



# Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría en Ciencias (Físicas)

Límite de rapidez cuántico en sistemas fermiónicos enredados

## T E S I S

que para optar por el grado de  
Maestro en Ciencias Físicas

PRESENTA:  
Sahory Andrea Canseco Jiménez

Tutor Principal:  
Dra. Andrea Valdés Hernández  
Instituto de Física UNAM

México, CDMX. (Diciembre) 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

A physicist is just an atom's  
way of looking at itself.

---

*Niels Bohr*

---

# AGRADECIMIENTOS

El siguiente trabajo alcanzó su conclusión gracias a todos los catedráticos e investigadores que han sido de apoyo profesional y orientación personal a lo largo de mi vida académica, así como la beca de posgrado del CONACyT. De forma similar agradezco el apoyo económico de tres meses por parte de la beca (PRIDIF21-3) del IF y de parte del proyecto PAPIIT IN113720 que fue de mucha ayuda en el periodo de conclusión de este trabajo.

Deseo reiterar mis más sinceros agradecimientos, a la atención, esfuerzo y paciencia de mi tutora Andrea Valdés, que, aunque empecé a trabajar con ella en un momento complicado en mi vida, no dudó de mí.

A los miembros de mi comité tutor, el Dr. Pedro Antonio Quinto Su y el Dr. Jorge Hirsch Ganievich por su amable consejo y guía durante los dos años de maestría. Así como a los miembros del jurado, por sus comentarios y correcciones que enriqueció el contenido de esta tesis para una mejor lectura.

Aprovecho a realizar un agradecimiento con mucho amor, a el esfuerzo de mis padres y cariño de mis hermanas, que me han dado la oportunidad de conocer el amor y la pasión por mi formación profesional.

---

---

# RESUMEN

Al estudiar sistemas cuánticos compuestos que evolucionan unitariamente hacia un estado distinguible (u ortogonal), se ha mostrado que el enredamiento puede reducir el tiempo de ortogonalidad  $\tau$ , reforzando con ello la importancia del entrelazamiento tanto en el estudio de la dinámica de sistemas cuánticos como en la implementación de diversos procesos en el campo de la información cuántica. La relación entre el enredamiento y  $\tau$  fue originalmente analizada en sistemas compuestos de partes distinguibles, y posteriormente estudiada en sistemas conformados por partes indistinguibles. En este último caso, aún existen preguntas abiertas en torno a los efectos del enredamiento sobre el tiempo de ortogonalidad y su relación con el límite de rapidez cuántico. En esta tesis se abordan algunas de esas preguntas, considerando un sistema de dos fermiones indistinguibles y no interactuantes que evoluciona hacia un estado distinguible. En particular, se analiza la condición de ortogonalidad y se caracterizan las familias de estados que llegan a un estado distinguible en un tiempo finito, explorando con especial detalle la relación entre dicho tiempo, el límite de rapidez cuántico y el enredamiento entre las partículas, medido con la llamada concurrencia fermiónica.

---

---

# ÍNDICE GENERAL

---

	Página
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Enredamiento entre sistemas distinguibles e indistinguibles</b>	<b>8</b>
1.1. Enredamiento entre sistemas distinguibles . . . . .	8
1.1.1. Definición de enredamiento en sistemas de $m$ partes distinguibles . . . . .	8
1.1.2. Criterio de enredamiento en estados puros para sistemas bipartitos . . . . .	9
1.2. Enredamiento entre sistemas indistinguibles . . . . .	11
1.2.1. Sistema de fermiones . . . . .	11
1.2.2. Enredamiento Fermiónico . . . . .	12
<b>2. Límite de rapidez cuántico</b>	<b>20</b>
2.1. Límites fundamentales en la mecánica cuántica . . . . .	20
2.1.1. La relación de Mandelstam-Tamm . . . . .	21
2.1.2. El límite de rapidez cuántico de Margolus y Levitin . . . . .	22
2.1.3. Límite de rapidez cuántico de subsistemas distinguibles separables y enredados . . . . .	23
<b>3. Sistema de dos fermiones con cuatro niveles disponibles</b>	<b>27</b>
3.1. Límite de rapidez cuántico y tiempo de ortogonalidad en sistemas de fermiones indistinguibles . . . . .	27
3.1.1. Evolución temporal del sistema . . . . .	27
3.1.2. Condición de ortogonalidad . . . . .	29
3.1.3. Cálculo del valor esperado de la energía y su dispersión . . . . .	31
3.1.4. Concurrencia fermiónica . . . . .	32
3.2. Análisis para distribuciones particulares . . . . .	32
3.2.1. Distribución equiprobable de estados . . . . .	33

---

---

3.2.2. Distribución equiprobable de energía . . . . .	35
3.2.3. Distribución de máxima dispersión . . . . .	37
3.3. Análisis numérico . . . . .	39
3.3.1. Familia I: $\sin \phi = 0$ . . . . .	39
3.3.2. Familia II: $\sin \phi \neq 0$ y $v + 2y \cos \phi = 0$ con $y = 0$ . . . . .	46
3.3.3. Familia III: $\sin \phi \neq 0$ y $v + 2y \cos \phi = 0$ con $y \neq 0$ . . . . .	52
<b>4. Conclusiones</b>	<b>58</b>
4.1. Conclusiones y observaciones finales . . . . .	58
<b>Apéndice</b>	<b>60</b>
4.2. Método computacional para la familia I . . . . .	60
Método computacional para la familia I . . . . .	60
4.2.1. Método I . . . . .	60
4.2.2. Método II . . . . .	61
4.2.3. Distribución de probabilidades familia I método I . . . . .	62
4.2.4. Distribución de probabilidades familia I método II . . . . .	63
4.3. Método computacional para la familia II . . . . .	64
4.3.1. Distribución de probabilidades familia II . . . . .	66
4.4. Método computacional para la familia III . . . . .	67
4.4.1. Distribución de probabilidades familia III . . . . .	69
<b>Bibliografía</b>	<b>70</b>

---

# INTRODUCCIÓN

---

El enredamiento cuántico es uno de los fenómenos más característicos que pueden presentar los sistemas cuánticos compuestos, el cual no tiene análogo en sistemas clásicos. Desde hace unas décadas el enredamiento cuántico y sus características, han sido tema principal de estudio para muchas investigaciones [8, 22]. Es un recurso fundamental que ha producido un cambio en los desarrollos tanto teóricos como experimentales, en particular en procesos de información cuántica y computación cuántica, que han llevado a un avance tecnológico muy importante en las últimas décadas [18, 21].

El enredamiento cuántico trae consigo aspectos fundamentales de la mecánica cuántica como el de la no localidad. Otro aspecto, directamente relacionado con este trabajo, es la interesante relación que existe entre el enredamiento y el tiempo de evolución hacia un estado ortogonal de sistemas cuánticos compuestos. En este contexto adquiere relevancia el problema del **límite de rapidez cuántico**, que establece los límites físicos impuestos por las leyes más fundamentales de la mecánica cuántica, e impone una cota mínima para el tiempo que le lleva a un sistema evolucionar hacia un estado distinguible [1, 2, 8, 15]. En mecánica cuántica dos estados son distinguibles si son ortogonales; así, el tiempo mínimo que le toma a un sistema evolucionar de un estado inicial a otro ortogonal, provee una estimación a qué tan rápido se pueden realizar operaciones lógicas computacionales elementales y establece una escala temporal característica de la evolución [17]. Una de las principales motivaciones en el estudio del límite de rapidez cuántico es conocer el intervalo mínimo de tiempo en el cual la información cuántica puede ser comunicada y procesada [29, 30], así como el intervalo de tiempo mínimo de producción de entropía cuántica [31], la escala de tiempo mínima para que los algoritmos óptimos de control cuántico converjan [32] y mejorar la precisión en la metrología cuántica [33]. Así mismo, el estudio más reciente del límite de rapidez cuántico va enfocado a su generalización para sistemas que interactúan con su ambiente (sistemas abiertos) [34, 35, 36].

En sistemas compuestos por partes distinguibles el enredamiento puede *incrementar* la rapidez de evolución hacia estados ortogonales y, como consecuencia existe un amplio estu-

---



---

dio de la relación entre el enredamiento y el límite de rapidez cuántico en dichos sistemas [5, 14, 15, 23, 24, 25, 26, 27], no obstante, el estudio de la relación entre enredamiento y la rapidez de evolución hacia un estado ortogonal ha sido mucho menos explorado en sistemas compuestos de partes indistinguibles [7, 11].

El objetivo del presente trabajo es entonces estudiar esta relación entre *subsistemas indistinguibles*. En particular, se pretende demostrar la existencia y las características de la relación entre el enredamiento y el límite de rapidez cuántico, en un sistema de dos fermiones indistinguibles, con cuatro niveles disponibles y no interactuantes, profundizando el breve análisis iniciado en [11].

En el primer capítulo de esta tesis se presentan los conceptos fundamentales para estudiar el enredamiento cuántico, primero entre subsistemas distinguibles y después entre fermiones indistinguibles, para lo cual se introduce la llamada **conurrencia fermiónica** [4]. Este capítulo está encaminando a conocer las características y diferencias que existen para abordar el enredamiento y sus medidas en ambos contextos (subsistemas distinguibles versus subsistemas fermiónicos).

En el segundo capítulo se presentan los límites de la evolución hacia la ortogonalidad y cómo surge el límite de rapidez cuántico. También se muestra el análisis de cómo el límite de rapidez cuántico es más accesible para subsistemas distinguibles que poseen enredamiento y es más difícil que se alcance cuando los subsistemas no están enredados. Dicho análisis sirve como inspiración e importante antecedente para ahondar en esta relación ahora en sistemas compuestos de fermiones indistinguibles.

En el tercer capítulo se presenta el análisis, la metodología y los resultados que se obtuvieron en la búsqueda de la relación entre el enredamiento y el límite de rapidez cuántico del sistema fermiónico que evoluciona hacia un estado distinguible. En particular, se analiza la condición de ortogonalidad, se caracterizan las familias de estados que llegan a un estado distinguible en un tiempo finito, y se estudia su relación con el límite de rapidez cuántico y el enredamiento fermiónico. Finalmente, en el último capítulo se resumen los hallazgos más importantes de este trabajo, mostrando conclusiones y el futuro potencial que tienen los resultados aquí obtenidos.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## ENREDAMIENTO ENTRE SISTEMAS DISTINGUIBLES E INDISTINGUIBLES

### 1.1. Enredamiento entre sistemas distinguibles

En esta sección se introducen algunas nociones básicas del enredamiento entre sistemas distinguibles. Para esto, es conveniente tener en mente la distinción entre un estado puro y un estado mixto de un sistema cuántico compuesto por  $m$  subsistemas distinguibles. En este caso, si el subsistema  $i$  (con  $1 \leq i \leq m$ ) se describe recurriendo al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_i$  de dimensión  $d_i$ , entonces el estado del sistema completo se encuentra en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{H}_i$  de dimensión  $d = \prod_{i=1}^m d_i$ .

#### 1.1.1. Definición de enredamiento en sistemas de $m$ partes distinguibles

**Estado puro:** Un estado puro es aquel que puede escribirse en términos de un solo vector de estado, cuya forma genérica es

$$|\psi\rangle = \sum_{b_1, b_2, \dots, b_m} A_{b_1, b_2, \dots, b_m} |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \otimes \cdots \otimes |b_m\rangle, \quad (1.1.1)$$

donde  $\{|b_i\rangle\} = \{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |d_i\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{H}_i$ . En particular, si (1.1.1) puede expresarse como un producto de estados puros, de sus  $m$  partes

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_m\rangle, \quad (|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i), \quad (1.1.2)$$

se dice que el estado es **separable**. Por el contrario, si no existen estados locales  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ , tales que el estado del sistema  $|\psi\rangle$  pueda escribirse como (1.1.2) entonces se dice que el

---

sistema está **enredado** [18].

La matriz de densidad de un estado puro es:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.1.3)$$

y tiene la siguiente propiedad

$$\text{Tr}\hat{\rho} = \text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1. \quad (1.1.4)$$

**Estado mixto:** Una forma de generalizar un estado puro es estudiar un estado mixto o mezcla, descrito con el formalismo de la matriz de densidad. Sea un estado  $\hat{\rho}$  en el espacio de operadores  $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ ; dicho estado siempre se puede descomponer en la forma

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad (1.1.5)$$

donde  $|\phi_i\rangle \in \mathcal{H}$  y  $P_i$  son coeficientes no negativos que cumplen  $\sum_i P_i = 1$ . Cuando este estado puede escribirse como una suma convexa de estados producto

$$\hat{\rho} = \sum_l p_l \hat{\rho}_1^l \otimes \hat{\rho}_2^l \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_m^l, \quad (\hat{\rho}_i^l \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_i)), \quad (1.1.6)$$

con  $p_l \geq 0$  y  $\sum_l p_l = 1$ , se dice que el estado es **totalmente separable**. Un estado mixto es **enredado** cuando no puede ser escrito como (1.1.6) [18].

### 1.1.2. Criterio de enredamiento en estados puros para sistemas bipartitos

Cuando el estado del sistema se descompone como una suma de estados puros de la forma (1.1.1) es difícil notar explícitamente si el sistema es enredado o no. Al tratar con sistemas bipartitos los criterios de separabilidad están más estudiados y es más sencillo determinar si el estado es enredado o no. A continuación se repasará brevemente el principal criterio de enredamiento para sistemas bipartitos ( $m = 2$ ) en un estado puro.

#### Descomposición de Schmidt

Dadas dos bases arbitrarias  $\{|\phi_j\rangle\}$  y  $\{|\varphi_i\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente (con  $j = 1, 2, \dots, d_1$  e  $i = 1, 2, \dots, d_2$ ), cualquier estado puro  $|\psi\rangle$  en  $\mathcal{H}$  puede ser expresado como sigue [18]

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} d_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle, \quad (1.1.7)$$

donde los coeficientes están dados por  $d_{ij} = (\langle\varphi_i| \otimes \langle\phi_j|) |\psi\rangle$ . Realizando un cambio de base  $|\tilde{\varphi}_i\rangle = \mathcal{U}|\varphi_i\rangle$  y  $|\tilde{\phi}_j\rangle = \mathcal{V}|\phi_j\rangle$  con  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{U}$  transformaciones unitarias locales arbitrarias en  $\mathcal{H}_1$

y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente, el cambio en los coeficientes queda dado de acuerdo a

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{ij} &= (\langle \tilde{\varphi}_i | \otimes \langle \tilde{\phi}_j |) |\psi\rangle \\
&= (\langle \varphi_i | \mathcal{U}^\dagger \otimes \langle \phi_j | \mathcal{V}^\dagger) |\psi\rangle \\
&= \sum_{pq} \langle \varphi_i | \mathcal{U}^\dagger | \varphi_p \rangle \langle \phi_j | \mathcal{V}^\dagger | \phi_q \rangle \langle \varphi_p | \otimes \langle \phi_q | \psi \rangle \\
&= [udv]_{ij},
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

donde se usó  $\sum_p |\varphi_p\rangle\langle\varphi_p| = 1$  y  $\sum_q |\phi_q\rangle\langle\phi_q| = 1$  en el tercer renglón, y se definieron la matrices unitarias  $u_{ip} = \langle \varphi_i | \mathcal{U}^\dagger | \varphi_p \rangle$ ,  $v_{qj} = \langle \phi_j | \mathcal{V}^\dagger | \phi_q \rangle$ . De esta forma el estado en nuestra nueva base está dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} [udv]_{ij} |\tilde{\varphi}_i\rangle \otimes |\tilde{\phi}_j\rangle. \tag{1.1.9}$$

Para obtener la descomposición de Schmidt de  $|\psi\rangle$ , se hace uso del hecho de que para cualquier matriz compleja  $d$ , existen matrices unitarias  $u$  y  $v$  tales que el producto  $udv$  es diagonal [19]. Entonces para cada estado  $|\psi\rangle$  siempre se pueden encontrar bases locales [18]  $|\phi_n^s\rangle$  y  $|\varphi_n^s\rangle$  tales que

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^r \sqrt{\lambda_n} |\varphi_n^s\rangle \otimes |\phi_n^s\rangle, \tag{1.1.10}$$

donde  $r = \min(d_1, d_2)$ . La *base de Schmidt*  $\{|\varphi_n^s\rangle \otimes |\phi_n^s\rangle\}$  está formada por estados separables y la información del enredamiento del sistema viene inmerso en los coeficientes de Schmidt  $\lambda_n$ : Si el estado  $|\psi\rangle$  posee **un** solo coeficiente no cero, entonces  $|\psi\rangle$  es separable; de otra forma, cuando existen al menos dos coeficientes diferentes de cero,  $|\psi\rangle$  es un estado enredado. Entonces el estado  $|\psi\rangle$  es separable si y solamente si, solo uno de los coeficientes de Schmidt es diferente de cero.

**Matriz de densidad reducida:** A partir de (1.1.10) vemos que la matriz de densidad reducida para el sistema 1 y el sistema 2 están dadas por

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2 \hat{\rho} = \text{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{n=1}^r \lambda_n |\phi_n^s\rangle\langle\phi_n^s|, \tag{1.1.11}$$

$$\hat{\rho}_2 = \text{Tr}_1 \hat{\rho} = \text{Tr}_1 |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{n=1}^r \lambda_n |\varphi_n^s\rangle\langle\varphi_n^s|, \tag{1.1.12}$$

de modo que los coeficientes de Schmidt son los eigenvalores de las matrices de densidad reducida  $\hat{\rho}_1$ ,  $\hat{\rho}_2$ , y los vectores  $|\phi_n^s\rangle$  y  $|\varphi_n^s\rangle$  son los eigenestados de  $\hat{\rho}_1$ ,  $\hat{\rho}_2$  respectivamente [18]. De esta manera, si  $\lambda_n = \delta_{nl}$  (solo un coeficiente diferente de cero), entonces  $\hat{\rho}_1 = |\phi_l^s\rangle\langle\phi_l^s|$ , y tanto  $\hat{\rho}_1$  como  $\hat{\rho}_2$  son estados puros. De lo anterior, se llega al siguiente criterio de separabilidad para  $|\psi\rangle$ , en términos de las matrices reducidas  $\hat{\rho}_r$ :

$$\text{Tr} \hat{\rho}_r^2 = 1 \iff \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \text{ es separable (no enredado)}, \tag{1.1.13}$$

---


$$\text{Tr}\hat{\rho}_r^2 < 1 \iff \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \text{ es no separable (enredado)}. \quad (1.1.14)$$

Así es como de la descomposición de Schmidt se tiene un criterio de separabilidad para sistemas bipartitos en estados puros. Este análisis no tiene equivalente para estados mixtos.

## La concurrencia como medida de enredamiento

Una vez que se ha definido el enredamiento de un estado, lo más natural de pensar es si existe una forma de cuantificarlo. Existen muchas cantidades o formas de hacerlo, la que se estudiará aquí con más detalle será la *concurrencia*<sup>1</sup>. Esta medida cuantifica el enredamiento bipartito en un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  y está definida como [3]

$$C(\psi) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}\hat{\rho}_r^2)}. \quad (1.1.15)$$

## 1.2. Enredamiento entre sistemas indistinguibles

Para analizar sistemas bipartitos de partículas idénticas ó indistinguibles debemos recurrir a la parte simétrica (en el caso de bosones) o antisimétrica (en el caso de fermiones) del espacio Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , con  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ . Ello introduce una diferencia importante en la estructura de los estados, y particularmente en la definición de enredamiento entre las partículas, como se verá más adelante. A continuación se presentará más a detalle el estudio de sistemas formados por una pareja de fermiones indistinguibles. El subespacio correspondiente (antisimétrico) del espacio de Hilbert se denota como  $\mathcal{H}_f \wedge \mathcal{H}_f$ , donde  $\mathcal{H}_f$  representa el espacio de Hilbert de un único fermión.

### 1.2.1. Sistema de fermiones

Denotaremos los estados de partícula única ( $\in \mathcal{H}_f$ ) como  $|i\rangle = |1\rangle, |2\rangle, \dots, |d_f\rangle$  (con  $d_f = \dim\mathcal{H}_f$ ). El estado debidamente antisimetrizado de  $N$  fermiones que representa la situación en la que una partícula se encuentra en el estado  $|i_1\rangle$ , otra en  $|i_2\rangle$ , etc, es [20]:

$$\hat{S}_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |i_1\rangle_1 & |i_1\rangle_2 & \dots & |i_1\rangle_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |i_N\rangle_1 & |i_N\rangle_2 & \dots & |i_N\rangle_N \end{vmatrix}, \quad (1.2.1)$$

donde  $\hat{S}_-$  denota el operador de antisimetrización. Este estado puede ser representado como

$$|\psi_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{sl}\rangle \equiv \hat{S}_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\{i\}} \epsilon^{i_1 \dots i_N} |i_1 i_2 \dots i_N\rangle, \quad (1.2.2)$$

---

<sup>1</sup>La concurrencia 1.1.15 es válida para estados puros de sistemas bipartitos de dimensión arbitraria finita. Cuando el estado es mezcla, existe una expresión analítica para la concurrencia solamente en sistemas de 2 qubits [17, 37].

---

se conoce como determinante de Slater, y se anula siempre que dos partículas esten en el mismo estado. En la expresión (1.2.2)  $P\{i\}$  son las  $N!$  permutaciones del conjunto  $\{i_1 \dots i_N\}$  y  $\epsilon^{i_1 \dots i_N}$  denota el tensor antisimétrico de Levi-Civita  $N$ -dimensional.

El determinante de Slater (1.2.2) puede escribirse en términos del operador de creación fermiónico  $\hat{f}_i^\dagger$  como

$$\hat{S}_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \hat{f}_{i_1}^\dagger \hat{f}_{i_2}^\dagger \dots \hat{f}_{i_N}^\dagger |0\rangle, \quad (1.2.3)$$

con  $|0\rangle$  el estado vacío, con 0 fermiones.

Veamos ahora que para un sistema de dos fermiones (un sistema bipartito), el estado (1.2.2) se reduce con  $N = 2$ , tomando  $i_2 \rightarrow j$ , a

$$|\psi_{ij}^{sl}\rangle = \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_j^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle - |ji\rangle). \quad (1.2.4)$$

A este estado se le conoce como un determinante de Slater de rango 1. A partir de estados de este tipo, podemos escribir un estado puro cualquiera del sistema de dos fermiones como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_f} w_{ij} \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_j^\dagger |0\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_f} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \quad (1.2.5)$$

con  $w_{ij}$  coeficientes complejos y antisimétricos. Dado que

$$\langle \psi_{ij}^{sl} | \psi_{kl}^{sl} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (1.2.6)$$

los coeficientes  $w_{ij}$  cumplen con la condición de normalización

$$2 \sum_{i,j} |w_{ij}|^2 = 1. \quad (1.2.7)$$

## 1.2.2. Enredamiento Fermiónico

La distinción más notable de un sistema cuántico compuesto de  $N$  fermiones idénticos es que su estado puro elemental (antisimétrico) es **un** solo determinante de Slater (1.2.4), estado que formalmente parece enredado (en contraste a los estados separables de subsistemas distinguibles). De esta observación surge una nueva forma de ver al enredamiento, en el sentido ahora de *Correlaciones de Slater* [12]. En esta perspectiva, un estado que sea descrito con un solo determinante de Slater no será considerado enredado [4]. A continuación se hará un breve análisis para dar a conocer esta nueva perspectiva de enredamiento.

*Distinción del enredamiento entre sistemas distinguibles y sistemas indistinguibles.*- Como se vio en las secciones anteriores el concepto de enredamiento para estados puros de sistemas compuestos de  $N$  subsistemas distinguibles, recae en el hecho de poder o no escribir el estado de forma factorizable como (1.1.2). Si esta factorización es posible, el estado (no enredado) es un estado de mínima correlación. En caso contrario, el estado enredado es una superposición coherente de estados de mínima correlación. En el caso fermiónico, podemos

---

notar que (1.2.2) es un estado no factorizable en el sentido de sistemas distinguibles, pues no es de la forma (1.1.2). Esto refleja la llamada correlación de intercambio entre partículas idénticas, debida a su indistinguibilidad. Así, un determinante de Slater es el estado de fermiones de mínima correlación (que en este caso no es nula). La nueva forma de definir separabilidad en sistemas de fermiones iguales es entonces en función de si es posible escribir el estado como uno de mínima correlación (**un solo** determinante de Slater). Cuando tal posibilidad existe, se dice que, el estado es **no** enredado; cuando no existe y el estado es (para toda base) una superposición coherente de determinantes de Slater, decimos que el estado posee **enredamiento fermiónico**.

### Separabilidad en sistemas indistinguibles

De acuerdo con lo anterior, un sistema compuesto de  $N$  fermiones idénticos es separable (**no enredado**) si y solamente si su matriz de densidad puede desarrollarse como una suma convexa [4]

$$\hat{\rho}^{\text{sep}} = \sum_k p_k |\psi_k^{sl}\rangle \langle \psi_k^{sl}| \quad (1.2.8)$$

donde  $|\psi_k^{sl}\rangle$  es un determinante de Slater y  $\sum_k p_k = 1$ . En particular, un estado **puro** y separable de  $N$  fermiones idénticos es aquel que puede describirse con un solo determinante de Slater, mientras que los estados **mixtos separables** son aquellos que pueden escribirse como una mezcla estadística de estados puros separables (Slater de rango 1) y son de la forma de (1.2.8). Entonces un estado **enredado** es aquel que **no** puede escribirse como (1.2.8) (caso mixto) o como un solo determinante de Slater (caso puro) [16].

La pregunta más natural que surge a partir de esta definición de enredamiento es ¿cuál es el sistema de fermiones más simple que presenta enredamiento? Para contestarla se analizarán tres casos.

