UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

EL TEOREMA DE COMPLECIÓN DE ATIYAH-SEGAL

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
SAMUEL RESTOY BERGANZA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. NOÉ BÁRCENAS TORRES
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE DEL 2021

Dedicado a Esperanza, Ángeles y Carlos.

Agradecimientos

Primeramente me gustaría agradecer a mi director de tesis y a mis sinodales, por la profesionalidad (¡y paciencia!) que tuvieron al momento de examinar y corregir este trabajo. Quiero agradecer especialmente al doctor Sanchez por sus comentarios y ayuda TeX-nica y al doctor Antolín por sus minuciosas revisiones.
Luego me gustaria agradecer a mis tutores, la doctora Natalia Jonard y el doctor Sergey Antonyan, ya que de no ser por ellos no habría entrado a la maestría ni conocido a mi director de tesis al cual le agradezco por todas las experiencias y oportunidades que me brindó antes, durante y despues de mi estancia en el Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM, el doctor Noé Bárcenas Torres.
Les agradezco a mi familia y amigos que estuvieron conmigo y me apoyaron a pesar de las adversidades *atípicas* que se presentaron a lo largo de esta fase en mis estudios. Particularmente me gustaría agradecer a cierta familia de California y a cierto doctor que llevaba un celular de juguete relleno de chicles a sus clases.
Por último agradezco a los proyectos CONACYT CB 217392 y PAPIIT IA 100119, IN100221.

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de la generalización de Adams, Haeberly, Jackowski y May del teorema de compleción de Atiyah-Segal, el cual es un teorema importante de la topología algebraica equivariante. En topología algebraica se tiene el invariante de la cohomología singular, el cual es un funtor entre espacios topológicos con funciones continuas a anillos graduados con sus homomorfismos, cuando un grupo actua en nuestro espacio es natural preguntarnos por un funtor que codifique apropiadamente la topología del espacio junto con la acción. Una manera un tanto inocente de hacer esto es considerar el espacio orbital, sin embargo se pierde información de la acción y aparte cuando la acción no es libre puede ser que el espacio orbital ni siquiera sea Hausdorff. Cartan en 1950, sin mencionar cohomología equivariante descubre el complejo de Cartan, el cual calcula la cohomología singular equivariante de una variedad de la misma manera que el complejo de De Rham calcula la cohomología singular de una variedad. Borel en 1959 definió la cohomología singular equivariante usando lo que hoy se conoce como *la construcción de Borel*.

Dado un espacio topológico X y un grupo topológico compacto G actuando en el, la construcción de Borel X_G consiste en construir un espacio nuevo con el mismo tipo de homotopía del original en el que la acción del grupo se refleje pero sea libre. Para esto requerimos del uso de la construcción de Milnor para obtener EG como el colímite de los ensambles (joins) de G, este espacio topológico por construcción es un espacio contráctil con una acción libre por la derecha de G, el cual tiene una estructura de G-CW. Por lo que $EG \times X$ tiene el mismo tipo de homotopía de X y al considerar la acción diagonal, será libre. La construcción de Borel consiste en $X_G = (EG \times X)/G$. Dada una teoría de cohomología h_*, se puede construir una teoría de cohomología equivariante considerando $h_{G^*_{Bor}}(X) = h^*(X_G)$. Esto es un buen primer intento no inocente pero es tosco, ya que no puede distinguir si una acción es libre, notemos que $h_{G^*_{Bor}}$ falla en distinguir X y $X \times EG$.
Ya teniendo en mente la teoría K como teoría de cohomología, si bien es natural preguntarnos por clases de isomofismo de haces vectoriales, podemos preguntarnos cómo definir correctamente la noción de G-haces vectoriales

para asi tener una *verdadera* teoría K equivariante. Éste es un mejor invariante que la teoría K equivariante que se obtiene de definirla como la teoría K de la construcción de Borel. Un resultado clásico nos dice que si G actua libremente en X, entonces $K_G(X) \cong K(X/G)$, notemos que con este resultado $K_{GBor}(X) = K(X \times EG/G) \cong K_G(X \times EG))$. Como EG es contráctil, podemos considerar:

$$R(G) \cong K_G(pt) \to K_G(EG) \cong K_{GBor}(pt) \cong K(BG)$$

donde $R(G)$ es el anillo de representaciones de G, el cual es el anillo que forman las clases de isomorfismo de representaciones de dimensión finita de G. El teorema de compleción de Atiyah-Segal calculará $K(BG)$ en términos del anillo de representaciones de G, con mas precisión, como la compleción respecto a un ideal que se conoce como el ideal de aumentación. Este teorema es un vinculo importante entre la compleción algebraica y la compleción geométrica. De acuerdo a Greenless [**17**] (pg.149):

...éste puede verse como una comparacion entre el proceso algebraico de la compleción I-ádica y el proceso geométrico de completar haciendo un espacio libre.

(... can be seen as a comparison between the algebraic process of I-adic completion and the geometric process of completion by making a space free.)

Uno de los problemas de la teoría K compleja es que no se comporta muy bien con complejos infinitos, en la generalización de Adams, Haeberly, Jackowski y May no hay este problema ya que nos llevará a definir una teoría de cohomología con valores en progrupos, la cual estudia conjuntamente la estructura cohomológica asociada a los subcomplejos finitos. Otra ventaja es que obtendremos una estructura mejor comportada, la cual es la compleción I-ádica de anillos que resultan ser anillos topológicos completos.

Aparte observaremos que la prueba de la generalización usa elementos diferentes a la del teorema de compleción de Atiyah-Segal. En el árticulo del teorema de compleción de Atiyah-Segal se usa sutilmente en la página 3 la teoría de la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Algunos ejemplos de algunos resultados que se emplean son que la categoría de Lusternik-Schnirelmann es un invariante homotópico [**34**]; se usa una generalización del resultado de [**33**](pg.2) el cual dice que la longitud R-copa de un espacio es menor o igual a su categoría de Lusternik-Schnirelmann, dicha generalización cambia la longitud R-copa por la n mas pequeña para la que cualquier producto de n elementos de cualquier teoría de cohomología generalizada es 0 [**34**](pg.332). Por último observemos la utilización de la increiblemente útil manera de construir funtorialmente un modelo para EG, la construcción de Milnor.

Si bien en la prueba original de Atiyah y Segal se usa el modelo de Milnor para el espacio universal de G como el límite directo de la sucesión de espacios

$E^n_G = G * G * \cdots * G$ (el ensamble (join) de n copias de G) y $B^n = E^n_G/G$, en la prueba de la versión general solo usamos propiedades de éste. Por último, la prueba del caso general no depende de tantos casos como la prueba del caso particular, en el que primero se prueba el teorema para el caso en que $G = \mathbb{S}^1$, después para $\mathbb{T}^n$, luego usando métodos analíticos para $U(n)$ considerando su toro máximo y por último, encajando G en $U(n)$. Esto lo hacen ya que en su árticulo [**7**] mencionan que se puede probar el resultado de manera directa:

Usando la sucesión espectral de [**13**] *sería en principio posible pasar del caso del punto al caso general X. Sin embargo, como hemos explicado, no se gana nada con este procedimiento porque la prueba que nosotros damos se aplica naturalmente al caso general.*
(Using the spectral sequence of [**13**] *it would in principle be possible to pass from the case of a point to general X. However, as we have just explained, there is nothing to be gained by this procedure because the proof we give applies naturally to the general case.)*

pero Adams, Haeberly, Jackowski y May deciden no prueban de esta manera la generalización del teorema de compleción en [**2**].

Organización

La tesis esta dividida en 3 capítulos y un apéndice de 6 partes.

- El primer capítulo consta de una introducción breve a la maquinaria de la teoría de homotopía equivariante necesaria para presentar y desarrollar construcciones importantes de la teoría K equivariante compleja basándonos en [**17**], [**21**] y [**23**].
- En el segundo capítulo presentaremos brevemente el material necesario de [**4**], [**6**], [**12**], [**13**], [**18**], [**19**] de teoría K equivariante para la generalización del teorema de compleción.
- Por último en el tercer capítulo, estudiamos la prueba de Adams, Haeberly, Jackowski y May de la generalización del teorema de compleción Atiyah-Segal [**2**].

Toda la maquinaria algebraica y un par de construcciones topológicas requeridas son resumidas en el apéndice, el cual contiene los temas de: Construcción de Grothendieck, Localización, Compleción, Teoría de representaciones, Soportes y Pro-objetos.

Índice general

Capítulo 1

Teoría de homotopía equivariante

En este capítulo introduciremos brevemente la maquinaria de la teoría de homotopía equivariante necesaria para presentar y desarrollar construcciones importantes de la K-teoría equivariante compleja basándonos en [**17**], [**21**] y [**23**]. Citando [**17**]“ *El objeto de estudio de la topología algebraica equivariante son los espacios equipados con la acción de un grupo topológico G, esto es [...] espacios equipados con acciones continuas de G[...] y funciones equivariantes (tambien conocidas como G-funciones).*”.

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. *Sea G un grupo topológico, un G-**espacio** es un espacio topológico X junto con una acción continua $G \times X \to X$. Sean X, Y dos G-espacios, una G-**función** (o **función** G-**equivariante**) es una función $\varphi : X \to Y$ que respeta la acción de G, es decir $g\varphi(x) = \varphi(gx)$.*
Definimos la categoría G-Top como la categoría que tiene como objetos a los G-espacios y cuyos morfismos son las G-funciones.

Definición 1.1.2. *Una G-**homotopía** entre G-funciones $X \to Y$, es una homotopía (una función de $X \times I$ en Y) entre dichas funciones que aparte es una G-función donde $I = [0, 1]$ tiene la acción trivial.*

Con esta noción de homotopía, se puede hacer teoría de homotopía equivariante *como* la teoría de homotopía usual. El concepto de G-homotopía resulta ser lo mismo que una trayectoria en el espacio de G-funciones de X a Y.

Definición 1.1.3. *Una G-**equivalencia homotópica** entre dos G-espacios X y Y es una G-función $f : X \to Y$ para la cual existe otra $g : Y \to X$ y G-homotopías tales que $g \circ f \sim Id_X$ y $f \circ g \sim Id_Y$.*

Es natural preguntarnos cuales serán los conceptos cercanos al de equivalencia homotópica en la versión equivariante, como equivalencias débiles y complejos CW. Primero notemos que para cada subgrupo $H \subset G$, podemos considerar el funtor “tomar puntos fijos”$(-)^H : G\text{-}Top \to Top$ el cual manda los objetos como

$$X \mapsto X^H = \{x \in X \mid hx = x \text{ para toda } h \in H\}$$
$$(f : X \to Y) \mapsto f^H = f\mid_{X^H} : X^H \to Y^H$$

De ahora en adelante **siempre pensaremos que los subgrupos de G son cerrados**.

Definición 1.1.4. *Una G-función $f : X \to Y$ es una G-**equivalencia homotópica débil** en G-Top si $f^H : X^H \to Y^H$ es una equivalencia débil en Top para todo subgrupo H de G.*

Por último, mencionamos cuales son las (co)fibraciones ya que como es de esperar, G-Top tiene una estructura de categoría modelo en el sentido de Quillen [**1**, Proposición 1.2.15.].

Definición 1.1.5. *Una G-función $i : A \to X$ es una cofibración si para cualquier G-espacio Y, $f : A \to Y$, $\overline{f} : X \to Y$ G-funciones tales que el triángulo izquierdo conmuta ($f = \overline{f}i$) y $F : A \times I \to Y$ G-homotopía tal que $F(a, 0) = f(a)$ para todo $a \in A$, tenemos que existe $\overline{F} : X \times I \to Y$ G-homotopía tal que:*

1. *$\overline{F} \circ (i \times id_I) = F$ (el triángulo derecho conmuta)*
2. *$\overline{F}(x, 0) = \overline{f}(x)$ para todo $x \in X$ ($\overline{F}$ es una homotopía de $\overline{f}$)*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dd, "i \times Id_I"] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "\overline{f}"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\overline{F}"']
\end{tikzcd}$$

Una manera corta para formular esta defnción es que un morfismo en G-Top es una cofibración si cumple la propiedad de extensión de homotopía equivariante. De esta manera tambien podemos decir que un morfismo en G-Top es una fibración si cumple la propiedad de levantamiento de homotopía equivariante, que es cumplir la propiedad de levantamiento de homotopía para el morfismo inducido por el funtor "tomar puntos fijos"[**1**, Proposición 1.2.15.].

Ahora estudiaremos algunos funtores útiles asociados a G-Top. Para esto siempre supondremos que los espacios son:

1. **compactamente generados**, es decir que un subespacio es cerrado si y solo si su intersección con cualquier subespacio compacto Hausdorff es cerrado.
2. **débilmente Hausdorff**, es decir que la diagonal $X \subset X \times X$ es cerrada.

Esto nos asegura tener un G-homeomorfismo que funciona como *ley exponencial equivariante*

$$Map_G(X \times Y, Z) \cong Map_G(X, Map_G(Y, Z))$$

con X, Y y Z G-espacios y $Map_G(X, Y)$ es el espacio de G-funciones de X en Y con la topología compacto abierta.
Siempre supondremos que **los subgrupos de G son cerrados**. Sea $x \in X$ un punto de un G-espacio, definimos su grupo de isotropía como $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Notemos que si $x \in X^H$, entonces $hx = x$ para toda $h \in H$ y por ende $H \subset G_x$.
Sea H un subgrupo de G, definimos el normalizador de H en G como $N_G H = \{g \in G \mid gH = Hg\}$, en el caso de que se sepa respecto a qué es el normalizador, omitiremos G.

Definición 1.1.6. *Definimos el* ***grupo de Weyl de*** *H como $W(H) = NH/H$.*

Notemos que si X es un G-espacio entonces X^H es un WH-espacio.
En teoría equivariante, las orbitas G/H juegan el rol de los puntos en el espacio orbital (este consiste de órbitas de G con la acción de traslación por H) y el conjunto de G-funciones de $G/H \to G/H$ se puede identificar con $W(H)$. También como los espacios orbitales se obtienen identificando puntos en la misma órbita, podemos darles una estructura de $W(H)$-espacios.
Si X, Y son G-espacios y en X tenemos la acción trivial de G, entonces tenemos:

$$hom_{G\text{-}Top}(X, Y) \cong hom_{Top}(X, Y^G) \text{ y } hom_{G\text{-}Top}(Y, X) \cong hom_{Top}(Y/G, X)$$

Definición 1.1.7. *Sea X un G-espacio y Y un H-espacio con $H \subset G$. Podemos definir una acción de H en $X \times Y$ que manda $(h, x, y) \mapsto (xh^{-1}, hy)$. Al espacio de órbitas $(X \times Y)/H$ se le llama el* ***producto torcido*** *$X \times_H Y$.*

En el caso que fijamos $X = G$, si Y es H-espacio, podemos considerar el G-espacio inducido $G \times_H Y$.
Dado $H \subset G$, consideremos el funtor restricción $res_H^G : G\text{-}Top \to H\text{-}Top$ el cual manda a un G-espacio en el mismo espacio topológico pero restringe la acción a H, este funtor tiene como adjunto izquierdo el funtor $G \times_H - : H\text{-}Top \to G\text{-}Top$, el cual manda a un H-espacio Y en el G-espacio $G \times_H Y$.

Para $X \in G\text{-}Top$ y $Y \in H\text{-}Top$ tenemos:

$$hom_{G\text{-}Top}(G \times_H Y, X) \cong hom_{H\text{-}Top}(X, res_H^G(Y))$$

El funtor restricción tiene como adjunto derecho el funtor

$$Map_H(G, -) : H\text{-}Top \to G\text{-}Top$$

el cual manda un H-espacio Y en el G-espacio $Map_H(G, Y)$ donde la G-acción en $Map_H(G, Y)$ esta definida por $(g * f)(g') = f(gg')$ donde $g, g' \in G$ y $f \in Map_H(G, Y)$, este funtor se le llama el coinducido. Por ende:

$$hom_{H\text{-}Top}(res_H^G(X), Y) \cong hom_{G\text{-}Top}(X, Map_H(G, Y))$$

donde $X \in G\text{-}Top$ y $Y \in H\text{-}Top$. Más aún para G-espacios tenemos G-homeomorfismos entre

$$G \times_H X \cong (G/H) \times X \text{ y } Map_H(G, X) \cong Map(G/H, X)$$

El primer G-homeomorfismo viene dado por $(gh^{-1}, hx) \mapsto (gh^{-1}H, hx) = (gH, hx)$. Para el segundo, primero observemos el G-homeomorfismo entre $Map_H(G, X)$ y $\prod gH \times_H X$ mandando $f : G \underset{H}{\to} X$ en $(g, f(g^{-1}))_{gH \in G/H}$, como cada factor del producto $gH \times_H X$ es homeomorfo a X, tenemos un G-homeomorfismo con $Map(G/H, X)$. Por último notemos que el funtor $(-)^H$: $G\text{-}Top \to Top$ es adjunto derecho de $G/H \times - : Top \to G\text{-}Top$, por ende:

$$hom_{G\text{-}Top}(G/H \times X, Y) \cong hom_{Top}(X, Y^H)$$

con $X \in Top$ y $Y \in G\text{-}Top$.

Tambien se pueden obtener resultados *análogos* a los de este estudio en la versión punteada (o con punto base). Consideramos la categoría $G\text{-}Top_*$ cuyos objetos son G-espacios punteados de tal manera que la acción fija el punto base y los morfismos son G-funciones que mandan el punto base en el punto base.

1.2. Complejos G-CW

Definición 1.2.1. *Un* ***complejo*** *G-CW es un objeto de $G\text{-}Top$ que admite una descomposición de la siguiente manera:*

1. $X = \bigcup_{n=0} X^n$
2. $X^{-1} = \emptyset$, $X^0 = \amalg_{\alpha \in A_0} G/H_\alpha$
3. $X^{n+1} = X^n \cup_\phi (\coprod_{\alpha \in A_n} D^n \times G/H_\alpha)$

para alguna colección de subgrupos cerrados de G $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A_n}$ y alguna $G-$función $\phi : \coprod_{\alpha \in A_n} \mathbb{S}^n \times G/H_\alpha \to X^n$ en donde la acción en $\mathbb{S}^n$ y D^n es la trivial.

