UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

FACULTAD DE CIENCIAS

Conexión pictórica entre las matemáticas y el mundo real. Una alternativa de aprendizaje en el bachillerato

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:

MAT. MÓNICA CITLALLI PEREYRA ZAMUDIO

TUTOR PRINCIPAL:
MTRO. JOSÉ RAFAEL MARTÍNEZ ENRÍQUEZ
(FACULTAD DE CIENCIAS)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

MTRO. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA.
(FACULTAD DE CIENCIAS)

MTRO. LUZ ARELY CARRILLO OLIVERA.
(FACULTAD DE CIENCIAS)

Cd.Universitaria, Cd. Mx. Febrero 2022

AGRADECIMIENTOS

Por este conducto hago de manifiesto mi sincero agradecimiento y doy las gracias al Programa de Becas para Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México UNAM (PBEP Maestría) por el apoyo económico brindado durante mis estudios. De igual modo quiero agradecer al M. en C. José Rafael Martínez Enríquez por su paciencia y apoyo durante el desarrollo de la presente tesis. A los miembros de mi comité tutor, el Mtro. José Antonio Gómez Ortega, al Dr. Jorge Alonso Bustamante Torres, a la Mtra. Tania Azucena Chicalote Jiménez y a la Mtra. Luz Arely Carrillo Olivera, por su apoyo académico y consejos durante el desarrollo de este trabajo de grado.

Igualmente deseo dedicar esta tesis:

Especialmente a mi papá, el **Dr. Javier Pereyra Venegas** ya que gran parte de este logro es gracias a ti, a tu guía y apoyo en todo momento, antes y durante este trabajo; gracias por todo tu tiempo y por estar siempre para mí.

A mi mamá María de Lourdes Zamudio Guzmán, por su amor y amistad incondicional.

A mi hermano Javier Eduardo Pereyra Zamudio por su solidaridad y afecto.

Finalmente quiero agradecer a mi amigo Erick Ruiz Martínez por su apoyo, cariño e invaluables momentos compartidos durante todo este tiempo. Así como a todos mis amigos, compañeros de generación, y a mis profesores por su apoyo dentro y fuera del ámbito académico.

RESUMEN

En este estudio se presentan una serie de aplicaciones que buscan promover la enseñanza de las matemáticas integrada a situaciones reales. En esta tesis se analiza la primera etapa de lo que eventualmente devino en la geometría proyectiva y que constituye el origen de una revolución en la representación pictórica del espacio durante el Renacimiento. El motor de esta transición fue la geometría, pues gracias a ella y a la tradición de la óptica clásica, se indujo en la percepción visual, la sensación de tridimensionalidad en la pintura.

En este estudio se presentan algunos elementos de la perspectiva aplicados en la pintura renacentista que permitieron una visión mas cercana a la realidad, ilustrando cómo el contexto histórico y social determina el desarrollo, el ritmo y las particularidades del desarrollo del conocimiento humano, visto éste como un proceso acumulativo y dinámico ligado con las necesidades de la época en la que se gesta. Esta propuesta educativa se presenta en el contexto de la Teoría de la Objetivación y el Paradigma de la matemática realista utilizada en la educación en los Países Bajos.
Palabras clave: Perspectiva, pintura, geometría, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca.

Abstract: This research presents a series of applications that seek to promote the teaching of mathematics integrated into real situations. The thesis deals with the first stage of what eventually became projective geometry, and which constitutes the origin of a revolution in the pictorial representation of space during the Renaissance. The moving force of this transition was geometry, since with its use and that of the classical optical tradition, the sensation of three-dimensionality was induced in visual perception on the picture.

In this study, some elements of perspective applied in Renaissance painting are presented that allowed a vision closer to reality, illustrating how the historical and social context determines the development, the rhythm and the particularities of the development of human knowledge, seen as a cumulative and dynamic process linked to the needs of the time in which it grows. This educational proposal is presented in the context of the Objectification Theory and the Paradigm of realistic mathematics used in education in the Netherlands.
Keywords: Perspective, painting, geometry, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca.

Índice de Contenidos

INTRODUCCIÓN

A través de la historia, la geometría ha jugado un papel de suma importancia como una de las parcelas básicas en el desarrollo de las matemáticas. En la actualidad, su aprendizaje continúa siendo determinante en la formación y desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, para un amplio sector del estudiantado resulta que el lenguaje, las representaciones, así como la interpretación de los objetos, conceptos y definiciones propias de la geometría constituyen un reto durante su aprendizaje.

En este contexto, el estudio que a continuación se presenta intenta contribuir a generar una manera de vincular a los estudiantes de los niveles preuniversitarios con el estudio de las matemáticas, a través del planteamiento de problemáticas que en su tiempo fueron reales que permitan situar el proceso de enseñanza en un contexto social e histórico, que las más de las veces es desdeñado. Esto, hay que señalarlo, conduce a falsas concepciones por parte del alumnado acerca del desarrollo y evolución del conocimiento, ya que con frecuencia se percibe el desarrollo de una disciplina como si se tratara de un fenómeno natural -es decir, que sigue una ruta predeterminada por su propia naturaleza- y no de uno cultural (D´Amore, y Radford: página 107). Esta tenue vinculación con el mundo real o con la vida cotidiana que comúnmente se otorga a las matemáticas puede constituir un factor que contribuye de manera relevante al poco interés hacia la materia. El otro factor que influye en que resulten poco atractivas para el estudiantado es que las perciben como una disciplina que demanda un nivel de exigencia intelectual superior, por lo general, al de otras disciplinas.

Ante la perspectiva que hemos descrito parte de nuestra propuesta metodológica consiste en inducir a los profesores, especialmente del nivel preuniversitario, a reflexionar acerca de que la enseñanza de las matemáticas no debe verse reducida exclusivamente a fórmulas, definiciones y métodos para la solución de problemas, como suele presentarse en la mayor parte de los textos utilizados en la enseñanza de las matemáticas en el nivel preuniversitario. En otro sentido, nuestra propuesta podría también contribuir a inducir modificaciones en el marco pedagógico tradicional que condujo a la situación actual, partiendo de la riqueza de contenidos que surgen al revisar el desarrollo histórico de las matemáticas, en tanto que las enlaza con la cultura y el desarrollo de las sociedades y exhibe convergencias que no hubiéramos imaginado. Esta situación queda plasmada de manera ejemplar en la manera como la geometría se enlaza con la pintura en el período histórico conocido como el Renacimiento italiano (siglos XV y XVI).

Una parcela de la cultura renacentista, para muchos la que de manera más visible la caracteriza, es la transición en la representación del espacio entre las pinturas medievales y las típicas del Renacimiento. En las primeras la espacialidad se exhibe de manera más simbólica que realista, las dimensiones de los objetos y de los personajes están dictadas más por la importancia relativa entre ellos -los reyes y la alta jerarquía eclesiástica se representan de mayor tamaño que la servidumbre- que por sus dimensiones reales. En contraste, las pinturas típicas de finales del siglo XV ya muestran a los personajes con tamaños que reflejan sus dimensiones en términos relativos a su posición en la escena pictórica, es decir, personas de la misma altura son representadas de menor tamaño conforme más alejadas estén del observador de la escena. Sus dimensiones cambian obedeciendo a cierta proporcionalidad conforme se modifica su distancia respecto de quienes aparecen en los primeros planos de la pintura, éste es un elemento básico para generar la sensación visual del espacio tridimensional en una pintura. El otro es la construcción de la arquitectura que cobija el acomodo de los objetos, personas y demás elementos que integran la escena y que de manera conjunta producen la ilusión de estar en el espacio tridimensional. Para alcanzar ambos objetivos fue menester recurrir al uso de la geometría y de la óptica geométrica.

No obstante, muchos de los principios de perspectiva y óptica, al igual que otras ramas de las matemáticas que se habían desarrollado en la época de Euclides, poco a poco fueron abandonadas al olvido por los pocos hombres de ciencia de las escasas escuelas filosóficas que se mantuvieron del siglo VI d.c. al XIV. Aun así, una pequeña parte limitada a aspectos prácticos se conservó y fue retomada a principios del siglo XV, como preludio de lo que vendría más adelante. De acuerdo a Egnazio Danti (quien publicó la primera traducción al italiano del libro *Óptica* de Euclides en 1573) fue con los estudios de Kepler y Galileo como la ciencia de la visión regresó a ocupar el foco de atención de los científicos, en particular la geometría óptica, logró un amplio progreso principalmente gracias a las aplicaciones prácticas, como las utilizadas para medir "distancias inalcanzables" descritas en los textos de Al-Farabis`s y en el libro *Óptica* de Euclides, las cuales se usaban por ejemplo para calcular la altura de árboles y montañas, la anchura de ríos, la distancia y el tamaño de cuerpos celestes, etc. Entre dichas aplicaciones, estuvo la perspectiva lineal que se desarrolló a través de la difusión de métodos e instrumentos para la medición, empleados por los arquitectos, ingenieros y pintores, cuyo entrenamiento matemático procedía de la enseñanza práctica de la geometría euclidiana de finales de la Edad Media.

Así bien, la perspectiva es una técnica que proporcionó a los pintores y arquitectos del Renacimiento los medios para producir una convincente ilusión de profundidad, además de brindar un significado a los trazos y proceder de los pintores, permitiendo a su vez la racionalización de dicho conocimiento. Y fue precisamente el papel que jugaron las matemáticas en el desarrollo de estrategias geométricas para inducir la ilusión de tridimensionalidad, lo que marcó un antes y un después en la pintura. Dicho aspecto se analiza en el primer capítulo de esta tesis.

Para comprender mejor las nuevas ideas, es preciso analizar "el antes y el después" de las implementaciones de las técnicas de la perspectiva en la pintura, me parece necesario mostrar un ejemplo de esto; a partir de un cuadro pintado por Giovanni di Paolo, en el año 1456, *la aparición de San Jerónimo a San Agustín* (véase cuadro 1), donde se observa cómo una noche mientras San Agustín se encontraba escribiendo una carta a San Jerónimo, éste se le apareció anunciándole que había muerto pero que su alma se encontraba en el paraíso. Llama la atención claramente la falta de perspectiva en el cuadro: por ejemplo, las columnas que separan los distintos espacios de la escena en la que se halla San Agustín sentado pareciera se encuentran en un mismo plano, perdiéndose la sensación de fondo, lo que las hace parecer casi del mismo tamaño y grosor que las columnas que se encuentran más cerca. Esto debido a la carencia de un punto de fuga (las líneas paralelas formadas por la mesa y el librero no convergen claramente al punto donde se encuentra San Jerónimo). Lo mismo se observa, en el piso cuadriculado en la parte inferior derecha, pareciendo que el pintor no tomó en cuenta desde donde se observa la pintura. La carencia de perspectiva en el cuadro termina a su vez afectando las dimensiones de los personajes y objetos que aparecen en el lienzo.

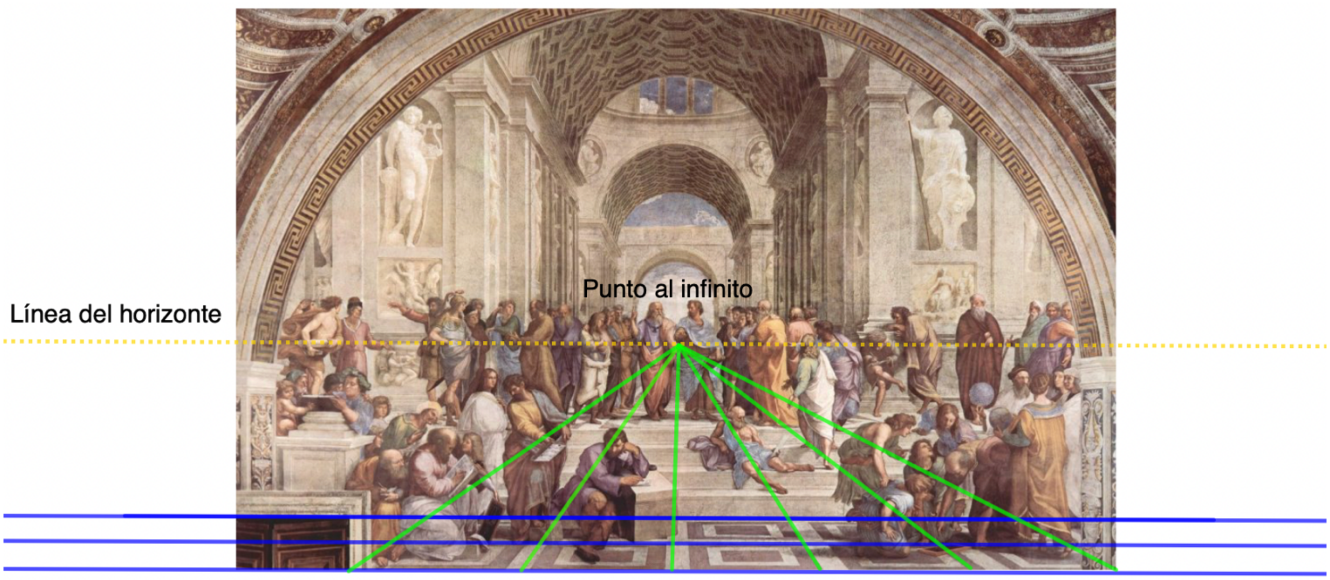
Cuadro 1. Obra de Giovanni di Paolo, titulada *San Jerónimo apareciéndose a San Agustín* (1456), escena en la que se observa la falta de manejo de la perspectiva

Por otro lado, tenemos a ***La escuela de Atenas,*** pintada por Rafael (véase cuadro 2), que se encuentra ubicada en el Palacio Apostólico de la Ciudad del Vaticano, en la que se pueden observar varios planos puestos frente al observador, siendo los más apartados de éste los de menor tamaño[1]. Y en relación con el plano del suelo, se puede notar como las diferentes secciones del piso cuadriculado conforme más alejadas se encuentran del observador parecen más altas[2].

