f_0'' - 3\eta^{\mu\nu} R^{(1)} \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 f_0^{(4)} - R_0 R^{(1)} f_0''], \end{aligned} \quad (D.4)$$

donde $f_0 := f(R_0)$, $f_0' := \partial_R f(R_0)$, $f_0'' := \partial_R^2 f(R_0)$, $f_0''' := \partial_R^3 f(R_0)$, $f_0^{(4)} := \partial_R^4 f(R_0)$.

Análogamente, al tomar los términos a orden cero para la ecuación tensorial se tiene que:

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{R_0 \eta_{\mu\nu}}{2} = f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R_0 + f_0''' \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0' R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0], \quad (D.5)$$

donde $G_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{R_0 \eta_{\mu\nu}}{2} = 0$, por lo que, la **ecuación tensorial a orden cero** es:

$$f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R_0 + f_0''' \partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0' R_0 - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} f_0] = 0. \quad (D.6)$$

Mientras que, los términos a primer orden resultaron ser:

$$\begin{aligned} -\frac{h_{\mu\nu} R_0}{3} + R_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{R^{(1)} \eta_{\mu\nu}}{6} + \frac{T_{\mu\nu}^{(0)} \kappa}{f_0'} - \frac{T_0 \eta_{\mu\nu} \kappa}{3f_0'} - \frac{h_{\mu\nu}^{(1)} f_0}{6f_0'} + \frac{R^{(1)} \eta_{\mu\nu} f_0 f_0''}{6f_0'^2} \\ &+ \frac{\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} f_0''}{f_0'} - \frac{\partial_\sigma R_0 \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma(1)} f_0''}{f_0'} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu R_0 R^{(1)} f_0''^2}{f_0'^2} + \frac{\partial_\mu R^{(1)} \partial_\nu R^{(0)} f_0'''}{f_0'} + \\ &\frac{\partial_\mu R_0 \partial_\nu R^{(1)} f_0'''}{f_0'} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu R_0 R^{(1)} f_0'''}{f_0'} - \frac{\partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 R^{(1)} f_0'' f_0'''}{f_0'^2} + \frac{\partial_\mu R_0 \partial_\nu R_0 R^{(1)} f_0^{(4)}}{f_0'}, \end{aligned}$$

que factorizando apropiadamente:

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{h_{\mu\nu}R_0}{3} &= f_0'^{-1}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - f_0''\Gamma^{\sigma(1)}{}_{\mu\nu}\partial_\sigma R_0 + f_0''' \partial_\mu\partial_\nu R_0 R^{(1)} + f_0''' \partial_\mu R_0\partial_\nu R^{(1)} + f_0''' \partial_\mu R^{(1)}\partial_\nu R_0 \\
 + f_0^{(4)} R^{(1)}\partial_\mu R_0\partial_\nu R_0 - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0'R^{(1)} - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0''R_0R^{(1)} - \frac{1}{6}h_{\mu\nu}f_0'R_0 - \frac{1}{6}h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\kappa\eta_{\mu\nu}T + \kappa T_{\mu\nu}] \\
 &\quad - f_0'^{-2}f_0''R^{(1)}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R_0 + f_0''' \partial_\mu R_0\partial_\nu R_0 - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0'R_0 - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0]. \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

Observe que los términos a la izquierda son parte del tensor de Einstein a primer orden, los cuales se complementan con los términos a la derecha dados por $-\frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} - \frac{1}{6}h_{\mu\nu}R_0$. Además, noté que se ha sumando un cero con los términos $\frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0''f_0'^{-1}R_0R^{(1)} + \frac{1}{6}f_0'^{-1}f_0''R_0R^{(1)}\eta_{\mu\nu}$.

Por lo que, la **ecuación tensorial a primer orden** es:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^{(1)} &= f_0'^{-1}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - f_0''\Gamma^{\sigma(1)}{}_{\mu\nu}\partial_\sigma R_0 + f_0''' \partial_\mu\partial_\nu R_0 R^{(1)} + f_0''' \partial_\mu R_0\partial_\nu R^{(1)} + f_0''' \partial_\mu R^{(1)}\partial_\nu R_0 \\
 + f_0^{(4)} R^{(1)}\partial_\mu R_0\partial_\nu R_0 - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}f_0'R^{(1)} - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0''R_0R^{(1)} - \frac{1}{6}h_{\mu\nu}f_0'R_0 - \frac{1}{6}h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\kappa\eta_{\mu\nu}T + \kappa T_{\mu\nu}] \\
 &\quad - f_0'^{-2}f_0''R^{(1)}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R_0 + f_0''' \partial_\mu R_0\partial_\nu R_0 - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0'R_0 - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}f_0], \quad (D.8)
 \end{aligned}$$

donde $G_{\mu\nu}^{(1)}$ representa al tensor de Einstein, el cual fue obtenido en el Capítulo 3 y cuya expresión es:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} [\partial^\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial^\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu}\square h].$$