#### 1. Dos fermiones con dos niveles accesibles

Consideremos un sistema de dos fermiones con  $d_f = 2$  y una base de  $\mathcal{H}_f$  dada por  $\mathcal{B} = \{|a\rangle, |b\rangle\}$  donde  $|a\rangle, |b\rangle$  pueden representar estados energéticos, de espín o de otra variable.

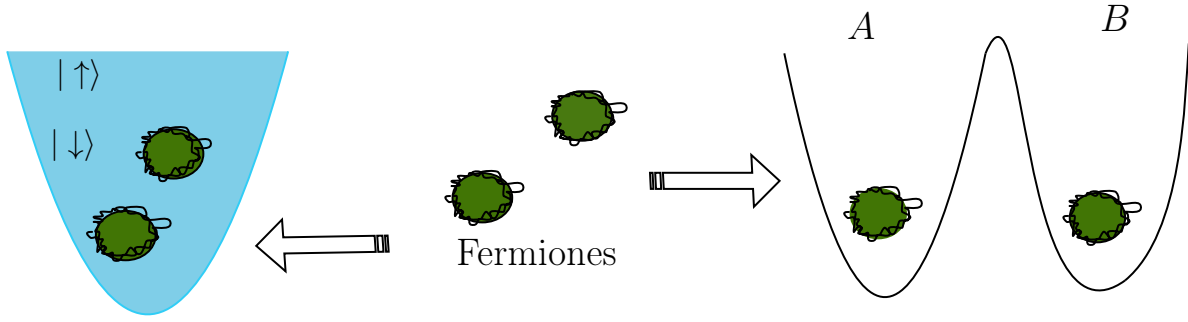


Figura 1.1: Representación de dos fermiones con dos niveles disponibles, estos pueden ser estados localizados distintos  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  (figura de la derecha) o estados de espín  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  (figura de la izquierda).

En este caso el único estado puro posible del sistema es

$$|\psi_{a,b}^{sl}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle|b\rangle - |b\rangle|a\rangle) \in \mathcal{H}_f \wedge \mathcal{H}_f. \quad (1.2.9)$$

Por lo tanto, como el único estado posible es un determinante de Slater de rango 1, el sistema no presenta enredamiento (en el sentido de enredamiento fermiónico).

## 2. Dos fermiones con tres niveles accesibles.

El estado general que describe al sistema se puede escribir de la forma (1.2.5) como

$$|\psi\rangle = a|\psi_{12}^{sl}\rangle + b|\psi_{13}^{sl}\rangle + c|\psi_{23}^{sl}\rangle, \quad \text{con } |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1 \quad (1.2.10)$$

donde  $B = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$  es una base  $\mathcal{H}_f$ , con  $d_f = 3$ . Consideremos ahora los vectores

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}|1\rangle + \frac{bc}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}|2\rangle - \frac{ac}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}|3\rangle \in \mathcal{H}_f, \quad (1.2.11)$$

y

$$|\phi_2\rangle = \frac{a}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}|2\rangle + \frac{b}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}|3\rangle \in \mathcal{H}_f. \quad (1.2.12)$$



Se tiene que

$$\begin{aligned}
|\psi_{\phi_1\phi_2}^{sl}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \sqrt{|a|^2 + |b|^2} |1\rangle + \frac{bc}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |2\rangle - \frac{ac}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |3\rangle \right) \otimes \right. \\
& \left. \left( \frac{a}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |2\rangle + \frac{b}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |3\rangle \right) \right] - \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{a}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |2\rangle + \frac{b}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |3\rangle \right) \otimes \right. \\
& \left. \left( \sqrt{|a|^2 + |b|^2} |1\rangle + \frac{bc}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |2\rangle - \frac{ac}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |3\rangle \right) \right], \tag{1.2.13}
\end{aligned}$$

y reacomodando los términos se encuentra que

$$|\psi\rangle = |\psi_{\phi_1\phi_2}^{sl}\rangle. \tag{1.2.14}$$

Veamos entonces que el estado (1.2.10) también puede escribirse en términos de un determinante de Slater de rango 1, de modo que los fermiones estarán en un estado puro no enredado.

### 3. Dos fermiones con cuatro niveles accesibles.

En este caso  $d_f = 4$  con una base  $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ . El estado  $|\psi\rangle$  más general se puede escribir como (1.2.5)

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^4 w_{ij} \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_j^\dagger |0\rangle = \sum_{i,j=1}^4 w_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} (|ij\rangle - |ji\rangle) = \sum_{i,j=1}^4 w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \tag{1.2.15}$$

Desarrollando la sumatoria

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^4 w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = & w_{11} |\psi_{11}^{sl}\rangle + w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{13} |\psi_{13}^{sl}\rangle + w_{14} |\psi_{14}^{sl}\rangle \\
& + w_{21} |\psi_{21}^{sl}\rangle + w_{22} |\psi_{22}^{sl}\rangle + w_{23} |\psi_{23}^{sl}\rangle + w_{24} |\psi_{24}^{sl}\rangle \\
& + w_{31} |\psi_{31}^{sl}\rangle + w_{32} |\psi_{32}^{sl}\rangle + w_{33} |\psi_{33}^{sl}\rangle + w_{34} |\psi_{34}^{sl}\rangle \\
& + w_{41} |\psi_{41}^{sl}\rangle + w_{42} |\psi_{42}^{sl}\rangle + w_{43} |\psi_{43}^{sl}\rangle + w_{44} |\psi_{44}^{sl}\rangle.
\end{aligned}$$

Considerando que  $w_{ij} = -w_{ji}$  y

$$|\psi_{ji}^{sl}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ji\rangle - |ij\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|ij\rangle - |ji\rangle) = -|\psi_{ij}^{sl}\rangle, \tag{1.2.16}$$

la sumatoria puede reducirse a

$$|\psi\rangle = 2 \sum_{i < j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \quad (1.2.17)$$

En general este estado no puede escribirse en términos de un solo determinante de Slater de rango 1. Es por eso que el sistema de dos fermiones con  $d_f = 4$  es el sistema más simple de fermiones que puede presentar enredamiento en esta nueva definición [4, 16].

### Concurrencia fermiónica

Recordemos que la concurrencia (1.1.15) es una medida de enredamiento entre dos subsistemas ( $A$  y  $B$ ) distinguibles, dada por

$$C(\psi) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}\hat{\rho}_A^2)} = \sqrt{2(1 - 2\text{Tr}\hat{\rho}_B^2)}, \quad (1.2.18)$$

donde  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

En el caso de dos fermiones indistinguibles, se define análogamente una *concurrencia fermiónica*  $C_f$  como medida de enredamiento entre los fermiones, dada por [12] :

$$C_f(\psi) = \sqrt{\frac{2d_f}{d_f - 2} \left( \frac{1}{2} - \text{Tr}\hat{\rho}_f^2 \right)}, \quad (1.2.19)$$

donde  $\hat{\rho}_f$  denota la matriz de densidad reducida de un fermión.

El factor  $2d_f/(d_f - 2)$  normaliza la concurrencia, así  $C_f = 1$  corresponde a un estado máximamente enredado, y  $C_f = 0$  corresponde a uno no enredado. Es importante ver que la expresión (1.2.18) para subsistemas distinguibles se anula solo cuando el estado es separable, (como consecuencia que la  $\text{Tr}\hat{\rho}_r^2$  de cualquiera de los dos subsistemas es igual a la unidad). Para el caso de los fermiones sucede algo análogo con los estados  $|\psi\rangle$  que pueden escribirse como un único determinante de Slater, lo que implica que  $\text{Tr}\hat{\rho}_f^2 = 1/2$ , indicando que el sistema no presenta enredamiento.

El sistema más simple que admite estados con  $C_f \neq 0$ , como se vio en la sección anterior, es el de dos fermiones con 4 niveles disponibles; para este sistema la expresión (1.2.19) se reduce a<sup>1</sup>

$$0 \leq C_f(\psi_f) = 8|w_{12}w_{34} - w_{13}w_{42} - w_{14}w_{23}| \leq 1. \quad (1.2.20)$$

Para resumir estas dos secciones se presentará a continuación un diagrama que compara y resume las características del enredamiento bipartito en un sistema de partes distinguibles y otro de partes indistinguibles. En la figura 1.2 se sintetizan las nociones de enredamiento y separabilidad entre subsistemas distinguibles y se muestra cuál es el sistema más simple que

<sup>1</sup>La expresión (1.2.20) fue propuesta antes que (1.2.19) de modo que (1.2.19) es una generalización de (1.2.20) al caso con  $d_f$  arbitrario.

---

presenta enredamiento para estos subsistemas. En la figura 1.3 por su parte, se resume las características del enredamiento entre subsistemas indistinguibles (fermiones) y se muestra el sistema más simple que presenta enredamiento en esta nueva caracterización. Así mismo estos dos diagramas sirven de forma comparativa entre subsistemas distinguibles e indistinguibles e indican cómo cambia su medida de enredamiento.

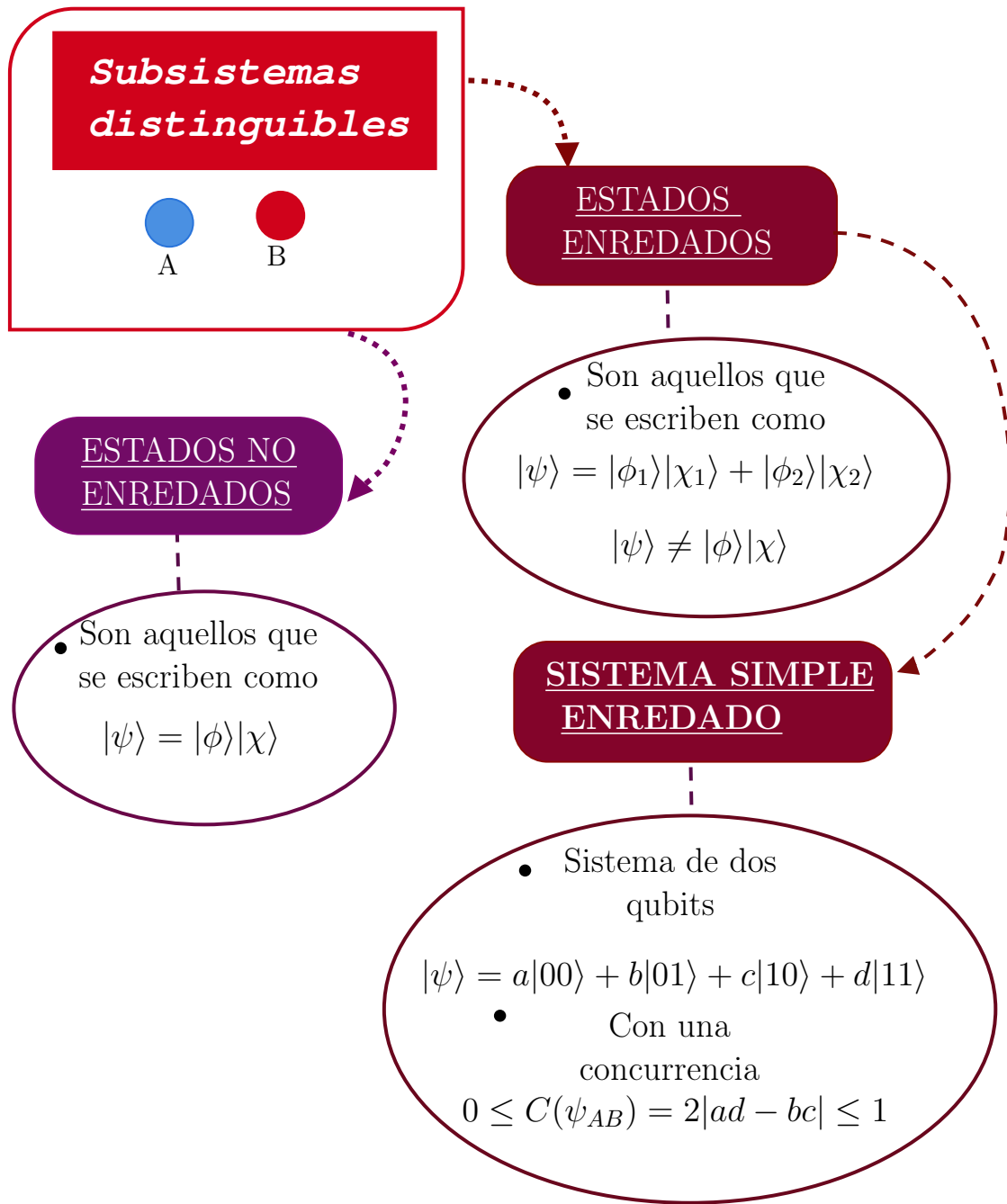


Figura 1.2: Diagrama que engloba la definición del enredamiento en estados puros de subsistemas distinguibles.

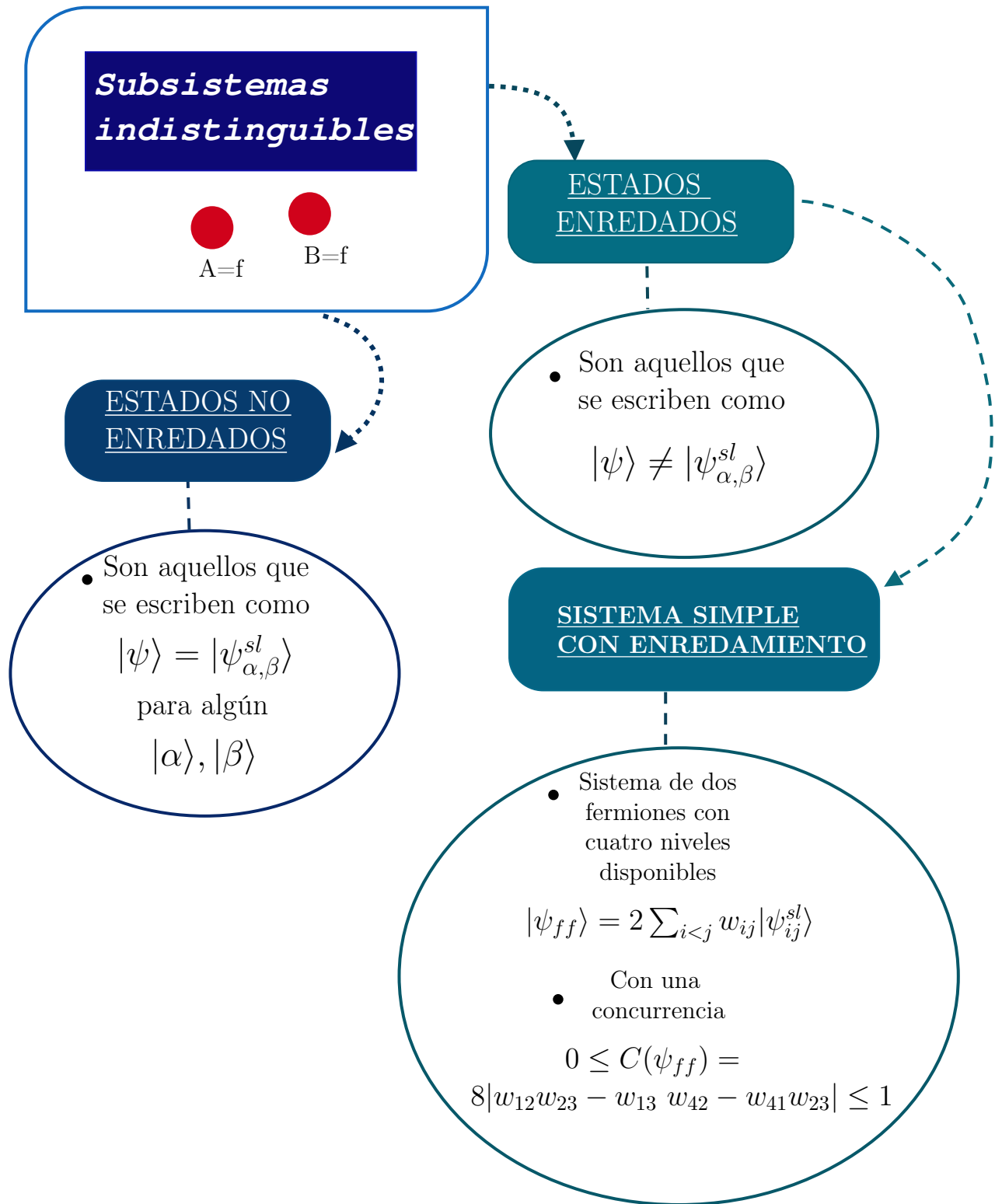


Figura 1.3: Diagrama que engloba la definición del enredamiento en estados puros de subsistemas indistinguibles.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## LÍMITE DE RÁPIDEZ CUÁNTICO

### 2.1. Límites fundamentales en la mecánica cuántica

Dos de las propiedades más fundamentales que se estudian en un principio en la mecánica cuántica son la dualidad onda-partícula y su naturaleza indeterminista, lo que hace necesario hacer uso de un análisis probabilístico para ser capaces de describir estos fenómenos. Una consecuencia de estas características es descrita con el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual establece que para cualesquiera dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  que representan una observable física se cumple [20]

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle| \quad (2.1.1)$$

donde  $\Delta\hat{O} \equiv \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}$  con  $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O})$ . La desigualdad (2.1.1) impone límites fundamentales en el producto de las dispersiones de las variables  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , determinados por el conmutador  $[\hat{A}, \hat{B}]$ . En textos introductorios se tiene una relación de incertidumbre para el tiempo y la energía, de la forma [17]

$$\Delta t \simeq \frac{\Delta x}{v} \quad \text{y} \quad \Delta E \simeq \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p = v \Delta p, \quad (2.1.2)$$

donde  $v$  denota la velocidad de grupo de la onda y se puede concluir que

$$\Delta t \Delta E \simeq \hbar. \quad (2.1.3)$$

No obstante a partir de la ecuación (2.1.1) no se puede obtener la relación de incertidumbre de tiempo-energía (2.1.2), dado que el tiempo no es un operador. Sin embargo existen análisis en donde se profundiza más este concepto y nacen nuevos, con tratamientos como el de Mandelstam-Tamm o Margolus-Levitin [1, 2].

---

---

### 2.1.1. La relación de Mandelstam-Tamm

El análisis que presentan Mandelstam y Tamm se resume en establecer una conexión entre la dispersión de la energía total del sistema y el tiempo mínimo que le lleva al mismo evolucionar hacia un estado ortogonal. Para ello, se considera la evolución de un observable  $\hat{A}$  bajo el marco de Schrödinger, dada por la ecuación de Liouville-von-Neumann [17]

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}], \quad (2.1.4)$$

donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del sistema. Haciendo uso de la ecuación general de incertidumbre (2.1.1) se tiene

$$\Delta \hat{H} \Delta \hat{A} \geq \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \right| = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{A} \rangle \right|. \quad (2.1.5)$$

Si se toma al operador  $\hat{A} = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ , se obtiene lo siguiente

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} = \sqrt{\langle \hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}, \quad (2.1.6)$$

con  $\langle \hat{A} \rangle = |\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2 = F(t)$ . Entonces (2.1.5) puede reescribirse como

$$\Delta \hat{H} \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{F(t) - F^2(t)}} \left| \frac{\partial F(t)}{\partial t} \right|. \quad (2.1.7)$$

Si se integra esta ecuación respecto a  $t$  desde  $t = 0$ , tomando la restricción  $F(0) = 1$  y suponiendo que  $\hat{H}$  no depende explícitamente de  $t$ , se llega a

$$\frac{1}{\hbar} \Delta \hat{H} t \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{F(t)}. \quad (2.1.8)$$

Considerando solo la evolución en la cual el estado inicial es ortogonal al final, de manera que  $F(\tau) = 0$  para un cierto tiempo  $\tau$ , se obtiene una cota mínima para el tiempo en el cual el sistema cuántico evoluciona entre los dos estados dada por [2]

$$\tau \geq \tau_{QSL}^{MT} \equiv \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\Delta \hat{H}}. \quad (2.1.9)$$

Mandelstam y Tamm introdujeron así la noción de límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}^{MT}$  [2]. La relación (2.1.9) no es una de incertidumbre entre la duración de la medida y la energía del sistema observado, sino que revela un límite fundamental de rapidez cuántico, y establece una escala de tiempo intrínseca de la evolución del sistema.

---

### 2.1.2. El límite de rapidez cuántico de Margolus y Levitin

El trabajo de Margolus y Levitin presenta otra derivación del límite de rapidez cuántico, que no está dado en términos de la dispersión de la energía del estado sino de su energía media. Consideremos un estado inicial  $|\psi_0\rangle$ . Sabemos que un estado cuántico arbitrario puede ser escrito en términos de una base cualquiera de  $\mathcal{H}$ , en particular de la base de los eigenestados  $|E_n\rangle$  del Hamiltoniano que rige la evolución,

$$|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle, \quad (2.1.10)$$

con  $c_n \in \mathbb{C}$ . Consideraremos que el sistema posee un espectro de energía discreto  $\{E_n\}$ , y para hacer el cálculo más sencillo se toma el valor de la mínima energía del sistema como  $E_0 = 0$ .

La solución de la ecuación de Schrödinger (si  $\hat{H}$  no depende del tiempo explícitamente) está dada por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle, \quad (2.1.11)$$

y la proyección de  $|\psi(t)\rangle$  con el estado inicial es

$$S(t) \equiv \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = \sum_n |c_n|^2 \exp(-iE_n t/\hbar). \quad (2.1.12)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Re}(S) &= \sum_{n=0} |c_n|^2 \cos\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right), \\ &\geq \sum_n |c_n|^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{E_n t}{\hbar} + \sin\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right) \right] \right\}, \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\langle\hat{H}\rangle}{\hbar} t + \frac{2}{\pi} \text{Im}(S), \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

donde se usó la desigualdad  $\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin x)$  con  $x \geq 0$ . Tomando en cuenta que para  $\tau$  tal que  $S(\tau) = 0$  (condición de ortogonalidad), las dos partes  $\text{Re}(S) = 0$  y  $\text{Im}(S) = 0$ , entonces se tiene

$$0 \geq 1 - \frac{2\langle\hat{H}\rangle\tau}{\hbar}, \quad (2.1.14)$$

y en consecuencia

$$\tau \geq \tau_{QSL}^{ML} \equiv \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle\hat{H}\rangle}. \quad (2.1.15)$$

Ahora, si la energía mínima del sistema no es cero ( $E_0 \neq 0$ ) la cota (2.1.15) se generaliza a

$$\tau_{QSL}^{ML} = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{(\langle\hat{H}\rangle - E_{min})}, \quad (2.1.16)$$


---



donde  $E_{min} = \min\{E_n\}$ . La ecuación (2.1.16) establece la cota de Margolus-Levitin para el límite de rapidez cuántico. No obstante, se tiene la situación en donde existen dos cotas independientes,  $\tau_{QSL}^{MT}$  por un lado y  $\tau_{QSL}^{ML}$  por otro, cada una de ellas basada en diferentes propiedades energéticas del sistema. Así, uniendo las dos cotas, se obtiene el límite de rapidez cuántico, que es la cota unificada de los tiempos mínimos cuando un sistema evoluciona a un estado ortogonal [1]

$$\tau \geq \tau_{QSL} = \tau_{min} = \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2(\langle \hat{H} \rangle - E_{min})}, \frac{\pi \hbar}{2\sigma_H} \right\}, \quad (2.1.17)$$

Es importante mencionar que en un principio este análisis se realizó para sistemas de estados puros, pero la generalización a estados mixtos también está dada [1, 6, 9, 10].

### 2.1.3. Límite de rapidez cuántico de subsistemas distinguibles separables y enredados

En esta sección se analizará el límite de rapidez cuántico de un sistema compuesto de  $m$  subsistemas distinguibles que evolucionan con un Hamiltoniano de la forma  $\hat{H} = \sum_{k=1}^m \hat{H}_k$ , no interactuante. Consideraremos dos casos, en el primero se estudiará al sistema en un estado separable, y en el segundo en un estado enredado. Mostraremos que el tiempo  $\tau^{enr}$  que le toma al sistema enredado evolucionar a un estado ortogonal puede aproximarse más al límite de rapidez cuántico, que el tiempo  $\tau^{sep}$  de evolución a un estado ortogonal de los estados separables [5].