[1] Teorema 11 del libro *Óptica* de Euclides; *Entre los planos puestos sobre el ojo, los que están más apartados, parecen más bajos*

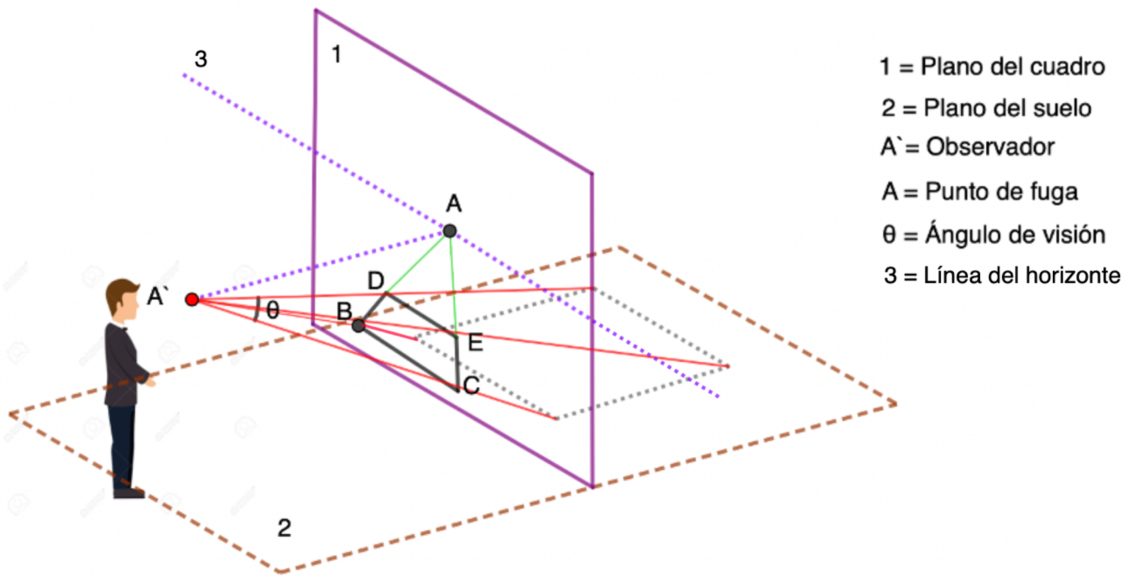
[2] Teorema 13 del libro *Óptica* de Euclides; *Entre las grandezas iguales puestas bajo del ojo, las que están más apartadas, parecen más altas.*

De modo que, en esta pintura a comparación de la anterior, se puede observar claramente cómo las líneas "paralelas" del piso cuadriculado, convergen a un mismo punto al infinito (lo cual incide sobre los tamaños de los contornos circulares de los arcos y también de las columnas), ubicado entre Platón y Aristóteles, quienes se encuentran debatiendo tal vez acerca de la búsqueda de la verdad. Platón está señalando el cielo, simbolizando el idealismo, mientras que Aristóteles señala la tierra, haciendo referencia a su realismo sustancial y racional.



Cuadro 2. Autor: Rafael Sanzio, pintura titulada ***La escuela de Atenas*** (1510-1512). En ella se muestran algunos de los principales elementos de la técnica de la perspectiva, como el punto de fuga y la convergencia de las paralelas del piso cuadriculado a dicho punto.

Los principales elementos (véase esquema 1) que conformaron las bases de esta técnica para “la medición de lo irreal” aparecieron por primera vez en el tratado de *Óptica* de Euclides, quien afirma que la razón de las medidas aparentes de los objetos depende del ángulo de visión (θ) en el cuál los objetos están contenidos y la distancia (A`A) del observador al lienzo (en este caso, la construcción de un piso representado por el cuadrilátero BCED) a lo largo del eje central de la pirámide o cono visual, como también lo afirmó más tarde Alhazen. (Siglo X), en su libro de Óptica que tanto impacto tuvo en Occidente. Estos elementos fueron retomados posteriormente en los trabajos de Alberti para generar la ilusión de profundidad, como se explicará más adelante en el capítulo 2.



Esquema 1. Principales elementos propuestos en el libro *Óptica* de Euclides que fueron retomados posteriormente por Alberti y Piero della Francesca para la construcción en perspectiva de un objeto (cuadrilátero BCED)

Dichos trabajos de Alhazen y Alberti poco después, serían debatidos y contrastados por técnicas alternativas entre las que destaca las propuestas por Piero della Francesca, las cuales producían el mismo resultado, en cuanto a la representación del piso cuadriculado, que las de su contemporáneo Alberti, con la diferencia de que della Francesca se vio en la necesidad de demostrar que efectivamente las dos construcciones daban como resultado el mismo objeto, valiéndose así de la herramienta más poderosa que tenía a la mano, las matemáticas. Dichos métodos serán examinados en el capítulo 3.

Con base en estos antecedentes la propuesta que aquí se presenta muestra una ruta que recrea, a partir de los hechos históricos, la elaboración de métodos geométricos utilizados en la pintura para producir la ilusión de tridimensionalidad. Estos métodos dieron lugar a la llamada perspectiva lineal, es decir, las técnicas geométricas que determinaban los tamaños de los elementos que constituían la imagen pictórica y que condujeron eventualmente a la constitución de la geometría proyectiva. A lo largo de esta presentación, se hará énfasis en los conflictos reales que surgen a lo largo del proceso creativo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Uno de los problemas comunes en la enseñanza de las matemáticas es que su aprendizaje, en general, está limitado únicamente a conceptos o conocimientos matemáticos relacionados con procesos o técnicas que dan lugar a la solución de operaciones de forma rutinaria, a la memorización de propiedades, reglas y fórmulas, así como el aprendizaje de entes abstractos, tales como algunos elementos básicos de la geometría plana, semejanza de triángulos, teoremas y propiedades geométricas entre otros.[3]

Lo anterior pudiera provocar que dichos entes relacionados con la geometría sean concebidos como ideas o conceptos, abstractos, descontextualizados y ajenos a los estudiantes, soslayando la construcción social del conocimiento matemático.

Pocos académicos abordan los fundamentos históricos y socioculturales que estuvieron detrás de los problemas reales que dieron lugar a los conocimientos que hoy se estudian en matemáticas. Kline por ejemplo en su obra *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, sostiene que las exposiciones que se hace en los cursos habituales de matemáticas *no muestran en absoluto los conflictos del proceso creativo, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura*. De modo que abordar la materia desde un enfoque histórico-social, puede ofrecer un contexto que les permitiera conectar las matemáticas con el mundo real, poniendo a prueba su curiosidad y desarrollando en ellos una cualidad reflexiva sobre los conocimientos que están adquiriendo.

Precisamente, la teoría de la objetivación busca que el aprendizaje de las matemáticas no se vea restringido sólo al *eje del conocimiento*, sino también *al eje del ser.* En otras palabras, *la teoría de objetivación considera la meta de la educación matemática como un*

[3] Esta actitud de enseñanza como lo dice Polya, G. (1976) *matará en los alumnos el interés e impedirá su desarrollo intelectual.*

esfuerzo, dinámico, político, social, histórico y cultural que busca la creación de sujetos reflexivos que se puedan posicionar críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyeron histórica y culturalmente (D´Amore, & Radford: página 97).

En este sentido, la idea de esta tesis es conectar a los estudiantes con el entorno histórico y sociocultural que dio origen a la perspectiva, con la intención de darle significado al aprendizaje de "un concepto abstracto" como lo es la idea de que un instrumento bidimensional (un cuadro, un diseño arquitectónico) es capaz de mostrar una realidad tridimensional, lo cual ayudó a comprender y resolver necesidades prácticas, con la idea de que el aprendizaje, es finalmente un proceso de adaptación a las prácticas sociales en la que el estudiante se vuelve consciente y al mismo tiempo adquiere gradualmente el significado de formas codificadas de pensamiento, volviéndose poco a poco capaz de manipularlas y utilizarlas dándoles un significado, es decir, lograr un proceso de objetivación.

De acuerdo con este razonamiento, resulta importante el desarrollo de propuestas didácticas que puedan ser vistas como una alternativa al enfoque mecanicista de la enseñanza de las matemáticas tan común en nuestro país, por eso, la propuesta de mi trabajo de tesis es utilizar la línea didáctica conocida como educación matemática realista (específicamente el desarrollo histórico de la perspectiva lineal en la pintura del renacimiento) y la teoría de la objetivación para la enseñanza de ciertos temas (1.- construcciones con regla y compás, 2.- semejanza de triángulos 3.- teorema de Pitágoras 4.- teorema de Tales); pertenecientes a las unidades 3 y 4 del programa de matemáticas II de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH).

La necesidad del desarrollo de nuevas propuestas didácticas parece clara cuando se realiza La revisión específica de los aprendizajes, las estrategias de enseñanza de las temáticas mencionadas en el párrafo anterior, y de la bibliografía señalada en el programa de estudios. Su revisión, sugiere que la enseñanza de la geometrÍa plana en el segundo semestre del ENCCH se desarrolla utilizando ejemplos aislados, sin contexto y sin tomar en cuenta el nivel de complejidad que indican los verbos utilizados en el programa .[4]

Probablemente, un ejemplo de este enfoque mecanicista (en el caso del tema, construcciones con regla y compás) puede observarse en la guía de estudio para la preparación del examen extraordinario de matemáticas II del ENCCH (2015) p 40-66, y en el libro titulado "geometría" escrito por bulajich r. (2012) p 44-50, los cuales forman parte de la bibliografía sugerida para el curso.

Otro ejemplo, es el tema de semejanza de triángulos, en el que varios de los textos sugeridos sí utilizan problemas de aplicación, los cuales generalmente están relacionados con la medición de distancias inalcanzables (por ejemplo en cardenas rubio, s.; 2014 p19). En estos casos, donde sí se sugieren aplicaciones creemos que la utilización de la perspectiva lineal en la pintura del renacimiento, como se presenta en nuestro trabajo, nos brinda al menos otra alternativa de enseñanza, y lo mismo ocurre con temas como los teoremas de tales y pitágoras. es decir, el desarrollo histórico de la perspectiva lineal como es abordado en esta tesis nos permite tratar dichos temas (y probablemente algunos otros más de estas unidades) desde el enfoque de la educación matemática realista y de la teoria de la objetivación, lo cual pensamos ofrece al menos las siguientes ventajas: permite la planeación adecuada e integral de la enseñanza tomando en cuenta niveles de complejidad crecientes utilizando una aplicación común, donde los alumnos puedan obtener además de los aprendizajes conceptuales de la disciplina, elementos culturales del desarrollo histórico y real del conocimiento matemático, partiendo de lo simple a lo complejo descubriendo que existe una estructura en el conocimiento matemático, en este caso de la geometría plana, cuyo desarrollo está ligado a las necesidades sociales y culturales específicas; de modo que logren percibir a las matemáticas como una ciencia y como una herramienta que contribuye con técnicas, procedimientos y teorías para la obtención de conocimientos, y sus aplicaciones en diversos

---

[4] Ver taxonomía de Bloom modificada acerca de los niveles cognoscitivos, revisada por el Dr. Andrew Churches 2001 *Taxonomía revisada de Bloom* https://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital).

campos del saber. finalmente esta aplicación probablemente podría desarrollar en los alumnos aprendizajes actitudinales necesarios para valorar la importancia de las matemáticas.

HIPÓTESIS

Conviene mencionar que la línea didáctica conocida como educación matemática realista, ha sido aplicada con éxito en el nivel inicial de educación (primaria) para la enseñanza de las operaciones básicas en algunos países europeos cuya infraestructura educativa es típica de países desarrollados. Sin embargo, hasta donde conocemos, no existen referencias sobre su utilización en países en desarrollo (como México) donde los sistemas educativos presentan graves deficiencias estructurales, y donde son comunes grupos muy numerosos de alumnos, además se carece en general de medios digitales en las aulas entre muchas otras diferencias.

