Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias

Tesis de Licenciatura

Fenómenos de Continuidad Automática en Grupos Polacos

Autor:
Zuriel Yahir Yescas Ramos
Supervisor:
M. en C. Fernando Javier Nuñez Rosales

Enero 2021

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.

Introducción

En este escrito se busca ahondar en la estrecha relación entre el álgebra, la topología y el análisis funcional. Más concretamente, la rama de la que aquí nos ocupamos es la denimonada *Teoría Descriptiva de Conjuntos*. Un área de creación relativamente reciente que encuentra sus orígenes en la curiosidad de los analistas franceses que buscaban estudiar más a fondo el concepto de *función*, que a principios del siglo XX se conocía por contribuciones de Dirichlet y Riemann. El primer trabajo que marcó un hito en la teoría descriptiva sería la tesis de Baire en 1899. En ella se exponen por primera vez las nociones de la categoría de conjuntos. Más tarde esta área sería robustecida por toda una escuela polaca de matemáticos, entre los que destacan Suslin, Lusin y Sierpinski, cuya prolífica actividad destacó en las primeras décadas del siglo pasado. Es de la nacionalidad de estos tres personajes de donde sale el nombre de *grupo polaco*, objeto que aquí inquirimos (véase la sección 2.1).

La presente tesis se divide en tres capítulos. En el primero nos abasteceremos de nociones topológicas para seguir el camino de profundización que se pretende en los otros dos capítulos. Concretamente, presentamos algunos resultados relevantes de la teoría descriptiva de conjuntos y exploramos las capacidades topológicas de los grupos G y del grupo cociente G/H en el caso donde $H \leq G$ es un subgrupo normal.

Para el segundo capítulo nos centramos en los grupos topológicos completamente metrizables. Iniciamos aquí la indagación en los grupos polacos, estudiamos la definición de métricas invariantes en grupos topológicos y algunas condiciones para las que la topología de un grupo es compatible con una métrica invariante. Dos de los resultados más relevantes de este capítulo son los Teoremas 2.3.11 y 2.3.12. El primero establece qué propiedades debe cumplir un subgrupo H de un grupo polaco compatible con una métrica completa invariante por la izquierda (véase la sección 2.2) para que G/H sea un grupo polaco. El segundo da una condición necesaria y suficiente para que un subgrupo H de un grupo polaco sea compatible con una métrica completa e invariante.

En el último capítulo se presentan algunos resultados de la continuidad automática de morfismos entre grupos polacos. En la primera sección se exponen condiciones suficientes sobre el dominio y el contradominio para que el morfismo de grupos $\psi : G \to H$ sea continuo. En la segunda sección se dan condiciones respecto de la medibilidad de ψ para que, si G y H son polacos, $\psi : G \to H$ sea continuo. Finalmente, la tercera sección se ocupa de dejar claro que no siempre se puede obtener la condición de continuidad automática. Con esto cobra sentido nuestra investigación de ésta en las secciones previas.

El tipo del lector que el autor tiene en mente debería, al menos, poseer nociones básicas de topología, de análisis funcional y de teoría de grupos. Específicamente, es recomendable que domine los contenidos curriculares equivalentes a los abarcados por las asignaturas Topología I y II, Análisis Matemático I y II y Álgebra Moderna I del plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Índice general

Capítulo 1

Teoría Descriptiva

1.1. Espacios Polacos

En la presente sección se pretende establecer las primeras nociones topológicas y escalar de manera paulatina en la complejidad de las definiciones y de los objetos matemáticos que investigaremos a lo largo de todo el trabajo.

La teoría descriptiva es concebida como la rama de la matemática que estudia los subconjuntos definibles en un espacio topológico polaco, por lo que es fácil inferir que este concepto será medular en todo el desarrollo del trabajo. La virtud que éste tiene es que, pese a su nombre peculiar, es un concepto sencillo de recordar y muy probablemente ya resultará familiar al incipiente estudiante de matemáticas teóricas. Cuando hablamos de conjuntos definibles, apelamos a los que son *bien portados*. Es decir, a aquellos que cumplen condiciones favorables o relativamente sencillos de estudiar para un contexto matemático específico. En ocasiones los matemáticos buscan estimular la abundancia de los objetos bien portados introduciendo axiomas que discriminan la cantidad de variaciones a estudiar. Como ejemplos concretos podemos nombrar a la clase de funciones analíticas (es decir, aquellas para las que existe una serie algebraica que las representa mediante convergencia), que son mejor portadas que el resto de funciones continuas que se estudian en cálculo; en el álgebra, los grupos abelianos son relativamente más fáciles de estudiar que los grupos en general. En contraparte a estos objetos, están los *patológicos*, que comprenden toda un área de estudio y resultan muy útiles para construir contrajemplos para conocer las limitaciones de ciertos teoremas.

En los últimos años, esta joven área de la matemática se ha hecho un camino a través de otras ramas tales como el análisis funcional, la teoría ergódica y la lógica matemática.

Definición 1.1.1. *Se llama espacio topológico a la pareja* (X, τ)*, siendo* X *un conjunto arbitrario y* τ *una familia de subconjuntos de* X *tal que*

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) Si $(A_i)_{i \in I}$ *es una familia arbitraria de elementos de* τ*,*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau;$$

(iii) Si $A_1, ..., A_n$ *son elementos de* τ*,*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau;$$

A la colección τ *le llamamos topología de* X*.*

Si (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$ se llama **bola abierta** centrada en x con radio ϵ al conjunto

$$B_d(x; \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Cuando la métrica d está sobreentendida, escribimos simplemente $B(x; \epsilon)$.

De manera similar, si $A \subseteq X$ y $y \in X$, se llama **distancia** de y a A a la cantidad

$$d(y, A) = \text{ínf}\{d(y, x) \mid x \in A\}.$$

Entonces la *ϵ-bola abierta centrada en A* es el conjunto

$$B(A; \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) < \epsilon\}.$$

Es un resultado fundamental el que la familia de bolas abiertas conforma una base para una topología en X. Esta es conocida como la **topología inducida por la métrica** d. En dicha topología la ϵ-bola abierta centrada en A es un conjunto abierto.

Definición 1.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que éste es un espacio topológico metrizable (o simplemente, lo llamamos espacio metrizable) si existe una métrica $d : X \times X \to [0, \infty)$ tal que la topología inducida por d en X coincide con τ. Asimismo, si existe tal métrica d, diremos que d es compatible con X.*

Notemos que si (X, τ) es un espacio metrizable y d es una métrica compatible, (X, d) es un espacio métrico. Cuando decimos que la topología inducida por d coindice con τ nos referimos a que si $U \in \tau$, a todo punto $x \in U$ puede asignársele una *bola abierta* centrada en x de un cierto radio $\epsilon > 0$ tal que

$$B_d(x; \epsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\} \subseteq U$$

y, recíprocamente, si $O \subseteq X$ es tal que dicha bola abierta existe para cada punto de O, entonces $O \in \tau$. Es un ejercicio de rutina verificar que la familia de subconjuntos de X tales que para cada punto existe una bola abierta contenida conforma una topología en X. En otras palabras, a todo espacio métrico se le puede asociar una topología: aquella inducida por d.

Hay que señalar una definición que, aunque elemental, está íntimamente ligada al concepto más importante del presente trabajo.

Sean (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión *de Cauchy*[1] si para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para cualesquiera $n, m \geq M$.

Es fácil ver que toda sucesión convergente es de Cauchy. Sin embargo, los espacios métricos donde todas las sucesiones de Cauchy son convergentes son casos peculiares y son llamados *espacios métricos completos.*

La primera definición importante es aquella de espacio topológico polaco. Si bien el nombre resulta particular y poco familiar, es de notar que reúne características estudiadas en un curso elemental de análisis real.

Definición 1.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es polaco*[2] *si es separable (esto es, si contiene un subconjunto numerable y denso) y existe una*

[1] Los que prefieren un término distinto al de la escuela analista francesa suelen llamarla *sucesión fundamental.*

[2] Si bien es cierto que lo más propio es hacer referencia al par (X, τ), el mencionar sólo al conjunto X es una práctica que, por fines de taquigrafía, está muy extendida por la comunidad matemática. A lo largo de este texto se trabaja indistintamente con ambas.

métrica completa compatible en X. Es decir, si X es separable y completamente metrizable.

Si V es un espacio vectorial en el que existe una métrica completa, éste se llama **espacio de Banach**. Naturalmente, puede considerarse este espacio vectorial como uno topológico (V, τ), donde τ es inducida por la métrica. Ejemplos clásicos de espacios polacos son $\mathbb{R}$ con la topología inducida por la métrica usual (el valor absoluto) y los espacios de Banach separables.

Se dice que el término *polaco* fue acuñado por Bourbaki, quien buscaba rendir tributo al vasto grupo de topólogos polacos que hicieron grandes aportes en lo que hoy se conoce como teoría descriptiva. Una dato curioso es que en algunos textos relacionados escritos en la segunda mitad del siglo XX puede encontrarse el término *polonais spaces*, donde *polonais* es *polaco* en francés. Lo interesante de esto radica en que es, de cierta manera, una tentativa de homenajear a dos naciones cuna de esta rama de la matemática.

Es posible que el lector se pregunte por qué se ha preferido el término rebuscado *espacio completamente metrizable* sobre el ortodoxo *espacio métrico completo*. La diferencia radica en el enfoque. Cuando se habla simplemente de un espacio métrico, no necesariamente está haciéndose referencia a un espacio topológico (hay espacios topológicos no metrizables). Por otro lado, el otro término deja claro que se está hablando de un espacio topológico metrizable tal que al menos una de las métricas compatibles resulta ser completa.

Como ejemplo, considérese el espacio polaco $(\mathbb{R}, \tau)$ con τ la topología usual y el conjunto $(0, 1)$ visto como subespacio topológico de $\mathbb{R}$. Claramente, $(0, 1)$ es separable; sin embargo, no es completo, pues la sucesión de Cauchy $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en $(0, 1)$.

En circunstancias *originales* $(0, 1)$ no parece ser subespacio polaco; pero, cambiando un poco la perspectiva, la situación se modifica.

Consideremos la función $f : (0, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dada por

$$f(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}.$$

Es claramamente continua, biyectiva y con inversa continua para $x \in (0, 1)$; es decir, un homeomorfismo entre $(0, 1)$ y $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De manera similar, $x \mapsto \tan(x)$ es un homeomorfismo entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\mathbb{R}$. Luego $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ dado por

$$h(x) = \tan(f(x)) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2}),$$

para $x \in (0,1)$, es un homeomorfismo entre $(0,1)$ y $\mathbb{R}$.

Defínase la función $\mho$ en $(0,1) \times (0,1) \to [0, \infty)$ dada por

$$\mho(x, y) = |h(x) - h(y)|,$$

donde $|h(x)-h(y)|$ denota el valor absoluto usual de $h(x)-h(y)$. Esta es claramente una métrica en $(0,1)$.

Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una $\mho$-sucesión de Cauchy en $(0,1)$ y considérese la sucesión $(h(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. Por definición de $\mho$, ésta es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(h(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Por la continuidad de h^{-1}, la sucesión $(h(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(x) \in (0,1)$. Esto exhibe que $((0,1), \mho)$ es completo. Por lo tanto, $(0,1)$ es un subespacio polaco de $\mathbb{R}$.

Un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico (X, τ) es llamado *G-delta* (G_δ) si existe una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau$ tal que

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Un conjunto B es *F-sigma* (F_σ) si existe una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de X tales que

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Es inmediato que un conjunto es F_σ si, y sólo si, su complemento es G_δ. Estas familias de conjuntos cumplen un papel fundamental en la topología, más específicamente, en la categoría de Borel (véase la sección 1.2).

El siguiente teorema aporta una caracterización de los subespacios completamente metrizables de un espacio completo, asimismo de los subespacios polacos de un espacio topológico metrizable cualquiera. Su importancia reside en que a menudo resulta relativamente sencillo verificar que un conjunto es G_δ. O, al menos, suele ser mucho más fácil que exhibir una métrica compatible y completa de un subespacio dado.

Teorema 1.1.4. *(Alexandrov) Sea (X, τ) un espacio topológico metrizable. Si $Y \subseteq X$ es un subespacio completamente metrizable, entonces Y es un subconjunto G_δ en X. Por otro lado, si X es un espacio completamente metrizable y $Y \subseteq X$ es G_δ, entonces Y es completamente metrizable.*

La conclusión del Teorema 1.1.4 es que los subespacios polacos de un espacio polaco son exactamente los espacios G_δ. Con esto concluimos de forma más directa que $(0, 1)$ es en efecto un subespacio polaco de $\mathbb{R}$.

1.2. Categoría de Baire

La teoría descriptiva nace a raíz del deseo de demostrar la Hipótesis del Continuo en el caso de los números reales. Esto es: que todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es numerable o es **equipotente** a $\mathbb{R}$ (es decir, existe una función biyectiva $f : A \to \mathbb{R}$). En un principio, la prueba de esta hipótesis es enormemente extenuante dada la gran variedad de subconjuntos que existen en los números reales. Algunos de estos son sumamente patológicos y prácticamente imposibles de estudiar sin detenerse de forma particular en cada uno. Con esto en mente, se introduce el concepto de definibilidad de conjuntos en un espacio topológico. Usamos aquí la palabra *definibilidad* para apelar a ciertos objetos matemáticos que cumplen una característica en concreto. De aquí es de donde nace la categorización de subconjuntos que a continuación se esboza.

Los subconjuntos de un espacio topológico (X, τ) se clasifican en jerarquías de acuerdo con su *complejidad* topológica. En la primera categoría se encuentran los llamados conjuntos de *Borel*; éstos se forman a partir de los elementos de τ mediante la operación del complemento y uniones numerables. Naturalmente, los conjuntos G_δ y F_σ pertenecen a la categoría de Borel. Asimismo todas las uniones numerables de conjuntos G_δ y las intersecciones numerables de conjuntos F_σ. A estas construcciones se les llama, respectivamente, subconjuntos $G_{\delta\sigma}$ y $F_{\sigma\delta}$.