#### 1. Subsistemas distinguibles separables

El estado separable general del sistema compuesto de  $m$  partes está dado por (1.1.2), donde  $|\psi_i\rangle$  es estado del  $i$ -ésimo subsistema. Un estado inicial  $|\psi\rangle$  de este tipo evolucionará a uno ortogonal si al menos uno de los subsistemas lo hace; sin pérdida de generalidad, se puede decir que el subsistema  $k$  es el que alcanza el estado ortogonal antes que los demás, de modo que  $\tau^{sep} = \tau_k = \min_{\{i\}}\{\tau_i\}$ , con  $\tau_i$  el tiempo de ortogonalidad del  $i$ -ésimo subsistema. Tomando  $E_{min}^i = 0$ , y considerando que los subsistemas evolucionan independientemente, obtenemos

$$\tau_i \geq \tau_{QSL}^i = \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2\langle \hat{H} \rangle_i}, \frac{\pi \hbar}{2\sigma_{H_i}} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2\langle \hat{H} \rangle_{MAX}}, \frac{\pi \hbar}{2\sigma_{H_{MAX}}} \right\} \quad \forall i, \quad (2.1.18)$$

donde  $\langle \hat{H} \rangle_{MAX} = \max_{\{i\}}\{\langle \hat{H}_i \rangle\}$  y  $\sigma_{H_{MAX}} = \max_{\{i\}}\{\sigma_{H_i}\}$ . En particular la ecuación (2.1.18) para  $i = k$  conduce a [5]

$$\tau^{sep} \geq \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2\langle \hat{H} \rangle_{MAX}}, \frac{\pi \hbar}{2\sigma_{H_{MAX}}} \right\}. \quad (2.1.19)$$

La energía media total del sistema es  $\langle \hat{H} \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \hat{H} \rangle_i$  y la dispersión de la energía total es  $\sigma_H = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_{H_i}^2}$  (tomando en cuenta la contribución de cada subsistema), entonces la cota inferior en (2.1.19) cumple  $\max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2 \langle \hat{H} \rangle_{MAX}}, \frac{\pi \hbar}{2 \sigma_{H_{MAX}}} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2 \langle \hat{H} \rangle}, \frac{\pi \hbar}{2 \sigma_H} \right\}$  y por lo tanto,

$$\tau^{sep} \geq \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2 \langle \hat{H} \rangle_{MAX}}, \frac{\pi \hbar}{2 \sigma_{H_{MAX}}} \right\} \geq \tau_{QSL}. \quad (2.1.20)$$

La segunda igualdad se cumple solo si  $\sigma_{H_{MAX}} = \sigma_H$  y  $\langle \hat{H} \rangle_{MAX} = \langle \hat{H} \rangle$ , lo que significa que la energía y la dispersión de todo el sistema es igual a la de un solo subsistema. Esto implica que solo un subsistema evoluciona en el tiempo, y  $m - 1$  permanecen estacionarios. En el caso opuesto, la diferencia entre las dos cotas en (2.1.20) es máxima cuando la energía y la dispersión se distribuyen por igual entre los  $m$  subsistemas (estado homogéneo), de modo que

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \hat{H}_i \rangle = m \langle \hat{H} \rangle_{MAX}, \quad (2.1.21)$$

$$\sigma_H = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_{H_i}^2} = \sqrt{m} \sigma_{H_{MAX}}, \quad (2.1.22)$$

en cuyo caso:

$$\tau^{sep} \geq \max \left\{ \frac{m \pi \hbar}{2 \langle \hat{H} \rangle}, \frac{\pi \hbar \sqrt{m}}{2 \sigma_H} \right\}. \quad (2.1.23)$$

Cuando  $\langle \hat{H} \rangle \geq \sigma_H$ , entonces

$$\tau^{sep} > m \tau_{QSL}. \quad (2.1.24)$$

Por otro lado, si  $\sigma_H \geq \langle \hat{H} \rangle$  se tiene

$$\tau^{sep} \geq \begin{cases} \sqrt{m} \tau_{QSL} & \text{para } m \leq m^*, \\ \frac{m}{\sqrt{m^*}} \tau_{QSL} & \text{para } m \geq m^* \end{cases} \quad (2.1.25)$$

con  $m^* = \left( \frac{\langle \hat{H} \rangle}{\sigma_H} \right)^2$ .

Como lo indica la ecuación (2.1.20), el tiempo de ortogonalidad de un estado separable no puede saturar el límite de rapidez cuántico, a menos de que  $m - 1$  estados sean estacionarios (para que se sature la segunda desigualdad) y que  $\tau^{sep} = \tau_{QSL}$  (para que se sature la primera), lo cual requiere que el  $k$ -ésimo subsistema sea un qubit en una superposición igualmente pesada de eigenestados de  $\hat{H}_k$  [8]. En conclusión, un estado separable no satura el límite de rapidez cuántico en general, y en particular no lo hace si el estado es homogéneo. A continuación veremos que esto puede cambiar si el estado es enredado.

## 2. Subsistemas distinguibles enredados

Se considerará el siguiente estado enredado, de un sistema compuesto por  $m$  subsistemas distinguibles [5]

$$|\psi_{ent}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |n\rangle_m, \quad (2.1.26)$$

donde  $|n\rangle_k$  es el eigenestado con eigenvalor  $E_n = n\hbar\omega_0$ , del subsistema  $k$ -ésimo, que tiene un valor esperado de energía  $\langle \hat{H}_k \rangle = \hbar\omega_0(N-1)/2$  y una dispersión de energía  $\sigma_{H_k} = \hbar\omega_0\sqrt{N^2-1}/(2\sqrt{3})$ . El valor esperado de la energía del sistema completo es  $\langle \hat{H} \rangle = m\langle \hat{H}_k \rangle$  y la dispersión de la energía total está dada por  $\sigma_H = m\sigma_{H_k}$ , de manera que (2.1.26) es un estado homogéneo.

La evolución temporal bajo el operador unitario  $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  del estado (2.1.26) es

$$\begin{aligned} |\psi_{ent}(t)\rangle &= \hat{U}|\psi_{ent}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |n\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |n\rangle_m, \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-inm\omega_0 t} |n\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |n\rangle_m, \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

y la proyección del estado inicial con (2.1.27) está dada por

$$\langle \psi_{ent}(0) | \psi_{ent}(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-inm\omega_0 t}. \quad (2.1.28)$$

El (menor) tiempo  $\tau^{ent}$ , tal que  $\langle \psi_{ent}(0) | \psi_{ent}(\tau^{ent}) \rangle = 0$  es el tiempo de ortogonalidad de (2.1.26), y está dado por

$$\tau^{ent} = \frac{2\pi}{Nm\omega_0}. \quad (2.1.29)$$

Ahora bien, el límite de rapidez cuántico en este caso es

$$\tau_{QSL} = \max \left\{ \frac{\pi\hbar}{2\langle \hat{H} \rangle}, \frac{\pi\hbar}{2\sigma_H} \right\} = \frac{\pi\hbar}{2\sigma_H} = \frac{\pi\sqrt{3}}{m\omega_0\sqrt{N^2-1}}, \quad (2.1.30)$$

y por lo tanto

$$\frac{\tau^{ent}}{\tau_{QSL}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{N^2-1}}{N}. \quad (2.1.31)$$

Notemos de (2.1.31) que, en particular para  $N = 2$  se satura el límite de rapidez cuántico, mientras que para  $N \neq 2$

$$1 < \frac{\tau^{ent}}{\tau_{QSL}} < \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (2.1.32)$$

---

Pensemos ahora en un estado separable homogéneo, con el mismo valor de  $\langle \hat{H} \rangle$  y  $\sigma_H$  del estado enredado (de modo que posee el mismo  $\tau_{QSL}$ ). En este caso, como ya vimos en la ecuación (2.1.24) se cumple

$$\frac{\tau^{sep}}{\tau_{QSL}} > m \geq 2. \quad (2.1.33)$$

Comparando (2.1.32) con (2.1.33), vemos que, dadas  $\langle \hat{H} \rangle$  y  $\sigma_H$ ,  $\frac{\tau^{ent}}{\tau_{QSL}} < \frac{\tau^{sep}}{\tau_{QSL}}$ , es decir, en el caso enredado  $\tau^{ent}$  se aproxima más al límite de rapidez cuántico que en el caso separable. Lo anterior no implica que todos los estados enredados evolucionen más rápido que su contraparte separable, pero muestra de manera concisa cómo el enredamiento entre los subsistemas puede tener un papel muy importante para aproximarse al *límite de rapidez cuántico* de un sistema.

A raíz de la observación de que en sistemas de partes distinguibles el enredamiento puede acelerar la evolución hacia estados ortogonales, se han realizado múltiples estudios analizando la relación entre el enredamiento de subsistemas distinguibles y el límite de rapidez cuántico [5, 7, 11, 23, 24]. Con estos resultados como antecedentes surgen las preguntas: ¿Para sistemas indistinguibles, también existen este tipo de relaciones entre estados enredados y el límite de rapidez cuántico?, ¿Un estado de  $m$  partes indistinguibles enredado, también puede aproximarse a  $\tau_{QSL}$  mejor que un estado separable (en general)? Estas preguntas motivan a estudiar con más detalle las posibles relaciones en subsistemas indistinguibles, con particular interés en sistemas compuestos de fermiones indistinguibles. Entre estos trabajos se encuentran ([11], [7] y [13]). En el trabajo [11] se analizan las relaciones que existen entre el enredamiento, el tiempo de ortogonalidad y el límite de rapidez cuántico en sistemas compuestos por: qubits distinguibles, bosones indistinguibles y por una pareja de fermiones indistinguibles, no interactuantes y con cuatro niveles accesibles equidistantes. Se demuestra en el caso de qubits y de bosones que esta relación existe. No obstante, para el sistema de fermiones los resultados son parciales e inconclusos; a partir del análisis numérico que realizan, los resultados no muestran una (posible o no) relación entre el enredamiento del sistema y  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ . En el trabajo [7] se realiza un estudio más detallado del sistema de dos fermiones indistinguibles en un espacio de Hilbert de  $d_f = 4$  con un Hamiltoniano sin interacción. No obstante en el análisis numérico de este subsistema (variando los niveles energéticos) no se muestra alguna relación entre el enredamiento, el tiempo de ortogonalidad y el límite de rapidez cuántico. Lo anterior da lugar a ampliar el análisis y seguir explorando posibles soluciones.

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## SISTEMA DE DOS FERMIONES CON CUATRO NIVELES DISPONIBLES

### 3.1. Límite de rapidez cuántico y tiempo de ortogonalidad en sistemas de fermiones indistinguibles

En esta sección se desarrollará el análisis de un estado de dos fermiones (no interactuantes)  $\in \mathcal{H}_f \wedge \mathcal{H}_f$  con cuatro niveles disponibles ( $d_f = 4$ ) y una base  $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$  (sistema más sencillo puro fermiónico, que presenta enredamiento en el sentido de correlaciones fermiónicas). El objetivo es conocer si existe alguna relación entre el límite de rapidez cuántico, el tiempo de ortogonalidad y la cantidad de enredamiento fermiónico de este sistema, a fin de ahondar en los estudios iniciados en [11] y [7]. Nótese que al no existir interacción entre los fermiones el enredamiento es constante durante la evolución del sistema.

#### 3.1.1. Evolución temporal del sistema

Para cumplir con el objetivo, es primordial establecer la evolución temporal del estado inicial  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_f \wedge \mathcal{H}_f$ . Partimos de que un estado general del sistema lo podemos escribir como (1.2.17)

$$|\psi\rangle = 2 \sum_{i < j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \quad (3.1.1)$$

donde  $w_{ij} \in \mathbb{C}$  y  $w_{ij} = -w_{ji}$ . El estado cumple con la condición de ortonormalidad (1.2.7)

$$\langle \psi | \psi \rangle = 4 \sum_{i < j} \sum_{i' < j'} w_{i'j'}^* w_{ij} \langle \psi_{i'j'}^{sl} | \psi_{ij}^{sl} \rangle = 4 \sum_{i < j} |w_{ij}|^2 = 1. \quad (3.1.2)$$

---

El Hamiltoniano que describe a un sistema de dos fermiones que no interactúan entre ellos (en el formalismo de segunda cuantización), está dado por

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k, \quad (3.1.3)$$

donde  $\epsilon_k$  es la energía del nivel  $k$ . El Hamiltoniano actúa sobre el estado  $|\psi\rangle$  como sigue

$$\hat{H}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k |\psi\rangle = 2 \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k \sum_{i<j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \quad (3.1.4)$$

desarrollando la suma para los índices  $ij$

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi\rangle &= 2 \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k \sum_{i<j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = 2 \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k (w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle + w_{13} |\psi_{13}^{sl}\rangle + w_{14} |\psi_{14}^{sl}\rangle \\ &\quad + w_{23} |\psi_{23}^{sl}\rangle + w_{24} |\psi_{24}^{sl}\rangle + w_{34} |\psi_{34}^{sl}\rangle). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Para poder operar  $\hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k$ , hacemos uso de la representación en el espacio de Fock de los estados  $|\psi_{ij}^{sl}\rangle$ . Dado que es un cálculo extenso, solo se desarrollará un término explícitamente (el cálculo para los demás es análogo). Tomando el primer sumando de (3.1.5)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k w_{12} |\psi_{12}^{sl}\rangle &= \sum_{k=1}^4 \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k w_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} (|12\rangle - |21\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^4 w_{12} \epsilon_k \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k |1, 1, 0, 0\rangle_F \\ &= w_{12} (\epsilon_1 \hat{f}_1^\dagger \hat{f}_1 |1, 1, 0, 0\rangle_F + \epsilon_2 \hat{f}_2^\dagger \hat{f}_2 |1, 1, 0, 0\rangle_F \\ &\quad + \epsilon_3 \hat{f}_3^\dagger \hat{f}_3 |1, 1, 0, 0\rangle_F + \epsilon_4 \hat{f}_4^\dagger \hat{f}_4 |1, 1, 0, 0\rangle_F) \\ &= w_{12} (\epsilon_1 + \epsilon_2) |1, 1, 0, 0\rangle_F, \\ &= w_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 + \epsilon_2) (|12\rangle - |21\rangle), \\ &= w_{12} (\epsilon_1 + \epsilon_2) |\psi_{12}^{sl}\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

donde se usó que  $\hat{f}_1^\dagger \hat{f}_1 |1, 1, 0, 0\rangle_F = \hat{f}_2^\dagger \hat{f}_2 |1, 1, 0, 0\rangle_F = |1, 1, 0, 0\rangle_F$  y  $\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_j |1, 1, 0, 0\rangle_F = 0$  para  $j = 3, 4$ . Entonces, el resultado de hacer actuar el operador hamiltoniano sobre  $|\psi\rangle$ , es

$$\hat{H}|\psi\rangle = 2 \sum_{i<j} w_{ij} (\epsilon_i + \epsilon_j) |\psi_{ij}^{sl}\rangle. \quad (3.1.8)$$

Una vez conocido lo anterior, podemos saber cómo evoluciona el estado  $|\psi\rangle$  bajo la acción del operador unitario  $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{U}|\psi(t=0)\rangle = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}} 2 \sum_{i<j} w_{ij} |\psi_{ij}^{sl}\rangle \\ &= 2 \sum_{i<j} w_{ij} e^{\frac{-i(\epsilon_i+\epsilon_j)t}{\hbar}} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = 2 \sum_{i<j} w_{ij}(t) e^{\frac{-i(\epsilon_i+\epsilon_j)t}{\hbar}} |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

de modo que

$$w_{ij}(t) = w_{ij} e^{\frac{-i(\epsilon_i+\epsilon_j)t}{\hbar}}. \quad (3.1.10)$$

### 3.1.2. Condición de ortogonalidad

En esta sección se analizará la proyección del estado  $|\psi\rangle$  a un tiempo inicial  $t_0 = 0$  y a uno que ha evolucionado a un tiempo  $t$ . A partir de (3.1.9) tenemos

$$\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = 4 \sum_{i<j} |w_{ij}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_i+\epsilon_j)t}{\hbar}}. \quad (3.1.11)$$

Suponiendo que los niveles energéticos  $\{|i\rangle\}$  están espaciados igualmente, entonces el nivel  $k$  cumple

$$\epsilon_k = k\epsilon, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.1.12)$$

Al desarrollar la suma en (3.1.11),

$$\begin{aligned} \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle &= 4(|w_{12}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}} + |w_{13}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_1+\epsilon_3)t}{\hbar}} + |w_{14}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_1+\epsilon_4)t}{\hbar}} \\ &\quad + |w_{23}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_2+\epsilon_3)t}{\hbar}} + |w_{24}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_2+\epsilon_4)t}{\hbar}} + |w_{34}|^2 e^{\frac{-i(\epsilon_3+\epsilon_4)t}{\hbar}}), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

se tienen seis términos, cada uno con una suma de energías dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 &= \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon, \\ \epsilon_1 + \epsilon_3 &= \epsilon + 3\epsilon = 4\epsilon, \\ \epsilon_1 + \epsilon_4 &= \epsilon + 4\epsilon = 5\epsilon, \\ \epsilon_2 + \epsilon_3 &= 2\epsilon + 3\epsilon = 5\epsilon, \\ \epsilon_2 + \epsilon_4 &= 2\epsilon + 4\epsilon = 6\epsilon, \\ \epsilon_3 + \epsilon_4 &= 3\epsilon + 4\epsilon = 7\epsilon. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Si se sustituye lo anterior en (3.1.13), la condición de ortonormalidad al tiempo  $\tau$  equivale a

$$|w_{12}|^2 + |w_{13}|^2 \chi + (|w_{14}| + |w_{23}|)^2 \chi^2 + |w_{24}|^2 \chi^3 + |w_{34}|^2 \chi^4 = 0, \quad (3.1.15)$$

donde

$$\chi = e^{-i\phi} \quad \text{con } \phi = \frac{\epsilon\tau}{\hbar}. \quad (3.1.16)$$

---

Si definimos

$$\begin{aligned} 2w_{12} &= \sqrt{p_1}e^{i\theta_1}, & 2w_{13} &= \sqrt{p_2}e^{i\theta_2}, & 2w_{14} &= \sqrt{p_3}e^{i\theta_3}, \\ 2w_{23} &= \sqrt{p_4}e^{i\theta_4}, & 2w_{24} &= \sqrt{p_5}e^{i\theta_5}, & 2w_{34} &= \sqrt{p_6}e^{i\theta_6}, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

lo anterior se simplifica

$$p_1 + p_2\chi + (p_3 + p_4)\chi^2 + p_5\chi^3 + p_6\chi^4 = 0, \quad (3.1.18)$$

donde los coeficientes  $p_n$  cumplen con la condición de normalización por construcción

$$\sum_{n=1}^6 p_n = 1, \quad (3.1.19)$$

y denotan la probabilidad de que el sistema se encuentre en el  $n$ -ésimo estado  $|n\rangle_{sl}$ , definido de acuerdo con:

$$\begin{aligned} |\psi_{12}^{sl}\rangle &= |1\rangle_{sl}, & |\psi_{13}^{sl}\rangle &= |2\rangle_{sl}, & |\psi_{14}^{sl}\rangle &= |3\rangle_{sl}, \\ |\psi_{23}^{sl}\rangle &= |4\rangle_{sl}, & |\psi_{24}^{sl}\rangle &= |5\rangle_{sl}, & |\psi_{34}^{sl}\rangle &= |6\rangle_{sl}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Multiplicando la ecuación (3.1.18) por  $\chi^{*2}$  con  $\chi\chi^* = e^{-i\phi}e^{i\phi} = 1$ , y haciendo uso de la forma polar de  $\chi = \cos\phi + i\sin\phi$  y de su conjugado, la expresión (3.1.18) se simplifica y se considera por partes (una real y una imaginaria) que al cumplir con la igualdad a cero, ambas deben anularse. Para la parte real se tiene

$$p_3 + p_4 + (p_2 + p_5)\cos\phi + (p_1 + p_6)\cos 2\phi = 0, \quad (3.1.21)$$

y para la parte imaginaria

$$(p_2 - p_5)\sin\phi + (p_1 - p_6)\sin 2\phi = 0. \quad (3.1.22)$$

Usando  $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$  para (3.1.21), y si en (3.1.22) se sustituye  $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ , las ecuaciones se reescriben como

$$0 = 2x\cos^2\phi + u\cos\phi + (w - x), \quad (3.1.23)$$

$$0 = \sin\phi(v + 2y\cos\phi), \quad (3.1.24)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} x &= p_1 + p_6, & y &= p_1 - p_6, & u &= p_2 + p_5, \\ v &= p_2 - p_5, & w &= p_3 + p_4, & z &= p_3 - p_4. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Las ecuaciones (3.1.23) y (3.1.24) establecen las condiciones que deben cumplir los coeficientes del estado para evolucionar hacia uno ortogonal, y permiten conocer el tiempo  $\tau$ . Esto es cierto siempre que se cumplan ambas ecuaciones simultáneamente. La condición de ortogonalidad en la forma (3.1.23) y (3.1.24) genera *familias de soluciones* cuando se toman ciertas consideraciones, como se analizara más adelante.



---

### 3.1.3. Cálculo del valor esperado de la energía y su dispersión

En lo siguiente se realizará el cálculo para el valor promedio de la energía y para la dispersión. Recordemos que el estado inicial  $|\psi\rangle$  en general está dado por (3.1.1). El operador Hamiltoniano actúa sobre  $|\psi\rangle$  como (3.1.8), entonces el valor esperado de la energía es

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi(t) \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle, \\
&= 4 \sum_{i' < j'} \sum_{i < j} w_{ij} w_{i'j'}^* (\epsilon_i + \epsilon_j) \langle \psi_{i'j'}^{sl} | \psi_{ij}^{sl} \rangle, \\
&= 4 \sum_{i < j} |w_{ij}|^2 (\epsilon_i + \epsilon_j). \tag{3.1.26}
\end{aligned}$$

Si se desarrolla lo anterior se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H} \rangle &= 4(|w_{12}|^2(\epsilon_1 + \epsilon_2) + |w_{13}|^2(\epsilon_1 + \epsilon_3) + |w_{14}|^2(\epsilon_1 + \epsilon_4) \\
&\quad + |w_{23}|^2(\epsilon_2 + \epsilon_3) + |w_{24}|^2(\epsilon_2 + \epsilon_4) + |w_{34}|^2(\epsilon_3 + \epsilon_4)), \tag{3.1.27}
\end{aligned}$$

sustituyendo los valores de  $|w_{ij}|^2$  en términos de los coeficientes  $p_n$  dados por (3.1.17) y teniendo en cuenta la suma de nuestras energías (3.1.14), se tiene

$$\langle \hat{H} \rangle = \epsilon[5 - (2y + v)], \tag{3.1.28}$$

Para el cálculo de la dispersión de la energía, se retoma la ecuación (3.1.8), se opera una vez más el operador Hamiltoniano sobre el estado  $|\psi\rangle$

$$\hat{H}^2 |\psi\rangle = 2 \sum_{i < j} w_{ij} (\epsilon_i + \epsilon_j) \hat{H} |\psi_{ij}^{sl}\rangle = 2 \sum_{i < j} w_{ij} (\epsilon_i + \epsilon_j)^2 |\psi_{ij}^{sl}\rangle, \tag{3.1.29}$$

luego

$$\langle \psi | \hat{H}^2 | \psi \rangle = 4 \sum_{i < j} |w_{ij}|^2 (\epsilon_i + \epsilon_j)^2. \tag{3.1.30}$$

Entonces, a partir de (3.1.30) y (3.1.28) obtenemos

$$\sigma_H = \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2} = \epsilon \sqrt{4x + u - (2y + v)^2}. \tag{3.1.31}$$

Conociendo la dispersión de la energía y su valor esperado, se puede calcular la forma más general para el límite de rapidez cuántico de nuestro sistema (la cota unificada de Mandelstam-Tamm y Margolus-Levitin) (2.1.17).  $E_{min}$  representa la energía mínima del sistema, y dado que el nivel más bajo disponible que éste puede tener corresponde a un fermión en el estado base y otro en el primer estado excitado, tenemos que  $E_{min} = 3\epsilon$ , entonces

$$\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \epsilon[2 - (2y + v)]. \tag{3.1.32}$$


---

---

La relación que se estudiará entre el tiempo  $\tau$  de evolución a un estado ortogonal y el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$ , es el cociente

$$\frac{\tau}{\tau_{QSL}} = \frac{\tau}{\text{máx}\left(\frac{\pi\hbar}{2(\langle\hat{H}\rangle - E_{min})}, \frac{\pi\hbar}{2\sigma_H}\right)}, \quad (3.1.33)$$

con  $\langle\hat{H}\rangle - E_{min}$  dada por (3.1.32) y  $\sigma_H$  por (3.1.31).

### 3.1.4. Concurrencia fermiónica

La medida de enredamiento del sistema está dada por la ecuación (1.2.20), de modo que

$$C_f^2(|\psi\rangle) = 8^2 |w_{12}w_{34} - w_{13}w_{42} + w_{14}w_{23}|^2. \quad (3.1.34)$$

Para poder escribir (3.1.34) en términos de los coeficientes definidos en (3.1.17) desarrollamos la expresión del cuadrado de la concurrencia, en términos de las  $p_n$  y  $\theta_n$  se obtiene

$$C_f^2(|\psi\rangle) = 4[p_1p_6 + p_2p_5 + p_3p_4 - 2\sqrt{p_2p_5p_1p_6} \cos \alpha + 2\sqrt{p_3p_4p_1p_6} \cos \beta - 2\sqrt{p_3p_4p_2p_5} \cos(\beta - \alpha)]. \quad (3.1.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_1 + \theta_6 - \theta_2 - \theta_5, \\ \beta &= \theta_1 + \theta_6 - \theta_3 - \theta_4. \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

## 3.2. Análisis para distribuciones particulares

Como se desea ver si al existir enredamiento nuestro sistema alcanza su límite de rapidez cuántico, o se promueve una evolución más rápida (comparada con su contraparte separable) hacia la ortogonalidad, se realizará un análisis conjunto de (3.1.35) y la relación que existe entre el tiempo de evolución del sistema a un estado ortogonal  $\tau$  y su límite de rapidez cuántico (3.1.33).

Se vio que la condición de ortogonalidad del sistema de dos fermiones con cuatro niveles disponibles, restringe a los coeficientes de los estados de manera que éstos deben cumplir las ecuaciones (3.1.23) y (3.1.24). Las soluciones determinan familias de estados, las cuales se analizarán más adelante. Primero, en lo que sigue, exploraremos los casos que corresponden a distribuciones de probabilidad  $\{p_n\}$  específicas.