En resumen un complejo G-CW es un espacio que resulta de la unión de G- subespacios X^n de tal manera que X_0 es la unión ajena de órbitas y X^{n+1} se obtiene de X^n pegando G-celdas $G/H \times D^{n+1}$ a lo largo de G-funciones de pegado $G/H \times \mathbb{S}^n \to X^n$. Notemos que tal función de pegado se determina por su restricción $\mathbb{S}^n \to (X^n)^H$ y nos permite analizar complejos G-CW desde la teoría de homotopía usual. También podemos definir complejos G-CW relativos como en la teoría de homotopía usual, un complejo G-CW relativo (X, A) es un espacio X que admite una descomposición como la de un complejo G-CW pero en la condición 2. de complejo G-CW consideramos $X^{-1} = A$.
Ya habiendo introducido el concepto anterior, podemos responder un par de preguntas naturales, una de estas es si es necesario que en la definición de G-equivalencia homotópica débil pidamos que se induzca una equivalencia homotópica débil sea para todos los subgrupos de G. La respuesta a esta pregunta es que no es necesario, solo obtendríamos una teoría de homotopía distinta en la que tenemos menos $G/H \times \mathbb{S}^n$ céldas. Otra pregunta natural es porque no mejor considerar $G \times_H D(V)$ y $G \times_H \mathbb{S}(V)$ con V una H-representación en la definición de complejo G-CW en vez de $\mathbb{S}^n \times G/H$ y $\mathbb{D}^n \times G/H$. Citando [**1**, p.3] "Esto proviene de un teorema (considerablemente no trivial) de que estos espacios pueden ser triangulados en términos de $G/H \times D^{n+1}$ y $G/H \times \mathbb{S}^n$ [**31**]. Este es uno de varios resultados de triangulaciones probados en los 70's que ahora se asumen sin mencionar, [...]".

Definición 1.2.2. *Una G-función entre dos complejos G-CW $f : X \to Y$ se dice que es **celular** si para toda $n \geq 0$ tenemos que $f(X^n) \subset Y^n$.*

Definición 1.2.3. *Denotaremos por G-CW a la categoría cuyos objetos son complejos G-CW y cuyos morfismos son las G-funciones celulares. Analogamente definimos las categorías G-CW_* y G-$CW^{[2]}$, la primer categoría tiene como objetos a los complejos G-CW con punto base y como morfismos a las G-funciones celulares que mandan puntos base en puntos base. G-CW^2 tiene como objetos complejos G-CW relativos y como morfismos G-funciones de parejas.*

Hay una versión también de la ley exponencial aquí:

$$hom_{G\text{-}CW_*}(X \wedge Y, Z) \cong hom_{G\text{-}CW_*}(X, hom_{G\text{-}CW_*}(Y, Z))$$

con $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$. De hecho hay relaciones y adjunciones parecidas a las del caso equivariante. Aqui también tenemos noción de homotopía entre G-funciones las cuales van a dejar fijo el punto base, o equivalentemente, G-funciones punteadas entre $X \wedge I^+ \to Y$ donde $X \wedge I^+ = X \times I/\sim$ donde colapsamos la línea (x_0, t) del punto base a un punto.

Un funtor que nos interesa de esta categoría es el funtor

$$(-)_+ : G\text{-}Top \to G\text{-}Top_*$$

el cual le pone a un G-espacio un punto disjunto y define la acción trivialmente en dicho punto.
Hay versiones equivariantes de definiciones y teoremas clásicos de la teoría de homotopía, entre los que destacan las propiedades de extensión de homotopías y levantamiento en complejos G-CW, teorema de Whitehead y aproximación celular con una unicidad salvo equivalencia G-homotópica.

Teorema 1.2.4 (Equivariante de Whitehead)**.** [**17**, Teorema 3.2.] [**1**, Teorema 1.2.16]
Sean Y, Z dos complejos G-CW, si $e : Y \to Z$ una equivalencia homotópica débil en G-Top, entonces $e : Y \to Z$ es una G-equivalencia homotópica.

Teorema 1.2.5 (G-aproximación celular)**.** [**17**, Teorema 3.4.]
Sean (X, A) y (Y, B) parejas de G-CW relativos, (X', A') un subcomplejo de (X, A) y $f : X \to Y$ cuya restricción a (X', A') es tal que $f(X'^n) \subset Y^n$ y $f(A'^n) \subset B^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces f es homotópica a una función $f' : (X, A) \to (Y, B)$ tal que $f'(X^n) \subset Y^n$ y $f'(A^n) \subset B^n$ para toda n.

Para finalizar, notemos que dado un subgrupo $H \subset G$, el funtor restricción G-$Top \to H$-Top se restringe a un funtor G-$CW \to H$-CW.

Capítulo 2

Teoría K equivariante

En este capítulo realizaremos una introducción breve del material necesario de [**4**], [**6**], [**12**], [**13**], [**18**], [**19**] de teoría K equivariante para el teorema de compleción.

2.1. G-haces vectoriales

Definición 2.1.1. *(G.Segal): Un G-**haz vectorial** sobre un G-espacio X es un G-espacio E junto con una G-función suprayectiva $p : E \to X$ tal que:*

1. *$p : E \to X$ es un haz vectorial complejo sobre X.*
   Es decir, las fibras $E_x = p^{-1}(x)$ para todo $x \in X$ son un espacio vectorial complejo de dimensión finita; y dicha función es localmente trivial.
2. *Para cualquier $g \in G$ y $x \in X$, la acción del grupo $g : E_x \to E_{gx}$ es un homomorfismo de espacios vectoriales.*

*Al espacio E le diremos **espacio total** y a X le diremos **espacio base**.*

Definición 2.1.2. *Un **homomorfismo de G-haces vectoriales sobre** X donde $p : E \to X$ y $q : E' \to X$ son G-haces vectoriales sobre X, es una G-función $f : E \to E'$ que es lineal en fibras y tal que hace al siguiente diagrama conmutar (i.e. $qf = p$)*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

*En el caso en el que el homomorfismo de G-haces vectoriales anterior sea un isomorfismo lineal en fibras, diremos que es un **isomorfismo de G-haces vectoriales**.*

Esto nos permite darle una estructura de categoría a los G-haces vectoriales sobre X.

Definición 2.1.3. *Dado un espacio vectorial complejo E y un G-espacio X, podemos construir un G-haz vectorial $X \times E \to X$ dado por la proyección. A un G-haz vectorial isomorfo a uno de esta forma le diremos **trivial**.*

Ejemplo 2.1.1.

1. [**15**, Ejemplo 13.4.1] Sea E un G-haz vectorial sobre un espacio B que es trivial como haz vectorial, por lo que $p : E \to B$ es isomorfo a $pr_B : B \times C \to B$, donde C es un espacio vectorial complejo. Para este G-haz vectorial producto, tenemos la acción $G \times B \to B$ y el producto $B \times C$ tiene una G-acción de la forma:
$$s(b, c) = (sb, J(s, b)c)$$
donde $J : G \times B \to \mathrm{End}(C)$
2. [**13**] Si E es una variedad diferenciable y G un grupo de Lie que actua suavemente en E, entonces el haz tangente complejificado de E, $(TE) \otimes \mathbb{C}$, es un G-haz vectorial.
3. [**13**] Si E es un haz vectorial sobre un espacio B, entonces su k-ésimo producto tensorial $E \otimes \cdots \otimes E$ es un $\mathcal{S}_k$-haz vectorial sobre X, donde $\mathcal{S}_k$ es el grupo simétrico el cual actua permutando los factores del producto y X es un $\mathcal{S}_k$ espacio trivial.
4. [**13**] Sea E un G-haz vectorial sobre el espacio de clases laterales G/H con H un subgrupo de G. Entonces la fibra E_{id} de la clase lateral de la identidad es un H-módulo que veremos que esta esta determinado y determina completamente a E. La acción de G en E induce una función $G \times E_{id} \to E$, la cual pasa al cociente $\alpha : G \times_H E_{id} \to E$ (donde $G \times_H E_{id}$ es espacio orbital de $G \times E_{id}$ bajo la accion de H dada por $(h, g, \xi) \mapsto (gh^{-1}, h\xi)$). Si G actua en $G \times_H E_{id}$ por $(g, g', \xi) \mapsto (gg', \xi)$, entonces α es un G-homeomorfismo, la inversa de esta función se construye en [**13**, p.130]. Con esto se puede concluir que un G-haz vectorial sobre G/H es de la forma $G \times_H E_{id}$ con E_{id} un H-módulo. Conversamente tambien se prueba en [**13**, p.130] que si H es localmente compacto y E_{id} un H-módulo, entonces $G \times_H E_0$ es un G-haz vectorial.

Definición 2.1.4. *Una **sección de un G-haz vectorial** $p : E \to X$ es una función $s : X \to E$ tal que $ps = Id_X$. En el caso que la **sección** sea una G-función, le diremos **equivariante**.*
Las secciones forman un espacio vectorial que denotaremos por ΓE, las secciones equivariantes tambien forman un espacio vectorial el cual denotaremos

por $\Gamma^G E$. Notemos que $\Gamma^G E$ es un subespacio vectorial de ΓE que consta de los puntos fijos de ΓE bajo la acción de G por $gs(x) = s(g(x))$.

Ejemplo 2.1.2.

1. Dado un G-subespacio Y de X y $p : E \to X$ un G-haz vectorial, si consideramos la restricción a Y $p : p^{-1}(Y) \to Y$, este forma un G-haz vectorial sobre Y al cual llamaremos la **restricción de E a Y**, el cual denotaremos por $E \mid Y$.
2. Dados dos G-haces vectoriales $p : Y \to X$ y $p' : Y' \to X'$, podemos formar el G-**haz producto** como el G-haz vectorial sobre $X \times X'$ considerando la G-función producto $p \times p' : Y \times Y' \to X \times X'$ donde la acción en $Y' \times Y$ y $X' \times X$ es $g(z, z') = (gz, gz')$.
3. Dada una G-función $f : Y \to X$ y un G-haz vectorial sobre X, $p : E \to X$, definimos el G-haz inducido **pullback (jalado o pa'atraseado) de E respecto a f** como el G-haz vectorial $f^*(p) : f^*(E) \to Y$ donde:
$$f^*(E) = \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\}$$
La acción de G en $f^*(E)$ es $g(y, e) = (gy, ge)$ y esta bien definida ya que como tanto p como f son G-funciones. Si $y \in Y$, su fibra se puede identificar con la fibra $E_{f(y)}$ de $f(y)$, lo cual es una estructura natural.
$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle f^*p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$
Notemos que si $f : Y \to X$ y $g : Z \to Y$, entonces
$$g^* f^*(E) \cong (fg)^*(E)$$
.
4. Dados dos G-haces vectoriales $p : E \to X$ y $q : F \to X$ sobre X, podemos formar el G-haz vectorial **suma directa (o suma de Whitney)** $E \oplus F$ considerando
$$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x.$$
Notemos particularmente que $E \oplus F$ es isomorfo como G-haz vectorial a $F \oplus E$ y que si D es un G-haz vectorial sobre X, entonces $(E \oplus F) \oplus D$ es isomorfo a $E \oplus (F \oplus D)$.
Si bien no es clara como es la topología de este haz, hay otra manera

de describirlo que incluye su topología, la cual es definirlo como el pullback del haz producto $\Delta^*(p \times q)$ con $\Delta : X \to X \times X$.

5. Dados dos G-haces vectoriales E y F sobre X, podemos formar el G-haz vectorial **producto tensorial** $E \otimes F$ considerando

$$(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x.$$

También notemos que si D es un G-haz vectorial sobre X, entonces $E \otimes (D \otimes F)$ es isomorfo a $(E \otimes D) \otimes F$ y $E \otimes (D \oplus F)$ es isomorfo a $(E \otimes D) \oplus (E \otimes F)$.
Como en el caso del haz suma directa, tambien hay una manera de describir al haz producto tensorial que incluye su topología, la cual es definirlo como el pullback del haz producto tensorial externo. El haz producto tensorial externo se define de manera muy parecida al haz producto, sin embargo hay consideraciones conjuntistas que se deben tomar. Referimos al lector interesado a [**16**, Capítulo 3] y [**20**, Capítulo 12] donde se desarrollan con mayor profundidad.

6. Dados dos G-haces vectoriales E y F sobre X, podemos formar el G-haz vectorial $Hom(E; F)$ considerando

$$(Hom(E; F))_x = Hom(E_x; F_x).$$

Particularmente los homomorfismos entre E y F forman un espacio vectorial el cual es isomorfo a $\Gamma^G Hom(E; F)$.

De ahora en adelante supondremos que G es un grupo compacto. Notemos que en el caso de que X tambien sea compacto y tanto X como G Hausdorff, tenemos que la acción es **propia** *en cualquier sentido*, no sólo en el sentido de Bourbaki dada en [**42**, p.72]. Esto se debe a que en [**46**] se prueba que cuando G y X son localmente compactos, es equivalente que la acción sea propia en el sentido de Bourbaki, que sea propia en el sentido de Cartan junto con que X/G sea Hausdorff y que es propia en el sentido de Palais. Al ser tanto X como G espacios compactos Hausdorff, son localmente compactos y coinciden los sentidos de acción propia. Por esto mismo únicamente mencionaremos la definición de cuando una acción de un grupo G en un espacio topológico X es (Bourbaki) propia, esta es cuando la función $\delta : G \times X \to X \times X$ dada por $\delta((g, x)) = (gx, x)$ es perfecta, es decir una función cerrada con fibras compactas.
Antes de empezar la prueba daremos una definición de un concepto que aparecerá en esta prueba.

Definición 2.1.5. *Sea X un G-espacio y H es un subgrupo de G. Diremos S es una H-**rebanada** si es un conjunto H-invariante tal que GS es abierto en X, S es cerrado en GS y siempre que $gS \cap S \neq \emptyset$, se tiene que $g \in H$.*

Lema 2.1.6. *Si E es un G-haz vectorial sobre un G-espacio compacto X y A es un G-subespacio cerrado de X, entonces una sección equivariante de $E \mid A$ se puede extender a una sección equivariante de E.*

Demostración.

Consideremos una cubierta de G-vecindades trivializantes $\{V_x\}_{x\in X}$, como X es un espacio compacto y Hausdorff entonces es localmente compacto por lo que para toda $x \in X$ existe una G-vecindad U_x tal que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset V_x$. Al ser X compacto, podemos cubrirlo con una cantidad finita de estos, digamos $\{U_{x_i}\}_{i\leq m'}$. Como tanto X como G son espacios compactos Hausdorff, entonces la acción es propia [**42**, p.72] y tenemos garantizada la existencia de G_{x_i}-rebanadas, S_{x_i} [**48**]. Como U_x es una G-vecindad, entonces tenemos el abierto $GS_{x_i} \subset U_{x_i} \subset \overline{U_{x_i}}$. La cerradura de U_x es un conjunto cerrado en un compacto, por lo que cada uno es compacto y podemos cubrirlo con una cantidad finita de GS_{x_i} digamos $\{GS_{x_i}\}_{i\leq m}$.
Denotemos a $A_i = A \cap GS_{x_i}$, al ser $A \cap GS_i \subset U_x \subset V_x$, tenemos trivializaciones locales

$$hs : A_i \to A_i \times \mathbb{C}^n[\rho]$$
$$A_i \xrightarrow{s|_{A_i}} s(A_i) \subset p^{-1}(A_i) \cong A_i \times \mathbb{C}^n[\rho]$$

de tal manera que $hs = (id_{A_i}, f(a))$ con $f : A_i \to \mathbb{C}^n[\rho]$ donde $\mathbb{C}^n[\rho]$ es $\mathbb{C}^n$ con la representación de G $\rho : G \to \mathbb{C}^n$. La función $\tilde{f}_i : A_i \cap S_i \to \mathbb{C}^n[\rho \,|]$ con $\rho \,|: G_{x_i} \to GL(n,\mathbb{C})$ admite una extensión a $\tilde{F} : S_i \to \mathbb{C}^n[\rho \,|]$ ya que podemos extenderla con el teorema de extensión de Tietze-Gleason [**43**] ya que primero se puede extender a $\overline{A_i \cap S_i}$, el cual es un cerrado en un espacio normal, cuya restricción a $A_i \cap S_i$ lo extiende. Esta función $\tilde{F}_i : S_i \to \mathbb{C}^n[\rho \,|]$ la podemos extender a $F_i : GS_i \to \mathbb{C}^n[\rho]$ de la única manera posible: $F_i(gx) = g\tilde{F}_i(x)$.
Ahora notemos que ya que la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es suprayectiva y continua, entonces X/G es compacto al ser imagen continua de un espacio compacto y por ende paracompacto. Por lo que para estos conjuntos $\{GS_{x_i}\}_{i\leq m}$ existe una partición de la unidad invariante $\sigma_i : GS_{x_i} \to [0, 1]$ subordinada por la [**42**, Proposición 5.2.1].

Podemos obtener una sección global s'_i de E con cualquiera de las seccíones anteriores pegándolas continuamente con la sección cero usando las partición de la unidad como sigue

$$s_i'(x) = \begin{cases} \sigma_i(x)F_i(x) & \text{si } x \in GS_{x_i} \\ 0 & \text{si } x \notin GS_{x_i} \end{cases}$$

si consideramos la sección $\hat{s} = \sum_i^m s_i'$ tenemos una sección de E que extiende a s pero bien puede ser que la sección que obtuvimos no sea equivariante. Para terminar, como estamos en el caso que G es compacto, existe la integral de Haar (sección 0.3)[**47**] para promediar por la orbita la sección extendida sobre X y obtener una extensión equivariante con

$$\hat{s}^G(x) = \int_G \hat{s}(gx)dg$$

, ya que

$$\hat{s}^G(hx) = \int_G s(ghx)dg = \int_G hs(gx)dg = h\int_G s(gx)dg = h\hat{s}^G(x)$$

. □

Lema 2.1.7. *Sea A un G-subespacio cerrado de un G-espacio compacto X, E y F dos G-haces vectoriales sobre X. Entonces cualquier isomorfismo $s : E \mid A \to F \mid A$ se extiende a un isomorfismo $t : E \mid U \to F \mid U$ para U un G-abierto que contiene a A.*

Demostración.