Apéndice E

Solución a Ecuaciones de Campo - Transformaciones de Norma

E.1. Parte I: Usando Relatividad General

Partiendo de las ecuaciones de campo linealizadas obtenidas en el Capítulo 3 y dadas por:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{E.1})$$

con,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial^\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu}\square h) \\ &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu h_\nu{}^\sigma + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu h_\mu{}^\sigma - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\mu\nu}h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\sigma\partial^\rho h_{\sigma\rho} - \square h), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

se busca darles solución, para ello se deben fijar normas. Estas normas se fijan al utilizar las transformaciones de norma generadas de un campo vectorial ξ^μ , el cual debe ser elegido adecuadamente. Esta elección se conoce como libertad de norma.

La transformación de norma debida al campo vectorial ξ^μ sobre la perturbación $h_{\mu\nu}$ se escribe como:

$$h_{\mu\nu} \Rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (\text{E.3})$$

Por otro lado, se define a la perturbación de transversa invertida como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (\text{E.4})$$

$$h_{\mu\nu} := \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (\text{E.5})$$

al sustituir (E.5) en (E.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\mu\nu}h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\sigma\partial^\rho h_{\sigma\rho} - \square h) \\ &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu(\bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}h) + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu(\bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}h) - \frac{1}{2}\square(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho(\bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\eta_{\sigma\rho}h) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\ &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu\bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu\bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}\partial^\sigma\partial_\mu h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu h) - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\square\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\ &= \frac{1}{2}(2\partial^\sigma\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\sigma}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h) - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\square\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} \\ &\quad - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\ &= \partial^\sigma\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\square\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

note que se ha bajado el índice con la métrica en $\frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}(\partial^\sigma\partial_\mu h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu h) \rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h)$ y se ha utilizado $\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho h \rightarrow \square h$.

De tal forma que el tensor de Einstein resulta ser:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\sigma (\partial_\mu \bar{h}_\nu)_\sigma - \frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\sigma\rho}. \quad (\text{E.7})$$

Observe que se ha eliminado explícitamente la información de la traza. Lo siguiente es averiguar la transformación de norma de la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$, para ello se aplica (E.3) sobre (E.4), se obtiene:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (\text{E.8})$$

pero ya que h es la traza de $h_{\mu\nu}$, esto es $h \equiv \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}$, donde $h_{\sigma\rho}$ es:

$$\bar{h}_{\sigma\rho} \rightarrow (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\sigma), \quad (\text{E.9})$$

entonces al sustituir (E.9) en (E.8), se sigue que:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\sigma) \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \xi_\rho - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho \xi_\sigma \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\sigma \eta^{\sigma\rho} \xi_\rho + \partial_\rho \eta^{\sigma\rho} \xi_\sigma) \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \xi^\sigma + \partial_\rho \xi^\rho) \\ &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (2\partial_\sigma \xi^\sigma). \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Por lo tanto, la transformación de norma sobre la perturbación de traza invertida $\bar{h}_{\mu\nu}$ es:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma, \quad (\text{E.11})$$

es decir, se ha definido un nuevo tensor $\bar{h}_{\mu\nu}^{new}$ en términos del viejo $\bar{h}_{\mu\nu}^{old}$. Observe que se tendrán tantos $\bar{h}_{\mu\nu}^{new}$ como ξ^μ se utilicen.

Lo siguiente es fijar la *norma de Lorenz* dada por:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0, \quad (\text{E.12})$$

al aplicar ésta sobre (E.7), el primer y tercer término se anulan, entonces se tiene que:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu}^{new}. \quad (\text{E.13})$$

Para lograr que (E.13) se satisfaga, se utiliza la libertad de norma para determinar la ecuación que ξ^μ debe obedecer; para ello se calcula la divergencia de (E.11), es decir:

$$\begin{aligned} \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{new} &\rightarrow \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \partial^\nu \xi_\nu + \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\sigma \xi^\sigma \\ &\rightarrow \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \partial^\nu \xi_\nu - \partial_\mu \partial_\sigma \xi^\sigma, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

usando el hecho de que ν y σ son índices mudos y que $\partial^\nu \partial_\nu \equiv \square$ se llega a que:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \square \xi_\mu. \quad (\text{E.15})$$

En general $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} \neq 0$, sin embargo, gracias a que es posible elegir a ξ^μ , se exige que éste sea solución a:

$$\square \xi_\mu = -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old}. \quad (\text{E.16})$$

La expresión (E.16) siempre tiene solución una vez establecidas las condiciones iniciales; por lo que, se puede asegurar que existe un ξ_μ que satisface:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0, \quad (\text{E.17})$$

y al satisfacerse (E.17) se logra que (E.13) se cumpla.

