



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

CONVECCIÓN TERMOCAPILAR DE UNA CAPA DELGADA DE LÍQUIDO QUE CUBRE
UNA PARED GRUESA CON DESLIZAMIENTO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ISABEL MONSERRAT SÁNCHEZ BARRERA

TUTOR PRINCIPAL:
DR. LUIS ANTONIO DÁVALOS OROZCO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:
DR. FRANCISCO JAVIER MANDUJANO SÁNCHEZ
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:
DR. GERARDO RUÍZ CHAVARRÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., FEBRERO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

"I can no longer hear my voices, so I am a little lost. My suspicion is they would know far better how to tell this story"

J. Katzenbach

Este espacio lo quiero aprovechar para agradecer a las personas que me apoyaron durante la realización de este trabajo.

A mi mamá, Isabel Barrera, y a mi tía Josefina, por siempre apoyarme, escucharme en estos tiempos y estar a mi lado.

A mi tutor, Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco, por tenerme paciencia y apoyarme durante la realización de este trabajo. También a mi comité tutor, Dr. Francisco Javier Mandujano Sánchez y Dr. Gerardo Ruíz Chavarria, y a mis sinodales Dr. Pablo Luis Rendón Garrido, Dr. Federico Hernández Sánchez, Dr. Carlos Echeverría Arjonilla y Dr. Alejandro Sebastián Ortiz Pérez, por el apoyo en la revisión de este trabajo y sus comentarios para mejorarlo.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales y al Posgrado en Ciencias Físicas por brindarme la oportunidad y los espacios necesarios para mis estudios de maestría.

A mis amigos por estar a mi lado en los tiempos difíciles, por el apoyo y los momentos de ocio incluso de forma virtual. A Daniel Moo por ser mi confidente después de tantos años. A José Luis porque estamos juntos en esto en las buenas y en las malas. A Ederaldo y a Johas porque incluso de forma virtual siguen presentes. A Germán, porque sé que pase lo que pase siempre puedo contar con él. A Diego, por no dejarme enloquecer sola y estar incluso en los días grises. Al equipo de *Física y Arte* por ampliar mis perspectivas.

En fin, gracias por haber estado a mi lado en esta nueva experiencia.

Índice general

Resumen.	4
Introducción.	5
Capítulo 1	
Aspectos preliminares.	7
1.1 Características de una superficie deformable.	7
1.1.1 Curvatura de una superficie.	8
1.1.2 Balance de fuerzas superficiales en la superficie libre de una capa de líquido.	9
Capítulo 2	
Convección termocapilar de una capa delgada de líquido sobre una pared sólida de espesor finito con deslizamiento.	13
2.1 Planteamiento del problema.	13
2.1.1 Condiciones de frontera.	17
2.2 Método de perturbaciones en parámetros pequeños.	22
2.3 Solución a orden menor.	26
Capítulo 3	
Análisis lineal de la ecuación de evolución de la deformación superficial.	32
3.1 Análisis en modos normales.	33
3.1.1 Caso con $Bo > 0$	36
3.1.2 Caso con $Bo < 0$	41
Conclusiones.	49
Bibliografía	52

Resumen

En el presente trabajo se investigó la estabilidad lineal de una capa delgada de líquido sobre una pared gruesa horizontal con deslizamiento, la superficie externa de la pared y la atmósfera se encuentran a distinta temperatura. En este tipo de sistemas existen una amplia variedad de factores que pueden provocar la inestabilidad del mismo bajo ciertas condiciones. Este trabajo se enfocó principalmente en examinar cómo afecta el deslizamiento parcial en la pared, la tensión superficial y sus gradientes debidos a la temperatura, la gravedad y la razón entre los espesores de la pared y la capa de fluido al comportamiento del sistema. Se utilizó la aproximación de lubricación y un desarrollo asintótico para obtener una ecuación de evolución no lineal para la deformación superficial de la capa de líquido. Se encontró que los parámetros físicos de interés son la longitud de deslizamiento, el número de Marangoni, el número de Bond y el cociente d/χ , que representa la razón de los espesores de la capa de líquido y de la pared con sus respectivas conductividades térmicas. Se estudiaron dos casos, número de Bond positivo y negativo. El caso con número de Bond negativo corresponde a voltear el sistema, por lo que presenta la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Los resultados mostraron que para números de Bond positivos, la gravedad tiene un papel estabilizador, lo contrario ocurre para números de Bond negativos. Asimismo, para números de Marangoni negativos, el aumento de su magnitud, estabiliza al sistema. El caso contrario lo vuelve inestable. Sin embargo, para números de Marangoni positivos, un aumento en el deslizamiento o en la razón d/χ , provocan que crezca la región de estabilidad. Por el contrario, para números de Marangoni negativos, permiten que la región de estabilidad disminuya.

Introducción.

El movimiento inducido por gradientes de tensión superficial debidos a cambios en la temperatura en interfaces líquido/gas o líquido/líquido se conoce como convección termocapilar [1]. Este efecto fue descrito por primera vez por el físico italiano Carlo Marangoni [2], y por ello también se conoce como convección de Marangoni. Este fenómeno ha sido observado en distintos procesos como el secado de capas delgadas de pintura, el movimiento de pequeñas gotas y burbujas, en la combustión de combustible líquido, el crecimiento de cristales, entre otros. [1, 3]

El interés en las capas delgadas se debe a que se encuentran en nuestra vida cotidiana, además de sus aplicaciones industriales y de las nuevas tecnologías que se han desarrollado gracias a ellas [4]. Entre las aplicaciones que son de interés se encuentran aquellas donde el calentamiento o enfriamiento de las mismas juega un papel relevante. Los primeros estudios sobre estabilidad de capas delgadas encontraron que era posible desestabilizarlas mediante gradientes de tensión superficial debidos a cambios de temperatura [5]. En estos trabajos se consideraban solamente capas delgadas sobre superficies sin deslizamiento y cuya superficie libre era plana. Del mismo modo se idealizaban las propiedades térmicas de la pared. Posteriormente se empezó a estudiar el caso en que la superficie libre se podía deformar [6]. Sin embargo, es importante notar que, para tener una mejor aproximación a la realidad, se debe considerar el grosor de la pared y sus propiedades térmicas, como lo es la conductividad térmica. Esto se debe a que se ha encontrado que, controlando esos parámetros de la pared, es posible estabilizar el sistema [7–9].

Por otra parte, generalmente, para el estudio de capas delgadas la condición de adherencia es la más usada. Sin embargo, existen casos en los que esta condición no se puede aplicar como el flujo de líquidos poliméricos sobre superficies lisas [10], flujo en microcanales hidrofóbicos [11], humectación y deshumectación de sustratos heterogéneos o estructurados [12], recubrimientos superhidrofóbicos, superoleofóbicos u omnifóbicos [13]. En el caso de los recubrimientos deslizantes, estos tienen la particularidad de que son superficies rugosas en su nano y micro estructura, lo cual provoca que a escala macroscópica se comporte como una superficie suave y tenga una longitud de deslizamiento efectiva [13–15]. La estabilidad de una capa delgada bajo esta condición de frontera ya ha sido estudiada utilizando la condición de deslizamiento de Navier, la cual asocia una longitud de deslizamiento a la pared, la cual cuantifica el deslizamiento sobre esta, y se ha encontrado que

puede modificar la estabilidad del sistema dependiendo de otros parámetros del mismo [16–19]. No obstante, se ha estudiado de forma ideal, ya que no se considera su efecto conjunto cuando la pared tiene un grosor y una conductividad térmica finitos.

En este trabajo se investiga la estabilidad lineal termocapilar de una capa delgada de fluido newtoniano que se encuentra sobre una pared sólida con deslizamiento, grosor y conductividad térmica finitos. Además, se está considerando que existe una diferencia de temperaturas entre la atmósfera y la parte externa de la pared. En este último punto radica la importancia de considerar el grosor y conductividad térmica de la pared, puesto que en general las propiedades de los materiales que pueden conformar a la pared son susceptibles a las variaciones de la temperatura. Adicionalmente, se examinará el comportamiento del sistema cuando la superficie libre de la capa de líquido se deforma libremente. Uno de los objetivos principales de este trabajo, aunado a los antes mencionados, es ver cómo influye la cantidad de deslizamiento en el comportamiento del sistema, si contribuye a desestabilizarlo y bajo qué condiciones. Asimismo, entender qué efecto tiene voltear verticalmente el sistema, particularmente cuando se considera que está en un entorno con gravedad. Ya que, bajo estas condiciones la distribución de densidades que se forma entre la capa de fluido y la atmósfera cambian, añadiendo un factor extra a considerar en la estabilidad del sistema completo. Esto es, la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.

Capítulo 1

Aspectos preliminares.

1.1. Características de una superficie deformable.

En la realidad, rara vez se tiene una superficie plana como frontera de un fluido, por ello es conveniente tomar en cuenta superficies con forma general, y con base en esto realizar los cálculos que se relacionan con ella. Lo principal, es conocer los vectores unitarios asociados a ella. Sea F una superficie cualquiera que puede variar en el tiempo,

$$F(x, y, z, t) = 0. \quad (1.1)$$

Es importante que, en el caso de ser una superficie libre, se tome en cuenta la condición de que las partículas del fluido de la superficie permanecen en la superficie, es decir, se trata de una constante material, y por tanto satisface la siguiente expresión

$$0 = \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla F, \quad (1.2)$$

donde u , v y w son las componentes del vector velocidad \bar{u} . A la expresión de la ecuación (1.2) se le conoce como condición cinemática.

Supongase que la forma de la superficie puede reescribirse como

$$F(x, y, z, t) = z - h(x, y, t), \quad (1.3)$$

en cuyo caso, al sustituir en la expresión anterior, la condición cinemática se transforma en

$$w = h_t + uh_x + vh_y, \quad (1.4)$$

donde la notación que se está empleando para las derivadas es $h_t = \frac{\partial h}{\partial t}$, $h_x = \frac{\partial h}{\partial x}$ y $h_y = \frac{\partial h}{\partial y}$. A lo largo de este trabajo, se utilizará esta notación.

Esta expresión significa que la velocidad vertical w de la partícula en la superficie es igual a la variación temporal y espacial de la deformación superficial con los efectos advectivos de la velocidad u y v .

Considerando una superficie de la forma (1.3), su vector normal unitario se obtiene como:

$$\hat{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}. \quad (1.5)$$

Luego, se define al primer vector tangente ortonormal a la superficie como

$$\hat{t}^{(1)} = \frac{(1, 0, h_x)}{\sqrt{1 + h_x^2}}. \quad (1.6)$$

Por lo tanto, se puede usar el producto vectorial para calcular el segundo vector tangente ortonormal a la superficie,

$$\hat{t}^{(2)} = \hat{n} \times \hat{t}^{(1)},$$

esto es

$$\hat{t}^{(2)} = \frac{(-h_x h_y, 1 + h_x^2, h_y)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \sqrt{1 + h_x^2}}. \quad (1.7)$$

Cuando tenemos una superficie plana, en cuyo caso $h(x, y, t) = \text{constante}$, estos vectores se reducen a

$$\begin{aligned} \hat{n} &= (0, 0, 1) \\ \hat{t}^{(1)} &= (1, 0, 0) \\ \hat{t}^{(2)} &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

1.1.1. Curvatura de una superficie.

La curvatura de una superficie se define como

$$2H = -\nabla \cdot \hat{n} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (1.8)$$

donde H es la curvatura media, R_1 y R_2 son los radios de curvatura de las intersecciones de la superficie por dos planos ortogonales. Esta expresión puede ser reescrita al utilizar la definición

general obtenida para el vector normal (ec. (1.5)).

Con esto en mente, la divergencia de la normal queda como

$$\nabla \cdot \hat{n} = \partial_x \left(\frac{-h_x}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{-h_y}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}} \right) + \partial_z \left(\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}} \right).$$

Al sustituir esto último en la expresión para la curvatura (1.8):

$$2H = -\nabla \cdot \hat{n} = \frac{h_{xx}(1+h_y^2) + h_{yy}(1+h_x^2) - 2h_x h_y h_{xy}}{(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

1.1.2. Balance de fuerzas superficiales en la superficie libre de una capa de líquido.

Consideremos ahora el caso en que tenemos dos fluidos, uno es un líquido y el otro el gas de la atmósfera. El líquido se encuentra en la parte inferior y lo identificaremos, junto con sus propiedades, con el número 1; mientras que el gas, en la parte superior, le corresponde el número 2. Como la viscosidad dinámica de un gas generalmente es más pequeña que la de un líquido, en muchas circunstancias se pueden despreciar los esfuerzos viscosos del gas. Entonces, la interfase entre ellos corresponde a una superficie libre (ver Figura 1.1).

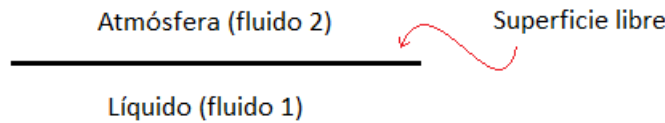


Figura 1.1: Esquema para el balance de fuerzas.

De manera general, en el balance de fuerzas a través de la interfase de ambos fluidos se tienen que tomar en cuenta los esfuerzos sobre ella, correspondientes a cada fluido, y la tensión superficial, por lo que la expresión que representa este balance es:

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \hat{n} = 2H\gamma\hat{n} + \nabla_s \gamma = -\nabla \cdot \hat{n}\gamma\hat{n} + \nabla_s \gamma, \quad (1.10)$$

donde el gradiente superficial corresponde al operador $\nabla_s = \nabla - \hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla)$, la tensión superficial es γ y el tensor de esfuerzos de un fluido newtoniano es $\boldsymbol{\sigma}_k = -p_k \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}_k$ con p_k la presión, \mathbb{I} el tensor identidad y $\boldsymbol{\tau}_k$ el tensor de esfuerzos cortantes, donde k denota al fluido, $k = 1$ para el líquido y

$k = 2$ para el aire de la atmósfera, para ambos fluidos se usa la misma expresión. Entonces, al sustituir la ecuación (1.9) y la definición para el tensor de esfuerzos, obtenemos que el balance de fuerzas es:

$$-(p_1 - p_2)\hat{n} + (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \hat{n} = \left(\frac{h_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + h_x^2) - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}} \right) \gamma \hat{n} + (\nabla - \hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla))\gamma \quad (1.11)$$

En general, la tensión superficial γ depende de la temperatura T . Entonces, una variación local de temperatura resulta en un gradiente de tensión superficial, esto es

$$\nabla_s \gamma = \frac{d\gamma}{dT} \nabla_s T = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) \nabla_s T,$$

nótese que se están agregando signos negativos porque en la mayoría de los líquidos un aumento en la temperatura resulta en una disminución de la tensión superficial, lo que se expresa como

$$-\frac{d\gamma}{dT} > 0.$$

Supondremos que el aire de la atmósfera es un gas invíscido, cuya presión es la de la atmósfera, es decir

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{y} \quad p_2 = p_{atm}.$$

En el líquido, la notación para estas variables se simplifica como

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau} \quad \text{y} \quad p_1 = p.$$

Con lo anterior en mente, la expresión (1.11) se reduce a

$$-(p - p_{atm})\hat{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{n} = \left(\frac{h_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + h_x^2) - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}} \right) \gamma \hat{n} + (\nabla - \hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla))\gamma. \quad (1.12)$$

A continuación procedemos a calcular los esfuerzos normales y tangenciales derivados de la expresión (1.12), para lo cual se utiliza la definición de los vectores unitarios normal y tangenciales de una superficie cualquiera.

Para los esfuerzos normales se desarrolla la expresión $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n} = n_i \sigma_{ij} n_j$, en ella se hace uso de la notación de índices. Esto es equivalente a proyectar la expresión (1.12) en la dirección normal, por tanto se tiene que

$$-(p - p_{atm}) + n_i \tau_{ij} n_j = \left(\frac{h_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + h_x^2) - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}} \right) \gamma.$$

Al desarrollar el término correspondiente al tensor de esfuerzos cortantes, y considerando que se trata de un tensor simétrico, obtenemos

$$n_i \tau_{ij} n_j = \frac{2\mu}{1 + h_x^2 + h_y^2} [h_x^2 u_x + h_y^2 v_y + w_z + h_x h_y (v_x + u_y) - h_x (w_x + u_z) - h_y (w_y + v_z)].$$

Entonces, la expresión completa para los esfuerzos normales es

$$\begin{aligned} -(p - p_{atm}) + 2\mu \left(\frac{h_x^2 u_x + h_y^2 v_y + w_z + h_x h_y (v_x + u_y) - h_x (w_x + u_z) - h_y (w_y + v_z)}{1 + h_x^2 + h_y^2} \right) \\ = \left(\frac{h_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + h_x^2) - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}} \right) \gamma. \end{aligned} \quad (1.13)$$

En el caso de los primeros esfuerzos tangenciales, la expresión a desarrollar es $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{t}^{(1)} = t_i^{(1)} \sigma_{ij} n_j$, que es la proyección de la expresión (1.12) en la dirección del primer vector tangente y la cual se transforma en

$$t_i^{(1)} \sigma_{ij} n_j = t_i^{(1)} \tau_{ij} n_j = t_i^{(1)} \partial_i \gamma = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) t_i^{(1)} \partial_i T = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) \left[\frac{T_x + h_x T_z}{\sqrt{1 + h_x^2}} \right].$$

Desarrollando el término del lado izquierdo y considerando que $t_2^{(1)} = 0$, tenemos

$$t_i^{(1)} \tau_{ij} n_j = \frac{\mu}{\sqrt{1 + h_x^2} \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} [2h_x (w_z - u_x) - h_y (v_x + u_y) + (1 - h_x^2)(w_x + u_z) - h_x h_y (v_z + w_y)].$$

Entonces, la expresión completa para los primeros esfuerzos tangenciales es

$$\mu \left(\frac{2h_x (w_z - u_x) - h_y (v_x + u_y) + (1 - h_x^2)(w_x + u_z) - h_x h_y (v_z + w_y)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \right) = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) [T_x + h_x T_z] \quad (1.14)$$

Finalmente, para los segundos esfuerzos tangenciales se desarrolla la expresión $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{t}^{(2)} = t_i^{(2)} \sigma_{ij} n_j$, que corresponde a la proyección de la expresión (1.12) en la dirección del segundo vector tangente. Esto toma la forma

$$t_i^{(2)} \sigma_{ij} n_j = t_i^{(2)} \tau_{ij} n_j = t_i^{(2)} \partial_i \gamma = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) t_i^{(2)} \partial_i T = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) \left[\frac{-h_x h_y T_x + (1 + h_x^2) T_y + h_y T_z}{\sqrt{1 + h_x^2} \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \right].$$

Al desarrollar el término de la izquierda obtenemos

$$t_i^{(2)}\tau_{ij}n_j = \frac{\mu}{(1+h_x^2+h_y^2)\sqrt{1+h_x^2}} [2h_y(h_x^2u_x - (1+h_x^2)v_y + w_z) - 2h_xh_y(w_x + u_z) + (1+h_x^2-h_y^2)(w_y + v_z - h_x(v_x + u_y))].$$

Por lo que la expresión completa para los segundos esfuerzos tangenciales es

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{2h_y(h_x^2u_x - (1+h_x^2)v_y + w_z) - 2h_xh_y(w_x + u_z) + (1+h_x^2-h_y^2)(w_y + v_z - h_x(v_x + u_y))}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}} \right) \\ = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) [-h_xh_yT_x + (1+h_x^2)T_y + h_yT_z]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En el caso de que la superficie libre sea plana, es decir, $h(x, y, t) = \text{constante}$, las expresiones para los tres esfuerzos se reducen a:

- Esfuerzos normales. En este caso las presiones en la superficie libre son iguales, $p = p_{atm}$.

$$w_z = 0. \quad (1.16)$$

- Primeros esfuerzos tangenciales.

$$\mu(w_x + u_z) = - \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) T_x \neq 0. \quad (1.17)$$

- Segundos esfuerzos tangenciales.

$$\mu(w_y + v_z) = - \left(\frac{d\gamma}{dT} \right) T_y \neq 0. \quad (1.18)$$

Capítulo 2

Convección termocapilar de una capa delgada de líquido sobre una pared sólida de espesor finito con deslizamiento.