La transición a la siguiente categoría se hace mediante una aplicación[3] continua. Específicamente, si (G, τ) y (H, τ') son espacios topológicos, $\phi : G \to H$ es una

[3]Muy vulgarmente se suele llamar *mapeo* a una función definida en un contradominio C arbitrario, reservando así el término *función* al caso donde $C = \mathbb{R}$.

aplicación y $A \subseteq G$ es un subconjunto perteneciente a la categoría de Borel (por ejemplo, un G_δ, F_σ, $G_{\delta\sigma}$ o $F_{\sigma\delta}$), se dice que $\phi(A)$ es *proyectivo*, asimismo lo es su complemento. Esta jerarquía, la llamada *jerarquía proyectiva* la componen las imágenes continuas de conjuntos Borel (analíticos), sus complementos (coanalíticos) y todas las posibilidades de imágenes continuas de éstos dos últimos.

El siguiente resultado es una extensión topológica a un teorema estudiado en un curso elemental de análisis real, aunque es común que en estas instancias se estudie como una característica de los espacios métricos completos.

Conviene recordar que un espacio topológico (X, τ) es *Hausdorff* si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existen $U_x, U_y \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$.

Un espacio (X, τ) es localmente compacto si para todo $x \in X$ existen $U \in \tau$ y un compacto K tales que $x \in U \subset K$.

Teorema 1.2.1. *(Baire) Sea (X, τ) un espacio topológico y $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau$ una sucesión de conjuntos densos en X. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso en X si se cumple alguna de las siguientes condiciones.*

(A) X es completamente metrizable;

(B) X es Hausdorff y localmente compacto.

Demostración. Se prueba únicamente (B). La prueba de (A) puede consultarse en cualquier texto de análisis funcional elemental. Ver, por ejemplo, [13].

Como preámbulo a esta demostración, haremos un par de afirmaciones

Afirmación 1:si toda sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ de conjuntos cerrados densos en ninguna parte satisface

$$Int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \emptyset,$$

entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso en X dada cualquier sucesión $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos densos en X.

Prueba de Afirmación 1:

Sea $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau$ tal sucesión. $X - O_n$ es cerrado y denso en ninguna parte para toda $n \in \mathbb{N}$.

$$X = X - (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X - O_n) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X - O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X - O_n.$$

Sea $U \in \tau$ no vacío. Por hipótesis, $U \nsubseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X - O_n$. Así, $U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$, por lo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso.

Afirmación 2: Sea (X, τ) un espacio Hausdorff y localmente compacto. Si $F \subset X$ es cerrado y $U \in \tau$ es tal que $U \nsubseteq F$, existe $V \in \tau$ no vacío tal que $\overline{V} \subset U - F$.

Prueba de Afirmación 2:

Por hipótesis, todo punto $x \in U - F$ tiene alguna vecindad[4] compacta $K \subseteq U - F$. Como X es Hausdorff, K es cerrado. Sea $V = Int(F)$, luego

$$\overline{V} \subset K \subseteq U - F.$$

Usando estas afirmaciones, regresamos a la prueba original. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados densos en ninguna parte de X. Sea

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Sea $U\tau$ no vacío y establezcamos

$$V_0 = U.$$

Como F_1 tiene interior vacío, $V_0 \nsubseteq F_1$. Por la afirmación 1, existe $V_1 \in \tau$ tal que

$$\overline{V_1} \subseteq V_0 - F_1.$$

Como F_2 tiene interior vacío, y $V_1 \nsubseteq F_2$. Existe $V_2 \in \tau$ con

$$\overline{V_2} \subseteq V_1 - F_2.$$

Procediendo de manera inductiva, producimos una sucesión de conjuntos no vacíos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tau$ tal que para todo entero $n \geq 1$,

$$\overline{V_n} \subseteq \overline{V_{n-1}}$$

y

$$\overline{V_n} \cap F_n = \emptyset.$$

[4]En este caso entendemos *vecindad* de x como un supraconjunto de algún abierto que contiene a x.

$(\overline{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces una sucesión decreciente de subconjuntos y, por tanto, si $n_1, ..., n_k$ es una colección de índices,

$$\bigcap_{i=1}^{k} \overline{V_{n_k}} = \overline{V_{max(n_1,...n_k)}}.$$

Hay que hacer notar que la prueba de la afirmación 2 indica que puede tomarse la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que $\overline{V_n}$ es compacto. Como toda colección finita de $(\overline{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene intersección finita,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset.$$

Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$, en particular $x \in \overline{V_1} \subset U$ y $x \notin F_n$ para todo entero $n \geq 1$. Entonces $x \in U - F$, por lo que

$$U \nsubseteq F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Como U es un conjunto abierto no vacío arbitrario, F tiene interior vacío. Por la afirmación 1, concluimos la prueba del teorema. □

En contraste con los conjuntos densos de un espacio topológico (X, τ) están los llamados *densos en ninguna parte*. Es decir, aquellos $E \subseteq X$ tales que $X - \overline{E}$ es denso. Es fácil ver que esto es equivalente a que $\overline{E}$ tenga interior vacío.

Definición 1.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $E \subseteq X$ es magro si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ de subconjuntos densos en ninguna parte tal que $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Es decir, los conjuntos magros son aquellos que son subconjuntos de una unión numerable[5] de conjuntos densos en ninguna parte. Por supuesto, esto incluye el caso donde la contención no es propia y se da la igualdad.

Hay que recordar un resultado fundamental de la teoría de la cardinalidad: la unión numerable de conjuntos numerables resulta ser un conjunto numerable. Es por esto que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos magros en un espacio

[5]Naturalmente, entiéndase esto como: el conjunto resultante de la unión numerable

topológico (X, τ) con $M_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} N_{m,n}$, donde $N_{n,m}$ es denso en ninguna parte para cada $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{m\in\mathbb{N}} N_{m,n} \right].$$

Entonces se concluye que M es un subconjunto de la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X y, por lo tanto, M es magro. Conclusión: la unión numerable de conjuntos magros es un conjunto magro.

Definición 1.2.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $E \subseteq X$ es comagro si $X - E$ es magro.*

Proposición 1.2.4. *Un subconjunto U de un espacio topológico (X, τ) es comagro si, y sólo si, existe una sucesión $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos densos tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subseteq U$*

En una buena variedad de trabajos se utiliza la Proposición 1.2.4 como definición. Hay que observar que el Teorema 1.2.1, junto con la Proposición 1.2.4, señala que todo subconjunto comagro de un espacio completamente metrizable (en particular, en un polaco) es denso. De hecho, es interesante observar que en los espacios polacos las nociones de ser comagro y ser magro son opuestos en un sentido más íntimo: se sabe que un subconjunto magro es percibido como una fracción ínfima del espacio que habita. En general no puede decirse nada respecto de su complemento; sin embargo, si el espacio es completamente metrizable, éste es denso, por lo que en este caso es válido el pensamiento intuitivo: el complemento de un subconjunto *pequeño* es un subconjunto *amplio.* [6]

En [11] puede encontrarse la siguiente caracterización de los espacios para los que se cumple el Teorema 1.2.1.

Teorema 1.2.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *U no es magro para todo $U \in \tau - \{\emptyset\}$.*

2. *Todo subconjunto comagro de X es denso.*

[6] Cabe hacer notar que existen ejemplos de espacios polacos que admiten subconjuntos magros y a la vez densos. Por ejemplo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ está equipado con la topología usual.

3. *La intersección numerable de conjuntos abiertos densos en X es un subconjunto denso en X.*

Demostración.

1 *implica* 2:

Si $U \subseteq X$ es un subconjunto comagro no denso, existe una sucesión de conjuntos densos $\{O_n\}$ en τ con

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \subseteq U \subseteq \overline{U}.$$

Así, como U no es denso, $X - \overline{U}$ es un abierto no vacío tal que

$$X - \overline{U} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X - O_n),$$

es decir, $X - \overline{U}$ es un abierto no vacío y magro.

2 *implica* 3:

Si $\{O_n\} \subseteq \tau$ es una sucesión de conjuntos densos, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es comagro por la Proposición 1.2.4 y denso en consecuencia de 2.

3 *implica* 1:

Si $O \in \tau - \{\emptyset\}$ es magro en X, $X - O$ es cerrado y comagro en X. Nuevamente por la Proposición 1.2.4, existe una sucesión de subconjuntos densos y abiertos $\{A_n\}$ tales que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq X - O.$$

Como O es no vacío, $X - O \neq X$ y

$$\overline{\bigcap_n A_n} \subseteq \overline{X - O} = X - O \subsetneq X.$$

Por ende, $\bigcap_n A_n$ no es denso en X. □

Se desprende entonces una definición medular.

Definición 1.2.6. *A un espacio topológico que cumple alguno de los enunciados del Teorema 1.2.5 se llama espacio de Baire.*

Teorema 1.2.7. *Si (X, τ) es un espacio de Baire, U es un espacio de Baire para todo $U \in \tau$.*

Demostración. Sea $\{A_n\} \subseteq \mathcal{P}(U)$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en U. Es claro que $\{A_n\} \subseteq \tau$. Además, $\{A_n \cup (X - \overline{U})\} \subseteq \tau$ y es una sucesión de subconjuntos densos de X, luego

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup (X - \overline{U}))$$

es denso en X. Luego,

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \cup \overline{X - \overline{U}} = X$$

y

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \cap U = U.$$

□

Definición 1.2.8. *Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) tiene la propiedad de Baire si existe $U \in \tau$ tal que $A \triangle U = (A - U) \cup (A - U)$ es magro en X.*

Definición 1.2.9. *Sea X es un conjunto. Σ es llamada σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones.*

$\emptyset \in \Sigma$,

$X - E \in \Sigma$ para todo $E \in \Sigma$,

si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en Σ, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Como recordatorio, si (X, τ) es un espacio topológico, la σ-álgebra mínima que contiene a los elementos de τ es llamada **σ-álgebra de Borel** de X. A menos que se diga lo contrario, en este escrito se denotará como $\mathcal{B}(X)$. A los elementos de $\mathcal{B}(X)$ se les llama **borelianos** de X.

Denotemos a la clase de conjuntos con la propiedad de Baire en un espacio topológico como $BP(X)$. Es claro que $\emptyset \in BP(X)$. Si $E \in BP(X)$ y $U \in \tau$ es tal que $E \triangle U$ es magro, nótese que

$$(X - E) \triangle (X - U) = ((X - E) - (X - U)) \cup ((X - U) - (X - E))$$

es magro. Además, $(X - U) \triangle Int(X - U)$ también lo es. Además,

$$(X - E) \triangle Int(X - U) \subsetneq (X - E) \triangle (X - U) \cup (X - U) \triangle Int(X - U)$$

también lo es, por lo que $X - E \in BP(X)$.

Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $BP(X)$ y U_n es el abierto que verifica la propiedad de Baire para E_n, resulta fácil ver que $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \triangle (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)$ es magro. $BP(X)$ es por lo tanto una σ-álgebra. Esto nos permite concluir la siguiente

Proposición 1.2.10. *Sea X un espacio topológico. La clase $BP(X)$ es la σ-álgebra mínima que contiene a los conjuntos magros de X y a sus conjuntos abiertos.*

Demostración. Resta probar la segunda aserción. Es claro que $U \in BP(X)$ para todo U abierto y $M \in BP(X)$ para todo magro M de X. Sea Σ una σ-álgebra que contiene a los subconjuntos abiertos y magros de X. Si $A \in BP(X)$ y U es abierto y $U \triangle A = M$ es magro, es inmediato que $A = M \triangle U$. Entonces, definición de $M \triangle U$ y propiedades de las σ-álgebras, $A \in \Sigma$. $\square$

Dados un espacio topológico, (X, τ), y $U \in \tau$, se dice que $A \subseteq X$ es **magro** en U si $A \cap U$ es magro en X (equivalentemente, si $A \cap U$ es magro en U con la topología de subespacio). Si $U - A$ es magro en U, se dice que A es **comagro en** U.

Cuando A es comagro en un abierto U, se dice que U **fuerza a** A. Esto suele denotarse como

$$U \Vdash A.$$

Obsérvese que si $U, V \in \tau$, $A, B \subseteq X$, $U \subseteq V$ y $A \subseteq B$, entonces $U \Vdash B$ si $V \Vdash A$. En efecto, si $V \Vdash A$, existe una sucesión (V_n) de abiertos densos en V tal que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq A.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$U_n = V_n \cap U.$$

U_n es un abierto denso en U para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq A \subseteq B,$$

por lo que $U \Vdash B$.

Observemos que si el ambiente topológico (X, τ) es un espacio de Baire, $E \subseteq X$ y $U \in \tau$ fuerza a E, por la Proposición 1.2.4, existe una sucesión de subconjuntos densos en U cuya intersección está contenida en E. Por la Proposición 1.2.7, U es un subespacio de Baire, por lo que $E \cap U$ es denso en U.

Además, en un espacio de *Baire* no puede ocurrir simultáneamente $U \Vdash A$ y $U \Vdash X - A$: de lo contrario, se contradice el Teorema 1.2.5.

Definición 1.2.11. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se le denota $U(A)$ al abierto máximo U de modo que $U - A$ es magro. Dicho de otra forma, es el abierto máximo que fuerza a A; es decir,*

$$U(A) = \bigcup \{U \in \tau \mid U \Vdash A\}.$$

$U(A)$ es también llamado cuasiinterior de A.

¿Por qué se puede asegurar la existencia de dicho conjunto? Más concretamente, ¿cómo se garantiza que en efecto $U(A) \Vdash A$? El siguiente resultado asegura que $U(A) \Vdash A$ y da una condición necesaria y suficiente para que A tenga la propiedad de Baire.