Por lo tanto, se ha fijado por completo la norma de Lorenz. las ecuaciones de campo linealizadas bajo esta norma se reescriben como:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}, \quad (\text{E.18})$$

y en el espacio libre de fuentes, serán:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{E.19})$$

Lo siguiente es fijar la *norma de radiación o de Coulomb* sin perder la condición impuesta por la norma de Lorenz. Para ello, se utiliza una nueva transformación de norma generada por un campo vectorial ζ^μ , el cual es regulado por la *libertad de norma residual o restringida*.

La transformación de norma sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ será:

$$h_{\mu\nu}^{\text{new}} \rightarrow h_{\mu\nu}^{\text{old}} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \zeta^\gamma, \quad (\text{E.20})$$

de tal forma que, al aplicar (E.20) sobre la norma transversa invertida (E.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \\ &\rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \zeta_\rho + \partial_\rho \zeta_\sigma) \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \zeta_\rho - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho \zeta_\sigma \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\sigma \eta^{\sigma\rho} \zeta_\rho + \partial_\rho \eta^{\sigma\rho} \zeta_\sigma) \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \xi^\sigma + \partial_\rho \zeta^\rho) \\ &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (2\partial_\sigma \zeta^\sigma). \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Note que se ha utilizado que $h \equiv \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}$ con $h_{\sigma\rho}$ descrita por:

$$h_{\sigma\nu} \rightarrow (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \zeta_\rho + \partial_\rho \zeta_\sigma). \quad (\text{E.22})$$

Finalmente, la transformación de norma sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ generada por ζ^μ es:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \zeta^\sigma. \quad (\text{E.23})$$

Ya que (E.23) debe mantener fija la norma de Lorenz, se exige que

$$\square \zeta_\mu = 0, \quad (\text{E.24})$$

pues así se cumpliría que:

$$\square(\xi_\mu + \zeta_\mu) = -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old}. \quad (\text{E.25})$$

Si $\square \zeta_\mu = 0$, entonces:

$$\square \xi_\mu = -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{old} \rightarrow -\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{E.26})$$

Se prosigue con la imposición de los criterios que fijan a la *norma de Coulomb o de radiación*; es decir se pide que $\bar{h}_{\mu\nu}$ sea libre de traza (*traceless*) y que las componentes \bar{h}_{0i} se anulen. Esto es:

$$\begin{cases} \bar{h} = 0, \\ \bar{h}_{0i} = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (\text{E.27})$$

Entonces, al calcular la traza de (E.23) se tiene que:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{new} &\rightarrow \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \zeta_\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \zeta_\mu - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \zeta^\sigma \\ \bar{h}^{new} &\rightarrow \bar{h}^{old} + \partial_\mu \zeta^\mu + \partial_\nu \zeta^\nu - 4\partial_\sigma \zeta^\sigma \\ &\rightarrow \bar{h}^{old} + 2\partial_\sigma \zeta^\sigma - 4\partial_\sigma \zeta^\sigma \\ &\rightarrow \bar{h}^{old} - 2\partial_\sigma \zeta^\sigma, \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

y ya que se quiere que $\bar{h} = 0$, entonces ζ^σ tiene que satisfacer:

$$\bar{h} = 2\partial_\sigma\zeta^\sigma. \quad (\text{E.29})$$

Para lograr que $\bar{h}_{0i} = 0 (i = 1, 2, 3)$ la perturbación bajo la transformación de norma:

$$\bar{h}_{0i} \rightarrow \bar{h}_{0i} + \partial_0\zeta_i + \partial_i\zeta_0 - \eta_{0i}\partial_\sigma\zeta^\sigma, \quad (\text{E.30})$$

debe resolver las ecuaciones:

$$-\bar{h}_{0i} = \partial_0\zeta_i + \partial_i\zeta_0. \quad (\text{E.31})$$

Por lo tanto, para encontrar un ζ_μ que permita hacer $\bar{h} = 0$ y $\bar{h}_{0i} = 0$ y que preserve la norma de Lorenz, se debe resolver la ecuación (E.24); por lo que se deben determinar las condiciones iniciales:

Para hacer $\bar{h} = 0$ se utiliza (E.29) y se obtiene:

$$\begin{cases} \bar{h} = 2 \left(-\frac{\partial\zeta_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\zeta} \right), \\ \frac{\partial\bar{h}}{\partial t} = 2 \left(-\nabla^2\zeta_0 + \nabla \cdot \frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t} \right). \end{cases} \quad (\text{E.32})$$