2.1. Planteamiento del problema.

El sistema a estudiar es una capa de líquido de extensión infinita. El líquido en cuestión es un fluido newtoniano. Esta capa se encuentra entre una pared sólida de espesor finito y un gas. Además, ambos lados de la pared son planos y la interfase entre la pared y el líquido presenta deslizamiento.

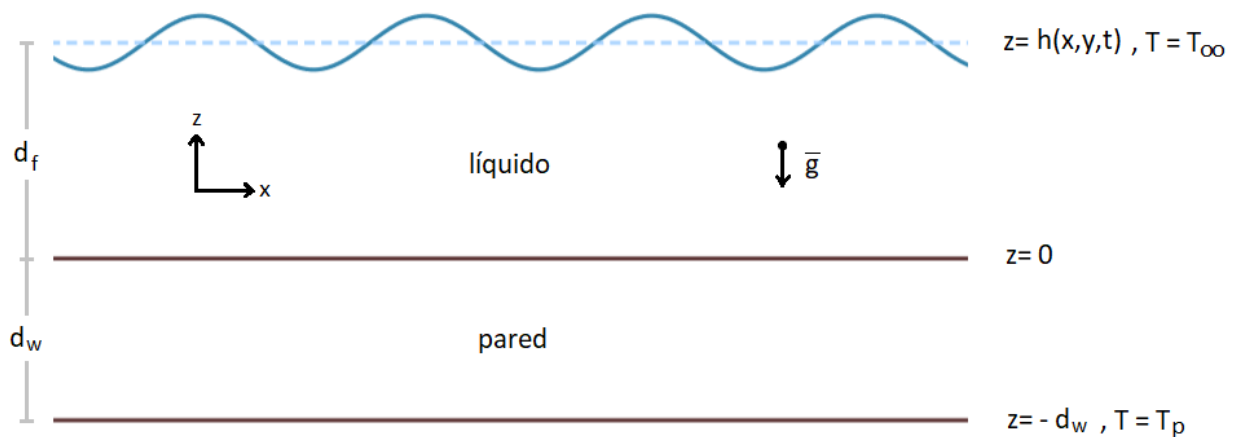


Figura 2.1: Esquema del sistema de estudio.

En la Figura 2.1 se puede apreciar el sistema de forma esquemática. En ella, $h(x, y, t)$ representa la altura variable de la superficie libre, d_f el espesor de la capa de líquido en reposo, d_w el espesor de la pared, T_p la temperatura del medio ubicado sobre el lado externo de la pared y T_∞ la temperatura de la atmósfera contigua a la superficie libre. Es importante resaltar que el estado básico es hidrostático y, por tanto, no hay flujo inicial.

Se considera la aproximación de lubricación, es decir, suponemos que la longitud de onda de las perturbaciones en la superficie libre es grande en comparación con su amplitud y el espesor de la capa de líquido. Por ello, el ángulo que forma la superficie libre perturbada respecto a la plana, es muy pequeño.

Con esto en mente, vamos a utilizar el parámetro ε , el cual representa la pendiente asociada al ángulo que forma la perturbación y relaciona el espesor de la capa de líquido con la longitud de onda de la perturbación de la siguiente manera

$$\varepsilon = \frac{2\pi d_f}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{d_f}{\varepsilon}.$$

Es importante resaltar que ε relaciona las longitudes características del sistema en las direcciones vertical, d_f , y horizontal, $\lambda/2\pi$.

Para los siguiente cálculos, primero realizaremos una adimensionalización de las variables del sistema. Entonces, utilizaremos los siguientes escalamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\perp &= \frac{\lambda}{2\pi} \mathbf{x}_\perp^* = \frac{d_f}{\varepsilon} \mathbf{x}_\perp^* , \quad z = d_f z^* , \quad t = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 t^* = \frac{d_f^2}{\varepsilon^2 \nu} t^* \\ \mathbf{u} &= \frac{\nu}{d_f} \mathbf{u}^* , \quad T = (\Delta T) T^* , \quad p = \frac{\rho \nu^2}{d_f^2} p^* . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Las variables con asterisco representan a las variables adimensionales. Además, utilizaremos las siguientes propiedades: la longitud de onda representativa de la deformación superficial λ , el número de onda representativo $2\pi/\lambda$, la densidad del fluido ρ , la viscosidad cinemática del fluido $\nu = \mu/\rho$ y la diferencia de temperatura a través de todo el sistema $\Delta T = T_p - T_\infty$. El escalamiento para la temperatura en la pared es el mismo que el de la temperatura en el líquido.

Dado que el líquido es incompresible en presencia de la gravedad, las ecuaciones que describen el flujo dentro de la capa de fluido son las ecuaciones (2.2) a (2.4), que corresponden a la ecuación de continuidad, la de Navier Stokes incompresible y la de energía. Esta última corresponde a la ecuación de difusión de calor, donde κ es la conductividad térmica del fluido y c_p su calor específico a presión constante.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \tag{2.2}$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{Navier-Stokes incompresible}) \quad (2.3)$$

$$\rho c_p (\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T) = \kappa \nabla^2 T \quad (\text{Energía}) \quad (2.4)$$

También en la pared tenemos una ecuación para la temperatura, ya que, al existir temperaturas diferentes en las fronteras, sumado a las propiedades físicas del material de la pared, hay una variación de la temperatura a través de la pared. Esta ecuación es:

$$\rho_w c_{p_w} \partial_t T_w = \kappa_w \nabla^2 T_w. \quad (2.5)$$

donde ρ_w es la densidad de la pared, c_{p_w} es su calor específico a presión constante y κ_w es su conductividad térmica.

Para analizar y encontrar los factores que influyen principalmente en el flujo, lo primero es adimensionalizar todas las ecuaciones anteriores con las variables escaladas en (2.1).

Sustituyendo las expresiones en (2.1) en la ecuación de continuidad (ec. (2.2))

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y + w_z = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{d_f} \frac{\nu}{d_f} u_x^* + \frac{\varepsilon}{d_f} \frac{\nu}{d_f} v_y^* + \frac{\nu}{d_f} \frac{1}{d_f} w_z = 0.$$

Entonces la ecuación adimensionalizada y sin asteriscos es

$$w_z = -\varepsilon u_x - \varepsilon v_y. \quad (2.6)$$

Luego, sustituyendo las expresiones en (2.1) en la componente x de la ecuación (2.3),

$$\begin{aligned} & \rho(u_t + uu_x + vv_y + ww_z) = -p_x + \mu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ \Rightarrow & \rho \left(\frac{\nu \varepsilon^2}{d_f^2} \frac{\nu}{d_f} u_t^* + \frac{\nu^2}{d_f^2} \frac{\varepsilon}{d_f} u^* u_x^* + \frac{\nu^2}{d_f^2} \frac{\varepsilon}{d_f} v^* u_y^* + \frac{\nu^2}{d_f^2} \frac{1}{d_f} w^* u_z^* \right) = -\frac{\varepsilon}{d_f} \frac{\rho \nu^2}{d_f^2} p_x^* + \mu \frac{\nu}{d_f} \left(\frac{\varepsilon^2}{d_f^2} u_{xx}^* + \frac{\varepsilon^2}{d_f^2} u_{yy}^* + \frac{1}{d_f^2} u_{zz}^* \right), \end{aligned}$$

obtenemos que la ecuación adimensionalizada y sin asterisco es

$$\varepsilon^2 u_t + \varepsilon u u_x + \varepsilon v v_y + w u_z = -\varepsilon p_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \varepsilon^2 u_{yy} + u_{zz}. \quad (2.7)$$

De forma análoga, las componente y y z de la ecuación (2.3) adimensionalizadas y sin asterisco son

$$\varepsilon^2 v_t + \varepsilon u v_x + \varepsilon v v_y + w v_z = -\varepsilon p_y + \varepsilon^2 v_{xx} + \varepsilon^2 v_{yy} + v_{zz}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon^2 w_t + \varepsilon u w_x + \varepsilon v w_y + w w_z = -p_z + \varepsilon^2 w_{xx} + \varepsilon^2 w_{yy} + w_{zz} - Ga, \quad (2.9)$$

donde Ga es el número de Galileo,

$$Ga = \frac{g d_f^3}{\nu^2},$$

que se define como la razón entre fuerzas gravitacionales y fuerzas viscosas, aunque también se puede ver como una medida adimensional de la gravedad. Si su valor es alto, el tiempo de respuesta de la gravedad es tan corto que la deformación superficial es amortiguada rápidamente y la superficie se puede considerar plana. Pero, cuando su valor es pequeño, el tiempo para la difusión viscosa es bastante corto, y la gravedad es relativamente débil dejando que las perturbaciones puedan crecer [20].

También es equivalente a $Ga = BoS$, donde Bo es el número de Bond y S el número de tensión superficial. Esta equivalencia se utilizará de ahora en adelante, ya que es común comparar la fuerza de gravedad con la fuerza de tensión superficial mediante el número de Bond. El número de Bond,

$$Bo = \frac{\rho g d_f^2}{\varepsilon^2 \gamma},$$

se define como la razón entre fuerzas gravitacionales y fuerzas debidas a la tensión superficial. Cuando el valor de este número es muy alto, significa que el sistema no siente los efectos de la tensión superficial; por el contrario, cuando su valor es muy pequeño, significa que la tensión superficial domina [20]. El número de tensión superficial,

$$S = \frac{\varepsilon^2 \gamma d_f}{\rho \nu^2},$$

es la razón entre las fuerzas de tensión superficial y las fuerzas viscosas que actúan a través de una interfase líquido/aire. Determina la importancia del desequilibrio en los esfuerzos normales en la deformación de la interfase de un fluido. Para valores pequeños de este número, las fuerzas viscosas no generan una presión suficiente para deformar la superficie en equilibrio y si hay convección, tampoco se altera su forma inicial.

Al sustituir las expresiones en (2.1) en la ecuación para la energía (ec. (2.4)),

$$\begin{aligned} & \rho c_p (T_t + u T_x + v T_y + w T_z) = \kappa (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) \\ \Rightarrow & \rho c_p \left(\frac{\varepsilon^2 \nu}{d_f^2} \Delta T T_t^* + \frac{\varepsilon \nu}{d_f^2} \Delta T u^* T_x^* + \frac{\varepsilon \nu}{d_f^2} \Delta T v^* T_y^* + \frac{\nu}{d_f^2} \Delta T w^* T_z^* \right) = \kappa \Delta T \left(\frac{\varepsilon^2}{d_f^2} T_{xx}^* + \frac{\varepsilon^2}{d_f^2} T_{yy}^* + \frac{1}{d_f^2} T_{zz}^* \right), \end{aligned}$$

se obtiene su forma adimensionalizada y sin asterisco

$$Pr(\varepsilon^2 T_t + \varepsilon u T_x + \varepsilon v T_y + w T_z) = \varepsilon^2 T_{xx} + \varepsilon^2 T_{yy} + T_{zz}, \quad (2.10)$$

donde Pr es el número de Prandtl,

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha},$$

con α la difusividad térmica. Este número corresponde a la razón entre la rapidez de difusión de la cantidad de movimiento (viscosidad) y la rapidez de difusión de calor. Cuando su valor es pequeño, significa que la difusividad térmica domina; mientras que, cuando es muy grande, la viscosidad es quien domina el comportamiento del sistema. El número de Prandtl es aproximadamente 1 en el caso de gases, lo que indica que tanto el momento como el calor se disipan en el fluido a la misma velocidad. Por otro lado, el calor se difunde rápidamente en metales líquidos ($Pr \ll 1$) y lentamente en aceites ($Pr \gg 1$) respecto a como se transfiere el momento [21]. En el caso del agua, el número de Prandtl es el orden de 10 a temperatura ambiente.

Análogamente, la ecuación de la energía en la pared (ec. (2.5)) adimensionalizada y sin asterisco es:

$$\frac{\rho_w c_{pw}}{\rho c_p} \frac{Pr}{\chi} \varepsilon^2 T_{wt} = \varepsilon^2 T_{wxx} + \varepsilon^2 T_{wyy} + T_{wzz}, \quad (2.11)$$

aquí estamos definiendo como χ a la razón entre las conductividades térmicas del fluido y de la pared, $\chi = \kappa_w / \kappa$.

En todas las ecuaciones adimensionalizadas se quitaron los asteriscos de las variables adimensionales para no complicar la notación en los siguientes cálculos.

2.1.1. Condiciones de frontera.

Este sistema consta de dos fronteras que lo delimitan y una entrecara que separa al líquido de la pared. Las fronteras son la superficie libre del líquido y la superficie plana de la pared que da hacia la atmósfera opuesta al fluido. Dichas superficies influyen en la forma en que se desarrolla el flujo dentro de la capa de líquido, esto es, en el perfil de velocidades, y en el perfil de las temperaturas del fluido y de la pared.

En consecuencia, existen condiciones de frontera que las soluciones deben satisfacer sobre estas superficies. La Figura 2.1 servirá como referencia para localizarlas.

Para el flujo

Al tratarse de una pared sólida el líquido no va a penetrar hacia su interior. Entonces, en $z = 0$ tendremos la condición de impenetrabilidad sobre la pared, cuyo vector normal es $\hat{n} = (0, 0, 1)$. Esto es

$$\hat{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow w = 0. \quad (2.12)$$

Asímismo, la pared presenta deslizamiento parcial. Por lo que, en $z = 0$, esta condición se aplica sobre la velocidad tangencial en la pared \mathbf{u}_{\parallel} , la llamada condición de deslizamiento de Navier, que establece una relación de proporcionalidad entre la velocidad tangencial del líquido en la pared y el tensor de esfuerzos de corte en el líquido sobre la pared, esto es

$$u \propto \tau_{13} = \mu(u_z + w_x) \quad \text{y} \quad v \propto \tau_{23} = \mu(v_z + w_y).$$

Por la condición de impenetrabilidad, la diferencia de velocidad w evaluada en dos puntos distintos sobre la superficie siempre va a ser nula, $\Delta w = 0$, por lo que al aproximar las derivadas de las expresiones anteriores tenemos que $w_x \approx \frac{\Delta w}{\Delta x} = 0$ y $w_y \approx \frac{\Delta w}{\Delta y} = 0$, entonces,

$$u = bu_z \quad \text{y} \quad v = bv_z, \quad (2.13)$$

donde b es la constante de proporcionalidad, que se conoce como longitud de deslizamiento y que cuantifica el deslizamiento sobre la pared. Esta longitud se puede interpretar como la distancia de extrapolación en la pared a la cual se recupera la condición de adherencia.

La forma adimensionalizada de estas expresiones es

$$u = bu_z \Rightarrow \frac{\nu}{d_f} u^* = b \frac{\nu}{d_f^2} u_z^* \Rightarrow u^* = \frac{b}{d_f} u_z^* \Rightarrow u = \beta u_z, \quad (2.14)$$

$$v = \beta v_z, \quad (2.15)$$

$$w = 0, \quad (2.16)$$

donde $\beta = b/d_f$ es la longitud de deslizamiento adimensional. De nuevo, para simplificar la notación se han quitado los asteriscos de la expresión final.