Teorema 1.2.12. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. $U(A) - A$ es magro y si A tiene la propiedad de Baire, $A - U(A)$ es magro.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{F} = \{\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \mid (\forall \alpha \in I)(U_\alpha \Vdash A) \wedge (\forall \alpha, \beta \in I)(\alpha \neq \beta \Rightarrow U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset)\}.$$

Veamos que $\mathcal{F}$ no es vacío. Considérese la colección

$$V = \{\emptyset\}.$$

Es fácil ver que $\emptyset - A$ es magro en $\emptyset$.

Dotando a la clase $\mathcal{F}$ con el orden de contención habitual se obtiene un COPO (esto es, un conjunto parcialmente ordenado) donde cada subconjunto totalmente ordenado tiene cota superior (a saber, la unión de sus elementos). Por el Lema de Zorn, existe una familia maximal $F = \{O_i\}_{i \in I} \in \mathcal{F}$. Sea $W = \bigcup_{i \in I} O_i$. Se afirma que W es denso en U(A).

En efecto: de lo contrario, $U(A) \nsubseteq \overline{W}$ y $U(A) - \overline{W} \in \tau$ no es vacío. Sea $O \in \tau$ que no es ajeno a $U(A) - \overline{W}$. Nótese que $O \cap (U(A) - \overline{W}) - A$ es magro y $O \cap (U(A) - \overline{W})$ es disjunto a cada O_i para cada $i \in I$. Esto contradice la maximalidad de A, pues $(V = O \cap (U(A) - \overline{W})) \cup \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{F}$ y $W \subsetneqq V$.

Se puede concluir que $U(A) \subseteq \overline{W}$. Entonces $U(A) - W \subseteq \overline{W} - W$ es magro. Además, como A es comagro en O_i para cada $i \in I$ y F es una familia disjunta, A es comagro en W. Por ende, $U(A) - A \subseteq (U(A) - W) \cup (W - A)$ es magro.

Para la segunda parte, supóngase que A tiene la propiedad de Baire. Existe entonces $U \in \tau$ tal que $A \triangle U$ es magro. En particular, $U - A$ es magro, así que $U \subseteq U(A)$ y $A - U(A) \subseteq A - U$ es magro. $\square$

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $B \subseteq X$, llamamos **diámetro** de B a la cantidad dada por

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B\}.$$

La convención le asigna al conjunto vacío un diámetro nulo.

Definición 1.2.13. *Sean (X, τ) un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$. Se denomina oscilación de f en $x \in X$ al número*

$$\operatorname{osc}_f(x) = \operatorname{ínf}\{\operatorname{diam}(f(U \cap A)) \mid U \in \tau \text{ y } x \in U\}.$$

Proposición 1.2.14. *Sean (X, τ) un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico y $f : X \to Y$. El conjunto de puntos donde f es continua es un G_δ.*

Demostración. Hay que observar que f es continua en x si, y sólo si, $\operatorname{osc}_f(x) = 0$: si $\operatorname{osc}_f(x) = 0$, sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la definición de $\operatorname{osc}_f(x)$, existe $U \in \tau$ con $x \in U$ tal que $\operatorname{diam}(f(U)) < \epsilon$, por lo tanto $f(U) \subseteq B_d(f(x); \epsilon)$. Recíprocamente, supóngase que f es continua en x y sea $\epsilon > 0$. Existe $U \in \tau$ tal que $f(U) \subseteq B_d(f(x); \frac{\epsilon}{2})$ y $\operatorname{diam}(f(U)) < \epsilon$. Por la definición de $\operatorname{osc}_f(x)$, esto implica que $\operatorname{osc}_f(x) = 0$.

Se define para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

$$A_{\frac{1}{n}} = \{x \in X \mid \operatorname{osc}_f(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Sea $x \in A_{\frac{1}{n}}$. Existe $U \in \tau$ que contiene a x tal que $\mathrm{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}$. Luego, por definición de $\mathrm{osc}_f(x)$, $U \subseteq A_{\frac{1}{n}}$ y $A_{\frac{1}{n}}$ es abierto. Finalmente,

$$\{x \in X \mid \mathrm{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}.$$

Así, $\{x \in X \mid \mathrm{osc}_f(x) = 0\}$ es un G_δ. □

Proposición 1.2.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico metrizable. Si F es un subconjunto cerrado en X, F es G_δ.*

Demostración. Sea d una métrica compatible con X. Para todo n, $B(F; \frac{1}{n})$ es un conjunto abierto. Como

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(F; \frac{1}{n}),$$

F es un G_δ en X. □

Con ayuda de las dos últimas proposiciones probamos un interesante teorema.

Teorema 1.2.16. *(Kuratowski) Sean (X, τ) un espacio metrizable, (Y, τ') completamente metrizable, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ continua. Existe $G \subseteq X$, G_δ con $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ y una extensión continua de f, $g : G \to Y$.*

Demostración. Definimos $G = \overline{A} \cap \{x \in X \mid \mathrm{osc}_f(x) = 0\}$. Por las Proposiciones 1.2.14 y 1.2.15, G es un G_δ. Como f es continua en A, $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$.

Sean $x \in G \subseteq \overline{A}$ y (x_n) una sucesión en A que converge a x y d una métrica completa compatible con Y. Obsérvese que debido a esta convergencia y por la oscilación de f en A,

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{diam}(f(\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}))) = 0.$$

Por esta razón, la sucesión $(f(x_n))$ es de Cauchy y, por la completitud de Y, existe $y \in Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Se define para toda $x \in G$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Para ver que g está bien definida, sean (x_n) y (x'_n) dos sucesiones en A que convergen a x y $\epsilon > 0$ arbitrario. Sean $z, z' \in Y$, respectivamente, los límites de

$(f(x_n))$ y $(f(x'_n))$. Como la sucesión *intercalada* $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, ...)$ converge a x, $(f(x_1), f(x'_1), ...)$ es de Cauchy. Existe entonces $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > M$

$$d(z, z') \leq d(z, f(x_m)) + d(f(x_m), f(x'_m)) + d(f(x'_m), z') < \epsilon$$

y $z = z'$, por lo que $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Es inmediato que g extiende f. Resta ver que $\operatorname{osc}_g(x)=0$ para toda $x \in G$. Sea $U \in \tau$. Si $x \in g(U \cap G)$, por definición de g existe una sucesión en $f(U \cap A)$ que converge a x. luego $g(U \cap G) \subseteq \overline{f(U \cap A)}$ y para todo $x \in G$ $\operatorname{osc}_g(x) \leq \operatorname{osc}_f(x) = 0$. □

Referimos al lector interesado en indagar más sobre la teoría descriptiva de conjuntos al conocido y muy completo texto de A. Kechris [11]. Por lo que respecta a esta tesis, por ahora estos conceptos serán suficientes.

Capítulo 2

Grupos Polacos

En el presente capítulo se desarrolla la teoría general de uno de los objetos matemáticos que más conciernen al presente trabajo: los grupos polacos. Se ahonda en los resultados más relevantes de los mismos y se prepara el terreno para explicar algunos fenómenos de continuidad automática en el próximo capítulo.

2.1. Topología en Grupos

Definición 2.1.1. *Sea (G, τ) un espacio topológico y $(G, *)$ (con el mismo conjunto G) un grupo. Se dice que G es un grupo topológico si la aplicación $\phi : G \times G \to G$ dada por*

$$\phi(x, y) = x * y^{-1}$$

es continua.

Es una consecuencia inmediata que las funciones $f : G \times G \to G$ y $h : G \to G$ dadas respectivamente por $(x, y) \mapsto x * y$ y $x \mapsto x^{-1}$ son continuas, ya que $f(x, y) = \phi(x, y^{-1}) = x * y$ y $h(x) = \phi(1_G, x) = x^{-1}$

Recíprocamente, si f y h son continuas, ϕ de la Definición 2.1.1 es continua por ser composición de funciones continuas:

$$\phi(x, y) = h(f(y, x^{-1})).$$

Corolario 2.1.2. *Sea (G, τ) un espacio topológico y $(G, *)$ (con el mismo conjunto G) un grupo. G es un grupo topológico si, y sólo si, las funciones*

$f(x, y) = x * y$

$h(x) = x^{-1}$

son continuas.

Si G es un grupo topológico, se dice que un subconjunto $A \subseteq G$ es *simétrico* si $A = A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$.

Como una nota adicional, aclaramos que usamos el término *vecindad* en el sentido que propone Bourbaki a menos que se indique lo contrario; es decir, como un supraconjunto de un conjunto abierto en un determinado espacio topológico.

El siguiente resultado resume algunas propiedades relevantes de los grupos topológicos.

Proposición 2.1.3. *Sea (G, τ) un grupo topológico.*

1. *Las funciones en G dadas por $x \mapsto gx$, $x \mapsto xg$ (g fijo) y $x \mapsto x^{-1}$ son homeomorfismos en G*
2. *Si $U \subseteq G$ es una vecindad que contiene a 1_G, U tiene un subconjunto simétrico V que es vecindad de 1_G.*
3. *Para toda vecindad U de 1_G existe otra vecindad de 1_G, V, tal que $VV \subseteq U$ y V es simétrica.*
4. *Si $A, B \subseteq G$ son compactos, AB es compacto.*

Demostración. Se construye la demostración de cada parte del teorema por separado. En el desarrollo de esta prueba, para referirnos a una vecindad abierta, usamos simplemente el término *vecindad*. Es fácil observar que basta probar la proposición para este tipo de vecindades.

1. Se sigue del hecho de que G es un grupo topológico y $x \mapsto xg^{-1}$, $x \mapsto g^{-1}x$ y $x \mapsto x^{-1}$ son continuas y son las funciones inversas de $x \mapsto gx$, $x \mapsto xg$ y $x \mapsto x^{-1}$, respectivamente.
2. Por 1., U^{-1} es abierto y contiene a 1_G. $U \cap U^{-1} \subseteq U$ también es abierto y contiene a 1_G. Se afirma que $(U \cap U^{-1})^{-1} = U \cap U^{-1}$. Si $g \in (U \cap U^{-1})^{-1}$,

$g^{-1} \in U \cap U^{-1}$ y $g \in U$; claramente $g \in U^{-1}$, por lo que $(U \cap U^{-1})^{-1} \subset U \cap U^{-1}$.

Si $h \in U \cap U^{-1}$, es a su vez el inverso de algún elemento que está en U y de uno que está en U^{-1}, pues $U = (U^{-1})^{-1}$. Se concluye que $U \cap U^{-1}$ es la vecindad simétrica buscada.

3. Sea W la imagen inversa de $U \in \tau$ bajo la función definida en $G \times G$ $(x, y) \mapsto xy$. Se sigue de la continuidad de esta función que W es abierto. Por definición de la topología producto de G, podemos suponer que $W = U_1 \times U_2$ para $U_1, U_2 \in \tau$. Como $1_G 1_G = 1_G$, $(1_G, 1_G) \in U_1 \times U_2$. Sea $O = U_1 \cap U_2$ y elíjase V, una vecindad de 1_G simétrica tal que $V \subseteq O$. Luego
$$VV \subseteq OO \subset U_1 U_2 \subseteq U.$$

4. Claramente $A \times B$ es compacto en la topología producto. por la continuidad de $(x, y) \mapsto xy$, AB es compacto.

$\square$

Como una observación, de la parte 3 de la Proposición 2.1.3 se desprende que para toda vecindad U de 1_G puede hallarse en general una vecindad abierta, y no necesariamente simétrica, W que contenga a 1_G y tal que $WW \subset U$.

Se desprende de la Proposición 2.1.3 un interesante

Corolario 2.1.4. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ un sistema fundamental de vecindades de 1_G; esto es, una familia de vecindades de 1_G tal que cualquier vecindad A de 1_G satisface $B \subseteq A$ para algún $B \in \mathcal{B}$. Para todo $a \in G$, las familias $\{aV \mid V \in \mathcal{B}\}$ y $\{Va \mid V \in \mathcal{B}\}$ son sistemas fundamentales de vecindades de a. Más aún, $\{V^{-1} \mid V \in \mathcal{B}\}$ es familia fundamental de las vecindades de 1_G.*

Presentaremos ahora un importante resultado que auxiliará a las pruebas de continuidad de un morfismo de grupos ψ definido en un grupo topológico G. Éste nos dice que ψ es continuo si, y sólo si, es continuo en un punto de G.

Definición 2.1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia definida en X. Se le denomina conjunto cociente*[1] *al conjunto de clases de*

[1]Hay que hacer notar que, aunque empleamos el término *espacio*, solamente estamos adoptando la forma más común en nuestro idioma para llamar a este conjunto. No confundir el conjunto cociente con el *espacio topológico cociente*, el cual sería propiamente la pareja $(X/R, \tau_R)$.

equivalencia de los elementos de X. Se denota a este conjunto como X/R. Además, considérese la aplicación $p : X \to X/R$ definida por $p(x) = [x]$. La topología cociente es la familia

$$\tau_R = \{U \subseteq X/R \mid p^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Es así como τ_R es la topología minimal en la que p es continua.

Proposición 2.1.6. *Sean (G, τ) un grupo topológico y $\mathcal{V}$ la familia de todas las vecindades de 1_G. $\mathcal{V}$ cumple las siguientes características.*

(i) $1_G \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$,

(ii) $\mathcal{V}$ es cerrada bajo la intersección de conjuntos,

(iii) si $V \in \mathcal{V}$, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $WW \subseteq V$,

(iv) si $V \in \mathcal{V}$, $V^{-1} \in \mathcal{V}$,

(v) si $V \in \mathcal{V}$ y $a \in G$, $aVa^{-1} \in \mathcal{V}$,

(vi) si $V \in \mathcal{V}$ y $V \subseteq W$, $W \in \mathcal{V}$

Demostración. Todo sistema de vecindades de 1_G satisface las condiciones (i), (ii) y (vi).