---

### 3.2.1. Distribución equiprobable de estados

El conjunto  $\{p_n\}$  determina la distribución de probabilidad de los estados (3.1.20). Como primer ejemplo vamos a analizar el caso en el que los seis estados tienen la misma probabilidad, es decir,  $p_n = p = 1/6 \quad \forall n = 1, 2, \dots, 6$ . Entonces

$$x = u = w = 1/3, \quad v = y = z = 0. \quad (3.2.1)$$

Para conocer  $\tau$  (tiempo al que los estados son ortogonales al inicial) recurrimos a (3.1.23) y (3.1.24) (condición de ortogonalidad). Sustituyendo (3.2.1) y haciendo uso de que  $\phi = \epsilon\tau/\hbar$  de (3.1.23) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \phi(2 \cos \phi + 1), \\ \Rightarrow \cos \phi &= -\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \cos \phi = 0, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

así, las soluciones para  $\tau$  son:

$$\tau_j = \frac{\pi\hbar}{2\epsilon}(2j+1), \quad \text{con } j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.3)$$

$$\tau_k = \frac{\pi\hbar}{3\epsilon}2(1+3k), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.4)$$

$$\tau_l = \frac{\pi\hbar}{3\epsilon}2(2+3l), \quad \text{con } l = 0, 1, 2, \dots, . \quad (3.2.5)$$

Para el caso de la energía y la dispersión de la energía

$$\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \epsilon[2 - (2y + v)] = 2\epsilon, \quad (3.2.6)$$

$$\sigma_H = \epsilon\sqrt{4x + u - (2y + v)^2} = 2\epsilon\sqrt{\frac{5}{12}}, \quad (3.2.7)$$

de modo que el límite de rapidez cuántico estará dado por la cota de Mandeltam-Tamm,

$$\tau_{QSL} = \frac{\pi\hbar}{2\epsilon}\sqrt{\frac{3}{5}}. \quad (3.2.8)$$

Por otro lado, la concurrencia (3.1.35) resulta

$$C_f^2 = \frac{1}{9} \left[ 3 - 2(\cos \alpha - \cos \beta + \cos(\beta - \alpha)) \right], \quad (3.2.9)$$

función que puede ser graficada si se varían  $\alpha$  y  $\beta$ , como se muestra en la figura 3.1

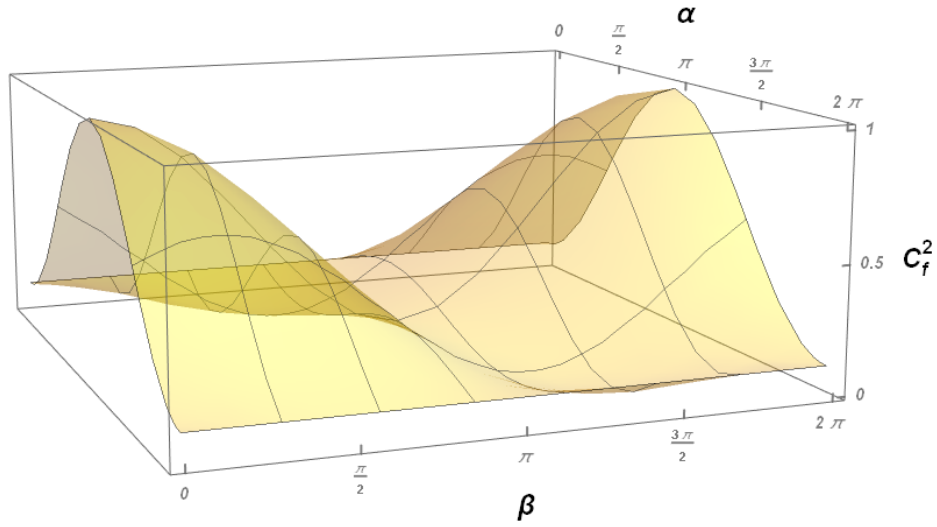


Figura 3.1:  $C_f^2$  como función de  $\alpha$  y  $\beta$  para la superposición de los 6 eigenestados (3.1.20) igualmente pesados.

Por otro lado, se puede graficar  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$  en función del tiempo, como se muestra en la figura 3.2, en donde se muestran los primero siete tiempos de ortogonalidad dados por (3.2.3)-(3.2.5) (mínimos de la función), y el límite de rapidez cuántico. (3.2.8).

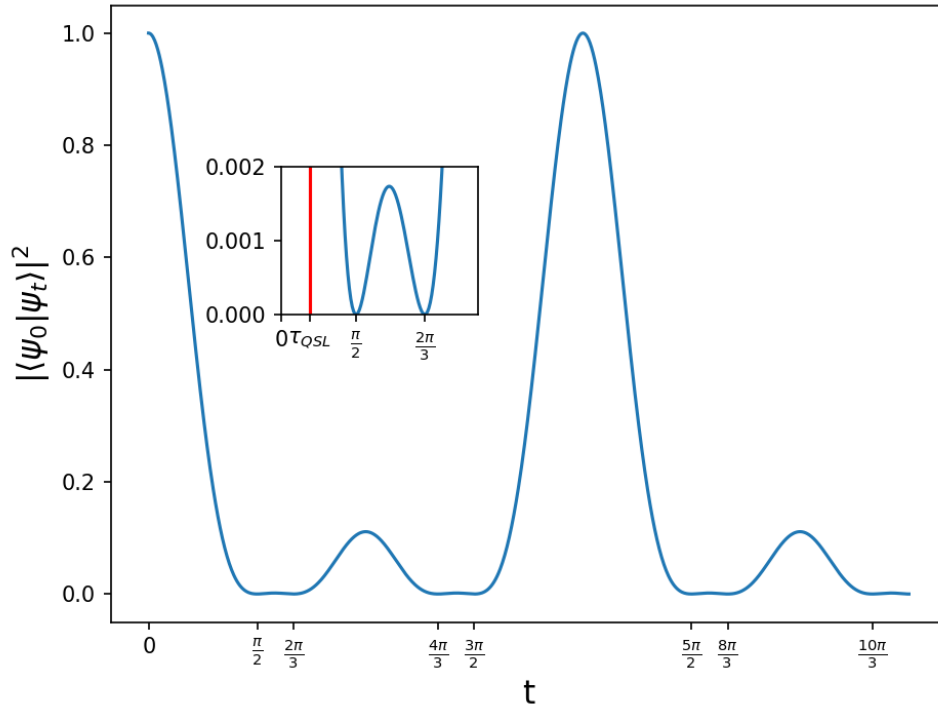


Figura 3.2:  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$  como función de  $t$  para la superposición de los seis eigenestados (3.1.20) igualmente pesados (la línea roja denota el límite de rapidez cuántico).

De la figura 3.1 ( $C_f^2$  vs  $(\alpha, \beta)$ ), se observa que el estado puede poseer cualquier valor de la concurrencia (si se eligen apropiadamente las fases  $\alpha$  y  $\beta$ ) y para cualquier cantidad de enredamiento que posea el estado, los tiempos de ortogonalidad y el  $\tau_{QSL}$  serán los mismos; así pues un estado que posea un máximo enredamiento u otro cuya  $C_f$  no sea nula, llegarán a un estado ortogonal al mismo tiempo  $\tau > \tau_{QSL}$ . De la figura 3.2 se observan los puntos en los que  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2 = 0$  (los ceros de la función) y la periodicidad en los intervalos de  $t$  ( $[\pi/2, 2\pi/3]$ ,  $[4\pi/3, 3\pi/2]$ ,  $[5\pi/2, 8\pi/3]$ ,  $\dots$ ) cuando  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2 \approx 0$  se aproxima a cero.

### 3.2.2. Distribución equiprobable de energía

Dada la degeneración de los estados  $|3\rangle$  y  $|4\rangle$  (véase (3.1.14)), la distribución de probabilidad de estados  $\{p_n\}$  difiere de la distribución de probabilidad de energías  $\{\mathcal{P}_E\}$  dada por

$$\mathcal{P}_{E_n} = p_n \quad \text{para } n = 1, 2, 5, 6, \quad (3.2.10)$$

$$\mathcal{P}_{E_3=E_4} = p_3 + p_4. \quad (3.2.11)$$

Entonces, para una distribución de energía igualmente probable se tiene  $\mathcal{P}_E = \mathcal{P} = 1/5$ , lo que conduce a

$$y = v = 0 \quad \text{y} \quad x = u = 2w = 2/5. \quad (3.2.12)$$

Sustituyendo lo anterior en las condiciones de ortogonalidad (3.1.23) y (3.1.24), se obtiene una ecuación de segundo orden para  $\cos \phi$  donde ( $\phi = \epsilon\tau/\hbar$ )

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 \phi + 2 \cos \phi - 1 &= 0, \\ \Rightarrow \cos \phi &= \frac{1}{4} \left( -1 \pm \sqrt{5} \right), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

así

$$\tau_{l_{\pm}}^{\pm} = \frac{\hbar}{\epsilon} \left[ \pm \arccos \left( \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \right) + 2\pi l_{\pm} \right] \quad \text{con } l_+ = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{y } l_- = 1, 2, \dots, \quad (3.2.14)$$

$$\tau_{m_{\pm}}^{\pm} = \frac{\hbar}{\epsilon} \left[ \pm \arccos \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \right) + 2\pi m_{\pm} \right] \quad \text{con } m_+ = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{y } m_- = 1, 2, \dots \quad (3.2.15)$$

Para la energía y la dispersión de la energía, se tiene

$$\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \epsilon[2 - (2y + v)] = 2\epsilon, \quad (3.2.16)$$

$$\sigma_H = 2\epsilon \sqrt{4x + u - (2y + v)^2} = \epsilon\sqrt{2}, \quad (3.2.17)$$

de lo anterior, podemos obtener el límite de rapidez cuántico, que corresponde a la cota de Mandestan-Tamm

$$\tau_{QSL} = \frac{\pi\hbar}{2\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.18)$$

con  $\tau_+ = \tau_0^+$  y  $\tau_- = \tau_0^-$ , tenemos

$$\frac{\tau_{\pm}}{\tau_{QSL}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \arccos \left( \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \right). \quad (3.2.19)$$

El primer tiempo ( $\tau_0^+$ ) que da un estado ortogonal al inicial, está dado por

$$\tau_0^+ = \frac{\hbar}{\epsilon} \arccos \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right) = \frac{2\pi\hbar}{5\epsilon}. \quad (3.2.20)$$

Por otro lado, el cuadrado de la concurrencia es

$$C_f^2 = \frac{8}{5^2}(1 - \cos \alpha) + 4p_3 \left( \frac{1}{5} - p_3 \right) + \frac{8}{5} \sqrt{p_3 \left( \frac{1}{5} - p_3 \right) [\cos \beta - \cos (\beta - \alpha)]}, \quad (3.2.21)$$

con  $p_3 \in [0, 1/5]$ . Veamos que si se toman valores para  $p_3 = 0, 1/60, 1/10$  estos valores específicos muestran cómo varía concurrencia y se va acercando a sus máximos, como se muestra en la siguiente figura 3.3 donde se grafica  $C_f^2$  en función de  $\alpha$  y  $\beta$ .

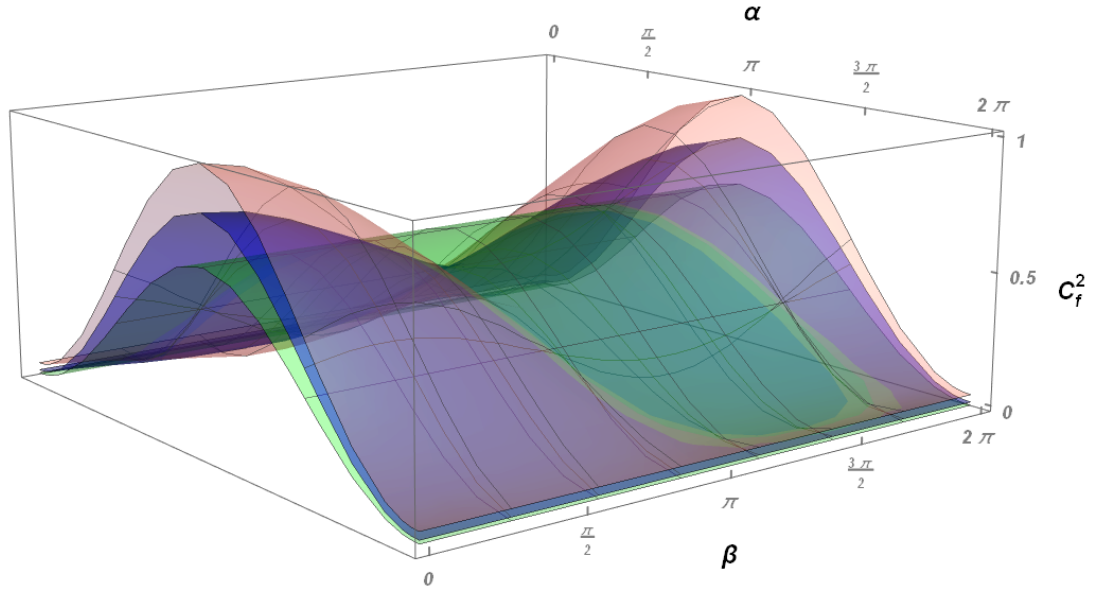


Figura 3.3:  $C_f^2$  para la distribución equiprobable de energía como función de  $\alpha$  y  $\beta$ , tomando diferentes valores de  $p_3$ :  $p_3 = 0$  es verde,  $p = 1/60$  azul y  $p_3 = 1/10$  rosa.

De (3.2.18) y (3.2.20), se puede ver que los estados que poseen una distribución equiprobable de energía no alcanzan el límite de rapidez cuántico y  $\tau_0^+ > \tau_{QSL}$ , tiempos que permanecen fijos para cualquiera valor que tome el enredamiento.

Si se compara el límite de rapidez cuántico obtenido en el análisis de estas dos distribuciones (3.2.20) y (3.2.8), (3.2.8) es menor que (3.2.20) como se ve en la siguiente figura 3.4

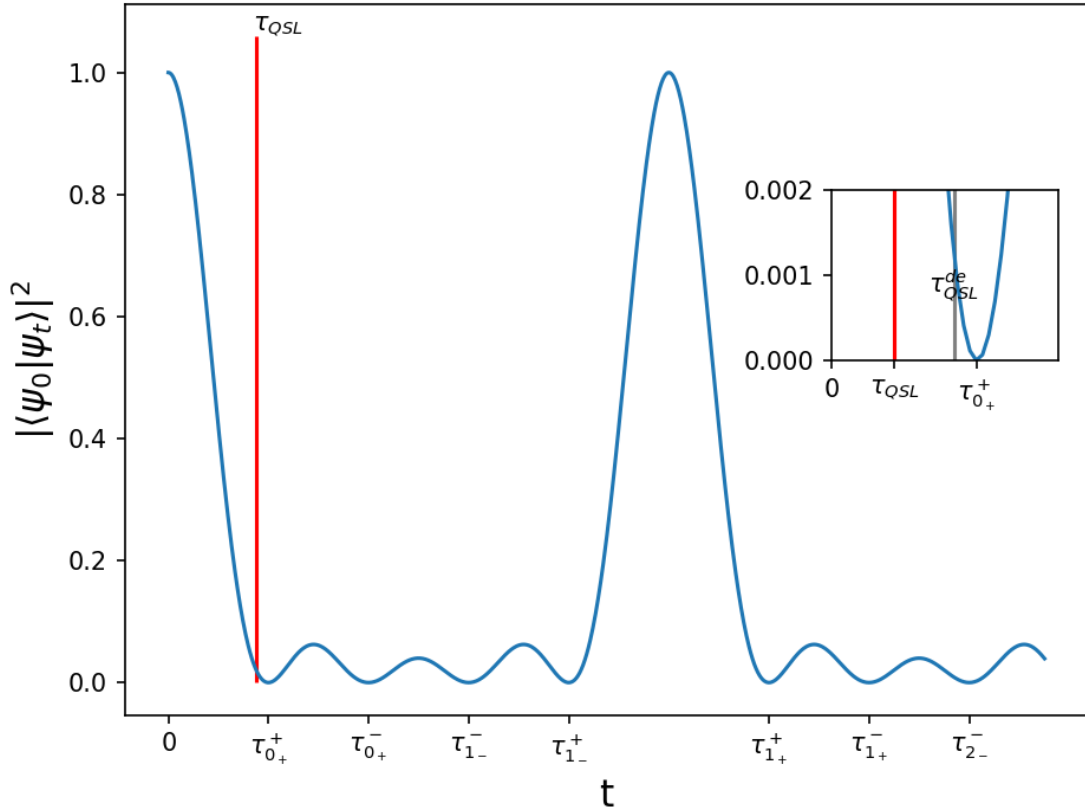


Figura 3.4:  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$  como función de  $t$  para estados que poseen una distribución equiprobable de energía. La línea roja denota el límite de rapidez cuántico del estado con la distribución equiprobable de energía y la línea gris el límite de rapidez cuántico para la distribución equiprobable de estados  $\tau_{QSL}^{de}$ .

La figura anterior da a conocer  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$  en función del tiempo  $t$  mostrando los primeros siete tiempos de ortogonalidad dados por (3.2.14) y (3.2.15). En la región entre  $[\tau_{1-}^+, \tau_{1+}^+]$  se observa como  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$  va de  $0 \rightarrow 1$  y existe un valor en este intervalo donde los estados son aproximadamente iguales  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2 \approx 1$  (un máximo de la función). También se observa que en el intervalo  $[\tau_{0+}^+, \tau_{1-}^+]$  se tiene  $|\langle \psi_t | \psi_0 \rangle|^2 \lesssim 1/10$  por lo que los estados son ortogonales en un margen estrecho.

### 3.2.3. Distribución de máxima dispersión

Se considera ahora el estado que posee una dispersión de energía máxima, que corresponde a la superposición igualmente pesada de los estados de máxima energía y de mínima energía, esto es,  $p_1 = p_6 = 1/2$ . Así la única variable que es diferente de cero en (3.1.25) es  $x = 1$ . Sustituyendo en (3.1.23) y (3.1.24) se puede conocer el tiempo que da la ortogonalidad de

estados

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cos \phi^2 - 1, \\ \Rightarrow \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Así,

$$\tau_l = \frac{\pi \hbar}{4\epsilon} (2l + 1) \quad \text{con } l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.23)$$

En este caso la energía media relativa resulta igual a la dispersión de la energía dada por  $\langle \hat{H} \rangle - E_{min} = \sigma_H = 2\epsilon$ , y las cotas de Mandelstam-Tamm y de Margolus-Levitin coinciden

$$\tau_{QSL} = \tau_0 = \frac{\pi \hbar}{4\epsilon}. \quad (3.2.24)$$

Los estados que poseen una distribución de máxima de dispersión son una superposición de dos eigenestados de  $\hat{H}$  igualmente probables, que alcanza el límite rapidez cuántico (veáse la figura 3.5), y son los más rápidos permitidos por el límite fundamental. Además poseen un máximo enredamiento, puesto que la concurrencia es

$$C_f^2 = 1. \quad (3.2.25)$$

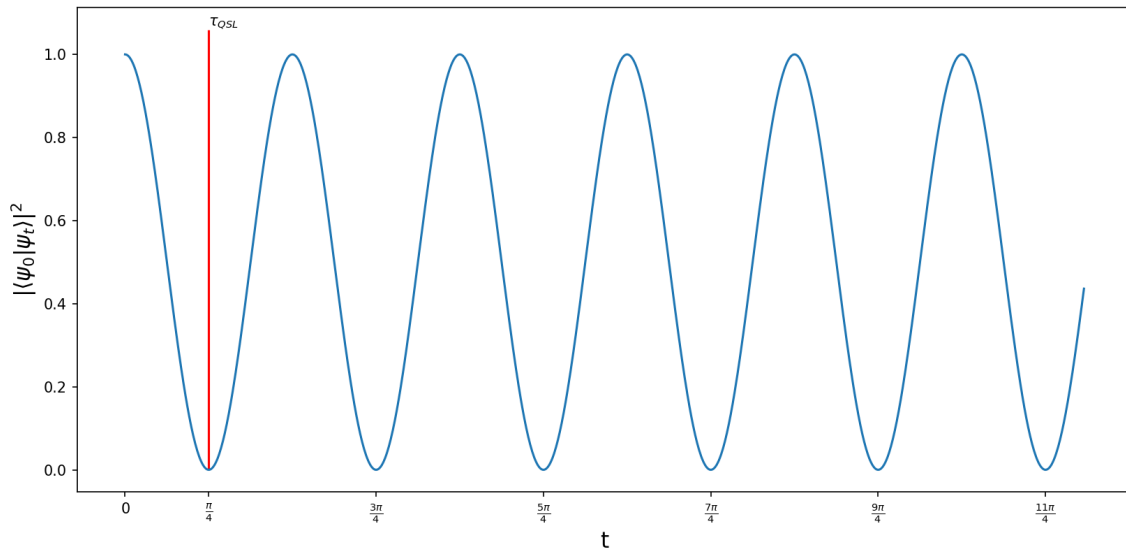


Figura 3.5:  $|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$  como función de  $t$  para una superposición de dos estados igualmente pesados. La línea roja denota el límite de rapidez cuántico que coincide con el tiempo  $\tau_0$ .



---

### 3.3. Análisis numérico

Después de estos ejemplos de distribuciones particulares  $\{p_n\}$  en lo que sigue, se analizará numéricamente la relación entre  $\tau$ , el límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$  y  $C_f$ , que resulta de las condiciones de ortogonalidad (3.1.23) y (3.1.24). Veamos primero que la naturaleza de estas dos expresiones nos sugiere abordar la solución en tres familias: La familia 1 es la que considera a  $\sin \phi = 0$ , la segunda familia es para el caso donde  $\sin \phi \neq 0$  y  $v + 2y \cos \phi = 0$  tomando a  $y \neq 0$  y para la tercer familia se considerará  $v + 2y \cos \phi = 0$  con  $y = 0$ . Cada una de estas familias dará condiciones particulares para las probabilidades  $\{p_n\}$  en las cuales se basa el análisis numérico que se muestra a continuación.

- Familia I:  $\sin \phi = 0$
- Familia II:  $\sin \phi \neq 0$  y  $v + 2y \cos \phi = 0$  con  $y = 0$
- Familia III:  $\sin \phi \neq 0$  y  $v + 2y \cos \phi = 0$  con  $y \neq 0$

#### 3.3.1. Familia I: $\sin \phi = 0$

En el caso con  $\sin \phi = 0$  se cumple

$$\phi = n\pi = \frac{\epsilon\tau}{\hbar}, \quad (3.3.1)$$

con  $n$  entero positivo. Si  $n$  es par, entonces  $e^{-i\phi} = 1$  y la ecuación (3.1.17) no se satisface, pues las  $p_n$  son cantidades positivas por construcción; entonces  $n$  se debe tomar impar. De lo anterior se puede conocer el tiempo  $\tau$  y está dado como

$$\tau_n = \frac{\pi\hbar}{\epsilon}n, \quad \text{con } n=1,3,5,\dots, \text{ impar.} \quad (3.3.2)$$

Considerando esto, y  $\cos \phi = -1$  y la ecuación (3.1.23) se reduce a

$$x - u + w = 0. \quad (3.3.3)$$

Restando y sumando la expresión anterior con la condición de normalización (3.1.19) reescrita en la forma  $x + w + u = 1$ , se obtienen dos condiciones con las que deben cumplir las probabilidades:

$$2(p_1 + p_3 + p_4 + p_6) = 1, \quad (3.3.4)$$

$$2(p_2 + p_5) = 1. \quad (3.3.5)$$

Vemos que se tienen infinitas soluciones para  $p_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Para encontrar conjuntos  $\{p_n\}$  que satisfagan estas condiciones se desarrolló un análisis computacional, en cual se generan números aleatorios a partir de distintas distribuciones que cumplan con (3.3.4) y (3.3.5) a través de diferentes métodos [Ver Apéndice]. Una vez generados los conjuntos  $\{p_n\}$

---

se calculan la energía media relativa y la dispersión de la energía del sistema, a partir de las ecuaciones (3.1.32) y (3.1.31) para de ahí determinar el  $\tau_{QSL}$ . Para la medida de enredamiento (3.1.35) se tomaron varias relaciones entre los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$  para realizar un mapeo en el plano,  $C_f^2$  y  $\tau/\tau_{QSL}$  donde  $\tau$  está dado por (3.3.2) tomando a  $n = 1$ . En las siguientes cuatro figuras se muestran conjuntos de nueve gráficas, cada gráfica corresponde a una muestra de 300,000 conjuntos aleatorios  $\{p_n\}$  que cumplen con (3.3.4) y (3.3.5) tomando el cociente  $\tau/\tau_{QSL}$  y valores específicos para la concurrencia (3.1.35) explorando valores constantes para  $\alpha$  y  $\beta$ . En la figura 3.6 se considera a  $\alpha = \beta$  con valores entre  $[0, \pi]$ . En la figura 3.7 se muestra el conjunto de gráficas correspondientes cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta$  toma un valor entre  $[0, \pi]$ . En la figura 3.8 se consideró a  $\beta = 0$  y el ángulo  $\alpha$  es el que toma un valor específico entre  $[0, \pi]$  y la figura 3.9 muestra los casos cuando  $\beta = 2\alpha$  con  $\beta$  tomando un valor fijo entre  $[0, \pi]$ .

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia I con  $\alpha=\beta$ .