La superficie libre, ubicada en $z = h(x, y, t)$, separa al líquido de una atmósfera invíscida. Por tanto las condiciones de frontera recaen sobre los esfuerzos superficiales. Dado que la superficie libre no es plana, sus vectores unitarios son los que se obtuvieron en la sección 1.1, dados por las expresiones (1.5), (1.6) y (1.7). En consecuencia, los esfuerzos superficiales satisfacen las expresiones (1.13), (1.14) y (1.15), desarrolladas en la sección 1.1.2. Estas expresiones adimensionalizadas se ven de la siguiente manera:

- Esfuerzos normales:

$$\begin{aligned} & -(p - p_{atm}) + \frac{2}{N^2} \left(\varepsilon^3 (h_x^2 u_x + h_y^2 v_y + h_x h_y [v_x + u_y]) + w_z - \varepsilon h_x [\varepsilon w_x + u_z] - \varepsilon h_y [\varepsilon w_y + v_z] \right) \\ & = \frac{S}{N^3} (h_{xx} [1 + \varepsilon^2 h_y^2] + h_{yy} [1 + \varepsilon^2 h_x^2] - 2\varepsilon^2 h_x h_y h_{xy}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $S = \gamma d_f \varepsilon^2 / (\rho \nu^2)$ es el número de tensión superficial escalado por ε^2 . Además, $N = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}$; notemos que $N = N^*$, ya que al ser escalado no cambia sustancialmente,

$$N = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} = \sqrt{1 + d_f^2 \frac{\varepsilon^2}{d_f^2} h_x^{*2} + d_f^2 \frac{\varepsilon^2}{d_f^2} h_y^{*2}} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^{*2} + \varepsilon^2 h_y^{*2}} = N^*. \quad (2.18)$$

- Primeros esfuerzos tangenciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (2\varepsilon h_x (w_z - \varepsilon u_x) - \varepsilon^2 h_y (v_x + u_y) + (1 - \varepsilon^2 h_x^2) (\varepsilon w_x + u_z) - \varepsilon^2 h_x h_y (v_z + \varepsilon w_y)) \\ = -Ma\varepsilon [T_x + h_x T_z], \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde Ma es el número de Marangoni definido como

$$Ma = \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) \frac{\Delta T d_f}{(\rho \nu^2)},$$

que representa la razón entre la fuerza capilar debida al gradiente de tensión superficial y el arrastre viscoso en el flujo [20]. Si este número es pequeño, entonces las fuerzas viscosas dominan y no hay flujo, pero si es grande, hay flujo por convección debido al gradiente de tensión superficial. Notemos que, respecto a la definición usual, estamos cambiando la difusividad térmica α por una viscosidad cinemática ν extra, esto es $Ma = Ma^* / Pr$ donde $Ma^* = \left(-\frac{d\gamma}{dT} \right) \Delta T d_f / (\rho \nu \alpha)$ es la definición usual y Pr es el número de Prandtl.

- Segundos esfuerzos tangenciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (2\varepsilon h_y (\varepsilon^3 h_x^2 u_x - \varepsilon(1 + \varepsilon^2 h_x^2) v_y + w_z) + (1 + \varepsilon^2 h_x^2 - \varepsilon^2 h_y^2) (\varepsilon w_y + v_z - \varepsilon^2 h_x (u_y + v_x)) \\ - 2\varepsilon^2 h_x h_y (\varepsilon w_x + u_z)) = -Ma\varepsilon [-\varepsilon^2 h_x h_y T_x + (1 + \varepsilon^2 h_x^2) T_y + h_y T_z]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La superficie libre es una constante material y en consecuencia satisface la condición cinemática,

$$w = h_t + u h_x + v h_y, \quad (2.21)$$

que en su forma adimensionalizada es

$$w = \varepsilon^2 h_t + \varepsilon u h_x + \varepsilon v h_y. \quad (2.22)$$

Notemos que esta expresión nos indica que la variación temporal de la superficie es muy pequeña, de orden ε^2 , comparada con la variación espacial en x y y de orden ε . De aquí se puede concluir que la velocidad w es pequeña.

Para la temperatura

En la entrecara de la pared y el fluido, en $z = 0$, existe equilibrio térmico, es decir, la temperatura y el flujo de calor entre la pared y el fluido son iguales, lo que se traduce en

$$T = T_w, \quad (2.23)$$

$$\kappa \hat{n} \cdot \nabla T = \kappa_w \hat{n} \cdot \nabla T_w \Rightarrow \kappa T_z = \kappa_w T_{wz}. \quad (2.24)$$

La forma adimensionalizada de ambas expresiones es

$$T = T_w, \quad (2.25)$$

$$T_z = \frac{\kappa_w}{\kappa} T_{wz} = \chi T_{wz}. \quad (2.26)$$

En ambos casos se están quitando los asteriscos de las variables adimensionalizadas.

En la superficie libre para el balance de energía se empleará la ley de enfriamiento de Newton,

$$-\kappa \hat{n} \cdot \nabla T = H_h (T - T_\infty),$$

donde \hat{n} es el vector normal de la superficie (ec. (1.5)) y H_h es el coeficiente de transferencia de calor en la superficie (coeficiente de película). Sustituyendo la expresión para el vector tenemos

$$\frac{1}{N} (h_x T_x + h_y T_y - T_z) = \frac{Bi}{d_f} (T - T_\infty), \quad (2.27)$$

donde Bi es el número de Biot,

$$Bi = \frac{H_h d}{\kappa},$$

con H_h el coeficiente de transferencia de calor en la superficie (coeficiente de película). Este número está definido como la razón entre la resistencia interna de un cuerpo a la conducción de calor y su resistencia externa a la convección de calor, o lo que es equivalente, la razón de la conducción en la superficie del cuerpo y la conducción dentro del cuerpo [21]. Cuando el valor de este número tiende a infinito, estamos en presencia de una frontera conductora de calor perfecta donde la temperatura es fija, y los campos de temperatura en el interior del cuerpo no son uniformes. Por el contrario, cuando su valor es pequeño, su resistencia a la conducción de calor es poca y los gradientes de temperatura dentro del cuerpo son pequeños, es decir se tiene una distribución uniforme de temperatura en todo el cuerpo.

Esta condición se adimensionaliza de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left(\varepsilon h_x^* \frac{\varepsilon \Delta T}{d_f} T_x^* + \varepsilon h_y^* \frac{\varepsilon \Delta T}{d_f} T_y^* - \frac{\Delta T}{d_f} T_z^* \right) &= \frac{Bi}{d_f} (T - T_\infty) \\ \Rightarrow \frac{1}{N} (\varepsilon^2 h_x^* T_x^* + \varepsilon^2 h_y^* T_y^* - T_z^*) &= Bi \frac{(T - T_\infty)}{\Delta T} = Bi T^*. \end{aligned}$$

Entonces la expresión adimensionalizada es

$$\frac{1}{N} (\varepsilon^2 h_x T_x + \varepsilon^2 h_y T_y - T_z) = Bi T. \quad (2.28)$$

Nuevamente, a la expresión final se le han quitado los asteriscos por simplicidad.

Nótese que la temperatura adimensional, tanto en el fluido como en la pared, queda definida como

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad \text{y} \quad T_w^* = \frac{T_w - T_\infty}{T_p - T_\infty}, \quad (2.29)$$

consecuencia directa de la condición para la temperatura sobre la superficie libre. Además, esta definición de la temperatura adimensional en la pared y en el fluido es congruente con las condiciones adimensionalizadas en $z = 0$ (expresiones (2.25) y (2.26)).

Finalmente, en la superficie externa de la pared, en $z = -d_w$, lado contrario al líquido, la temperatura es constante,

$$T_w = T_p. \quad (2.30)$$

Entonces, en la pared externa, que adimensionalmente se ubica en $z^* = -d$, donde definimos $d = -d_w/d_f$, la condición adimensionalizada se obtiene al sustituir en la expresión (2.29) la condición original (ec. (2.30)). Obteniendo así la condición de temperatura constante adimensional

$$T_w = 1, \quad (2.31)$$

Nótese que aquí se está utilizando la forma de la temperatura adimensional y la expresión final ya no tiene asteriscos.

2.2. Método de perturbaciones en parámetros pequeños.

Las ecuaciones y condiciones de frontera son no lineales y extremadamente complejas. Por ello, vamos a desarrollar las variables dependientes de forma asintótica con ε como parámetro pequeño, debido a que este parámetro representa la pendiente de la perturbación bajo la aproximación de onda larga.

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots), & T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \\ v &= \varepsilon(v_0 + \varepsilon v_1 + \dots), & T_w &= T_{w0} + \varepsilon T_{w1} + \dots, \\ w &= \varepsilon^2(w_1 + \varepsilon w_2 + \dots), & p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Los desarrollos de la presión, temperatura en el fluido y temperatura en la pared inician con ε a la cero, ya que el primer término corresponde al estado hidrostático y el resto a las perturbaciones. Por otra parte, los desarrollos de las velocidades u y v empiezan con orden ε , porque no hay un flujo inicial en el sistema en esas direcciones. Mientras que, de la ecuación (2.6), vemos que $w_z \sim \varepsilon u_x$ y $w_z \sim \varepsilon v_y$, por tanto el orden principal del desarrollo de la velocidad w es $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Esto último aunado a la falta de flujo inicial en esa dirección y que, por la aproximación de lubricación, el movimiento en esa dirección es pequeño.

Al sustituir estos desarrollos en las ecuaciones y condiciones de frontera adimensionales se simplifica el problema, puesto que se determina la importancia de cada uno de los términos que lo componen y el problema se separa en sistemas de ecuaciones más sencillos para cada orden de ε . Esto permite obtener, en primer lugar, el término dominante de la solución, es decir la primera aproximación a orden menor, y posteriormente mejorar la aproximación al resolver de forma recurrente los sistemas obtenidos para cada orden de ε .

Para este análisis, primero sustituiremos los desarrollos en (2.32) en las ecuaciones que describen al sistema.

Al sustituir (2.32) en la ecuación de continuidad (ec. (2.6)) se obtiene

$$w_{1z} + u_{0x} + v_{0y} + \varepsilon(w_{2z} + u_{1x} + v_{1y}) + \dots = 0. \quad (2.33)$$

Se hace lo mismo con las componentes de la ecuación de Navier-Stokes. La componente x (ec. (2.7)) se ve de la siguiente manera

$$p_{0x} - u_{0zz} + \varepsilon(p_{1x} - u_{1zz}) + \varepsilon^2(u_{0t} + u_0 u_{0x} + v_0 u_{0y} + w_1 u_{0z} - u_{0xx} - u_{0yy}) + \dots = 0. \quad (2.34)$$

La componente y (ec. (2.8)) se desarrolla como

$$p_{0y} - v_{0zz} + \varepsilon(p_{1y} - v_{1zz}) + \varepsilon^2(v_{0t} + u_0v_{0x} + v_0v_{0y} + w_1v_{0z} - v_{0xx} - v_{0yy}) + \dots = 0. \quad (2.35)$$

Por último, la componente z (ec. (2.9)),

$$p_{0z} + BoS + \varepsilon p_{1z} - \varepsilon^2 w_{1zz} + \dots = 0. \quad (2.36)$$

En las ecuaciones de Navier-Stokes perturbadas se ve que los términos advectivos no lineales y la variación temporal corresponden a órdenes de ε mayores a 1. A excepción de la componente z , el resto de las expresiones contiene únicamente términos de difusión en la dirección z a orden ε a la cero.

Al sustituir (2.32) en la ecuación para la temperatura en el líquido (ec. (2.10)), y desarrollar la expresión, se obtiene

$$T_{0zz} + \varepsilon T_{1zz} + \varepsilon^2(T_{0xx} + T_{0yy} - Pr(T_{0t} + u_0T_{0x} + v_0T_{0y} + w_1T_{0z})) + \dots = 0. \quad (2.37)$$

Mientras que, la ecuación para la temperatura en la pared (ec. (2.11)) queda como

$$T_{w0zz} + \varepsilon T_{w1zz} + \varepsilon^2 \left(T_{w0xx} + T_{w0yy} - \frac{\rho_w c_{pw}}{\rho c_p} \frac{Pr}{\chi} T_{w0t} \right) + \dots = 0. \quad (2.38)$$

En las ecuaciones para la temperatura del líquido y de la pared perturbadas la variación temporal se observa en órdenes de ε mayores a 1, al igual que los términos correspondiente a la difusión en las direcciones x y y . En ambos casos, a orden ε a la cero, sólo se tiene la difusión en la dirección z .

A continuación, sustituiremos la condición de perturbación pequeña (ec. (2.32)) en las condiciones de frontera. Empezando por las condiciones sobre el flujo en la superficie $z = 0$. La condición de deslizamiento parcial en la dirección x (ec. (2.14)) se transforma en

$$u_0 - \beta u_{0z} + \varepsilon(u_1 - \beta u_{1z}) + \dots = 0. \quad (2.39)$$

De la misma manera, en la dirección y (ec. (2.15)) tiene la forma

$$v_0 - \beta v_{0z} + \varepsilon(v_1 - \beta v_{1z}) + \dots = 0. \quad (2.40)$$

Mientras que, la condición de impenetrabilidad (ec. (2.16)) queda como

$$w_1 + \varepsilon w_2 + \dots = 0. \quad (2.41)$$

Es importante resaltar que en las condiciones de frontera perturbadas en $z = 0$, la forma principal de cada una se reproduce a cada orden de ε . Esto es que la impenetrabilidad de la pared y el deslizamiento parcial sobre ella se satisfacen para todos los órdenes de ε .

En la superficie libre ($z = h(x, y, t)$) se tienen las condiciones sobre los esfuerzos normales y tangenciales. Al sustituir (2.32) en la condición de esfuerzos normales (ec. (2.17)) se tiene

$$\begin{aligned} & (p_0 - p_{atm}) + S(h_{xx} + h_{yy}) + \varepsilon p_1 \\ & + \varepsilon^2 [S(h_{xx}h_y^2 + h_{yy}h_x^2 - 2h_xh_yh_{xy}) - 2(w_{1z} - h_xu_{0z} - h_yv_{0z})] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

En este desarrollo, y en los siguientes, el factor N (ver ec. (2.18)), que se encuentra en las expresiones (2.17), (2.19) y (2.20), al desarrollarlo como serie de potencias alrededor de ε se ve como $N = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Luego, hacemos lo mismo en las condiciones para los esfuerzos tangenciales. La condición de los primeros esfuerzos tangenciales (ec. (2.19)) queda como

$$\begin{aligned} & u_{0z} + Ma(T_{0x} + h_xT_{0z}) + \varepsilon[-2h_xu_{0x} + u_{1z} + Ma(T_{1x} + h_xT_{1z})] + \\ & \varepsilon^2[2h_x(w_{1z} - u_{1x}) - h_y(v_{0x} + u_{0y}) + w_{1x} - h_x^2u_{0z} - h_xh_yv_{0z}] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Mientras que, la condición de los segundos esfuerzos tangenciales (ec. (2.20)) es

$$\begin{aligned} & v_{0z} + Ma(T_{0y} + h_yT_{0z}) + \varepsilon[v_{1z} + Ma(T_{1y} + h_yT_{1z})] + \\ & \varepsilon^2[2h_y(w_{1z} - v_{0y}) + w_{1y} - h_x(u_{0y} + v_{0x}) + (h_x^2 - h_y^2)v_{0z} - 2h_xh_yu_{0z} + Ma(h_x^2T_{0y} - h_xh_yT_{0x})] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En las condiciones perturbadas sobre los esfuerzos en la superficie libre, la mayoría de los términos complejos y no lineales, tomando en cuenta que $h(x, y, t)$ también es una incógnita del problema, se encuentran en órdenes de ε mayores a 1. Esto implica que a orden ε a la cero, las condiciones sobre los esfuerzos se vuelven bastante simples.

La última condición sobre la superficie libre ($z = h(x, y, t)$) es la condición cinemática (ec. (2.22)), la cual tras sustituir (2.32) en ella se transforma en

$$w_1 - h_t - u_0h_x - v_0h_y + \varepsilon[w_2 - u_1h_x - v_1h_y] + \dots = 0. \quad (2.45)$$

En esta expresión observamos que únicamente a orden ε a la cero aparece la derivada temporal de

la deformación superficial, lo que significa que sólo a este orden tiene importancia.

Ahora, se sustituyen los desarrollos (2.32) en las condiciones para la temperatura. En la entrecara de la pared y el fluido ($z = 0$), tenemos equilibrio térmico (ec. (2.25)),

$$T_0 - T_{w0} + \varepsilon[T_1 - T_{w1}] + \cdots = 0, \quad (2.46)$$

y flujo de calor neto (ec. (2.26)),

$$T_{0z} - \chi T_{w0z} + \varepsilon[T_{1z} - \chi T_{w1z}] + \cdots = 0. \quad (2.47)$$

Al igual que en las condiciones para el flujo en $z = 0$, en estas dos condiciones perturbadas, la forma principal de la condición se reproduce para cada orden de ε . Es decir, a todo orden de ε se deben satisfacer las condiciones de equilibrio térmico.

En la superficie libre, en $z = h(x, y, t)$, se tiene la condición de radiación (ec. (2.28)). Después de sustituir (2.32) en ella, esta se desarrolla como

$$T_{0z} + BiT_0 + \varepsilon[BiT_1 + T_{1z}] - \varepsilon^2[h_x T_{0x} + h_y T_{0y}] + \cdots = 0. \quad (2.48)$$

En este caso se observa que, los términos donde se tiene explícitamente la influencia de la deformación superficial, se encuentran en órdenes de ε mayores a 1. Además a orden ε a la cero se simplifica considerablemente la condición.

Por último, sobre la superficie externa de la pared ($z = -d$), la temperatura se supone constante (ec. (2.31)). Por lo que al sustituir (2.32) en la condición, esta se convierte en:

$$T_{w0} + \varepsilon T_{w1} + \cdots = 1. \quad (2.49)$$

Como era de esperarse, sólo a orden ε a la cero la condición es distinta de cero. Esto se debe a que, dado que la temperatura en la superficie externa no cambia, no debe haber perturbaciones.

Ahora tenemos el conjunto de ecuaciones y condiciones a la frontera del sistema, expresados de tal forma que se pueden ir resolviendo las ecuaciones de forma recurrente por cada orden de ε junto con sus respectivas condiciones de frontera.