Supóngase que $\mathcal{V}$ es sistema fundamental de vecindades de 1_G. Si se asume la continuidad de la función $f(x, y) = xy$, si V es una vecindad de 1_G, existe una vecindad de $(1_G, 1_G)$ de $G \times G$ tal que $f(A) \subseteq V$. Puede suponerse que existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $A = W \times W$, ya que es claro que $W \times W$ es una vecindad fundamental de $(1_G, 1_G)$. Por lo tanto, $f(W \times W) = f(A) = WW \subseteq V$. Se cumple entonces (iii).

Como $x \mapsto x^{-1}$ y $x \mapsto axa^{-1}$ son homeomorfismos, (iv) y (v) se cumplen. □

En la mayoría de ocasiones, a menos que lo contrario sea necesario, cuando hablemos de un grupo G, sobreentendamos la operación y llamemos genéricamente 1_G a su elemento neutro.

Teorema 2.1.7. *Sea G un grupo y $\mathcal{V}$ una familia de subconjuntos de G que cumple las siguientes condiciones*

(i) $1_G \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$,

(ii) $\mathcal{V}$ es cerrada bajo la intersección de conjuntos,

(iii) si $V \in \mathcal{V}$, *existe* $W \in \mathcal{V}$ *tal que* $WW \subseteq V$,

(iv) si $V \in \mathcal{V}$, $V^{-1} \in \mathcal{V}$,

(v) si $V \in \mathcal{V}$ *y* $a \in G$, $aVa^{-1} \in \mathcal{V}$,

(vi) si $V \in \mathcal{V}$ *y* $V \subseteq W$, $W \in \mathcal{V}$

Existe una topología única en G *que es compatible con su estructura de grupo y* $\mathcal{V}$ *compone todo un sistema de vecindades de* 1_G.

Demostración. Para cada $a \in G$ defínase $\mathcal{V}_a = \{aV \mid V \in \mathcal{V}\}$. Por hipótesis, $\mathcal{V}$ es una familia de conjuntos cerrada bajo supraconjuntos (es decir, si $A \in \mathcal{V}$ y $B \supseteq A$, $B \in \mathcal{V}$) que contienen a 1_G; es decir, si $V \in \mathcal{V}$ y $V \subseteq W$, $W \in \mathcal{V}$. Considérese la función $x \mapsto ax$. Es claramente biyectiva y a es imagen de 1_G, entonces $\mathcal{V}_a$ es, en efecto, cerrada bajo supraconjuntos que contienen a a.

Se afirma que la familia $(\mathcal{V}_a)_{a \in G}$ compone una familia de conjuntos cerrada bajo supraconjuntos de vecindades en una topología de G. Sea $x \in G$ y $N \in \mathcal{V}_x$. Hay que encontrar $M \in \mathcal{V}_x$ tal que si $y \in M$, $N \in \mathcal{V}_y$. Supóngase que $N = xV$ $(V \in \mathcal{V})$. Sea $W \in \mathcal{V}$ que cumple la condición (iii) y defínase $M = xW$. Si $y \in M$, por la definición de M, $yW \subseteq xWW$. Además, $xWW \subseteq xV = N$. Entonces $yW \subseteq N$. Como $yW \in \mathcal{V}_y$ y $\mathcal{V}_y$ es cerrada bajo supraconjuntos, $N \in \mathcal{V}_y$.

Resta ver ahora que las operaciones de grupo de G son continuas en la topología donde $(\mathcal{V}_a)_{a \in G}$ cumple la condición del párrafo anterior. Sean $a, b \in G$ y sea C una vecindad de ab. Por el Corolario 2.1.4, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $C = abV$ con $V \in \mathcal{V}$. Por la condición (iii), existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $WW \subseteq V$. Por (v), $bWb^{-1} \in \mathcal{V}$. Si se define $U = (bWb^{-1}) \cap W$, $U \in \mathcal{V}$; además,

$$(b^{-1}Ub)U \subseteq \left[b^{-1}(bWb^{-1})b\right] W = WW \subseteq V.$$

Por lo tanto, por la asociatividad de la operación de G,

$$(aU)(bU) = ab(b^{-1}Ub)U \subseteq abV.$$

Esto prueba la continuidad de la operación de multiplicación.

Resta comprobar la continuidad de la operación de inversión. Sean $a \in G$ y $C \in \mathcal{V}_{a^{-1}}$. Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $C = a^{-1}V$ $(V \in \mathcal{V})$. Basta mostrar que existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $(aW)^{-1} \subseteq a^{-1}V$. Pero esto se da si, y sólo si,

$W^{-1} \subseteq a^{-1}Va$; si, y sólo si, $W \subseteq a^{-1}V^{-1}a$. Por (iv) y (v), $a^{-1}V^{-1}a \in \mathcal{V}$. Por ende, existe W tal que $W = a^{-1}V^{-1}a$ y la continuidad se da. Por lo tanto, en virtud del Corolario 2.1.2 la topología es compatible con las operaciones de grupo.

El Corolario 2.1.4 implica de manera directa la unicidad de esta topología. $\square$

Teorema 2.1.8. *Sea (G, τ) un grupo topológico y $H \subseteq G$ un subgrupo. La cerradura de H, $\overline{H}$, es un subgrupo de G.*

Demostración. Si $H = \emptyset$, $\overline{H} = \emptyset$. Supóngase que $H \neq \emptyset$. Sean $a, b \in \overline{H}$. Resta probar que $ab^{-1} \in \overline{H}$.

Sea $U \in \tau$ tal que $ab^{-1} \in U$. Por el Corolario 2.1.2, la función $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = xy^{-1}$ es continua. Por la definición de la topología producto, existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $a \in V_1$, $b \in V_2$ y $V_1 \times V_2 \subseteq f(U^{-1})$. Por definición de $\overline{H}$, existen $x \in V_1 \cap H$, $y \in V_2 \cap H$.

Por hipótesis, y dado que H es subgrupo, $xy^{-1} \in U \cap H$. Como U se tomó arbitrariamente, la definición de $\overline{H}$ permite concluir que $ab^{-1} \in \overline{H}$. $\square$

Hay que recordar que, dado un grupo G y un subgrupo H, G/H denota el conjuntos de las clases laterales xH con $x \in G$. Es decir, el conjunto de las clases de equivalencia para la relación de equivalencia R definida en G tal que xRy siempre que $x^{-1}y \in H$. Además, se denota como π a la *proyección canónica* $\pi : G \to G/H$ definida como $\pi(x) = xH$. Análogamente se denota como H/G el conjunto de clases laterales por la derecha. A lo largo de este trabajo se considera que H es un subgrupo normal de G si para todo $x \in G$ $xH = Hx$. En este caso los conjuntos G/H y H/G son indistinguibles; más aún, en este caso $G/H = H/G$ es un grupo con la operación natural de clases laterales dada por $x_1H \cdot x_2H = x_1x_2H$.

Lema 2.1.9. *Sea (G, τ) un grupo topológico y H un subgrupo. La proyección canónica $\pi : G \to G/H$ es una aplicación abierta y continua. Además, para cada $a \in G$ las vecindades de $\pi(a)$ son los conjuntos $\pi(aV)$, donde V es una vecindad de 1_G.*

Demostración. Cabe recordar que, por definición, la topología cociente G/H está formada por los conjuntos $U \subseteq G/H$ tales que $\pi^{-1}(U) \subseteq G$ es abierto en G. Esto asegura la continuidad de π.

Sea $U \in \tau$. Por definición de la topología cociente, basta probar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en G. Pero

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$$

y Uh es abierto para todo $h \in H$, por lo que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en G.

Sea $a \in G$. Si $V \in \tau$ contiene a 1_G, aV es abierto y contiene a a. Como π es abierta, $\pi(aV)$ es abierto y contiene a $\pi(a)$. Recíprocamente, sea A un abierto en G/H que contiene a $\pi(a)$. Por la continuidad de π, $\pi^{-1}(A)$ es abierto en G y contiene a a. Por el Corolario 2.1.4 podemos suponer que existe $V \in \tau$ que contiene a 1_G de tal manera que $\pi^{-1}(A) = aV$. Por la suprayectividad de π, $\pi(aV) = \pi(\pi^{-1}(A)) = A$. □

Teorema 2.1.10. *Sea (G, τ) un grupo topológico y N un subgrupo normal. Sea $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica. Considérese el grupo G/N. Adicionalmente, considérese este grupo equipado con la topología cociente. G/N es un grupo topológico.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ el sistema de vecindades de 1_G en τ.

Como N es normal, por el Lema 2.1.9, dado cualquier $a \in G$, las vecindades de $\pi(a)$ en la topología cociente de G/N son exactamente aquellas de la forma $\pi(aV) = \pi(a)\pi(V)$, con $V \in \mathcal{V}$ que contiene a 1_G. La clase

$$\pi(\mathcal{V}) = \{\pi(V) \mid 1_G \in V, V \in \mathcal{V}\}$$

será la familia de todas las vecindades de $\pi(1_e)$ en la topología cociente de G/N. Se probará primero que $\pi(\mathcal{V})$ cumple las condiciones (i)-(vi) en el Teorema 2.1.7 para el elemento $\pi(e)$. El cumplimiento de (i), (ii) y (vi) es claro. Sea $V \in \mathcal{V}$ y $W \in \mathcal{V}$ que cumple la condición (iii). Luego $\pi(WW) = \pi(W)\pi(W) \subseteq \pi(V)$ y $\pi(\mathcal{V})$ cumple la condición (iii). Asimismo, si $V \in \mathcal{V}$, $\pi(V^{-1}) = \pi(V)^{-1} \in \pi(\mathcal{V})$ y $\pi(\mathcal{V})$ cumple (iv). Como π es un morfismo, es fácil comprobar que también cumple (v).

Así, por 2.1.7, existe una topología τ' que es compatible con la estructura de grupo de G/H y tal que $\pi(\mathcal{V})$ es el sistema de vecindades de $\pi(1_G)$. Si $a \in G$, por el Corolario 2.1.4, las vecindades fundamentales de $\pi(a)$ en τ' son de la forma $\pi(a)\pi(V)$ $(V \in \mathcal{V})$. Por lo exhibido al inicio de esta demostración, τ' coincide con la topología cociente de G/H. □

Recuérdese que la noción de *homomorfismo de grupos*, o morfismo de grupos, obedece simplemente al concepto de una función entre grupos algebraicos que preserva la operación binaria definida en el dominio hacia la pertinente en el contradominio. Esta idea se plasma formalmente en la siguiente

Definición 2.1.11. *Sean* $(G, \bullet)$ *y* $(H, \odot)$ *dos grupos. Se dice que la aplicación* $\pi : G \to H$ *es un morfismo de grupos si para cualquier par de elementos* $a, b \in G$ *se tiene* $\pi(a \bullet b) = \pi(a) \odot \pi(b)$.

Cuando la operación del grupo $(G, \bullet)$ en cuestión está sobreentendida o la manera de indicarla no es relevante, se escribirá ab en vez de $a \bullet b$.

Desde el punto de vista del presente trabajo, los grupos serán percibidos también como espacios topológicos; de modo que se dirá que un morfismo de grupos es continuo si cumple con la definición usual de continuidad para el caso de las aplicaciones entre espacios topológicos.

Teorema 2.1.12. *Sean* (G, τ), (H, τ') *grupos topológicos y* $\psi : G \to H$ *un morfismo de grupos. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) ψ *es continuo;*

(b) ψ *es continuo en algún* $a \in G$*;*

(c) ψ *es continuo en* 1_G*;*

(d) Si V *es abierto en* H *y contiene a* 1_H*, existe un conjunto* U *abierto en* G *que contiene a* 1_G *tal que* $(\psi(x))^{-1}\psi(y) \in V$ *siempre que* $x^{-1}y \in U$.

Demostración. (a) implica trivialmente (b). Supóngase válido (b) y sea $V \in \tau'$ con $1_H \in V$. Nótese que $\psi(a)V \in \tau'$ y contiene a $\psi(a)$. Existe por hipótesis $U' \in \tau$ tal que $a \in U'$ y $\psi(U') \subseteq \psi(a)V$. Por el Corolario 2.1.4 puede suponerse sin pérdida de generalidad que $U' = aU$, donde $U \in \tau$ contiene a $1_G \in U$. Como ψ es morfismo de grupos, $\psi(a)\psi(U) \subseteq \psi(a)V$; por ende, $\psi(U) \subseteq V$. Por tanto (b) implica (c).

(c) implica (d): Sea $V \in \tau'$. Por la continuidad de ψ en 1_G, puede hallarse una vecindad de 1_G tal que $\psi(U) \subseteq V$. Si $x^{-1}y \in U$, $\psi(x^{-1}y) \in \psi(U) \subseteq V$. Nuevamente, como ψ es morfismo, $(\psi(x))^{-1}\psi(y) \in V$.

Sólo resta ver que (d) implica (a). Para esto considérese $a \in G$ arbitrario. Sea $B \in \tau'$ una vecindad de $\psi(a)$. Sin pérdida de generalidad, nuevamente por el

Corolario 2.1.4, puede suponerse que existe $V \in \tau$, vecindad de 1_H, tal que $B = f(a)V$. Sea U un conjunto abierto que cumple la condición expuesta en (d). Para todo $y \in aU$ se tiene $a^{-1}y \in U$ y por tanto $(\psi(a))^{-1}\psi(y) \in V$ y $\psi(y) \in \psi(a)V = B$. Esto prueba que $\psi(aU) \subseteq B$. Lo que muestra que (d) implica (a) y concluye la prueba. □

2.2. Grupos Metrizables

De manera análoga a como ocurre con los espacios vectoriales, ciertos grupos pueden ser dotados de una métrica. En esta sección se desarrollan algunos resultados importantes acerca de los grupos topológicos metrizables. Si (G, τ) es un grupo topológico, decimos que d es una *métrica compatible en* G si (G, d) es un espacio métrico y si la topología generada por d coincide con τ.