Sea s una sección equivariante de $Hom(E \mid_A; F \mid_A) = Hom(E, F) \mid_A$. Si aplicamos el lema 2.1.6, obtenemos una extensión equivariante t a X de la sección s de $Hom(E \mid_A; F \mid_A)$. Sea U el G-subespacio de X que consta de los puntos x para el cual t_x es un isomorfismo. Como $GL(n, \mathbb{C})$ es abierto en $End(\mathbb{C}^n)$, U es abierto y contiene a A.

□

Proposición 2.1.8. *Si X es un G-espacio compacto, Y un G-espacio y f_t una G-homotopía entre dos funciones $f_0, f_1 : X \to Y$. Si E es un G-haz vectorial sobre Y, entonces los G-haces vectoriales $f_0^*(E)$ y $f_1^*(E)$ son isomorfos como G-haces vectoriales.*

Demostración.

Sea $f : X \times I \to Y$ la G-homotopía tal que $f(X, t) = f_t(X)$ y $\pi : X \times I \to X$ la proyección. Aplicamos el lema 2.1.7 a los G-haces vectoriales $f^*(E)$,$\pi^* f_t^* E = (f\pi)^* E$ junto con el subespacio $X \times \{t\}$ de $X \times I$, como X es compacto tenemos que a lo largo de un intervalo abierto que contiene a t la clase de isomorfismo de f_t^*E y $\pi^* f_t^* E$ son la misma, es decir que la clase de isomorfismo de f_t^*E es una función localmente constante de t. Como I es conexo, entonces debe ser constante, por lo que $f_0^*E \cong f_1^*E$.

□

Ejemplo 2.1.3. (apretón/clutching)

Sea $X = X_1 \cup X_2$ y $A = X_1 \cap X_2$ donde X_1 y X_2 son G-subespacios de X, E_1 y E_2 G-haces vectoriales sobre X_1 y X_2 respectivamente y $\alpha : E_1 \mid A \to E_2 \mid A$ un isomorfismo de G-haces vectoriales. Entonces hay un único G-haz vectorial $E = E_1 \cup_\alpha E_2$ sobre X con isomorfismos $E \mid X_1 \cong E_1$, $E \mid X_2 \cong E_2$ compatibles con el isomorfismo α.

Para esto definiremos E como el G-haz vectorial $E_1 \cup_\alpha E_2$ sobre X como $E_1 + E_2/\sim$ donde $e_1 \in E_1 \mid A$ relacionado con $\alpha(e_1)$ y $+$ denota la suma ajena. Al identificar X con el cociente $X_1 + X_2$, obtenemos una proyección natural $p : E_1 \cup_\alpha E_2 \to X$ y $p^{-1}(x)$ tiene una estructura de espacio vectorial. Ahora veremos que es localmente trivial, como

$$(E_1 \cup_\alpha E_2) \mid (X - A) = (E_1 \mid (X_1 - A)) + (E_2 \mid (X_2 - A))$$

entonces tenemos trivialidad local en los $x \notin A$ debido a la de E_1 y la de E_2. Ahora verificamos la trivialidad para los $a \in A$. Sea V_1 una vecindad cerrada de a en X para la cual E_1 es trivial por lo que tenemos un G-isomorfismo:

$$\theta_1 : E_1 \mid V_1 \to V_1 \times \mathbb{C}^n$$

Si restringimos a A obtenemos un G-isomorfismo

$$\theta_1^A : E_1 \mid (V_1 \cap A) \to (V_1 \cap A) \times \mathbb{C}^n$$

Sea $\theta_2^A : E_2 \mid (V_1 \cap A) \to (V_1 \cap A) \times \mathbb{C}^n$ el isomorfismo correspondiente. Por el Lema 2.1.7, esto lo podemos extender a un isomorfismo

$$\theta_2 : E_2 \mid V_2 \to V_2 \times \mathbb{C}^n$$

donde V_2 es una vecindad de a en X_2. El par θ_1, θ_2 definen el isomorfismo

$$\theta_1 \cup_\alpha \theta_2 : (E_1 \cup_\alpha E_2) \mid (V_1 \cup V_2) \to (V_1 \cup V_2) \times \mathbb{C}^n$$

por lo que $E_1 \cup_\alpha E_2$ es localmente trivial.
Por último notemos que $g : (E_1 \cup_\alpha E_2)_x \to (E_1 \cup_\alpha E_2)_{gx}$ es un homomorfismo de espacios vectoriales.

Observemos que la demostración de la proposición anterior 2.1.8 es independiente del grupo G mientras que en el ejemplo 2.1.3 del clutching dependemos de que G sea compacto para poder usar el lema 2.1.7. La falta de compacidad en este último se discute más en [**19**] antes del lema 3.7. en su versión mas simple en la que se busca extender un G-haz de un subespacio cerrado al espacio completo de tal manera que el primer haz sea un sumando del segundo y en realidad se menciona que cuando G no es compacto puede ser el caso que la teoría K equivariante no sea una teoria de cohomología. En principio notemos que cuando se probó el lema 2.1.6 se uso fuertemente la compacidad de G con la existencia de la medida de Haar para promediar.

Ahora demostraremos una proposición clásica de la teoría de haces vectoriales en nuestro contexto equivariante. La prueba tambien resultara independiente de G al igual que en la construcción del ejemplo anterior 2.1.3.

Proposición 2.1.9. *Si $f : E \to F$ es un homomorfismo de G-haces vectoriales sobre X para el cual $f_x : E_x \to F_x$ es un isomorfismo para todo $x \in X$, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración.
Como f es biyectiva, para ver que es un isomorfismo tenemos que probar que es un homeomorfismo. Restringir un homeomorfismo a una vecindad induce un homeomorfismo entre la vecindad y su imagen, considerando esto podemos restringirnos a los casos triviales en los que tenemos una G-función $f : X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$ que es un isomorfismo en la fibra. Ya que f manda la fibra de x en la fibra de x de tal manera que es un isomorfismo lineal, entonces f es de la forma $(x, y) \mapsto (x, g(x)y)$ donde $x \in X$, $y \in \mathbb{R}^n$ y para algún $g : X \to GL_n(\mathbb{R})$. Notemos que la función tomar inverso en $GL_n(\mathbb{R})$, ${}^{-1} : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ es continua, por lo que $(x, y) \mapsto (x, (g(x))^{-1}y)$ es continua, y esta es la inversa de g. Esto concluye la demostración ya que f es biyectiva, continua con inversa continua.

□

2.2. Teoría K equivariante

Definición 2.2.1. *Sea X un G-espacio compacto, la suma de G-haces vectoriales (suma de Whitney) dota a las clases de isomorfismo de haces vectoriales, la cual denotaremos por $Vect_G(X)$, con una estructura de semigrupo abeliano, al cual podemos aplicarle la construcción de Grothendieck. Al grupo obtenido se le llama **la teoría K equivariante de X** y se le denotará por $\boldsymbol{K_G(X)}$. El producto tensorial le da a $K_G(X)$ una estructura de anillo conmutativo.*

Propiedades

- Si $\phi : Y \to X$ es una G-función entre G-espacios, el homomorfismo de semi-anillos $Vect_G(X) \to Vect_G(Y)$ que mapea $E \mapsto \phi^* E$ induce un morfismo de anillos $\phi^* : K_G(X) \to K_G(Y)$. K_G es un funtor contravariante entre la categoría de G-espacios y la categoría de anillos conmutativos ya que el pullback preserva sumas directas.
- Si $\alpha : H \to G$ es un homomorfismo, este induce un morfismo de restricción $\alpha^* : K_G(X) \to K_H(X)$.
- Mas generalmente, si $\phi : Y \to X$ es una función entre un H-espacio a un G-espacio compatible con el homomorfismo α ($\phi(hy) = \alpha(h)\phi(y)$), entonces induce $\phi^* : K_G(X) \to K_H(Y)$.
- En el caso G=1, escribiremos $K(X)$ en vez de $K_1(X)$ ya que coincide con la teoría K compleja.

Ejemplo 2.2.1.

1. Si $X = \{*\}$, un G-haz vectorial sobre X corresponde a un espacio vectorial complejo $V \cong \mathbb{C}^n$ sobre el cual G actua linealmente (un G-módulo). En este caso la clase de isomorfismo del G-módulo V esta dada por el conjunto de G-módulos de la misma dimensión que v para los cuales hay un isomorfismo lineal entre estos. Por lo que podemos identificar a una clase de isomorfismo en $Vect_G(*)$ con una representación de G en V $\rho_V : G \to GL(V)$. Tambien podemos identificar a una representación de G en un espacio vectorial complejo de dimensión finita V con una clase $[V]$de $Vect_G(X)$. Esto nos da una biyección entre $Vect_G(X)$ y las representaciones complejas de dimensión finita en G. Por lo que $K_G(*) \cong R(G)$.
2. Sea H un subgrupo de G, como la categoría de G-haces vectoriales sobre G/H es equivalente a la categoría de H-módulos (esto se estudió en 4. de los Ejemplos 2.1.1), entonces tenemos que $K_G(G/H) \cong R(H)$.
3. Si X es un H-espacio compacto, podemos formar un G-espacio compacto mediante $(G \times X)/H := G \times_H X$. Hay un encaje $\phi : X \to G \times_H X$ que identifica a X con el H-subespacio $H \times_H X$ de $G \times_H X$. La restricción ϕ^* es una equivalencia de G-haces vectoriales en $G \times_H X$ y H-haces vectoriales sobre X, con inversa la extensión $E \mapsto G \times_H E$. Notemos que este ejemplo implica el anterior ya que si $X = *$ entonces $K_G(G/H) = K_G(G \times_H \{*\}) \cong K_H(\{*\}) \cong R(H)$.

Notemos que por la Proposición 2.1.8, K_G es un funtor en la categoría de homotopía. La siguiente proposición que demostraremos relaciona a la teoría K usual con la teoría K equivariante, útil para cálculos.
De ahora en adelante **supondremos que G es un grupo compacto de Lie**.

Proposición 2.2.2. *Si G actúa libremente en X, entonces la proyección orbital $pr : X \to X/G$ induce el isomorfismo canónico de anillos*

$$pr^* : K(X/G) \xrightarrow{\cong} K_G(X)$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que si tenemos un G-haz vectorial $p : E \to X$, entonces podemos formar el haz vectorial $E/G \to X/G$, no es trivial ver que es localmente trivial pero este es el caso cuando G es un grupo compacto de Lie [**38**, Capítulo 7]. Por lo que tenemos un homomorfismo de anillos $K_G(X) \to K(X/G)$ y su inverso es el pullback respecto a la proyección orbital.

$\square$

Definición 2.2.3. *Sea (X, x_0) un G-espacio compacto basado, definimos la* ***teoría K equivariante reducida*** *como*

$$\tilde{K}_G(X) = Ker(K_G(X) \to K_G(x_0))$$

Como se menciona en [**13**, p.134] y en [**17**, p.143], tambien se puede construir $\tilde{K}_G(X)$ de la siguiente manera: relacionamos dos G-haces vectoriales si existen dos G-módulos tales que al sumarlos (directamente) cada uno con uno de los G-haces vectoriales, entonces son isomorfos. En este caso se dice que los haces son **establemente equivalentes** y al ser esto una relación de equivalencia, se puede identificar a las clases de equivalencia de G-haces vectoriales con un subgrupo de $K_G(X)$ que de hecho es $\tilde{K}_G(X)$.

Dados G-espacios compactos X, Y y una G-función $f : X \to Y$, podemos considerar la sucesión:

$$K_G(X) \leftarrow K_G(Y) \leftarrow K_G(C_f)$$

la cual es exacta debido a que la composición $X \to C_f$ es nulhomotópica y que todo haz sobre Y que se vuelve cero en $K_G(X)$ se puede ver como la imagen de un haz sobre C_f considerando un apretón correcto.
Iterando este procedimiento, Segal en [**13**, p.135] obtiene la sucesión exacta de cofibra (tambien conocida como sucesión de Puppe):

$$K_G(X) \leftarrow K_G(Y) \leftarrow K_G(C_f) \leftarrow K_G(\Sigma X) \leftarrow K_G(\Sigma Y) \leftarrow \cdots$$

Siguiendo la definición de teoría de cohomología equivariante reducida, lo anterior nos motiva a definir:

Definición 2.2.4. *Sea X un G-espacio compacto con punto base, definimos:*

$$\tilde{K}_G^{-q}(X) = \tilde{K}(\Sigma^q(X))$$

donde entendemos por $\Sigma^q(X)$ como $\underbrace{\Sigma(\cdots(\Sigma}_{q\text{-veces}}(X)\cdots)$.

Tambien podemos definir los grupos de teoría K equivariante relativos como:

$$\tilde{K}_G^{-q}(X, A) = \tilde{K}_G(\Sigma^q(C_i))$$

donde A es un G-subespacio cerrado de X e $i : A \to X$ es la inclusión canónica.

Con esta definición como es de esperar: $\tilde{K}_G^{-q}(X, \emptyset) = \tilde{K}_G^{-q}(X)$

Ahora recordaremos los axiomas de una teoría de cohomología generalizada (tanto reducida como no reducida) de tal manera que apliquen en nuestro contexto equivariante.

Definición 2.2.5. *Sea R el funtor restricción $R : G\text{-}CW^2 \to G\text{-}CW^2$ el cual lleva $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$ y $f \mapsto f\mid_A$ (el cual notemos que baja a su categoría de homotopía correspondiente). Una **teoría de cohomología equivariante** (o G-teoría de cohomología) consiste de una sucesión de funtores contravariantes $(h^n : (G\text{-}CW^2)^{op} \to Ab)_{n\in\mathbb{Z}}$ y de transformaciones naturales $(\delta^n : h^n \circ R \to h^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que:*

1. *G**-invariancia homotópica***
   Si f_0 y f_1 son dos funciones G-homotópicas entre parejas de G-CW complejos, $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ entonces
   $$h^n(f_0) = h^n(f_1)$$
2. ***Exactitud***
   Para cada par $(X, A) \in GCW^2$ tenemos la siguiente sucesión exacta:
   $$\cdots \to h^n(X, \emptyset) \to h^n(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta^n} h^n(X, A) \to h^{n+1}(X, \emptyset) \to \dots$$
   donde las flechas sin nombrar son inducidas por las inclusiones
   $$(A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$
3. ***Escisión***
   Para cada terna $G - CW$, $(X; A, B)$ donde $X = A \cap B$, A, B G-subcomplejos de X, la inclusión
   $$j : (A, A \cap B = X) \to (X, B)$$
   induce los isomorfismos $(j^* : h^n(X, B) \to h^n(A, A \cap B))_{n\in\mathbb{Z}}$.

La formulación de lo que es una teoría de cohomología equivariante es muy parecida a la formulación clásica de los axiomas de Eilenberg-Steenrod de una teoría de cohomología, una de las diferencias clave aparte de que se trabaja con complejos G-CW (no con complejos CW), es que la invarianza homotópica es respecto a G-homotopías.

Definición 2.2.6. *Consideremos Σ el funtor "tomar suspensión reducida"(o wedge o smash con $\mathbb{S}^1$) $\Sigma = \_ \wedge \mathbb{S}^1 : GCW_* \to GCW_*$ el cual manda (X, x_0) a $(\Sigma X, *)$. Una* ***teoría de cohomología equivariante reducida*** *consiste en una sucesión de funtores contravariantes $(\widetilde{h}^n : (GCW_*)^{op} \to Ab)_{n\in\mathbb{Z}}$ e isomorfismos naturales de grado +1 $(\delta^n : \widetilde{h}^n \circ \Sigma \to \widetilde{h}^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$, conocidos como isomorfismos de suspensión, tales que:*

1. *G**-invariancia homotópica***
   Si f_0 y f_1 son dos funciones G-homotópicas entre dos G-CW complejos punteados, $f_0, f_1 : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ entonces
   $$h^n(f_0) = h^n(f_1)$$
2. ***Exactitud***
   La inclusión $A \hookrightarrow X$ de los G-espacios X, A induce la sucesión exacta:
   $$\widetilde{h}^n(C_i, *) \to \widetilde{h}^n(X, x_0) \to \widetilde{h}^n(A, x_0)$$
   los cuales son inducidos por $A \hookrightarrow X \hookrightarrow C_i$ donde C_i denota el cono de aplicación de la inclusión.

Notemos que hay una correspondencia entre teorías de cohomología equivariantes y teorías de cohomologia equivariantes reducidas de la siguiente manera:

- Si h es una teoría de cohomología equivariante, definimos $\widetilde{h}^*(X) = h^*(X, x_0)$.
- Si $\widetilde{h}$ es una teoría de cohomología equivariante reducida, definimos $h^*(M, A) = \widetilde{h}^*(C_i)$ donde $i : A \hookrightarrow M$.

Tambien a veces se suele pedir (como en [**18**] [**36**]) que una teoría de cohomología equivariante (reducida o no reducida) cumpla el axioma de la unión disjunta para G-CW complejos, esto es que haya un isomorfismo entre la cohomología del coproducto topológico "la unión disjuntaz el producto de la cohomología de los factores, en dicho caso se dice que la teoría es **aditiva**. El Lema 1.1 de [**18**] nos muestra el rol del axioma de la unión disjunta y tambien se menciona que la prueba de dicho lema es análoga a la versión no equivariante.

2.3. El isomorfismo de Thom y la periodicidad de Bott

Nuestro próximo objetivo será formular una versión equivariante de la periodicidad de Bott y del isomorfismo de Thom para haces vectoriales complejos. Existen diversas demostraciones en el caso no equivariante, desde la clásica [**11**] de Raoul Bott la cual usa teoría de Morse, hasta versiones mas modernas como la de Mark J. Behrens [**49**] la cual es una versión simplificada de la demostración de Aguilar y Prieto [**50**] en la cual la idea de la prueba es restringir debidamente la aplicación exponencial para producir una cuasi-fibración con espacio base U y espacio total contráctil cuya fibra sea $BU \times \mathbb{Z}$. En este trabajo estudiaremos la prueba de W. Lück y B. Oliver en [**19**] que se restringe al caso de grupos discretos y G-CW complejos propios.

