



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

**ESTUDIO NUMÉRICO DE PERCOLACIÓN EXPLOSIVA EN REDES  
ALEATORIAS**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
DANIEL ESTEBAN ANDRADE OCEJO

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. FRANÇOIS ALAIN LEYVRAZ WALTZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DR. HERNÁN LARRALDE RIDAURA  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS  
DR. MAXIMINO ALDANA GONZÁLEZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

CUERNAVACA, MORELOS; FEBRERO 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Resumen

En este trabajo se estudia la transición de fase del modelo de percolación explosiva utilizando redes aleatorias. El modelo se encarga de capturar las características más importantes de una red que atraviesa por un cambio repentino en la conectividad. El rasgo representativo del modelo es la adición de un mecanismo de selección de enlaces que evita el crecimiento de componentes de gran tamaño, lo cual genera un retraso en el surgimiento de conectividad a gran escala dentro del sistema. Este cambio es tan abrupto que se presentó como discontinuo en su artículo fundacional. Sin embargo, aquí se analiza detalladamente el parámetro de orden mediante un enfoque numérico y se confirma un resultado matemáticamente exacto que muestra que es continuo. Además, a través de distintas técnicas de escalamiento se caracteriza el comportamiento de los observables de interés en las cercanías del punto crítico. Esto produce una buena aproximación del umbral de percolación al igual que un conjunto de exponentes críticos. Aunque el carácter inusual del modelo ocasiona una discrepancia entre los valores obtenidos por cada técnica, existen ciertas propiedades que trascienden más allá del método utilizado. En particular, las relaciones de escalamiento correspondientes se cumplen en buena forma. También, a diferencia de la percolación clásica, se encuentra que el parámetro de orden muestra una distribución bimodal en el punto crítico y que existe un cambio de decaimiento en las distribuciones de tamaños pre- y postcríticas. De manera que una sencilla modificación al modelo de percolación clásica produce toda una nueva clase de universalidad y una variedad de peculiaridades que pueden tener un impacto beneficioso en redes reales, tal como retrasar la aparición de grandes redes de contacto entre individuos en una epidemia.

# Agradecimientos

Mi paso por la maestría, desde la impetuosa batalla por un lugar en el proceso de admisión hasta la conclusión de este trabajo de tesis en medio de una pandemia, no habría sido posible sin el apoyo de familiares, tutores, compañeros, amigos e instituciones que generosamente facilitaron el proceso.

Agradezco enormemente a toda mi familia por siempre contribuir incondicionalmente a la realización de mis metas, por su amor y su comprensión. A mi madre Maura por enseñarme gran parte de lo que sé de la vida, por su guía y su constancia. A mi padre Carlos por alentarme a cumplir mis sueños, por su esfuerzo y su disposición. A mi hermana Karen por ser mi ejemplo de fortaleza, por su dedicación y su entendimiento. Y a mi sobrina Victoria sólo por existir, por ser pura alegría y siempre aligerar mi carga con su presencia. Ustedes son mi motivación y en todo momento los llevo conmigo.

También quiero expresarle mi más profundo agradecimiento a Dulce por acompañarme durante este largo camino. Por inspirarme a seguir, por brindarme su cariño y por estar ahí cuando lo he necesitado. Eres mi sustento, mi estímulo y muchas veces mi voz de la razón.

Quiero agradecer especialmente al Dr. François Leyvraz por su excelente labor como tutor principal, por sus consejos siempre tan acertados, por su paciencia, comprensión y gran apoyo. Este trabajo no sería el mismo sin su guía, por lo que aprecio bastante que contribuyera de manera tan activa a mi formación. También vale la pena recalcar las valiosas sugerencias y aportes que el Dr. Hernán Larralde y el Dr. Maximino Aldana proporcionaron como miembros de mi comité tutor a lo largo de la maestría.

A los miembros de mi jurado les agradezco bastante su disposición y el tiempo que se tomaron para evaluar este trabajo. Sus comentarios y correcciones ayudaron a que mejorara la presentación de esta tesis.

Gracias a Rubén, Vale, Thomas, Diana y Daniel por haberme ayudado en momentos clave del proceso. No importa cuando vean esto, les debo una cheve por eso. A Mota, Paulino, Mayra y Carlos por ser unos grandes mentores, por mostrar disponibilidad y tratar de resolver las dudas que les planteaba aunque los agarrara en curva al inicio. A Juan, Omar, Afra y Andrea por su valiosa amistad.

Finalmente, agradezco el apoyo institucional recibido en cada etapa de la maestría. A la UNAM por abrirle las puertas a un intento de físico que salió del desierto. Al Instituto de Ciencias Físicas por brindar un espacio idóneo para el desarrollo de este trabajo. Al CONACyT por la beca otorgada que permitió financiar mis estudios de posgrado. Y a la DGAPA por su apoyo para la obtención del grado a través del proyecto PAPIIT-IN113620.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Conceptos generales y descripción del modelo</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de grafos . . . . .	9
2.2. Transiciones de fase . . . . .	11
2.3. Percolación clásica en redes aleatorias . . . . .	13
2.4. Ecuaciones cinéticas de agregación . . . . .	15
2.5. Escalamiento de tamaño finito . . . . .	17
2.6. Descripción del modelo explosivo . . . . .	18
<b>3. Caracterización de la transición de fase</b>	<b>22</b>
3.1. Resumen . . . . .	23
3.2. Ventana de transición . . . . .	26
3.3. Técnicas de escalamiento . . . . .	32
3.4. Parámetro de orden $s_1$ . . . . .	35
3.5. Tamaños de componente más grandes . . . . .	51
3.6. Distribución de tamaños $n(s)$ . . . . .	63
3.7. Momentos de la distribución $n(s)$ . . . . .	72
3.8. Relaciones de escalamiento . . . . .	85
<b>4. Escalamiento de tamaño finito modificado</b>	<b>100</b>
4.1. Técnica de escalamiento alternativa . . . . .	100
4.2. Resultados . . . . .	104
4.3. Resumen y comparación . . . . .	113
<b>5. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>114</b>
<b>A. Listas de símbolos y notación</b>	<b>116</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las relaciones y el funcionamiento de varios aspectos de la sociedad moderna han resultado tener una buena descripción a través del uso de redes complejas. El incremento repentino en el número de publicaciones sobre este tema acentuó su alcance en distintas disciplinas del conocimiento científico en los últimos 20 años. Esto evidenció la existencia de una gran variedad de fenómenos que se pueden representar e interpretar con base en el estudio de redes. De modo que su aplicabilidad abarca las áreas de sociología [WF94; Sco88], ecología [PD06], biología [New02], transporte y comunicación [FFF99], entre otras. Además, el concepto de red se ha popularizado en buena parte de la población mundial debido al avance tecnológico de la conectividad en redes sociales y el internet [PV04].

El mundo está inmerso en este tipo de redes y su aparición ocurre a diferentes escalas. Basta con identificar un conjunto de seres vivos u objetos (nodos) que se relacionan de alguna manera entre sí (conexiones mediante enlaces). Algunos ejemplos de redes comunes incluyen el internet (computadoras conectadas a través de cables que envían y reciben datos), las aplicaciones digitales como Facebook o Twitter (cuentas personales unidas con ligas bidireccionales de amistad o unidireccionales de seguimiento), las cadenas alimenticias en un ecosistema (especies vinculadas por sus relaciones depredador-presa) y la red de transporte público en una determinada ciudad (estaciones o paradas y las rutas utilizadas para ir de unas a otras).

Aunque el estudio de redes en algunos sistemas como los descritos anteriormente es reciente, estas han sido analizadas durante mucho tiempo en una rama de las matemáticas conocida como teoría de grafos [New18]. Sin embargo, ya que no se tenía la facilidad de almacenamiento y acceso a la información con que se cuenta actualmente, existían muchos sistemas cuyo manejo excedía el poder de procesamiento de la tecnología de la época. Por este motivo, el estudio de redes asociadas a sistemas donde la complejidad era enorme parecía tener un mejor entendimiento mediante el método probabilístico. Así, las conexiones entre nodos eran tomadas al azar y esto dio lugar al surgimiento de las llamadas redes aleatorias.

En la década de 1950 se presentaron varios modelos relacionados con esta idea, aunque tal vez el más usado sea el que se desarrolló por los matemáticos húngaros Paul Erdős

y Alfred Rényi (abreviado como ER) [ER59; ER60]. La formulación del modelo ER utilizada aquí considera una colección de  $N$  nodos con exactamente  $m$  enlaces escogidos uniformemente al azar entre los  $\binom{N}{2}$  enlaces posibles para ocupar el grafo, denotado como  $G(N, m)$ . A partir del trabajo fundacional de Erdős y Rényi, el estudio de redes aleatorias comenzó a recibir atención fuera del campo de las matemáticas.

Más adelante, con el desarrollo del internet y la red informática mundial (WWW, por sus siglas en inglés) se pudo manejar información a gran escala por primera vez y nos enteramos que muchas de las redes que se manejaban no encuentran una descripción adecuada mediante el modelo ER. Este suceso propició el establecimiento de dos nuevos tipos de redes: las redes de mundo pequeño en 1998 por los investigadores Duncan Watts y Steven Strogatz [WS98], y las redes libres de escala por Albert-Lászlo Barabási en 1999 [BA99].

La característica principal de estas redes es que la topología implicada es más compleja que la mostrada por las redes de tipo ER, la cual cuenta con una distribución poissoniana para sus conexiones. No obstante, la importancia del modelo ER se manifiesta en varios casos como punto de partida para el análisis de redes, debido al amplio conocimiento que se ha acumulado al respecto. Además, la obtención de propiedades mediante soluciones exactas es de gran utilidad para conectar con sistemas en los que esto no es posible.

Gran parte de los modelos que describen a estos sistemas comparten un mecanismo de agregación en el que la evolución de elementos microscópicos produce la formación de agregados a una escala comparable con la del sistema mismo. En ese sentido, el estudio de esta colección de redes tiene una de sus bases en la teoría de percolación [SA92; Sah94]. Este formalismo se encarga de caracterizar la transición que ocurre entre un estado de red con poca o nula conexión y uno donde la red está completamente conectada.

El modelo de percolación se ha utilizado para representar sistemas como medios porosos [Cha+82], fenómenos sociales [Sol+00], incendios forestales [DS92] y conductividad en redes de resistores [Kir73]. El modelo clásico se refiere a la evolución de una red con  $N$  nodos desconectados mediante la adición de enlaces al azar. En este caso cada posible enlace tiene la misma probabilidad de ser añadido, la cual es  $1/N$ . Ya que se trata de un modelo probabilístico y existe un cambio notorio en la conectividad, se aborda esta propiedad desde el marco de las transiciones de fase en física estadística. Por su importancia, este modelo ha sido estudiado a fondo y se ha demostrado que tiene una transición continua o de segundo orden.

En consecuencia, una propiedad fundamental utilizada para describir el comportamiento de una red y considerar las funciones que puede soportar es la conectividad. Aunque existen redes, como el internet, donde probablemente se busca asegurar una buena conexión entre los componentes, hay algunas otras donde se desea anular o retrasar la conectividad, por ejemplo, entre individuos en una epidemia.

En 2009, Achlioptas y sus colegas conjeturaron que al hacer unas sencillas modificaciones en el modelo clásico se obtiene una transición discontinua [ADS09]. A esta transición se le llamó percolación explosiva porque aparenta llevar a un cambio abrupto en la conectividad. El nuevo modelo se basa en que, en lugar de agregar simplemente un enlace a la red cada vez, se eligen dos o más (mientras sea una cantidad finita de enlaces) aleatoriamente y se agrega sólo uno de los enlaces de acuerdo a alguna regla. Por ejemplo, una de

las reglas más utilizadas consiste en que el enlace añadido minimice el producto entre los tamaños de los agregados que une.

De este modo, la regla de selección de enlaces empleada produce un retraso en la aparición de conectividad a gran escala dentro del sistema. Esto conlleva a un cambio repentino que se asoció inicialmente a una transición de primer orden.

En los primeros años después de la publicación del artículo fundacional de percolación explosiva se buscó establecer el orden de su transición de fase [TS10; Cos+10; HV11; Gra+11; RW11; LKP11]. La declaración inicial de discontinuidad en el parámetro de orden atrajo gran cantidad de atención hacia su estudio. No obstante, la solución a este problema tardó un par de años en llegar debido a la inusualidad del modelo y a que el enfoque numérico con que se abordaba no era concluyente. Fue hasta 2011 que se demostró rigurosamente que estas sencillas modificaciones (o procesos de Achlioptas, como se les llamó) llevan a una transición continua [RW11]. Aun así, el anuncio de este modelo representó el surgimiento de toda una nueva clase de universalidad.

Al mismo tiempo, la investigación sobre percolación explosiva se dedicó a resolver otro tipo de aspectos que rodean al modelo. Naturalmente, al asegurar que atraviesa por una transición continua se buscó determinar con precisión el valor del punto crítico y de los exponentes que la caracterizan [RF10; LKP11; Fan+12; Cos+14a; Cos+14b]. Se optó también por generar las propiedades descritas para modelos similares y diferentes tipos de reglas de selección de enlaces [AH10; Mor+10; BKA11; MC11; CD11; NTG12]. De igual manera, se aplicaron estas reglas para redes con distintas estructuras o de topología más compleja, como las redes libres de escala mencionadas anteriormente [Cho+09; RF09; Zif09; Zif10]. Además se utilizaron otro tipo de enfoques, como la agregación de componentes a través de ecuaciones cinéticas [DM10; BK16]. Finalmente, se ha buscado asociar este comportamiento explosivo con redes que existen en la vida real [Pan+11].

El comportamiento abrupto pero continuo, el retraso en el surgimiento de conectividad macroscópica y la “competencia” entre enlaces dentro del sistema son algunas de las características más relevantes que muestra este modelo. El hecho de poder controlar el momento en el que se da la transición es algo que vale la pena investigar en sistemas con componentes que se relacionan de forma compleja. De esta forma se realiza el interés por explicar el mecanismo que subyace a la transición. En el mismo sentido, se han llevado a cabo una variedad de estudios al respecto, pero existen muchos detalles sobre este tema que permanecen intactos o a los cuales se les ha dado poca atención.

Así pues, uniendo las partes que se describieron aquí, el objetivo principal de este trabajo consiste en caracterizar la transición de fase del modelo de percolación explosiva en redes aleatorias mediante métodos de escalamiento distintos. Para esto, el contenido se divide en cinco capítulos y un apéndice. Después de la presente introducción, en el Capítulo 2 se desarrollarán varios conceptos de importancia que corresponden a la base teórica del problema y que también servirán para interpretar los resultados. Aquí se abordarán ideas sobre teoría de grafos, transiciones de fase, ecuaciones cinéticas de agregación y escalamiento de tamaño finito. Además, se explicarán todos los pormenores relacionados con el modelo explosivo, destacando las diferencias con el caso clásico.

En el Capítulo 3 se expondrán a detalle la mayor parte de los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas. Primero se busca corroborar la naturaleza continua de

la transición de fase. El método utilizado para esto se introdujo con el surgimiento del modelo explosivo y en este trabajo se buscará profundizar en él. Después se describen las técnicas de escalamiento que se aplicarán sobre los datos de los observables más importantes. A partir del uso de estas técnicas se obtienen los parámetros que caracterizan al sistema cuando atraviesa por la transición, tales como el umbral de percolación y los exponentes críticos. Finalmente, se generan las relaciones de escalamiento correspondientes y se explica de qué manera se cumplen (si lo hacen) con base en los exponentes encontrados.

En el Capítulo 4 se abordarán los resultados conseguidos mediante un método de escalamiento alternativo. Este se basa en una forma distinta de promediar los observables y por eso se separa de las técnicas del capítulo anterior. Sin embargo, el proceso para encontrar los parámetros críticos es similar en ciertos aspectos. Ya que este método genera valores con una precisión superior, el propósito final es buscar un vínculo entre los resultados que sea independiente de la forma de promediar sobre las distintas realizaciones.

Por último, en el Capítulo 5 se agregan las conclusiones formuladas a través de la interpretación de los resultados. De modo que se deducen las características del modelo de percolación explosiva y se compara la trascendencia de cada método de escalamiento empleado. Asimismo, se incluye un panorama futuro con ideas interesantes que no alcanzaron a formar parte del esquema de este trabajo.

Adicionalmente, en el Apéndice A se incluye información sobre algunos detalles que rodean al modelo. Este va orientado a explicar el significado de los símbolos que se utilizan durante el trabajo y esquematizarlos para facilitar su entendimiento. También se especifica la notación empleada para representar los resultados de los Capítulos 3 y 4.

# Capítulo 2

## Conceptos generales y descripción del modelo

En este capítulo se abordarán las nociones teóricas necesarias para estudiar el modelo de percolación explosiva. En este sentido se desarrollarán los conceptos básicos de la estructura de grafos con orientación hacia las redes aleatorias. Luego se introducirá el tema de transiciones de fase de física estadística y se manejarán las herramientas necesarias para aplicar este conocimiento en el estudio de redes. Esto nos permitirá conectar directamente con el tema de percolación clásica en redes aleatorias. Después se hablará sobre este modelo desde el enfoque de la agregación de componentes, donde se utilizan ecuaciones cinéticas para representar la evolución de las partes que conforman el sistema. De igual forma, se expondrán las ideas del escalamiento de tamaño finito para fundamentar el análisis de resultados que se abordarán en extenso el siguiente capítulo. Finalmente, se llevará a cabo la descripción del modelo de percolación explosiva en función de varios de los conceptos desarrollados aquí. Además se dará una breve introducción a los observables y las características más importantes que se tomarán en cuenta para su estudio.

### 2.1. Teoría de grafos

En esta sección se introducen las herramientas básicas para describir y analizar redes, en especial las propiedades relacionadas con redes aleatorias. Originalmente varios de estos instrumentos de estudio se extraen de la teoría de grafos, una rama de las matemáticas que aborda sistemas con estructura de red.

Existe una sutil diferencia entre redes y grafos. Las redes normalmente se toman como los sistemas reales de este tipo y los grafos se refieren a la representación matemática utilizada para describirlos. No obstante, a lo largo del trabajo se utilizarán las nociones de red y grafo de forma intercambiable.

Las redes o grafos son una colección de elementos en un determinado sistema y las interacciones directas entre ellos. Los primeros reciben el nombre de nodos y los segundos

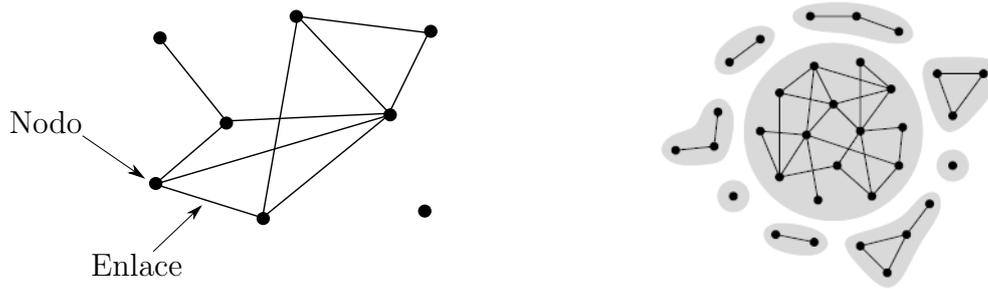


Figura 2.1: Representación de los nodos, enlaces y la división por componentes en una red [New18].

se llaman enlaces. Estos representan los constituyentes básicos de un grafo. También suelen recibir otros nombres dependiendo del área que se trate, tal como vértices o sitios para los nodos y vínculos o conexiones para los enlaces. En este trabajo se utilizará la letra  $N$  para denotar el número total de nodos o tamaño de la red y  $m$  será el número de enlaces añadidos. Más adelante se verá que  $m$  está relacionado con la adición sucesiva de enlaces, lo cual se asociará con un mecanismo de evolución en la red.

Existen distintas maneras de representar las interacciones entre los elementos de un sistema, lo cual define en gran medida el tipo de grafo y la forma en que se estudiará. En ese sentido, las redes que se abordarán aquí son redes simples, ya que sus enlaces no tienen una dirección preferente y no se tomará en cuenta la intensidad con la que ocurren las interacciones. Adicionalmente, estas redes no permiten múltiples enlaces entre un mismo par de nodos o enlaces de un nodo consigo mismo. De modo que la única característica importante a representar es la existencia de interacción entre elementos o su ausencia.

Otro concepto importante que será utilizado en múltiples ocasiones es el de componente. Un componente es un subconjunto de nodos en una red tal que existe al menos una serie de enlaces que une cualquier elemento con otro. Así que, según esta definición, no existe camino que conecte nodos pertenecientes a componentes distintos y cada nodo forma parte de exactamente un componente.

El tamaño de un componente está dado por el número de nodos que contiene y será representado como  $S_R$ , donde el número entero  $R$  corresponde al rango del componente. Por ejemplo, el tamaño del componente más grande en la red será  $S_1$ . También se deduce que un nodo desconectado puede ser visto como un componente de tamaño 1.

En el siguiente capítulo se utilizarán varios métodos para analizar los componentes que forman parte de la red. En particular se manejarán las distribuciones de sus tamaños. Con esto se podrán divisar algunas propiedades generales y su comportamiento con base en el número de enlaces existentes en el sistema.

Para poder estudiar este tipo de propiedades generales en una red real, un buen primer paso es analizar su funcionamiento a través de un modelo. Anteriormente se mencionaron algunos de los más comunes, los cuales utilizan redes libres de escala, redes de mundo pequeño o redes aleatorias. La diferencia entre éstas es la distribución de conexiones que tiene cada nodo en la red o distribución de grado. En este trabajo se emplearán redes aleatorias, las cuales son caracterizadas por tener una distribución de grado poissoniana.

Existen al menos dos definiciones de red aleatoria. En el modelo  $G(N, m)$ , estudiado

por Erdős y Rényi en 1959, se establece una red aleatoria como un conjunto de  $N$  nodos conectados por  $m$  enlaces aleatoriamente colocados. En cambio, en el modelo  $G(N, p)$  estudiado por Gilbert en el mismo año, se tienen  $N$  nodos en el grafo y cada par es conectado con una probabilidad  $p$ . Por lo tanto, con la primera definición lo que se fija en el sistema son los enlaces añadidos y en la segunda la probabilidad de aparición de enlaces. Aquí se tomará el modelo  $G(N, m)$  en el que se eligen  $m$  enlaces uniformemente al azar entre los  $\binom{N}{2}$  posibles para ocupar el grafo.

Los conceptos de nodo, enlace y componente, así como el modelo ER de redes aleatorias, son los principales instrumentos que se utilizan para discutir el problema. En la siguiente sección se tomarán estos elementos para definir la evolución de la red y analizar la transición que presenta la conectividad. Los conceptos y desarrollo de la información que se presentan aquí para la teoría de grafos se pueden revisar en [New18]. También se sugiere ir a esta fuente para obtener información más detallada y completa.

## 2.2. Transiciones de fase

En física estadística, la fase de un sistema termodinámico es un estado descrito por propiedades físicas uniformes. Una transición de fase se refiere al cambio de estas propiedades debido a la modificación sobre una condición externa al sistema. De manera que para cierto valor umbral de esta característica externa se manifiesta un cambio notable en las propiedades. Dependiendo de la naturaleza de la transición, estos cambios se pueden clasificar en dos tipos: discontinuos o de primer orden y continuos o de segundo orden. La diferencia está en el comportamiento que presentan estas propiedades al atravesar dicho umbral.

Para entender mejor las transiciones de fase y sus tipos será necesario definir dos conceptos clave. El primero es el parámetro de orden, una propiedad del sistema que cambia repentinamente al cruzar por la transición. Normalmente es una característica que pasa de ser nula en un lado de la transición a ser diferente de cero en otro. En cambio, el parámetro de control es la variable externa cuyo cambio genera la transición. En sistemas termodinámicos, este parámetro suele ser la temperatura.

La relación que existe entre los dos parámetros descritos conlleva a la creación de un diagrama de fase, donde el parámetro de orden es la variable dependiente y el parámetro de control es la independiente. En transiciones de fase de primer orden el cambio que presenta esta función al atravesar el umbral es discontinuo. Por otro lado, para transiciones de segundo orden este cambio es continuo. Conocer el orden de la transición es importante para llevar a cabo el estudio de las propiedades del sistema, ya que cada tipo tiene características bien definidas.

Las transiciones discontinuas presentan propiedades como la coexistencia de fases y señales de histéresis. Ejemplo de este tipo de cambios son las transiciones entre estados de líquido-gas. En este caso, el cambio discontinuo se presenta en la diferencia de densidades. Las transiciones continuas se caracterizan por una longitud de correlación infinita y un comportamiento crítico en las cercanías del umbral. Un ejemplo de sistema que presenta transición de segundo orden es el modelo ferromagnético, donde el parámetro de orden es

el magnetismo y la temperatura funge como parámetro de control.

Aunque el parámetro de orden define en gran medida el surgimiento de la transición de fase, existen otras propiedades que presentan un comportamiento característico alrededor del punto crítico. El punto crítico se refiere a la intersección entre dos o más fases en transiciones continuas. Un ejemplo de estas propiedades es la compresibilidad isotérmica en las fases líquido-gas y la susceptibilidad magnética en las fases ferromagnética-paramagnética. Estas cantidades muestran una divergencia en el punto crítico.

La divergencia de funciones como las mencionadas está estrechamente relacionada con la existencia de fluctuaciones microscópicas que presentan correlaciones de largo alcance. En ese sentido, se introduce una función que cuantifica la intensidad de estas correlaciones. Dicha función posee una longitud característica o longitud de correlación  $\xi$ . Cuando se está lejos del punto crítico ésta longitud es mucho menor que el tamaño del sistema. Sin embargo, en las cercanías del punto crítico se tiene una divergencia de la longitud de correlación, por lo que independientemente del tamaño del sistema se tendrán fluctuaciones de largo alcance y los aspectos microscópicos se volverán irrelevantes. Así que es más importante tener el tamaño del sistema con respecto a la longitud de correlación que el tamaño absoluto en sí mismo.

Con base en lo anterior, se encuentra que variar la distancia al punto crítico en las cercanías de la transición no cambia la forma de estas funciones, sino que solamente se reescalan.

Las cantidades como la compresibilidad o la susceptibilidad tienen un comportamiento en ley de potencias alrededor del punto crítico. Esto hace que las funciones tomen una forma que depende de la distancia a este punto  $|p - p_c|$  y permite el cálculo de los exponentes correspondientes. Por ejemplo, si se tiene una cantidad  $A$  como las anteriores en las cercanías de  $p_c$  tomará la forma

$$A \sim |p - p_c|^{-\omega}$$

donde  $\omega$  es el exponente con el que decae  $A$ . A estos últimos se les llama exponentes críticos, los cuales caracterizan la transición de fase del sistema.

Como se verá más adelante, estos exponentes asociados a una transición de fase continua siguen relaciones de escalamiento y forman parte de una clase de universalidad, la cual trasciende el tipo de sistema del que se trate.

Cabe recalcar que las transiciones mencionadas se contemplan en sistemas situados en el límite termodinámico. Este límite se refiere a sistemas con un gran número de elementos y un tamaño que crece en la misma proporción. En consecuencia, aunque estos valores tiendan a infinito, la densidad de elementos se mantiene constante.

Por último, también se debe mencionar que los modelos utilizados aquí obedecen una aproximación de campo medio. Esto se contempla al permitir que todo par de nodos pueda ser unido por un enlace. Al aceptar esta suposición se tiene que el tamaño de los componentes es independiente de su posición en el espacio. De modo que la probabilidad de que dos componentes se unan sólo depende del número de nodos que contengan. Las aproximaciones de campo medio sólo son buenas si la dimensionalidad del sistema es lo suficientemente grande.

Los conceptos y desarrollo de la información que se presentan aquí para transiciones de fase y fenómenos críticos sobre redes se pueden revisar en [Ma01; DGM08]. También se sugiere ir a estas fuentes para obtener información más detallada y completa.

## 2.3. Percolación clásica en redes aleatorias

La teoría de percolación se ocupa de analizar las propiedades de los componentes que se forman en un medio desordenado. En estos sistemas, la conectividad es la característica más importante y da forma a las funciones que se pueden realizar. Por ello, la transición de fase de percolación se refiere al cambio repentino en la conectividad mostrado en un determinado sistema. Esto significa que se pasa de un conjunto de pequeños componentes desconectados a un gran componente conectado, llamado componente infinito o componente macroscópico.

Estos sistemas pueden estar inmersos en un medio con forma regular como una retícula hexagonal en dos dimensiones o un volumen con estructura cristalina en tres dimensiones. El problema también se puede modelar en más dimensiones o con redes sin estructura geométrica. Este último es el caso de las redes aleatorias que se utilizarán aquí. No obstante, se precisa que existen muchos otros modelos para abordar el cambio en la conectividad de un sistema.

A lo largo del trabajo se compararán las propiedades bien conocidas de la percolación clásica con las del modelo explosivo. Así que, cuando se mencione al “modelo clásico” o la “percolación clásica” se trata del modelo de percolación no explosiva de campo medio en redes aleatorias. Este ha sido estudiado en extenso desde la publicación de los trabajos de Erdős y Rényi sobre este tipo de redes.

Otra especificación que se debe hacer con respecto al modelo clásico es que aquí se empleará la percolación de enlaces. Este tipo de percolación toma a las conexiones entre nodos de una red como los elementos relevantes. De modo que se habla de la existencia o ausencia de enlaces entre un número fijo de nodos  $N$ . El número de enlaces en la red y su acomodo para la creación de componentes son las propiedades más importantes en este caso.

Para analizar la transición de fase de percolación se tienen que definir las cantidades que operarán como parámetro de orden y parámetro de control. Así que primero se toma el tamaño relativo del componente más grande

$$s_1 = \frac{S_1}{N} \quad (2.1)$$

como parámetro de orden. Este captura la intensidad con que ocurre la conectividad de elementos dentro de la red. En el segundo caso se define la densidad de enlaces añadidos a la red

$$p = \frac{m}{N} \quad (2.2)$$

como parámetro de control. Ambos parámetros se establecen de tal manera que, al aumentar el valor de  $p$ , en algún momento se llega a un umbral  $p_c$  donde la conectividad

en la red cambia repentinamente. Este cambio está dado en  $s_1$  cuando pasa de tener un valor nulo a ser tan grande como la red, en el límite termodinámico.

El modelo de percolación clásica comienza con un conjunto de  $N$  nodos desconectados, o bien,  $N$  componentes de tamaño 1. Después, a cada paso se agrega un enlace al sistema que conecta dos nodos escogidos uniformemente al azar. El número de enlaces añadidos depende del propósito, en este caso, se desea caracterizar la transición de fase que presenta el modelo. De modo que en el estudio se extenderá esta evolución sucesiva hasta que el sistema atraviese la transición. Es decir, no se necesita simular la adición de todos los enlaces posibles, sino simplemente hasta que aparezca el componente macroscópico.

Cabe recalcar que existe una diferencia entre el componente más grande y al que se le llama componente infinito o macroscópico. El primero es el componente que contiene más enlaces en la red, así que su tamaño es el mayor para todo valor de  $m$ . Mientras que el segundo se refiere al componente que tiene un tamaño cuyo valor crece linealmente con el tamaño de la red  $N$ .

En percolación clásica, el tamaño del componente más grande  $S_1$  exhibe distintos comportamientos dependiendo del valor que toma  $p$  con respecto a la transición. Si  $p < p_c$  se tienen valores de  $S_1$  que van como  $\log(N)$ . Justo después de la transición se tiene que el componente más grande coincide con el componente macroscópico y su tamaño toma valores que van como  $N$ . Por otro lado, en este caso se observa que sólo puede existir un componente macroscópico en la red. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de tener más de un componente macroscópico en otros modelos de percolación.

En adición a lo anterior, se observa que el parámetro de orden sigue un comportamiento en ley de potencias que va como

$$s_1 \sim (p - p_c)^\beta \quad (2.3)$$

en las cercanías de la transición para un régimen postcrítico. El exponente crítico  $\beta$  es de los más importantes para la caracterización del modelo.

Además del componente más grande, otra cantidad importante para el análisis de la transición de fase en percolación es la distribución de los tamaños  $n(s)$ . Esta distribución toma todos los tamaños de componente que son “finitos” o “microscópicos”, así que se excluye la aparición del componente más grande para su estudio. La distribución  $n(s)$  tiene una forma general dada por

$$n(s) = s^{-\tau} f(s/s_\xi) \quad (2.4)$$

donde  $\tau$  es el exponente asociado al comportamiento en ley de potencias que muestra  $n(s)$  cuando atraviesa el umbral de percolación. De igual manera, la forma de la distribución también depende de una función de  $s/s_\xi$ . Aquí  $s_\xi$  es una cantidad que separa los tamaños de componente que contribuyen significativamente en el cálculo de observables del modelo.

Una descripción más desarrollada sobre los observables que rodean al modelo se da al inicio de cada subsección del Capítulo 3. En dicho capítulo se exponen los resultados asociados a cada observable importante del modelo explosivo, pero también se da una explicación de cada cantidad como introducción.

Finalmente, además de  $\beta$  y  $\tau$ , el modelo de percolación clásica tiene un conjunto de

parámetros críticos que caracterizan su transición de fase en campo medio. Algunos de los más importantes se presentan a continuación

Parámetro crítico	$p_c$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$	$\tau$	$d$	$d_f$	$\nu$
Valor	1/2	1	1	1/2	5/2	6	4	1/2

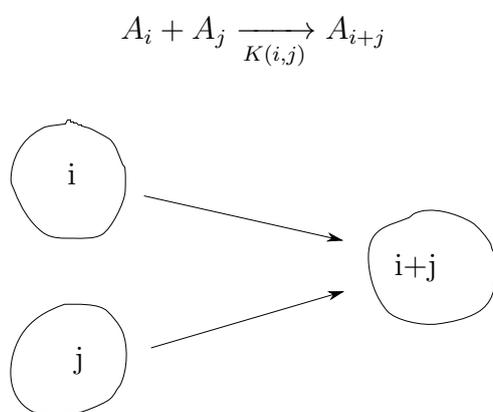
Cuadro 2.1: Valores de los parámetros críticos más importantes en el modelo de percolación clásica en redes aleatorias.

El significado de cada exponente se puede encontrar en el Apéndice A. Los conceptos y desarrollo de la información que se presentan aquí para la teoría de percolación clásica se pueden revisar en [SA92; Sah94]. También se sugiere ir a estas fuentes para obtener información más detallada y completa.

## 2.4. Ecuaciones cinéticas de agregación

El modelo de percolación se puede formular como un proceso cinético usando el marco de referencia de la agregación de componentes. Desde este punto de vista, se explora la evolución del número de agregados de cierto tamaño y se busca obtener resultados generales. Esto se puede modelar mediante ecuaciones cinéticas sobre las densidades de agregados. La distribución de los tamaños de componente en el tiempo depende de cómo estos agregados se interrelacionan entre sí. En este caso, el enfoque que se utilizará es que la probabilidad de unión o la tasa de reacción depende linealmente del número de nodos que contiene cada agregado.

El estudio de la agregación de componentes tiene su base en las ecuaciones cinéticas de Smoluchowski, las cuales describen la evolución temporal de la distribución de concentraciones de los tamaños de componente [Smo16]. Denotaremos a los componentes como  $A_i$ , donde el subíndice  $i$  denota el tamaño del componente en cuestión. En cada paso de tiempo, se lleva a cabo un proceso en el que se unen dos componentes  $A_i$  y  $A_j$  para formar un nuevo componente  $A_{i+j}$  cuyo tamaño es la suma de los tamaños de los componentes que lo formaron



La función  $K(i, j)$  es la probabilidad de unión con la que los componentes de tamaños  $i$  y  $j$  se conectan. Las cantidades de interés para describir el sistema son las concentraciones

$c_i(t)$  para un tamaño  $i$  y tiempo  $t$  dados. La evolución de la distribución de concentraciones queda descrita por las ecuaciones de Smoluchowski

$$\dot{c}_k(t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} K(i,j)c_i(t)c_j(t)[\delta_{k,i+j} - \delta_{k,i} - \delta_{k,j}] \quad (2.5)$$

Así, el estudio de la agregación de componentes suele tener su punto de partida en este conjunto infinito de ecuaciones para el cambio de las concentraciones en el tiempo. Específicamente, describe el cambio en la cantidad  $c_k(t)$  debido a la ganancia  $K(i,j)c_i(t)c_j(t)$  en concentración de componentes de tamaño  $k$  debido a la unión de componentes de tamaño  $i$  y  $j$  (la delta con el signo positivo) y la pérdida en concentración de componentes de tamaño  $k$  debido a la unión de estos con otros componentes de tamaño arbitrario  $i$  o  $j$  (las deltas con signos negativos).

Una característica importante de este conjunto de ecuaciones es que el primer momento de la distribución de concentraciones  $M_1(t)$ , o bien, la masa total (generalmente) se conserva

$$M_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} jc_j(t)$$

Así como con el primero, también se pueden definir los momentos de la distribución de grados más altos.

Ahora bien, una de las propiedades más importantes de la agregación de componentes es el escalamiento [FW66; Dra72; DE85b]. Este se puede obtener al asumir que (tomando consideraciones de convergencia débil) la distribución de concentraciones  $c_j(t)$  tiende a una forma de escalamiento con  $s(t) \rightarrow \infty$  y  $t \rightarrow \infty$  dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} jc_j(t) f\left(\frac{j}{s(t)}\right) = \int_0^{\infty} x\Phi(x)f(x)dx \quad (2.6)$$

donde  $f(x)$  es una función suave arbitraria y  $s(t)$  es el tamaño típico, que se usa para medir el tamaño de los componentes. Aquí  $s(t)$  es una función que crece a infinito de una manera que se determina por separado de la forma de  $\Phi(x)$ . Lo anterior expresa que si se toma el promedio de una función que varía a la escala  $s(t)$  con respecto a la distribución de probabilidades  $jc_j(t)$ , el resultado tiende a un límite. De manera que esta distribución límite de  $jc_j(t)$  es  $x\Phi(x)$  al escalarla apropiadamente. La elección del prefactor  $x$  es convencional [Ley03].

Además, se toman dos suposiciones sobre la función de la tasa de reacción  $K(i,j)$ , la primera es la homogeneidad de la función

$$K(ai, aj) \sim a^\lambda K(i, j) \quad (2.7)$$

en base a esto se obtiene el exponente  $\lambda$ . La segunda es la simetría sobre la función

$$K(1, j) = K(j, 1) \sim j^\nu \quad (2.8)$$

de la cual se extrae el exponente  $\nu$ . Los exponentes  $\lambda$  y  $\nu$  caracterizan la elección de la

forma para la probabilidad de unión  $K(i, j)$ .

Para el caso de agregación binaria descrito por las ecuaciones de Smoluchowski, se puede describir el escalamiento al combinar las ecs. 2.5 y 2.6 para luego tomar las consideraciones de homogeneidad y simetría. Así se pueden determinar las propiedades asintóticas de la distribución de concentraciones  $c_j(t)$ . Cabe recalcar que este enfoque sólo funciona de manera adecuada para el caso en el que no existe transición de fase. Para el caso en el que sí, se deben tomar las consideraciones pertinentes porque  $s(t)$  tiende a infinito alrededor de un tiempo  $t_c$  finito.

## 2.5. Escalamiento de tamaño finito

La transición de fase en el modelo de percolación está definida para sistemas situados en el límite termodinámico, es decir, en el caso en que el tamaño de la red es lo suficientemente grande para compararse con una red infinita. Ya que en este trabajo se lleva a cabo el estudio del problema de forma numérica no se puede tener tal cosa como redes infinitas. Así que la alternativa es simular y promediar sobre sistemas de tamaño finito  $N$  para después utilizar el escalamiento de tamaño finito. La teoría del escalamiento de tamaño finito es muy importante para interpretar resultados numéricos y experimentales. También es útil para poder comparar esta información con la parte teórica de los modelos.

El cambio repentino en la conectividad se cuantifica a través del parámetro de orden. Esta cantidad se puede extraer de manera similar en redes finitas, sin embargo el comportamiento será diferente y dependerá del tamaño  $N$ . Además del parámetro de orden existen otros observables que divergen en el punto crítico para sistemas infinitos. Estas cantidades, como se especificó antes para transiciones continuas, tienen un comportamiento en ley de potencias que se caracteriza por el valor de un exponente crítico. Estos exponentes críticos, así como las funciones de escalamiento asociadas, son universales.

Para redes finitas se encuentra que el tamaño  $N$  del sistema escala con la longitud de correlación  $\xi$  de la red infinita. Si  $N \gg \xi$  entonces no existirán efectos de tamaño finito significativos. No obstante, si  $N \leq \xi$  existirá un corte en las correlaciones de largo alcance del sistema. Esto provoca que hayan efectos de finitud en las singularidades propias del punto crítico.

La longitud de correlación para redes infinitas se comporta como

$$\xi(N \rightarrow \infty) \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (2.9)$$

donde  $\nu$  es el exponente crítico asociado. De modo que, dada la relación entre  $N$  y  $\xi$ , la cantidad de interés para tamaños de red finitos es  $N/|p - p_c|^{-\nu}$ . Esto produce una expresión que va como

$$\xi(N) \sim |p - p_c|^{-\nu} F_\xi(N|p - p_c|^\nu) \quad (2.10)$$

donde  $F_\xi$  es una función de escalamiento que captura el comportamiento de tamaño finito. Así que, cuando  $p = p_c$  se obtiene la propiedad  $\xi(N) \sim N$  que se esperaba.

Lo anterior produce características que serán explotadas más adelante en las técnicas de escalamiento de la Sección 3.3. La primera es que ahora se pueden usar relaciones que

escalan con  $N$  en vez de las que escalan con  $|p - p_c|$ . Tal es el caso del parámetro de orden que, en lugar de verse como  $s_1 \sim |p - p_c|^\beta$ , ahora se puede abordar como  $s_1 \sim N^{\beta/\nu}$  en el punto crítico. Además, se encuentra que los observables que presentaban singularidades en  $p_c$  se describen ahora por funciones sin este tipo de comportamientos.

En consecuencia, se tiene también un desplazamiento en el punto crítico real. Esto significa que la posición en  $p$  asociada a la transición cambia dependiendo del valor de  $N$ . A estos puntos críticos efectivos se les llama puntos pseudocríticos. A partir del comportamiento que muestran estos puntos se puede calcular el valor real de  $p_c$ . La relación mostrada es, por lo tanto,

$$|p_c(N) - p_c| \sim N^{1/\nu} \quad (2.11)$$

donde  $p_c(N)$  son los puntos pseudocríticos que dependen de  $N$  y  $p_c$  es el punto crítico real.

Como se mencionó antes, este tema se desarrollará en el siguiente capítulo para conseguir cuatro métodos de escalamiento diferentes. Con base en estas técnicas se analizarán los datos numéricos extraídos de las simulaciones del modelo.

## 2.6. Descripción del modelo explosivo

En esta sección se describirá el modelo de percolación explosiva. Los resultados obtenidos al aplicarlo sobre una colección de redes aleatorias diferentes se abordarán en los Capítulos 3 y 4. Los detalles acerca de los símbolos utilizados y la notación empleada se incluyen en el Apéndice A.

El proceso que se sigue en cada realización del modelo explosivo es similar al que se usa en el modelo clásico. Al principio se tiene una red con  $N$  nodos desconectados, o bien,  $N$  agregados de tamaño 1 y en cada paso se toman dos nodos uniformemente al azar para insertar un enlace entre ellos. Existen ciertos detalles sobre qué hacer si estos dos nodos pertenecen al mismo componente. Estos enlaces intracomponente pueden rechazarse o aceptarse, y cada opción representa un enfoque diferente.

La primera opción corresponde al enfoque de agregación cinética en el cual cada enlace añadido necesariamente forma un nuevo componente. Este agregado tendrá como tamaño la suma de los nodos que pertenecen a los componentes que se conectaron. Ya que a cada paso se unen dos componentes previamente disjuntos, el proceso de agregación termina en  $p = (N - 1)/N$  cuando sólo queda un componente de tamaño  $N$ .

En este trabajo se elige la segunda opción: los enlaces intracomponente son permitidos y puede haber tantos de ellos como posibles combinaciones entre pares de nodos, por lo que el proceso termina en  $p = (N - 1)/2$ . Dado que antes de la transición no existen componentes macroscópicos, la probabilidad de que surjan este tipo de enlaces tiende a cero al aumentar el tamaño del sistema. Por esto, el comportamiento que surge al elegir una opción o la otra sólo presenta discrepancias en el régimen postcrítico.

Como resultado, aceptar enlaces intracomponente lleva al aumento de la conectividad dentro de los componentes, pero no cambia la posición del punto crítico. Además, el aceptar este tipo de enlaces no cambia la distribución de tamaños de componente en esos

pasos, pero sí aumenta el valor del parámetro de control y retrasa el crecimiento del ya formado componente macroscópico.

Al utilizar el modelo de percolación explosiva, la diferencia con lo explicado en el primer párrafo se presenta al momento de agregar enlaces al sistema. Tal como se especificó, en el modelo ER se toman dos nodos uniformemente al azar y se inserta un enlace entre ellos. En percolación explosiva se toman dos o más pares de nodos al azar, siempre y cuando sea un número finito de ellos, y se “ponen a competir” con la finalidad de escoger sólo uno y agregarlo a la red. Así, la novedad es que se introduce una regla de selección (fija durante todo el proceso) utilizada para decidir cual de los enlaces se agregará realmente a la red y cuales se desecharán. Los enlaces desechados en un paso pueden volver a ser candidatos en el futuro. La premisa original en el artículo fundacional de Achlioptas fue ilustrar “el poder de dos opciones” [ADS09]. Esto con el fin de demostrar que una simple regla de selección puede afectar el comportamiento del proceso al acelerar o retrasar la transición de fase.

Se pueden concebir tantos modelos diferentes de percolación explosiva como combinaciones de enlaces se puedan encontrar para las reglas de selección, siempre que se cumplan las condiciones que se mencionaron previamente. Aquí se abordará a detalle el modelo correspondiente a la regla del producto (PR) entre dos enlaces tomados al azar. Esta regla estipula que se agregará a la red el enlace que minimiza el producto entre los tamaños de los componentes en sus extremos.

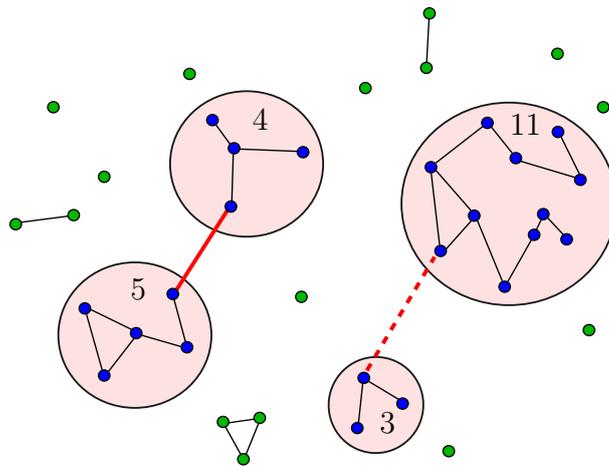


Figura 2.2: Representación de la regla de selección del producto en percolación explosiva. Primero se eligen cuatro nodos uniformemente al azar, acomodándolos en dos pares. En este caso, el primer par de nodos pertenece a componentes de tamaño 4 y 5, y el segundo par de nodos está en componentes de tamaño 11 y 3. Ya que la regla busca minimizar el producto entre estos tamaños, el enlace añadido será el que une al primer par de nodos (línea roja sólida, producto 20), mientras que el otro enlace será descartado (línea roja punteada, producto 33).

El observable más importante es el parámetro de orden, el cual determina la naturaleza de la transición. Al igual que en percolación clásica se define como el número de nodos que pertenecen al componente más grande dividido por el tamaño de la red. Esta cantidad se denota como  $s_1$ . En los últimos años, el parámetro de orden de este modelo ha sido objeto

de estudio en varios trabajos científicos. De manera que manifiesta la relevancia y riqueza de la transición “explosiva” que exhibe el modelo dentro de la teoría de percolación.

Dentro de la investigación que rodea a este tema se busca definir el mecanismo subyacente en el que se basa el crecimiento de los componentes dentro de la red. Se han contemplado dos mecanismos, el crecimiento directo que se asocia mayormente a una transición continua y el crecimiento por adelantamiento relacionado con la posible causa de un cambio discontinuo.

El crecimiento directo se refiere al aumento en el tamaño del componente más grande mediante su unión con un agregado menor. Por otro lado, el crecimiento por adelantamiento implica la creación de un nuevo componente más grande al unir dos que eran previamente menores. Aquí, “agregado menor” significa que no son el agregado con mayor tamaño. Estos procesos son distintos y surgen a cada paso, es decir, con cada enlace nuevo añadido el componente más grande puede cambiar de una u otra manera. En el siguiente capítulo se encontrará que el aumento de conectividad en la red es dominado por el crecimiento directo.

Ahora, con la finalidad de complementar la presentación, se mostrarán una serie de pasos para adaptar las ecuaciones cinéticas del modelo clásico al explosivo. De manera que lo primero que se debe encontrar es la expresión modificada que describe a un sistema con una regla de selección en un modelo explosivo.

La regla de selección que más se ha estudiado y la que se utilizará aquí es la regla de producto [ADS09]. Llevarla a cabo implica agregar la dependencia de otras dos variables, es decir, a cada paso se tienen que escoger cuatro componentes al azar. De estos cuatro componentes, sólo se eligen los dos que tengan el menor producto. Esta idea se puede añadir a las ecuaciones 2.5 cambiando la probabilidad de unión para que dependa de cuatro tamaños. Entonces se tendrá que pasar de  $K(i, j)$  a  $K(k, l, m, n)$ . Este nuevo kernel será especificado como  $K(k, l, m, n) = klmn$  para la regla del producto. Similarmente, se debe multiplicar la expresión original por las concentraciones correspondientes a los dos nuevos tamaños. De modo que se tiene que cambiar el producto  $c_i c_j$  por  $c_k c_l c_m c_n$ . Por último, se necesita agregar una función escalón o función Heaviside que sirva para anular o aceptar uno de los productos. Esto será más una adición que un cambio y la expresión será  $\Theta(mn - kl)$ .

Las ecuaciones cinéticas 2.5 fueron modificadas para agregar la regla del producto y una probabilidad de unión proporcional al tamaño de los componentes implicados. Con base en lo anterior, las ecuaciones cinéticas que describen el proceso de evolución de agregados es

$$\dot{c}_j = \sum_{k,l,m,n=1}^{\infty} \Theta(mn - kl)klmnc_k c_l c_m c_n [\delta_{j,k+l} - \delta_{j,k} - \delta_{j,l}] \quad (2.12)$$

donde las  $c_i$  representan concentraciones de componentes de tamaño  $i$  (se obvia la dependencia de estas con  $t$ ). Por otro lado, la función  $\Theta(x)$  puntualiza la adición de una regla de selección al modelo. La función  $K(k, l, m, n) = klmn$  es la probabilidad de unión que depende ahora de cuatro variables. Finalmente, las funciones delta de Kronecker entre paréntesis cuadrados se mantienen igual que en las ecs. 2.5. Esto último, ya que se sigue

tratando de la unión de dos componentes para formar uno nuevo con la suma de sus tamaños, es decir, sigue siendo agregación binaria.

La evolución de  $c_j$  depende ahora de la elección de cuatro componentes al azar y la función escalón funge como regla de selección del producto. Esta última asegura que haya un cambio en  $c_j$  sólo si el producto de los tamaños de componente  $k$  y  $l$  es menor que el producto de sus tamaños “competencia”  $m$  y  $n$ . La función  $\Theta(mn - kl)$  es la que provoca un retraso en el surgimiento de la transición, en comparación con el modelo clásico (ecs. 2.5).

Para encontrar una solución se procede de manera similar que con el modelo de agregación binaria común. Igualmente sólo se comenta a grandes rasgos el procedimiento seguido: Primero, se determina que el modelo genera o no un componente macroscópico a partir del exponente  $\lambda$  en la consideración de homogeneidad de  $K(k, l, m, n)$  y de las ecuaciones de escalamiento (2.7). Para el caso en el que no existe componente infinito se toma la derivada con respecto al tiempo de la ec. 2.6. En el caso que sí exista se debe tomar una expresión similar que tome en cuenta la singularidad en el umbral  $t_c$ . En ambos casos se sustituye a 2.12 en el resultado. Después se debe utilizar el hecho de que la probabilidad de unión es homogénea de grado  $\lambda$ , lo cual lleva a desacoplar la parte dependiente del tiempo de la parte dependiente de los tamaños. Así, por un lado se obtiene una ecuación para  $s(t)$ , donde  $\lambda$  como se mencionó arriba determina si se tiene o no componente macroscópico. Por otro lado, se llega a una ecuación integrodiferencial para la función de escalamiento  $\Phi(x)$ . Obtener información de esta ecuación se logra resolviendo directamente o tomando aproximaciones.

Existen trabajos recopilatorios acerca del modelo de percolación explosiva [Bas+14; DSo+19]. Se sugiere acudir a estas fuentes para tener un mejor entendimiento sobre el estado del arte de este tema.

# Capítulo 3

## Caracterización de la transición de fase

El modelo de percolación explosiva que se introdujo y describió anteriormente tendrá un desarrollo detallado en el presente capítulo. A través de un enfoque numérico se produce la evolución del sistema con las consideraciones previamente establecidas y, mediante un número considerable de realizaciones, se genera una buena aproximación de las cantidades de interés. El mismo procedimiento se realiza para distintos tamaños de red con el fin de identificar las características propias de un sistema infinito. De modo que el objetivo principal de este trabajo es obtener el comportamiento de estos observables alrededor del punto crítico para caracterizar la transición de fase por la que atraviesa el modelo.

En la sección 3.1 se ofrece un resumen general del capítulo. En la sección 3.2 se introduce un método para determinar el orden de la transición a partir del escalamiento sobre una ventana que sirve de cruce entre el régimen sublineal y lineal de  $s_1$ . Después se opta por analizar la media de los observables más importantes del modelo. Para esto, primero se definen las técnicas utilizadas para llevarlo a cabo en la sección 3.3. A lo largo del capítulo, la aplicación de estas técnicas genera un conjunto de parámetros críticos para cada cantidad. En la sección 3.4 se abordan los datos correspondientes al parámetro de orden  $s_1$ , donde además de su media también se emplea la distribución de sus valores en el punto crítico. En la sección 3.5 se estudian las propiedades de los componentes con mayor tamaño  $s_{2,3,4}$  en búsqueda de similitudes con  $s_1$ . Con el propósito de generalizar los rasgos observados en los componentes de rango menor, en la sección 3.6 se examina la información recabada para la distribución de tamaños  $n(s)$ . Mientras que en la sección 3.7 se abordan sus primeros momentos  $M_{2,3,4}$  y algunas razones importantes entre ellos, como son el tamaño medio  $\chi$  y el tamaño típico  $s_\xi$ . Por último, en la sección 3.8 se desarrollan las relaciones de escalamiento para este modelo y se exponen los resultados generales obtenidos por cada técnica para verificar su validez con base en los exponentes críticos recopilados.

Para ver una descripción más detallada sobre los símbolos utilizados y la notación empleada se incluye esta información en el Apéndice A.

### 3.1. Resumen

En la primera sección de este capítulo se ofrece un resumen de los aspectos relevantes que rodean al modelo de percolación explosiva. Primero se describen brevemente las técnicas de escalamiento utilizadas para luego exponer los resultados más importantes que muestra cada una. El objetivo principal es la presentación conjunta de los parámetros críticos que se obtienen de forma independiente por estos métodos. De esta manera, el lector meticoloso podrá tener su recapitulación y el lector apresurado será capaz de tener un esquema general desde el inicio.

Las cantidades que se abordarán aquí engloban a los observables y parámetros críticos con los que se caracteriza la transición de fase del modelo. En adelante, muchas de estas cantidades se manejarán con naturalidad, por lo que se sugiere acudir a las listas de símbolos presentadas en el Apéndice A en caso de cualquier duda.

En la sección 3.2 se confirma mediante el método de la ventana de transición que el parámetro de orden  $s_1$  es continuo en la región cercana a  $p_c$ . Aunque fue numéricamente, los resultados muestran una buena correspondencia con una transición de segundo orden. Esto permite la introducción de las tres técnicas de escalamiento empleadas para calcular los parámetros críticos en este capítulo.

Estos tres métodos se desarrollan en la sección 3.3 y se basan en la aplicación del escalamiento de tamaño finito. Este establece que los observables  $X$  en términos de  $(p-p_c)$  colapsan a la misma función de escalamiento  $F_X$  al rescalar las variables con potencias de  $N$ , donde estas potencias se relacionan con los exponentes críticos.

El Método 1 aproxima el umbral  $p_c$  mediante la búsqueda del valor de  $p$  que vuelve constante a  $F_X$  frente a los cambios en el tamaño del sistema  $N$ . Este proceso se lleva a cabo optimizando la correlación lineal que existe entre  $\log(X)$  y  $\log(N)$ . Por otro lado, el Método 2 utiliza el desplazamiento que sufren los puntos pseudocríticos mostrados por un sistema finito con respecto al punto crítico real. Por último, el Método 3 toma vecindades cercanas a  $p_c$  que no muestran efectos de tamaño finito y calcula exponentes efectivos para cada  $N$  en estas regiones. Estos valores se aproximan al exponente crítico real y se pueden obtener a ambos lados de la transición.

El estudio de los datos asociados a cada observable se dividió en cuatro regiones para un segmento de  $p$  en las cercanías de  $p_c$ . Por lo que cada técnica encuentra sus mejores resultados en dichas regiones. Los Métodos 1 y 2 se centran en la búsqueda del punto donde se da la transición, por lo que los parámetros críticos encontrados funcionan bien en una vecindad próxima a esta. Con la primera técnica se vio que los valores de  $p_c$  aproximados están en un intervalo  $[0.8884441, 0.8884484]$ , mientras que con la segunda técnica se agrupan en  $[0.8884477, 0.8884518]$ . Por otro lado, al usar los exponentes efectivos del Método 3, el objetivo es abarcar el comportamiento a ambos lados de la transición evitando los efectos de finitud. En el caso precrítico se tiene el intervalo  $p \in [0.88795, 0.88805]$  y en el postcrítico se dispone de  $p \in [0.88885, 0.88895]$ .