Para $-\bar{h}_{0i}$ las condiciones son:

$$\begin{cases} -\bar{h}_{0i} = \frac{\partial\zeta_i}{\partial t} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial x^i}, \\ -\frac{\partial\bar{h}_{0i}}{\partial t} = \nabla^2\zeta_i + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^i\partial t}. \end{cases} \quad (\text{E.33})$$

Finalmente, al haber hecho que $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisficiera la norma de Lorenz (E.12) y la norma de radiación (E.27) se llega a la *norma transversa sin traza* que satisface $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}$; de tal forma que, al hacer $\bar{h} = 0$ entonces $h = 0$.

E.2. Parte II: Usando $f(R)$ con $R = R_0 + R^{(1)}$ y $R_0 = 0$

Haciendo un análisis similar al expuesto en la sección anterior, se hace uso de de la ecuación tensorial a primer orden dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\partial^\sigma \partial_\mu h_\nu{}^\sigma + \partial^\sigma \partial_\nu h_\mu{}^\sigma - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu} \square h] = \\ f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)} - \frac{1}{3} \kappa \eta_{\mu\nu} T + \kappa T_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

de tal forma que al sustituir la perturbación de traza invertida (ver E.5) en el tensor de Einstein se obtiene (E.7); logrando así que la ecuación tensorial a primer orden se re-escriba como:

$$\partial^\sigma (\partial_\mu \bar{h}_\nu)_\sigma - \frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\sigma\rho} = f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)} - \frac{1}{3} \kappa \eta_{\mu\nu} T + \kappa T_{\mu\nu}]. \quad (\text{E.35})$$

Observe que se sigue manteniendo la transformación de norma sobre la perturbación de traza invertida $\bar{h}_{\mu\nu}$ (ver E.11). Al aplicar la norma de Lorenz (E.12) en (E.35) el primer y tercer término del lado izquierdo se anulan; si además se considera $T_{\mu\nu} = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} &= f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)}], \\ \square \bar{h}_{\mu\nu} &= -2 \left[\frac{f_0''}{f_0'} \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

lo siguiente es determinar si es posible que $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, para ello se asume que $R^{(1)} \neq 0$; al utilizar la ecuación escalar a primer orden se puede hacer:

$$\square R^{(1)} = \frac{1}{3} f_0' f_0''^{-1} R^{(1)} \Rightarrow \frac{f_0''}{f_0'} \square R^{(1)} = \frac{1}{3} R^{(1)}, \quad (\text{E.37})$$

al sustituir (E.37) en (E.36) se tiene que:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{2f_0''}{f_0'} [\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)}], \quad (\text{E.38})$$

para lograr que $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ tendría que suceder que:

$$-\frac{2f_0''}{f_0'} [\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)}] = 0, \quad (\text{E.39})$$

pero debido a las condiciones impuestas por las ecuaciones a orden cero, el factor $\frac{2f_0''}{f_0'} \neq 0$, entonces debe cumplirse que:

$$\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = 0. \quad (\text{E.40})$$

Además, no debe olvidarse que debe satisfacerse simultáneamente la relación de dispersión, extraída de la ecuación escalar, es decir:

$$-K_0^2 + |K|^2 = -\mu^2, \quad (\text{E.41})$$

Recordando que para la ecuación escalar se obtuvo la solución:

$$R^{(1)} = Ae^{iK \cdot x} = Ae^{i\eta_{\sigma\rho} K^\sigma K^\rho}, \quad (\text{E.42})$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu R^{(1)} &= A\delta^\rho_\mu i\eta_{\sigma\rho} K^\sigma e^{i\eta_{\sigma\rho} K^\sigma K^\rho} \\ &= iK_\mu e^{iK \cdot x}, \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

entonces,

$$\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} = iK_\mu iK_\nu R^{(1)} = -K_\mu K_\nu R^{(1)}. \quad (\text{E.44})$$