Definición 2.3.1. *Un complejo G-CW X es **propio** si la acción de G en X es propia, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$ existen vecindades V_x, W_y tales que el transportador de V_x*

$$\{g \in G \mid gV_x \cap W_y \neq \emptyset\}$$

es un conjunto compacto.

La definición anterior es equivalente a pedir todos los subgrupos de isotropía sean conjuntos compactos Teorema 1.23 [**22**].
Consideremos $\tilde{K}(\mathbb{S}^2)$, el cual es por definición

$$ker(K(\mathbb{S}^2) \to K(pt)) \cong \mathbb{Z}$$

al generador de este grupo se le conoce como **la clase de Bott** $\beta \in \tilde{K}(\mathbb{S}^2)$ el cual corresponde a $[\mathbb{S}^2 \times \mathbb{C}] - [H]$ en el que H es el haz rectilineo complejo sobre $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$.
Notemos que para todo G-CW complejo propio finito X, el producto exterior induce:

$$K_G^{-n}(X) \otimes \tilde{K}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\otimes} Ker[K_G^{-n}(X \times \mathbb{S}^2) \to K_G^{-n}(X \times pt)] \cong K_G^{-n-2}(X)$$

Restringir este producto a la clase de Bott define un homomorfismo al cual se le conoce como **homomorfismo de Bott**

$$b = \_ \otimes \beta = b(X) : K_G^{-n}(X) \to K_G^{-n-2}(X)$$

el cual es natural. Se extiende para parejas (X, A) y así se puede definir $b(X, A)$.

Teorema 2.3.2 (Periodicidad de Bott)**.** [**13**]*(3.5)*
$K_G^{-q}(X)$ es naturalmente isomorfo a $K_G^{-q-2}(X)$ via el homomorfismo de Bott.

Demostración.
Estudiaremos la prueba de [**19**] de una versión menos fuerte de este mismo

teorema: $K_G^{-q}(X,A)$ es naturalmente isomorfo a $K_G^{-q-2}(X,A)$ via el homomorfismo de Bott en el caso que G es discreto y (X,A) es una pareja de G-CW propios.
Para probar esto, Lück y Oliver estudian el caso $X = Y \cup_\phi (G/H \times D^m)$ en el que $H \subset G$ es finito y $\phi : G/H \times \mathbb{S}^{m-1} \to Y$ es una G-función y supone inductivamente que $b(Y)$ es un isomorfismo. Observando que:

$$K_G^{-n}(G/H \times \mathbb{S}^{m-1}) \cong K_H^{-n}(\mathbb{S}^{m-1}) \text{ y } K_G^{-n}(G/H \times D^m) \cong K_H^{-n}(D^m)$$

los homomorfismos de Bott de estos espacios son isomorfismos por el Teorema 4.3 de [**8**]. El homomorfismo de Bott es natural y compatible con los morfismos frontera de la sucesión de Mayer-Vietoris en grados no positivos usada en $X, Y, G/H \times \mathbb{S}^{m-1}, G/H \times D^m$

$$\begin{tikzcd}
K_G^{-n-1}(G/H \times D^m) \oplus K_G^{-n-1}(Y) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d] & K_G^{-n-3}(G/H \times D^m) \oplus K_G^{-n-3}(Y) \arrow[d] \\
K_G^{-n-1}(G/H \times \mathbb{S}^{m-1}) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d] & K_G^{-n-3}(G/H \times \mathbb{S}^{m-1}) \arrow[d] \\
K_G^{-n}(X) \arrow[r, "b(X)"'] \arrow[d] & K_G^{-n-2}(X) \arrow[d] \\
K_G^{-n}(G/H \times D^m) \oplus K_G^{-n}(Y) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d] & K_G^{-n-2}(G/H \times D^{m+}) \oplus K_G^{-n-2}(Y) \arrow[d] \\
K_G^{-n}(G/H \times \mathbb{S}^{m-1}) \arrow[r, "\cong"'] & K_G^{-n-2}(G/H \times \mathbb{S}^{m-1})
\end{tikzcd}$$

Por el lema del quinto, $b(X)$ es isomorfismo. La versión relativa es inmediata por como está definida la teoría K relativa. □

Definición 2.3.3. *Sean f y g dos homomorfismos de G-haces vectoriales $f : E \to E'$ y $E' : Y \to E''$ sobre el mismo G-espacio B, diremos que una sucesión es* ***exacta*** *si para cada $b \in B$ la sucesión de fibras:*

$$E_b \to E'_b \to E''_b$$

es exacta.

Definición 2.3.4. *Un* ***G-complejo de cadenas de G-haces vectoriales sobre un par propio*** *G-CW (X,A), es un complejo de cadenas de* *dimensión finita (C_n, c_n) de G-haces vectoriales sobre X cuya restricción en A es acíclica, es decir*

$$0 \to C_n \xrightarrow{c_n} C_{n-1} \xrightarrow{c_{n-1}} \cdots \xrightarrow{c_2} C_1 \xrightarrow{c_1} C_0$$

es una sucesión de G-haces vectoriales junto con morfismos de haces tales que $c_{n-1} \circ c_n = 0$ para toda n y la restricción a las fibras es exacta $\forall x \in A$. Un morfismo de complejos $f_n : (C_n, c_n) \to (D_n, d_n)$ es una sucesión de morfismos $f^i : C_i \to D_i$ tales que $d_i f^i = f^{i-1} c^i$ para toda i.

El **soporte** de un complejo es el G-subconjunto cerrado para el cual la sucesión inducida en la fibra no es exacta. Si A es un G-subespacio cerrado de un G-espacio localmente compacto, el conjunto de las clases de isomorfismo de G-complejos de cadenas sobre (X, A) cuyo soporte es un subconjunto compacto de $X - A$ forman el conjunto que se denota por $L_G(X, A)$ el cual tiene estrucutra de semi-grupo con la suma directa.
Se dice que dos elementos $(C_n, c_n), (D_n, d_n)$ de $L_G(X, A)$ son homotópicos si existe un elemento $(E_n, e_n) \in L_G(X \times [0, 1], A \times [0, 1])$ que al restringir en $X \times 0$ y $X \times 1$ nos da (C_n, c_n) y (D_n, d_n) respectivamente.
En el caso que G es compacto, la proposición 3.1 de [**13**] nos dice que $K_G(X, A)$ es naturalmente isomorfo a las clases de isomorfismo de complejos de cadenas de G-haces vectoriales sobre (X, A) módulo $\sim$ donde $(C_n, c_n) \sim (D_n, d_n)$ si y solo si existen complejos acíclicos $(F_n, f_n), (G_n, g_n)$ sobre X tales que $(C_n \oplus F_n, c_n \oplus f_n)$ es homotópico a $(D_n \oplus G_n, d_n \oplus g_n)$. El resultado anterior nos permite en esencia a un complejo de cadenas de G-haces vectoriales sobre (X, A) asignarle de manera natural y funtorial un elemento de $K_G(X, A)$.
Sea (C_n, c_n) un complejo de cadenas de G-haces vectoriales sobre (X, A), para cada i definimos

$$C'_i = Im(C_{i+1} \mid_A) = Ker(C_i \mid_A)$$

Cada $C'_i \subset C_i$ es un sub-haz G-invariante, con esto definimos $C''_i \subset C_i \mid_A$ como el haz complementario a C'_i (esto se puede hacer usando una métrica hermitiana invariante por G en C_i como en la prueba del teorema de Mashke Weyl C.0.4), para cada i tenemos que c_i mapea de manera isomorfa C''_i en C'_{i-1}. Tomando

$$C^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_{2i+1} \text{ y } C^{**} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_{2i}$$

con los isomorfismos

$$C'_{2i+1} \xrightarrow[\cong]{c_{2i+2}^{-1}} C''_{2i+2} \text{ y } C''_{2i+1} \xrightarrow[\cong]{c_{2i+1}} C'_{2n}$$

al ser complementarios, se tiene un isomorfismo $f_C : C^* \mid_A \to C^{**} \mid_A$ al sumar estos isomorfismos.

Ahora definimos

$$[C_n, c_n] = [C^{**} \cup_{f_C} C^*] - [C^{**} \cup_{Id} C^{**}] \in ker[K_G(X \cup_A X) \xrightarrow{i_2^*} K_G(X)] = K_G(X, A)$$

Sea $p : E \to X$ un G-haz vectorial de dimensión n sobre un G-CW complejo propio X, consideremos $S(E)$ y $D(E)$ los haces de esfera y de disco sobre E respecto a una métrica riemanniana G-invariante

$$D(E) = \{v \in E \mid \langle v, v \rangle \leq 1\} \text{ y } S(E) = \{v \in E \mid \langle v, v \rangle = 1\}$$

Llamaremos $p_D = p \mid_{D(E)}$ y consideraremos el complejo de cocadenas de G-haces vectoriales $(\Lambda^k p_D^* E, \delta)$ sobre $(D(E), S(E))$:

$$0 \to \Lambda^0 E_{p(v)} \xrightarrow{\wedge v} \Lambda^1 E_{p(v)} \xrightarrow{\wedge v} \cdots \xrightarrow{\wedge v} \Lambda^n E_{p(v)} \to 0$$

para toda $v \in D(E)$ y $\wedge v$ es el producto exterior con $v \in E_{p(v)}$, esta sucesión es exacta para cualquier v en la sección no cero de E.

Definición 2.3.5. *Sea E un G-haz vectorial sobre X, la **clase de Thom de E** es el elemento $\lambda_E \in K_G^0(D(E), S(E))$ definido como la clase del complejo de cocadenas $(\Lambda^*(p_D^* E), \delta)$ sobre $(D(E), S(E))$.*
*El **homomorfismo de Thom** es la composición:*

$$T_E : K_G^*(X) \underset{\cong}{\xrightarrow{p_D^*}} K_G^*(D(E)) \xrightarrow{\times \lambda_E} K_G^*(D(E), S(E))$$

donde $\times \lambda_E$ es tomar producto con la clase de Thom.

Teorema 2.3.6 (Isomorfismo de Thom)**.** [**13**, Proposición 3.2.]
El homomorfismo de Thom $T_E : K_G^*(X) \to K_G^*(D(E), S(E))$ es un isomorfismo para cualquier G-haz vectorial E sobre X un G-espacio localmente compacto.

Demostración.
Desarrollaremos la prueba de [**19**] en el que veremos que el homomorfismo de Thom definido previamente es un isomorfismo en el caso que G es discreto y X un G-CW complejo propio finito.
Para esto primero consideremos el caso en el que $X = G/H \times Y$ donde Y es $\mathbb{S}^n$ o D^n y $E\mid_Y \cong V \times Y$ para V una H-representación. En este caso tenemos que:

$$K_G^n(X) = K_G^n(G/H \times Y) \cong K_H^n(Y)$$

y

$$K_G^n(D(E), S(E)) \cong K_G^n(G \times_H (D(V) \times Y), G \times_H (S(V) \times Y)) \cong K_H^n(D(V) \times Y, S(V) \times Y).$$

donde el último isomorfismo es el último de la lista de ejemplos 2.2.1, asi que T_E es un isomorfismo por el teorema de isomorfismo de Thom para acciones de grupos finitos usando el [**8**, Teorema 4.3] el cual es una encarnación de la

versión equivariante de la periodicidad de Bott.
Ahora supongamos que $X = Y \cup_\phi (G/H \times D^n)$, con H finito, $\phi : G/H \times \mathbb{S}^{n-1} \to Y$ es una G-función y $T_{E|_Y}$ es un isomorfismo. La prueba sigue como la de la periodicidad de Bott: considerar la sucesión de Mayer Vietoris asociada a $X, Y, G/H \times \mathbb{S}^{m-1}, G/H \times D^m$ para obtener usando el lema del quinto que el homomorfismo T_E es isomorfismo.

$\square$

Capítulo 3

El teorema de compleción y su generalización.

Primero enunciaremos el teorema de compleción de Atiyah-Segal y luego definiremos una teoría de cohomología valudada en progrupos para enunciar despues la generalización por Adams, Haeberly, Jackowski y May.

Teorema 3.0.1 (de compleción de Atiyah-Segal)**.**
Sea X un complejo $G - CW$ finito, entonces la proyección $X \times EG \to X$ induce el isomorfismo:

$$K_G^*(X)_{I(G)}^{\wedge} \xrightarrow{\cong} K_G^*(X \times EG).$$

donde $I(G)$ es el ideal de aumentación.

3.1. La prueba de la generalización.

Definición 3.1.1. *Sea $\{\mathcal{K}_G^n : G\text{-}CW \to Pro\text{-}Grp\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la* ***teoría de cohomología valuada en progrupos*** *que manda a un complejo G-CW X al sistema proyectivo $\mathcal{K}_G^n(X) = \{K_G^n(X_\alpha)\}$ donde X_α corre por los subcomplejos finitos de X.*

Por un momento ignoremos lo que significa que *corre por lor subcomplejos finitos*. Podemos ver que lo definido anteriormente será una teoría de cohomología y tambien se puede definir una versión reducida. En realidad lo primero se debe a que si tenemos exactitud término a término, entonces tambien tendremos *proexactitud* (F.0.13) y los demas axiomas.
Para H subgrupo cerrado de G, consideremos el homomorfismo restricción $r_H^G : R(G) \to R(H)$, denotaremos al núcleo de este homomorfismo por I_H^G. Notemos que en el caso que H es el grupo trivial 1 entonces

$$R(1) \cong \mathbb{Z}$$

y por ende:

$$\begin{gathered} I(G) = ker(\epsilon(G) : R(G) \to \mathbb{Z}) = Ker(\epsilon(G) : R(G) \to R(1)) \\ = ker(r_H^G : R(G) \to R(1)) = I_1^G. \end{gathered}$$

A un conjunto $\mathcal{J}$ de subgrupos de G cerrados bajo conjugación le llamaremos familia. Consideremos la compleción $\mathcal{J}$-ádica de $\mathcal{K}_G^*(X)$, la cual denotaremos

con
$$\mathcal{K}^n_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} = \{K^n_G(X_\alpha)/JK^n_G(X_\alpha)\}$$
donde X_α corre en los subcomplejos finitos de X y los J corre en los productos finitos de ideales I^G_H con $H \in \mathcal{J}$. De hecho en el caso que la familia $\mathcal{J}$ sea finita, esta compleción es la misma que completar respecto al ideal $\bigcap_{H\in\mathcal{J}} I^G_H = I(\mathcal{J})$. Los productos finitos de ideales de $R(G)$ forman un conjunto dirigido respecto al cual realizaremos la compleción.
Cuando hablemos de sistemas proyectivos cuyos índices corren, recordemos que implícitamente estamos pensando en un diagrama de una categoría filtrada, en este caso la categoría filtrada de subcomplejos finitos de un complejo CW X en el que los morfismos son inclusiones de un subcomplejo en otro.
Obtenemos que esto es una teoría de cohomología completa ya que podemos usar la proposición [**10**, Proposición 10.12] la cual nos dice que la compleción $\mathfrak{p}$-ádica de una sucesión exacta corta de modulos finitamente generados es una sucesión exacta corta de las compleciones $\mathfrak{p}$-ádicas respectivas cuando el anillo es Noetheriano, esto es un hecho ya que por Anexo C.0.13,[**14**, Corolario 3.3.], $R(G)$ es Noetheriano.

Teorema 3.1.2 (Generalización del Teorema de Compleción de Atiyah-Segal)**.** [**2**, Teorema 1.1.]
Si una G-función $f : X \to Y$ se restringe a una equivalencia homotópica $f^H : X^H \to Y^H$ para todo $H \in \mathcal{J}$, entonces
$$(f^*)^\wedge_{\mathcal{J}} : \mathcal{K}^*_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}} \to \mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}}$$
es un isomorfismo de progrupos.