De la sección 3.4 a la 3.7 se estudia a los observables de interés en las cercanías del punto crítico. Estas cantidades abarcan al parámetro de orden (3.4), el tamaño de los componentes de menor rango (3.5), los primeros momentos de la distribución  $n(s)$ , el tamaño medio  $\chi$  y el tamaño característico  $s_\xi$  (3.7). En cada sección se ofrece una pequeña

introducción sobre estos observables.

En todos los casos, un observable  $X$  se refiere a la media calculada sobre todas las realizaciones simuladas para este sistema. En cada sección se aplican las técnicas de escalamiento sobre los datos correspondientes y luego se obtiene un conjunto de parámetros críticos. La mejor aproximación generada por estos métodos se agrega en la tabla 3.1.

Parámetro crítico	Método 1	Método 2	Método 3	
			Régimen precrítico	Régimen postcrítico
$p_c$	0.8884484	0.8884497	-	-
$\beta$	0.1225	0.1279	-	0.0864
$\gamma$	1.4555	1.3804	1.1810	1.0486
$\phi_2$	1.5384	1.4490	1.1792	1.1693
$\sigma$	0.6341	0.6630	0.7892	0.7809
$\tau$	2.0776	2.0848	2.0686	2.0758
$\Theta$	0.4920	0.5127	0.4688	0.5070
$\delta$	-	0.6170	-	-
$\Theta_e$	0.5904	0.6175	0.7414	0.7420
$\Theta_f$	0.6339	0.6642	0.7926	0.7929

Cuadro 3.1: Resumen de los parámetros críticos más importantes que se calcularon por los métodos de escalamiento 1, 2 y 3.

El punto crítico se encuentra un poco antes de  $p = 0.88845$ , tal como se mencionó con los intervalos donde mejor actúa cada método. Aunque los valores de los Métodos 1 y 2 son muy cercanos entre sí, el empalme de curvas hacia la función de escalamiento  $F_X$  presenta grandes diferencias (véanse las figs. 3.6, 3.17 y 3.28). Lo anterior sugiere que existe una sensibilidad muy grande al cambio en los parámetros de ajuste. Las cantidades directamente relacionadas con el parámetro de orden muestran un cambio evidente en el valor de los exponentes antes y después de la transición, como son  $\chi$  y el propio  $s_1$ . Sin embargo, esta disparidad disminuye para las demás cantidades.

En la sección 3.8 se investiga la conexión entre los observables del modelo y se encuentra que los exponentes críticos cumplen con las relaciones de escalamiento independientemente de la técnica empleada. No obstante, esto se lleva a cabo por separado debido a la falta de equivalencia entre sus valores. Es decir, cada método funciona bien en su región, pero fuera de esta las curvas no colapsan bien hacia la función de escalamiento. En consecuencia, tres métodos que deberían producir resultados equivalentes, no lo hacen. Por lo tanto, parece que no se puede lograr un buen ajuste de manera global mediante la aplicación de estos métodos.

Con base en lo anterior, en la sección 3.4 se emplea la distribución de los valores del parámetro de orden en el punto crítico. La distribución  $P(s_1)$  manifiesta el carácter abrupto de la transición debido a que muestra una bimodalidad muy marcada. Además, cada pico en las distribuciones escala de manera diferente con  $N \rightarrow \infty$ . De modo que se genera una distribución límite mixta que conlleva a una singularidad en la función de escalamiento del parámetro de orden  $F_{s_1}$ . La forma en que escala el pico correspondiente

a la parte postcrítica produce parámetros críticos que coinciden con los del Método 3.

La distribución  $n(s)$  en la sección 3.6, por otro lado, separa el aporte del componente más grande y se enfoca sólo en los agregados de tamaño finito. Los resultados obtenidos resaltan la diferencia en el comportamiento de los tres regímenes. En ese sentido, introduce el decaimiento gaussiano para  $s \rightarrow \infty$  en la parte precrítica como una característica distintiva del modelo. Esto a diferencia del decaimiento exponencial en el régimen postcrítico. Por último, el estudio de  $n(s)$  en la región crítica produce un valor preciso del exponente  $\tau$ .

El umbral de percolación generado a partir de las distribuciones  $P(s_1)$  y  $n(s)$  es muy cercano a  $p_c = 0.88844926$ . Así que, además de que se establece como la mejor aproximación al punto crítico verdadero, está conectado en cierto modo con la técnica de escalamiento que se desarrollará en el siguiente capítulo.

Es claro que no se puede culpar a los métodos utilizados por el resultado obtenido, ya que estos gozan de efectividad fuera de la aplicación sobre este modelo. El motivo entonces es la inclusión de una regla de selección de enlaces que produce este comportamiento inusual. Aun así, la disparidad entre los resultados que muestra cada una de las técnicas abordadas hasta ahora se puede evitar al promediar los observables de diferente manera. Con base en esto, en el Capítulo 4 se utilizará un método alternativo con el propósito de mejorar el escalamiento sobre las cantidades de interés.

### 3.2. Ventana de transición

Debido a la incertidumbre que presentaba establecer la naturaleza de la transición, en [ADS09] se introdujo un nuevo método para determinar su orden. La idea es tomar una ventana de  $p$  que contenga a la transición y observar su comportamiento como función del tamaño del sistema. Para esto, se define a los extremos  $p_1$  y  $p_2$  de esta ventana de transición como los valores del parámetro de control correspondientes al último paso para el que  $S_1 < N^\mu$  ( $\mu < 1$ ) y el primer paso para el que  $S_1 > AN$  ( $A > 0$ ), respectivamente. El ancho de la ventana es, por lo tanto,  $\Delta = p_2 - p_1$ . De este modo, la función  $\Delta(N)$  corresponde a la densidad de enlaces que necesita el componente más grande para pasar de un régimen sublineal a uno lineal, dados  $\mu$ ,  $A$  y  $N$ . El valor al que tiende esta función cuando  $N \rightarrow \infty$  indica si existe una discontinuidad al pasar entre estos dos regímenes o si se trata de un cambio continuo, pero abrupto. De aquí se tiene que

$$\Delta_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(N) = \begin{cases} 0 & \text{si la transición es discontinua} \\ c & \text{con } c > 0, \text{ si la transición es continua} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $\Delta_\infty$ , por lo tanto, es el valor límite de la función  $\Delta(N)$  y  $c$  es una constante.

Aquí se tomarán dos formas de aplicar el método descrito anteriormente. La primera forma representa una alternativa para evitar el uso de las técnicas usuales de escalamiento sobre el parámetro de orden. Esto tomando en consideración que el promedio sobre las distintas realizaciones podría suavizar la función  $S_1(p)$  en caso de que la transición sea discontinua. Así, en función del tamaño de la red, el ancho de la ventana de transición  $\Delta$  y sus extremos  $p_1$  y  $p_2$  se definen de la siguiente manera

$$\Delta(N) = \frac{1}{N_r(N)} \sum_{i=1}^{N_r(N)} [p_{2i}(N) - p_{1i}(N)], \quad \begin{aligned} p_1(N) &= \frac{1}{N_r(N)} \sum_{i=1}^{N_r(N)} p_{1i}(N) \\ p_2(N) &= \frac{1}{N_r(N)} \sum_{i=1}^{N_r(N)} p_{2i}(N) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$p_{1i}(N) = \max\{p : S_{1i}(p, N) < N^\mu\}$$

$$p_{2i}(N) = \min\{p : S_{1i}(p, N) > AN\}$$

donde la función  $N_r(N)$  representa el número de realizaciones que se utilizaron para cada sistema de tamaño  $N$  y  $S_{1i}$  es el tamaño del componente más grande en la realización  $i$ .

Por otro lado, la segunda forma de implementar el método es una propuesta que se centra en extraer las cantidades de interés directamente de la media del parámetro de orden. Para esto, el ancho  $\Delta'$  y los extremos  $p'_1$  y  $p'_2$  de la ventana de transición se definen como

$$\Delta'(N) = p_2'(N) - p_1'(N),$$

$$p_1'(N) = \max \left\{ p : \frac{1}{N_r(N)} \sum_{i=1}^{N_r(N)} S_{1i}(p, N) < N^\mu \right\}$$

$$p_2'(N) = \min \left\{ p : \frac{1}{N_r(N)} \sum_{i=1}^{N_r(N)} S_{1i}(p, N) > AN \right\} \quad (3.3)$$

donde la única finalidad de emplear cantidades primadas es distinguir de las definidas en las ecs. 3.2. La utilidad de la propuesta no es otra que visualizar las semejanzas entre los resultados obtenidos. Ya que la primera forma evita suavizar el parámetro de orden y la segunda no, una equivalencia entre ellas apoyaría la idea de que la transición de fase es continua.

### Aplicación del método para un valor de $\mu$ y $A$

En la implementación de este método se usaron los valores  $\mu = 0.7$  y  $A = 0.5$  para los parámetros de la ventana de transición. En este caso, el valor de  $A$  es el mismo que en el artículo donde se introdujo el método. En cambio,  $\mu$  se eligió un poco mayor para contrastar con los resultados ahí obtenidos (donde se tomó  $\mu = 0.5$  y se aseguró discontinuidad). Cabe recalcar que para todas las mediciones se consideró que el valor de  $p$  en el que se registra el mayor incremento de  $S_1$  estuviera entre los extremos  $p_1$  y  $p_2$  de la ventana. El incremento máximo en  $S_1$ , como se verá más adelante, está asociado con el punto donde se da el cambio de fase.

En el recuadro superior de la figura 3.1 se pueden observar los extremos de la ventana de transición para diferentes tamaños de red  $N$  en el intervalo  $[1E5, 1.6E9]$ . Las distribuciones formadas a partir de las mediciones de estas cantidades quedan descritas correctamente por funciones gaussianas. Así, cada punto en color azul corresponde a la media en la distribución de los extremos de ventana antes de la transición y en verde la media de los que están después de la transición. La forma en que se obtuvo cada punto se explicita en las ecuaciones 3.2. Por otro lado, para los valores de  $p_1'$  y  $p_2'$  que se definen en las ecuaciones 3.3 se utilizaron los colores rojo y amarillo, respectivamente.

En los cuatro casos, las curvas en el mismo color son el mejor ajuste por mínimos cuadrados que se tiene para el muestreo y cada ajuste se realizó de manera independiente a los demás. Todas las funciones se aproximan monótonamente al punto crítico a la vez que aumenta  $N$ , aunque sin tocarlo, sirviendo de cotas inferior y superior para su valor, según sea el caso. Los ajustes para las dos ramas de abajo muestran un coeficiente de determinación  $R^2 > 0.9999$ , mientras que para las ramas de arriba se tiene un  $R^2 = 0.981$  para  $p_2(N)$  y  $R^2 = 0.996$  para  $p_2'(N)$ .

Por otro lado, la gráfica en el recuadro inferior de la misma figura corresponde al ancho de la ventana de transición para distintos tamaños de red. Los círculos azules representan los puntos obtenidos para  $\Delta(N)$  como se describe en las ecuaciones 3.2, buscando seguir la idea de evitar el promedio del parámetro de orden en el cálculo. Por otro lado, para visualizar si existe alguna diferencia con el método anterior, se tomó el ancho de ventana

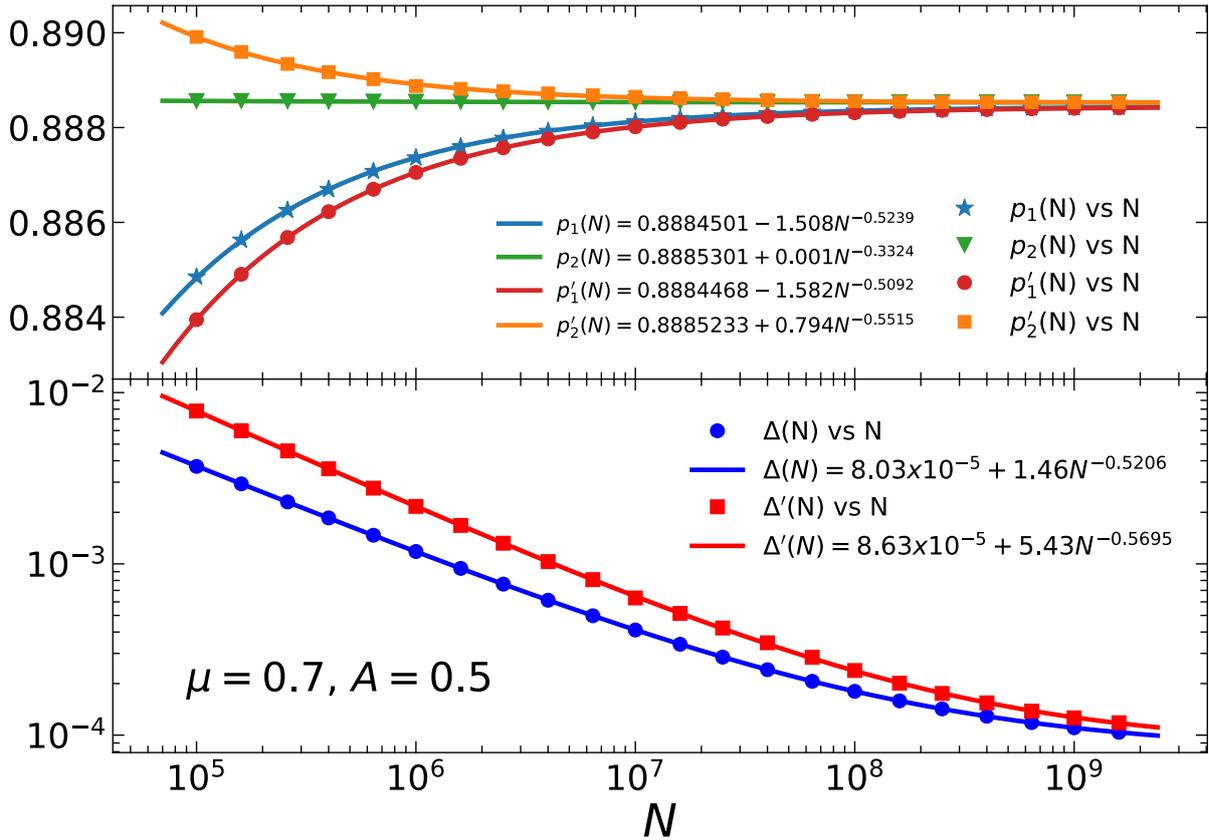


Figura 3.1: En el recuadro superior se incluye el comportamiento con respecto a  $N$  de los extremos inferior y superior de las ventanas de transición. En azul y verde se incluyen los puntos para  $p_1(N)$  y  $p_2(N)$  como en las ecs. 3.2, mientras que para  $p_1'(N)$  y  $p_2'(N)$  se usan los colores rojo y amarillo, respectivamente. En el recuadro inferior se observa el ancho de la ventana de transición para diferentes valores de  $N$ . En azul están los puntos obtenidos para  $\Delta(N)$  a partir de las ecs. 3.2 y en rojo los obtenidos para  $\Delta'(N)$  como se define en las ecs. 3.3. Todas las curvas en el mismo color son el mejor ajuste para cada grupo de puntos.

$\Delta'(N)$  con respecto a la media de los valores de  $S_1(p)$  como se define en las ecuaciones 3.3. El resultado corresponde a los cuadrados en rojo. De igual manera, se agregan las curvas que mejor se ajustan a cada grupo de puntos. Para el primer caso, la función de ajuste es  $\Delta(N) = 8.03 \times 10^{-5} + 1.46N^{-0.5206}$  con un coeficiente de determinación  $R^2 > 0.9999$ . Para el segundo, la función de ajuste es  $\Delta'(N) = 8.63 \times 10^{-5} + 5.43N^{-0.5695}$  con  $R^2 = 0.9998$ .

En ambos casos, el valor al que tienden las funciones de ajuste cuando  $N$  se aproxima a infinito muestra indicios de que la transición es continua, aunque el valor del ancho de ventana es pequeño. Como punto de comparación, aun cuando no se anexa la gráfica, se calculó la cantidad  $\Delta(N)$  como en las ecs. 3.2 para el modelo ER con los parámetros  $\mu = 0.6$  y  $A = 0.02$ . La función de mejor ajuste es  $\Delta^{ER}(N) = 7.66 \times 10^{-3} + 0.22N^{-0.2531}$  con  $R^2 = 0.998$ . Es decir, se tiende a una ventana cerca de 100 veces mayor para un coeficiente  $A$  que es 25 veces menor. Se toma la relación entre estas dos cantidades ya que, como se verá después, al menos para el modelo de percolación explosiva, la variación en  $\Delta_\infty$  se debe mayormente al cambio de  $A$  y no de  $\mu$ .

Adicionalmente, usando la notación de la primera igualdad en la ecuación 3.1, se comprueba en cierta forma que  $\Delta_\infty \approx p_{2\infty} - p_{1\infty}$  y  $\Delta'_\infty \approx p'_{2\infty} - p'_{1\infty}$ . Aunque el error es considerablemente menor en la primera expresión que en la segunda. De igual manera, se puede notar que el exponente en la función de ajuste de  $\Delta(N)$  es muy parecido al de  $p_1(N)$ . Por lo que se determina que, en este caso, el exponente con que decae el ancho de ventana queda mayormente determinado por la función de su extremo inferior. Mientras que los exponentes de  $p'_1(N)$  y  $p'_2(N)$  son ambos cercanos al de  $\Delta'(N)$ . Además, a partir de las funciones de ajuste se obtiene que  $\Delta_\infty \approx \Delta'_\infty$ , aunque por la pequeña discrepancia entre sus exponentes se ve que  $\Delta'(N)$  decae un poco más rápido que  $\Delta(N)$ . La diferencia entre los valores límite  $\Delta_\infty$  y  $\Delta'_\infty$  es aproximadamente del 7% para  $\mu = 0.7$  y  $A = 0.5$ .

En el artículo donde se introdujo el método [ADS09] el cálculo se efectuó con valores del tamaño de red por debajo de  $N = 10^8$ . Como se puede ver para  $\Delta(N)$  y  $\Delta'(N)$  (recuadro inferior, fig. 3.1), la forma de las curvas para  $N < 10^7$  se puede confundir con una recta. Esto, tal vez aunado al bajo número de realizaciones para los sistemas más grandes, motivó la idea de discontinuidad en la transición de fase. Sin embargo, aquí se encuentra que los anchos de ventana tienden a un valor  $\Delta_\infty > 0$  y decaen aproximadamente como el inverso de la raíz cuadrada de  $N$ .

En particular, los resultados descritos para este par de valores  $\mu$  y  $A$  sugiere que existe cierta equivalencia entre las dos formas de aplicar el método descrito en esta sección. También apunta a que la transición es continua, ya que la diferencia entre los resultados finales no es significativa y ambos valores, aunque pequeños, son mayores a cero.

## Generalización para varios valores de $\mu$ y $A$

El motivo principal de introducir este método, como se expuso al inicio, se basa en establecer la naturaleza de la transición a partir del escalamiento sobre una ventana de  $p$  que la contenga. Si bien la elección de parámetros que se realizó arriba apunta hacia la continuidad en  $S_1(p)$ , el hecho de tomar  $\mu = 0.7$  y  $A = 0.5$  es en gran medida una decisión arbitraria. En principio, basta con encontrar valores de  $\mu < 1$  y  $A > 0$  que provoquen que el ancho de la ventana tienda a cero a fin de asegurar la discontinuidad. Por esto, se investiga el comportamiento de  $\Delta'_\infty$  para distintos valores de  $\mu$  y  $A$  con la finalidad de esclarecer el papel que desarrolla esta cantidad. En adelante sólo se mostrarán resultados de  $\Delta'$  porque su extracción es numéricamente más sencilla y debido a la correspondencia entre las dos formas de aplicar este método.

El procedimiento a seguir es el mismo que se utilizó anteriormente: calcular el ancho de la ventana de transición en un intervalo de  $N$  para un par  $(\mu, A)$ , después elegir la función de  $N$  que mejor ajusta a los puntos obtenidos y finalmente determinar el valor  $\Delta'_\infty$  al cual tiende esta función cuando  $N \rightarrow \infty$ . Se repite este proceso para diferentes duplas  $(\mu, A)$  con el propósito de conseguir una relación  $\Delta'_\infty(\mu, A)$ .

En este caso, los valores de  $N$  que se utilizaron están dentro del intervalo [1E5, 1.6E9] como en la figura 3.1. La elección de los parámetros  $\mu$  y  $A$  está constreñida por la condición de que la ventana que definen contenga a la transición y que  $p'_1$  y  $p'_2$  se mantengan como los extremos inferior y superior para toda  $N$ , respectivamente. Por lo tanto, se establece que la transición en una red de tamaño  $N$  se encuentra en el punto  $p_c(N)$  que, como se utilizó

antes, es la media de los valores de  $p$  donde ocurre el mayor incremento en  $S_1(p, N)$ . De esta forma, para extender la condición a toda  $N$ , se toma en cuenta que las funciones de ajuste  $p'_1(N)$  y  $p'_2(N)$  eviten intersecciones con el ajuste para  $p_c(N)$ . Considerando esto, la restricción para la ventana de transición genera intervalos de  $\mu$  y  $A$  con cotas  $\mu < 0.89$  y  $A > 0.47$ , respectivamente. Esta constituye una aproximación para los intervalos en donde los parámetros son válidos para toda  $N$ .

Para llevar a cabo el procedimiento que se describió arriba se tomaron 22 valores de  $N$  en el intervalo  $[1E5, 1.6E9]$ , así como 56 valores de  $\mu$  y  $A$  de manera equiespaciada en los intervalos  $[0.665, 0.885]$  y  $[0.472, 0.582]$ , respectivamente. De esta manera se consideran las cotas obtenidas para los parámetros y también el intervalo de  $p$  del que se pueden extraer valores de  $S_1$ .

En la figura 3.2 se pueden ver los resultados de la aplicación de este método. En los recuadros de la izquierda se agregan varias curvas para el ancho de ventana  $\Delta'$  en función de  $N$ . En la parte superior se toma un valor fijo del exponente  $\mu = 0.67$  y se generan los anchos para distintas  $A$ 's. En cambio, en la parte inferior se fija el coeficiente  $A = 0.58$  y se varía el parámetro  $\mu$ . Ambos casos muestran la tendencia del ancho de las ventanas a decrecer con  $N$ . En el primer caso se observa en escala doble logarítmica que los puntos tienden marcadamente a diferentes valores de  $\Delta'_\infty$ . Esto se debe a que el extremo superior de las ventanas se asienta en un valor  $p'_{2\infty} > p_c$ , el cual está necesariamente delimitado por la parte postcrítica de  $S_1(p)$ , ya que esta tiende a una ley de potencias con  $N \rightarrow \infty$  (fig. 3.3). Por el contrario, en el caso de  $A$  fija y  $\mu$  variable, se aprecia como todos los grupos de puntos convergen a un valor cercano a  $\Delta' = 5 \times 10^{-4}$ . Lo anterior es un reflejo del modo en que el extremo inferior de las ventanas tiende a  $p'_{1\infty} \approx p_c$ , independientemente del valor de  $\mu$ . Esto utilizando la restricción que se desarrolló antes para los parámetros de ventana.

Como resultado final de esta sección se incluyen las gráficas de la parte derecha en la figura 3.2. Estas corresponden a los valores límite del ancho de ventana  $\Delta'_\infty$  en función de los parámetros  $\mu$  y  $A$ . Debido a la tendencia que se visualizó en las gráficas abordadas anteriormente, se optó por agregar los (poco más de) 3000 puntos obtenidos por este método en escala semilogarítmica. En la parte superior se aprecia que estos puntos forman un plano que cambia muy poco en dirección de  $\mu$  y crece exponencialmente con el aumento de  $A$ . También se añade una vista lateral, o bien, la dependencia de  $\Delta'_\infty$  sólo con respecto al coeficiente  $A$ .

Para realizar un ajuste sobre los puntos  $\Delta'_\infty(\mu, A)$  se propone la función  $a\mu^b A^c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los parámetros a ajustar. De igual manera, también se busca una función de ajuste para  $\Delta'_\infty(A)$  con la forma  $aA^c$ . En ambos casos se utiliza una función pesada por el error estándar de cada punto en este conjunto de valores. En la siguiente tabla se muestran los parámetros de ajuste obtenidos

Forma	a	b	c
$a\mu^b A^c$	0.20391(3)	-0.02618(3)	11.2267(3)
$aA^c$	0.20315(4)	-	11.2067(3)

Cuadro 3.2: Valores para los parámetros de ajuste en las funciones  $\Delta'_\infty(\mu, A)$  y  $\Delta'_\infty(A)$ .

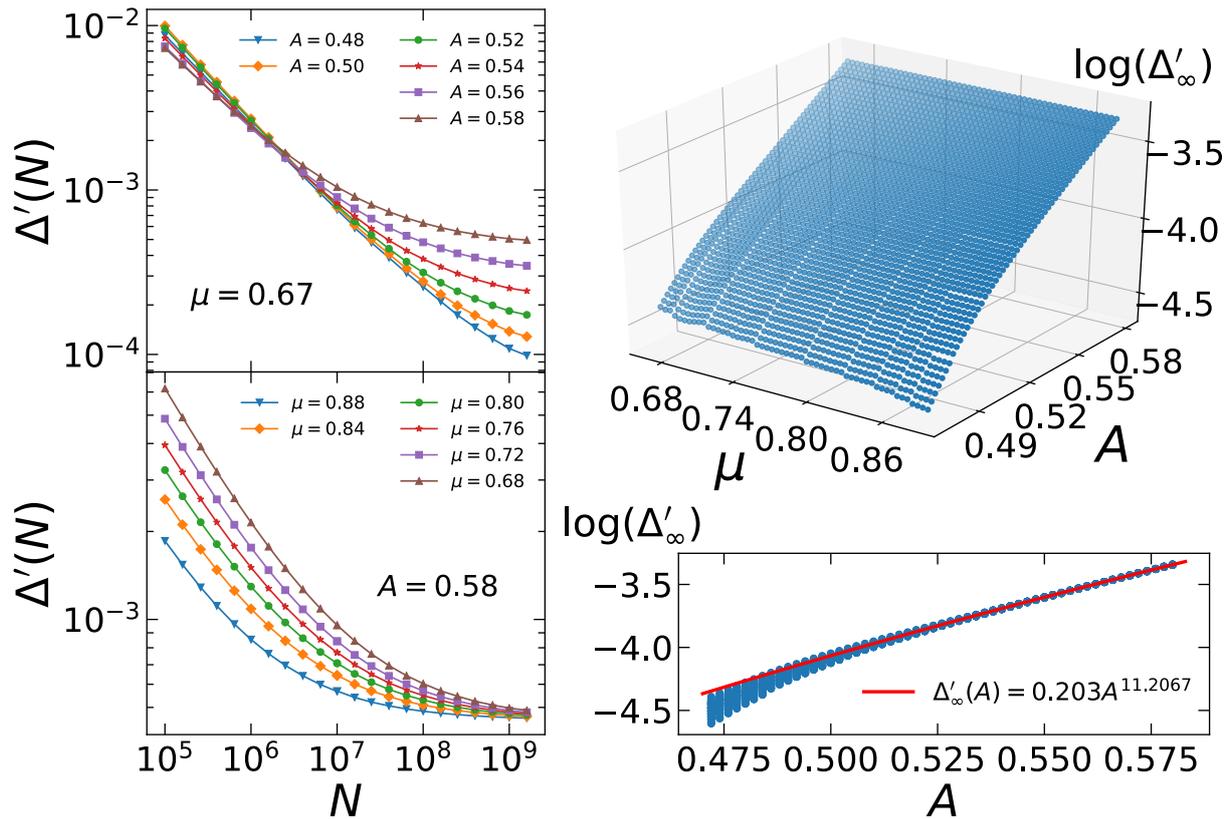


Figura 3.2: En los recuadros de la izquierda se observan los resultados del ancho de ventana  $\Delta'(N)$  para distintos valores de los parámetros  $\mu$  y  $A$ . Arriba se tienen puntos para  $\mu$  fija y seis valores de  $A$ . Aquí se visualiza como  $\Delta'$  tiende a diferentes puntos límite. Mientras que en la parte de abajo se fija el coeficiente  $A$  y se varía el exponente  $\mu$ . En esta gráfica, independientemente del cambio en  $\mu$ , parece que todas las curvas se aproximan al mismo valor de  $\Delta'$ . En los recuadros de la derecha se agregan resultados para el límite  $\Delta'_\infty$  en términos de  $\mu$  y  $A$ . En la parte superior están los puntos correspondientes a  $\log(\Delta'_\infty)$  como función de los dos parámetros. En la inferior sólo con dependencia en  $A$ , donde se agrega el ajuste respectivo a estos puntos como una recta roja en esta escala. Los valores encontrados se incluyen en la tabla 3.2.

Los cambios en el ancho de ventana  $\Delta'_\infty$  dependen en mayor medida del valor del parámetro  $A$  en contraste con  $\mu$ , cuya variación no influye fuertemente en el cambio de la ventana de transición. En estas gráficas también se puede visualizar la desviación que presentan los puntos cercanos a las cotas de  $\mu$  y  $A$ . Por esto, se concluye que el valor de  $\Delta'_\infty$  que se obtuvo para los parámetros  $\mu = 0.7$  y  $A = 0.5$  al inicio, además de ser pequeño por el modelo de percolación explosiva, lo es también porque corresponde a valores muy cercanos a las cotas. Es decir, por poco se trata de una ventana que no contiene a la transición. Por lo que, a diferencia de lo que exponen en [ADS09], si se toma como objetivo principal del método cumplir la condición  $p'_1(N) < p_c(N) < p'_2(N)$ , entonces no todos los valores de  $\mu < 1$  y  $A > 0$  son válidos. Así, bajo las consideraciones tomadas en este trabajo, se dan funciones  $\Delta'_\infty(\mu, A)$  que buscan generalizar los resultados obtenidos a partir del método de escalamiento sobre la ventana de transición. En consecuencia, los resultados encontrados son consistentes con el establecimiento de una transición continua.

### 3.3. Técnicas de escalamiento

La buena correspondencia entre los resultados generados previamente y el establecimiento de un cambio de fase continuo, permite disponer de la teoría existente acerca de transiciones de segundo orden. De modo que, además del descrito en la sección anterior, se utilizan tres técnicas o métodos diferentes para analizar los datos obtenidos en las simulaciones numéricas. El esquema general que sigue cada método consiste en encontrar el umbral de percolación  $p_c$ , obtener los exponentes críticos que caracterizan a la transición de fase y confirmar si estos cumplen con relaciones de escalamiento o no.

Básicamente se toman los mismos datos como entrada para cada técnica. Por ejemplo, la evolución del parámetro de orden  $s_1$  para diferentes valores de  $p$  y  $N$ . Luego, a partir del manejo de estos datos, se obtiene el punto crítico y los exponentes asociados como resultado. Siguiendo con el ejemplo, se generan unos parámetros  $p_{c,s_1}$ ,  $\beta$  y  $\Theta_{s_1}$  relacionados con cada técnica. Lo anterior se realiza de manera independiente a través de los tres métodos con la finalidad de comparar resultados y verificar si las relaciones entre ellos son las esperadas. Se procede de manera minuciosa debido al carácter inusual de la transición y del modelo explosivo en sí.

A continuación se desarrolla cada uno de los métodos, los cuales se presentan en el orden cronológico en que se tomaron en consideración para este trabajo. Ya que a grandes rasgos cada técnica se aplica de igual manera sobre los distintos observables, muchas veces será necesario hablar sobre estas cantidades en general. Por tanto, con el fin de facilitar la presentación, se emplean las letras  $X$  y  $\omega$  para denotar a los observables utilizados y los exponentes críticos asociados a cada cantidad, respectivamente. De igual forma, el Apéndice A contiene información detallada sobre los símbolos empleados a lo largo del trabajo. En caso de cualquier duda relacionada con la representación de estas cantidades diríjase a este.

#### Método 1. Escalamiento de tamaño finito

Se trata de uno de los métodos más comunes para extraer las propiedades de una transición de fase continua. Se basa en el comportamiento de la cantidad  $X$  alrededor del punto crítico para sistemas con tamaño finito  $N$

$$X(p, N) \sim N^{\omega'\Theta} F_X[(p - p_c)N^\Theta] \quad (3.4)$$

donde  $\omega = |\omega'|$  es el exponente crítico asociado a esta cantidad y  $F_X$  es la función de escalamiento para  $X$ . Ya que el exponente  $\omega'$  puede ser positivo o negativo dependiendo del observable, en adelante se utiliza  $\omega$  para evitar confusión y esto aplica para los tres métodos. El exponente  $\Theta$  en este modelo corresponde al  $1/(d\nu)$  utilizado normalmente para el escalamiento de tamaño finito en sistemas que cuentan con estructura geométrica, donde  $d$  es la dimensión espacial o crítica superior y  $\nu$  es el exponente relacionado con la divergencia de la longitud de correlación.  $F_X$  se consigue al graficar  $XN^{\omega'\Theta}$  como función de  $(p - p_c)N^\Theta$ . Al hacer esto para varios tamaños de red se encuentra que  $F_X$  tiene una forma independiente de  $N$ , ya que todas las curvas se empalman en una sola, por lo que se dice que la función es universal. Después de esto se aplica un logaritmo sobre la ecuación

para obtener

$$\log(X) \sim \omega' \Theta \log(N) + \log(F_X[(p - p_c)N^\Theta]) \quad (3.5)$$

Esta expresión es el punto de partida para el manejo de los datos  $X(N)$  en busca de cantidades como la densidad de enlaces crítica y los exponentes para una red infinita.

Primeramente, se aproxima el valor de  $p_c$  a partir de esta última expresión. Se toman los datos de  $X(N)$  para varios valores de  $p$  alrededor del punto crítico. La precisión con la que se encuentra este punto está dada por la cercanía a  $p_c$  con la que se tomen los datos y la cantidad de realizaciones que se lleven a cabo. Un indicador de esta cercanía es el coeficiente de correlación de Pearson  $r$ , pues a medida que se toman  $p$ 's cuya diferencia con  $p_c$  es menor, la ecuación 3.5 se parece cada vez más a una recta, o bien, aumenta la correlación lineal entre  $\log(X)$  y  $\log(N)$ . Esto ocurre ya que  $F_X$  se vuelve una constante frente a los cambios en el tamaño del sistema  $N$  cuando  $p = p_c$ . Otro indicador que puede ser de utilidad para corroborar el resultado obtenido es la curvatura  $\kappa$  de la función que describen los puntos  $X(N)$  en escala doble logarítmica. Lo anterior en el sentido de encontrar el recíproco del radio para el círculo que mejor se ajusta a los puntos dados.

Después de generar la  $p$  que mejor se aproxima a  $p_c$ , se encuentra que el exponente  $\omega\Theta$  es el valor de la pendiente que presenta el mejor ajuste lineal para los puntos  $\log(X(N))$ . Este ajuste se genera mediante el método de mínimos cuadrados.

## Método 2. Puntos pseudocríticos

Este método se fundamenta en el comportamiento de los puntos pseudocríticos obtenidos para diferentes valores del tamaño del sistema. El punto pseudocrítico  $p_c(N)$  se refiere al valor que toma el parámetro de control  $p$  cuando alguna cantidad observable encuentra su máximo. Estos surgen a partir del carácter finito del estudio y simulación del modelo. En estas redes de tamaño  $N$ , las cantidades como  $\chi(p)$ , por ejemplo, no presentan una divergencia al pasar por la transición, sino un máximo que es más o menos pronunciado dependiendo del tamaño del sistema. De modo que las posiciones  $p_c(N)$  de estos máximos exhiben un desplazamiento con respecto al punto crítico real. Estos desplazamientos se comportan como una ley de potencias en  $N$  al igual que la amplitud que los máximos presentan.

Entre las cantidades que muestran máximos en los puntos pseudocríticos están los tamaños de componente  $s_R$  de rango  $R > 1$  y los momentos  $M_j$  de la distribución  $n(s)$  con orden entero  $j > 1$ . Sin embargo, el método no se limita a cantidades con máximos, sino que puede adaptarse fácilmente a otras maneras de definir  $p_c(N)$ . Denotando a cualquiera de estas cantidades como  $X$  y su exponente crítico asociado como  $\omega$ , los puntos pseudocríticos  $p_c(N)$  van como

$$|p_c(N) - p_c| \sim N^{-\delta} \quad (3.6)$$

donde  $p_c$  es el punto crítico encontrado a partir de los máximos en  $X$  y  $\delta$  es el exponente de la ley de potencias con el que estas diferencias decaen. Los valores máximos, por otro lado, se comportan como

$$X_{max}(N) \sim N^{\omega'\Theta} \quad (3.7)$$

donde  $X_{max} = \max \{X(p)\}$  para un tamaño  $N$  dado.

Aunque este método muestra, tal vez, la manera más sencilla de obtener los parámetros críticos numéricamente, también es el que presenta mayor error en ellos. Esto se debe tomar en cuenta, ya que los puntos pseudocríticos son los que exhiben una mayor varianza sobre un conjunto dado por las distintas realizaciones.

### Método 3. Exponentes efectivos

En las subsecciones anteriores se tomó la dependencia de las distintas cantidades  $X$  en función de  $N$  para después obtener los exponentes críticos, ya sea optimizando la correlación lineal al variar el parámetro  $p$  en la ecuación 3.5 o aprovechando el comportamiento en ley de potencias de puntos pseudocríticos en las expresiones 3.6 y 3.7. En esta subsección se propone un método alternativo que utiliza un enfoque similar, sólo que tomando exponentes efectivos a partir de las funciones  $X(p)$  en una vecindad cercana al punto crítico.

En una transición de fase continua, la cantidad observable  $X$  cerca del umbral de percolación  $p_c$  es independiente de la escala del sistema, por lo que tiene una forma en ley de potencias

$$X(p) \sim A|p - p_c|^{\omega'} \quad (3.8)$$

donde  $A$  y  $\omega$  son el coeficiente y exponente asociados a esta cantidad, respectivamente. Para redes de tamaño finito este comportamiento se observa en las cercanías de  $p_c$  similarmente, pero después de que los efectos de esta finitud desaparecen. Tal es el caso de los máximos que sustituyen a la divergencia de estas cantidades cuando  $N \rightarrow \infty$ . Con base en esto, se toma a  $X(p)$  en un intervalo donde se ha asentado completamente una ley de potencias para los distintos valores de  $N$ . Después, se extraen  $A$  y  $\omega$  para deducir su dependencia con el tamaño del sistema como en la siguiente expresión

$$X(p, N) \sim A(N)|p - p_c|^{\omega'(N)} \quad (3.9)$$

donde  $p_c$  es el valor correspondiente al umbral de percolación para este modelo.

Con este método se genera una manera de estudiar por separado a las partes pre- y postcrítica en las cercanías de la transición. Esto asumiendo que en ambos regímenes se instaure una ley de potencias que progresivamente se parece cada vez más a la que muestra un sistema infinito (ec. 3.8). Por otro lado, se evita asumir que ambas partes alrededor del punto crítico presentan el mismo exponente, como es el caso de la percolación clásica. Debido a lo anterior, se distingue entre los exponentes efectivos precríticos  $\omega_-(N)$  y postcríticos  $\omega_+(N)$ , y se encuentra que estos se aproximan monótonamente al valor  $\omega_-$  y  $\omega_+$  para un sistema infinito, respectivamente. La diferencia entre estos sigue una ley de potencias como la que se muestra

$$|\omega_{\pm}(N) - \omega_{\pm}| \sim N^{-\theta_{\pm}} \quad (3.10)$$

donde  $\theta_{\pm}$  son los exponentes con los que escala cada relación. Se sigue el mismo camino para los coeficientes  $A_{\pm}(N)$

$$|A_{\pm}(N) - A_{\pm}| \sim N^{-\varphi_{\pm}} \quad (3.11)$$

donde  $A_-$  ( $A_+$ ) es el coeficiente al que se tiende en el régimen precrítico (postcrítico), así como el exponente  $\varphi_-$  ( $\varphi_+$ ) asociado al ajuste.

En los primeros dos métodos se opta por tomar los 22 puntos que se tienen para los distintos valores de  $N$  y ajustar una ley de potencias a ellos para obtener el exponente crítico. Numéricamente, esto es más sencillo que seguir la expresión  $s_1 \sim B|p - p_c|^{\beta}$  para el parámetro de orden, por ejemplo, en la que determinar donde comienza el comportamiento en ley de potencias presenta mayor ambigüedad. Sin embargo, se tiene la ventaja de dividir el estudio para los dos regímenes que rodean al punto crítico, lo cual evita inconsistencias que se puedan presentar en las funciones de escalamiento  $F_X$ .

Finalmente, se busca obtener el exponente  $\Theta$  a través de los resultados obtenidos por cada método. Esto se realiza de forma similar y como el último paso de cada subsección. En todo caso, se asume que los parámetros críticos extraídos hasta ahora se generaron correctamente ( $p_c$  y  $\omega\Theta$  en el Método 1 y 2,  $\omega_-$  y  $\omega_+$  en el Método 3). Después, con esta información aplicada sobre la expresión 3.4 se recurre al mejor *data collapse* sobre las curvas  $X(p)$  para varios  $N$ 's. En el caso del Método 1 y 2, conocer a  $\Theta$  por este medio permite tener el valor para  $\omega$  por separado. En cuanto al Método 3, se produce un valor asociado a la parte precrítica  $\Theta_-$  y otro a la parte postcrítica  $\Theta_+$ , los cuales no necesariamente serán iguales. Esto concluye la obtención de los parámetros críticos para cada observable.

En las siguientes secciones se presentarán algunas de las cantidades observables más importantes del modelo y se abordarán los datos obtenidos en las simulaciones mediante las técnicas de escalamiento que se desarrollaron aquí. Para distinguir entre los valores del mismo exponente calculado a través de distintas técnicas, se usará un superíndice con el número del método utilizado. Por ejemplo,  $\gamma^{(1)}$  es el exponente crítico asociado a la cantidad  $\chi$  calculado mediante el Método 1. Del mismo modo, como  $p_c$  y  $\Theta$  también se obtienen bajo el comportamiento de distintas cantidades, se distinguirá entre ellos mediante subíndices. Por ejemplo,  $p_{c,s_3}^{(2)}$  es el punto crítico obtenido a partir de los máximos que muestra  $s_3(p)$  en el Método 2. Por último, como ya se introdujo en el Método 3, cuando se tenga que distinguir entre el comportamiento antes y después de la transición se utilizarán los subíndices  $-$  y  $+$ , respectivamente.

Una versión más detallada de esta información sobre los símbolos utilizados y la notación empleada se incluyen en el Apéndice A.

### 3.4. Parámetro de orden $s_1$

La cantidad de mayor importancia en este modelo es el tamaño relativo del componente más grande  $s_1$ , el cual desempeña el papel de parámetro de orden y se define como la fracción más grande de vértices conectados entre sí dentro del sistema. Como ya se expuso

anteriormente, se le adjudica el término “percolación explosiva” a este modelo debido al cambio abrupto que se da en la cantidad  $s_1$ . En esta sección se realizará el cálculo de los parámetros críticos  $p_{c,s_1}$ ,  $\beta$  y  $\Theta_{s_1}$  que caracterizan a  $s_1$  en las cercanías de la transición de fase. Para esto se aplicarán las técnicas descritas en la sección anterior. Los resultados obtenidos serán analizados y comparados entre sí para corroborar su validez.

En la figura 3.3 se muestra el comportamiento de esta cantidad alrededor del punto crítico para cinco valores diferentes de  $N$ . Debido a la tendencia que se observa al aumentar el tamaño del sistema, se puede deducir que la transición para un sistema infinito sucede en un punto en las cercanías de  $p = 0.88845$ . De igual manera, el parámetro de orden se aproxima a cero antes de la transición y toma valores cada vez más cercanos a una ley de potencias en  $(p - p_c)$  después de ésta. Lo último se puede ver para la curva en color verde a partir de  $p \approx 0.88885$  y para la curva roja poco después de  $p \approx 0.88855$ .

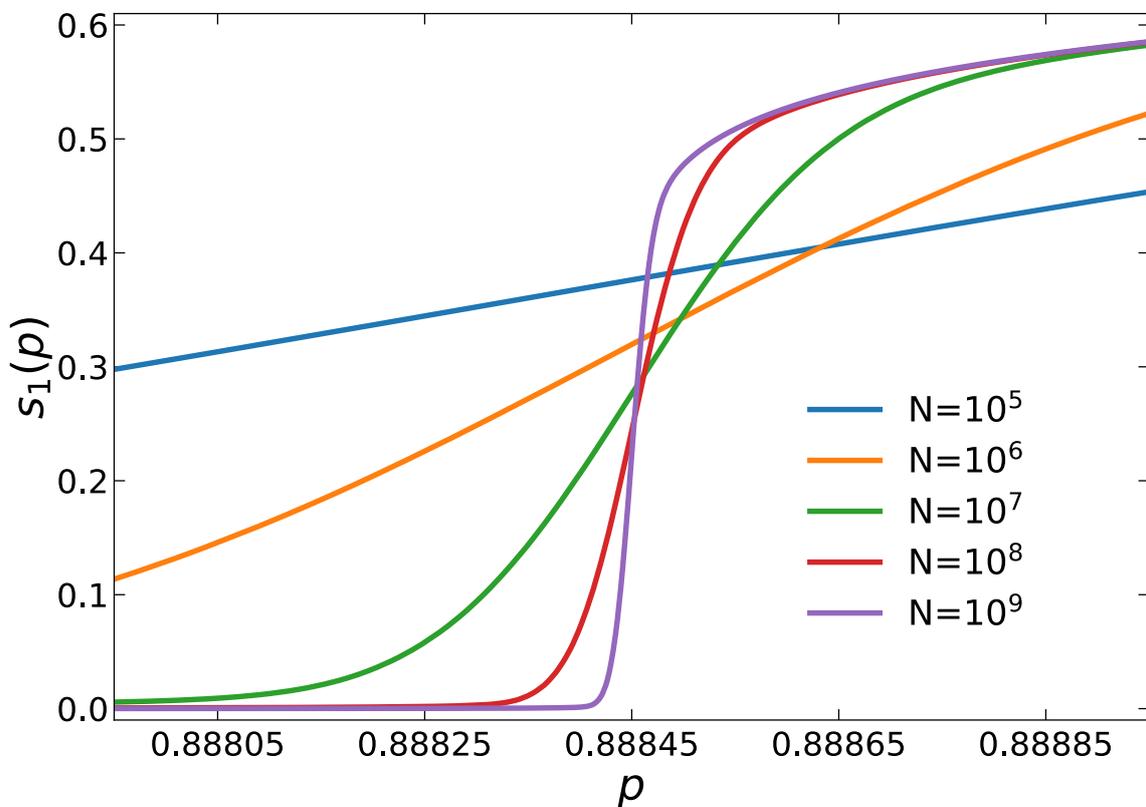


Figura 3.3: Tamaño relativo del componente más grande  $s_1$  alrededor del punto crítico como función del parámetro  $p$  para diferentes valores del tamaño de red  $N$ . No es muy clara debido a la escala sobre el eje horizontal, pero el sistema correspondiente a  $N = 10^5$  también atraviesa por una transición de fase.

El intervalo en la figura se trata de una ventana de  $p$  muy pequeña en la que solamente se agregan  $0.001N$  enlaces al sistema, es decir,  $0.1\%$  de los enlaces necesarios para unir toda la red si a cada paso se unieran dos componentes previamente disjuntos. Para las redes de tamaño más pequeño es poco evidente la variación en la cantidad  $s_1$  dentro de este intervalo. En promedio se agregan alrededor del  $15\%$  de los vértices en el sistema para  $N = 10^5$ . Esto en contraste con la red más grande, que acapara aproximadamente la mitad de los vértices dentro de una ventana 10 veces menor.

Al comparar ahora con el modelo ER (en el que los enlaces no compiten para ser aceptados), se sabe que en una vecindad cercana al punto crítico el valor de  $s_1 \sim 4|p - p_c|$ . Por lo tanto, en una ventana alrededor de  $p_c$  con el mismo tamaño que en la figura 3.3 se observaría un incremento 300 veces menor que con la regla del producto PR.

## Aplicación del Método 1

Para obtener mayor información sobre esta cantidad se aplicará el Método 1 descrito en la sección anterior. Los datos que se consideran son el valor medio de  $s_1$  para 10,001 valores de  $p$  equiespaciados en el intervalo  $[0.88795, 0.88895]$  y 22 valores de  $N$  dentro de  $[1E5, 1.6E9]$ .

Se parte de la expresión que asume escalamiento sobre el parámetro de orden  $s_1$  alrededor del punto crítico y para sistemas de tamaño finito  $N$

$$s_1(p, N) = N^{-\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}} F_{s_1}[(p - p_{c,s_1}^{(1)})N^{\Theta_{s_1}^{(1)}}] \quad (3.12)$$

donde  $p_{c,s_1}^{(1)}$ ,  $\beta^{(1)}$  y  $\Theta_{s_1}^{(1)}$  son los parámetros críticos que caracterizan a la transición mediante este método y  $F_{s_1}$  su función de escalamiento. La información que se tiene sobre  $s_1$  en función de  $N$  se usa para calcular la correlación lineal  $r_{s_1}$  y la curvatura  $\kappa_{s_1}$  que existe entre estos conjuntos de datos en escala doble logarítmica. En este caso, se encuentra que  $p_{c,s_1}^{(1)}$  está dado por el valor de la densidad de enlaces  $p$  que minimiza a la función  $r_{s_1}(p)$  en un intervalo tomado en las cercanías del punto crítico.

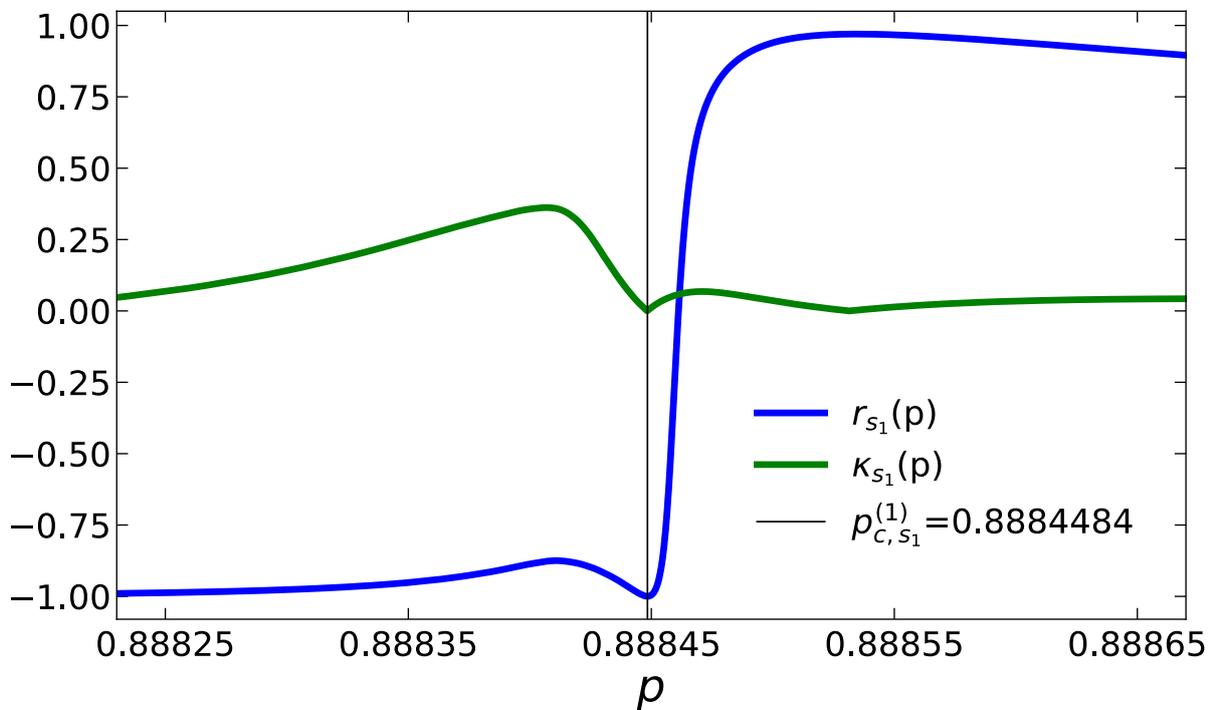


Figura 3.4: Coeficiente de correlación de Pearson  $r_{s_1}$  y curvatura  $\kappa_{s_1}$  de la relación  $s_1(N)$  para los valores del parámetro de control  $p$  en el intervalo  $[0.88823, 0.88867]$ . Ambas curvas presentan un mínimo en  $p_{c,s_1}^{(1)} = 0.8884484$ , cuya ubicación se resalta mediante una recta vertical en ese valor.

En la figura 3.4 se puede visualizar a estas dos cantidades ( $r$  y  $\kappa$ ) como función del parámetro de control  $p$  para el tamaño del componente más grande  $s_1(N)$ . En esta gráfica se señala el valor  $p_{c,s_1}^{(1)} = 0.8884484$  que minimiza el coeficiente de correlación de Pearson, y el cual coincide también en minimizar la curvatura.

Por la forma de la curva  $r_{s_1}(p)$  se puede deducir que los puntos  $\log(s_1(N))$  para  $p < p_{c,s_1}^{(1)}$  se ajustan a una recta cuya pendiente es negativa. Luego, el ajuste genera la mejor correlación negativa entre  $\log(s_1)$  y  $\log(N)$  cuando  $p = p_{c,s_1}^{(1)}$ . Esto indica que, en el punto crítico, el parámetro de orden decrece como una ley de potencias con el aumento de  $N$ . Después, para  $p > p_{c,s_1}^{(1)}$ , la correlación cambia repentinamente de signo pasando del valor más cercano a  $r_{s_1} = -1$  hasta algo por encima de  $r_{s_1} = 0.8$ , donde los puntos encuentran un mejor ajuste lineal mediante una recta con pendiente positiva. Por otro lado, la curvatura  $\kappa_{s_1}(p)$  toma valores más grandes antes de la transición que después de ésta. No obstante, como se ve en la figura, también encuentra su mínimo en  $p_{c,s_1}^{(1)}$ .

En la gráfica del parámetro de orden para diferentes tamaños de red (figura 3.3) se observó que el cambio en  $s_1(p)$  se vuelve más abrupto al aumentar  $N$ . Esto implica que en una red de gran tamaño existe una mayor variación para distintas  $p$ 's alrededor de la transición, como se observa en la figura 3.5. Este hecho y la información sobre el coeficiente de correlación de Pearson y la curvatura, señalan que los puntos  $\log(s_1(N))$  empiezan a decrecer más rápido antes de  $p_{c,s_1}^{(1)}$ , luego el decaimiento se vuelve menor hasta ser el mejor ajuste lineal en el punto crítico y, después de éste, los puntos empiezan a mostrar un crecimiento con  $N$ , pero a una razón menor. Esto se puede ver en la misma figura para distintos valores de  $p$ .

Este método generó un valor aproximado de  $p_c$  a partir de la minimización de  $r_{s_1}(p)$  y  $\kappa_{s_1}(p)$ . Después de asegurar la obtención de esta cantidad de manera correcta, lo siguiente es encontrar el exponente  $\beta^{(1)}$  que caracteriza al parámetro de orden durante la transición. Para esto, se tomó la pendiente del mejor ajuste lineal por mínimos cuadrados para los puntos  $s_1(p_{c,s_1}^{(1)}, N)$  en escala doble logarítmica. En la figura 3.5 se representa en color verde a los puntos observados y la recta resultante. Se puede ver que el exponente relacionado con la pendiente de dicha recta es  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)} \approx 0.0653$  y que la función de escalamiento evaluada en cero, relacionada con la ordenada al origen de la misma, es  $F_{s_1}(0) = 0.786$ .

En esta gráfica también se agregan los puntos correspondientes a  $s_1(N)$  para dos valores de  $p$  antes (rojo y morado) y después (azul y naranja) de la transición, esto con el propósito de comparar y resaltar la desviación que presentan. Se puede concluir que este modelo atraviesa por una transición tan abrupta debido a que su parámetro de orden presenta un exponente  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}$  muy pequeño.

Por último, para determinar el valor del exponente crítico  $\Theta_{s_1}^{(1)}$  se busca el mejor empalme de los datos  $s_1(p)$  para todos los valores de  $N$ , utilizando el umbral  $p_{c,s_1}^{(1)}$  y el exponente  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}$  obtenidos anteriormente. En la figura 3.6 se agregan estos resultados. Se observa un buen comportamiento de las curvas para el exponente  $\Theta_{s_1}^{(1)} = 0.533$ , el cual representa el mejor ajuste para los datos  $s_1$  bajo las variables rescaladas. Esto se puede ver en el recuadro de la parte derecha para un intervalo  $[-1, 1]$ . Sin embargo, fuera de este intervalo las curvas empiezan a desviarse entre sí.