También de la ecuación escalar a primer orden, se tiene que:

$$\square R^{(1)} = \mu^2 R^{(1)} \Rightarrow -\eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = -\eta_{\mu\nu} \mu^2 R^{(1)}, \quad (\text{E.45})$$

con $\mu^2 = K_0^2 - |K|^2$, entonces:

$$\eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} = \eta_{\mu\nu} (K_0^2 - |K|^2) R^{(1)}, \quad (\text{E.46})$$

al sustituir (E.44) y (E.46) en (E.40) se sigue que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} &= -K_\mu K_\nu R^{(1)} + \eta_{\mu\nu} (K_0^2 - |K|^2) R^{(1)} \\ &= R^{(1)} (-K_\mu K_\nu + \eta_{\mu\nu} \mu^2), \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

así para lograr (E.40) se debe satisfacer que:

$$(-K_\mu K_\nu + \mu^2 \eta_{\mu\nu}) R^{(1)} = 0, \quad (\text{E.48})$$

y ya que $R^{(1)} \neq 0$, entonces solo podría suceder que $(-K_\mu K_\nu + \mu^2 \eta_{\mu\nu})$ pero $\eta_{\mu\nu} \neq 0$, lo cual implica que:

$$\begin{cases} -K_0^2 + (-1)\mu^2 = 0, \\ -K_i^2 + \mu^2 = 0, \end{cases} \quad (\text{E.49})$$

es decir:

$$\begin{cases} K_0^2 = -\mu^2, \\ K_i^2 = \mu^2. \end{cases} \quad (\text{E.50})$$

Lo cual conduce a inconsistencias pues de ser válidas las relaciones anteriores, se cumpliría que:

$$\begin{cases} \mu^2 + 3\mu^2 = -\mu^2 \\ 4\mu^2 = -\mu^2, \end{cases} \quad (\text{E.51})$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, la relación de dispersión (E.41) y la expresión (E.40) no pueden satisfacerse simultáneamente.

E.3. Parte III: Definiendo una nueva perturbación de traza invertida

Ya que al buscar resolver la ecuación tensorial a primer orden utilizando la transformación de norma dada en (E.4) condujo a inconsistencias; se propuso una nueva perturbación de traza invertida, definida como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}, \quad (\text{E.52})$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}. \quad (\text{E.53})$$

Al sustituir (E.53) en la ecuación tensorial a primer orden dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\partial^\sigma\partial_\mu h_\nu{}^\sigma + \partial^\sigma\partial_\nu h_\mu{}^\sigma - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu}\square h] = \\ f_0'^{-1}[f_0''\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}f_0'R^{(1)} - \frac{1}{3}\kappa\eta_{\mu\nu}T + \kappa T_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

el tensor de Einstein se re-escibe como:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\sigma\partial^\rho h_{\sigma\rho} - \square h) \\
 &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu(\bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}h + \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}) + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu(\bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}h + \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h \\
 &\quad - \frac{1}{2}\square(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho(\bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\eta_{\sigma\rho}h + \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\
 &= \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\mu\bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\nu\bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}\partial^\sigma\partial_\mu h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu h) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3\mu^2}(\eta_{\nu\sigma}\partial^\sigma\partial_\mu R^{(1)} + \eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu R^{(1)})) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h + \frac{1}{2}\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}\square R^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho h \\
 &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho R^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\
 &= \frac{1}{2}(2\partial^\sigma\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\sigma}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3\mu^2}(\partial_\nu\partial_\mu R^{(1)} + \partial_\mu\partial_\nu R^{(1)})) - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h \\
 &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}\square R^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho R^{(1)} \\
 &\quad - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\
 &= \partial^\sigma\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\sigma} + \frac{1}{2}(\frac{1}{3\mu^2}(2\partial_\nu\partial_\mu R^{(1)}) - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h + \frac{1}{2}\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}\square R^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}\square R^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \\
 &= \partial^\sigma\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\sigma} - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{3\mu^2}(\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\square R^{(1)}), \tag{E.55}
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\sigma(\partial_\mu\bar{h}_{\nu)\sigma} - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{3\mu^2}(\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\square R^{(1)}). \tag{E.56}$$

Observe que se ha bajado el índice con la métrica en $\frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}\partial^\sigma\partial_\mu h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu h \rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h)$ y se ha utilizado $\eta_{\sigma\rho}\partial^\sigma\partial^\rho h \rightarrow \square h$. La expresión (E.56) es la versión análoga a la ecuación (E.7) pero considerando la re-definición de la perturbación.

Finalmente, a la ecuación tensorial a primer orden bajo la nueva definición de perturbación de traza invertida, es decir:

$$\begin{aligned} \partial^\sigma (\partial_\mu \bar{h}_\nu)_\sigma - \frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\sigma\rho} + \frac{1}{3\mu^2} (\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)}) = \\ f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)} - \frac{1}{3} \kappa \eta_{\mu\nu} T + \kappa T_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