Si bien se menciona en [**2**, p.1] que el caso $\mathcal{J} = \{1\}$ implica el teorema de compleción de Atiyah-Segal ya que $X \times EG \to X$ es una equivalencia homotópica, se necesita de mas herramienta matemática (la cual se mencionó que usan Atiyah y Segal en su demostración original del teorema de compleción). En [**45**, 7.16] se desarrolla esto, referimos al lector interesado en esto a aquel trabajo pero daremos un breve resumén de ello. En [**45**] se empieza considerando la función inducida $\alpha_n : K^*_G(pt) \to K^*_G(E^nG))$ con $E^nG = G * G * \cdots * G$ (el ensamble (join) de n copias de G) para obtener dos sucesiones exactas cortas en el que hay un morfismo entre $R(G)$ y $K^*_G(B^nG)$ con $B^nG = E^nG/G$. Considerando la categoría de Lusternik-Schnirelmann, obtiene que α_n se factoriza a través de una proyección $R(G) \to R(G)/I(G)^n$. Luego estudia la función $p : X \times E^nG \to X$ para llegar a que su función inducida p^* se factoriza a través de la proyección $K^*_G(X) \to K^*_G(X)/I(G)^n K^*_G(X)$.
Por último observa que el pro-homomorfismo $\mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \to \mathcal{K}^*_G(X \times EG)^\wedge_{\mathcal{J}}$ tiene como representante a
$$K^*_G(X)/I(G)^n K^*_G(X) \to K^*_G(X \times E^nG)$$

y como $\mathcal{K}^*_G(X \times EG)^\wedge_{\mathcal{J}}$ satisface la condición de Mittag-Leffler, tambien $\mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}}$ lo satisface por lo que no hay lím^1 y tenemos el teorema de compleción de Atiyah-Segal.
Para probar la generalización empezaremos viendo que es equivalente al siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. *Sea X un complejo G-CW, entonces $\mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong 0$ si para toda $H \in \mathcal{J}$ tenemos que X^H es contráctil.*

Proposición 3.1.4. *La generalización del teorema de compleción es equivalente al teorema anterior.*

Demostración.
Para la ida notemos que basta con considerar el caso de la inclusión de un punto en X. Mas concretamente, como X^H es contráctil, entonces la inclusión inducida $i^H : pt^H \to X^H$ es una equivalencia homotópica, por la generalización del teorema de compleción de Atiyah-Segal, tenemos que

$$(i^*)^\wedge_{\mathcal{J}} : \mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \to \mathcal{K}^*_G(pt)^\wedge_{\mathcal{J}}$$

es un isomorfismo y por ende $\mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong 0$.
Para el regreso basta con considerar la sucesión de cofibra (o de Puppe) asociada a $f : X \to Y$ y notar que los conos de aplicación de equivalencias homotópicas son contráctiles. Formalmente, notemos que para toda $H \in \mathcal{J}$, tenemos la sucesión de cofibra:

$$X^H \xrightarrow{f^H} Y^H \xrightarrow{i^H} C_f^H \to \Sigma X^H \xrightarrow{\Sigma f^H} \Sigma Y^H \to \dots$$

en la que C_f^H es contráctil para toda $H \in \mathcal{J}$ ya que $f^H : X^H \to Y^H$ es una equivalencia homotópica para toda $H \in \mathcal{J}$, por hipótesis entonces obtenemos que $\mathcal{K}^*_G(C_f)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong 0$. Por lo que si aplicamos el funtor contravariante $\mathcal{K}^*_G(-)^\wedge_{\mathcal{J}}$ y consideramos la periodicidad de Bott obtenemos la sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}^0_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \arrow[d] & \mathcal{K}^0_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}} \arrow[l, "\mathcal{K}^*_G(f)^\wedge_{\mathcal{J}}"'] & \mathcal{K}^0_G(C_f)^\wedge_{\mathcal{J}} = 0 \arrow[l, "\mathcal{K}^*_G(i)^\wedge_{\mathcal{J}}"'] \\
0 = \mathcal{K}^0_G(\Sigma C_f)^\wedge_{\mathcal{J}} \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{K}^1_G(C_f)^\wedge_{\mathcal{J}} \arrow[r, "\mathcal{K}^*_G(\Sigma i)^\wedge_{\mathcal{J}}"'] & \mathcal{K}^1_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}} \arrow[r, "\mathcal{K}^*_G(\Sigma f)^\wedge_{\mathcal{J}}"'] & \mathcal{K}^1_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Al ser la sucesión exacta,

$$\mathcal{K}^0_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong \mathcal{K}^0_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}}/ker(\mathcal{K}^*_G(f)^\wedge_{\mathcal{J}}) = \mathcal{K}^0_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}}/im(\mathcal{K}^*_G(i)^\wedge_{\mathcal{J}}) = \mathcal{K}^0_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}}$$

analogamente se puede probar $\mathcal{K}^1_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong \mathcal{K}^1_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}}$ y asi $\mathcal{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong \mathcal{K}^*_G(Y)^\wedge_{\mathcal{J}}$
□

Ya habiendo probado la equivalencia de teoremas, nuestra meta sera probar el teorema anterior. Para esto en [**2**, p.3] se fijan en el siguiente caso especial: consideremos la representación suma $U = \bigoplus V_i$ donde sumamos las representaciones de un conjunto finito de representaciones no triviales $\{V_i\}$ de G tales que $V_i^G = 0$ y $V_i^H \neq 0$ si H es un subgrupo propio de G y cada V_i ocurre un numero numerable de veces. Sea Y el colímite de las compactificaciones $\mathbb{S}^V$ de las subrepresentaciones de dimensión finita V de U (ya que las subrepresentaciones de U forman un sistema dirigido). Como $V_i^G = 0$, entonces $Y^G = \mathbb{S}^0$.
Pasaremos a probar las afirmaciones realizadas.

Lema 3.1.5. [**2**, p.3] [**45**, Lema 7.7] *Consideremos una inclusión de una subrepresentación $i : V \hookrightarrow W$ en la que $(W - V)^H \neq 0$ (donde $W - V$ es el complemento de V en W), entonces la función inducida por la inclusión en las compactificaciones por un punto $i : \mathbb{S}^V \to \mathbb{S}^W$ es H-nulhomotópica.*

Demostración.
Podemos construir explícitamente la H-nulhomotopía:

$$H : \mathbb{S}^V \times I \to \mathbb{S}^W$$

$$H(x,t) = \begin{cases} x + (\frac{1}{1-t})y & \text{si } x \neq \infty \text{ y } t \neq 1 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{donde } y \in (W - V)^H \neq \emptyset.$$

□

Lema 3.1.6. *$Y^G = \mathbb{S}^0$ y para cualquier subgrupo propio H de G, tenemos que Y^H es contráctil.*

Demostración.
Como $V_i^G = 0$ y Y es el colimite de las compactificaciones $\mathbb{S}^V$ de las subrepresentaciones de dimensión finita V de U y la compactificación de Alexandroff de un punto es $\mathbb{S}^0$, entonces $Y^G = \mathbb{S}^0$ ya que el funtor (-)^G conmuta con colímites filtrados. Para la segunda parte consideremos un subgrupo propio H de G, entonces existe una sucesión anidada y creciente de subespacios de dimensión finita:

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset U \text{ de tal manera que } (V_{n+1} - V_n)^H \neq 0 \text{ y } U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

Por el lema anterior, tenemos que la inclusión entre las compactificaciones de los subespacios consecutivos es H-nulhomotópica y por ende tambien su colímite Y es H-contráctil, por lo que Y^H es H contráctil. □

Lema 3.1.7. *Si $G \notin \mathcal{J}$, entonces $\tilde{\mathcal{K}}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong 0$ (pro-cero).*

Demostración.
Empezamos la prueba estudiando el comportamiento de la función inducida por la inclusión $i : \mathbb{S}^V \to \mathbb{S}^W$, $i^* : \tilde{K}_G^*(\mathbb{S}^V) \to \tilde{K}_G^*(\mathbb{S}^W)$, mas precisamente demostraremos que tiene como regla de correspondencia tomar el producto con χ_{W-V} la clase de Euler del complemento. Sea $\lambda_V \in K_G(V)$ la clase de Bott, al aplicarle i^*, obtenemos la clase de Euler $\chi_V \in K_G(pt) \cong R(G)$. Una propiedad de la clase de Bott [**8**] es que $\lambda_W = \lambda_{W-V}\lambda_V$, por el teorema de periodicidad de Bott, tenemos que $\tilde{K}_G^*(\mathbb{S}^V)$ es un $\tilde{K}_G^*(\mathbb{S}^0)$ módulo libre generado por la clase de Bott $\lambda_V \in \tilde{K}_G^0(\mathbb{S}^V)$, por lo que $i^*(x\lambda_W) = x\chi_{W-V}\lambda_V$. Por lo que la función inducida por la inclusión es la multiplicación por la clase χ_{W-V}.
Por la definición de $\tilde{\mathcal{K}}_G^*(-)^\wedge_{\mathcal{J}}$, tenemos el siguiente limite inverso de pro-objetos

$$\tilde{\mathcal{K}}_G^*(Y)^\wedge_{\mathcal{J}} = \tilde{\mathcal{K}}_G^*(Y)/J\tilde{\mathcal{K}}_G^*(Y)$$

donde J corre en los productos finitos de ideales I_H^G con $H \in \mathcal{J}$.
Si $\tilde{\mathcal{K}}_G^*(Y)/J\tilde{\mathcal{K}}_G^*(Y)$ fuera pro-cero para cada J, entonces habríamos acabado, afortunadamente este es el caso. Veremos que para cada V hay un W tal que $V \subset W$ tal que la función inducida por la inclusión

$$\tilde{\mathcal{K}}_G^*(\mathbb{S}^W)/J\tilde{\mathcal{K}}_G^*(\mathbb{S}^W) \to \tilde{\mathcal{K}}_G^*(\mathbb{S}^V)/J\tilde{\mathcal{K}}_G^*(\mathbb{S}^V)$$

es 0. Al ser Y el colímite de las compactificaciones de Alexandroff de estas, acabaríamos. Sea $J = I_{H_1}^G I_{H_2}^G \cdots I_{H_n}^G$, escogemos W tal que $W - V$ es la suma de W_i donde $W_i^{H_i} \neq 0$. Por el resultado al inicio de la demostración, tenemos que la función inducida por la inclusión $i : \mathbb{S}^V \to \mathbb{S}^W$ se debe comportar como tomar producto con $\chi_{W_1} \cdots \chi_{W_n}$, por lo que está en J y por ende i^* es cero. $\square$

Sea $\mathcal{J} \mid H$ la subfamilia de $J \in \mathcal{J}$ tales que $J \subset H$.

Lema 3.1.8. *Sea X un G-espacio basado, entonces*

$$\tilde{\mathcal{K}}_G^*((G/H)_+ \wedge X)^\wedge_{\mathcal{J}} \cong \tilde{\mathcal{K}}_H^*(X)^\wedge_{\mathcal{J}|H}$$

En realidad esto se da ya que como pro-$R(G)$ módulos son isomorfos, recordemos que $R(G)$ actúa en $\tilde{K}_G^*(X)$ por medio de $r_H^G : R(G) \to R(H)$. Por lo que sólo nos faltaría ver que las topologías coinciden.

Lema 3.1.9. *La topología $\mathcal{J}$-ádica como $R(G)$ módulo y la topología $(\mathcal{J} \mid H)$-ádica coinciden en $R(H)$.*

Demostración.
Recordando la nota anterior, podemos pensar a $R(H)$ como un módulo sobre $R(G)$ vía r_H^G. Sea $L \in (\mathcal{J} \mid H)$, como $r_L^G = r_L^H \circ r_H^G$ entonces $r_H^G(I_L^G) \subset I_L^H$. Por lo que la topología $\mathcal{J}$-ádica es más fina que la topología $(\mathcal{J} \mid H)$-ádica en $R(H)$.

Para ver que la topología $(\mathcal{J} \mid H)$-ádica es mas fina que la topología $\mathcal{J}$-ádica en $R(H)$, consideremos $K \in \mathcal{J}$ e $I = r_H^G(I_K^G)R(H)$, tenemos descomposicion primaria (esto se puede ya que $R(H)$ es un anillo noetheriano), por lo que para todo ideal I hay ideales primos Q tales que su producto esta contenido en I y como cualquier ideal primo $Q \subset R(H)$ contiene a I_S^H en donde $S \subset H$ es el soporte de Q, basta ver que $S \in \mathcal{J}$ si Q contiene a I.
Sea $P = (r_H^G)^{-1}(Q) \subset R(G)$, entonces S es un soporte de P y $I_H^G \subset P$ ya que $I_K^G \subset (r_H^G)^{-1}(r_H^G(I_K^G)) \subset P$. $R(K)$ es una extensión integral de anillo sobre $R(G)$, esto es por el C.0.12 es finitamente generado sobre $R(G)$. Usando [**32**, Proposición 4.15] *lying over and going up*, existe un ideal primo $P' \subset R(K)$ tal que $P = (r_K^G)^{-1}(P')$. Recordando E.0.4[3.5 [**2**]] P tiene un soporte S' en K, por el E.0.3 tenemos que cualesquiera dos soportes de un ideal primo son conjugados y como $S' \in \mathcal{J}$ entonces $S \in \mathcal{J}$.

□

Con esto ya podemos demostrar **la generalización del teorema de compleción de Atiyah-Segal**

Demostración. (de la generalización)

Sea X un complejo G-CW tal que X^H es contráctil para todo $H \in \mathcal{J}$, por el teorema equivariante de Whitehead 1.2.4 y como la familia $\mathcal{J}$ es cerrada por conjugación y subgrupos (subconjugación) tenemos que X es H-contráctil, por lo que $\tilde{K}_H^*(X)$ es pro-cero para toda $H \in \mathcal{J}$.
Supongamos que $G \notin \mathcal{J}$ (ya que el caso $G \in \mathcal{J}$ ya lo tenemos demostrado), notemos que se cumple la condición de cadena descendente en subgrupos cuando trabajamos con grupos de Lie compactos, esto nos permite realizar inducción. El caso base es trivial por lo que supondremos que se cumple que $\tilde{\mathcal{K}}_H^*(X)^\wedge_{\mathcal{J}|H}$ es pro-cero para todos los subgrupos propios H de G. Consideremos la sucesión de cofibra dada por

$$\mathbb{S}^0 \to Y \to Y/\mathbb{S}^0$$

y al hacerle smash con X obtenemos la sucesión de cofibra:

$$X \cong \mathbb{S}^0 \wedge X \to X \wedge Y \to X \wedge (Y/\mathbb{S}^0).$$

Considerando la sucesión exacta inducida por el funtor contravariante $\mathcal{K}_G^*(-)^\wedge_{\mathcal{J}}$ y usando la periodicidad de Bott obtenemos la sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\mathcal{K}}^0_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}} & \longleftarrow & \tilde{\mathcal{K}}^0_G(X\wedge Y)^\wedge_{\mathcal{J}} & \longleftarrow & \tilde{\mathcal{K}}^0_G(X\wedge (Y/\mathbb{S}^0))^\wedge_{\mathcal{J}} \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
\tilde{\mathcal{K}}^1_G(X\wedge (Y/\mathbb{S}^0))^\wedge_{\mathcal{J}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{K}}^1_G(X\wedge Y)^\wedge_{\mathcal{J}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{K}}^1_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}}
\end{array}$$

Para ver que $\tilde{K}^*_G(X)^\wedge_{\mathcal{J}}$ es pro-cero, basta ver que los terminos $\mathcal{K}^*_G(X\wedge Y)^\wedge_{\mathcal{J}}$ y $\mathcal{K}^*_G(X\wedge (Y/\mathbb{S}^0))^\wedge_{\mathcal{J}}$ son pro-cero respectivamente. Afirmamos que esto se cumple debido a dos hechos más generales, el primero es que $\tilde{\mathcal{K}}^*_G(W\wedge Y)^\wedge_{\mathcal{J}}$ es pro-cero para cualquier complejo G-CW W . Para demostrar esto fijémonos en los n-esqueletos, sea W^0 el 0-esqueleto de W, este es el producto smash de G-espacios $(G/H)_+\wedge S^0\cong (G/H)_+$ y en realidad los cocientes de esqueletos consecutivos W^n/W^{n-1} son el producto smash de los espacios $(G/H)_+\wedge\mathbb{S}^n$, por lo que nos basta probar que para estos es pro-cero y por el isomorfismo de suspensión, en realidad solo para $(G/H)_+$. En el caso que $H=G$ podemos usar el lema 3.1.7 y en el caso $H\neq G$ usamos los lemas 3.1.6 y 3.1.8.
Lo segundo que afirmamos es que $\tilde{\mathcal{K}}^*_G(X\wedge Z)^\wedge_{\mathcal{J}}$ es pro-cero para cualquier complejo G-CW Z tal que Z^G sea un punto. Como en el caso anterior, podemos llegar a que basta verificar para el caso $(G/H)_+$ donde H es un subgrupo propio, análogamente por el lema 3.1.8, tenemos lo que queremos. □

3.2. Ejemplos

Para terminar el capítulo, desarrollaremos un par de ejemplos que muestran el uso del teorema de compleción. Antes de empezar con ellos, enunciaremos algunos resultados que nos permitiran calcular compleciones.

Lema 3.2.1. *Si R es Noetheriano y $\mathfrak{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ es un ideal, entonces:*

$$R^\wedge_{\mathfrak{a}}\cong R[[x_1,...,x_n]]/(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$$

Ejemplo 3.2.1. Consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$, notamos en C.0.5 que su anillo de representationes es $\mathbb{Z}[x]/(x^n-1)$. Un modelo de $B\mathbb{Z}_n$ es el espacio lente infinito $L(\infty,n)$ que se puede obtener como $\mathbb{S}^\infty/\mathbb{Z}_n$. Usando el teorema de compleción obtenemos que

$$K(L(\infty,n))\cong(\mathbb{Z}[x]/(x^n-1))^\wedge_{(x-1)}\cong\mathbb{Z}[t]/((t+1)^n-1)^\wedge_{(t)}\cong\mathbb{Z}[[t]]/((t+1)^n-1)$$

para el primer isomorfismo es una sustitución, en el segundo isomorfismo consideramos el cambio de variable $t=x+1$ y en el último usamos el lema 3.2.1.

Ejemplo 3.2.2. En el caso de $G = \mathbb{S}^1$ tenemos que su anillo de representaciones es $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ en el que t es la representación 1-dimensional estandar de $\mathbb{S}^1$. Un modelo de $B\mathbb{S}^1$ es $\mathbb{CP}^\infty$ (que tambien se puede obtener considerando la sucesión exacta larga de la fibración $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$). El ideal de aumentación esta generado por $t-1$, usando el teorema de compleción y *los mismos isomorfismos del ejemplo anterior* tenemos que

$$K(\mathbb{CP}^\infty) \cong \mathbb{Z}[t-1, t^{-1}][[y]]/y-(t-1) \cong \mathbb{Z}[x, (1+x)^{-1}][[y]]/(y-x) \cong \mathbb{Z}[[t]]$$

Por último notemos que $(1+x)$ es invertible ya que

$$t^{-1} = (1+x)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i x^i.$$

Apéndice A

La construcción de Grothendieck

Definición A.0.1. *Si A es un semigrupo abeliano, podemos asociarle un grupo abeliano A', único salvo isomorfismo, y un homomorfismo de semigrupos $\alpha : A \to A'$ tal que tiene la siguiente* ***propiedad universal****:*
Si G es cualquier grupo abeliano y $\gamma : A \to G$ es un homomorfismo de semigrupos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\gamma' : A' \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A' \arrow[r, dotted, "\exists\gamma'!"] & G \end{tikzcd}$$

A la pareja (A', α) se le llama ***la construcción de Grothendieck*** *asociada al semigrupo A.*

Proposición A.0.2. *La construcción de Grothendieck existe, es decir para un semigrupo abeliano existe un grupo con la propiedad universal descrita anteriormente.*

Demostración.