Esta inconsistencia se presenta antes de la transición, como se observa en el recuadro de la parte izquierda en escala log-log, y después de ésta, en la gráfica principal de la

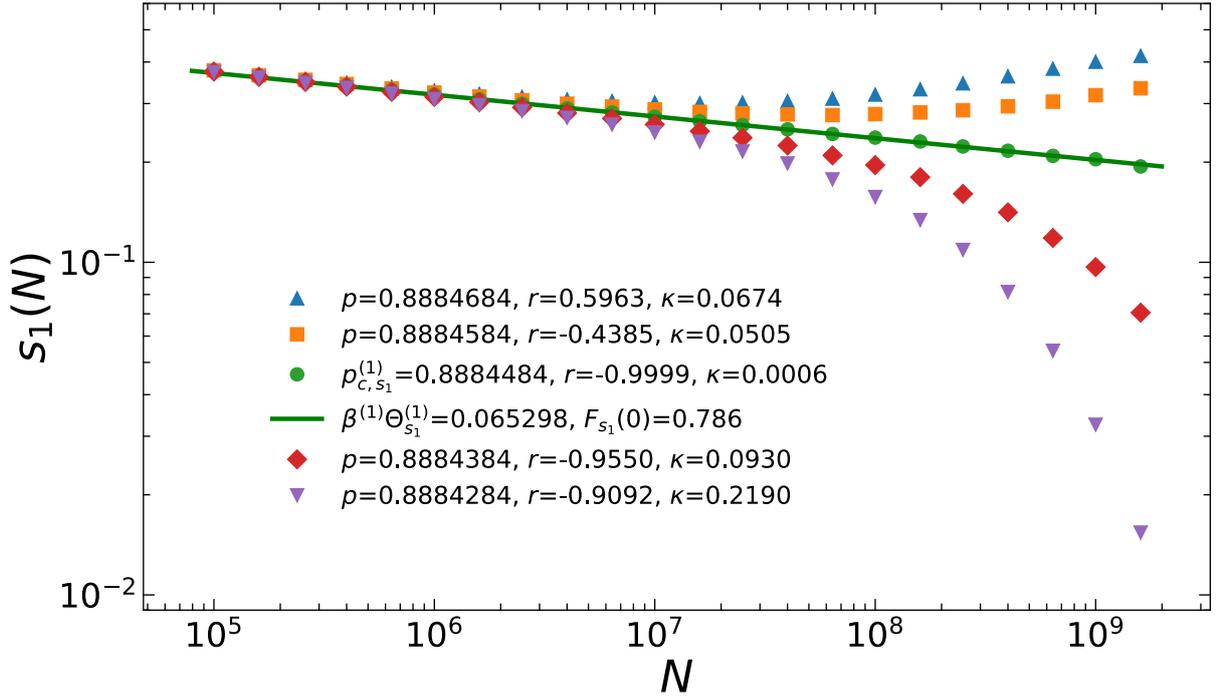


Figura 3.5: Parámetro de orden en función de  $N$  para diferentes valores de  $p$  en escala doble logarítmica. La recta corresponde al mejor ajuste lineal de los puntos en  $p_{c,s_1}^{(1)} = 0.8884484$ , con el exponente crítico  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)} = 0.0653$  y el valor  $F_{s_1}(0) = 0.786$  de la función de escalamiento para la cantidad  $s_1$ . Además, con la finalidad de representar el paso a través de la transición, se añaden los puntos para cuatro valores diferentes de  $p$  (dos antes y dos después).

figura. Esto indica que en las cercanías del punto crítico existe un buen ajuste, pero falla fuertemente fuera del intervalo  $[-1, 1]$ . Se puede argumentar que la extensión de este intervalo es suficiente para representar las “cercanías del punto crítico” en donde funciona bien el escalamiento, pero la vecindad parece ser muy pequeña como para asegurarlo. Esta cantidad en particular necesita un buen *data collapse* después de la transición, ya que es donde comienza a tener valores distintos de cero en una red infinita. Por lo tanto, se concluye que la función de escalamiento no se manifiesta adecuadamente y cuestiona la manera de aproximarse al modelo para obtener los parámetros críticos a través del Método 1.

Parámetro crítico	$p_{c,s_1}^{(1)}$	$F_{s_1}(0)$	$\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}$	$\beta^{(1)}$	$\Theta_{s_1}^{(1)}$
Valor	0.8884484	0.786(6)	0.0653(5)	0.1225	0.533

Cuadro 3.3: Resultados obtenidos a través del Método 1 correspondientes al parámetro de orden  $s_1$ . Las primeras tres columnas contienen los parámetros críticos obtenidos por el mejor ajuste lineal de  $\log(s_1)$  y  $\log(N)$ , mientras que en las últimas dos se presentan los valores producidos al desacoplar los exponentes  $\beta^{(1)}$  y  $\Theta_{s_1}^{(1)}$  mediante el mejor empalme de las curvas  $F_{s_1}$ .

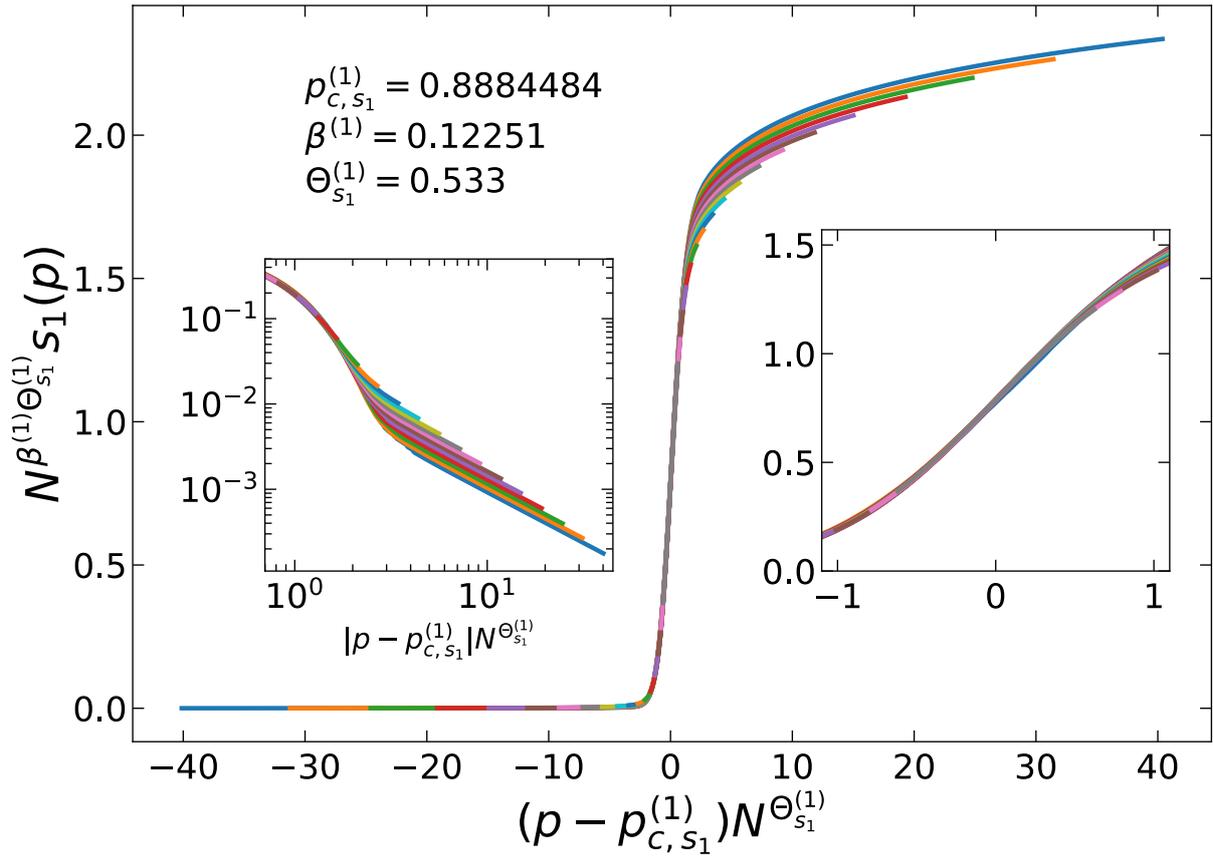


Figura 3.6: Mejor *data collapse* de las curvas  $s_1(p)$  hacia la función de escalamiento  $F_{s_1}$  para todos los tamaños de red  $N$ . Los resultados se basan en los valores de  $p_{c,s_1}^{(1)}$ ,  $\beta^{(1)}$  y  $\Theta_{s_1}^{(1)}$  obtenidos mediante el Método 1 para esta cantidad. El valor de  $\beta^{(1)}$  que se muestra corresponde a la razón entre los exponentes  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}$  y  $\Theta_{s_1}^{(1)}$  que se obtuvieron directamente. En el recuadro de la izquierda se utiliza una escala log-log para mostrar el rango de validez del ajuste también para los valores negativos. En el recuadro de la derecha se agrega un acercamiento a la zona donde se lleva a cabo la transición. Las curvas  $s_1(p)$  se representan con distintos colores según el tamaño de red  $N$ .

## Aplicación del Método 2

Ya que el parámetro de orden es una función que crece monótonamente con  $p$  no tiene sentido utilizar su amplitud máxima para extraer un conjunto de puntos pseudocríticos como dicta el Método 2. De modo que se optó por utilizar una función con los cambios en  $s_1$ , tomando en cuenta que el brinco más grande en esta cantidad se da en el punto pseudocrítico y que estos se aproximan a  $p_c$  al aumentar el tamaño de la red. Sin embargo, al calcular el promedio sobre los cambios de  $s_1$  no se encontraron resultados favorables al buscar el escalamiento.

La explicación se dará más adelante en la sección y motivará la introducción de una cantidad alternativa: la distribución del parámetro de orden. Esto no sólo ofrece una visión más amplia del modelo, sino que permitirá adaptar esta técnica eficientemente al definir los puntos pseudocríticos de otra manera. Por lo pronto, se seguirá el orden de las ideas preestablecido y se examinarán los datos de la media de  $s_1$  antes y después de la transición de forma independiente.

### Aplicación del Método 3

Debido a la falta de un buen ajuste para todos los datos usando los métodos anteriores, en especial para la parte postcrítica, se optará por seguir el Método 3. Con este se divide el estudio de la media del parámetro de orden y se puede abordar específicamente el comportamiento después de la transición.

En vista de que el empalme de los datos  $s_1$  dado por el Método 1 fue aceptable en las cercanías del punto crítico (figura 3.6, recuadro derecho) se mantendrá ese valor de  $p_c$  para este método, así que  $p_{c,s_1}^{(3)} = 0.8884484$ . Después se emplean los valores de  $s_1(p)$  como en la figura 3.3, sólo que esta vez en escala log-log. Además, se utilizan sólo los valores que la cantidad presenta después del punto crítico.

En la figura 3.7 se muestran estos datos en función de la diferencia  $(p - p_{c,s_1}^{(3)})$  para los tamaños de red más grandes. Todas las curvas tienen una parte común al final de la gráfica donde muestran un comportamiento en ley de potencias. Los puntos se aproximan en etapas cada vez más tempranas a este comportamiento a la vez que aumenta  $N$ , lo cual refleja la tendencia de las curvas a ser cada vez más como una recta en esta escala. La recta punteada que se agrega en la figura sólo sirve de guía para indicar la ley de potencias que presenta la red con la  $N$  más grande.

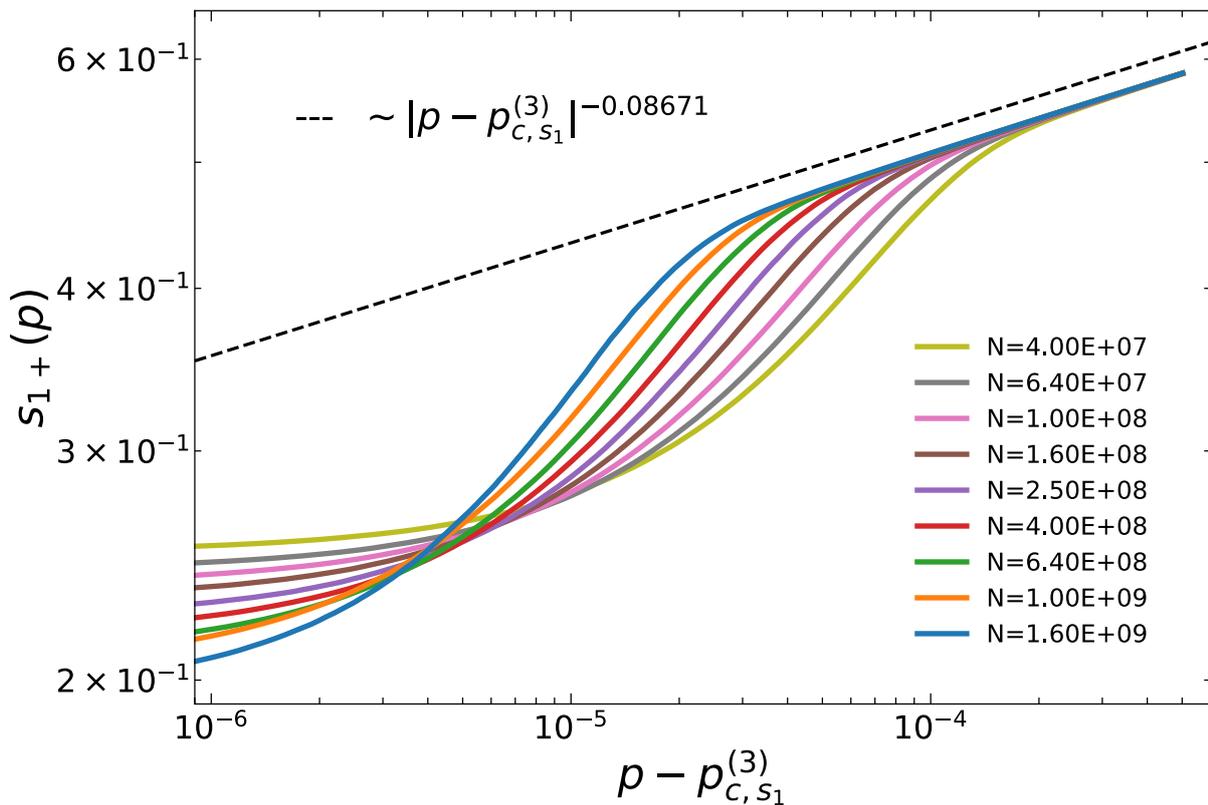


Figura 3.7: Parámetro de orden  $s_1$  alrededor del punto crítico como función de la diferencia  $(p - p_{c,s_1}^{(3)})$  para los tamaños de red  $N$  más grandes. Los datos corresponden al régimen postcrítico y se presentan en escala doble logarítmica. La línea punteada corresponde a una recta paralela al mejor ajuste lineal de los puntos  $s_1(p)$  para el tamaño  $N$  mayor.

Para obtener el exponente crítico  $\beta_+^{(3)}$ , primero se toma un intervalo de  $p$  en el que se haya asentado adecuadamente una ley de potencias para todos los tamaños de red que se

utilizan. La validez del segmento sobre el que se aplica el método se corrobora calculando el coeficiente de correlación de Pearson sobre una pequeña ventana móvil para  $p > p_{c,s_1}^{(3)}$ . El intervalo de  $p$  resultante es  $[0.88885, 0.88895]$  y se tomarán sólo los puntos asociados a los 9 tamaños de red  $N$  en  $[4E7, 1.6E9]$ . Dentro del intervalo hay 1,001 puntos de  $s_1(p)$  para cada  $N$ , los cuales se toman en escala log-log para calcular el mejor ajuste lineal por mínimos cuadrados y obtener la pendiente de la recta, es decir, es el exponente efectivo  $\beta_+(N)$ . De igual manera se extraen los coeficientes  $B_+(N)$ , los cuales se definen como en la siguiente expresión para las  $p$ 's en el intervalo  $[0.88885, 0.88895]$

$$s_1(p, N) \sim B_+(N) |p - p_{c,s_1}^{(3)}|^{\beta_+(N)} \quad (3.13)$$

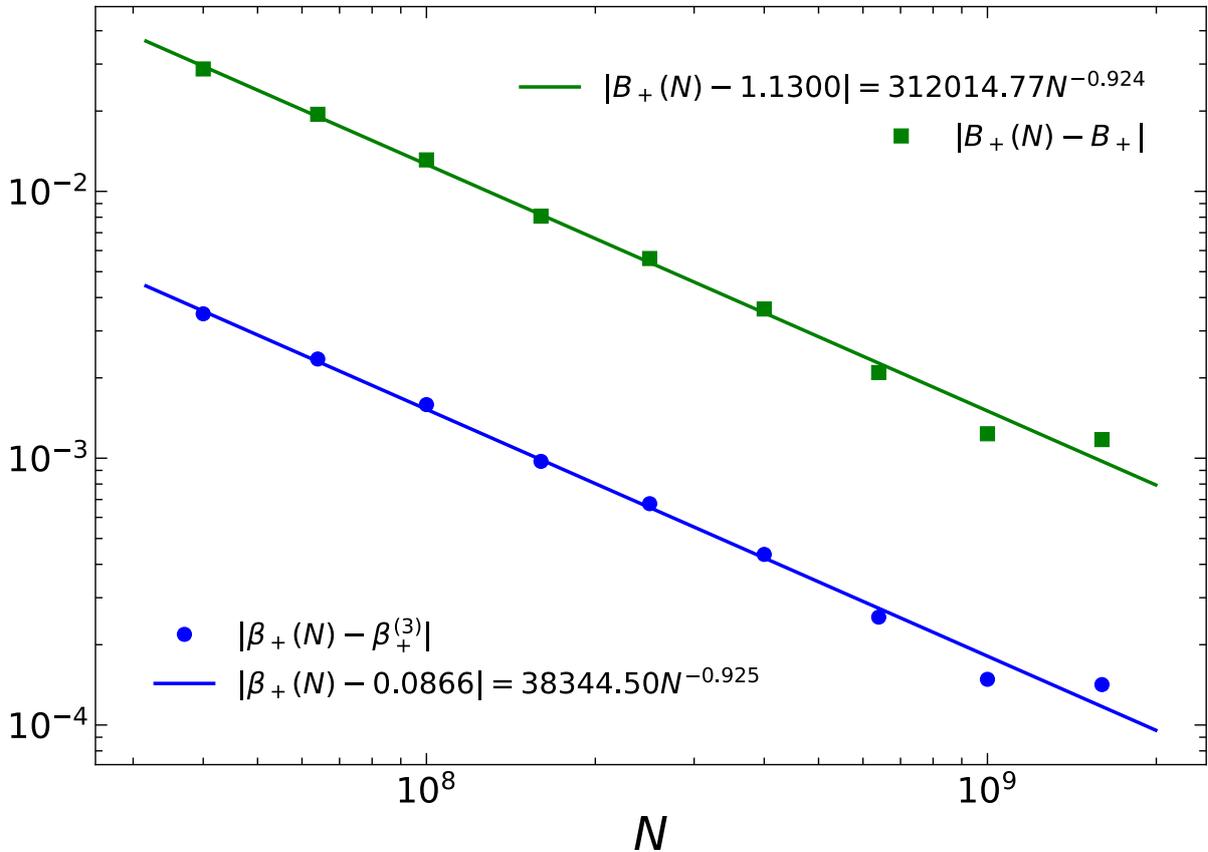


Figura 3.8: Diferencias entre los exponentes  $\beta_+(N)$  (círculos azules) y coeficientes  $B_+(N)$  (cuadrados verdes) efectivos con su valor límite para diferentes valores de  $N$  en escala log-log. Estos se obtuvieron a partir de la ec. 3.13 para el intervalo  $p \in [0.88885, 0.88895]$ . Las rectas en el mismo color son el mejor ajuste lineal por mínimos cuadrados para cada cantidad.

Ahora se tratará a los coeficientes  $B_+(N)$  y los exponentes  $\beta_+(N)$  de la misma forma que a un conjunto de puntos pseudocríticos en el Método 2. Se parte de que la diferencia entre los valores  $\beta_+(N)$  y el exponente límite  $\beta_+^{(3)}$  decrece como una ley de potencias en  $N$ . Lo mismo sucede para los coeficientes  $B_+(N)$ . Por lo que el siguiente paso es encontrar los valores límite  $B_+$  y  $\beta_+^{(3)}$  que describen un sistema infinito. En la figura 3.8 se agregan las diferencias que los exponentes y coeficientes efectivos tienen con los valores límite.

También se muestran las rectas que corresponden al mejor ajuste lineal para estos grupos de puntos. Como resultado se generan los valores  $B_+ = 1.1300$  y  $\beta_+^{(3)} = 0.08657$  para el coeficiente y exponente observados en el régimen postcrítico, respectivamente. Aunque los límites de cada grupo de datos es diferente, la velocidad con que se acercan a ellos es casi la misma. Esta similitud entre los exponentes de los ajustes es incidental, ya que sólo aparece con esta cantidad y en este régimen.

Similarmente a como se llevó a cabo para el Método 1, ahora se busca el exponente  $\Theta_{s_1+}^{(3)}$  por medio del mejor empalme de los datos para diferentes  $N$ 's. En este caso, con  $p_{c,s_1}^{(3)} = 0.8884484$  y  $\beta_+^{(3)} = 0.08657$ , se encuentra que el mejor *data collapse* para las curvas  $s_{1+}(p)$  sucede cuando  $\Theta_{s_1+}^{(3)} = 0.495$ . El resultado de aplicar los parámetros críticos descritos se puede visualizar en el recuadro superior de la figura 3.9. Para este ajuste se utilizaron las curvas asociadas a los 22 valores de  $N$  simulados.

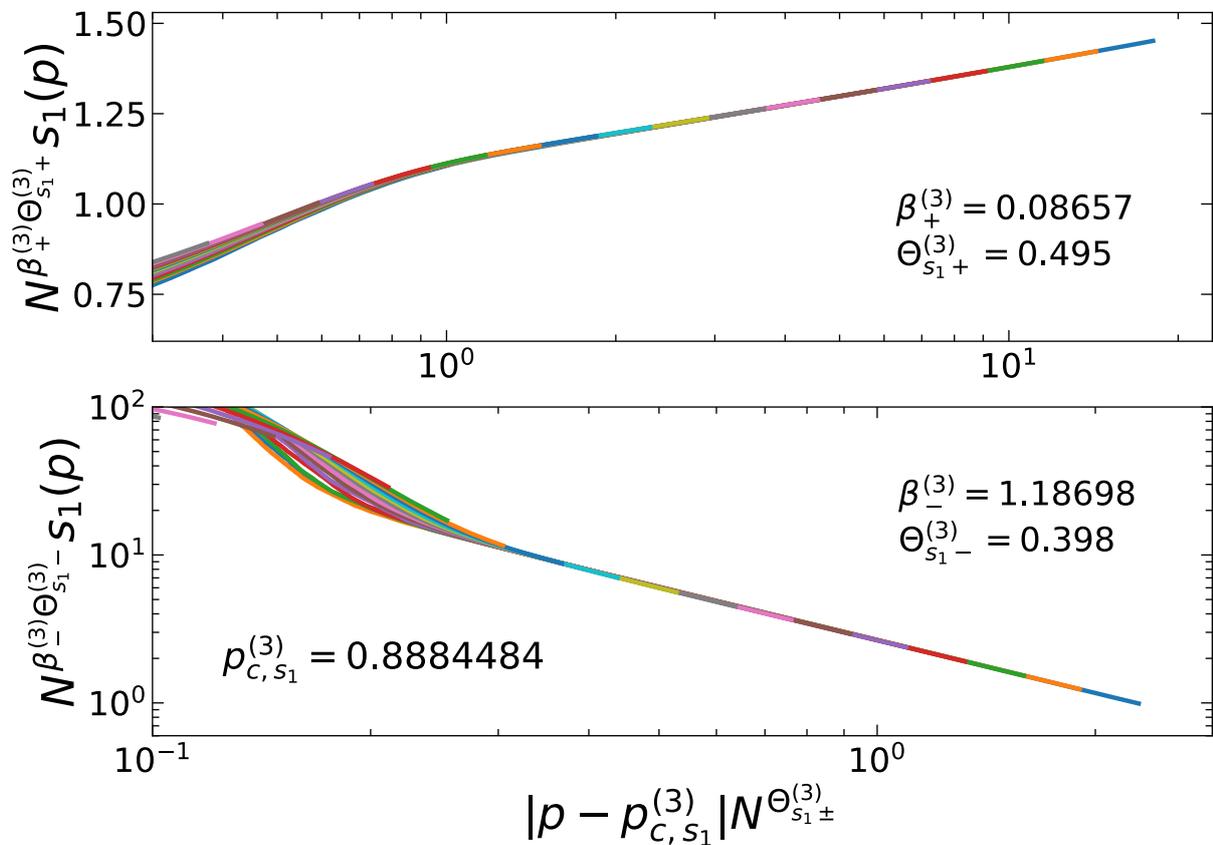


Figura 3.9: Mejor *data collapse* de las curvas  $s_1(p)$  para todos los tamaños de red  $N$ . La gráfica de arriba corresponde al caso postcrítico en escala semilogarítmica y la de abajo al caso precrítico en escala log-log. Para ambos casos se utilizó el umbral de percolación  $p_{c,s_1}^{(3)}$ . Los exponentes  $\beta_+^{(3)}$ ,  $\Theta_{s_1+}^{(3)}$ ,  $\beta_-^{(3)}$  y  $\Theta_{s_1-}^{(3)}$  fueron obtenidos mediante el Método 3 para cada régimen. Las curvas  $s_1(p)$  se representan con distintos colores según el tamaño  $N$ .

Finalmente, para complementar el estudio se sigue un procedimiento análogo para el régimen precrítico. En este caso se utilizan las curvas correspondientes a los mismos 9 valores de  $N$  descritos y se emplean 1,001 puntos de  $s_1(p)$  para cada una, la diferencia es que el intervalo de  $p$  donde se asientan adecuadamente las leyes de potencia es  $[0.88795, 0.88805]$ . Se aplica el equivalente de la ec. 3.13 en este intervalo para obtener los exponentes  $\beta_-(N)$

y coeficientes  $B_-(N)$  efectivos. En este caso, al tomar la diferencia de estos con su valor límite se obtiene un comportamiento que no decae monótonamente con  $N$  y no sigue una ley de potencias de manera adecuada (coeficiente de correlación  $r_{s_{1-}} \approx 0.58$ ). Esta inconsistencia parece ser una característica replicada por los componentes de rango mayor y se abordará con detalle en la siguiente sección (fig. 3.19, datos en rojo específicamente). Aun así, se utilizan los valores de  $\beta_-^{(3)} = 1.187$  y  $B_- = 5.34 \times 10^{-9}$  como una aproximación dada por el tamaño de red más grande  $N = 1.6 \times 10^9$ . Con estos, el mejor empalme de las curvas  $s_{1-}(p)$  para los distintos valores de  $N$  se da cuando  $\Theta_{s_{1-}}^{(3)} = 0.398$ . El empalme de curvas para este caso se agrega en el recuadro inferior de la figura 3.9.

En las gráficas descritas se muestra el efecto de los parámetros críticos obtenidos para intervalos de  $p$  antes y después de la transición. En ambos casos se utilizó el valor de  $p_{c,s_1}^{(3)} = 0.8884484$ . Se aprecia que los exponentes  $\beta_+^{(3)}$  y  $\beta_-^{(3)}$  no son iguales, sino que presentan una diferencia de al menos un orden de magnitud. Además, ambos difieren del exponente  $\beta^{(1)}$  obtenido anteriormente. De igual manera, el resultado para los exponentes  $\Theta_{s_{1\pm}}^{(3)}$  muestra valores distintos.

Existe una diferencia evidente entre los exponentes críticos obtenidos para el parámetro de orden antes, durante y después de la transición. El comportamiento del primer caso dista mayormente de los otros dos y se tiene que  $\beta_-^{(3)} > \beta^{(1)} > \beta_+^{(3)}$  y  $\Theta_{s_1}^{(1)} > \Theta_{s_{1+}}^{(3)} > \Theta_{s_{1-}}^{(3)}$ . Esto supone un inconveniente del modelo de percolación explosiva con las técnicas que se han abordado. Por un lado, porque dos métodos que deberían producir resultados equivalentes, no lo hacen. Y, por otro lado, porque parece que no se puede lograr un buen ajuste de manera global, lo cual pone en duda que se cumpla el escalamiento para este modelo.

Parámetro crítico	$B_-$	$\beta_-^{(3)}$	$\Theta_{s_{1-}}^{(3)}$	$B_+$	$\beta_+^{(3)}$	$\Theta_{s_{1+}}^{(3)}$
Valor	$5.343(7) \times 10^{-9}$ *	$1.1870(2)$ *	0.398	$1.1300(2)$	$0.08657(2)$	0.495

Cuadro 3.4: Resultados obtenidos a través del Método 3 correspondientes al parámetro de orden  $s_1$ . Las primeras tres columnas contienen los parámetros críticos calculados para el régimen precrítico y en las últimas tres los asociados a la parte postcrítica. (\*) Estos valores numéricos se refieren al coeficiente y exponente efectivos calculados con  $N = 1.6 \times 10^9$ . Así que el error mostrado corresponde al ajuste sobre los 1001 puntos de  $s_{1-}(p)$  vs  $|p - p_{c,s_1}^{(3)}|$  para este valor de  $N$ , no al ajuste sobre los 9 puntos de  $\beta_-(N)$  vs  $N$  como en el caso postcrítico.

## Distribución bimodal del parámetro de orden

El título de esta subsección sugerentemente alude a la razón principal de utilizar varios métodos diferentes. El modelo de percolación explosiva presenta varias propiedades inusuales, entre ellas, que la distribución del parámetro de orden en el punto crítico es bimodal [TS10; RF10; Gra+11]. Esto produce ciertas discrepancias respecto a lo que se espera de un sistema que atraviesa por una transición de fase continua, como se verá en

detalle más adelante. Así, además del valor medio de  $s_1$  que es lo que se ha utilizado hasta ahora, también se puede recurrir a su distribución.

Para una  $p$  y  $N$  dadas, la distribución del parámetro de orden  $P_{p,N}(s_1)$  muestra distintas propiedades lejos de la transición y en las cercanías de esta. Para  $p$ 's lejanas se tiene una distribución unimodal cuya media es cercana al máximo que presenta. Se habla de unimodalidad en relación a la moda estadística que muestra  $P_{p,N}(s_1)$ . Los valores de  $s_1$  correspondientes a estos máximos se encuentran muy próximos a cero para  $p < p_c$  y van como  $N$  para  $p > p_c$ . En cambio,  $P_{p \approx p_c, N}(s_1)$  presenta una forma con dos picos bien definidos. Esta es una de las propiedades que explica la manera repentina en la que cambia el parámetro de orden. Por lo tanto, a diferencia del caso clásico, la percolación explosiva exhibe una distribución bimodal de  $s_1$  cerca de  $p_c$  para sistemas finitos.

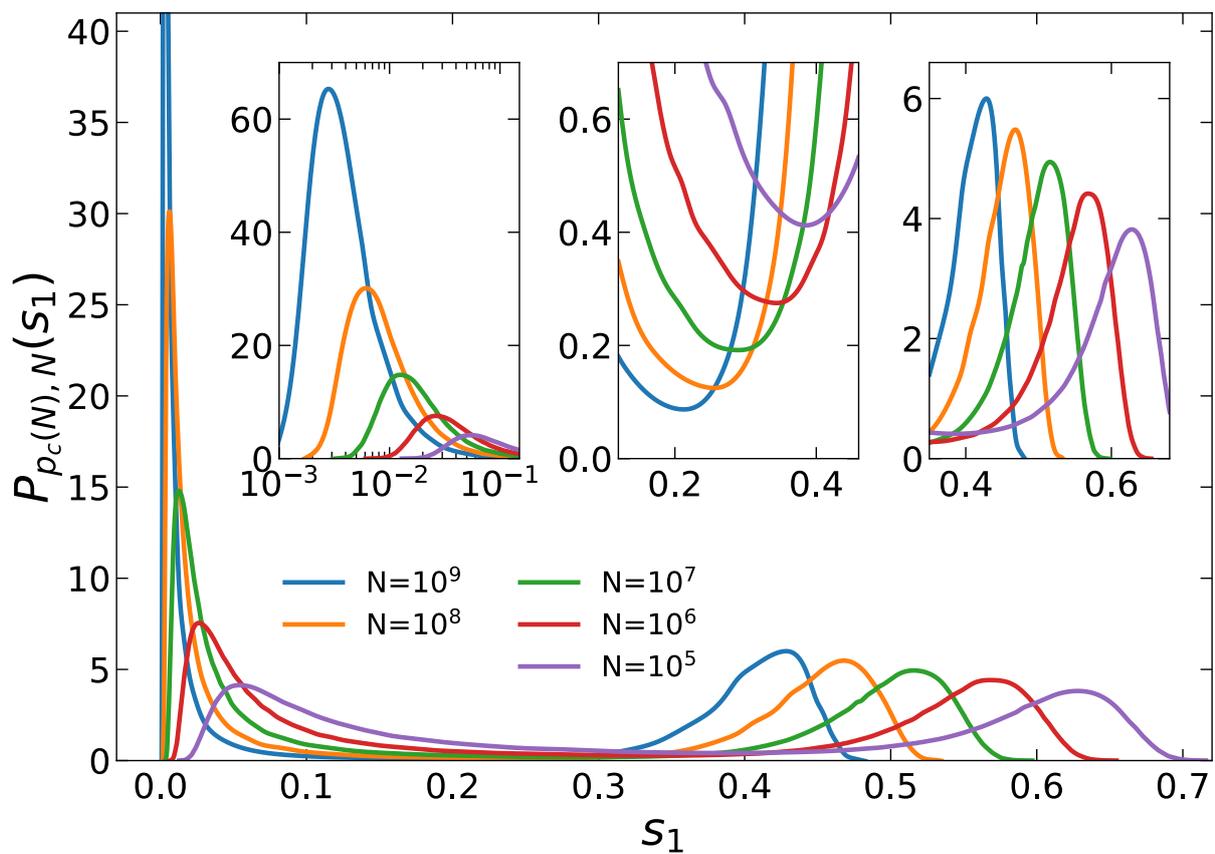


Figura 3.10: Distribución bimodal del parámetro de orden  $P(s_1)$  en  $p = p_c(N)$  para distintos valores de  $N$ . Los recuadros destacan las partes más importantes de las distribuciones. En el de la izquierda se utiliza una escala semilogarítmica para representar los picos más cercanos a cero. Estos son los que dominan en el régimen precrítico. En el recuadro central se agrega un acercamiento a la parte donde aparecen los mínimos entre los picos. Por último, el recuadro derecho hace énfasis sobre el comportamiento que siguen los picos en el lado derecho de las distribuciones.

En la gráfica principal de la figura 3.10 se agrega la distribución del parámetro de orden en las cercanías del punto crítico para cinco tamaños de red diferentes. Las distribuciones se obtienen a partir de un número de realizaciones igual o mayor a 50,000 ( $N_r = 5 \times 10^4$  para  $N = 10^9$ ,  $N_r = 10^6$  para  $N \leq 10^7$ ). Las curvas para los tamaños más grandes se

suavizan mediante *splines* cúbicos.

Cada distribución mostrada en la figura cumple con tener la misma área debajo de cada pico y la división entre ellos está dada por el mínimo central. Se observa que ambos máximos se aproximan hacia la izquierda a la vez que aumenta su altura para  $N \rightarrow \infty$ . Aunque ambos picos presentan un crecimiento, se nota que los de la izquierda lo hacen con mayor velocidad. Los mínimos, por otra parte, decrecen con el aumento de  $N$ . Esta última característica sugiere que la transición de fase para este modelo es discontinua. Sin embargo, si se demuestra que la diferencia entre los picos desaparece para un sistema infinito esto confirmaría que en realidad es de segundo orden. Por lo que la bimodalidad de la distribución prueba el carácter abrupto de la transición, pero no es suficiente para asegurar discontinuidad en ella.

Anteriormente se enfatizó que el Método 2 no se puede aplicar directamente sobre la media del tamaño  $s_1$ . Sin embargo, a partir de la distribución de sus valores se encuentra una alternativa para utilizar esta técnica. Los puntos pseudocríticos se establecen al igualar la probabilidad de ocurrencia en los valores de cada pico, mientras que el comportamiento de sus máximos se relaciona con el exponente  $\beta$  asociado a cada régimen.

Como se ha procedido hasta ahora, el umbral de percolación  $p_{c,s_1}^{(2)}$  es el primer parámetro crítico que se calcula. Esto se logra definiendo los puntos pseudocríticos  $p_c(N)$  como los valores que toma el parámetro de control  $p$  cuando los picos de la distribución  $P_{p,N}(s_1)$  tienen la misma área, para un  $N$  dado. Después, basta con aplicarle el método mencionado a este grupo de puntos. Dicho método establece que la diferencia entre estos datos y el punto crítico  $p_{c,s_1}^{(2)}$  sigue una ley de potencias en  $N$ , como se especifica en la expresión 3.6. En el recuadro superior de la figura 3.11 se agregan los datos para la diferencia  $|p_c(N) - p_{c,s_1}^{(2)}|$  en función del tamaño de red. La recta muestra el mejor ajuste por mínimos cuadrados para estos puntos. De aquí se extraen los valores de los parámetros críticos  $p_{c,s_1}^{(2)} = 0.8884492$  y  $\delta_{s_1} = 0.6162$ . El primero es el punto al que se aproximan los datos y el segundo es el exponente con que decaen a dicho valor límite.

Ahora se analizarán las partes más representativas de las distribuciones de  $s_1$  en los puntos  $p_c(N)$ . En la figura 3.10 se incluyeron algunos ejemplos, pero esta vez se emplearán todos los tamaños de  $N$  utilizados en la simulaciones numéricas. Primero se abordan las posiciones de los máximos sobre el eje horizontal, así como del mínimo que hay entre ellos. Se define a  $s_{1-}(N)$  y  $s_{1+}(N)$  como la posición del máximo en el pico izquierdo y derecho para una  $N$  dada, respectivamente. De igual forma,  $s_{1o}(N)$  es la posición del mínimo central para un tamaño  $N$ . Se observa que estas tres cantidades experimentan un desplazamiento hacia la izquierda, es decir, decrecen a la vez que  $N$  aumenta, y este decaimiento obedece una ley de potencias. Por lo tanto, se sigue una relación como la siguiente

$$s_{1\pm,o}(N) \sim N^{-\beta_{\pm,o}^{(2)} \Theta_{s_{1\pm,o}}^{(2)}} \quad (3.14)$$

para cada una de las posiciones. Aquí se emplea el superíndice (2) para denotar que, al igual que en los puntos  $p_c(N)$ , los máximos de los picos y el mínimo entre ellos también se describen mediante el Método 2, como en la ec. 3.7.

En el recuadro central de la figura 3.11 se añaden los puntos para cada cantidad en

escala doble logarítmica:  $s_{1-}(N)$  en cuadrados verdes,  $s_{1+}(N)$  en círculos azules y  $s_{1\circ}(N)$  en triángulos rojos. Aunque las tres cantidades decrecen, se aprecia que  $s_{1-}(N)$  lo hace de manera más rápida. Esto se puede constatar ajustando la mejor recta para estos grupos de puntos. El resultado muestra que  $\beta_-^{(2)}\Theta_{s_{1-}}^{(2)} = 0.3173$ ,  $\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)} = 0.0426$  y  $\beta_\circ^{(2)}\Theta_{s_{1\circ}}^{(2)} = 0.0564$  para los exponentes críticos que describen el comportamiento de estas posiciones al aproximarse a cero.

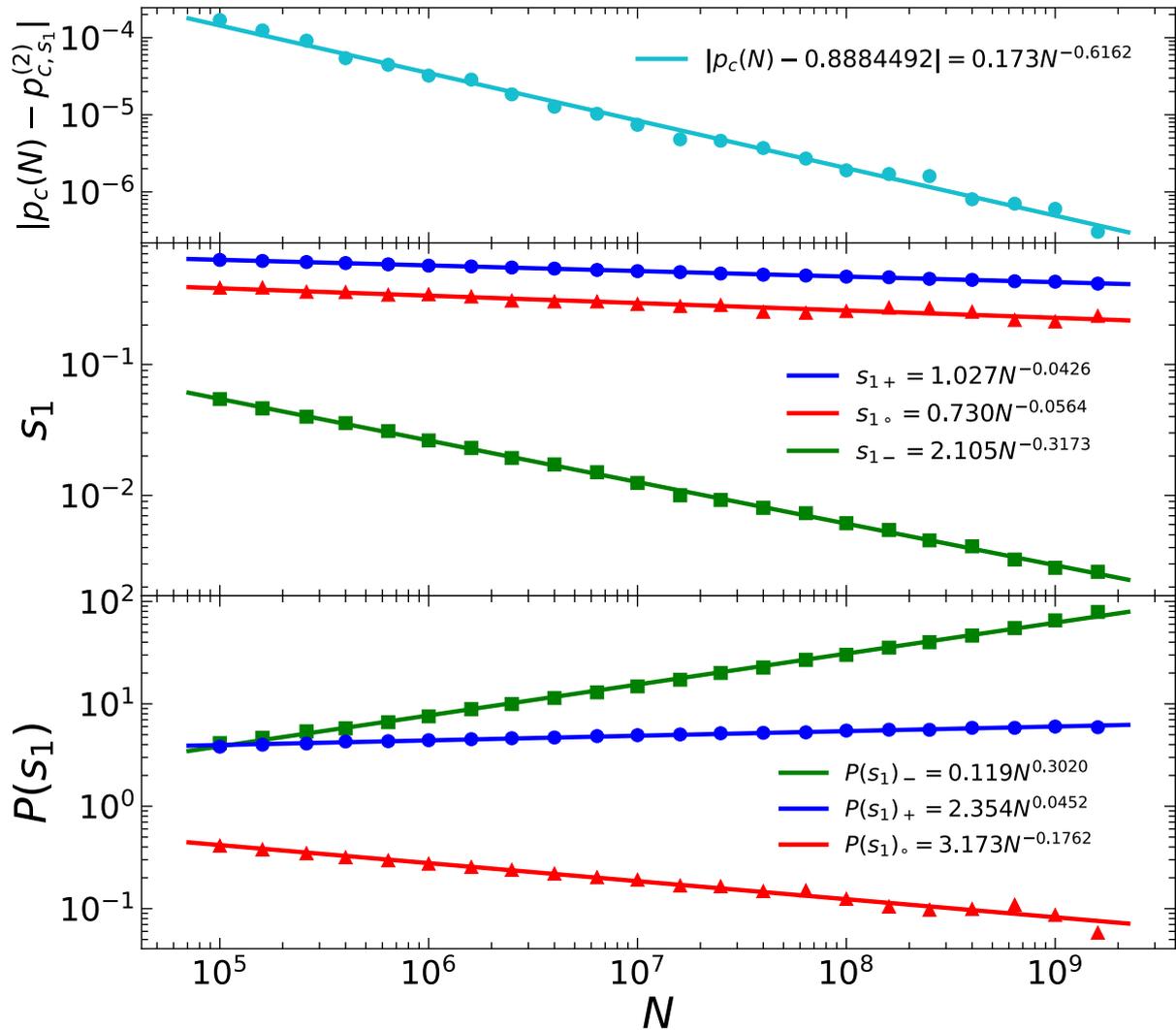


Figura 3.11: Escalamiento de tamaño finito sobre las distintas cantidades definidas a partir del carácter bimodal de la distribución  $P_{p_c(N),N}(s_1)$ . En el recuadro superior se muestra la diferencia entre los puntos pseudocríticos  $p_c(N)$  y el umbral  $p_{c,s_1}^{(2)}$ . En la parte central se agrega la posición  $s_1$  de los máximos en el pico izquierdo (subíndice -, cuadrados) y el pico derecho (subíndice +, círculos), así como del mínimo entre ellos (subíndice  $\circ$ , triángulos). En el recuadro inferior se muestra la altura  $P_{p_c(N),N}(s_1)$  relacionada con los máximos de los picos y el valor mínimo. Se omiten los subíndices de  $P_{p_c(N),N}$  en la figura para facilitar la presentación. Se utiliza la misma notación que en la gráfica central para distinguir cada cantidad. Las rectas corresponden al mejor ajuste para cada conjunto de puntos. De esta manera se obtienen los exponentes críticos asociados a estas cantidades, en especial  $\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)} = 0.0426$ .

Los resultados que se obtienen al aplicar el método anterior indican que, como  $\beta_-^{(2)}\Theta_{s_{1-}}^{(2)} > \beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)} > 0$ , la distancia entre los picos crece para valores pequeños del tamaño de red, pero al final decrece aproximadamente como  $N^{-\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)}}$ . Sin embargo, los valores de  $N$  estudiados aquí ( $N \geq 10^5$ ) no son lo suficientemente pequeños como para observar el crecimiento del que se habla. Tomando la diferencia ( $s_{1+} - s_{1-}$ ), donde  $s_{1+}(N) = 1.027N^{-0.04259}$  y  $s_{1-}(N) = 2.105N^{-0.31731}$ , se encuentra que la distancia máxima entre los picos es  $\max\{s_{1+}(N) - s_{1-}(N)\} \approx 0.5827$  y ésta se obtiene cuando  $N \approx 20,386$ . Así, con las funciones de ajuste se comprueba que el máximo en la distancia entre los picos se da para una  $N$  menor a la de los datos observados. Por otro lado, al ajustar una ley de potencias a dichos datos para las  $N$ 's más grandes, se obtiene que el exponente con el que decaen es muy cercano a  $\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)}$ . Se demuestra entonces que la distancia entre los picos desaparece cuando  $N \rightarrow \infty$ , una característica que señala continuidad durante la transición de fase.

El próximo paso consiste en emplear los mismos puntos de las distribuciones, pero ahora tomando sus posiciones respecto al eje vertical. La altura de estos puntos se denota como  $P(s_1)$  para abreviar el término  $P_{p_c(N),N}(s_1)$  y facilitar la presentación. Se asocian los mismos subíndices a cada cantidad:  $P(s_1)_-$  para la altura del máximo en el pico izquierdo,  $P(s_1)_+$  para el máximo del pico derecho y  $P(s_1)_o$  para el mínimo central. En el recuadro inferior de la figura 3.11 se visualiza el comportamiento de estas cantidades asociado a una ley de potencias como en 3.14. También se mantiene la forma y el color de los puntos que se estableció en la gráfica anterior.

Los resultados que se muestran en el recuadro central e inferior de la figura 3.11 están relacionados. La altura de cada pico crece aproximadamente al mismo ritmo con el que su posición en el eje horizontal tiende a cero. Esto se encuentra al ajustar la mejor recta a cada grupo de puntos  $P(s_1)_\pm$  y comparar su pendiente con el exponente  $\beta_\pm^{(2)}\Theta_{s_{1\pm}}^{(2)}$  respectivo. Sus valores indican que  $(\beta_-^{(2)}\Theta_{s_{1-}}^{(2)})_{P(s_1)} \approx 0.3020$  y  $(\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)})_{P(s_1)} \approx 0.0452$ . Se agrega el subíndice “ $P(s_1)$ ” para distinguir que los valores se obtuvieron a partir de las posiciones en el eje vertical, no del horizontal como los  $(\beta_\pm^{(2)}\Theta_{s_{1\pm}}^{(2)})_{s_1} = \beta_\pm^{(2)}\Theta_{s_{1\pm}}^{(2)}$ . Así, los exponentes  $(\beta_\pm^{(2)}\Theta_{s_{1\pm}}^{(2)})_{s_1}$  y  $(\beta_\pm^{(2)}\Theta_{s_{1\pm}}^{(2)})_{P(s_1)}$  presentan una discrepancia del  $\sim 5\%$  para el pico izquierdo (subíndice -) y del  $\sim 6\%$  para el pico derecho (subíndice +). Esto plantea la existencia de una expresión para el escalamiento que utiliza el mismo exponente para las posiciones en ambos ejes. Sin embargo, ya que  $\beta_+\Theta_{s_{1+}} \neq \beta_-\Theta_{s_{1-}}$  el escalamiento aplica bien para cada pico por separado.

Por el contrario, la altura de los mínimos  $P(s_1)_o$  decrece con  $N$  y lo hace más rápido que  $s_{1o}$  (aprox. 3 veces más rápido). Esto sugiere que no existe una expresión de escalamiento para describir el mínimo central, al menos no con un sólo exponente. Esto se debe a que el comportamiento de los picos domina claramente sobre el que muestra el mínimo, lo cual se comprobará más adelante cuando se aplique el escalamiento.

En los artículos [TS10; RF10; Gra+11] se abordó originalmente el estudio de la distribución del parámetro de orden para determinar la naturaleza de la transición. En [Gra+11] se definen los puntos pseudocríticos con base en que los picos de la distribución tengan la misma altura, no la misma área. Esto implica que, en comparación con este trabajo, los resultados sean un poco diferentes. Como se puede ver en el recuadro inferior de la figura 3.11 éstos sólo coinciden en  $N \approx 10^5$ , donde los picos tienen la misma área y altura.

Hasta el momento se ha definido el criterio para conseguir puntos pseudocríticos y

en base a esto se obtuvieron los parámetros que describen el comportamiento de las distribuciones  $P_{p_c(N),N}(s_1)$  al tomar  $N \rightarrow \infty$ . Ahora, se emplearán estos resultados para determinar cómo escalan a una función límite (y si es que lo hacen).

Este método se emplea solamente para la cantidad  $s_1$  y se basa en la idea de que, en el límite termodinámico, la distribución  $P_{p=p_c,N}(s_1)$  de estos valores tiende a una función de escalamiento que sigue la expresión

$$P_{p=p_c,N}(s_1) \sim N^{\beta\Theta} F_P(s_1 N^{\beta\Theta}) \quad (3.15)$$

donde  $\beta$  es el exponente crítico relacionado con la distribución de  $s_1$  y  $F_P$  la función de escalamiento que describe. El exponente  $\Theta$  se define como en los métodos anteriores. Esta ecuación se relaciona directamente con el escalamiento de tamaño finito para el valor medio del parámetro de orden en la expresión 3.4. De tal manera que se espera una correspondencia entre sus exponentes críticos, así como entre sus funciones de escalamiento  $F_P$  y  $F_{s_1}$ .

A continuación, se utilizará el valor de los exponentes  $\beta_{\pm}^{(2)}\Theta_{s_1\pm}^{(2)}$  y la expresión 3.15 sobre los picos izquierdo y derecho. De aquí se pretende observar la forma a la que tienden asintóticamente las curvas  $P(s_1)$  de las distintas  $N$ 's. Los resultados aparecen en la figura 3.12. El ajuste es un poco mejor para el pico derecho representado en la gráfica principal, aun así, ambos muestran una forma bien definida donde las curvas para las distintas  $N$ 's se empalman.

Como se aprecia en las gráficas, no sólo se trata de la posición de los picos, sino que toda su forma es independiente del tamaño de la red. Sin embargo, esta afinidad sólo se presenta para cada uno por separado. Si se toma a la distribución de manera global, resulta que la función de escalamiento  $F_P$  tiene una forma mixta. Esto se debe a los dos comportamientos distintos que muestra el sistema y que dominan en el modelo para cada régimen.

Hace unos párrafos, se encontró que el exponente con el que la distancia entre los picos decae a cero es aproximadamente  $\beta_+^{(2)}\Theta_{s_1+}^{(2)} = 0.04259$  para  $N$ 's grandes. Al utilizar este valor en la expresión 3.15 y aplicarla sobre todas las distribuciones, se genera una función límite con un pico derecho como el que se visualiza en la figura 3.12 y una delta de Dirac  $\delta(x)$  centrada en  $x = 0$  como pico izquierdo, donde  $x = N^{\beta_+^{(2)}\Theta_{s_1+}^{(2)}} s_1$ . De esta manera, para valores de  $p > p_{c,s_1}^{(2)}$  sólo el pico derecho contribuye a la media del parámetro de orden. En cualquier otro caso domina la delta en la parte izquierda y la media de  $s_1$  se vuelve cero. Esto implica que la función  $F_{s_1}$  del parámetro de orden tiene una singularidad en algún valor entre estos dos comportamientos.

Para desacoplar los exponentes  $\beta_{\pm}^{(2)}\Theta_{s_1\pm}^{(2)}$  se emplea el mejor *data collapse* sobre las curvas  $F_{s_1}$  como se llevó a cabo con los otros métodos. El resultado arroja valores de  $\Theta_{s_1}$  cercanos a 0.5 para ambos regímenes. Esto significa que la diferencia de al menos un orden de magnitud entre los exponentes  $\beta_-^{(2)}$  y  $\beta_+^{(2)}$  se mantiene. También se encuentra que el valor de  $\delta_{s_1}$  y  $\Theta_{s_1}$  son diferentes, así que los puntos pseudocríticos no escalan con el mismo exponente utilizado para “colapsar” los datos. Todos los parámetros críticos obtenidos en esta subsección se agregan en la tabla 3.5.

Otra consecuencia de la singularidad en  $F_{s_1}$  tiene que ver con la relación entre los

parámetros críticos de este método y el Método 3. En el régimen postcrítico se presenta una buena correspondencia entre sus valores, ya que  $\beta_+^{(2)} \approx \beta_+^{(3)}$  y  $\Theta_{s_{1+}}^{(2)} \approx \Theta_{s_{1+}}^{(3)}$ . Sin embargo, en la parte precrítica existe una clara discrepancia entre los respectivos exponentes.

$p_{c,s_1}^{(2)}$	0.8884492(11)	$\beta_-^{(2)}\Theta_{s_{1-}}^{(2)}$	0.3173(24)	$\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)}$	0.0426(3)
$\delta_{s_1}$	0.616(11)	$\beta_-^{(2)}$	0.6078	$\beta_+^{(2)}$	0.0869
		$\Theta_{s_{1-}}^{(2)}$	0.522	$\Theta_{s_{1+}}^{(2)}$	0.490

Cuadro 3.5: Resultados obtenidos a través del Método 2 correspondientes a la distribución del parámetro de orden  $P(s_1)$ . Las primeras columnas contienen los parámetros asociados a la determinación del punto crítico, en las columnas centrales están los exponentes calculados para el régimen precrítico y en las últimas se tienen los de la parte postcrítica.

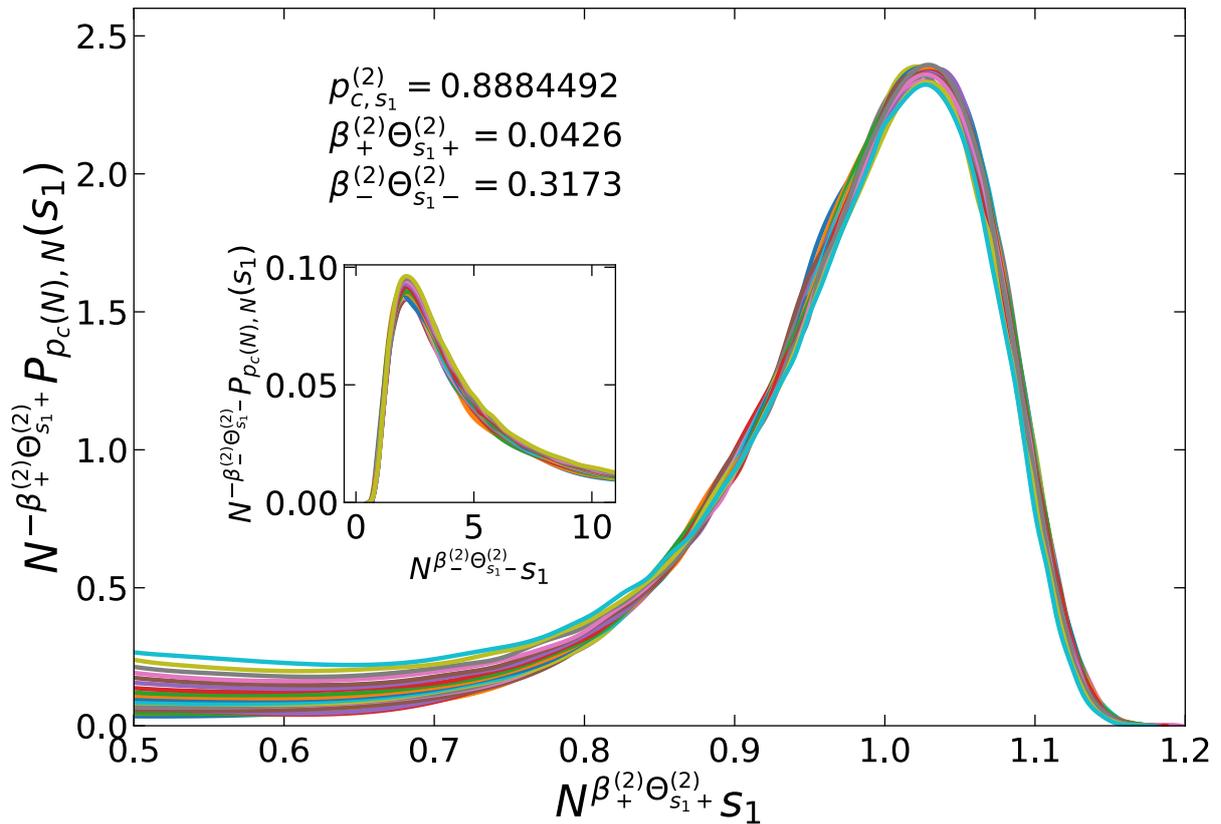


Figura 3.12: Mejor empalme de las curvas  $P_{p_c(N),N}(s_1)$  para cada picos de la distribución por separado. Los exponentes utilizados son  $\beta_-^{(2)}\Theta_{s_{1-}}^{(2)}$  y  $\beta_+^{(2)}\Theta_{s_{1+}}^{(2)}$ . El pico derecho aparece en la gráfica principal y el izquierdo en el recuadro pequeño. Esto muestra el caso asintótico en el que la forma de los picos es independiente del tamaño de la red. Se utilizan distintos colores para diferenciar las curvas asociadas a los valores de  $N$ .

Esto concluye con el manejo de los datos de  $s_1$  y la consecuente extracción de los parámetros críticos  $p_{c,s_1}$ ,  $\beta$  y  $\Theta_{s_1}$  generados por los distintos métodos. Estos valores caracterizan el comportamiento del parámetro de orden en las diferentes regiones de  $p$  donde se realizó el cálculo. La independencia de los resultados con respecto al método utilizado es lo que inicialmente se buscaba comprobar. Esto apunta a que  $p_c \approx 0.888449$ ,  $\beta \approx 0.08675$  y  $\Theta \approx 0.493$ , tomando en cuenta la singularidad en la función de escalamiento  $F_{s_1}$ . Un conjunto de valores aproximados a estos serán los que se emplearán más adelante en la sección 3.8 para corroborar el cumplimiento de las relaciones de escalamiento.

### 3.5. Tamaños de componente más grandes

Anteriormente se definió a  $s_R$  como el tamaño relativo del componente de rango  $R$ , es decir, del  $R$ -ésimo componente más grande dentro de la red. Después de  $s_1$ , los tamaños de componente más grandes que se analizarán en este trabajo abarcan a  $s_R$  con  $R = 2, 3, 4$ . Para esto, se seguirá el mismo procedimiento general que en la sección pasada. Sólo que en este caso, los puntos pseudocríticos para el Método 2 sí están determinados por el máximo que presentan las cantidades  $s_R$  alrededor de la transición y no debido al carácter bimodal en sus distribuciones críticas. Los resultados asociados a  $s_{R=2,3,4}$  se compararán entre sí y con el parámetro de orden para averiguar si existe alguna relación entre ellos.