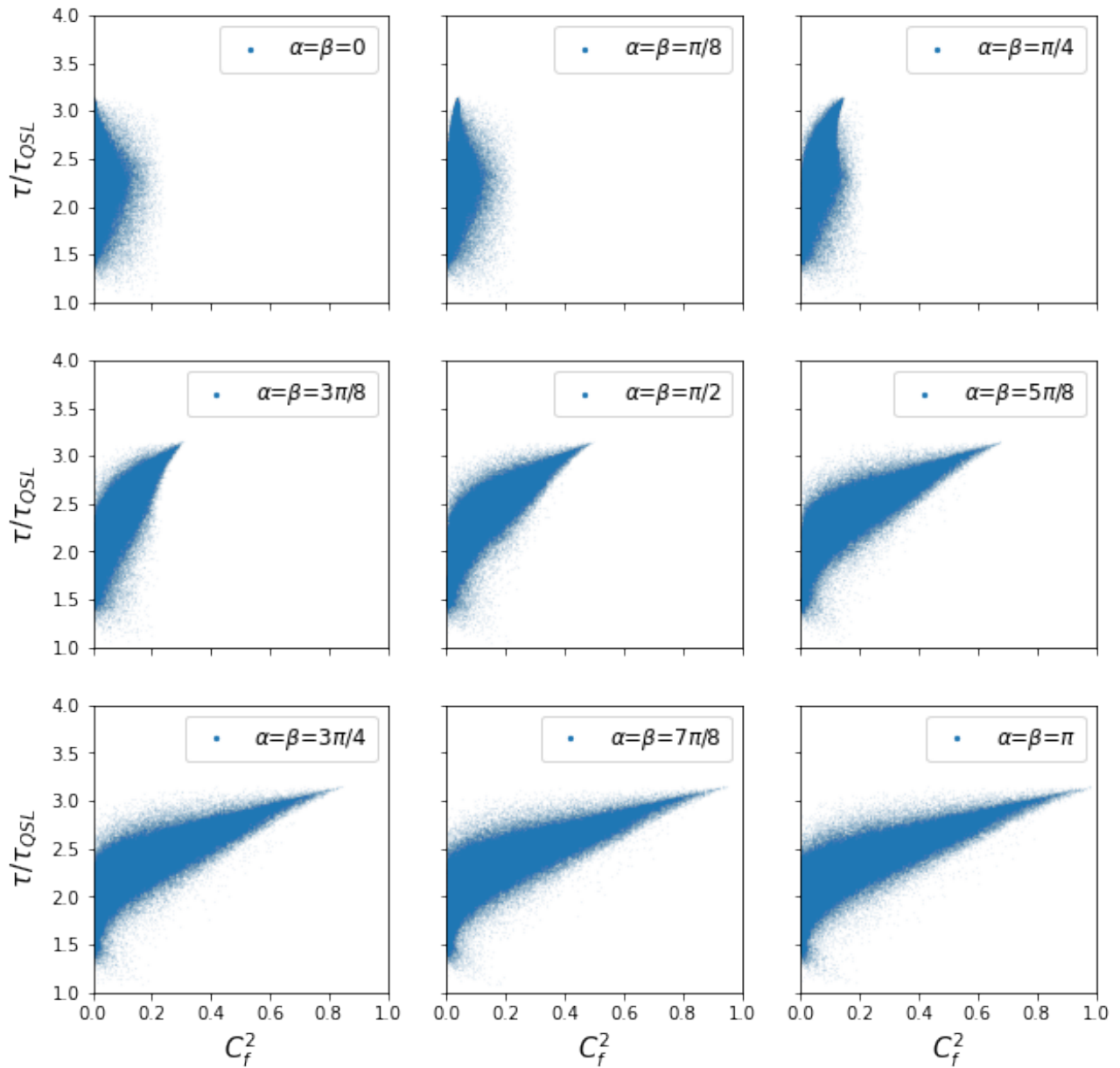


Figura 3.6: Cada gráfica corresponde a un valor específico de  $\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el aquí mostrado.

---

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia I con  $\alpha=0$ .

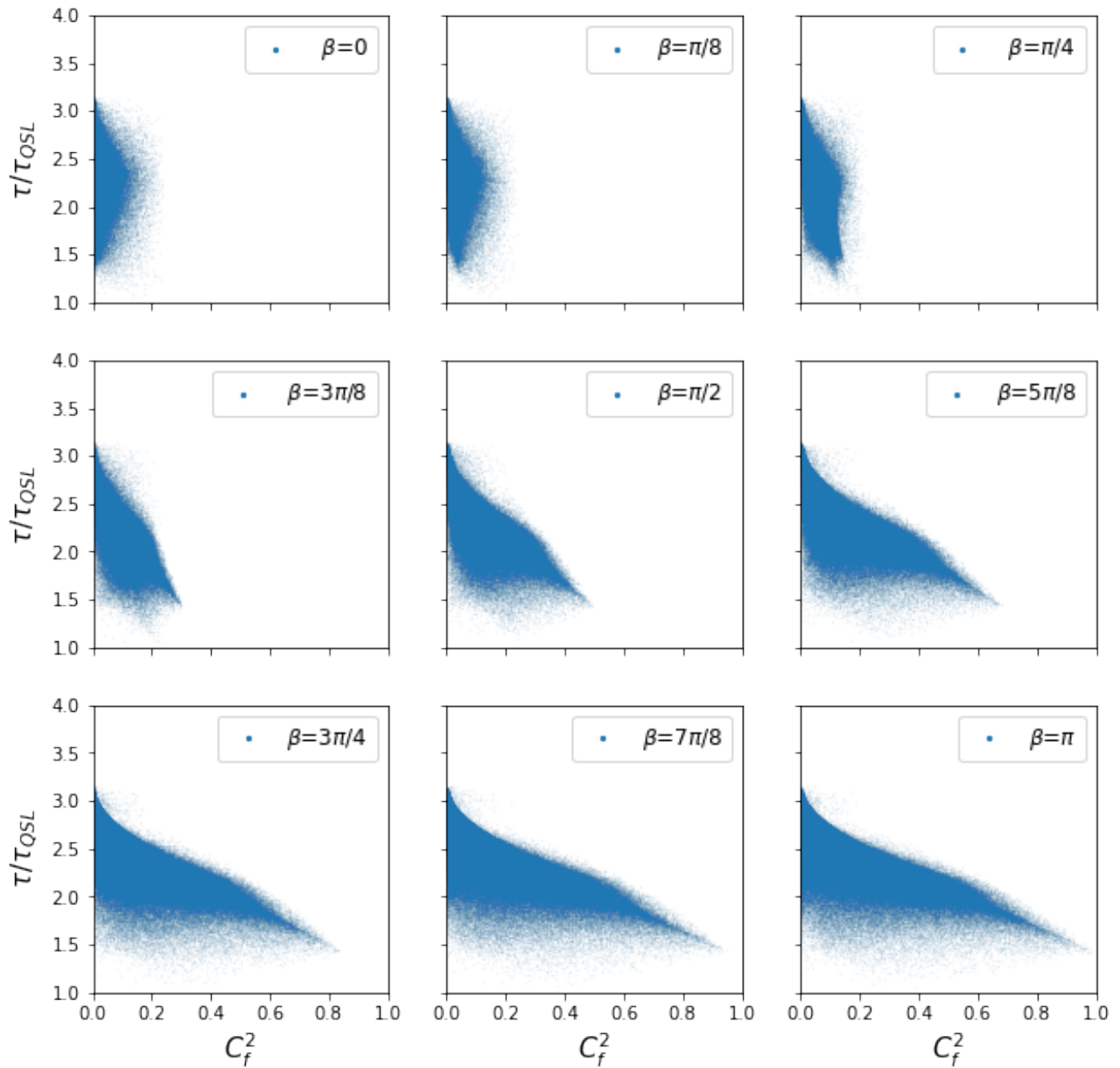


Figura 3.7: Cada gráfica corresponde a  $\alpha = 0$  y un valor específico de  $\beta$  que varía entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el que aquí se muestra.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia I con  $\beta=0$ .

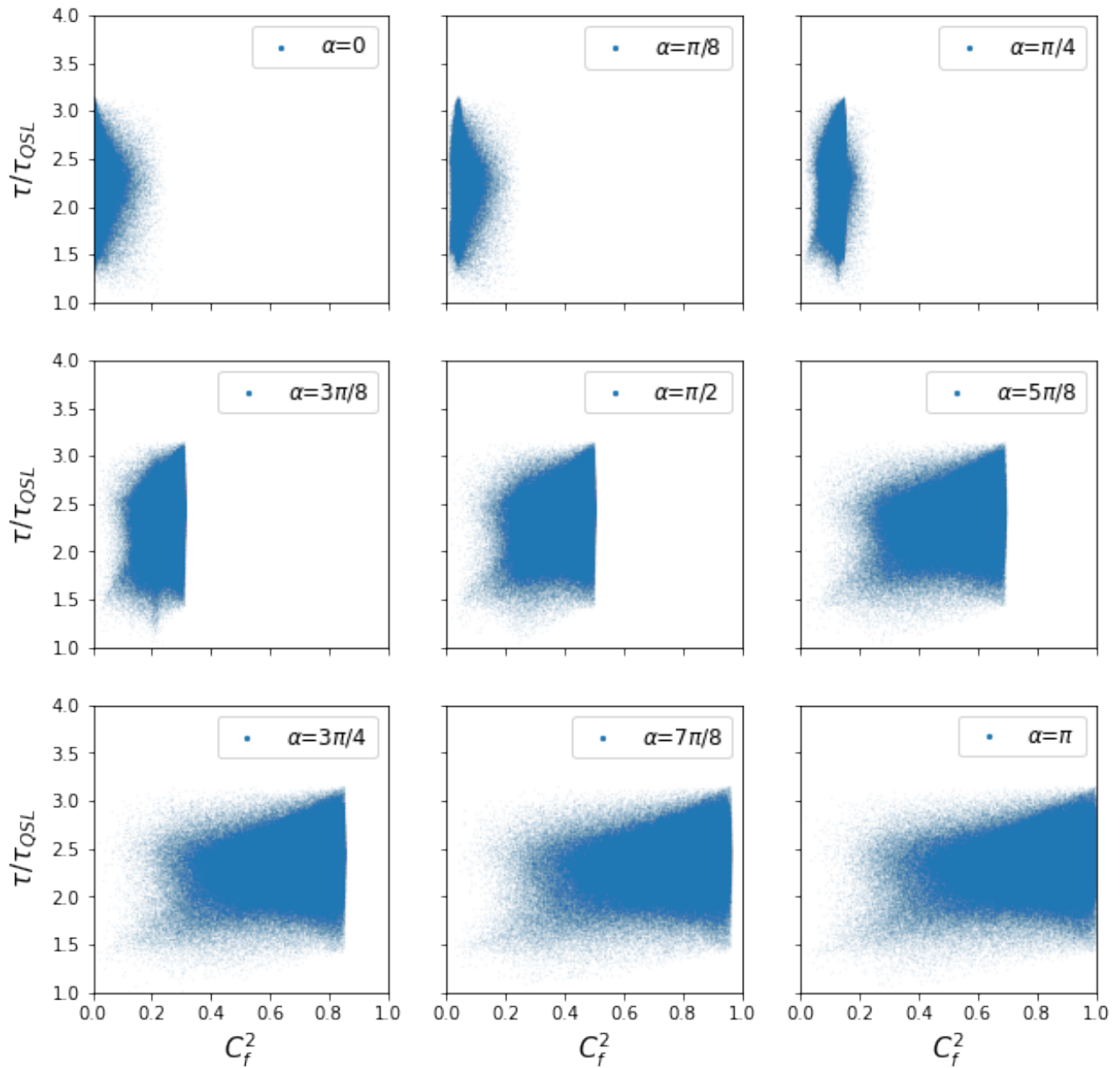


Figura 3.8: Cada gráfica corresponde a  $\beta = 0$  y  $\alpha$  posee un valor específico entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el que aquí se muestra.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia I con  $\beta=2\alpha$

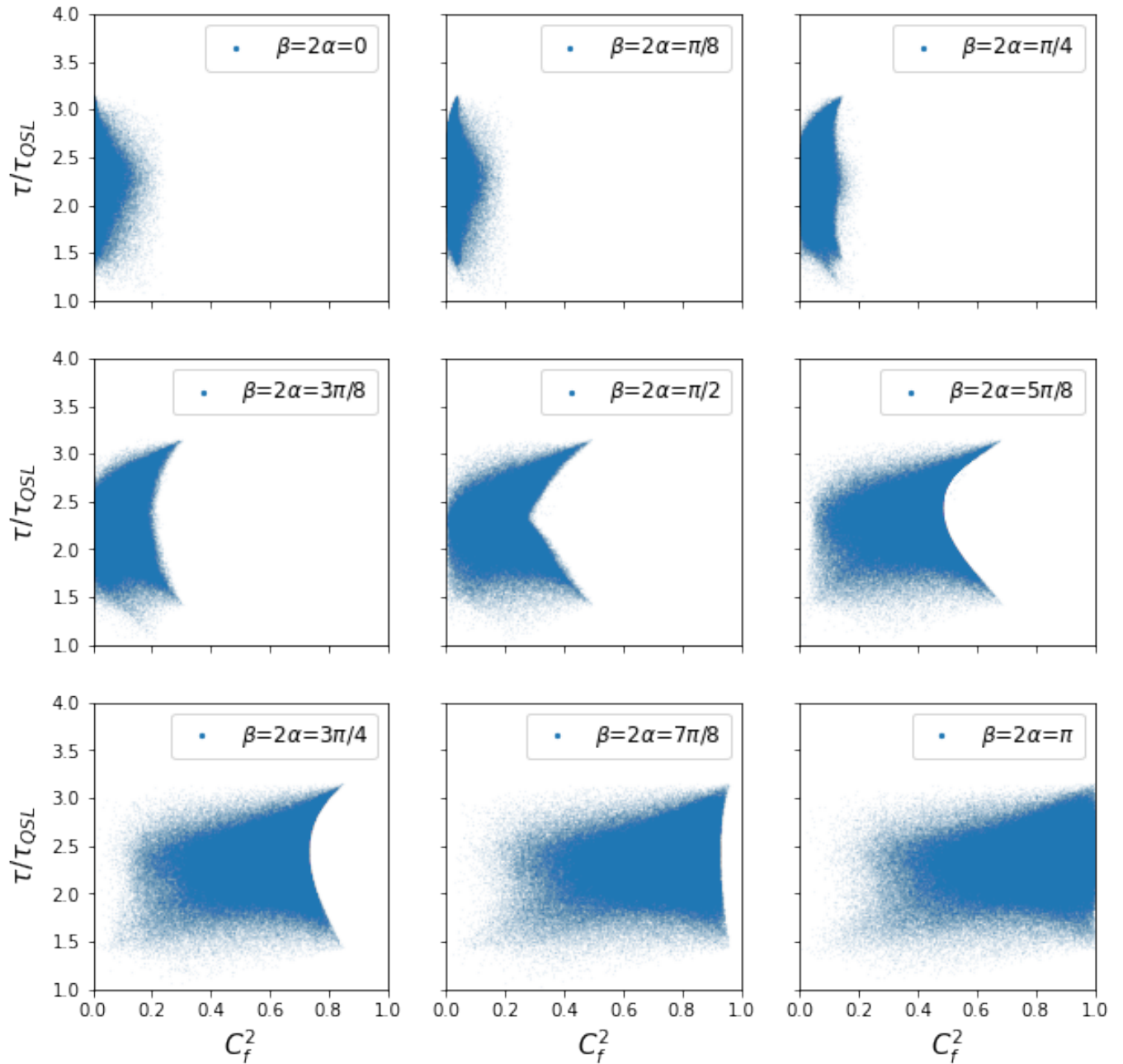


Figura 3.9: Cada gráfica corresponde un valor de específico de  $2\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el presentado aquí.

---

Las cuatro figuras 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, tienen en común la gráfica  $\alpha = \beta = 0$ . En este caso se puede ver que los estados poseen poco enredamiento dado que no hay valores para  $C_f^2 \gtrsim 0.25$  y entre menor sea la medida del enredamiento del estado, se puede notar que  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  abarca un rango amplio de valores. Por otra parte, analizando las gráficas de 3.6 ( $\alpha = \beta$ ) notamos que conforme  $\alpha = \beta \rightarrow \pi$  algunos estados pueden tener valores más grandes de enredamiento, e incluso para  $\alpha = \beta \approx \pi$  la medida de enredamiento puede incluso alcanzar su máximo ( $C_f = 1$ ). Para los estados que poseen mayor enredamiento,  $\tau/\tau_{QSL}$  tiende a ser mayor, a diferencia de los estados con menor  $C_f$ . Así mismo, existen algunos pocos  $\{p_n\}$  para los cuales el estado se aproxima al límite de rapidez cuántico (aquellos puntos que se encuentran cercanos a 1 en el eje  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ ) y tienen como característica poco enredamiento.

Para la figura 3.7 (caso  $\alpha = 0$ ) observamos un comportamiento cualitativamente diferente al anterior. Cuando  $\beta \rightarrow \pi$  algunos estados alcanzan un máximo de enredamiento tal como sucede en la figura 3.6, no obstante, en este caso el cociente  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  disminuye considerablemente, de modo que los estados más enredados llegan relativamente más rápido a un estado ortogonal. Esto no implica, sin embargo, que los estados más rápidos (menor  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ ) sean necesariamente los de mayor enredamiento, y aunque no se puede concluir que algún estado alcanza el límite de rapidez cuántico, existen algunos estados para los cuales el tiempo de ortogonalidad sí se aproxima al límite de rapidez cuántico cuando su concurrencia es máxima.

En la figura 3.8, al igual que la figura 3.6, se puede ver que cuando  $\alpha \rightarrow \pi$  existen estados que poseen mayor enredamiento, sin embargo en este caso  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  puede tomar prácticamente cualquier valor, de modo que, a diferencia de los casos anteriores, aquí no se aprecia una correlación entre el alto grado de enredamiento y mayor (o menor) velocidad hacia el estado ortogonal. Además, cuando  $\alpha \rightarrow \pi$  los estados con concurrencia nula son poco probables de obtener y estos se desplazan con un frente plano hacia una concurrencia máxima, dejando una región donde no hay estados.

Para la última figura 3.9 conforme  $\beta \rightarrow \pi/2$  se observa que algunos estados con mayor enredamiento o son los más lentos (pico inferior) o son los más rápidos (pico superior). Finalmente cuando  $\beta \rightarrow \pi$  es menos probable obtener un estado sin enredamiento tal como sucede en la figura 3.8.

El conjunto de las cuatro figuras muestra máximos y mínimos de la concurrencia para diversos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , y valores  $\{p_n\}$  aleatorios. En algunos casos se tienen estados máximamente enredados que se aproximan al límite rapidez cuántico y para otros no; aunque estos estados sean dados bajo condiciones particulares, se puede decir que para el caso  $\sin \phi = 0$  existen condiciones (determinadas por las fases) donde el enredamiento está fuertemente relacionado con el tiempo de ortogonalidad y la aproximación de éste al límite de rapidez cuántico. Esta correlación existe entonces cuando se toman valores específicos de  $\alpha$  y  $\beta$ , dado que si los valores para estos ángulos son aleatorios, no se observa correlación alguna, lo que coincide con los resultados de [11].

---

### 3.3.2. Familia II: $\sin \phi \neq 0$ y $v + 2y \cos \phi = 0$ con $y = 0$

Por las condiciones de la familia, se cumple que  $v = 0$ , entonces recurriendo a (3.1.25) tenemos que  $p_1 = p_6$  y  $p_2 = p_5$ . De la condición de ortogonalidad (3.1.23) se tiene

$$-1 < \cos \phi = -\frac{u}{4x} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u}{2x}\right)^2 - 2\frac{w-x}{x}} < 1. \quad (3.3.6)$$

De lo anterior se puede conocer el tiempo  $\tau$  y está dado como

$$\tau = \frac{\hbar}{\epsilon} \arccos \left( -\frac{u}{4x} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u}{2x}\right)^2 - 2\frac{w-x}{x}} \right). \quad (3.3.7)$$

La otra condición que cumplen las probabilidades es la condición de normalización (3.1.19) que en este caso se reduce a

$$2p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4 = 1, \quad (3.3.8)$$

y que admite infinitas soluciones para  $p_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ .

En este análisis computacional a diferencia de la familia I y como se verá más adelante con la familia III, se generó  $\cos \phi$  como un número aleatorio entre  $(-1, 1)$  y a partir de este, se hace una búsqueda de las  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , y  $p_4$  que satisfacen las condiciones (3.3.6) y (3.3.8). Los números aleatorios se generaron a partir de distintas distribuciones [Ver Apéndice]. Una vez conocida  $\{p_n\}$  con  $p_1 = p_6$  y  $p_2 = p_5$  se calculan la energía media relativa y la dispersión de la energía del sistema, a partir de las ecuaciones (3.1.32) y (3.1.31), que con las condiciones de esta familia conducen a

$$\frac{\tau}{\tau_{QSL}} = \frac{\tau}{\max\left\{\frac{\pi\hbar}{4\epsilon}, \frac{\pi\hbar}{2\epsilon\sqrt{4x+u}}\right\}} = \frac{\tau}{\max\left\{\frac{\pi\hbar}{4\epsilon}, \frac{\pi\hbar}{2\epsilon\sqrt{8p_1+2p_5}}\right\}}. \quad (3.3.9)$$

Por su parte la medida de enredamiento (3.1.35) se reescribe como

$$C_f^2 = 4[p_1^2 + p_2^2 + p_3p_4 - 2p_1p_2 \cos \alpha + 2p_1\sqrt{p_3p_4} \cos \beta - 2p_2\sqrt{p_3p_4} \cos(\beta - \alpha)]. \quad (3.3.10)$$

Para calcularla, se tomaron varias relaciones entre los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$  para realizar un mapeo en el plano,  $C_f^2$  y  $\tau/\tau_{QSL}$ . En las siguientes cuatro figuras se muestran conjuntos de nueve gráficas, cada gráfica corresponde a una muestra de 300,000 puntos aleatorios (incluido  $\tau$ ), tomando el cociente  $\tau/\tau_{QSL}$  y valores específicos para la concurrencia (3.1.35) explorando valores constantes para  $\alpha$  y  $\beta$ . En la figura 3.10 se considera a  $\alpha = \beta$  con valores entre  $[0, \pi]$ . En la figura 3.11 se muestra el conjunto de gráficas correspondientes cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta$  toma un valor entre  $[0, \pi]$ . En la figura 3.12 se consideró a  $\beta = 0$  y el ángulo  $\alpha$  es el que toma un valor específico entre  $[0, \pi]$  y la figura 3.13 muestra los casos cuando  $\beta = 2\alpha$  con  $\beta$  tomando un valor fijo entre  $[0, \pi]$ .



---

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia II con  $\alpha=\beta$ .

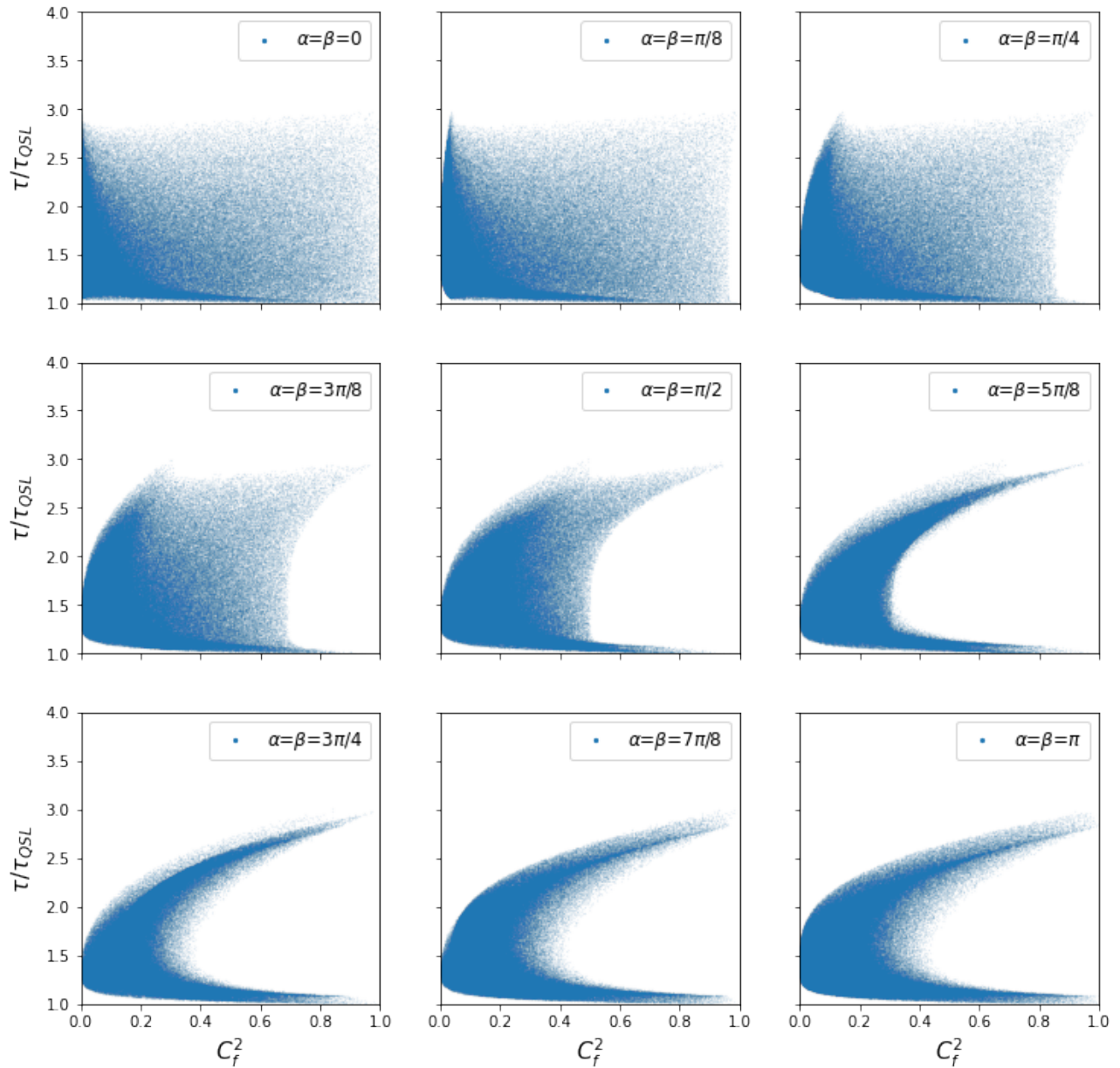


Figura 3.10: Cada gráfica corresponde a un valor específico de  $\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el aquí mostrado.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia II con  $\alpha=0$ .