En el ámbito laboral, las condiciones de trabajo de la mayoría de los profesores son completamente diferentes a las de sus colegas de países europeos donde esta línea didáctica a sido aplicada; por lo cual los resultados obtenidos en los países desarrollados es probable que no puedan ser extrapolados mecánicamente a un país como el nuestro. Por otro lado, tampoco sabemos que esta linea didactica haya sido probada o aplicada en el nivel medio superior para la enseñanza de la geometría plana. Con base en lo anterior, la hipótesis de este trabajo es que la educación matemática realista y la teoría de la objetivación pueden aplicarse con éxito en la enseñanza de algunas temáticas de la geometría plana en el ENCCH, bajo las condiciones educativas presentes en nuestro país.

OBJETIVOS

Objetivo general

- Ofrecer elementos alternativos para el estudio de las matemáticas (geometría plana) que despierte el interés de los estudiantes del nivel medio superior (ENCCH) mediante la presentación de una aplicación que resulte atractiva y que integren el desarrollo de las matemáticas a un contexto concreto, es decir, el uso de las matemáticas en situaciones reales.

Objetivos Particulares

- Utilizar el desarrollo histórico de la perspectiva lineal en la pintura del renacimiento como una aplicación para mostrar que, al igual que otras ciencias, las matemáticas ofrecen conceptos y herramientas que nos ayudan a describir y entender fenómenos y situaciones de la realidad; lo anterior con el objetivo de desarrollar en los estudiantes un aprendizaje significativo en las siguientes temáticas: a) construcciones con regla y compás, b) semejanza de triángulos, c) teorema de Pitágoras y d) teorema de Tales; pertenecientes a las unidades 3 y 4 del programa de estudios de matemáticas II de la ENCCH.

- Finalmente, esta propuesta pretende que los profesores valoren la importancia de proporcionar a los alumnos una aplicación real, como un contexto que otorga validez al conocimiento matemático y promueve construcciones teóricas que van más allá de los aprendizajes conceptuales.

MARCO TEÓRICO

Esta propuesta se sustenta en distintos supuestos teóricos que se adoptaron a partir de los contenidos de la Teoría de la Objetivación de Luis Radford y en un paradigma al que se puede describir como matemática realista (Goffree: páginas 151-168). La primera concibe el saber como *una secuencia de acciones codificadas histórica y culturalmente* (D´Amore, & Radford: página 101) mediante las cuales el individuo progresivamente se vuelve consciente y reflexivo en cuanto a los conceptos, cuestiones y problemas que se abordan para con ello estimular el aprendizaje. En otras palabras, esta teoría enfatiza el hecho de que el saber tiene un carácter potencial que se materializa en un contenido conceptual concreto, es decir, en un conocimiento. Esto lo lleva a cabo mediante el reconocimiento gradual de ideas y formas de pensamiento en un determinado punto histórico y cultural.

El vínculo existente entre las formas de pensamiento y los aspectos socioculturales de una época histórica dada ayuda a proveer de significado a las matemáticas, convirtiéndolas en algo concreto dentro de un contexto reconocible, lo que a su vez permite despejar la idea errónea que tienen algunos estudiantes de que los conocimientos que se adquieren forman parte de un contexto meramente formal -casi mágico- en ciertos casos utilitario, y que da cuenta de una desvinculación del sujeto en relación al tiempo-espacio. En forma semejante a lo que opina Bell; *Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas*[5]

Por otro lado, el paradigma de la matemática realista desarrollado en los Países Bajos se basa en cinco principios, entre los que destaca la noción de que *solo los contenidos matemáticos que pueden conectarse con el mundo real serán útiles como punto de partida para la educación matemática* (Goffree, F: página 151).[6] Esta fuente de ideas que surgen de

[5] Bell E.T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México. P. 68
[6] Los otros 4 principios son; 1) El aprendizaje de las matemáticas es una actividad constructiva, 2) El proceso de aprendizaje de cada alumno se da a diferentes niveles 3) El aprendizaje de las matemáticas se estimula con la reflexión 4) Los alumnos aprenden más mediante la interacción con varias personas.

situaciones concretas posibilita la ampliación o la difusión de estas contribuciones hacia otras disciplinas, contribuyendo así a estimular el desarrollo de estudiantes críticos y reflexivos.

PROPUESTA METODOLÓGICA

Esta propuesta pretende apoyar a los profesores de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades en determinados aprendizajes de las unidades 3 y 4 del programa de estudios de matemáticas II (conceptualización de segmento de recta, líneas paralelas, líneas perpendiculares, ángulos, criterios de semejanza, y utilización de estos en la resolución de problemas) brindando aplicaciones que puedan servir en el desarrollo integral y cultural del alumno, las cuales les ayuden a valorar las aportaciones de las matemáticas en otros campos del saber.

Particularmente, este estudio puede servir como herramienta en la revisión conjunta con el grupo, de los elementos básicos de la geometría plana a través del desarrollo de la perspectiva en el arte, así como un ejemplo de aplicación de los criterios de semejanza y del teorema de Tales al mundo real.

Es así que de acuerdo con nuestro marco teórico, el foco de atención de este trabajo se centra en que los alumnos, como lo marca su programa de estudios[7], conciban a la materia como una disciplina que posee un carácter dual; primero como una ciencia, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos, pero también como herramienta, que contribuye con técnicas, procedimientos y teorías para la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber. Lo anterior de acuerdo con el enfoque de la materia en el cual los alumnos deben ser capaces al finalizar los cursos de adquirir por sí mismos nuevos conocimientos además de analizar, interpretar y modificar el mundo que los rodea.

[7] [7] https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf

CAPÍTULO 1

¿Cómo obtenemos conocimiento?

Históricamente, durante el desarrollo de las ciencias y de muchas parcelas del quehacer matemático se pensó que los sentidos eran suficientes para obtener conocimiento. Sin embargo, la historia del pensamiento científico certifica que, si bien los sentidos proporcionan cierta información que permite comprender el mundo que nos rodea, la confianza en los datos que suministran tiene sus limitantes, además de que pueden ser insuficientes, razón por la que, en ocasiones, sobre todo cuando se profundiza en el terreno de las problemáticas, se torna necesario elevar el nivel crítico que permite interpretar y procesar la información. Consideremos, por ejemplo, el sentido de la vista, una de las principales vías que utilizamos para generar conocimiento a partir de nuestras sensaciones. ¿De qué tamaño es el sol? Se preguntaban en los albores de la filosofía griega. Las respuestas probablemente eran variadas, pero sorprende ahora que un filósofo tan brillante como Heráclito de Éfeso haya afirmado, según uno de los pocos fragmentos de su obra que nos han llegado, que el tamaño del Sol es la anchura de un pie.[8] Habría quienes pudieran pensar que el sol y la luna tienen el mismo tamaño pues así lo parece durante los eclipses de sol. Otro ejemplo similar es cuando miramos dos edificios sin que sepamos a qué distancia se encuentran respecto de nosotros, o bien, qué distancia hay entre ellos. ¿Cómo podemos saber cuál es más alto? Y ¿qué pasa si deseamos saber cuál de ellos se encuentra más alejado de nosotros? Es la experiencia la que en principio nos permite decir que la construcción más alejada es la que parece más pequeña.[9] Esto considerando que ambas fueran de la misma altura, pero tal cosa no necesariamente la sabemos. Una situación similar a las anteriores se podrá presentar al observar dos líneas paralelas que se extienden alejándose de uno. Sin una

---

[8] Freeman, K., & Diels, H. (1948, 1983). *Ancilla to the pre-Socratic philosophers*, Harvard University Press, p. 25.

[9] Esta afirmación aparece demostrada en una obra sobre *óptica* geométrica atribuida a Euclides. Ver Teorema 5: "Las grandezas iguales que desigualmente están apartadas parecen desiguales, y siempre parece mayor la que está más cerca del ojo". Euclides, *óptica*, (1986 y 2000)

teoría previa y basándonos únicamente en el sentido de la vista, podríamos sostener que las líneas paralelas en el mundo real se cortan.[10] ¿Es esto, pues, lo que debemos creer? ¿Cómo se inserta este fenómeno en el conjunto de nuestros conocimientos y experiencias?

En algún momento René Descartes dijo: *Despréndete de todas las impresiones de los sentidos y de la imaginación y no te fíes sino de la razón.*[11] De acuerdo a lo anterior, es obvio que los sentidos por sí solos están incapacitados para obtener cierta clase de conocimientos tales como el porqué del color de los cielos, el tamaño del sol y de la luna, la distancia al sol etc., Entonces ¿qué es lo que podemos considerar como verdad, de dónde surge y cómo logramos alcanzarla?

Las matemáticas constituyen una de las herramientas fundamentales para alcanzar la verdad, o por lo menos, una mayor certeza. En ellas se ve reflejada la curiosidad intelectual pura del hombre cuando se enfoca sobre la naturaleza, y si bien es cierto que muchas cuestiones (como el tamaño aparente de los objetos, sus cambios de formas según las distancias, la transmisión de la luz) no constituyen tema de reflexión ni producen preocupación alguna en nuestra cotidianeidad, hubo algunos, en un periodo histórico dado, para los que estos hechos no pasaron desapercibidos, y gracias a ellos y a sus estudios y observaciones se generaron teorías y técnicas que pronto derivarían en nuevas áreas del conocimiento matemático y, como se mostrará más adelante, que en algunos casos resultarían en aplicaciones vinculadas con la pintura y la arquitectura durante los siglo XV y XVI.

Fue en el Renacimiento cuando algunos de los grandes avances en el uso de las matemáticas estuvieron vinculados con la pintura y la arquitectura. Aprovechando este hecho y lo novedoso que puede resultar para los lectores no especializados en las matemáticas o en cuestiones de historia del arte, y que sin embargo son capaces de seguir un razonamiento basado en cuestiones geométricas básicas, se mostrará cómo los pintores imprimieron

[10] *Ibid*. Teorema 6: "Las distancias paralelas miradas desde lejos, parecen de desigual latitud". Esto, expresado de manera coloquial para nosotros significa que la distancia aparente entre dos paralelas alejándose de un observador parece disminuir, es decir, al observador le parece que tienden a juntarse.

[11] Descartes, R. (2010). *Discurso del método*. Colección Austral España. http://www.posgrado.unam.mx/musica/lecturas/LecturaIntroduccionInvestigacionMusical/epistemologia/Descartes-Discurso-Del-Metodo.pdf . (pp. 59-66).

realismo a sus productos a partir del siglo XV. Este realismo tenía como elemento básico el producir la ilusión de tridimensionalidad mediante trazos realizados sobre una superficie.

En el norte de Italia, desde mediados del siglo XIII y con más intensidad durante los inicios del *Quattrocento*, los artistas empezaron a intentar representar la realidad tal y como la percibían, y para ello aplicaron geometría y óptica con el fin de establecer un sistema de trazos -a lo que se llamó 'dibujar en perspectiva'- que les permitiera simular una espacialidad volumétrica y representar escenas que tenían lugar en dicho espacio. Esto marcó una notable diferencia entre los estilos de pintura desarrollados tiempo atrás, en particular durante la Edad Media, los cuales ofrecían a la vista un aspecto plano y una falta de proporcionalidad entre los tamaños de los personajes y los objetos aledaños, todos ellos sujetos a convencionalismos en cuanto a su representación. Un ejemplo de esto último es que usaban una especie de 'perspectiva jerárquica' según la cual los personajes principales eran representados con un tamaño mayor al de los menos importantes.

Esta revolución en la representación producida por la llamada 'perspectiva lineal' -calificada también como 'artificial'- es uno de los pilares del llamado Renacimiento europeo. Durante dicho periodo se pusieron a prueba varias estrategias geométricas para inducir la ilusión perfecta que imitara la realidad sobre un lienzo. Cabe plantearse dos preguntas: ¿qué técnica(s) matemática(s) usaron esos artistas para representar escenas que produjeran a la vista la misma impresión que las escenas reales? y, ¿cómo es que los artistas, a través de dichas técnicas construían imágenes que hoy denominamos como que "están en perspectiva"?

CAPÍTULO 2

La perspectiva lineal o perspectiva de los pintores

En términos históricos fueron personajes como Filippo Brunelleschi (1377- 1436), Leon Battista Alberti (1404-1472) y Piero della Francesca (1412-1492) quienes primero introdujeron de manera coherente técnicas geométricas para la implementación de la perspectiva en la pintura, siendo los dos últimos los autores de los primeros textos sobre perspectiva hoy conocidos. Estos circularon como copias manuscritas en los círculos artísticos e intelectuales italianos. Alberti fue el primero en tratar de sistematizar y organizar los principios de la perspectiva lineal en su tratado llamado *De Pictura* (*de la pintura*, 1435)[12], el cual se sustenta en parte en la geometría euclidiana y en parte en el escrito sobre óptica atribuido a Euclides y que circulaba en los medios cultos desde la Edad Media.[13] En particular, Alberti describe la forma en que se construye un piso cuadriculado en perspectiva, Éste es el primer paso que históricamente fue utilizado de manera sistemática para generar la ilusión de profundidad. Tiene sentido hacerlo así pues una vez determinado cómo representar el piso y sus diferentes zonas cuadriculadas se puede proceder a colocar sobre cada una de ellas los objetos que aparecen en la escena real, esto es, cómo colocar los elementos que integran la escena sobre los diferentes espacios de la cuadricula, cuidando asignarles las alturas adecuadas a los diferentes elementos, mismas que se obtienen geométricamente siguiendo una lógica similar a la que permite construir el piso cuadriculado.