Definiremos a A' a través de A: determinamos una relación de equivalencia en $A \times A$ como $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ si existe $c \in A$ tal que $a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$ y tomamos $A' = (A \times A)/\sim$. Si denotamos a la clase de (a, b) por $\langle a, b\rangle$ entonces podemos definir la suma en A' como $\langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle$. Por lo que el inverso aditivo de $\langle a, b\rangle$ es $\langle b, a\rangle$, $\langle a, a\rangle$ es el neutro y como A es abeliano, A' tambien lo es. Definimos $\alpha : A \to A'$ por la regla de correspondencia $a \mapsto \langle a, 0\rangle$ (notemos que A como semigrupo puede no tener neutro, pero si no tiene podemos meterle un elemento llamado 0 que cumpla esas propiedades para una operación que extiende a la del semigrupo, por lo que sin perdida de generalidad supondremos que tiene 0), tambien podriamos considerar usar el homomorfismo de semigrupos cuya regla de correspondencia es $a \mapsto \langle a + b, b\rangle$.
Supongamos $\gamma : A \to G$ es un homomorfismo de semigrupos, definimos

$\gamma' : A' \to G$ como $\langle a, b\rangle \mapsto (\gamma(a) - \gamma(b))$. Primero veamos que está bien definido. Si $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$, entonces bajo γ' tenemos $\gamma(a_1) - \gamma(b_1)$ y $\gamma(a_2) - \gamma(b_2)$, notemos que como $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$, entonces significa que existe $c \in A$ tal que $a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$.
Como γ es un homomorfismo de semigrupos, entonces $\gamma(a_1+b_2+c) = \gamma(a_2+b_1+c)$ por lo que $\gamma(a_1)+\gamma(b_2)+\gamma(c) = \gamma(a_2)+\gamma(b_1)+\gamma(c)$, como G sí es un grupo, podemos cancelar las $\gamma(c) \in G$ y obtenemos $\gamma(a_1)+\gamma(b_2) = \gamma(a_2)+\gamma(b_1)$. Por lo que $\gamma(a_1) - \gamma(b_1) = \gamma(a_2) - \gamma(b_2)$, por lo que la función γ' esta bien definida.
Notemos que $\gamma(0) = 0$ por lo que $\gamma'\alpha(a) = \gamma'\langle a, 0\rangle = \gamma(a) - \gamma(0) = \gamma(a)$, es decir $\gamma'\alpha = \gamma$.

Ahora probaremos que γ' es único, supongamos que $\gamma'' : A' \to G$ es otro homomorfismo de grupos tal que $\gamma''\alpha = \gamma$, entonces $\gamma''(\langle a, 0\rangle) = \gamma(a)$ para toda $a \in A$. Notemos que $\langle a, b\rangle = -\langle b, a\rangle$, por lo que

$$\gamma''(\langle a,b\rangle) = \gamma''(\langle a,0\rangle + \langle 0,b\rangle) = \gamma''(\langle a,0\rangle) + \gamma''(\langle 0,b\rangle) =$$
$$\gamma''(\langle a,0\rangle) + \gamma''(-\langle b,0\rangle) = \gamma(a) - \gamma(b) = \gamma'(\langle a,b\rangle)$$

por lo que probamos que tienen la misma regla de correspondencia.

Por último probaremos que la propiedad universal caracteriza a (A', α) salvo isomorfismo, es decir: si A'' es otro grupo abeliano y $\alpha' : A \to A''$ un homomorfismo de semigrupos para los cuales se cumple que para todo grupo abeliano G y homomorfismo de semigrupos $\gamma : A \to G$, entonces existé un único homomorfismo de grupos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A'' \arrow[r, dotted, "\exists\gamma''!"] & G \end{tikzcd}$$

entonces existe un único isomorfismo de grupos $\phi : A' \to A''$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ A' \arrow[rr, "\phi"] & & A'' \end{tikzcd}$$

Notemos que se obtiene de inmediato que son isomorfos ya que si tenemos un grupo A'' junto con su homomorfismo $\phi' : A'' \to A'$ obtenido de su supuesta propiedad universal respecto a A' y lo juntamos con el homomorfismo $\phi'' : A' \to A''$ de la propiedad universal de A' respecto a A'' tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A' \arrow[r, "\phi"] & A'' \arrow[r, "\phi'"] & A' \end{tikzcd}$$

Y al ser los morfismos de la parte inferior únicos, por un lado la composición $\phi' \circ \phi$ es un morfismo que hace conmutar el diagrama completo pero existe un único morfismo de $A' \to A'$ que hace conmutar el diagrama, el cual es $id_{A'} : A' \to A'$. Esto significa que $\phi' \circ \phi = Id_{A'}$ y analogamente se puede considerar el mismo diagrama cambiando A' por A'' y viceversa para obtener que $\phi \circ \phi' = Id_{A''}$ por lo que ϕ es un isomorfismo entre A' y A''.

$\square$

Una observación es que en general el morfismo $\alpha : A \to A'$ no tiene porque ser inyectivo, un ejemplo de esto es considerar el semigrupo cuyos elementos son 0 y 1 y cuya operación es trivial, cualquier pareja le asocia el 0. La construcción de Grothendieck de este semigrupo es el grupo de un solo elemento (ya que la relación identifica todas las parejas ya que al operar obtenemos 0) y no puede haber un morfismo inyectivo entre un conjunto de cardinalidad mayor a uno de cardinalidad menor. De hecho este morfismo sera inyectivo si y solamente si A posee la propiedad de cancelación.
De hecho con la construcción de Grothendieck, podemos obtener un anillo de un semi-anillo ya que si se le aplica al semigrupo con la suma (olvidándonos de la estructura multplicativa del semi-anillo) y obtenemos con la construcción de Grothendieck un grupo, si el producto distribuye la suma del semi-anillo entonces le induce a este grupo una estructura de anillo (9.1.4)[**40**].

Apéndice B

Localización

En esta sección del apéndice discutiremos e introduciremos brevemente los conceptos que requeriremos del capítulo 3 del libro. La construcción del campo $\mathbb{Q}$ apartir de $\mathbb{Z}$ se puede generalizar a un dominio integral A para producir un campo de fracciones. Para esta construcción consideraremos $A\times(A-\{0\})/\sim$ donde relacionamos a $(a,s),(b,t)\in A\times(A-\{0\})$ si $at-bs=0$. Es fácil ver que esta relación es de equivalencia, claramente es reflexiva y simétrica, para la transitividad consideremos $(a,s),(b,t),(c,u)\in A\times(A-\{0\})$ de tal manera que $(a,s)\sim(b,t)$ y $(b,t)\sim(c,u)$, por lo que tenemos las igualdades: $at=bs$ y $bu=ct$. Ahora consideremos:

$$aut = atu = bsu = bus = cts = cst$$

como A es un dominio entero, podemos cancelar el factor t de la expresión ya que como $(b,t)\in A\times(A-\{0\})$, entonces $t\neq 0$.
Notemos que usamos fuertemente la cancelación, lo cual proviene de que A no tiene divisores del cero.
Sin embargo hay una manera de generalizar esta noción, ya que para anillos conmutativos en general no tenemos un campo de fracciones.Lo cual nos lleva a la definición de subconjunto multiplicativamente cerrado (que es exactamente lo que suena pero lo definiremos de cualquier manera)

Definición B.0.1. *Sea A un anillo, un* ***subconjunto multiplicativamente cerrado*** *S es un subconjunto de A tal que $1\in S$ y es cerrado bajo el producto de A, otra manera de decir esto es que S es un subsemigrupo multiplicativo del semigrupo A con su producto.*

Definición B.0.2. *Sean A y S como en la definición anterior, consideremos $S^{-1}A = A\times S/\sim$ donde dos parjas $(a,s),(b,t)\in A\times S$ estan relacionadas si $(at-bs)u=0$ para algún $u\in S$. Denotaremos por a/s a la clase de $(a,s)\in A\times S$.*
$S^{-1}A$ tiene una estructura de anillo definiendo sus operaciones como sigue:

$$(a/s)+(b/t) = (at+bs/st) \quad y \quad (a/s)(b/t) = ab/st$$

A $S^{-1}A$ le llamaremos el ***anillo de fracciones de*** *A* ***respecto a*** *S.*

Veamos que la relación $\sim$ para definir $S^{-1}A$ si es una relación de equivalencia. Claramente como en el caso de la construcción del campo de fracciones, la relación es reflexiva y simétrica. Para la transitividad, consideremos $(a,s),(b,t),(c,u) \in A \times S$ de tal manera que $(a,s) \sim (b,t)$ y $(b,t) \sim (c,u)$, por lo que tenemos existen $v, w \in S$ tales que se cumplen las igualdades:

$$(at - bs)v = 0 = (bu - ct)w$$

al multiplicar la primera parte de la igualdad por uw y la segunda parte por sv, obtenemos

$$(at - bs)vuw = (bu - ct)wsv = 0$$

Por lo que sumando las expresiones obtenemos $(au - cs)tvw = 0$ y al ser S multiplicativamente cerrado, $tvw \in S$ y $(a,s) \sim (c,u)$.
Notemos que esto efectivamente es una generalización de la definición inical de campo de fracciones ya que si A es un dominio integral y $S = A - \{0\}$, entonces $S^{-1}A$ es el campo de fracciones.
Tenemos un homomorfismo $f : A \to S^{-1}A$ definido con la regla de correspondencia $x \mapsto (x/1)$, en general este homomorfismo no es inyectivo.
Ahora enunciaremos algunas propiedades que tiene el anillo de fracciones:

1. Sea $g : A \to B$ un homomorfismo de anillos tal que para todo $s \in S$ tenemos que $g(s)$ es una unidad en B, entonces existe un único homomorfismo de anillos $h : S^{-1}A \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S^{-1}A \arrow[r, dotted, "\exists h!"] & B \end{tikzcd}$$

2. Sea $s \in S$, entonces $f(s)$ es una unidad de $S^{-1}A$.
3. Si $f(a) = 0$, entonces existe $s \in S$ tal que $as = 0$.
4. Todo elemento de $S^{-1}A$ es de la forma $f(a)f(s)^{-1}$ para algún $a \in A$ y $s \in S$.

En particular, esta última propiedad justifica realmente la notación de $S^{-1}A$.

Ejemplo B.0.1. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Sea $S = A - \mathfrak{p}$, notemos que S es multiplicativamente cerrado ya que primeramente como $\mathfrak{p} \neq A$, entonces $1 \notin \mathfrak{p}$, por lo que $1 \in S$. Por último la negación de la propiedad de ser un ideal primo nos dice que si $a \notin \mathfrak{p}$ y $b \notin \mathfrak{p}$, entonces $ab \notin \mathfrak{p}$, por lo que cambiando $\notin \mathfrak{p}$ por $\in S$, tenemos lo que queremos (de hecho probamos $\mathfrak{p}$ es primo $\Leftrightarrow S$ es multiplicativamente cerrado). En este caso escribiremos $A_{\mathfrak{p}}$ en vez de $S^{-1}A$. Observemos que $\mathfrak{m} = \{a/s \mid a \in \mathfrak{p}\}$ es un ideal en $A_{\mathfrak{p}}$. Si $b/t \notin \mathfrak{m}$, entonces el numerador b no esta en $\mathfrak{p}$, por lo que $b \in S$ y b/t es una unidad de $A_{\mathfrak{p}}$. Por lo que si $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{m}$ es un ideal de $A_{\mathfrak{p}}$, entonces $\mathfrak{a}$ contiene una unidad y por ende debe ser el anillo completo. Esto implica que $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$.

La construcción de $S^{-1}A$ se puede formular para un A-módulo M en vez de A un anillo, de manera análoga definimos la relacion $\sim$ en $M \times S$ como

$$(m, s) \sim (n, t) \;\Leftrightarrow\; u(sn - tm) = 0 \text{ p.a. } u \in S$$

como en el caso de $S^{-1}A$, denotaremos por m/s a la clase de equivalencia de la pareja (m, s) y $S^{-1}M = S \times M/\sim$. $S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo bajo la suma y productos usuales.
El caso estudiadado del ejemplo se puede pasar analogamente para un A-módulo M, en cuyo caso escribiremos $M_{\mathfrak{p}}$ en vez de $A_{\mathfrak{p}}$.

Definición B.0.3. *El* ***soporte de un módulo*** *M sobre un anillo conmutativo A es el conjunto de ideales de A cuya localización en M no es trivial.*

$$Supp(M) = \{\mathfrak{p} \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \text{ y } \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\}.$$

Apéndice C

Teoría de representaciones

Definición C.0.1. *Sea G un grupo topológico, una* ***representación de*** G *(o un G-espacio vectorial o un G-módulo) es un espacio vectorial topológico complejo de dimensión finita V junto con un homomorfismo continuo $\rho : G \to Aut_{\mathbb{C}}V$ en donde $Aut_{\mathbb{C}}V$ tiene la topología de la norma. En este caso diremos que ρ es una representación de G en V.*

Esto es equivalente a una acción lineal continua de G sobre V y notemos que fijando una base de n-elementos de V, podemos pensar en $GL(n, \mathbb{C})$ en vez de $Aut_{\mathbb{C}}V$.
Citando a Fulton [**25**, p.3] "Cuando haya poca ambigüedad del mapeo ρ (y aun cuando temamos que exista ambigüedad)", le llamaremos a V la representación de G, en este caso omitiremos al simbolo ρ y escribiremos gv por $(\rho(g))(v)$.
Con esto en mente pasamos a la próxima definición.

Definición C.0.2. *Un* ***homomorfismo*** *entre dos representaciones V y W de G es un homomorfismo de espacios vectoriales $\phi : V \to W$ tal que para toda $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\phi"'] & W \end{tikzcd}$$

*En este caso diremos que ϕ es G-**lineal** y denotaremos por $Hom_G(V, W)$ al conjunto de todos los homomorfismos vectoriales entre V y W.*
En el caso que ϕ aparte sea un isomorfismo entre los espacios vectoriales V y W, diremos que ϕ es un ***isomorfismo de representaciones****.*

Definición C.0.3. *Una* ***subrepresentación*** *de una representación V es un subespacio vectorial W de V que es invariante por G (es decir, sea $\rho : G \to GL(V)$, entonces para toda $g \in G$ tenemos $\rho(g)(W) = W$). Decimos que una representación V es* ***irreducible*** *si no existe un subespacio propio $W \neq \{0\}$ de V para el que W sea una subrepresentación de V.*

Ejemplo C.0.1. Sean V y W representaciones y $\phi : V \to W$ un homomorfismo de representaciones entre ellas, tanto el $ker(\phi)$ como la $im(\phi)$ son subrepresentaciones de V y W respectivamente.
Notemos que si $v \in Ker(\phi)$, entonces $\phi(v) = 0$, al ser ϕ un homomorfismo de representaciones $\phi(gv) = g\phi(v) = 0$ por lo que $Ker(\phi)$ es un subespacio invariante por G. En el otro caso si $w \in Im(\phi)$, entonces existe $v \in V$ tal que $\phi(v) = w$, en este caso $gw = g\phi(v) = \phi(gv)$, por lo que $gw \in Im(\phi)$ e $Im(\phi)$ es un subespacio invariante por G.

Ejemplo C.0.2. Sean $\rho : G \to Aut_{\mathbb{C}}V$ y $\sigma : G \to Aut_{\mathbb{C}}W$ representaciones, podemos formar la representación **suma directa** y la representación **producto tensorial** de ellas $\eta : G \to Aut_{\mathbb{C}}(V \oplus W)$ y $\mu : G \to Aut_{\mathbb{C}}(V \otimes W)$ considerando respectivamente

$$\eta(g)(v \oplus w) = (\rho(g))(v) \oplus (\sigma(g))(w)$$

$$\mu(g)(v \otimes w) = (\rho(g))(v) \otimes (\sigma(g))(w)$$

es decir para toda $g \in G$ tenemos que $g(v\Box w) = v\Box w$ con $\Box \in \{\oplus, \otimes\}$ respectivamente.

Ejemplo C.0.3. Sean V y W representaciones de un grupo topológico G, le daremos una estructura de representación al espacio de todas las funciones $\mathbb{C}$-lineales entre V y W, $Hom_G(V, W)$ dotandole la siguiente estructura de G-modulo :

$$(g\phi)(v) = g\phi(g^{-1}v) \text{ para todo } v \in V \text{ y } \phi : V \to W \text{ función } \mathbb{C}\text{-lineal}$$

Teorema C.0.4 (Maschke, Weyl).
Si W es una subrepresentación de una representación V de un grupo finito G, entonces existe un subespacio invariante por G, W' de V tal que $W \oplus W' = V$.

Demostración.
Notemos que siempre podemos tomar H_0 un producto hermitiano positivo definido sobre V, obtendremos H un producto hermitiano positivo definido

que es invariante por G considerando

$$H(v,w)=\sum_{g\in G} H_0(gv,gw)$$

Con este producto interior H, $W^{\perp}$ es un subespacio invariante ya que para todo $w'\in W^{\perp}$ tenemos $H(gw',w)=0$ para todo $w\in W$ y $g\in G$. □

Corolario C.0.5. *Cualquier representación de un grupo finito es suma directa de representaciones irreducibles.*

Definición C.0.6. *Un grupo que admite una representación que es suma directa de representaciones irreducibles se dice que es* ***completamente reducible*** *(o* ***semi simple****).*

Todos los grupos finitos son completamente reducibles, este es el caso tambien de los grupos topológicos compactos (como $\mathbb{S}^1$), hay una manera de adaptar la técnica para grupos finitos en el teorema de Mashke-Weyl. En vez de promediar con la suma de los $g\in G$, se integra sobre el grupo respecto a la medida de Haar.

Ejemplo C.0.4. El grupo $(\mathbb{R},+)$ no tiene esta propiedad, consideremos la representación

$$a\mapsto\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

y notemos que salvo en el caso $a=0$, cualquier otra representación no tiene un subespacio complementario. En particular no podemos usar el truco de promediar del teoerema de Mashke, Weyl.