El valor medio de estas cantidades crece monótonamente hasta alcanzar el máximo en las cercanías del punto crítico y después decrece de manera similar. La diferencia radica en una caída a cero un poco más marcada después de la transición, lo que genera una forma no simétrica para  $s_{R=2,3,4}$ . Las curvas que representan a estos tamaños se pueden visualizar en el recuadro superior de la figura 3.13 para un valor de  $N = 10^7$ . Debido a que estos componentes son los que contribuyen principalmente al aumento abrupto de  $s_1$  en  $p_c$ , el valor máximo de sus tamaños se da poco antes del punto crítico. Así, las curvas  $s_R(p)$  muestran un máximo que se desplaza hacia la izquierda a la vez que aumenta  $R$ , como se ve en la gráfica correspondiente, lo cual sugiere que el mecanismo de crecimiento directo es predominante para este modelo.

Por otro lado, se aborda la dependencia con respecto a  $N$  de los tamaños  $s_R(p)$  para  $R = 2, 3, 4$ . En el recuadro inferior de la figura 3.13 se agregan las curvas  $s_2(p)$  para diferentes tamaños de red. En el intervalo  $[0.88795, 0.88895]$  se observa como decrece el valor de  $s_2$  con el aumento de  $N$ , para toda  $p$ . En el caso de los máximos, particularmente, existe un decaimiento con  $N \rightarrow \infty$ , mientras las posiciones de éstos en el eje horizontal se aproximan a un valor cercano a  $p = 0.88845$ . Estas características provocan que  $s_2$  tenga valores muy cercanos a cero incluso en las proximidades del punto crítico para  $N = 10^9$ . Se muestra el comportamiento de  $s_2$  como representante de los  $s_{R>1}$  debido a que sus características son replicadas de manera significativa por componentes de rango mayor. Todo lo anterior apunta a que, si  $s_2(p)$  tiende a cero con el aumento de  $N$  y ya que  $s_R(p) \geq s_{R+1}(p)$ , para toda  $p$ , entonces los tamaños  $s_R(p) \rightarrow 0$  con  $N \rightarrow \infty$  para toda  $p$  y  $R > 1$ . Esta información es obtenida indagando solamente a partir de la figura 3.13, los resultados cuantitativos se analizarán en detalle más adelante.

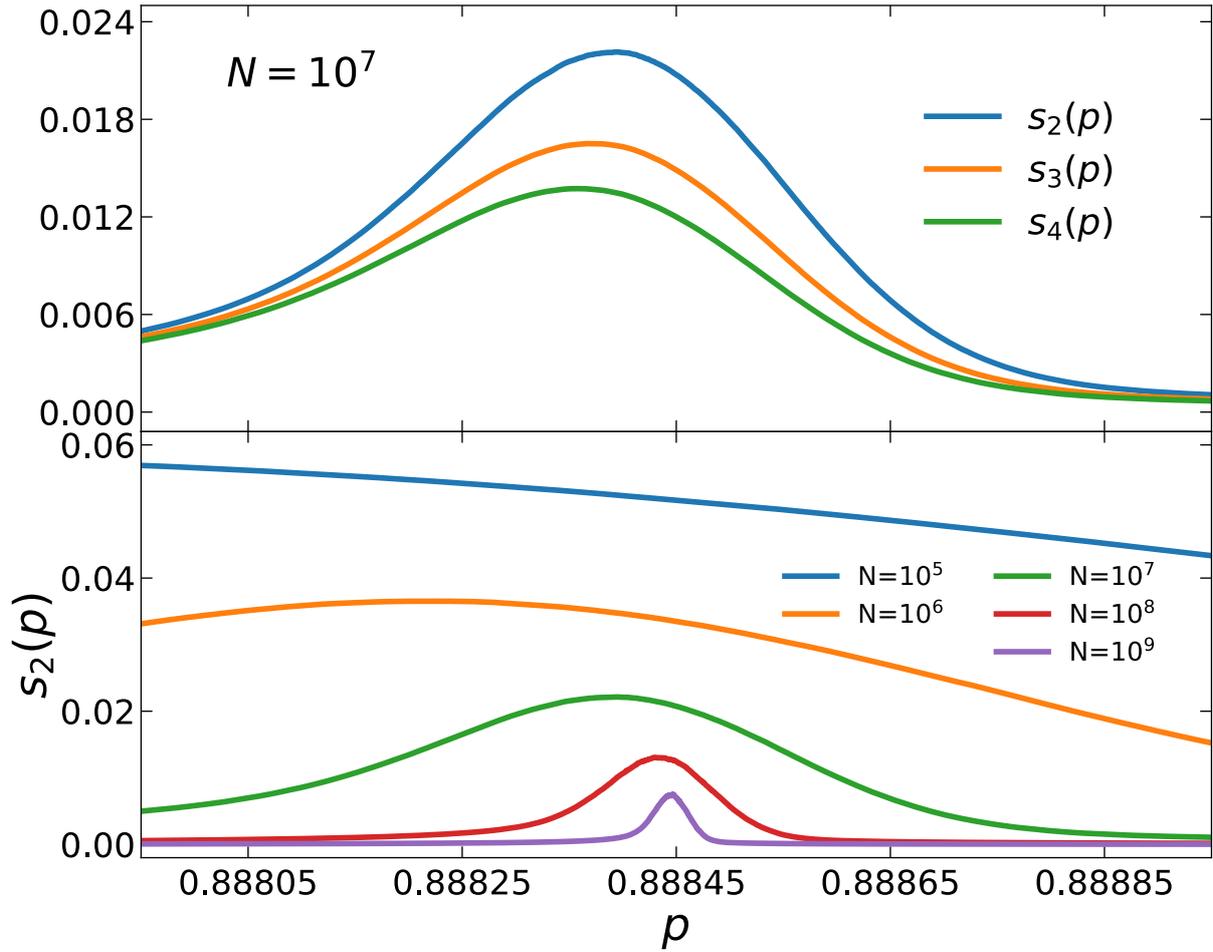


Figura 3.13: Recuadro superior: Tamaño relativo de los componentes  $s_R(p)$  de rango  $R = 2, 3, 4$  para una red de tamaño  $N = 10^7$ . Se observa que el máximo de las curvas se desplaza hacia la izquierda a la vez que aumenta el valor de  $R$ . Recuadro inferior: Tamaño relativo del segundo componente más grande  $s_2(p)$  alrededor del punto crítico para diferentes valores de  $N$ . El máximo de las curvas sufre un desplazamiento hacia la derecha con el aumento de  $N$ . Debido a la escala sobre el eje horizontal el máximo de  $N = 10^5$  no aparece en la gráfica, pero indudablemente atraviesa por una transición.

### Razón entre tamaños $s_2/s_1$

Con base en lo anterior, el comportamiento de  $s_1$  y los  $s_{2,3,4}$  alrededor del punto crítico no parecen mostrar muchas similitudes. Aún así, en el caso clásico se ha demostrado que la forma que presenta  $s_1$  con el escalamiento de tamaño finito se mantiene para componentes de rango mayor. De este modo, para el componente de rango  $R$  se tiene que

$$s_R(p, N) = N^{-\beta\Theta} F_{s_R}[(p - p_c)N^\Theta] \quad (3.16)$$

por lo que todos los tamaños  $s_R$  se comportan como  $N^{-\beta\Theta}$  cuando  $p = p_c$ . Se puede aprovechar esto para estimar el punto crítico a partir de la razón entre dos tamaños relativos. Si tomamos  $s_2/s_1$ , el resultado es

$$s_2/s_1(p, N) = F_{s_2}[(p - p_c)N^\Theta]/F_{s_1}[(p - p_c)N^\Theta] = F_{s_2/s_1}[(p - p_c)N^\Theta] \quad (3.17)$$

una función que sólo depende de la variable  $(p - p_c)N^\Theta$ . En el punto crítico esta función se convierte en una constante independiente de  $N$ , por lo que todas las curvas  $s_2/s_1(p)$  pasan por el mismo punto en  $p = p_c$ .

Este método de estimación del punto crítico se implementó en este trabajo para el modelo de percolación explosiva. Los resultados de la media de  $s_2/s_1$  se muestran en la figura 3.14 para cinco tamaños de red diferentes. Aunque  $s_1 \geq s_2$  para toda  $p$ , sus valores son muy similares antes de la transición y  $s_2/s_1$  toma valores cada vez más cercanos a  $s_2/s_1 = 1$  con el aumento de  $N$ . Por otro lado, cuando se ha establecido el componente macroscópico después de la transición, la razón entre los tamaños tiende a cero con  $N \rightarrow \infty$ . Entonces en algún punto entre estos dos regímenes se da la transición. Sin embargo, como puede verse con detalle en el recuadro pequeño de la figura, el comportamiento del caso clásico no es replicado por el de percolación explosiva. Es claro que las curvas no pasan por el mismo punto, sino que la intersección entre tamaños sucesivos se va desplazando, específicamente hacia la izquierda y hacia arriba con el aumento de  $N$ . Se determina entonces que, como las intersecciones dependen de  $N$ , la razón  $s_2/s_1$  no sólo es una función de  $(p - p_c)N^\Theta$  y los exponentes críticos asociados a  $s_1$  y  $s_2$  deben ser diferentes.

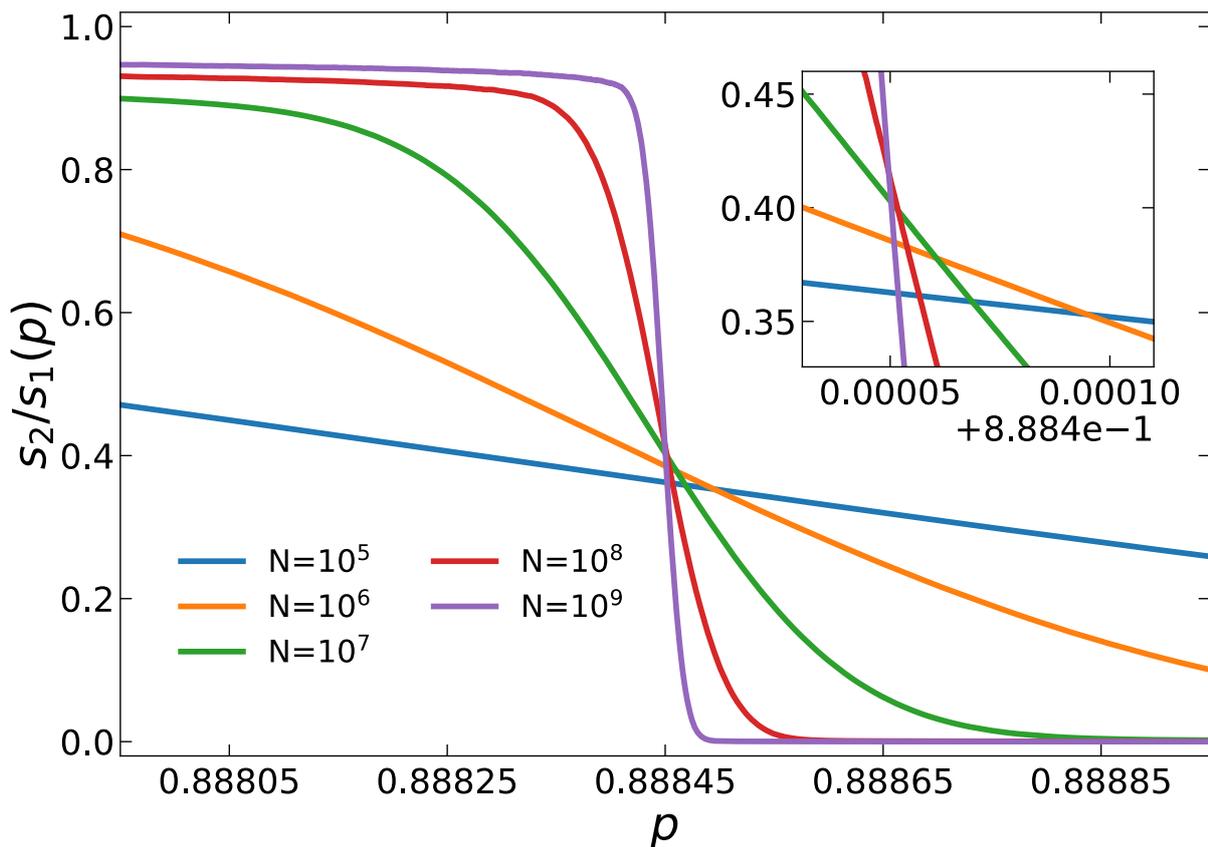


Figura 3.14: Razón entre los tamaños  $s_2$  y  $s_1$  como función de  $p$  para distintos valores de  $N$ . En el recuadro se observa un acercamiento a la región en la que deberían intersectarse todas las curvas. Los resultados indican que esto no sucede, por lo que no se cumple lo asumido en la expresión 3.17 y cada cantidad por separado posee un comportamiento diferente alrededor del punto crítico.

## Aplicación del Método 1

Ahora se aplicarán las técnicas de escalamiento sobre los tamaños  $s_{R=2,3,4}$  empezando por el Método 1. La expresión de la que se parte toma a estas cantidades en las cercanías del punto crítico para sistemas de tamaño finito  $N$

$$s_R(p, N) = N^{-\rho_R^{(1)} \Theta_{s_R}^{(1)}} F_{s_R}[(p - p_{c,s_R}^{(1)}) N^{\Theta_{s_R}^{(1)}}] \quad (3.18)$$

donde  $\rho_R^{(1)}$  y  $\Theta_{s_R}^{(1)}$  son exponentes críticos,  $p_{c,s_R}^{(1)}$  es el valor de  $p$  que minimiza la correlación lineal entre  $\log(s_R)$  y  $\log(N)$ , y  $F_{s_R}$  es la función de escalamiento correspondiente. Se utiliza la letra  $\rho$  para diferenciar del exponente  $\beta$  asociado a  $s_1$  ya que, como se vio anteriormente, sus comportamientos presentan una diferencia significativa.

En el pequeño recuadro de la figura 3.15 se muestran las curvas  $r_{s_2}(p)$  y  $\kappa_{s_2}(p) - 1$ . La primera, en azul, es el coeficiente de correlación de Pearson que existe entre los conjuntos de datos  $\log(s_2)$  y  $\log(N)$ , esto para distintos valores de  $p$  en el intervalo  $[0.88825, 0.88865]$ . La segunda, en rojo, es la curvatura (desplazada una unidad hacia abajo) de los mismos datos en el intervalo de  $p$  descrito. Se modifica ligeramente a esta cantidad para que ambas tengan su valor mínimo en las cercanías de  $-1$  y poder utilizar mejor el espacio disponible en la gráfica. Por lo tanto, el valor de  $p$  donde las curvas encuentran su mínimo corresponde al punto crítico asociado a la cantidad  $s_2$ . Este tiene un valor de  $p_{c,s_2}^{(1)} = 0.8884473$ . Alrededor del punto crítico, el comportamiento es similar para las dos curvas: al alejarse de  $p_{c,s_2}^{(1)}$  crecen hasta un valor máximo y luego decrecen rápidamente. La posición  $p$  de los mínimos coincide en cada curva, pero las de los máximos antes y después de la transición no.

En la gráfica principal de la figura 3.15 se muestran los puntos  $s_2(N)$  para distintos valores de  $p$ , incluido el que minimiza la correlación lineal. En el intervalo  $[0.88825, 0.88865]$  la correlación lineal entre  $\log(s_2)$  y  $\log(N)$  es negativa para toda  $p$  y, en consecuencia, lo es también la pendiente de las rectas que mejor ajustan a estos puntos. Los círculos verdes simbolizan la relación  $s_2(N)$  en el punto crítico  $p_{c,s_2}^{(1)} = 0.8884473$  y la recta que representa el mejor ajuste tiene como valor absoluto de la pendiente a  $\rho_2^{(1)} \Theta_{s_2}^{(1)} \approx 0.21845$  y como ordenada en el origen a  $F_{s_2}(0) = 0.697$ . Se agregan también los puntos para dos valores de  $p$  antes y después de la transición. A diferencia de lo que se obtuvo para  $s_1$ , los puntos se desvían de la recta verde hacia abajo en ambas partes debido al comportamiento descrito para las funciones  $r_{s_2}(p)$  y  $\kappa_{s_2}(p)$ .

Se realizó el mismo cálculo para los tamaños  $s_3$  y  $s_4$  obteniendo resultados muy parecidos. Para ambos, el mínimo en las curvas  $r_{s_{3,4}}(p)$  coincide con el de las curvaturas  $\kappa_{s_{3,4}}(p)$  correspondientes. La correlación lineal mínima para los puntos  $s_3(N)$  es  $-0.9993$  y para  $s_4(N)$  es  $-0.9989$ . Esto, aunado a los valores obtenidos para  $s_1$  y  $s_2$ , supone una pequeña disminución en el valor de  $|r_{s_R}(p_{c,s_R}^{(1)})|$  con el aumento de  $R$ . De la misma manera, la curvatura  $\kappa_{s_R}(p_{c,s_R}^{(1)})$  presenta un crecimiento progresivo a la vez que  $R$  aumenta. Los mínimos para  $s_3$  se encuentran en  $p_{c,s_3}^{(1)} = 0.8884462$  y para  $s_4$  en  $p_{c,s_4}^{(1)} = 0.8884459$ .

La obtención de los valores  $p_{c,s_R}^{(1)}$  para los primeros cuatro tamaños más grandes indica que el punto crítico definido por el Método 1 decrece con el aumento de  $R$ . Esto sólo tiene sentido numéricamente debido al límite en la precisión del tamaño de paso para los valores de  $p$  y en el número de realizaciones para cada tamaño de red. Las razones descritas

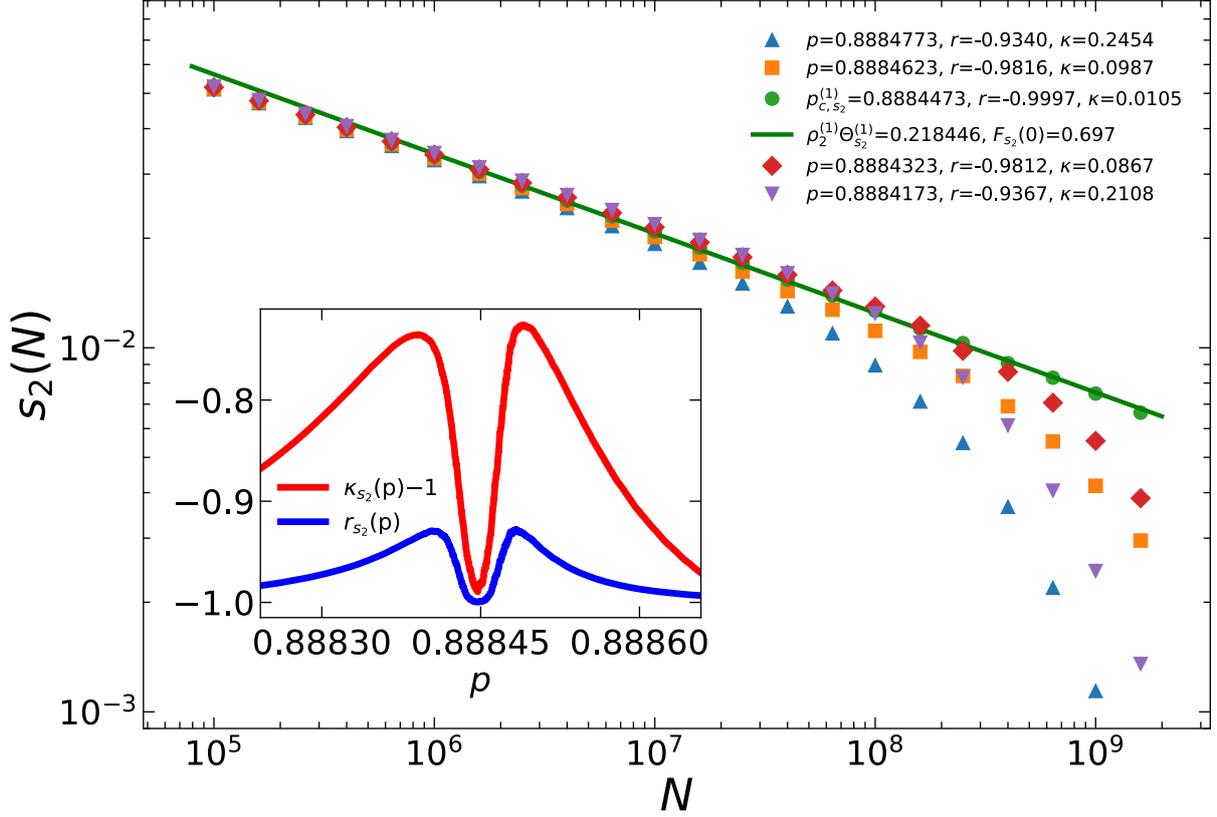


Figura 3.15: Tamaño relativo  $s_2$  en función de  $N$  para diferentes valores de  $p$  en escala log-log. Los datos representados por círculos verdes son los que minimizan la correlación lineal entre  $\log(s_2)$  y  $\log(N)$ . La recta corresponde al mejor ajuste lineal de los puntos para  $p_{c,s_2}^{(1)} = 0.8884473$ . De esta se obtiene el exponente crítico  $\rho_2^{(1)}\Theta_{s_2}^{(1)} = 0.2184$  y el valor  $F_{s_2}(0) = 0.697$  de la función de escalamiento para  $s_2$ . También se agregan los puntos  $s_2(N)$  para dos valores de  $p$  antes y después de la transición. En el pequeño recuadro se agrega el coeficiente de correlación de Pearson  $r_{s_2}(p)$  y la curvatura desplazada una unidad  $\kappa_{s_2}(p) - 1$ , ambas obtenidas con respecto a la relación  $s_2(N)$  en escala doble logarítmica.

generan esta discrepancia. La primera se refiere a que, para sistemas de tamaño finito  $N$ , el tamaño de paso mínimo es  $p = 1/N$ . Si se asume que el mecanismo de crecimiento directo es el que domina en este modelo, entonces el mayor “brinco” en  $s_1$  se debe a la adición del máximo valor de  $s_2$  alcanzado al menos un paso antes. De igual forma, el máximo de  $s_2$  se consigue debido a la adición de  $s_3$  en su valor máximo alcanzado al menos un paso antes, y así sucesivamente. Se estima entonces que  $p_{c,s_R}^{(1)} = p_c - (R - 1)/N$ , para  $R$  pequeño, un mecanismo de crecimiento directo y utilizando la distancia mínima  $1/N$  entre máximo y máximo. La segunda razón, relacionada con el límite en el número de realizaciones, y el hecho de que no siempre es la distancia mínima  $1/N$  entre máximo y máximo justifica el resultado obtenido.

Asimismo, se extrae el exponente crítico relacionado con los tamaños  $s_3$  y  $s_4$ . Esto se realiza a través del mejor ajuste lineal sobre los puntos  $s_3(N)$  y  $s_4(N)$  en los valores de  $p_c$  descritos arriba para estas cantidades. El tercer componente más grande tiene un tamaño relativo que sigue una ley de potencias con exponente  $\rho_3^{(1)}\Theta_{s_3}^{(1)} \approx 0.2005$  y su función de escalamiento evaluada en el origen es  $F_{s_3}(0) = 0.375$ . Para el tamaño  $s_4$ , los

resultados son  $\rho_4^{(1)}\Theta_{s_4}^{(1)} \approx 0.18755$  y  $F_{s_4}(0) = 0.245$ . En cuanto a los exponentes, el valor de  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)} \approx 0.065$  obtenido en la sección anterior es muy pequeño con respecto a los  $\rho_R^{(1)}\Theta_{s_R}^{(1)}$ , con  $R = 2, 3, 4$ . Omitiendo esto, los exponentes críticos asociados a  $s_{R=2,3,4}$ , al igual que los valores  $F_{s_R}(0)$  decrecen con el aumento de  $R$ . Al final, para desacoplar los valores  $\rho_R^{(1)}\Theta_{s_R}^{(1)}$  encontrados en cada valor de  $p_{c,s_R}$ , se busca el exponente  $\Theta_{s_R}^{(1)}$  de manera independiente al ajustar el mejor *data collapse* para las curvas  $F_{s_R}$ . Todos estos resultados se agrupan en la tabla 3.6 para los tamaños  $s_R$  más grandes.

El ajuste mediante los valores encontrados con el Método 1 es válido sólo en una vecindad muy cercana al punto crítico, como se observa en el recuadro superior de la figura 3.17 para  $s_2$ . Este no es el resultado más favorable, pero tampoco es sorprendente teniendo en cuenta lo obtenido para  $s_1$  con el mismo método en la sección anterior.

$s_R$ con R	$p_{c,s_R}^{(1)}$ 0.88844...	$F_{s_R}(0)$	$\rho_R^{(1)}\Theta_{s_R}^{(1)}$	$\rho_R^{(1)}$	$\Theta_{s_R}^{(1)}$
1	84	0.786(6)	0.0653(5)	0.1225	0.533
2	73	0.697(16)	0.2184(14)	0.4561	0.479
3	62	0.375(12)	0.2005(19)	0.4290	0.467
4	59	0.245(9)	0.1875(22)	0.4042	0.464

Cuadro 3.6: Resultados correspondientes a los tamaños  $s_R$  con  $R = 1, 2, 3, 4$ . La primera columna muestra las cantidades descritas para un valor de  $R$  determinado, en las siguientes tres están los parámetros críticos obtenidos a través del Método 1 y en las últimas dos se presentan los valores producidos al desacoplar los exponentes  $\rho_R^{(1)}$  y  $\Theta_{s_R}^{(1)}$  mediante el mejor empalme de las curvas  $F_{s_R}$ . En este caso,  $\rho_1^{(1)} = \beta^{(1)}$ .

## Aplicación del Método 2

El estudio ahora se centrará en aplicar el Método 2 sobre los tamaños  $s_R$  de rango  $R = 2, 3, 4$ . Este método se basa en el comportamiento que presentan los puntos pseudocríticos  $p_{c,s_R}(N)$ , los cuales son definidos por la posición de los máximos en las curvas  $s_R(p)$  para un tamaño de red dado. El desplazamiento de estos máximos con respecto al punto crítico sigue una ley de potencias en  $N$ . Esto se puede observar en el recuadro superior de la figura 3.16. Como se indica, los puntos corresponden a la diferencia  $|p_{c,s_R}(N) - p_{c,s_R}^{(2)}|$  para  $R = 2, 3, 4$ . En el mismo color, se muestran las rectas que mejor ajustan a cada conjunto de puntos en escala doble logarítmica. En el detalle de la gráfica se agrega la función de ajuste que exhiben estas cantidades, resaltando la obtención del punto crítico  $p_{c,s_R}^{(2)}$  y el exponente  $\delta_{s_R}$  asociado.

En cuanto al comportamiento para los diferentes tamaños, se aprecia que con el aumento de  $R$  existe un crecimiento en los valores  $p_{c,s_R}^{(2)}$  y un decrecimiento en los  $\delta_{s_R}$ 's. Todos los valores calculados mediante este método para los parámetros críticos se encuentran en la tabla 3.7. Para cada valor de  $N \leq 10^7$  los puntos  $|p_{c,s_R}(N) - p_{c,s_R}^{(2)}|$  tienen un orden creciente con el aumento de  $R$ . No obstante, la precisión en estos puntos disminuye claramente para  $N$ 's después de este valor. El número de realizaciones decrece también dentro de este intervalo, por lo que la pérdida del arreglo creciente en los puntos se vincula directamente

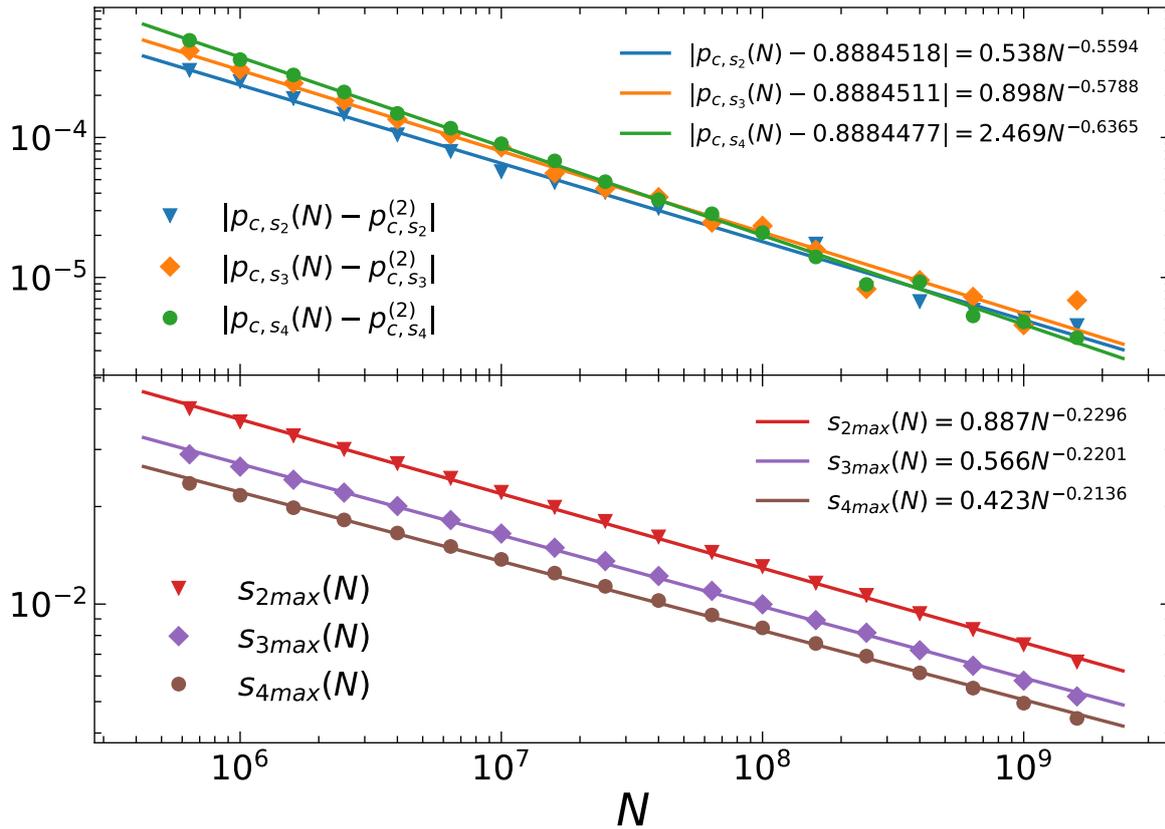


Figura 3.16: Recuadro superior: Diferencia entre los puntos pseudocríticos definidos a partir de  $\max\{s_R(p)\}$  y el punto crítico  $p_{c,s_R}^{(2)}$ , como función de  $N$  y para  $R = 2, 3, 4$ . Recuadro inferior: Máximos de  $s_R(p)$  para los mismos valores del tamaño de red y el rango  $R$  descritos en el recuadro superior. Ambas gráficas están en escala log-log para visualizar de mejor manera la ley de potencias que presentan estas cantidades. Las rectas son el mejor ajuste lineal para cada conjunto de puntos. Se agrega también la información detallada sobre los puntos críticos  $p_{c,s_R}^{(2)}$  y los exponentes  $\rho_R^{(2)} \Theta_{s_R}^{(2)}$  para las  $R$ 's mencionadas.

con este hecho. Un incremento en  $N_r$  para los tamaños de red  $N > 10^7$  definiría mejor los máximos de  $s_R(p)$ , haciendo que los puntos sigan el mismo patrón para cada  $N$  y que los exponentes  $\delta_{s_R}$  se aproximen al mismo valor. Esto último ocurre al tomar el mejor ajuste en cada  $R$  para los puntos con  $N \leq 10^7$  solamente. En este caso, los exponentes resultantes son  $\delta'_{s_2} \approx 0.6019$ ,  $\delta'_{s_3} \approx 0.6034$  y  $\delta'_{s_4} \approx 0.6147$ , usando variables primadas para distinguir de las  $\delta_{s_R}$ 's obtenidas para todo el intervalo  $N \in [10^5, 1.6 \times 10^9]$ . Bajo esta idea es viable entonces que  $\delta_{s_R}$  tome un valor independiente de  $R$ .

Por otro lado, en el recuadro inferior de la figura 3.16 se muestran los resultados para el máximo de las curvas  $s_{R=2,3,4}(p)$  en función de  $N$ . Estos valores se denotan como  $s_{Rmax}$  y se observa que decaen con el aumento del tamaño del sistema. De igual manera, se muestra en escala doble logarítmica el comportamiento en ley de potencias que siguen estos puntos. Se realiza la obtención de los exponentes  $\rho_R^{(2)} \Theta_{s_R}^{(2)}$  para los distintos valores de  $R$  y el resultado se detalla en la figura. A diferencia de los puntos pseudocríticos, los máximos se comportan adecuadamente y mantienen el orden esperado para cada  $N$  en el intervalo mostrado. Los exponentes  $\rho_R^{(2)} \Theta_{s_R}^{(2)}$  y los coeficientes de la expresión decrecen con el aumento de  $R$ , tal como se obtuvo en el Método 1, sólo que la variación entre estos

valores es menor con el Método 2.

En percolación clásica, al comportamiento de los puntos pseudocríticos también se le asocia una ley de potencias como la descrita en la ec. 3.6. En este caso, se obtiene que  $\delta = \Theta$ , de manera que la implementación de este método no sólo genera toda la información en el punto crítico, sino que también desacopla a los exponentes de la expresión 3.7 sin la necesidad de buscar el mejor *data collapse* de las curvas para diferentes  $N$ 's. A pesar de ello, tal como se vio con los puntos pseudocríticos en los máximos de  $s_{R=2,3,4}$  o con los definidos para la distribución bimodal de  $s_1$ , existe una diferencia entre  $\delta$  y  $\Theta$  en el modelo explosivo. El valor de  $\delta_{P(s_1)} = 0.616$  y los  $\delta_{s_{R=2,3,4}} \approx 0.6$  de esta sección no parecen ser compatibles con los valores de  $\Theta \approx 0.5$  obtenidos anteriormente. El hallazgo de una distribución bimodal mixta para los valores de  $s_1$  y su efecto sobre la función de escalamiento  $F_{s_1}$ , explican la incapacidad de los puntos  $p_{c,P(s_1)}(N)$  para escalar con  $\Theta$ . Se estipula que este hecho también justifica la separación que existe entre  $\delta_{s_{R=2,3,4}}$  y los valores de  $\Theta$  obtenidos con otras cantidades. Sin embargo, el razonamiento detrás de que  $\delta_{s_{R=2,3,4}} > \Theta$  no se conoce exactamente y sólo se considera que debe ser la influencia del mismo mecanismo que provoca la singularidad en  $F_{s_1}$ .

Debido a la idea que se desarrolló en el párrafo anterior, para concluir con la aplicación de este método sobre los tamaños  $s_R$  aún falta determinar los exponentes  $\Theta_{s_R}^{(2)}$ . Esto se logra tomando los datos  $N^{\rho_R^{(2)} \Theta_{s_R}^{(2)}} s_R(p)$  correspondientes para graficar la dependencia contra  $(p - p_{c,s_R}^{(2)}) N^{\Theta_{s_R}^{(2)}}$ . El parámetro  $\Theta_{s_R}^{(2)}$  es lo único que se desconoce, así que se varía su valor hasta encontrar el que mejor empalme a las diferentes curvas. Los resultados se incluyen en la tabla 3.7.

En la parte inferior de la figura 3.17 se visualiza el empalme de los datos para el tamaño  $s_2$  y los parámetros críticos obtenidos a partir de esta cantidad. Con los valores  $p_{c,s_2}^{(2)} = 0.8884518$ ,  $\rho_2^{(2)} = 0.45111$  y  $\Theta_{s_2}^{(2)} = 0.509$ , las curvas que describen la evolución del componente de rango 2 encuentran un mejor ajuste que con el Método 1. Esto se ve claramente en la figura, donde se agregan los dos casos para que la comparación sea más sencilla. Los parámetros obtenidos por el primer método fallan mayormente al ajustar las curvas para el régimen precrítico, no obstante, sigue representando el mejor *data collapse* para  $F_{s_2}(0)$ . Por otro lado, aunque con el Método 2 se reduce la calidad del empalme sobre el punto crítico, esto genera una mayor afinidad para los diferentes valores de  $p$  y  $N$  en general. Es así, ya que el segundo método se centra principalmente en escalar los máximos de las curvas. Estos resultados también muestran que el valor límite  $F_{s_2}(0)$  que toma la función de escalamiento para  $s_2$  no corresponde con su máximo. Previamente se hicieron aseveraciones al respecto, pero esto confirma que el máximo de  $s_{R>1}$  se da antes de la transición para sistemas finitos. Finalmente, se ve que el cambio sutil en los parámetros críticos de uno u otro método constituye una diferencia significativa en la función límite a la que se aproximan las curvas.

La búsqueda del escalamiento se implementó similarmente para los datos de  $s_3$  y  $s_4$ . Los valores para  $\Theta_{s_R}$ , así como la calidad de los ajustes, decrecen con el aumento de  $R$ , incluyendo al componente de rango 1. Al comparar los resultados renglón por renglón en la tabla 3.7, se identifica una mayor afinidad entre los que corresponden a  $s_2$  y  $s_3$ . Los parámetros críticos para el tamaño  $s_4$  se desvían de lo que establecen los otros dos: el valor de  $p_{c,s_4}^{(2)}$  se sitúa antes del punto crítico obtenido para  $s_1$ , el exponente  $\delta_{s_4}$  es mayor

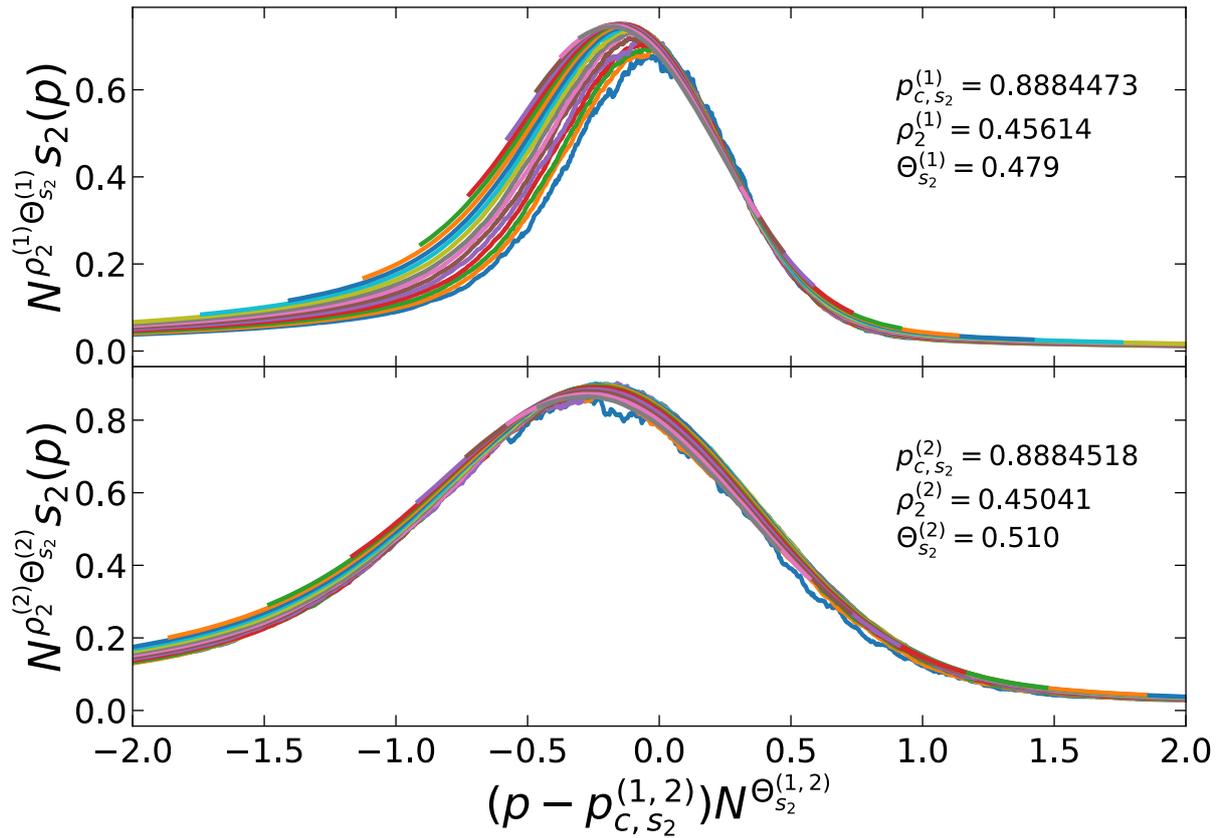


Figura 3.17: Mejor ajuste para el empalme de las curvas  $s_2(p, N)$ . En el recuadro superior se muestra el resultado con los parámetros críticos obtenidos por el Método 1. Este minimiza la diferencia en los valores de  $F_{s_2}(0)$ . En el Método 2, por el contrario, se busca escalar los puntos pseudocríticos definidos por el máximo de las curvas para  $s_2$ . El mejor *data collapse* se incluye en el recuadro inferior de la figura. Los superíndices (1) y (2) denotan los parámetros para cada método.

que el  $\delta \approx 0.6$  propuesto, además de un cambio notable en los otros exponentes. Ya que el estudio parte del cálculo de  $p_{c,s_R}^{(2)}$ , la razón de esta discrepancia puede relacionarse con la falta de precisión en los puntos pseudocríticos para  $s_4$ , no obstante, esto no se sabe con exactitud. Aunque no sería del todo sorprendente que esta fuera la causa, dado que se utilizan los puntos con mayor varianza en  $s_R(p)$ .

$s_R$ con $R$	$p_{c,s_R}^{(2)}$ 0.8884...	$\delta_{s_R}$	$\rho_R^{(2)} \Theta_{s_R}^{(2)}$	$\rho_R^{(2)}$	$\Theta_{s_R}^{(2)}$
2	518(15)	0.559(12)	0.2296(14)	0.4504	0.509
3	511(14)	0.579(17)	0.2201(16)	0.4489	0.490
4	477(12)	0.636(8)	0.2136(18)	0.4734	0.451

Cuadro 3.7: Resultados correspondientes a los tamaños  $s_R$  con  $R = 2, 3, 4$ . La primera columna muestra las cantidades descritas para un valor de  $R$  determinado, en las siguientes tres están los parámetros críticos obtenidos a través del Método 2 y en las últimas dos se presentan los valores producidos al desacoplar los exponentes  $\rho_R^{(2)}$  y  $\Theta_{s_R}^{(2)}$  mediante el mejor empalme de las curvas  $F_{s_R}$ . Nótese que para el modelo explosivo  $\delta \neq \Theta$ .

### Aplicación del Método 3

La última técnica de escalamiento que se emplea para el estudio de los tamaños  $s_{R=2,3,4}$  es el Método 3. Para este se utiliza el comportamiento fuera del punto crítico, pero en las cercanías de la transición, evitando los efectos del tamaño finito  $N$ . De esta manera, se toman las cantidades correspondientes a partir del momento en el que presentan una ley de potencias como  $s_R \sim |p - p_c|^{-\rho_R}$ . Como se resaltó al inicio de la sección, las ramas izquierda  $s_{R-}(p)$  y derecha  $s_{R+}(p)$  de la cantidad  $s_R(p)$  se comportan de diferente manera, por lo que este método se aplica para  $p < p_c$  y  $p > p_c$  por separado. En ese sentido, se toma cada sección de  $s_R(p)$  en escala doble logarítmica y se calcula el exponente efectivo  $\rho_R$  mediante un ajuste lineal para cada valor de  $N$ .

En la figura 3.18 se muestran las gráficas de  $s_{2-}(p)$  (régimen precrítico) y  $s_{2+}(p)$  (régimen postcrítico) para diferentes tamaños de red. Los nueve valores de  $N$  utilizados están dentro del intervalo  $[4 \times 10^7, 1.6 \times 10^9]$ . El punto crítico que se utiliza en el cálculo y divide a cada rama para los tamaños  $s_R$  es  $p_{c,s_R}^{(3)} = 0.8884484$ . Este se obtuvo a partir del parámetro de orden y se toma como la mejor aproximación al punto crítico real en este modelo.

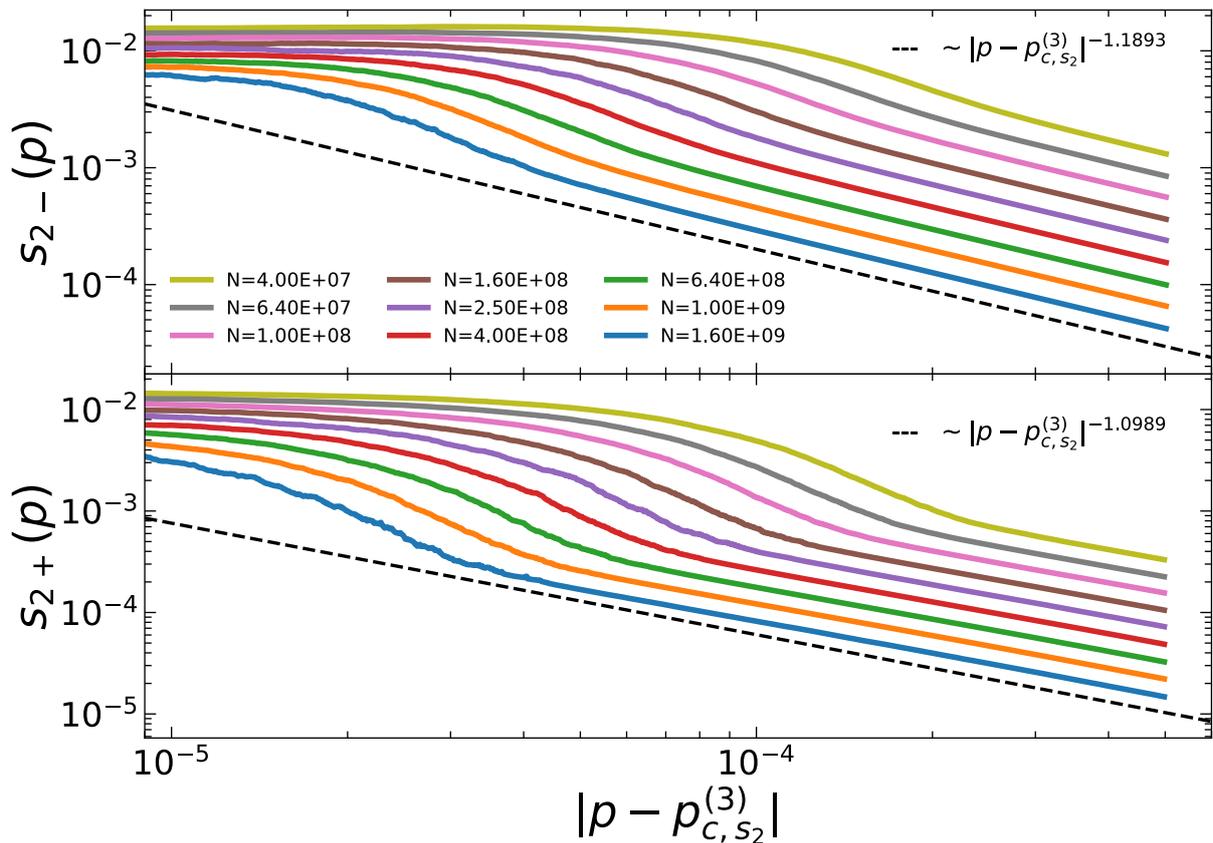


Figura 3.18: Tamaño del segundo componente más grande como función de la diferencia  $|p - p_{c,s_2}^{(3)}|$  para distintas  $N$ 's. En el recuadro superior se agregan los valores de  $s_2(p)$  para  $p < p_{c,s_2}^{(3)}$  y en el inferior para  $p > p_{c,s_2}^{(3)}$ , cada caso se distingue con un  $-$  para el régimen precrítico y un  $+$  para el postcrítico. Ambas gráficas están en escala doble logarítmica. Las rectas punteadas corresponden a una ley de potencias dada por el comportamiento del tamaño de red más grande.

En el recuadro superior de la figura se presentan las curvas  $s_2(p)$  para  $p < p_{c,s_R}^{(3)}$ , en función de  $|p - p_{c,s_R}^{(3)}|$  en escala log-log. Con el aumento de  $N$ , se observa el establecimiento de una recta en un intervalo cada vez más cercano al punto crítico. Algo similar sucede en el recuadro inferior para  $s_2(p)$  con  $p > p_{c,s_R}^{(3)}$ . La diferencia radica en la forma con que decaen los puntos en cada región. Para las curvas de arriba se observa un cambio de una pendiente muy cercana a cero (dada por el máximo) hacia la ley de potencias esperada. Para las curvas  $s_{2+}(p)$ , por otro lado, entre los puntos cercanos al máximo y la ley de potencias (bien definida después de  $|p - p_{c,s_R}^{(3)}| = 2 \times 10^{-4}$ ) parece instaurarse un comportamiento diferente. Este efecto se debe a la caída abrupta mostrada por  $s_2$  después de la transición. Sin embargo, el desplazamiento de la ley de potencias hacia la izquierda indica que este efecto desaparece para  $N \rightarrow \infty$ .

La recta punteada en cada panel corresponde a la ley de potencias que sigue  $s_2$  para el tamaño de red más grande. El exponente encontrado es diferente en ambos casos, con un  $\rho_{2-}(N=1.6 \times 10^9) \approx 1.18$  antes y un  $\rho_{2+}(N=1.6 \times 10^9) \approx 1.11$  después de la transición. Este resultado se obtiene al ajustar una recta sobre los 1000 puntos más alejados del máximo. Dichos puntos se extraen de un intervalo donde la ley de potencias está bien establecida para cada valor de  $N$ . El cálculo realizado con el tamaño de red más grande se repite para los demás valores de  $N$ , produciendo un ajuste en ley de potencias para cada curva. De este procedimiento surgen las relaciones  $\rho_{2\pm}^{(3)}(N)$  para los exponentes efectivos asociados a  $s_2$ .

El camino que se siguió para conseguir este conjunto de exponentes se realizó de la misma manera para los datos  $s_3(p)$  y  $s_4(p)$ . También se encuentra que el comportamiento para el régimen precrítico es diferente del presentado en el postcrítico. En general, los tamaños de rango  $R = 2, 3, 4$  siguen el mismo patrón con respecto a las propiedades descritas anteriormente.

En la figura 3.19 se agrega la evolución de los exponentes efectivos como función de  $N$ , esto para cada valor de  $R$  y cada régimen. En la gráfica principal se presenta la dependencia que siguen los exponentes para los cuatro tamaños más grandes antes de la transición. Se resalta la inclusión del conjunto de valores  $\beta_-^{(3)}(N)$ , no sólo porque se omitió en la sección pasada, sino porque el comportamiento de  $s_1$  se parece al de los demás tamaños de componente antes del punto crítico. A diferencia de los exponentes  $\beta_+(N)$  calculados en la sección pasada, los que aquí se presentan no se aproximan de manera monótona a un valor límite. Aun así, se observa una tendencia clara hacia un valor entre 1.17 y 1.19 para los cuatro grupos de puntos.

Por otro lado, los exponentes efectivos  $\rho_{R+}^{(3)}(N)$  muestran un crecimiento (mayormente) monótono y parecen seguir un comportamiento semilogarítmico en este intervalo. Debido a esto no se puede descartar del todo la posibilidad de que tiendan a un valor dentro del segmento  $[1.17, 1.19]$  como se prevé para los  $\rho_{R-}^{(3)}(N)$ . Por lo que, aunque no lo hagan de la misma manera, los exponentes antes y después de la transición podrían ser iguales. No obstante, los resultados aquí encontrados no son concluyentes bajo este método. En la tabla 3.8 se agrupan los exponentes obtenidos para los ajustes en ley de potencias del tamaño de red más grande.

El comportamiento de los tamaños  $s_{2,3,4}$  difiere del que se encontró para el parámetro de orden. Al inicio de la sección se mostró que existe una diferencia entre los exponentes

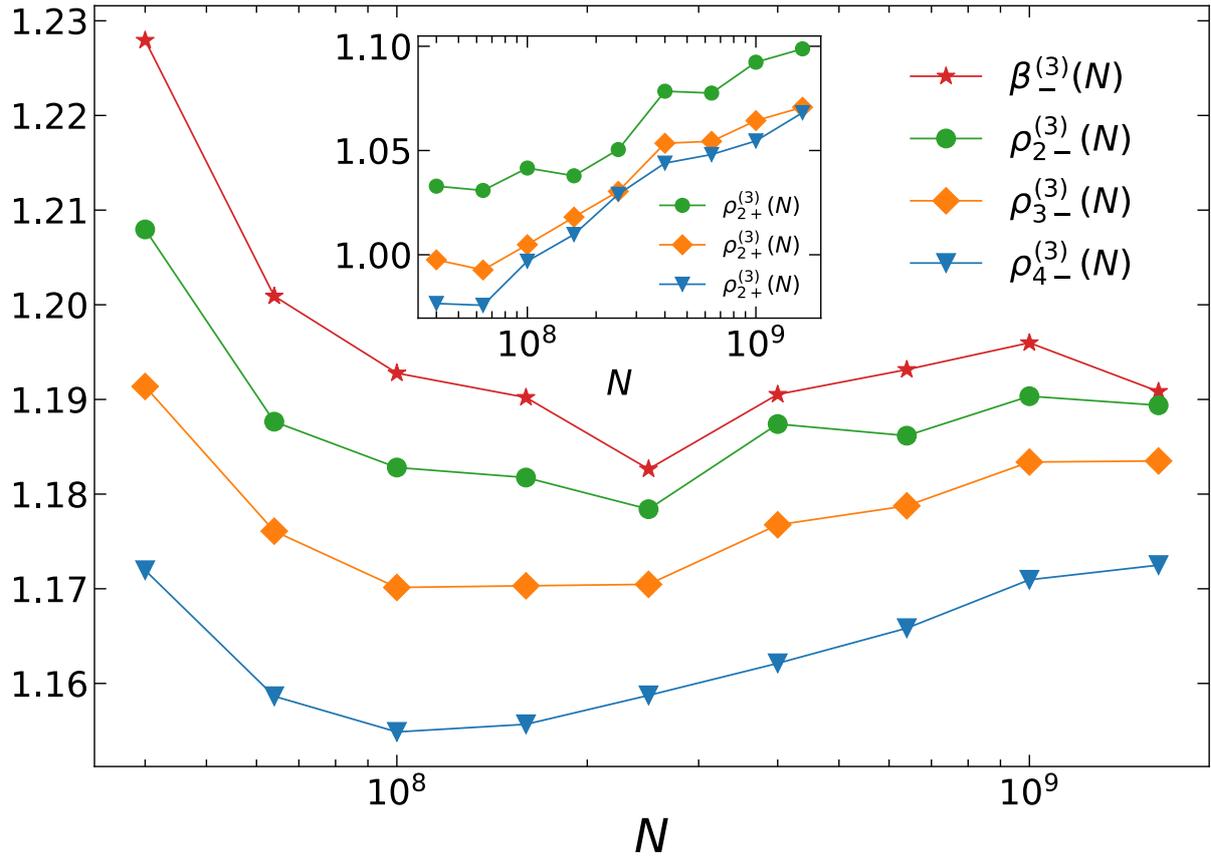


Figura 3.19: Exponentes efectivos para los tamaños de componente más grandes en función de  $N$ . En la gráfica principal se agregan los conjuntos de puntos  $\beta_{-}^{(3)}(N)$  y  $\rho_{R-}^{(3)}(N)$  para el régimen precrítico. Para cada grupo se observa una tendencia hacia un valor en  $[1.17, 1.19]$ . En el recuadro pequeño están los puntos  $\rho_{R+}^{(3)}(N)$  para el régimen postcrítico. Se ve que domina un comportamiento semilogarítmico en este intervalo. Todos los puntos consecutivos están unidos por líneas rectas sólo para ayudar al ojo a distinguir entre cada grupo de exponentes.

de  $s_1$  y  $s_2$  con base en los datos de la razón entre ellos. Más tarde se corroboró esto mediante la aplicación de los tres métodos de escalamiento. Con estos se encontró que incluso el componente más grande en su parte precrítica presenta resultados similares a los componentes de rango mayor. La razón principal es que sólo los exponentes efectivos de  $s_{1+}$  manifiestan una tendencia tan clara a seguir una ley de potencias.

$s_R$ con $R$	Para $N = 1.6 \times 10^9$	
	$\rho_{R-}^{(3)}(N)$	$\rho_{R+}^{(3)}(N)$
2	1.1803	1.1073
3	1.1765	1.0772
4	1.1743	1.0665

Cuadro 3.8: Resultados correspondientes a los tamaños  $s_R$  con  $R = 2, 3, 4$  obtenidos a partir del Método 3. Se muestran los exponentes del ajuste en ley de potencias antes (-) y después (+) de la transición para el valor más grande de  $N$ .

### 3.6. Distribución de tamaños $n(s)$

En las secciones pasadas, el estudio sobre el modelo de percolación explosiva se centró en los tamaños de componente más grandes. Primero se abordó a  $s_1$  como parámetro de orden del sistema, obteniendo propiedades peculiares como la distribución bimodal de sus valores en el punto crítico. Después se utilizaron las cantidades  $s_{2,3,4}$  que se comportan de manera similar entre sí, pero cada una muestra exponentes distintos antes y después de la transición. Ahora, para redondear el análisis sobre los distintos componentes que presenta la red, en esta sección se procederá a caracterizar el comportamiento de su distribución de tamaños.

Como se describió anteriormente, a través de las simulaciones numéricas se genera la evolución de una red de  $N$  nodos mediante la adición de un enlace a cada paso. El producto principal que se extrae de este cálculo es una lista con los distintos tamaños de componente y el número de veces que se repiten dentro de la red. Este resultado, promediado sobre las distintas realizaciones y dividido por el tamaño de red  $N$ , se denota como  $n_{p,N}(s)$  y corresponde a la distribución de tamaños  $s$  para un valor de  $p$  dado. Cabe aclarar que  $n_{p,N}(s)$  corresponde solamente a los tamaños de componente “finitos”, por lo que para el cálculo se retira al componente más grande en cada realización. A menos que sea necesario incluirlos, los subíndices “ $p, N$ ” se omitirán para facilitar la presentación.

