UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una introducción a la cohomología inducida por comónadas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Eduardo León Rodríguez

TUTOR

Dr. Frank Patrick Murphy Hernández

Ciudad Universitaria, 2021
Cd. Mx.

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	León
Apellido materno	Rodríguez
Nombre(s)	Eduardo
Teléfono	5540528531
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Carrera
Número de cuenta	315292635
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Doctor
Nombre(s)	Frank Patrick
Apellido paterno	Murphy
Apellido materno	Hernández
3. Datos del sinodal	3. Datos del sinodal
Grado	Doctor
Nombre(s)	José
Apellido paterno	Ríos
Apellido materno	Montes
4. Datos del sinodal	4. Datos del sinodal
Grado	Doctor
Nombre(s)	Juan
Apellido paterno	Morales
Apellido materno	Rodríguez
5. Datos del sinodal	5. Datos del sinodal
Grado	Maestro en ciencias
Nombre(s)	Rodrigo
Apellido paterno	Domínguez
Apellido materno	López
6. Datos del sinodal	6. Datos del sinodal
Grado	Maestro en ciencias
Nombre(s)	Jaime Alejandro
Apellido paterno	García
Apellido materno	Villeda
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Una introducción a la cohomología inducida por comónadas
Número de páginas	153 p
Año	2021

Agradecimientos

El siguiente par de lineas, son las últimas que redacté para este texto, pues acertar las palabras para expresar mi gratitud a todo aquel que merece ser reconocido no fue tarea sencilla. Es así que les ofrezco un digno intento, pues este trabajo es tan mío como suyo, ya que de no ser así, estaría escribiendo poemas en lugar de teoremas.

La lista no vería fin si evoco a todo aquel que recuerdo con cariño, es por tanto, que me debo remitir al ámbito académico, tal vez realizando algunas excepciones. Así pues, agradezco:

A mi madre, Julieta, por los invaluables regalos que me brinda cada día y por toda la dedicación ofertada a mi hermano y a mi.

A mi padre, Cristobal, por confiar en mis capacidades, apoyar mis decisiones y concederme un hogar.

A mi hermano, Gustavo, mi compañero de vida, por compartir conmigo un sin fin de destacables momentos y por comportarse como el hermano mayor en una cantidad considerable de ocasiones.

A mi abuela, Carmen, por dedicarme una parte de su vida, es a ella a quien dedico este trabajo y por mucho quedo en deuda.

A mis padrinos, Adriana y Alejandro, por siempre mostrar un especial interés en mi trayectoria académica y por aconsejarme de la mejor manera en mi etapa de rebeldía.

A mi amiga, Abril, por rescatarme desde la prepa hasta los primeros años de universidad y por sugerirme que el conjunto era numerable en nuestro primer examen de cálculo.

A mi amigo, Alejandro, por compartirme de su habilidad matemática los primeros semestres de la carrera y por enseñarme la utilidad del teorema de la bisectriz generalizada.

A mi amigo, Oscar, por compartirme de su disciplina y por esa primer tarea que intercambiamos por un pambazo.

A mi asesor, Frank, por tratarme como un amigo desde nuestro primer encuentro y por cada taza de café acompañada de una clase de matemáticas.

Antes de dar por terminada esta página agradezco a la matemática, por desvelarme su belleza en tiempo oportuno, espero, en un futuro, contribuir a su desarrollo.

Índice general

Introducción

En 1958 R. Godement en su libro "*Topologie algébrique et theórie des faisceaux*"([**8**]) escribe el primer texto recopilatorio de técnicas de cohomología comónadica, introduciendo técnicas conocidas hoy en día como el disco de Godement que sirve para ver que la cohomología de gavillas es un ejemplo de esto.

Un par de años después en 1961 J. Huber en "*Homotopy theory in general categories*"([**9**]) reconoce que en cada situación de adjunción está presente una mónada y una comónada, además nota la estructura simplicial que se obtiene de una comónada.

Con los antecedentes antes planteados y buscando completar la exposición de S. Eilenberg y J. Moore la cual lleva por título "*Adjoint functors and triples*"([**7**]), J. Beck en sus tesis doctoral "*Triples, algebra and cohomology*"([**3**]) presenta su conocido resultado "*Teorema de monacidad*", además expone con mas detalle como obtener una familia de funtores de cohomología a partir de un par de funtores adjuntos y de un objeto de grupo abeliano.

El objetivo de este trabajo es desarrollar los conceptos necesarios para disponer de tales funtores de cohomología, asimismo se presentan ejemplos específicos de la teoría concluyendo que varias de la teorías cohomológicas conocidas son un caso particular de la que en este texto se llamará cohomología comonádica. El orden a seguir es el siguiente.

El primer capítulo está dedicado al concepto de mónada y comónada, asimismo se dispone de algunos ejemplos. En una segunda parte destaca el concepto de adjunción y se demuestra que cada par de funtores adjuntos inducen una mónada y una comónada. En lo que respecta al segundo capítulo, en este se introduce la definición de objeto de grupo y objeto de grupo abeliano en una categoría, asimismo se identifican los objetos de grupo y objetos de grupo abeliano en un par de categorías recurrentes. El lema de Yoneda es enunciado y demostrado pues este resulta ser una herramienta imprescindible para la prueba del resultado mas importante del capítulo, el cual propone una forma distinta de identificar a un objeto de grupo.

El capítulo número 3 está dedicado al estudio del álgebra homológica, se presentan los conceptos mas importantes de esta rama del álgebra, tales como complejo de cocadenas, grupos de cohomología y sus respectivos duales. Se estudia además a las resoluciones proyectivas y se concluye con la definición del funtor Ext.

En el cuarto capítulo se expone la teoría desarrollada por J. Beck en [**3**] con mayor detalle pues en este capítulo se añaden las demostraciones que en [**3**] se omiten, asimismo se destacan algunos tintes categóricos pues se demuestra que las principales asignaciones son funtoriales.

Los capítulos 5,6 y 7 tienen la intención de ejemplificar la cohomología comonádica, por tal motivo para comónadas particulares se realizan todos los cálculos necesarios para obtener las familias de funtores de interés: en cada capítulo se comienza estudiando una adjunción específica para en una segunda etapa considerar la comónada inducida por tal par de funtores, en cada caso se concluye que la cohomología comonádica pertinente a cada capítulo coincide con teorías cohomológicas ya conocidas.

Es bien conocida la utilidad/versatilidad de mónadas y comónadas, este trabajo es un ejemplo de tal afirmación, si esto no es suficiente, el último capítulo se dedica a reafirmar lo exclamado. En el capítulo 8, para $\mathbf{T}$ una comónada se estudia el concepto de $\mathbf{T}-$proyectividad, asimismo se prueba que la $\mathbf{T}-$proyectividad coincide con el concepto módulos proyectivos. Se finaliza el capítulo estudiando el concepto de $\mathbf{T}-$proyectividad para un tipo especial de conjuntos bien conocidos.

Capítulo 1

Mónadas

Una mónada también conocida como tripleta, triada o construcción fundamental consta de un endofuntor y un par de transformaciones naturales tales que en conjunto asemejan la estructura de un monoide, este objeto matemático, para nada desconocido, figura desde la topología algebraica hasta la programación funcional por mencionar algunos ejemplos. El concepto dual, es decir el de comónada de cierta manera es menos natural, así como los monoides son mas comunes que los comonoides en el álgebra abstracta, mas sin embargo las comónadas fundamentan este trabajo.

Observación 1. *Es necesario agregar una hipótesis general a este trabajo. Cada que se mencione a una categoría* $\mathbf{C}$*, se da por hecho que* $\mathbf{C}$ *es localmente pequeña. Es decir, a lo largo de este texto solo se trabaja con categorías localmente pequeñas. Si bien, tal restricción se puede omitir en una basta cantidad de resultados, son más las veces en que tal hipótesis es necesaria.*

1. Mónadas

En esta sección se introducen los conceptos de mónada y comónada, se comienza precisando un par de asignaciones recurrentes a lo largo de este trabajo y se finaliza con algunos ejemplos de mónadas.

Proposición 1. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría,* $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *un funtor y* $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S$*,* $\mu : S \circ S \to S$ *un par de transformaciones naturales. Entonces las siguientes familias de morfismos son transformaciones naturales.*

1. *Para todo* $X \in \mathbf{C}$*, se define*

$$(S \circ \eta)_X := S(\eta_X)$$

Así se puede definir

$$S \circ \eta = \{S(\eta_X) : S(X) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

2. *Para todo* $X \in \mathbf{C}$*, se define*

$$(\eta \circ S)_X := \eta_{S(X)}$$

Así se puede definir

$$\eta \circ S = \{\eta_{S(X)} : S(X) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

3. Para todo $X \in \mathbf{C}$, se define

$$(S \circ \mu)_X := S(\mu_X)$$

Así se puede definir

$$S \circ \mu = \{S(\mu_X) : S(S(S(X))) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

4. Para todo $X \in \mathbf{C}$, se define

$$(\mu \circ S)_X := \mu_{S(X)}$$

Así se puede definir

$$\mu \circ S = \{\mu_{S(X)} : S(S(S(X))) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$.

Como $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S$ es una transformación natural se sabe que el siguiente diagrama conmuta:

$$1. \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_X} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ S(X) & \xrightarrow[S(f)]{} & S(Y) \end{array}$$

entonces

$$\begin{aligned} (S \circ \eta)_Y \circ S(f) =& S(\eta_Y) \circ S(f) \\ =& S(\eta_Y \circ f) \\ =& S(S(f) \circ \eta_X) \\ =& S(S(f)) \circ S(\eta_X) \\ =& S(S(f)) \circ (S \circ \eta)_X \end{aligned}$$

por tal motivo siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(f)} & S(Y) \\ {\scriptstyle (S\circ\eta)_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (S\circ\eta)_Y} \\ S(S(X)) & \xrightarrow[S(S(f))]{} & S(S(Y)) \end{array}$$

por lo tanto

$$S \circ \eta = \{S(\eta_X) : S(X) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

es una transformación natural.

2. Dado que $S(f) : S(X) \to S(Y)$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ y como $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S$ es una transformación natural se sabe que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\eta_{S(X)}"'] & S(Y) \arrow[d, "\eta_{S(Y)}"] \\ S(S(X)) \arrow[r, "S(S(f))"'] & S(S(Y)) \end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$\eta \circ S = \{\eta_{S(X)} : S(X) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

es una transformación natural.

3. Como $\mu : S \circ S \to S$ es una transformación natural se sabe que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S(S(X)) \arrow[r, "S(S(f))"] \arrow[d, "\mu_X"'] & S(S(Y)) \arrow[d, "\mu_Y"] \\ S(X) \arrow[r, "S(f)"'] & S(Y) \end{tikzcd}$$

entonces

$$\begin{aligned} S(S(f)) \circ (S \circ \mu)_X &= S(S(f)) \circ S(\mu_X) \\ &= S(S(f) \circ \mu_X) \\ &= S(\mu_Y \circ S(S(f))) \\ &= S(\mu_Y) \circ S(S((S(f)))) \\ &= (S \circ \mu)_Y \circ S(S(S(f))) \end{aligned}$$

por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S(S(S(X))) \arrow[r, "S(S(S(f)))"] \arrow[d, "(S\circ\mu)_X"'] & S(S(S(Y))) \arrow[d, "(S\circ\mu)_Y"] \\ S(S(X)) \arrow[r, "S(S(f))"'] & S(S(Y)) \end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$S \circ \mu = \{S(\mu_X) : S(S(S(X))) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

es una transformación natural.

4. Dado que $S(f) : S(X) \to S(Y)$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ y como $\mu : S \circ S \to S$ es una transformación natural se sabe que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S(S(S(X))) \arrow[r, "S(S(S(f)))"] \arrow[d, "\mu_{S(X)}"'] & S(S(S(Y))) \arrow[d, "\mu_{S(Y)}"] \\
S(S(X)) \arrow[r, "S(S(f))"'] & S(S(Y))
\end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$\mu \circ S = \{\mu_{S(X)} : S(S(S(X))) \to S(S(X))\}_{X \in \mathbf{C}}$$

es una transformación natural.

□

Definición 1. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Se dice que* $\boldsymbol{S} = (S, \eta, \mu)$ *es una mónada en* $\mathbf{C}$ *si,* $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *es un funtor,* $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S$*,* $\mu : S \circ S \to S$ *son transformaciones naturales y se cumple que los siguientes diagramas conmutan:*
S.1

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\eta \circ S"] \arrow[dr, "1_S"'] & S \circ S \arrow[d, "\mu"] & S \arrow[l, "S \circ \eta"'] \arrow[dl, "1_S"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

S.2

$$\begin{tikzcd}
S \circ S \circ S \arrow[r, "S \circ \mu"] \arrow[d, "\mu \circ S"'] & S \circ S \arrow[d, "\mu"] \\
S \circ S \arrow[r, "\mu"'] & S
\end{tikzcd}$$

A la transformación natural $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to S$ *se le conoce como la unidad de la mónada y a la transformación natural* $\mu : S \circ S \to S$ *se le conoce como el producto de la mónada.*

El primer diagrama conmutativo (S.1) expresa la propiedad de la unidad, mientras que el segundo diagrama (S.2) expresa la propiedad asociativa del producto.

Por primera vez en este texto surge el útil concepto de dualidad, uno de tantos conceptos que caracterizan a la teoría de categorías.

Definición 2. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Se dice que* $\boldsymbol{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ *es una comónada en* $\mathbf{C}$ *si,* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *es un funtor,* $\varepsilon : T \to 1_{\mathbf{C}}$*,* $\delta : T \to T \circ T$ *son transformaciones naturales y se cumple que los siguientes diagramas conmutan:*
T.1

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "1_T"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "1_T"] & \\ T & T \circ T \arrow[l, "\varepsilon \circ T"] \arrow[r, "T \circ \varepsilon"'] & T \end{tikzcd}$$

T.2

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & T \circ T \arrow[d, "\delta \circ T"] \\ T \circ T \arrow[r, "T \circ \delta"'] & T \circ T \circ T \end{tikzcd}$$

A la transformación natural $\varepsilon : T \to 1_{\mathbf{C}}$ se le conoce como la counidad de la comónada y a la transformación natural $\delta : T \to T \circ T$ se le conoce como el coproducto de la mónada.

A lo largo de este trabajo surgen varios ejemplos de comónadas, mientras que los ejemplos de mónadas no figuran mas adelante, por tal motivo lo que resta del capítulo esta dedicado a ejemplos de mónadas.

Para R un anillo, se denota por $\mathbf{R-Mod}$ a la categoría formada por $R-$módulos y $R-$morfismos.

Proposición 2. *Sean R un anillo conmutativo con uno y $M \in \boldsymbol{R-Mod}$. Considere el siguiente par de asignaciones, se define*

$$\eta_M : M \to R \otimes_R M$$

como

$$\eta_M(m) = 1 \otimes m$$

para todo $m \in M$. Se define

$$\mu_M : R \otimes_R (R \otimes_R M) \to R \otimes_R M$$

en elementos generadores, como

$$\mu_M(r_1 \otimes (r_2 \otimes m)) = r_1 \cdot r_2 \otimes m$$

para todo $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$. Entonces (S, η, μ) es una mónada en $\boldsymbol{R-Mod}$, donde

$$S = (R \otimes_R \_\,) : \boldsymbol{R-Mod} \to \boldsymbol{R-Mod}.$$

Antes de continuar con la demostración, cabe recalcar que las asignaciones en las cuales este de por medio al producto tensorial se describen sobre elementos generadores, pues en general los elementos del producto tensorial son sumas de tensores simples.

DEMOSTRACIÓN. Se comienza probando que la asignación η_M es natural. Sea $f : M \to N$ un morfismo en $\mathbf{R-Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(\eta_N \circ f)(m) =& \eta_N(f(m))\\ =& 1 \otimes f(m)\\ =& (1_R \otimes_R f)(1 \otimes m)\\ =& (S(f) \circ \eta_M)(m)\end{aligned}$$

para todo $m \in M$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_M"'] & N \arrow[d, "\eta_N"] \\ S(M) \arrow[r, "S(f)"'] & S(N) \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\eta : 1_{\mathbf{R-Mod}} \to S$ es una transformación natural.

A continuación se prueba que la asignación μ_M es natural. Sea $f : M \to N$ un morfismo en $\mathbf{R-Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mu_N \circ S(S(f)))(r_1 \otimes r_2 \otimes m) =& (\mu_N \circ (1_R \otimes_R (1_R \otimes_R f)))(r_1 \otimes r_2 \otimes m)\\ =& \mu_N(r_1 \otimes r_2 \otimes f(m))\\ =& r_1 \cdot r_2 \otimes f(m)\\ =& (1_R \otimes_R f)(r_1 \cdot r_2 \otimes m)\\ =& (S(f) \circ \mu_M)(r_1 \otimes r_2 \otimes m)\end{aligned}$$

para todo $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S(S(M)) \arrow[r, "S(S(f))"] \arrow[d, "\mu_M"'] & S(S(N)) \arrow[d, "\mu_N"] \\ S(M) \arrow[r, "S(f)"'] & S(N) \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\mu : S \circ S \to S$ es una transformación natural.

Para finalizar, se prueba la conmutatividad de los diagramas de interés.

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mu_M \circ (\eta \circ S)_M)(r \otimes m) =& \mu_M(\eta_{S(M)}(r \otimes m))\\ =&\mu_M(1 \otimes (r \otimes m))\\ =&1 \cdot r \otimes m\\ =&r \otimes m\\ =&1_{S(M)}(r \otimes m)\end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $m \in M$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta\circ S"] \arrow[dr, "1_S"'] & S \circ S \arrow[d, "\mu"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mu_M \circ (S \circ \eta)_M)(r \otimes m) =& \mu_M(1_R \otimes_R \eta_M(r \otimes m))\\ =&\mu_M(r \otimes \eta_M(m))\\ =&\mu_M(r \otimes (1 \otimes m))\\ =&r \cdot 1 \otimes m\\ =&r \otimes m\\ =&1_{S(M)}(r \otimes m)\end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $m \in M$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "S\circ\eta"] \arrow[dr, "1_S"'] & S \circ S \arrow[d, "\mu"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mu_M \circ (S \circ \mu)_M)(r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes m) =& \mu_M(S(\mu_M)(r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes m))\\ =&\mu_M(r_1 \otimes r_2 \cdot r_3 \otimes m)\\ =&r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \otimes m\\ =&(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 \otimes m\\ =&\mu_M(r_1 \cdot r_2 \otimes r_3 \otimes m)\\ =&\mu_M((\mu_{S(M)})(r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes m)\\ =&(\mu_M \circ (\mu \circ S)_M)(r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes m)\end{aligned}$$

para todo $r_1, r_2, r_3 \in R$, $m \in M$. Es así que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \circ S \circ S \arrow[r, "S\circ\mu"] \arrow[d, "\mu\circ S"'] & S \circ S \arrow[d, "\mu"] \\ S \circ S \arrow[r, "\mu"'] & S \end{tikzcd}$$

En consecuencia (S, η, μ) es una mónada en $\mathbf{R-Mod}$. $\square$

A continuación se precisa el ya conocido funtor potencia.

Proposición 3. *Considere las siguientes asignaciones*

$$\mathcal{P} : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$$

*a nivel de objetos, para $X \in$ **Set**, se define*

$$X \to \mathcal{P}(X)$$

*y a nivel de morfismos, para $f : X \to Y$ un morfismo en **Set**, se define*

$$\mathcal{P}(f)(A) = f[A]$$

*para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $\mathcal{P}$: **Set** $\to$ **Set** es un funtor.*

Demostración. Por una parte

$$\mathcal{P}(1_X)(A) = 1_X[A] = A = 1_{\mathcal{P}(X)}(A)$$

para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, por consiguiente

$$\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$$

para todo $X \in$ **Set**. Por otra parte

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(g \circ f)(A) =& (g \circ f)[A] \\ =& g[f[A]] \\ =& \mathcal{P}(g)(f[A]) \\ =& (\mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f))(A) \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, es así que

$$\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$$

para cualesquiera morfismos $g : Y \to Z$, $f : X \to Y$ en **Set**.

Por lo tanto $\mathcal{P}$: **Set** $\to$ **Set** es un funtor. $\square$

El funtor potencia de un conjunto antes descrito motiva un ejemplo de mónada en **Set**.

Proposición 4. *Sea $X \in$ **Set**, considere el siguiente par de asignaciones, se define*

$$\eta_X : X \to \mathcal{P}(X)$$

como

$$\eta_X(x) = \{x\}$$

para todo $x \in X$. Se define

$$\mu_X : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(X)$$

como

$$\mu_X(A) = \bigcup A$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Entonces $(\mathcal{P}, \eta, \mu)$ es una mónada en ***Set****.*

Demostración. Se comienza probando que la asignación η_X es natural. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en **Set**, entonces

$$\begin{aligned}(\eta_Y \circ f)(x) =& \eta_Y(f(x))\\ =& \{f(x)\}\\ =& f[\{x\}]\\ =& \mathcal{P}(f)(\{x\})\\ =& (\mathcal{P}(f) \circ \eta_X)(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in X$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"'] & \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \to \mathcal{P}$ es una transformación natural.

Se prueba que la asignación μ_X es natural. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en **Set**, entonces

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}(f) \circ \mu_X)(A) =& \mathcal{P}(f)(\bigcup A)\\ =& f[\bigcup A]\\ =& \bigcup f[A]\\ =& \mu_Y(\mathcal{P}(f)[A])\\ =& (\mu_Y \circ \mathcal{P}(\mathcal{P}(f)))(A)\end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \arrow[r, "\mathcal{P}(\mathcal{P}(f))"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) \arrow[d, "\mu_Y"] \\
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"'] & \mathcal{P}(Y)
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es una transformación natural.

Para finalizar, se prueba la conmutatividad de los diagramas (S.1) y (S.2), los cuales corresponden a la definición de mónada.

Sea $X \in \mathbf{Set}$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mu_X \circ (\eta \circ \mathcal{P})_X)(A) =& \mu_X(\eta_{\mathcal{P}(X)}(A)) \\
=& \mu_X(\{A\}) \\
=& \bigcup \{A\} \\
=& A
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
(\mu_X \circ (\mathcal{P} \circ \eta)_X)(A) =& \mu_X(\mathcal{P}(\eta_X)(A)) \\
=& \mu_X(\eta_X[A]) \\
=& \bigcup \{\{a\} : a \in A\} \\
=& A
\end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(X)$. En conclusión los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "\eta \circ \mathcal{P}"] \arrow[dr, "1_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[d, "\mu"] \\
& \mathcal{P}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "\mathcal{P} \circ \eta"] \arrow[dr, "1_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[d, "\mu"] \\
& \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

Sea $X \in \mathbf{Set}$. Observe que:

$$\begin{aligned}(\mu_X \circ (\mathcal{P} \circ \mu)_X)(\Omega) =& \mu_X(\mathcal{P}(\mu_X)(\Omega))\\ =& \mu_X(\mu_X[\Omega])\\ =& \bigcup(\bigcup \Omega)\\ =& \mu_X(\bigcup \Omega)\\ =& \mu_X(\mu_{\mathcal{P}(X)}(\Omega))\\ =& (\mu_X \circ (\mu \circ \mathcal{P})_X)(\Omega)\end{aligned}$$

para todo $\Omega \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$. Es así que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "\mathcal{P}\circ\mu"] \arrow[d, "\mu\circ\mathcal{P}"'] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

Esto concluye que $(\mathcal{P}, \eta, \mu)$ es una mónada en **Set**. $\square$

2. Adjunciones

Como ya había notado Huber en [**9**], cada par de funtores adjuntos inducen una mónada y una comónada, en esta sección se presenta la demostración de tal afirmación.

DEFINICIÓN 3. *Sean* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorías y* $L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *funtores. Se dice que* L *es funtor adjunto izquierdo de* R *y se denota por* $L \dashv R$, *si para cualesquiera* $X \in \mathbf{C}$, $Y \in \mathbf{D}$ *existe una correspondencia biyectiva*

$$\varphi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y))$$

que es natural en la variable X *y en la variable* Y.

NOTACIÓN 1. *Sean* $L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un par de funtores adjuntos* $L \dashv R$, *otra forma de denotar una situación de adjunción es la siguiente:*

$$(L, R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

Es verdad que la definición anterior expresa una interesante relación entre ciertas colecciones de morfismos, de manera práctica, en la teoría a desarrollar tales isomorfismos no son de mucha ayuda pues de cierta manera se pierde el control en las variables, es por tanto que se busca una alternativa para estudiar un par de funtores adjuntos, la siguiente proposición simplifica la forma en que se puede trabajar con una adjunción.

Proposición 5. *Sean* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorías y* $L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *funtores. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *L es funtor adjunto izquierdo de R.*
2. *Existen transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to R \circ L$, $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathbf{D}}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\circ\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & L \circ R \circ L \arrow[d, "\varepsilon\circ L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta\circ R"] \arrow[dr, "1_R"'] & R \circ L \circ R \arrow[d, "R\circ\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

A las transformaciones naturales η y ε se les conoce como unidad y counidad de la adjunción respectivamente y a los diagramas conmutativos se les conoce como identidades triangulares.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) El plan a seguir es el siguiente. En una primera etapa se busca exhibir las asignaciones η, ε, para en una segunda etapa probar que tales asignaciones son naturales y se finaliza con las identidades triangulares.

Sea $X \in \mathbf{C}$, se debe cumplir que

$$\eta_X : X \to R(L(X))$$

como L y R son funtores adjuntos existe una biyección

$$\varphi_{X,L(X)} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), L(X)) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(L(X))).$$

Observe que

$$\varphi_{X,L(X)}(1_{L(X)}) : X \to R(L(X))$$

es así que de manera sugerente se define

$$\eta_X := \varphi_{X,L(X)}(1_{L(X)}).$$

Se prueba que tal asignación es natural.

Sea $f : X \to X'$ un morfismo en $\mathbf{C}$, se busca probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & X' \arrow[d, "\eta_{X'}"] \\ R(L(X)) \arrow[r, "R(L(f))"'] & R(L(X')) \end{tikzcd}$$

Note que $L(f) : L(X) \to L(X')$ es un morfismo en $\mathbf{D}$ y como

$$\varphi_{X,\_} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), \_) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(\_))$$

es una transformación natural se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(L(X),L(X)) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{D}}(L(X),L(f))"] \arrow[d, "\varphi_{X,L(X)}"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(X),L(X')) \arrow[d, "\varphi_{X,L(X')}"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(X,R(L(X))) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(X,R(L(f)))"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,R(L(X')))
\end{tikzcd}$$

Evaluando en $1_{L(X)} \in Hom_{\mathbf{D}}(L(X),L(X))$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
R(L(f)) \circ \eta_X =& (Hom_{\mathbf{C}}(X,R(L(f))) \circ \varphi_{X,L(X)})(1_{L(X)}) \\
=& (\varphi_{X,L(X')} \circ Hom_{\mathbf{D}}(L(X),L(f)))(1_{L(X)}) \\
=& \varphi_{X,L(X')}(L(f) \circ (1_{L(X)})) \\
=& \varphi_{X,L(X')}(L(f))
\end{aligned}$$

Es decir

$$R(L(f)) \circ \eta_X = \varphi_{X,L(X')}(L(f)). \tag{1}$$

Por otra parte, como $f : X \to X'$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ y

$$\varphi_{\_,L(X')} : Hom_{\mathbf{D}}(L(\_),L(X')) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_,R(L(X')))$$

es una transformación natural se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(L(X),L(X')) \arrow[d, "\varphi_{X,L(X')}"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(X'),L(X')) \arrow[l, "Hom_{\mathbf{D}}(L(f),L(X'))"'] \arrow[d, "\varphi_{X',L(X')}"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(X,R(L(X'))) & Hom_{\mathbf{C}}(X',R(L(X'))) \arrow[l, "Hom_{\mathbf{C}}(f,R(L(X')))"]
\end{tikzcd}$$

Evaluando en $1_{L(X')} \in Hom_{\mathbf{D}}(L(X'),L(X'))$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\eta_{X'} \circ f =& (Hom_{\mathbf{C}}(f,R(L(X'))) \circ \varphi_{X',L(X')})(1_{L(X')}) \\
=& (\varphi_{X,L(X')} \circ Hom_{\mathbf{D}}(L(f),L(X')))(1_{L(X')}) \\
=& \varphi_{X,L(X')}(1_{L(X')} \circ L(f)) \\
=& \varphi_{X,L(X')}(L(f))
\end{aligned}$$

Es decir

$$\eta_{X'} \circ f = \varphi_{X,L(X')}(L(f)). \tag{2}$$

De (1) y (2) se concluye que

$$\begin{aligned}
R(L(f)) \circ \eta_X =& \varphi_{X,L(X')}(L(f)) \\
=& \eta_{X'} \circ f.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to R \circ L$ es una transformación natural.

A continuación se precisa la asignación $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathbf{D}}$.

Sea $Y \in \mathbf{D}$, se debe cumplir que

$$\varepsilon_Y : L(R(Y)) \to Y$$

como L y R son funtores adjuntos existe una biyección

$$\varphi_{R(Y),Y} : Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y)).$$

Es así que

$$\varphi^{-1}_{R(Y),Y} : Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y)) \to Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), Y).$$

Observe que

$$\varphi^{-1}_{R(Y),Y}(1_{R(Y)}) : L(R(Y)) \to Y$$

de manera sugerente se define

$$\varepsilon_Y := \varphi^{-1}_{R(Y),Y}(1_{R(Y)}).$$

Se prueba que tal asignación es natural.

Sea $g : Y \to Y'$ un morfismo en $\mathbf{D}$, se busca probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L(R(Y)) \arrow[r, "L(R(g))"] \arrow[d, "\varepsilon_Y"'] & L(R(Y')) \arrow[d, "\varepsilon_{Y'}"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Como

$$\varphi^{-1}_{R(Y),\_} : Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(\_)) \to Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), \_)$$

es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y)) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(R(Y),R(g))"] \arrow[d, "\varphi^{-1}_{R(Y),Y}"'] & Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y')) \arrow[d, "\varphi^{-1}_{R(Y),Y'}"] \\ Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), Y) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)),g)"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), Y') \end{tikzcd}$$

Evaluando en $1_{R(Y)} \in Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y))$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} g \circ \varepsilon_Y =&(Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), g) \circ \varphi^{-1}_{R(Y),Y})(1_{R(Y)}) \\ =&(\varphi^{-1}_{R(Y),Y'} \circ Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(g)))(1_{R(Y)}) \\ =&\varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(R(g) \circ 1_{R(Y)}) \\ =&\varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(R(g)) \end{aligned}$$

Es decir

$$g \circ \varepsilon_Y = \varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(R(g)). \tag{3}$$

Por otra parte, como $R(g) : R(Y) \to R(Y')$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ y como

$$\varphi^{-1}_{\_,Y'} : Hom_{\mathbf{C}}(\_, R(Y')) \to Hom_{\mathbf{D}}(L(\_), Y')$$

es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y')) & \xrightarrow{Hom_{\mathbf{C}}(R(g),R(Y'))} & Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y')) \\ {\scriptstyle \varphi^{-1}_{R(Y'),Y'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{-1}_{R(Y),Y'}} \\ Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y')), Y') & \xrightarrow[Hom_{\mathbf{D}}(L(R(g)),Y')]{} & Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), Y') \end{array}$$

Evaluando en $1_{R(Y')} \in Hom_{\mathbf{C}}(R(Y'), R(Y'))$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Y'} \circ L(R(g)) =&(Hom_{\mathbf{D}}(L(R(g)), Y') \circ \varphi^{-1}_{R(Y'),Y'})(1_{R(Y')}) \\ =&(\varphi^{-1}_{R(Y),Y'} \circ Hom_{\mathbf{C}}(R(g), R(Y')))(1_{R(Y')}) \\ =&\varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(1_{R(Y')} \circ R(g)) \\ =&\varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(R(g)) \end{aligned}$$

Es decir

$$\varepsilon_{Y'} \circ L(R(g)) = \varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(R(g)). \tag{4}$$

De (3) y (4) se concluye que

$$\begin{aligned} g \circ \varepsilon_Y =&\varphi^{-1}_{R(Y),Y'}(R(g)) \\ =&\varepsilon_{Y'} \circ L(R(g)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathbf{D}}$ es una transformación natural.

Resta probar que se satisfacen las identidades triangulares.