Es una cuestión interesante el averiguar si un cierto grupo topológico es metrizable, ya que de la respuesta a esta cuestión se pueden desprender propiedades interesantes sobre el espacio cociente G/H, donde G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G.

Por fortuna, existe un criterio contundente para establecer si en un grupo puede definirse o no una métrica. Éste se presenta a continuación como un teorema. Una prueba extensa se encuentra en [3].

Teorema 2.2.1. *(Birkhoff-Kakutani) Un grupo topológico (G, τ) es metrizable si, y sólo si, es de Hausdorff y 1_G tiene una base de vecindades numerable. Si G es metrizable, existe una métrica d que es compatible con G y es invariante por la izquierda; es decir, se cumple para todo $g \in G$ y todo par $x, y \in G$*

$$d(gx, gy) = d(x, y)$$

Si (G, τ) es metrizable, por el Teorema 2.2.1, existe una métrica invariante por la izquierda d. Se define la función $D : G \times G \to \mathbb{R}^+$

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1}).$$

Proposición 2.2.2. *Sea (G, τ) un grupo topológico y d una métrica compatible con G. La función D definida anteriormente es otra métrica compatible en G.*

Demostración. Primero observemos que la función $d^*(h,g) = d(h^{-1}, g^{-1})$ es una métrica en G si d lo es. Si $\epsilon > 0$, $x \in G$ y $B_d(x;\epsilon)$ es la bola abierta centrada en x con radio ϵ, por la continuidad de la inversión en G, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{d^*}(x;\delta_1) \subseteq B_d(x;\epsilon)$. Análogamente, dado que $(x^{-1})^{-1} = x$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_d(x;\delta_2) \subseteq B_{d^*}(x;\epsilon)$. Esto exhibe que d^* y d inducen la misma topología. Por lo tanto, D es una métrica compatible con G siempre que d lo es.

Si d es una métrica, es invariante por la izquierda si, y sólo si, d^* definida arriba es invariante por la derecha. Esto es inmediato de la definición: si $h, g, k \in G$,

$$d^*(gh, kh) = d(h^{-1}g^{-1}, h^{-1}k^{-1}).$$

$\square$

El desarrollo de un importante resultado sobre la función D continúa con el siguiente lema; sin embargo, obsérvese que si d es una métrica invariante por la izquierda entonces para cualesquiera $h, k \in G$ se tiene

$$d(hk, 1_G) \leq d(h, 1_G) + d(k, 1_G).$$

En efecto: observemos que $d(hk, 1_G) = d(hk, hh^{-1}) = d(k, h^{-1})$. Por otro lado, $d(h, 1_G) = d(h1_G, hh^{-1}) = d(1_G, h^{-1})$. Por lo tanto,

$$d(hk, 1_G) = d(k, h^{-1}) \leq d(k, 1_G) + d(1_G, h^{-1})$$

Lema 2.2.3. *Si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en G que son de Cauchy respecto de la métrica D definida arriba, entonces $(h_n^{-1}k_n)$ y $(k_n^{-1}h_n)$ son de Cauchy respecto de la métrica original d.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq N$ $D(k_n, k_m) < \frac{\epsilon}{3}$. Por la continuidad de las operaciones de grupos, existe $\delta > 0$ tal que para todo $g \in G$ tal que $d(g, 1_G) = d(g, k_N^{-1}k_N) < \delta$ se tiene $d(k_N^{-1}gk_N, 1_G) < \frac{\epsilon}{3}$. Sea ahora $N_1 > N$ tal que para cualesquiera $n, m \geq N_1$ se tiene $D(h_n, h_m) < \delta$.

Por la definición de la función D y debido a que d es invariante por la izquierda, $d(h_m h_n^{-1}, 1_G) = d(h_m h_n^{-1}, h_m h_m^{-1}) = d(h_n^{-1}, h_m^{-1}) \leq D(h_n, h_m) < \delta$. Por lo tanto, por lo anterior,

$$d(k_N^{-1}h_m h_n^{-1}k_N, 1_G) < \frac{\epsilon}{3}$$

Para cualesquiera $n, m \geq N$,

$$d(h_n^{-1}k_n, h_m^{-1}k_m) = d(k_m^{-1}h_m h_n^{-1}k_n, 1_G)$$

Por la discusión anterior,

$$\begin{aligned} d(h_n^{-1}k_n, h_m^{-1}k_m) = d(k_m^{-1}h_m h_n^{-1}k_n, 1_G) \leq \\ d(k_m^{-1}k_N, 1_G) + d(k_N^{-1}h_m h_n^{-1}k_N, 1_G) + d(k_N^{-1}k_n, 1_G) = \\ d(k_m^{-1}k_N, k_m^{-1}k_m) + d(k_N^{-1}h_m h_n^{-1}k_N, 1_G) + d(k_N^{-1}k_n, k_N^{-1}k_N) = \\ d(k_N, k_m) + d(k_N^{-1}h_m h_n^{-1}k_N, 1_G) + d(k_n, k_N) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Esto prueba que $(h_n^{-1}k_n)$ es de Cauchy con la métrica d. Nótese que para una métrica d invariante por la izquierda en G, para cualquier $g \in G$, $d(g, 1_G) = d(g^{-1}, 1_G)$, así que es fácil ver que $(k_n^{-1}h_n)$ también es de Cauchy para esta métrica. □

Corolario 2.2.4. *Si (d_n) y (k_n) son sucesiones en G de Cauchy respecto de D, también $(d_n^{-1}k_n)$ lo es.*

A continuación diremos más sobre el espacio topológico metrizable G y sobre su compleción.

Definición 2.2.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Se le llama compleción de X a la pareja compuesta por un espacio métrico completo (X^*, d^*) y una aplicación isométrica $\phi : X \to X^*$ tal que $\phi(X)$ es denso en X^*.*

A partir de un espacio métrico (X, d) no necesariamente completo, se puede construir la compleción de X. Para hacer esto se considera el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X y se denota a este conjunto como $\mathcal{C}[X]$. Se define la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{C}[X]$. Si $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}[X]$,

$$a \sim b \text{ si } \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0.$$

Se define como $\overline{X}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\mathcal{C}[X]$ y como $\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \to [0, \infty)$ a la función dada por

$$\overline{d}([x_n], [y_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

Es de rutina ver que $\overline{d}$ está bien definida y que $(\overline{X}, \overline{d})$ es un espacio métrico.

Lo anterior queda englobado en un importante teorema de análisis elemental. A este trabajo le compete únicamente su conclusión y no la construcción detallada de la compleción, por lo que omitimos la demostración.

Teorema 2.2.6. *Si (X, d) es un espacio métrico, existe siempre una compleción de (X, d).*

Para referirnos a la compleción $\big[(\overline{X}, \overline{d}), \phi\big]$ de (X, d), decimos simplemente que $\overline{X}$ es la compleción de X.

Teorema 2.2.7. *Sea (G, τ) un grupo topológico y d una métrica invariante por la izquierda y compatible con G. Sea la métrica en G dada por*

$$D(h, k) = d(h, k) + d(h^{-1}, k^{-1}).$$

Si $\overline{G}$ es la compleción de (G, D), la multiplicación de G se extiende a $\overline{G}$ y con esta extensión $\overline{G}$ es un grupo topológico. Además, existe una extensión de d que es invariante por la izquierda y compatible con $\overline{G}$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.2, la función D definida a partir de d es compatible con G. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $G \subseteq \overline{G}$. La función en $G \times G$ dada por $(a, b) \mapsto a^{-1}b$ se extiende a $\overline{G} \times \overline{G}$ como sigue:

Si $a, b \in \overline{G}$, existen dos sucesiones $(a_n), (b_n)$ en G que convergen, respectivamente, a a y a b. Por ende, la sucesión (a_n, b_n) en $G \times G$ converge a $(a, b) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Por el Corolario 2.2.4, la sucesión $(a_n^{-1}b_n)$ en $G \subseteq \overline{G}$ es de Cauchy. Por la completez de $\overline{G}$, existe $x \in \overline{G}$ tal que $(a_n^{-1}b_n) \to x$. Se comprobará ahora que la función

$$ab \mapsto \lim_{n \to \infty} (a_n^{-1}b_n)$$

está bien definida. Sean (a_n), (a'_n) sucesiones en G que convergen a a y (b_n), (b'_n) sucesiones en G que convergen a b. Basta ver que la sucesión de números reales $D(a_n^{-1}b_n, a_n'^{-1}b'_n)$ converge a cero. Sea $\epsilon > 0$. Por la convergencia de las sucesiones, la desigualdad del triángulo y la continuidad de la función $(a, b) \mapsto a^{-1}b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,

$$D(a_n^{-1}b_n, a_n'^{-1}b'_n) \leq D(a_n^{-1}b_n, a^{-1}b) + D(a^{-1}b, a_n'^{-1}b'_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como la extensión se construye secuencialmente, análogamente a la demostración del Teorema 1.2.16, se concluye que la extensión tiene oscilación cero en todo punto de $\overline{G} \times \overline{G}$ y es continua. $\square$

2.3. Métodos de la Categoría

Teorema 2.3.1. *Sea G un grupo topológico tal que para cualquier $y \in G$ la aplicación $x \mapsto xy$ es un homeomorfismo. Si $H \subseteq G$ es un subgrupo abierto, entonces H es también cerrado.*

Demostración. Considérese $y \in G - H$ y el conjunto $Hy = \{xy \mid x \in H\}$. Como $1_G \in H$, $y \in Hy$. Además, por hipótesis, la aplicación $x \mapsto xy$ es abierta, por lo que Hy es abierto. Finalmente, las clases laterales H y Hy son distintas; por lo tanto, son ajenas. Así, $Hy \subseteq G - H$ y se sigue que todo punto de $G - H$ es un punto interior de $G - H$ y que H es cerrado. $\square$

Teorema 2.3.2. *Sea (G, τ) un grupo polaco y $H \leq G$. H es polaco (dotado con la topología de subespacio) si, y sólo si, H es cerrado en G.*

Demostración. Si H es cerrado en G, es claramente un espacio completamente metrizable y separable debido a que G lo es. Luego, H es polaco.

Si H es polaco con la topología de subespacio, por el Teorema 1.1.4, H es G_δ en $\overline{H}$. Sea $k \in \overline{H}$. Por la topología elegida para H, H y kH son conjuntos G_δ densos en $\overline{H}$. Como H es un espacio de Baire, $H \cap kH$ es un G_δ no vacío en $\overline{H}$. Se afirma que $H = \overline{H}$: de lo contrario, existen $h \in \overline{H} - H$ y, como H es subgrupo, $\overline{H}$ también lo es; por ende H y hH son clases laterales distintas de $\overline{H}/H$. Luego $H \cap kH = \emptyset$, una contradicción. Por ende, $H = \overline{H}$. $\square$

De la discusión hecha anteriormente sobre la función D definida a partir de una métrica invariante y del teorema recién demostrado, se desprende lo siguiente:

Corolario 2.3.3. *Sea (G, τ) un grupo polaco y d una métrica compatible invariante por la izquierda. $D(h, k) = d(h, k) + d(h^{-1}, k^{-1})$ es otra métrica completa compatible en G*

Demostración. Por el Teorema 2.2.7, la compleción de G, $\overline{G}$, es un grupo polaco y G es un G_δ en $\overline{G}$, por lo que es cerrado y $G = \overline{G}$, por lo que el resultado se sigue. □

En lo que sigue se discutirán aún algunas propiedades en los grupos polacos que se relacionan directamente con las métricas.

Definición 2.3.4. *Diremos que un grupo polaco es CII (de completo e invariante por la izquierda) si es compatible con alguna métrica completa invariante por la izquierda.*

Proposición 2.3.5. *Sea G un grupo polaco con una métrica compatible d invariante por la izquierda. Si G es CII, d es completa.*

Demostración. Sea δ una métrica completa, invariante por la izquierda y compatible sobre G (sabemos que existe por la hipótesis de que G es CII) y $\epsilon > 0$. Como d y δ son compatibles en G, existe $\lambda > 0$ tal que

$$B_d(1_G; \lambda) \subseteq B_\delta(1_G; \epsilon)$$

Sea (g_n) una sucesión de Cauchy con la métrica d en G. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq N$ $d(g_n, g_m) < \lambda$. Dado que d es invariante por la izquierda, esto implica que $d(g_m^{-1} g_n, 1_G) < \lambda$ y $g_m^{-1} g_n \in B_d(1_G; \lambda) \subseteq B_\delta(1_G; \epsilon)$. Por ende $\delta(g_m^{-1} g_n, 1_G) < \epsilon$ y por la invarianza izquierda de δ, $\delta(g_n, g_m) < \epsilon$.Luego la sucesión (g_n) es de Cauchy según la métrica δ, por lo que converge en G. Esto demuestra que d es también completa. □

Se deduce de este resultado que si d y δ son métricas compatibles invariantes por la izquierda definidas en un grupo polaco, una sucesión es de Cauchy para d si, y sólo si, lo es para δ.

Nuestra discusión ahora se extiende al grupo cociente de un grupo polaco. Se presenta ahora un lema que le exhibe una métrica.

Lema 2.3.6. *Sea G un grupo polaco y d una métrica compatible invariante por la izquierda. Sea H un subgrupo cerrado de G. La función*

$$d^*(Hg_1, Hg_2) = \text{ínf}\{d(k_1, k_2) \mid k_1 \in Hg_1,\ k_2 \in Hg_2\}$$

es una métrica compatible en G/H

Demostración. En primer lugar, hay que ver que es una métrica. La simetría, la no negatividad y la desigualdad del triángulo se dan trivialmente. Basta verificar que $d^*(Hg_1, Hg_2) \neq 0$ siempre que $Hg_1 \neq Hg_2$. Supóngase que $d^*(Hg_1, Hg_2) = 0$. Por la definición de d^* y propiedades el ínfimo, existen sucesiones $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, (h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ en H de tal manera que la sucesión de reales $(d(h_{1,n}g_1, h_{2,n}g_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. Por simetría y debido a que d es invariante por la izquierda, $(d(g_1^{-1}h_{1,n}^{-1}h_{2,n}g_2, 1_G))_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a cero.