Lo siguiente es calcular la transformación de norma de la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$. Al sustituir (E.3) sobre (E.52), es decir:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)}, \quad (\text{E.58})$$

pero ya que h es la traza de $h_{\mu\nu}$, esto es $h \equiv \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}$, donde $h_{\sigma\rho}$ es:

$$\bar{h}_{\sigma\nu} \rightarrow (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\sigma), \quad (\text{E.59})$$

entonces al sustituir (E.59) en (E.58), se sigue que:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\sigma) - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \xi_\rho - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho \xi_\sigma - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\sigma \eta^{\sigma\rho} \xi_\rho + \partial_\rho \eta^{\sigma\rho} \xi_\sigma) - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \\ &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h - \frac{1}{3\mu^2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \xi^\sigma + \partial_\rho \xi^\rho) \\ &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (2\partial_\sigma \xi^\sigma). \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$

Por lo tanto, la transformación de norma sobre la perturbación de traza invertida $\bar{h}_{\mu\nu}$ es:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma. \quad (\text{E.61})$$

Para fijar la norma de Lorenz, se aplica (E.12) en (E.56). El primer y tercer término se anulan, dejando así:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{3\mu^2}(\partial_\mu\partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\square R^{(1)}). \quad (\text{E.62})$$

Lo siguiente es determinar a ξ^μ . Al tomar la divergencia de la ecuación (E.61), se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}^{new} &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\xi^\sigma \\ \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{new} &\rightarrow \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu\partial^\nu\xi_\nu + \partial^\nu\partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\nu\partial_\sigma\xi^\sigma \\ &\rightarrow \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\nu\partial^\nu\xi_\mu + \partial_\mu\partial^\nu\xi_\nu - \partial_\mu\partial_\sigma\xi^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{E.63})$$

Por lo tanto:

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \square\xi_\mu, \quad (\text{E.64})$$

y ya que se busca que se cumpla que $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0$, entonces ξ_μ tiene que satisfacer:

$$\begin{aligned} \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \square\xi_\mu &= 0, \\ \square\xi_\mu &= -\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old}. \end{aligned} \quad (\text{E.65})$$

Debido a que, (E.65) siempre tiene solución, entonces ξ_μ cumple:

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = 0. \quad (\text{E.66})$$

De la ecuación escalar a primer orden se sabe que $\square R^{(1)} = \mu^2 R^{(1)}$ lo que implica que $R^{(1)} = \mu^{-2}\square R^{(1)}$. Además, se tiene que $\mu^2 = \frac{1}{3}\frac{f'_0}{f''_0}$.

Por lo que, al sustituir $R^{(1)}$ en lado derecho de (E.57) y considerando $T_{\mu\nu} = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^{(1)} &= f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)}] \\
 &= \frac{f_0''}{f_0'} \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{\mu^{-2}}{3} \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} \\
 &= \frac{f_0''}{f_0'} \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} 3 \frac{f_0''}{f_0'} \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)} \\
 &= \frac{f_0''}{f_0'} [\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)}]. \tag{E.67}
 \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir (E.67) en la ecuación tensorial a primer orden (E.57) se deduce:

$$-\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{3\mu^2} (\partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \square R^{(1)}) = f_0'^{-1} [f_0'' \partial_\mu \partial_\nu R^{(1)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} f_0' R^{(1)}], \tag{E.68}$$

por lo que, se asume que $\frac{f_0''}{f_0'} = \frac{1}{3\mu^2}$, lo que implica que:

$$-\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{E.69}$$

Para fijar la *norma de Radiación* sin alterar lo ya establecido, se usa la transformación de norma sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ dada por:

$$h_{\mu\nu}^{new} \rightarrow h_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu, \tag{E.70}$$

al aplicar (E.70) sobre la norma transversa invertida (E.52) y usando $h \equiv \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}$ con $h_{\sigma\rho}$ donde:

$$\bar{h}_{\sigma\rho} \rightarrow (h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma \zeta_\rho + \partial_\rho \zeta_\sigma), \tag{E.71}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{\mu\nu} &\rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \\
 &\rightarrow (h_{\mu\nu} + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}(h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma\zeta_\rho + \partial_\rho\zeta_\sigma) - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \\
 &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho} + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\partial_\sigma\zeta_\rho - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\partial_\rho\zeta_\sigma - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \\
 &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\sigma\eta^{\sigma\rho}\zeta_\rho + \partial_\rho\eta^{\sigma\rho}\zeta_\sigma) - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \\
 &\rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{3\mu^2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu - \frac{1}{2}(\partial_\sigma\zeta^\sigma + \partial_\rho\zeta^\rho) \\
 &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(2\partial_\sigma\zeta^\sigma). \tag{E.72}
 \end{aligned}$$

Finalmente, la transformación de norma sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ generada por ζ^μ es:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{new} = \bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\zeta^\sigma. \tag{E.73}$$

Para que la norma de Lorenz se mantenga fija, se debe cumplir que:

$$\square\zeta_\mu = 0, \tag{E.74}$$

entonces, si,

$$\square(\xi_\mu + \zeta_\mu) = -\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}^{old}, \tag{E.75}$$

y $\square\zeta_\mu = 0$ entonces:

$$\square\xi_\mu = -\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{old} \rightarrow -\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{E.76}$$

Los criterios que fijan a la *norma de Coulomb o de radiación* se describen en (E.27).