El comportamiento que presenta la distribución de tamaños de componente varía dependiendo del régimen al que pertenezca su valor de  $p$ . En la gráfica 3.20 se agrega una muestra de las distribuciones  $n(s)$  en escala doble logarítmica antes, en las cercanías y después de la transición. Todas las distribuciones presentadas corresponden al tamaño de red  $N = 10^9$ . En la figura se observa que las tres curvas exhiben un decrecimiento al aumentar el valor de  $s$ , lo cual favorece la existencia de un mayor número de componentes de tamaño pequeño dentro de la red. Esto, como se mencionó anteriormente, descartando la participación del componente más grande. No obstante, el decaimiento que presentan las distribuciones en la zona de  $s \in [10^3, 10^5]$  es distinto en cada régimen. La diferencia más clara con respecto a la percolación clásica es la presencia de una joroba en el caso precrítico. Esta característica, relacionada con un decaimiento gaussiano, es consecuencia directa del tipo de modelo y se abordará en detalle más adelante.

La curva naranja, por otro lado, corresponde a una distribución tomada en una  $p$  muy cercana a  $p_c$ . Esta muestra un decaimiento en ley de potencias, donde los datos para la  $p$  seleccionada presentan la mayor correlación lineal en esta escala y para este valor de  $N$ . Este comportamiento es acompañado por un exponente  $\tau$ , el cual se determinará después. En la gráfica principal se observan las curvas en el intervalo  $[1, 10^5]$  de  $s$ , donde los resultados para el caso precrítico y postcrítico están completamente dentro de él. Sin embargo, en el recuadro pequeño de la figura se puede ver que los datos correspondientes a  $p = 0.88845$  se extienden hasta  $s = 10^8$  aproximadamente. Lo anterior indica que existe la participación de componentes de mayor tamaño (con alrededor del 10% de los nodos en la red) cerca del punto crítico.

Aunque la curvatura para la distribución  $n_{p \approx p_c}(s)$  es considerablemente menor que en los otros dos casos, sigue existiendo cierta desviación como efecto de tamaño finito. Se aprecia también un pequeño remanente de la joroba precrítica. Esto sugiere una dismi-

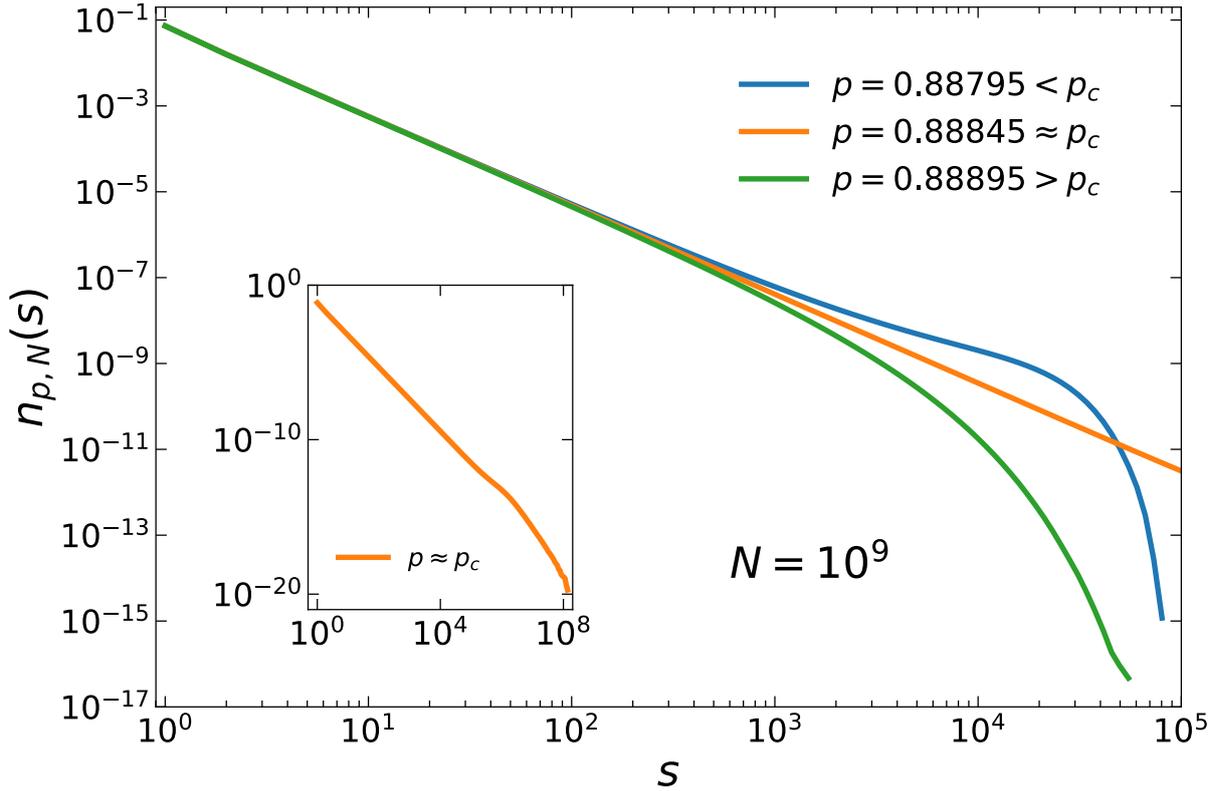


Figura 3.20: Distribución de tamaños de componente  $n_{p,N}(s)$  para tres valores distintos de  $p$  en una red de tamaño  $N = 10^9$ . Cada  $p$  se toma de un régimen diferente: la curva azul corresponde a datos en la región precrítica, la naranja en las cercanías del punto crítico y la verde después de éste. Los resultados se muestran en escala doble logarítmica para resaltar el comportamiento en ley de potencias de  $n_{p \approx p_c}(s)$ . La principal diferencia con el caso clásico es la joroba que presenta  $n_{p < p_c}(s)$ . En el recuadro pequeño se agregan los datos para  $p \approx p_c$  en la totalidad de su rango.

nución progresiva de su tamaño hasta desaparecer en el régimen postcrítico. Después de la transición se tiene un decaimiento exponencial para la distribución de tamaños en la región donde dominan los componentes más grandes. En este sentido, el comportamiento encontrado es similar al que se presenta en el caso clásico.

### Distribución de probabilidad $sn(s)$

Ahora, si se toma la cantidad  $n(s)$  y se multiplica por el tamaño  $s$ , el resultado es la probabilidad de que un nodo arbitrario pertenezca a un componente de tamaño finito  $s$ . Si se toma este producto para cada entrada en  $n(s)$  se obtiene una aproximación de la distribución de probabilidades  $sn(s)$ . Así, la suma sobre todos los valores de  $s$  cumple con

$$\sum_{s=1}^{\infty} sn(s) = 1 - s_1 \quad (3.19)$$

Esta expresión muestra de manera explícita la relación entre el primer momento de  $n(s)$  y el parámetro de orden. También resalta que la fracción de nodos pertenecientes a componentes finitos se puede obtener simplemente sustrayendo  $s_1$  de la fracción de nodos total.

Dada esta ecuación, es necesario clarificar que aquí (y en toda la sección) “ $s$ ” se utiliza para denotar tamaños de componente finitos. Ésta se diferencia de los tamaños relativos ordenados por su rango que se han venido utilizando, los cuales son acompañados necesariamente por un subíndice  $R$ . En ese caso,  $s_{R=1}$  se refiere al tamaño relativo del componente más grande.

En la figura 3.21 se agregan los resultados para la distribución  $sn_p(s)$  en términos de  $s$  y  $p$ . En el recuadro izquierdo se muestran estos datos en función de  $s$ , para distintos valores del parámetro de control. El comportamiento que siguen es similar al descrito anteriormente para  $n_{p,N}(s)$ , aunque en este caso el valor de la pendiente para la recta  $sn_{p \approx p_c}(s)$  es  $1 - \tau$ , en vez de  $-\tau$ . La probabilidad de pertenecer a un componente de tamaño  $s$  sigue un decaimiento gaussiano en el caso precrítico, en ley de potencias para el caso crítico y exponencial en el postcrítico. Lo anterior para la región donde están los componentes más grandes de la red.

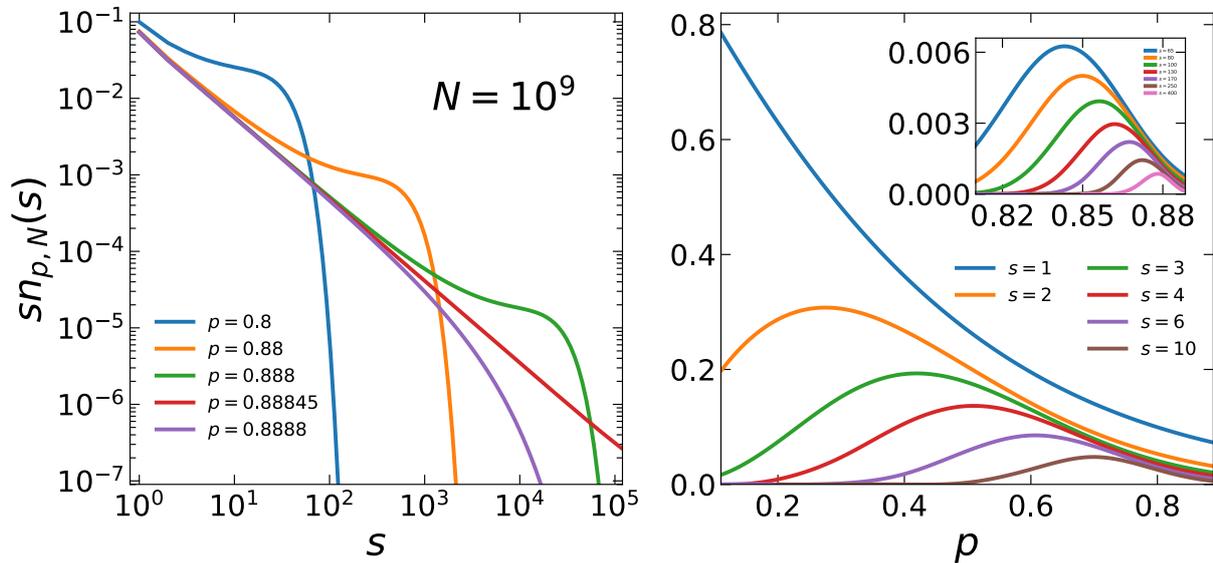


Figura 3.21: Distribución de probabilidades  $sn_{p,N}(s)$  de pertenecer a un componente finito como función de  $s$  y  $p$ . En el recuadro izquierdo se agrega la dependencia con  $s$  para cinco valores distintos de  $p$ , de los cuales tres son precríticos, uno cercano a  $p_c$  y uno después de la transición. Mientras que en el recuadro derecho y el más pequeño se visualizan las distribuciones con respecto a  $p$  para distintos valores de  $s$ . Estas curvas muestran un máximo que decrece con el aumento de  $s$  y se desplaza hacia el punto crítico en el eje horizontal. Todos los resultados corresponden a un tamaño de red  $N = 10^9$ .

En el recuadro derecho de la figura se puede visualizar la probabilidad de pertenecer a un componente de tamaño finito  $s$  como función de  $p$ . Aquí se agregan las curvas para varios tamaños: en la gráfica principal se muestran algunos entre  $s = 1$  y  $s = 10$ , mientras que en el recuadro pequeño van de  $s = 65$  hasta  $s = 400$ . La curva para los componentes de tamaño  $s = 1$ , es decir, los nodos desconectados, tiene su máximo en  $p = 0$ . En este punto, la probabilidad de pertenecer a un componente de tamaño  $s = 1$  es igual a 1 y después de esto sólo decrece monótonamente hacia cero. Para tamaños de componente más grandes esta probabilidad aumenta desde cero hasta un valor máximo y luego decrece para volver de nuevo a cero antes de que el componente más grande acapare todos los nodos. Se puede

observar en las gráficas que estos máximos se desplazan hacia la derecha y hacia abajo. Esto quiere decir que la máxima probabilidad de pertenecer a un componente de tamaño  $s$  decrece con el aumento de  $s$ . De la misma manera, el valor del parámetro  $p$  donde se dan estos máximos aumenta con  $s$  y tiende lentamente a  $p_c$  a la vez que  $s \rightarrow \infty$ . Estas gráficas corresponden sólo a  $p$ 's en la región precrítica, con  $p_c$  como el límite superior en el eje horizontal.

En el caso clásico, los valores que puede tomar la distribución  $sn(s)$  están acotados superiormente por la ley de potencias  $s^{1-\tau_{ER}}$  que corresponde a  $sn_{p=p_c}(s)$ . Esto va para cualquier régimen. Sin embargo, la aparición de jorobas en la región precrítica del modelo explosivo modifica claramente lo anterior. En este caso, los máximos de  $sn(s)$  también siguen una ley de potencias que va como  $s^{1-\tau}$ . No obstante, esta cota superior no corresponde a la distribución en el punto crítico, como en el caso clásico, sino que está dada por las jorobas de  $sn_{p<p_c}(s)$ . Aunque ambas rectas son paralelas en escala log-log, la ley de potencias descrita por los máximos tiene un coeficiente mayor que el que acompaña a  $sn_{p=p_c}(s)$ . Esta es la razón por la que los máximos en las curvas  $sn_p(s)$  vs  $p$  ocurren antes de la transición de manera tan marcada.

## Decaimiento gaussiano en régimen precrítico

A partir de los resultados en la figura 3.21, en específico para la parte precrítica, se comprueba que la regla del producto utilizada para elegir los enlaces que se añaden a la red propicia la supresión de componentes grandes en la misma. De esta manera, se observa que para  $p$ 's antes de la transición existe una región donde la probabilidad de encontrar componentes grandes decae más rápido que una exponencial. En adelante se buscará comprobar que la forma del decaimiento es gaussiana, para lo cual se utilizará la región de las distribuciones  $n(s)$  que se describió anteriormente. Esta se refiere al segmento de  $s$  que se encuentra en el lado derecho de las jorobas.

El umbral a partir del cual la distribución  $n(s)$  empieza a comportarse como gaussiana se denotará como  $s_\xi$ . Se asume que las curvas siguen una relación dada por

$$n_{p<p_c}(s > s_\xi) \sim \exp[-c(p)s^2] \quad (3.20)$$

donde  $c(p)$  es una función solamente de  $p$ . Con base en lo que se sabe de percolación clásica, tenemos que este factor en la exponencial y el valor  $s_\xi$  están directamente relacionados. Aunque para el caso explosivo esta relación debe ser  $c = s_\xi^{-2}$  debido al carácter gaussiano de este modelo.

Por lo tanto, primero se busca linealizar las curvas al tomar la dependencia de la cantidad  $\ln[n_{p<p_c}(s > s_\xi)]$  contra  $s^2$ . El resultado se observa en los recuadros superiores de la figura 3.22 para diferentes valores de  $p$ . Se utiliza el coeficiente de correlación de Pearson para corroborar la linealidad de las distribuciones en esta escala y también para estimar donde comienza el comportamiento gaussiano. Los datos muestran una dependencia lineal suficientemente elevada ( $> 0.999$ ) en las curvas con  $p \leq 0.88805$ . Sin embargo, el valor absoluto de la correlación comienza a decrecer visiblemente para  $p > 0.88805$ , demostrando el cambio paulatino hacia otro tipo de decaimiento.

Para este estudio se utilizaron 33 valores diferentes de  $p$  en el régimen precrítico. Estos

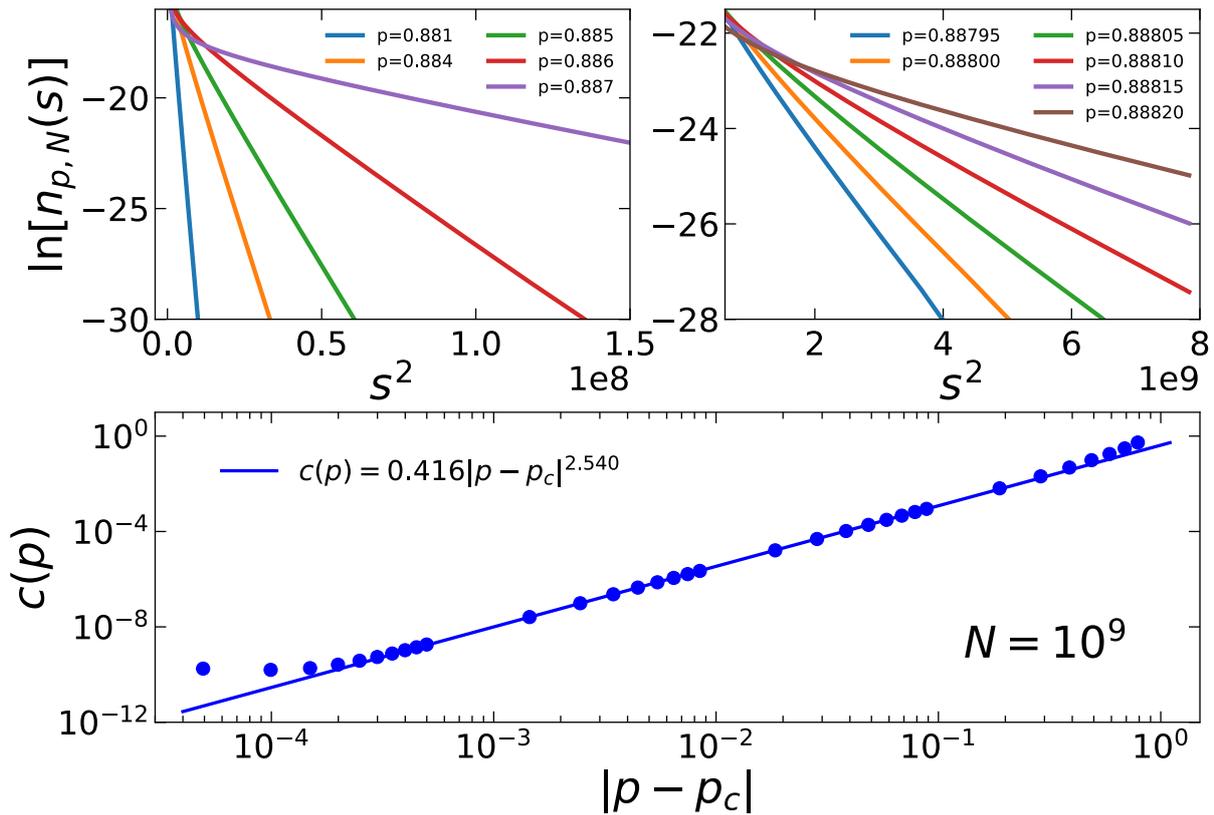


Figura 3.22: En los recuadros superiores se agrega la parte de las distribuciones correspondiente a  $n_{p < p_c, N}(s > s_\xi)$ . Se busca linealizar estos segmentos al presentar la dependencia  $\ln[n_{p, N}(s)]$  vs  $s^2$  para comprobar que siguen un decaimiento gaussiano. Esto se genera para 11 valores diferentes de  $p$ . En el recuadro inferior se muestran los coeficientes  $c(p)$  como función de  $|p - p_c|$ . Estos puntos siguen una ley de potencias cuya forma se incluye en la gráfica. Todos los resultados corresponden a una red de tamaño  $N = 10^9$ .

se reparten en varios segmentos según su posición con respecto a  $p_c$ . El valor de  $c$  correspondiente a cada  $p$  es el valor absoluto de la pendiente que muestran las rectas como en la figura 3.22. En el recuadro inferior de la misma, se agregan los resultados de  $c(p)$  en función de  $|p - p_c|$ . En esta gráfica se pueden distinguir cuatro grupos diferentes de puntos. También se puede ver que existe cierta tendencia de estos a seguir una ley de potencias. Sin embargo, el grupo más cercano al punto crítico presenta datos con una desviación considerable de esta tendencia. Esto se debe a que, como se mencionó antes, se está instaurando el decaimiento en ley de potencias para  $p$ 's muy cercanas a  $p_c$ . Finalmente, se ajusta una recta por mínimos cuadrados a los datos restantes y se encuentra que siguen la relación  $c(p) = 0.416|p - p_c|^{2.540}$ .

De manera similar a como ocurre en percolación clásica, el factor que acompaña a  $-s^2$  en la expresión 3.20 se utiliza para calcular el umbral  $s_\xi$ . Este funge como límite para diferenciar entre los tamaños de componente que contribuyen de manera significativa a los momentos de la distribución y los que no. Esta cantidad sigue una ley de potencias que va como

$$s_\xi \sim |p - p_c|^{-1/\sigma_-^{(4)}} \quad (3.21)$$

donde  $\sigma_-^{(4)}$  es un exponente crítico. Se utiliza el subíndice  $-$  como distintivo propio del régimen precrítico y el superíndice (4) para distinguirlo de los valores que se obtendrán mediante otros métodos (no porque se haya utilizado el Método 4). Ya que se toma a  $c = s_\xi^{-2}$  y dado que el exponente crítico que acompaña a  $c$  es 2.540, entonces  $1/\sigma_-^{(4)} = 1.270$ .

La confirmación del decaimiento gaussiano para  $p$ 's antes de la transición y  $s$ 's mayores que  $s_\xi$  permitió el cálculo del exponente  $\sigma_-^{(4)}$  como resultado final de este procedimiento. Este mismo camino se puede seguir para obtener el exponente relacionado con el régimen postcrítico en este modelo. Sin embargo,  $\sigma$  no es el único parámetro crítico que se puede obtener a partir del análisis sobre las distribuciones  $n(s)$ .

## Determinación del exponente $\tau$

Así como se resaltó antes, los componentes con tamaño  $s > s_\xi$  tienen una probabilidad de existir que decae rápidamente y por eso no contribuyen sustancialmente en los promedios sobre la distribución  $n(s)$ . Al acercarse al punto crítico el decaimiento exponencial o gaussiano se desvanece progresivamente, por lo que la cantidad  $s_\xi$  tiende a infinito como en la expresión 3.21. Esto hace que el comportamiento de la distribución de tamaños sea una ley de potencias que va como

$$n_{p=p_c}(s) \sim s^{-\tau} \quad (3.22)$$

donde  $\tau$  es el exponente crítico asociado a esta cantidad. A continuación, se adecuarán las técnicas de escalamiento para obtener un valor aproximado de  $p_c$  con el Método 2 y uno del exponente  $\tau$  con el Método 3.

Primeramente se generan los puntos pseudocríticos para el cálculo de  $p_c$ . El proceso a seguir se basa en encontrar el valor de  $p$  para el cual la distribución  $n_p(s)$  se aproxima más a una ley de potencias. Esto se realiza para varios valores de  $N$  y produce el conjunto de puntos  $p_c(N)$ . Ya que se trata de tamaños de red finitos, cabe destacar que el umbral  $s_\xi(N)$  de la distribución de tamaños en el punto pseudocrítico es también finito. Por lo que se debe tomar el cálculo de la correlación lineal entre los puntos  $\log[n(s)]$  y  $\log(s)$  antes de este valor. Aún así, el punto en el que se maximiza  $s_\xi$  coincide (o dista muy poco) con el punto en el que se minimiza la correlación lineal, para los distintos valores de  $N$ .

A partir del proceso anterior también se puede calcular el exponente  $\tau$ . Esto se hace de la misma forma que en el Método 3, al recopilar una serie de exponentes efectivos en los puntos pseudocríticos encontrados. De este modo, se utiliza el mínimo en la correlación lineal para encontrar los puntos  $p_c(N)$  y luego obtener las pendientes relacionadas con  $\tau$  en esos valores. A estos exponentes efectivos se les denota por  $\tau(N)$  y, según el Método 3, la diferencia de éstos con el valor crítico sigue una ley de potencias.

En la figura 3.23 se incluyen los resultados obtenidos para los parámetros críticos de  $n_{p=p_c}(s)$ . El recuadro superior corresponde a la distribución  $n(s)$  en el punto pseudocrítico  $p_c(N)$  para cuatro valores distintos de  $N$ . La línea punteada es un segmento de recta que representa a una ley de potencias para el tamaño de red  $N = 10^9$ . El exponente para este tamaño es  $\tau(N = 10^9) = 2.0697$ , el cual es un valor muy cercano al valor límite  $\tau$ .

Las curvas presentadas minimizan la correlación lineal antes del umbral  $s_\xi(N)$  en esta escala. También pasan aproximadamente por los mismos valores antes de  $s = 5 \times 10^4$ . Aún

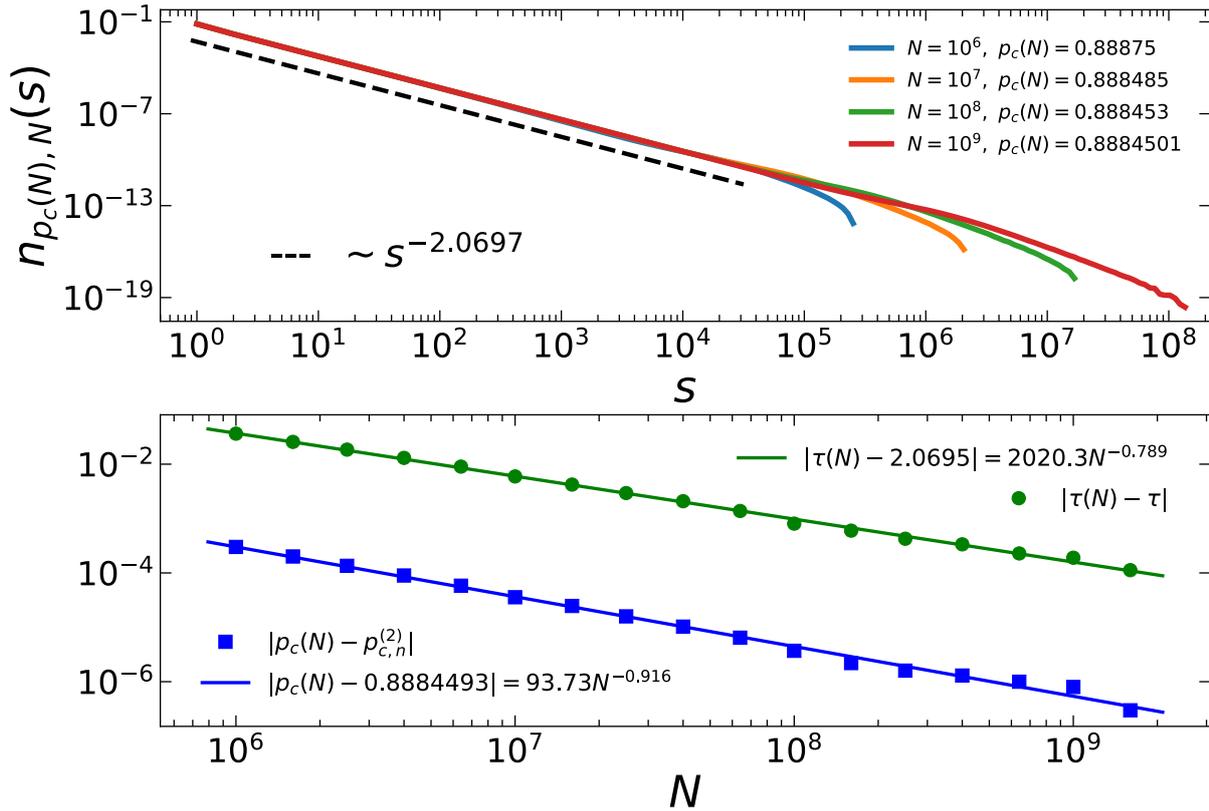


Figura 3.23: En el recuadro superior se muestran las distribuciones  $n_{p,N}(s)$  en el punto pseudocrítico  $p_c(N)$  para cuatro valores diferentes de  $N$ . El segmento de recta punteado corresponde a una ley de potencias con el exponente  $\tau(N = 10^9)$ . En el recuadro inferior se agregan los puntos  $|p_c(N) - p_{c,n}^{(2)}|$  y  $|\tau(N) - \tau|$  como función de  $N$ . Estos siguen una ley de potencias cuyo mejor ajuste se incluye en la gráfica. Los valores límite relacionados con  $n_{p=p_c}(s)$  corresponden al punto crítico  $p_{c,n}^{(2)} = 0.8884493$  y al exponente  $\tau = 2.06955$ .

así, se observa una pequeña desviación del comportamiento en ley de potencias para los tamaños más grandes en cada distribución. Esto se debe al efecto de tamaño finito, el cual disminuye al aumentar el tamaño de red. Otra consecuencia visible al incrementar  $N$  es que disminuye el tamaño relativo del componente finito más grande en las distribuciones. La curva azul para  $N = 10^6$  llega hasta  $\approx 2.8 \times 10^5$ , es decir, el tamaño relativo máximo es  $\approx 0.28$ . Para los siguientes valores de  $N$  decrece a 0.23, luego 0.19 y al final 0.15 para  $N = 10^9$ . Esto confirma un resultado obtenido en la sección pasada.

Los puntos pseudocríticos  $p_c(N)$  y los exponentes efectivos  $\tau(N)$ , obtenidos a partir de distribuciones como las mostradas, se agregan en el recuadro inferior de la figura 3.23. En esta gráfica se expone cada conjunto de datos como las diferencias con su valor límite ( $p_{c,n}^{(2)}$  y  $\tau$ , respectivamente). También se muestran los mejores ajustes para cada grupo de puntos, los cuales arrojan como resultado a  $p_{c,n}^{(2)} = 0.8884493$  y  $\tau = 2.06955$ .

En cuanto a los exponentes que acompañan a estos ajustes, el 0.916 de  $|p_c(N) - p_{c,n}^{(2)}|$  dista mucho de los valores  $\delta$  obtenidos con otras cantidades ( $\approx 0.6$ ). Además, sólo en este caso particular, los puntos pseudocríticos se aproximan al valor límite “por arriba”, es decir, decreciendo. El exponente relacionado con  $|\tau(N) - \tau|$  es 0.789. Este difiere poco del que presenta la expresión  $|\beta(N) - \beta|$  (0.837). Más adelante, así como con los exponentes

$\delta$ , se comprobará que existe cierto patrón en la manera que los exponentes efectivos se aproximan a su valor límite.

### Escalamiento sobre la distribución $n(s)$

Por último, se verificará la validez del escalamiento sobre la distribución de tamaños  $n_{p,N}(s)$ . Esto se llevará a cabo a partir de los parámetros que se calcularon para cada uno de los regímenes a lo largo de esta sección.

Anteriormente se observó que la cantidad  $n(s)$  muestra un comportamiento distinto antes, en las cercanías y después de la transición. En cada caso se hicieron las adecuaciones necesarias para obtener información de los datos correspondientes. Sin embargo, ahora es necesaria una generalización que incluya los distintos casos que se abordaron. Esto se logra con  $n(s)$  siguiendo una relación que va como

$$n_{p,N}(s) = s^{-\tau} f(s/s_\xi) \quad (3.23)$$

donde hay una parte en la que domina una ley de potencias para  $p$ 's cerca de  $p_c(N)$  y hay otra parte con una función de  $s/s_\xi$  solamente. Como se vio antes, la cantidad  $s_\xi$  funge como umbral para los valores de  $s$ . Los componentes con tamaños que sobrepasan este umbral son muy raros y la probabilidad de que existan decae más rápido que una ley de potencias. Por lo que la función de escalamiento  $f(s/s_\xi)$  tiene como casos especiales a una gaussiana o una exponencial dependiendo del lado de la transición que se tome. Al explicitar la dependencia del umbral con  $|p - p_c|$  y despejar la función de escalamiento, se obtiene la expresión

$$s^\tau n_{p,N}(s) = f_\pm(s|p - p_c|^{1/\sigma_\pm}) \quad (3.24)$$

donde el  $\pm$  que acompaña a  $\sigma$  y  $f$  sirve para diferenciar entre los casos precrítico y postcrítico.

En el recuadro izquierdo de la figura 3.24 se muestran los resultados que surgen al aplicar el escalamiento de la ecuación 3.24 sobre los datos  $n_{p,N}(s)$ . Lo anterior se lleva a cabo para el tamaño de red  $N = 1.6 \times 10^9$  y diez valores diferentes de  $p$ . Se toman cinco  $p$ 's del intervalo  $[0.88795, 0.88835]$  en el caso precrítico y cinco del intervalo  $[0.88855, 0.88895]$  para el postcrítico. En la parte superior de la gráfica se encuentran las curvas correspondientes a  $p < p_{c,n}^{(2)}$ , en las cuales resalta la joroba que se revisó antes y el comportamiento de tipo gaussiano. Abajo están las curvas para  $p > p_{c,n}^{(2)}$  con un comportamiento exponencial decreciente. Todas las curvas convergen a un segmento de recta horizontal que se sitúa en 0.065 aproximadamente y el cual representa la parte en ley de potencias de cada una de ellas. A medida que  $p$  se acerca cada vez más a  $p_{c,n}^{(2)} = 0.8884493$ , el máximo valor que toman las curvas sobre el eje horizontal se va situando antes de la bifurcación que distingue a  $p < p_{c,n}^{(2)}$  y  $p > p_{c,n}^{(2)}$ .

El escalamiento sobre las distribuciones  $n_{p,N}(s)$  parece funcionar muy bien en este caso, pero es necesario resaltar algunos detalles. El primero es que sólo se grafican los datos correspondientes a  $s \leq 10^5$  en cada curva. Esto genera el efecto de corrimiento sobre el eje horizontal y mejora la presentación de los resultados. Sin embargo, para las  $p$ 's

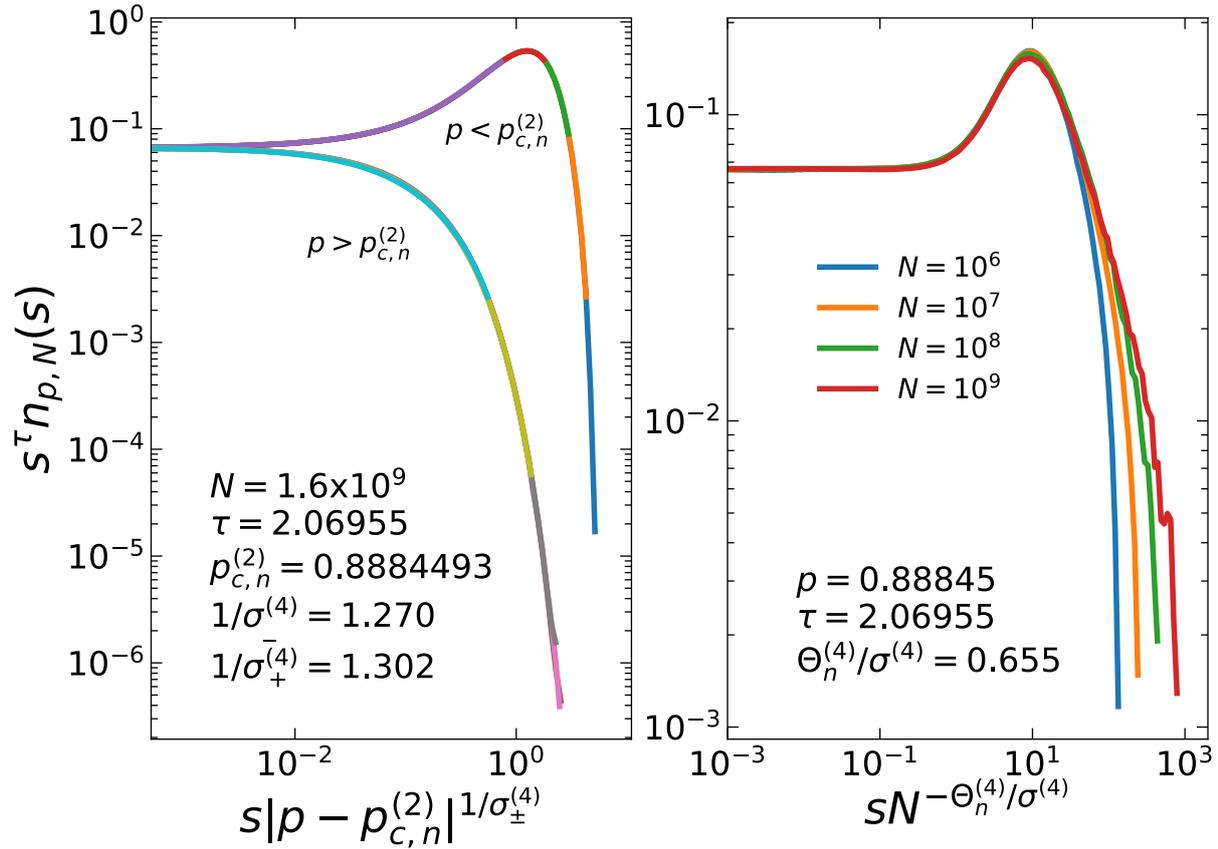


Figura 3.24: Aplicación del escalamiento sobre las distribuciones  $n_{p,N}(s)$ . En el recuadro izquierdo se toman datos con  $N$  fija y  $p$  variable. La función de escalamiento muestra dos comportamientos distintos dependiendo del lado de la transición en el que se encuentre  $p$ . También se obtienen dos valores diferentes para  $\sigma$ . En el recuadro derecho se toman datos con una  $p$  fija muy cercana a  $p_c$  y  $N$  variable. Al igual que en la gráfica anterior, el escalamiento funciona bien mientras se omitan las transiciones entre un tipo de decaimiento y otro. En este caso, el empalme de las curvas es bueno antes del máximo, pero presenta una desviación cada vez mayor después de este. La mayoría de los parámetros críticos utilizados se obtuvieron con anterioridad en esta sección.

más cercanas a  $p_c$  en cada régimen (la curva púrpura antes de la transición y la cyan después de ésta) se tiene un comportamiento mixto en los datos que vienen después de los presentados. Esto quiere decir que se omite la parte concerniente al cambio de decaimiento en estas dos curvas. Otro detalle, un poco más evidente porque se ha resaltado desde el inicio, es que la función de escalamiento muestra comportamientos distintos dependiendo del valor de  $p$ , a diferencia de lo que sucede en el campo medio de percolación clásica. Por último, el exponente  $1/\sigma_+^{(4)}$  se calculó mediante el mejor empalme de las respectivas curvas y no como en el caso precrítico.

La descripción anterior se refiere al caso en el que las distribuciones se toman para una  $N$  fija y  $p$  variable. En este caso, el umbral  $s_\xi$  va como  $|p - p_c|^{1/\sigma}$ . No obstante, el problema se puede abordar desde una perspectiva equivalente, la cual se basa en la premisa dada por la relación  $|p - p_c| \sim N^{-\Theta}$ . Esta premisa sugiere que, si se toma al umbral  $s_\xi$  en función de  $N$  y para una  $p$  fija, dicha cantidad escala como  $N^{-\Theta/\sigma}$  en el punto crítico. Esto conduce a una expresión similar a la dada en 3.24, que va como

$$s^\tau n_{p,N}(s) = f(sN^{-\Theta/\sigma}) \quad (3.25)$$

A partir de la ecuación anterior se puede investigar como es el escalamiento sobre la distribución  $n_{p,N}(s)$  para  $p$  fija y varios valores de  $N$ . En principio, sólo se requiere que la  $p$  elegida sea muy cercana a  $p_c$ . En el recuadro derecho de la figura 3.24 se observan los resultados para  $p = 0.88845$  y cuatro tamaños de red diferentes. Se puede resaltar que, aunque se trata de un valor de  $p$  en el régimen postcrítico, la cercanía a la transición es suficiente como para mostrar un remanente de joroba precrítica. Sin embargo, aunque lentamente con el aumento de  $N$ , se ve que la parte gaussiana después del máximo tiende a desaparecer. Esta parte corresponde al cambio de decaimiento que se comentaba y que se omitió en el caso anterior.

Antes del máximo, por otro lado, se observa que las curvas encuentran un buen empalme bajo los exponentes  $\tau = 2.06955$  y  $\Theta_n^{(4)}/\sigma^{(4)} = 0.655$ . El exponente  $\tau$  utilizado en este estudio se mantiene en las dos gráficas de 3.24, en contraste con  $\Theta_n^{(4)}/\sigma^{(4)}$ , que se calcula a partir del mejor *data collapse* para las curvas presentadas. Al utilizar el valor de este último exponente junto con los resultados de  $1/\sigma_\pm^{(4)}$ , se encuentra que  $\Theta_n^{(4)} \approx 0.5$ . Este coincide con el valor aproximado para esta cantidad con base en el parámetro de orden  $s_1$ . Finalmente, todos los parámetros críticos obtenidos en esta sección se agregan en la tabla 3.9.

Parámetro crítico	Valor
$p_{c,n}^{(2)}$	0.8884493(6)
$\delta_n$	0.916(17)
$\tau$	2.06955(9)
$1/\sigma_-^{(4)}$	1.270(2)
$1/\sigma_+^{(4)}$	1.302(3)
$\Theta_n^{(4)}/\sigma^{(4)}$	0.655(2)

Cuadro 3.9: Resultados correspondientes a los parámetros críticos obtenidos con la distribución de tamaños de componente  $n_{p,N}(s)$ .

### 3.7. Momentos de la distribución $n(s)$

En la sección anterior se encontró que la distribución de tamaños  $n(s)$  presenta una marcada diferencia en sus propiedades antes y después de la transición. Un ejemplo claro de esto es el cambio en el tipo de decaimiento que muestran los componentes de mayor tamaño. Aunque la probabilidad de que existan estos componentes decae rápidamente con  $s$ , se prevé que los momentos de la distribución también exhiben este cambio de comportamiento al atravesar el punto crítico.

La obtención de los momentos de  $n(s)$  es un tema de interés en este modelo. Estos sintetizan los rasgos más importantes de la distribución de tamaños y sus propiedades brindan información útil sobre el sistema. En particular, los exponentes que caracterizan

su divergencia en  $p_c$  están relacionados con los que se han calculado en secciones pasadas, lo cual se abordará ampliamente en la siguiente sección. Por lo pronto, aquí se aplicarán las técnicas de escalamiento que se han manejado a lo largo del capítulo, sólo que ahora sobre los datos correspondientes a los primeros momentos de la distribución.

El  $j$ -ésimo momento de  $n(s)$  se representa mediante  $M_j$  y se obtiene de la siguiente manera

$$M_j(p) = \sum_s s^j n_p(s) \quad (3.26)$$

donde  $j$  es un número entero y la suma se realiza sobre todos los tamaños de componente finitos  $s$ . Para este estudio se extraen los datos correspondientes a  $j = 2, 3, 4$ . Sin embargo, las cantidades más importantes se obtienen a partir de razones entre ellos. Tal es el caso del tamaño de componente medio  $\chi$  y el tamaño de componente característico  $s_\xi$ .

El tamaño medio  $\chi$  corresponde a la razón  $M_2/M_1$  y también se puede expresar como

$$\chi = \frac{\sum_s s^2 n(s)}{\sum_s s n(s)} = \sum_s s \frac{sn(s)}{\sum_s sn(s)} = \sum_s s w(s) \quad (3.27)$$

donde la cantidad  $w(s)$  es la probabilidad de que un componente, al cual pertenece un nodo arbitrario, contenga exactamente  $s$  nodos. Así, al calcular el primer momento o media de esta distribución de probabilidades también se obtiene como resultado el tamaño medio.

De manera similar, el tamaño característico  $s_\xi$  se definió en la sección anterior como el umbral que existe entre los componentes que tienen un comportamiento crítico y los que no. Asimismo, una propiedad subyacente al escalamiento en este modelo es que la mayoría de las cantidades de interés pueden ser calculadas utilizando simplemente un "tamaño típico", el cual crece a infinito al acercarse a  $p_c$ . Este tamaño típico es  $s_\xi$  y se pueden conseguir aproximaciones a esta cantidad mediante la expresión

$$s_{\xi k} = M_{k+2}/M_{k+1}, \quad k \geq 1 \quad (3.28)$$

que se utilizará más adelante para el cálculo numérico.

De acuerdo con su definición,  $n(s)$  se refiere sólo a componentes de tamaño finito, por lo que en el cálculo de sus momentos se omite también el tamaño del componente más grande. De igual modo, sólo se extraen momentos  $M_j$  con  $j > 1$  porque la cantidad  $M_1$  se relaciona fácilmente con el parámetro de orden. Esta relación está dada por la expresión 3.19 y no aporta nuevos exponentes al estudio. No obstante, se utiliza para corroborar que  $s_1$  se obtuvo correctamente y en conjunción con  $M_2$  para obtener  $\chi$ . Por otro lado, cabe destacar que los datos de  $\chi = M_2/M_1$  y  $s_\xi = M_{k+1}/M_k$ ,  $k > 1$  corresponden a la media de las razones correspondientes, no a la razón entre sus medias.

En la figura 3.25 se observan algunos de los resultados para las cantidades descritas. En el recuadro izquierdo se presentan las cantidades  $\chi$ ,  $s_{\xi 1}$  y  $s_{\xi 2}$  en función de  $p$  para el tamaño de red  $N = 10^8$ . Las tres curvas tienen su valor máximo en las cercanías de  $p_c$ , aunque la posición de la máxima amplitud en  $\chi(p)$  está un poco antes que la correspondiente en las curvas  $s_\xi(p)$ . Por otro lado, sobre el eje vertical, la posición de estos puntos crece al aumentar  $k$  en las razones  $M_{k+1}/M_k$  correspondientes.

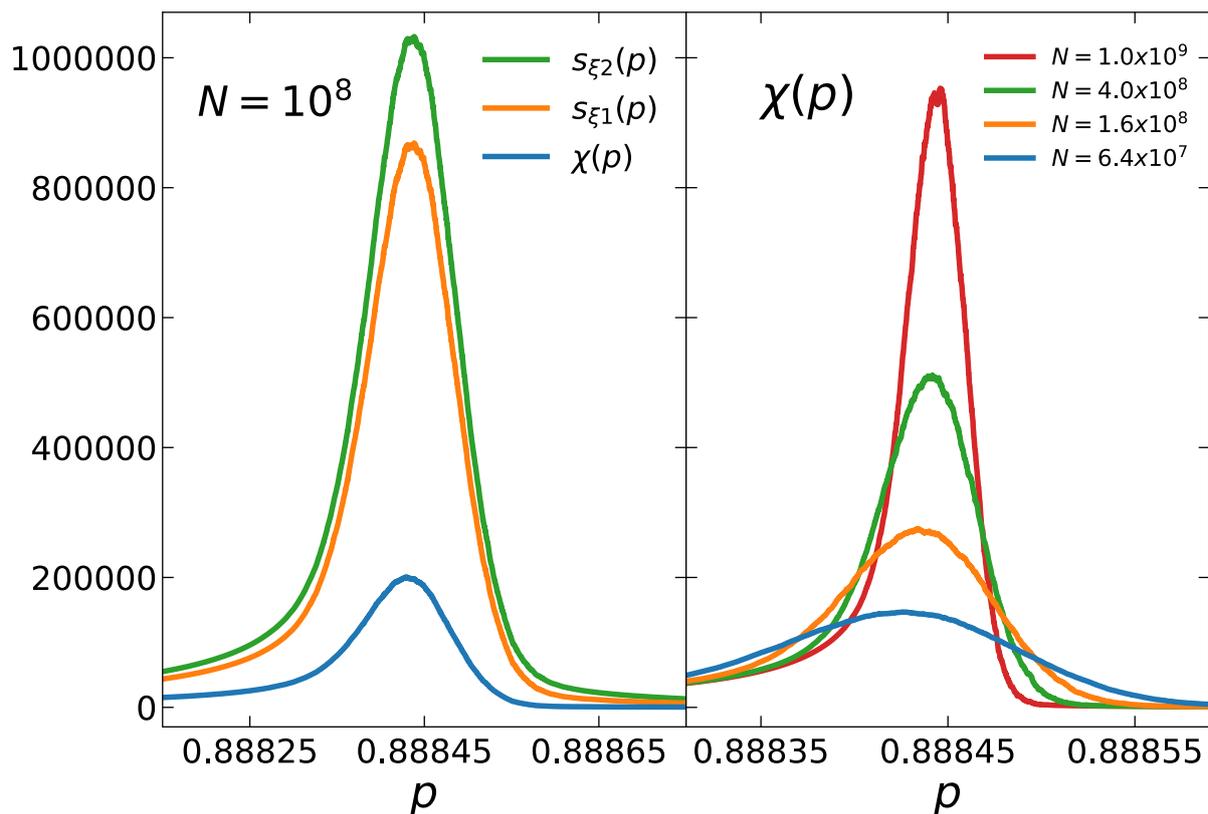


Figura 3.25: En el recuadro izquierdo se agrega la dependencia que tiene  $\chi$ ,  $s_{\xi_1}$  y  $s_{\xi_2}$  con  $p$  para el tamaño de red  $N = 10^8$ . Todas las curvas tienen un máximo cercano a  $p_c$ . Además, se observa un orden de magnitud de diferencia entre los máximos para  $\chi$  y  $s_{\xi}$ . En el recuadro derecho se muestra  $\chi(p)$  para diferentes valores de  $N$ . En este caso, los máximos crecen con  $N$  a la vez que se acercan a  $p_c$  por la izquierda. También destaca una caída marcada hacia cero justo después de la transición, en comparación con su crecimiento precrítico.

En particular, se puede ver que existe un orden de magnitud de diferencia entre el máximo de  $\chi(p)$  y los de  $s_{\xi}(p)$ . Esto quiere decir que, cerca de  $p_c$  y para un sistema con  $N = 10^8$  nodos, el tamaño medio entre los componentes de la red es poco más que un milésimo de  $N$  y el umbral  $s_{\xi}$  que distingue el comportamiento crítico está alrededor de  $N/100$ . Esto último se puede comparar con lo obtenido en la distribución  $n(s)$  para este valor de  $N$  en la figura 3.23 (recuadro superior, curva verde).

En el recuadro derecho de la figura 3.25 se agregan las curvas  $\chi(p)$  para distintos valores de  $N$ . Hay que recordar que al inicio del capítulo se resaltó que el número de realizaciones  $N_r$  decrece con el aumento del tamaño de red. Aunque esto no presenta un problema, se pueden ver los efectos de un error estándar mayor para los datos más cercanos al punto crítico en las  $N$ 's más grandes. Además, no es claro a simple vista, pero los máximos que presentan las curvas se aproximan a  $p_c$  por el lado izquierdo. Esto se podía predecir al recordar también que los máximos de los tamaños finitos  $s_R(p)$  tienden al punto crítico por la izquierda, para toda  $R$ .

En cuanto a la amplitud de los máximos, es inteligible que éstos crecen con el aumento de  $N$ . Por lo que, a diferencia de lo obtenido para los tamaños  $s_R$ , los valores de  $\chi(p)$  tienden a

infinito con  $N \rightarrow \infty$  en la parte cercana a  $p_c$ . En cualquier otro caso el orden de las curvas cambia, estos valores decrecen y tienden a una ley de potencias. Asimismo, la caída que presentan las curvas después de la transición es más repentina que el crecimiento precrítico mostrado. Se puede ver en la gráfica que este comportamiento se vuelve más marcado al aumentar el tamaño de la red. Por último, cabe recalcar que aun cuando se pone como ejemplo a  $\chi(p)$ , el comportamiento que muestran estas cantidades (los momentos y las razones presentadas entre ellos) es aproximadamente el mismo al aumentar el tamaño del sistema.

## Aplicación del Método 1

Ahora se utilizará el Método 1 para obtener los parámetros críticos que describen a estas cantidades alrededor de  $p_c$ . Así que, como se ha manejado anteriormente, primero se calculan la correlación y la curvatura para los datos correspondientes. En el recuadro pequeño de la figura 3.26 se observan los resultados de  $|r_\chi(p)|$  y  $\kappa_\chi(p)$  para valores cercanos al punto crítico. Aquí los momentos de la distribución  $n(s)$  muestran una correlación positiva en  $p_c$ , en contraste con lo obtenido para  $s_R(N)$  en la sección 3.4. Esto se debe a que sus valores crecen con  $N$  en esta región, como se observó en la figura 3.25.

Los resultados muestran que  $r_\chi(p)$  toma su valor máximo en  $p_{c,\chi}^{(1)} = 0.8884463$ . Antes de este valor, la correlación lineal entre  $\log(\chi)$  y  $\log(N)$  crece desde  $r_\chi \approx 0.6$  hasta ser casi la unidad. Mientras que para valores de  $p > p_{c,\chi}^{(1)}$  se tiene un decrecimiento abrupto desde el máximo hasta  $r_\chi \approx -0.9$  en el intervalo mostrado (las correlaciones son negativas después del mínimo en la curva  $|r_\chi(p)|$ ). Esto resalta la caída en el valor de  $\chi$  justo después de  $p_c$ , la cual se vuelve cada vez más repentina con el aumento de  $N$ . Por el contrario, existe una pequeña “meseta” en  $|r_\chi(p)|$  para una vecindad muy cercana a  $p_{c,\chi}^{(1)}$ . Esta abarca un intervalo aproximado  $[0.888425, 0.888465]$  y corresponde al segmento de  $p$  donde  $\chi(N)$  crece monótonamente con  $N$ . Por otro lado, la curvatura presenta valores muy cercanos a cero en la transición y la posición de su mínimo coincide con  $p_{c,\chi}^{(1)}$ . Además, se observa que el máximo en  $\kappa_\chi(p)$  comparte su posición con el mínimo en  $|r_\chi(p)|$ , o bien, con el punto en el que la correlación se vuelve nula.

En la gráfica principal de la misma figura se observa la dependencia de  $\chi$  con  $N$  para cinco valores distintos del parámetro de control. Los círculos verdes corresponden al tamaño medio en  $p_{c,\chi}^{(1)} = 0.8884463$ , esto es, para el valor de  $p$  con la mayor correlación lineal en esta escala. Estos puntos siguen una ley de potencias representada por la recta en el mismo color y cuyo ajuste produce los parámetros  $\gamma^{(1)}\Theta_\chi^{(1)} = 0.70418$  y  $F_\chi(0) = 0.438$ . El primero está relacionado con el exponente crítico del tamaño medio  $\chi$  y el segundo es el valor de su función de escalamiento en el origen. También se incluyen los puntos  $\chi(N)$  para dos valores antes y después de la transición. Estos grupos de puntos muestran una desviación clara de la recta verde, en especial para los tamaños de red más grandes. Además, con respecto a la curvatura para  $p$ 's equidistantes a  $p_c$ , se constata que los datos correspondientes al régimen postcrítico tienen una mayor torsión que los precríticos.

El cálculo anterior se realizó de la misma forma para las cantidades  $M_j$  con  $j = 2, 3, 4$  y  $s_{\xi k}$  con  $k = 1, 2$ . Las propiedades descritas con respecto a la correlación y la curvatura del tamaño medio se siguen de manera muy similar por las otras cantidades mencionadas. En

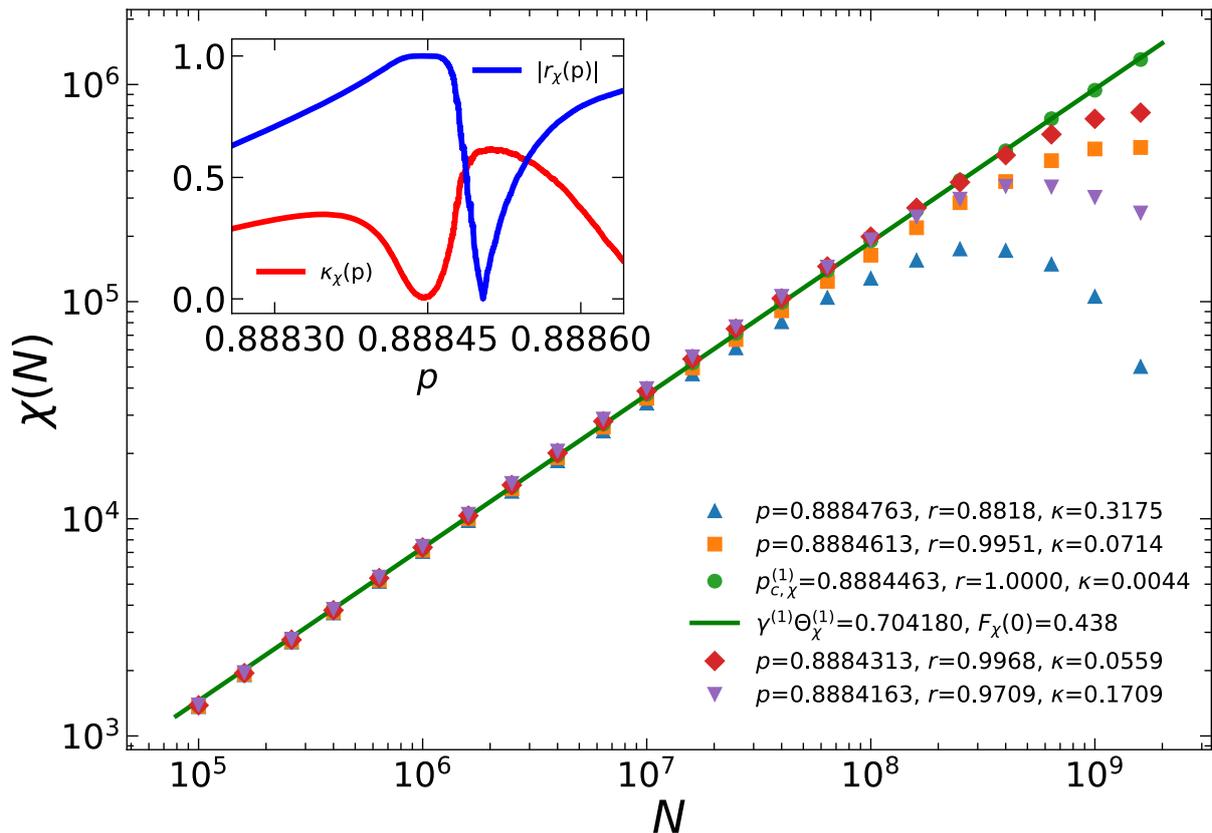


Figura 3.26: Tamaño medio  $\chi(N)$  para cinco valores diferentes de  $p$ . En verde se agregan los puntos correspondientes a  $p = p_{c,\chi}^{(1)}$  y la recta en el mismo color es el mejor ajuste en ley de potencias para ellos. También se añaden los datos para valores de  $p$  antes y después de la transición. Estos muestran una desviación con respecto a la recta verde para  $N$ 's grandes. En el recuadro pequeño se observan las curvas del coeficiente de correlación de Pearson como  $|r_{\chi}(p)|$  y la curvatura  $\kappa_{\chi}(p)$  asociados a  $\chi$  para un intervalo de  $p$  cercano a  $p_c$ .

particular, todos los grupos de puntos asociados a la mayor correlación lineal presentan un valor de  $r(p_c) > 0.9999$ . Aunque de manera general muestran el mismo comportamiento, la diferencia está en los valores que sus parámetros críticos toman en la transición.