Lema C.0.7 (de Schur)**.**
Si V y W son representaciones irreducibles de G y $\phi:V\to W$ es un homomorfismo de representaciones, entonces:

1. *ϕ es isomorfismo o ϕ es 0.*
2. *Si $V=W$, entonces $\phi=\lambda I$ para algún $\lambda\in\mathbb{C}$ y I la identidad.*

Demostración.
Notemos que $ker(\phi)$ y $im(\phi)$ son subrepresentaciones de V y W invariantes. Como V y W son irreducibles, tenemos que $ker(\phi)$ es $\{0\}$ o V por lo que si es $\{0\}$ entonces es inyectiva y $\{0\}\neq im(\phi)=W$ y por ende ϕ es un isomorfismo. En el caso que $Ker\phi=V$, $\phi=0$.
Para la segunda parte, como $\phi:V\to V$ es un homomorfismo de representaciones, es un homomorfismo de espacios vectoriales por lo que podemos

considerar su polinomio característico y por el teorema fundamental del álgebra, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ que es raiz de dicho polinomio, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio. Al ser λ valor propio, entonces $\phi - \lambda I$ tiene nucleo no trivial. Por la primera parte del lema de Schur, el nucleo tiene que ser todo, por lo que $\phi - \lambda I = 0$ y $\phi = \lambda I$. $\square$

O equivalentemente (aunque más elegante) tenemos.

Lema C.0.8 (de Schur)**.**
Si V, W son representaciones irreducibles de G entonces:

$$\dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(V,W)) = \begin{cases} 0 & si\ V \ncong W \\ 1 & si\ V \cong W \end{cases}$$

Demostración.
Notemos que si $V \ncong W$, por el lema de Schur no tan elegante tenemos que $\dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(V,W)) = 0$, en el caso que $V \cong W$, digamos que dicho isomorfismo de representaciones es realizado por ϕ, proponemos el siguiente homomorfismo de representaciones:

$$Hom_G(\phi) : Hom_G(V,V) \to Hom_G(V,W)$$
$$f \mapsto \phi \circ f$$

el cual es un isomorfismo lineal, cuyo inverso esta dado por $Hom_G(\phi^{-1})$. $\square$

Usando el teorema de Maschke y Weyl en conjunto con el lema de Schur, tenemos el siguiente teorema de descomposición:

Teorema C.0.9. *Para cualquier representación V de un grupo finito G existe una descomposición:*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

donde V_i son representaciones irreducibles diferentes. Dicha descomposición es única, como lo son las V_i's y sus multiplicidades a_i's.

En realidad la mayoría de los resultados previamente mencionados tambien son verdaderos cambiando la hipotesis de finitud por compacidad, sin embargo en vez de promediar con la suma finita, se promedia con la integral de Haar.

Definición C.0.10. *Sea G un grupo abeliano, definimos el **anillo de representaciones de** G, $R(G)$ como la construcción de Grothendieck aplicado al semianillo que consiste de las clases de isomorfismo de representaciones lineales complejas de G de dimensión finita, con la suma directa y producto tensorial.*

Definición C.0.11. *Definiremos el* ***homomorfismo de aumentación*** $\epsilon(G) : R(G) \to \mathbb{Z}$ *como la función que manda una representación a su dimensión. Al kernel del homomorfismo de aumentación lo llamaremos* ***el ideal de aumentación*** $I(G)$ *.*

Ejemplo C.0.5. Sea $G = \mathbb{Z}_n$ y $\rho : \mathbb{Z}_n \to Aut_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ una representación de $\mathbb{Z}_n$. Como ρ es un homomorfismo de grupos, tenemos

$$\rho(m)^n = \rho(mn) = \rho(0) = Id$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_n$. Por lo que $\rho(g)$ representa el automorfismo de multiplicar por las raices n-ésimas de la unidad, es decir:

$$(\rho_m(a))(z) = e^{2\pi i a m/n} z \text{ con } 0 \leq m \leq n-1 \text{ y } a \in \mathbb{Z}_n$$

En el caso que $\rho : \mathbb{Z}_n \to Aut_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^q)$, como ρ es un homomorfismo de grupos de un grupo abeliano, primeramente tenemos que $\rho(0) = Id$ y para todo $m \in \mathbb{Z}_n$, $\rho(m) = \rho(\underbrace{1 + ... + 1}_{m\text{-veces}}) = \rho(1)^m$ y al igual que antes $\rho(nm)$, por lo que ρ esta determinado por $\rho(1)$. Podemos pensar $\rho(m)$ como un elemento de $GL(q, \mathbb{C})$ ya que al escojer una base podemos ver a $\rho(1)$ como una matriz A pero debemos tener cuidado con la elección de ésta.
Recordemos que hay una base de Jordan para la cual $\rho(1)$ tiene su forma canónica de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix} \text{ y } J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Primeramente $A^n = Id$ pero A^n sería diagonal por bloques con bloques $(J_k)^n$, por lo que los bloques deben ser la Id. Veamos que nos dice esto acerca de las matrices J_k, sea N la matriz de Jordan con $\lambda = 0$, entonces

$$J^n = (\lambda Id + N)^n = \lambda^n Id + n\lambda^{n-1} N + \cdots + n\lambda N^{n-1} + N^n$$

pero la matriz N^k es una matriz de 0's y 1's, los 1's en (i, j) tal que $i = j + k$ (estan en la linea paralela a la diagonal k lugares separada), por lo que $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i N^{n-i} = Id$ si y solo si $\lambda^n = 1$ y $N = 0$. Entonces J_k es de 1×1 y $\rho(m)$ es diagonal en esta base. Por lo que acabamos de ver que si V es una representación de $\mathbb{Z}_n$, existe una base para la cual la acción de cualquier elemento del grupo es diagonal, con las raices n-ésimas de la unidad en la diagonal. Por lo que obtenemos una descomposición:

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_q$$

donde ρ_i corresponde a una n-ésima raiz de la unidad. Notemos que las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}_n$ son de la forma $(\rho_m(a))(z) = e^{2\pi ima/n}z$. Particularmente siguiendo esto tenemos que

$$\rho_m \cong \underbrace{\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1}_{m\text{-veces}} \text{ y por ende } \rho_m \otimes \rho_{m'} \cong \rho_{mm'}$$

lo cual nos sugiere identificar a $\rho(1)$ con x lo cual induce el isomorfismo de anillos:

$$R(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}[x]/(1-x^n).$$

En el artículo [**14**], Segal describe la estructura del anillo de representaciones de un grupo de Lie compacto, en el cual le atribuye el siguiente resultado (Prop 3.2.)[**14**] a Atiyah:

Proposición C.0.12. *Si H es un subgrupo de G, entonces el homomorfismo inducido por la restricción $R(G) \to R(H)$ le da una estructura a $R(H)$ de $R(G)$-módulo finito.*

Particularmente con esto obtiene el siguiente corolario:

Corolario C.0.13. *Si G es un grupo compacto de Lie, entonces $R(G)$ es un anillo finitamente generado. Particularmente $R(G)$ es Noetheriano.*

Apéndice D

Compleción

En este capítulo introduciremos brevemente la maquinaría de la compleción de un anillo conmutativo.

Definición D.0.1. *Sea R un anillo y A un R-módulo, cualquier ideal propio $\mathfrak{i}$ define una topología en R la cual se le llama **topología $\mathfrak{i}$-ádica** (también conocida como topología de Krull) esta topología queda definida considerando como base local del 0 a $\{\mathfrak{i}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (con la convención de que $\mathfrak{i}^0 = R$) e imponiendo que la suma es continua.*

Esta última condición es para que los conjuntos $\{r + \mathfrak{i}^n\}$ formen un base para los abiertos. El anillo R con la topología $\mathfrak{i}$-ádica se vuelve un anillo topológico (un anillo topológico es un anillo con una topología en las que el producto y la multiplicación son continuos).

Definición D.0.2. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de un anillo topológico R, decimos que la sucesión es **de Cauchy** si para cualquier vecindad U de 0, existe un entero positivo $s(U)$ tal que para todo $\lambda, \gamma \geq s(U)$ tenemos*

$$x_\lambda - x_\gamma \in U.$$

Si para cualquier vecindad de 0 digamos V existe un natural $s(V)$ tal que $n > s(V)$ entonces $x_n \in V$, diremos que $x_n \to 0$. En el caso que dos sucesiones de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplan

$$x_n - y_n \to 0$$

*diremos que son **equivalentes**.*

Una manera equivalente y conveniente de esta definición en el caso de que el anillo topologíco tiene la topología $\mathfrak{i}$-ádica es la de una sucesión coherente.

Definición D.0.3. *Consideremos la filtración de nuestro anillo R donde $\mathfrak{i}$ es un ideal de R:*

$$R := \mathfrak{i}^0 \supset \mathfrak{i} \supset \cdots \mathfrak{i}^{n-1} \supset \mathfrak{i}^n ...$$

*junto con los morfismos dados por la proyección $\theta_{n+1} : R/\mathfrak{i}^{n+1} \to R/\mathfrak{i}^n$. Decimos que una sucesión de elementos $(x_n) \in \prod(R/\mathfrak{i}^n)$ es **coherente** si $\theta(x_{n+1}) = x_n$ para todo n.*

En realidad lo que ocurrió anteriormente es el caso de un sistema inverso. Al anillo que forman las sucesiones coherentes es lo que se le conoce como el **límite inverso** (o solo límite).

Teorema D.0.4. *Son equivalentes todas las siguientes maneras de definir la* ***compleción*** $\mathfrak{i}$***-ádica*** $\widehat{R}$ *de un anillo* R*:*

1. $\widehat{R}$ *es el anillo formado por las sucesiónes de Cauchy del anillo topológico* R *con la topología* $\mathfrak{i}$*-ádica.*
2. $\widehat{R}$ *es el anillo formado por las sucesiónes coherentes bajo la filtración descrita anteriormente, en particular tenemos que* $\widehat{R}$ *es*

$$\varprojlim R/\mathfrak{i}^n = \{(x_n) \in \prod (R/\mathfrak{i}^n)) \mid x_j \cong x_n \ mod \ \mathfrak{i}^n \ con \ j > n\} = ker(d)$$

en el que $d : \prod R/\mathfrak{i}^n \to \prod R/\mathfrak{i}^n$ *con* $d(x_n) = (x_n - \theta_{n+1}(x_{n+1}))$ *y* $\widehat{R}$ *tiene la topología del límite inverso.*

Este teorema es fácil de verificar ya que basta ver que toda sucesión de Cauchy induce una sucesión coherente y viceversa, mientras que la presentación de $\widehat{R}$ como subconjunto del producto se debe a la forma de los límites inversos en la categoría de anillos. Sea (x_v) una sucesión de Cauchy en R con la topología $\mathfrak{i}$-ádica, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un natural $s(n)$ tal que si $s(n) \leq \lambda, \mu$ entonces

$$x_\lambda - x_\mu \in \mathfrak{i}^n$$

notemos que esto implica que la imagen de esta sucesión en $R/\mathfrak{i}^n$ es eventualmente constante, digamos ξ_n, más aún bajo $\theta_{n+1} : R/\mathfrak{i}^{n+1} \to R/\mathfrak{i}^n$ tenemos que $\xi_{n+1} \mapsto \xi_n$ por lo tenemos una sucesión coherente inducida. Si tenemos una sucesión coherente ξ_n, para cada n hay una x_n tal que $x_n + \mathfrak{i}^n = \xi_n$, aplicando θ_{n+1} tenemos:

$$x_n + \mathfrak{i}^n = \xi_n = \theta_{n+1}(\xi_{n+1}) = \theta_{n+1}(x_{n+1} + \mathfrak{i}^{n+1}) = x_{n+1} + \mathfrak{i}^n$$

Por lo que $x_{n+1} - x_n \in \mathfrak{i}^n$ y por ende la sucesión (x_n) es de Cauchy. Tambien como es de esperarse la compleción de un anillo topológico es un anillo topológico completo [**39**].

Apéndice E

Soportes

Empezaremos esta sección del apéndice introduciendo el espectro de un anillo para luego definir el soporte según Segal [**14**] cuyo concepto empataremos con el de B.0.3.

Definición E.0.1. *Sea A un anillo,* ***el espectro del anillo*** *A es el conjunto de ideales primos*

$$Spec(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\}$$

al cual le dotaremos de una topología (conocida como la ***topología de Zariski****), de la siguiente manera: sea $E \subset A$, definimos*

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \mid \ \mathfrak{p} \text{ es ideal primo y } E \subset \mathfrak{p}\}$$

entonces se cumplen:

1. *Si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por E entonces $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$ donde $r(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ ($r(\mathfrak{a})$ tiene una estructura de ideal ya que $r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{R}_{A/\mathfrak{a}})$ y $\mathfrak{R}_A = \{x \in A \mid x^n = 0 \text{ para algún } n > 0\}$ es el nilradical de A).*
2. *$V(0) = Spec(A)$ y $V(1) = \emptyset$.*
3. *Si $(E_i)_{i\in I}$ entonces $V(\cup_{i\in I} E_i) = \cap_{i\in I} V(E_i)$*
4. *Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son ideales de A, tenemos $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.*

Por lo que $V(E)$ cumplen los axiomas de los conjuntos cerrados para espacios topológicos, la topología que definen estos conjuntos cerrados es la topología buscada.

Antes de entrar en la definición del soporte, observemos que los funtores que inducen *tomar espectro de anillos* y *tomar anillo de representaciones* son funtores contravariantes. En el caso del primer funtor, si tenemos un homomorfismo de anillos $f : R \to S$, este induce

$$Spec(f) : Spec(S) \to Spec(R)$$
$$\mathfrak{s} \mapsto f^{-1}\mathfrak{s}$$

En el segundo caso, si tenemos $r : H \to G$ el homomorfismo de restricción, este induce primeramente un homomorfismo de semigrupos entre las clases de isomorfismo de representaciones lineales complejas de dimensión finita de G y las clases de isomorfismo de representaciones lineales complejas de dimensión finita de H, mandando la clase de isomorfismo de una representación lineal V en la clase de isomorfismo de esa misma representación lineal V pero olvidándose de la acción de G y dejando la de H. Esto baja al nivel de los anillos de representaciones de G y H debido a la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, por lo que obtenemos $r_H^G : R(G) \to R(H)$.

Definición E.0.2. *Sea H un subgrupo de G, primeramente podemos considerar el homomorfismo de restricción $r : H \to G$, luego consideremos el homomorfismo entre los anillos de representaciones inducido por la restricción $r_H^G : R(G) \to R(H)$. Despues consideremos los espectros de anillos Spec $R(G)$ y Spec $R(H)$ y la función entre espectros inducida por el homomorfismo entre anillos de representaciones inducido por la restricción $Spec(r_H^G) : Spec\ R(H) \to Spec\ (R(G))$. Por último, fijemos $\mathfrak{p}$ un ideal de Spec $R(G)$ y examinemos el conjunto*

$$\{H \mid H \text{ es un subgrupo de } G \text{ y } \exists \mathfrak{h} \in Spec(R(H)) \text{ tal que } Spec(r_H^G)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{p}\}$$

*Este conjunto tiene elementos mínimos como el conjunto de subgrupos de G esta bien fundado; el **soporte de** $\mathfrak{p}$ es cualquiera de estos elementos mínimos.*

Segal en su artículo [**14**] también prueba la siguiente proposición [**14**, Proposición 3.7.] de la cual solo nos interesaran los incisos i y iv:

Proposición E.0.3.

i) *Cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de $R(G)$ tiene soporte S el cual es un subgrupo cíclico de G salvo conjugación en G. Los ideales primos de $R(S)$ cuya imagen (bajo $Spec(r_S^G)$) son permutados transitivamente por el grupo $N(S)/Z(S)$.*

iv) *Si H es un subgrupo de G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  1. *$\mathfrak{p}$ proviene de $R(H)$.*
  2. *$\mathfrak{p}$ contiene a $ker(Spec(r_H^G))$.*
  3. *el módulo localizado $R(H)_{\mathfrak{p}}$ es no cero.*
  4. *el soporte de $\mathfrak{p}$ es conjugado a un subgrupo de H.*

El cual justifica la notación de *soporte* introducida en el anexo de localización. Por último enunciaremos un resultado derivado de las proposiciones 3.5 y 3.7 de [**14**] el cual esencialmente nos dice que en el caso que un ideal primo de $R(G)$ proviene de $R(H)$, entonces su soporte es un subgrupo de H.

Proposición E.0.4 (3.5 [**2**])**.** *Si $S \subset H$ es el soporte de un ideal primo $\mathfrak{q} \subset R(H)$, entonces S es el soporte de $(r_H^G)^{-1}(\mathfrak{q}) \subset R(G)$.*

Apéndice F

Pro-objetos

Como nuestra teoría de cohomología, la K-teoría, no se comporta bien en complejos infinitos, se desarrollará un análisis de los grupos de cohomología de subcomplejos finitos, lo cual nos lleva al concepto de teoria de cohomología valuada en progrupos.
En esta sección del apéndice expondremos resultados básicos de progrupos, expuestos en Grothendieck [**27**] y en el apéndice de Artin, Mazur [**24**]. Otras fuentes usadas son [**29**] y [**30**]. Algunos detalles de lo que expondremos se discuten en el cápitulo V *Límites* del libro de Mac Lane [**26**] y en la sección de *3.4. The representable nature of limits and colimits* de [**28**].
Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, es decir una categoría en la que para cualquier par de objetos A, B, su *hom* es un conjunto $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$; podemos considerar よ^A y よ_B los funtores:

$$\text{よ}^A = hom_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to Set \text{ y } \text{よ}_B = hom_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & hom_{\mathcal{C}}(A, X) \arrow[d, "f \circ -"] & X \arrow[r, mapsto] & hom_{\mathcal{C}}(X, B) \\
Y \arrow[r, mapsto] & hom_{\mathcal{C}}(A, Y) & Y \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "g^{op}"] & hom_{\mathcal{C}}(Y, B) \arrow[u, "- \circ g"']
\end{tikzcd}$$

Definición F.0.1. *Diremos que un funtor covariante de una categoria localmente pequeña $\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to Set$ es* ***representable*** *si existe un objeto $c \in \mathcal{C}$ para el cual hay un isomorfismo natural entre F y よ^C. Dualmente tenemos la noción de un funtor contravariante* ***co-representable*** *con よ_C.*

El lema de Yoneda nos dice:

Teorema F.0.2 (Lema de Yoneda)**.** [**28**, 2.2.4.]
Para todo funtor $F : \mathcal{C} \to Set$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría localmente pequeña y $c \in \mathcal{C}$, hay una biyección natural en c y F entre

$$hom_{Set^{\mathcal{C}}}(\text{よ}^C, F) \cong F(c)$$

que le asocia a una transformación natural $\alpha : \text{よ}^A \Rightarrow F$ el elemento $\alpha_c(Id_C)$.