Como $\eta_X : X \to R(L(X))$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ y

$$\varphi^{-1}_{\_,L(X)} : Hom_{\mathbf{C}}(\_, R(L(X))) \to Hom_{\mathbf{D}}(L(\_), L(X))$$

es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(R(L(X)), R(L(X))) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(\eta_X, R(L(X)))"] \arrow[d, "\varphi^{-1}_{R(L(X)),L(X)}"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, R(L(X))) \arrow[d, "\varphi^{-1}_{X,L(X)}"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(L(R(L(X))), L(X)) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{D}}(L(\eta_X), L(X))"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(X), L(X))
\end{tikzcd}$$

Evaluando en $1_{R(L(X))} \in Hom_{\mathbf{C}}(R(L(X)), R(L(X)))$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X) =& (Hom_{\mathbf{D}}(L(\eta_X), L(X)) \circ \varphi^{-1}_{R(L(X)),L(X)})(1_{R(L(X))}) \\
=& (\varphi^{-1}_{X,L(X)} \circ Hom_{\mathbf{C}}(\eta_X, R(L(X))))(1_{R(L(X))}) \\
=& \varphi^{-1}_{X,L(X)}(1_{R(L(X))} \circ \eta_X) \\
=& \varphi^{-1}_{X,L(X)}(\eta_X) \\
=& \varphi^{-1}_{X,L(X)}(\varphi_{X,L(X)}(1_{L(X)})) \\
=& 1_{L(X)}
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathbf{C}$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "L\circ\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & L \circ R \circ L \arrow[d, "\varepsilon\circ L"] \\
 & L
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, como $\varepsilon_Y : L(R(Y)) \to Y$ es un morfismo en $\mathbf{D}$ y

$$\varphi_{R(Y),\_} : Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), \_) \to Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(\_))$$

es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), L(R(Y))) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), \varepsilon_Y)"] \arrow[d, "\varphi_{R(Y),L(R(Y))}"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), Y) \arrow[d, "\varphi_{R(Y),Y}"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(L(R(Y)))) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(\varepsilon_Y))"'] & Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(Y))
\end{tikzcd}$$

Evaluando en $1_{L(R(Y))} \in Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), L(R(Y)))$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_Y) \circ \eta_{R(Y)} =& (Hom_{\mathbf{C}}(R(Y), R(\varepsilon_Y)) \circ \varphi_{R(Y),L(R(Y))})(1_{L(R(Y))}) \\ =& (\varphi_{R(Y),Y} \circ Hom_{\mathbf{D}}(L(R(Y)), \varepsilon_Y))(1_{L(R(Y))})) \\ =& \varphi_{R(Y),Y}(\varepsilon_Y \circ 1_{L(R(Y))}) \\ =& \varphi_{R(Y),Y}(\varepsilon_Y) \\ =& \varphi_{R(Y),Y}(\varphi^{-1}_{R(Y),Y}(1_{R(Y)})) \\ =& 1_{R(Y)} \end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathbf{D}$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta\circ R"] \arrow[dr, "1_R"'] & R \circ L \circ R \arrow[d, "R\circ\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Esto concluye la primer parte.

2) $\Leftarrow$ 1) Sean $X \in \mathbf{C}$, $Y \in \mathbf{D}$ cualesquiera, se define

$$\varphi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y))$$

como

$$\varphi_{X,Y}(f) = R(f) \circ \eta_X$$

para todo $f : L(X) \to Y$. Además, se define

$$\psi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y)) \to Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y)$$

como

$$\psi_{X,Y}(g) = \varepsilon_Y \circ L(g)$$

para todo $g : X \to R(Y)$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y} \circ \psi_{X,Y}(g) =& \varphi_{X,Y}(\varepsilon_Y \circ L(g)) \\ =& R(\varepsilon_Y \circ L(g)) \circ \eta_X \\ =& R(\varepsilon_Y) \circ R(L(g)) \circ \eta_X \end{aligned}$$

como $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to R \circ L$ es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_X"'] & R(Y) \arrow[d, "\eta_{R(Y)}"] \\ R(L(X)) \arrow[r, "R(L(g))"'] & R(L(R(Y))) \end{tikzcd}$$

De lo anterior se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi_{X,Y}\circ\psi_{X,Y}(g) =& R(\varepsilon_Y)\circ R(L(g))\circ\eta_X\\ =& R(\varepsilon_Y)\circ\eta_{R(Y)}\circ g.\end{aligned}$$

Por hipótesis, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta\circ R"] \arrow[dr, "1_R"'] & R\circ L\circ R \arrow[d, "R\circ\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi_{X,Y}\circ\psi_{X,Y}(g) =& R(\varepsilon_Y)\circ\eta_{R(Y)}\circ g\\ =& 1_{R(Y)}\circ g\\ =& g\end{aligned}$$

para todo $g\in Hom_{\mathbf{C}}(X,R(Y))$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\psi_{X,Y}\circ\varphi_{X,Y}(f) =& \psi_{X,Y}\circ(R(f)\circ\eta_X)\\ =& \varepsilon_Y\circ L(R(f)\circ\eta_X)\\ =& \varepsilon_Y\circ L(R(f))\circ L(\eta_X)\end{aligned}$$

como $\varepsilon : L\circ R\to Id_{\mathbf{D}}$ es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L(R(L(X))) \arrow[r, "L(R(f))"] \arrow[d, "\varepsilon_{L(X)}"'] & L(R(Y)) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ L(X) \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

De lo anterior se deduce que:

$$\begin{aligned}\psi_{X,Y}\circ\varphi_{X,Y}(f) =& \varepsilon_Y\circ L(R(f))\circ L(\eta_X)\\ =& f\circ\varepsilon_{L(X)}\circ L(\eta_X).\end{aligned}$$

Por hipótesis, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\circ\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & L\circ R\circ L \arrow[d, "\varepsilon\circ L"] \\ & L \end{tikzcd}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi_{X,Y} \circ \varphi_{X,Y}(f) =& f \circ \varepsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)\\ =& f \circ 1_{L(X)}\\ =& f\end{aligned}$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y)$. El par de argumentos antes validados permiten concluir que

$$\varphi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y))$$

es una biyección. Resta probar que tal biyección es natural en cada variable.

Sea $X \in \mathbf{C}$, se comienza probando que $\varphi_{X,\_} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), \_) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(\_))$ es natural. Sea $f : Y \to Y'$ un morfismo en $\mathbf{D}$, se busca probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{D}}(L(X),f)"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y') \arrow[d, "\varphi_{X,Y'}"] \\ Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y)) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(X,R(f))"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y')) \end{tikzcd}$$

Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varphi_{X,Y'} \circ Hom_{\mathbf{D}}(L(X), f))(g) =& \varphi_{X,Y'}(f \circ g)\\ =& R(f \circ g) \circ \eta_X\\ =& (R(f) \circ R(g)) \circ \eta_X\\ =& R(f) \circ (R(g) \circ \eta_X)\\ =& R(f) \circ \varphi_{X,Y}(g)\\ =& (Hom_{\mathbf{C}}(X, R(f)) \circ \varphi_{X,Y})(g).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_{X,\_} : Hom_{\mathbf{D}}(L(X), \_) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, R(\_))$ es natural.

Sea $Y \in \mathbf{D}$, se busca probar que $\varphi_{\_,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(L(\_), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, R(Y))$ es natural. Sea $g : X \to X'$ un morfismo en $\mathbf{C}$, se busca probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{D}}(L(X), Y) \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & Hom_{\mathbf{D}}(L(X'), Y) \arrow[l, "Hom_{\mathbf{D}}(L(g),Y)"'] \arrow[d, "\varphi_{X',Y}"] \\ Hom_{\mathbf{C}}(X, R(Y)) & Hom_{\mathbf{C}}(X', R(Y)) \arrow[l, "Hom_{\mathbf{C}}(g,R(Y))"] \end{tikzcd}$$

Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varphi_{X,Y} \circ Hom_{\mathbf{D}}(L(g), Y))(f) =& \varphi_{X,Y}(f \circ L(g))\\ =& R(f \circ L(g)) \circ \eta_X\\ =& (R(f) \circ R(L(g))) \circ \eta_X\\ =& R(f) \circ (R(L(g)) \circ \eta_X)\\ =& R(f) \circ (\eta_{X'} \circ g)\\ =& (Hom_{\mathbf{C}}(g, R(Y)) \circ \varphi_{X',Y})(f)\end{aligned}$$

la quinta igualdad se sigue de la naturalidad de η.

Por lo tanto $\varphi_{\_,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(L(\_), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, R(Y))$ es natural. Lo anterior da por terminada la demostración. $\square$

La prueba de la proposición anterior puede haber parecido bastante elaborada, pero vale totalmente la pena, pues de ahora en adelante cada que se busque estudiar una situación de adjunción en lugar de trabajar con los isomorfismos naturales se buscara trabajar con la unidad y counidad.

Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, de nuestro particular interés son las comónadas, sin embargo, no se pasaran por alto los resultados correspondientes a mónadas cuando estos sean accesibles.

Proposición 6. *Sean* $(L, R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un par de funtores adjuntos con* $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to R \circ L$, $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathbf{D}}$ *la unidad y counidad de la adjunción respectivamente. Entonces* $(R \circ L, \eta, R \circ \varepsilon \circ L)$ *es una mónada en* $\mathbf{C}$, *la cual se denota por* $\boldsymbol{S}_{L,R}$.

Demostración. Se busca probar que los siguientes diagramas conmutan:

S.1

$$\begin{tikzcd} R \circ L \arrow[r, "(R\circ L)\circ\eta"] \arrow[dr, "1_{R\circ L}"'] & (R \circ L)^2 \arrow[d, "R\circ\varepsilon\circ L"] & R \circ L \arrow[l, "\eta\circ(R\circ L)"'] \arrow[dl, "1_{R\circ L}"] \\ & R \circ L & \end{tikzcd}$$

S.2

$$\begin{tikzcd} (R \circ L)^3 \arrow[r, "(R\circ L)\circ(R\circ\varepsilon\circ L)"] \arrow[d, "(R\circ\varepsilon\circ L)\circ(R\circ L)"'] & (R \circ L)^2 \arrow[d, "R\circ\varepsilon\circ L"] \\ (R \circ L)^2 \arrow[r, "R\circ\varepsilon\circ L"'] & R \circ L \end{tikzcd}$$

Dado que L y R son funtores adjuntos se satisfacen las identidades triangulares, es decir los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "L\circ\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & L\circ R\circ L \arrow[d, "\varepsilon\circ L"] \\
& L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\eta\circ R"] \arrow[dr, "1_R"'] & R\circ L\circ R \arrow[d, "R\circ\varepsilon"] \\
& R
\end{tikzcd}
$$

Sea $X \in \mathbf{C}$, por la primer identidad triangular se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
L(X) \arrow[r, "L(\eta_X)"] \arrow[dr, "1_{L(X)}"'] & L(R(L((X)))) \arrow[d, "\varepsilon_{L(X)}"] \\
& L(X)
\end{tikzcd}
$$

aplicando el funtor $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
1_{R(L(X))} =& R(1_{L(X)}) \\
=& R(\varepsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X) \\
=& R(\varepsilon_{L(X)}) \circ R(L(\eta_X)).
\end{aligned}
$$

Observe que $L(X) \in \mathbf{D}$, por la segunda identidad triangular se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
R(L(X)) \arrow[r, "\eta_{R(L(X))}"] \arrow[dr, "1_{R(L(X))}"'] & R(L(R(L(X)))) \arrow[d, "R(\varepsilon_{L(X)})"] \\
& R(L(X))
\end{tikzcd}
$$

En consecuencia el diagrama (S.1) conmuta.

Respecto al segundo diagrama. Note que $\varepsilon_{L(X)} : L(R(L(X))) \to L(X)$ es un morfismo en $\mathbf{D}$ y como $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathbf{D}}$ es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
L(R(L(R(L(X))))) \arrow[r, "L(R(\varepsilon_{L(X)}))"] \arrow[d, "\varepsilon_{L(R(L(X)))}"'] & L(R(L(X))) \arrow[d, "\varepsilon_{L(X)}"] \\
L(R(L(X))) \arrow[r, "\varepsilon_{L(X)}"'] & L(X)
\end{tikzcd}
$$

aplicando el funtor $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_{L(X)}) \circ R(L(R(\varepsilon_{L(X)}))) &= R(\varepsilon_{L(X)} \circ L(R(\varepsilon_{L(X)}))) \\ &= R(\varepsilon_{L(X)} \circ \varepsilon_{L(R(L(X)))}) \\ &= R(\varepsilon_{L(X)}) \circ R(\varepsilon_{L(R(L(X)))}) \end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama (S.2) conmuta.

En conclusión $\mathbf{S}_{L,R} = (R \circ L, \eta, R \circ \varepsilon \circ L)$ es una mónada en $\mathbf{C}$. $\square$

La siguiente herramienta es imprescindible a lo largo de este trabajo, pues cada comónada que se estudie será motivada por una adjunción.

Proposición 7. *Sean $(L, R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un par de funtores adjuntos con $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to R \circ L$, $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathbf{D}}$ la unidad y counidad de la adjunción respectivamente. Entonces $(L \circ R, \varepsilon, L \circ \eta \circ R)$ es una comónada en $\mathbf{D}$, la cual se denota por $\boldsymbol{T}_{L,R}$.*

Demostración. Se busca probar que los siguientes diagramas conmutan:

T.1

$$\begin{tikzcd} & L \circ R \arrow[dl, "1_{L\circ R}"'] \arrow[d, "L\circ\eta\circ R"] \arrow[dr, "L\circ R"] & \\ L \circ R & (L \circ R)^2 \arrow[l, "(L\circ R)\circ\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon\circ(L\circ R)"'] & L \circ R \end{tikzcd}$$

T.2

$$\begin{tikzcd} L \circ R \arrow[r, "L\circ\eta\circ R"] \arrow[d, "L\circ\eta\circ R"'] & (L \circ R)^2 \arrow[d, "(L\circ\eta\circ R)\circ(L\circ R)"] \\ (L \circ R)^2 \arrow[r, "(L\circ R)\circ(L\circ\eta\circ R)"'] & (L \circ R)^3 \end{tikzcd}$$

Dado que L y R son funtores adjuntos se satisfacen las identidades triangulares, es decir los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\circ\eta"] \arrow[dr, "1_L"'] & L \circ R \circ L \arrow[d, "\varepsilon\circ L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta\circ R"] \arrow[dr, "1_R"'] & R \circ L \circ R \arrow[d, "R\circ\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Sea $Y \in \mathbf{D}$, por la segunda identidad triangular se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R(Y) \arrow[r, "\eta_{R(Y)}"] \arrow[dr, "1_{R(Y)}"'] & R(L(R(Y))) \arrow[d, "R(\varepsilon_Y)"] \\ & R(Y) \end{tikzcd}$$

aplicando el funtor $L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1_{L(R(Y))} =& L(1_{R(Y)}) \\ =& L(R(\varepsilon_Y) \circ \eta_{R(Y)}) \\ =& L(R(\varepsilon_Y)) \circ L(\eta_{R(Y)}) \end{aligned}$$

Por otra parte. Note que $R(Y) \in \mathbf{D}$, por la primera identidad triangular se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L(R(Y)) \arrow[r, "L(\eta_{R(Y)})"] \arrow[dr, "1_{L(R(Y))}"'] & L(R(L(R(Y)))) \arrow[d, "\varepsilon_{L(R(Y))}"] \\ & L(R(Y)) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto el diagrama (T.1) conmuta.

Respecto al segundo diagrama. Note que $\eta_{R(Y)} : R(Y) \to R(L(R(Y)))$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ y como $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to R \circ L$ es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R(Y) \arrow[r, "\eta_{R(Y)}"] \arrow[d, "\eta_{R(Y)}"'] & R(L(R(Y))) \arrow[d, "\eta_{R(L(R(Y)))}"] \\ R(L(R(Y))) \arrow[r, "R(L(\eta_{R(Y)}))"'] & R(L(R(L(R(Y))))) \end{tikzcd}$$

aplicando el funtor $L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} L(R(L(\eta_{R(Y)}))) \circ L(\eta_{R(Y)}) =& L(R(L(\eta_{R(Y)})) \circ \eta_{R(Y)}) \\ =& L(\eta_{R(L(R(Y)))} \circ \eta_{R(Y)}) \\ =& L(\eta_{R(L(R(Y)))}) \circ L(\eta_{R(Y)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama (T.2) conmuta.

En conclusión $\mathbf{T}_{L,R} = (L \circ R, \varepsilon, L \circ \eta \circ R)$ es una comónada en $\mathbf{D}$. $\square$

Los ejemplos de comónadas inducidas por una adjunción se presentaran en los capítulos 5,6 y 7.

Capítulo 2

Objetos de Grupo

En el presente capítulo se estudia el concepto de objeto de grupo y objeto de grupo abeliano, así como un grupo se construye sobre un conjunto, un objeto de grupo se construye sobre un objeto de la categoría y se busca preservar la esencia de los axiomas de grupo mediante flechas y diagramas conmutativos. Es por tanto que un objeto de grupo busca generalizar el concepto de grupo.

NOTACIÓN 2. *Para los grupos que no necesariamente son abelianos se empleará la notación multiplicativa y se denotará por* e *al elemento neutro. Para grupos abelianos se empleará la notación aditiva y se denotará por* 0 *al elemento neutro.*

1. Objetos de grupo

DEFINICIÓN 4. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos finitos y* $G \in \mathbf{C}$*. Se dice que* G *es un objeto de grupo en* $\mathbf{C}$ *si existen morfismos en* $\mathbf{C}$

$$\mu : G \times G \to G$$

$$\lambda : 1 \to G$$

$$\gamma : G \to G$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

A.1.

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "1_G \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd}$$

A.2.

$$\begin{tikzcd} G \times 1 \arrow[r, "1_G \times \lambda"] \arrow[dr, "p_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & 1 \times G \arrow[l, "\lambda \times 1_G"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

A.3.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\langle 1_G,\gamma\rangle"] \arrow[d, "!"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "\langle \gamma,1_G\rangle"'] \arrow[d, "!"] \\
1 \arrow[r, "\lambda"'] & G & 1 \arrow[l, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

donde $!$ *denota al único morfismo que existe de* G *en el objeto terminal* 1*.*

OBSERVACIÓN 2. *En la definición anterior como hipótesis se pide a la categoría tener productos finitos, pues de esta manera se garantiza la existencia de objeto terminal y en particular la existencia de productos binarios, pero basta con tener algunos productos binarios y objeto terminal para poder trabajar con objetos de grupo.*

Es evidente que los diagramas conmutativos de la definición de objeto de grupo buscan replicar los axiomas de grupo.

En el siguiente par de proposiciones se busca caracterizar a los objetos de grupo en la categoría conjuntos.

PROPOSICIÓN 8. *Sea* G *un objeto de grupo en* ***Set****, entonces* G *es un grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es un objeto de grupo en **Set** existen morfismos

$$\mu : G\times G \to G$$

$$\lambda : 1 \to G$$

$$\gamma : G \to G$$

en **Set**, tales que los correspondientes diagramas conmutan. Se propone a

$$\mu : G\times G \to G$$

como la operación binaria. El diagrama (A.1) es testigo de la asociatividad de la operación.

Se denota por e a la imagen del único elemento del objeto terminal bajo la función $\lambda : 1 \to G$, es decir $e := \lambda(*)$. Como consecuencia de la conmutatividad del diagrama (A.2) se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mu(g,e) =&\mu(g,\lambda(*))\\ =&\mu((1_G\times\lambda)(g,*))\\ =&p_1(g,*)\\ =&g\\ =&p_2(*,g)\\ =&\mu((\lambda\times 1_G)(*,g))\\ =&\mu(\lambda(*),g)\\ =&\mu(e,g)\end{aligned}$$

para todo $g\in G$. Lo anterior prueba la existencia del elemento neutro.

Se denota por g^{-1} a la imagen del elemento $g\in G$ bajo la función $\gamma : G\to G$, es decir $g^{-1} := \gamma(g)$. La conmutatividad del diagrama (A.3) implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mu(g,g^{-1}) =&\mu(g,\gamma(g))\\ =&\mu(\langle 1_G,\gamma\rangle(g))\\ =&\lambda(!(g))\\ =&\lambda(*)\\ =&e\\ =&\lambda(*)\\ =&\lambda(!(g))\\ =&\mu(\langle\gamma,1_G\rangle(g))\\ =&\mu(g^{-1},g)\end{aligned}$$

para todo $g\in G$. Lo anterior prueba la existencia de elementos inversos.
Se concluye que G es un grupo. □

PROPOSICIÓN 9. *Sea G un grupo, entonces G es un objeto de grupo en **Set**.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo. Los morfismos que en esta prueba se definen son a los que en un futuro se hará referencia como morfismos canónicos.

Se define $\mu : G\times G\to G$ como $\mu(g_1,g_2) := g_1\cdot g_2$ para todo $g_1,g_2\in G$. El axioma de asociatividad que satisface la operación del grupo G implica lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(\mu \circ \mu \times 1_G)(g_1, g_2, g_3) =& \mu(\mu(g_1, g_2), g_3) \\
=& (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \\
=& g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \\
=& \mu(g_1, \mu(g_2, g_3)) \\
=& (\mu \circ 1_G \times \mu)(g_1, g_2, g_3)
\end{aligned}
$$

para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$.

Se define $\lambda : 1 \to G$ como $\lambda(*) := e$. El axioma correspondiente al elemento neutro del grupo G implica lo siguiente.

Por una parte:

$$
\begin{aligned}
(\mu \circ 1_G \times \lambda)(g, *) =& \mu(g, \lambda(*)) \\
=& \mu(g, e) \\
=& g \cdot e \\
=& g \\
=& p_1(g, *).
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
(\mu \circ \lambda \times 1_G)(*, g) =& \mu(\lambda(*), g) \\
=& \mu(e, g) \\
=& e \cdot g \\
=& g \\
=& p_2(*, g)
\end{aligned}
$$

para todo $g \in G$.

Para finalizar, se define $\gamma : G \to G$ como $\gamma(g) := g^{-1}$. El axioma correspondiente a los elementos inversos del grupo G implica lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(\mu \circ \langle 1_G, \gamma\rangle)(g) =& \mu(g, \gamma(g))\\
=& \mu(g, g^{-1})\\
=& g \cdot g^{-1}\\
=& e\\
=& \lambda(*)\\
=& (\lambda \circ !)(g)\\
=& \lambda(*)\\
=& e\\
=& g^{-1} \cdot g\\
=& \mu(g^{-1}, g)\\
=& \mu(\gamma(g), g)\\
=& (\mu \circ \langle \gamma, 1_G\rangle)(g)
\end{aligned}
$$

para todo $g \in G$. Por lo tanto G es un objeto de grupo en **Set**. □

El siguiente lema que se presenta es de carácter técnico, este será de gran ayuda para demostrar que la estructura de grupo que se puede dar a un conjunto es única, esto cuando las operaciones en cuestión satisfagan una relación.

LEMA 1. *(Eckmann-Hilton) Sea X un conjunto equipado con dos operaciones binarias, las cuales se denotan por $\diamond$, $\ominus$. Si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Existen elementos $1_\diamond, 1_\ominus \in X$ tales que $1_\diamond \diamond x = x = x \diamond 1_\diamond$ y $1_\ominus \ominus x = x = x \diamond 1_\diamond$ para todo $x \in X$.*
2. *$(w \diamond x) \ominus (y \diamond z) = (w \ominus y) \diamond (x \ominus z)$ para todo $w, x, y, z \in X$.*

Entonces $1_\diamond = 1_\ominus$ y $x \diamond y = x \ominus y$ para todo $x, y \in X$, más aún, la operación es conmutativa.

DEMOSTRACIÓN. En lo que respecta a la primer afirmación se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
1_\diamond =& 1_\diamond \diamond 1_\diamond\\
=& (1_\ominus \ominus 1_\diamond) \diamond (1_\diamond \ominus 1_\ominus)\\
=& (1_\ominus \diamond 1_\diamond) \ominus (1_\diamond \diamond 1_\ominus)\\
=& 1_\ominus \ominus 1_\ominus\\
=& 1_\ominus
\end{aligned}
$$

Una vez que se ha probado que los elementos distinguidos coinciden se denota por 1 a tal elemento. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \diamond y =& (1 \ominus x) \diamond (y \ominus 1) \\ =& (1 \diamond y) \ominus (x \diamond 1) \\ =& y \ominus x \\ =& (y \diamond 1) \ominus (1 \diamond x) \\ =& (y \ominus 1) \diamond (1 \ominus x) \\ =& y \diamond x \end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in X$. El primer y último termino de la cadena de igualdades demuestran que las operaciones coinciden, mientras que el primer y cuarto termino de la cadena de igualdades demuestran que la operación es conmutativa. □

Cuando se trabaje en categorías cuyos morfismos tengan mas propiedades estas se verán reflejadas en los objetos de grupo, la siguiente proposición ejemplifica tal situación. A continuación se caracteriza a los objetos de grupo en la categoría de grupos.

PROPOSICIÓN 10. *Sea G un objeto de grupo en **Grp**, entonces G es un grupo abeliano.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un objeto de grupo en **Grp**, por definición $G \in$ **Grp** de modo que desde un principio G tiene estructura de grupo, se denota por $\cdot$ a la operación y se denota por e al elemento distinguido.

Como $\mu : G \times G \to G$ es un morfismo en **Grp**, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu(g_1 \cdot g_3, g_2 \cdot g_4) =& \mu((g_1, g_2) \odot (g_3, g_4)) \\ =& \mu(g_1, g_2) \cdot \mu(g_3, g_4) \end{aligned}$$

para todo $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$, donde $\odot$ denota la operación del grupo $G \times G$ inducida por la operación $\cdot$ del grupo G.

Por una parte

$$e \cdot g = g = g \cdot e$$

por otra parte

$$\begin{aligned}\mu(\lambda(*), g) =&\mu(\lambda \times 1_G(*, g))\\ =&p_2(*, g)\\ =&g\\ =&p_1(g, *)\\ =&\mu(1_G \times \lambda(g, *))\\ =&\mu(g, \lambda(*))\end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

El lema de Eckmann-Hilton asegura que

$$\mu(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$$

para todo $g_1, g_2 \in G$. Más aún, asegura que la operación binaria $\cdot$ es conmutativa, como extra se tiene que $\lambda(*) = e$. Por lo tanto G es un grupo abeliano. $\square$

PROPOSICIÓN 11. *Sea G un grupo abeliano, entonces G es un objeto de grupo en **Grp**.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo abeliano, en particular G es un grupo. Como resultado de la caracterización de objetos de grupo en la categoría de conjuntos se deduce que G es un objeto de grupo en **Set**.

El argumento anterior valida la conmutatividad de los diagramas de la definición de objeto de grupo, resta probar que cada morfismo que acompaña al objeto de grupo es un homomorfismo de grupos para concluir que G es un objeto de grupo en **Grp**.

Sea $\mu : G \times G \to G$ el morfismo en **Set** canónico, es decir, el definido en la prueba de la proposición 9, la asociatividad y conmutatividad de la operación $\cdot$ implican lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mu((g_1, g_2) \odot (g_3, g_4)) =&\mu(g_1 \cdot g_3, g_2 \cdot g_4)\\ =&(g_1 \cdot g_3) \cdot (g_2 \cdot g_4)\\ =&(g_1 \cdot g_2) \cdot (g_3 \cdot g_4)\\ =&\mu(g_1, g_2) \cdot \mu(g_3, g_4)\end{aligned}$$

para todo $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$. Por lo tanto $\mu : G \times G \to G$ es un homomorfismo de grupos y en consecuencia un morfismo en **Grp**.

El objeto terminal en la categoría **Grp** es el grupo trivial, el cual tiene como único elemento al distinguido.

Sea $\lambda : 1 \to G$ el morfismo en **Set** canónico, es decir, el definido en la prueba de la proposición 9, se tiene que $\lambda(*) = e$. Es decir, λ asocia el elemento distinguido del grupo trivial en el elemento distinguido del grupo G, por consiguiente $\lambda : 1 \to G$ es un morfismo en **Grp**.

Sea $\gamma : G \to G$ el morfismo en **Set** definido en la prueba de la proposición 9, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma(g_1 \cdot g_2) =& (g_1 \cdot g_2)^{-1} \\ =& g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \\ =& g_1^{-1} \cdot g_2^{-1} \\ =& \gamma(g_1) \cdot \gamma(g_2)\end{aligned}$$

para todo $g_1, g_2 \in G$. Por lo tanto $\gamma : G \to G$ es un morfismo en **Grp**.

Como resultado de que G es un grupo y los morfismos que dan estructura son morfismos en **Grp** se concluye que G es un objeto de grupo en **Grp**. $\square$

Sin duda el siguiente resultado no necesita presentación, este será útil para la demostración de resultados posteriores.

LEMA 2. *(Yoneda) Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría*[1] *y* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ *un funtor. Considere un objeto* X *en* $\mathbf{C}$*, entonces existe una correspondencia biyectiva*

$$\varphi_{F,X} : Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X, \_), F) \to F(X)$$

que es natural en la variable F *y* X*.*

DEMOSTRACIÓN. Se comienza estudiando la correspondencia biyectiva.

Sea $\eta : Hom_{\mathbf{C}}(X, \_) \to F$ una transformación natural. Se define

$$\varphi_{F,X} : Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X, \_), F) \to F(X)$$

como

$$\varphi_{F,X}(\eta) = \eta_X(1_X).$$

Dado que $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ toma valores en conjuntos, entonces se pueden considerar elementos. Sea $x \in F(X)$. Se define

$$\psi_{F,X} : F(X) \to Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X, \_), F)$$

como

$$\psi_{F,X}(x)_A(f) = F(f)(x)$$

para todo $A \in \mathbf{C}$ y para todo morfismo $f : X \to A$ en $\mathbf{C}$.

[1] Vale la pena recalcar que $\mathbf{C}$ es una categoría localmente pequeña.

En una primera etapa se demostrara que la última asignación definida es correcta, por tanto se demuestra que $\psi_{F,X}(x) : Hom_{\mathbf{C}}(X, \_) \to F$ es una transformación natural para cualquier $x \in F(X)$.

Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(F(f) \circ \psi_{F,X}(x)_A)(g) =& F(f) \circ F(g)(x)\\ =& F(f \circ g)(x)\\ =& \psi_{F,X}(x)_B(f \circ g)\\ =& (\psi_{F,X}(x)_B \circ Hom_{\mathbf{C}}(X, f))(g)\end{aligned}$$

para todo $g \in Hom_{\mathbf{C}}(X, A)$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{C}}(X,A) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(X,f)"] \arrow[d, "\psi_{F,X}(x)_A"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,B) \arrow[d, "\psi_{F,X}(x)_B"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\psi_{F,X}(x)$ es una transformación natural para cada $x \in F(X)$.

En una segunda etapa se estudia la correspondencia biyectiva, para esto, note lo siguiente:

Sea $\eta : Hom_{\mathbf{C}}(X, \_) \to F$ una transformación natural, se cumple lo siguiente:

$$(\psi_{F,X} \circ \varphi_{F,X})(\eta) = \psi_{F,X}(\eta_X(1_X)) : Hom_{\mathbf{C}}(X, \_) \to F$$

por lo que

$$\begin{aligned}(\psi_{F,X} \circ \varphi_{F,X})(\eta)_A(g) =& \psi_{F,X}(\eta_X(1_X))_A(g)\\ =& F(g)(\eta_X(1_X))\\ =& \eta_A(g)\end{aligned}$$

para todo $A \in \mathbf{C}$ y $g : X \to A$ morfismo en $\mathbf{C}$, cabe recalcar que la tercera igualdad se sigue de la naturalidad de η.

En cuanto a la composición en el orden inverso se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varphi_{F,X} \circ \psi_{F,X})(x) =& \varphi_{F,X}(\psi_{F,X}(x)) \\ =& \psi_{F,X}(x)_X(1_X) \\ =& F(1_X)(x) \\ =& 1_{F(X)}(x) \\ =& x\end{aligned}$$

para todo $x \in F(X)$.
Esto prueba la correspondencia biyectiva.

Resta probar la naturalidad en las variables X y F.

Para la variable X.
Considere el funtor $Nat^* : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ que a nivel de objetos se define como

$$Nat^*(X) = Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X, \_), F)$$

y para $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$, se define

$$Nat^*(f) : Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X, \_), F) \to Nat(Hom_{\mathbf{C}}(Y, \_), F)$$

como

$$Nat^*(f)(\eta) = \eta \circ Hom_{\mathbf{C}}(f, \_).$$

Se busca probar que $\varphi_{F,\_} : Nat^* \to F$ es una transformación natural.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(F(f) \circ \varphi_{F,X})(\eta) =& F(f)(\eta_X(1_X)) \\ =& \eta_Y \circ Hom_{\mathbf{C}}(X, f)(1_X) \\ =& \eta_Y(f \circ 1_X) \\ =& \eta_Y(f) \\ =& \eta_Y(1_Y \circ f) \\ =& \eta_Y \circ Hom_{\mathbf{C}}(f, Y)(1_Y) \\ =& (\eta \circ Hom_{\mathbf{C}}(f, \_))_Y(1_Y) \\ =& \varphi_{F,Y}(\eta \circ Hom_{\mathbf{C}}(f, \_)) \\ =& (\varphi_{F,Y} \circ Nat^*(f))(\eta)\end{aligned}$$

para toda $\eta : Hom_{\mathbf{C}}(X, \_) \to F$ transformación natural. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,_),F) \arrow[r, "Nat^*(f)"] \arrow[d, "\varphi_{F,X}"'] & Nat(Hom_{\mathbf{C}}(Y,_),F) \arrow[d, "\varphi_{F,Y}"] \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

En conclusión $\varphi_{F,\_} : Nat^* \to F$ es una transformación natural.