2.3. Solución a orden menor.

Al considerar la aproximación de onda larga, se eligió a ε como parámetro pequeño y, en consecuencia, al realizar el desarrollo asintótico de las ecuaciones se determinó qué términos son más importantes para esta aproximación. En virtud de esto, resolveremos las ecuaciones a orden ε^0 , para así obtener la aproximación dominante a la solución. Las soluciones a órdenes ε^n con $n > 0$ corresponden a perturbaciones sobre la solución dominante y no influyen representativamente en la estabilidad lineal, la cual se estudiará más adelante.

Perfil de la temperatura básica.

Primero resolveremos las ecuaciones que describen la temperatura dentro del fluido y de la pared (ec. (2.37) y ec. (2.38)), ya que a $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ estas ecuaciones son desacopladas y, por tanto, su solución es inmediata.

Las ecuaciones que describen la temperatura básica en el fluido y en la pared son

$$\begin{aligned} T_{0zz} &= 0 && \text{(fluido) ,} \\ T_{w0zz} &= 0 && \text{(pared) ,} \end{aligned}$$

cuyas soluciones son de la forma

$$T_0 = Az + B \quad \text{y} \quad T_{w0} = Cz + D.$$

Para determinar las constantes de integración utilizaremos las condiciones de frontera de la temperatura a orden menor (ecs. (2.46) a (2.49)), las cuales se reducen a

$$\begin{aligned} z = h(x, y, t) : & \quad -T_{0z} = BiT_0 \quad \text{(radiación) ,} \\ z = 0 : & \quad T_0 = T_{w0} \quad , \quad T_{0z} = \chi T_{w0z} \quad \text{(equilibrio térmico) ,} \\ z = -d : & \quad T_{w0} = 1 \quad \text{(temperatura constante) ,} \end{aligned}$$

lo que nos da el siguiente sistema de 4 ecuaciones

$$\begin{aligned} B &= D, & -A &= Bi(Ah + B) \Rightarrow B = -A \left(\frac{1}{Bi} + h \right), \\ A &= \chi C, & -Cd + D &= 1 \Rightarrow D = 1 + Cd, \end{aligned}$$

cuyas incógnitas son A , B , C y D , y χ , Bi y d son parámetros de la ecuación, mientras que h es

una incógnita del problema en general. La solución analítica a ese sistema es

$$A = \frac{-1}{\left(\frac{1}{Bi} + h + \frac{d}{\chi}\right)}, \quad C = \frac{-1}{\chi \left(\frac{1}{Bi} + h + \frac{d}{\chi}\right)}, \quad \text{y} \quad B = D = \frac{\left(\frac{1}{Bi} + h\right)}{\left(\frac{1}{Bi} + h + \frac{d}{\chi}\right)}.$$

Con lo anterior en mente, los perfiles de temperatura en el fluido y en la pared son

$$T_0 = \frac{\chi(1 + Bi(h - z))}{\chi + Bi(\chi h + d)} = \frac{1}{den} [1 + Bi(h - z)] \quad (\text{fluido}), \quad (2.50)$$

$$T_{w0} = \frac{\chi + Bi(\chi h - z)}{\chi + Bi(\chi h + d)} = \frac{1}{den} \left[1 + Bi \left(h - \frac{z}{\chi} \right) \right] \quad (\text{pared}), \quad (2.51)$$

donde el denominador depende de x , y y t , por lo que lo definimos como

$$den = den(x, y, t) = 1 + Bi(h(x, y, t) + d/\chi). \quad (2.52)$$

Notemos, además, que en esta aproximación el parámetro importante es el cociente d/χ , no los parámetros d y χ por separado.

Perfil de la presión básica en el fluido.

La siguiente ecuación a resolver es la de la componente z de la ecuación de Navier-Stokes (ec. (2.36)), ya que a $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ se convierte en una ecuación desacoplada para la presión,

$$p_{0z} + BoS = 0.$$

Su solución es de la forma:

$$p_0 = -BoSz + A_p,$$

la constante de integración se obtendrá aplicando la condición de frontera sobre los esfuerzos normales (ec. (2.42)), que es la única expresión que contiene a la presión. A orden menor, esta condición se reduce a

$$-(p_0 - p_{atm}) = S(h_{xx} + h_{yy}) = S\nabla_{\perp}^2 h,$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ representa al laplaciano horizontal. Al sustituir la solución en la condición de frontera y evaluar en $z = h(x, y, t)$, se obtiene la siguiente expresión para la constante

de integración

$$A_p = BoSh + p_{atm} - S\nabla_{\perp}^2 h.$$

Por tanto, el perfil de presión en el fluido es

$$p_0 = BoS(h - z) - S\nabla_{\perp}^2 h + p_{atm}. \quad (2.53)$$

Perfil de la velocidad a orden menor en el fluido.

Para obtener la solución para la velocidad es necesario considerar las 3 ecuaciones que quedan, que son las ecuaciones de continuidad (ec. (2.33)) y de Navier-Stokes, sus componentes x y y (ecs. (2.34) y (2.35)), a orden menor. Es decir, las expresiones a resolver son

$$w_{1z} = -u_{0x} - v_{0y} \quad (\text{continuidad}), \quad (2.54)$$

$$-p_{0x} + u_{0zz} = 0 \quad (\text{Navier-Stokes en } x), \quad (2.55)$$

$$-p_{0y} + v_{0zz} = 0 \quad (\text{Navier-Stokes en } y). \quad (2.56)$$

Mientras que sus correspondientes condiciones de frontera son deslizamiento parcial sobre la pared (ec. (2.39) y (2.40)), impenetrabilidad de la pared (ec. (2.41)) y los esfuerzos tangenciales sobre la superficie libre (ec. (2.43) y (2.44)). Las cuales a orden ε^0 son

$$z = 0 : u_0 = \beta u_{0z} \quad (\text{deslizamiento parcial en } x),$$

$$v_0 = \beta v_{0z} \quad (\text{deslizamiento parcial en } y),$$

$$w_1 = 0 \quad (\text{impenetrabilidad}),$$

$$z = h(x, y, t) : u_{0z} = -Ma(T_{0x} + h_x T_{0z}) \quad (\text{primeros esfuerzos tangenciales}),$$

$$v_{0z} = -Ma(T_{0y} + h_y T_{0z}) \quad (\text{segundos esfuerzos tangenciales}),$$

donde β es la longitud de deslizamiento adimensional y Ma es el número de Marangoni.

Con lo anterior, empezaremos con la ecuación (2.55) de donde se obtendrá la componente x de la velocidad. Primero, integraremos una vez la expresión respecto a z , notando que p_{0x} no es función de z ,

$$u_{0z} = p_{0x}z + A_1,$$

donde la constante de integración A_1 se obtiene con la condición de frontera de los primeros esfuerzos tangenciales. Primero se sustituye la solución para u_{0z} y para la temperatura (ec. (2.50))

y luego se evalúa en $z = h(x, y, t)$,

$$\begin{aligned} u_{0z} = p_{0x}h + A_1 &= -Ma \left[\left(\frac{1}{den} \right)_x + \frac{Bih_x}{den} - h_x \left(\frac{Bi}{den} \right) \right] = -Ma \left(\frac{1}{den} \right)_x \\ \Rightarrow A_1 &= -Ma \left(\frac{1}{den} \right)_x - p_{0x}h. \end{aligned}$$

Es importante notar que, por la forma de la temperatura, se recupera la derivada de la función $den(x, y, t)$ (ec. (2.52)) en esta constante. Luego se vuelve a integrar respecto a z y se obtiene la forma completa de la solución,

$$u_0 = p_{0x} \left(\frac{1}{2}z^2 - hz \right) - Ma \left(\frac{1}{den} \right)_x z + A_2,$$

donde la constante de integración A_2 se calcula mediante la condición de deslizamiento parcial sobre la pared en $z = 0$,

$$u_0 = \beta u_{0z} \Rightarrow A_2 = \beta \left[-Ma \left(\frac{1}{den} \right)_x - p_{0x}h \right].$$

Entonces la componente x de la velocidad es

$$u_0 = \frac{1}{2}p_{0x}(z^2 - 2h(z + \beta)) - Ma \left(\frac{1}{den} \right)_x (z + \beta). \quad (2.57)$$

Para obtener la componente y de la velocidad, se utiliza la ecuación (2.56) y se integra una vez respecto a z , aquí p_{0y} tampoco depende de z ,

$$v_{0z} = p_{0y}z + B_1,$$

donde la constante de integración B_1 se calcula con la condición de frontera de los segundos esfuerzos tangenciales. En dicha condición se sustituye la solución para v_{0z} y para la temperatura, y se evalúa en $z = h(x, y, t)$,

$$v_{0z} = p_{0y}h + B_1 = -Ma \left(\frac{1}{den} \right)_y \Rightarrow B_1 = -Ma \left(\frac{1}{den} \right)_y - p_{0y}h.$$

Por lo que, al volver a integrar respecto a z , la forma completa de la solución para v_0 es

$$v_0 = p_{0y} \left(\frac{1}{2}z^2 - hz \right) - Ma \left(\frac{1}{den} \right)_y z + B_2,$$

aquí la constante de integración B_2 se obtiene al aplicar la condición de deslizamiento sobre la

pared en $z = 0$,

$$v_0 = \beta v_{0z} \Rightarrow B_2 = \beta \left[-Ma \left(\frac{1}{den} \right)_y - p_{0y} h \right].$$

Entonces, la componente y de la velocidad es

$$v_0 = \frac{1}{2} p_{0y} (z^2 - 2h(z + \beta)) - Ma \left(\frac{1}{den} \right)_y (z + \beta). \quad (2.58)$$

Finalmente, la componente z de la velocidad se puede calcular con la ecuación de continuidad (ec. (2.54)). En ella se sustituyen las expresiones que se obtuvieron para las componentes x y y de la velocidad (ec. (2.57) y (2.58)),

$$\begin{aligned} w_{1z} &= -u_{0x} - v_{0y} \\ &= -\frac{1}{2} p_{0xx} (z^2 - 2h(z + \beta)) + \frac{1}{2} p_{0x} 2h_x (z + \beta) + Ma \left(\frac{1}{den} \right)_{xx} (z + \beta) \\ &\quad - \frac{1}{2} p_{0yy} (z^2 - 2h(z + \beta)) + \frac{1}{2} p_{0y} 2h_y (z + \beta) + Ma \left(\frac{1}{den} \right)_{yy} (z + \beta) \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 p_0 z^2 + \nabla_{\perp}^2 p_0 h (z + \beta) + \nabla_{\perp} p_0 \cdot \nabla_{\perp} h (z + \beta) + Ma \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) (z + \beta) \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 p_0 z^2 + \left[\nabla_{\perp} \cdot (h \nabla_{\perp} p_0) + Ma \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) \right] (z + \beta), \end{aligned}$$

la cual al ser integrada respecto a z nos da la expresión

$$w_1 = -\frac{1}{6} \nabla_{\perp}^2 p_0 z^3 + \left[\nabla_{\perp} \cdot (h \nabla_{\perp} p_0) + Ma \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) \right] \left(\frac{1}{2} z^2 + \beta z \right) + C_1,$$

donde C_1 es una constante de integración que se va a obtener por medio de la condición de impenetrabilidad sobre la pared en $z = 0$,

$$w_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Entonces, la componente z de la velocidad es

$$w_1 = -\frac{1}{6} \nabla_{\perp}^2 p_0 z^3 + \left[\nabla_{\perp} \cdot (h \nabla_{\perp} p_0) + Ma \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) \right] \left(\frac{1}{2} z^2 + \beta z \right). \quad (2.59)$$

Evolución de la superficie libre.

Para entender por completo la evolución del sistema es necesario encontrar la forma de $h(x, y, t)$, es decir, cómo evoluciona en el tiempo y el espacio la superficie libre deformada, ya que esta incógnita aparece en todas las expresiones anteriores. Esto significa que todas las variables del sistema dependen de la deformación de la superficie libre.

Para esto, se utiliza la condición cinemática (ec. (2.45)) a orden ε^0 ,

$$w_1 = h_t + u_0 h_x + v_0 h_y,$$

y en ella se sustituyen las expresiones obtenidas para las componentes de la velocidad (ecs. (2.57) a (2.59)) evaluadas en $z = h(x, y, t)$. De esa manera se obtiene una ecuación sólo para $h(x, y, t)$,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}\nabla_{\perp}^2 p_0 h^3 + \left[\nabla_{\perp} \cdot (h \nabla_{\perp} p_0) + Ma \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) \right] \left(\frac{1}{2} h^2 + \beta h \right) \\ & = h_t + \left(\frac{1}{2} p_{0x} (-h^2 - 2h\beta) - Ma \left(\frac{1}{den} \right)_x (h + \beta) \right) h_x \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} p_{0y} (-h^2 - 2h\beta) - Ma \left(\frac{1}{den} \right)_y (h + \beta) \right) h_y \\ & = h_t - \nabla_{\perp} p_0 \cdot \nabla_{\perp} h \left(\frac{1}{2} h^2 + h\beta \right) - Ma \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \cdot \nabla_{\perp} h (h + \beta), \end{aligned}$$

en la cual se escriben todos los términos en un mismo lado y se agrupan para simplificar la expresión,

$$\begin{aligned} 0 & = h_t + \frac{1}{6}\nabla_{\perp}^2 p_0 h^3 - \nabla_{\perp} p_0 \cdot \nabla_{\perp} h \left(\frac{1}{2} h^2 + \beta h \right) - \nabla_{\perp}^2 p_0 \left(\frac{1}{2} h^3 + \beta h^2 \right) - \nabla_{\perp} p_0 \cdot \nabla_{\perp} h \left(\frac{1}{2} h^2 + h\beta \right) \\ & \quad - Ma \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} h^2 + \beta h \right) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right] \\ & = h_t - \frac{1}{3}\nabla_{\perp}^2 p_0 h^3 - \nabla_{\perp}^2 p_0 \beta h^2 - \nabla_{\perp} p_0 \cdot \nabla_{\perp} h (h^2 + 2h\beta) - Ma \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} h^2 + \beta h \right) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por último, en esta expresión se sustituye la expresión para la presión (ec. (2.53)). Entonces, la ecuación que describe la evolución temporal y espacial de la superficie libre deformable es

$$h_t - \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} h^3 + \beta h^2 \right) \nabla_{\perp} [BoSh - S\nabla_{\perp}^2 h] \right] - Ma \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} h^2 + \beta h \right) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right] = 0, \quad (2.60)$$

donde $den(x, y, t) = 1 + Bi(h(x, y, t) + d/\chi)$.

Capítulo 3

Análisis lineal de la ecuación de evolución de la deformación superficial.

Para estudiar la estabilidad lineal de la deformación superficial dentro de la aproximación de lubricación es necesario linealizar su ecuación de evolución (ec. (2.60)).

Primero se considera que la expresión para la superficie se puede reescribir como

$$h(x, y, t) = 1 + H(x, y, t),$$

ya que la capa de líquido sin perturbar tiene espesor adimensional igual a 1. Así, H representa que tanto se separa la superficie del espesor de la capa de fluido en reposo. Por ser un problema lineal, la magnitud de H es pequeña, $H \ll 1$.

Al sustituir $h(x, y, t)$ en la ecuación de evolución sólo se encuentran problemas en la linealización de los términos que contienen a $1/den$, ya que esta función contiene a $h(x, y, t)$ (ver ec. (2.52)) y acepta derivadas en el espacio y en el tiempo. Después de desarrollar la expresión, los dos términos que contienen a esta función son:

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) = -\frac{Bi \nabla_{\perp} h}{den^2} = -\frac{Bi \nabla_{\perp} H}{(1 + Bi(1 + H + d/\chi))^2},$$

$$\nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) = -\frac{Bi \nabla_{\perp}^2 H}{(1 + Bi(1 + H + d/\chi))^2} + \frac{2Bi^2 |\nabla_{\perp} H|^2}{(1 + Bi(1 + H + d/\chi))^3}.$$

Así, los denominadores se pueden aproximar de la siguiente forma, considerando que H es

pequeño:

$$\frac{1}{(1 + Bi(1 + d/\chi) + BiH)^2} = \frac{1}{(1 + Bi(1 + d/\chi))^2} \left(1 - \frac{2BiH}{(1 + Bi(1 + d/\chi))} + \dots \right),$$

$$\frac{1}{(1 + Bi(1 + d/\chi) + BiH)^3} = \frac{1}{(1 + Bi(1 + d/\chi))^3} \left(1 - \frac{3BiH}{(1 + Bi(1 + d/\chi))} + \dots \right),$$

por simplicidad, llamaremos $den_L = 1 + Bi(1 + d/\chi)$, notemos que esta expresión es básicamente la función den linealizada.

Entonces, la ecuación lineal para la evolución de la superficie libre es:

$$H_t - \left(\frac{1}{3} + \beta \right) [BoS\nabla_{\perp}^2 H - S\nabla_{\perp}^4 H] + \frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \nabla_{\perp}^2 H = 0. \quad (3.1)$$

3.1. Análisis en modos normales.

Se realizará un análisis en modos normales de la ecuación de evolución lineal (ec. (3.1)). Para ello suponemos que H es de la forma

$$H(x, y, t) = \tilde{H} e^{i(k_x x + k_y y) + (\Gamma - i\omega)t}, \quad (3.2)$$

donde \tilde{H} es la amplitud de la perturbación con valor constante, Γ es la razón de crecimiento, ω es la frecuencia de oscilación y k es el número de onda con $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Además, Γ , ω y k tienen valores reales.

Sustituyendo la expresión (3.2) se tiene que

$$H_t = (\Gamma - i\omega)H, \quad \nabla_{\perp}^2 H = -k^2 H, \quad \text{y} \quad \nabla_{\perp}^4 H = k^4 H.$$

Al usar esto en la ecuación (3.1) se obtiene

$$\Gamma + \left[\left(\frac{1}{3} + \beta \right) (BoS + Sk^2) - \frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \right] k^2 - i\omega = 0 \quad (3.3)$$

Ahora vamos a separar esta expresión en parte real e imaginaria:

■ Parte real:

$$\Gamma = \left[\frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - \left(\frac{1}{3} + \beta \right) (BoS + Sk^2) \right] k^2. \quad (3.4)$$

- Parte imaginaria:

$$\omega = 0. \quad (3.5)$$

De la parte imaginaria notamos que la frecuencia es cero y por tanto no hay oscilaciones hasta el orden del presente desarrollo asintótico. El flujo será estacionario y no habrá propagación de ondas superficiales. Por tanto, si Γ es positiva o negativa, el crecimiento temporal de la perturbación será únicamente monótono creciente o monótono decreciente, respectivamente.