Hacia la segunda mitad del siglo XV el trazo del piso cuadriculado visto en perspectiva se realizaba siguiendo básicamente dos métodos, el de Alberti o el de Piero della Francesca. A continuación, se presentan ambos métodos siguiendo las líneas esenciales de las instrucciones que aparecen en los textos originales y cuya lectura directa puede ser un

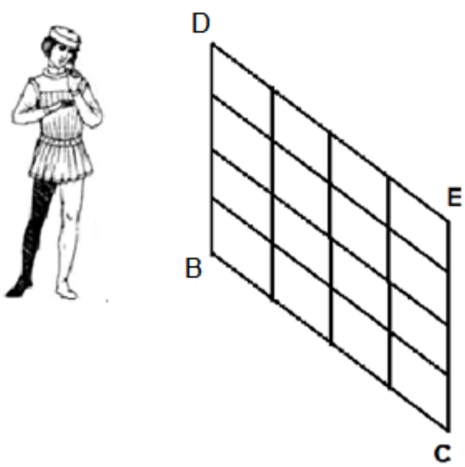
[12] Alberti, L. B. (1996). *De la pintura*. UNAM. Alberti, L. B. (1972*). On painting and on sculpture: the Latin texts of De Pictura and De statua*, ed. *Cecil Grayson. London: Phaidon*. Field J. V. (1985) Piero della Francesca and the Distance Point Method of Perspective Construction.

[13] Ver Euclides (2000). También la publicación facsimilar realizada por el CINVESTAV del IPN en 1986: Euclides, *La perspectiva y especularía de Euclides.*

tanto complicada por las ambigüedades y puntos oscuros propios de una época en que las cuestiones didácticas merecían poca atención.

2.1 Método de Alberti.

Según se desprende de la lectura del *De la pintura* (1435) de Alberti, el procedimiento empleado era el siguiente:[14] Sean $BCDE$ los vértices del piso cuadriculado, visto como si estuviera colocado verticalmente. Ahora se coloca el piso horizontalmente y el observador se ubica frente a él (véase las Figuras 1a y 1b respectivamente).



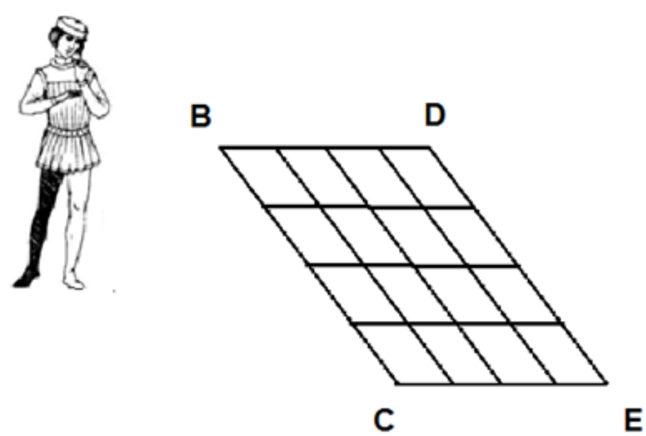


Figura 1a. Piso visto verticalmente **Figura 1b.** Piso visto horizontalmente

Lo que uno puede imaginar es un escenario como el siguiente (Figura 1c).

[14] Alberti en su manuscrito no incluyó diagramas por lo que las diferentes reconstrucciones que se han hecho de su texto son inferencias derivadas de sus descripciones del trazado de la cuadrícula.

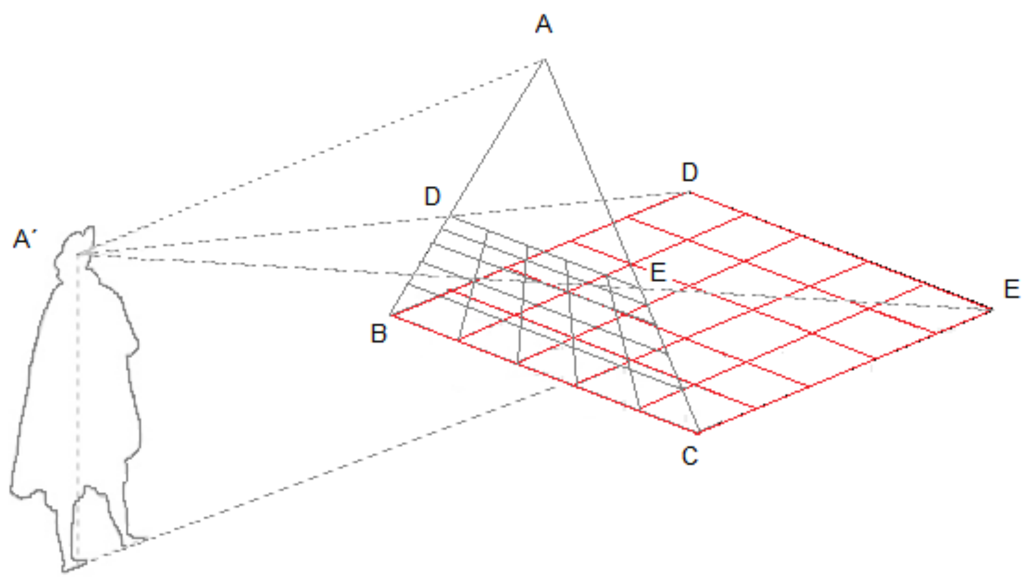


Figura 1c. El observador percibe al piso horizontal como si estuviera proyectado sobre la superficie vertical, misma que correspondería a la pintura del piso horizontal visto en perspectiva.

En el caso de las Figuras 1a y 1b, el lado BC se halla más cerca del observador en el plano correspondiente al suelo de la pintura, la cual corresponde en el diagrama al cuadrilátero de lado BC. Acto seguido se coloca una especie de ventana o lienzo (donde se construye la pintura o imagen del piso horizontal) en posición vertical entre el piso y el observador como se muestra en la Figura 1d, que es una imagen clásica de la historia de la perspectiva. La Figura 1e es un diagrama en el que se muestran los rayos de visión, es decir, los rayos que unen al ojo del observador en A’ con los diferentes puntos del objeto visto. Son rayos que permiten visualizar por dónde cruzan el lienzo o pintura los rayos, de manera que si se trasladan los puntos donde terminan los rayos a los puntos donde estos cruzan la superficie de la pintura se reconstruye sobre el lienzo la forma del objeto.

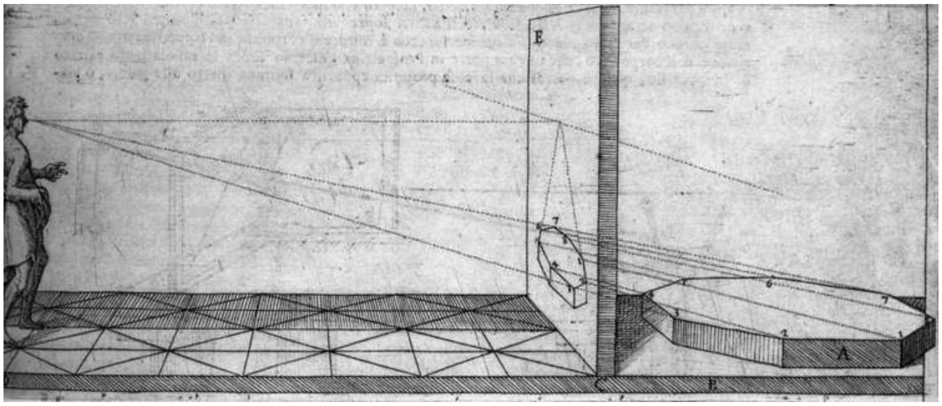


Figura 1d. Generación de la imagen en perspectiva sobre una superficie vertical de un octágono situado sobre un piso horizontal. (Tomado de la edición de Egnatio Danti del libro de Giacomo da Vignola. *Le Due Regole della Prospettiva Practica,* 1583).

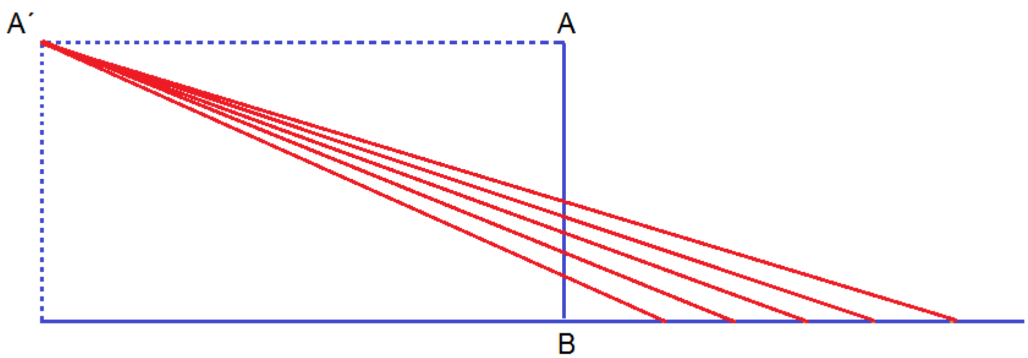


Figura 1e. Si lo que está en el piso se viera representado sobre una pintura situada en el plano vertical AB, visto de perfil en este diagrama, los rayos que unen los diferentes puntos del piso con el ojo en A´ cortan la vertical (la pantalla vista de canto) en los puntos donde los miraría el observador.

Esto significa que el pintor observa el piso a través de esta ventana, y lo visualiza tal y como se muestra en la Figura 1c. Si en las Figuras 1c y 1e se toma la horizontal que pasa por A´, dicha línea cortará el plano de la pintura o lienzo en A. Si el observador está colocado al frente de la cuadrícula sobre el suelo, a la mitad entre los puntos extremos o bordes del piso a su izquierda y su derecha, entonces el punto A estará colocado precisamente donde las líneas ortogonales del piso, es decir, las líneas del piso que se alejan del observador, parecerán unirse conforme se alejan (más adelante se regresará a esta cuestión de la convergencia. Por el momento solo se señala un hecho empírico que el lector puede constatar con base en la experiencia). A este punto *A* Alberti lo denomina 'punto céntrico'. Ahora bien, el punto céntrico (lo que hoy se conoce como punto de fuga o punto al infinito) se ubica a la misma altura en la que se encuentra el ojo del pintor, el cual se halla a una cierta distancia del cuadro o lienzo.

A partir de estas consideraciones que describen la configuración real que se pretende analizar, procedemos ahora a describir la construcción geométrica de Alberti cuyo propósito es recoger en un diagrama los trazos sobre una superficie vertical -la pintura, el lienzo- que recrean la percepción que se produce cuando se observa un piso cuadriculado horizontal colocado frente a un observador.

Tómese una superficie vertical o plano pictórico de forma rectangular de manera que su base coincida con la base del cuadrado cuya imagen en perspectiva se pretende construir sobre el plano ya mencionado. Recordando el significado de las letras A y A' en los diagramas 1c y 1e tomemos ahora, en la Figura 1f, el punto A' a la izquierda de la figura rectangular, a una altura igual a la del ojo del observador y a una distancia de la vertical sobre B igual a la del observador al lienzo. La letra A se coloca donde la horizontal que pasa por A' interseca la vertical levantada sobre el punto medio del lado BC. Esto significa que A correspondería al punto donde incide sobre el lienzo el rayo que desde el ojo se lanza perpendicularmente a la superficie de la pintura o lienzo (ver Figuras 1e y 1f).

Ahora, en la Figura 1g se muestra el piso cuadrado y cuadriculado visto desde arriba. En la Figura 1f, por otro lado, se ilustra cómo se verían los bordes y el frente del piso cuadriculado puesto sobre el piso y observado a través de la ventana o lienzo -en posición vertical-, suponiendo que los bordes BD y CE se extienden hacia atrás, y aparentemente llegándose a encontrar en algún punto A en la imagen. Que esto debiera ser así era parte de los resultados empíricos conocidos desde la antigüedad y asentados en la *Óptica* de

Euclides.[15] Ese punto A, donde aparentemente se unen, es el que Alberti llama punto céntrico y se encuentra a la altura del horizonte del observador. Por ello es que se coloca a la altura a la que lo vería el observador situado en la posición ideal para ver la pintura, Figura 1f.