Para la variable F.
Considere el funtor $Nat_* : \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Set}$ que a nivel de objetos se define como

$$Nat_*(F) = Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,\_),F)$$

y a nivel de morfismos, para $\eta : F \to G$ una transformación natural, se define

$$Nat_*(\eta) : Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,\_),F) \to Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,\_),G)$$

como

$$Nat_*(\eta)(\mu) = \eta \circ \mu$$

Sea X un objeto en $\mathbf{C}$, considere además el funtor evaluación $ev_X : \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{Set}) \to$ $\mathbf{Set}$ que a nivel de objetos se define como

$$ev_X(F) = F(X)$$

y a nivel de morfismos, para $\eta : F \to G$ una transformación natural, se define como

$$ev_X(\eta) = \eta_X$$

En esta ocasión se busca probar que $\varphi_{\_,X} : Nat_* \to ev_X$ es una transformación natural.

Sea $\eta : F \to G$ una transformación natural, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\varphi_{G,X} \circ Nat_*(\eta))(\mu) =& \varphi_{G,X}(\eta \circ \mu) \\
=& (\eta \circ \mu)_X(1_X) \\
=& \eta_X \circ \mu_X(1_X) \\
=& ev_X(\eta)(\mu_X(1_X)) \\
=& (ev_X(\eta) \circ \varphi_{F,X})(\mu)
\end{aligned}$$

para toda $\mu \in Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,\_),F)$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,\_),F) & \xrightarrow{Nat_*(\eta)} & Nat(Hom_{\mathbf{C}}(X,\_),G) \\ {\scriptstyle \varphi_{F,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{G,X}} \\ F(X) & \xrightarrow[ev_X(\eta)]{} & G(X) \end{array}$$

Por lo tanto $\varphi_{\_,X} : Nat_* \to ev_X$ es una transformación natural.

Esto concluye la prueba del Lema de Yoneda. □

El motivo por el cual se enuncio y demostró el lema de Yoneda encuentra justificación en el siguiente corolario.

COROLARIO 1. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría*[2] *y* X, Y *objetos en* $\mathbf{C}$. *Toda transformación natural* $\eta : Hom_{\mathbf{C}}(\_, X) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, Y)$ *es de la forma*

$$\eta_A(f) = \eta_X(1_X) \circ f$$

en la A*-ésima componente, donde* $f \in Hom_{\mathbf{C}}(A, X)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\eta : Hom_{\mathbf{C}}(\_, X) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, Y)$ una transformación natural, por la versión contravariante del lema de Yoneda se cumple lo siguiente:

$$Nat(Hom_{\mathbf{C}}(\_, X), Hom_{\mathbf{C}}(\_, Y)) \cong Hom_{\mathbf{C}}(X, Y).$$

Por lo tanto existe $g \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ tal que $\psi(g) = \eta$. Debido a la regla de correspondencia de ψ se cumple lo siguiente:

$$\psi(g)_A(f) = \eta_A(f) = Hom_{\mathbf{C}}(f, B)(g) = g \circ f. \tag{5}$$

En adición, se debe cumplir lo siguiente:

$$\varphi(\eta) = \eta_X(1_X) = g. \tag{6}$$

De (5) y (6) se concluye el resultado. □

Antes de continuar con la exposición de la teoría es necesario un lema técnico.

[2]Como $\mathbf{C}$ es localmente pequeña, los funtores $Hom_{\mathbf{C}}(\_, X), Hom_{\mathbf{C}}(\_, Y) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ están bien definidos.

LEMA 3. *(Técnico) Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *una familia de objetos en* $\mathbf{C}$ *tales que* $\prod_{i=1}^n A_i$ *existe, entonces existe una biyección natural*

$$\varphi : \prod_{i=1}^n Hom_{\mathbf{C}}(\_, A_i) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, \prod_{i=1}^n A_i)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $X \in \mathbf{C}$, se busca definir

$$\varphi_X : \prod_{i=1}^n Hom_{\mathbf{C}}(X, A_i) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, \prod_{i=1}^n A_i)$$

considere $(f_1, .., f_i, .., f_n) \in \prod_{i=1}^n Hom_{\mathbf{C}}(X, A_i)$, note que $f_i : X \to A_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo $f : X \to \prod_{i=1}^n A_i$ tal que $p_i \circ f = f_i$, donde $p_i : \prod_{i=1}^n A_i \to A_i$ denota a la i-ésima proyección canónica. De manera sugerente se define

$$\varphi_X(f_1, .., f_i, .., f_n) = f$$

Sea $X \in \mathbf{C}$, se busca definir

$$\psi_X : Hom_{\mathbf{C}}(X, \prod_{i=1}^n A_i) \to \prod_{i=1}^n Hom_{\mathbf{C}}(X, A_i)$$

considere $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \prod_{i=1}^n A_i)$, observe que:

$$X \xrightarrow{f} \prod_{i=1}^n A_i \xrightarrow{p_i} A_i$$

de manera sugerente se define

$$\psi_X(f) = (p_1(f), .., p_i(f), .., p_n(f))$$

Los morfismos antes descritos satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varphi_X \circ \psi_X)(f) =& \varphi_X(p_1(f), .., p_i(f), .., p_n(f)) \\ =& f\end{aligned}$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \prod_{i=1}^n A_i)$.

$$\begin{aligned}(\psi_X \circ \varphi_X)(f_1, .., f_i, .., f_n) =& \psi_X(f)\\ =&(p_1(f), .., p_i(f), .., p_n(f))\\ =&(f_1, .., f_i, .., f_n)\end{aligned}$$

para todo $(f_1, .., f_i, .., f_n) \in \prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(X, A_i)$.

Lo anterior prueba la biyección para cada $X \in \mathbf{C}$.

Resta probar que

$$\varphi : \prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(\_, A_i) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, \prod_{i=1}^{n} A_i)$$

es natural. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi_X \circ \prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(f, A_i))(g_1, .., g_i, .., g_n) =& \varphi_X\big(\prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(f, A_i)(g_1, .., g_i, .., g_n)\big)\\ =&\varphi_x(g_1 \circ f, .., g_i \circ f, .., g_n \circ f)\\ =&g \circ f\\ =&Hom_{\mathbf{C}}(f, \prod_{i=1}^{n} A_i)(g)\\ =&Hom_{\mathbf{C}}(f, \prod_{i=1}^{n} A_i)\big(\varphi_Y(g_1, .., g_i, .., g_n)\big)\\ =&(Hom_{\mathbf{C}}(f, \prod_{i=1}^{n} A_i) \circ \varphi_Y)(g_1, .., g_i, .., g_n)\end{aligned}$$

para todo $(g_1, .., g_i, .., g_n) \in \prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(Y, A_i)$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(Y, A_i) \arrow[r, "\prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(f, A_i)"] \arrow[d, "\varphi_Y"'] & \prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(X, A_i) \arrow[d, "\varphi_X"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(Y, \prod_{i=1}^{n} A_i) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f, \prod_{i=1}^{n} A_i)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, \prod_{i=1}^{n} A_i)
\end{tikzcd}$$

Esto concluye que

$$\varphi : \prod_{i=1}^{n} Hom_{\mathbf{C}}(\_, A_i) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, \prod_{i=1}^{n} A_i)$$

es una biyección natural. □

A continuación se expone una manera de identificar a un objeto de grupo, la forma en que esta enunciado el resultado parece no facilitar las cosas pero se dará una interpretación menos formal.

Proposición 12. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría*[3] *con productos finitos.* G *es un objeto de grupo en* $\mathbf{C}$ *si y sólo si existe un único funtor contravariante* $F : \mathbf{C}^{op} \to \boldsymbol{Grp}$ *que cumple hacer conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^{op} \arrow[rr, "Hom_{\mathbf{C}}(_,G)"] \arrow[dr, "F"'] & & \boldsymbol{Set} \\
& \boldsymbol{Grp} \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

U *denota al funtor que olvida.*

De manera un poco mas informal lo que el resultado anterior plantea es lo siguiente.

Si para cada $X \in \mathbf{C}$ el conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ tiene estructura de grupo entonces G es un objeto de grupo. Y por el contrario, si G es un objeto de grupo entonces $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un grupo.

Demostración. $\Rightarrow$) La prueba en esta dirección se puede consultar en [**12**].

Como comentario, es canónica la estructura de grupo que se puede dar al conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ a partir del objeto de grupo G.

[3]Una vez más la hipótesis general de este texto es necesaria.

$\Leftarrow$) Para demostrar esta implicación se busca extraer la estructura de objeto de grupo para G, del grupo $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$.

Observación. Para fines prácticos Z denota al objeto terminal en esta prueba.

El orden a seguir en esta demostración es el siguiente: Se subdivide la demostración en 4 partes, en cada una de estas se busca definir el pertinente morfismo que da estructura de objeto de grupo y se demuestra que conmutan los diagramas de interés.

1. **Morfismo multiplicación**.

Por hipótesis existe un único funtor contravariante $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Grp}$ que satisface

$$Hom_{\mathbf{C}}(X, G) = U(F(X))$$

para todo $X \in \mathbf{C}$. En consecuencia

$$F(X) = (Hom_{\mathbf{C}}(X, G), m_X)$$

donde

$$m_X : Hom_{\mathbf{C}}(X, G) \times Hom_{\mathbf{C}}(X, G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$$

denota a la operación binaria que da estructura de grupo al conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$.

Observación. La unicidad del funtor $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Grp}$ implica la unicidad de la operación binaria m_X.

Por el resultado técnico antes expuesto se identifica de manera natural a $Hom_{\mathbf{C}}(X, G) \times Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ con $Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G)$.

Afirmación $m : Hom_{\mathbf{C}}(\_, G \times G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$ es una transformación natural.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$.

Como $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Grp}$ es un funtor, entonces $F(f) = Hom_{\mathbf{C}}(f, G) : Hom_{\mathbf{C}}(Y, G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ es un homomorfismo de grupos, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(f)(m_Y(g, h)) &= Hom_{\mathbf{C}}(f, G)(m_Y(g, h)) \\ &= m_X(Hom_{\mathbf{C}}(f, G)(g), Hom_{\mathbf{C}}(f, G)(h)) \\ &= m_X(g \circ f, h \circ f) \end{aligned}$$

para todo $g, h \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, G)$. Es por ello que

$$\begin{aligned}(m_X \circ Hom_{\mathbf{C}}(f, G\times G))(g) =& m_X(g\circ f)\\ =& F(f)(m_Y(g))\\ =& (Hom_{\mathbf{C}}(f,G)\circ m_Y)(g)\end{aligned}$$

para todo $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, G\times G)$. En consecuencia el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{C}}(Y, G\times G) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f, G\times G)"] \arrow[d, "m_Y"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, G\times G) \arrow[d, "m_X"] \\ Hom_{\mathbf{C}}(Y, G) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f,G)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, G) \end{tikzcd}$$

De tal manera $m : Hom_{\mathbf{C}}(\_, G\times G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$ es una transformación natural.

Se debe tener en cuenta que

$$m_{G\times G} : Hom_{\mathbf{C}}(G\times G, G\times G) \to Hom_{\mathbf{C}}(G\times G, G)$$

entre los diversos aprendizajes que deja el lema de Yoneda, la idea de evaluar en la identidad es uno muy útil.

Para lo correspondiente al morfismo multimplicación, se define

$$\mu := m_{G\times G}(1_{G\times G}) : G\times G \to G.$$

Como $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un grupo, entonces por la caracterización de objetos de grupo en la categoría de conjuntos se tiene que $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un objeto de grupo en **Set**, realizando las correspondientes identificaciones naturales se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{C}}(X, G\times G\times G) \arrow[r, "1\times m_X"] \arrow[d, "m_X\times 1"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, G\times G) \arrow[d, "m_X"] \\ Hom_{\mathbf{C}}(X, G\times G) \arrow[r, "m_X"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, G) \end{tikzcd}$$

A continuación se demuestra que el diagrama correspondiente a la asociatividad del morfismo multiplicación conmuta.

1. Considere la siguiente transformación natural, la cual se puede tener en cuenta por la afirmación antes demostrada.

   $$m\circ(m\times 1) : Hom_{\mathbf{C}}(\_, G\times G\times G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$$

Por el corolario 1 del lema de Yoneda, se cumple que

$$(m \circ (m \times 1))_X(f) = (m \circ (m \times 1))_{G \times G \times G}(1_{G \times G \times G}) \circ f$$

para todo morfismo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G \times G)$.

De la misma manera, por el corolario 1 del lema de Yoneda, se cumple que

$$m_X(f) = m_{G \times G}(1_{G \times G}) \circ f$$

para todo morfismo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G)$.

Por una parte

$$\begin{aligned}
(m \circ (m \times 1))_{G \times G \times G}(1_{G \times G \times G}) =& m_{G \times G \times G}((m \times 1)_{G \times G \times G}(1_{G \times G \times G})) \\
=& m_{G \times G \times G}((m_{G \times G} \times 1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)})(1_{G \times G} \times 1_G)) \\
=& m_{G \times G \times G}(m_{G \times G}(1_{G \times G}) \times 1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}(1_G)) \\
=& m_{G \times G \times G}(\mu \times 1_G) \\
=& m_{G \times G}(1_{G \times G}) \circ (\mu \times 1_G) \\
=& \mu \circ (\mu \times 1_G)
\end{aligned}$$

2. Considere la siguiente transformación natural, la cual se puede tener en cuenta por la afirmación antes demostrada.

$$(m \circ (1 \times m)) : Hom_{\mathbf{C}}(\_, G \times G \times G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$$

de manera análoga se tiene que

$$(m \circ (1 \times m))_X(f) = (m \circ (1 \times m))_{G \times G \times G}(1_{G \times G \times G}) \circ f$$

para todo morfismo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G \times G)$.

Por una parte

$$\begin{aligned}
(m \circ (1 \times m))_{G \times G \times G}(1_{G \times G \times G}) =& m_{G \times G \times G}((1 \times m)_{G \times G \times G}(1_{G \times G \times G})) \\
=& m_{G \times G \times G}((1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)} \times m_{G \times G})(1_G \times 1_{G \times G})) \\
=& m_{G \times G \times G}(1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}(1_G) \times m_{G \times G}(1_{G \times G})) \\
=& m_{G \times G \times G}(1_G \times \mu) \\
=& m_{G \times G}(1_{G \times G}) \circ (1_G \times \mu) \\
=& \mu \circ (1_G \times \mu)
\end{aligned}$$

Como consecuencia de (1) y (2) se cumple lo siguiente

$$(\mu \circ (\mu \times 1_G)) \circ f = (\mu \circ (1_G \times \mu)) \circ f$$

si $X = G \times G \times G$ y $f = 1_{G\times G\times G}$, se deduce que

$$\mu \circ (\mu \times 1_G) = \mu \circ (1_G \times \mu)$$

en conclusión el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "1_G\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times 1_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

2. **Morfismo neutro**.

Por hipótesis $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un grupo, en consecuencia $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un objeto de grupo en **Set**, por tal motivo existe

$$p_X : Z \to Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times Z) \arrow[r, "1_{Hom_{\mathbf{C}}(X,G)}\times p_X"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G) \arrow[d, "m_X"] & Hom_{\mathbf{C}}(X, Z \times G) \arrow[l, "p_X\times 1_{Hom_{\mathbf{C}}(X,G)}"'] \arrow[dl, "\rho_2"] \\
& Hom_{\mathbf{C}}(X, G) &
\end{tikzcd}$$

Se identifica a Z con $Hom_{\mathbf{C}}(X, Z)$. Cabe aclarar que la definición del morfismo p_X es la canónica, es decir, la que corresponde a seleccionar el elemento neutro.

Afirmación $p : Hom_{\mathbf{C}}(\_, Z) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$ es una transformación natural.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$.

Por hipótesis $F(f) = Hom_{\mathbf{C}}(f, G) : Hom_{\mathbf{C}}(Y, G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un homomorfismo de grupos, por tal motivo

$$\begin{aligned}
F(f)(e_{Hom_{\mathbf{C}}(Y,G)}) &= Hom_{\mathbf{C}}(f, G)(e_{Hom_{\mathbf{C}}(Y,G)}) \\
&= e_{Hom_{\mathbf{C}}(X,G)}
\end{aligned}$$

lo cual implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}(Hom_{\mathbf{C}}(f,G)\circ p_Y)(!) =&Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(p_Y(!))\\ =&Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(e_{Hom_{\mathbf{C}}(Y,G)})\\ =&e_{Hom_{\mathbf{C}}(X,G)}\\ =&p_X(!\circ f)\\ =&p_X(Hom_{\mathbf{C}}(f,Z)(!))\\ =&(p_X\circ Hom_{\mathbf{C}}(f,Z))(!)\end{aligned}$$

donde ! denota al único morfismo de Y en Z.

Por consiguiente el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{C}}(Y,Z) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f,Z)"] \arrow[d, "p_Y"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,Z) \arrow[d, "p_X"] \\ Hom_{\mathbf{C}}(Y,G) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f,G)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \end{tikzcd}$$

Es así que $p : Hom_{\mathbf{C}}(\_,Z) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_,G)$ es una transformación natural.

Para lo correspondiente al morfismo neutro, se define

$$\lambda := p_Z(1_Z) : Z \to G$$

A continuación se demuestra que el diagrama correspondiente a la propiedad del morfismo neutro conmuta.

1. Considere la siguiente transformación natural, la cual se puede tener en cuenta por la afirmación antes demostrada.

$$(m\circ(1\times p)) : Hom_{\mathbf{C}}(\_,G\times Z) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_,G)$$

Por el corolario 1 del lema de Yoneda, se cumple que

$$(m\circ(1\times p))_X(f) = (m\circ(1\times p))_{G\times Z}(1_{G\times Z})\circ f$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, G\times Z)$.

Por una parte

$$\begin{aligned}(m \circ (1 \times p))_{G\times Z}(1_{G\times Z}) =& m_{G\times Z}((1 \times p)_{G\times Z}(1_{G\times Z}))\\ =& m_{G\times Z}((1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)} \times p_Z)(1_G \times 1_Z))\\ =& m_{G\times Z}(1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}(1_G) \times p_Z(1_Z))\\ =& m_{G\times Z}(1_G \times \lambda)\\ =& m_{G\times G}(1_{G\times G}) \circ (1_G \times \lambda)\\ =& \mu \circ (1_G \times \lambda)\end{aligned}$$

2. Considere la siguiente transformación natural, la cual se puede tener en cuenta por la afirmación antes demostrada.

$$(m \circ (p \times 1)) : Hom_{\mathbf{C}}(\_, Z \times G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G).$$

Por el corolario 1 del lema de Yoneda, se tiene

$$(m \circ (p \times 1))_X(f) = (m \circ (p \times 1))_{Z\times G}(1_{Z\times G}) \circ f$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Z \times G)$.

Por una parte

$$\begin{aligned}(m \circ (p \times 1))_{Z\times G}(1_{Z\times G}) =& m_{Z\times G}((p \times 1)_{Z\times G}(1_{Z\times G}))\\ =& m_{Z\times G}(p_Z \times 1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}(1_Z \times 1_G))\\ =& m_{Z\times G}(p_Z(1_Z) \times 1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}(1_G))\\ =& m_{Z\times G}(\lambda \times 1_G)\\ =& m_{G\times G}(1_{G\times G}) \circ (\lambda \times 1_G)\\ =& \mu \circ (\lambda \times 1_G)\end{aligned}$$

Como consecuencia de (1) se cumple lo siguiente

$$(\mu \circ (1_G \times \lambda)) \circ f = p_1 \circ f$$

si $X = G \times Z$ y $f = 1_{G\times Z}$, se deduce que

$$\mu \circ (1_G \times \lambda) = p_1$$

Como consecuencia de (2) se cumple lo siguiente

$$(\mu \circ (\lambda \times 1_G)) \circ f = p_2 \circ f$$

si $X = Z \times G$ y $f = 1_{Z\times G}$, se deduce que

$$\mu \circ (\lambda \times 1_G) = p_2$$

en conclusión de los argumentos anteriores se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G \times Z \arrow[r, "1_G \times \lambda"] \arrow[dr, "p_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & Z \times G \arrow[l, "\lambda \times 1_G"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

3. **Morfismo inverso**.

Un argumento similar a los anteriores se sigue dando, por hipótesis $Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$ es un grupo, por tal motivo $Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$ es un objeto de grupo en **Set**, lo cual implica que existe

$$q_X : Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \arrow[r, "\langle 1_{Hom}, q_X \rangle"] \arrow[d, "!"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,G \times G) \arrow[d, "m_X"] & Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \arrow[l, "\langle q_X, 1_{Hom} \rangle"'] \arrow[d, "!"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(X,Z) \arrow[r, "p_X"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,G) & Hom_{\mathbf{C}}(X,Z) \arrow[l, "p_X"]
\end{tikzcd}$$

Cabe aclarar que la definición del morfismo q_X es la canónica, es decir, la que corresponde a asignar inversos.

Afirmación $q : Hom_{\mathbf{C}}(\_, G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$ es una transformación natural.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$.

Por hipótesis $F(f) : Hom_{\mathbf{C}}(f,G) : Hom_{\mathbf{C}}(Y,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$ es un homomorfismo de grupos, por lo que

$$\begin{aligned}
F(f)(g^{-1}) =& Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(g^{-1}) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(g)^{-1} \\
=& (g \circ f)^{-1}
\end{aligned}$$

para todo $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y,G)$. Se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(Hom_{\mathbf{C}}(f,G)\circ q_Y)(g) =& Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(q_Y(g))\\
=& Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(g^{-1})\\
=& (g\circ f)^{-1}\\
=& q_X(Hom_{\mathbf{C}}(f,G)(g))\\
=& (q_X\circ Hom_{\mathbf{C}}(f,G))(g)
\end{aligned}
$$

para todo $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y,G)$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(Y,G) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f,G)"] \arrow[d, "q_Y"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \arrow[d, "q_X"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(Y,G) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(f,G)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X,G)
\end{tikzcd}
$$

Es así que $q : Hom_{\mathbf{C}}(\_,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_,G)$ es una transformación natural.

Para lo correspondiente al morfismo inverso, se define

$$\gamma := q_G(1_G) : G \to G$$

1. Considere la siguiente transformación natural, la cual se puede tener en cuenta por la afirmación antes demostrada.

$$(m\circ\langle 1,q\rangle) : Hom_{\mathbf{C}}(\_,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_,G)$$

   por el corolario 1 del lema de Yoneda, se tiene

$$(m\circ\langle 1,q\rangle)_X(f) = (m\circ\langle 1,q\rangle)_G(1_G)\circ f$$

   para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$. Por una parte

$$
\begin{aligned}
(m\circ\langle 1,q\rangle)_G(1_G) =& m_G(\langle 1,q\rangle_G(1_G))\\
=& m_G(\langle 1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}, q_G\rangle(1_G))\\
=& m_G(\langle 1_G, q_G(1_G)\rangle)\\
=& m_{G\times G}(1_{G\times G})\circ\langle 1_G,\gamma\rangle\\
=& \mu\circ\langle 1_G,\gamma\rangle
\end{aligned}
$$

2. Considere la siguiente transformación natural, la cual se puede tener en cuenta por la afirmación antes demostrada.

$$(m\circ\langle q,1\rangle) : Hom_{\mathbf{C}}(\_,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_,G)$$

Por el corolario 1 del lema de Yoneda, se tiene

$$(m \circ \langle q, 1\rangle)_X(f) = (m \circ \langle q, 1\rangle)_G(1_G) \circ f$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$. Por una parte

$$\begin{aligned}
(m \circ \langle q, 1\rangle)_G(1_G) =& m_G(\langle q, 1\rangle_G(1_G)) \\
=& m_G(\langle q_G, 1_{Hom_{\mathbf{C}}(G,G)}\rangle(1_G)) \\
=& m_G(\langle q_G(1_G), 1_G\rangle) \\
=& m_{G\times G}(1_{G\times G}) \circ \langle \gamma, 1_G\rangle \\
=& \mu \circ \langle \gamma, 1_G\rangle
\end{aligned}$$

Antes de terminar el argumento se precisa de una observación.

Observación. Considere el único morfismo $! : G \to Z$, como $p : Hom_{\mathbf{C}}(\_, Z) \to Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$ es una transformación natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(Z, Z) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(!,Z)"] \arrow[d, "p_Z"'] & Hom_{\mathbf{C}}(G, Z) \arrow[d, "p_G"] \\
Hom_{\mathbf{C}}(Z, G) \arrow[r, "Hom_{\mathbf{C}}(!,G)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(G, G)
\end{tikzcd}$$

Evaluando en 1_Z se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
p_G(!) =& p_G(1_Z \circ !) \\
=& p_G(Hom_{\mathbf{C}}(!, Z)(1_Z)) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(!, G)(p_Z(1_Z)) \\
=& p_Z(1_Z) \circ ! \\
=& \lambda \circ !
\end{aligned}$$

Como consecuencia de (1) y de la observación antes realizada, se tiene que

$$(\mu \circ \langle 1_G, \gamma\rangle) \circ f = p_X(!(f))$$

si $X = G$ y $f = 1_G$, se deduce que

$$\mu \circ \langle 1_G, \gamma\rangle = p_G(!) = \lambda \circ !.$$

Como consecuencia de (2) y de la observación antes realizada, se tiene que

$$(\mu \circ \langle \gamma, 1_G\rangle) \circ f = p_X(!(f))$$

si $X = G$ y $f = 1_G$, se deduce que

$$\mu \circ \langle 1_G, \gamma \rangle = \lambda \circ !.$$

Es así que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\langle 1_G,\gamma \rangle"] \arrow[d, "!"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "\langle \gamma,1_G \rangle"'] \arrow[d, "!"] \\
Z \arrow[r, "\lambda"'] & G & Z \arrow[l, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

En conclusión G es un objeto de grupo en $\mathbf{C}$. $\square$

2. Objetos de grupo abeliano

Así como un grupo abeliano es un grupo que satisface un axioma extra, un objeto de grupo abeliano resulta ser un objeto de grupo que satisface una condición extra, tal condición busca explicar el nombre de esta sección.

DEFINICIÓN 5. *Sean $\mathbf{C}$ una categoría con productos finitos y G un objeto de grupo en $\mathbf{C}$. Se dice que G es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{C}$, si el morfismo multiplicación $\mu : G \times G \to G$ cumple con hacer conmutar el siguiente diagrama:*
A.4

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\tau_{G,G}"] \arrow[dr, "\mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

donde $\tau_{G,G} : G \times G \to G \times G$ es el único morfismo en $\mathbf{C}$, que satisface

$$\begin{tikzcd}
G & G \times G \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & G \\
& G \times G \arrow[ul, "p_2"] \arrow[u, dashed, "\tau_{G,G}"] \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

hacer al diagrama anterior conmutativo.

Del mismo modo que los objetos de grupo en **Set** coinciden con los grupos, se cumple lo análogo para grupos abelianos.

PROPOSICIÓN 13. *Sea G un objeto de grupo abeliano en **Set**, entonces G es un grupo abeliano.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es un objeto de grupo abeliano en **Set**, en particular G es un objeto de grupo en **Set**, por la caracterización de objetos de grupo en la categoría de conjuntos, se deduce que G es un grupo con la operación binaria inducida por el morfismo multiplicación $\mu : G \times G \to G$. La conmutatividad del diagrama (A.4) implica lo siguiente:

$$\mu(g_1, g_2) = \mu(\tau_{G,G}(g_1, g_2)) = \mu(g_2, g_1)$$

para todo $g_1, g_2 \in G$, por consiguiente G es un grupo abeliano. $\square$

El reciproco de la proposición anterior también se cumple.

Proposición 14. *Sea G un grupo abeliano, entonces G es un objeto de grupo abeliano en **Set**.*

Demostración. Como G es un grupo abeliano en particular G es un grupo, por la proposición 9 se deduce que G es un objeto de grupo en **Set**, resta verificar que el diagrama (A.4) conmuta.

Se puede notar que

$$\begin{aligned} \mu(g_1, g_2) =& g_1 + g_2 \\ =& g_2 + g_1 \\ =& \mu(g_2, g_1) \\ =& \mu(\tau_{G,G}(g_1, g_2)) \end{aligned}$$

para todo $g_1, g_2 \in G$, por tal motivo el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\tau_{G,G}"] \arrow[dr, "\mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Es por tanto que G es un objeto de grupo abeliano en **Set**. $\square$

El siguiente resultado es de esperar, el cual es un tanto mas general que el expuesto en la sección anterior.

Proposición 15. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con productos finitos. G es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{C}$ si y sólo si existe un único funtor contravariante $F : \mathbf{C}^{op} \to$ **Ab** que cumple hacer conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^{op} \arrow[rr, "Hom_{\mathbf{C}}(\_,G)"] \arrow[dr, "F"'] & & \boldsymbol{Set} \\ & \boldsymbol{Ab} \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

U denota al funtor que olvida.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Como G es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{C}$, en particular G es un objeto de grupo en $\mathbf{C}$, en consecuencia existe un único funtor contravariante $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Grp}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^{op} \arrow[rr, "Hom_{\mathbf{C}}(_,G)"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathbf{Set} \\
& \mathbf{Grp} \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

Es así que $F(X) = (Hom_{\mathbf{C}}(X,G), m_X)$ es un grupo, donde

$$m_X : Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \times Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$$

es la opreacion binaria, la cual se define como

$$m_X = Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu) \circ \varphi_X$$

donde

$$\varphi_X : Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \times Hom_{\mathbf{C}}(X,G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X,G \times G)$$

denota al isomorfismo natural que se puede considerar por el lema técnico(3) expuesto en la sección anterior.

Resta probar tal operación binaria es conmutativa, es decir, se debe demostrar que $m_X(f,g) = m_X(g,f)$ para cualesquiera $f, g \in Hom_{\mathbf{C}}(X,G)$.

Por una parte

$$\begin{aligned}
m_X(f,g) =& (Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu) \circ \varphi_X)(f,g) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu)(\varphi_X(f,g)) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu)(\alpha) \\
=& \mu \circ \alpha
\end{aligned}$$

donde $\alpha : X \to G \times G$ es el único morfismo que satisface $p_1 \circ \alpha = f$ y $p_2 \circ \alpha = g$.

Por otra parte, por hipótesis se tiene que $\mu = \mu \circ \tau_{G,G}$, es así que

$$\begin{aligned}
m_X(g,f) =& (Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu) \circ \varphi_X)(g,f) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu)(\varphi_X(g,f)) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu)(\beta) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(X,\mu \circ \tau_{G,G})(\beta) \\
=& (\mu \circ \tau_{G,G}) \circ \beta
\end{aligned}$$

donde $\beta : X \to G \times G$ es el único morfismo que satisface $p_1 \circ \beta = g$ y $p_2 \circ \beta = f$.

Con el contexto antes planteado, si se demuestra que $\alpha = \tau_{G,G} \circ \beta$ se concluye la primer parte del resultado.

Observación El morfismo $\tau_{G,G}$ satisface que, $p_1 \circ \tau_{G,G} = p_2$ y $p_2 \circ \tau_{G,G} = p_1$.

La observación antes realizada motiva lo siguiente:

1. Como $p_1 \circ \beta = g$ y por la observación anterior se deduce que $p_2 \circ (\tau_{G,G} \circ \beta) = g = p_2 \circ \alpha$.
2. Como $p_2 \circ \beta = f$ y por la observación anterior se deduce que $p_1 \circ (\tau_{G,G} \circ \beta) = f = p_1 \circ \alpha$.

Como consecuencia de la propiedad universal del producto, se deduce que

$$\tau_{G,G} \circ \beta = \alpha.$$

El siguiente diagrama ilustra la situación:

$$\begin{tikzcd}
G & G \times G \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & G \\
 & G \times G \arrow[u, "\tau_{G,G}"] \arrow[ul, "p_2"] \arrow[ur, "p_1"'] & \\
 & X \arrow[u, "\beta"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$) Sea $X \in \mathbf{C}$, por hipótesis $F(X) = Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un grupo abeliano, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un grupo, luego como consecuencia de la proposición 12 se deduce que G es un objeto de grupo en $\mathbf{C}$. Resta probar que G es un objeto de grupo abeliano.

Como $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un grupo abeliano se deduce de la proposición 14 que $Hom_{\mathbf{C}}(X, G)$ es un objeto de grupo abeliano en **Set**. Realizando las correspondientes identificaciones naturales se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G) \arrow[r, "\tau_{Hom(X,G)}"] \arrow[dr, "m_X"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G) \arrow[d, "m_X"] \\
 & Hom_{\mathbf{C}}(X, G)
\end{tikzcd}$$

Por el corolario 1 del lema de Yoneda, se cumple lo siguiente:

$$m_X(f) = m_{G\times G}(1_{G\times G}) \circ f$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, G \times G)$.