De la parte real tenemos una relación entre el número de onda k y la razón de crecimiento Γ . Notemos que esta relación depende de más parámetros determinados por distintas propiedades y características del sistema. Dentro de ellos, el número de Marangoni y el número de Bond pueden cambiar de signo, lo cual depende de las condiciones que se le impongan al sistema en consideración. Entonces, la combinación de dichos parámetros es quien determinará el valor que tendrá Γ , y en consecuencia si la perturbación tenderá a crecer o a amortiguarse. Es importante notar que, para $\Gamma < 0$, como la perturbación decrece, amortiguándose, existe un flujo estable.

Los valores críticos de la expresión (3.4) nos van a indicar los valores de los parámetros donde tenemos estabilidad neutra, es decir, los estados que separan los estados estables de los inestables. Estos valores los vamos a obtener de la ecuación cuando $\Gamma = 0$.

En primera instancia, vamos a calcular el número de onda crítico k_c ,

$$0 = \left[\frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - \left(\frac{1}{3} + \beta \right) (BoS + Sk^2) \right] k^2,$$

como el número de onda es positivo, se tienen dos soluciones,

$$k^2 = 0 \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{MaBi}{Sden_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - Bo.$$

La primera solución $k = 0$ indica que la razón de crecimiento es siempre cero en el origen de k . La segunda solución es de interés por su dependencia en los parámetros del sistema,

$$k_c = \sqrt{\frac{MaBi}{Sden_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - Bo}. \quad (3.6)$$

Este valor es importante, porque indica el límite de la región de inestabilidad. Notar que, como k es un número real, no hay valor crítico si Bo es suficientemente grande como para estabilizar el sistema para todo k .

Del mismo modo, calculamos el Marangoni crítico Ma_c , tomando como base la ecuación (3.6), ya que es la que depende de Ma ,

$$Ma_c = \left(\frac{\frac{1}{3} + \beta}{\frac{1}{2} + \beta} \right) \frac{Sden_L^2}{Bi} [k^2 + Bo]. \quad (3.7)$$

Notemos que, a partir de este valor del número de Marangoni inicia la convección termocapilar.

Finalmente, es de interés el valor máximo que puede adoptar Γ respecto a k . Primero vamos a calcular el valor k_{max} ,

$$\frac{d\Gamma}{dk} = 0 \Rightarrow \frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) 2k - \left(\frac{1}{3} + \beta \right) (BoS2k + S4k^3) = 0,$$

donde también se tienen dos soluciones,

$$k = 0 \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{MaBi}{Sden_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - Bo \right],$$

y de estos dos valores, el máximo corresponde al segundo valor,

$$k_{max} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{MaBi}{Sden_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - Bo \right]}, \quad (3.8)$$

es interesante notar que $k_c = \sqrt{2}k_{max}$. Luego, sustituimos este número de onda en la ecuación (3.4) para obtener la razón de crecimiento máxima,

$$\Gamma_{max} = \left[\frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - \left(\frac{1}{3} + \beta \right) (BoS + Sk_{max}^2) \right] k_{max}^2,$$

Entonces, la razón de crecimiento máxima es

$$\Gamma_{max} = \frac{1}{4S \left(\frac{1}{3} + \beta \right)} \left[\frac{MaBi}{den_L^2} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) - BoS \left(\frac{1}{3} + \beta \right) \right]^2. \quad (3.9)$$

A continuación, para entender el comportamiento de la razón de crecimiento (ec. (3.4)) ante la variación de los parámetros involucrados, se van a mostrar gráficas para los siguientes casos: I. $Ma > 0$ y $Bo > 0$, II. $Ma < 0$ y $Bo < 0$, y III. $Ma > 0$ y $Bo < 0$. Notemos que estamos omitiendo el caso $Ma < 0$ y $Bo > 0$, ya que este siempre es estable, es decir, $\Gamma < 0$ para toda k (ver ecuación (3.4)). En estas gráficas, además de Ma y Bo , se van a variar los valores de β , que mide la cantidad de deslizamiento presente en la pared, y d/χ , que compara la razón entre los espesores de la pared y el fluido con la razón entre las conductividades térmicas de ambos medios. Mientras que los parámetros fijos serán $S = 1$ y $Bi = 0.1$. El primero se debe al escalamiento hecho en el desarrollo y corresponde a valores grandes para la tensión superficial, como es el caso de el agua, mezclas de agua con glicerol y metales líquidos; el segundo se adopta pues se ha encontrado

que corresponde, aproximadamente, a un líquido como el agua ante una atmósfera como el aire. Es importante recordar que la región de interés corresponde a un k pequeño donde la aproximación de lubricación es válida.

En general, vamos a considerar variaciones de Ma y Bo que cumplan que $k < 1$. Además, se toma especial consideración en los intervalos donde es evidente la inestabilidad ($\Gamma > 0$). Por cada valor para Bo se eligieron 3 valores diferentes para Ma , sin embargo, se procuró que los intervalos coincidieran, por lo menos, en un valor que sirviera como punto de comparación. Los valores que se eligieron para la cantidad de deslizamiento fueron $\beta = 0, 0.1$ y 0.3 . El primer valor corresponde al caso de adherencia, respecto al cual se van a comparar los casos con deslizamiento parcial. Por otro lado, los valores elegidos para la razón d/χ fueron $0.5, 1$ y 1.8 . Notemos que, valores menores a 1 implican que la razón entre las conductividades térmicas es mayor a la razón entre los espesores, mientras que lo contrario ocurre para el caso $d/\chi > 1$.

3.1.1. Caso con $Bo > 0$.

El primer caso a estudiar corresponde a números de Marangoni Ma y números de Bond Bo positivos. Por tanto, la aceleración de la gravedad se dirige desde la atmósfera hacia el líquido y la pared. Es importante resaltar que el signo del número de Marangoni está dado por el signo de la diferencia de temperatura a través del sistema, ya que estamos suponiendo que el gradiente de tensión superficial respecto a la temperatura es negativo, como ocurre para la mayoría de los fluidos. Dicho lo anterior, números de Marangoni positivos corresponden al caso donde la superficie exterior de la pared tiene una temperatura mayor a la temperatura de la atmósfera ($T_p > T_\infty$).

Se eligieron 3 valores positivos diferentes para el número de Bond, $Bo = 0.001, 0.09$ y 0.18 . El primer valor es una aproximación a un sistema en ausencia de gravedad, aunque en ciertas circunstancias puede mostrar una diferencia al no ser exactamente cero. Los tres valores corresponden a casos donde las fuerzas de tensión superficial dominan sobre las fuerzas gravitacionales.

En la Figura 3.1 se muestran las gráficas de la razón de crecimiento Γ contra el número de onda k para $Bo = 0.001$ con $Ma = 0.7, 1.3$ y 1.9 utilizando los parámetros descritos anteriormente. De estas figuras, lo primero a destacar es que al incrementar el valor de d/χ disminuye la razón de crecimiento junto con el número de onda crítico k_c y que al incrementar el Ma aumenta el valor de Γ_{max} . Esto significa que, aumentar el número de Marangoni promueve la inestabilidad del sistema. En las tres figuras observamos que el deslizamiento parcial tiene el mismo efecto en todos los casos, al incrementar el valor de β , aumenta el valor de la Γ_{max} y disminuye el k_c . Es decir, si la pared presenta mayor deslizamiento, la región de inestabilidad de k disminuye.

En la Figura 3.2 se observan las gráficas correspondientes a $Bo = 0.09$ y 0.18 . Para el primero, los valores elegidos del número de Marangoni fueron $Ma = 1.3, 1.9$ y 2.5 , mientras que para el

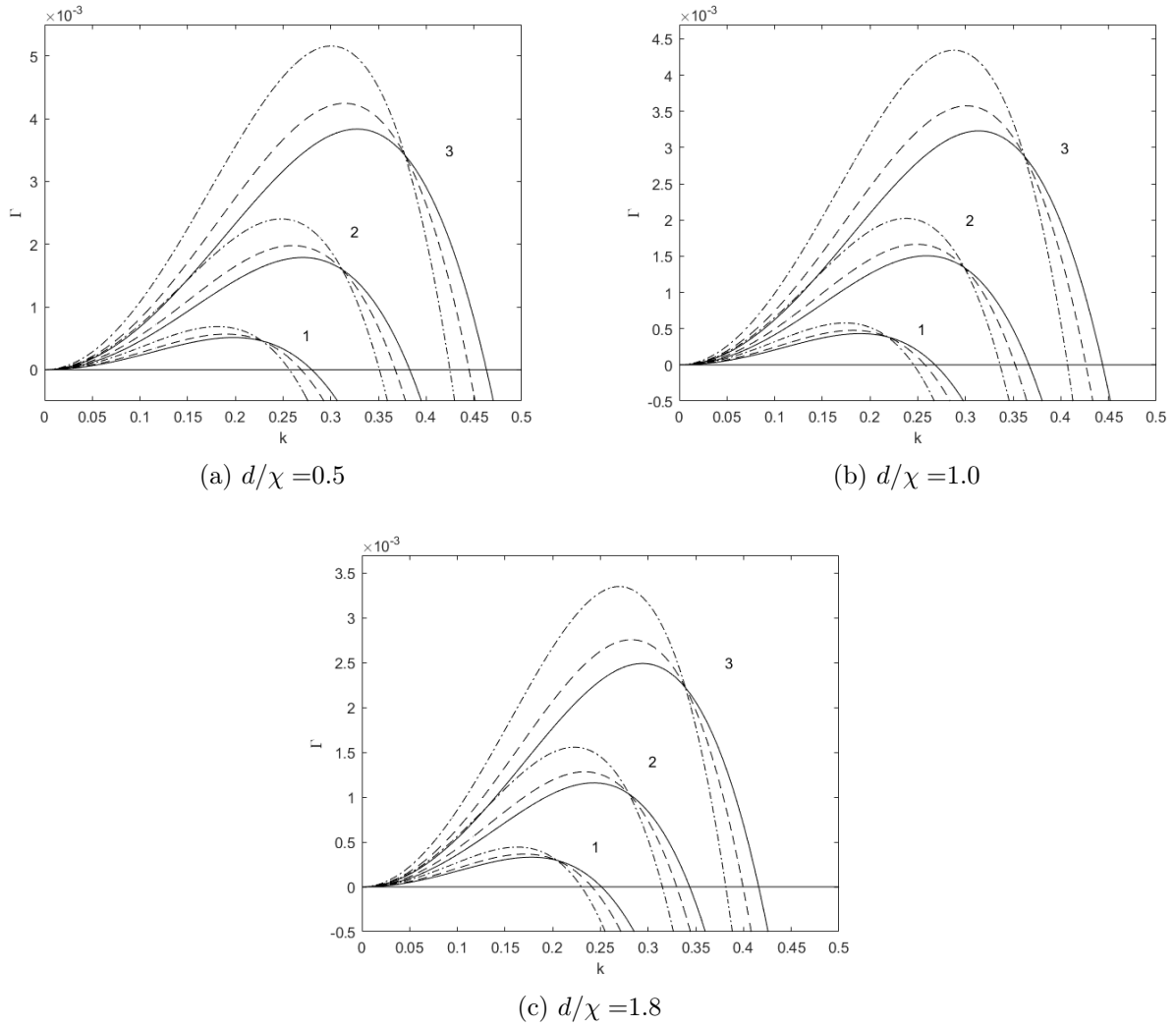


Figura 3.1: Razón de crecimiento como función del número de onda, para $Bo = 0.001$, y $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones). Los valores para Ma fueron 0.7 (1), 1.3 (2) y 1.9 (3).

segundo fueron $Ma = 2.5$, 3.1 y 3.7. De nuevo observamos que aumentar el valor de d/χ tiene como consecuencia la disminución de la razón de crecimiento y del número de onda crítico k_c . Del mismo modo que, aumentar el número de Marangoni provoca un incremento en la razón de crecimiento y el número de onda crítico k_c , es decir, se expande la región de inestabilidad. Por otra parte, notamos que al aumentar el número de Bond se observa una disminución considerable en la razón de crecimiento y el número de onda crítico, esto es evidente al comparar los casos donde $Ma = 1.3$ y 1.9 con $Bo = 0.001$ (Figura 3.1) y $Bo = 0.09$ (Figura 3.2), y $Ma = 2.5$ con $Bo = 0.09$ y $Bo = 0.18$ (columnas izquierda y derecha de la Figura 3.2, respectivamente). Entonces, concluimos que el efecto de la gravedad ayuda a estabilizar el sistema. Por último, al incrementar la longitud de deslizamiento adimensional β , el número de onda crítico k_c disminuye; es importante notar que conforme aumenta Bo , la disminución que se observa en k_c es mayor. Esto se reduce a

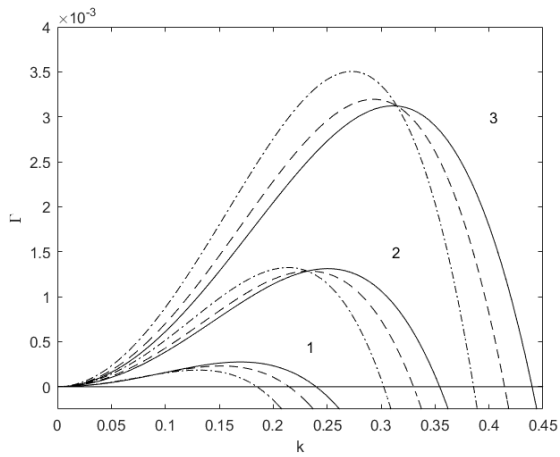
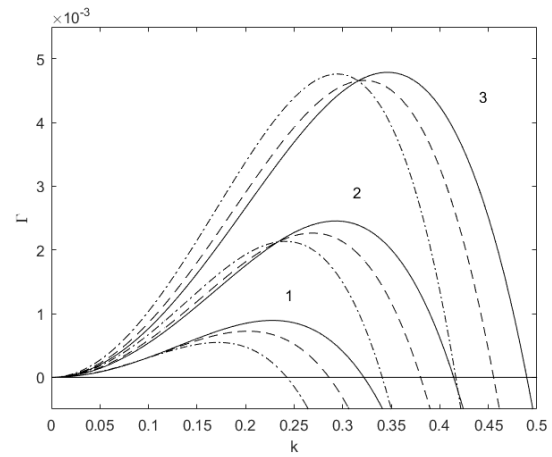
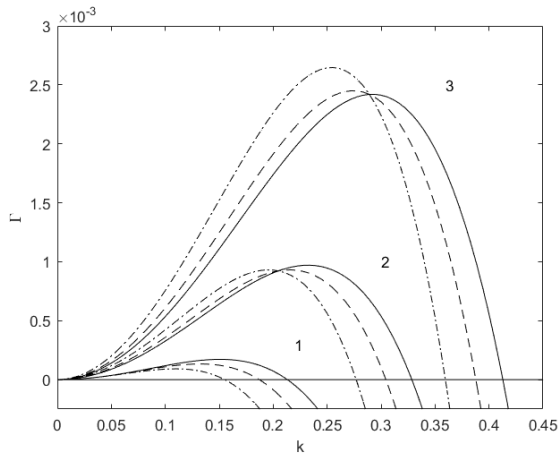
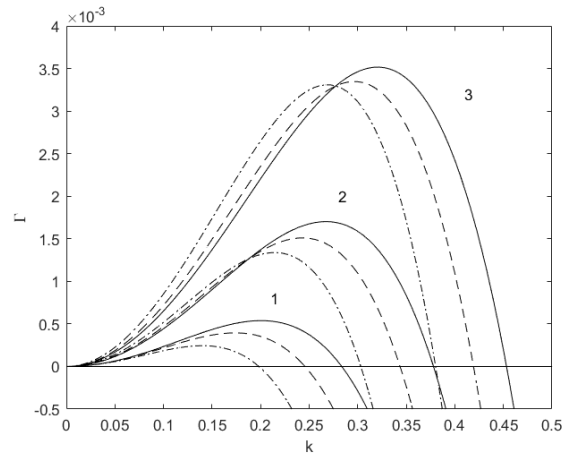
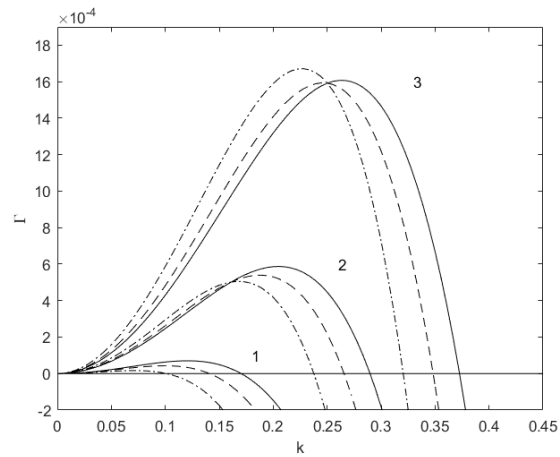
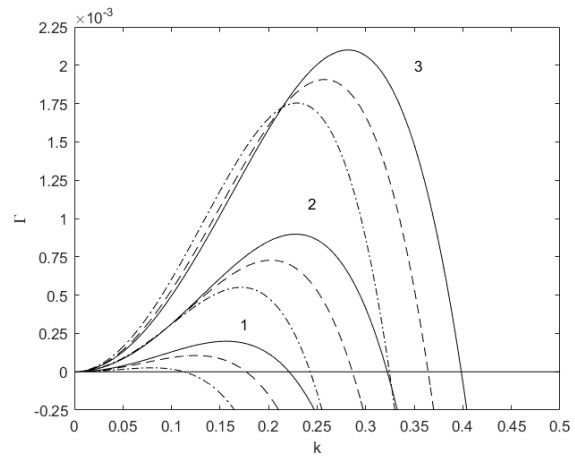
(a) $Bo=0.09, d/\chi=0.5$ (b) $Bo=0.18, d/\chi=0.5$ (c) $Bo=0.09, d/\chi=1.0$ (d) $Bo=0.18, d/\chi=1.0$ (e) $Bo=0.09, d/\chi=1.8$ (f) $Bo=0.18, d/\chi=1.8$

Figura 3.2: Razón de crecimiento como función del número de onda, con $\beta=0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones). Los valores para Ma en (a), (c) y (e) son 1.3 (1), 1.9 (2), 2.5 (3), y en (b), (d) y (f) son 2.5 (1), 3.1 (2) y 3.7 (3)

que el deslizamiento parcial ayuda a estabilizar el sistema y su efecto es mayor cuando domina la gravedad. En lo que respecta a su efecto sobre la razón de crecimiento máxima Γ_{max} , vemos que no hay una tendencia fija, debido a que Γ_{max} tiene un valor mínimo que varía con Ma , por lo que dependiendo del valor de éste y de β puede incrementar o disminuir su valor.