En el caso de la aproximación obtenida para los puntos críticos, los momentos  $M_j$  no muestran un patrón ascendente o descendente con  $j$  como los puntos  $p_{c,s_R}$  con  $R$ . No obstante, se encuentra que  $p_{c,M_2}^{(1)} = p_{c,\chi}^{(1)}$  y que  $p_{c,s_{\xi 1}}^{(1)} = p_{c,s_{\xi 2}}^{(1)}$ . Por otro lado, el mejor ajuste en ley de potencias arroja un exponente y un valor en el origen para la función de escalamiento. Con respecto a los momentos  $M_j$ , los exponentes asociados  $\phi_j^{(1)}\Theta_{M_j}^{(1)}$  crecen con el aumento de  $j$  como se observa en la tabla 3.10. Esto indica que al tomar momentos de orden cada vez mayor se producen puntos cerca de  $p_c$  que divergen cada vez más rápido. En cuanto a los valores de  $F_{M_j}(0)$ , estos decrecen con el aumento de  $j$ . Lo anterior parece contradictorio debido a que los máximos de  $M_j(p)$  crecen con  $j$ . Sin embargo, esto sugiere que el máximo de la función límite  $F_{M_j}$  no toma como posición el origen.

Los exponentes y los valores  $F_{\chi}(0)$  también se calcularon para el tamaño medio y el tamaño característico del sistema. Los resultados muestran valores cercanos para  $s_{\xi 1}$  y  $s_{\xi 2}$ ,

en comparación con los de  $\chi$ . Los exponentes asociados a la divergencia de  $M_{k+1}/M_k$  y los valores  $F_{M_{k+1}/M_k}(0)$  crecen con el aumento de  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), sólo que la diferencia sucesiva entre ellos se vuelve menor. Lo que lleva a que la diferencia entre los exponentes  $\Theta_{s_\xi}^{(1)}/\sigma^{(1)}$  calculados para cada aproximación del tamaño típico sea menor al 1%. No obstante, este nivel de afinidad no se mantiene con respecto a los valores de  $F_X(0)$  correspondientes.

Por último, se busca el mejor *data collapse* para obtener el exponente  $\Theta$  y visualizar qué tan bueno es el empalme de las curvas para cada cantidad. Los valores numéricos resultantes se presentan en la tabla 3.10, al igual que los demás parámetros críticos de interés calculados con el Método 1. Con respecto a la visualización del ajuste, este se agrega en la figura 3.28 para el tamaño medio  $\chi$ .

Los exponentes  $\omega^{(1)}$  y  $\Theta_X^{(1)}$  se desacoplaron a través de los ajustes para el mejor empalme de curvas  $F_X$ . Aun así, las propiedades descritas anteriormente se mantienen para los exponentes  $\omega^{(1)}$ . Esto ya que el valor encontrado de  $\Theta_X^{(1)}$  es aproximadamente el mismo para cada cantidad  $X$ .

Adicionalmente, se puede ver que la diferencia entre los exponentes  $\gamma^{(1)}$  (tamaño medio  $\chi$ ) y  $1/\sigma^{(1)}$  (tamaño característico  $s_\xi$ ) es muy pequeña comparada con el caso clásico, en el que  $\gamma^{ER} = 1$  y  $1/\sigma^{ER} = 2$ . Se resalta esta diferencia porque una de las características importantes del modelo explosivo es que el valor encontrado para  $\beta^{(1)}$  también es muy pequeño. Aunque los detalles se abordarán después, esto muestra indicios de una buena correspondencia para las relaciones de escalamiento.

Cantidad X	$p_{c,X}^{(1)}$ 0.88844...	$F_X(0)$	$\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	$\Theta_X^{(1)}$
$M_2$	63	0.305(8)	0.7189(15)	1.5383	0.467
$M_3$	66	0.112(3)	1.5885(14)	2.5998	0.479
$M_4$	41	0.039(1)	2.5002(16)	4.3032	0.467
$\chi$	63	0.438(7)	0.7042(10)	1.4856	0.474
$s_{\xi 1}$	73	0.645(14)	0.7642(12)	1.5855	0.482
$s_{\xi 2}$	73	0.705(16)	0.7688(13)	1.5976	0.481

Cuadro 3.10: Resultados correspondientes a los momentos  $M_j$  con  $j = 2, 3, 4$ , el tamaño medio  $\chi$  y dos aproximaciones al tamaño típico  $s_{\xi k}$  con  $k = 1, 2$ . La primera columna muestra las cantidades descritas, en las siguientes tres están los parámetros críticos obtenidos a través del Método 1 y en las últimas dos se presentan los valores producidos al desacoplar los exponentes  $\omega^{(1)}$  y  $\Theta_X^{(1)}$  mediante el mejor empalme de las curvas  $F_X$ .

## Aplicación del Método 2

Ahora se empleará el segundo método de las técnicas de escalamiento sobre los datos relacionados con  $M_{j=2,3,4}$ ,  $\chi$  y  $s_{\xi k=1,2}$ . El manejo de dichos datos permite la extracción de los puntos pseudocríticos  $p_{c,X}(N)$  correspondientes. En este caso, estos puntos se definen a través de los máximos en las curvas  $X(p)$ . La diferencia de estos valores con el punto crítico  $p_{c,X}^{(2)}$  y la amplitud de los máximos  $X_{max}$  siguen una ley de potencias con  $N$ . El propósito de esta sección es encontrar los parámetros críticos asociados con este hecho.

En la figura 3.27 se muestran los resultados para el tamaño medio  $\chi$  y dos aproximaciones para el tamaño típico  $s_\xi$ . El recuadro superior muestra la diferencia  $|p_{c,X}(N) - p_{c,X}^{(2)}|$  como función de  $N$ . Cada grupo de puntos se muestra con un color diferente. En verde y naranja se agregan los que corresponden a  $s_{\xi_1}$  y  $s_{\xi_2}$ , respectivamente. Tal es la cercanía entre estos puntos que a simple vista parecen coincidir para cada valor de  $N$ . Aunque esto se cumple para la mayoría, realmente difieren un poco para las  $N$ 's más pequeñas. En cambio, los puntos pseudocríticos de  $\chi$  (triángulos azules) distan claramente de los otros dos. Como se mencionó anteriormente, se puede ver que los máximos de  $\chi(p)$  se presentan antes que los de  $s_\xi(p)$  para cada valor de  $N$  mostrado. Por último, pese a que también se trata de una razón entre momentos sucesivos, el tamaño medio no exhibe un patrón similar al tamaño característico.

Asimismo, se toman los mejores ajustes por mínimos cuadrados para cada cantidad. Estos ajustes se representan mediante una recta en escala doble logarítmica. De aquí surgen los parámetros  $p_{c,X}^{(2)}$  y  $\delta_X$ . El primero es el punto crítico encontrado para la cantidad  $X$ . En este caso, se tiene que  $p_{c,X}^{(2)} = 0.8884510$ ,  $p_{c,s_{\xi_1}}^{(2)} = 0.8884506$  y  $p_{c,s_{\xi_2}}^{(2)} = 0.8884505$ . Estos límites se encuentran muy cercanos entre sí y se nota un orden descendente entre ellos al aumentar  $k$  en  $M_{k+1}/M_k$ . Mientras que el exponente  $\delta_X$  con que decaen los puntos  $|p_{c,X}(N) - p_{c,X}^{(2)}|$  crece con el aumento de  $k$  en estas razones. Los respectivos valores encontrados son  $\delta_\chi = 0.536$ ,  $\delta_{s_{\xi_1}} = 0.587$  y  $\delta_{s_{\xi_2}} = 0.589$ . Aunque se distingue un cierto patrón en el ordenamiento, en este caso es más relevante la cercanía entre los valores para  $s_{\xi_1}$  y  $s_{\xi_2}$ .

De igual manera, los resultados concernientes a la amplitud de los máximos se muestran en el recuadro inferior de la misma figura. La diferencia más evidente con la gráfica de arriba es que los datos exhiben un crecimiento con  $N$ , por lo que estas cantidades divergen a infinito en  $p = p_c$ . Similarmente, los puntos para  $s_{\xi_1max}(N)$  y  $s_{\xi_2max}(N)$  presentan valores cercanos entre sí. Además están un orden de magnitud por encima de  $\chi_{max}(N)$  para las  $N$ 's más grandes. El mejor ajuste para cada grupo de puntos muestra que  $\gamma^{(2)}\Theta_\chi^{(2)} = 0.6891$ ,  $\Theta_{s_{\xi_1}}^{(2)}/\sigma_1^{(2)} = 0.7557$  y  $\Theta_{s_{\xi_2}}^{(2)}/\sigma_2^{(2)} = 0.7601$ . Por lo que, aun cuando las tres rectas tienden a infinito, la roja se va separando cada vez más de las otras dos.

Finalmente, a partir de los parámetros críticos obtenidos por el Método 2, se buscará el empalme de las curvas  $F_X$  para las cantidades abordadas en esta sección. Así se obtendrá el valor del exponente  $\Theta_X^{(2)}$  relacionado con el mejor ajuste y, en consecuencia, se podrá desacoplar del exponente  $\omega^{(2)}$ .

Una vez más se emplea el tamaño medio  $\chi$  como representante en el estudio para varios valores de  $N$ . Se utilizan los parámetros críticos  $p_{c,\chi}$  y  $\gamma\Theta_\chi$  obtenidos independientemente en los Métodos 1 y 2. Se generan las curvas  $F_\chi$  al tomar la dependencia de  $N^{-\gamma\Theta_\chi}\chi(p)$  contra  $(p - p_{c,\chi})N^{\Theta_\chi}$ , como se especifica en la expresión 3.4 para el escalamiento de tamaño finito. Esto se aplica sobre cada uno de los 22 valores de  $N$  situados en el intervalo  $[10^5, 1.6 \times 10^9]$  y los resultados se agregan en la figura 3.28. En la parte superior se muestran los datos obtenidos para el Método 1 y la parte inferior para el Método 2. Como comparación entre estos, se puede apreciar un mejor empalme de forma general mediante el segundo método, mientras que el primero funciona bien sólo en las cercanías del punto crítico y después de éste.

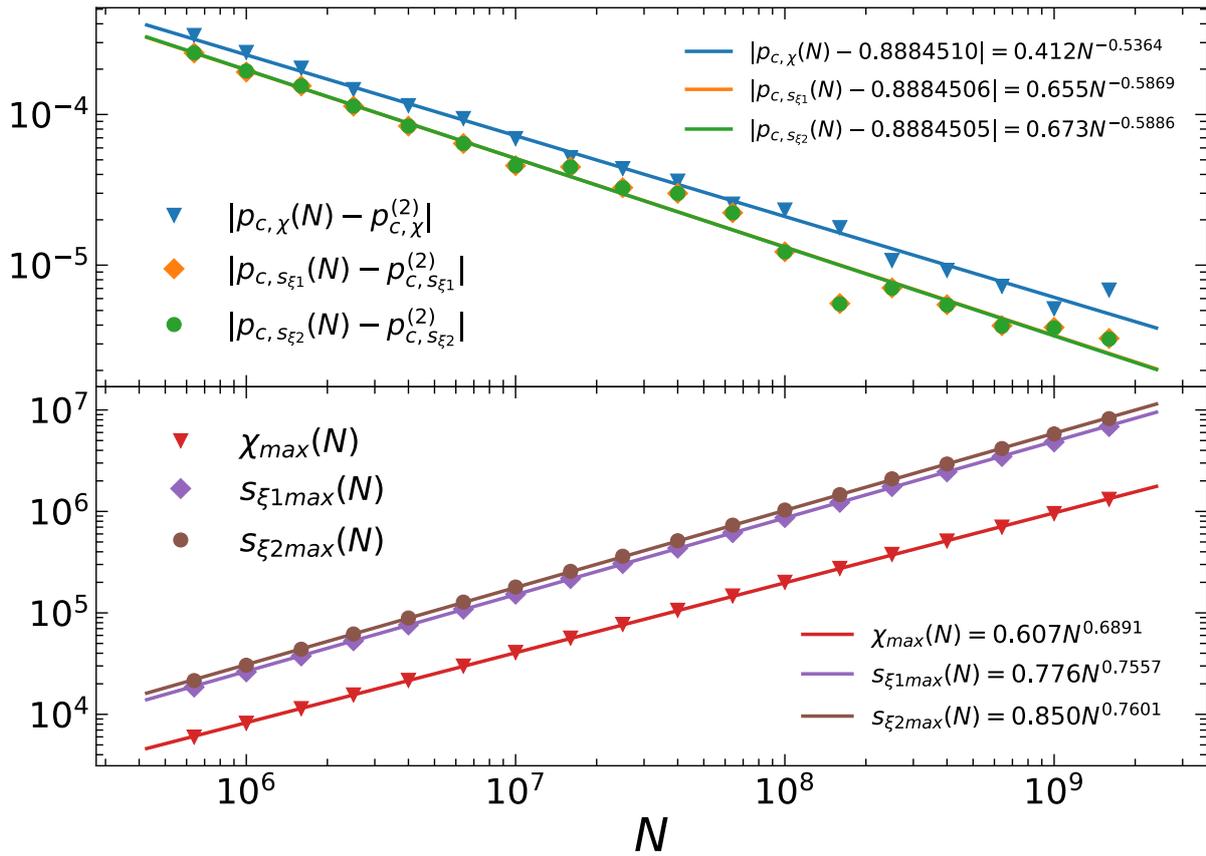


Figura 3.27: Resultados obtenidos al aplicar el Método 2 sobre el tamaño medio  $\chi$  y el tamaño característico con  $s_{\xi_1}$  y  $s_{\xi_2}$ . En el recuadro superior se muestra la diferencia que existe entre los puntos pseudocríticos de cada cantidad  $X$  y su límite  $p_{c,X}^{(2)}$ , en función de  $N$ . El decaimiento confirma la aproximación al punto crítico. En el recuadro inferior se agregan las máximas amplitudes encontradas para  $X(p)$  con dependencia en  $N$ . Estas se denotan como  $X_{max}(N)$  y crecen con el tamaño del sistema, lo cual indica la divergencia de estas cantidades en  $p = p_c$ . Las rectas en esta escala son el mejor ajuste en ley de potencias para cada grupo de puntos.

El cálculo anterior produjo los exponentes  $\Theta_\chi^{(1)} = 0.474$  y  $\Theta_\chi^{(2)} = 0.499$ , los cuales se muestran también en la figura. La diferencia entre ellos es del 5% y, en este caso, el segundo  $\Theta_\chi$  es más cercano al valor previsto para esta cantidad ( $\Theta = 0.5$ ). De igual manera, los valores de  $\gamma$  obtenidos con cada método tienen una diferencia entre sí del 7%. Estos se calculan a partir de la razón entre  $\gamma\Theta_\chi$  y el  $\Theta_\chi$  recién generado. Todos los parámetros correspondientes al Método 2 se agregan en la tabla 3.11.

Los resultados mostrados en esta tabla presentan valores consistentes y con un error más pequeño para las cantidades  $M_2$ ,  $\chi$ ,  $s_{\xi_1}$  y  $s_{\xi_2}$ . Con estas, el punto crítico toma valores poco después de  $p = 0.88845$  y los exponentes  $\Theta_X^{(2)}$  se encuentran más cerca a 0.5. Por otro lado, los momentos más elevados presentan cambios repentinos en su evolución, por lo que el promedio no los suaviza tan bien alrededor de  $p_c$ . Aún así, representan una buena aproximación. También se puede distinguir que la mayoría de los exponentes  $\delta_X \approx 0.6$ , lo cual reafirma la idea de que  $\delta \neq \Theta$  en el modelo explosivo.

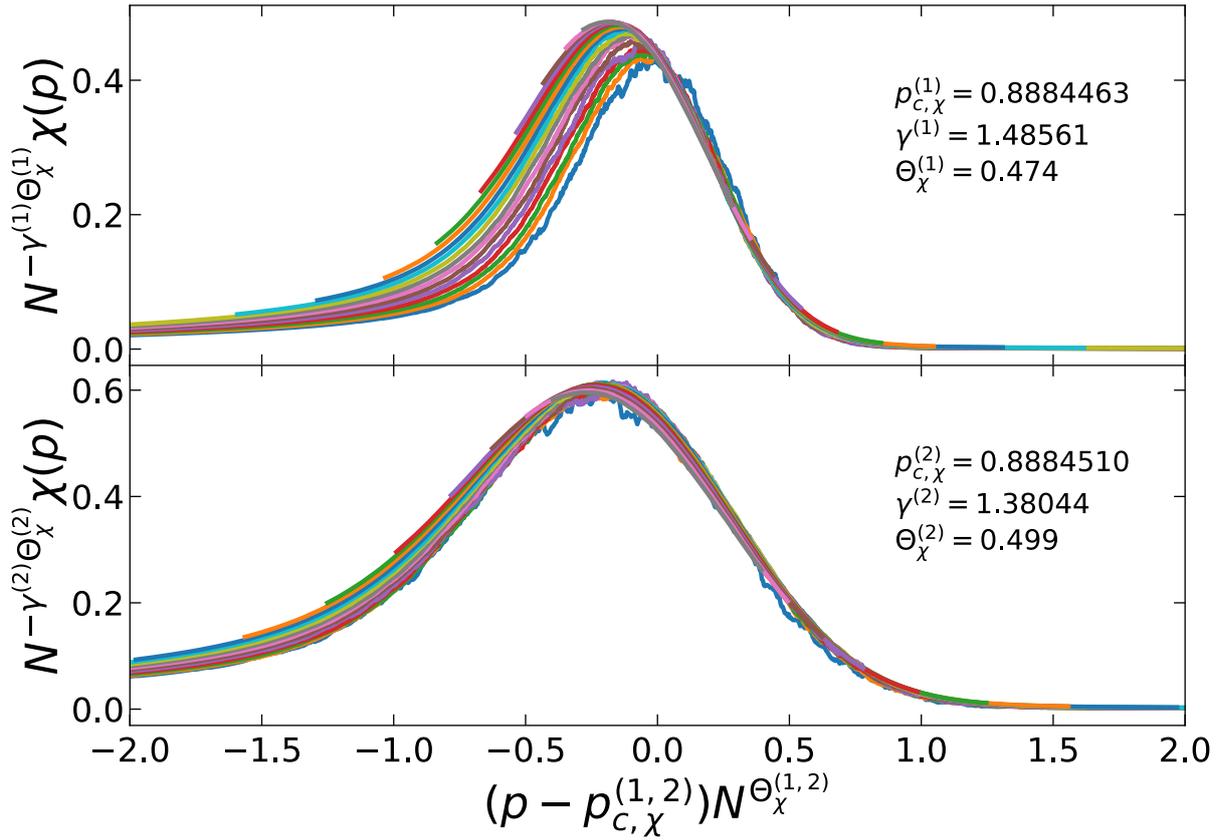


Figura 3.28: Mejor ajuste para el empalme de las curvas  $\chi(p, N)$ . En el recuadro superior se muestra el resultado con los parámetros críticos obtenidos por el Método 1. Este minimiza la diferencia en los valores de  $F_\chi(0)$ . En el Método 2, por el contrario, se busca escalar los puntos pseudocríticos definidos por el máximo de las curvas para  $\chi$ . El mejor *data collapse* se incluye en el recuadro inferior. Los superíndices (1) y (2) denotan el método utilizado.

Cantidad X	$p_{c,X}^{(2)}$ 0.8884...	$\delta_X$	$\omega^{(2)}\Theta_X^{(2)}$	$\omega^{(2)}$	$\Theta_X^{(2)}$
$M_2$	504(9)	0.580(13)	0.6991(15)	1.4489	0.483
$M_3$	476(25)	0.642(45)	1.5899(15)	2.9065	0.547
$M_4$	467(29)	0.665(50)	2.5271(43)	4.2804	0.590
$\chi$	510(13)	0.536(12)	0.6891(11)	1.3804	0.499
$s_{\xi 1}$	506(12)	0.587(20)	0.7557(12)	1.4943	0.506
$s_{\xi 2}$	505(12)	0.589(20)	0.7601(13)	1.5084	0.504

Cuadro 3.11: Resultados correspondientes a los momentos  $M_j$  con  $j = 2, 3, 4$ , el tamaño medio  $\chi$  y dos aproximaciones al tamaño típico  $s_{\xi k}$  con  $k = 1, 2$ . La primera columna muestra las cantidades descritas, en las siguientes tres están los parámetros críticos obtenidos a través del Método 2 y en las últimas dos se presentan los valores producidos al desacoplar los exponentes  $\omega^{(2)}$  y  $\Theta_X^{(2)}$  mediante el mejor empalme de las curvas  $F_X$ . Nótese que para el modelo explosivo  $\delta \neq \Theta$ .

Los métodos abordados se basan específicamente en el manejo de datos sobre el punto crítico o muy cerca de este. Sin embargo, los resultados que surgen al aplicar el escalamiento son favorecedores sólo por segmentos y no en la totalidad de las funciones  $F_X$ . Es por eso que se busca también caracterizar la transición para las partes pre- y postcrítica por separado.

### Aplicación del Método 3

En secciones anteriores se ha llegado a la conclusión que las cantidades más importantes del modelo muestran un comportamiento diferente antes y después de la transición. Esto en el sentido de presentar exponentes críticos que dependen del régimen tomado. Para apoyar o contradecir este hecho, el último paso es aplicar el Método 3 sobre los momentos de  $n(s)$  y algunas de las razones entre ellos.

Primero se toman las cantidades de interés en el régimen precrítico (denotadas como  $X_-$ ) y postcrítico (como  $X_+$ ) por separado. La meta es encontrar la tendencia que siguen los exponentes efectivos con el aumento de  $N$ , dados en la expresión 3.9. De tal manera que se utilizan las cantidades en escala doble logarítmica para facilitar la presentación. En la figura 3.29 se agregan los datos para el tamaño medio  $\chi$  en función de  $|p - p_{c,\chi}^{(3)}|$ . El Método 3 no produce este valor de  $p_c$ , sino que lo toma de alguno de los otros métodos descritos. En este caso,  $p_{c,\chi}^{(3)}$  corresponde al punto crítico calculado a partir de  $\chi$  por el Método 2.

A diferencia de la figura 3.18 generada para el tamaño  $s_2$ , en esta se aprecia una mayor diferencia entre las dos gráficas. En el recuadro superior se agregan los datos correspondientes al régimen precrítico para nueve valores distintos de  $N$ . Estas curvas muestran una parte horizontal relacionada con  $\chi_-(p)$  en las cercanías del máximo y una región en la parte derecha donde se instaura la ley de potencias. En medio de estos dos comportamientos surge una pequeña joroba que sobresale de la recta límite. Es decir, si se tuviera un pequeño segmento de recta móvil para aproximar a los distintos puntos sucesivos en la curva, esta tendría una pendiente muy cercana a cero en la izquierda, decrecería gradualmente hasta llegar a un mínimo y luego subiría un poco para asentarse en  $-\gamma_-$  en la derecha. La aparición de esta joroba, aunque pequeña en este caso, es una característica que distingue al modelo explosivo sobre el clásico. El segmento de recta punteada en esta gráfica representa una ley de potencias con el exponente  $\gamma_-(N = 1.6 \times 10^9)$ .

Por otro lado, en el recuadro inferior se muestran las curvas con los datos  $\chi_+(p)$  para los mismos nueve valores de  $N$ , correspondientes a los más grandes que se simularon. El comportamiento que siguen los datos al alejarse del punto crítico es similar al descrito para el caso precrítico. Sin embargo, la diferencia principal es que la joroba que sirve de antesala a la ley de potencias destaca bastante. Tanto que podría confundirse con un comportamiento en ley de potencias intermedio. Aun así, la región donde se presenta esa parte de la curva se ve reducida al aumentar el tamaño del sistema. Como se mencionó antes, esta joroba pronunciada corresponde a una caída abrupta después de la transición, la cual se vuelve más marcada con el aumento de  $N$ . Al igual que en la gráfica de arriba, el segmento punteado representa una ley de potencias con el exponente efectivo calculado

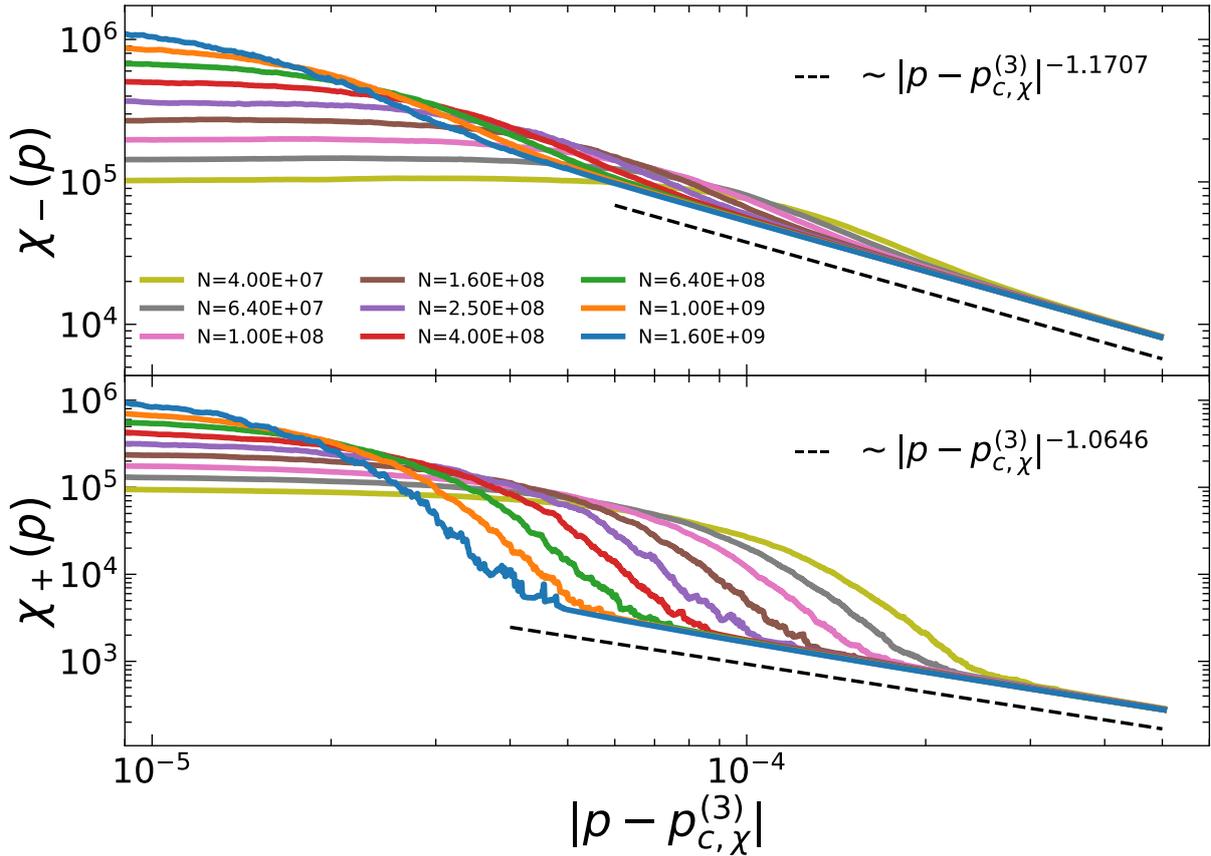


Figura 3.29: Tamaño medio  $\chi$  como función de  $|p - p_{c,\chi}^{(3)}|$  para los regímenes pre- y postcrítico por separado. Estos datos se denotan como  $\chi_{-}$  y  $\chi_{+}$ , y se agregan en el recuadro superior e inferior, respectivamente. Para ambos se utilizan los mismos nueve valores de  $N$  en escala doble logarítmica. Se distingue el surgimiento de una joroba entre el comportamiento horizontal cerca del máximo y el establecimiento de la ley de potencias en el lado derecho. Estas jorobas (llamadas así porque sobresalen con respecto a la recta límite) se relacionan con un cambio repentino, el cual es mayor en el caso postcrítico. Los segmentos de recta punteada representan una ley de potencias con el exponente efectivo calculado para la  $N$  más grande en cada caso.

para el tamaño  $N$  más grande.

En ambas gráficas se observa que el establecimiento de la ley de potencias se da en etapas cada vez más tempranas con el aumento del tamaño de red. En este sentido, se calculan los exponentes asociados a cada  $N$  en la misma región de  $|p - p_{c,\chi}^{(3)}|$ , la más alejada del punto crítico. Lo anterior produce un conjunto de exponentes efectivos  $\gamma_{-}(N)$  y  $\gamma_{+}(N)$ . Por lo que el objetivo es encontrar los límites de estas funciones relacionados con los exponentes críticos  $\gamma_{-}^{(3)}$  y  $\gamma_{+}^{(3)}$ , respectivamente.

En la figura 3.30 se agregan los resultados para los exponentes descritos. Los círculos azules corresponden a  $|\gamma_{-}(N) - \gamma_{-}^{(3)}|$  y los cuadrados rojos a  $|\gamma_{+}(N) - \gamma_{+}^{(3)}|$ , ambos como función de  $N$ . Se observa que los primeros decaen más rápido a su valor límite  $\gamma_{-}^{(3)} = 1.1810$  en comparación con el segundo grupo de puntos, que tiende a  $\gamma_{+}^{(3)} = 1.0486$ . Al igual que para el parámetro de orden (fig. 3.8), estas cantidades exhiben un decaimiento claro en ley de potencias. En la gráfica para los  $\gamma$ 's también se muestran los mejores ajustes para

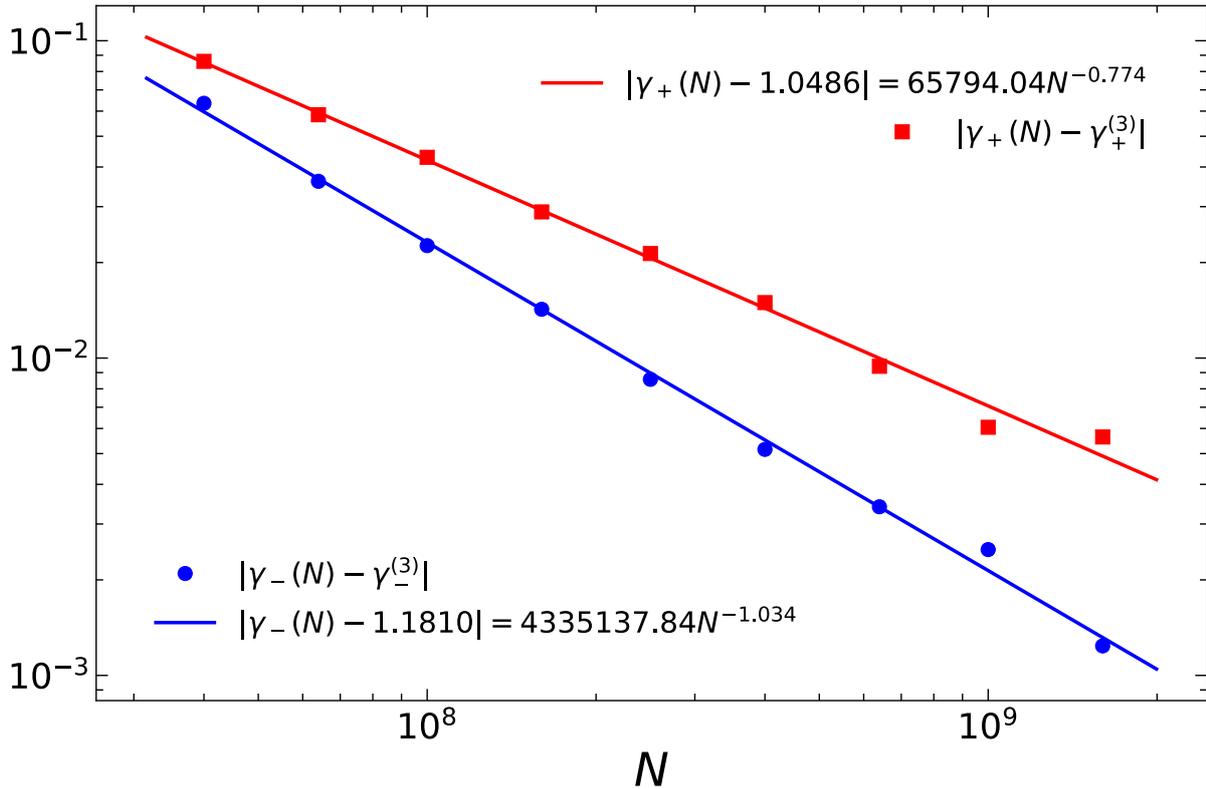


Figura 3.30: Diferencia entre los exponentes efectivos  $\gamma_{\pm}(N)$  y su valor límite, como función del tamaño del sistema. El conjunto de puntos representados por círculos azules y la recta en el mismo color corresponden al caso precrítico, mientras que los cuadrados rojos y su mejor ajuste se relacionan con el régimen postcrítico. El resultado muestra que estas leyes de potencia decaen a un ritmo diferente y tienden a límites distintos.

estos puntos, cuyos coeficientes de correlación de Pearson son  $r_- = -0.997$  para el caso precrítico y  $r_+ = -0.999$  para el postcrítico. Las leyes de potencia dadas por los ajustes indican que los exponentes efectivos no sólo decaen a un ritmo diferente, sino que también tienden a resultados distintos. Esto significa que el exponente  $\gamma^{(3)}$  calculado antes de la transición difiere del estimado después, aun cuando los datos utilizados pertenecen a una vecindad cercana a  $p_c$ .

Algo similar sucede con los valores  $\Theta_{\chi_{\pm}}$ , sólo que la diferencia entre estos es menor. El cálculo de estos exponentes se llevó a cabo buscando el mejor empalme de curvas para cada parte y los resultados se muestran en la figura 3.31. Esto se realizó también para las demás cantidades. Los valores obtenidos se encuentran en las cercanías de  $\Theta = 0.5$ , aunque la media de éstas aproximaciones sugiere que por debajo.

Las cantidades de esta sección y de la 3.4 se han comparado varias veces a lo largo del capítulo. Muchas de las características encontradas comparten la metodología empleada y muestran paralelismos evidentes en la presentación de resultados. Sin embargo, lo más distintivo en cada caso bastó para presentarlos por separado. Esto incluye la divergencia de los momentos de  $n(s)$  en  $p_c$  y el comportamiento en ley de potencias de los exponentes efectivos correspondientes. Los valores asociados a  $\gamma_{\pm}(N)$  y  $1/\sigma_{\pm}(N)$ , por ejemplo, tienden claramente a un valor específico. Esto a diferencia de los exponentes  $\rho_{R_{\pm}}(N)$ , cuya

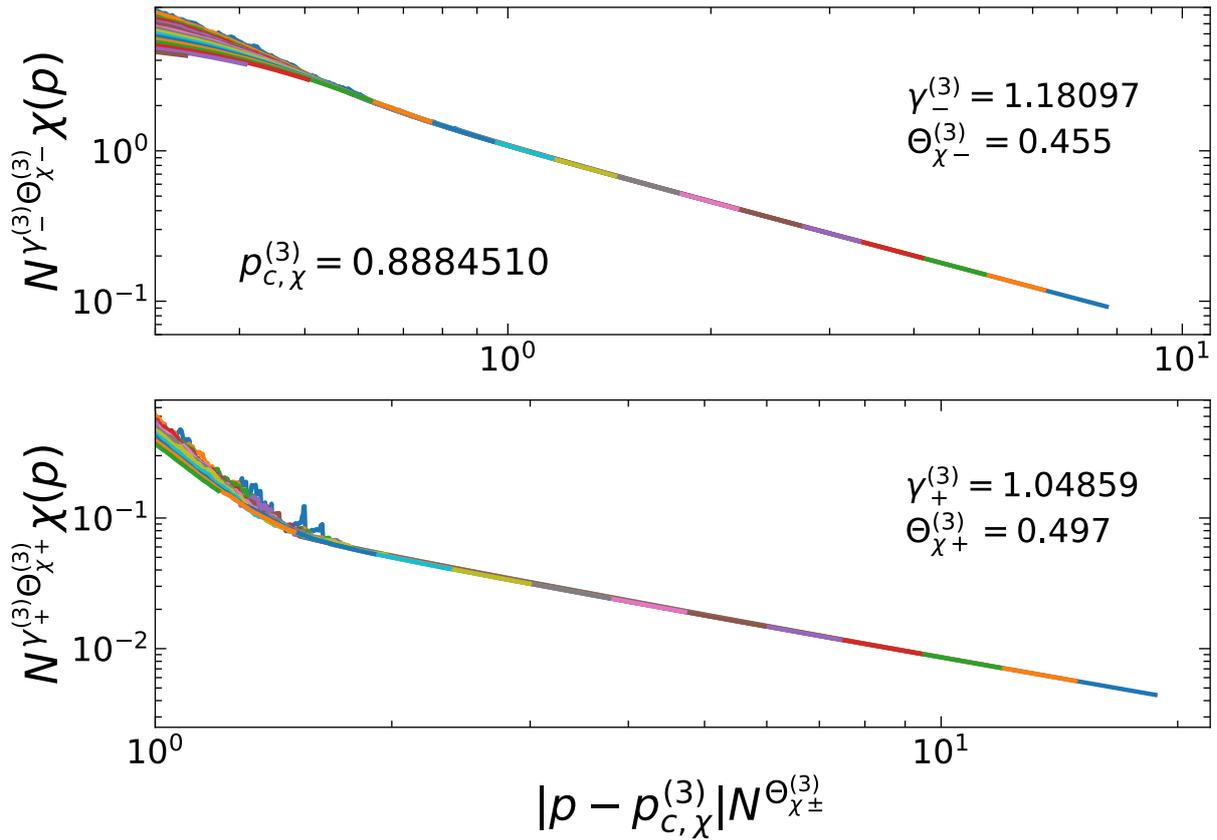


Figura 3.31: Mejor *data collapse* de las curvas  $\chi_{\pm}(p)$  para cada régimen por separado. Los resultados para la parte pre- y postcrítica se muestran en el recuadro superior e inferior para todos los valores de  $N$ , respectivamente. Para ambos casos se utilizó el umbral de percolación  $p_{c,\chi}^{(3)}$  mostrado. Los exponentes  $\gamma_{-}^{(3)}$ ,  $\Theta_{\chi-}^{(3)}$ ,  $\gamma_{+}^{(3)}$  y  $\Theta_{\chi+}^{(3)}$  fueron obtenidos mediante el Método 3 para cada régimen y cada uno exhibe un valor diferente a su contraparte del otro lado de la transición.

dependencia con el tamaño de red no tiende monótonamente al valor límite (fig. 3.19).

Cantidad X	$A_{-}$	$\omega_{-}^{(3)}$	$\Theta_{\chi-}^{(3)}$	$A_{+}$	$\omega_{+}^{(3)}$	$\Theta_{\chi+}^{(3)}$
$M_2$	1.043(1)	1.1793(5)	0.458	$1.61(1)\times 10^{-2}$	1.1693(4)	0.504
$M_3$	1.717(17)	2.4320(19)	0.482	$1.72(8)\times 10^{-3}$	2.4742(24)	0.523
$M_4$	3.95(13)	3.6849(55)	0.508	-	-	-
$\chi$	1.031(1)	1.1810(5)	0.455	$9.70(3)\times 10^{-2}$	1.0486(4)	0.497
$s_{\xi_1}$	1.461(2)	1.2694(5)	0.461	$1.46(1)\times 10^{-1}$	1.2806(7)	0.516
$s_{\xi_2}$	1.875(4)	1.2671(5)	0.449	-	-	-

Cuadro 3.12: Resultados correspondientes a los momentos  $M_j$  con  $j = 2, 3, 4$ , el tamaño medio  $\chi$  y dos aproximaciones al tamaño típico  $s_{\xi_k}$  con  $k = 1, 2$ . La primera columna muestra las cantidades descritas, en las siguientes tres están los parámetros críticos obtenidos a través del Método 3 para el régimen precrítico y en las últimas tres los asociados a la parte postcrítica. Se evitó agregar los valores en las celdas con guiones debido al alto error que presentan.

A lo largo de esta sección se tomó a  $\chi$  como ejemplo principal por ser la que presenta menor error en sus resultados. No obstante, los parámetros críticos asociados a las demás cantidades se calcularon de la misma manera e independientemente de las demás. Todos los valores numéricos de interés obtenidos en esta parte se presentan en la tabla 3.12.

Lo anterior constituye el final de la presentación de resultados para las cantidades más importantes por separado. En lo siguiente, se utilizarán los parámetros críticos obtenidos para verificar si cumplen con relaciones de escalamiento y de qué manera, tomando en cuenta la información recopilada a través de las distintas técnicas.

### 3.8. Relaciones de escalamiento

En percolación explosiva se tiene un mecanismo de evolución que se diferencia del caso clásico debido a la inclusión de reglas de selección de enlaces. Esta disparidad provoca características propias del modelo que comúnmente no se observan en sistemas que atraviesan por una transición de fase continua. A pesar de esto, se han abordado los datos de las distintas cantidades con el propósito de caracterizar su comportamiento alrededor del punto crítico. En consecuencia, el manejo de las leyes de potencias resultantes genera un conjunto de exponentes críticos para cada método empleado. Ya que los observables del modelo están relacionados, se infiere que estos exponentes no son completamente independientes entre sí. De manera que el objetivo principal de esta sección es encontrar las relaciones de escalamiento correspondientes y verificar si los parámetros críticos obtenidos a lo largo del capítulo son consistentes con éstas.

En adelante, muchos de los exponentes introducidos anteriormente se manejarán con naturalidad por lo que, en caso de cualquier duda sobre la definición de estas cantidades, diríjase a las listas de símbolos presentadas en el Apéndice A.

#### Obtención de las relaciones

El primer paso para obtener las relaciones de escalamiento deseadas será escribir los observables más importantes del modelo en términos de la distribución de tamaños  $n(s)$ . Esta cantidad se introdujo en el Capítulo 2 y se abordaron sus resultados en la sección 3.6. Aquí se parte directamente de la expresión general

$$n_p(s) \sim s^{-\tau} f_{\pm} \left( \frac{s}{s_{\xi}} \right) \quad (3.29)$$

donde  $s_{\xi}$  es el tamaño típico que sirve como umbral en la distribución y tiende a infinito al acercarse a  $p = p_c$ . El símbolo  $\pm$  indica que la función límite  $f$  tiene formas distintas antes y después de la transición, como se vio en el recuadro izquierdo de la figura 3.24.

Para el parámetro de orden se tiene la ecuación 3.19 que relaciona este observable con la cantidad  $n_p(s)$ , para toda  $p$ . En un sistema infinito, ya que el tamaño del componente más grande en  $p_c$  es  $s_1 = 0$  entonces  $\sum_s s n_{p_c}(s) = 1$ . Utilizando esto en la ecuación mencionada se obtiene que

$$s_1 = \sum_s s [n_{p_c}(s) - n_p(s)] \quad (3.30)$$

Como se ha manejado, las sumas involucran sólo a los componentes de tamaño finito  $s$ . Mientras  $p$  se aproxima a  $p_c$ ,  $s_\xi \rightarrow \infty$  y la función  $f_\pm(s/s_\xi)$ , siendo una gaussiana por un lado y una exponencial decreciente por el otro, tiende a 1 en ambos casos. Así que  $n_{p_c}(s) = s^{-\tau}$  y para que la suma  $\sum_s s n_{p_c}(s)$  converja se debe cumplir que  $\tau > 2$ . Ahora, al emplear la ec. 3.29 en 3.30 y tomar las consideraciones descritas en las cercanías del punto crítico, resulta que

$$s_1 \sim \sum_s s^{1-\tau} \left[ 1 - f_\pm \left( \frac{s}{s_\xi} \right) \right]$$

En el mismo sentido, se puede observar que al acercarse a  $p_c$  sólo los tamaños  $s$  del orden de  $s_\xi$  contribuyen significativamente a la suma. De modo que el comportamiento en las cercanías del punto crítico es el que interesa, se lleva a cabo un cambio de variable de  $s$  a  $z = s/s_\xi$  para escribir la expresión anterior como

$$s_1 \sim \left\{ \frac{1}{s_\xi} \sum_z z^{1-\tau} [1 - f_\pm(z)] \right\} s_\xi^{2-\tau}$$

En el límite en que  $p \rightarrow p_c$ , el término entre corchetes se puede reemplazar por una integral, así que

$$s_1 \sim s_\xi^{2-\tau} \int z^{1-\tau} [1 - f_\pm(z)] dz$$

Al aplicar integración por partes, lo anterior se reescribe como

$$s_1 \sim s_\xi^{2-\tau} \int z^{2-\tau} f'_\pm(z) dz \quad (3.31)$$

donde  $f'$  indica la derivada de  $f$  con respecto a  $z$ . El otro término se anuló debido a la forma de las funciones  $f_\pm$  y al delimitar a  $\tau$  también por arriba para provocar la convergencia ( $\tau < 3$ ). Independientemente de si  $f$  tiene forma de gaussiana en el régimen precrítico o de exponencial decreciente en el postcrítico, la integral definida entre 0 e  $\infty$  en la ec. 3.31 es una constante. Esto corrobora la idea de que los observables pueden ser calculados utilizando simplemente el tamaño típico. Como se definió anteriormente, esta cantidad tiene la forma  $s_\xi \sim |p - p_c|^{-1/\sigma}$ . Al emplearla en la última expresión queda la relación

$$s_1 \sim |p - p_c|^{\frac{\tau-2}{\sigma}} \quad (3.32)$$

Esto se puede comparar con la definición del parámetro  $\beta$  como el exponente con el que decae el tamaño relativo del componente más grande en  $s_1 \sim |p - p_c|^\beta$ . Así, se llega a la relación de escalamiento

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \quad (3.33)$$

De la misma manera, se puede calcular el exponente asociado a la divergencia del tamaño medio  $\chi$ . Este se define como

$$\chi = \frac{\sum_s s^2 n(s)}{\sum_s s n(s)}$$

En vista de que el denominador permanece finito, se tomará esta cantidad como  $\sum_s s^2 n(s)$ . Al utilizar la relación 3.29 en la expresión propuesta se obtiene que

$$\chi \sim \sum_s s^{2-\tau} f_{\pm} \left( \frac{s}{s_{\xi}} \right)$$

Aplicando un cambio de variable idéntico al que se utilizó en el caso pasado ( $z = s/s_{\xi}$ ) se llega a

$$\chi \sim \left[ \frac{1}{s_{\xi}} \sum_z z^{2-\tau} f_{\pm}(z) \right] s_{\xi}^{3-\tau}$$

Tomando el mismo límite en el que  $p \rightarrow p_c$ , se tiene que  $s_{\xi}$  tiende a infinito y el término entre paréntesis cuadrados se puede reemplazar a su vez por una integral sobre  $z$

$$\chi \sim s_{\xi}^{3-\tau} \int z^{2-\tau} f_{\pm}(z) dz$$

Esta vez no es necesario integrar por partes ya que la expresión se puede evaluar de forma sencilla directamente. El resultado obtenido es una constante multiplicada por una función de  $s_{\xi}$ , la cual se puede poner en términos de  $|p - p_c|$  como

$$\chi \sim |p - p_c|^{\frac{\tau-3}{\sigma}} \quad (3.34)$$

Al comparar con la definición del parámetro  $\gamma$  como en  $\chi \sim |p - p_c|^{-\gamma}$ , se genera la relación de escalamiento

$$\gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma} \quad (3.35)$$

Finalmente, ya que  $\beta$  y  $\gamma$  toman valores positivos es necesario que  $2 < \tau < 3$ .

Así como se llevó a cabo con estos observables, el procedimiento se puede realizar de forma similar con las demás cantidades importantes para el modelo. De esta manera se confirma la relevancia del tamaño típico y se encuentra que sólo dos exponentes son independientes. Esto último no se limita a  $\tau$  y  $\sigma$  como en los casos abordados, sino que puede ser cualquier par de valores distintos en el conjunto de exponentes que se calcularon.

Hasta el momento se han obtenido aproximaciones para varios exponentes por medio de los datos extraídos de las simulaciones numéricas. Una ventaja de las expresiones como 3.33 y 3.35 es que se pueden generar cantidades faltantes a partir de las ya estimadas, siempre y cuando se asegure el escalamiento. En ese sentido sólo bastaría calcular dos exponentes con buena precisión para poder caracterizar a todos los observables de interés en la transición. Sin embargo, debido al carácter inusual del modelo se debe confirmar primeramente el cumplimiento de las relaciones.

Los valores más importantes que se obtuvieron en las secciones pasadas son  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  y  $\tau$ .

El propósito es generar relaciones que involucren a todos o la mayoría de estos exponentes, de modo que se toman las siguientes combinaciones conseguidas al sumar las ecs. 3.33 y 3.35 de dos maneras distintas

$$\beta + \gamma = \frac{1}{\sigma} \quad (3.36)$$

$$2\beta + \gamma = \frac{\tau - 1}{\sigma} \quad (3.37)$$

Estas relaciones son las que se utilizarán para verificar si se cumple el escalamiento y determinar qué tan bien funciona.

Además de que en las relaciones 3.36 y 3.37 se emplean la mayor parte de los exponentes calculados, otra razón por la que se utilizan en esta forma es su conexión con los exponentes  $d\nu$  y  $d_f\nu$  como

$$d\nu = 2\beta + \gamma = \frac{\tau - 1}{\sigma}$$

$$d_f\nu = \beta + \gamma = \frac{1}{\sigma}$$

donde  $d$  es la dimensión espacial o “crítica superior”,  $d_f$  es la dimensión fractal y  $\nu$  está relacionado con la divergencia de la longitud de correlación. En percolación clásica estos exponentes toman los valores  $d = 6$ ,  $d_f = 4$  y  $\nu = \frac{1}{2}$ . Normalmente estos exponentes se utilizan para el escalamiento de tamaño finito y surgen en sistemas que cuentan con estructura geométrica. Aunque las redes abordadas en este trabajo no cuentan con tal estructura, se utilizan relaciones de escalamiento considerando que existe la equivalencia para este caso. De esta forma, se introducen los exponentes  $\Theta_e$  y  $\Theta_f$  como

$$\Theta_e = \frac{1}{2\beta + \gamma} = \frac{\sigma}{\tau - 1} \quad (3.38)$$

$$\Theta_f = \frac{1}{\beta + \gamma} = \sigma \quad (3.39)$$

los cuales se compararán con los exponentes  $\Theta$  calculados para cada método.

De igual forma, otro exponente que se puede obtener a partir de las relaciones de escalamiento es  $\tau$ . En la sección 3.6 se calculó directamente a partir de la distribución de tamaños  $n(s)$ , así que su valor no se le atribuye a ninguno de los tres métodos. Por ello, una cantidad  $\tau$  asociada a cada técnica se generará mediante la expresión

$$\tau = \frac{\Theta_f}{\Theta_e} + 1 = \frac{\beta}{\beta + \gamma} + 2 \quad (3.40)$$

obtenida con las ecs. 3.38 y 3.39.

A continuación se agregarán los resultados asociados a las relaciones de escalamiento para cada uno de los tres métodos. Primero se hablará sobre los puntos críticos obtenidos por cada observable y se buscará el más representativo. Después se tomarán los exponentes  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  y  $\tau$  calculados numéricamente para verificar su correspondencia en las expresiones 3.36 y 3.37. Finalmente se tomarán los valores óptimos para generar los exponentes  $\Theta_e$ ,  $\Theta_f$

y  $\tau$  asociados a cada técnica. Esto con el objetivo de comparar con los  $\Theta$ ,  $\delta$  y  $\tau$  producidos a lo largo del capítulo.

## Resultados del Método 1

Los resultados obtenidos a partir de este método se pueden ver en las tablas 3.3, 3.6 y 3.10. Estas recaban la información sobre  $p_{c,X}^{(1)}$ ,  $\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$  y  $F_X(0)$  correspondientes a cada cantidad  $X$ , así como los exponentes  $\omega^{(1)}$  y  $\Theta_X^{(1)}$  por separado.

Esta técnica de escalamiento parte de la expresión 3.4 para encontrar los parámetros críticos. En este caso  $p_c = p_{c,X}^{(1)}$  es el punto con la mejor correlación lineal entre  $\log(X)$  y  $\log(N)$ . En base a esto, el valor del punto crítico asociado al parámetro de orden es  $p_{c,s_1}^{(1)} = 0.8884484$  y sirve como cota superior para todos los demás valores.

En la sección 3.5 se encontró que  $p_{c,s_R} > p_{c,s_{R+1}}$  para  $R = 1, 2, 3$ . Después, en la sección 3.5 se generalizó esto para toda  $R$  al encontrar que la máxima probabilidad de pertenecer a un componente de tamaño  $s$  crece con  $p$  al aumentar  $s$  (fig. 3.21, recuadro derecho). De manera similar, los puntos  $p_{c,X}^{(1)}$  calculados en la sección 3.6 para los momentos de  $n(s)$  apoyan que este resultado se cumpla para  $R$  mayor. Estas características señalan que el mecanismo que domina en la evolución de la red es el crecimiento directo de componentes. Además, se considera que la mejor aproximación al punto crítico dado por este método es  $p_{c,s_1}^{(1)}$ .

A lo largo del capítulo se generaron los resultados asociados a este método tomando como precedente el punto  $p_{c,X}^{(1)}$  en cada caso. Aun así, otro enfoque que vale la pena abordar se basa en utilizar  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  para todas las cantidades. De este modo se fija un mismo punto crítico utilizando la información descrita en el párrafo anterior. De esta forma se repite el procedimiento con este enfoque y los resultados obtenidos se muestran en la tabla 3.13. Al comparar estos valores con los parámetros críticos calculados anteriormente se observa una diferencia menor al 3%. Aunque ahora, por construcción, las cantidades  $X \neq s_1$  no se extraen del punto con la mejor correlación, el escalamiento sobre ellas presenta mejores resultados bajo este nuevo enfoque.

El siguiente paso consiste en comparar los exponentes críticos calculados con el Método 1 para verificar la validez de las relaciones de escalamiento. Para esto se utilizan los valores correspondientes a los dos enfoques planteados: el primero con  $p_c = p_{c,X}^{(1)}$  que se abordó a lo largo del capítulo y el segundo con  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  que se introdujo en esta sección. Asimismo, se realiza una distinción entre el uso de los exponentes  $\omega^{(1)}$  y  $\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$  en las relaciones. Es decir, la expresión 3.36 se puede escribir como  $\beta + \gamma = 1/\sigma$  pero también como  $\beta\Theta + \gamma\Theta = \Theta/\sigma$ , por ejemplo. Ya que los dos conjuntos de exponentes se calcularon en las formas  $\omega^{(1)}$  y  $\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$  por separado, esta distinción es relevante para contrastar la eficacia de la técnica intermedia utilizada para el desacople de exponentes. También se usa para determinar si la pequeña (aunque existente) discrepancia en los valores de  $\Theta$  depende de los observables utilizados o es algo meramente numérico.

Aunado a lo anterior, se estudia la afinidad que existe entre los exponentes  $\gamma$  y  $\phi_2$ , así como la que hay entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . La primera se toma en consideración dada la similitud en el comportamiento de  $\chi$  y  $M_2$  antes de la transición, mientras que la segunda pone a prueba cuál es la mejor aproximación para  $s_\xi$ , si  $s_{\xi 1} = M_3/M_2$  o  $s_{\xi 2} = M_4/M_3$ . Se toman

Cantidad X	Con $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$			
	$F_X(0)$	$\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	$\Theta_X^{(1)}$
$s_1$	0.786(6)	0.0653(5)	0.1225	0.533
$s_2$	0.734(27)	0.2219(21)	0.4586	0.484
$s_3$	0.403(18)	0.2054(25)	0.4278	0.480
$s_4$	0.267(13)	0.1935(28)	0.4038	0.479
$M_2$	0.331(14)	0.7133(24)	1.4969	0.477
$M_3$	0.118(6)	1.5851(28)	3.1345	0.505
$M_4$	0.033(2)	2.5114(37)	4.7313	0.530
$\chi$	0.472(16)	0.6990(19)	1.4556	0.480
$s_{\xi_1}$	0.684(27)	0.7603(22)	1.5661	0.486
$s_{\xi_2}$	0.745(29)	0.7652(22)	1.5771	0.485

Cuadro 3.13: Resultados obtenidos al aplicar el Método 1 sobre las cantidades  $X$  utilizando el enfoque en el que  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  para toda  $X$ . En este caso, aunque sólo  $\log(s_1)$  vs  $\log(N)$  adopta la mejor correlación lineal, ahora todas las demás cantidades se toman más cerca del punto crítico verdadero.

todas las combinaciones posibles y se comparan entre sí en las tablas 3.14 y 3.15. El valor numérico mostrado en cada celda corresponde al error relativo porcentual que hay entre cada parte de la igualdad.

Relación de escalamiento	Error relativo porcentual			
	$p_c = p_{c,X}^{(1)}$		$p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$	
	$\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	$\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$	$\omega^{(1)}$
$\beta + \phi_2 = 1/\sigma_1$	2.611	4.749	2.402	3.415
$\beta + \phi_2 = 1/\sigma_2$	2.004	3.971	1.747	2.688
$\beta + \gamma = 1/\sigma_1$	0.688	1.427	0.520	0.766
$\beta + \gamma = 1/\sigma_2$	0.092	0.674	0.123	0.058

Cuadro 3.14: Error relativo porcentual presentado en la relación  $\beta + \gamma = 1/\sigma$  a través de sus distintas combinaciones para el Método 1.

Los resultados obtenidos señalan que el error en la primera relación de escalamiento es menor al 4.8% y en la segunda relación es menor al 5.2% para todas las combinaciones contempladas. Esto indica que todas las aproximaciones son válidas en buena medida independientemente del camino seguido. Sin embargo, es claro que existen caminos un poco mejores que otros.