Se recuerda que

$$\mu =: m_{G\times G}(1_{G\times G}) : G \times G \to G$$

por lo expuesto en la prueba de la proposición 12.

Si $X = G \times G$ y evaluando en $1_{G\times G}$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(m_{G\times G} \circ \tau_{Hom(G\times G, G\times G)})(1_{G\times G}) =& m_{G\times G}(\tau_{Hom(G\times G, G\times G)}(1_{G\times G})) \\
=& m_{G\times G}(\tau_{G,G} \circ 1_{G\times G}) \\
=& m_{G\times G}(\tau_{G,G}) \\
=& m_{G\times G}(1_{G\times G}) \circ \tau_{G,G} \\
=& \mu \circ \tau_{G,G}.
\end{aligned}$$

Se sabe además que

$$(m_{G\times G} \circ \tau_{Hom(G\times G, G\times G)})(1_{G\times G}) = m_{G\times G}(1_{G\times G})$$

por consiguiente

$$\mu \circ \tau_{G,G} = \mu$$

en consecuencia el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\tau_{G,G}"] \arrow[dr, "\mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

De lo anterior se concluye que G es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{C}$. □

Más ejemplos de objeto de grupo abeliano surgirán en capítulos posteriores.

Capítulo 3

Álgebra Homológica

Buscando que este trabajo sea lo mas autocontenido posible, el presente capítulo tiene la intención de exponer todos los preliminares necesarios de la tan popular rama del álgebra conocida como álgebra homológica, pues en lo que resta de este trabajo los conceptos de tal rama del álgebra figuran en todo momento.

En lo que resta del capítulo R denota un anillo conmutativo con 1.

1. Complejos de cadenas

Definición 6. *Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de $R-$módulos y $\{d_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de morfismos de $R-$módulos. Se dice que $\{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un complejo de cadenas si*

$$d_n \circ d_{n+1} = 0$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Se denota por $C_\bullet$ al complejo de cadenas.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Si $C_n = 0$ para toda $n < 0$, se dice que $C_\bullet$ es un complejo de cadenas positivo.

Definición 7. *Sea $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo de cadenas. Se define el $n-$ésimo grupo de homología de $C_\bullet$ como*

$$H_n(C_\bullet) := Nuc(d_n)/Im(d_{n+1})$$

Definición 8. *Sea $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de $R-$módulos y $\{d^n : C^n \to C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de morfismos de $R-$módulos. Se dice que $\{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas si*

$$d^n \circ d^{n-1} = 0$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Se denota por $C^\bullet$ al complejo de cocadenas.

$$\cdots \longleftarrow C^{n+1} \xleftarrow{d^n} C^n \xleftarrow{d^{n-1}} C^{n-1} \longleftarrow \cdots$$

Si $C^n = 0$ para toda $n < 0$, se dice que $C^\bullet$ es un complejo de cocadenas positivo.

Definición 9. *Sea $C^\bullet = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo de cocadenas. Se define el $n-$ésimo grupo de cohomología de $C^\bullet$ como*

$$H^n(C^\bullet) := Nuc(d^n)/Im(d^{n-1})$$

De particular interés en este texto son los complejos de cocadenas, es por tanto, que las principales definiciones se estudiaran sobre tal contexto.

DEFINICIÓN 10. *Sean* $C^\bullet = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $D^\bullet = \{D^n, f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *complejos de cocadenas, considere además* $\{\varphi^n : C^n \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una familia de morfismos de* $R-$*módulos.*

Se dice que $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es un morfismo de complejos de cocadenas si*

$$f^n \circ \varphi^n = \varphi^{n+1} \circ d^n$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. *Se denota por* $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ *al morfismo de complejos de cocadenas.*

PROPOSICIÓN 16. *Sean* $C^\bullet = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $D^\bullet = \{D^n, f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $E^\bullet = \{E^n, g^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *complejos de cocadenas y considere además* $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$, $\psi : D^\bullet \to E^\bullet$ *morfismos de complejos de cocadenas.*

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, *se define* $(\psi \circ \varphi)^n := \psi^n \circ \varphi^n$, *entonces* $\psi \circ \varphi : C^\bullet \to E^\bullet$ *es un morfismo de complejos de cocadenas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} g^n \circ (\psi \circ \varphi)^n =& g^n \circ (\psi^n \circ \varphi^n) \\ =&(g^n \circ \psi^n) \circ \varphi^n \\ =&(\psi^{n+1} \circ f^n) \circ \varphi^n \\ =&\psi^{n+1} \circ (f^n \circ \varphi^n) \\ =&\psi^{n+1} \circ (\varphi^{n+1} \circ d^n) \\ =&(\psi^{n+1} \circ \varphi^{n+1}) \circ d^n \\ =&(\psi \circ \varphi)^{n+1} \circ d^n \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi \circ \varphi : C^\bullet \to E^\bullet$ es un morfismo de complejos de cocadena. □

PROPOSICIÓN 17. *La colección de complejos de cocadenas y morfismos de complejos de cocadenas forman una categoría, la cual se denota por* $\boldsymbol{cC_{R-Mod}}$.

DEMOSTRACIÓN. La proposición anterior sugiere un candidato a la composición en la categoría, además se cumple lo siguiente:

$$\phi^n \circ (\psi^n \circ \varphi^n) = (\phi^n \circ \psi^n) \circ \varphi^n$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$ y para cualesquiera morfismos $\phi : E^\bullet \to F^\bullet$, $\psi : D^\bullet \to E^\bullet$, $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ de complejos de cocadenas, en consecuencia

$$\phi \circ (\psi \circ \varphi) = (\phi \circ \psi) \circ \varphi.$$

Lo anterior prueba la asociatividad de la composición.

Sea $C^\bullet$ un complejo de cocadenas, considere además la siguiente familia de morfismos de $R-$módulos $\{1_{C^n} : C^n \to C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Por una parte

$$d^n \circ 1^n = d^n = 1^{n+1} \circ d^n$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$, por lo que $1_{C^\bullet} \in Hom(C^\bullet, C^\bullet)$. Por otra parte

$$1_{D^n} \circ \varphi^n = \varphi^n = \varphi^n \circ 1_{C^n}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, por tal motivo

$$1_{D^\bullet} \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ 1_{C^\bullet}$$

para cualquier morfismo $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ de complejos de cocadenas.

En conclusión $\mathbf{cC_{R-Mod}}$ es una categoría.

□

Cuando se trabaje con complejos de cocadenas positivos se denota a la categoría por $\mathbf{cC^+_{R-Mod}}$.

Proposición 18. *Sea $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ un morfismo de complejos de cocadenas. Se define*

$$H^n(\varphi) : H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$$

como

$$H^n(\varphi)([z]) = [\varphi^n(z)].$$

Entonces $H^n(\varphi)$ es un homomorfismo de grupos para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Se comienza probando que la asignación está bien definida en el dominio y en el codominio, pues al estar trabajando en un cociente se debe tener cuidado con los representantes.

Sea $n \in \mathbb{Z}$.

Sean $[w], [z] \in H^n(C^\bullet)$ tales que $[w] = [z]$, entonces $w - z \in Im(d^{n-1})$ por lo que existe $y \in C^{n-1}$ tal que $d^{n-1}(y) = w - z$. Además se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi^n(w) - \varphi^n(z) =& \varphi^n(w - z)\\ =& \varphi^n(d^{n-1}(y))\\ =& (\varphi^n \circ d^{n-1})(y)\\ =& (f^{n-1} \circ \varphi^{n-1})(y)\\ =& f^{n-1}(\varphi^{n-1}(y))\end{aligned}$$

entonces $\varphi^n(w) - \varphi^n(z) \in Im(f^{n-1})$ por lo que $[\varphi^n(w)] = [\varphi^n(z)]$, lo que prueba que $H^n(\varphi)$ esta bien definida en el dominio.

En lo que respecta al codominio se tiene lo siguiente.

Sea $[z] \in H^n(C^\bullet)$, entonces $z \in Nuc(d^n)$ por lo que $d^n(z) = 0$. Dado que $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ es un morfismo de complejos de cocadenas se cumple que

$$f^n \circ \varphi^n = \varphi^{n+1} \circ d^n$$

de modo que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(f^n \circ \varphi^n)(z) =&(\varphi^{n+1} \circ d^n)(z)\\ =&\varphi^{n+1}(d^n(z))\\ =&\varphi^{n+1}(0)\\ =&0.\end{aligned}$$

En consecuencia $\varphi^n(z) \in Nuc(f^n)$ y por tanto $[\varphi^n(z)] \in H^n(D^\bullet)$, lo que prueba que $H^n(\varphi)$ esta bien definida en el codominio.

Por otra parte

$$\begin{aligned}H^n(\varphi)([w]+[z]) =&H^n(\varphi)([w+z])\\ =&[\varphi^n(w+z)]\\ =&[\varphi^n(w)+\varphi^n(z)]\\ =&[\varphi^n(w)]+[\varphi^n(z)]\\ =&H^n(\varphi)([w])+H^n(\varphi)([z])\end{aligned}$$

para todo $[w], [z] \in H^n(C^\bullet)$.

Esto concluye que $H^n(\varphi) : H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ es un homomorfismo de grupos para cada $n \in \mathbb{Z}$. □

La proposición anterior motiva el siguiente resultado.

Proposición 19. *$H^n : \mathbf{cC}_{\boldsymbol{R-Mod}} \to \boldsymbol{Ab}$ es un funtor para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. La asignación en objetos es la propuesta en 9 y la asignación en morfismos es la propuesta en 18. Resta verificar las identidades que respectan a la composición de morfismos de complejos de cocadenas y el morfismo identidad.

Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet, \psi : D^\bullet \to E^\bullet$ morfismos en $\mathbf{cC_{R-Mod}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
H^n(\psi\circ\varphi)([z]) =&[(\psi\circ\varphi)^n(z)]\\
=&[(\psi^n\circ\varphi^n)(z)]\\
=&[\psi^n(\varphi^n(z))]\\
=&H^n(\psi)([\varphi(z)])\\
=&(H^n(\psi)\circ H^n(\varphi))([z])
\end{aligned}
$$

para todo $[z]\in H^n(C^\bullet)$. Es así que $H^n(\psi\circ\varphi)=H^n(\psi)\circ H^n(\varphi)$.

Sea $C^\bullet\in \mathbf{cC_{R-Mod}}$ y considere $1_{C^\bullet}:C^\bullet\to C^\bullet$, entonces

$$
\begin{aligned}
H^n(1_{C^\bullet})([z]) =&[1_{C^n}(z)]\\
=&[z]\\
=&1_{H^n(C^\bullet)}([z])
\end{aligned}
$$

para todo $[z]\in H^n(C^\bullet)$. Es así que $H^n(1_{C^\bullet})=1_{H^n(C^\bullet)}$.

Esto concluye que $H^n:\mathbf{cC_{R-Mod}}\to\mathbf{Ab}$ es un funtor para toda $n\in\mathbb{Z}$. □

Definición 11. *Sean $\varphi: C_\bullet\to D_\bullet$, $\psi: D_\bullet\to E_\bullet$ morfismos de complejos de cadenas. Se dice que φ y ψ son homotópicos, lo cual se denota por $\varphi\simeq\psi$, si existe una familia $\{\sigma_n: C_n\to D_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismos de $R-$módulos tales que*

$$\varphi_n-\psi_n=d'_{n+1}\circ\sigma_n+\sigma_{n-1}\circ d_n$$

para toda $n\in\mathbb{Z}$. El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$
\begin{tikzcd}
C_\bullet : \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] \arrow[dl, "\sigma_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] \arrow[dl, "\sigma_{n-1}"] & \cdots \\
D_\bullet : \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "d'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Proposición 20. *Sean $\varphi,\psi: C^\bullet\to D^\bullet$ morfismos de complejos de cocadenas tales que $\varphi\simeq\psi$, entonces $H^n(\varphi)=H^n(\psi)$ para toda $n\in\mathbb{Z}$.*

Demostración. Note que se está trabajando con complejos de cocadenas, por lo que la homotopía cambia a $\{\sigma^n: C^n\to D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y se satisface que

$$\varphi^n-\psi^n=f^{n-1}\circ\sigma^n+\sigma^{n+1}\circ d^n$$

para toda $n\in\mathbb{Z}$.

Sea $[z]\in H^n(C^\bullet)$, entonces $z\in Nuc(d^n)$ por lo que $d^n(z)=0$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varphi^n - \psi^n)(z) =& \varphi^n(z) - \psi^n(z)\\ =&(f^{n-1} \circ \sigma^n)(z) + (\sigma^{n+1} \circ d^n)(z)\\ =&f^{n-1}(\sigma^n(z)) + \sigma^{n+1}(0)\\ =&f^{n-1}(\sigma^n(z))\end{aligned}$$

es decir $\varphi^n(z) - \psi^n(z) \in Im(f^{n-1})$, por lo que

$$[\varphi^n(z)] = [\psi^n(z)]$$

entonces

$$H^n(\varphi)([z]) = H^n(\psi)([z])$$

para toda $[z] \in H^n(C^\bullet)$. □

2. Resoluciones proyectivas

El siguiente concepto a desarrollar es el de resolución proyectiva, el cual es uno de los mas importantes en el álgebra homológica. Se demuestra además que en $\mathbf{R-Mod}$ cada objeto tiene una resolución proyectiva.

DEFINICIÓN 12. *Sea $P \in \boldsymbol{R-Mod}$. Se dice que P es un $R-$módulo proyectivo si para todo morfismo $f : P \to N$ en $\boldsymbol{R-Mod}$ y para todo epimorfismo $g : M \to N$ en $\boldsymbol{R-Mod}$ existe un morfismo $h : P \to M$ en $\boldsymbol{R-Mod}$ tal que*

$$g \circ h = f$$

El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 21. *Sea $M \in \boldsymbol{R-Mod}$ un módulo libre, entonces M es un $R-$módulo proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X \subseteq M$ una base de M y considere la situación de proyectividad:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\iota"] & \\ & M \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $g : A \to B$ es un epimorfismo, existe $a_m \in A$ tal que $g(a_m) = f(m)$. De forma sugerente se define $\lambda : X \to A$ como $\lambda(m) := a_m$ para todo $m \in X$. Por la propiedad universal de las bases, existe un único morfismo de $R-$módulos $h : M \to A$ tal que $\lambda = h \circ \iota$. El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddl, "\lambda"'] & \\
& M \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Resta verificar que $g \circ h = f$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(g \circ h)(m_1) =& (g \circ h)(\sum_{m \in X} \alpha_m \cdot m) \\
=& g(\sum_{m \in X} \alpha_m \cdot \lambda(m)) \\
=& g(\sum_{m \in X} \alpha_m \cdot a_m) \\
=& \sum_{m \in X} \alpha_m \cdot f(m) \\
=& f(\sum_{m \in X} \alpha_m \cdot m) \\
=& f(m_1)
\end{aligned}$$

para todo $m_1 \in M$. Cabe mencionar que la suma en la que se expresa a m_1 como elementos de la base tiene una cantidad finita de sumandos.

Es por tanto que $g \circ h = f$, lo que prueba que M es un $R-$módulo proyectivo. $\square$

PROPOSICIÓN 22. *Sea $M \in \boldsymbol{R-Mod}$, entonces existe $F \in \boldsymbol{R-Mod}$ un módulo libre y $\varepsilon : F \to M$ un epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Considere el siguiente $R-$módulo,

$$R^{(M)} = \{f \colon M \longrightarrow R \mid f(m) \neq 0 \text{ para una cantidad finita de elementos de } M\},$$

el cual es libre con base M, la cual se identifica con el conjunto $\{\delta_m : m \in M\}$ donde $\delta_m : M \to R$ es el morfismo que se define a continuación:

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Es así que todo elemento $f \in R^{(M)}$ se escribe como $f = \displaystyle\sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_m$.

Se define $\varepsilon : R^{(M)} \to M$ como,

$$\varepsilon(f) = \varepsilon(\sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_m) = \sum_{m \in M} f(m) \cdot m.$$

Resulta fácil ver que este es un epimorfismo, pues dado $m \in M$ se tiene que $\varepsilon(\delta_m) = m$ lo cual concluye la prueba.

Es de notar que en el argumento anterior bastó con demostrar que el morfismo es suprayectivo, pues en $\mathbf{R-Mod}$ los epimorfismos y los morfismos suprayectivos coinciden.

$\square$

Definición 13. *Sea $M \in \boldsymbol{R-Mod}$. Una resolución proyectiva de M, la cual se denota por $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon} M$, es una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

donde P_n es un $R-$módulo proyectivo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se denota por $\mathcal{P}_\bullet$ al complejo de cadena positivo que se obtiene al suprimir el termino M, a $\mathcal{P}_\bullet$ se le conoce como la resolución proyectiva reducida de M.

Proposición 23. *Sea $M \in \boldsymbol{R-Mod}$, entonces existe $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon} M$ una resolución proyectiva de M.*

Demostración. Se busca construir la resolución proyectiva por recursión.

Por la proposición 22 se sabe que existe un $R-$módulo libre P_0 (por ende proyectivo) y un epimorfismo $\varepsilon_0 : P_0 \to M$, es así que la siguiente sucesión es exacta:

$$P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} M \longrightarrow 0$$

Se denota por $Q_0 = Nuc(\varepsilon_0) \subseteq P_0$, por la proposición 22 se sabe que existe un $R-$módulo libre (por ende proyectivo) P_1 y un epimorfismo $\varepsilon_1 : P_1 \to Q_0$ y se denota por $d_1 = \iota_0 \circ \varepsilon_1$ donde $\iota_0 = Q_0 \to P_0$ denota a la inclusión canónica de Q_0 en P_0. Observe que

$$\begin{aligned} Im(d_1) =& Im(\iota_0 \circ \varepsilon_1) \\ =& \iota_0(Im(\varepsilon_1)) \\ =& \iota_0(Q_0) \\ =& Nuc(\varepsilon_0) \end{aligned}$$

por lo que la siguiente sucesión es exacta:

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} M$$

Siguiendo este argumento de manera recursiva, para $Q_n = Nuc(d_n)$ existe un $R-$módulo libre (por ende proyectivo) P_{n+1} y un epimorfismo $\varepsilon_{n+1} : P_{n+1} \to Q_n$. Se denota por $d_{n+1} = \iota_n \circ \varepsilon_{n+1}$ donde $\iota_n : Q_n \to P_n$ denota a la inclusión canónica de Q_n en P_n. Observe que

$$\begin{aligned} Im(d_{n+1}) =& Im(\iota_n \circ \varepsilon_{n+1}) \\ =& \iota_n(Im(\varepsilon_{n+1})) \\ =& Q_n \\ =& Nuc(d_n) \end{aligned}$$

lo que prueba que la sucesión es exacta en P_n. Siguiendo este proceso y dado que P_n es un R-módulo proyectivo para cada $n \in \mathbb{N}$. Se concluye que $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon} M$ una resolución proyectiva de M. $\square$

El siguiente diagrama ilustra la situación antes descrita.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& Q_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr, "\iota_{n+1}"] & & & & Q_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr, "\iota_{n-1}"] & & & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[rr] & & P_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{n+1}"] & & P_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[ur, "\varepsilon_n"] & & P_{n-1} \arrow[rr, "d_{n-1}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{n-1}"] & & \cdots \\
& & & Q_n \arrow[ur, "\iota_n"] \arrow[dr] & & & & Q_{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

Proposición 24. *Sean M, N un par de $R-$módulos y $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$, $\mathcal{Q} \xrightarrow{\varepsilon_N} N$ resoluciones proyectivas de M y N respectivamente, considere además $f : M \to N$ un* *morfismo de $R-$módulos, entonces existe $\overline{f} = \{f_n : P_n \to Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un morfismo de complejos de cadenas tal que*

$$\varepsilon_N \circ f_0 = f \circ \varepsilon_M.$$

Más aún, cualesquiera dos morfismos de complejos de cocadenas que levanten a f son homotópicos.

Demostración. Se busca construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} : \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_M"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\mathcal{Q} : \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d'_2"] & Q_1 \arrow[r, "d'_1"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

la demostración será por inducción sobre n.

Caso base $n = 0$. Como $\varepsilon_N : Q_0 \to N$ es un epimorfismo y $f \circ \varepsilon_M : P_0 \to N$, entonces existe $f_0 : P_0 \to Q_0$ tal que

$$\varepsilon_N \circ f_0 = f \circ \varepsilon_M$$

pues por hipótesis P_0 es un R-módulo proyectivo. El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[d, "\varepsilon_M"] \arrow[ddl, dashed, "f_0"'] & \\
 & M \arrow[d, "f"] & \\
Q_0 \arrow[r, "\varepsilon_N"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esto prueba el caso base.

Hipótesis de inducción. Suponga cierto el resultado para $k \leq n$, es decir existe $f_k : P_k \to Q_k$ tal que $d'_k \circ f_k = f_{k-1} \circ d_k$.

Paso inductivo. Se busca construir $f_{k+1} : P_{k+1} \to Q_{k+1}$ tal que

$$f_k \circ d_{k+1} = d'_{k+1} \circ f_{k+1}.$$

La estrategia a seguir es probar que $Im(f_k \circ d_{k+1}) \subseteq Im(d'_{k+1})$ para poder correstringir el morfismo de $R-$módulos $d'_{k+1} : Q_{k+1} \to Q_k$ y de esta manera conseguir un epimorfismo, para después aplicar la propiedad de los $R-$módulos proyectivos.

$$
\begin{aligned}
d'_k \circ (f_k \circ d_{k+1}) =& (d'_k \circ f_k) \circ d_{k+1} \\
=& (f_{k-1} \circ d_k) \circ d_{k+1} \\
=& f_{k-1} \circ (d_k \circ d_{k+1}) \\
=& 0
\end{aligned}
$$

Es así que $Im(f_k \circ d_{k+1}) \subseteq Nuc(d'_k) = Im(d'_{k+1})$.

Dado que $f_k \circ d_{k+1} : P_{k+1} \to Im(d'_{k+1})$ y $d'_{k+1} : Q_{k+1} \to Im(d'_{k+1})$ es un epimorfismo pues se está correstringiendo. Al ser P_{k+1} un $R-$módulo proyectivo existe $f_{k+1} : P_{k+1} \to Q_{k+1}$ tal que $f_k \circ d_{k+1} = d'_{k+1} \circ f_{k+1}$. El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$
\begin{tikzcd}
 & P_{k+1} \arrow[d, "d_{k+1}"] \arrow[dl, dashed, "f_{k+1}"'] & \\
 & P_k \arrow[d, "f_k"] & \\
Q_{k+1} \arrow[r, "d'_{k+1}"'] & Im(d'_{k+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto $\{f_n : P_n \to Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un morfismo de complejos de cocadenas, es así que finaliza la primer parte de la demostración.

Resta probar la unicidad salvo homotopía.

Suponga que existe otro morfismo de complejos de cadenas $\bar{g} = \{g_n : P_n \to Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\varepsilon_N \circ g_0 = f \circ \varepsilon_M.$$

Se busca construir una familia $\{\sigma_n : P_n \to Q_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de morfismos de $R-$módulos tales que

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ \sigma_n + \sigma_{n-1} \circ d_n.$$

La demostración será por inducción sobre n.

Caso base $n = 0$. Se busca $\sigma_0 : P_0 \to Q_1$ tal que $f_0 - g_0 = d'_1 \circ \sigma_0 + 0$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_N \circ (f_0 - g_0) =& (\varepsilon_N \circ f_0) - (\varepsilon_N \circ g_0) \\
=& (f \circ \varepsilon_M) - (f \circ \varepsilon_M) \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

Es decir, $Im(f_0 - g_0) \subseteq Nuc(\varepsilon_N) = Im(d_1^{'})$. Es así que $(f_0 - g_0) : P_0 \to Im(d_1^{'})$ y $d_1^{'} : Q_1 \to Im(d_1^{'})$ es un epimorfismo, como P_0 es proyectivo existe $\sigma_0 : P_0 \to Q_1$ tal que

$$f_0 - g_0 = d_1^{'} \circ \sigma_0,$$

lo cual prueba el caso base.

Hipótesis de inducción. Suponga cierto el resultado para $k \leq n$, es decir existe $\sigma_k : P_k \to Q_{k+1}$ tal que $f_k - g_k = d_{k+1}^{'} \circ \sigma_k + \sigma_{k-1} \circ d_k$.

Paso inductivo. Se busca construir $\sigma_{k+1} : P_{k+1} \to Q_{k+2}$ tal que

$$f_{k+1} - g_{k+1} = d_{k+2}^{'} \circ \sigma_{k+1} + \sigma_k \circ d_{k+1}.$$

Por una parte

$$\begin{aligned} d_{k+1}^{'} \circ ((f_{k+1} - g_{k+1}) - (\sigma_k \circ d_{k+1})) =& d_{k+1}^{'} \circ (f_{k+1} - g_{k+1}) - d_{k+1}^{'} \circ (\sigma_k \circ d_{k+1}) \\ =& d_{k+1}^{'} \circ (f_{k+1} - g_{k+1}) - (d_{k+1}^{'} \circ \sigma_k) \circ d_{k+1} \\ =& d_{k+1}^{'} \circ (f_{k+1} - g_{k+1}) - ((f_k - g_k) - (\sigma_{k-1} \circ d_k)) \circ d_{k+1} \\ =& d_{k+1}^{'} \circ (f_{k+1} - g_{k+1}) - (f_k - g_k) \circ d_{k+1} + \sigma_{k-1} \circ d_k \circ d_{k+1} \\ =& d_{k+1}^{'} \circ (f_{k+1} - g_{k+1}) - (f_k - g_k) \circ d_{k+1} + 0 \\ =& 0. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$Im((f_{k+1} - g_{k+1}) - (\sigma_k \circ d_{k+1})) \subseteq Nuc(d_{k+1}^{'}) = Im(d_{k+2}^{'})$$

en consecuencia

$$d_{k+2}^{'} : Q_{k+2} \to Im(d_{k+2}^{'})$$

es un epimorfismo y como

$$(f_{k+1} - g_{k+1}) - (\sigma_k \circ d_{k+1}) : P_{k+1} \to Im(d_{k+2}^{'}),$$

dado que P_{k+1} es un R-módulo proyectivo existe $\sigma_{k+1} : P_{k+1} \to Q_{k+2}$ tal que

$$(f_{k+1} - g_{k+1}) - (\sigma_k \circ d_{k+1}) = d_{k+2}^{'} \circ \sigma_{k+1}.$$

El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$\begin{tikzcd} & P_{k+1} \arrow[dl, dashed, "\sigma_{k+1}"'] \arrow[d, "f_{k+1}-g_{k+1}-\sigma_k\circ d_{k+1}"] & \\ Q_{k+2} \arrow[r, "d'_{k+2}"'] & Im(d'_{k+2}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En conclusión $\bar{f} \simeq \bar{g}$. □

La siguiente proposición es testigo de la utilidad del resultado antes expuesto.

PROPOSICIÓN 25. *Sean M, N un par de $R-$módulos y considere $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_1} M$, $\mathcal{Q} \xrightarrow{\varepsilon_2} M$ un par de resoluciones proyectivas de M, entonces*

$$H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N)) \cong H^n(Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 24 se sabe que existen morfismos de complejos de cadenas $\varphi : \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{Q}_\bullet$, $\psi : \mathcal{Q}_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet$ tales que

$$\varepsilon_2 \circ \varphi_0 = 1_M \circ \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 \circ \psi_0 = 1_M \circ \varepsilon_2$$

el siguiente diagrama ilustra la situación:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} : \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, shift left, "\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, shift left, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, dashed, shift left, "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, shift left, "1_M"] & 0 \\ \mathcal{Q} : \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d'_2"] \arrow[u, dashed, shift left, "\psi_2"] & Q_1 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[u, dashed, shift left, "\psi_1"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon_2"] \arrow[u, dashed, shift left, "\psi_0"] & M \arrow[r] \arrow[u, shift left, "1_M"] & 0 \end{tikzcd}$$

Por una parte $\psi \circ \varphi : \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet$ levanta 1_M, por otra parte $1_{\mathcal{P}_\bullet} : \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet$ también levanta a 1_M, como consecuencia de la proposición 24 se tiene que

$$\psi \circ \varphi \simeq 1_{\mathcal{P}_\bullet}.$$

De manera análoga, por una parte $\varphi \circ \psi : \mathcal{Q}_\bullet \to \mathcal{Q}_\bullet$ levanta a 1_M, por otra parte $1_{\mathcal{Q}_\bullet} : \mathcal{Q}_\bullet \to \mathcal{Q}_\bullet$ también levanta a 1_M, entonces

$$\varphi \circ \psi \simeq 1_{\mathcal{Q}_\bullet}.$$

Considere el funtor contravariante

$$Hom_R(\_, N) : \mathbf{R-Mod}^{op} \to \mathbf{Set}$$

como este es aditivo, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} Hom_R(\varphi, N) \circ Hom_R(\psi, N) =& Hom_R(\psi \circ \varphi, N) \\ \simeq& Hom_R(1_{\mathcal{P}_\bullet}, N) \\ =& 1_{Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N)}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} Hom_R(\psi, N) \circ Hom_R(\varphi, N) =& Hom_R(\varphi \circ \psi, N) \\ \simeq& Hom_R(1_{\mathcal{Q}_\bullet}, N) \\ =& 1_{Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N)}. \end{aligned}$$

Por la proposición 20 y lo anterior, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} H^n(Hom_R(\varphi, N)) \circ H^n(Hom_R(\psi, N)) =& H^n(Hom_R(\varphi, N) \circ Hom_R(\psi, N)) \\ =& H^n(1_{Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N)}) \\ =& 1_{H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N))} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} H^n(Hom_R(\psi, N)) \circ H^n(Hom_R(\varphi, N)) =& H^n(Hom_R(\psi, N) \circ Hom_R(\varphi, N)) \\ =& H^n(1_{Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N)}) \\ =& 1_{H^n(Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N))}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H^n(Hom_R(\varphi, N)) : H^n(Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N)) \to H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N))$$

es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto concluye que

$$H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N)) \cong H^n(Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3. El funtor *Ext*

Sean M, N un par de $R-$módulos, la proposición 25 afirma que

$$H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N)) \cong H^n(Hom_R(\mathcal{Q}_\bullet, N))$$

para cualesquiera $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_1} M$, $\mathcal{Q} \xrightarrow{\varepsilon_2} M$ resoluciones proyectivas de M. Es por tanto que para disponer de tales grupos de cohomología sólo figuran dos variables, las cuales son M y N. En esta sección se demuestra que cuando se deja fija la variable N la asignación es funtorial, tal funtor se conoce como Ext y cabe mencionar que este fue introducido por primera vez en [**5**] por H. Cartan y S. Eilenberg.

Definición 14. *Sean $M, N \in \boldsymbol{R-Mod}$ y $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon} M$ una resolución proyectiva de M, se define*

$$Ext^n_R(M,N) := H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N))$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

A continuación se demuestra que cuando se deja fija la segunda variable, la asignación se eleva a un funtor. Cabe mencionar que cuando se deja fija la primer variable la asignación también es funtorial, pero en la teoría a desarrollar este no es el objetivo.

Proposición 26. *Sea $N \in \boldsymbol{R-Mod}$, se definen las siguientes asignaciones*

$$Ext^n_R(\_\,, N) : \boldsymbol{R-Mod}^{op} \to \boldsymbol{Ab}$$

a nivel de objetos, para $M \in \boldsymbol{R-Mod}$, se define

$$M \mapsto Ext^n_R(M,N)$$

y a nivel de morfismos, para $f : A \to B$ un morfismo en $\boldsymbol{R-Mod}$, se define

$$Ext^n_R(f,N) = H^n(Hom_R(\overline{f}, N))$$

donde $\overline{f} : \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{Q}_\bullet$ es un morfismo de complejos de cadenas que levanta a f, dichas asignaciones hacen de

$$Ext^n_R(\_\,, N) : \boldsymbol{R-Mod}^{op} \to \boldsymbol{Ab}$$

un funtor contravariante, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la proposición 25, se sabe que la asignación en objetos está bien definida pues esta no depende de la resolución proyectiva a considerar.

Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathbf{R-Mod}$, note que la asignación en morfismos está bien definida. Por una parte, cualquier otro morfismo $\bar{g} : \mathcal{P}_\bullet \to \mathcal{Q}_\bullet$ de complejos de cadenas que levante a $f : A \to B$, por la proposición 24 se tiene que:

$$\bar{f} \simeq \bar{g}$$

y entonces

$$H^n(Hom_R(\bar{f}, N)) = H^n(Hom_R(\bar{g}, N)).$$

Por otra parte, como

$$H^n : \mathbf{cC_{R-Mod}} \to \mathbf{Ab}$$

es un funtor, entonces $Ext^n_R(f,N) = H^n(Hom_R(\bar{f}, N))$ es un morfismo en $\mathbf{Ab}$.