Recordemos que si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías, podemos considerar la categoría $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ (tambien denotada por $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$) de funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ cuyos objetos son los funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos.
Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, consideremos el bifuntor

$$hom_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set.$$

$$\begin{tikzcd}
(X,Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{f^{op}, g}"'] & hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[d, "g \circ - \circ f"] \\
(W,Z) \arrow[r, mapsto] & hom_{\mathcal{C}}(W,Z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\
W \arrow[u, "f"] \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

este tiene dos encarnaciones, la primera es considerar para cada objeto X en $\mathcal{C}$, el funtor contravariante de $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos $\text{よ}_X \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$ y se obtiene el funtor

$$\begin{aligned} \text{よ}_{-} &: \mathcal{C} \to Set^{\mathcal{C}^{op}} \\ X &\mapsto \text{よ}_X \end{aligned}$$

Analogamente podemos considerar para cada objeto X en $\mathcal{C}$, el funtor covariante de $\mathcal{C}^{op}$ en la categoría de conjuntos $\text{よ}^X \in Set^{\mathcal{C}}$ y obtener

$$\begin{aligned} \text{よ}^{-} &: \mathcal{C}^{op} \to Set^{\mathcal{C}} \\ X &\mapsto \text{よ}^X \end{aligned}$$

el encaje de Yoneda nos dice:

Corolario F.0.3. [**28**, 2.2.8.]
Los funtores:

$$\begin{array}{cc} C \xrightarrow{\text{よ}_{-}} Set^{C^{op}} \quad y & C^{op} \xrightarrow{\text{よ}^{-}} Set^{C} \\ A \mapsto hom_C(-,A) = \text{よ}_A & B \mapsto hom_C(B,-) = \text{よ}^B \end{array}$$

son encajes fieles y plenos.

Aplicando el Lema de Yoneda a よ_X con el objeto Y obtenemos el siguiente corolario.

Corolario F.0.4. *La función inducida de $hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a $hom_{Set^{\mathcal{C}^{op}}}(\text{よ}_X, \text{よ}_Y)$ es una biyección.*

Notemos que cualquier objeto en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ que sea isomorfo a uno de la forma よ_X queda unicamente determinado por X salvo isomorfismo por el *lema de*

Yoneda. Por último observemos que よ_{-} es una equivalencia de categorias entre $\mathcal{C}$ y la subcategoría plena de funtores representables de $Set^{C^{op}}$).

Proposición F.0.5. [**26**, V.4. Teorema 1]
Sea I un categoría pequeña y $F : I \to C$ un funtor tal que el límite $\varprojlim F$ existe. Entonces $\text{よ}_{-} : C \to Set^{C^{op}}$ preserva límites y mas aun $\text{よ}_{-}(\varprojlim F)$ es canónicamente isomorfo a $\varprojlim \text{よ}_{-} \circ F$.

Dualizando tenemos una versión dual análoga de la proposición anterior, la cual nos dice que $\text{よ}^{-} : \mathcal{C}^{op} \to Set^{\mathcal{C}}$ preserva colimites (y que de hecho hay un isomorfismo canónico).
Ahora introduciremos el concepto de las categorias filtradas, las cuales son una generalización de los conjuntos dirigidos. Si bien la propiedad 1. es un análogo categórico de la existencia de la cota superior, la condición 2 es un nuevo requerimiento que en realidad ya satisfacen los conjuntos dirigidos ya que no hay morfismos paralelos.

Definición F.0.6. *Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es **filtrada** si $\mathcal{C}$ es no vacía y se cumple:*

1. *Para cualquier par de objetos j, j' de la categoría $\mathcal{C}$ existe un objeto k de $\mathcal{C}$ y morfismos $j \to k$, $j' \to k$.*
2. *Para cualesquiera morfismos paralelos $u, v : i \to j$ de $\mathcal{C}$ tenemos que existe un objeto k de $\mathcal{C}$ y un morfismo $w : j \to k$ tales que el siguiente diagrama conmuta (i.e.$wu = wv$)*

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & j \arrow[d, "w"] \\
j \arrow[r, "w"'] & k
\end{tikzcd}$$

*Dualmente decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría **cofiltrada** si $\mathcal{C}^{op}$ es filtrada.*

Definición F.0.7. *Un cólimite de un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría filtrada se dice que es un **colímite filtrado**. Dualmente definimos el **límite filtrado** como el límite de un funtor definido en una categoría cofiltrada.*

Por un diagrama de forma $\mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$ entenderemos un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. En este caso decimos que la categoría $\mathcal{J}$ es la categoría índice.

Definición F.0.8. *Denotemos $\mathcal{X} = (X_j)_{j \in \mathcal{J}}$ a un funtor $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{J}$ es una categoría cofiltrada. A dichos diagramas los llamaremos **sistemas proyectivos** (o sistemas inversos). Notemos que a un sistema proyectivo*

$\mathcal{X} = (X_j)_{j \in \mathcal{J}}$ *le corresponde el funtor covariante* $\text{よ}^{\mathcal{X}} : \mathcal{C} \to Set$ *tomando*

$$\text{よ}^{\mathcal{X}} = \varinjlim_j \text{よ}^{X_j}$$

es decir, de manera mas explícita

$$\text{よ}^{\mathcal{X}}(Y) = \varinjlim_j \text{よ}^{X_j}(Y) = \varinjlim_j hom_{\mathcal{C}}(X_j, Y)$$

A un funtor que sea isomorfo a uno de esta manera con $\mathcal{J}$ *filtrada, le llamaremos* ***pro-representable****.*

Estos son los funtores de $\mathcal{C}$ en Set que son isomorfos a limites filtrados de funtores representables.

Definición F.0.9. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría, definimos* ***la categoría de pro-objetos de*** $\mathcal{C}$ *,* $Pro\text{-}\mathcal{C}$*, como la categoría cuyos objetos son sistemas proyectivos y cuyos morfismos estan dados por:*

$$hom_{Pro\text{-}\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \varprojlim_j \varinjlim_i hom_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \ \textit{ con } \mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}, \mathcal{Y} = (Y_j)_{j \in J}.$$

La motivación de la definición anterior se debe a que tenemos una biyección canónica

$$hom_{Set^{\mathcal{C}}}(\text{よ}^{\mathcal{Y}}, \text{よ}^{\mathcal{X}}) \cong \varprojlim_j \varinjlim_i hom_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$$

Para ver esta biyección consideremos la siguiente proposición:

Proposición F.0.10. *Sea* I *una categoría pequeña y* $F : I \to \mathcal{C}$ *un diagrama con forma* I *en* $\mathcal{C}$*. Entonces para todo* $X \in \mathcal{C}$ *hay una biyección canónica entre*

$$hom_{Set^{\mathcal{C}}}(\text{よ}^{X}, \varinjlim_i \text{よ}^{-} \circ F) \cong \varinjlim_i hom_{\mathcal{C}}(F(-), X)$$

Demostración.

Como los límites y colímites se calculan puntualmente tenemos que para todo $Y \in \mathcal{C}$:

$$(\varinjlim_i \text{よ}^{-} \circ F)(Y) = \varinjlim_i hom_{\mathcal{C}}(F(-), Y)$$

Por lo que tenemos

$$\begin{aligned} hom_{Set^{\mathcal{C}}}(\text{よ}^{X}, \varinjlim_i \text{よ}^{-} \circ F) &\to \varinjlim_i hom_{\mathcal{C}}(F(-), X) \\ \phi &\mapsto \phi_X(Id_X) \end{aligned}$$

En el caso de tener $\phi_X(Id_X)$, podemos determinar la transformación natural $\phi \in hom_{Set^{\mathcal{C}}}(\text{よ}^{X}, \underline{\lim}_i \text{よ}^{-} \circ F)$ ya que si consideramos $f : X \to Y$, tenemos que el cuadrado que representa la naturalidad conmuta

$$\begin{tikzcd} hom_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "f_*"'] & hom_{Set^{\mathcal{C}}}(F(-),X) \arrow[d, "f_*"] \\ hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\phi_Y"'] & hom_{Set^{\mathcal{C}}}(F(-),Y) \end{tikzcd}$$

y su conmutatividad: $\phi_Y(f) = f\phi_X(Id_X)$. □

Por lo que entonces tenemos

$$hom_{Set^{\mathcal{C}}}(よ^{\mathcal{Y}}, よ^{\mathcal{X}}) \cong \varprojlim_j hom_{Set^{\mathcal{C}}}(よ^{Y_j}, よ^{X}) \cong \varprojlim_j \varinjlim_i hom(X_i, Y_j)$$

Un funtor $F : \mathcal{C} \to C'$ induce un funtor $Pro\ F : Pro\text{-}\mathcal{C} \to Pro\text{-}C'$ de la manera obvia: si tenemos un pro-objeto de $\mathcal{C}$ digamos $\mathcal{X} : I^{op} \to C$ entonces $pro\ F(\mathcal{X})$ lo definimos por $F \circ \mathcal{X}$.
En sí los objetos de $\mathcal{C}$ se pueden pensar como pro-objetos si la categoría índice es la categoría de un punto y así tenemos que $\mathcal{C}$ es equivalente a una subcategoría completa de $Pro\text{-}\mathcal{C}$.
Es **importante** notar que en general el límite proyectivo $\varprojlim X_i$ en $\mathcal{C}$ de un sistema proyectivo $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ no tiene porque ser isomorfo a su limite proyectivo $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}$ y que los pro-objetos contienen mas información que el $\varprojlim_i X_i$, incluso si estos existen en $\mathcal{C}$, un ejemplo esto es el siguiente:

Ejemplo F.0.1. Consideremos el diagrama indexado por los naturales en Set:

$$\mathbb{N} \xleftarrow{*2} \mathbb{N} \xleftarrow{*2} \mathbb{N} \leftarrow \cdots$$

El límite es vacío pero hay muchos morfismos en $Pro\text{-}Set$ que tienen a este diagrama como dominio y codominio, esto se puede ver con ayuda de [**35**, 2.1.2] y como bien se menciona inmediatamente despues [**35**, 2.1.3] :

> La relación entre un pro-objeto y su límite inverso es análoga a la relación entre el germen de una función en un punto y su valor (en ese punto).
> *(The relationship between the pro-object and it's inverse limit is analogous to the relationship between the germ of a function at a point and its value (at that point)).*

Proposición F.0.11. [**24**, A.4, Proposición 4.4]
Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, $Pro\text{-}\mathcal{C}$ es cerrada bajo límites filtrados.

Proposición F.0.12. [**24**, A.4, Proposición 4.5]
Sea A una categoría aditiva (abeliana). Entonces Pro-$\mathcal{C}$ también es aditiva (abeliana).

Definición F.0.13. [**3**, p.10] *Consideremos una sucesión de pro-homomorfismos cuya composición es el pro-homomorfismo cero*

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathcal{Z}$$

Por definición

$$f \in hom_{Pro\text{-}\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \varprojlim_{j} \varinjlim_{i} hom_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \text{ con } \mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}, \mathcal{Y} = (Y_j)_{j \in J}.$$

es un sistema de elementos compatibles

$$f_j \in \varinjlim_{i \in I} hom_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$$

*y cada f_j es la clase de equivalencia de un representante $f_{ij} \in hom_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$. Diremos que la sucesión es **pro-exacta** en Y si para cada representante $X_\alpha \xrightarrow{f_{\alpha\beta}}$ hay un diagrama:*

$$X_\alpha \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} Y_\beta \xleftarrow{m} Y_\gamma \xrightarrow{g_{\gamma\delta}} Z_\delta$$

en el que m es un morfismo de $\mathcal{Y}$, $g_{\gamma\delta}$ es un representante de algún g_δ de g y

$$m(ker(g_{\gamma\delta})) \subset im(f_{\alpha\beta}).$$

Bibliografía

[1] A. Blumberg, *The Burnside Category*, notas del curso ”Topics in Algebraic Topology, Spring 2017”https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/blumberg-burnside.pdf (2017)

[2] Adams, Haeberly, Jackowski, May, *A generalization of the Atiyah Segal Completion Theorem*, Topology, Volume 27, Issue 1, p. 1-6, https://doi.org/10.1016/0040-9383(88)90002-X (1988)

[3] Adams, Haeberly, Jackowski, May, *A generalization of the Segal conjecture*, Topology Vol.27, No.I, p.7-21, (1988)

[4] A. Hatcher, *Vector Bundles K-Theory*, http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT (2001)

[5] Eilenberg and Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press (1952)

[6] M.F. Atiyah, *K-Theory*, Lecture notes by D.W.Anderson (1964)

[7] M.F. Atiyah, Graeme Segal, *Equivariant K-theory and completion*, Journal of Differential Geometry, Volume 3, Number 1-2 (1969)

[8] M.F. Atiyah, *Bott periodicity and the index of elliptic operators*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 87, No. 3, p. 484-530 (1968)

[9] M.F. Atiyah, R. Bott, *Periodicity theorem for complex vector bundles* Acta Mathematica, Volume 112, p. 229-247 (1964)

[10] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969)

[11] Bott, Raoul, *The stable homotopy of the classical groups*, Annals of Mathematics, Second Series, 70 (2): 313–337, doi:10.2307/1970106 (1959)

[12] J.P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures (1999)

[13] Graeme Segal, *Equivariant K-Theory*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 34, p. 129-151 (1967)

[14] Graeme Segal, *The representation ring of a compact Lie Group*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 34, p. 113-128 (1968)

[15] Dale Husemöller, M. Joachim, B. Jurcŏ, M. Schottenloher, *Basic Bundle Theory and K-Cohomology Invariants*, Springer (2017)

[16] Dale Husemöller, *Fibre bundles*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag (1994)

[17] J.P. May with contributions by M. Cole, G. Comezana, S. Costenoble, A.D. Elmendorf, J.P.C. Greenlees, L.G. Lewis, Jr., R.J. Piacenza, G. Triantafillou, S. Waner, *Equivariant Homotopy and Cohomology Theory*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics volume 91 (1996)

[18] W. Lück, *Equivariant cohomological Chern Characters*, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 15, Nos. 5 6, pp 1025-1052 (2005)

[19] W. Lück, B. Oliver, *The completion theorem in K-theory for proper actions of a discrete group*, https://doi.org/10.1016/S0040-9383(99)00077-4 (2001)

[20] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1974)

[21] W. Lück, *Survey on Classifying Spaces for Families of Subgroups*, https://arxiv.org/pdf/math/0312378.pdf (2018)

[22] W. Lück, *Transformation groups and algebraic K-theory*, Springer (1989)

[23] S. Waner, *Equivariant Homotopy Theory Milnor's Theorem*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 258, No. 2, pp. 351-368 (1980)

[24] M. Artin, B. Mazur, *Etale Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, Springer (1969)

[25] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory, a first course*, Springer-Verlag (1991)

[26] Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1978)

[27] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorémes d'existence en géométrie algébriques. II.* Le théoréme d'existence en théorie formelle des modules, in Séminaire Bourbaki : annés 1958/59 - 1959/60, exposés 169-204, Séminaire Bourbaki, no. 5, Talk no. 195, pp. 369-390 (1960)

[28] E. Riehl, *Cathegory theory in context*, Aurora, Dover Publications (2017)

[29] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Theorie des topos et cohomologie etale des schemas*, Vol. 269. Lecture Notes in Mathematics. Springer- Verlag, (1972).

[30] D.C. Isaksen, *Calculating limits and colimits in pro-categories*, https://arxiv.org/abs/math/0106094 (2001)

[31] Sören Illman, *Equivariant Algebraic Topology*, PhD thesis, Princeton University, http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AIF/AIF_1973__23_2/AIF_1973__23_2_87_0/AIF_1973__23_2_87_0.pdf (1972)

[32] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag (1995)

[33] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré, *Lusternik Schnirelmann*, Mathematical surveys and monographs, Volume 103, AMS (2003)

[34] I.M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology 17, no.4, pg.331-348 (1978)

[35] D.A. Edwards, H.M. Hastings, *Cech and Steenrod Homotopy Theories with applications to Geometric Topology*, Springer-Verlag (1976)

[36] J. Cantarero, *Equivariant K-theory, groupoids and proper actions*, PhD Thesis, The University of British Columbia, Vancouver (2009)

[37] Loring W.Tu, *What is... Equivariant Cohomology?*, Notices of the American Mathematical Society 58, pg.423-426, arXiv:1305.4293 (2011)

[38] A. Borel et al., *Seminar on transformation groups* Ann. of Math. Studies. n°46 (1960)

[39] D.Sullivan, *Geometric topology: localization, periodicity and Galois symmetry* volume 8 of K- Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht (2005)

[40] M.Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint* Universitext, Springer-Verlag (2002)

[41] S. Willard, *General Topology* Dover (2004)

[42] S. de Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transfromaciones* Aportaciones matemáticas (2005)

[43] A. Gleason, *Spaces with a compact Lie group of transformations* Proceeding of the American Mathematical Society, Vol 1, No.1, pg.35-43 (1950)

[44] M. Fujii, S. Kono, *A note on the local triviality of G-vector bundles* Yokohama Mathematical Journal, Vol 30 (1982)

[45] U. Buchholtz, *The Atiyah-Segal completion theorem*, Master Thesis, http://web.math.ku.dk/ jg/students/buchholtz.ms.2008.pdf (2008)

[46] M. Torres, *Acciones propias de grupos localmente compactos* Tesis de Licenciatura, UNAM (2018)

[47] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups* Academic Press (1972)

[48] G.D. Mostow, *Equivariant embeddings in Euclidean space* Ann. Math. 65, no. 3, pg.432-446 (1957)

[49] M.J. Behrens, *A new proof of the Bott periodicity theorem* Topology and its Applications 119 pg.167–183 (2002)

[50] M.A. Aguilar, C. Prieto, *Quasifibrations and Bott periodicity*, Topology Appl. 98 pg.3–17 (1999)

Índice alfabético