En cuanto a los dos enfoques tomados en cuenta, se observa un menor error al tomar  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  en 15 de las 16 opciones a comparar. Esto confirma que el enfoque tomado en esta sección conlleva a un mejor escalamiento, basándose en una mayor cercanía al punto crítico verdadero en todas las cantidades en vez de optimizar su correlación en ley de potencias con  $N$ .

Por otro lado, el error producido al utilizar los exponentes en la forma  $\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$  es menor que el obtenido al emplearlos como  $\omega^{(1)}$  en 11 de las 16 posibles comparaciones. De modo

Relación de escalamiento	Error relativo porcentual			
	$p_c = p_{c,X}^{(1)}$		$p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$	
	$\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	$\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$	$\omega^{(1)}$
$2\beta + \phi_2 = (\tau - 1)/\sigma_1$	3.928	5.162	3.773	4.005
$2\beta + \phi_2 = (\tau - 1)/\sigma_2$	3.313	4.381	3.109	3.274
$2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma_1$	2.129	2.057	2.014	1.529
$2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma_2$	1.525	1.299	1.361	0.815

Cuadro 3.15: Error relativo porcentual presentado en la relación  $2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma$  a través de sus distintas combinaciones para el Método 1.

que, en su mayoría, se generan mejores resultados al usar los  $\omega^{(1)}\Theta_X^{(1)}$  calculados antes de la técnica de empalme de curvas  $F_X$ . No obstante, el error mínimo obtenido en cada tabla se da con los exponentes en forma  $\omega^{(1)}$ . Esto supone que las diferencias en  $\Theta_X^{(1)}$  tienen que ver con la precisión numérica de los datos estimados y no por una dependencia con  $X$ , ya que el resultado fluctúa aun fijando un determinado observable.

Por último, es claro que las relaciones con  $\gamma$  en lugar de  $\phi_2$  son mejores, ya que producen un error dos o tres veces menor en la mayoría de los casos. Asimismo, las relaciones con  $\sigma_2$  son un poco mejores que cuando se usa  $\sigma_1$ . Aunque resulta útil considerar el uso de cantidades alternativas que llevan a un resultado casi tan bueno como el de la mejor aproximación, la combinación  $\gamma\text{-}\sigma_2$  será la representativa por optimizar mayormente la afinidad.

Después de establecer lo anterior, se encuentra que las relaciones que toman  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  como precedente para calcular los parámetros críticos, que utilizan los exponentes en la forma  $\omega^{(1)}$  y que emplean  $\gamma^{(1)}$  y  $\sigma_2^{(1)}$  en cada caso son las que minimizan el error relativo en ambas expresiones. En la primera se obtiene un error del 0.058 % y en la segunda uno del 0.815 %.

El mínimo en el error anterior determina el uso de los exponentes  $\beta^{(1)}$ ,  $\gamma^{(1)}$ ,  $\sigma_2^{(1)}$  y  $\tau$  en las expresiones 3.38 y 3.39 ajustadas al Método 1. Con esto se obtiene como resultado  $\Theta_{e1}^{(1)} = 0.5881$  y  $\Theta_{f1}^{(1)} = 0.6337$  para el cálculo con  $\beta^{(1)}$  y  $\gamma^{(1)}$ , mientras que  $\Theta_{e2}^{(1)} = 0.5928$  y  $\Theta_{f2}^{(1)} = 0.6341$  es lo conseguido con  $\sigma_2^{(1)}$  y  $\tau$ . Cada par  $\Theta_{e1,2}^{(1)}$  y  $\Theta_{f1,2}^{(1)}$  muestra el error relativo calculado anteriormente para sus valores y todos estos distan claramente de la media de  $\Theta_X^{(1)}$ . La media de este exponente para el enfoque con  $p_c = p_{c,X}^{(1)}$  es  $\Theta_1^{(1)} = 0.5024$  y la media para el enfoque  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  es  $\Theta_2^{(1)} = 0.4920$ . De manera que se reafirma que  $\Theta^{(1)}$  en la ec. 3.4 es diferente del exponente con que escalan los puntos pseudocríticos en función de  $N$ . Sin embargo, el valor del exponente  $\delta$  que se discutirá en la siguiente subsección ha mostrado tener un valor aproximado de 0.6, de modo que se prevé su relación con alguna de las cantidades definidas en 3.38 y 3.39.

Otro exponente que no se generó directamente del Método 1 es  $\tau$ . En el proceso para validar las relaciones de escalamiento se utilizó el valor obtenido al manejar las distribuciones  $n(s)$ . No obstante, debido a la eficacia en los resultados mostrados anteriormente, se toma la ecuación 3.40 para calcular una  $\tau$  asociada a esta técnica. Al emplear los valores recopilados por este método se consigue el exponente  $\tau^{(1)} = 2.0776$ . La diferencia entre

este y el valor calculado en la sección 3.6 es del 0.391 %.

En la siguiente tabla se agregan los valores calculados a partir de este método para los parámetros críticos más importantes. El exponente  $\Theta^{(1)}$  es la media de los valores  $\Theta_X^{(1)}$  recopilados para las distintas cantidades. Los valores de  $\Theta_e^{(1)}$ ,  $\Theta_f^{(1)}$  y  $\tau^{(1)}$  se calculan a partir de las relaciones 3.38, 3.39 y 3.40, respectivamente. Todas las demás cantidades se calcularon mediante simulaciones numéricas en las secciones pasadas. En todo caso, se toman las opciones correspondientes al enfoque  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  por tener un menor error.

Parámetro crítico	Valor
$p_c^{(1)}$	0.8884484
$\beta^{(1)}$	0.1225
$\gamma^{(1)}$	1.4555
$\sigma^{(1)}$	0.6341
$\tau^{(1)}$	2.0776
$\Theta^{(1)}$	0.4920
$\Theta_e^{(1)}$	0.5904
$\Theta_f^{(1)}$	0.6339

Cuadro 3.16: Resumen de los parámetros críticos más importantes calculados por el Método 1.

## Resultados del Método 2

Los resultados obtenidos a partir de este método se pueden ver en las tablas 3.7 y 3.11. Estas recaban la información sobre  $p_{c,X}^{(2)}$ ,  $\omega^{(2)}\Theta_X^{(2)}$  y  $\delta_X$  correspondientes a cada cantidad  $X$ , así como los exponentes  $\omega^{(2)}$  y  $\Theta_X^{(2)}$  por separado.

Esta técnica de escalamiento parte de las expresiones 3.6 y 3.7 para encontrar los parámetros críticos. La búsqueda del umbral de percolación se basa en el escalamiento que siguen los puntos pseudocríticos, los cuales se definen como la posición de los máximos en las curvas  $X(p)$ . Mientras que los exponentes críticos asociados a cada observable se generan de la misma forma, pero con las amplitudes máximas.

Cabe recalcar que las cantidades abordadas aquí se centran en los puntos pseudocríticos definidos de esta manera y no como en el caso de las distribuciones  $P(s_1)$  y  $n(s)$ . En estas se aprovechan propiedades como la bimodalidad o la correlación en ley de potencias. De modo que los parámetros críticos obtenidos son mayormente compatibles con la tercera técnica de escalamiento aunque se hayan producido con la segunda. Así, pese a que se sigue un proceso equivalente, la diferencia en los resultados ocasiona que se discutan por separado.

Los puntos críticos abordados en esta subsección no siguen un patrón como en el método pasado, sino que se encuentran distribuidos alrededor de  $p = 0.88845$ . Estos muestran una correspondencia aceptable con el umbral predicho, pese a que los puntos pseudocríticos presentan la varianza más elevada de todo el segmento de  $p$ . Al tomar la media sobre los

distintos valores presentados se obtiene que  $p_c^{(2)} = 0.8884497$ . Por lo que, en adelante, se adoptará este resultado como el valor representativo del Método 2.

De manera similar, los exponentes críticos obtenidos a partir de este método se utilizan para comprobar la efectividad de las relaciones de escalamiento. Las expresiones 3.36 y 3.37 presentadas al inicio de la sección tomarán ahora los valores de  $\beta^{(2)}$ ,  $\gamma^{(2)}$ ,  $\sigma^{(2)}$  y  $\tau$ . Sin embargo, con el objetivo de comparar este resultado para distintos escenarios, se emplean la mayoría de las variaciones descritas para el Método 1. El único detalle será la ausencia de un enfoque alternativo como el introducido en la subsección pasada, así que las combinaciones se reducen a la mitad debido a esto.

Relación de escalamiento	Error relativo porcentual	
	$\omega^{(2)}\Theta_X^{(2)}$	$\omega^{(2)}$
$\beta + \phi_2 = 1/\sigma_1$	1.154	5.168
$\beta + \phi_2 = 1/\sigma_2$	0.566	4.187
$\beta + \gamma = 1/\sigma_1$	0.169	0.582
$\beta + \gamma = 1/\sigma_2$	0.749	0.356

Cuadro 3.17: Error relativo porcentual presentado en la relación  $\beta + \gamma = 1/\sigma$  a través de sus distintas combinaciones para el Método 2.

Relación de escalamiento	Error relativo porcentual	
	$\omega^{(2)}\Theta_X^{(2)}$	$\omega^{(2)}$
$2\beta + \phi_2 = (\tau - 1)/\sigma_1$	2.656	5.996
$2\beta + \phi_2 = (\tau - 1)/\sigma_2$	2.059	5.007
$2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma_1$	1.419	1.708
$2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma_2$	0.829	0.759

Cuadro 3.18: Error relativo porcentual presentado en la relación  $2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma$  a través de sus distintas combinaciones para el Método 2.

Así, en las tablas 3.17 y 3.18 se muestra el error relativo porcentual producido al comparar cada parte de las expresiones. En esta ocasión se encuentran mejores resultados al usar las relaciones con los exponentes en la forma  $\omega^{(2)}\Theta_X^{(2)}$ . No obstante, esto se cumple en la mayoría de las distintas combinaciones excepto en las que se muestra el error mínimo. Lo anterior indica que la manera en que se desacoplan los exponentes  $\omega^{(2)}$  y  $\Theta_X^{(2)}$  funciona bien sólo para el caso más importante.

Por otro lado, las relaciones con los exponentes  $\gamma$  y  $\sigma_2$  son las que minimizan el error en cada caso. Del primero se obtiene un resultado del 0.356%, mientras que el segundo presenta uno del 0.759%. De este modo, las expresiones optimizan el error relativo al utilizar los exponentes  $\gamma^{(2)}$  y  $\sigma_2^{(2)}$  generados por esta técnica. Es claro que utilizar los exponentes  $\phi_2^{(2)}$  y  $\sigma_1^{(2)}$  no lleva al mejor resultado, pero arrojan errores no mayores a 5.2% en la primera tabla y 6% en la segunda, lo cual parece ser algo aceptable.

Ya que el exponente  $\beta$  no forma parte del conjunto de parámetros calculados por este método, en todas las ocasiones se utilizó el valor de  $\beta^{(1)} = 0.1225$ . Debido a que este influye de igual manera sobre todas las celdas en las tablas, se concluye que tomar prestado este valor no afecta en la elección anterior y sirve como aproximación para determinar que las relaciones de escalamiento se obedecen de buena forma. Al asegurar el cumplimiento de estas relaciones se puede complementar el estudio y calcular un valor de  $\beta$  correspondiente. Por lo que, al usar los valores de  $\gamma^{(2)}$  y  $\sigma_2^{(2)}$ , se consigue el exponente  $\beta^{(2)} = 0.1279$ . La diferencia entre este y el valor dado por el Método 1 es del 4.4 %.

Adicionalmente, mientras el umbral  $p_c$  es el límite al que tienden los puntos pseudocríticos, el exponente  $\delta$  da una idea de cómo éstos decaen en ley de potencias. Con los resultados obtenidos en las secciones 3.4 y 3.6 se estipulaba un valor cercano a 0.6 para este exponente. Después de calcular la media de las  $\delta_X$  se llega a que  $\delta = 0.6170$ . Esto, tal como se ha resaltado a lo largo del capítulo, representa una diferencia apreciable con respecto al exponente utilizado en la ec. 3.4 para el mejor empalme de las curvas  $F_X$ , para el cual la media sobre los valores obtenidos por este método es  $\Theta^{(2)} = 0.5127$ .

Las medias  $\Theta^{(2)}$  y  $\delta$  son exponentes que se calcularon directamente de los datos recopilados del sistema. El objetivo es comparar estos valores con los que se obtienen para  $\Theta_e$  y  $\Theta_f$  con las relaciones de escalamiento 3.38 y 3.39, respectivamente. De esta manera, es posible determinar si existe o no relación entre ellos. Los resultados arrojan los valores  $\Theta_{e1}^{(2)} = 0.6152$  y  $\Theta_{f1}^{(2)} = 0.6654$  para el cálculo con  $\beta^{(1)}$  y  $\gamma^{(2)}$ , mientras que  $\Theta_{e2}^{(2)} = 0.6199$  y  $\Theta_{f2}^{(2)} = 0.6630$  es lo conseguido con  $\sigma_2^{(2)}$  y  $\tau$ . Cada par  $\Theta_{e1,2}^{(2)}$  y  $\Theta_{f1,2}^{(2)}$  muestra el error mínimo en la tabla correspondiente y todos estos distan claramente de la media de  $\Theta^{(2)}$ .

Sin embargo, al comparar los exponentes  $\Theta_{e1,2}^{(2)}$  con  $\delta$  se observa una correspondencia muy buena. El valor intermedio de los primeros coincide con el último a tres cifras después del punto, siendo dos de ellas significativas. Este resultado es revelador, ya que son dos cantidades que se calculan de manera independiente. El exponente  $\delta$  es la media de los valores  $\delta_X$  calculados para cada cantidad como se define en la ec. 3.6. Surge de la tendencia de los máximos de  $X$  a seguir una ley de potencias. En cambio, para  $\Theta_e^{(2)}$  se calculan primero los exponentes  $\omega^{(2)}\Theta_X^{(2)}$  como en la ec. 3.7 y luego se desacoplan usando el mejor empalme de las funciones  $F_X$ . Esto es interesante, ya que para desacoplar cada exponente usado en las relaciones 3.38, necesariamente se debe utilizar el parámetro  $\Theta \approx 0.5$ . Adicionalmente, se encuentra que el valor de  $\Theta_e^{(1)}$  también es cercano a  $\delta$ , pese a que se ha conseguido mediante un método distinto a los dos mencionados.

Por último, se utiliza la expresión 3.40 para calcular una aproximación a  $\tau$  dada por las relaciones de escalamiento y los exponentes encontrados con esta técnica. Por ello se evita utilizar el valor de  $\beta^{(1)}$  generado por el método anterior y también el de  $\beta^{(2)}$  extraído de las mismas relaciones. Así, tomando lo anterior en cuenta, el resultado obtenido es  $\tau^{(2)} = 2.0848$ . La diferencia entre este y el valor estimado con las distribuciones  $n(s)$  es del 0.737 %.

La tabla 3.19 recopila los parámetros críticos más importantes y sus respectivos valores generados con el Método 2. El umbral  $p_c^{(2)}$  y los exponentes  $\Theta^{(2)}$  y  $\delta$  son la media de sus valores obtenidos bajo los distintos observables. Los  $\gamma^{(2)}$  y  $\sigma^{(2)}$  mostrados se extraen de la sección 3.6. Los demás exponentes se calculan a partir de las relaciones de escalamiento:  $\beta^{(2)}$ ,  $\Theta_e^{(2)}$ ,  $\Theta_f^{(2)}$  y  $\tau^{(2)}$  surgen de las expresiones 3.36, 3.38, 3.39 y 3.40, respectivamente.

Parámetro crítico	Valor
$p_c^{(2)}$	0.8884497
$\beta^{(2)}$	0.1279
$\gamma^{(2)}$	1.3804
$\sigma^{(2)}$	0.6630
$\tau^{(2)}$	2.0848
$\Theta^{(2)}$	0.5127
$\delta$	0.6170
$\Theta_e^{(2)}$	0.6175
$\Theta_f^{(2)}$	0.6642

Cuadro 3.19: Resumen de los parámetros críticos más importantes calculados por el Método 2.

### Resultados del Método 3

Los resultados obtenidos a partir de este método se pueden ver en las tablas 3.4, 3.8 y 3.12. Estas recaban la información sobre  $A_{\pm}$ ,  $\omega_{\pm}^{(3)}$  y  $\Theta_{X\pm}^{(3)}$  correspondientes a cada cantidad  $X$  para los regímenes pre- y postcrítico por separado.

Esta técnica de escalamiento parte de la expresión 3.8 para encontrar los parámetros críticos. Para esto se utilizan datos en las cercanías de la transición, pero evitando los efectos de tamaño finito. Por ello se toman puntos que pertenecen necesariamente a segmentos donde se instaura la ley de potencias y sobre ellos se aplica la ec. 3.9. Se realiza esto en ambos lados de la transición para extraer exponentes efectivos. Estos exponentes dependen de  $N$ , por lo que el objetivo final es encontrar el límite al que tienden cuando  $N \rightarrow \infty$ .

La aplicación de este método no genera aproximaciones al punto crítico por sí solo, sino que toma los valores ya calculados por las técnicas pasadas. El umbral  $p_c$  se ha obtenido de distintas maneras y con los datos de diferentes observables hasta ahora, por lo que vale la pena considerar cada variante en busca de la mejor combinación. Para ello se sigue un camino similar al de las subsecciones anteriores, con el propósito de confirmar las relaciones de escalamiento a través de los exponentes conseguidos por este método.

Asimismo, la cantidad utilizada para medir la validez de cada posible combinación es el error relativo porcentual. En este caso las opciones surgen al variar el punto crítico utilizado, los exponentes empleados en cada relación y el régimen en el que se llevó a cabo el cálculo. El uso de los puntos críticos se divide en tres categorías: los  $p_{c,X}^{(1)}$  del primer método con un valor diferente para cada cantidad  $X$ , el  $p_{c,s_1}^{(1)}$  del parámetro de orden aplicado a todas estas y los  $p_{c,X}^{(2)}$  que también dependen de cada observable, pero ahora usando el segundo método. En cuanto a los exponentes empleados, una vez más la idea es comparar  $\phi_2$  con  $\gamma$  y  $\sigma_1$  con  $\sigma_2$  para apreciar las diferencias. Adicionalmente, los resultados que se abordan aquí muestran diferentes valores dependiendo del régimen tomado. Es por ello que examinar las relaciones en ambos lados del umbral de percolación es la cuestión más importante. En este punto es indudable que los exponentes presentan

dicha disparidad, lo que no es claro aún es si se cumple el escalamiento.

Relación de escalamiento	Error relativo porcentual					
	Régimen precrítico			Régimen postcrítico		
	$p_{c,X}^{(1)}$	$p_{c,s_1}^{(1)}$	$p_{c,X}^{(2)}$	$p_{c,X}^{(1)}$	$p_{c,s_1}^{(1)}$	$p_{c,X}^{(2)}$
$\beta + \phi_2 = 1/\sigma_1$	0.291	0.099	0.297	2.091	2.004	1.978
$\beta + \gamma = 1/\sigma_1$	0.290	0.098	0.162	12.807	12.708	12.827
$\beta + \phi_2 = 1/\sigma_2$	0.294	0.038	0.112	-	-	-
$\beta + \gamma = 1/\sigma_2$	0.293	0.038	0.022	-	-	-

Cuadro 3.20: Error relativo porcentual presentado en la relación  $\beta + \gamma = 1/\sigma$  a través de sus distintas combinaciones para el Método 3.

Relación de escalamiento	Error relativo porcentual					
	Régimen precrítico			Régimen postcrítico		
	$p_{c,X}^{(1)}$	$p_{c,s_1}^{(1)}$	$p_{c,X}^{(2)}$	$p_{c,X}^{(1)}$	$p_{c,s_1}^{(1)}$	$p_{c,X}^{(2)}$
$2\beta + \phi_2 = (\tau - 1)/\sigma_1$	0.344	0.180	0.415	2.205	2.090	2.048
$2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma_1$	0.343	0.180	0.289	12.180	12.047	12.136
$2\beta + \phi_2 = (\tau - 1)/\sigma_2$	0.347	0.120	0.231	-	-	-
$2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma_2$	0.346	0.119	0.105	-	-	-

Cuadro 3.21: Error relativo porcentual presentado en la relación  $2\beta + \gamma = (\tau - 1)/\sigma$  a través de sus distintas combinaciones para el Método 3.

En las tablas 3.20 y 3.21 se agregan los errores encontrados para cada relación tomada. En ambas se puede ver una región vacía en la parte postcrítica debido a la falta de un valor para el exponente  $\sigma_{2+}^{(3)}$ . No obstante, la presencia de  $\sigma_{1+}^{(3)}$  es suficiente para sacar conclusiones al respecto. Además, en todas las combinaciones, sean del régimen precrítico o postcrítico, se utilizó el valor de  $\beta_+$  correspondiente. Es decir, se toma la relación del primer renglón en la tabla 3.20 con  $\beta_+$ ,  $\phi_{2-}$  y  $\sigma_{1-}$  para el primer régimen, y con  $\beta_+$ ,  $\phi_{2+}$  y  $\sigma_{1+}$  para el segundo. En todo caso, se evita usar  $\beta_-$  porque no cumple con las relaciones escalamiento.

En la parte precrítica se observa que todos los errores son menores al 0.3%, lo que indica una buena correspondencia en las relaciones con los exponentes calculados por este método. Por tanto, el uso de diferentes puntos críticos, al menos los que aquí se presentan, no influye fuertemente en los resultados.

De manera específica, se puede ver que con  $p_c = p_{c,X}^{(1)}$  el error no cambia significativamente en comparación con los otros dos casos. Esto supone que las relaciones son robustas frente a la alternancia entre  $\phi_{2-}^{(3)}$  y  $\gamma_-^{(3)}$ , así como entre  $\sigma_{1-}^{(3)}$  y  $\sigma_{2-}^{(3)}$ . Con el fin de determinar la causa, el primer pensamiento puede ser asociar esto con el hecho de que  $p_{c,M_2}^{(1)} = p_{c,X}^{(1)}$  y  $p_{c,s_{\xi 1}}^{(1)} = p_{c,s_{\xi 2}}^{(1)}$ , como se vio en la sección anterior. Sin embargo, cuando se usa el mismo punto crítico  $p_{c,s_1}^{(1)}$  para estas cuatro cantidades no se sigue el mismo razonamiento. El hecho de que los datos estén a la misma distancia del punto que maximiza su correlación  $r_X$  provoca que  $\phi_{2-}^{(3)} \approx \gamma_-^{(3)}$  y que  $\sigma_{1-}^{(3)} \approx \sigma_{2-}^{(3)}$ . Por lo que la razón de esta robustez para

el régimen precrítico parece estar más relacionada con la forma en que se definen estos puntos en el Método 1.

Por otra parte, al utilizar  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  se genera un menor error con respecto a los otros casos, en promedio. También se observa una diferencia entre las relaciones donde se utiliza  $\sigma_{1-}^{(3)}$  y  $\sigma_{2-}^{(3)}$ , aunque el error es independiente de la elección de  $\phi_{2-}^{(3)}$  o  $\gamma_-^{(3)}$ . Esto quiere decir que los exponentes  $\sigma_{1-}^{(3)}$  y  $\sigma_{2-}^{(3)}$  no son tan cercanos entre sí, pero este cambio provoca un aumento en la afinidad de la relaciones en general.

Ahora bien, cuando se emplea  $p_c = p_{c,X}^{(2)}$  no aparece esta semejanza por bloques como con los puntos críticos tomados del Método 1. En ese sentido, se obtiene una clara relación de orden para las distintas combinaciones. El uso de  $\gamma_-^{(3)}$  minimiza el error en comparación con  $\phi_{2-}^{(3)}$  y lo mismo pasa al utilizar  $\sigma_{2-}^{(3)}$  en vez de  $\sigma_{1-}^{(3)}$ . Así que la mejor aproximación está dada por las relaciones en el último renglón de cada tabla. Además, sólo para esta combinación, el error con  $p_{c,X}^{(2)}$  es menor que en los otros casos.

La conclusión de este estudio para la parte precrítica es que todos los puntos  $p_c$  utilizados conllevan al cumplimiento de las relaciones de escalamiento de manera satisfactoria. Cada opción tiene su ventaja: con  $p_c = p_{c,X}^{(1)}$  se tiene robustez en el cambio entre  $\phi_{2-}^{(3)} \leftrightarrow \gamma_-^{(3)}$  y  $\sigma_{1-}^{(3)} \leftrightarrow \sigma_{2-}^{(3)}$ , con  $p_c = p_{c,s_1}^{(1)}$  se obtiene una mayor afinidad de las relaciones en general y con  $p_c = p_{c,X}^{(2)}$  se logra el mejor resultado frente a todas las demás combinaciones.

Aunque los resultados indican que el error es pequeño en todos los casos, se optará por tomar las relaciones que involucran a  $\gamma_-$  y  $\sigma_{2-}$ .

Ahora se abordarán los datos obtenidos para el régimen postcrítico. En este lado de la transición se presentan resultados con un error más elevado que en el caso anterior. Todos los valores mostrados son al menos 6 veces más grandes que su contraparte precrítica. Sin embargo, ya que todos los errores para  $p < p_c$  eran pequeños, el mínimo en la parte derecha de las tablas se encuentra alrededor del 2%. Si bien la afinidad es menor, los mejores resultados en esta parte suponen la validez de las relaciones de escalamiento de igual modo.

En este caso, de las aproximaciones para  $\sigma$  sólo se cuenta con  $\sigma_{1+}^{(3)}$ . Los errores muestran un cambio evidente entre el renglón correspondiente a  $\phi_2$  y el de  $\gamma$ . Los resultados al utilizar  $\gamma_+^{(3)}$  rebasan el 10 %, mientras que con  $\phi_{2+}^{(3)}$  todos son cercanos al 2%. En cuanto al umbral  $p_c$  empleado, los errores cambian muy poco al variar entre las tres opciones. El mejor resultado en ambas tablas se obtiene con  $p_c = p_{c,X}^{(2)}$ .

La causa de este cambio está en el comportamiento postcrítico de las cantidades  $M_2$  y  $\chi$ . Ambas atraviesan por una caída repentina que aparece con el surgimiento del componente macroscópico y que se vuelve más abrupta con el aumento de  $N$ . Salvo pequeñas diferencias, el segundo momento de  $n(s)$  muestra un decaimiento en ley de potencias con un exponente similar en ambos lados de la transición. Sin embargo, el tamaño medio  $\chi = M_2/M_1$  es diferente después de  $p_c$  debido al cambio abrupto en  $M_1$ . La ley de potencias con que decaen los exponentes efectivos (ec. 3.10) muestra parámetros  $\theta_{\pm}$  muy cercanos entre ambas cantidades para los dos regímenes, la única diferencia es el límite al que tienden. Por lo que el exponente pasa de ser  $\gamma_- \approx 1.1810$  a  $\gamma_+ \approx 1.0486$  en una vecindad muy cercana a la transición.

Por lo tanto, es claro que para el régimen postcrítico se optará por seguir las relaciones que utilizan a  $\phi_{2+}^{(3)}$  y  $\sigma_{1+}^{(3)}$ .

Ya que se corroboró la validez de cada relación de escalamiento, ahora se buscan los exponentes relacionados con la dimensión espacial y fractal. Este cálculo se basa en las expresiones 3.38 y 3.39. Mediante estas ecuaciones y los exponentes asociados al mínimo error en cada régimen, los resultados son  $\Theta_{e-}^{(3)} = 0.7414$  y  $\Theta_{f-}^{(3)} = 0.7926$  para la parte precrítica, y  $\Theta_{e+}^{(3)} = 0.7420$  y  $\Theta_{f+}^{(3)} = 0.7929$  para la parte postcrítica. Así, con base en lo anterior se observa una buena correspondencia entre los valores de  $\Theta_{e\pm}^{(3)}$  y  $\Theta_{f\pm}^{(3)}$  sin importar el lado de la transición en que se calculen.

A partir del Método 3 también se calcularon los exponentes  $\Theta_{X-}^{(3)}$  y  $\Theta_{X+}^{(3)}$  con los que se empalman las curvas  $F_X$  en una sola. La media resultante para cada caso es  $\Theta_-^{(3)} = 0.4688$  y  $\Theta_+^{(3)} = 0.5070$ , respectivamente. Al comparar estos valores con los obtenidos para  $\Theta_{e\pm}^{(3)}$  y  $\Theta_{f\pm}^{(3)}$  se observa una diferencia más grande que en las subsecciones pasadas, por lo que la idea de que  $\Theta \neq \Theta_e$  abarca cada método y régimen tomados en el estudio. Esto generalizando la conclusión obtenida para el Método 2 en la que  $\Theta \neq \delta$  sobre el punto crítico, ya que se obtuvo que  $\delta \approx \Theta_e$ .

Finalmente, se utilizó la expresión 3.40 para calcular el  $\tau$  que surge de las relaciones de escalamiento. Para esto se emplean los exponentes vinculados con cada régimen, siendo  $\tau_-^{(3)} = 2.0686$  y  $\tau_+^{(3)} = 2.0758$  los resultados obtenidos en cada caso. Si comparamos estos valores con el que se calculó en la sección 3.5, el primero tiene una diferencia del 0.042 % con  $\tau = 2.06955$  y el segundo difiere en un 0.305 % con la misma cantidad. En el caso precrítico se obtiene un valor más cercano al que se considera como la mejor aproximación de  $\tau$ . Esto se debe a una mayor afinidad en esta parte para las relaciones 3.36 y 3.37.

Parámetro crítico	Valor	Parámetro crítico	Valor
$\beta_-^{(3)}$	1.1891	$\beta_+^{(3)}$	0.0864
$\gamma_-^{(3)}$	1.1810	$\gamma_+^{(3)}$	1.0486
$\phi_{2-}^{(3)}$	1.1792	$\phi_{2+}^{(3)}$	1.1693
$\sigma_-^{(3)}$	0.7892	$\sigma_+^{(3)}$	0.7809
$\tau_-^{(3)}$	2.0686	$\tau_+^{(3)}$	2.0758
$\Theta_-^{(3)}$	0.4688	$\Theta_+^{(3)}$	0.5070
$\Theta_{e-}^{(3)}$	0.7414	$\Theta_{e+}^{(3)}$	0.7420
$\Theta_{f-}^{(3)}$	0.7926	$\Theta_{f+}^{(3)}$	0.7929

Cuadro 3.22: Resumen de los parámetros críticos más importantes calculados por el Método 3.

En la tabla 3.22 se muestran los parámetros críticos más importantes para cada régimen calculados por el Método 3. Como se ha manejado, el subíndice  $-$  tiene que ver con el caso precrítico y el  $+$  con el postcrítico. Los exponentes  $\beta_{\pm}^{(3)}$ ,  $\gamma_{\pm}^{(3)}$ ,  $\phi_{2\pm}^{(3)}$ ,  $\sigma_{\pm}^{(3)}$  y  $\Theta_{\pm}^{(3)}$  fueron calculados directamente a partir de los datos de las simulaciones. Para la minimización del error en las relaciones de escalamiento se utilizó específicamente a  $\beta_{\pm}^{(3)}$ ,  $\gamma_{\pm}^{(3)}$  y  $\phi_{2\pm}^{(3)}$ , por lo que sus contrapartes del otro lado de la transición sólo se agregan para complementar la tabla. Todos los valores corresponden al caso en el que  $p_c = p_{c,X}^{(2)}$ . Para el resultado final

---

de  $\Theta_{\pm}^{(3)}$  se promedió sobre lo obtenido por las distintos observables. En cuanto a  $\tau_{\pm}^{(3)}$ ,  $\Theta_{e\pm}^{(3)}$  y  $\Theta_{f\pm}^{(3)}$ , se utilizaron las expresiones mencionadas para generar cada valor.

# Capítulo 4

## Escalamiento de tamaño finito modificado

En el capítulo pasado se abordó el comportamiento del modelo de percolación explosiva en las cercanías del punto crítico a través de un enfoque numérico. Para esto se tomaron varias muestras del sistema y se utilizó el promedio de las cantidades más importantes sobre el mismo valor del parámetro de control  $p$  cada vez. El resultado es un conjunto de observables  $X$  tal que

$$X(p, N) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} X^i(p, N) \quad (4.1)$$

donde  $N_r$  es el número de realizaciones y  $X^i$  es la  $i$ -ésima muestra de  $X$ . Obtener estos promedios representa el primer paso en el cálculo de las cantidades de interés y se generaron para cada uno de los valores de los parámetros  $p$  y  $N$  descritos previamente.

Sin embargo, al recopilar en la sección 3.8 todos los resultados conseguidos con la expresión 4.1 se tiene un grupo de exponentes dependientes de la técnica utilizada y se crea una disyuntiva sobre cual es el correcto. Esto provoca que las relaciones de escalamiento se cumplan por segmentos en el dominio de  $p$  y sucede debido a la inusualidad del modelo.

Con el fin de resolver el problema del escalamiento por partes se desarrollará un nuevo método para abordar los observables más importantes en el sistema.

### 4.1. Técnica de escalamiento alternativa

En contraste con los métodos desarrollados en la sección 3.3 y aplicados a lo largo del capítulo anterior, aquí se propone una forma alternativa de promediar sobre las distintas realizaciones basada en los artículos [NLT11; ZC17; Fan+20]. La diferencia con el escalamiento de tamaño finito estándar es que el estudio esta vez depende de cada muestra generada y se centra en los puntos definidos como pseudocríticos. Es decir, todos los datos se comparan entre sí con base en su distancia al punto  $\tilde{p}_{c,N}^i$ , definido como el valor de  $p$

que maximiza la amplitud de las cantidades  $X$ . Esto significa que dichos puntos cambian con cada muestra  $i$  y con el tamaño de red  $N$ .

Aunque los puntos  $\tilde{p}_{c,N}^i$  se pueden asociar a distintas cantidades, la más relevante en este análisis será el máximo brinco en el parámetro de orden. Este se define como el cambio más grande en  $s_1$  dado por la adición de un solo enlace a la red y se denota como  $\Delta s_{1max}$ . Los puntos en los que sucede este cambio máximo se expresan como  $\tilde{p}_{c,\Delta s_1}$  (obviando la dependencia con respecto a  $i$  y  $N$ , y resaltando la que se tiene con cada observable). De modo que la variable sobre la que se promedia en este método alternativo es  $\varepsilon = p - \tilde{p}_{c,\Delta s_1}$  y la definición de los observables es, por lo tanto,

$$\tilde{X}(\varepsilon, N) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \tilde{X}^i(\varepsilon, N) \quad (4.2)$$

donde se utiliza una tilde para denotar este cambio.

Ahora bien, si se sigue el camino establecido por la forma estándar de promediar, el cambio máximo es

$$\Delta s_{1max} = \max_p \left[ s_1 \left( p + \frac{1}{N} \right) - s_1(p) \right] \quad (4.3)$$

donde  $s_1(p)$  se genera a partir de la ecuación 4.1. En cambio, el valor de  $\Delta \tilde{s}_{1max}$  obtenido por la ec. 4.2 es simplemente la media de todas las realizaciones del brinco máximo

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{s}_{1max} &= \max_{\varepsilon} \left[ \tilde{s}_1 \left( \varepsilon + \frac{1}{N} \right) - \tilde{s}_1(\varepsilon) \right] \\ &= \tilde{s}_1 \left( \frac{1}{N} \right) - \tilde{s}_1(0) \\ &= \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left[ \tilde{s}_1^i \left( \frac{1}{N} \right) - \tilde{s}_1^i(0) \right] \\ &= \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \Delta \tilde{s}_{1max}^i \end{aligned} \quad (4.4)$$

los cuales se dan en la posición  $\varepsilon = 0$  por definición. Se asume que esta cantidad está relacionada con el comportamiento crítico del sistema, por lo que se utilizará como indicador de la transición. De igual manera, una de las razones por las que se introduce esta forma alternativa de promediar las cantidades es para hacer estadística con estos brincos.

En la sección 3.4 se mencionó este máximo cambio en  $s_1$  como opción adicional para poder aplicar el Método 2 sobre el parámetro de orden. Sin embargo, se evitó agregar los resultados correspondientes en dicha sección ya que apoyan la idea de discontinuidad en la transición. Ahora se sabe que la distribución del parámetro de orden es bimodal en las cercanías de  $p_c$  y que la media de  $s_1$  es engañosa en esa región, pero en su momento representaba una contradicción con respecto a lo encontrado en la literatura y en la sección 3.2.

En la figura 4.1 se muestra una comparación de los resultados del máximo cambio en  $s_1$  como función del tamaño del sistema con ambos enfoques. Por un lado se promedia  $s_1$

y luego se toma la diferencia más grande al dar un paso en  $p$  y, por el otro, se toma el promedio de las diferencias de cada realización. El primer caso corresponde a los datos representados con cuadrados verdes, los cuales exhiben un crecimiento con  $N$ . Esto quiere decir que el brinco máximo en la media de  $s_1$  aumenta de tamaño como la raíz cuadrada de  $N$  aproximadamente, según el mejor ajuste. A menos que la cantidad cambie su comportamiento para redes más grandes, este brinco máximo llegaría a la unidad (la brecha más grande posible) en  $N \approx 9.62 \times 10^{14}$ . No obstante, esto conlleva a un resultado erróneo según la información recabada hasta ahora.

Por el contrario, los datos presentados bajo el método alternativo (círculos azules) tienen un comportamiento decreciente con  $N$ . Aunque este no es tan pronunciado como en el primer caso, el ajuste es muy bueno ( $R^2 > 0.9999$ ) y es consistente con una transición de segundo orden. Además el exponente con que decae esta ley de potencias es muy cercano al  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}$  encontrado por el Método 1, por lo que deben estar estrechamente relacionados. Entonces, de acuerdo con los datos presentados para este modelo, el promedio de los observables calculado por la ecuación 4.2 es la manera correcta de atacar el problema del máximo brinco en el parámetro de orden.

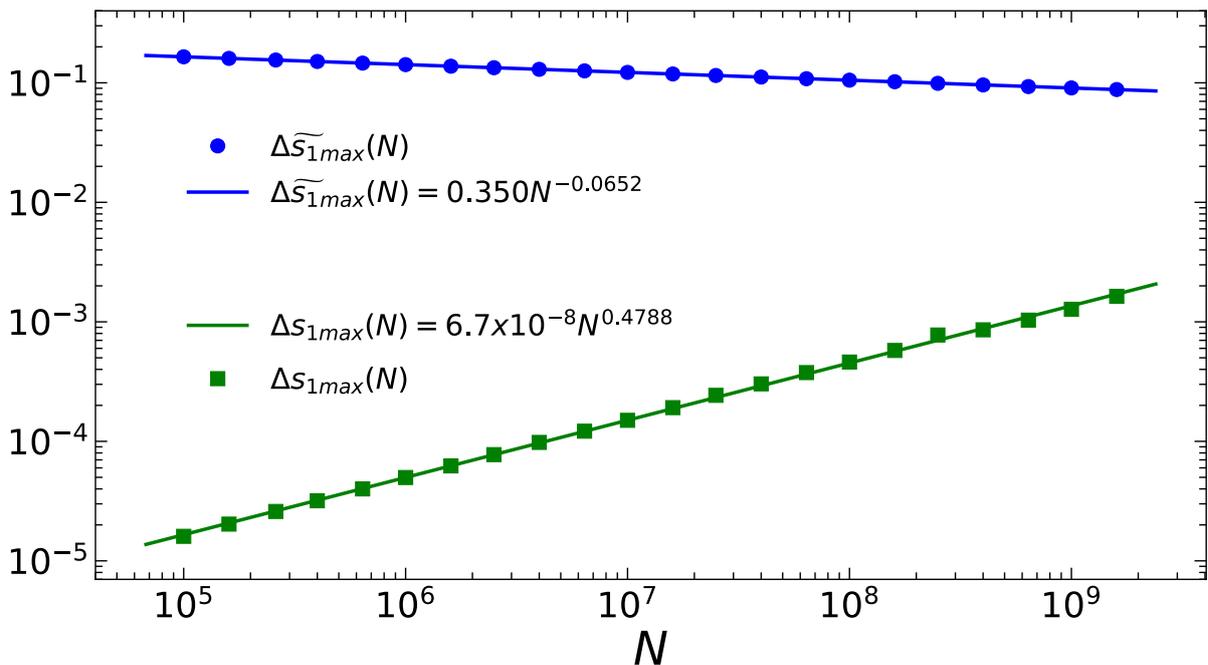


Figura 4.1: Cambio máximo en  $s_1$  como función de  $N$  para las dos formas distintas de promediar la misma cantidad. Al utilizar la ecuación 4.3 se obtiene el crecimiento de esta brecha (cuadrados verdes) y un indicio erróneo de discontinuidad. Esto se debe al carácter bimodal encontrado en la distribución de  $s_1$  y una media que no refleja información clara en las cercanías de  $p_c$ . Mientras que la segunda forma de promediar esta cantidad (ec. 4.4) se muestra en círculos azules y es consistente con una transición continua, ya que decrece con  $N$  como una ley de potencias. El exponente con el que decae es muy cercano a  $\beta^{(1)}\Theta_{s_1}^{(1)}$ .

Este resultado muestra uno de los fundamentos para utilizar el método presentado en este capítulo y señala la conexión entre el exponente asociado a  $\Delta \widetilde{s}_{1max}$  y el calculado para  $s_1$  con el Método 1 en la sección 3.4. Aunque se resalta la importancia del cambio máximo

en el parámetro de orden como punto pseudocrítico ( $\tilde{p}_{c,\Delta s_1}$ ), es natural preguntarse qué pasa si se elige cualquier otra cantidad. Por ejemplo, se puede optar por las amplitudes máximas en los componentes de rango mayor a  $R = 1$ . En ese sentido se introduce una versión general de la ecuación 4.4 para promediar los observables bajo el método alternativo.

Así que, por ahora, el cálculo de las cantidades se centrará específicamente en los puntos pseudocríticos  $\tilde{p}_{c,X}$ , los cuales se definen como

$$\tilde{p}_{c,X}(N) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \tilde{p}_{c,X}^i(N) \quad (4.5)$$

donde  $\tilde{p}_{c,X}^i(N)$  es el punto pseudocrítico obtenido a partir de la cantidad  $X$  en la realización  $i$  con el tamaño de red  $N$ . De esta manera se puede aplicar el escalamiento de tamaño finito modificado en busca de la mejor aproximación al punto crítico  $\tilde{p}_{c,X}$ . Similarmente, se utiliza el valor que los observables  $X$  toman en estos puntos para generar la media de las amplitudes máximas

$$\tilde{X}_{max}(N) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \tilde{X}_{max}^i(N) \quad (4.6)$$

donde  $\tilde{X}_{max}^i(N) = X(p = \tilde{p}_{c,X}^i(N), N)$ . En todos los casos, el vínculo entre los observables calculados de una manera o la otra es que  $\tilde{p}_{c,X}^i(N) = p_{c,X}^i(N)$  y que  $\tilde{X}_{max}^i(N) = X_{max}^i(N)$ . Al igual que la media, también se puede analizar el comportamiento de la desviación estándar en las distribuciones formadas por los valores  $\tilde{X}_{max}^i$  y  $\tilde{p}_{c,X}^i$ , las cuales se denotan como  $DE_{\tilde{X}_{max}}$  y  $DE_{\tilde{p}_{c,X}}$ , respectivamente.

El cálculo de estas cantidades se lleva a cabo para los diferentes tamaños de red simulados y con esto se generan cuatro relaciones que dependen de  $N$  para cada observable. Los datos obtenidos en cada caso siguen leyes de potencia como las siguientes

$$|\tilde{p}_{c,X}(N) - \tilde{p}_{c,X}| \sim N^{-\tilde{\delta}_X^{(m)}} \quad (4.7)$$

$$\tilde{X}_{max}(N) \sim N^{\tilde{\omega}^{(m)} \tilde{\Theta}_X^{(m)}} \quad (4.8)$$

$$DE_{\tilde{p}_{c,X}}(N) \sim N^{-\tilde{\delta}_X^{(d)}} \quad (4.9)$$

$$DE_{\tilde{X}_{max}}(N) \sim N^{\tilde{\omega}^{(d)} \tilde{\Theta}_X^{(d)}} \quad (4.10)$$

donde los superíndices  $(m)$  y  $(d)$  corresponden a los parámetros calculados con las medias y las desviaciones estándar, respectivamente. Aunque se añade el análisis sobre las desviaciones, esta manera de proceder es prácticamente un Método 2 adecuado a los promedios modificados. Así, el mejor ajuste para los grupos de puntos respectivos permite la obtención de los exponentes  $\tilde{\delta}_X^{(m)}$ ,  $\tilde{\omega}^{(m)} \tilde{\Theta}_X^{(m)}$ ,  $\tilde{\delta}_X^{(d)}$  y  $\tilde{\omega}^{(d)} \tilde{\Theta}_X^{(d)}$  de manera numérica (como en el capítulo pasado, se toma  $\tilde{\omega} = |\tilde{\omega}'|$  de aquí en adelante). En las tablas 4.1 y 4.2 se agregan los resultados conseguidos al emplear el escalamiento de tamaño finito modificado sobre los distintos observables. Los detalles acerca de los símbolos utilizados y la notación empleada se incluyen en el Apéndice A.

## 4.2. Resultados

El primer resultado que se encuentra después de realizar el cálculo de los ajustes es que se obtienen exactamente los mismos parámetros críticos al usar  $\Delta\tilde{s}_{1max}$  y  $\tilde{s}_{2max}$ . Esto ocurre ya que las distribuciones de estas cantidades son iguales e indican que el mayor brinco en  $s_1$  siempre está dado por el máximo valor de  $s_2$  alcanzado unos pasos antes. Así que, además de que no vale la pena agregar un renglón extra para presentarlos por separado, se encuentra un resultado que apoya la evolución de componentes por crecimiento directo.

En el caso de  $\tilde{s}_1$  no se tiene un valor máximo como tal, pero se aprovechan los puntos pseudocríticos dados por  $\tilde{p}_{c,\Delta s_1}^i$  para formar una distribución con los valores correspondientes. De modo que  $\Delta\tilde{s}_{1max}$  y  $\tilde{s}_1$  “max” se extraen del mismo punto en cada realización, pero generan distribuciones diferentes como se verá más adelante.

El estudio de las medias  $\tilde{p}_{c,X}(N)$  genera dos resultados muy importantes: el valor límite al que tienden estas funciones con  $N \rightarrow \infty$  y el exponente  $\tilde{\delta}_X^{(m)}$  con el que decaen a dicho valor. Los puntos críticos calculados con el método alternativo son los más precisos que se obtienen en este trabajo.

A través de los 11 observables tomados en consideración se consigue el mismo límite a seis cifras significativas. Asimismo, como con el Método 1, se establece una cota superior para los puntos críticos  $\tilde{p}_{c,X}$  dado por el correspondiente al parámetro de orden. Este tiene el valor de  $\tilde{p}_{c,s_1} = 0.88844926$ , como se puede ver en el primer renglón de la tabla 4.1. Los demás puntos presentan valores en el intervalo  $[0.88844922, 0.88844926]$ . En particular, los que corresponden a  $\tilde{s}_R$  muestran un decrecimiento de (aproximadamente) un paso con el aumento sucesivo de  $R$ . Esto confirma que el crecimiento directo de componentes es el que domina en el modelo.

En adición a lo anterior, los valores de  $\tilde{p}_{c,X}$  que se generan aquí son muy cercanos a los que se consiguieron con el manejo de las distribuciones  $P(s_1)$  en la sección 3.4 ( $p_{c,s_1}^{(2)} = 0.8884492$ ) y las distribuciones  $n(s)$  en la sección 3.6 ( $p_{c,n}^{(2)} = 0.8884493$ ).

Cantidad $\tilde{X}$	$\tilde{p}_{c,X}$ 0.888449...	$\tilde{\delta}_X^{(m)}$	$\tilde{\omega}^{(m)}\tilde{\Theta}_X^{(m)}$	$\tilde{\omega}^{(m)}$	$\tilde{\Theta}_X^{(m)}$
$\tilde{s}_1$	26(33)	0.677(9)	0.06520(4)	0.0881	0.7402
$\Delta\tilde{s}_1$ y $\tilde{s}_2$	24(51)	0.714(9)	0.06522(5)	0.0881	0.7405
$\tilde{s}_3$	23(56)	0.736(4)	0.06510(5)	0.0879	0.7406
$\tilde{s}_4$	22(55)	0.740(3)	0.06517(7)	0.0880	0.7405
$\tilde{M}_2$	24(41)	0.715(5)	0.86964(6)	1.1737	0.7409
$\tilde{M}_3$	24(42)	0.709(6)	1.80449(13)	2.4291	0.7429
$\tilde{M}_4$	25(43)	0.705(7)	2.73938(19)	3.6791	0.7446
$\tilde{\chi}$	26(29)	0.688(5)	0.85505(40)	1.1739	0.7284
$\tilde{s}_{\xi_1}$	25(36)	0.689(8)	0.93478(6)	1.2623	0.7405
$\tilde{s}_{\xi_2}$	23(33)	0.704(7)	0.93482(7)	1.2624	0.7405

Cuadro 4.1: Resultados obtenidos al aplicar los ajustes en ley de potencias 4.7 y 4.8 sobre los datos  $\tilde{p}_{c,X}(N)$  y  $\tilde{X}_{max}(N)$ , respectivamente.

Cantidad $\tilde{X}$	$\tilde{\delta}_X^{(d)}$	$\tilde{\omega}^{(d)}\tilde{\Theta}_X^{(d)}$	$\tilde{\omega}^{(d)}$	$\tilde{\Theta}_X^{(d)}$
$\tilde{s}_1$	0.5009(2)	0.0652(2)	0.0869	0.7505
$\Delta\tilde{s}_1$ y $\tilde{s}_2$	0.5011(3)	0.0649(1)	0.0878	0.7390
$\tilde{s}_3$	0.5018(3)	0.0652(2)	0.0883	0.7392
$\tilde{s}_4$	0.5025(4)	0.0648(2)	0.0876	0.7394
$\tilde{M}_2$	0.5016(3)	0.8699(1)	1.1770	0.7391
$\tilde{M}_3$	0.5012(3)	1.8047(2)	2.4309	0.7424
$\tilde{M}_4$	0.5011(3)	2.7395(2)	3.6655	0.7474
$\tilde{\chi}$	0.5013(3)	0.8487(6)	1.1625	0.7301
$\tilde{s}_{\xi_1}$	0.5010(3)	0.9351(1)	1.2662	0.7385
$\tilde{s}_{\xi_2}$	0.5009(3)	0.9350(1)	1.2660	0.7386

Cuadro 4.2: Resultados obtenidos al aplicar los ajustes en ley de potencias 4.9 y 4.10 sobre los datos  $DE_{\tilde{p}_{c,X}}(N)$  y  $DE_{\tilde{X}_{max}}(N)$ , respectivamente.

Por otro lado, el exponente con el que decaen los puntos pseudocríticos muestra valores más grandes que cualquiera de los  $\delta_X$  del Método 2 y se sitúan alrededor de la media  $\tilde{\delta}_X \approx 0.708$ . La variación que presentan estos exponentes es menor que su contraparte en el capítulo pasado, no obstante, sigue siendo un poco diferente del exponente  $\tilde{\Theta}_X^{(m)} \approx 0.74$  con el que se da el mejor empalme de curvas en este caso. Esta diferencia se puede adjudicar a lo sensible que son los ajustes de la ec. 4.7 con un cambio en el valor de  $\tilde{p}_{c,X}$ . En [ZC17] se sugiere una manera más exacta de obtener este exponente basada en el escalamiento de la diferencia entre brincos sucesivos en el parámetro de orden.

Los exponentes con que decaen los puntos  $\tilde{X}_{max}(N)$  son todos diferentes a los que se estimaron por los Métodos 1 y 2, a excepción del caso  $\tilde{\beta}^{(m)}\tilde{\Theta}_{s_1}^{(m)} \approx \beta^{(1,2)}\Theta_{s_1}^{(1,2)}$  del parámetro de orden. No obstante, se observa que el método alternativo desarrollado en este capítulo produce valores con un error más pequeño. Además se igualan los exponentes asociados a  $\tilde{s}_R$ , ya que  $\tilde{\beta}_R^{(m)}\tilde{\Theta}_{s_R}^{(m)} \approx 0.0652$  para los primeros cuatro valores de  $R$ . Esto representa un cambio apreciable con respecto a los resultados previos porque el exponente de  $s_1$  y los de  $s_{2,3,4}$  tenían al menos un orden de magnitud de diferencia.

Aunque los valores obtenidos para las otras cantidades también cambiaron, se mantiene el comportamiento previo: los exponentes crecen con el aumento de  $j$  en  $\tilde{M}_j$  y los que corresponden a  $\tilde{s}_{\xi_k}$  son muy parecidos entre sí para  $k = 1, 2$ . El único detalle es que aquí sí se cumple que

$$\tilde{\phi}_{k+2}^{(m)}\tilde{\Theta}_{M_{k+2}}^{(m)} - \tilde{\phi}_{k+1}^{(m)}\tilde{\Theta}_{M_{k+1}}^{(m)} \approx \tilde{\Theta}_{s_{\xi_k}}^{(m)}/\tilde{\sigma}_k^{(m)}$$

al menos para los valores de  $k = 1, 2$  en este trabajo. Es decir, ya que se promedia con base en la ec. 4.2, el exponente asociado a  $\tilde{M}_{j+1}/\tilde{M}_j$  es prácticamente la diferencia entre los asociados a  $\tilde{M}_{j+1}$  y  $\tilde{M}_j$ , para  $j = 2, 3$ .

Respecto a los resultados obtenidos con las desviaciones estándar  $DE_{\tilde{X}_{max}}(N)$  se observa que los valores generados de  $\tilde{\omega}^{(d)}\tilde{\Theta}_X^{(d)} \approx \tilde{\omega}^{(m)}\tilde{\Theta}_X^{(m)}$  para cada observable  $\tilde{X}$ , sólo que con una precisión menor. Aunque no se muestran en las tablas, algo interesante es que los

coeficientes que acompañan a las leyes de potencia en la ec. 4.10 muestran una reducción a la mitad cada vez que  $R$  crece una unidad para los tamaños  $\widetilde{s}_R$  con  $R = 1, 2, 3, 4$ .

El manejo de los datos  $DE_{\widetilde{p}_{c,X}}(N)$ , a diferencia de las medias, no genera valores para el umbral de percolación como parte de sus ajustes. Aun así la diferencia entre los exponentes  $\widetilde{\delta}_X^{(d)}$  y  $\widetilde{\delta}_X^{(m)}$  es un resultado igual de notable. Esto no sólo porque los primeros presentan una variación mucho menor, sino porque los valores son bastante cercanos al exponente  $\Theta_X = 0.5$  estipulado en el capítulo anterior. Además, los coeficientes relacionados con las leyes de potencia en la ec. 4.9 son muy cercanos entre sí y toman valores alrededor de 0.45. Lo anterior significa que las desviaciones con respecto a  $\widetilde{p}_{c,X}$  son independientes del observable utilizado porque su comportamiento es aproximadamente el mismo.

Además de uniformizar los exponentes relacionados con  $\widetilde{s}_R$  e igualarlos con el obtenido para el parámetro de orden en la sección 3.4 ( $\beta^{(1,2)}\Theta_{s_1}^{(1,2)} \approx 0.0653$ ), otro cambio favorable es que las relaciones de escalamiento se cumplen y presentan mejores resultados. Aquí vale la pena resaltar que el exponente  $\widetilde{\phi}_2^{(m)}$  asociado a  $\widetilde{M}_2$  presenta una afinidad marcadamente mayor que la de  $\widetilde{\gamma}^{(m)}$  para el tamaño medio  $\widetilde{\chi}$ .

Primero se toma la relación 3.36 para constatar que los exponentes obtenidos por este método se ajustan a ella. El error relativo porcentual al comparar ambos lados de la expresión  $\widetilde{\beta}^{(m)}\widetilde{\Theta}_{s_1}^{(m)} + \widetilde{\phi}_2^{(m)}\widetilde{\Theta}_{M_2}^{(m)} \approx \widetilde{\Theta}_{s_{\xi_2}}^{(m)}/\widetilde{\sigma}_2^{(m)}$  es del 0.0035 %, en contraste con el 1.558 % que se consigue al usar  $\widetilde{\gamma}^{(m)}$  en vez de  $\widetilde{\phi}_2^{(m)}$ . Puede que 1.558 % no suene mal, pero es un error cerca de 400 veces mayor que el que se obtiene con  $\widetilde{\phi}_2^{(m)}$ . Al emplear la misma expresión, pero con los exponentes calculados con las desviaciones estándar se genera un error incluso menor del 0.0022 %.

La otra relación utilizada para verificar el escalamiento con los exponentes críticos obtenidos aquí (ec. 3.37) implica el uso de  $\tau$ . Si bien este no forma parte de los exponentes calculados por el método alternativo, el uso de  $\tau = 2.069546$  generado en la sección 3.6 es consistente con los demás valores. Por lo que, al comparar ambos lados en la expresión  $2\widetilde{\beta}^{(m,d)}\widetilde{\Theta}_{s_1}^{(m,d)} + \widetilde{\phi}_2^{(m,d)}\widetilde{\Theta}_{M_2}^{(m,d)} \approx (\tau - 1)\widetilde{\Theta}_{s_{\xi_2}}^{(m,d)}/\widetilde{\sigma}_2^{(m,d)}$  se consigue un error relativo del 0.023 % utilizando los resultados de las medias  $\widetilde{X}_{max}(N)$  (superíndice  $(m)$ ) y uno del 0.018 % con las desviaciones  $DE_{\widetilde{X}_{max}}(N)$  (superíndice  $(d)$ ).

Si se fija cada parámetro utilizado en la relación de escalamiento anterior y sólo se varía  $\tau$ , el valor que minimiza el error relativo a seis cifras decimales es 2.069787. De modo que al asumir el cumplimiento de esta relación y calcular un valor equivalente para este método, el mejor resultado es muy cercano al original. Así que, al igual que con  $\widetilde{\beta}^{(m)}\widetilde{\Theta}_{s_1}^{(m)}$ , se concluye que el valor del exponente  $\tau$  en las cercanías del punto crítico es el mismo independientemente de la forma en que se promedian los observables.