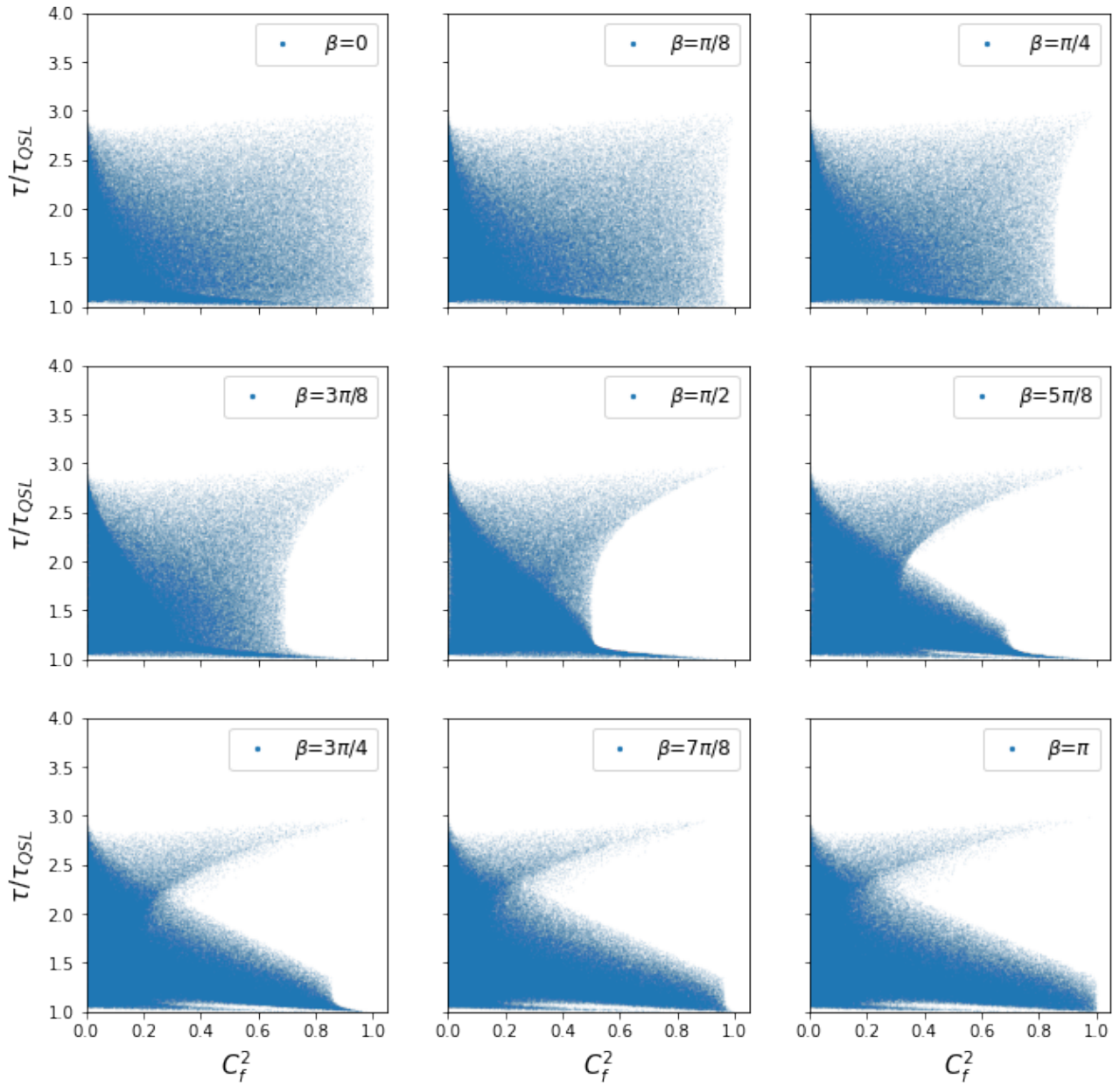


Figura 3.11: Cada gráfica corresponde a  $\alpha = 0$  y un valor específico de  $\beta$  que varía entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el que aquí se muestra.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia II con  $\beta=0$ .

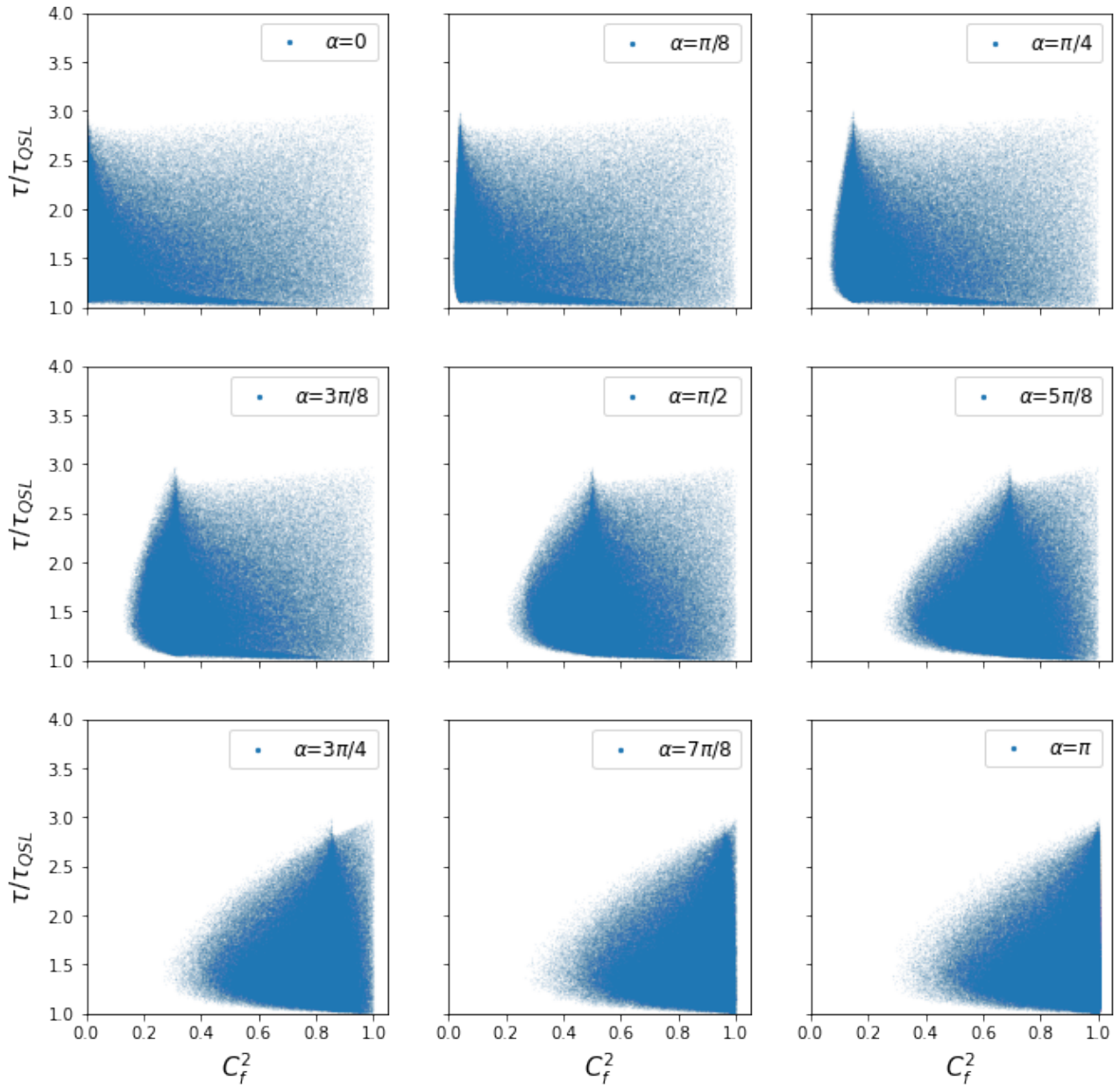


Figura 3.12: Cada gráfica corresponde a  $\beta = 0$  y  $\alpha$  posee un valor específico entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el que aquí se muestra.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia II con  $2\beta=\alpha$

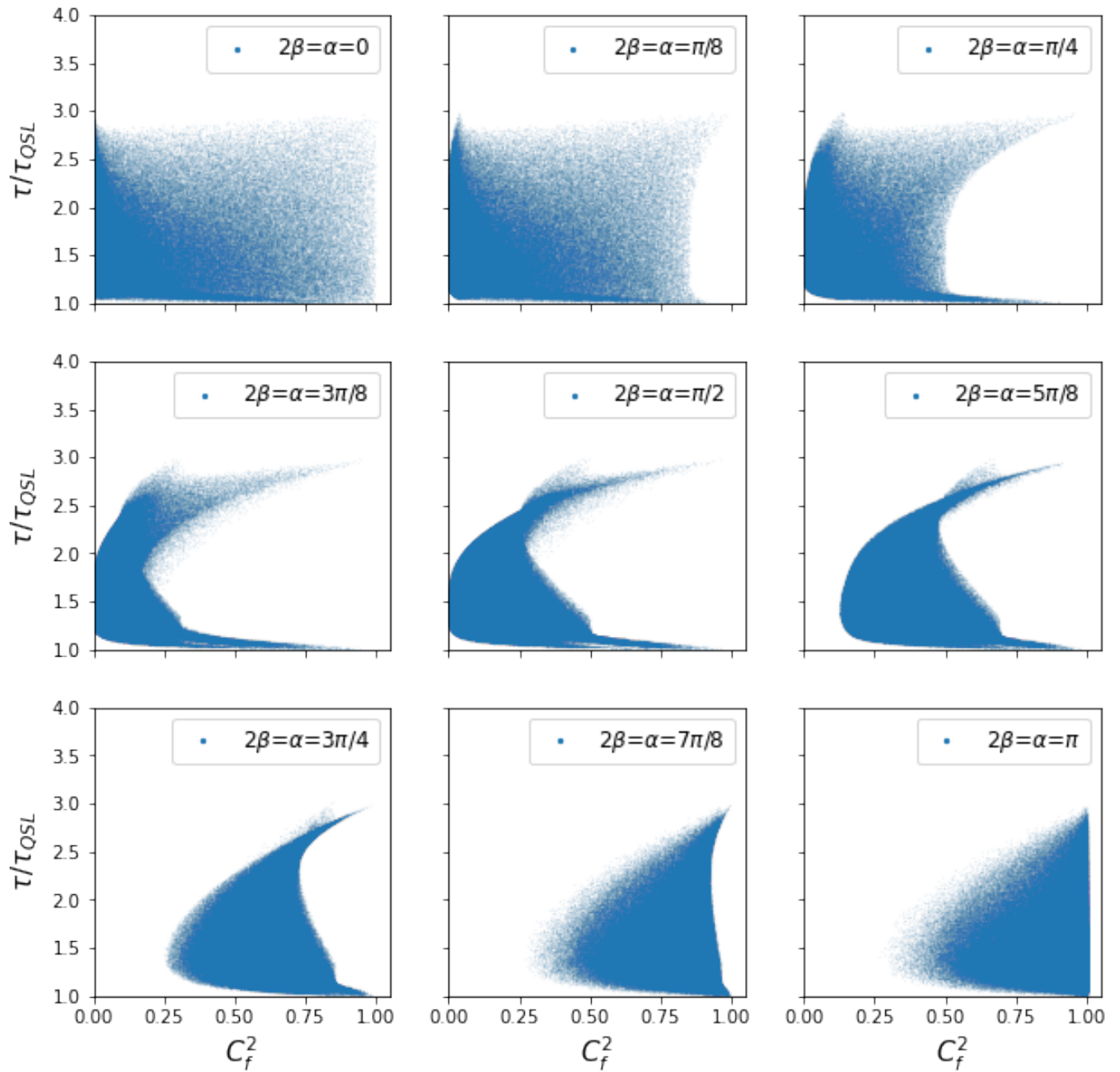


Figura 3.13: Cada gráfica corresponde un valor de específico de  $2\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el presentado aquí.

---

Las cuatro figuras 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, tienen en común la gráfica  $\alpha = \beta = 0$ . En este caso se puede ver que los estados poseen un rango amplio de valores de enredamiento y de  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ , teniendo una distribución más uniforme comparada con la gráfica  $\alpha = \beta = 0$  de la familia I y de la familia III (como se mostrará más adelante). Por otra parte, analizando las gráficas de 3.10 ( $\alpha = \beta$ ) notamos que conforme  $\alpha = \beta \rightarrow \pi$  la distribución de puntos se vuelve más definida y se observan tendencias específicas para los estados con  $C_f \approx 1$ , en particular, conforme  $C_f$  aumenta  $\tau/\tau_{QSL}$  tiende a su máximo o a su mínimo valor, el cual se acerca mucho al límite fundamental  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}} = 1$ . Además, los estados con poco enredamiento ( $C_f \in [0, 0.3]$ ) corresponde a valores  $1 < \frac{\tau}{\tau_{QSL}} \lesssim 2.5$  y como consecuencia se forma un pequeño hueco de estados con  $C_f \gtrsim 0.4$  y valores intermedios de  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ .

Para la figura 3.11 (caso  $\alpha = 0$ ) observamos un comportamiento cualitativamente diferente al anterior. Cuando  $\beta \rightarrow \pi$  algunos estados alcanzan un máximo de enredamiento tal como sucede en la figura 3.10; no obstante, en este caso el rango de valores  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  es más amplio cuando el enredamiento es menor y mayoritariamente se reduce conforme  $C_f \rightarrow 1$ , de modo que algunos estados más enredados tienden a llegar más rápido a un estado ortogonal, aunque siempre existe un menor número de estados con enredamiento alto para los cuales  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  tiende a su máximo valor. De nuevo, esto no implica que los estados más rápidos (menor  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ ) sean necesariamente los de mayor enredamiento. Aunque no se puede concluir que algún estado alcanza el límite de rapidez cuántico, existen algunos estados altamente enredados que a diferencia de 3.7, se aproximan mucho más al límite de rapidez cuántico.

En la figura 3.12 se puede ver que conforme  $\alpha$  va de  $0 \rightarrow \frac{5\pi}{8}$  el enredamiento mínimo va aumentando, creándose así una región cada vez mayor carente de puntos para valores bajos de  $C_f$ . Cuando  $\alpha$  va de  $\frac{5\pi}{8} \rightarrow \pi$  aumenta la densidad de estados con  $C_f \approx 1$  para los cuales  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  puede tomar prácticamente cualquier valor, de modo que, a diferencia de los casos anteriores, aquí no se aprecia una correlación entre el alto grado de enredamiento y mayor (o menor) velocidad hacia el estado ortogonal.

Para la última figura 3.13 en las regiones de  $\beta \in [0, \frac{5\pi}{8}]$  se observa un comportamiento similar al de la figura 3.10, formando dos picos, uno máximo y otro mínimo, dejando una región amplia sin estados correspondientes a altos valores de  $C_f$  y valores intermedios de  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ . Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en 3.10, aquí aparece una región sin puntos para valores bajos de la concurrencia. Cuando  $\beta$  va de  $3\pi/8 \rightarrow \pi$  aumenta la probabilidad de obtener un estado sin enredamiento, y se repite el comportamiento de la figura 3.11 cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = \pi$ .

Como en el caso de la familia I, se puede decir que para el caso  $v + 2y \cos \phi = 0$  con  $y = 0$  existen condiciones donde el enredamiento está fuertemente relacionado con el tiempo de ortogonalidad y la aproximación de este al límite de rapidez cuántico. Es posible notar que para esta familia II los tiempos de ortogonalidad pueden aproximarse más al límite de rapidez cuántico, en comparación con los estados de la familia I. De nuevo, cuando existen las correlaciones, estas se manifiestan al tomar valores específicos de  $\alpha$  y  $\beta$ , dado que si los valores para estos ángulos son aleatorios, no se observa correlación alguna, lo que coincide con los resultados de [11], similares a la gráfica correspondiente a  $\alpha = \beta = 0$ .

---

---

### 3.3.3. Familia III: $\sin \phi \neq 0$ y $v + 2y \cos \phi = 0$ con $y \neq 0$

Al tener en cuenta estas nuevas condiciones, se obtiene

$$-1 \leq \cos \phi = -\frac{v}{2y} \leq 1, \quad (3.3.11)$$

con  $\phi = \frac{\epsilon\tau}{\hbar}$ . A diferencia de la familia I y al igual que en el caso de la familia II, aquí  $\tau$  depende de las probabilidades  $\{p_n\}$  (3.1.25). De (3.3.11) se puede obtener  $\tau$ , que está dado por

$$\tau = \frac{\hbar}{\epsilon} \arccos \left( -\frac{v}{2y} \right). \quad (3.3.12)$$

Al sustituir (3.3.11) en la condición (3.1.23) y usar la condición de normalización

$$x + u + w = 1 \quad (3.3.13)$$

se obtiene

$$\frac{x}{2} \left( \frac{v}{y} \right)^2 - \frac{uv}{2y} + (1 - 2x - u) = 0. \quad (3.3.14)$$

Vemos que se tienen infinitas soluciones para las variables  $x, v, y, u$  que a su vez están determinadas por  $\{p_n\}$  (3.1.25). De igual forma que en las familia anteriores, se desarrolló un análisis computacional en cual se generan números aleatorios a partir de distintas distribuciones que cumplan con (3.3.11), (3.3.13) y (3.3.14) [Ver Apéndice]. Una vez generados los conjuntos  $\{p_n\}$  se calculan la energía media relativa y la dispersión de la energía del sistema a partir de las ecuaciones (3.1.32) y (3.1.31) para de ahí determinar el  $\tau_{QSL}$ . Al tener generadas las variables  $x, v, y, u$  que cumplen con (3.3.11) se puede calcular  $\tau$  a partir de  $v, y$  con (3.3.7). Para la medida de enredamiento (3.1.35) se tomaron varias relaciones entre los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$  para realizar un mapeo en el plano,  $C_f^2$  y  $\tau/\tau_{QSL}$ , como se hizo anteriormente. En las siguientes figuras se muestran cuatro conjuntos de nueve gráficas cada una; cada gráfica corresponde a una muestra de 300,000 puntos tomando valores específicos para la concurrencia (3.1.35) explorando valores constantes para  $\alpha$  y  $\beta$ . En la figura 3.14 se considera a  $\alpha = \beta$  con valores constantes entre  $[0, \pi]$ . En la figura 3.15 se muestra el conjunto de gráficas correspondientes cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta$  toma un valor entre  $[0, \pi]$ . En la figura 3.16 se consideró a  $\beta = 0$  y el ángulo  $\alpha$  es el que toma un valor específico entre  $[0, \pi]$  y la figura 3.17 muestra los casos cuando  $\beta = 2\alpha$  con  $\beta$  tomando un valor fijo entre  $[0, \pi]$ .

---

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia III con  $\alpha=\beta$ .

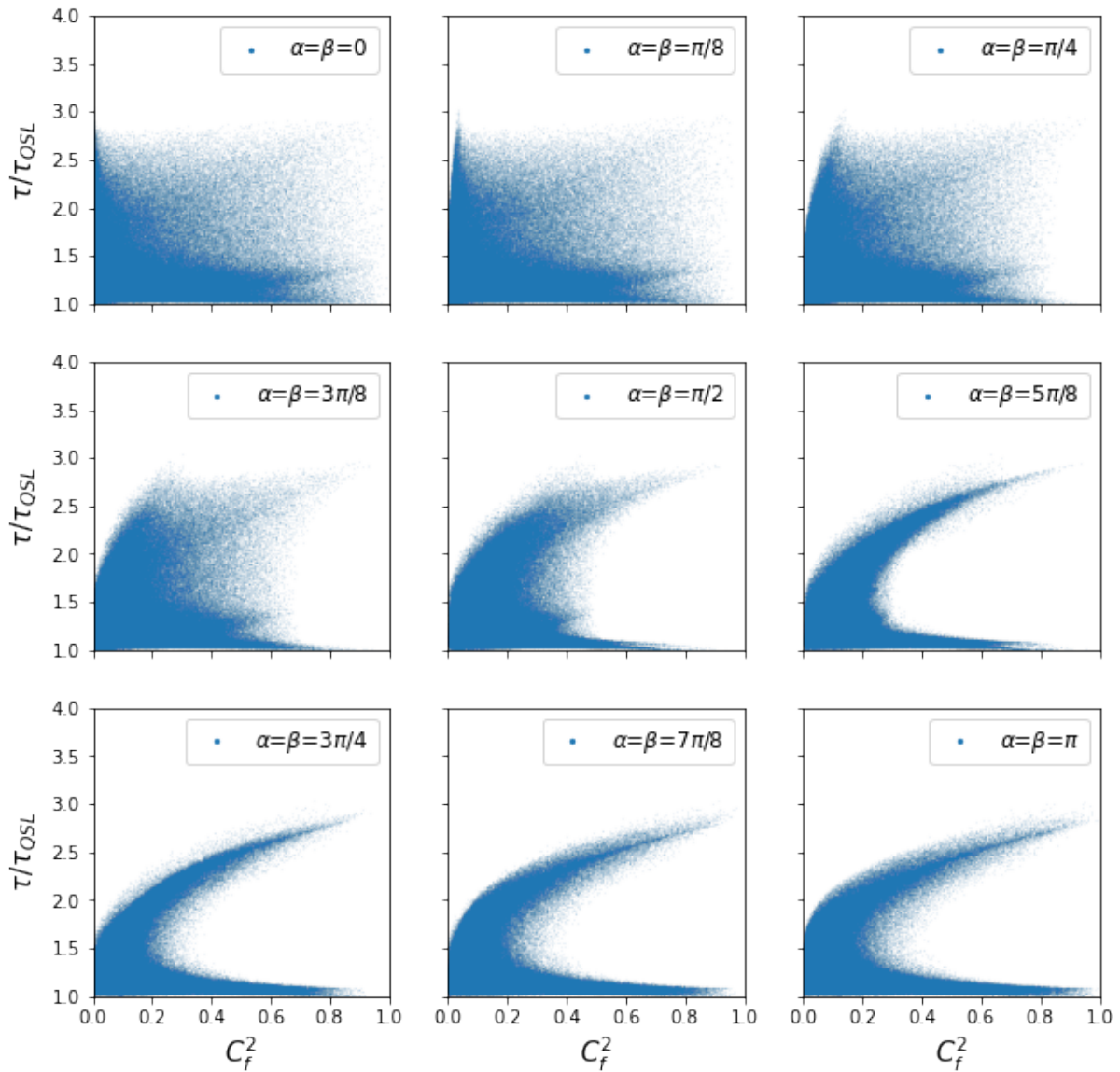


Figura 3.14: Cada gráfica corresponde a un valor específico de  $\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el aquí mostrado.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia III con  $\alpha=0$ .

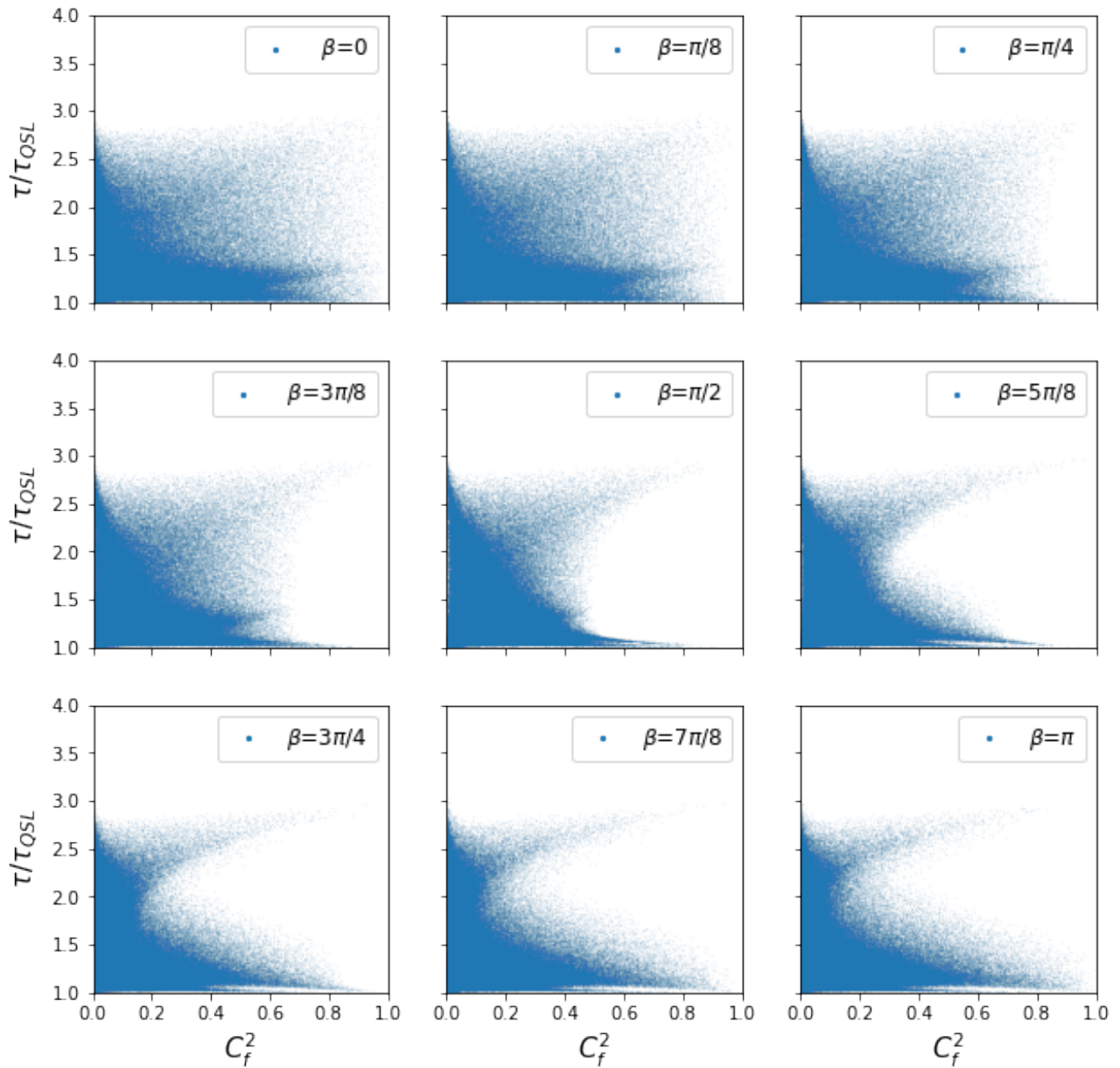


Figura 3.15: Cada gráfica corresponde a  $\alpha = 0$  y un valor específico de  $\beta$  que varía entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el que aquí se muestra.