Entonces, al calcular la traza de (E.73) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{new} &= \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu}^{old} + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\zeta_\nu + \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\zeta_\mu - \eta^{\sigma\rho}\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\zeta^\sigma \\
 \bar{h}^{new} &= \bar{h}^{old} + \partial_\mu\zeta^\mu + \partial_\nu\zeta^\nu - 4\partial_\sigma\zeta^\sigma \\
 &= \bar{h}^{old} + 2\partial_\sigma\zeta^\sigma - 4\partial_\sigma\zeta^\sigma \\
 &= \bar{h}^{old} - 2\partial_\sigma\zeta^\sigma,
 \end{aligned} \tag{E.77}$$

ya que se busca que $\bar{h} = 0$, entonces ζ^σ satisface:

$$\bar{h} = 2\partial_\sigma\zeta^\sigma. \tag{E.78}$$

Si además se necesita que $\bar{h}_{0i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), entonces la perturbación bajo la transformación de norma:

$$\bar{h}_{0i} \rightarrow \bar{h}_{0i} + \partial_0\zeta_i + \partial_i\zeta_0 - \eta_{0i}\partial_\sigma\zeta^\sigma, \tag{E.79}$$

debe resolver las ecuaciones:

$$-\bar{h}_{0i} = \partial_0\zeta_i + \partial_i\zeta_0. \tag{E.80}$$

Por lo tanto, para encontrar un ζ_μ que permita hacer $\bar{h} = 0$ y $\bar{h}_{0i} = 0$ y que preserve la norma de Lorenz, se debe resolver la ecuación (E.74); por lo que se deben determinar las condiciones iniciales:

Para hacer $\bar{h} = 0$ se utiliza (E.78) y se obtiene:

$$\begin{cases} \bar{h} = 2 \left(-\frac{\partial\zeta_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\zeta} \right), \\ \frac{\partial\bar{h}}{\partial t} = 2 \left(-\nabla^2\zeta_0 + \nabla \cdot \frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t} \right). \end{cases} \tag{E.81}$$

Para $-\bar{h}_{0i}$ las condiciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\bar{h}_{0i} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x^i}, \\ -\frac{\partial \bar{h}_{0i}}{\partial t} = \nabla^2 \zeta_i + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^i \partial t}. \end{array} \right. \quad (\text{E.82})$$

Finalmente, al haber hecho que $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisficiera la norma de Lorenz y la norma de radiación, en realidad, se está imponiendo la *norma transversa sin traza*.

Bibliografía

- [1] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [2] Alexei V Filippenko y Adam G Riess. «Results from the high-z supernova search team». En: *Physics Reports* 307.1-4 (1998), págs. 31-44.
- [3] Clifford M Will. «The confrontation between general relativity and experiment: an update». En: *Physics Reports* 113.6 (1984), págs. 345-422.
- [4] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott y col. «Observation of gravitational waves from a binary black hole merger». En: *Physical review letters* 116.6 (2016), pág. 061102.
- [5] Fritz Zwicky. «The redshift of extragalactic nebulae». En: *Helvetica Physica Acta* 6 (1933), págs. 110-127.
- [6] Alan H Guth. «Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems». En: *Physical Review D* 23.2 (1981), pág. 347.
- [7] Antonio De Felice y Shinji Tsujikawa. «f (R) theories». En: *Living Reviews in Relativity* 13.1 (2010), págs. 1-161.
- [8] Thomas P Sotiriou y Valerio Faraoni. «f (R) theories of gravity». En: *Reviews of Modern Physics* 82.1 (2010), pág. 451.
- [9] Alexei A Starobinsky. «A new type of isotropic cosmological models without singularity». En: *Physics Letters B* 91.1 (1980), págs. 99-102.
- [10] Wayne Hu e Ignacy Sawicki. «Models of f (R) cosmic acceleration that evade solar system tests». En: *Physical Review D* 76.6 (2007), pág. 064004.