Se define, para todo $n \in \mathbb{N}$, $h_n = h_{1,n}^{-1}h_{2,n}$. Con base en esta definición, la sucesión $(g_1^{-1}h_n g_2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1_G. Por la continuidad de la multiplicación del grupo, la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g_1g_2^{-1}$. Como H es cerrado, $g_1g_2^{-1} \in H$, lo que implica que $g_1 \in Hg_2$. Luego $Hg_1 = Hg_2$. Se concluye que d^* es una métrica.

Se afirma que el espacio G/H es primero numerable[2]. Sea $Hg \in G/H$. Como G es metrizable, existe una sucesión (V_n) de conjuntos abiertos en G que contienen a g y son una base local para g. Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección canónica. La sucesión $(\phi(V_n))$ es una base local en Hg de conjuntos abiertos, por lo que G/H es primero numerable. Recuérdese que en un espacio topológico X primero numerable, un punto x está en la cerradura de $A \subseteq X$ si, y sólo si, existe una sucesión (a_n) en A que converge a x. Por lo que para demostrar que d^* es compatible con la topología de G/H basta probar que $A \subseteq G/H$ es cerrado si, y sólo si, para toda sucesión (Hg_n) en A tal que la sucesión de reales $(d^*(Hg_n, Hg_\infty))$ converge a cero para $Hg_\infty \in G/H$, se da que $Hg_\infty \in A$.

Supóngase que $A \subseteq G/H$ es cerrado y que (Hg_n) en A es tal que $(d^*(Hg_n, Hg_\infty))$ converge a cero. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $d^*(Hg_{n_k}, Hg_\infty) < 2^{-k}$. Por la definición de d^* en función de un ínfimo y por la invarianza por la izquierda de d, para todo k natural existen $n_k \in \mathbb{N}$ y $h_k \in H$ tales que $d(h_k g_{n_k}, g_\infty) < 2^{-k}$. Esto muestra que existe una sucesión en $\pi^{-1}(A)$ que converge a g_∞. Por la continuidad de la proyección canónica π, $\pi^{-1}(A)$ es cerrado y $g_\infty \in \pi^{-1}(A)$. por ende, $Hg_\infty \in A$.

Recíprocamente, sea $A \subseteq G/H$ que contiene sus puntos de acumulación respecto de d^*. Sea (g_n) una sucesión en $\pi^{-1}(A)$ y supóngase que (g_n) converge a g_∞. Por ende, por definición de d^*, $(d^*(Hg_n, Hg_\infty))$ converge a cero, por lo que la sucesión

[2] También suele decirse que satisface el primer axioma de numerabilidad

(Hg_n) está en A. Por hipótesis, $Hg_\infty \in A$ y $g_\infty \in \pi^{-1}(A)$. Esto prueba que $\pi^{-1}(A)$ es cerrado en G. Recuérdese que el espacio G/H es dotado de la topología minimal bajo la que π es continua, por lo que A es cerrado en G/H.

Con esto se concluye que d^* es compatible con G/H. □

Siguiendo esta línea de trabajo, hemos de presentar un teorema que nos permitirá decir aún más sobre G/H.

Sin embargo, antes de esto enunciaremos un teorema sumamente relevante en la teoría de gráficas que sirve para concluir la prueba del teorema subsecuente. Asimismo, hemos de hacer notar una sutileza: el concepto de árbol que aquí se usa, aunque se relaciona fuertemente con el de teoría de gráficas, es el de teoría descriptiva. Un árbol T es un subconjunto de $\omega^{<\omega}$ tal que si $s \in T$ y $t \subseteq s$, entonces $t \in T$.

Se denota el conjunto de las sucesiones infinitas en $\mathbb{N}$ como ω^ω. Definimos un conjunto relevante para el teorema siguiente:

Definición 2.3.7. *Si T es un árbol, se llaman* ***ramas*** *de T al siguiente conjunto*

$$[T] = \{x \in \omega^\omega \mid x|n \in T,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Definición 2.3.8. *Si T es un árbol, decimos que T es de ramificación finita*[3] *si para todo $s \in T$ existe a lo más una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ tales que $s^\frown n \in T$*

Lema 2.3.9. *(König) Sea T un árbol de ramificación finita. $[T] \neq \emptyset$ si, y sólo si, T es infinito.*

Teorema 2.3.10. *(Sierpinsky) Sea (X, τ) un espacio polaco, Y un espacio métrico y $\pi : X \to Y$ una función abierta, continua y suprayectiva. Y es polaco.*

Demostración. Sea $\omega^{<\omega}$ el conjunto de las sucesiones finitas de números naturales. Si $s \in \omega^{<\omega}$, denotaremos como $lh(s)$ a la longitud de s. Si $s = (s(0), ..., s(n-1))$, $lh(s) = n$. Además, si $m < lh(s)$, la restricción de s en m se escribe

$$s|m = (s(0), ..., s(m-1))$$

[3]Se puede encontrar el término en inglés *finite splitting* en, por ejemplo, [11].

Si $s, t \in \omega^{<\omega}$, s es un segmento inicial de t (se escribe $s \subseteq t$) si $s = t|lh(s)$. Si $s \subseteq t$, $lh(t) = lh(s) + 1$ y $t(lh(s)) = n$ (es decir, si el término número $lh(s)$ de t es n), t se escribe como $s^\frown n$.

Sea d una métrica compatible en X con $d < 1$.

A continuación construiremos una sucesión de subconjuntos abiertos no vacíos de X que nos auxiliarán en esta prueba; la denotaremos mediante $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$. Dicha sucesión cumple con las siguientes condiciones

- $diam(U_s) \leq 2^{-lh(s)}$;
- si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{U_{s^\frown n}} \subseteq U_s$
- $U_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{s^\frown n}$

Sea $e \in \omega^{<\omega}$ la sucesión vacía. Entonces se define $U_e = X$. El resto de la sucesión se construye por inducción. Supóngase que U_s ($s \neq e$) está definido. Sea

$$V_x = \left\{ z \in U_s \mid d(x, z) < \frac{1}{4} diam(U_s)\, y\, d(z, x) < d(z, X - U_s) \right\}.$$

Por la continuidad de la métrica, para todo $x \in U_s$, V_x es abierto en U_s y, por hipótesis de inducción, $diam(V_x) \leq 2^{-lh(s)-1}$. Si $y \in X - U_s$, por definición de V_x, $d(y, V_x) > 0$; así que $X - U_s \subseteq X - \overline{V_x}$ y $\overline{V_x} \subseteq U_s$. Claramente la colección $\{V_x \mid x \in U_s\}$ es una cubierta abierta de U_s. Como U_s es abierto en X, es polaco con la topología de subconjunto. Como U_s es segundo numerable[4], existe una subcubierta numerable de $\{V_x \mid x \in U_s\}$. Denótese (V_n). Considérese la sucesión de conjuntos $(U_{s^\frown n})_{n\in\mathbb{N}}$. Se etiqueta cada V_n con un conjunto de $(U_{s^\frown n})_{n\in\mathbb{N}}$. Luego la sucesión cumple las tres condiciones deseadas.

Para continuar con la prueba se define $V_s = \pi(U_s)$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$. Como π es abierta, cada V_s es abierto en Y. Sea d_Y una métrica compatible en Y. Sean $\mathcal{Y}$ la compleción de (Y, d_Y) y N_s el interior de la cerradura de V_s respecto de $\mathcal{Y}$. Obsérvese que $N_s \cap Y = V_s$: la contención $\subseteq$ es obvia. La contención recíproca se da por la definición de $\mathcal{Y}$. Además, por la suprayectividad de π, $V_e = Y$ y $N_e = \mathcal{Y}$.

[4]Un espacio topológico (X, τ) es segundo numerable si existe una familia numerable $F = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de τ tal que para todo $V \in \tau$ no vacío y todo $p \in V$, existe $U_j \in F$ con $p \in U_j \subset V$.

Adicionalmente, se define por inducción sobre $lh(s)$ una nueva sucesión (M_s) de subconjuntos abiertos en $\mathcal{Y}$ tal que se cumplen las siguientes propiedades.

- $M_s \subseteq N_s$,
- para $n \in \mathbb{N}$, $M_{s^\frown n} \subseteq M_s$,
- para $y \in \mathcal{Y}$, $y \notin M_{s^\frown n}$ salvo una cantidad finita de elementos $n \in \mathbb{N}$,
- $M_s \cap \bigcup_n M_{s^\frown n} = M_s \cap \bigcup_n N_{s^\frown n}$.

Se establece $M_e = N_e = \mathcal{Y}$. Supóngase que M_s está definido con $s \neq e$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se elige una sucesión creciente de conjuntos cerrados en $N_{s^\frown n}$ $(F_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $N_{s^\frown n} = \bigcup_m F_{n,m}$. Esto es posible dado que $N_{s^\frown n} = \bigcup_m F_{n,m}$ es un espacio normal. Sea

$$M_{s^\frown n} = M_s \cap N_{s^\frown n} - \bigcup_{m<n} F_{m,n}.$$

Es evidente que se cumplen las dos primeras condiciones. Para ver que se cumple el resto de las condiciones considérese $y \in \mathcal{Y}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ el mínimo natural para el que $y \in M_s \cap N_{s^\frown n}$ y m el mínimo para el que $y \in F_{n,m}$. Entonces se cumple $y \in M_{s^\frown n}$ por definición y para $k > \text{máx}\{m, n\}$, $y \notin M_{s^\frown k}$, ya que la sucesión $(F_{n,m})_m$ es creciente, $y \in F_{n,l}$ para todo $l \geq k$.

Se afirma que para todo $y \in \mathcal{Y} - Y$, $y \notin M_s$ salvo por un número finito de elementos $s \in \omega^{<\omega}$. para ver esto, sean $y \in \mathcal{Y} - Y$ y

$$T = \{s \in \omega^{<\omega} \mid y \in M_s\}.$$

Por las propiedades segunda y tercera, T es de ramificación finita. Si T es infinito, existe $z \in \omega^\omega$ (una sucesión infinita) tal que $y \in M_{z|n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Hay que observar que existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_n U_{z|n}$. Como $y \notin Y$, $\pi(x) \neq y$. Entonces, como $\mathcal{Y}$ es métrico, existe un abierto $V \subseteq \mathcal{Y}$ tal que $\pi(x) \in V$ y $y \notin \overline{V}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_{z|n} \subseteq \pi^{-1}(V)$. Dicho número existe debido a que $x \in \pi^{-1}(V)$, a la continuidad de π y a que los diámetros de los conjuntos U_s son evanescentes. Esto implica que $V_{z|n} \subseteq V$ y $y \notin \overline{V_{z|n}}$. Sin embargo, esto contradice nuestra construcción de los conjuntos involucrados, ya que con base en ésta $y \in M_{z|n} \subseteq N_{z|n} \subseteq \overline{V_{z|n}}$; por lo tanto, T es finito.

Por la construcción de los conjuntos N_s, se sigue que $\mathcal{Y} - Y$ es F_σ y por ende Y es un subconjunto G_δ del espacio polaco $\mathcal{Y}$. Es así como se concluye que Y es polaco. □

De esta discusión se desprende, como ya se contemplaba, un teorema que permite dar una condición bajo la cual G/H es un espacio (o un grupo) polaco.

Teorema 2.3.11. *Sea G un grupo polaco con una métrica compatible invariante por la izquierda d y H un subrupo cerrado de G. G/H es un espacio polaco. Más aún, si H es normal, G/H es un grupo polaco.*

Demostración. Por el Lema 2.3.6, d^* es una métrica compatible en G/H. Por el Teorema 2.3.10, G/H es un espacio polaco. Si H es un subgrupo normal, por el Teorema 2.1.10 se concluye que G/H es un grupo topológico. Como es cerrado, G/H es un grupo polaco. □

Ahora se presenta un importante resultado relacionado con el concepto de metrizabilidad de espacios polacos que caracteriza a los grupos polacos CII con base en la condición de que exista un subgrupo H con características especiales.

Teorema 2.3.12. *Sea G un grupo polaco y H un subgrupo cerrado y normal de G. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) G es CII;

(ii) H y G/H son CII.

Demostración. Sea d una métrica invariante por la izquierda de G. La restricción de d sobre H, $d|H$, es una métrica compatible invariante por la izquierda de H. Por el Lema 2.3.6, d^* es compatible en G/H; de hecho, es fácil ver que es invariante por la izquierda. Sean $Hg_1, Hg_2, Hk \in G/H$.

$$\begin{aligned} d^*(kHg_1H, kHg_2H) &= d^*(kg_1H, kg_2H) = \text{ínf}\{d(k_1, k_2) \mid k_1 \in kg_1H, k_2 \in kg_2H\} \\ &= inf\{d(kg_1h_1, kg_2h_2) \mid h_1, h_2 \in H\} = \text{ínf}\{d(g_1h_1, g_2h_2) \mid h_1, h_2 \in H\} \\ &= \text{ínf}\{d(r_1, r_2) \mid r_1 \in g_1H \, r_2 \in g_2H\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d^*(kHg_1H, kHg_2H) = d^*(g_1H, g_2H)$.

Por la Proposición 2.3.5, basta probar que d es completa si, y sólo si, d^* y $d|H$ lo son. Supóngase que d es completa. En este caso $d|H$ es completa, pues H es cerrado.

Sea (Hg_n) una sucesión de Cauchy en G/H respecto de la métrica d^*. Se cumple la condición de Cauchy para cierto natural n y para $m > n$, $d^*(Hg_n, Hg_m) < 2^{-n}$. Se ha de construir ahora por inducción una sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que $k_n \in Hg_n$ de la siguiente manera.