$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia III con  $\beta=0$ .

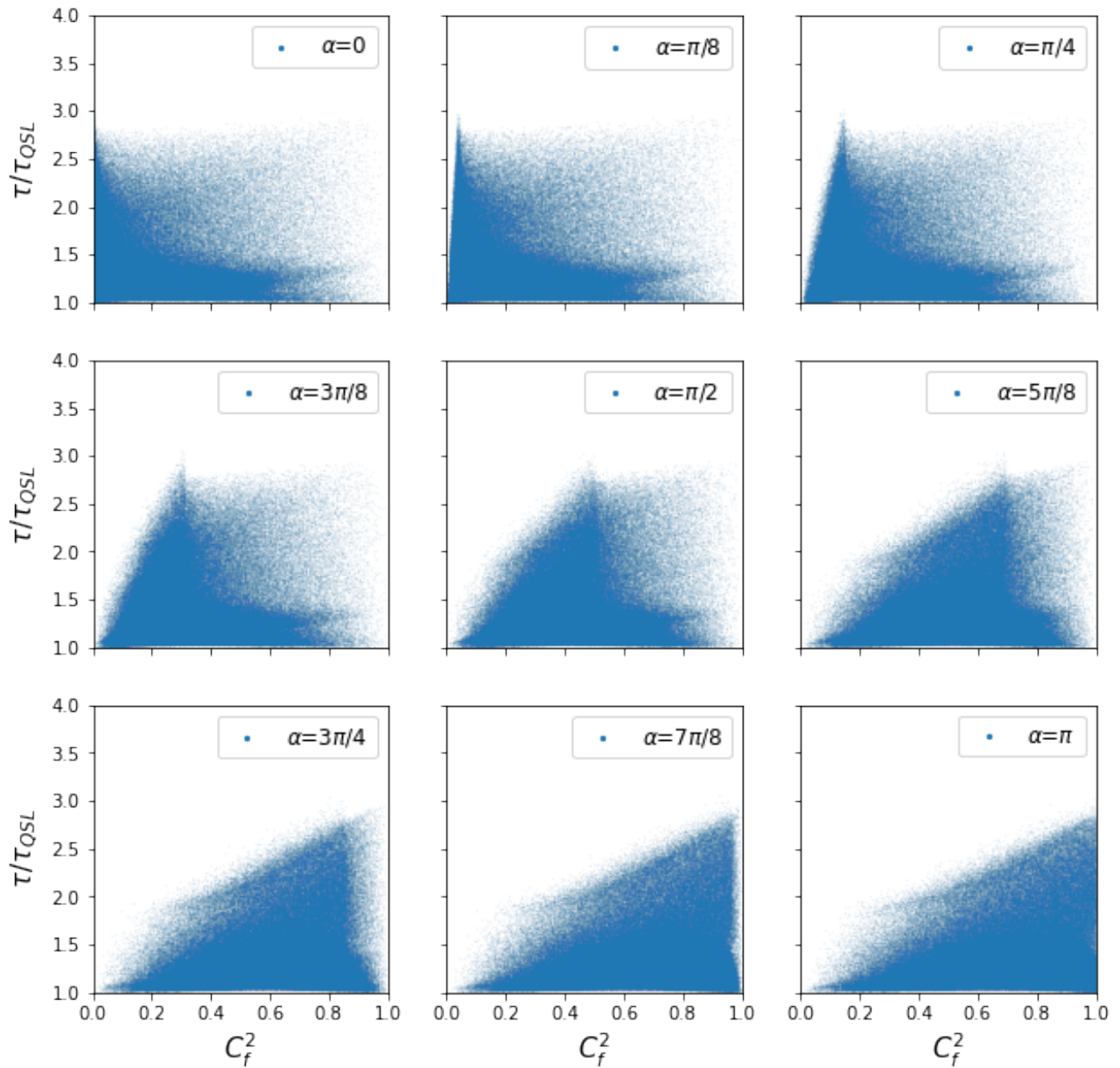


Figura 3.16: Cada gráfica corresponde a  $\beta = 0$  y  $\alpha$  posee un valor específico entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el que aquí se muestra.

$\tau/\tau_{QSL}$  vs  $C_f^2$  para la familia III con  $\beta=2\alpha$

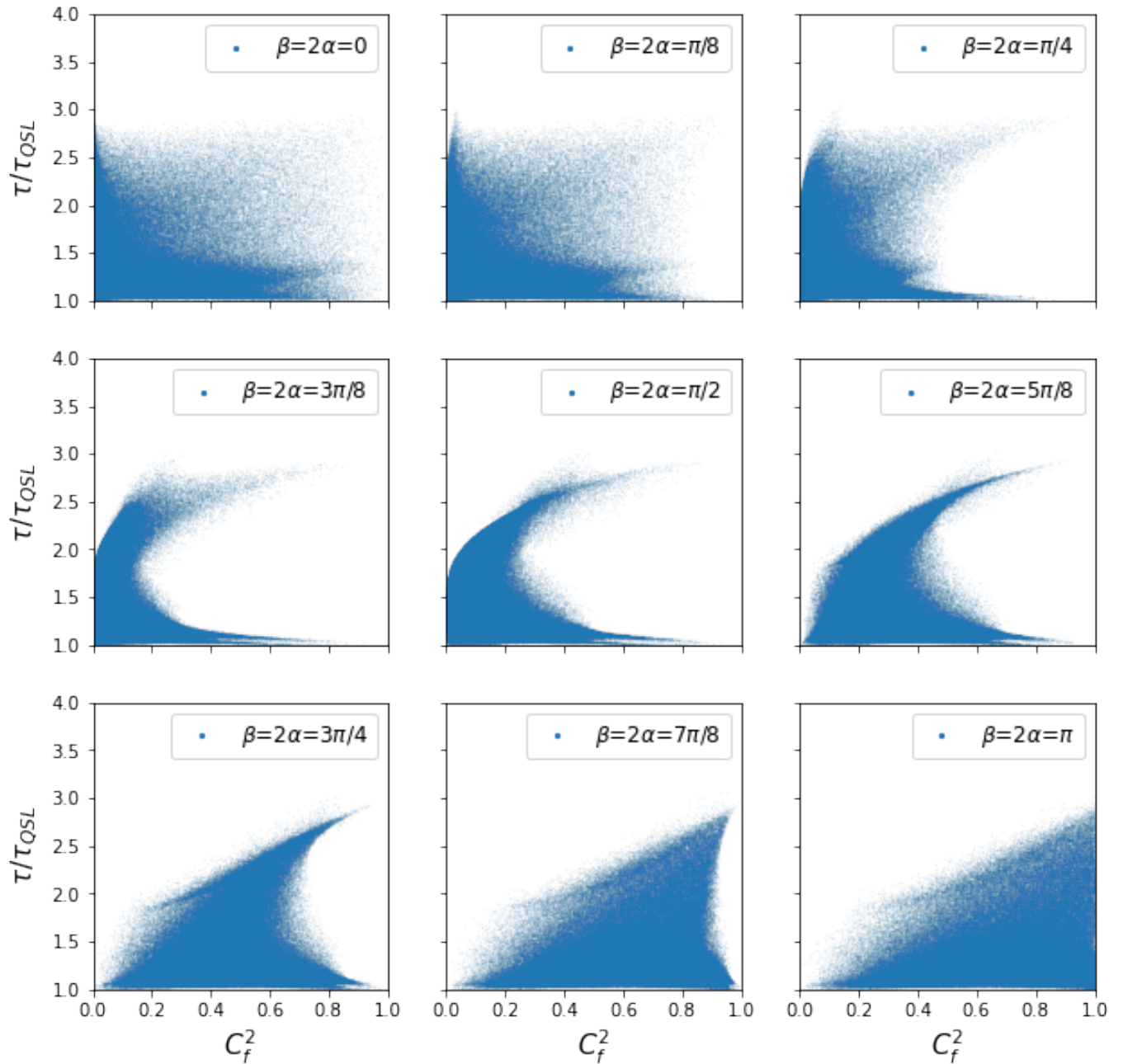


Figura 3.17: Cada gráfica corresponde un valor de específico de  $2\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi]$ . Se generaron 300,000 puntos aleatorios (para cada gráfica) de cuatro distintas distribuciones (funciones computacionales para generar números aleatorios [ver apéndice]) de lo que se obtuvo el mismo resultado gráfico, que es el presentado aquí.

---

De manera general para las figuras 3.14 ( $\alpha = \beta$ ) y 3.15 ( $\alpha = 0$ ) la familia III se puede decir que los resultados son similares cualitativamente a los correspondientes de la familia II, con algunas diferencias que la caracterizan. La figura 3.16 ( $\beta = 0$ ) de la familia III muestra un comportamiento muy similar a su contaparte de la familia II principalmente para valores altos de  $C_f$ . Por su parte, la figura 3.17 ( $\beta = 2\alpha$ ) es la que difiere más de la correspondiente figura en la familia II (3.13), sobre todo para  $\beta$  cercano a  $\pi$ , como se explica más abajo.

La gráfica que tienen en común las 4 figuras 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, es el caso donde  $\alpha = \beta = 0$ . Para esta, se puede ver que los estados poseen un rango amplio de valores de enredamientos y de  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ , y que a diferencia de la figura 3.10 se muestra una acumulación más definida de puntos en  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}} \lesssim 1.5$  conforme el enredamiento aumenta. Se observa además un menor número de estados que poseen un alto enredamiento.

Analizando las gráficas de 3.14 ( $\alpha = \beta$ ) notamos que conforme  $\alpha = \beta \rightarrow \pi$  la distribución de puntos se vuelve más definida al igual que en la familia II, aunque una importante diferencia en este caso es la uniformidad de puntos en el intervalo de concurrencias pequeñas ( $C_f \in [0, 0.2]$  y  $\tau/\tau_{QSL}$  bajos), pues no existe el hueco de estados que podemos notar en 3.10 en  $\tau/\tau_{QSL} < 1.2$ , otra diferencia es la presencia de picos de acumulación de puntos para  $\alpha = \beta$  entre  $[0, \pi/2]$ .

Para la figura 3.15 (caso  $\alpha = 0$ ) observamos un comportamiento muy similar al de 3.11; la principal diferencia recae en que los puntos se notan menos definidos en esta familia, y aparecen de nuevo picos de acumulación que no se ven en la familia II.

En la figura 3.16 se puede ver que para toda  $\alpha$  hay estados con todos los valores posibles de  $C_f$ , a diferencia de lo que ocurre en la familia II (figura 3.12) en donde hay cada vez menos estados con enredamiento bajo conforme  $\alpha$  aumenta. Sin embargo en ambas familias ocurre que  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  puede tomar prácticamente cualquier valor conforme  $C_f \rightarrow 1$ . De nuevo, los estados con concurrencia diferente de cero se desplazan con un frente plano hacia una concurrencia máxima, y para  $\alpha \rightarrow \pi$  vemos que menor enredamiento corresponde a estados con menor  $\tau$ . Para la última figura 3.17 en las regiones de  $\beta \in [0, \frac{5\pi}{8}]$  se observa un comportamiento similar al de la figura 3.14, de igual forma se forman dos picos, uno máximo y otro mínimo dejando una región sin estados, de tal forma que para  $C_f$  mayores el tiempo de ortogonalidad puede ser máximo o mínimo. Finalmente, cuando  $\beta$  va de  $5\pi/8 \rightarrow \pi$  el comportamiento se asemeja al de la figura 3.16.

Como en el caso de la familia I y la familia II, se puede decir que para el caso  $v + 2y \cos \phi = 0$  con  $y \neq 0$  existen condiciones específicas para  $\alpha$  y  $\beta$  donde el enredamiento está fuertemente relacionado con el tiempo de ortogonalidad y la aproximación de este al límite de rapidez cuántico. Es posible notar que para la familia III, como ya se vio los resultados se asemejan en muchos casos a los de la familia II. Esto puede originarse en que ambas familias coinciden en la condición  $\sin \phi \neq 0$ ,  $v + 2y \cos \phi = 0$ , si bien difieren en que en un caso  $y = 0$  y en otro  $y \neq 0$ .

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## CONCLUSIONES

### 4.1. Conclusiones y observaciones finales

En el presente trabajo se tuvo como objetivo determinar y mostrar si existe una relación entre el enredamiento y el tiempo de ortogonalidad  $\tau$ , medido con respecto al límite de rapidez cuántico  $\tau_{QSL}$ , de un sistema de dos fermiones indistinguibles no interactuantes con cuatro niveles disponibles, para el cual se emplea como medida de enredamiento la llamada concurrencia fermiónica ( $C_f$ ) [4].

Para la búsqueda de la relación entre  $C_f$  y  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ , observamos primero que la condición de ortogonalidad (ecuaciones (3.1.23) y (3.1.24)) impone restricciones sobre las distribuciones de probabilidad  $\{p_n\}$  que caracterizan el estado, así como relaciones específicas entre el conjunto  $\{p_n\}$  y el tiempo de ortogonalidad  $\tau$ . Dicho tiempo, así como el límite de rapidez  $\tau_{QSL}$ , quedan determinados a partir del conjunto  $\{p_n\}$ , mientras que el enredamiento fermiónico depende de  $\{p_n\}$  y de las fases relativas (vía las fases  $\alpha$  y  $\beta$ ) de los estados en los que se descompone el estado (puro) inicial del sistema. De esta forma, fue necesario primero determinar los  $\{p_n\}$  consistentes con la condición de ortogonalidad, para después analizar el correspondiente valor de  $\tau/\tau_{QSL}$  con los posibles valores de enredamiento  $C_f$ .

En un primer acercamiento analítico al problema, se consideraron algunas distribuciones de probabilidad  $\{p_n\}$  específicas que corresponden a estados donde: todos los eigenestados del hamiltoniano son igualmente probables, todos los niveles de energía son igualmente probables, y los estados del sistema poseen máxima dispersión energética. Para la distribución equiprobable de estados y la distribución equiprobable de energía se vio que los estados pueden tener cualquier valor de enredamiento y para cualquiera que sea éste el tiempo de ortogonalidad no se ve afectado, por lo que para estas distribuciones no se presenta una relación entre  $C_f$  y  $\tau/\tau_{QSL}$ . Para la distribución de máxima de dispersión, los estados son una superposición de dos eigenestados de  $\hat{H}$  igualmente probables, alcanzan el límite de rapidez cuántico de modo que son los más rápidos permitidos por el límite fundamental, y poseen

---

---

enredamiento fermiónico máximo.

En la segunda parte del análisis se exploró numéricamente el espacio de distribuciones  $\{p_n\}$  consistente con la condición de ortogonalidad, lo que permitió hacer un estudio exhaustivo de todas las familias de estados  $|\psi\rangle$  para los cuales  $\langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle = 0$ , y establecer las posibles relaciones entre  $\tau/\tau_{QSL}$  y  $C_f^2$  para cada una de ellas.

Como un resultado conciso y con el objetivo presente, se puede concluir que la relación entre el enredamiento y la aproximación al límite de rapidez cuántico del sistema existe solo en ciertas subfamilias determinadas por valores específicos de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , de los cuales depende la concurrencia fermiónica. Una de estas subfamilias es por ejemplo la familia I con  $\alpha = \beta$ , en la que se puede apreciar que el enredamiento está correlacionado con un mayor tiempo de ortogonalidad. Otro ejemplo corresponde a la familia I con  $\alpha = 0$ , donde observamos el caso opuesto: que un mayor enredamiento está asociado con estados que alcanzan más rápido el estado ortogonal. En otros casos, no obstante, no existe una clara correlación entre  $C_f$  y un mayor o menor  $\tau/\tau_{QSL}$ . Asimismo es importante destacar que al considerar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  aleatoriamente no se observa correlación alguna. Así, en términos generales, podemos afirmar que la relación entre el enredamiento y el tiempo de ortogonalidad en sistemas de partes indistinguibles, no es tan evidente en el caso del sistema de fermiones indistinguibles.

Este trabajo es la continuación de un análisis presentado en [11] en donde no profundizan en todas las familias de soluciones; de hecho los autores solo se enfocan en la familia II, por lo que los resultados aquí presentados son relevantes e innovadores, ya que proporcionan detalles más profundos y desconocidos del sistema.

Dicho todo lo anterior, el análisis desarrollado en esta tesis puede servir como un primer acercamiento para estudiar sistemas enredados más complejos de subsistemas indistinguibles (fermiones), así como todas las características que pueden llegar a tener los estados que poseen enredamiento fermiónico, y a su vez, en un futuro encontrar la forma en la que todas estas propiedades del enredamiento puedan ser aprovechadas en tecnologías cuánticas de vanguardia.

---

# APÉNDICE

---

## 4.2. Método computacional para la familia I

Para generar las probabilidades  $\{p_n\}$  numéricamente para la familia I, se realizó un análisis computacional siguiendo dos métodos. En este apéndice se presentará un breve análisis de cada uno de ellos y el pseudocódigo correspondiente. En ambos métodos, se utilizaron distintas funciones computacionales para generar números aleatorios, con el fin de abarcar la mayor cantidad de posibilidades numéricas y asegurarse de que los resultados obtenidos son suficientemente robustos frente a la distribución computacional elegida.

### 4.2.1. Método I

Las probabilidades  $\{p_n\}$  cumplen las condiciones (3.3.4) y (3.3.5). En este método se generan aleatoriamente 4 de estas probabilidades y a partir de ellas se calculan las demás. Una vez generado el conjunto  $\{p_n\}$  se calculan las cantidades correspondientes para obtener el mapeo de estados en  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ . El pseudocódigo en Python se muestra a continuación:

*#Definición de la función que recibe los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para la concurrencia,  $n = 1$  es el para el cálculo de  $\tau$  (3.3.2) y el número de puntos (estados) que se deseen generar.*

```
def funcion_que_genera_probabilidades(numero_de_puntos, alpha, beta, n):  
#Ciclo que da el número de puntos, en este caso fueron 300,000 para cada gráfica.  
    for i in range numero_de_puntos:  
#Condición que rompe la búsqueda hasta que el progama encuentra las 6 probabilidades.  
        while True:  
#Se generan de forma aleatoria 4 valores para las probabilidades, tomando una distribución uniforme (véase subsección 4.2.3) entre (0, 1).
```

---

---

```

p1 = random.uniform(0, 1)
p3 = random.uniform(0, 1)
p4 = random.uniform(0, 1)
p2 = random.uniform(0, 1)
p5 = 0.5 - p2
suma = p1 + p3 + p4
#Se calcula p6 a partir de la condición (3.3.4) y las p1, p3 y p4 ya generadas:
if suma < 0.5 :
    p6 = 0.5 - suma
    break
#Se calculan las cantidades como la energía media relativa, la concurrencia, la relación  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ 
y se generan las coordenadas  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ .
:
return (C_f^2,  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$ )

```

#### 4.2.2. Método II

Para este método se generan 6 números aleatorios correspondientes a las probabilidades y se normalizan para que cumplan con (3.3.4), (3.3.5). El pseudocódigo en python se muestra a continuación.

#Definición de la función que recibe los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de la concurrencia y el número de puntos (estados) que se deseen generar.

```

def funcion_que_genera_probabilidades(numero_de_puntos, alpha, beta, n):
#Ciclo que da el número de puntos; en este caso fueron 300,000
    for i in range numero_de_puntos:
#Condición que rompe la búsqueda hasta que encuentra las 6 probabilidades
        while True:
#Se generan de forma aleatoria 4 valores para probabilidades  $P_n$  ( $n = 1, \dots, 6$ ) tomando
una distribución uniforme [Ver subsección 4.4.1].
            P1 = random.uniform(0, 1)
            P2 = random.uniform(0, 1)
            P3 = random.uniform(0, 1)
            P4 = random.uniform(0, 1)
            P5 = random.uniform(0, 1)
            P6 = random.uniform(0, 1)
            suma1 = P1 + P3 + P4 + P6

            suma2 = P2 + P5

```

---

#Se calculan las probabilidades  $\{p_n\}$  y  $\{p_m\}$  normalizadas con  $n = 2, 5$  y  $m = 1, 3, 4, 6$

$$p_n = \frac{P_n}{\text{suma}_2}$$

$$p_m = \frac{P_m}{\text{suma}_1}$$

**break**

{

#Se calculan las cantidades como la energía media relativa, la concurrencia, la relación  $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  y generan las coordenadas  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ .

:

}

**return**  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$

Ambas funciones computacionales posteriormente entran a un ciclo que evalúa los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , y finalmente se grafican los resultados. Ambos métodos se graficaron para distintas funciones (como se mostrará a continuación) de las cuales se obtuvieron los mismos resultados, que son los presentados en las figuras 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9.

### 4.2.3. Distribución de probabilidades familia I método I

La función que se muestra en el pseudocódigo es `random.uniform(0,1)`; no obstante se tomaron varias funciones para generar los números aleatorios: Distribución I.- `random.gammavariate(0.5, 1)` (figura 4.1), Distribución II.- `random.random()` (figura 4.2), Distribución III.- `random.expovariate(1)` (figura 4.3). Los resultados gráficos no cambian para el mapeo de estados  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$  al considerar las diferentes distribuciones, no obstante se presentan los histogramas que muestran cómo cambia la distribución de las probabilidades con cada una de las funciones que se utilizaron para generarlas a partir de a las condiciones (3.3.4), (3.3.5).

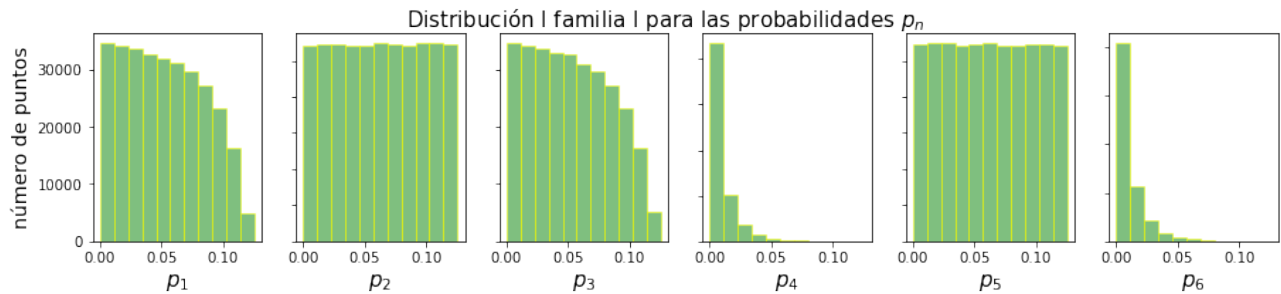


Figura 4.1: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.gammavariate(0.5, 1)` con el método I.



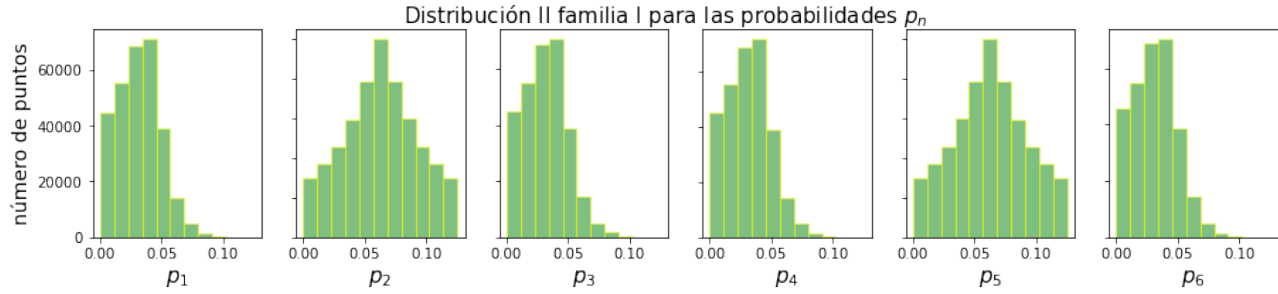


Figura 4.2: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.random()` con el método I.

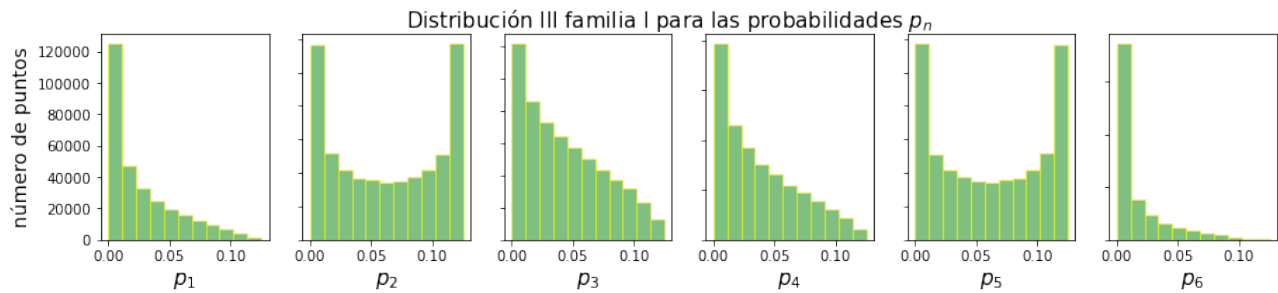


Figura 4.3: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.expovariate(1)` con el método I.

#### 4.2.4. Distribución de probabilidades familia I método II

La función que se muestra en el pseudocódigo es `random.uniform(0,1)`; no obstante se tomaron varias funciones para generar los números aleatorios: Distribución I.-`random.random()` (figura 4.4), Distribución II.- `random.gammavariate(0.5, 1)` (figura 4.5), Distribución III.-`random.expovariate(1)` (figura 4.6). Los resultados gráficos no cambian para el mapeo de estados  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$  al considerar las diferentes distribuciones, no obstante se presentan los histogramas que muestran cómo cambia la distribución de las probabilidades con cada una de las funciones que se utilizaron para generarlas a partir de a las condiciones (3.3.4), (3.3.5).