- [11] Shinji Tsujikawa. «Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints». En: *Physical Review D* 77.2 (2008), pág. 023507.
- [12] Eric V Linder. «Exponential gravity». En: *Physical Review D* 80.12 (2009), pág. 123528.
- [13] CQ Geng. «Gravitational waves in viable modified gravity theories». En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 384. 1. IOP Publishing. 2012, pág. 012030.
- [14] Patric Hölscher. «Gravitational waves and degrees of freedom in higher derivative gravity». En: *Physical Review D* 99.6 (2019), pág. 064039.
- [15] Christian Corda. «Interferometric detection of gravitational waves: the definitive test for General Relativity». En: *International Journal of Modern Physics D* 18.14 (2009), págs. 2275-2282.
- [16] Salvatore Capozziello, Christian Corda y Maria Felicia De Laurentis. «Massive gravitational waves from $f(R)$ theories of gravity: Potential detection with LISA». En: *Physics Letters B* 669.5 (2008), págs. 255-259.
- [17] Christian Corda. «Massive gravitational waves from the R^2 theory of gravity: production and response of interferometers». En: *International Journal of Modern Physics A* 23.10 (2008), págs. 1521-1535.
- [18] Christopher PL Berry y Jonathan R Gair. «Linearized $f(R)$ gravity: gravitational radiation and solar system tests». En: *Physical Review D* 83.10 (2011), pág. 104022.
- [19] H Rizwana Kausar, Lionel Philippoz y Philippe Jetzer. «Gravitational wave polarization modes in $f(R)$ theories». En: *Physical review D* 93.12 (2016), pág. 124071.
- [20] Lionel Antoine Philippoz. «On the polarization of gravitational waves». Tesis doct. University of Zurich, 2018.
- [21] Orfeu Bertolami, Cláudio Gomes y Francisco SN Lobo. «Gravitational waves in theories with a non-minimal curvature-matter coupling». En: *The European Physical Journal C* 78.4 (2018), págs. 1-9.
- [22] Yun Soo Myung. «Propagating degrees of freedom in gravity». En: *Advances in High Energy Physics* 2016 (2016).

- [23] Stephen W Hawking y George Francis Rayner Ellis. *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973.
- [24] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [25] Saúl Ramos. *Relatividad para futuros físicos*. Facultad de Ciencias, 2018.
- [26] Grant Fowles y George Cassiday. *Analytical Mechanics*. 2000.
- [27] Lev Davidovich Landau. *The classical theory of fields*. Vol. 2. Elsevier, 2013.
- [28] Carl Brans y Robert H Dicke. «Mach's principle and a relativistic theory of gravitation». En: *Physical review* 124.3 (1961), pág. 925.
- [29] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [30] Takeshi Chiba, Tristan L Smith y Adrienne L Erickcek. «Solar System constraints to general f (R) gravity». En: *Physical Review D* 75.12 (2007), pág. 124014.
- [31] Baojiu Li, John D Barrow y David F Mota. «Cosmology of modified Gauss-Bonnet gravity». En: *Physical Review D* 76.4 (2007), pág. 044027.
- [32] Nathan Rosen. «A bi-metric theory of gravitation». En: *General Relativity and Gravitation* 4.6 (1973), págs. 435-447.
- [33] Shin'ichi Nojiri y Sergei D Odintsov. «Unifying inflation with Λ CDM epoch in modified f (R) gravity consistent with Solar System tests». En: *Physics Letters B* 657.4-5 (2007), págs. 238-245.
- [34] Alexander D Dolgov y Masahiro Kawasaki. «Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?» En: *Physics Letters B* 573 (2003), págs. 1-4.
- [35] Jianbo Lu, Yan Wang y Xin Zhao. «Linearized modified gravity theories and gravitational waves physics in the GBD theory». En: *Physics Letters B* 795 (2019), págs. 129-134.
- [36] Robert V Wagoner. «Scalar-tensor theory and gravitational waves». En: *Physical Review D* 1.12 (1970), pág. 3209.

- [37] Mariusz P Dabrowski, Janusz Garecki y David B Blaschke. «Conformal transformations and conformal invariance in gravitation». En: *Annalen der Physik* 18.1 (2009), págs. 13-32.
- [38] Sergio Mendoza e YM Rosas-Guevara. «Gravitational waves and lensing of the metric theory proposed by Sobouti». En: *Astronomy & Astrophysics* 472.2 (2007), págs. 367-371.
- [39] Enrico Barausse y Thomas P Sotiriou. «Perturbed kerr black holes can probe deviations from general relativity». En: *Physical review letters* 101.9 (2008), pág. 099001.
- [40] Luisa G Jaime, Leonardo Patino y Marcelo Salgado. «Robust approach to f (R) gravity». En: *Physical Review D* 83.2 (2011), pág. 024039.
- [41] Pierre Gravel y Claude Gauthier. «Classical applications of the Klein–Gordon equation». En: *American Journal of Physics* 79.5 (2011), págs. 447-453.