Toca ahora abordar lo que constituía el problema más desafiante para la construcción del cuadrado en perspectiva: la ubicación de las líneas transversales del cuadriculado, es decir, a qué alturas sobre el cuadro colocar las líneas del piso cuadriculado que corren paralelas a la base del cuadro. Un caso particular consiste en establecer la colocación de la transversal más alejada del observador, la que representa la parte de atrás del piso. Si llamamos DE a este segmento, su construcción se obtiene, según Alberti, siguiendo los pasos que a continuación se describen.

Tomando como punto de partida el rectángulo de la Figura 1f y suponiendo que BC es la parte frontal del piso cuadriculado -y también la base de su representación en la pintura- y A el punto a la misma altura que el ojo del observador colocado a la mitad entre los bordes que determinan la anchura del piso, se trazan los segmentos que unen a B y C con A. Dichos segmentos corresponden a la vista en perspectiva de las líneas ortogonales a BC que pasan por B y por C respectivamente, es decir, son los márgenes laterales del cuadrado que se extienden en profundidad.

[15] Son dos las cuestiones que en este caso hay que tomar en cuenta, ambas contenidas en la *Óptica* de Euclides: una es el Teorema 6, citado en la nota 4 de este escrito, y la otra es el Teorema 10 que a la letra afirma: “Entre los planos puestos debajo del ojo, los que están más apartados parecen más altos”. Esto se traduce en que si se tiene una recta que sobre el suelo se aleja de nosotros, los puntos que podemos distinguir en ella los veremos más arriba conforme estén más alejados de nosotros.

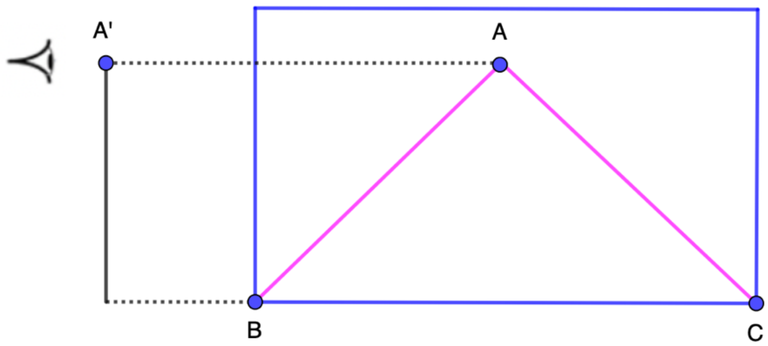


Figura 1f. Vista en perspectiva de las líneas ortogonales a BC

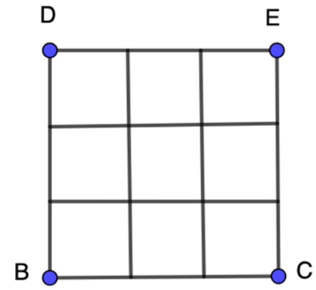


Figura 1g. Piso cuadriculado visto desde arriba

Ahora, para determinar la altura de la parte posterior del piso, denotada aquí por DE, se procede de la siguiente forma: se traza una línea desde el punto donde ahora se ubica el observador (A') -ubicado como se describió en párrafos anteriores de este texto-[16] al punto C en el cuadrado que representa el lienzo (Figura 2). Esta altura estaría marcada por el punto F -es decir, la altura sería FB- y acto seguido se traza una horizontal o paralela a BC que pasa por F. Esta línea, la llamada transversal, corta a BA y CA en los puntos D y E, respectivamente. Resulta entonces que la línea DE corresponde a cómo se mira desde el frente del cuadro el lado más alejado del cuadrado.

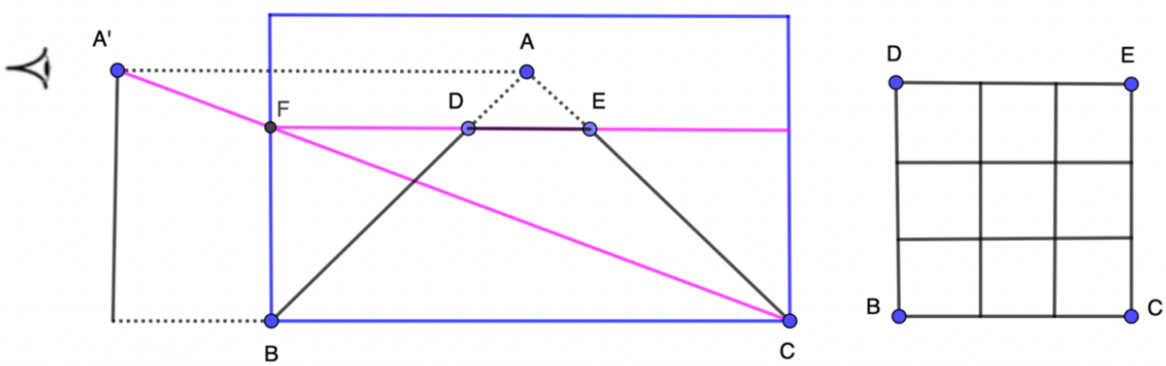


Figura 2. Trazo de la línea DE, parte posterior del piso cuadriculado. Modificado de Field, J. V. (1985)

[16] Alberti no lo dice explícitamente en *De la pintura*, pero de su lectura y el método que de ahí se infiere se sigue de manera sencilla que lo que hace es suponer al observador mirando el piso cuadriculado desde la izquierda del cuadro o especie de ventana a través de la cual se observa el piso -de perfil- , y desde esta posición la altura a la que se observa el punto C estaría a la misma altura que aquella a la cual se mira el lado más alejado del cuadrado visto de frente.

Para finalizar, y siguiendo la misma lógica constructiva, se divide el segmento BC en partes iguales –tantas partes como divisiones tiene el piso cuadriculado original- y se repite el procedimiento anterior, lanzando líneas de visión desde A´, a los puntos de división de BC, e identificando sus intersecciones con la vertical sobre B para trazar las demás líneas transversales del suelo cuadriculado 'degradado', calificativo que utilizaba Alberti para referirse a la imagen en perspectiva del cuadrado (Ver Figura 3).

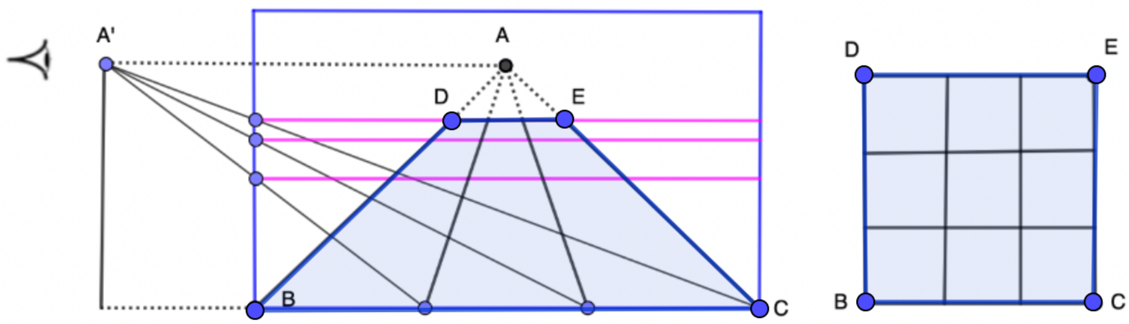


Figura 3. Versión final de la técnica utilizada para la costrucción de un piso cuadriculado en De pictura (1435) por Alberti. Modificada a partir de la figura mostrada por Field, J. V. (1985)

Con esto concluye el método albertiano de trazo de un piso cuadriculado en perspectiva. En su texto Alberti no lo justifica, solo lo describe verbalmente de manera un tanto ambigua. Sin embargo, una vez traducido a trazos por quienes lo entendían era muy sencillo enseñarlo a los interesados, al igual de cómo se transmitía cualquier otra práctica del oficio de pintor. Por su misma naturaleza, este método de inmediato se extendió al ámbito de la arquitectura.

Uno podría suponer que este método geométrico, al estar sustentado en el modelo geométrico de la visión hasta entonces conocido, constituiría la única manera de construir la imagen en perspectiva del piso cuadriculado. Por ello sorprende que pronto aparecieran formas alternativas, que producían el mismo resultado en cuanto a la representación del mismo piso, siendo la de Piero della Francesca la más notoria. Esto era una muestra impactante de la versatilidad y el poder de la geometría. Veamos en qué consiste esta alternativa.

CAPÍTULO 3

Método de Piero della Francesca o método del punto de distancia.

Este procedimiento, que aparece a casi tres décadas de la escritura del *De pictura* de Alberti, forma parte de un tratado denominado *De prospectiva pingendi* ('Haciendo perspectiva' sería su traducción), terminado en los primeros años de la década de 1460, si bien no parece haber sido muy leído dada la dificultad para seguir sus instrucciones geométricas. Lo que sí es un hecho es que el método que describe para el trazo de un piso cuadriculado en perspectiva fue ampliamente utilizado por los pintores en tanto que consistía en una construcción ligeramente diferente a la de su contemporáneo Alberti, pero con una ventaja de carácter práctico que se aclarará más adelante, una vez que se haya descrito el nuevo método.

El esquema inicia de igual manera que el de Alberti en cuanto al rectángulo -o ventana o pintura o lienzo-, con A y A' teniendo el mismo significado que en el caso ya descrito, sólo que en esta ocasión el punto A' se determina de manera diferente. Piero comienza construyendo las líneas ortogonales al segmento BC, uniendo los puntos B y C con el punto A, pero ahora el punto A', en el que se va a colocar al observador, en el mismo plano de la pintura y a su izquierda -o a la derecha, adaptando los trazos a ese caso- se coloca a una distancia del punto A igual a la distancia del ojo a la pintura (o lienzo) que veíamos en el caso de la construcción de Alberti. Por el papel que juega, A' debe estar también a la misma altura que A (Ver Figura 4a).[17]

[17] J. V. Field en *Piero della Francesca and the Distance Point Method of Perspective Costruction* (1985). della Francesca, Piero, (2005). *De prospectiva pingendi.*

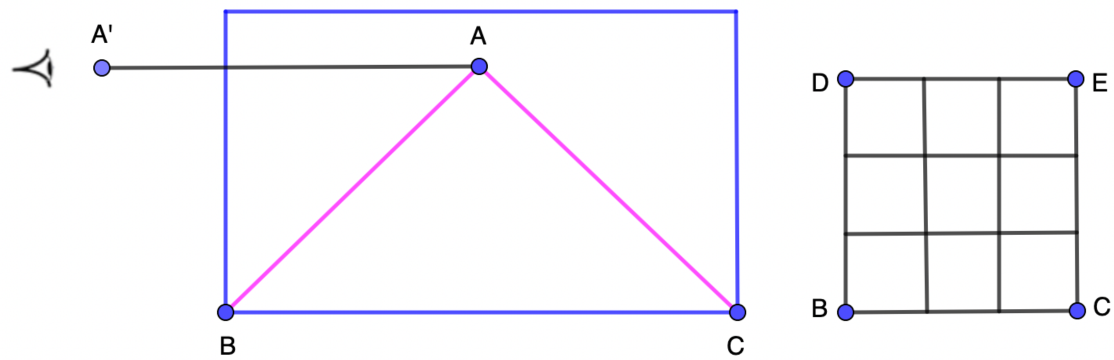


Figura 4a. Construcción de un piso cuadriculado en perspectiva según el método de Piero della Francesca. Nótese el acercamiento del punto A' al punto A. Modificado de la figura de Field, J. V. (1985) y della Francesca (2015)

Esto significa que Piero está siguiendo casi los mismos pasos que Alberti, pero cambia en la manera como se determina el trazo de las llamadas transversales. Mencionado lo anterior, regresemos a la secuencia que plantea el método de Piero della Francesca. Hay que señalar que tal y como lo presentamos aquí no sigue estrictamente el planteamiento de Piero pero esto permite mayor claridad en el razonamiento y para efectos prácticos es lo mismo que predica dicho autor.

Para construir la línea transversal DE paralela a BC que representará la parte de atrás del piso cuadriculado, el artista procede a unir el punto C con A'(recordando que A A´ es la distancia del observador al cuadro), y a utilizar el punto D donde se interseca el segmento CA' con la línea BA. Ahora se traza la paralela a BC que pasa por D y donde corta a CA se localiza el punto E. El segmento DE será la representación en la pintura del lado más alejado del cuadrado (Figura 4b). Posteriormente trazará las demás ortogonales a BC que iniciarán en los puntos sobre BC señalados en la cuadrícula.