$k_0 = g_0$. Por la definición de d^* y la invarianza por la izquierda de d, en general k_{n+1} puede elegirse de tal manera que $d(k_{n+1}, k_n) < 2^{-n}$. Por esta razón, la sucesión (k_n) es de Cauchy respecto de la métrica d. Por completez, existe $k \in G$ tal que $(k_n) \to k$. por la continuidad de la proyección canónica π, $(Hk_n) \to Hk$. Por ende, d^* es completa.

Recíprocamente, supóngase que $d|H$ y d^* son completas. Sea (g_n) una sucesión de Cauchy en G respecto de d. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que para $n < m$ se tiene $d(g_n, g_m) < 2^{-n}$. Considérese la sucesión (Hg_n). Por definición de d^*, para cualquier par $n, m \in \mathbb{N}$ $d^*(Hg_n, Hg_m) \leq d(g_n, g_m)$, por lo que (Hg_n) es de Cauchy respecto de d^*. Luego, por la completez de d^*, existe g_∞ tal que $(Hg_n) \to Hg_\infty$. Por este hecho y las propiedades de d, puede hallarse una sucesión (h_n) en H de tal manera que $(h_n g_n)$ converge a g_∞. En efecto: como la sucesión de números reales $(d^*(Hg_n, Hg_\infty))_n$ converge a cero, también lo hace la sucesión $(inf\{d(h''_n g_n, h'_n g_\infty) \mid h''_n, h'_n \in H\})_n$ y asimismo $(inf\{d(h'^{-1}_n h''_n g_n, g_\infty) \mid h''_n, h'_n \in H\})_n$. La sucesión en H buscada se obtiene a partir de $(h'^{-1}_n h''_n)_n$. Sin pérdida de generalidad se asume que $d(h_n g_n, g_\infty) < 2^{-n}$. Luego $d(g_n, h_n^{-1} g_\infty) < 2^{-n}$. Como H es normal en G, sus clases laterales izquierdas coinciden con las derechas, así que existe una sucesión (f_n) en H tal que $h_n^{-1} g_\infty = g_\infty f_n$. Por ende $d(g_n, g_\infty f_n) < 2^{-n}$. Debido a que $d(g_n, g_m) < 2^{-n}$ para $n < m$ y la desigualdad del triángulo,

$$d(g_\infty f_m, g_\infty f_n) \leq d(g_n, g_\infty f_n) + d(g_n, g_m) + d(g_m, g_\infty f_m) < 2^{-n+2}.$$

$(g_\infty f_n)$ es entonces de Cauchy respecto de d. Por la invarianza de d por la izquierda, (f_n) lo es. Por la asunción de que $d|H$ es completa, existe $f_\infty \in H$ tal que (f_n) converge a f_∞. Por la continuidad de la norma d, se sigue que (g_n) converge a $g_\infty f_\infty \in G$ y d es completa en G, como se quería. □

Capítulo 3

Continuidad Automática

Es del interés de este capítulo el hallar respuesta a la cuestión: ¿Bajo qué condiciones puede asegurarse la continuidad de un morfismo entre grupos polacos?

Definición 3.0.1. *Sean* (G, τ) *y* (H, τ') *espacios polacos. Una aplicación* $f : X \to Y$ *es llamada Baire-medible si para todo* $U \in \tau'$ $f^{-1}(U)$ *tiene la propiedad de Baire en* X.

En el presente capítulo se inicia la búsqueda de condiciones necesarias para que la continuidad automática (C.A.) de un morfismo de grupos se dé. Se estudian primero aspectos generales de los morfismos Baire-medibles y se expone un resultado que asegura que si el dominio y el contradominio son grupos polacos, el morfismo resulta ser continuo. Además, se estudian condiciones suficientes sobre el dominio de un morfismo de grupos para que resulte ser automáticamente continuo. Asimismo, se expondrá de qué condiciones deberá gozar el contradominio de un morfismo para que éste alcance la continuidad.

Para el caso de los morfismos Baire-medibles están los resultados principalmente desarrollados por B. J. Pettis, los cuales se exponen a continuación. El resultado principal garantiza que si $\phi : G \to H$ es un morfismo Baire-medible y (G, τ), (H, τ') son grupos polacos, ϕ es continuo.

3.1. Dominio y Rango

Definición 3.1.1. *Sea $(G, \cdot, 1_G)$ un grupo. Decimos que G es normado si existe una función $||\cdot|| : G \to \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $g, h \in G$:*

(1) $||g \cdot h|| \leq ||g|| + ||h||$,

(2) $||1_G|| = 0$,

(3) $||g|| = ||g^{-1}||$,

(4) Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $g \neq 1_G$, $||g^n|| \geq \max\{n, ||g||\}$.

A tal función $||\cdot||$ se le llama norma de grupo.

Un ejemplo común de grupo normado es $\mathbb{Z}$ con el valor absoluto usual en $\mathbb{R}$.

A continuación, se presenta una condición suficiente sobre el rango de un homomorfismo para que éste sea continuo.

Teorema 3.1.2. *(Dudley) Sean G un grupo polaco con una métrica completa d, H un grupo normado y equipado con la topología discreta. Si $\phi : G \to H$ es un morfismo de grupos, ϕ es continuo.*

Demostración. Supóngase lo contrario. Entonces ϕ no es continuo en 1_G. Se construyen por recursión sucesiones $(x_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en G y $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tales que

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 < m < n$, $x_{m,n} = g_m x_{n,m+1}^{k_m}$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $k_n = n + \sum_{i=1}^{n} ||\phi(g_i)||$, $x_{n,n} = 1$ y $\phi(g_n) \neq 1_H$.
3. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+1,m}, x_{n,m}) < 2^{-n}$.

Para iniciar, se toma un elemento que nombramos como g_1 tal que $\phi(g_1) \neq 1$. Se toma $n > 1$. Suponemos que $g_1, ..., g_n$ están establecidos y se define para $j = 1, ..., n$

$$k_j = j + \sum_{i=1}^{j} ||\phi(g_i)||.$$

Además, para $1 \leq m \leq n$, definimos

$$x_{n,m} = g_m(g_{m+1}(g_{m+2}...(g_{n-1}(g_n)^{k_{n-1}})^{k_{n-2}}...)^{k_{m-1}})^{k_m}.$$

Definimos la función $\lambda : G \to G$ como sigue.

$$g \mapsto g_m(g_{m+1}(g_{m+2}...(g_{n-1}(g_n g)^{k_{n-1}})^{k_{n-2}}...)^{k_{m-1}})^{k_m}.$$

Nótese que $\lambda(g_n) = x_{n,m}$.

Por la continuidad de las operaciones de grupo en G, λ es continua.

Por la continuidad de λ, es posible elegir a g_{n+1} de tal forma que

$$d(\lambda(g_n), \lambda(g_{n+1})) < 2^{-n}.$$

Más aún, por la discontinuidad de ϕ en 1_H, es posible elegir a g_{n+1} de tal manera que, aunada a la condición anterior, se cumpla $\phi(g_{n+1}) \neq 1$.

Definimos entonces para $1 \leq m \leq n+1$

$$x_{n+1,m} = g_m(g_{m+1}(g_{m+2}...(g_{n-1}(g_n g_{n+1}^{k_n})^{k_{n-1}})^{k_{n-2}}...)^{k_{m-1}})^{k_m}.$$

Así queda cabalmente definida la sucesión $(x_{m,n})_{m,n\in\mathbb{R}}$ (con $m \leq n$) y la parte 1. de la definición se cumple.

Por el argumento anterior, la parte 3. de la construcción de las sucesiones se cumple. Ésta indica que $(x_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ (con $m \in \mathbb{N}$ fijo) es de Cauchy.

Como G es polaco, cada sucesión $(x_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $m \in \mathbb{N}$ fijo.

Existe entonces $y_m \in G$ tal que $(x_{n,m})_{n\in\mathbb{N}} \to y_m$. Por la continuidad de λ, se tiene

$$y_m = g_m(y_{m+1})^{k_m}.$$

Al emplear esto y la parte 1. de la definición de las sucesiones se tiene

$$y_1 = g_1(g_2(...(g_m y_{m+1}^{k_m})...)^{k_2})^{k_1}$$

De aquí se tienen dos opciones: $\phi(y_{m+1}) = 1_H$, en cuyo caso

$$||\phi(y_m^{k_{m-1}})|| = ||(\phi(g_m)\phi(y_{m+1}))^{k_{m-1}}|| \geq k_{m-1}.$$

De lo contrario, $\phi(y_{m+1}) \neq 1_H$ y

$$||\phi(y_m^{k_{m-1}})|| \geq ||\phi(y_m)|| = ||\phi(g_m)\phi(y_{m+1})^{k_m}|| \geq k_m - ||\phi(g_m)|| = k_{m-1} + 1$$

En cualquier caso, $||\phi(y_m^{k_{m-1}})|| \geq k_{m-1}$. Se tiene

$$\begin{aligned}||\phi(y_1)|| \geq ||\phi[(g_2(g_3...)^{k_2})^{k_1}]|| - ||\phi(g_1)|| \geq ||\phi[g_2(g_3...)^{k_2}]|| - ||\phi(g_1)|| \geq \\ ||\phi[(g_3...)^{k_2}]|| - ||\phi(g_1)|| - ||\phi(g_2)|| \geq ... \geq \\ ||\phi[(g_m y_{m+1})^{k_{m-1}}]|| - ||\phi(g_{m-1})|| - ... - ||\phi(g_1)||\end{aligned}$$

De aquí se aduce que

$$||\phi(y_1)|| \geq k_{m-1} - ||\phi(g_{m-1})|| - ... - ||\phi(g_1)|| = m - 1$$

Como esto ocurre para todo m, el valor de $||\phi(y_1)||$ es infinito, lo que es una contradicción. $\square$

Cabe hacer notar que, en las primeras versiones de este trabajo, estaba contemplando acotar el tratamiento de los grupos normados a sólo una burda mención; sin embargo, gracias a una acertada observación de uno de los sinodales, Fernándo Hernández, tenemos un resultado que resalta lo restringida que es la clase de los grupos normados (ver [16]).

Corolario 3.1.3. *Si (G, τ) es un grupo polaco no discreto (en otras palabras, $\tau \neq \mathcal{P}(G))$), G no es normado.*

Demostración. Supóngase lo contrario; es decir, que G es normado. Sea $(G, \mathcal{P}(G))$ el grupo topológico discreto sobre G. La función $\iota : (G, \tau) \to (G, \mathcal{P}(G)))$ dada por la identidad es un morfismo de grupos. Por el Teorema 3.1.2, ι es continua, por lo que $\tau = \mathcal{P}(G))$, una contradicción. $\square$

Definición 3.1.4. *Sea (G, τ) un grupo polaco. Un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado σ-sindético si existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ tal que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n A$.*

Teorema 3.1.5. *(Lindelöf) Sea (X, τ) un espacio topológico segundo numerable con una base topológica $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si $A \in \tau$ y $\{U_i\}_{i\in I} \subset \tau$ es una colección tal que*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

existe un subconjunto numerable $N \subset I$ tal que

$$A \subset \bigcup_{n\in N} U_n.$$

En otras palabras, para todo $A \in \tau$ existe una subcubierta numerable para toda cubierta arbitraria de A.

Demostración. Sea $A \in \tau$ y $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ una colección tal que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Para todo $i \in I$ existe un subconjunto $M_i \subset \mathbb{N}$ tal que $C_i = \{B_m^{(i)}\}_{m \in M_i} \subset \mathcal{B}$ y

$$U_i = \bigcup_{m \in \mathbb{M}_\daleth} B_m^{(i)}.$$

Existe entonces un subconjunto $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{\hat{B}_m\}_{m \in M} \subset \mathcal{B}$,

$$A \subset \bigcup_{m \in M} \hat{B}_m$$

y para cada $m \in M$, $\hat{B}_m \subset U_i$ para algún $i = i(m) \in I$. Por lo tanto, existe un conjunto numerable $N \subset I$ tal que $\{U_n\}_{n \in N} \subset \{U_i\}_{i \in I}$ y

$$A \subset \bigcup_{m \in M} \hat{B}_m \subset \bigcup_{n \in N} U_n.$$

$\square$

En un grupo polaco (G, τ) todo $U \in \tau$ no vacío es σ-sindético. Para ver esto, supóngase, sin pérdida de generalidad, que $1_G \in U$ (en caso contrario, si $h \in U$, $h^{-1}U$ es abierto y contiene a 1_G). Es evidente que

$$G = \bigcup_{g \in G} gU.$$

$(gU)_{g \in G}$ es una cubierta abierta de G. Como G es polaco, es segundo numerable. Por el Teorema 3.1.5, existe entonces una colección numerable de conjuntos abiertos en G. Por lo tanto, existe así una sucesión $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\bigcup_{g \in G} gU = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n U.$$

Definición 3.1.6. *Sea (G, τ) un grupo polaco. Se dice que G es de Steinhaus si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto simétrico σ-sindético A que contiene a 1_G se cumple*

$$1_G \in Int(A^k).$$

En cuanto al dominio, también existe una condición que asegura la continuidad de los morfismos de grupos si el dominio es de Steinhaus.