En lo que respecta a la composición se tiene lo siguiente.

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos en $\mathbf{R-Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}Ext^n_R(f,N)\circ Ext^n_R(g,N) =&H^n(Hom_R(\overline{f},N))\circ H^n(Hom_R(\overline{g},N))\\=&H^n(Hom_R(\overline{g}\circ\overline{f},N)).\end{aligned}$$

Por otra parte
$$Ext^n_R(g\circ f,N)=H^n(Hom_R(\overline{g\circ f},N))$$
donde $\overline{g\circ f}$ es un morfismo de complejos de cadenas que levanta a $g\circ f$, como $\bar{g}\circ\bar{f}$ es un morfismo de complejos de cadenas que también levanta a $g\circ f$ entonces
$$\overline{g\circ f}\simeq\bar{g}\circ\bar{f}.$$
Por tal motivo

$$\begin{aligned}Ext^n_R(g\circ f,N) =&H^n(Hom_R(\overline{g\circ f},N))\\=&H^n(Hom_R(\bar{g}\circ\bar{f},N))\\=&Ext^n_R(f,N)\circ Ext^n_R(g,N).\end{aligned}$$

Para finalizar, considere $M\in\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, entonces
$$Ext^n_R(1_M,N)=H^n(Hom_R(\overline{1_M},N))$$
donde $\overline{1_M}$ es un morfismo de complejos de cadenas que levanta a 1_M. Como $1_{\mathcal{P}_\bullet}:\mathcal{P}_\bullet\to\mathcal{P}_\bullet$ es un morfismo que también levanta a 1_M, entonces
$$\overline{1_M}\simeq 1_{\mathcal{P}_\bullet}.$$
En consecuencia

$$\begin{aligned}Ext^n_R(1_M,N) =&H^n(Hom_R(\overline{1_M},N))\\=&H^n(Hom_R(1_{\mathcal{P}_\bullet},N))\\=&1_{H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet,N))}.\end{aligned}$$

Por consiguiente
$$Ext^n_R(1_M,N)=1_{Ext^n_R(M,N)}.$$
Esto concluye que $Ext^n_R(\_,N):\mathbf{R}-\mathbf{Mod}^{op}\to\mathbf{Ab}$ es un funtor contravariante para cada $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 4

Cohomología comonádica

Llegado a este punto los conceptos de comónada, cohomología y objeto de grupo abeliano no resultan desconocidos, es en este capítulo que tales conceptos convergen dando lugar a la cohomología comonádica.

En una primera etapa se desvela como obtener de forma funtorial un objeto semi-simplicial a partir de una comónada, para en una segunda etapa con un objeto de grupo abeliano obtener un complejo de cocadenas y así una familia de funtores de cohomología asociados a la comónada.

1. Objetos semi-simpliciales

Definición 15. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Un objeto semi-simplicial en* $\mathbf{C}$ *consta de una familia de objetos* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *en* $\mathbf{C}$ *y una familia de morfismos* $\{\{a_i^n : X_n \to X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}$ *en* $\mathbf{C}$ *tales que*

$$a_i^n \circ a_j^{n+1} = a_{j-1}^n \circ a_i^{n+1} \tag{7}$$

para toda $0 \leq i < j \leq n$*. En tal caso se denota por* X_* *al objeto semi-simplicial en* $\mathbf{C}$*. El siguiente diagrama ilustra al objeto semi-simplicial* X_**.*

$$\begin{tikzcd} X_0 & X_1 \arrow[l, shift right, "a_0^1"'] \arrow[l, shift left, "a_1^1"'] & \cdots \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] & X_{n-1} \arrow[l] & X_n \arrow[l, "a_i^n"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La identidad (7) se conoce como identidad semi-simplicial.

Definición 16. *Sean* $X_* = \{\{X_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{a_i^n : X_n \to X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$, $Y_* = \{\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{b_i^n : X_n \to X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$ *objetos semi-simpliciales en* $\mathbf{C}$*. Se dice que* $\{\varphi_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un morfismo de objetos semi-simpliciales si*

$$\varphi_n \circ a_i^n = b_i^n \circ \varphi_{n+1}$$

para toda $0 \leq i \leq n$*. El siguiente diagrama ilustra el morfismo de objetos semi-simpliciales.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_n"] & X_n \arrow[l, "a_i^n"'] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & X_{n+1} \arrow[l, "a_i^{n+1}"'] \arrow[d, "\varphi_{n+2}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & Y_{n-1} \arrow[l] & Y_n \arrow[l, "b_i^n"] & Y_{n+1} \arrow[l, "b_i^{n+1}"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Proposición 27. *Sean* $X_* = \{\{X_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{a_i^n : X_n \to X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$, $Y_* = \{\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{b_i^n : Y_n \to Y_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$, $Z_* = \{\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{c_i^n : Z_n \to Z_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$ *objetos semi-simpliciales en* $\mathbf{C}$ *y considere además* $\varphi : X_* \to Y_*$, $\psi : Y_* \to Z_*$ *morfismos de objetos semi-simpliciales, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se define*

$$(\psi \circ \varphi)_n := \psi_n \circ \varphi_n.$$

Entonces

$$\psi \circ \varphi : X_* \to Z_*$$

es un morfismo de objetos semi-simpliciales.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)_n \circ a_i^n =& (\psi_n \circ \varphi_n) \circ a_i^n \\
=& \psi_n \circ (\varphi_n \circ a_i^n) \\
=& \psi_n \circ (b_i^n \circ \varphi_{n+1}) \\
=& (\psi_n \circ b_i^n) \circ \varphi_{n+1} \\
=& (c_i^n \circ \psi_{n+1}) \circ \varphi_{n+1} \\
=& c_i^n \circ (\psi_{n+1} \circ \varphi_{n+1}) \\
=& c_i^n \circ (\psi \circ \varphi)_{n+1}
\end{aligned}$$

para toda $0 \leq i \leq n$. Por lo tanto

$$\psi \circ \varphi : X_* \to Z_*$$

es un morfismo de objetos semi-simpliciales. □

Es evidente notar la cercanía entre los conceptos de objeto semi-simplicial y complejo de cadenas positivo, lo que los diferencia es la cantidad de morfismos que existe de un objeto de la familia a otro y claro, el contexto que los motiva.

Proposición 28. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. La colección de objetos semi-simpliciales en* $\mathbf{C}$ *y morfismos de objetos semi-simpliciales forman una categoría, la cual se denota por* $\mathbf{SS}(\mathbf{C})$.

Demostración. Se denota por $Hom_{\mathbf{SS}}(X_*, Y_*)$ a la colección de morfismos de objetos semi-simpliciales de X_* en Y_*.

Se propone como regla de composición la definida en la proposición anterior, observe que:

$$\begin{aligned}(\lambda \circ (\psi \circ \varphi))_n =& (\lambda_n \circ (\psi \circ \varphi)_n) \\ =& (\lambda_n \circ (\psi_n \circ \varphi_n)) \\ =& ((\lambda_n \circ \psi_n) \circ \varphi_n) \\ =& ((\lambda \circ \psi)_n \circ \varphi_n) \\ =& ((\lambda \circ \psi) \circ \varphi)_n\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Es así que

$$\lambda \circ (\psi \circ \varphi) = (\lambda \circ \psi) \circ \varphi$$

para cualesquiera $\varphi : W_* \to X_*$, $\psi : X_* \to Y_*$, $\lambda : Y_* \to Z_*$ morfismos de objetos semi-simpliciales. Lo anterior prueba lo correspondiente a la asociatividad de la composición.

Sea $X_* = \{\{X_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{a_i^n : X_n \to X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$ un objeto semi-simplicial en $\mathbf{C}$, considere la familia de morfismos $\{1_{X_n} : X_n \to X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple lo siguiente:

$$1_{X_{n-1}} \circ a_i^n = a_i^n = a_i^n \circ 1_{X_n}$$

para cada $0 \leq i \leq n$, por tal motivo $1_{X_*} \in Hom_{\mathbf{SS}}(X_*, X_*)$.

Para finalizar, observe que

$$f_n \circ 1_{X_n} = f_n = 1_{Y_n} \circ f_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, es así que

$$f \circ 1_{X_*} = f = 1_{Y_*} \circ f$$

para cualquier morfismo $f : X_* \to Y_*$ de objetos semi-simpliciales.
Esto concluye que $\mathbf{SS}(\mathbf{C})$ es una categoría. □

A continuación se presenta el objeto semi-simplicial con mayor importancia en este texto, este se obtiene a partir de una comónada.

Proposición 29. *Sea $\boldsymbol{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ una comónada en $\mathbf{C}$. Considere X un objeto en $\mathbf{C}$, entonces*

$$\{\{T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(X) \to T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$$

es un objeto semi-simplicial en $\mathbf{C}$, donde $\varepsilon_i^n = T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)})$ para $0 \leq i \leq n$.

El objeto semi-simplicial antes descrito se denota por $\Delta(X)$.

$$T(X) \underset{\varepsilon_1^1}{\overset{\varepsilon_0^1}{\leftleftarrows}} T^2(X) \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \cdots \longleftarrow T^n(X) \xleftarrow{\varepsilon_i^n} T^{n+1}(X) \longleftarrow \cdots$$

En este objeto semi-simplicial el término de grado n corresponde a $T^{n+1}(X)$.

Demostración. Se debe probar que se satisface la identidad semi-simplicial.

Sea $n \geq 1$, $0 \leq i < j \leq n$ y $X \in \mathbf{C}$.

Dado que $j \leq n$ entonces $n+1-j \geq 0$, es así que se puede disponer del objeto $T^{n+1-j}(X)$, evaluando a la counidad $\varepsilon : T \to 1_{\mathbf{C}}$ en el objeto antes descrito se obtiene el siguiente morfismo en $\mathbf{C}$

$$\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)} : T(T^{n+1-j}(X)) \to T^{n+1-j}(X) \tag{8}$$

Nuevamente, como $0 \leq i < j$ entonces $0 \leq j-i-1$, es así que se puede disponer del siguiente funtor

$$T^{j-i-1} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

aplicando este al morfismo de (8) se obtiene el siguiente morfismo en $\mathbf{C}$:

$$T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}) : T^{j-i-1}(T^{n+2-j}(X)) \to T^{j-i-1}(T^{n+1-j}(X))$$

Como consecuencia de que $\varepsilon : T \to 1_{\mathbf{C}}$ es una transformación natural se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T(T^{n-i+1}(X)) \arrow[r, "T(T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}))"] \arrow[d, "\varepsilon_{T^{n-i+1}(X)}"'] & T(T^{n-i}(X)) \arrow[d, "\varepsilon_{T^{n-i}(X)}"] \\ T^{n-i+1}(X) \arrow[r, "T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)})"'] & T^{n-i}(X) \end{tikzcd}$$

por consiguiente

$$\varepsilon_{T^{n-i}(X)} \circ T^{j-i}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}) = T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}) \circ \varepsilon_{T^{n-i+1}(X)}. \tag{9}$$

Como $0 \leq i$, se puede disponer del siguiente funtor

$$T^i : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

aplicando este al morfismo de (9) se obtiene lo siguiente

$$T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)} \circ T^{j-i}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)})) = T^i(T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}) \circ \varepsilon_{T^{n-i+1}(X)}). \tag{10}$$

Por una parte

$$\begin{aligned} T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)} \circ T^{j-i}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)})) =& T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)}) \circ T^i(T^{j-i}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)})) \\ =& T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)}) \circ T^j(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}) \\ =& \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} T^i(T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)}) \circ \varepsilon_{T^{n-i+1}(X)}) =& T^i(T^{j-i-1}(\varepsilon_{T^{n+1-j}(X)})) \circ T^i(\varepsilon_{T^{n+1-i}(X)}) \\ =& T^{j-1}(\varepsilon_{T^{n-(j-1)}}) \circ T^i(\varepsilon_{T^{n+1-i}(X)}) \\ =& \varepsilon_{j-1}^n \circ \varepsilon_i^{n+1}. \end{aligned}$$

En consecuencia de (10) y las igualdades anteriores, se concluye que

$$\varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_{j-1}^n \circ \varepsilon_i^{n+1}.$$

Por lo tanto $\Delta(X) = \{\{T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(X) \to T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$ es un objeto semi-simplicial en $\mathbf{C}$.

□

La proposición anterior motiva el siguiente resultado, este afirma se puede elevar la asignación a un funtor.

Proposición 30. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $\boldsymbol{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ *una comónada en* $\mathbf{C}$*, se define la siguiente asignación*

$$\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{SS}(\mathbf{C})$$

Que a nivel de objetos, para $X \in \mathbf{C}$*, se define*

$$\Delta(X) = \{\{T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(X) \to T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$$

y que a nivel de morfismos, para $f : X \to Y$ *un morfismo en* $\mathbf{C}$*, se define*

$$\Delta(f)_n = T^n(f) : T^n(X) \to T^n(Y)$$

para cada $n \geq 1$*, entonces* $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{SS}(\mathbf{C})$ *es un funtor.*

DEMOSTRACIÓN. Se comienza estudiando la asignación en morfismos.

Sean $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$, $n \geq 1$ y $0 \leq i \leq n$.

Como $i \leq n$, entonces $n - i \geq 0$, por tal motivo se puede tener en cuenta el siguiente morfismo en $\mathbf{C}$

$$T^{n-i}(f) : T^{n-i}(X) \to T^{n-i}(Y),$$

como $\varepsilon : T \to 1_{\mathbf{C}}$ es una transformación natural se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T(T^{n-i}(X)) \arrow[r, "T(T^{n-i}(f))"] \arrow[d, "\varepsilon_{T^{n-i}(X)}"'] & T(T^{n-i}(Y)) \arrow[d, "\varepsilon_{T^{n-i}(Y)}"] \\
T^{n-i}(X) \arrow[r, "T^{n-i}(f)"'] & T^{n-i}(Y)
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente

$$\varepsilon_{T^{n-i}(Y)} \circ T^{n+1-i}(f) = T^{n-i}(f) \circ \varepsilon_{T^{n-i}(X)}. \tag{11}$$

Al aplicar el funtor

$$T^i : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

a la ecuación (11) se tiene que

$$T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(Y)} \circ T^{n+1-i}(f)) = T^i(T^{n-i}(f) \circ \varepsilon_{T^{n-i}(X)}). \tag{12}$$

Por una parte

$$\begin{aligned}
T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(Y)} \circ T^{n+1-i}(f)) =& T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(Y)}) \circ T^i(T^{n+1-i}(f)) \\
=& T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(Y)}) \circ T^{n+1}(f).
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
T^i(T^{n-i}(f) \circ \varepsilon_{T^{n-i}(X)}) =& T^i(T^{n-i}(f)) \circ T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)}) \\
=& T^n(f) \circ T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)}).
\end{aligned}$$

Se deduce de (12) y de las igualdades anteriores, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T^n(X) \arrow[d, "T^n(f)"'] & T^{n+1}(X) \arrow[l, "\varepsilon_i^n(X)"'] \arrow[d, "T^{n+1}(f)"] \\
T^n(Y) & T^{n+1}(Y) \arrow[l, "\varepsilon_i^n(Y)"]
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$ es un morfismo en $\mathbf{SS}(\mathbf{C})$.

Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos en $\mathbf{C}$. Observe que

$$T^n(g \circ f) = T^n(g) \circ T^n(f)$$

para cada $n \geq 1$, es así que

$$\Delta(g \circ f) = \Delta(g) \circ \Delta(f).$$

Note además que como

$$T^n(1_X) = 1_{T^n(X)}$$

para toda $n \geq 1$, entonces

$$\Delta(1_X) = 1_{\Delta(X)}$$

para todo $X \in \mathbf{C}$. Lo anterior demuestra que $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{SS}(\mathbf{C})$ es un funtor. □

OBSERVACIÓN 3. *En la demostración de la proposición 29 y 30 es importante notar que tanto la identidad semi-simplicial como que el funtor* $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{SS}(\mathbf{C})$ *esté bien definido en morfismos, se debe completamente a la naturalidad de la counidad de la comónada.*

2. De objetos semi-simpliciales a complejos de cocadenas

En la presente sección se plantea una manera de asignar a un objeto semi-simplicial un complejo de cocadenas positivo de forma funtorial.

A partir de ahora se hará un abuso de notación. De acuerdo a la proposición 15, para G un objeto de grupo abeliano $\mathbf{C}$ existe un único funtor $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ab}$ tal que $Hom_{\mathbf{C}}(\_, G) = U \circ F$. Entonces identificamos a $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ab}$ con $Hom_{\mathbf{C}}(\_, G) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ab}$. Es decir, de manera formal nos referimos a F cuando se mencione a $Hom_{\mathbf{C}}(\_, G)$.

PROPOSICIÓN 31. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos finitos,* G *un objeto de grupo abeliano en* $\mathbf{C}$ *y considere* $X_* = \{\{X_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\{a_i^n : X_n \to X_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$ *un objeto semi-simplicial en* $\mathbf{C}$. *Se define*

$$\partial^n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i Hom_{\mathbf{C}}(a_i^n, G) : Hom_{\mathbf{C}}(X_{n-1}, G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G)$$

para cada $n \geq 1$, entonces

$$\Lambda(X_*, G) = \{\{Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G)\}_{n=0}^{\infty}, \{\partial^n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

es un complejo de cocadenas de grupos abelianos positivo.

Demostración. Como $Hom_{\mathbf{C}}(\_, G) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G)$ es un grupo abeliano para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resta probar que la composición consecutiva de diferenciales se anula. Sea $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
(\partial^{n+1} \circ \partial^n)(f) =& \partial^{n+1}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i Hom_{\mathbf{C}}(a_i^n, G)(f)) \\
=& \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j Hom_{\mathbf{C}}(a_j^{n+1}, G)(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f \circ a_i^n)) \\
=& \sum_{j=0}^{n+1}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{j+i}(f \circ a_i^n) \circ a_j^{n+1}) \\
=& \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{i+j} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) \\
=& \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) + \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{i+j} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) \\
=& \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) + \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{i+j} f \circ (a_{j-1}^n \circ a_i^{n+1})) \\
=& \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) + \sum_{j=1}^{n+1}(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j} f \circ (a_{j-1}^n \circ a_i^{n+1})) \\
=& \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) + \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j+1} f \circ (a_i^n \circ a_j^{n+1})) \\
=& 0
\end{aligned}$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X_{n-1}, G)$. Por lo tanto $\Lambda(X_*, G)$ es un complejo de cocadenas de grupos abelianos positivo. $\square$

El siguiente diagrama ilustra al complejo de cocadenas de grupos abelianos positivo $\Lambda(X_*, G)$.

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(X_0, G) \xrightarrow{\partial^1} Hom_{\mathbf{C}}(X_1, G) \xrightarrow{\partial^2} Hom_{\mathbf{C}}(X_2, G) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G) \xrightarrow{\partial^{n+1}} Hom_{\mathbf{C}}(X_{n+1}, G) \xrightarrow{\partial^{n+2}} Hom_{\mathbf{C}}(X_{n+2}, G) \longrightarrow \cdots$$

De la misma forma en la que se pudo elevar la asignación de objetos semi-simpliciales a un funtor, se puede hacer lo correspondiente con los complejos de cocadenas de la manera antes expuesta.

Proposición 32. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos finitos y* G *un objeto de grupo abeliano en* $\mathbf{C}$. *Se definen las siguientes asignaciones*

$$\Lambda(\_, G) : \mathbf{SS}(\mathbf{C})^{op} \to \mathbf{cC}^{+}_{\mathbb{Z}-Mod}$$

a nivel de objetos, para $X_* \in \mathbf{SS}(\mathbf{C})$, *se define*

$$\Lambda(X_*, G) = \{\{Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G)\}_{n=0}^{\infty}, \{\partial^n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

y a nivel de morfismos, para $\varphi : X_* \to Y_*$ *un morfismo en* $\mathbf{SS}(\mathbf{C})$, *se define*

$$\Lambda(\varphi, G)^n = Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_n, G) : Hom_{\mathbf{C}}(Y_n, G) \to Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\Lambda(\_, G) : \mathbf{SS}(\mathbf{C})^{op} \to \mathbf{cC}^{+}_{\mathbb{Z}-Mod}$ *es un funtor contravariante.*

Demostración. Se comienza estudiando la asignación en morfismos. Sea $\varphi : X_* \to Y_*$ un morfismo en $\mathbf{SS}(\mathbf{C})$, se busca probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathbf{C}}(Y_{n-1}, G) \arrow[r, "\partial'^n"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_{n-1}, G)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(Y_n, G) \arrow[r] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_n, G)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathbf{C}}(X_{n-1}, G) \arrow[r, "\partial^n"'] & Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(\partial^n \circ Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_{n-1}, G))(f) =& \partial^n(f \circ \varphi_{n-1}) \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i Hom_{\mathbf{C}}(a_i^n, G)(f \circ \varphi_{n-1}) \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i ((f \circ \varphi_{n-1}) \circ a_i^n) \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ (\varphi_{n-1} \circ a_i^n)) \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ (b_i^n \circ \varphi_n)) \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ b_i^n) \circ \varphi_n \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i Hom_{\mathbf{C}}(b_i^n, G)(f) \circ \varphi_n \\
=& \partial'^n(f) \circ \varphi_n \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_n, G)(\partial'^n(f)) \\
=& (Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_n, G) \circ \partial'^n)(f)
\end{aligned}
$$

para todo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(Y_{n-1}, G)$. Por lo tanto $\Lambda(\varphi, G) : \Lambda(Y_*, G) \to \Lambda(X_*, G)$ es un morfismo en $\mathbf{cC}^+_{\mathbb{Z}-Mod}$.

Respecto a la composición: Sean $\varphi : X_* \to Y_*$, $\psi : Y_* \to Z_*$ morfismos en $\mathbf{SS}(\mathbf{C})$, como

$$
\begin{aligned}
Hom_{\mathbf{C}}((\psi \circ \varphi)_n, G) =& Hom_{\mathbf{C}}(\psi_n \circ \varphi_n, G) \\
=& Hom_{\mathbf{C}}(\varphi_n, G) \circ Hom_{\mathbf{C}}(\psi_n, G)
\end{aligned}
$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Lambda(\psi \circ \varphi, G) = \Lambda(\varphi, G) \circ \Lambda(\psi, G)$$

Para finalizar, sea X_* un objeto semisimplicial en $\mathbf{C}$ y considere el morfismo identidad de objetos semi-simpliciales $1_{X_*} : X_* \to X_*$, como

$$Hom_{\mathbf{C}}(1_{X_n}, G) = 1_{Hom_{\mathbf{C}}(X_n, G)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Lambda(1_{X_*}, G) = 1_{\Lambda(X_*,G)}$$

En consecuencia $\Lambda(\_, G) : \mathbf{SS}(\mathbf{C})^{op} \to \mathbf{cC}^{+}_{\mathbb{Z}-Mod}$ es un funtor contravariante. □

Para G un objeto de grupo abeliano y X_* un objeto semi-simplicial, llegado a este punto es válido cuestionarse por

$$H^n(\Lambda(X_*, G)).$$

Cuando el objeto semi-simplicial es el inducido por una comónada, surge la definición principal de este texto.

3. Grupos de cohomología inducidos por una comónada

En secciones anteriores se estudió una forma de asignar a un objeto un objeto semi-simplicial de forma funtorial y una manera de asignar a un objeto semi-simplicial un complejo de cocadenas positivo de forma funtorial, cuando tales funtores se componen y se aplica el funtor $H^n : \mathbf{cC} \to \mathbf{Ab}$ se obtiene una familia de funtores de cohomología.

Corolario 2. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos finitos,* $\boldsymbol{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ *una comónada en* $\mathbf{C}$ *y* G *un objeto de grupo abeliano en* $\mathbf{C}$*. Considere* X *un objeto en* $\mathbf{C}$ *y* $\Delta(X)$ *el objeto semi-simplicial inducido por la comónada* $\boldsymbol{T}$*, entonces*

$$\Lambda(\Delta(X), G)$$

es un complejo de cocadenas positivo.

Demostración. Como $\Delta(X)$ es un objeto semi-simplicial en $\mathbf{C}$, al aplicar el funtor

$$\Lambda(\_, G) : \mathbf{SS}(\mathbf{C})^{op} \to \mathbf{cC}^{+}_{\mathbb{Z}-Mod}$$

se obtiene el resultado. □

El siguiente diagrama ilustra el complejo de cocadenas de grupos abelianos positivo $\Lambda(\Delta(X), G)$.

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(T(X), G) \xrightarrow{\partial^1} Hom_{\mathbf{C}}(T^2(X), G) \xrightarrow{\partial^2} Hom_{\mathbf{C}}(T^3(X), G) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(T^n(X), G) \xrightarrow{\partial^n} Hom_{\mathbf{C}}(T^{n+1}(X), G) \xrightarrow{\partial^{n+1}} Hom_{\mathbf{C}}(T^{n+2}(X), G) \longrightarrow \cdots$$

La razón de precisar el complejo de cocadenas de grupos abelianos antes descrito es que este ilustra la siguiente definición, la cual explica el título de este texto.

Definición 17. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos finitos,* $\boldsymbol{T} = (T, \varepsilon, \delta)$ *una comónada en* $\mathbf{C}$ *y* G *un objeto de grupo abeliano en* $\mathbf{C}$*. Considere* X *un objeto en* $\mathbf{C}$.

Se define el $n-$*ésimo grupo de cohomología de* X *con coeficientes en* G *inducido para la comónada* $\boldsymbol{T}$ *como*

$$H^n(X, G)_{\boldsymbol{T}} := H^n(\Lambda(\Delta(X), G))$$

Capítulo 5

Grupos de cohomología inducidos por una comónada en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$

El presente capítulo tiene la intención de ejemplificar la cohomología comonádica, es así que de manera puntual se realizan todos los cálculos pertinentes para disponer de los funtores de cohomología inducidos por una comónada, en esta ocasión la comónada a estudiar surge de la que llamamos adjunción libre en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. El fin último de este capítulo es demostrar que los grupos Ext son un caso particular de la cohomología comonádica, es por tanto que se prueba el siguiente resultado:

Para M, N un par de $R-$módulos se cumple que

$$H^n(M,N)_{\mathbf{T}_{F,U}} = Ext^n_R(M,N)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esto es consecuencia directa de que el objeto semi-simplicial inducido por la comónada resulta ser una resolución proyectiva.

1. La adjunción libre

El nombre de esta sección se debe completamente al siguiente funtor.

Proposición 33. *Sea R un anillo conmutativo con 1. Se definen las siguientes asignaciones*

$$F : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$$

a nivel de objetos, para $X \in \boldsymbol{Set}$, se define

$F(X) = R^{(X)} = \{f\colon X \longrightarrow R \mid f(x) \neq 0$ *para una cantidad finita de elementos de* $X\}$

y a nivel de morfismos, para $\alpha : X \to Y$ un morfismo en $\boldsymbol{Set}$, se define

$$F(\alpha)(f) = F(\alpha)\Big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\Big) = \sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{\alpha(x)}$$

para todo $f \in R^{(X)}$. Entonces $F : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$ es un funtor.

Demostración. Sea $\alpha : X \to Y$ un morfismo en **Set**, se comienza probando que $F(\alpha) : R^{(X)} \to R^{(Y)}$ es un morfismo en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$.

$$\begin{aligned}
F(\alpha)(r\cdot f+g) =& F(\alpha)\big(r\cdot \sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x + \sum_{x\in X} g(x)\cdot\delta_x\big)\\
=& F(\alpha)\big(\sum_{x\in X}(r\cdot f(x)+g(x))\cdot\delta_x\big)\\
=& \sum_{x\in X}(r\cdot f(x)+g(x))\cdot\delta_{\alpha(x)}\\
=& \sum_{x\in X} r\cdot f(x)\cdot\delta_{\alpha(x)} + \sum_{x\in X} g(x)\cdot\delta_{\alpha(x)}\\
=& r\cdot\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{\alpha(x)} + \sum_{x\in X} g(x)\cdot\delta_{\alpha(x)}\\
=& r\cdot F(\alpha)(f)+F(\alpha)(g)
\end{aligned}$$

para todo $r\in R$, $f,g\in R^{(X)}$. Es así que $F(\alpha) : R^{(X)} \to R^{(Y)}$ es un morfismo en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$.

Con respecto la composición se cumple lo siguiente. Sean $\alpha : X\to Y$, $\beta : Y\to Z$ morfismos en **Set**, entonces

$$\begin{aligned}
F(\beta\circ\alpha)(f) =& F(\beta\circ\alpha)\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\big)\\
=& \sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{(\beta\circ\alpha)(x)}\\
=& \sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{\beta(\alpha(x))}\\
=& F(\beta)\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{\alpha(x)}\big)\\
=& F(\beta)\big(F(\alpha)\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\big)\big)\\
=& (F(\beta)\circ F(\alpha))(f)
\end{aligned}$$

para todo $f\in R^{(X)}$. Es por tanto que $F(\beta\circ\alpha)=F(\beta)\circ F(\alpha)$.

Para finalizar. Considere $X\in$ **Set**, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}F(1_X)(f) =& F(1_X)\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\big)\\ =&\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{1_X(x)}\\ =&\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\\ =&f\\ =&1_{R^{(X)}}(f)\\ =&1_{F(X)}(f)\end{aligned}$$

para todo $f\in R^{(X)}$, es así que $F(1_X)=1_{F(X)}$.

En conclusión $F:\mathbf{Set}\to\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ es un funtor. □

Una vez precisado el funtor libre en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ se expone la situación de adjunción a desarrollar.

Proposición 34. *Sea R un anillo conmutativo con 1. Los funtores*

$$\boldsymbol{Set} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$$

son adjuntos, con F el adjunto izquierdo. U denota al funtor que olvida.

Demostración. Se busca probar que los funtores son adjuntos por medio de las identidades triangulares.

Sea $X\in\mathbf{Set}$, para la unidad $\eta:1_{\mathbf{Set}}\to U\circ F$ se busca definir

$$\eta_X : X\to U(R^{(X)})$$

un morfismo en $\mathbf{Set}$, la cual tiene por regla de correspondencia

$$\eta_X(x)=\delta_x$$

para todo $x\in X$. Se prueba que tal asignación es natural.

Sea $\alpha:X\to Y$ un morfismo en $\mathbf{Set}$, entonces

$$\begin{aligned}(U(F(\alpha))\circ\eta_X)(x) =& F(\alpha)(\delta_x)\\ =&\delta_{\alpha(x)}\\ =&\eta_Y(\alpha(x))\\ =&(\eta_Y\circ\alpha)(x)\end{aligned}$$

para todo $x\in X$. Es así que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ U(R^{(X)}) \arrow[r, "U(F(\alpha))"'] & U(R^{(Y)}) \end{tikzcd}$$

De lo anterior se concluye que $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \to U \circ F$ es una transformación natural.

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. Para la counidad $\varepsilon : F \circ U \to 1_{\mathbf{R}-\mathbf{Mod}}$ se busca definir

$$\varepsilon_M : R^{(U(M))} \to M$$

tal que sea un morfismo en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, es así que se propone la siguiente regla de correspondencia

$$\varepsilon_M(f) = \varepsilon_M\big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_m\big) = \sum_{m\in M} f(m)\cdot m$$

para todo $f \in R^{(U(M))}$. Por una parte

$$\begin{aligned}\varepsilon_M(r\cdot f+g) =&\varepsilon_M\big(r\cdot\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_m + \sum_{m\in M} g(m)\cdot\delta_m\big)\\ =&\varepsilon_M\big(\sum_{m\in M}(r\cdot f(m)+g(m))\cdot\delta_m\big)\\ =&\sum_{m\in M}(r\cdot f(m)+g(m))\cdot m\\ =&\sum_{m\in M} r\cdot f(m)\cdot m + \sum_{m\in M} g(m)\cdot m\\ =&r\cdot\sum_{m\in M} f(m)\cdot m + \sum_{m\in M} g(m)\cdot m\\ =&r\cdot\varepsilon_M(f)+\varepsilon_M(g)\end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $f, g \in R^{(U(M))}$. Lo anterior prueba que $\varepsilon_M : R^{(U(M))} \to M$ es un morfismo en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. Falta probar la naturalidad de tal asignación.

Sea $\alpha : M \to N$ un morfismo en $\mathbf{R-Mod}$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_N \circ F(U(\alpha)))\big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_m\big) =&\varepsilon_N\big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_{U(\alpha(m))}\big)\\ =&\sum_{m\in M} f(m)\cdot\alpha(m)\\ =&\alpha\big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot m\big)\\ =&(\alpha\circ\varepsilon_M)\big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_m\big)\end{aligned}$$

para todo $f \in R^{(U(M))}$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R^{(U(M))} \arrow[r, "F(U(\alpha))"] \arrow[d, "\varepsilon_M"'] & R^{(U(N))} \arrow[d, "\varepsilon_N"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & N \end{tikzcd}$$

De lo anterior se concluye que $\varepsilon : F\circ U \to 1_{\mathbf{R-Mod}}$ es una transformación natural.