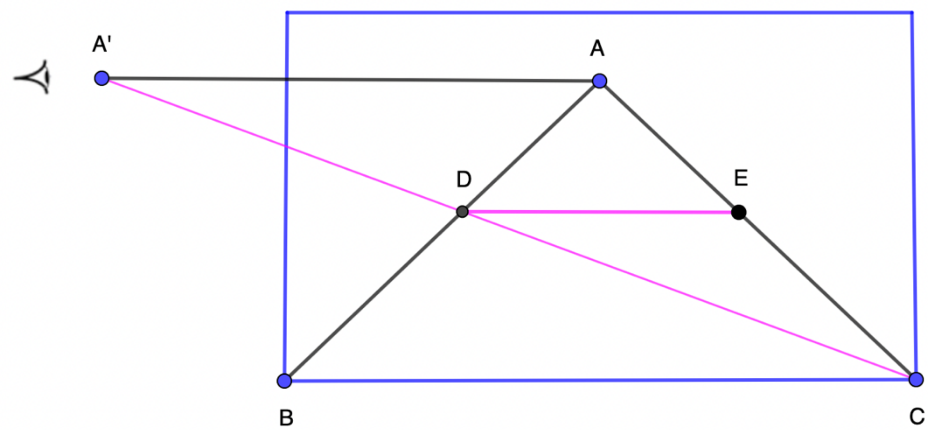


Figura 4b. Trazo de la transversal DE que corresponde a la representación en perspectiva del lado posterior del cuadrado sobre el piso.

Ahora, para dibujar las líneas transversales faltantes de este piso cuadriculado Piero della Francesca traza la línea diagonal BE que atraviesa consecutivamente a las líneas ortogonales que van de BC hacia A. Los puntos sucesivos de corte son señalados y a través de ellos se trazan paralelas a BC -horizontales- que corresponden a las transversales que terminan por determinar las celdas que representan el piso cuadriculado en perspectiva (Figura 5).

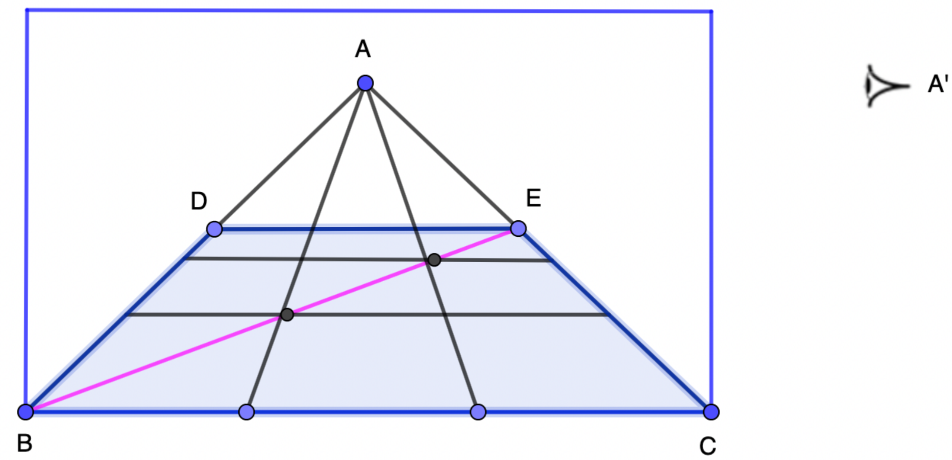


Figura 5. Trazo de la diagonal BE

Es así como termina la construcción de Piero della Francesca. Se pregunta uno cuál de los dos métodos es mejor o, más importante, cómo es que ambos producen la misma imagen, como se puede comprobar si se superponen los dos diagramas del cuadrado en perspectiva. De esto se hablará más adelante, pero antes se llamará la atención sobre cuestiones un tanto sutiles que subyacen a la validez y racionalidad de ambos métodos.

Tal y como se les enseñaban a los pintores o arquitectos estos procedimientos parecieran tratarse de sólo guías para lograr una representación tridimensional de las escenas observadas en planos bidimensionales, sin que se transparentara alguna lógica o justificación matemática que lo sustentara. Entonces, ¿Por qué se habla del uso de la geometría en la pintura, más allá de que se tracen rectas que permitan localizar puntos que a su vez sirvan para trazar otras rectas cuya localización y magnitud producen la percepción o sensación de tridimensionalidad? La respuesta descansa en la sapiencia empírica y en la tradición óptica que se remontaba a Euclides y sus escritos sobre óptica, mismos que se vieron enriquecidos por la cultura arábiga que fue retransmitida a Occidente desde el siglo XII.[18]

[18] Ver capítulos V y VIII de Lindberg (1981), *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*.

Para construir imágenes en perspectiva tanto Alberti como della Francesca se podían valer, además de los métodos ya mencionados, de técnicas empíricas o prácticas que de cierta forma nos dan una idea del porqué de su proceder en los métodos mencionados párrafos atrás. Alberti, por ejemplo, utilizaba una especie de velo fino dividido en cuadrados por medio de hilos más gruesos, mismos que hacían las veces de un sistema coordenado que utilizaba para determinar las intersecciones de los rayos visuales dirigidos a los objetos representados en el plano de la pintura. Esto le permitía realizar una especie de calca en la cual el pintor permanecía de frente al objeto en todo momento, sin cambiar la posición del ojo con el que observa la escena, tal y como se muestra en la siguiente imagen[19] (Figura 6).

Figura 6. Ilustración de Durero del método práctico de Alberti para la construcción de imágenes en perspectiva utilizando la ventana y un velo o red que generan una especie de sistema de coordenadas. (Dürer, 1977)

Esta idea del velo que funcionaba como sistema coordenado, y que servía como referencia para hacer los demás trazos, pudo haber servido de base para los procedimientos geométricos aquí descritos, si bien en nuestro caso el nuevo sistema coordenado coincidirá con la imagen de un piso cuadriculado que se desea representar.

Cuando con un hilo, que representaría el rayo visual, conectamos nuestro ojo con el punto del objeto que queremos plasmar en el lienzo, se produce una intersección con el plano de la pintura. Tal intersección es la imagen de tal punto y nos señala su posición en el lienzo. Esto, tomando un número suficiente de puntos de intersección, daría lugar a una imagen

[19] Heng Ser Gun K. (2001), *Perspective in Mathematics and Art*. p.13

como las producidas por Alberti y della Francesca, solo que en el caso de estos últimos no se requiere tener frente al artista la escena que se desea reproducir, a saber, el piso cuadriculado.

Resulta entonces que tenemos dos construcciones del piso cuadriculado en perspectiva, la de Alberti y la de Piero della Francesca. Surgen de inmediato dos preguntas: i) ¿Son ambas correctas en el sentido de que producen el resultado esperado, que a fin de cuentas significa que empíricamente corresponden con la percepción de una escena real?, y ii) Si ambas resultan ser correctas, entonces coinciden con lo visto, y deberían de plasmar la misma imagen geométrica, por lo que cabe preguntarse si esto se justificó, y cómo se hizo para constatar que geométricamente resultaran equivalentes. La respuesta a la primera pregunta es afirmativa. La de la segunda debe venir acompañada de la argumentación histórica y geométrica que la sustente.

Toca ahora sustentar lo que se afirma en el párrafo anterior. Para ello hay que partir de las dos construcciones antes descritas. El mismo Piero, quien describe su propia técnica para dibujar el piso cuadriculado, se vio en la necesidad de demostrar que efectivamente las dos construcciones daban como resultado el mismo objeto, y que éste, además, es la imagen en perspectiva del cuadrado, Es así como esta técnica o recurso de la pintura obtiene validez al ser sustentada en conocimientos matemáticos. A continuación, se presenta la demostración de que ambas construcciones son geométricamente equivalentes. Para ello se parte de la Figura 7 que incluye los trazos señalados por ambas construcciones, solo que ahora, en el caso de della Francesca, la distancia de la pintura al observador se marca al lado derecho de A, y no al izquierdo, como se hizo en la Figura 4b.

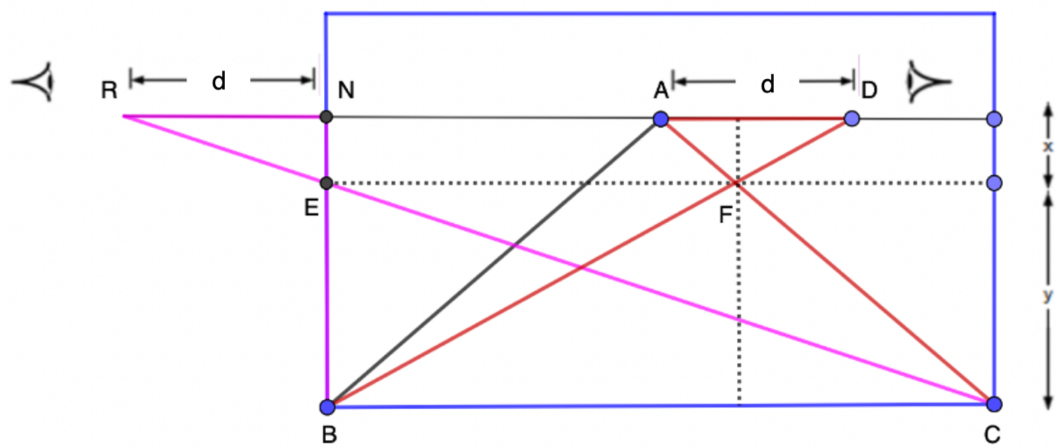


Figura 7. Equivalencia de las construcciones propuestas por Alberti y della Francesca.

En la Figura 7 observamos la distancia del observador a la pintura que proponía Alberti para la construcción del piso cuadriculado, representada por el segmento RN. Por otro lado, la ubicación -en cuanto a distancia- de la posición del pintor al lienzo en la descripción de della Francesca está simbolizada por el segmento AD. Mostraremos a continuación que estas dos distancias RN y AD son las mismas y producen la misma construcción geométrica del piso.

Nótese que el triángulo ADF es semejante al triángulo CBF ya que AD es paralela al segmento BC por lo que los ángulos $\measuredangle D$ y $\measuredangle B$ son iguales (por ser ángulos alternos internos) lo mismo ocurre con los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$ además, los ángulos en F son los mismo en los dos triángulos dado que son opuestos en el vértice. Si x y y corresponden a los segmentos que se muestran en la Figura 7, del lado derecho, entonces podemos deducir que:

$$\frac{AD}{CB} = \frac{x}{y}$$

Además, por la misma razón mencionada en el párrafo anterior, los triángulos RNE y CBE son semejantes, de donde se sigue que:

$$\frac{RN}{CB} = \frac{NE}{EB} = \frac{x}{y}$$

Y, por lo tanto

$$\frac{AD}{CB} = \frac{RN}{CB}$$

De esta igualdad resulta que $AD = RN$, como se quería demostrar. Esto justifica que ambas formas de utilizar la distancia del observador a la pintura producen el mismo resultado.

Pero sumada a la justificación anterior, Piero della Francesca muestra la validez -o exactitud- de su construcción en perspectiva del cuadrado desde el punto de vista de la óptica geométrica, y lo hace utilizando el diagrama que constituye la Figura 8. En ella se muestra un cuadrado que representa a la vez la pintura o la ventana a través de la cual se observa el cuadrado situado en el piso que posee las mismas dimensiones en tanto que comparten el lado inferior BC (lado más cercano al observador si se le considera como parte del cuadrado sobre el piso). Razonando sobre esta imagen lo que della Francesca hace es demostrar que $H'E' = HE$ en el diagrama. Esto significa que estamos interpretando a HE como la magnitud aparente de GC en el plano FB. Es decir, un observador en $A´$ vería a HE y a GC con el mismo tamaño aparente -pues ambos subtienden el mismo ángulo de visión desde el punto A', si están colocados como lo muestra la imagen. Por otra parte, la magnitud $H'E'$ corresponde a cómo vería el ojo, desde una posición frontal al cuadrado $FGCB$, el lado más alejado del cuadrado y cuyo lado más cercano al observador es BC. Esto correspondería a demostrar que el dibujo de $H'E'CB$ efectivamente corresponde a un cuadrado representado en perspectiva, pues habiendo justificado previamente porqué se unen las líneas ortogonales BH' y CE' en A, sólo faltaría especificar cuánto mide el segmento $H'E'$, y la respuesta es que mide lo mismo que el segmento HE, es decir, el lado más alejado se ve con el mismo tamaño aparente como se observa GC desde el ojo en A'. Pero esto hay que demostrarlo, y esto es precisamente lo que se hace a continuación.