En la Figura 3.3 se muestran las gráficas del número de Marangoni crítico Ma_c como función del número de onda para $Bo = 0.001, 0.09$ y 0.18 (número de Bond positivo), cada subfigura corresponde a un valor de d/χ distinto. En ellas se observa que al aumentar el valor de Bo aumenta el mínimo de Ma_c . Ese mínimo ocurre en $k = 0$ y depende del número de Bond como

$$Ma_{cmin} = \left(\frac{\frac{1}{3} + \beta}{\frac{1}{2} + \beta} \right) \frac{Sden_L^2}{Bi} Bo. \quad (3.10)$$

Otro aspecto importante es que al incrementar la razón d/χ también aumenta el valor mínimo de Ma_c . Además, el efecto del deslizamiento parcial provoca que el mínimo sea distinto para un mismo valor de Bo , aumentando al incrementar el valor de β ; aunque es importante notar que la diferencia entre mínimos aumenta al incrementar el valor de Bo . En todos los casos vemos que Ma_c siempre es positivo y creciente respecto al número de onda. Esto significa que estos tres factores, el aumento en la razón d/χ , el deslizamiento parcial, así como el efecto de la gravedad, ayudan a postergar el inicio de la convección termocapilar.

En la Figura 3.4 se encuentran las gráficas correspondientes a la razón de crecimiento máxima Γ_{max} como función de Ma para el caso en que Bo es positivo. En general, vemos que, en concordancia con la forma obtenida anteriormente (ec. (3.9)), estas curvas no son monótonas crecientes, sino parábolas. En todos los casos, vemos que el valor mínimo de Γ_{max} es cero, sin embargo, este corresponde a un valor de Ma mayor conforme se incrementa el valor de Bo . Otro punto a considerar es que al incrementar el valor de d/χ , el vértice de la parábola se desplaza hacia la derecha y el lado recto de la misma crece, esto es, crece el ancho de la parábola. Esto se puede ver si la ecuación se reescribe de la forma $4p_p\Gamma_{max} = (Ma - Ma_{ver})^2$,

$$4 \underbrace{\left[\frac{Sden_L^4}{Bi^2} \frac{(\frac{1}{3} + \beta)}{(\frac{1}{2} + \beta)^2} \right]}_{p_p} \Gamma_{max} = \left[Ma - \frac{Bo Sden_L^2}{Bi} \left(\frac{\frac{1}{3} + \beta}{\frac{1}{2} + \beta} \right) \right]^2, \quad (3.11)$$

con p_p la distancia focal y Ma_{ver} el vértice de la parábola, este último corresponde al número de Marangoni crítico mínimo (ec. (3.10)). Algo que no se aprecia tan fácilmente en las figuras es el efecto concreto del deslizamiento parcial, el cuál también provoca que el valor de Ma , donde ocurre el mínimo, sea mayor conforme aumenta β . Esto se puede entender al escribir el término derecho dentro del paréntesis en Γ_{max} (ec. (3.11)) como $(1 + 3\beta)/(1 + 2\beta) > 1$, claramente, el vértice de la parábola se desplazará a la derecha al crecer β . En conclusión, esto reafirma lo observado en las gráficas anteriores (Figuras 3.2 y 3.3), sobre el efecto de la razón d/χ , la gravedad y el deslizamiento

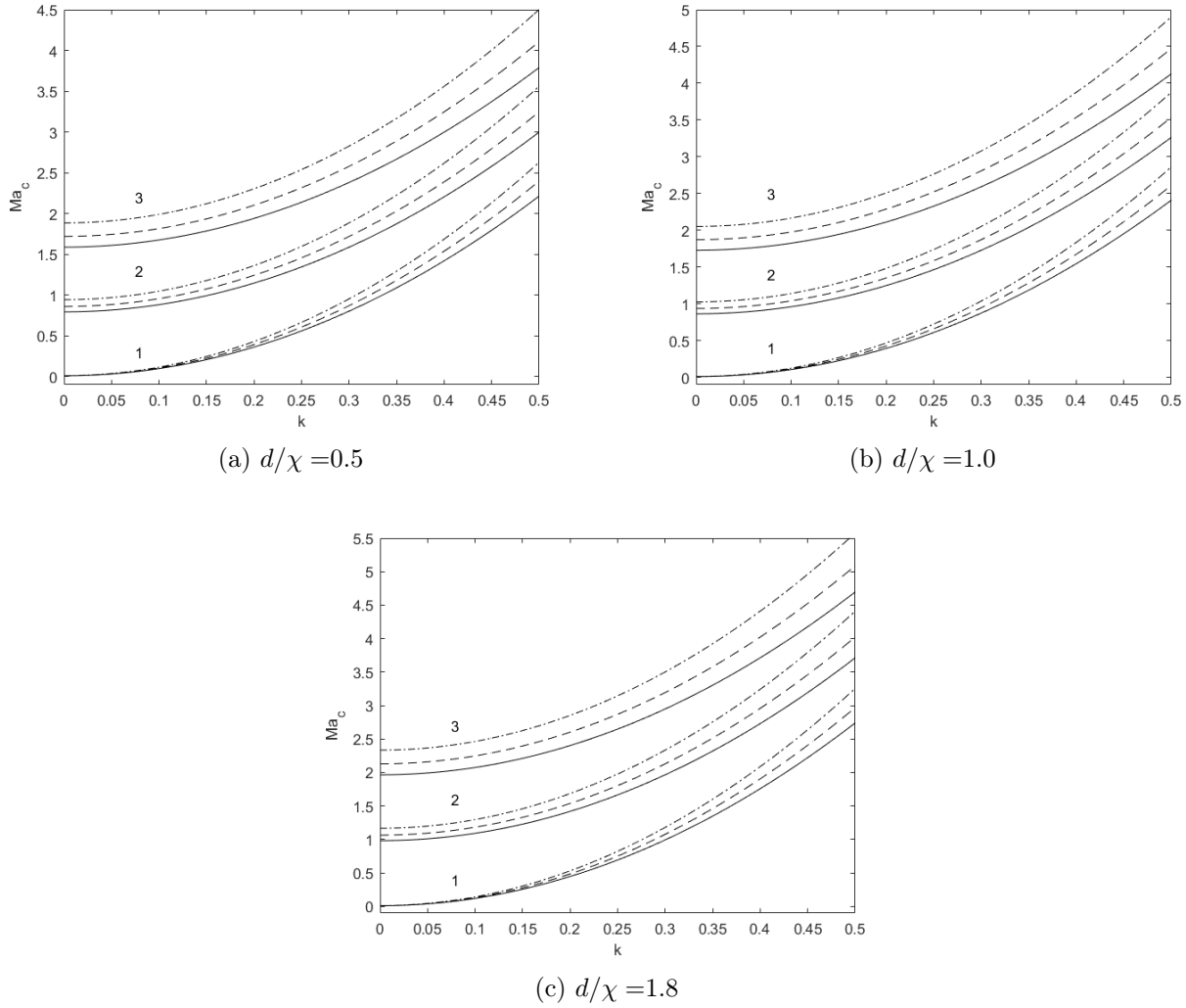


Figura 3.3: Marangoni crítico Ma_c como función del número de onda para número de Bond positivo, $Bo = 0.001$ (1), 0.09 (2) y 0.18 (3), con $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones).

parcial.

Por completez, mencionaremos qué ocurre con el caso donde $Ma < 0$ y $Bo > 0$. Como ya se había mencionado, de la ecuación (3.4) notamos que bajo los parámetros elegidos, $\Gamma < 0$ para toda k . Además, retomando la expresión (3.7) y las gráficas en la Figura 3.3, notamos que en el caso de $Bo > 0$ la curva del número de Marangoni crítico no cambia de signo, indicando que la inestabilidad sólo aparece a partir de $Ma > 0$. Adicionalmente, para $Bo > 0$, la atmósfera se encuentra arriba de la capa de líquido y esta configuración es estable desde el punto de vista de Rayleigh-Taylor, pues tenemos un fluido menos denso sobre otro más denso. En pocas palabras, no hay convección termocapilar, ni inestabilidad de Rayleigh-Taylor, y por tanto el sistema permanece estable.

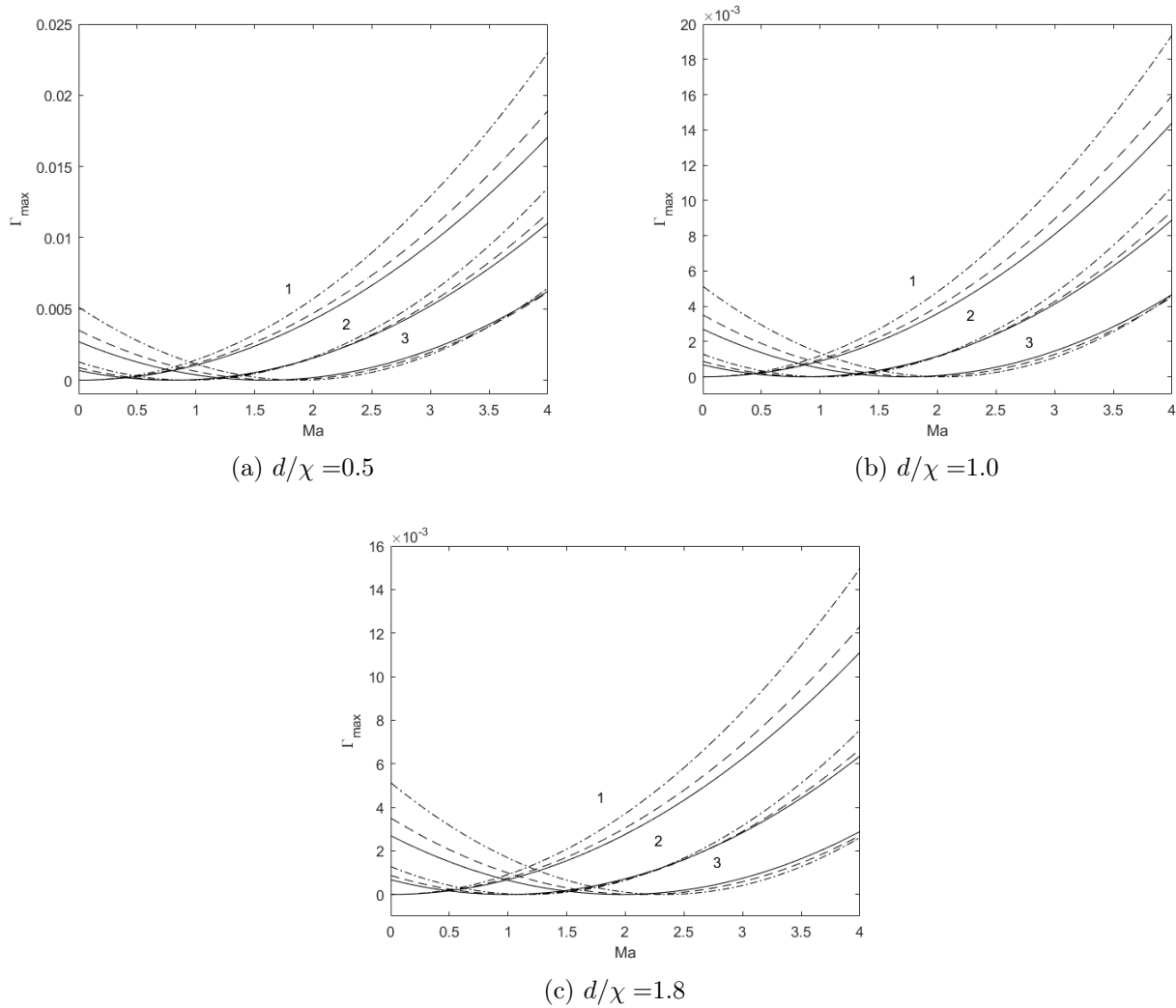


Figura 3.4: Razón de crecimiento máxima Γ_{max} como función del número de Marangoni Ma para número de Bond positivo, $Bo = 0.001$ (1), 0.09 (2) y 0.18 (3), con $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones).

3.1.2. Caso con $Bo < 0$.

En esta sección vamos a considerar el caso en que el número de Bond es negativo, mientras que, el número de Marangoni podrá ser positivo o negativo. Este sistema es equiparable al caso en que el sistema se encuentra de cabeza (ver Figura 2.1), es decir, la pared está por encima de la capa de líquido y, por tanto, la gravedad apunta en la dirección de la pared al líquido. Para hacer esta comparación, en el número de Bond se incluye el signo que surge de invertir el sistema.

Notemos que, al invertir el sistema, tenemos otro fenómeno en acción: la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Esto ocurre porque anteriormente se consideró que fuera del sistema tenemos un gas que es más ligero que el líquido sobre la pared, entonces, al voltear el sistema, el líquido más

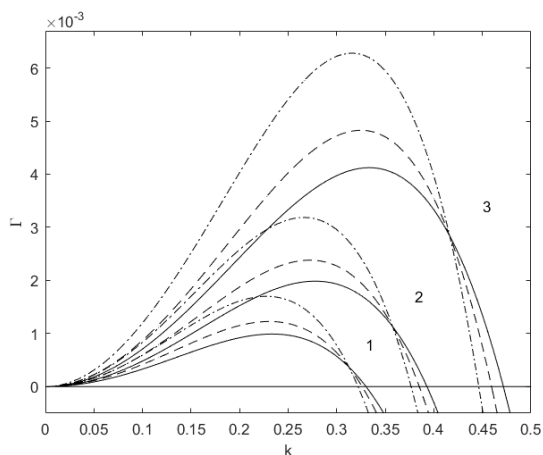
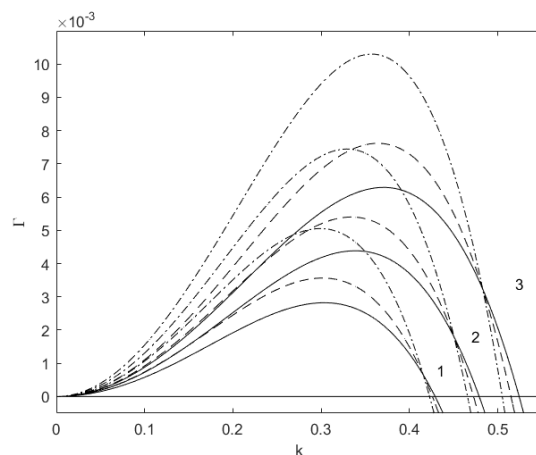
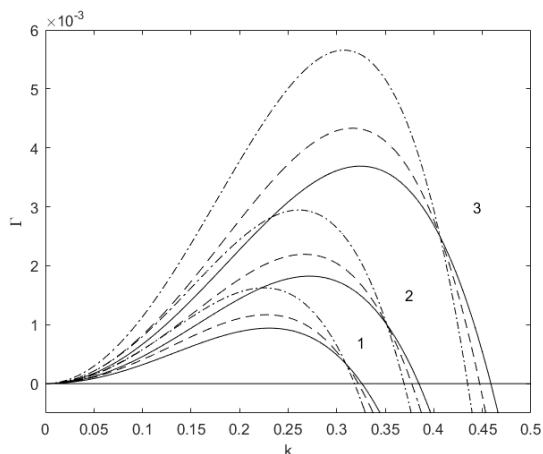
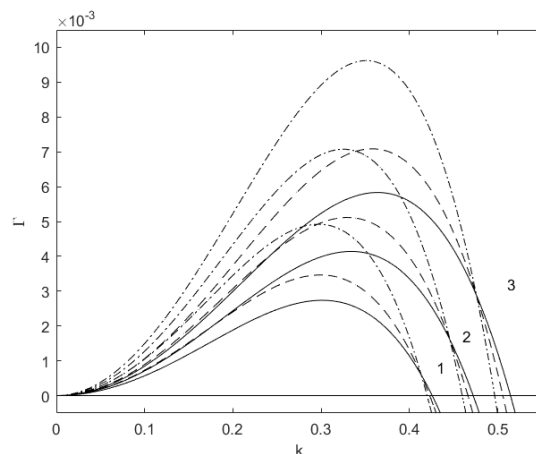
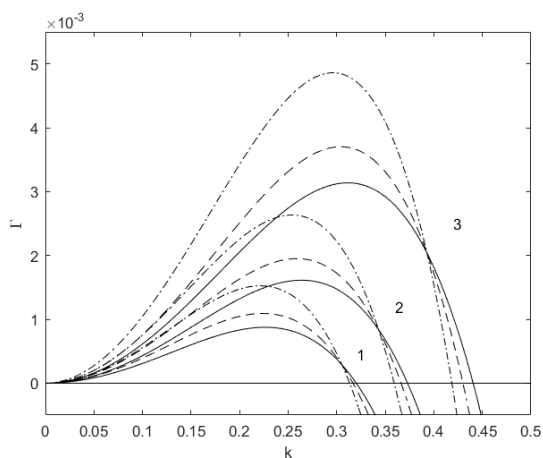
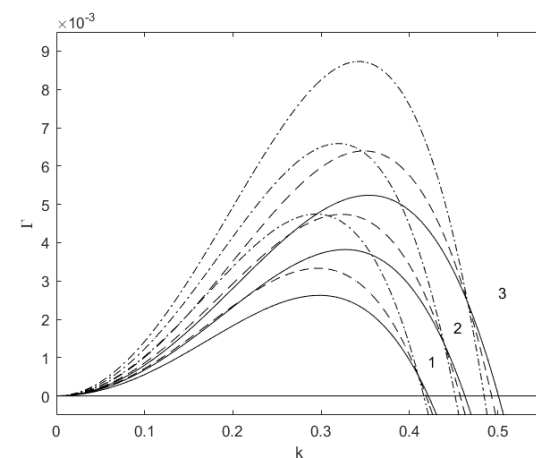
(a) $Bo = -0.075$, $d/\chi = 0.5$ (b) $Bo = -0.15$, $d/\chi = 0.5$ (c) $Bo = -0.075$, $d/\chi = 1.0$ (d) $Bo = -0.15$, $d/\chi = 1.0$ (e) $Bo = -0.075$, $d/\chi = 1.8$ (f) $Bo = -0.15$, $d/\chi = 1.8$

Figura 3.5: Razón de crecimiento como función del número de onda, con $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones). Los valores para Ma en (a), (c) y (e) son 0.3 (1), 0.7 (2), 1.3 (3), y en (b), (d) y (f) son 0.3 (1), 0.7 (2) y 1.1 (3)

denso queda por encima del gas, formando una situación potencialmente inestable. En este arreglo, la tensión superficial tiene un papel muy importante.