Para finalizar. Resta verificar que se satisfacen las identidades triangulares.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{F(X)}\circ F(\eta_X))(f) =&(\varepsilon_{F(X)}\circ F(\eta_X))\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\big)\\ =&\varepsilon_{F(X)}\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{\eta_X(x)}\big)\\ =&\varepsilon_{F(X)}\big(\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_{\delta_x}\big)\\ =&\sum_{x\in X} f(x)\cdot\delta_x\\ =&f\\ =&1_{R^{(X)}}(f)\\ =&1_{F(X)}(f)\end{aligned}$$

para todo $f \in R^{(X)}$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\circ\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & F\circ U\circ F \arrow[d, "\varepsilon\circ F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, entonces

$$\begin{aligned} (U(\varepsilon_M)\circ \eta_{U(M)})(m) =& U(\varepsilon_M)(\delta_m) \\ =& m \\ =& 1_{U(M)}(m) \end{aligned}$$

para todo $m \in M$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta\circ U"] \arrow[dr, "1_U"'] & U\circ F\circ U \arrow[d, "U\circ\varepsilon"] \\ & U \end{tikzcd}$$

El par de argumentos anteriores permiten concluir que $(F, U) : \mathbf{Set} \to \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ son funtores adjuntos. □

2. Una comónada en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$

Por lo expuesto en el capítulo 1, es bien sabido que el par de funtores adjuntos

$$(F, U) : \mathbf{Set} \to \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$$

inducen una comónada en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, a saber

$$\mathbf{T}_{F,U} = (F\circ U, \varepsilon, F\circ\eta\circ U).$$

A continuación se realizan los cálculos de las componentes de manera puntual.

1. Para el funtor $T = F\circ U : \mathbf{R}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, a nivel de objetos se tiene

   $$T(M) = F(U(M)) = R^{(U(M))}$$

   para todo $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, y a nivel de morfismos se tiene que

   $$\begin{aligned} T(\alpha)\Big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_m\Big) =& F(U(\alpha))\Big(\sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_m\Big) \\ =& \sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_{U(\alpha)(m)} \\ =& \sum_{m\in M} f(m)\cdot\delta_{\alpha(m)} \end{aligned}$$

   para todo morfismo $\alpha : M \to N$ en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$.

2. La counidad de la comónada coincide con la counidad de la adjunción, entonces para cada $M \in \mathbf{R} - \mathbf{Mod}$ se tiene que

$$\varepsilon_M : R^{(U(M))} \to M$$

y así

$$\begin{aligned}\varepsilon_M(f) =& \varepsilon_M\big(\sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_m\big)\\ =& \sum_{m \in M} f(m) \cdot m\end{aligned}$$

para todo $f \in R^{(U(M))}$.

3. El coproducto de la comónada $\mu : T \to T \circ T$ resulta de la siguiente composición:

$$\mu = F \circ \eta \circ U.$$

Entonces para cada $M \in \mathbf{R} - \mathbf{Mod}$ se tiene que

$$\mu_M = F(\eta_{U(M)}) : R^{(U(M))} \to R^{(U(R^{(U(M))}))}$$

y así

$$\begin{aligned}\mu_M(f) =& \mu_M\big(\sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_m\big)\\ =& F(\eta_{U(M)})\big(\sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_m\big)\\ =& \sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_{\eta_{U(M)}(m)}\\ =& \sum_{m \in M} f(m) \cdot \delta_{\delta_m}\end{aligned}$$

para todo $f \in R^{(U(M))}$.

Observación 4. *A lo largo de este trabajo el coproducto de la comónada se denota por δ, en esta ocasión para no causar confusión con los elementos de la base de $R^{(M)}$, se denota por μ al coproducto.*

3. Un objeto semi-simplicial de interés

Una vez calculada la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$ es posible seguir con la construcción que se busca ejemplificar, en esta etapa se analiza el objeto semi-simplicial inducido por la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$.

Sea $M \in \mathbf{R-Mod}$. Considere el funtor $\Delta : \mathbf{R-Mod} \to \mathbf{SS}(\mathbf{R-Mod})$, entonces

$$\Delta(M) = \{\{T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$$

es un objeto semi-simplicial en $\mathbf{R-Mod}$. A continuación se describen las colecciones que componen al objeto semi-simplicial $\Delta(M)$.

Sea $n \geq 1$, observe que

$$T^n(M) = (F \circ U)^n(M) = R^{(U(T^{n-1}(M)))} = R^{(T^{n-1}(M))}.$$

Un elemento en $T^n(M)$ es una función $f : T^{n-1}(M) \to R$ tal que $f(g) \neq 0$ para una cantidad finita de elementos $g \in T^{n-1}(M)$.

En lo que respecta a los morfismos cara se cumple lo siguiente:

1. Si $i = 0$. Dado que $\varepsilon_0^n = T^0(\varepsilon_{T^{n-0}(M)}) : T^{n+1}(M) \to T^n(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^n(f) =& \varepsilon_0^n\big(\sum_{g \in T^n(M)} f(g) \cdot \delta_g\big) \\
=& T^0(\varepsilon_{T^{n-0}(M)})\big(\sum_{g \in T^n(M)} f(g) \cdot \delta_g\big) \\
=& \varepsilon_{T^n(M)}(\sum_{g \in T^n(M)} f(g) \cdot \delta_g) \\
=& \sum_{g \in T^n(M)} f(g) \cdot g
\end{aligned}$$

   para todo $f \in T^{n+1}(M)$.

2. Si $0 < i \leq n$. Dado que $\varepsilon_i^n = T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(M)}) : T^{n+1}(M) \to T^n(M)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_i^n(f) =&\varepsilon_i^n\big(\sum_{g\in T^n(M)} f(g)\cdot\delta_g\big)\\
=&T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(M)})\big(\sum_{g\in T^n(M)} f(g)\cdot\delta_g\big)\\
=&T(T^{i-1}(\varepsilon_{T^{n-i}(M)}))\big(\sum_{g\in T^n(M)} f(g)\cdot\delta_g\big)\\
=&\sum_{g\in T^n(M)} f(g)\cdot\delta_{T^{i-1}(\varepsilon_{T^{n-i}(M)})(g)}
\end{aligned}
$$

para todo $f\in T^{n+1}(M)$.

Una vez examinados los morfismos cara se obtiene el siguiente resultado, el cual de cierta manera es inesperado.

PROPOSICIÓN 35. *Sea $M\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$ y considere el objeto semi-simplicial*

$$\Delta(M)=\{\{T^n(M)\}_{n=1}^{\infty},\{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(M)\to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}.$$

Se define

$$d_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varepsilon_i^n : T^{n+1}(M)\to T^n(M)$$

Entonces

$$\mathcal{P}=\{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M)\to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión exacta.

DEMOSTRACIÓN. Sea $n\geq 1$.
Se comienza probando que $Im(d_n)\subseteq Nuc(d_{n-1})$.

$$\begin{aligned}
d_{n-1}\circ d_n =& d_{n-1}\big(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\varepsilon_j^n\big)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\varepsilon_i^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\varepsilon_j^n\big)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)+\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)+\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j}\varepsilon_{j-1}^{n-1}\circ\varepsilon_i^n\big)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)+\sum_{j=1}^{n}\big(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\varepsilon_{j-1}^{n-1}\circ\varepsilon_i^n\big)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)+\sum_{i=0}^{n-1}\big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j+1}\varepsilon_i^{n-1}\circ\varepsilon_j^n\big)\\
=&0,
\end{aligned}$$

lo anterior prueba la primer contención antes mencionada. Antes de probar la contención restante se realiza una observación.

Observación. Por definición se tiene que

$$d_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varepsilon_i^n : T^{n+1}(M)\to T^n(M).$$

Desarrollando los primeros términos se puede notar que

$$\begin{aligned}
d_1 =&\varepsilon_{T(M)} - T(\varepsilon_M)\\
d_2 =&\varepsilon_{T^2(M)} - T(\varepsilon_{T(M)}) + T^2(\varepsilon_M)\\
d_3 =&\varepsilon_{T^3(M)} - T(\varepsilon_{T^2(M)}) + T^2(\varepsilon_{T(M)}) - T^3(\varepsilon_M)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se pueden reescribir los términos anteriores de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
d_1 =& \varepsilon_{T(M)} - T(\varepsilon_M) \\
d_2 =& \varepsilon_{T^2(M)} - T(d_1) \\
d_3 =& \varepsilon_{T^3(M)} - T(d_2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En general se cumple que

(13) $$d_n = \varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1}).$$

La demotración de este hecho se presenta al concluir el resultado.

Una vez hecha la observación es posible continuar con la demostración. Resta probar que $Nuc(d_{n-1}) \subseteq Im(d_n)$.

Sea $g \in Nuc(d_{n-1})$, es decir $g \in T^n(M)$ es tal que

$$d_{n-1}(g) = d_{n-1}\Big(\sum_{h \in T^{n-1}(M)} g(h) \cdot \delta_h\Big) = 0.$$

Se busca $f \in T^{n+1}(M)$ tal que

$$d_n(f) = g.$$

Caso 1. Si $g \neq 0$.
Se propone $f : T^n(M) \to R$ la cual se define como:

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = g \\ -1 & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en general f es de la forma

$$f = \sum_{s \in T^n(M)} f(s) \cdot \delta_s.$$

Con la observación anterior en mente se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
d_n(f) =&(\varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1}))(f)\\
=&\varepsilon_{T^n(M)}(f) - T(d_{n-1})(f)\\
=&\varepsilon_{T^n(M)}\big(\sum_{s\in T^n(M)} f(s)\cdot\delta_s\big) - T(d_{n-1})\big(\sum_{s\in T^n(M)} f(s)\cdot\delta_s\big)\\
=&\sum_{s\in T^n(M)} f(s)\cdot s - \sum_{s\in T^n(M)} f(s)\cdot\delta_{d_{n-1}(s)}\\
=&\big(f(0)\cdot 0 + f(g)\cdot g\big) - \big(f(0)\cdot\delta_{d_{n-1}(0)} + f(g)\cdot\delta_{d_{n-1}(g)}\big)\\
=&\big(f(0)\cdot 0 + f(g)\cdot g\big) - \big(f(0)\cdot\delta_0 + f(g)\cdot\delta_0\big)\\
=&\big(1\cdot g\big) - \big(-1\cdot\delta_0 + 1\cdot\delta_0\big)\\
=&g
\end{aligned}
$$

Caso 2. Si $g = 0$.
Se cumple que $f = 0 \in T^{n+1}(M)$ satisface

$$d_n(f) = d_n(0) = 0 = g$$

En cualquier caso se puede concluir que

$$Nuc(d_{n-1}) \subseteq Im(d_n)$$

por lo tanto

$$\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión exacta. □

OBSERVACIÓN 5. *Vale la pena realizar un par de comentarios con respecto a la prueba de la proposición anterior. Es importante resaltar que cuando se estudia la primer contención, es evidente que la única herramienta aplicada es la identidad semi-simplicial, por lo que la primer contención se puede pensar valida para objetos semi-simpliciales en cualquier categoría, salvo por un problema. Note que se trabajo en **R − Mod**, en tal categoría existe la noción de sumar morfismos.*

LEMA 4. *Sea $M \in$ **R − Mod** y considere las hipótesis de la proposición anterior. Se cumple que*

$$d_n = \varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1})$$

para cada $n \geq 1$, donde $d_0 = \varepsilon_M$.

DEMOSTRACIÓN. Se procede por inducción.

Caso base. $n = 1$. Es claro que

$$\begin{aligned} d_1 =& \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \varepsilon_i^1 \\ =& \sum_{i=0}^{1} (-1)^i T^i(\varepsilon_{T^{1-i}(M)}) \\ =& \varepsilon_{T(M)} - T(\varepsilon_M) \\ =& \varepsilon_{T(M)} - T(d_0) \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción. Suponga cierto el resultado para $n \geq 1$. Es decir,

$$d_n = \varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1})$$

se satisface.

Paso inductivo. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{T^{n+1}(M)} - T(d_n) =& \varepsilon_{T^{n+1}(M)} - T(\varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1})) \\ =& \varepsilon_{T^{n+1}(M)} - T(\varepsilon_{T^n(M)}) + T^2\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i T^i(\varepsilon_{T^{n-1-i}(M)})\Big) \\ =& \varepsilon_{T^{n+1}(M)} - T(\varepsilon_{T^n(M)}) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i T^{i+2}(\varepsilon_{T^{n-1-i}(M)}) \\ =& \varepsilon_{T^{n+1}(M)} - T(\varepsilon_{T^n(M)}) + \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j-2} T^j(\varepsilon_{T^{n+1-j}(M)}) \\ =& \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k T^k(\varepsilon_{T^{n+1-k}(M)}) \\ =& \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \varepsilon_k^{n+1} \\ =& d_{n+1} \end{aligned}$$

Lo cual concluye el resultado. $\square$

COROLARIO 3. *Sea* $M \in \boldsymbol{R-Mod}$ *y considere la sucesión exacta*

$$\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$$

Entonces $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$ *es una resolución proyectiva de* M*. El siguiente diagrama ilustra tal resolución proyectiva de* M*.*

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\varepsilon_M} R^{(M)} \xleftarrow{d^1} R^{(R^{(M)})} \xleftarrow{d^2} \cdots \xleftarrow{d_{n-1}} R^{(T^{n-1}(M))} \xleftarrow{d_n} \cdots$$

Demostración. Por la proposición 22 del capítulo 3, se sabe que $\varepsilon_M : R^{(M)} \to M$ es un epimorfismo, lo cual implica que

$$Im(\varepsilon_M) = M = Nuc(0).$$

Por lo tanto la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \xleftarrow{0} M \xleftarrow{\varepsilon_M} R^{(M)}$$

Por otra parte, sea $n \geq 1$. Observe que $T^{n-1}(M)$ es una base para el módulo $T^n(M)$, es así que $T^n(M)$ es un módulo libre y por lo tanto proyectivo. Los argumentos antes expuestos permiten concluir que

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$$

es una resolución proyectiva de M.

□

4. Objetos de grupo abeliano

Antes de concluir con los grupos de cohomología inducidos por la comónada libre, es necesario identificar a los objetos de grupo abeliano en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$.

Proposición 36. *Todos los objetos en* $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$ *son objetos de grupo abeliano.*

Demostración. Por una parte es claro que todo objeto de grupo abeliano N en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ es un $R-$módulo.

Para lo correspondiente a la afirmación reciproca se tiene lo siguiente. Sean $N, X \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. Es bien sabido $Hom_R(X, N)$ no es un $R-$módulo en general, pero si un grupo abeliano. Se denota por

$$m_X : Hom_R(X, N) \times Hom_R(X, N) \to Hom_R(X, N)$$

a la operación binaria que le da estructura de grupo abeliano. Considere el funtor

$$F : \mathbf{R}-\mathbf{Mod}^{op} \to \mathbf{Ab}$$

que a nivel de objetos cumple

$$F(X) = (Hom_R(X, N), m_X)$$

Además este satisface hacer conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R-Mod}^{op} \arrow[rr, "Hom_R(\_,N)"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathbf{Set} \\ & \mathbf{Ab} \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

Resta probar que $F : \mathbf{R-Mod}^{op} \to \mathbf{Ab}$ es único. Suponga que existe $H : \mathbf{R-Mod}^{op} \to \mathbf{Ab}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R-Mod}^{op} \arrow[rr, "Hom_R(\_,N)"] \arrow[dr, "H"'] & & \mathbf{Set} \\ & \mathbf{Ab} \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

De lo anterior se cumple que

$$\begin{aligned} Hom_R(X,N) =& U(F(X)) \\ =& U(Hom_R(X,N), m_X)) \\ =& U(H(X)) \end{aligned}$$

para cada $X \in \mathbf{R-Mod}$. Lo anterior implica que $H(X) = (Hom_R(X,N), n_X)$, donde n_X denota a una operación binaria.

Es decir, lo único diferente que puede hacer el funtor $H : \mathbf{R-Mod}^{op} \to \mathbf{Ab}$, es dar estructura de grupo abeliano al conjunto $Hom_R(X,N)$ con una operación diferente, a saber

$$n_X : Hom_R(X,N) \times Hom_R(X,N) \to Hom_R(X,N)$$

Si se prueba que $m_X = n_X$ para cada $X \in \mathbf{R-Mod}$ habrá concluido la demostración, pues en ese caso $F = H$.

Como $(Hom_R(X,N), m_X)$ es un grupo abeliano, se deduce que $Hom_R(X,N)$ es un objeto de grupo en **Grp** y por lo tanto

$$m_X : Hom_R(X,N) \times Hom_R(X,N) \to Hom_R(X,N)$$

es un morfismo en **Grp**, de tal manera que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_X(n_X(f_1,f_2), n_X(g_1,g_2)) =& m_X((f_1,g_1) \oplus (f_2,g_2)) \\ =& n_X(m_X(f_1,g_1), m_X(f_2,g_2)) \end{aligned}$$

para todo $f_1, f_2, g_1, g_2 \in Hom_R(X,N)$. Donde $\oplus$ denota la operación del grupo $Hom_R(X,N) \times Hom_R(X,N)$ inducida por n_X.

Como consecuencia del lema de Eckmann-Hilton se deduce que $m_X = n_X$ para cada $X \in \mathbf{C}$ y por lo tanto $H = F$, pues la asignación en morfismos es la misma.

Haciendo referencia al resultado 15 del capítulo 2, se concluye que N es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. □

5. Grupos de cohomología inducidos por una comónada en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$

Desde la sección 3 del presente capítulo se puede inferir que los grupos de cohomología inducidos por la comónada libre $\mathbf{T}_{F,U}$ coinciden con los grupos de extension, pero formalmente faltaba identificar a los objetos de grupo abeliano en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. Una vez realizado esto último bajo todo rigor se puede enunciar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 37. *Sea $\boldsymbol{T}_{F,U}$ la comónada inducida por la adjunción libre en $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$, considere además M, N un par de $R-$módulos, entonces*

$$H^n(M,N)_{\boldsymbol{T}_{F,U}} = Ext^n_R(M,N)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean M, N un par de $R-$módulos, por la proposición 3 se sabe que

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$$

es una resolución proyectiva de M, donde $\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$.

Por definición se tiene que

$$Ext^n_R(M,N) = H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N))$$

Por otra parte, como N es un $R-$módulo, por lo estudiado en la sección anterior se sabe que N es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$, por consiguiente:

$$\begin{aligned} H^n(M,N)_{\mathbf{T}_{F,U}} =& H^n(\Lambda(\Delta(M), N)) \\ =& H^n(Hom_R(\mathcal{P}_\bullet, N)) \\ =& Ext^n_R(M,N) \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Capítulo 6

Grupos de cohomología inducidos por una comónada en $\pi - \mathbf{Set}$

Buscando ilustrar una vez mas a la cohomología comonádica el presente capítulo encuentra justificación. En esta ocasión la comónada a estudiar radica en la categoría $\pi - \mathbf{Set}$.

El objetivo principal de este capítulo es demostrar que la cohomología de grupos expuesta en [**6**] por S.Eilenberg es un caso particular de la cohomología comonádica.

Es por tanto que se demuestra lo siguiente:

$$H^n(1, M)_{\mathbf{T}_{F,U}} \cong H^n(\pi, M)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Donde π es un grupo, M un $\pi-$módulo y 1 el objeto terminal de $\pi - \mathbf{Set}$.

1. $\pi-$conjuntos

Definición 18. *Sean $(\pi, *, e)$ un grupo y X un conjunto. Una acción izquierda de π sobre X, es una función*

$$\varphi : \pi \times X \to X$$

tal que se cumple lo siguiente:

1. *$e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.*
2. *$(a * b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ para todo $a, b \in \pi$, $x \in X$.*

donde $a \cdot x$ denota a la imagen de la pareja $(a, x) \in \pi \times X$ bajo la función φ.

Definición 19. *Sean $(\pi, *)$ un grupo y X un conjunto. Se dice que X es un $\pi-$conjunto si existe una acción izquierda de π sobre X.*

Definición 20. *Sean $(\pi, *)$ un grupo y X, Y un par de $\pi-$conjuntos. Se dice que $f : X \to Y$ es una función $\pi-$equivariante si:*

$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

para todo $a \in \pi$, $x \in X$.

El par de definiciones anteriores motivan la siguiente proposición.

Proposición 38. *Sea π un grupo. La colección de $\pi - conjuntos$ y funciones $\pi - equivariantes$ forman una categoría, la cual se denota por $\pi - \boldsymbol{Set}$.*

Demostración. Sean X, Y un par de $\pi - conjuntos$, se denota por $Hom_{\pi}(X, Y)$ a la colección de funciones $\pi - equivariantes$ de X en Y.

En lo que respecta a la composición se tiene lo siguiente. Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones $\pi - equivariantes$, considere la composición usual de funciones, entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a \cdot x) =& g(a \cdot f(x))\\ =& a \cdot g(f)(x)\\ =& a \cdot (g \circ f)(x)\end{aligned}$$

para todo $a \in \pi$, $x \in X$. Es así que $g \circ f$ es una función $\pi - equivariante$. En conclusión

$$\circ : Hom_{\pi}(Y, Z) \times Hom_{\pi}(X, Y) \to Hom_{\pi}(X, Z)$$

es una función. En cuanto al axioma correspondiente a la asociatividad de la composición este se satisface pues se trabaja con la composición usual de funciones.

Para finalizar. Sea X un $\pi - conjunto$. Considere la función identidad $1_X \in Hom_{\mathbf{Set}}(X, X)$. Observe que

$$1_X(a \cdot x) = a \cdot x = a \cdot 1_X(x)$$

para todo $a \in \pi$, $x \in X$. En consecuencia $1_X \in Hom_{\pi}(X, X)$. Los correspondientes axiomas de las identidades se satisfacen ya que se trabaja con la composición usual de funciones.

Esto concluye que $\pi - \mathbf{Set}$ es una categoría. □

La siguiente proposición plantea una forma de asignar a cualquier conjunto X un $\pi-$conjunto de manera canónica. Cabe mencionar que no es la única forma, pues cualquier conjunto se puede ver como un $\pi-$conjunto bajo la acción trivial.

Proposición 39. *Sean $(\pi, *)$ un grupo y X un conjunto, entonces $\pi \times X$ es un $\pi - conjunto$.*

Demostración. Se define $\varphi : \pi \times (\pi \times X) \to \pi \times X$ como

$$a \cdot (b, x) = (a * b, x)$$

para todo $a, b \in \pi$, $x \in X$. Se debe probar que tal asignación es una acción izquierda de π sobre X. Por una parte

$$e \cdot (a, x) = (e * a, x) = (a, x)$$

para todo $(a, x) \in \pi \times X$. Por otra parte

$$\begin{aligned}(a * b) \cdot (c, x) =&((a * b) * c, x)\\ =&(a * (b * c), x)\\ =&a \cdot (b * c, x)\\ =&a \cdot (b \cdot (c, x))\end{aligned}$$

para todo $a, b, c \in \pi$, $x \in X$. Lo anterior permite concluir que $\pi \times X$ es un $\pi-$ *conjunto*. □

Una vez expuestos los prerequisitos necesarios para trabajar con $\pi-$conjuntos, el primer paso a desarrollar es plantear una situación de adjunción.

2. Un adjunción del tipo libre

Una adjunción del tipo libre es aquella donde el funtor adjunto derecho es el funtor que olvida, mientras que el adjunto izquierdo se conoce como funtor libre, a continuación se precisa tal funtor.

PROPOSICIÓN 40. *Sea π un grupo. Se definen la asignación*

$$F : \boldsymbol{Set} \to \pi - \boldsymbol{Set}$$

que a nivel de objetos, para $X \in \boldsymbol{Set}$, se define

$$F(X) = \pi \times X$$

y a nivel de morfismos, para $f : X \to Y$ un morfismo en $\boldsymbol{Set}$, se define

$$F(f) = 1_\pi \times f : \pi \times X \to \pi \times Y.$$

Entonces $F : \boldsymbol{Set} \to \pi - \boldsymbol{Set}$ es un funtor.

DEMOSTRACIÓN. Se comienza estudiando la asignación en morfismos. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en **Set**, entonces

$$\begin{aligned}F(f)(a \cdot (b, x)) =&(1_\pi \times f)(a * b, x)\\ =&(a * b, f(x))\\ =&a \cdot (b, f(x))\\ =&a \cdot (1_\pi \times f)(b, x)\\ =&a \cdot F(f)(b, x)\end{aligned}$$

para todo $a, b \in \pi$, $x \in X$. En consecuencia $F(f) : \pi \times X \to \pi \times Y$ es una función $\pi -$ *equivariante* y por tanto un morfismo en $\pi -$ **Set**.

En lo que respecta a la composición se tiene lo siguiente. Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos en **Set**. Por una parte se sabe que

$$1_\pi \times (g \circ f) = (1_\pi \times g) \circ (1_\pi \times f),$$

entonces

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Por otra parte se sabe que

$$1_\pi \times 1_X = 1_{\pi \times X},$$

entonces

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

para todo $X \in \mathbf{Set}$. Los argumentos anteriores permiten concluir que $F : \mathbf{Set} \to \pi - \mathbf{Set}$ es un funtor. $\square$

Proposición 41. *Sea $(\pi, *)$ un grupo. Los funtores*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \pi - \boldsymbol{Set} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

son adjuntos, con F el adjunto izquierdo. U denota al funtor que olvida.

Demostración. La estrategia para demostrar la proposición es la usual, se busca proponer la unidad, la counidad y verificar que se satisfacen las identidades triangulares.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, para la unidad $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \to U \circ F$ se busca definir

$$\eta_X : X \to U(\pi \times X)$$

un morfismo en **Set**, la cual tiene por regla de correspondencia

$$\eta_X(x) = (e, x)$$

para todo $x \in X$. Se prueba que $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \to U \circ F$ es una transformación natural.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo en **Set**, entonces

$$\begin{aligned}(\eta_Y \circ f)(x) =& \eta_Y(f(x))\\ =&(e, f(x))\\ =&(1_\pi \times f)(e, x)\\ =&U(F(f))(e, x)\\ =&(U(F(f)) \circ \eta_X)(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ \pi \times X \arrow[r, "U(F(f))"'] & \pi \times Y \end{tikzcd}$$

De lo anterior se concluye que $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \to U \circ F$ es una transformación natural.

Sea $X \in \pi - \mathbf{Set}$. Para la counidad $\varepsilon : F \circ U \to 1_{\pi-\mathbf{Set}}$ se busca definir

$$\varepsilon_X : \pi \times U(X) \to X$$

tal que sea un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$, es así que se propone la siguiente regla de correspondencia

$$\varepsilon_X(a, x) = a \cdot x$$

para todo $a \in \pi$, $x \in X$.

En lo que respecta a lo $\pi-$equivariante se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_X(a \cdot (b, x)) =& \varepsilon_X(a * b, x) \\ =& (a * b) \cdot x \\ =& a \cdot (b \cdot x) \\ =& a \cdot \varepsilon_X(b, x) \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \pi$, $x \in X$. Es así que ε_X es un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$.

Resta probar que $\varepsilon : F \circ U \to 1_{\pi-\mathbf{Set}}$ es natural.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$, entonces

$$\begin{aligned} (\varepsilon_Y \circ F(U(f)))(a, x) =& \varepsilon_Y(1_\pi \times U(f)(a, x)) \\ =& \varepsilon_Y(a, f(x)) \\ =& a \cdot f(x) \\ =& f(a \cdot x) \\ =& (f \circ \varepsilon_X)(a, x) \end{aligned}$$

para todo $a \in \pi$, $x \in X$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi \times X \arrow[r, "F(U(f))"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & \pi \times Y \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

De esto se concluye que $\varepsilon : F \circ U \to 1_{\pi-\mathbf{Set}}$ es una transformación natural.

Para finalizar, falta demostrar que se satisfacen las identidades triangulares.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X))(a,x) =& \varepsilon_{F(X)}(1_\pi \times \eta_X(a,x))\\ =&\varepsilon_{F(X)}(a, \eta_X(x))\\ =&\varepsilon_{\pi\times X}(a,(e,x))\\ =&a \cdot (e,x)\\ =&(a * e, x)\\ =&(a,x)\\ =&1_{\pi\times X}(a,x)\\ =&1_{F(X)}(a,x)\end{aligned}$$

para todo $a \in \pi$, $x \in X$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\circ\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & F\circ U\circ F \arrow[d, "\varepsilon\circ F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Sea $X \in \pi - \mathbf{Set}$, entonces

$$\begin{aligned}(U(\varepsilon_X) \circ \eta_{U(X)})(x) =& U(\varepsilon_X)(\eta_X(x))\\ =&U(\varepsilon_X)(e,x)\\ =&\varepsilon_X(e,x)\\ =&e \cdot x\\ =&x\\ =&1_{U(X)}(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta\circ U"] \arrow[dr, "1_U"'] & U\circ F\circ U \arrow[d, "U\circ\varepsilon"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(F,U) : \mathbf{Set} \to \pi - \mathbf{Set}$ son funtores adjuntos. $\square$

3. De una comónada a un objeto semi-simplicial en $\pi - \mathbf{Set}$

En esta sección se precisan las componentes de la comónada

$$\mathbf{T}_{F,U} = (F \circ U, \varepsilon, F \circ \eta \circ U)$$

inducida por el par de funtores adjuntos $(F, U) : \mathbf{Set} \to \pi - \mathbf{Set}$, para después estudiar el objeto semi-simplicial inducido por esta.

1. Para el funtor $T = F \circ U : \pi - \mathbf{Set} \to \pi - \mathbf{Set}$, a nivel de objetos se tiene que
$$T(X) = F(U(X)) = \pi \times U(X)$$
para cada $X \in \pi - \mathbf{Set}$. Mientras que a nivel de morfismos se tiene que
$$T(f) = F(U(f)) = 1_\pi \times U(f) : \pi \times U(X) \to \pi \times U(Y)$$
para todo morfismo $f : X \to Y$ en $\pi - \mathbf{Set}$.
2. La counidad de la comónada coincide con la counidad de la adjunción, entonces para cada $X \in \pi - \mathbf{Set}$ se tiene que
$$\varepsilon_X : \pi \times U(X) \to X$$
y así
$$\varepsilon_X(a, x) = a \cdot x$$
para todo $a \in \pi$, $x \in X$.
3. El coproducto de la comónada $\delta : T \to T \circ T$ resulta de la siguiente composición
$$\delta = F \circ \eta \circ U,$$
entonces para cada $X \in \pi - \mathbf{Set}$ se tiene que
$$\delta_X = F(\eta_{U(X)}) : \pi \times U(X) \to \pi \times U(\pi \times U(X))$$
y así
$$\begin{aligned} \delta_X(a, x) =& F(\eta_{U(X)})(a, x) \\ =& (1_\pi \times \eta_{U(X)})(a, x) \\ =& (a, (e, x)) \end{aligned}$$
para todo $a \in \pi$, $x \in X$.

Una vez precisadas las componentes de la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$ es posible profundizar en el objeto semi-simplicial inducido por esta.

Sea $X \in \pi - \mathbf{Set}$. Considere el funtor $\Delta : \pi - \mathbf{Set} \to \mathbf{SS}(\pi - \mathbf{Set})$, entonces

$$\Delta(X) = \{\{T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(X) \to T^n(X)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$$

es un objeto semi-simplicial en $\pi - \mathbf{Set}$. A continuación se describen las colecciones que componen al objeto semi-simplicial $\Delta(X)$.

Sea $n \geq 1$, observe que

$$T^n(X) = \pi^n \times X$$

donde la acción izquierda de π sobre $\pi^n \times X$ es la dada por

$$a \cdot (a_1, ..., a_n, x) = (a * a_1, ..., a_n, x)$$

para todo $a, a_1, ..., a_n \in \pi$, $x \in X$.

En lo que respecta a los morfismos cara se cumple lo siguiente:

1. Si $0 \leq i < n$. Dado que $\varepsilon_i^n = T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)}) : \pi^{n+1} \times X \to \pi^n \times X$, entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^n(a_1, ..., a_{n+1}, x) =& T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(X)})(a_1, ..., a_{n+1}, x) \\
=& (1_{\pi^i} \times \varepsilon_{\pi^{n-i} \times X})(a_1, ..., a_{n+1}, x) \\
=& (1_{\pi^i}(a_1, ..., a_i), \varepsilon_{\pi^{n-i} \times X}(a_{i+1}, ..., a_{n+1}, x)) \\
=& (a_1, ..., a_i, a_{i+1} \cdot (a_{i+2}, ..., a_{n+1}, x)) \\
=& (a_1, ..., a_i, a_{i+1} * a_{i+2}, a_{i+3}, ..., a_{n+1}, x)
\end{aligned}$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in \pi$, $x \in X$.