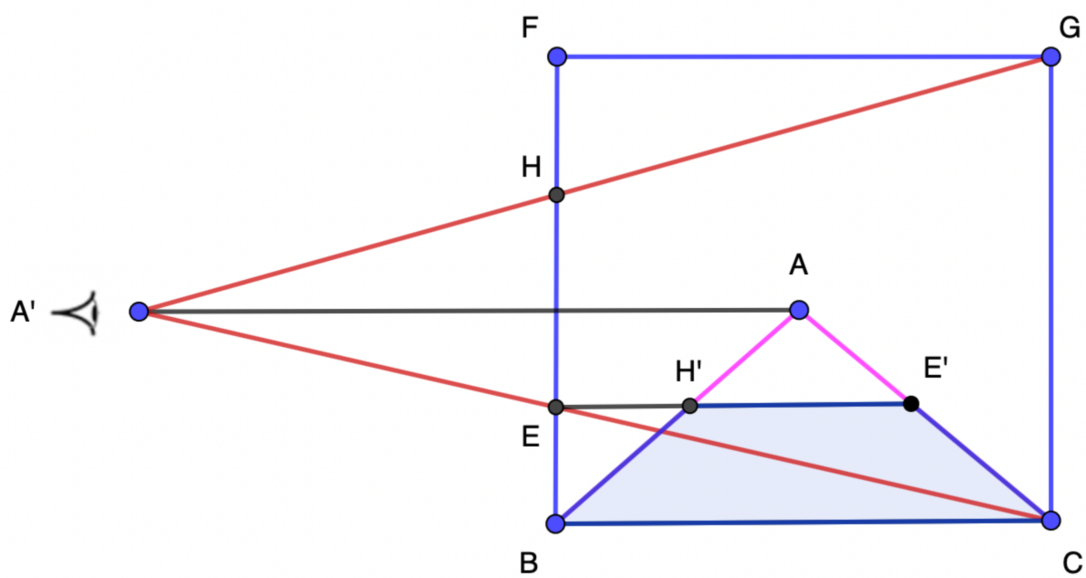


Figura 8. Esquema de la prueba de Piero della Francesca para mostrar la validez de su construcción en perspectiva.

3.1. Demostración de que el segmento $H'E'$ es igual al segmento HE.

Antes de comenzar, conviene hacer notar que para esta prueba se ha considerado que Piero della Francesca ya había establecido previamente que el lado más alejado del cuadrado $BCGF$ respecto de $A´$ tiene el mismo tamaño aparente que el segmento HE (es decir que GC y HE subtienden el mismo ángulo, lo cual era algo ya establecido por Euclides en su *óptica* mediante el postulado o premisa IV: "Y las cosas vistas bajo ángulos iguales parecen iguales"[20].

[20] Pedoe (1976), *Geometry and the Liberal Arts*, p.128. Euclides (1986), *Óptica*.

En efecto, hay que observar que en la Figura 8 los triángulos CEE' y $CA´A$ son semejantes, ya que el segmento EE' es paralelo a $A´A$. Utilizando el teorema de Tales se extrae la siguiente razón.

$$\frac{AC}{AE'} = \frac{A´C}{A´E}$$

Así mismo, el triángulo $A´EH$ es semejante al triángulo $A´CG$, pues el segmento HE es paralelo a CG. Luego recurriendo una vez más al teorema de Tales se sigue que

$$\frac{A´E}{A´C} = \frac{EH}{CG}$$

De la primera igualdad resulta

$$\frac{AE'}{AC} = \frac{A´E}{A´C}$$

Por lo que, igualando las dos últimas expresiones, obtenemos que

$$\frac{EH}{CG} = \frac{AE'}{AC}$$

Además, hay que observar que el triángulo $AH'E'$ es semejante al triángulo ABC, pues el segmento $H'E'$ es paralelo a BC, de ello se sigue que

$$\frac{H'E'}{BC} = \frac{AE'}{AC}$$

De este modo, al comparar las dos últimas igualdades, se deduce que

$$\frac{EH}{CG} = \frac{H'E'}{BC}$$

Pero dado que $BCGF$ es un cuadrado, se tiene que $BC = CG$. Por lo tanto, $HE = H'E'$, que es lo que se quería demostrar.

Pero no sólo era geometría lo que se utilizaba para la generación del efecto de tridimensionalidad en una pintura. Los artistas también se valían de ciertos efectos visuales como la inclusión de sombras y de los efectos de la luz, así como de los diferentes tonos de color que la acompañan ya que a los elementos de la escena más alejados se les asocia con tonos más obscuros. Así, la sensación de lejanía se inducía también usando tonos más oscuros y mostrando una menor definición en los bordes de los objetos y, por el contrario, los objetos más cercanos se representaban con mayor definición y con tonos de color más claros. Dichos efectos parecen alterar de cierta manera la percepción de una escena. Y sin embargo, lo que provocó la gran revolución en la representación pictórica en el Renacimiento claramente fue el uso de la perspectiva, y si bien dichas escenas reproducen lo observado, son las matemáticas las que se encargan de justificar y modificar realmente tales representaciones, racionalizándolas y estructurándolas en una nueva disciplina.

CONCLUSIONES

Como se demuestra a lo largo de este estudio, la utilización de la geometría vinculada con el desarrollo y evolución de la pintura renacentista constituyó un beneficio para ambas prácticas: la pintura consiguió los métodos necesarios para producir la ilusión de tridimensionalidad que le imprimiría mayor realismo a las escenas, y a su vez las matemáticas recibirían el impulso necesario que condujo, con el tiempo, al desarrollo de la geometría proyectiva como una nueva disciplina.

Como se ha ilustrado a lo largo de este texto, el estudio del surgimiento de los métodos de la perspectiva de los pintores pone de manifiesto, parafraseando a D´Amore y Radford, cómo el proceso de aprendizaje tiene que ver con adquirir conciencia de las formas y maneras codificadas de hacer y pensar de una cultura. El conocer tal relación entre el aprendizaje y el desarrollo cultural permite dotar al proceso de enseñanza de ese contexto social e histórico, mismo que por lo general es relegado. Retomar este enfoque favorece llevar a la esfera de la conciencia que ningún conocimiento es inmediato y acabado, sino que más bien es mediado por la actividad sociocultural que lo rodea, exponiendo además el hecho de que, al igual de como sucede con otras disciplinas, el desarrollo de las matemáticas es acumulativo y producto del esfuerzo grupal de la actividad humana.

La conexión con el mundo real por parte de los alumnos proporciona desde el principio significado a la actividad de aprendizaje. Además de aprender geometría, sus conceptos y formas de justificación de sus resultados, los alumnos establecen una conexión con maneras de poner en práctica estos conocimientos. Es por eso que la presente investigación tomó como parte de su supuesto teórico la Teoría de Objetivación, cuyo enfoque sobre el aprendizaje es sociocultural, alejándose de la noción de aprendizaje como transmisión de conocimientos o como construcción subjetiva de un sujeto. Así mismo, esta propuesta se orientó, en parte, en la perspectiva del paradigma de la educación matemática realista que se basa en una serie de principios que han guiado la educación matemática en los Países Bajos, en la que se señala que los niños aprenden matemáticas como un todo coherente y no como partes separadas. Esto contribuye a la comprensión de ideas y conceptos matemáticos relacionándolos con el mundo real, pues uno de los aspectos básicos del aprendizaje es el dar estructura a lo que se está aprendiendo. Estas ideas tienen como correlato el desarrollo histórico del uso de la geometría y la óptica geométrica para impulsar el impactante progreso que tuvo la pintura durante el llamado renacimiento italiano.

REFERENCIAS

Alberti, L. B. (1972*). On painting and on sculpture: the Latin texts of De Pictura and De statua*, ed. *Cecil Grayson. Phaidon*.

Alberti, L. B. (1996). *De la pintura*. J. V. Field (Introducción y notas), J. Rafael Martínez-E. (Estudio preliminar y traducción). Colección Mathema, UNAM.

Bell, E.T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México.

Bracho, J. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. Fondo de Cultura Económica. México pp. 1-2 y 209-232.

Bressan, A.; Zolkower, B. y Gallego F. (2004). Los principios de la educación matemática realista. En *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Ed. Libros del Zorzal. Argentina.

Buger, W. F. y Shaughnessy J. M. (1986*)*. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. En *Journal of research in mathematics education.* 17 (1), 31-48.

Colegio de Ciencias y Humanidades. (2006) Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado. Recuperado el 2 de Agosto de 2021, de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/planestudios/orientacion_sentido.pdf

Colegio de Ciencias y Humanidades (2016) Programa de estudios del área de matemáticas I-IV. Recuerado el 2 de Agosto de 2021, de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf

D´Amore, y Radford, (2017). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Problemas Semióticos, Epistemológicos y Prácticos*. DIE. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Danti, I. (2003). *"Le dve regole della prospettiva pratica di M. Iacomo Barozzi da Vignola: con i comentarij del RPM Egnatio Danti*. Nella stamperia del Mascardi. (Trabajo original publicado 1583)

Della Francesca, P. (2016). *De prospectiva pingendi*. edizione crítica a cura di G. *Nicco-Fasola.* Firenze. Le Lettere. (Trabajo original publicado 1984)

Della Francesca, P. (2015). *De prospectiva pingendi: On perspective in painting*. *Domus.* (Trabajo original publicado ca. 1470)

Descartes, R. (2010). *Discurso del método* (Trad. M. García). Colección Austral España (trabajo original publicado 1637). http://www.posgrado.unam.mx/musica/lecturas/LecturaIntroduccionInvestigacionMusical/epistemologia/Descartes-Discurso-Del-Metodo.pdf

Dürer, A., y Strauss, W. S. (1977). *The painter's manual: A manual of measurement of lines, areas, and solids by means of compass and ruler assembled by Albrecht Dürer for the use of all lovers of art with appropriate illustrations arranged to be printed in the year MDXXV*. Abaris Books.

Euclides, (1986). *La perspectiva y especularía de Euclides. Traducidas en vulgar castellano* (Trad. Ondériz P. A.). Madrid, viuda de A. Gómez, 1585., Edición facsimilar del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV (Trabajo original publicado 1585)

Euclides, (2000). *Óptica*. En Aristóteles. *Sobre las líneas indivisibles Euclides. Óptica Catóptrica Fenómenos* (Trad. P. Ortiz). Gredos., Vol. 277. (Trabajo original publicado 300 aC.)

Field, J. V. (1985). Piero Della Francesca and the Distance Point Method of Perspective Construction. *Nuncius*. 10(2), 509-530.

Freeman, K., & Diels, H. (1948, reprint 1983). *Ancilla to the pre-Socratic philosophers*, Harvard University Press.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una "educación matemática realista". En Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional (pp. 151-168). Graó.

González, P. (2004). La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma, (45), pp. 17-28.

Heng Ser Gun K. (2001). *Perspective in Mathematics and Art*. Undergraduate Research Opportunities Programme in Science. Singapur.

Katz, J. V. (2009). *A Histoty of Mathematics An Intriduction* Addison-Wesley**,** pp.423-466

Kline, M. (1978): *El fracaso de la Matemática moderna*. Siglo XXI, Madrid.

Kline, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol.1. Alianza Universidad, n.o 715, Madrid.

Kline, M. (2012). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica.

Lindberg, D. C. (1981). *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler*. University of Chicago Press.

Pedoe, D. (1976). *Geometry and the Liberal Arts*. Dover Publications.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México D.F. p. 7

ANEXO 1: Estrategia Didáctica

EI.DATOS GENERALES

PROFESOR(A)	Mónica Citlalli Pereyra Zamudio
ASIGNATURA	Matemáticas II
SEMESTRE ESCOLAR	Segundo
PLANTEL	Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo
FECHA DE ELABORACIÓN	Agosto 2021

II.PROGRAMA

UNIDAD	Unidad 4. Congruencia, Semejanza y teorema de Pitágoras
PROPÓSITO DE LA UNIDAD	El alumno aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el teorema de pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos, argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.
APRENDIZAJE (S)	Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad en la resolución de problemas (utilizando el teorema de Tales y de Pitágoras)
TEMA(S)	Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y teorema de pitágoras (y teorema de Tales)

III.SECUENCIA (Tiempo total 90 min)

ACTIVIDADES A DESARROLLAR	**Fase Inicial** Mediante una lluvia de ideas se identificarán los conceptos y conocimientos previos de los alumnos (punto, línea recta, segmento, ángulo, rectas paralelas y perpendiculares, semejanza de triángulos, teorema de tales y teorema de Pitágoras) **(10 min)**

	Fase de desarrollo **1ª. Actividad. Clase interactiva entre el profesor y el alumno** (se utilizarán imágenes de Power Point sobre la importancia de Euclides, Tales, Alberti y Piero della Francesca en el desarrollo de la perspectiva **(15 min)** **2ª Actividad. Lectura guiada** Mediante el primer capítulo de esta tesis, ¿cómo obtenemos conocimiento? se llevará a cabo una lectura guiada en la que se resaltará cómo se obtiene conocimiento en matemáticas, así como las problemática y desarrollo histórico de la perspectiva (número de hojas del capítulo: 3 páginas) **(15 mi**n) 3ª **Actividad. Resolución de cuestionario** (en equipos de 3 personas) **(30 min)** **Fase de síntesis** **Actividad 1.** A modo de resumen los equipos de alumnos justificarán la importancia del estudio del teorema de Pitágoras y de Tales en la resolución de problemas **Actividad 2.** Mediante plenaria los alumnos reconocerán que los criterios de semejanza de triángulos son conceptos utilizados por Tales para medir distancias inaccesibles. **(15 min)**

IV. ORGANIZACIÓN

Organización	Los alumnos trabajarán en equipo y en forma grupal
Materiales y recursos de apoyo	• ***Laptop, video proyector*** • ***Fotocopias de la lectura guiada y cuestionario*** • ***Juego de geometría, pliegos de papel bond (presentación del resumen)***
Evaluación	La evaluación intentará englobar los 3 tipos de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, considerándose las etapas inicial, formativa y sumativa, las cuales se derivan de las actividades llevadas a cabo por los alumnos y los productos provenientes de las mismas

	Los aprendizajes de los alumnos se evaluarán mediante la elaboración en equipo de una conclusión en forma de resumen que presentarán al grupo. Además, durante la sesión se evaluarán las participaciones orales individuales, la actitud colaborativa en las actividades realizadas por el equipo de trabajo, etcétera.