En la Figura 3.5 se muestran las gráficas del caso en el que el número de Marangoni es positivo, lo que significa que la superficie exterior de la pared tiene una temperatura mayor que la atmósfera ($T_p > T_\infty$). Aquí elegimos $Bo = -0.075$ con $Ma = 0.3, 0.7$ y 1.3 (columna izquierda) y $Bo = -0.15$ con $Ma = 0.3, 0.7$ y 1.1 (columna derecha). Vemos que, al aumentar el valor de d/χ tanto el máximo de la razón de crecimiento como el número de onda crítico disminuyen, es decir la región de inestabilidad disminuye ligeramente. Mientras que, al incrementar el número de Marangoni Ma ocurre lo contrario, el máximo de la razón de crecimiento y el número de onda crítico aumentan, aumentando la región de inestabilidad. Por otro lado, aumentar el deslizamiento de la pared, β , provoca una reducción en el número de onda crítico, se reduce la región de inestabilidad; sin embargo, para el rango de valores elegidos, aumentar β se traduce en un aumento de la razón de crecimiento máxima. A continuación, vamos a comparar las curvas para $Ma = 0.3$ y $Ma = 0.7$ con $Bo = -0.075$ (columna izquierda) y $Bo = -0.15$ (columna derecha), observamos que al incrementar la magnitud de Bo aumentan tanto la razón de crecimiento máxima como el número de onda crítico. Esto quiere decir que al incrementar el efecto de la gravedad en el sistema, este se vuelve más inestable. Esto significa que la tensión superficial estabiliza el sistema, pero al verse sobrepasada por la gravedad, da paso a la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.

Para darse una idea de las diferencias principales que ocurren al voltear el sistema, se van a comparar las gráficas con $Ma = 1.3$ para $Bo = 0.09$ (Figura 3.2) y $Bo = -0.075$ (Figura 3.5). Lo primero a destacar es que para $Bo < 0$ la razón de crecimiento máxima y el número de onda crítico son considerablemente mayores, es decir, la región de inestabilidad es mucho mayor que para el caso con $Bo > 0$. En ambos casos, tanto la razón d/χ como la longitud de deslizamiento adimensional β tienen el mismo efecto, ya que en ambos casos ayudan a reducir el número de onda crítico y la razón de crecimiento máxima. Sin embargo, la diferencia entre los números de onda críticos al variar β es mucho menor cuando Bo es negativo que cuando es positivo, lo que implica que, aunque ayuda a reducir la región de inestabilidad, la reducción es mayor cuando $Bo > 0$. Siendo naturalmente más inestable cuando el sistema se encuentra de cabeza.

Las gráficas que se encuentran en la Figura 3.6 corresponden al caso con número de Marangoni negativo, donde $Bo = -0.15$ con $Ma = -0.5, -0.9$ y -1.3 y $Bo = -0.3$ con $Ma = -0.9, -1.3$ y -2 . A diferencia del caso anterior, la temperatura de la atmósfera es mayor a la temperatura de la superficie exterior de la pared ($T_p < T_\infty$). En este caso, incrementar el valor de la razón d/χ da como resultado el aumento de la razón de crecimiento máxima y del número de onda crítico. Por otra parte, incrementar la magnitud del número de Marangoni provoca que la razón de crecimiento máxima y el número de onda crítico disminuyan, es decir, la región de inestabilidad se vuelve más pequeña cuando la diferencia de temperatura es mucho mayor. En este caso, incrementar la longitud de deslizamiento provoca un incremento tanto en la razón de crecimiento máxima

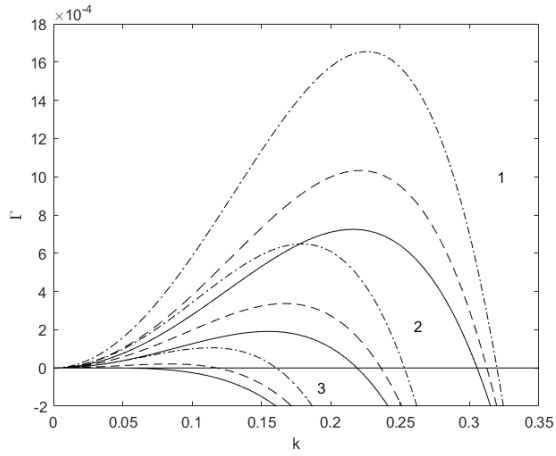
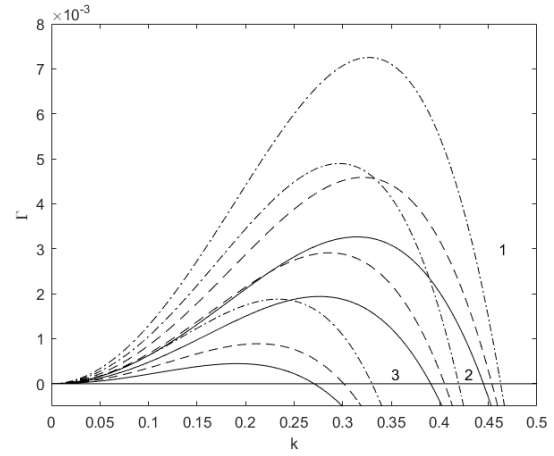
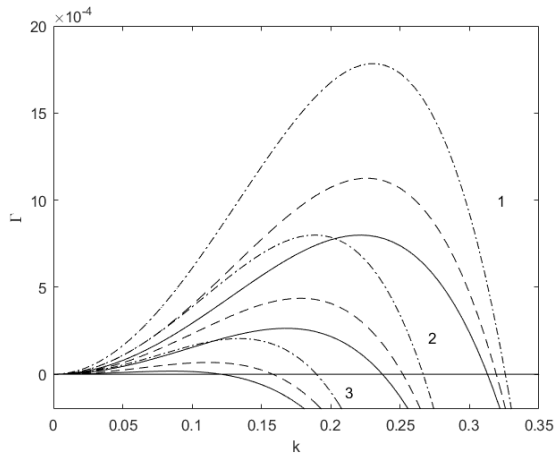
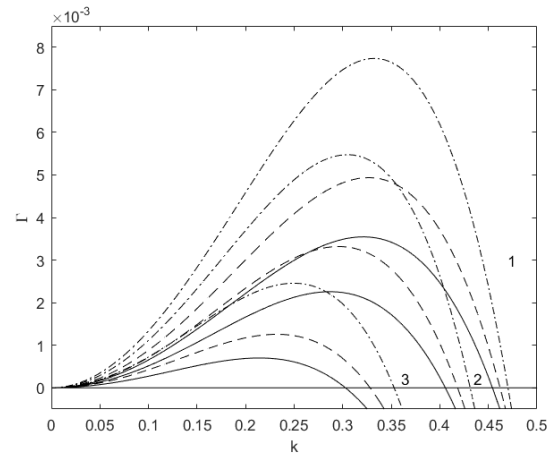
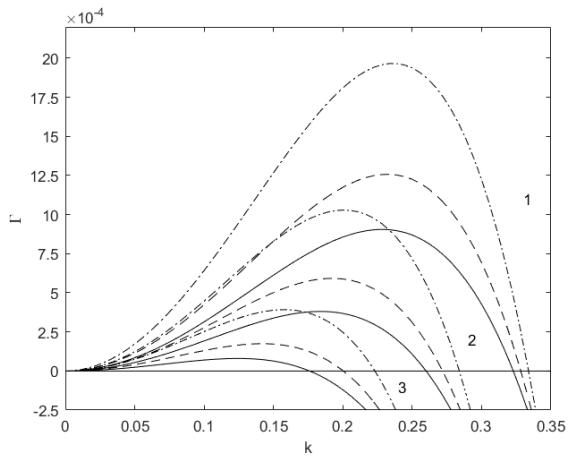
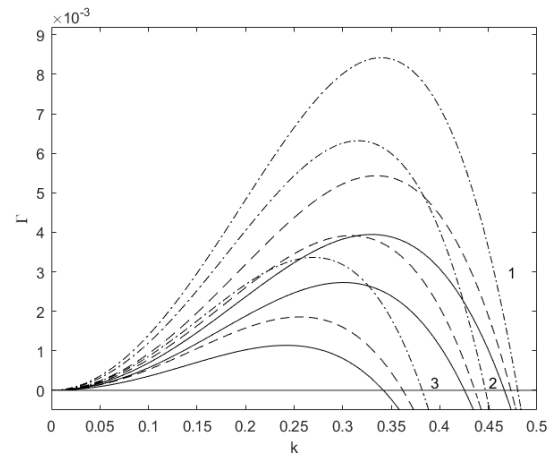
(a) $Bo = -0.15, d/\chi = 0.5$ (b) $Bo = -0.3, d/\chi = 0.5$ (c) $Bo = -0.15, d/\chi = 1.0$ (d) $Bo = -0.3, d/\chi = 1.0$ (e) $Bo = -0.15, d/\chi = 1.8$ (f) $Bo = -0.3, d/\chi = 1.8$

Figura 3.6: Razón de crecimiento como función del número de onda, con $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones). Los valores para Ma en (a), (c) y (e) son -0.5 (1), -0.9 (2), -1.3 (3), y en (b), (d) y (f) son -0.9 (1), -1.3 (2) y -2 (3)

como en el número de onda crítico. Vamos a comparar los casos con $Ma = -0.9$ y $Ma = -1.3$ para $Bo = -0.15$ (columna izquierda) y $Bo = -0.3$ (columna derecha), donde notamos que al incrementar la magnitud de Bo aumenta tanto la razón de crecimiento máxima como el número de onda crítico, es decir, la región de inestabilidad aumenta conforme el efecto de la gravedad sobre el sistema se vuelve más latente. Esto quiere decir que la tensión superficial es la que ayuda a estabilizar el sistema.

Algo interesante a reconocer, es cómo cambia el comportamiento del sistema al cambiar el signo del número de Marangoni, en otras palabras, al cambiar la dirección de la diferencia de temperaturas, siendo más caliente la superficie exterior de la pared ($T_p > T_\infty$) o la atmósfera ($T_\infty > T_p$). Para esta comparación consideraremos las gráficas con $Bo = -0.15$ (columna derecha de Figura 3.5 y columna izquierda de Figura 3.6). En estas figuras los valores de $|Ma|$ son del mismo orden y un rango similar. Lo primero a notar es que para $Ma < 0$ al aumentar el valor de d/χ la región de inestabilidad, delimitada por k_c , y la razón de crecimiento máxima aumentan. Lo contrario ocurre para $Ma > 0$. El efecto del deslizamiento también cambia entre ambos casos. Cuando $Ma > 0$, aumentar el valor de β ayuda a disminuir la región de inestabilidad, y dicho efecto es más notorio al incrementar el valor de $|Ma|$. Mientras que, cuando $Ma < 0$, la región de inestabilidad crece con β y se vuelve más notorio conforme $|Ma|$ disminuye. Sin embargo, vemos que los valores de k_c para $Ma < 0$ siempre se encuentran por debajo de los valores obtenidos para $Ma > 0$. Esto lo podemos entender al considerar el caso donde $Ma = 0$ y sustituirlo en la expresión (3.6), de ese modo obtenemos su respectivo número de onda crítico, $k_{c0} = \sqrt{-Bo} > 0$. A partir de este valor se alejan los valores de k_c según sea el caso, cuando $Ma > 0$ el radicando va a ser mayor que $-Bo$, y menor cuando $Ma < 0$. Del mismo modo, notamos que el orden de magnitud de la razón de crecimiento es considerablemente menor cuando $Ma < 0$. Lo anterior se puede observar a partir de la expresión (3.9), donde para $Ma = 0$ tenemos $\Gamma_{max0} = Bo^2 S(1/3 + \beta)/4$, este valor es el que separa ambos casos. Entonces, cuando $Ma > 0$, el interior del paréntesis es mayor a $BoS(1/3 + \beta)$, y menor cuando $Ma < 0$. Es importante mencionar que esto no contradice lo antes mencionado sobre el efecto de d/χ , ya que por la forma en que está incluido dentro de la expresión, provoca que en ambos casos se acerque asintóticamente a Γ_{max0} .

Las gráficas en la Figura 3.7 corresponden al número de Marangoni crítico Ma_c como función del número de onda k para los 3 valores negativos que se utilizaron en esta sección, $Bo = -0.075$, -0.15 y -0.3 . Lo primero a señalar es que al aumentar la magnitud del número de Bo , la magnitud del mínimo del número de Marangoni crítico también aumenta. Esto concuerda con la expresión (3.10) por la dependencia en Bo . En este caso vemos que aumentar el número de Bond negativo provoca que la convección termocapilar se inicie a valores de $|Ma|$ mayores, reduciendo considerablemente la región de estabilidad. En cada subfigura se observa un valor d/χ diferente, y vemos que al aumentar este valor, incrementa la magnitud del mínimo del número de Marangoni crítico. En lo que al efecto del deslizamiento parcial se refiere, tenemos que al aumentar el valor de β también

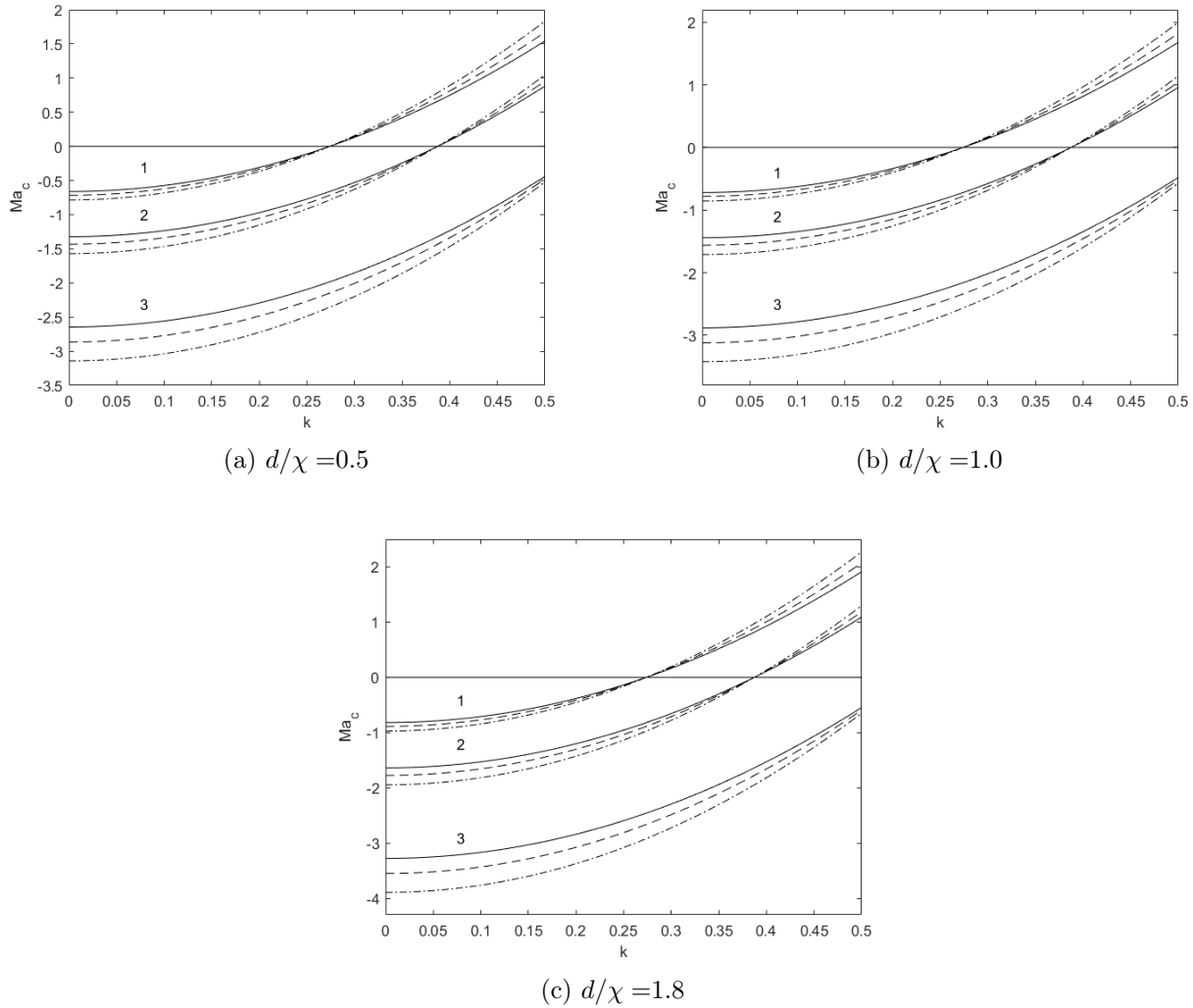


Figura 3.7: Marangoni crítico Ma_c como función del número de onda para números de Bond negativo, $Bo = -0.075$ (1), -0.15 (2) y -0.3 (3), con $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones).

aumenta la magnitud del mínimo de Ma_c . El efecto de d/χ y β es contrario al observado en la sección anterior. No obstante, se debe recordar que en Ma_{cmin} los términos que los contienen son siempre positivos. Por lo que, al aumentar ambos sólo incrementan el factor que multiplica a Bo , siendo este último el que define el signo de Ma_{cmin} . En general, notamos que las raíces de las curvas Ma_c corresponden a $k_{c0} = \sqrt{-Bo} > 0$. De modo que a valores mayores a k_{c0} les corresponde un Ma_c positivo y a valores menores, les corresponde un Ma_c negativo. Además, notamos que cambia el orden de las curvas antes y después de esta raíz. Ya que cuando $k > k_{c0}$, volvemos a observar que incrementar la longitud de deslizamiento β tiene como consecuencia un aumento en Ma_c , lo mismo ocurre con d/χ . Esto último ya había sido constatado en la comparación para un mismo número de Bond cambiando el signo del número de Marangoni.