2. Si $i = n$. Dado que $\varepsilon_n^n = T^n(\varepsilon_{T^{n-n}(X)}) : \pi^{n+1} \times X \to \pi^n \times X$, entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^n(a_1, ..., a_{n+1}, x) =& T^n(\varepsilon_{T^{n-n}(X)})(a_1, ..., a_{n+1}, x) \\
=& T^n(\varepsilon_X)(a_1, ..., a_{n+1}, x) \\
=& (1_{\pi^n} \times \varepsilon_X)(a_1, ..., a_{n+1}, x) \\
=& (1_{\pi^n}(a_1, ..., a_n), \varepsilon_X(a_{n+1}, x)) \\
=& (a_1, ..., a_n, a_{n+1} \cdot x)
\end{aligned}$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in \pi$, $x \in X$.

4. Objetos de grupo abeliano

Para desarrollar completamente la teoría resta identificar a los objetos de grupo abeliano en $\pi - \mathbf{Set}$. Tales objetos coinciden con un objeto matemático muy bien conocido.

DEFINICIÓN 21. *Sea $(\pi, *)$ un grupo y $(M, +)$ un grupo abeliano. Se dice que M es un $\pi-$módulo si existe una acción izquierda de π sobre M tal que:*

$$g \cdot (m + n) = g \cdot m + g \cdot n$$

para todo $g \in \pi$, $m, n \in M$.

Proposición 42. *Sea π un grupo. M es un objeto de grupo abeliano en $\pi - \textbf{\textit{Set}}$ si y sólo si M es un $\pi-$módulo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea M un objeto de grupo abeliano en $\pi - \mathbf{Set}$. En particular M es un objeto de grupo abeliano en **Set**, por lo que (M, μ) es un grupo abeliano. Resta probar que la acción izquierda satisface

$$g \cdot \mu(m, n) = \mu(g \cdot m, g \cdot n)$$

para todo $g \in \pi$, $m, n \in M$.

Como $\mu : M \times M \to M$ es un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu(g \cdot m, g \cdot n) &= \mu(g \cdot (m, n)) \\ &= g \cdot \mu(m, n) \end{aligned}$$

lo que prueba que M es un $\pi-$módulo.

$\Leftarrow$) Sea $(M, +, 0)$ un $\pi-$módulo. En particular M es un grupo abeliano, lo anterior implica que M es un objeto de grupo abeliano en **Set** acompañado de los morfismos canónicos. El argumento anterior permite recuperar la conmutatividad de los diagramas de interés. Resta probar que los morfismos que dan estructura de objeto de grupo a M son $\pi-$equivariantes.

Considere el morfismo multiplicación $\mu : M \times M \to M$ en **Set**, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu(g \cdot (m, n)) &= \mu(g \cdot m, g \cdot n) \\ &= g \cdot m + g \cdot n \\ &= g \cdot (m + n) \\ &= g \cdot \mu(m, n) \end{aligned}$$

para todo $g \in \pi$, $m, n \in M$. La tercera igualdad es válida, pues M es un $\pi-$módulo. De lo anterior se puede concluir que $\mu : M \times M \to M$ es un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$.

En la categoría $\pi - \mathbf{Set}$ el objeto terminal es aquel conjunto que consta de un único elemento y esta dotado de la acción izquierda trivial. Se denota por 1 a tal $\pi-$conjunto.

Considere el morfismo neutro $\lambda : 1 \to M$ en **Set**, cabe mencionar que tal morfismo asigna al único elemento de 1 en el elemento neutro del grupo M. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda(g \cdot *) =& \lambda(*)\\ =& 0\\ =& g \cdot 0\\ =& g \cdot \lambda(*)\end{aligned}$$

para todo $g \in \pi$. Por lo tanto $\lambda : 1 \to M$ es un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$.

Considere el morfismo $\gamma : M \to M$ en **Set** que asigna a cada elemento su inverso, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma(g \cdot m) =& -(g \cdot m)\\ =& g \cdot (-m)\\ =& g \cdot \gamma(m)\end{aligned}$$

para todo $g \in \pi$, $m \in M$. Por lo tanto $\gamma : M \to M$ es un morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$.

El par de argumentos anteriores permiten concluir que M es un objeto de grupo abeliano en $\pi - \mathbf{Set}$. $\square$

5. Grupos de cohomología inducidos por una comónada en $\pi - \mathbf{Set}$

En la presente sección se demuestra que la cohomología de grupos expuesta en [**6**] por S.Eilenberg es un caso particular de la cohomología comonádica.

Antes, es necesarios precisar a la cohomología de grupos por medio de un complejo de cocadenas, con la intención de manipular sus componentes sin inconvenientes.

Cohomología de grupos.

Sean $(\pi, *)$ un grupo y $(M, +)$ un $\pi-$módulo.

Para $n \geq 0$, se denota por

$$C^n(\pi, M) = \{f : \pi^n \to M \mid f \text{ es una función}\}$$

al conjunto formado por todas las funciones de π^n en M, el cual tiene estructura de grupo donde la operación es la inducida por evaluar puntualmente.

Se define $d^{n+1} : C^n(\pi, M) \to C^{n+1}(\pi, M)$ como

$$\begin{aligned} d^{n+1}(f)(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) =& a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, a_2, \ldots, a_i * a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

para todo $a_1, a_2, ..., a_{n+1} \in \pi$.

Después de considerar el complejo de cocadenas de grupos abelianos

$$C^\bullet(\pi, M) = \{\{C^n(\pi, M)\}_{n=0}^{\infty}, \{d^n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

$H^n(\pi, M)$ denota al n-ésimo grupo de cohomología de π sobre M.

PROPOSICIÓN 43. *Sean $(\pi, *)$ un grupo, $(M, +)$ un $\pi-$módulo y considere la comónada $\boldsymbol{T}_{F,U}$ inducida por la adjunción 41, entonces*

$$H^n(1, M)_{\boldsymbol{T}_{F,U}} \cong H^n(\pi, M)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. La estrategia a seguir es la siguiente. Se busca un isomorfismo entre los respectivos complejos de cocadenas para concluir que los correspondientes grupos de cohomología son isomorfos.

En lo que resta del capítulo "z" denota al único elemento del objeto terminal 1 de la categoría $\pi - \mathbf{Set}$, es decir $1 = \{z\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define

$$\varphi^n : C^n(\pi, M) \to Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M)$$

como

$$\varphi^n(f)(a_1, ..., a_{n+1}, z) = a_1 \cdot f(a_2, ..., a_{n+1})$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in \pi$.

Para saber que la asignación anterior esta bien definida, es necesario probar que $\varphi^n(f)$ es una función $\pi-$*equivariante* para toda $f \in C^n(\pi, M)$. Para en una segunda etapa demostrar que $\varphi = \{\varphi^n : C^n(\pi, M) \to Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M)\}_{n=0}^{\infty}$ es un morfismo de complejos de cocadenas.

Respecto a lo $\pi-$equivariante se cumple lo siguiente. Sea $f \in C^n(\pi, M)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi^n(f)(a \cdot (a_1, ..., a_{n+1}, z)) =& \varphi^n(f)(a * a_1, ..., a_{n+1}, z) \\
=& (a * a_1) \cdot f(a_2, ..., a_{n+1}) \\
=& a \cdot (a_1 \cdot f(a_2, ..., a_{n+1})) \\
=& a \cdot \varphi^n(f)(a_1, ..., a_{n+1}, z)
\end{aligned}$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in \pi$. En consecuencia $\varphi^n(f)$ es una función $\pi-$equivariante y por tanto un elemento en $Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M)$.

Resta verificar que el siguiente diagrama conmuta, esto con motivo de probar que φ es un morfismo de complejos de cocadenas.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C^n(\pi, M) \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & C^{n+1}(\pi, M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M) \arrow[r, "\partial^{n+1}"'] & Hom_\pi(\pi^{n+2} \times 1, M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Sea $f \in C^n(\pi, M)$ y $(a_1, ..., a_{n+2}, z) \in \pi^{n+2} \times 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\varphi^{n+1} \circ d^{n+1})(f)(a_1, \ldots, a_{n+2}, z) =& \varphi^{n+1}(d^{n+1}(f))(a_1, \ldots, a_{n+2}, z) \\
=& a_1 \cdot (d^{n+1}(f)(a_2, \ldots, a_{n+2})) \\
=& a_1 \cdot (a_2 \cdot f(a_3, \ldots, a_{n+2}) \\
&+ \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j-1} f(a_2, \ldots, a_j * a_{j+1}, \ldots, a_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1} f(a_2, \ldots, a_{n+1})) \\
=& (a_1 * a_2) \cdot f(a_3, \ldots, a_{n+2}) \\
&+ \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j-1} a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_j * a_{j+1}, \ldots, a_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1} a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_{n+1}) \\
=& \varphi^n(f)(a_1 * a_2, a_3, \ldots, a_{n+2}, z) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi^n(f)(a_1, a_2, \ldots, a_{i+1} * a_{i+2}, \ldots, a_{n+2}, z) \\
&+ (-1)^{n+1} \varphi^n(f)(a_1, \ldots, a_{n+1}, z) \\
=& \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i Hom_\pi(\varepsilon_i^{n+1}, M)(\varphi^n(f))(a_1, \ldots, a_{n+2}, z) \\
=& \partial^{n+1}(\varphi^n(f))(a_1, \ldots, a_{n+2}, z) \\
=& (\partial^{n+1} \circ \varphi^n)(f)(a_1, \ldots, a_{n+2}, z)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\varphi = \{\varphi^n : C^n(\pi, M) \to Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M)\}_{n=0}^{\infty}$ es un morfismo de complejos de cocadenas.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define

$$\psi^n : Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M) \to C^n(\pi, M)$$

como

$$\psi^n(f)(a_1, ..., a_n) = f(e, a_1, ..., a_n, z)$$

para todo $a_1, ..., a_n \in \pi$. Se busca probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M) \arrow[r, "\partial^{n+1}"] \arrow[d, "\psi^n"'] & Hom_\pi(\pi^{n+2} \times 1, M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^{n+1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C^n(\pi, M) \arrow[r, "d^{n+1}"'] & C^{n+1}(\pi, M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}
$$

Sea $f \in Hom_\pi(\pi^{n+1}\times 1, M)$ y $(a_1,...,a_{n+1}) \in \pi^{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned}
(d^{n+1}\circ\psi^n)(f)(a_1,\dots,a_{n+1}) =& d^{n+1}(\psi^n(f))(a_1,\dots,a_{n+1})\\
=& a_1\cdot\psi^n(f)(a_2,\dots,a_{n+1})\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\psi^n(f)(a_1,\dots,a_i*a_{i+1},\dots,a_{n+1})\\
&+(-1)^{n+1}\psi^n(f)(a_1,\dots,a_n)\\
=& a_1\cdot f(e,a_2,\dots,a_{n+1},z)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(e,a_1,\dots,a_i*a_{i+1},\dots,a_{n+1},z)\\
&+(-1)^{n+1}f(e,a_1,\dots,a_n,z)\\
=& f(e*a_1,a_2,\dots,a_{n+1},z)\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(e,a_1,\dots,a_i*a_{i+1},\dots,a_{n+1},z)\\
&+(-1)^{n+1}f(e,a_1,\dots,a_n,z)\\
=&\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i Hom_\pi(\varepsilon_i^{n+1},M)(f)(e,a_1,\dots,a_{n+1},z)\\
=&\partial^{n+1}(f)(e,a_1,\dots,a_{n+1},z)\\
=&\psi^{n+1}(\partial^{n+1}(f))(a_1,\dots,a_{n+1})\\
=&(\psi^{n+1}\circ\partial^{n+1})(f)(a_1,\dots,a_{n+1})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi = \{\psi^n : Hom_\pi(\pi^{n+1}\times 1, M) \to C^n(\pi, M)\}_{n=0}^{\infty}$ es un morfismo de complejos de cocadenas.

A continuación se demuestra que $\varphi : \Lambda(\Delta(1), M) \to C^\bullet(\pi, M)$ y $\psi : C^\bullet(\pi, M) \to \Lambda(\Delta(1), M)$ son inversos.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C^n(\pi, M)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\psi^n\circ\varphi^n)(f)(a_1,...a_n) =& \psi^n(\varphi^n(f))(a_1,...a_n)\\
=& \varphi^n(f)(e,a_1,...,a_n,z)\\
=& e\cdot f(a_1,...,a_n)\\
=& f(a_1,...,a_n)\\
=& 1_{C^n(\pi,M)}(f)(a_1,...a_n)
\end{aligned}$$

para todo $(a_1, ..., a_n) \in \pi^n$. Es así que $\psi^n \circ \varphi^n = 1_{C^n(\pi,M)}$.

Sea $f \in Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\varphi^n \circ \psi^n)(f)(a_1, ..., a_{n+1}, z) =&\varphi^n(\psi^n(f))(a_1, ..., a_{n+1}, z)\\
=&a_1 \cdot \psi^n(f)(a_2, ..., a_{n+1})\\
=&a_1 \cdot f(e, a_2, ..., a_{n+1}, z)\\
=&f(a_1 * e, ..., a_{n+1}, z)\\
=&f(a_1, ..., a_{n+1}, z)\\
=&1_{Hom_\pi(\pi^{n+1}\times 1,M)}(f)(a_1, ..., a_{n+1}, z)
\end{aligned}$$

para todo $(a_1, ..., a_{n+1}, z) \in \pi^{n+1}\times 1$. Lo anterior implica que $\varphi^n \circ \psi^n = 1_{Hom_\pi(\pi^{n+1}\times 1,M)}$.

En consecuencia $\varphi^n : C^n(\pi, M) \to Hom_\pi(\pi^{n+1} \times 1, M)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere el funtor

$$H^n : \mathbf{cC}_{\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}} \to \mathbf{Ab}$$

recordando que todo funtor preserva isomorfismos se deduce que

$$H^n(\varphi) : H^n(\pi, M) \to H^n(1, M)_{\mathbf{T}_{F,U}}$$

es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior permite concluir el resultado. $\square$

Capítulo 7

Grupos de cohomología inducidos por una comónada en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$

Por última vez en este texto, como el nombre del capítulo lo indica, se ilustra a la cohomología comonádica. En esta ocasión se trabaja en la categoría $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$, pues la adjunción a estudiar induce una comónada en tal categoría. El presente capítulo puede ser considerado como un preámbulo a la llamada cohomología de Hochschild.

1. $K-$álgebras y $A-$módulos

DEFINICIÓN 22. *Sean K un campo y $(A,+,*)$ un espacio vectorial sobre K. Se dice que A es un álgebra sobre K si existe una operación binaria $\cdot : A \times A \to A$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$
2. $(a_1 + a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$
3. $\alpha * (a_1 \cdot a_2) = (\alpha * a_1) \cdot a_2 = a_1 \cdot (\alpha * a_2)$

para todo $\alpha \in K$, $a_1, a_2, a_3 \in A$.

DEFINICIÓN 23. *Sean K un campo y A un álgebra sobre K. Se dice que A es un álgebra asociativa unitaria sobre K si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$
2. *Existe un elemento distinguido $1 \in A$ tal que $1 \cdot a_1 = a_1 = a_1 \cdot 1$*

para todo $a_1, a_2, a_3 \in A$.

OBSERVACIÓN 6. *Un álgebra A es un espacio vectorial equipado con un producto bilineal, cuando el álgebra es asociativa también se puede pensar como un anillo.*

PROPOSICIÓN 44. *Sea K un campo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un álgebra asociativa unitaria sobre K*
2. *A es un anillo unitario y existe un homomorfismo de anillos*

$$\eta : K \to A$$

tal que $K \subseteq C(A)$, donde $C(A)$ denota al centro del anillo A.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Como A es un álgebra asociativa en particular se tiene que A es un anillo, como además el álgebra es unitaria entonces A es un anillo unitario. Resta probar la existencia del homomorfismo de anillos. Se define

$$\eta : K \to A$$

como

$$\eta(\alpha) = \alpha * 1$$

para todo $\alpha \in K$, donde $*$ denota la operación por escalar del espacio vectorial A. Se comienza probando que tal asignación es un homomorfismo de anillos.

Por una parte

$$\begin{aligned}\eta(\alpha+\beta) =&(\alpha+\beta)*1\\ =&\alpha*1+\beta*1\\ =&\eta(\alpha)+\eta(\beta)\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in K$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\eta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)*1 =&1\cdot((\alpha\beta)*1)\\ =&1\cdot(\alpha*(\beta*1))\\ =&1\cdot(\alpha*\eta(\beta))\\ =&(\alpha*1)\cdot\eta(\beta)\\ =&\eta(\alpha)\cdot\eta(\beta)\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in K$. Además

$$\eta(1_K) = 1_K * 1 = 1$$

Lo anterior permite concluir que $\eta : K \to A$ es un homomorfismo de anillos.

En lo que respecta a la contención $\eta(K) \subseteq C(A)$ se cumple lo siguiente. Sea $a \in \eta(K)$, entonces existe $\alpha \in K$ tal que $\eta(\alpha) = a$. Es así que

$$
\begin{aligned}
a \cdot a_1 =& \eta(\alpha) \cdot a_1 \\
=& (\alpha * 1) \cdot a_1 \\
=& 1 \cdot (\alpha * a_1) \\
=& (\alpha * a_1) \cdot 1 \\
=& a_1 \cdot (\alpha * 1) \\
=& a_1 \cdot \eta(\alpha) \\
=& a_1 \cdot a
\end{aligned}
$$

para todo $a_1 \in A$. Lo cual prueba que $\eta(K) \subseteq C(A)$.

2) $\Leftarrow$ 1) Basta estudiar la multiplicación por escalar y verificar que se satisface la tercer identidad de la definición de álgebra.

En lo que respecta a la multiplicación por escalar se tiene lo siguiente. Se define

$$* : K \times A \to A$$

como

$$\alpha * a = \eta(\alpha) \cdot a$$

para todo $\alpha \in K$, $a \in A$. Se cumplen las siguientes condiciones:

1.
$$
\begin{aligned}
\alpha * (\beta * a) =& \eta(\alpha) \cdot (\eta(\beta) \cdot a) \\
=& (\eta(\alpha) \cdot \eta(\beta)) \cdot a \\
=& \eta(\alpha\beta) \cdot a \\
=& (\alpha\beta) * a
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
1_K * a =& \eta(1_K) \cdot a \\
=& 1 \cdot a \\
=& a \\
=& a \cdot 1 \\
=& a \cdot \eta(1_K) \\
=& a * 1_K
\end{aligned}
$$

3.
$$\begin{aligned}\alpha * (a_1 + a_2) =& \eta(\alpha) \cdot (a_1 + a_2)\\ =& \eta(\alpha) \cdot a_1 + \eta(\alpha) \cdot a_2\\ =& \alpha * a_1 + \alpha * a_2\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) * a =& \eta(\alpha + \beta) \cdot a\\ =& (\eta(\alpha) + \eta(\beta)) \cdot a\\ =& \eta(\alpha) \cdot a + \eta(\beta) \cdot a\\ =& \alpha * a + \beta * a\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in K$, $a \in A$. El par de identidades anteriores permiten concluir que A es un espacio vectorial.

Respecto a la identidad 3 de la definición de álgebra, se cumple lo siguiente:
Por una parte
$$\begin{aligned}\alpha * (a_1 \cdot a_2) =& \eta(\alpha) \cdot (a_1 \cdot a_2)\\ =& (\eta(\alpha) \cdot a_1) \cdot a_2\\ =& (a_1 \cdot \eta(\alpha)) \cdot a_1\\ =& a_1 \cdot (\eta(\alpha) \cdot a_2)\\ =& a_1 \cdot (\alpha * a_2)\end{aligned}$$
pues $\eta(K) \subseteq C(A)$. Por otra parte
$$\begin{aligned}\alpha * (a_1 \cdot a_2) =& \eta(\alpha) \cdot (a_1 \cdot a_2)\\ =& (\eta(\alpha) \cdot a_1) \cdot a_2\\ =& (\alpha * a_1) \cdot a_2\end{aligned}$$
En consecuencia
$$\begin{aligned}\alpha * (a_1 \cdot a_2) =& (\alpha * a_1) \cdot a_2\\ =& a_1 \cdot (\alpha * a_2)\end{aligned}$$
para todo $\alpha \in K$, $a_1, a_2 \in A$. Esto concluye que A es un álgebra asociativa unitaria sobre K. $\square$

Una vez estudiados los prerequisitos necesarios de álgebras asociativas se presenta el concepto de $A-$módulo.

Definición 24. *Sean A un álgebra asociativa unitaria sobre K y M un espacio vectorial sobre K. Se dice que M es un $A-$módulo si existe una operación binaria $\cdot : A \times M \to M$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. $a \cdot (m+n) = a \cdot m + a \cdot n$
2. $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$
3. $(a_1 \cdot a_2) \cdot m = a_1 \cdot (a_2 \cdot m)$
4. $1 \cdot m = m$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$, $m, n \in M$.

Definición 25. *Sean A un álgebra asociativa unitaria sobre K y M, N un par de $A-$módulos, se dice que $f : M \to N$ es un $A-$morfismo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$f : M \to N$ es una transformación lineal.*
2. *$f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$ para todo $a \in A$, $m \in M$.*

El par de definiciones anteriores motivan la siguiente proposición.

Proposición 45. *Sea A un álgebra asociativa unitaria sobre K. La colección de $A-$módulos y $A-$morfismos forman una categoría, la cual se denota por $\boldsymbol{A-Mod}$.*

Demostración. Sean M, N un par de $A-$módulos, se denota por $Hom_A(M,N)$ a la colección de $A-$morfismos de M en N.

En lo que respecta a la composición se tiene lo siguiente. Sean $f : M \to N$, $g : N \to L$ un par de $A-$morfismos. Considere la composición usual de funciones, observe que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a \cdot m) =& g(a \cdot f(m)) \\ =& a \cdot g(f(m)) \\ =& a \cdot (g \circ f)(m)\end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $m \in M$. Como además $g \circ f$ es una transformación lineal se deduce que $g \circ f$ es un $A-$morfismo. Por lo tanto

$$\circ : Hom_A(N,L) \times Hom_A(M,N) \to Hom_A(M,L)$$

es una función. La propiedad correspondiente a la asociatividad de la composición se sigue de lo pertinente a transformaciones lineales.

Para finalizar. Sea M un $A-$módulo y considere la transformación lineal $1_M \in Hom_{\mathbf{K-Vect}}(M,M)$. Observe que

$$1_M(a \cdot m) = a \cdot m = a \cdot 1_M(m)$$

para todo $a \in A$, $m \in M$. En consecuencia $1_M \in Hom_A(M, M)$. Los correspondientes axiomas de las identidades se satisfacen ya que se trabaja con la composición usual de transformaciones lineales.

De lo anterior se concluye que $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ es una categoría. □

El siguiente resultado exhibe una forma de construir un $A-$móduo a partir de un espacio vectorial cualquiera.

Proposición 46. *Sean A un álgebra asociativa unitaria sobre K y V un espacio vectorial sobre K, entonces $A \otimes_K V$ es un $A-$módulo.*

Demostración. Se debe tener en cuenta que $A \otimes_K V$ es un espacio vectorial sobre K, por lo que resta estudiar la existencia de una operación binaria que satisfaga las identidades de interés.

Se define la operación

$$\cdot : A \times (A \otimes_K V) \to A \otimes_K V$$

en elementos generadores, como

$$a \cdot (a_1 \otimes v) = (a \cdot a_1) \otimes v$$

para todo $a, a_1 \in A$, $v \in V$.

1. La identidad que corresponde a la distributividad por la derecha se sigue de la definición de la operación y extendiendo por linealidad.
2. $$\begin{aligned}(a_1 + a_2) \cdot (a_3 \otimes v) =& ((a_1 + a_2) \cdot a_3) \otimes v \\ =& (a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3) \otimes v \\ =& a_1 \cdot a_3 \otimes v + a_2 \cdot a_3 \otimes v \\ =& a_1 \cdot (a_3 \otimes v) + a_2 \cdot (a_3 \otimes v)\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \otimes v) =& ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \otimes v \\ =& (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \otimes v \\ =& a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \otimes v) \\ =& a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \otimes v))\end{aligned}$$
4. $1 \cdot (a \otimes v) = 1 \cdot a \otimes v = a \otimes v$

para todo $a, a_1, a_2, a_3 \in A$, $v \in V$. En así que $A \otimes_K V$ es un $A-$módulo. □

Como ha sucedido en capítulos anteriores, se busca elevar la construcción anterior a un funtor, tal funtor es candidato a ser el adjunto izquierdo de la situación de adjunción a desarrollar.

2. Una adjunción del tipo libre

PROPOSICIÓN 47. *Sea A un álgebra asociativa unitaria sobre K. Se definen las siguientes asignaciones*

$$F : \boldsymbol{K-Vect} \to \boldsymbol{A-Mod}$$

a nivel de objetos, para $V \in \boldsymbol{K-Vect}$, se define

$$F(V) = A \otimes_K V$$

y a nivel de morfismos, para $f : V \to W$ un morfismo en $\boldsymbol{K-Vect}$, se define

$$F(f) = 1_A \otimes_K f : A \otimes_K V \to A \otimes_K W.$$

Entonces $F : \boldsymbol{K-Vect} \to \boldsymbol{A-Mod}$ es un funtor.

DEMOSTRACIÓN. Se comienza estudiando la asignación en morfismos.

Sea $f : V \to W$ un morfismo en $\mathbf{K-Vect}$, se sabe que $F(f) = 1_A \otimes_K f : A \otimes_K V \to A \otimes_K W$ es una transformación lineal, resta probar la segunda condición.

$$\begin{aligned} F(f)(a \cdot (a_1 \otimes v)) =& (1_A \otimes_K f)(a \cdot (a_1 \otimes v)) \\ =& (1_A \otimes_K f)(a \cdot a_1 \otimes v) \\ =& a \cdot a_1 \otimes f(v) \\ =& a \cdot (1_A \otimes_K f)(a_1 \otimes v) \\ =& a \cdot F(f)(a_1 \otimes v) \end{aligned}$$

para todo $a, a_1 \in A$, $v \in V$. Por lo tanto $F(f) = 1_A \otimes_K f : A \otimes_K V \to A \otimes_K W$ es un morfismo en $\mathbf{A-Mod}$.

Con respecto a la composición. Sean $f : U \to V$, $g : V \to W$ morfismos en $\mathbf{K-Vect}$. Por un lado se sabe que

$$1_A \otimes_K (g \circ f) = (1_A \otimes_K g) \circ (1_A \otimes_K f),$$

entonces

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Por otro lado se sabe que

$$1_A \otimes_K 1_V = 1_{A \otimes_K V},$$

entonces

$$F(1_V) = 1_{F(V)}$$

para todo $V \in \mathbf{K}-\mathbf{Vect}$. Los argumentos anteriores permiten concluir que $F : \mathbf{K}-\mathbf{Vect} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ es un funtor. $\square$

Como el nombre de la sección lo indica, una vez mas un funtor que olvida está presente en la adjunción a desarrollar.

Proposición 48. *Sea A un álgebra asociativa unitaria sobre K. Los funtores*

$$\boldsymbol{K}-\boldsymbol{Vect} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{Mod}$$

son adjuntos, con F el adjunto izquierdo. U denota al funtor que olvida.

Demostración. Se busca demostrar que el par de funtores (F, U) son adjuntos por medio de las identidades triangulares.

Sea $V \in \mathbf{K}-\mathbf{Vect}$, para la unidad $\eta : 1_{\mathbf{K}-\mathbf{Vect}} \to U \circ F$ se busca definir

$$\eta_V : V \to U(A \otimes_K V)$$

un morfismo en $\mathbf{K}-\mathbf{Vect}$, la regla de correspondencia es la siguiente:

$$\eta_V(v) = 1 \otimes v$$

para todo $v \in V$.

La definición de la asignación anterior desvela el porque se trabaja con álgebras asociativas unitarias.

Observe que

$$\begin{aligned}\eta_V(v+w) =& 1 \otimes (v+w)\\ =& 1 \otimes v + 1 \otimes w\\ =& \eta_V(v) + \eta_V(w)\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\eta_V(\alpha * v) =& 1 \otimes \alpha * v\\ =& \alpha * (1 \otimes v)\\ =& \alpha * \eta_V(v).\end{aligned}$$

Lo anterior permite concluir que $\eta_V : V \to U(A \otimes_K V)$ es un morfismo en $\mathbf{K}-\mathbf{Vect}$. Resta probar que la asignación es natural.

Sea $f : V \to W$ un morfismo en $\mathbf{K} - \mathbf{Vect}$, entonces

$$\begin{aligned}(U(F(f)) \circ \eta_V)(v) =& U(F(f))(1 \otimes v)\\ =& U(1_A \otimes_K f)(1 \otimes v)\\ =& 1 \otimes f(v)\\ =& \eta_W(f(v))\\ =& (\eta_W \circ f)(v)\end{aligned}$$

para todo $v \in V$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_V"'] & W \arrow[d, "\eta_W"] \\ U(A \otimes_K V) \arrow[r, "U(F(f))"'] & U(A \otimes_K W) \end{tikzcd}$$

Esto prueba que $\eta : 1_{\mathbf{K}-\mathbf{Vect}} \to U \circ F$ es una transformación natural.

Sea $M \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$. Para la counidad $\varepsilon : F \circ U \to 1_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}$ se busca definir

$$\varepsilon_M : A \otimes_K U(M) \to M$$

tal que sea un morfismo en $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$, es así que se propone la siguiente regla de correspondencia en elementos generadores

$$\varepsilon_M(a \otimes m) = a \cdot m$$

para todo $a \in A$, $m \in M$.

Por una parte

$$\begin{aligned}\varepsilon_M(a \cdot (a_1 \otimes m)) =& \varepsilon_M(a \cdot a_1 \otimes m)\\ =& (a \cdot a_1) \cdot m\\ =& a \cdot (a_1 \cdot m)\\ =& a \cdot \varepsilon_M(a_1 \otimes m)\end{aligned}$$

para todo $a, a_1 \in A$, $m \in M$. Es claro ε_M es lineal. Los argumentos anteriores permiten concluir que $\varepsilon_M : A \otimes_K U(M) \to M$ es un morfismo en $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$. A continuación se prueba que tal asignación es natural.

Sea $f : M \to N$ un morfismo en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varepsilon_N \circ F(U(f)))(a \otimes m) =&\varepsilon_N(1_A \otimes_K U(f)(a \otimes m))\\ =&\varepsilon_N(a \otimes U(f)(m))\\ =&a \cdot f(m)\\ =&f(a \cdot m)\\ =&f(\varepsilon_M(a \otimes m))\\ =&(f \circ \varepsilon_M)(a \otimes m)\end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $m \in M$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \otimes_K U(M) \arrow[r, "F(U(f))"] \arrow[d, "\varepsilon_M"'] & A \otimes_K U(N) \arrow[d, "\varepsilon_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Esto prueba que $\varepsilon : F \circ U \to 1_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}$ es una transformación natural.

A continuación se demuestra que se satisfacen las identidades triangulares.

Sea $V \in \mathbf{K}-\mathbf{Vect}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{F(V)} \circ F(\eta_V))(a \otimes v) =&\varepsilon_{F(V)}((1_A \otimes_K \eta_V)(a \otimes v))\\ =&\varepsilon_{A \otimes_K V}(a \otimes (1 \otimes v))\\ =&a \cdot (1 \otimes v)\\ =&(a \cdot 1) \otimes v\\ =&a \otimes v\\ =&1_{A \otimes_K V}(a \otimes v)\\ =&1_{F(V)}(a \otimes v)\end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $v \in V$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F \circ \eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & F \circ U \circ F \arrow[d, "\varepsilon \circ F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Con respecto a la segunda identidad. Sea $M \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$, entonces

$$\begin{aligned}(U(\varepsilon_M) \circ \eta_{U(M)})(m) =& U(\varepsilon_M)(1 \otimes m)\\ =& 1 \cdot m\\ =& m\\ =& 1_{U(M)}(m)\end{aligned}$$

para todo $m \in M$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta \circ U"] \arrow[dr, "1_U"'] & U \circ F \circ U \arrow[d, "U \circ \varepsilon"] \\ & U \end{tikzcd}$$

La serie de argumentos antes validados permiten concluir que $(F, U) : \mathbf{K}-\mathbf{Vect} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ son funtores adjuntos. □

3. Una comónada en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$

En esta sección se describe la comónada

$$\mathbf{T}_{F,U} = (F \circ U, \varepsilon, F \circ \eta \circ U)$$

inducida por el par de funtores adjuntos $(F, U) : \mathbf{K}-\mathbf{Vect} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

1. Para el funtor $T = F \circ U : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$, a nivel de objetos se tiene que

   $$T(M) = F(U(M)) = A \otimes_K U(M)$$

   para cada $M \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$, mientras que a nivel de morfismos se tiene

   $$T(f) = F(U(f)) = 1_A \otimes_K U(f)$$

   para todo morfismo $f : M \to N$ en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.
2. La counidad de la comónada coincide con la counidad de la adjunción, entonces para cada $M \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ se tiene que

   $$\varepsilon_M : A \otimes_K U(M) \to M$$

   y se define en elementos generadores como

   $$\varepsilon_M(a \otimes m) = a \cdot m$$

   para cada $a \in A$, $m \in M$.