V. REFERENCIAS DE APOYO

FUENTES DOCUMENTALES DE CONSULTA PARA LOS ALUMNOS.	Basurto, E. y Mancera, E. (2013). *Matemáticas 4*. Pearson pp. 15- 22 Bulajich, R. y Gómez, J. (2009). *Geometría*. Instituto de Matemáticas, UNAM. pp. 1- 18. Cárdenas, S. (2014) *Dos o tres trazos*. Instituto de Matemáticas, UNAM. pp. 1-41.
FUENTES DOCUMENTALES DE CONSULTA PARA EL PROFESOR	Bracho, J. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. Fondo de Cultura Económica. México pp. 1-2 y 209-232. Bulajich, R. y Gómez, J. (2009). Geometría. Instituto de Matemáticas, UNAM. pp. 1- 18. Cárdenas, S. (2014) *Dos o tres trazos*. Instituto de Matemáticas, UNAM. pp. 1-41. D´Amore, y Radford, (2017). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Problemas Semióticos, Epistemológicos y Prácticos*. DIE. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. González, P. (2004). *La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza.* Suma, (45), pp. 17-28.

Anexo 2: 2ª Actividad. Lectura guiada

¿Cómo obtenemos conocimiento?

Históricamente, durante el desarrollo de las ciencias y de muchas parcelas del quehacer matemático se pensó que los sentidos eran suficientes para obtener conocimiento. Sin embargo, la historia del pensamiento científico certifica que, si bien los sentidos proporcionan cierta información que permite comprender el mundo que nos rodea, la confianza en los datos que suministran tiene sus limitantes, además de que pueden ser insuficientes, razón por la que, en ocasiones, sobre todo cuando se profundiza en el terreno de las problemáticas, se torna necesario elevar el nivel crítico que permite interpretar y procesar la información. Consideremos, por ejemplo, el sentido de la vista, una de las principales vías que utilizamos para generar conocimiento a partir de nuestras sensaciones. ¿De qué tamaño es el sol? Se preguntaban en los albores de la filosofía griega. Las respuestas probablemente eran variadas, pero sorprende ahora que un filósofo tan brillante como Heráclito de Éfeso haya afirmado, según uno de los pocos fragmentos de su obra que nos han llegado, que el tamaño del Sol es la anchura de un pie. Habría quienes pudieran pensar que el sol y la luna tienen el mismo tamaño pues así lo parece durante los eclipses de sol.

Cuadro de Antoine Caron del año 1571, donde se observa astronomos estudiando un eclipse

Otro ejemplo similar es cuando miramos dos edificios sin que sepamos a qué distancia se encuentran respecto de nosotros, o bien, qué distancia hay entre ellos. ¿Cómo podemos saber cuál es más alto? Y ¿qué pasa si deseamos saber cuál de ellos se encuentra más alejado de nosotros? Es la experiencia la que en principio nos permite decir que la construcción más alejada es la que parece más pequeña. Esto considerando que ambas fueran de la misma altura, pero tal cosa no necesariamente la sabemos. Una situación similar a las anteriores se podrá presentar al observar dos líneas paralelas que se extienden alejándose de uno. Sin una teoría previa y basándonos únicamente en el sentido de la vista, podríamos sostener que las líneas paralelas en el mundo real se cortan. ¿Es esto, pues, lo que debemos creer? ¿Cómo se inserta este fenómeno en el conjunto de nuestros conocimientos y experiencias?

En algún momento René Descartes dijo: *Despréndete de todas las impresiones de los sentidos y de la imaginación y no te fíes sino de la razón.* De acuerdo a lo anterior, es obvio que los sentidos por sí solos están incapacitados para obtener cierta clase de conocimientos tales como el porqué del color de los cielos, el tamaño del sol y de la luna, la distancia al sol etc. Entonces ¿qué es lo que podemos considerar como verdad, de dónde surge y cómo logramos alcanzarla?

Las matemáticas constituyen una de las herramientas fundamentales para alcanzar la verdad, o por lo menos, una mayor certeza. En ellas se ve reflejada la curiosidad intelectual pura del hombre cuando se enfoca sobre la naturaleza, y si bien es cierto que muchas cuestiones (como el tamaño aparente de los objetos, sus cambios de formas según las distancias, la transmisión de la luz) no constituyen tema de reflexión ni producen preocupación alguna en nuestra cotidianeidad, hubo algunos, en un periodo histórico dado, para los que estos hechos no pasaron desapercibidos, y gracias a ellos y a sus estudios y observaciones se generaron teorías y técnicas que pronto derivarían en nuevas parcelas de conocimiento matemático y, como se mostrará más adelante, que en algunos casos resultarían en aplicaciones vinculadas con la pintura y la arquitectura durante los siglo XV y XVI.

Fue en el Renacimiento cuando algunos de los grandes avances en el uso de las matemáticas estuvieron vinculados con la pintura y la arquitectura. Aprovechando este hecho y lo novedoso que puede resultar para los lectores no especializados en las matemáticas o en cuestiones de historia del arte, y que sin embargo son capaces de seguir un razonamiento basado en cuestiones geométricas básicas, se mostrará cómo los pintores imprimieron realismo a sus productos a partir del siglo XV. Este realismo tenía como elemento básico el producir la ilusión de tridimensionalidad mediante trazos realizados sobre una superficie.

En el norte de Italia, desde mediados del siglo XIII y con más intensidad durante los inicios del *Quattrocento*, los artistas empezaron a intentar representar la realidad tal y como la percibían, y para ello aplicaron geometría y óptica con el fin de establecer un sistema de trazos -a lo que se llamó 'dibujar en perspectiva'- que les permitiera simular una espacialidad volumétrica y representar escenas que tenían lugar en dicho espacio. Esto marcó una notable diferencia entre los estilos de pintura desarrollados tiempo atrás, en particular durante la Edad Media, los cuales ofrecían a la vista un aspecto plano y una falta de proporcionalidad entre los tamaños de los personajes y los objetos aledaños, todos ellos sujetos a convencionalismos en cuanto a su representación. Un ejemplo de esto último es que usaban una especie de 'perspectiva jerárquica' según la cual los personajes principales eran representados con un tamaño mayor al de los menos importantes.

Esta revolución en la representación producida por la llamada 'perspectiva lineal' -calificada también como 'artificial'- es uno de los pilares del llamado Renacimiento europeo. Durante dicho periodo se pusieron a prueba varias estrategias geométricas para inducir la ilusión perfecta que imitara la realidad sobre un lienzo. Cabe plantearse dos preguntas: ¿qué técnica(s) matemática(s) usaron esos artistas para representar escenas que produjeran a la vista la misma impresión que las escenas reales? y, ¿cómo es que los artistas, a través de dichas técnicas construían imágenes que hoy denominamos como que "están en perspectiva"?

Este texto corresponde al capítulo 1 (modificado) de la tesis para obtener el grado de Maestría en Docencia para la Educación Media Superior . Mat. Mónica Citlalli Pereyra Zamudio (2021).

Anexo 3: 3ª Actividad Resolución de cuestionario

1.- Observa las siguientes dos pinturas, ¿cuál refleja mejor una sesacion de profundidad? ¿por qué? (Argumenta tu respuesta)

Cuadro 1. Obra de Giovanni di Paolo, titulada *San Jerónimo apareciéndose a San Agustín* (1456),

Cuadro 2. Autor: Rafael Sanzio, pintura titulada *La escuela de Atenas* (1510-1512).

En la pintura ***La escuela de Atenas,*** determina los elementos principales de la perspectiva, utilizando tu juego de geometría.

2.- Imagina la siguiente situación, te encuentras pintando un cuadro con un paisaje de una planicie inmensa por la cual pasa un ferrocarril, utilizando los rieles que se observan en la figura número1; ¿ Explica la definición de rectas paralelas ?

3.- ¿Y los durmientes? Si sabes que en realidad estos están espaciados cada metro, y que la distancia que hay desde donde te encuentras hasta el primer durmiente es de 10 m ¿cada cuántos centímetros habría que dibujarlos en el cuadro que estás pintando ? (considera que el espacio que hay entre tú y el lienzo es de medio metro, es decir, OB`= $\frac{1}{2}$ m) (véase figura 1 y 2)

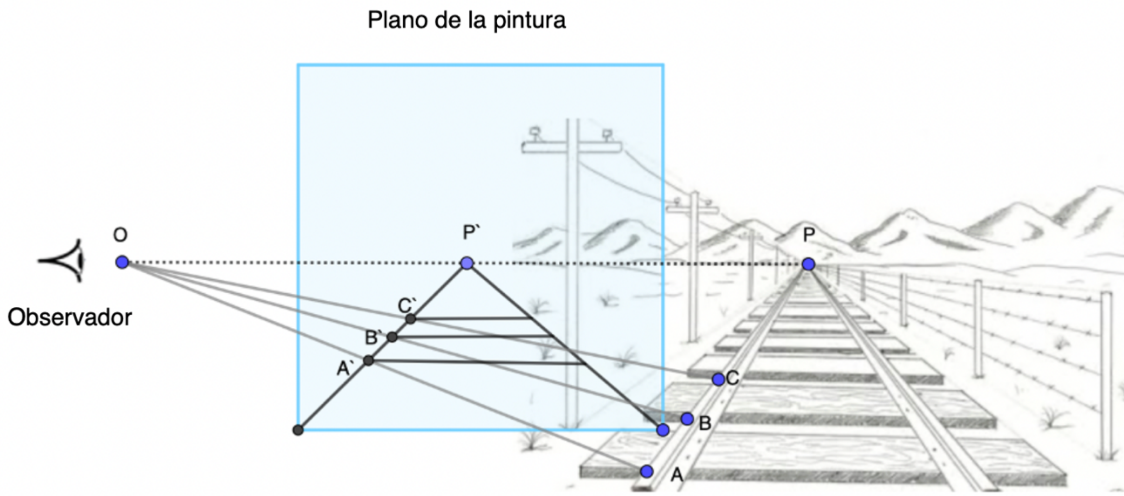


Figura 1. Representación en el plano de la pintura (recuadro azul) de los rieles de un ferrocarril sobre una planicie.

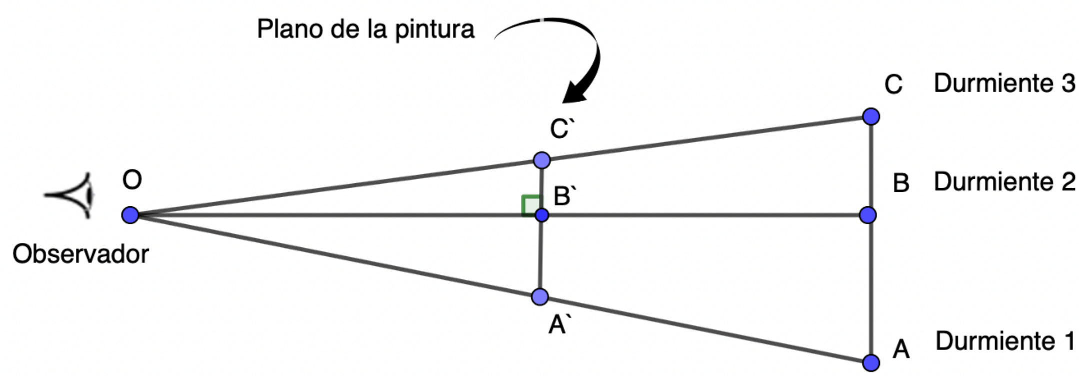


Figura 2. Representación geométrica de la figura 1

4.- ¿Cuáles de los teoremas de geometría estudiados en la unidad III y IV utilizarías para justificar tu respuesta anterior? ¿En qué criterios de semejanza te basaste para hallar las distancias?

5.- ¿Por qué razón crees que los cuadros dibujados con la técnica de perspectiva nos parecen más reales?

Anexo 4: Lista de figuras

No te rindas que la vida es eso,
continuar el viaje,
perseguir tus sueños,
destrabar el tiempo,
correr los escombros y destapar el cielo.
Mario Benedetti.