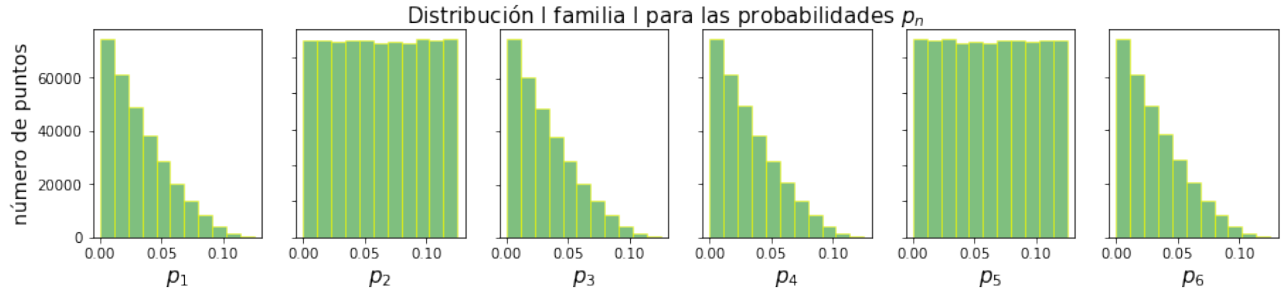


Figura 4.4: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.random()` con el método II.

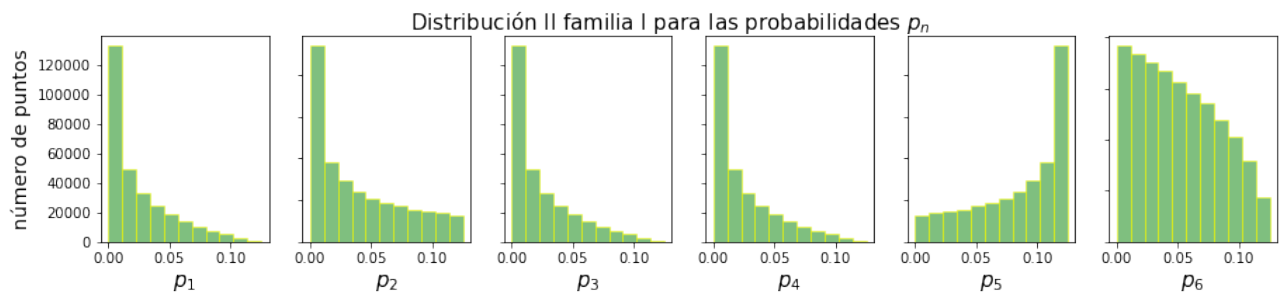


Figura 4.5: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.gammavariate(0.5, 1)` con el método II.

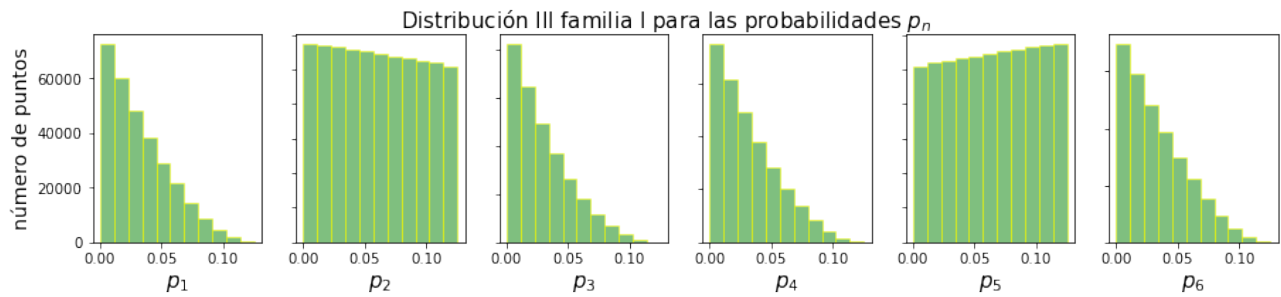


Figura 4.6: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.expovariate(1)` con el método II.

### 4.3. Método computacional para la familia II

Para generar las probabilidades  $\{p_n\}$  numéricamente para la familia II, se realizó el siguiente análisis computacional, que parte de las condiciones de ortogonalidad del sistema (3.3.6) y de la condición de normalización (3.1.19). En esta sección del apéndice se presentará un breve

---

análisis y el pseudocódigo que se utilizó para generar las probabilidades. A diferencia de las otras familias, en esta también se generó de manera aleatoria el valor de  $\cos \phi$ . Al igual que en el análisis de la familia I, se utilizaron distintas funciones computacionales para generar los números aleatorios.

- Método: Como en esta familia el número de variables  $p_n$  libres es 3, pues  $p_1 = p_6$ ,  $p_2 = p_5$  y  $\sum_n p_n = 1$ , en este método se generan en un principio 3 números aleatorios, entre ellos el valor de  $\tau$ . Para este último se genera el número aleatorio  $\cos \phi \in (-1, 1)$  y a partir de (3.3.6) y (3.3.7) (reescritas en términos de  $\{p_n\}$  definidas en (3.1.25)) se despeja una de las probabilidades; si esta cumple con ser positiva, se calcula la última a partir de la condición de normalización, si su valor está en  $[0, 1]$ , el programa rompe el ciclo de búsqueda. Finalmente se calculan las cantidades correspondientes para obtener el mapeo de estados en  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ . El pseudocódigo en Python se muestra a continuación:

#Definición de la función que recibe los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para la concurrencia,  $\tau$  y el número de puntos (estados) que se deseen generar.

```
def funcion_que_genera_probabilidades(numero_de_puntos, alpha, beta):
```

```
#Ciclo que da el número de puntos, en este caso fueron 300,000 para cada gráfica.
```

```
    for i in range numero_de_puntos:
```

```
#Condición que rompe la búsqueda hasta que el programa encuentra las 3 probabili-
dades.
```

```
        while True:
```

```
#Se generan de forma aleatoria el valor para dos probabilidades y para  $\cos \phi = b$ ,
tomando una distribución uniforme [ver subsección 4.3.1] entre  $[0, 1]$  para  $p_1$  y  $p_4$ ,
entre  $(-1, 1)$  para  $b$  (pues para esta familia  $\sin \phi \neq 0$ ).
```

```
            p1 = random.uniform(0, 1)
```

```
            p4 = random.uniform(0, 1)
```

```
            b = random.uniform(-0.99, 0.99)
```

```
# A partir de (3.3.6) y (3.3.7) reescritas en términos de  $\{p_n\}$ , se despeja  $p_2$  y queda
dada por la siguiente ecuación.
```

$$p_2 = -\frac{(1+4p_1(b^2-1))}{(2(b-1))}$$

```
            if 0 < p2 < 1 :
```

$$p_3 = 1 - 2p_1 - 2p_2 - p_4$$

```
                if 0 < p3 < 1 :
```

---

**break**

```
{  
#Se calculan las cantidades como la energía media relativa, la concurrencia, la relación  
 $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  y generan las coordenadas  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ .  
:  
}
```

**return**  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$

### 4.3.1. Distribución de probabilidades familia II

La función que se muestra en el pseudocódigo es `random.uniform`, no obstante se tomaron varias funciones para generar los números aleatorios: Distribución I.- `random.gammavariate(0.5, 1)` (figura 4.7), Distribución II: `random.random()` (figura 4.8), Distribución III: `random.expovariate(1)` (figura 4.9). Los resultados gráficos no cambian para el mapeo de estados  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ , no obstante se presentan los histogramas que muestran cómo cambia la distribución de las probabilidades con cada una de las funciones que se utilizaron para generarlas.

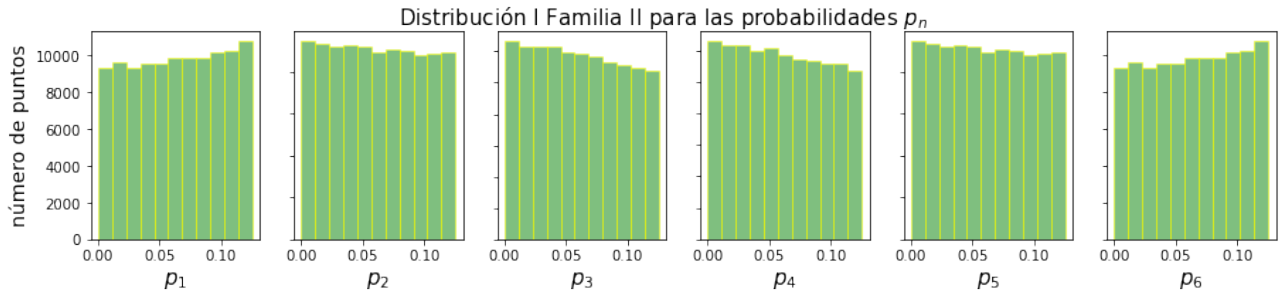


Figura 4.7: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.gammavariate(0.5, 1)` familia II.

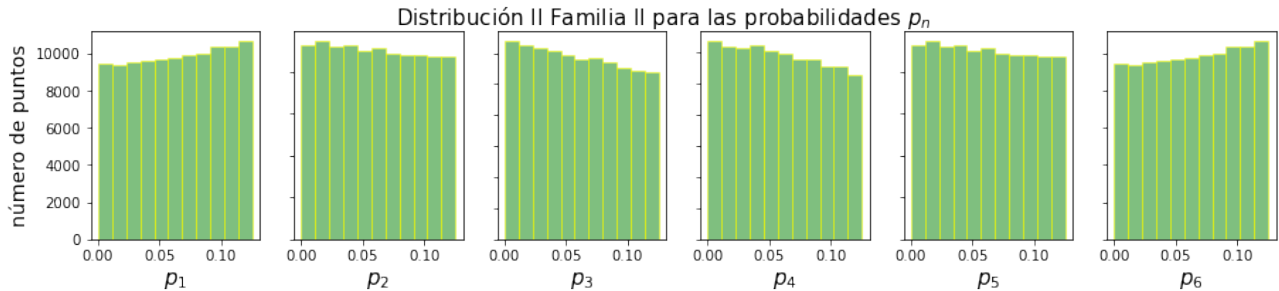


Figura 4.8: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.random()` familia II.

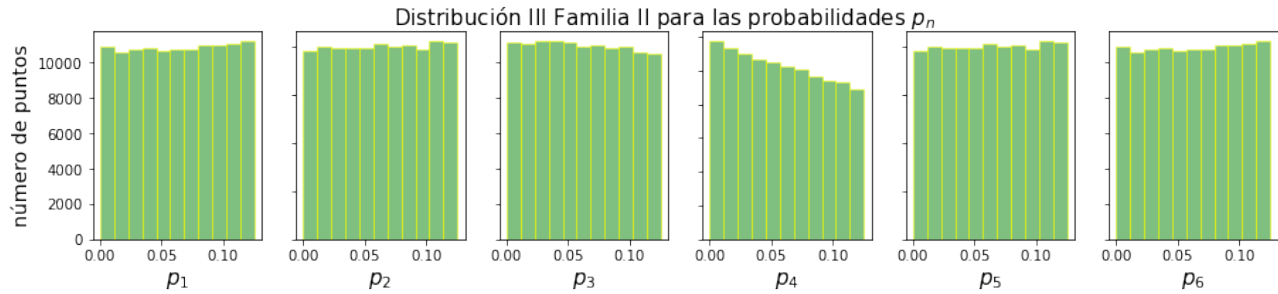


Figura 4.9: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.expovariate(1)` familia II.

## 4.4. Método computacional para la familia III

Para generar las probabilidades  $\{p_n\}$  numéricamente para la familia III se realizó el siguiente análisis computacional, que parte de las condiciones de ortogonalidad del sistema (3.3.11), (3.3.14) y la condición de normalización (3.3.13). En esta sección del apéndice se presentará un breve análisis y el pseudocódigo que se utilizó para generar las probabilidades. Al igual que en análisis anteriores, se utilizaron distintas funciones computacionales para generar los números aleatorios.

- Método: En este método se generan en un principio 4 números aleatorios. A partir de la condición (3.3.14), reescrita en términos de  $\{p_n\}$ , se despeja una de las probabilidades; si esta cumple con estar entre  $[0, 1]$ , se genera otra probabilidad de forma aleatoria y la última se despeja de la condición de normalización. A su vez, se calcula el cociente (3.3.11) y si su valor está entre  $(-1, 1)$  el programa rompe el ciclo de búsqueda. Finalmente se calculan las cantidades correspondientes para obtener el mapeo de estados en  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ . El pseudocódigo en Python se muestra a continuación:

#Definición de la función que recibe los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para la concurrencia,  $\tau$  y el número de puntos (estados) que se deseen generar.

```
def funcion_que_genera_probabilidades(numero_de_puntos, alpha, beta):
    #Ciclo que da el número de puntos, en este caso fueron 300,000 para cada gráfica.
    for i in range numero_de_puntos:
        #Condición que rompe la búsqueda hasta que el programa encuentra las 3 probabilidades.
        while True:
            #Se generan de forma aleatoria 4 valores para las probabilidades, tomando una distribución uniforme entre [0, 1].
```

---

```
p1 = random.uniform(0, 1)
p2 = random.uniform(0, 1)
p6 = random.uniform(0, 1)
```

```
#Condición que nos garantiza que p1 es diferente de p6. (pues y = p1 - p6 ≠ 0)
```

```
if p1 != p6 :
```

```
#Las siguientes ecuaciones provienen de despejar p5 de (3.3.14), que para fines prácticos
está reescrita en términos de las probabilidades pn con la definición dada en (3.1.25). La
notación C, c1, B y B1 es una declaración de variables auxiliares dentro del programa.
```

```
C = ((p1 + p6)(p1 - p6)2 - p22(p1 + p6) + p22(p1 - p6) +
2(p1 + p2 + p6)(p1 - p6)2 - ((p1 - p6)2/2))
c1 = C/(2p1)
B = (p2(p1 + p6) + (p1 - p6)2)
B1 = B/p1
p5 = (B1 - np.sqrt(B12 + 4c1))/2
```

```
#Esta condición nos asegura que p5 esté entre [0, 1]
```

```
if 0 < p5 < 1 :
```

```
#Se define una nueva variable auxiliar d (la suma de las {pn} ya generadas), luego, se
calculan y = p1 - p6 y v = p2 - p5.
```

```
v = p2 - p5
```

```
y = p1 - p6
```

```
#Se da la condición para que se cumpla (3.3.11).
```

```
if -1 < -(v/(2 * y)) < 1 :
```

```
p3 = random.uniform(0, 1)
```

```
cc = p1 + p2 + p6 + p5 + p3
```

```
#Se impone la condición para que la suma de las 5 {pn} con {n = 1, 2, 3, 4, 5} que
se tienen hasta el momento, cumplan la condición de normalización y así se calcula la
última probabilidad despejando de (3.1.19).
```

```
if 0 < cc <= 1 :
```

```
p4 = 1 - cc
```

```
break
```

---

```

{
#Se calculan las cantidades como la energía media relativa, la concurrencia, la relación
 $\frac{\tau}{\tau_{QSL}}$  y generan las coordenadas  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ .
:
}

return  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ 

```

#### 4.4.1. Distribución de probabilidades familia III

La función que se muestra en el pseudocódigo es random.uniform, no obstante se tomaron varias funciones para generar los números aleatorios, Distribución I.- random.gammavariate(0.5, 1) (figura 4.10), Distribución II.- random.random() (figura 4.11), Distribución III- random.expovariate(1) (figura 4.12). Los resultados gráficos no cambian para el mapeo de estados  $(C_f^2, \frac{\tau}{\tau_{QSL}})$ , no obstante se presentan unas gráficas que muestran cómo cambia la distribución de las probabilidades con cada una de las funciones que se utilizaron para generarlas.

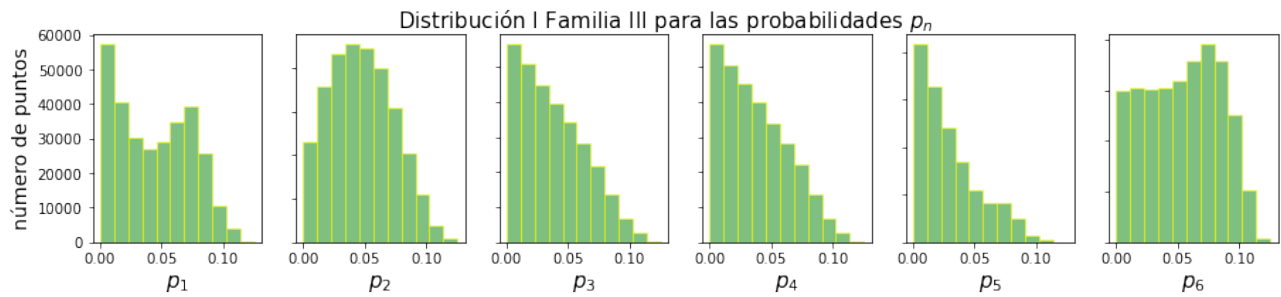


Figura 4.10: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función random.gammavariate(0.5, 1) familia III.

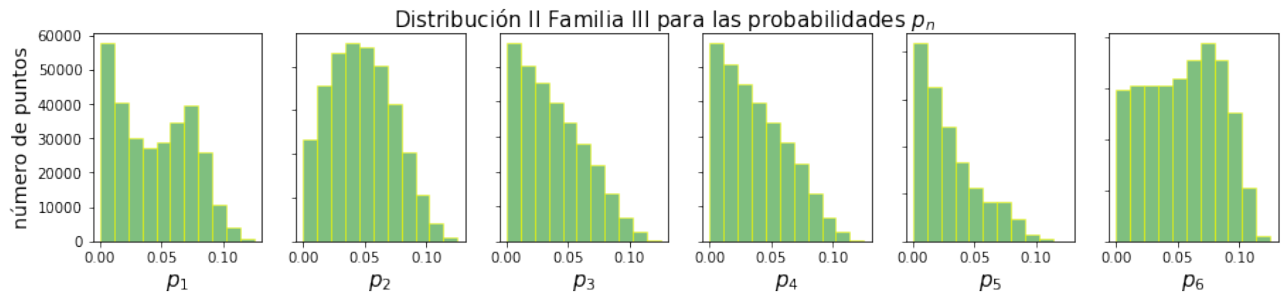


Figura 4.11: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función random.random() familia III.

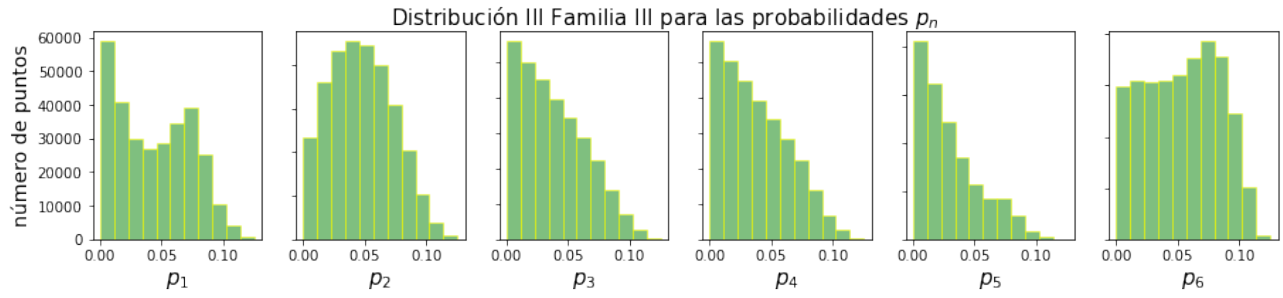


Figura 4.12: Gráfica que muestra la distribución de las  $\{p_n\}$  con la función `random.expovariate(1)` familia III.



---

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] L. Mandelstam and I. Tamm. “The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics.” *J. Phys. USSR* 9, 249-254 (1945).
  - [2] N. Margolus and L. B. Levitin. “The maximum speed of dynamical evolution.” *Physica D* 120, 188-195. (1998)
  - [3] P. Rungta, V. Buzek, Carlton M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn. “Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions”. *Phys. Rev. A*, 64, 042315 (2001)
  - [4] K. Eckert, J. Schliemann, D. Bruß, M. Lewenstein. “Quantum Correlations in Systems of Indistinguishable Particles” *Annals of Physics* 299. (2002)
  - [5] Giovannetti, S. Lloyd and L. Maccone. “The role of entanglement in dynamical evolution.” *Europhys Lett.* 62(5), 615–621. (2003).
  - [6] Fazio R. Amico L., A. Osterloh and V Vedral. “Entanglement in many body systems” *Rev. Mod. Phys.* 80(2),5. (2008).
  - [7] V. C. G. Oliveira, H. A. B. Santos, L. A. M. Torres and A. M. C. Souza. “Entanglement in the dynamical evolution of composite fermionic systems”. *International Journal of Quantum Information*, Vol. 6, No. 2, 379–391. (2008).
  - [8] Lev B. Levitin and Tommaso Toffoli, “Fundamental Limit on the Rate of Quantum Dynamics: The Unified Bound is Tight” *Phys. Rev.* 103, 160502. Rev.A (2009).
  - [9] M. C. Tichy, F. Mintert and A. Buchleitner. “Essential entanglement for atomic and molecular” *J. Phys. Rev. B* 44, 192001 (2011).
  - [10] D. Chruscinski y G. Sarbicki. “Entanglement witnesses: construction, analysis and classification” *J. Phys. A* 47, 483001 (2014).
-

- 
- [11] J. Batle, A. Plastino, and A. R. Plastino “Connection between entanglement and the speed of quantum evolution” *Phys. Rev. A* 72, (2015).
- [12] A. Valdes Hernández, Valdés-Hernández, A.P. Majtey and A. R. Plastino. “Dynamics of entanglement in systems of identical fermions undergoing decoherence”. *Phys. Rev. A* 91, 032313.
- [13] H.F Chau. “Comment on “Connection between entanglement and the speed of quantum evolution and *Phys. Rev. A* 82, 056301, (2015).
- [14] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. "Quantum Metrology" *Phys. Rev.* 96.010401 (2005).
- [15] Michael R. Frey. “Quantum speed limits—primer, perspectives, and potential future direction” *Springer Sciences*, 15(10), 3919–3950. (2016).
- [16] P.A. Bouvrie, A. Valdés Hernández, A. P. Majtey, C. Zander, and A. R. Plastino. ”Entanglement generation through particle detection in systems of identical fermions” *Annals of Physics* 383, 401. (2017)
- [17] Sebastian Dener and Steve Campbell. “Quantum speed limits: from Heisenberg’s uncertainty principle to optimal quantum control.” *IOP Publishing Ltd.* 50 (2017)
- [18] Andreas Buchleitner, Carlos Viviescas and Markus Tiersch. "Basic Concepts of entanglement," *Lect. Notes Phys.* 768. 1 Edition Springer.
- [19] P. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, (1985)
- [20] Franz Schwabl. *Advance Quantum Mechanics*. Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II) (Springer-Lehrbuch) (2008)
- [21] G. Allan, G. bastard. N. Boccara. M. Lanaoo, M. Voos. *Heterojunctions and Semiconductor Superlattices*. Springer-Verlag, Winter School 1985. Pag. :50-152.
- [22] Nielsen M.A. and Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press. Pag. 171-59, (2000).
- [23] R. Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. "Quantum entanglement" *Rev. Mod. Phys.* 81,865, (2009)
- [24] C. Zander, A. R. Plastino, A Plastino and M. Casas. ”Entanglement and the speed of evolution of multi-partite quantum systems” *J.Phys.A: Math.Theor.* 40, 2861-2872 (2007)
- [25] F. Frowis. "Kind of entanglement that speeds up quantum evolution" *Phys. Rev. A* 85, 052127 (2012)
-

- 
- [26] A. Borras, C. Zander, A.R. Plastino, M. Casas, and A. Plastino. "Entanglement and the Quantum Brachistochrone Problem" *Eur. Phys.Lett.* 81,30007 (2008)
- [27] A. Borras, M. Casas, A. R. Plastino, and A. Plastino. "Entanglement and the lower bounds on the speed of quantum evolution" *Phys. Rev. A* 74, 022326 (2006)
- [28] Chen Liu, Zhen-Yu Xu, and Shiqun Zhu. "Quantum-speed-limit time for multiqubit open systems" *Phys. Rev. A* 91, 022102 (2015)
- [29] J. D. Bekenstein. "Energy Cost of Information Transfer". *Phys. Rev. Lett.*, 46:623, 1981.
- [30] S. Lloyd. "Ultimate physical limits to computation". *Nature*, 406:1047, 2000.
- [31] S. Deffner and E. Lutz. "Generalized Clausius inequality for nonequilibrium quantum processes". *Phys. Rev. Lett.*, 105:170402, 2010.
- [32] T. Caneva, M. Murphy, T. Calarco, R. Fazio, S. Montangero, V. Giovannetti, and G. E. Santoro. "Optimal control at the quantum speed limit". *Phys. Rev. Lett.*, 103:240501, 2009.
- [33] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone. "Advances in quantum metrology". *Nat. Photonics*, 5:222–229, 2011.
- [34] M. M. Taddei, B. M. Escher, L. Davidovich, and R. L. de Matos Filho. "Quantum speed limit for physical processes" *Phys. Rev. Lett.*, 110:050402, 2013.
- [35] A. del Campo, I. L. Egusquiza, M. B. Plenio, and S. F. Huelga. "Quantum speed limits in open system dynamics". *Phys. Rev. Lett.*, 110:050403, 2013.
- [36] S. Deffner and E. Lutz. "Quantum speed limit for non-Markovian dynamics". *Phys. Rev. Lett.*, 111:010402, 2013.
- [37] Martin B. Plenio and Shashank Virmani. "An introduction to entanglement measures". *Quant. Inf. Comput.* 7:1-5, 2007.