3. El coproducto de la comónada $\delta : T \to T \circ T$ resulta de la siguiente composición
$$\delta = F \circ \eta \circ U$$
Entonces para cada $M \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ se tiene que
$$\delta_M = F(\eta_{U(M)}) : A \otimes_K U(M) \to A \otimes_K U(A \otimes_K U(M))$$
y se define el elementos generadores como
$$\begin{aligned}\delta_M(a \otimes m) =& F(\eta_{U(M)})(a \otimes m)\\ =&(1_A \otimes_K \eta_{U(M)})(a \otimes m)\\ =&a \otimes (1 \otimes m)\end{aligned}$$
para todo $a \in A$, $m \in M$.

4. Una resolución libre

Una vez precisada la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$ es posible describir el objeto semi-simplicial inducido por esta.

Sea $M \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$. Considere el funtor $\Delta : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{SS}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, entonces
$$\Delta(M) = \{\{T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$$
es un objeto semi-simplicial en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$. Lo siguiente a realizar es describir las colecciones que componen al objeto semi-simplicial $\Delta(M)$.

Sea $n \geq 1$, observe que
$$T^n(M) = A \otimes_K U(A^{\otimes^{n-1}} \otimes_K U(M))$$
por consiguiente
$$T^n(M) = A^{\otimes^n} \otimes_K U(M)$$
donde $A^{\otimes^n}$ denota al n-ésimo producto tensorial $A \otimes_K \cdots \otimes_K A$.

En lo que respecta a los morfismos cara se deduce lo siguiente:

1. Si $i = 0$. Dado que $\varepsilon_0^n = T^0(\varepsilon_{T^{n-0}(M)}) : A^{\otimes^{n+1}} \otimes_K M \to A^{\otimes^n} \otimes_K M$, entonces
$$\begin{aligned}\varepsilon_0^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m) =& T^0(\varepsilon_{T^{n-0}(M)})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&\varepsilon_{T^n(M)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&\varepsilon_{A^{\otimes^n} \otimes_K M}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&a_1 \cdot a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m\end{aligned}$$
para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in A$, $m \in M$.

2. Si $0 < i < n$. Dado que $\varepsilon_i^n = T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(M)}) : A^{\otimes^{n+1}} \otimes_K M \to A^{\otimes^n} \otimes_K M$, entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m) =& T^i(\varepsilon_{T^{n-i}(M)})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&(1_{A^{\otimes^i}} \otimes_K \varepsilon_{A^{\otimes^{n-i}} \otimes_K M})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&1_{A^{\otimes^i}}(a_1 \otimes \cdots a_i) \otimes \varepsilon_{A^{\otimes^{n-i}} \otimes_K M}(a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \cdot a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m\end{aligned}$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in A$, $m \in M$.

3. Si $i = n$. Dado que $\varepsilon_n^n = T^n(\varepsilon_{T^{n-n}(M)}) : A \otimes^{n+1} \otimes_K M \to A^{\otimes^n} \otimes_K M$, entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m) =& T^n(\varepsilon_{T^{n-n}(M)})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&T^n(\varepsilon_M)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&(1_{A^{\otimes^n}} \otimes_K \varepsilon_M)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes m)\\ =&1_{A^{\otimes^n}}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes \varepsilon_M(a_{n+1} \otimes m)\\ =&a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \cdot m\end{aligned}$$

para todo $a_1, ..., a_{n+1} \in A$, $m \in M$.

La discusión previa permite enunciar el siguiente resultado, pues los morfismos cara la motivan.

Proposición 49. *Sea $M \in \boldsymbol{A - Mod}$ y considere el objeto semi-simplicial*

$$\Delta(M) = \{\{T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}, \{\{\varepsilon_i^n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}\}_{i=0}^{n}\}$$

Se define

$$d_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon_i^n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)$$

Entonces

$$\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Sea $n \geq 1$.

La prueba de la contención

$$Im(d_n) \subseteq Nuc(d_{n-1})$$

se puede consultar en la prueba de la proposición 37 del capítulo 5.

Resta probar que

$$Nuc(d_{n-1}) \subseteq Im(d_n)$$

Considere un elemento generador en $Nuc(d_{n-1})$, es decir, un elemento generador $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in A^{\otimes^n} \otimes_K M$ tal que

$$d_{n-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) = 0.$$

Se busca un elemento generador $b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+1} \otimes n \in A^{\otimes^{n+1}} \otimes_K M$ tal que

$$d_n(b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+1} \otimes n) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m.$$

Considere al elemento generador $1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in A^{\otimes^{n+1}} \otimes_K M$, recordando que

$$d_n = \varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1})$$

Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d_n(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) =& (\varepsilon_{T^n(M)} - T(d_{n-1}))(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) \\
=& \varepsilon_{T^n(M)}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) - T(d_{n-1})(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) \\
=& \varepsilon_{A^{\otimes^n} \otimes_K M}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) \\
& -(1_A \otimes_K d_{n-1})(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m) \\
=& \big(1 \cdot a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m\big) - \big(1_A(1) \otimes d_{n-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m)\big) \\
=& \big(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m\big) - \big(1 \otimes 0\big) \\
=& a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m
\end{aligned}$$

Por consiguiente $Nuc(d_{n-1}) \subseteq Im(d_n)$. Lo anterior permite concluir que

$$\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión exacta. $\square$

Corolario 4. *Sea $M \in$ **A − Mod** y considere la sucesión exacta*

$$\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$$

Entonces $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$ es una resolución libre de M.

El siguiente diagrama ilustra tal resolución libre de M.

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\varepsilon_M} A \otimes_K M \xleftarrow{d_1} A^{\otimes^2} \otimes_K M \longleftarrow \cdots \xleftarrow{d_{n-1}} A^{\otimes^n} \otimes_K M \longleftarrow \cdots$$

Demostración. Note que $\varepsilon_M(1 \otimes m) = 1 \cdot m = m$ para cada $m \in M$. Por tal motivo $\varepsilon_M : A \otimes_K M \to M$ es un epimorfismo y en consecuencia la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \xleftarrow{0} M \xleftarrow{\varepsilon_M} A \otimes_K M$$

A continuación se demuestra que $T^n(M)$ es un $A-$módulo libre para cada $n \geq 1$.

La siguiente cadena de relaciones de isomorfismo se cumple

$$T(M) = A \otimes_K M \cong A \otimes_K K^{(X)} \cong (A \otimes_K K)^{(X)} \cong A^{(X)}$$

para algún conjunto X. Lo anterior prueba que $T(M)$ es un $A-$módulo libre.

En consecuencia

$$T^n(M) = T(T^{n-1}(M)) = A \otimes_K T^{n-1}(M)$$

es un $A-$módulo libre para cada $n \geq 1$.

Por lo tanto $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$ es una resolución libre de M. □

5. Objetos de grupo abeliano

El último paso a desarrollar para completar la teoría es identificar a los objetos de grupo abeliano en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$. De forma similar a lo que sucede en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 50. *Todos los objetos en* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Mod}$ *son objetos de grupo abeliano.*

Demostración. Es claro que todo objeto de grupo abeliano M es un $A-$módulo.

Sea $(M, *, +)$ un $A-$módulo. Como M es un espacio vectorial en particular $(M, +)$ es un grupo abeliano, de lo anterior se deduce que M es un objeto de grupo abeliano en la categoría de conjuntos, acompañado de los morfismos canónicos que se derivan de los axiomas de grupo.

El argumento anterior permite recuperar la conmutatividad de los diagramas de la definición de objeto de grupo abeliano. Resta demostrar que los morfismos que dan estructura de objeto de grupo abeliano a M son morfismos en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

Considere el morfismo multiplicación $\mu : M \times M \to M$ en $\mathbf{Set}$ inducido por la operación $+$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu(k * (m_1, n_1) + (m_2, n_2)) &= \mu((k * m_1, k * n_1) + (m_2, n_2)) \\
&= \mu(k * m_1 + m_2, k * n_1 + n_2) \\
&= (k * m_1 + m_2) + (k * n_1 + n_2) \\
&= (k * m_1 + k * n_1) + (m_2 + n_2) \\
&= k * (m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) \\
&= k * \mu(m_1, n_1) + \mu(m_2, n_2)
\end{aligned}$$

para todo $k \in K$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in M$. Donde $*$ denota a la multiplicación por escalar del espacio vectorial M. Lo anterior es prueba de que $\mu : M \times M \to M$ es una transformación lineal. Por otra parte

$$\begin{aligned}\mu(a \cdot (m, n)) =& \mu(a \cdot m, a \cdot n)\\ =& a \cdot m + a \cdot n\\ =& a \cdot (m + n)\\ =& a \cdot \mu(m, n)\end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $m, n \in M$. Las dos condiciones anteriores muestran que $\mu : M \times M \to M$ es un morfismo en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

Se denota por 1 al espacio vectorial trivial (es decir, el formado sólo por el vector cero) dotado de la acción trivial.

Considere el morfismo neutro $\lambda : 1 \to M$ en **Set**, el cual asocia a los elementos neutros de los correspondientes espacio vectoriales, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda(k * z) =& \lambda(z)\\ =& 0\\ =& k * 0\\ =& k * \lambda(z)\end{aligned}$$

Análogamente, pero con respecto a la acción en A se cumple que:

$$\begin{aligned}\lambda(a \cdot z) =& \lambda(z)\\ =& 0\\ =& a \cdot 0\\ =& a \cdot \lambda(z)\end{aligned}$$

para todo $k \in K$, $a \in A$. Las condiciones anteriores permiten concluir que $\lambda : 1 \to M$ es un morfismo en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

Para finalizar. Considere el morfismo $\gamma : M \to M$ en **Set** que asigna a cada elemento su inverso, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma(k*m+n) &= -(k*m+n)\\ &= -(k*m)-n\\ &= k*(-m)+(-n)\\ &= k*\gamma(m)+\gamma(n)\end{aligned}$$

para todo $k \in K$, $m, n \in M$. Lo anterior muestra que $\gamma : M \to M$ es una transformacional lineal. Por otra parte

$$\begin{aligned}\gamma(a\cdot m) &= -(a\cdot m)\\ &= a\cdot(-m)\\ &= a\cdot\gamma(m)\end{aligned}$$

para todo $m \in M$, $a \in A$. Es esí que $\gamma : M \to M$ es un morfismo en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

Los argumentos antes validados permiten concluir que M es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$. $\square$

6. Conclusiones

Antes de dar por terminado el capítulo se identifica a los grupos de cohomología inducidos por la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$ y se realizan algunos comentarios finales.

Dado que el objeto semi-simplicial induce una resolución libre y de la misma manera a lo sucedido en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ se tiene lo siguiente.

COROLARIO 5. *Sea $\boldsymbol{T}_{F,U}$ la comónada inducida por la adjunción 48, considere además M, N un par de $A-$módulos, entonces*

$$H^n(M,N)_{\boldsymbol{T}_{F,U}} = Ext^n_A(M,N)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean M, N un par de $A-$módulos, por la proposición 4 se sabe que

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon_M} M$$

es una resolución libre de M, donde $\mathcal{P} = \{T^n(M), d_n : T^{n+1}(M) \to T^n(M)\}_{n=1}^{\infty}$.

Por definición se tiene que

$$Ext^n_A(M,N) = H^n(Hom_A(\mathcal{P},N)).$$

Por otra parte, como N es un objeto de grupo abeliano en $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} H^n(M,N)_{\mathbf{T}_{F,U}} =& H^n(\Lambda(\Delta(M),N)) \\ =& H^n(Hom_A(\mathcal{P},N)) \\ =& Ext^n_A(M,N) \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior concluye el resultado. □

Es discutible la afinidad que tienen los capítulos 5 y 7, si bien es cierto que tanto los objetos con los que se trabaja como la adjunción que se estudia en cada capítulo son distintas, es evidente el parecido en ambas teorías cohomologícas. A continuación se discute una ventaja de trabajar con la resolución libre desarrollada en este capítulo.

Considere el anillo $R = \mathbb{R}$ y la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$ inducida por la adjunción libre en $\mathbf{R} - \mathbf{Mod}$. Se denota por 0 al $R-$módulo trivial. Observe que

$$T(0) = \mathbb{R}^{(0)} = \mathbb{R},$$

es así que se tiene la siguiente resolución proyectiva de 0.

$$0 \xleftarrow{\varepsilon_0} \mathbb{R} \xleftarrow{d_1} \mathbb{R}^{(\mathbb{R})} \xleftarrow{d_2} \mathbb{R}^{(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})})} \xleftarrow{d_3} \mathbb{R}^{(\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})})})} \longleftarrow \cdots$$

Se puede notar que

$$dim_{\mathbb{R}}(T(0)) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$$

en contraste, para $n \geq 2$, se tiene que

$$dim_{\mathbb{R}}(T^2(0)) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}) = \infty.$$

Si bien, siempre se puede disponer de tal resolución proyectiva, esta tiene un problema con respecto al tamaño de cada eslabón, pues en cada paso cubres al objeto anterior con uno mucho más grande. Algo más agradable sucede en $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$.

Considere el álgebra asociativa unitaria $A = \mathbb{C}$, el campo $K = \mathbb{R}$ y la comónada $\mathbf{T}_{F,U}$ expuesta en la tercera sección de este capítulo. Se tiene la siguiente resolución libre de $\mathbb{C} \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$.

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon_{\mathbb{C}}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xleftarrow{d_1} \mathbb{C}^{\otimes^2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xleftarrow{d_2} \mathbb{C}^{\otimes^3} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xleftarrow{d_3} \mathbb{C}^{\otimes^4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longleftarrow \cdots$$

Observe que

$$dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$$

Además se cumple que

$$dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \cdot dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 4$$

y en general

$$dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{\otimes^n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 2^{n+1}.$$

Si bien, la dimensión puede llegar a ser considerablemente grande, es evidente que tal resolución libre crece a un ritmo bastante mas eficaz en comparación a lo que sucede en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$.

Capítulo 8

Objetos T-proyectivos

Para finalizar este trabajo, se expone otra aplicación que se puede derivar de una comónada. Estas nos permiten introducir el concepto de $\mathbf{T}-$proyectividad donde $\mathbf{T}$ es una comónada. El presente capítulo se estructura de la siguiente manera.

En una primera sección se presenta la definición de objeto $\mathbf{T}-$proyectivo, así como una equivalencia a tener en cuenta. Posteriormente, en una segunda sección se demuestra que el concepto de proyectividad en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ y el concepto de $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectividad coinciden cuando $\mathbf{T}_{F,U}$ es la comónada libre en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$. Se finaliza el capítulo estudiando a los objetos $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectivos en la categoría $\pi-\mathbf{Set}$, donde $\mathbf{T}_{F,U}$ es la comónada inducida por la adjunción del tipo libre precisada en el capítulo 6.

1. T−proyectividad

Definición 26. *Sea $\boldsymbol{T}$ una comónada en $\mathbf{C}$. Se dice que un objeto $P \in \mathbf{C}$ es $\boldsymbol{T}-$proyectivo, si $\varepsilon_P : T(P) \to P$ se escinde, es decir, existe un morfismo $f : P \to T(P)$ en $\mathbf{C}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "1_P"] \\ T(P) \arrow[r, "\varepsilon_P"'] & P \end{tikzcd}$$

Proposición 51. *Sean $(L, R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un par de funtores adjuntos y considere la comónada inducida $\boldsymbol{T}_{L,R}$, entonces $L(X) \in \mathbf{D}$ es un objeto $\boldsymbol{T}_{L,R}-$proyectivo para todo $X \in \mathbf{C}$.*

Demostración. Dado que $(L, R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ son un par de funtores adjuntos, entonces por la primer identidad triangular se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & L(X) \arrow[dl, "L(\eta_X)"'] \arrow[d, "1_{L(X)}"] \\ L(R(L(X))) \arrow[r, "\varepsilon_{L(X)}"'] & L(X) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $L(X)$ es $\mathbf{T}_{L,R}-$proyectivo para todo $X \in \mathbf{C}$. □

Definición 27. *Sean $(L,R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un par de funtores adjuntos. Se dice que un objeto $P \in \mathbf{D}$ satisface la **propiedad de levantamiento**, si para cualesquiera $f : P \to N$, $g : M \to N$ morfismos en $\mathbf{D}$ tales que $R(g) : R(M) \to R(N)$ es un epimorfismo que se escinde, entonces existe un morfismo $\bar{f} : P \to M$ en $\mathbf{D}$, tal que $g \circ \bar{f} = f$.*

La propiedad de levantamiento provee una forma distinta de identificar a un objeto $\mathbf{T}-$proyectivo.

Proposición 52. *Sean $(L,R) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un par de funtores adjuntos. Un objeto $P \in \mathbf{D}$ es $\boldsymbol{T}_{L,R}-$proyectivo si y sólo si P satisface la propiedad de levantamiento.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $f : P \to N$, $g : M \to N$ morfismos en $\mathbf{D}$. Se busca un morfismo $\bar{f} : P \to M$ en $\mathbf{D}$ tal que $g \circ \bar{f} = f$.

Como P es $\mathbf{T}_{L,R}-$proyectivo, existe $\varphi : P \to T(P)$ tal que

$$\varepsilon_P \circ \varphi = 1_P$$

y como $R(g) : R(M) \to R(N)$ es un epimorfismo que se escinde, existe $\psi : R(N) \to R(M)$ tal que

$$R(g) \circ \psi = 1_{R(N)}.$$

El par de observaciones anteriores motivan la siguiente definición.

Se define $\bar{f} := \varepsilon_M \circ L(\psi) \circ T(f) \circ \varphi : P \to M$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} g \circ \bar{f} =& g \circ (\varepsilon_M \circ L(\psi) \circ T(f) \circ \varphi) \\ =& (g \circ \varepsilon_M) \circ L(\psi) \circ LR(f) \circ \varphi \\ =& \varepsilon_N \circ (LR(g) \circ L(\psi)) \circ LR(f) \circ \varphi \\ =& \varepsilon_N \circ L(R(g) \circ \psi) \circ LR(f) \circ \varphi \\ =& \varepsilon_N \circ L(1_{R(N)}) \circ LR(f) \circ \varphi \\ =& \varepsilon_N \circ (1_{LR(N)} \circ LR(f)) \circ \varphi \\ =& (\varepsilon_N \circ LR(f)) \circ \varphi \\ =& f \circ \varepsilon_M \circ \varphi \\ =& f \circ 1_P \\ =& f \end{aligned}$$

Por lo tanto P satisface la propiedad de levantamiento. El siguiente diagrama ilustra la situación antes planteada.

$$\begin{tikzcd}
T(P) \arrow[r, dashed, "L(\psi)\circ T(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_P"] \arrow[dr, "T(f)"'] & T(M) \arrow[r, "\varepsilon_M"] \arrow[d, "T(g)"] & M \arrow[d, "g"] \\
P \arrow[u, dashed, bend left, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & T(N) \arrow[r, "\varepsilon_N"] \arrow[u, dashed, bend left, "L(\psi)"] & N
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$) Considere el siguiente par de morfismos $\varepsilon_P : T(P) \to P$, $1_P : P \to P$ en $\mathbf{D}$. Como

$$R(\varepsilon_P) : R(T(P)) \to R(P)$$

es un epimorfismo que se escinde, pues por la segunda identidad triangular se satisface que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & R(L(R(P))) \arrow[d, "R(\varepsilon_P)"] \\
R(P) \arrow[ur, "\eta_{R(P)}"] \arrow[r, "1_{R(P)}"'] & R(P)
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad de levantamiento que satisface P por hipótesis, existe $\bar{f} : P \to T(P)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "1_P"] \arrow[dl, dashed, "f"'] \\
T(P) \arrow[r, "\varepsilon_P"'] & P
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente P es un objeto $\mathbf{T}_{L,R}$−proyectivo. $\square$

Otra forma de identificar a un objeto $\mathbf{T}$−proyectivo es la siguiente.

PROPOSICIÓN 53. *Sea* $\boldsymbol{T}$ *una comónada en* $\mathbf{C}$. *Un objeto* $P \in \mathbf{C}$ *es* $\boldsymbol{T}$*−proyectivo si y sólo si para algún* $X \in \mathbf{C}$ *existen morfismos* $s : P \to T(X)$ *y* $t : T(X) \to P$ *en* $\mathbf{C}$ *tales que* $t \circ s = 1_P$.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sea $X = P$. Como P es $\mathbf{T}$−proyectivo existe $f : P \to T(P)$ tal que $\varepsilon_P \circ f = 1_P$. Lo anterior prueba la primer dirección.

$\Leftarrow$) Se busca la existencia de un morfismo $f : P \to T(P)$ en $\mathbf{C}$ tal que $\varepsilon_P \circ f = 1_P$.

Suponga que para $X \in \mathbf{C}$, existen morfismos $s : P \to T(X)$ y $t : T(X) \to P$ tales que $t \circ s = 1_P$.

Se define $f := T(t) \circ \delta_X \circ s$, donde $\delta_X : T(X) \to T^2(X)$ denota la $X-$ésima componente del coproducto de la comónada $\mathbf{T}$. Luego se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_P \circ f =& \varepsilon_P \circ (T(t) \circ \delta_X \circ s) \\ =& (\varepsilon_P \circ T(t)) \circ \delta_X \circ s \\ =& (t \circ \varepsilon_{T(X)}) \circ \delta_X \circ s \\ =& t \circ (\varepsilon_{T(X)} \circ \delta_X) \circ s \\ =& t \circ 1_{T(X)} \circ s \\ =& t \circ s \\ =& 1_P \end{aligned}$$

En consecuencia P es un objeto $\mathbf{T}-$proyectivo. El siguiente diagrama ilustra la situación antes planteada.

$$\begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[d, "T(t)"'] & T(X) \arrow[l, "\delta_X"'] & P \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "1_P"] \arrow[dll, dashed, "f"'] \\ T(P) \arrow[rr, "\varepsilon_P"'] & & P \end{tikzcd}$$

□

2. Proyectividad en $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$

La presente sección busca exponer un motivo del porque el concepto de $\mathbf{T}-$proyectividad es nombrado de tal forma.

PROPOSICIÓN 54. *Considere la comónada libre $\boldsymbol{T}_{F,U}$ en $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$ estudiada en el capítulo 5. Un objeto P en $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Mod}$ es $\boldsymbol{T}_{F,U}-$proyectivo si y sólo si P es un módulo proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Se busca completar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $T(P) = F(U(P)) = R^{(P)}$ es un módulo libre, en particular es un módulo proyectivo, es así que existe $\varphi : R^{(P)} \to M$ tal que $f \circ \varepsilon_P = g \circ \varphi$.

Como por hipótesis $P \in \mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ es $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectivo, existe $\bar{f} : P \to T(P)$ tal que $\varepsilon_P \circ \bar{f} = 1_P$.

De manera sugerente se define $\bar{\varphi} := \varphi \circ \bar{f}$. Luego se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} g \circ \bar{\varphi} =& g \circ (\varphi \circ \bar{f}) \\ =&(g \circ \varphi) \circ \bar{f} \\ =&(f \circ \varepsilon_P) \circ \bar{f} \\ =&f \circ (\varepsilon_P \circ \bar{f}) \\ =&f \circ 1_P \\ =&f \end{aligned}$$

Por lo tanto P es un módulo proyectivo. El siguiente diagrama ilustra la situación.

$$\begin{tikzcd}
 & R^{(P)} \arrow[ddl, "\varphi"'] \arrow[d, "\varepsilon_P"', shift right] & \\
 & P \arrow[u, dashed, "\bar{f}"', shift right] \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$) Como $\varepsilon_P : T(P) \to P$ es un epimorfismo y P es un módulo proyectivo, entonces existe $f : P \to T(P)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
T(P) \arrow[r, "\varepsilon_P"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es así que $\varepsilon_P \circ f = 1_P$. En consecuencia P es un objeto $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectivo. $\square$

3. Objetos $\mathbf{T}-$proyectivos en $\pi - \mathbf{Set}$

En la última sección de este texto, se busca caracterizar a los objetos $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectivos en la categoría $\pi - \mathbf{Set}$, donde $\mathbf{T}_{F,U}$ es la comónada descrita en el sexto capítulo.

Son necesarias un par de definiciones básicas respectivas a $\pi-$conjuntos.

Definición 28. *Sean π un grupo, $X \in \pi - \boldsymbol{Set}$ y $x \in X$. Se define el estabilizador de x como:*

$$\pi_x = \{g \in \pi : g \cdot x = x\}$$

Definición 29. *Sean π un grupo, $X \in \pi - \boldsymbol{Set}$ y $x \in X$. Se define la órbita de x como:*

$$orb(x) = \{g \cdot x : g \in \pi\}$$

Una resultado imprescindible para lograr el objetivo de la sección es el siguiente.

PROPOSICIÓN 55. *Sean π un grupo y $X \in \pi - \boldsymbol{Set}$, entonces*

$$orb(x) \cong \pi/\pi_x$$

para todo $x \in X$.

OBSERVACIÓN 7. *Cabe destacar que el isomorfismo antes planteado se da en la categoría $\pi - \boldsymbol{Set}$.*

DEMOSTRACIÓN. Se define

$$f : \pi/\pi_x \to orb(x)$$

como

$$f([g]) = f(g \cdot \pi_x) = g \cdot x$$

para todo $[g] \in \pi/\pi_x$.

Con respecto a la correcta definición se tiene lo siguiente.

Suponga que $[g_1] = [g_2]$. Es así que $g_1 \cdot \pi_x = g_2 \cdot \pi_x$, lo anterior implica que $g_2^{-1} \cdot g_1 \in \pi_x$, en consecuencia

$$(g_2^{-1} \cdot g_1) \cdot x = x$$

por consiguiente

$$f([g_1]) = g_1 \cdot x = g_2 \cdot x = f([g_2])$$

lo anterior prueba que f está bien definida.

Con respecto a la inyectividad se tiene lo siguiente.

Suponga que $f([g_1]) = f([g_2])$, entonces $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, lo anterior implica que

$$(g_2^{-1} \cdot g_1) \cdot x = x,$$

es así que

$$g_2^{-1} \cdot g_1 \in \pi_x$$

por lo tanto

$$[g_1] = [g_2]$$

lo anterior prueba que f es inyectiva.

Con respecto a la sobreyectividad se tiene lo siguiente.

Sea $g \cdot x \in orb(x)$, entonces $f([g]) = g \cdot x$ lo que prueba que f es sobreyectiva.

Como en la categoría $\pi-\mathbf{Set}$ los isomorfismos coinciden con los morfismos biyectivos, se concluye que

$$orb(x) \cong \pi/\pi_x$$

para todo $x \in X$. $\square$

Una vez desarrollados los conceptos básicos y necesarios relativos a $\pi-$conjuntos, es posible enunciar el resultado principal de la sección.

PROPOSICIÓN 56. *Sea π un grupo y considere la comónada $\boldsymbol{T}_{F,U}$ en $\pi-\boldsymbol{Set}$ precisada en el capítulo 6. Un objeto $X \in \pi - \boldsymbol{Set}$ es $\boldsymbol{T}_{F,U}-$proyectivo si y sólo si*

$$orb(x) \cong \pi$$

para todo $x \in X$.

OBSERVACIÓN 8. *El isomorfismo antes planteado se da en la categoría $\pi - \boldsymbol{Set}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sea $x \in X$, como X es un objeto $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectivo, existe un morfismo

$$f : X \to \pi \times U(X)$$

en $\pi - \mathbf{Set}$, tal que $\varepsilon_X \circ f = 1_X$. Se define

$$\varphi_x : orb(x) \to orb(f(x))$$

como

$$\varphi_x(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

para todo $g \cdot x \in orb(x)$.

En lo que respecta a la correcta definición se tiene lo siguiente.

Si $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_x(g_1 \cdot x) =& g_1 \cdot f(x)\\ =& f(g_1 \cdot x)\\ =& f(g_2 \cdot x)\\ =& g_2 \cdot f(x)\\ =& \varphi_x(g_2 \cdot x),\end{aligned}$$

donde la segunda y penúltima igualdad son válidas porque f es $\pi-$equivariante. Por lo tanto φ_x está bien definida.

A continuación se demuestra que el morfismo φ_x es un isomorfismo.

Si $\varphi_x(g_1 \cdot x) = \varphi_x(g_2 \cdot y)$, entonces

$$\begin{aligned} f(g_1 \cdot x) =& g_1 \cdot f(x) \\ =& \varphi_x(g_1 \cdot x) \\ =& \varphi_x(g_2 \cdot x) \\ =& g_2 \cdot f(x) \\ =& f(g_2 \cdot x), \end{aligned}$$

como $\varepsilon_X \circ f = 1_X$, entonces

$$g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$$

lo que prueba que φ_x es inyectiva.

Sea $g \cdot f(x) \in orb(f(x))$, como $\varphi_x(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ se tiene que φ_x es sobreyectiva.

Lo anterior muestra que

$$orb(x) \cong orb(f(x)) \tag{14}$$

Por otra parte, considere al $\pi-$conjunto $T(X) = \pi \times X$, por la proposición 55 se sabe que

$$orb((g, x)) \cong \pi/\pi_{(g,x)} \tag{15}$$

para todo $(g, x) \in \pi \times X$. Observe que

$$\pi_{(g,x)} = \{a \in \pi \mid a \cdot (g, x) = (g, x)\}.$$

Lo anterior implica que $a \in \pi$ es un elemento de $\pi_{(g,x)}$ si y sólo si $a \cdot g = g$. Por lo tanto

$$\pi_{(g,x)} = \{e \in \pi\} \tag{16}$$

para todo $(g, x) \in \pi \times X$. Como consecuencia de (14), (15) y (16) se concluye que

$$orb(x) \cong orb(f(x)) \cong \pi$$

para cada $x \in X$.

$\Leftarrow$) Se busca $f : X \to T(X)$ morfismo en $\pi - \mathbf{Set}$, tal que $\varepsilon_X \circ f = 1_X$.

Sea $y \in X$, como
$$X = \bigsqcup_{x \in Rep(X)} orb(x),$$
entonces $y \in orb(x)$ para alguna $x \in X$. Por hipótesis
$$\pi \cong orb(x),$$
lo anterior implica que existe una única $g \in \pi$ tal que $g \cdot x = y$. Se define
$$f(y) = (g, x)$$
para cada $y \in X$. Como la $g \in \pi$ es única, la función esta bien definida.

Por una parte

$$\begin{aligned} a \cdot f(y) =& a \cdot (g, y) \\ =& (a \cdot g, y) \\ =& f(a \cdot y) \end{aligned}$$

para todo $a \in \pi$, $y \in X$. Por lo tanto $f : X \to \pi \times X$ es una función $\pi-$equivariante.

Por otra parte

$$\begin{aligned} (\varepsilon_X \circ f)(y) =& \varepsilon_X(g, x) \\ =& g \cdot x \\ =& y \\ =& 1_X(y) \end{aligned}$$

para todo $y \in X$. El par de argumentos antes validados permiten concluir que X es un objeto $\mathbf{T}_{F,U}-$proyectivo. $\square$

Bibliografía

[1] Barr M., *Toposes, triples and theories* , Springer, 1985.

[2] Barr M., Beck J., Appelgate H., Linton F., Manes E., Tierney M., Ulmer F., Lawvere W., *Seminar on triples and categorical homology theory*, springer, 1967.

[3] Beck J., *Triples, algebra and cohomology* , Ph. D. thesis, Columbia University, 1967.

[4] Borceux F., *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Cambridge UniversityPress, 1994.

[5] Cartan H., Eilenberg S., *Homological algebra*, Princeton university press, 1956.

[6] Eilenberg S., *Cohomology theory in abstract groups 1*, Ann. of Math. Vol. 48, 1947.

[7] Eilenberg S., Moore J., *Adjoint functors and triples*, Illinois J. Math, 1965.

[8] Godement R., *Topologie algébrique et theórie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[9] Huber J., *Homotopy theory in general categories*, Springer, 1961.

[10] Kasch F., *Modules and Rings*, Academic Press, 1982.

[11] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1988.

[12] Rotman J., *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[13] Stenstrom B., *Rings of quotients: An introduction to methods of ring theory*, Springer, 1975.

[14] Weibel C., *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.