Hasta ahora se ha repetido el mismo procedimiento que se llevó a cabo para cada una de las técnicas de escalamiento del capítulo pasado, así que, ¿por qué agregar otra más? La ventaja en esta forma de promediar las cantidades permite analizar los datos de los puntos pseudocríticos aislando su aporte en cada realización. De esta manera no se pierde el efecto y se consiguen parámetros críticos con un error considerablemente más bajo. No obstante, el lector meticoloso podría pensar que evadir el promedio sobre el parámetro de control  $p$  no tiene sentido si se busca interpretar la transición de fase mediante la evolución libre del sistema. Ese pensamiento tan específico y válido sólo se apacigua al encontrar la utilidad del método alternativo sobre otros puntos además del crítico.

## Empalme de las medias $\tilde{X}(\varepsilon, N)$ y desviaciones $DE_{\tilde{X}}(\varepsilon, N)$

En vista de lo anterior, la conexión con el comportamiento del sistema promediado de manera estándar aparece al empalmar las curvas  $\tilde{X}(\varepsilon, N)$  para cada observable. Este procedimiento consigue desacoplar los exponentes  $\tilde{\omega}^{(m,d)}$  y  $\tilde{\Theta}_X^{(m,d)}$  con base en la ecuación

$$\tilde{X}(\varepsilon, N) \sim N^{\tilde{\omega} \tilde{\Theta}_X} F_{\tilde{X}}(\varepsilon N^{\tilde{\Theta}_X}) \quad (4.11)$$

la cual describe el escalamiento de tamaño finito modificado. Los resultados obtenidos se agregan en las últimas columnas de las tablas 4.1 y 4.2. En ambos casos la media de los valores de  $\tilde{\Theta}_X^{(m,d)}$  es 0.740, con una desviación estándar de 0.004 para las medias y 0.005 para las desviaciones. Así que se toma  $\tilde{\Theta}^{(m,d)} = 0.740$  como resultado final e independiente de las cantidades  $\tilde{X}$ .

Los exponentes  $\tilde{\omega}^{(m,d)}$ , por otro lado, se vinculan directamente con los  $\omega^{(3)}$  que se consiguieron por el Método 3 de modo que  $\tilde{\omega}^{(m)} \approx \tilde{\omega}^{(d)} \approx \omega^{(3)}$ . De esta manera, no sólo se describe el comportamiento de los puntos pseudocríticos mediante los exponentes en la forma  $\tilde{\omega} \tilde{\Theta}_X$ , sino que al desacoplarlos con  $\tilde{\Theta}_X \approx 0.74$  se obtienen los valores de  $\tilde{\omega}$  con que decaen los observables para un sistema infinito ( $X \sim |p - p_c|^{\omega^{(3)}}$ ). Esta correspondencia encontrada entre el método alternativo y el Método 3 no se generó en el capítulo anterior con las otras técnicas porque cada una conduce a un grupo de exponentes diferente. Por esta razón, el alcance del método alternativo es mayor al que presentan los Métodos 1 y 2.

La otra ventaja es que el *data collapse* aplicado sobre los observables  $\tilde{X}$  funciona de manera global en el dominio de  $\varepsilon$  debido a la forma en que se promedia (ec. 4.2). Esto supone una diferencia con el empalme de curvas de las cantidades  $X$  que sólo marcha bien por segmentos en el dominio de  $p$ . Los resultados para algunos de los observables, así como el empalme de sus datos para distintos valores de  $N$  se pueden observar en la figura 4.2.

Los datos que se abordan como muestra corresponden a los tamaños de componente  $\tilde{s}_R$ , con  $R = 1, 2, 3, 4$ . En la columna izquierda se agrega la dependencia de cada uno de ellos con respecto a  $\varepsilon$  para cuatro valores distintos del tamaño de red. La brecha que existe en  $\varepsilon = 0$  ocurre debido a la forma en que se promedia cada observable. Aunque estos brincos suponen una discontinuidad en  $\tilde{s}_R$ , no es así para las cantidades  $s_R$ . Además, como se vio para  $\Delta s_1$  al inicio del capítulo, los brincos tienden a cero con  $N \rightarrow \infty$ . Así que las discontinuidades son sólo efectos de tamaño finito.

También se comprueba que el máximo brinco en  $\tilde{s}_1$  y el máximo valor de  $\tilde{s}_2$  son iguales para toda  $N$ . Ya que suceden con aproximadamente un paso de diferencia se concluye que el cambio en el componente más grande se da por la unión de éste con el segundo más grande cuando su tamaño alcanza la máxima amplitud.

Después de esto, el interés ahora está en analizar el comportamiento de los datos utilizando el escalamiento de tamaño finito modificado de la expresión 4.11. La búsqueda se centra en verificar que la función de escalamiento se alcance correctamente. Para ello, en la columna derecha de la misma figura se agrega la relación entre las variables rescaladas  $N^{\tilde{\beta}^{(m)} \tilde{\Theta}^{(m)}} \tilde{s}_R(\varepsilon)$  y  $\varepsilon N^{\tilde{\Theta}^{(m)}}$  para cada  $R$  y todos los valores de  $N$  que se simularon en este trabajo. Los exponentes  $\tilde{\beta}^{(m)} = 0.088$  y  $\tilde{\Theta}^{(m)} = 0.740$  encontrados por el méto-

do alternativo permiten un buen empalme de los datos correspondientes. De modo que las funciones de escalamiento  $F_{\tilde{s}_R=1,2,3,4}$ , a diferencia de las  $F_{s_R=1,2,3,4}$ , colapsan hacia una curva independiente de  $N$  de forma correcta en todo su dominio.

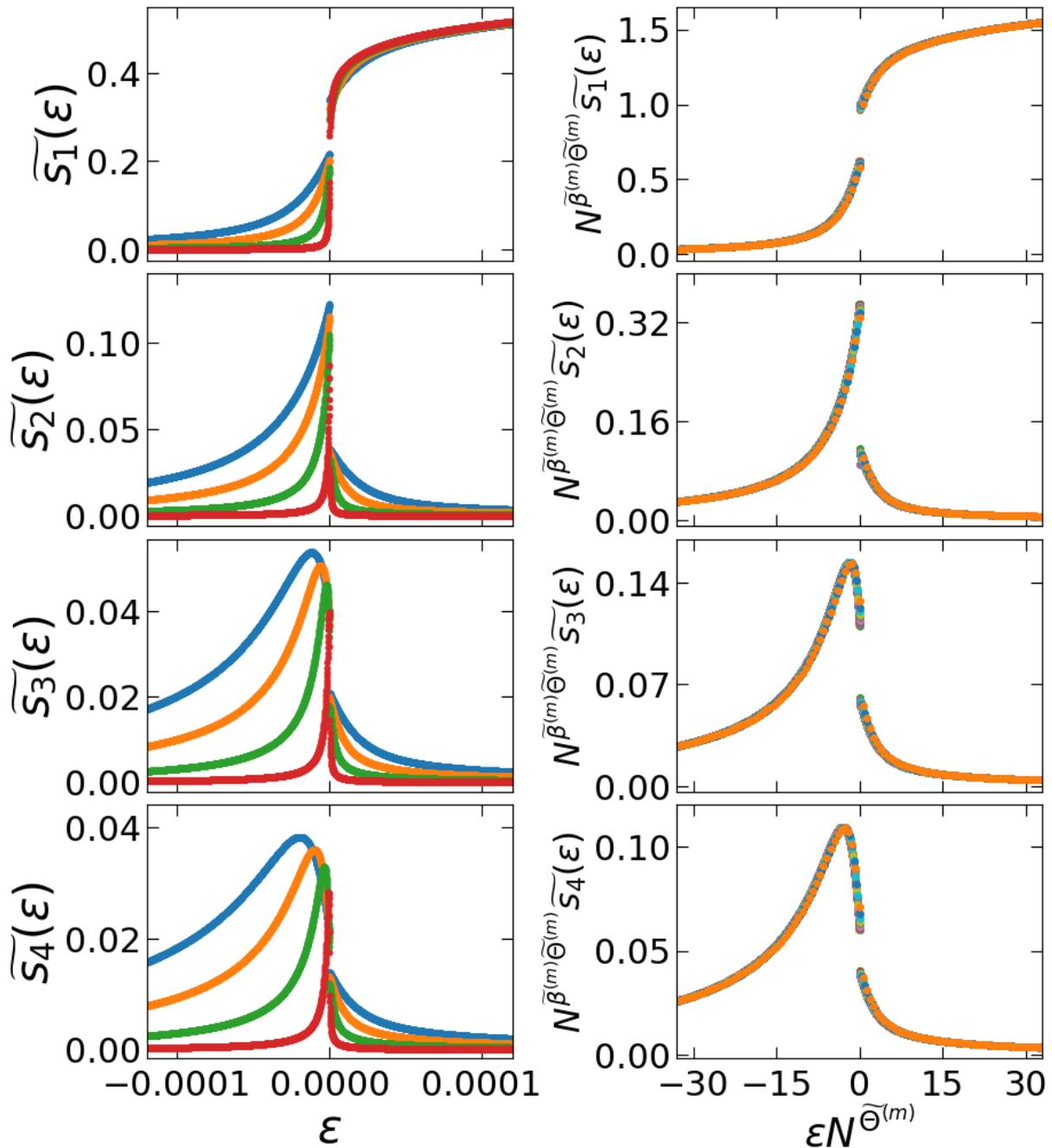


Figura 4.2: En la columna izquierda se agrega el promedio de los observables  $\tilde{s}_{R=1,2,3,4}$  calculado como en la ec. 4.2 en función de  $\epsilon$ . Para cada tamaño de componente se muestran los resultados de cuatro valores de  $N$  distintos,  $N/10^7 = 1$  (azul),  $2.5$  (naranja),  $10$  (verde) y  $100$  (rojo). En la columna derecha se observa el empalme de los datos  $F_{\tilde{s}_R}$  con base en la ec. 4.11 para los 22 valores de  $N$  simulados. Los exponentes  $\tilde{\beta}^{(m)} = 0.088$  y  $\tilde{\Theta}^{(m)} = 0.740$  se generaron mediante el método alternativo.

Este proceso mostrado para los observables  $\tilde{s}_R$  es replicado por las demás medias  $\tilde{X}$  y las

desviaciones estándar  $DE_{\tilde{X}}$  utilizando los exponentes correspondientes. Por lo tanto todas estas cantidades muestran una discontinuidad en  $\varepsilon = 0$ , la cual desaparece cuando  $N \rightarrow \infty$ . Similarmente, al empalmar los datos mediante las variables rescaladas se obtienen resultados igual de buenos a los que se presentan en la columna derecha de la figura 4.2.

### Empalme de las distribuciones $P_{\tilde{p}_c}(\tilde{p}_c)$ y $P_{\tilde{X}}(\tilde{X})$

El capítulo pasado se recurrió a la distribución de los valores de  $s_1$  para esclarecer el comportamiento del parámetro de orden en el punto crítico. Este estudio reveló que dicha distribución es bimodal, explicando así el crecimiento abrupto de  $s_1$  al atravesar la transición. En el mismo sentido se pueden analizar las distribuciones para cada observable  $\tilde{X}$  en los puntos pseudocríticos generados por cada realización. Para esto se recurre a los datos extraídos con diferentes valores de  $N$  y se busca comprobar que las distribuciones formadas tiendan a un límite bien definido. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.3.

Primeramente se agregan las distribuciones  $P_{\tilde{X}}(\tilde{X})$  para las cantidades más importantes del modelo en el primer renglón de dicha figura. Esto se realiza para los cuatro componentes más grandes en una red de tamaño  $N = 10^7$  (recuadro izquierdo) y para los observables  $\tilde{M}_2$ ,  $\tilde{\chi}$ ,  $\tilde{s}_{\xi_1}$  y  $\tilde{s}_{\xi_2}$  con  $N = 10^5$  (recuadro derecho). Por un lado, se observa que los tamaños  $\tilde{s}_R$  presentan distribuciones cuya media desciende con el aumento de  $R$  y que a su vez se vuelven más estrechas. En todos los casos se pueden apreciar distribuciones no gaussianas.

En el caso  $R = 1$  la moda está inclinada hacia la derecha, mientras que para los componentes de rango mayor se encuentra a la izquierda. Aunque la moda sesgada a la derecha puede que sea un distintivo del parámetro de orden, también puede que influya el hecho de que no se trata de una cantidad máxima, sino sólo el valor que toma  $\tilde{s}_1$  cuando  $\Delta\tilde{s}_1$  se maximiza. Se destaca esto ya que  $P_{\Delta\tilde{s}_1}(\Delta\tilde{s}_1) = P_{\tilde{s}_2}(\tilde{s}_2)$  y ambas presentan una inclinación a la izquierda.

Por otro lado, están las distribuciones asociadas con los momentos de  $n(s)$ . Las relaciones  $P_{\tilde{s}_{\xi_1}}$  y  $P_{\tilde{s}_{\xi_2}}$  muestran un comportamiento muy similar entre ellas. La proximidad que muestran sus valores para cada realización produce la similitud en su forma y ese efecto de que sólo están un poco desplazadas una de la otra. En cuanto a  $P_{\tilde{M}_2}$  y  $P_{\tilde{\chi}}$  se ve una clara diferencia en sus formas, donde la primera se encuentra más localizada y con una media menor dado que no está dividida por el primer momento. Esto destaca que el método alternativo distingue entre el comportamiento de estas cantidades, mientras que los Métodos 1 y 2 no. Todas las distribuciones son no gaussianas y la moda se inclina a la izquierda en todos los casos.

En el segundo renglón de la figura se presentan los datos relacionados con los puntos pseudocríticos  $\tilde{p}_{c,N}$ . Debido a la similitud en los resultados obtenidos previamente para esta cantidad se considera que los datos asociados a cualquier observable son representativos. El recuadro izquierdo muestra las distribuciones correspondientes a los siete valores de  $N$  más grandes que se simularon. Con el aumento del tamaño de red se observa una clara reducción en el ancho y un incremento en la altura del área encerrada por estas curvas. Además, todas presentan un máximo un poco antes de  $\tilde{p}_{c,N} = 0.88845$ , lo cual

indica que el punto crítico está muy cerca de este valor ( $\tilde{p}_c = 0.88844926$ , como se mostró al inicio de la sección).

Las distribuciones  $P_{\tilde{p}_c}(\tilde{p}_{c,N})$  dependen de  $N$ , pero el escalamiento de tamaño finito con el promedio modificado establece que al rescalar las variables todas estas tienden a una distribución límite  $F_{\tilde{p}_c}$  dada por la expresión

$$P_{\tilde{p}_c}(\tilde{p}_{c,N}) = N^{\tilde{\delta}^{(d)}} F_{\tilde{p}_c}[(\tilde{p}_{c,N} - \tilde{p}_c)N^{\tilde{\delta}^{(d)}}] \quad (4.12)$$

donde  $\tilde{\delta}^{(d)} = 0.5$  es el exponente que se calculó previamente para las desviaciones estándar de  $\tilde{p}_{c,N}$ .

Al emplear esta expresión con los parámetros  $\tilde{p}_c = 0.88844926$  y  $\tilde{\delta}^{(d)} = 0.5$  sobre las distribuciones de los puntos pseudocríticos se obtiene un buen empalme de las curvas hacia la distribución  $F_{\tilde{p}_c}$ . Esto se agrega en el recuadro derecho del segundo renglón en la misma figura. La distribución límite (al igual que las dependientes de  $N$ ) tiene una forma gaussiana. Ya que esta está centrada en 0 y normalizada a 1, se propone la función  $(1/\sqrt{2\pi\varsigma^2}) \exp[-x^2/(2\varsigma^2)]$ , con  $x = (\tilde{p}_{c,N} - \tilde{p}_c)N^{\tilde{\delta}^{(d)}}$  para describirla. De manera que sólo se necesita especificar el valor del parámetro  $\varsigma$  para realizar el ajuste. Se genera el valor  $\varsigma \approx 0.45$  con un error estándar de  $10^{-8}$  para el mejor ajuste por mínimos cuadrados ( $R^2 > 0.999$ ). El valor del parámetro de ajuste es la desviación estándar de la distribución  $F_{\tilde{p}_c}$  y es muy cercano al coeficiente asociado a la expresión 4.9 con que decaen las desviaciones  $DE_{p_c, \bar{x}}(N)$ .

Finalmente, en el último renglón de la figura 4.3 se muestran los resultados de las distribuciones  $P_{\tilde{s}_1}(\tilde{s}_1)$ . Se elige este observable en particular por la relevancia del parámetro de orden, no obstante, todas las demás cantidades se comportan de forma similar con sus respectivos exponentes. Se resalta que se trata de distribuciones unimodales, en contraste con la aparición de dos picos bien definidos en  $P_{p=p_c}(s_1)$  con el promedio estándar basado en 4.1.

En el recuadro izquierdo de la figura se pueden ver las distribuciones de  $\tilde{s}_1$  para cinco valores de  $N$  diferentes. El máximo de estas curvas se desplaza a la izquierda a la vez que se vuelven más estrechas, aunque la inclinación hacia el lado derecho se mantiene. En el recuadro derecho se agrega el empalme de las curvas hacia la distribución  $F_{P_{\tilde{s}_1}}$  dado por

$$P_{\tilde{s}_1}(\tilde{s}_1) = N^{\tilde{\beta}^{(m)}\tilde{\Theta}^{(m)}} F_{P_{\tilde{s}_1}}(\tilde{s}_1 N^{\tilde{\beta}^{(m)}\tilde{\Theta}^{(m)}}) \quad (4.13)$$

donde los exponentes  $\tilde{\beta}^{(m)} = 0.881$  y  $\tilde{\Theta}^{(m)} = 0.740$  son los que se obtuvieron al inicio de la sección. El *data collapse* que se consigue para esta cantidad y, en general, para todas las distribuciones  $P_{\tilde{X}}$  es muy bueno, al igual que el de las medias  $\tilde{X}$  y las desviaciones  $DE_{\tilde{X}}$ .

Como se vio anteriormente, las formas de las distribuciones para los valores máximos de  $\tilde{X}$  son asimétricas, de modo que no se pueden describir con una función gaussiana como los puntos pseudocríticos en  $P_{\tilde{p}_c}$ . Aunque cada cantidad es generada y promediada a partir de realizaciones independientes del sistema, el hecho de tomar específicamente las amplitudes máximas hace que el comportamiento sea diferente.

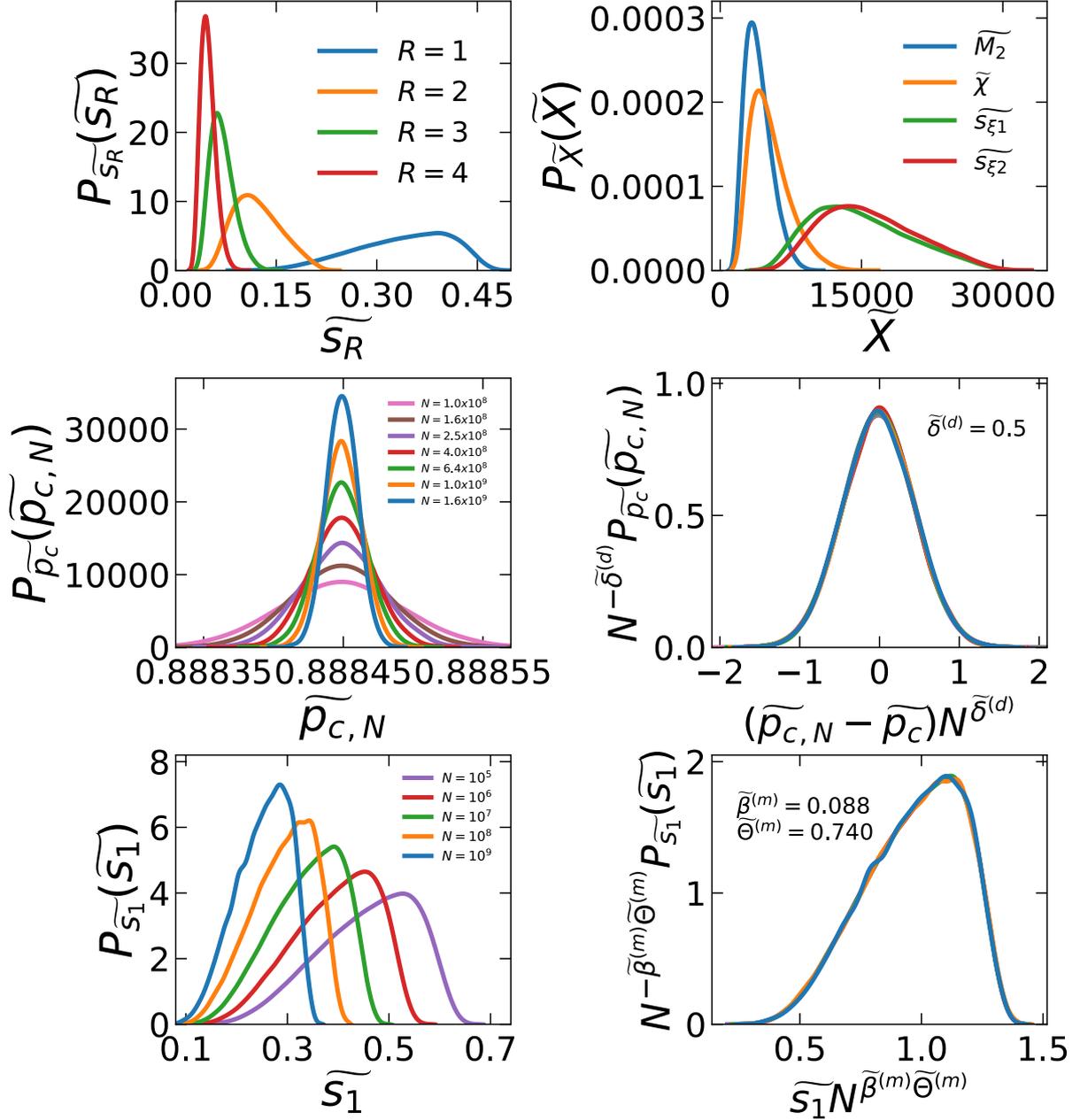


Figura 4.3: Distribuciones de valores para los observables más importantes en los puntos pseudocríticos  $\widetilde{p}_{c,X}$ . En el primer renglón se muestran dos gráficas con las distribuciones de diferentes cantidades para una  $N$  dada. En el lado izquierdo se tienen distribuciones de los tamaños  $\widetilde{s}_R$  con  $N = 10^7$ , mientras que en el derecho se agregan las distribuciones  $P_{\widetilde{M}_2}$ ,  $P_{\widetilde{\chi}}$ ,  $P_{\widetilde{s}_{\xi_1}}$  y  $P_{\widetilde{s}_{\xi_2}}$  con  $N = 10^5$ . En el renglón central se muestran primero las distribuciones de los puntos pseudocríticos  $\widetilde{p}_{c,N}$  para los valores más grandes de  $N$  y luego el empalme de sus curvas con base en la ec. 4.12 y los parámetros  $\widetilde{p}_c = 0.88844926$  y  $\widetilde{\delta}^{(d)} = 0.5$ . Estos datos encuentran buenos ajustes con distribuciones gaussianas. En el último renglón se realiza algo similar con las distribuciones de  $\widetilde{s}_1$ . En el recuadro izquierdo se agregan los resultados para cinco valores de  $N$  y se ve un desplazamiento hacia la izquierda a la vez que se vuelven más estrechas. En el recuadro derecho están las curvas para distintos tamaños de red empalmadas con la ec. 4.13 y los exponentes  $\widetilde{\beta}^{(m)} = 0.088$  y  $\widetilde{\Theta}^{(m)} = 0.740$ . Su forma es asimétrica y los datos se describen en buena forma por la expresión 4.14.

En el artículo [Fan+20] se realiza un estudio similar al que se lleva a cabo aquí, para varios modelos de percolación. En este aseveran que los valores del máximo brinco en el parámetro de orden tienen un comportamiento que puede describirse por la teoría del valor extremo. Con base en este trabajo, se propone que los datos de  $F_{P_{\tilde{X}}}(y)$  (para todos los observables, no sólo  $\Delta\tilde{s}_1$ ) son representados por la distribución de Gumbel, la cual está dada por

$$G(z) = \frac{1}{b}e^{-(e^{-z}+z)} \quad (4.14)$$

con  $z = (y - a)/b$ ,  $F_{P_{\tilde{X}}}(y) = P_{\tilde{X}}(\tilde{X})N^{-\tilde{\omega}^{(m)'}\tilde{\Theta}^{(m)}}$  y  $y = \tilde{X}N^{\tilde{\omega}^{(m)'}\tilde{\Theta}^{(m)}}$ . En el artículo especifican cuatro parámetros de ajuste, pero realmente serán suficientes sólo dos. El parámetro  $a$  se refiere a la localización en el eje horizontal, mientras que  $b$  funge como parámetro de escala.

Se aplica la distribución de Gumbel sobre los datos obtenidos para las distribuciones límite  $F_{P_{\tilde{X}}}$  y los resultados correspondientes a los mejores ajustes se presentan en la tabla 4.3.

Cantidad $\tilde{X}$	$a$	$b$	$R^2$
$\tilde{s}_1$	1.0654	0.1914	0.9745
$\Delta\tilde{s}_1$ y $\tilde{s}_2$	0.3066	0.0955	0.9889
$\tilde{s}_3$	0.1758	0.0459	0.9973
$\tilde{s}_4$	0.1248	0.0284	0.9966
$\tilde{M}_2$	0.1520	0.0552	0.9970
$\tilde{M}_3$	0.0347	0.0274	0.9543
$\tilde{M}_4$	0.0050	0.0106	0.9690
$\tilde{\chi}$	0.2255	0.0879	0.9964
$\tilde{s}_{\xi_1}$	0.2657	0.1018	0.9884
$\tilde{s}_{\xi_2}$	0.2912	0.1009	0.9872

Cuadro 4.3: Valores de los parámetros  $a$  y  $b$  dados por el mejor ajuste de la expresión 4.14 sobre las distribuciones límite  $F_{P_{\tilde{X}}}$ . Esto se realiza para los datos de cada cantidad  $\tilde{X}$  y también se agrega el coeficiente de determinación  $R^2$  obtenido con cada ajuste.

Debido a que la distribución relacionada con el parámetro de orden es la única que está inclinada a la derecha se modificó la expresión 4.14 con el cambio  $z \leftrightarrow -z$  para que el ajuste fuera mejor.

Los parámetros  $a$  y  $b$  obtenidos indican que las distribuciones límite se desplazan hacia la izquierda y se vuelven más estrechas con el aumento de  $R$  en  $F_{P_{\tilde{s}_R}}$  y el aumento de  $j$  en  $F_{P_{\tilde{M}_j}}$ . En todos los casos, excepto por la asociada a  $\tilde{s}_1$ , la parte derecha de las distribuciones decae un poco más rápido que los ajustes. Sin embargo, en  $F_{P_{\tilde{s}_R}}$  se observa que esto se soluciona progresivamente con el aumento de  $R$ . Así que, en general, se consigue una buena descripción de los datos  $F_{P_{\tilde{X}}}$  mediante la distribución de Gumbel y la teoría del valor extremo.

### 4.3. Resumen y comparación

El método alternativo se introduce como una solución a la falta de escalamiento global obtenida por las otras técnicas. Este consiste en la modificación de la manera usual en que se calculan los observables. De modo que, en vez de promediar con base en el parámetro de control  $p$ , se realiza esto manteniendo la distancia al punto crítico fija en cada realización.

Este cambio en la forma de promediar produce observables que tienen una discontinuidad alrededor de  $p_c$  (fig. 4.2). Sin embargo, se reducen los efectos de auto-promedio o *self-averaging*. Este hecho permite la extracción de parámetros críticos con una precisión marcadamente mayor. También se producen curvas que colapsan de forma satisfactoria a la función de escalamiento  $F_{\bar{\chi}}$  de forma global, a diferencia de las otras técnicas. Esto se confirma al obtener un buen empalme para las distribuciones de los valores que las definen (fig. 4.3).

Finalmente, se encuentra un vínculo entre los resultados del método alternativo y el Método 3 del capítulo anterior. La afinidad entre los parámetros críticos de ambas técnicas se puede ver en el cuadro comparativo 4.4. Además, ya que todo este estudio se basa en brincos máximos del parámetro de orden o valores máximos de los otros observables, se relaciona directamente con la teoría del valor extremo. Esta aseveración se confirma al aproximar ajustes basados en la distribución de Gumbel y obtener buenos resultados.

Parámetro crítico	Método 1	Método 2	Método 3		Método alternativo	
			Régimen precrítico	Régimen postcrítico	Media	Desviación estándar
$p_c$	0.8884484	0.8884497	-	-	0.88844926	-
$\beta$	0.1225	0.1279	-	0.0864	0.0881	0.0869
$\gamma$	1.4555	1.3804	1.1810	1.0486	1.1739	1.1625
$\phi_2$	1.5384	1.4490	1.1792	1.1693	1.1737	1.1770
$\sigma$	0.6341	0.6630	0.7892	0.7809	0.7922	0.7898
$\tau$	2.0776	2.0848	2.0686	2.0758	2.0698	2.0688
$\Theta$	0.4920	0.5127	0.4688	0.5070	0.7405	0.7404
$\delta$	-	0.6170	-	-	-	0.5009
$\Theta_e$	0.5904	0.6175	0.7414	0.7420	0.7407	0.7403
$\Theta_f$	0.6339	0.6642	0.7926	0.7929	0.7924	0.7912

Cuadro 4.4: Resumen de los parámetros críticos más importantes que se calcularon con los cuatro métodos de escalamiento descritos en este trabajo.

Como comentario final, los exponentes  $\Theta$ ,  $\delta$  y  $\Theta_e$  se calculan como en los otros métodos y se observa que existe una relación entre ellos. No obstante, aunque los valores del método alternativo son muy cercanos a los ya conocidos, estos se alcanzan de manera cruzada. Lo anterior ya que

$$\begin{aligned}\Theta^{(1)} &\approx \Theta^{(2)} \approx \Theta^{(3)} \approx \tilde{\delta}^{(d)} \approx 0.5 \\ \Theta_e^{(3)} &\approx \tilde{\Theta}^{(m)} \approx \tilde{\Theta}_e^{(m)} \approx 0.74\end{aligned}$$

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se llevó a cabo la caracterización de la transición de fase que ocurre en el modelo de percolación explosiva. Para esto se tomó el estudio de redes aleatorias en campo medio y se utilizaron varias técnicas de escalamiento para analizar los datos que se obtuvieron a través de simulaciones numéricas. Las cantidades principales utilizadas fueron el tamaño relativo del componente más grande  $s_1$  que funge como parámetro de orden y la distribución de los tamaños de componente  $n(s)$  que aparecen en la red. A partir de los resultados obtenidos se corroboró la naturaleza inusual del modelo.

La característica distintiva de este modelo es la adición de una regla de selección de enlaces. Esto produce cambios relevantes en el comportamiento del sistema con respecto al caso de percolación clásica. El primer cambio que se puso a prueba fue el orden de la transición. Para esto se usó la ventana de transición definida en la sección 3.2. El propósito fue revisar el comportamiento del parámetro de orden al pasar de un régimen sublineal antes de la transición a uno lineal en  $N$  después. Aquí se encontró que el ancho de esta ventana no tiende a cero con  $N \rightarrow \infty$ . Es decir, la densidad de enlaces necesarios para que el sistema cruce de un régimen a otro es no nula en el límite termodinámico. Por lo tanto, los resultados son consistentes con una transición continua.

Después de confirmar la continuidad de  $s_1$ , se buscó calcular las cantidades de interés alrededor de  $p_c$ . El resultado principal del modelo es el conjunto de parámetros críticos que se produce a partir de cuatro métodos independientes. Para obtenerlos se manejan los datos correspondientes a 10 observables diferentes, los cuales se generan a partir del tamaño de los componentes y los momentos de su distribución. Con base en este cálculo se concluye que el mecanismo subyacente a la evolución de la red es el crecimiento directo del componente más grande. También se asocia el aumento abrupto de la conectividad con la existencia de una distribución bimodal del parámetro de orden en  $p = p_c$ . Esto provoca un exponente muy pequeño para la ley de potencias que muestra  $s_1$  justo después de la transición.

Mediante el uso de varios observables diferentes se detectó un cambio en las propiedades al atravesar el punto crítico. Entre las pruebas de ello está el decaimiento de la distribución  $n(s)$ , que pasa de ser gaussiano a exponencial para  $s \rightarrow \infty$ . Además, los exponentes que

caracterizan a los observables mayormente relacionados con  $s_1$  cambian notablemente antes y después de la transición. Esto constató que el retraso dado por la “competencia” de enlaces afecta fuertemente el cálculo de propiedades en regímenes distintos, aún estando en las cercanías de  $p_c$ .

Los tres primeros métodos introducidos utilizan observables promediados sobre el mismo valor del parámetro de control, mientras que el cuarto toma los promedios en función de la distancia al punto pseudocrítico en cada realización. Aunque todas estas técnicas toman valores en las cercanías del punto crítico, se varió el segmento del parámetro de control tomado para calcular las cantidades de interés. De esta forma se encontró que los exponentes críticos dependen del régimen donde se toman los datos. Sin embargo, estos exponentes cumplen con las relaciones de escalamiento correspondientes, independientemente de la técnica empleada.

Para solucionar el problema anterior, se optó por introducir la cuarta técnica en el Capítulo 4. Aunque el modelo explosivo presenta una falta de auto-promedio o *self-averaging* alrededor de  $p_c$ , esta técnica alternativa disminuye este efecto y permite el escalamiento global de los observables. Esto permitió la producción de parámetros críticos con una precisión visiblemente mayor que los otros métodos. Además se encontró una conexión directa entre los resultados del Método 3 y el método alternativo. Esto tiene un mayor peso que los Métodos 1 y 2 porque los exponentes calculados no dependen de la técnica utilizada o la forma de promediar los observables. Así que se concluye que el conjunto de exponentes obtenido con el método alternativo es el que caracteriza la transición de fase del modelo de percolación explosiva.

Con el desarrollo de este trabajo se respondieron varias preguntas que se plantearon al inicio del estudio. Sin embargo, al final también quedaron varias incógnitas, ya sea porque surgieron nuevas ideas en el camino o debido a la falta de tiempo para completar el análisis.

La percolación explosiva es un modelo muy interesante que retrasa el surgimiento de conectividad a gran escala en una red. Así como se llevó a cabo este trabajo utilizando redes aleatorias, también se puede aumentar la dificultad estudiando redes con una topología más compleja. Otra idea es que las reglas de selección determinan directamente la intensidad del retraso en la aparición de  $p_c$ . Así que sería relevante encontrar la relación explícita entre estas dos cantidades. Por último, la aplicación de otros enfoques, como la agregación cinética de componentes, puede ser útil para entrever características que se pasan por alto en este enfoque mayormente numérico.

Así que se pretende agregar estos temas y complementar la investigación en un futuro para poder responder preguntas más fundamentales sobre el modelo. También se aspira a aplicarlo sobre sistemas reales una vez que se comprendan mejor las propiedades que lo representan.

# Apéndice A

## Listas de símbolos y notación

En este apéndice se describe cada una de las cantidades importantes que se manejan a lo largo del trabajo.

Símbolo	Descripción
$N$	Número de nodos total o tamaño de la red
$m$	Número de enlaces total en la red
$p$	Parámetro de control ( $p = m/N$ )
$p_c$	Punto crítico o umbral de percolación
$R$	Rango del componente
$S_R$	Tamaño del componente de rango $R$
$s_R$	Tamaño relativo del componente de rango $R$
$s_1$	Parámetro de orden ( $s_1 = S_1/N$ )
$n(s)$	Distribución de tamaños de componente
$M_j$	$j$ -ésimo momento de $n(s)$
$\chi$	Tamaño de componente medio ( $\chi \approx M_2/M_1$ )
$s_\xi$	Tamaño de componente característico ( $s_{\xi k} \approx M_{k+1}/M_k$ , $k \geq 2$ )
$P(s_1)$	Distribución del parámetro de orden
$N_r$	Número de realizaciones generadas
$\mu$ y $A$	Parámetros que definen a la ventana de transición
$p_1$ y $p_2$	Extremos de ventana de transición
$\Delta$	Ancho de ventana de transición
$\Delta_\infty$	Límite de la función $\Delta(N)$ cuando $N \rightarrow \infty$
$X$	Representación de un observable genérico o como conjunto
$F_X$	Función de escalamiento para la cantidad $X$
$r$	Coefficiente de correlación de Pearson
$\kappa$	Curvatura (inverso del radio del círculo ajustado)
$p_c(N)$	Conjunto de puntos pseudocríticos para un $N$ dado
$X_{max}(N)$	Máximo de la función $X(p)$ para un $N$ dado

Los observables del modelo explosivo frecuentemente son abordados de manera general. En esos casos se utiliza la letra  $X$  para denotarlos conjuntamente. Estas cantidades  $X$  se comportan como una ley de potencias en las cercanías de la transición. Para denotar el exponente y el coeficiente asociados se utilizan las letras  $\omega$  y  $A$ , respectivamente. Así, en general, los observables se pueden expresar como

$$X \sim A|p - p_c|^{\omega'}$$

Aquí se utiliza  $\omega'$  para resaltar que algunos exponentes son positivos y otros negativos, de modo que  $\omega = |\omega'|$ . Los exponentes y coeficientes asociados a cada cantidad son

Observable	Exponente crítico	Coficiente
$X$	$\omega$	$A$
$s_1$	$\beta$	$B$
$s_{R>1}$	$\rho_{R>1}$	$B_{R>1}$
$M_{j>1}$	$\phi_{j>1}$	$P_{j>1}$
$\chi$	$\gamma$	$C$
$s_{\xi k}$	$\sigma_k^{-1}$	$D_k$

Además de estos exponentes, existen otros igual de importantes que se calculan como sigue

Exponente crítico	Expresión asociada	Descripción de la expresión asociada	Definición en ecuación:
$\tau$	$n_{p=p_c}(s) \sim s^{-\tau}$	Distribución de tamaños en el punto crítico	<a href="#">3.22</a>
$\Theta$	$X \sim N^{\omega'\Theta} F_X[(p - p_c)N^\Theta]$	Escalamiento de tamaño finito para el observable $X$	<a href="#">3.4</a>
$\delta$	$ p_c(N) - p_c  \sim N^{-\delta}$	Decaimiento de los puntos pseudocríticos $p_c(N)$ a $p_c$	<a href="#">3.6</a>
$\Theta_e$	$\Theta_e = 1/(2\beta + \gamma)$	Relación de escalamiento equivalente para la dimensión espacial	<a href="#">3.38</a>
$\Theta_f$	$\Theta_f = 1/(\beta + \gamma)$	Relación de escalamiento equivalente para la dimensión fractal	<a href="#">3.39</a>

En los Capítulos 3 y 4 se presentan los resultados para diferentes métodos de escalamiento. Ya que se calcula el mismo conjunto de exponentes críticos con estos cuatro métodos, se debe hacer una distinción entre ellos. Para esto se especifica la siguiente notación:

### Distinción por método de escalamiento

Para distinguir entre los valores del mismo exponente calculado a través de distintas técnicas, se usará un superíndice con el número del método utilizado. Por ejemplo,  $\gamma^{(1)}$  es el exponente crítico asociado a la cantidad  $\chi$  calculado mediante el Método 1. En el

método alternativo se utiliza como observables a las medias de las cantidades importantes, pero también se emplean sus desviaciones estándar. Entonces se distingue entre ellos con un superíndice “(m)” o “(d)”, respectivamente.

### Distinción por cantidad utilizada

Del mismo modo, como  $p_c$  y  $\Theta$  también se obtienen bajo el comportamiento de distintas cantidades, se distinguirá entre ellos mediante subíndices. Por ejemplo,  $p_{c,s_3}^{(2)}$  es el punto crítico obtenido a partir de los máximos que muestra  $s_3(p)$  en el Método 2.

### Distinción por régimen en que se calcula

Por último, como se introduce en el Método 3, cuando se tenga que distinguir entre el comportamiento antes y después de la transición se utilizarán los subíndices  $-$  y  $+$ , respectivamente. Por ejemplo,  $\Theta_{M_2-}^{(3)}$  es el exponente  $\Theta$  que se consigue mediante el mejor empalme de las curvas  $M_2(p)$  en el régimen precrítico.

A continuación se agregan más ejemplos sobre notación:

Parámetro crítico derivado del observable $X$	Método 1	Método 2	Método 3		Método alternativo	
			Régimen precrítico	Régimen postcrítico	Media	Desviación estándar
$\beta$ con $s_1$	$\beta^{(1)}$	$\beta^{(2)}$	$\beta_-^{(3)}$	$\beta_+^{(3)}$	$\tilde{\beta}^{(m)}$	$\tilde{\beta}^{(d)}$
$p_c$ con $s_{\xi 1}$	$p_{c,s_{\xi 1}}^{(1)}$	$p_{c,s_{\xi 1}}^{(2)}$	-	-	$\tilde{p}_{c,s_{\xi 1}}$	-
$\Theta$ con $\chi$	$\Theta_{\chi}^{(1)}$	$\Theta_{\chi}^{(2)}$	$\Theta_{\chi-}^{(3)}$	$\Theta_{\chi+}^{(3)}$	$\tilde{\Theta}_{\chi}^{(m)}$	$\tilde{\Theta}_{\chi}^{(d)}$

# Bibliografía

- [ADS09] Dimitris Achlioptas, Raissa M. D'Souza y Joel Spencer. “Explosive Percolation in Random Networks”. En: *Science* 323.5920 (2009), págs. 1453-1455. DOI: [10.1126/science.1167782](https://doi.org/10.1126/science.1167782) (vid. págs. 6, 19, 20, 26, 29, 31).
- [AH10] N. A. M. Araújo y H. J. Herrmann. “Explosive Percolation via Control of the Largest Cluster”. En: *Physical Review Letters* 105.3 (jul. de 2010). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.105.035701](https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.035701). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.035701> (vid. pág. 7).
- [BA99] Albert-László Barabási y Réka Albert. “Emergence of Scaling in Random Networks”. En: *Science* 286.5439 (1999), págs. 509-512. DOI: [10.1126/science.286.5439.509](https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509) (vid. pág. 6).
- [Bas+14] N. Bastas y col. “Explosive percolation: Unusual transitions of a simple model”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 407 (ago. de 2014), págs. 54-65. ISSN: 0378-4371. DOI: [10.1016/j.physa.2014.03.085](https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.03.085). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2014.03.085> (vid. pág. 21).
- [BK16] E. Ben-Naim y P. L. Krapivsky. “Kinetics of aggregation with choice”. En: *Physical Review E* 94.6 (dic. de 2016). ISSN: 2470-0053. DOI: [10.1103/physreve.94.062119](https://doi.org/10.1103/physreve.94.062119). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062119> (vid. pág. 7).
- [BKA11] Nikolaos Bastas, Kosmas Kosmidis y Panos Argyrakis. “Explosive site percolation and finite-size hysteresis”. En: *Physical Review E* 84.6 (dic. de 2011). ISSN: 1550-2376. DOI: [10.1103/physreve.84.066112](https://doi.org/10.1103/physreve.84.066112). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.84.066112> (vid. pág. 7).
- [CD11] Wei Chen y Raissa M. D'Souza. “Explosive Percolation with Multiple Giant Components”. En: *Phys. Rev. Lett.* 106.11 (mar. de 2011), pág. 115701. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.115701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.115701). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.115701> (vid. pág. 7).
- [Cha+82] Richard Chandler y col. “Capillary displacement and percolation in porous media”. En: *Journal of Fluid Mechanics* 119 (1982), págs. 249-267. DOI: [10.1017/S0022112082001335](https://doi.org/10.1017/S0022112082001335) (vid. pág. 6).
- [Cho+09] Y. S. Cho y col. “Percolation Transitions in Scale-Free Networks under the Achlioptas Process”. En: *Physical Review Letters* 103.13 (sep. de 2009). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.103.135702](https://doi.org/10.1103/physrevlett.103.135702). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.135702> (vid. pág. 7).

- [Cho+10] Y. S. Cho y col. “Finite-size scaling theory for explosive percolation transitions”. En: *Physical Review E* 82.4 (oct. de 2010). ISSN: 1550-2376. DOI: [10.1103/physreve.82.042102](https://doi.org/10.1103/physreve.82.042102). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.82.042102>.
- [Cos+10] R. A. da Costa y col. “Explosive Percolation Transition is Actually Continuous”. En: *Physical Review Letters* 105.25 (dic. de 2010). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.105.255701](https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.255701). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.255701> (vid. pág. 7).
- [Cos+14a] R. A. da Costa y col. “Critical exponents of the explosive percolation transition”. En: *Physical Review E* 89.4 (abr. de 2014). ISSN: 1550-2376. DOI: [10.1103/physreve.89.042148](https://doi.org/10.1103/physreve.89.042148). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.89.042148> (vid. pág. 7).
- [Cos+14b] R. A. da Costa y col. “Solution of the explosive percolation quest: Scaling functions and critical exponents”. En: *Physical Review E* 90.2 (ago. de 2014). ISSN: 1550-2376. DOI: [10.1103/physreve.90.022145](https://doi.org/10.1103/physreve.90.022145). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.90.022145> (vid. pág. 7).
- [DE85a] P. G. J. van Dongen y M. H. Ernst. “Cluster size distribution in irreversible aggregation at large times”. En: *Journal of Physics A* 18 (1985), págs. 2779-2793.
- [DE85b] P. G. J. van Dongen y M. H. Ernst. “Dynamic Scaling in the Kinetics of Clustering”. En: *Phys. Rev. Lett.* 54.13 (abr. de 1985), págs. 1396-1399. DOI: [10.1103/PhysRevLett.54.1396](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.1396). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.1396> (vid. pág. 16).
- [DGM08] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev y J. F. F. Mendes. “Critical phenomena in complex networks”. En: *Rev. Mod. Phys.* 80.4 (oct. de 2008), págs. 1275-1335. DOI: [10.1103/RevModPhys.80.1275](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1275). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1275> (vid. pág. 13).
- [DM10] Raissa M. D’Souza y Michael Mitzenmacher. “Local Cluster Aggregation Models of Explosive Percolation”. En: *Physical Review Letters* 104.19 (mayo de 2010). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.104.195702](https://doi.org/10.1103/physrevlett.104.195702). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.195702> (vid. pág. 7).
- [DN15] Raissa M. D’Souza y Jan Nagler. “Anomalous critical and supercritical phenomena in explosive percolation”. En: *Nature Physics* 11.7 (jul. de 2015), págs. 531-538. ISSN: 1745-2481. DOI: [10.1038/nphys3378](https://doi.org/10.1038/nphys3378). URL: <https://doi.org/10.1038/nphys3378>.
- [Dra72] R. L. Drake. “A General Mathematics Survey of the Coagulation Equation”. En: *Topics in Current Aerosol Research*. Ed. por G. M. Hidy y J. R. Brock. Vol. 3.2. Pergamon Press, 1972 (vid. pág. 16).

- [DS92] B. Drossel y F. Schwabl. “Self-organized criticality in a forest-fire model”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 191.1 (1992), págs. 47-50. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(92\)90504-J](https://doi.org/10.1016/0378-4371(92)90504-J). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843719290504J> (vid. pág. 6).
- [DSo+19] Raissa M. D’Souza y col. “Explosive phenomena in complex networks”. En: *Advances in Physics* 68.3 (jul. de 2019), págs. 123-223. ISSN: 1460-6976. DOI: [10.1080/00018732.2019.1650450](https://doi.org/10.1080/00018732.2019.1650450). URL: <http://dx.doi.org/10.1080/00018732.2019.1650450> (vid. pág. 21).
- [ER59] P. Erdős y A. Rényi. “On Random Graphs I”. En: *Publicationes Mathematicae Debrecen* 6 (1959), págs. 290-297 (vid. pág. 6).
- [ER60] P. Erdős y A. Rényi. “On the evolution of random graphs”. En: *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 5 (1960) (vid. pág. 6).
- [Fan+12] Jingfang Fan y col. “Continuous percolation phase transitions of random networks under a generalized Achlioptas process”. En: *Phys. Rev. E* 85.6 (jun. de 2012), pág. 061110. DOI: [10.1103/PhysRevE.85.061110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.061110). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.061110> (vid. pág. 7).
- [Fan+20] Jingfang Fan y col. “Universal gap scaling in percolation”. En: *Nature Physics* 16.4 (abr. de 2020), págs. 455-461. ISSN: 1745-2481. DOI: [10.1038/s41567-019-0783-2](https://doi.org/10.1038/s41567-019-0783-2). URL: <https://doi.org/10.1038/s41567-019-0783-2> (vid. págs. 100, 112).
- [FFF99] Michalis Faloutsos, Petros Faloutsos y Christos Faloutsos. “On Power-Law Relationships of the Internet Topology”. En: *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.* 29.4 (ago. de 1999), págs. 251-262. ISSN: 0146-4833. DOI: [10.1145/316194.316229](https://doi.org/10.1145/316194.316229). URL: <https://doi.org/10.1145/316194.316229> (vid. pág. 5).
- [FW66] S. K. Friedlander y C. S. Wang. “The self-preserving particle size distribution for coagulation by brownian motion”. En: *Journal of Colloid and Interface Science* 22.2 (1966), págs. 126-132. ISSN: 0021-9797. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(66\)90073-7](https://doi.org/10.1016/0021-9797(66)90073-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021979766900737> (vid. pág. 16).
- [Gra+11] Peter Grassberger y col. “Explosive Percolation is Continuous, but with Unusual Finite Size Behavior”. En: *Phys. Rev. Lett.* 106.22 (mayo de 2011), pág. 225701. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.225701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.225701). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.225701> (vid. págs. 7, 44, 48).
- [HV11] Hans Hooyberghs y Bert Van Schaeybroeck. “Criterion for explosive percolation transitions on complex networks”. En: *Physical Review E* 83.3 (mar. de 2011). ISSN: 1550-2376. DOI: [10.1103/physreve.83.032101](https://doi.org/10.1103/physreve.83.032101). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.83.032101> (vid. pág. 7).

- [Kir73] Scott Kirkpatrick. “Percolation and Conduction”. En: *Rev. Mod. Phys.* 45.4 (oct. de 1973), págs. 574-588. DOI: [10.1103/RevModPhys.45.574](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.45.574). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.45.574> (vid. pág. 6).
- [Ley03] L. Leyvraz. “Scaling Theory and Exactly Solved Models In the Kinetics of Irreversible Aggregation”. En: *Physics Reports* 383 (ago. de 2003), págs. 95-212. DOI: [10.1016/S0370-1573\(03\)00241-2](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(03)00241-2) (vid. pág. 16).
- [LKP11] Hyun Keun Lee, Beom Jun Kim y Hyunggyu Park. “Continuity of the explosive percolation transition”. En: *Phys. Rev. E* 84.2 (ago. de 2011), pág. 020101. DOI: [10.1103/PhysRevE.84.020101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.020101). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.020101> (vid. pág. 7).
- [Ma01] Shang-Keng Ma. *Modern Theory Of Critical Phenomena*. 1.<sup>a</sup> ed. Routledge, 2001. DOI: <https://doi.org/10.4324/9780429498886> (vid. pág. 13).
- [MC11] S.S. Manna y Arnab Chatterjee. “A new route to Explosive Percolation”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390.2 (ene. de 2011), págs. 177-182. ISSN: 0378-4371. DOI: [10.1016/j.physa.2010.10.009](https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.10.009). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2010.10.009> (vid. pág. 7).
- [Mor+10] A. A. Moreira y col. “Hamiltonian approach for explosive percolation”. En: *Phys. Rev. E* 81.4 (abr. de 2010), pág. 040101. DOI: [10.1103/PhysRevE.81.040101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.040101). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.040101> (vid. pág. 7).
- [New02] M. E. J. Newman. “Spread of epidemic disease on networks”. En: *Physical Review E* 66.1 (jul. de 2002). ISSN: 1095-3787. DOI: [10.1103/PhysRevE.66.016128](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.016128). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.66.016128> (vid. pág. 5).
- [New18] M. E. J. Newman. *Networks*. 2.<sup>a</sup> ed. Oxford University Press, 2018. ISBN: 9780198805090. DOI: [10.1093/oso/9780198805090.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198805090.001.0001) (vid. págs. 5, 10, 11).
- [NLT11] Jan Nagler, Anna Levina y Marc Timme. “Impact of single links in competitive percolation”. En: *Nature Physics* 7.3 (mar. de 2011), págs. 265-270. ISSN: 1745-2481. DOI: [10.1038/nphys1860](https://doi.org/10.1038/nphys1860). URL: <https://doi.org/10.1038/nphys1860> (vid. pág. 100).
- [NTG12] Jan Nagler, Tyge Tjenssen y Harold W. Gutch. “Continuous Percolation with Discontinuities”. En: *Phys. Rev. X* 2.3 (ago. de 2012), pág. 031009. DOI: [10.1103/PhysRevX.2.031009](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.2.031009). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.2.031009> (vid. pág. 7).
- [OSK16] S. M. Oh, S.-W. Son y B. Kahng. “Explosive percolation transitions in growing networks”. En: *Phys. Rev. E* 93.3 (mar. de 2016), pág. 032316. DOI: [10.1103/PhysRevE.93.032316](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.032316). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.032316>.

- [Pan+11] Raj Kumar Pan y col. “Using explosive percolation in analysis of real-world networks”. En: *Physical Review E* 83.4 (abr. de 2011). ISSN: 1550-2376. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.046112](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.046112). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.83.046112> (vid. pág. 7).
- [PD06] Mercedes Pascual y Jennifer Dunne. *Ecological Networks: Linking Structure to Dynamics in Food Webs*. Ene. de 2006 (vid. pág. 5).
- [PV04] Romualdo Pastor-Satorras y Alessandro Vespignani. *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach*. Cambridge University Press, 2004. DOI: [10.1017/CB09780511610905](https://doi.org/10.1017/CB09780511610905) (vid. pág. 5).
- [Rad15] Filippo Radicchi. “Predicting percolation thresholds in networks”. En: *Phys. Rev. E* 91.1 (ene. de 2015), pág. 010801. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.010801](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.010801). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.010801>.
- [RF09] Filippo Radicchi y Santo Fortunato. “Explosive Percolation in Scale-Free Networks”. En: *Phys. Rev. Lett.* 103.16 (oct. de 2009), pág. 168701. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.168701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.168701). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.168701> (vid. pág. 7).
- [RF10] Filippo Radicchi y Santo Fortunato. “Explosive percolation: A numerical analysis”. En: *Phys. Rev. E* 81.3 (mar. de 2010), pág. 036110. DOI: [10.1103/PhysRevE.81.036110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.036110). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.036110> (vid. págs. 7, 44, 48).
- [RW11] Oliver Riordan y Lutz Warnke. “Explosive Percolation Is Continuous”. En: *Science* 333.6040 (2011), págs. 322-324. DOI: [10.1126/science.1206241](https://doi.org/10.1126/science.1206241) (vid. pág. 7).
- [RW12] Oliver Riordan y Lutz Warnke. “Achlioptas processes are not always self-averaging”. En: *Phys. Rev. E* 86.1 (jul. de 2012), pág. 011129. DOI: [10.1103/PhysRevE.86.011129](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.011129). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.86.011129>.
- [RW15] Oliver Riordan y Lutz Warnke. “Convergence of Achlioptas Processes via Differential Equations with Unique Solutions”. En: *Combinatorics, Probability and Computing* 25.1 (oct. de 2015), págs. 154-171. ISSN: 1469-2163. DOI: [10.1017/s0963548315000218](https://doi.org/10.1017/s0963548315000218). URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0963548315000218>.
- [SA92] D. Stauffer y A. Aharony. *Introduction To Percolation Theory*. 2nd edition. Taylor & Francis, ene. de 1992. DOI: [10.1201/9781315274386](https://doi.org/10.1201/9781315274386) (vid. págs. 6, 15).
- [Sah94] M. Sahimi. *Applications of Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994 (vid. págs. 6, 15).
- [Sco88] John Scott. “Social Network Analysis”. En: *Sociology* 22.1 (1988), págs. 109-127. DOI: [10.1177/0038038588022001007](https://doi.org/10.1177/0038038588022001007) (vid. pág. 5).
- [Smo16] M. von Smoluchowski. En: *Z. Phys.* 17.557 (1916) (vid. pág. 15).

- [Sol+00] Sorin Solomon y col. “Social percolation models”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 277.1 (2000), págs. 239-247. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(99\)00543-9](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(99)00543-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437199005439> (vid. pág. 6).
- [TS10] Liang Tian y Da-Ning Shi. “The Nature of Explosive Percolation Phase Transition”. En: *Computing Research Repository - CORR* 376 (oct. de 2010). DOI: [10.1016/j.physleta.2011.11.039](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.11.039) (vid. págs. 7, 44, 48).
- [WF94] Stanley Wasserman y Katherine Faust. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Structural Analysis in the Social Sciences. Cambridge University Press, 1994. DOI: [10.1017/CB09780511815478](https://doi.org/10.1017/CB09780511815478) (vid. pág. 5).
- [WS98] Duncan J. Watts y Steven H. Strogatz. “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”. En: *Nature* 393.6684 (jun. de 1998), págs. 440-442. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/30918](https://doi.org/10.1038/30918). URL: <https://doi.org/10.1038/30918> (vid. pág. 6).
- [ZC17] Yong Zhu y Xiaosong Chen. “Finite size scaling theory for percolation phase transition”. En: (oct. de 2017). eprint: [1710.02957](https://arxiv.org/abs/1710.02957) (vid. págs. 100, 105).
- [Zif09] Robert M. Ziff. “Explosive Growth in Biased Dynamic Percolation on Two-Dimensional Regular Lattice Networks”. En: *Phys. Rev. Lett.* 103.4 (jul. de 2009), pág. 045701. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.045701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.045701). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.045701> (vid. pág. 7).
- [Zif10] Robert M. Ziff. “Scaling behavior of explosive percolation on the square lattice”. En: *Phys. Rev. E* 82.5 (nov. de 2010), pág. 051105. DOI: [10.1103/PhysRevE.82.051105](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.051105). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.051105> (vid. pág. 7).