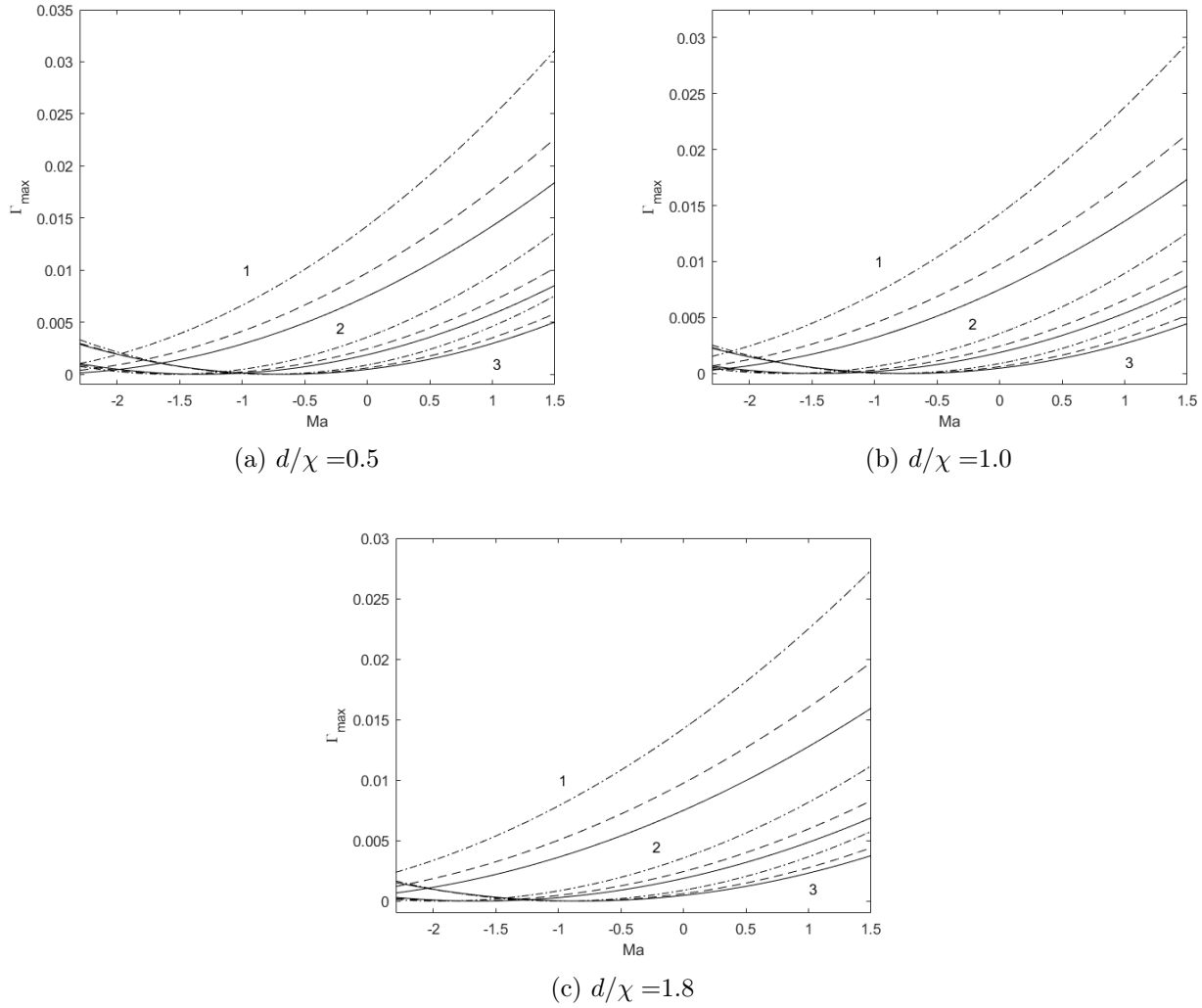


Figura 3.8: Razón de crecimiento máxima Γ_{max} como función del número de Marangoni Ma para número de Bond negativo, $Bo = -0.3$ (1), -0.15 (2) y -0.075 (3), con $\beta = 0.0$ (línea continua), 0.1 (línea de guiones) y 0.3 (línea de puntos y guiones).

En la Figura 3.8 se encuentran las gráficas de la razón de crecimiento máxima Γ_{max} como función de Ma para Bo negativo, el intervalo observado para Ma abarca tanto valores positivos como negativos. En todos los casos vemos que al incrementar el valor de d/χ la parábola se abre más, es decir, el lado recto p_p crece, como ocurría en el caso anterior. Lo cual se puede observar claramente en la expresión (3.11) por su dependencia en d/χ . Por otro lado, el vértice de la razón de crecimiento máxima ($\Gamma_{max} = 0$) se recorre hacia la derecha, conforme aumenta la magnitud de Bo . Esto ya se había observado en la Figura 3.7, puesto que el vértice corresponde a Ma_{cmin} , y este tiene una relación de proporcionalidad respecto a Bo . En lo que al deslizamiento parcial se refiere, ocurre lo contrario al incrementar β , pues el vértice se recorre hacia la izquierda, es decir, Ma_{cmin} se vuelve más negativo. Lo anterior se debe a lo comentado en la sección anterior, que $(1 + 3\beta)/(1 + 2\beta) > 1$. Entonces, al aumentar β , aumenta ligeramente el factor de proporcionalidad

que multiplica a Bo . Lo mismo sucede al aumentar d/χ . El vértice es desplazado hacia la izquierda por la dependencia de Ma_{cmin} respecto a d/χ . Esto provoca que también se incremente ligeramente el valor del factor que multiplica a Bo .

Conclusiones.

En este trabajo se estudió un sistema conformado por una capa delgada con superficie libre deformable sobre una pared gruesa con deslizamiento. A través del sistema hay una diferencia de temperaturas, puesto que la parte externa de la pared está a temperatura constante, la cual es diferente de la que presenta la atmósfera. Además, el sistema se encuentra en un estado hidrostático, ya que no hay flujo básico. Debido a la composición del mismo, se utilizó la aproximación de lubricación, lo que dio lugar al parámetro pequeño ε que es la razón entre una longitud de onda característica del sistema y el grosor de la capa de fluido.

Dado que las ecuaciones y condiciones de frontera resultantes para las variables del sistema son no lineales y complejas, se realizó un desarrollo asintótico con el cual se determinó la importancia de los términos que las componían. Con esto en mente, se resolvieron las ecuaciones a orden menor. Todas las soluciones obtenidas para las variables dependían directamente de la deformación de la superficie libre de la capa de fluido. Esto dio lugar a una ecuación no lineal de evolución de la deformación superficial.

Se encontró que los parámetros de interés en este sistema son la longitud de deslizamiento adimensional, el número de Marangoni, el número de Bond y la razón d/χ , ya que aparecen de forma natural en la ecuación de deformación superficial, y por tanto su variación influye en el comportamiento de la superficie. Cada uno de ellos representa un aspecto físico importante para el sistema, como son la cantidad de deslizamiento en la pared, la competencia entre las fuerzas debidas a los gradientes de tensión superficial por la temperatura y las fuerzas viscosas, la importancia relativa entre la gravedad y la tensión superficial y el efecto del grosor de la pared y su conductividad térmica respecto al grosor de la capa de fluido y su respectiva conductividad.

Para estudiar la estabilidad lineal del sistema se derivó una ecuación lineal para la deformación superficial. Esto tuvo como objetivo entender el comportamiento del sistema cuando la amplitud de la deformación es pequeña.

La resolución por modos normales de la ecuación lineal nos dio una visión general del comportamiento del sistema, y cómo cambia al variar los parámetros antes mencionados. Con ello se encontró el número de Marangoni a partir del cual se inicia la convección termocapilar, y cómo

contribuyen a su modificación el deslizamiento y grosor de la pared, así como la competencia entre la fuerza de gravedad y las fuerzas de tensión superficial.

Los resultados del análisis lineal se dividieron en dos casos principales: número de Bond positivo y negativo. En ambos casos se consideró la posibilidad de tener números de Marangoni positivos y negativos, ya que su signo se relaciona con el signo de la diferencia de temperatura a través del sistema. Es importante resaltar que el número de Bond negativo se asocia a tener el sistema de cabeza. Lo cual provoca que entre la atmósfera y la capa de líquido se tenga la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.

Cuando el número de Bond es positivo, la gravedad tiene un papel estabilizador, puesto que al aumentar su valor, la región de inestabilidad disminuye considerablemente. Sin embargo, el incremento en el número de Marangoni positivo da como resultado un aumento de la misma, esto significa que, cuando las fuerzas debidas a los gradientes de tensión superficial superan a las fuerzas viscosas, el sistema se inestabiliza más fácilmente. En este caso, el deslizamiento en la pared tiene un efecto estabilizador, puesto que al incrementar la longitud de deslizamiento se observa una disminución en el número de onda crítico, indicando que la región de inestabilidad se reduce. Lo mismo ocurre cuando se aumenta la razón d/χ , es decir, un aumento en la razón entre los espesores de la capa de fluido y de la pared sobre la razón de sus respectivas conductividades, o una disminución de la razón de las conductividades respecto a la razón de los espesores, provoca que la región de estabilidad crezca. Especialmente, cuando el número de Marangoni es negativo, el sistema siempre es linealmente estable en la presente aproximación. Además, esto está apoyado por el efecto estabilizador de la gravedad.

En el caso donde el número de Bond es negativo, la tensión superficial es quien estabiliza al sistema. Como ya se mencionó, en este caso se presenta la configuración adecuada para la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, por lo que al aumentar la fuerza de gravedad sobre las fuerzas de tensión superficial, el sistema empieza a desestabilizarse. En lo que al número de Marangoni respecta, se observó una diferencia importante al pasar de valores positivos a negativos. Ya que cuando es positivo, el aumento de su valor absoluto tiende a incrementar la región de inestabilidad. Sin embargo, cuando es negativo, aumentar su magnitud estabiliza al sistema. Esto significa que, entre mayor sea la diferencia de temperatura a través del sistema, más estable o inestable va a ser este, dependiendo del signo de la diferencia. Se debe destacar que, la región de inestabilidad cuando $Ma < 0$ siempre está por debajo de la correspondiente a $Ma > 0$, pues ambas regiones están separadas por el número de onda crítico correspondiente a $Ma = 0$, $k_{c0} = \sqrt{-Bo} > 0$.

Por otra parte, se observaron comportamientos diferentes en los efectos del deslizamiento y de la razón d/χ , al pasar de Marangoni positivo a negativo. Cuando el número de Marangoni es positivo, aumentar la cantidad de deslizamiento reduce la región de inestabilidad. Lo contrario ocurre cuando el número de Marangoni es negativo, esto puede deberse a que el deslizamiento

asiste el movimiento por convección termocapilar. De manera similar, al aumentar la razón d/χ con número de Marangoni positivo, la región de estabilidad crece, es decir, cuando la razón entre los espesores de la capa de fluido y la pared aumenta respecto a la razón entre sus conductividades el sistema se estabiliza ligeramente. Mientras que, con número de Marangoni negativo, aumentar esta razón desestabiliza el sistema. Esto significa que, en este caso la dirección de la diferencia de temperatura cobra importancia en la forma en que influyen a la estabilidad del sistema el deslizamiento y el grosor de la pared.

En resumen, vemos que el deslizamiento en la pared puede acentuar o atenuar la inestabilidad del sistema, por lo que debe ser tomado en cuenta al elegir el tipo de nanoestructura para los recubrimientos o materiales que conformarán la pared, pues estos tendrán una longitud de deslizamiento efectiva que favorecerá o no al sistema.

Lo mismo ocurre con el grosor de la pared y su conductividad, pues dependiendo que tan grande o pequeño sea respecto al grosor de la capa de fluido, aunado a la relación que haya entre sus conductividades, se puede reducir o incrementar la estabilidad del sistema, esto nos habla de la importancia de elegir el material de la pared por sus propiedades y tamaño.

Además, se consideró cómo influye a desestabilizar el sistema la orientación del mismo. Puesto que, al voltearlo, la configuración que se obtiene no sólo cuenta con las características propias del sistema en cuestión, sino que, se suma una consideración extra: la disposición entre la atmósfera y la capa de líquido da paso a lo que se conoce como inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Esto le confiere una cualidad más que lo vuelve particularmente inestable, por lo que, la tensión superficial es la que se encarga de estabilizar en medida de lo posible al sistema.

Bibliografía

- [1] H. C. Kuhlmann. Thermocapillary convection. In H. C. Kuhlmann and H. J. Rath, editors, *Free Surface Flows*, volume 391 of *International Centre for Mechanical Sciences*. Springer, Vienna, 1998.
- [2] C. G. M. Marangoni. Ueber die ausbreitung der tropfen einer flüssigkeit auf der oberfläche einer anderen. *Annalen der Physik*, 219(7):337–354, 1871.
- [3] J. K. Platten and D. Villers. An introduction to thermocapillary convection. In J. De Coninck and F. Dunlop, editors, *Wetting Phenomena*, volume 354 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [4] R. V. Craster and O. K. Matar. Dynamics and stability of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 81(3):1131–1198, 2009.
- [5] J. R. A. Pearson. On convection cells induced by surface tension. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(5):489–500, 1958.
- [6] L. E. Scriven and C. V. Sternling. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(3):321–340, 1964.
- [7] L. A. Dávalos-Orozco. The effect of the thermal conductivity and thickness of the wall on the nonlinear instability of a thin film flowing down an incline. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(4):1–7, 2012.
- [8] L. A. Dávalos-Orozco. Nonlinear longwave stability of two liquid layers coating both sides of a thick wall in presence of gravity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 116:107–122, 2019.
- [9] Y. O. Kabova, A. Alexeev, T. Gambaryan-Roisman, and P. Stephan. Marangoni-induced deformation and rupture of a liquid film on a heated microstructured wall. *Physics of Fluids*, 18(1):012104, 2006.

- [10] L. Léger, E. Raphaël, and H. Hervet. Surface-anchored polymer chains: Their role in adhesion and friction. In S. Granick, K. Binder, P.-G. de Gennes, E. P. Giannelis, G. S. Grest, H. Hervet, R. Krishnamoorti, L. Léger, E. Manias, E. Raphaël, and S.-Q. Wang, editors, *Polymers in Confined Environments*, volume 138 of *Advances in Polymer Science*, pages 185–225. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [11] D. C. Tretheway and C. D. Meinhart. Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls. *Physics of Fluids*, 14(3):L9–L12, 2002.
- [12] C.-H. Choi and C.-J. Kim. Large slip of aqueous liquid flow over a nanoengineered superhydrophobic surface. *Phys. Rev. Lett.*, 96:066001, 2006.
- [13] M. A. Samaha and M. Gad-el Hak. Slippery surfaces: A decade of progress. *Physics of Fluids*, 33(7):071301, 2021.
- [14] A. T. Tran, H. Le Quang, Q. C. He, and D. H. Nguyen. Mathematical modeling and numerical computation of the effective interfacial conditions for stokes flow on an arbitrarily rough solid surface. *Applied Mathematics and Mechanics*, 42(5):721 – 746, 2021.
- [15] D. Gentili, M. Chinappi, G. Bolognesi, A. Giacomello, and C. M. Casciola. Water slippage on hydrophobic nanostructured surfaces: molecular dynamics results for different filling levels. *Meccanica*, 48(8):1853 – 1861, 2013.
- [16] G. H. Hu. Linear stability of ultrathin slipping films with insoluble surfactant. *Physics of Fluids*, 17(8):088105, 2005.
- [17] Z. Ding and T. N. Wong. Falling liquid films on a slippery substrate with marangoni effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 90:689–701, 2015.
- [18] Y. Chao, Z. Ding, and R. Liu. Dynamics of thin liquid films flowing down the uniformly heated/cooled cylinder with wall slippage. *Chemical Engineering Science*, 175:354–364, 2017.
- [19] Y. C. Liao, Y. C. Li, and H. H. Wei. Drastic changes in interfacial hydrodynamics due to wall slippage: Slip-intensified film thinning, drop spreading, and capillary instability. *Phys. Rev. Lett.*, 111(13):136001, 2013.
- [20] R. V. Birikh, V. A. Briskman, M. G. Velarde, and J. C. Legros. *Liquid interfacial systems: Oscillations and Instability*, volume 113 of *Surfactant science series*. Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [21] Y. A. Cengel. *Heat transfer: A practical approach*. McGraw-Hill, 2002.