Teorema 3.1.7. *Sea G un grupo polaco de Steinhaus y H un grupo polaco. Todo morfismo $\phi : G \to H$ es continuo.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ el exponente de Steinhaus de G. Sea V un conjunto abierto que contiene a 1_H. Por continuidad de las operaciones de H y la Proposición 2.1.3 (parte 3.), existe un conjunto abierto simétrico W que contiene a 1_H tal que $W^{2k} \subseteq V$. Como W es abierto, es σ-sindético. Sea (h_n) una sucesión en H tal que la sucesión de abiertos $(h_n W)_{n\mathbb{N}}$ cubre a H. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_n W \cap \phi(G) \neq \emptyset$ se elige g_n tal que $\phi(g_n) \in h_n W$. Esto implica que $h_n \in \phi(g_n)W^{-1}$. Por la simetría de W, $h_n W \subseteq \phi(g_n)W^2$. Luego

$$\phi(G) \subseteq H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n W \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi(g_n)W^2.$$

Por la elección de la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en G,

$$G \subseteq \phi^{-1}(\phi(G)) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n \phi^{-1}(W^2),$$

lo que exhibe que $\phi^{-1}(W^2) \subseteq G$ es σ-sindético. Como G es de Steinhaus,

$$1_G \in Int(\phi^{-1}(W^{2k})) \subseteq \phi^{-1}(W^{2k}) \subseteq \phi^{-1}(V),$$

que prueba la continuidad de ϕ. □

3.2. Categoría

Teorema 3.2.1. *(Banach-Pettis) Sea G un grupo polaco, $A, B \subseteq G$ subconjuntos y $U(A)$, $U(B)$ los cuasiinteriores (ver Definición 1.2.11), respectivamente, de A y B. Entonces: $U(A)U(B) \subseteq AB$.*

Demostración. Sea $x \in U(A)U(B)$. Entonces $x = ab$ con $(a, b) \in U(A) \times U(B)$ y $a = xb^{-1} \in U(A) \cap xU(B)^{-1}$. Por la Proposición 2.1.3, 1,

$$U(A) \cap xU(B)^{-1} = U(A) \cap U(xB^{-1})$$

es abierto y no vacío. De hecho, es un abierto en el que $A \cap xB^{-1}$ es comagro. Es decir, existe una sucesión de conjuntos abiertos y densos en $U(A) \cap U(xB^{-1})$ cuya intersección está contenida en $A \cap xB^{-1}$. Como G es un espacio de Baire y $U(A) \cap U(xB^{-1})$ es abierto, es un espacio de Baire. Así, la intersección citada es no vacía, lo que exhibe que $A \cap xB^{-1}$ es no vacío. Existe entonces $z = xb^{-1} \in A$ con $b \in B$ y $x = zb \in AB$, que es lo que se quería. $\square$

Hay que observar que la única propiedad relevante en la demostración del Teorema 3.2.1 es que G es un espacio de Baire, así que la hipótesis de que G es polaco está sobrada.

Corolario 3.2.2. *Si $A \subseteq G$ tiene la propiedad de Baire y no es magro en un grupo topológico (G, τ), entonces AA^{-1} contiene una vecindad de 1_G.*

Demostración. Nótese que si $A \subseteq X$ no es magro, si existe $V \in \tau$ tal que $(A - V) \cup (V - A)$ es magro en X, V no es vacío. Más aún, como

$$V - A \subset (A - V) \cup (V - A),$$

$V - A$ es magro y $U(A)$ no es vacío. Como $U(A^{-1}) = U(A)^{-1}$, claramente, $1_G \in U(A)U(A^{-1})$. Por el Teorema 3.2.1, $U(A)U(A^{-1})$ es un conjunto abierto contenido en AA^{-1} que contiene a 1_G. $\square$

A continuación un lema que funge de puente para el resultado fundamental sobre los morfismos Baire-medibles.

Lema 3.2.3. *Sean (G, τ) (H, τ') grupos polacos y $\phi : G \to H$ un morfismo de grupos. La imagen inversa bajo ϕ de cada $U \in \tau'$ es un conjunto no magro en G o es vacío.*

Demostración. Supóngase que existe $U \in \tau'$ tal que $\phi^{-1}(U)$ es no vacío y magro en G. Se sabe que

$$G = \bigcup_{g \in G} g\phi^{-1}(U).$$

Luego, $\phi(G) \subseteq \bigcup_{g \in G} \phi(g)U$. H es polaco, y cada $\phi(g)U$ es abierto en H. Todo espacio polaco es segundo numerable y, por ende, por el Teorema 3.1.5, existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ tal que

$$\phi(G) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi(g_n)U.$$

Luego al tomar a ambos miembros de la igualdad la imagen inversa bajo ϕ y emplear propiedades básicas de ϕ^{-1},

$$G = \phi^{-1}\phi(G) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n\phi^{-1}(U).$$

Esto exhibe que G es magro, pero, dado que G es polaco, esto es un absurdo. $\square$

Ahora es pertinente introducir el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.4. *Si $\phi : G \to H$ es un homomorfismo Baire-medible entre grupos polacos (G, τ) y (H, τ'), entonces es continuo.*

Demostración. Sea U_H una vecindad arbitraria de 1_H. Como las operaciones de inversión y del producto en H son continuas, existe una vecindad V de 1_H tal que $VV^{-1} \subseteq U$. Por el Lema 3.2.3, $\phi^{-1}(V)$ no es magro en G. Como $\phi^{-1}(V)$ tiene la propiedad de Baire, $U(\phi^{-1}(V)) \neq \emptyset$. Se tiene entonces:

$$1_G \in U(\phi^{-1}(V))U(\phi^{-1}(V))^{-1} = U(\phi^{-1}(V))U(\phi^{-1}(V)^{-1}).$$

Por el Lema 3.2.1,

$$1_G \in U(\phi^{-1}(V))U(\phi^{-1}(V)^{-1}) \subseteq \phi^{-1}(V)\phi^{-1}(V)^{-1}$$

Y

$$1_G \in \phi^{-1}(V)\phi^{-1}(V)^{-1} = \phi^{-1}(VV^{-1}) \subseteq \phi^{1}(U),$$

por lo que $\phi^{-1}(U)$ es una vecindad de 1_G y ϕ es continuo.

$\square$

Corolario 3.2.5. *Todo morfismo Borel-medible entre grupos polacos es continuo.*

Demostración. Hay que recordar que un morfismo $\pi : G \to H$ es *Borel-medible* si para cualquier abierto $U \subseteq H$, $\pi^{-1}(U)$ es un boreliano de G. Por la Proposición 1.2.10, todo morfismo Borel-medible es Baire-medible, así que el Teorema 3.2.4 implica lo que buscábamos. $\square$

En el caso particular donde se trabaja con isomorfismos Baire-medibles de grupos, puede asegurarse que son homeomorfismos por una aplicación simple de una propiedad importante de la teoría descriptiva. Aquí se enuncia simplemente. En [11] se encuentra una demostración prolija del resultado.

Teorema 3.2.6. *Sean (G, τ), (H, τ') grupos polacos. Una aplicación $\phi : G \to H$ es Borel-medible si, y sólo si, su gráfica es un boreliano en $G \times H$*

Proposición 3.2.7. *Sean (G, τ), (H, τ') grupos polacos y $\phi : G \to H$ un isomorfismo Baire-medible. ϕ es entonces un homeomorfismo.*

Demostración. Por el resultado de continuidad automática ya demostrado, el Teorema 3.2.4, ϕ es continuo. Considérese

$$\Gamma = \{(x, y) \in G \times H \mid y = \phi(x)\}.$$

Sea $(a, b) \in \overline{\Gamma}$. Supóngase que $b \neq \phi(a)$. Como H es de Hausdorff, existen $U, V \in \tau'$ disjuntos tales que $b \in U$, $\phi(a) \in V$. Como ϕ es continuo, existe una vecindad $O \in \tau$ de a tal que $\phi(O) \subseteq V$. $O \times U$ es abierto en $G \times H$ y contiene a (a, b), así que debe existir $(x, y) \in \Gamma \cap O \times U$. Es decir, $\phi(x) = y \in V \cap U$, una contradicción. Por ende $b = \phi(a)$, $(a, b) \in \Gamma$ y la gráfica de ϕ es cerrada. Es inmediato que también la gráfica de ϕ^{-1} es cerrada, así que ϕ^{-1} es Borel-medible por el Teorema 3.2.6 y por ende continua. ϕ es entonces un homeomorfismo. $\square$

Diversos trabajos publicados en la segunda mitad del siglo XX permiten establecer que el hecho de que los morfismos entre grupos polacos sean continuos es consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel (para más detalle, revísese, por ejemplo, [1]). Por ende, siempre que se quiera exhibir un morfismo discontinuo entre grupos polacos es necesario recurrir al axioma de elección de algún modo.

Por ejemplo, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ son grupos polacos no homeomorfos. Sin embargo, como espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$ tienen la misma dimensión y son algebraicamente isomorfos. De aquí se concluye que ningún isomorfismo definido entre $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ es un homeomorfismo y, por ende, algún morfismo de grupos entre $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ es discontinuo. Para más detalle, véase el Ejemplo 3.4.3.

3.3. Caso de la Medida

Se tienen registros relativamente recientes de que el fenónemo de continuidad automática fue objeto de interés entre la comunidad matemática: a principios del siglo pasado, una vez que las bases de la concepción moderna de la teoría de la medida estaban más o menos cimentadas, diversas personalidades científicas se entregaron a averiguar condiciones adicionales bajo las que era posible asegurar la continuidad en las aplicaciones que satisfacían la ecuación funcional de Cauchy. La primera aportación de gran revelancia corrió a cargo del matemático francés Maurice Fréchet, quien publicó en 1915 su aserción de que toda solución Lebesge-medible de la ecuación de Cauchy resulta ser continua. Cinco años más tarde, en 1920, se publicaron tres relevantes artículos bajo las autorías de Stefan Banach, Wacław Sierpiński y Hugo Steinhaus respectivamente, siendo este último el de mayor trascendencia (ver [16]). Dichas publicaciones se dedicaron a indagar los detalles de la propiedad antementada expuesta por Fréchet. Una observación pertinente es que las hipótesis que requiere el Corolario 3.3.8 no se dan de forma tan sencilla, ya que, en general, no se tiene información suficiente para asegurar que el grupo polaco en el contradominio sea localmente compacto. Un aspecto demostrado por Weil indica que un grupo polaco que admite una medida de Borel σ-finita, cuasiinvariante y no nula, necesariamente es localmente compacto. De esta manera, para asegurar que el contradominio es localmente compacto, basta investigar la compatibilidad de éste con una medida que reúna las características citadas.

Por fines de taquigrafía, si un grupo topológico (G, τ) es T_2 (de Haussdorf), localmente compacto y segundo numerable, será llamado *HLCSN* a lo largo de este trabajo.

Si (G, τ) es un grupo topológico segundo numerable, es también primero numerable. En particular 1_G tiene una base numerable de vecindades. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.1, todo grupo HLCSN es metrizable.

Definición 3.3.1. *Sea X un conjunto y Σ una σ-álgebra sobre X. Una función μ en Σ hacia los reales extendidos, es decir, $[-\infty, \infty]$ es llamada medida si*

- $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \Sigma$,
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- *Si* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos en* Σ,

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Esta propiedad es llamada σ-aditividad.

A la terna (X, Σ, μ) se le llama **espacio de medida**.

Definición 3.3.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico Hausdorff y* μ *una medida definida en* $\mathcal{B}(X)$*. Se dice que* μ *es regular si:*

(i) $\mu(K) < \infty$ *para todo* $K \subseteq X$ *compacto,*

(ii) para todo $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) = inf\{\mu(U) \mid E \subseteq U,\ U \in \tau\};$$

(iii) para todo $U \in \tau$,

$$\mu(U) = sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U,\ K \subseteq X,\ compacto\}.$$

A la condición (ii) se le llama regularidad exterior y a (iii) regularidad interior.

Definición 3.3.3. *Sean* (G, τ) *un grupo topológico Hausdorff y localmente compacto. Una medida* μ *definida en* $\mathcal{B}(G)$ *es llamada invariante por la izquierda o izquierda-invariante si para todo* $g \in G$ *y todo* $B \in \mathcal{B}(G)$ *se cumple*

$$\mu(gB) = \mu(B).$$

Se define la medida invariante por la derecha de forma análoga.

Teorema 3.3.4. *(Haar) Sea* (G, τ) *un grupo topológico Hausdorff y localmente compacto. Existe una medida* μ *definida en* $\mathcal{B}(G)$*, única salvo el producto por una constante positiva, que es regular e invariante por la izquierda.*

A la medida obtenida a través del Teorema 3.3.4 se le llama **medida de Haar izquierda** o, simplemente, **medida Haar-izquierda**.

Es posible construir una medida Haar-izquierda en un grupo HLCSN. De hecho, existen medidas de Haar por la izquierda y por la derecha en todo grupo HLCSN. La prueba de este hecho es robustamente desarrollada en [8].

Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Una medida μ definida en $\mathcal{B}(X)$ es llamada **medida de probabilidad de Borel** si $\mu(X) = 1$.

Definición 3.3.5. *Sea* (X, τ) *un espacio polaco. Un subconjunto* $A \subseteq X$ *es universalmente medible si para toda medida de probabilidad de Borel* μ *definida en* $\mathcal{B}(X)$ *existe* $B_\mu \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\mu(B_\mu \triangle A) = 0$.

Definición 3.3.6. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios polacos. Una aplicación $\pi : X \to Y$ es universalmente medible si para cada $V \in \tau'$, $\pi^{-1}(V)$ es universalmente medible en X.*

Teorema 3.3.7. *(Steinhaus-Weil) Sea G un grupo topológico polaco y localmente compacto y λ una medida Haar-izquierda definida en la σ-álgebra de Borel de G. Para todo $A \subseteq G$ λ-medible con medida positiva se tiene que AA^{-1} es una vecindad de 1_G.*

Demostración. Debido a que la medida de Haar es regular exterior e interiormente, es posible hallar un subconjunto compacto $K \subseteq G$ y uno abierto $U \subseteq G$ con $K \subseteq A \subseteq U$ y tales que $\lambda(U) < 2\lambda(K)$. Además, sea $V \subseteq G$ abierto que contiene a 1_G tal que $VK \subseteq U$. Obsérvese además que para todo $g \in V$, $gK \subseteq U$ y $\lambda(K) = \lambda(gK)$, así que para cada $g \in V$ $gK \cap K \neq \emptyset$: de lo contrario, existiría $g' \in V$ tal que $g'K \cup K \subseteq U$ y

$$\lambda(g'K \cup K) = \lambda(g'K) + \lambda(K) = \lambda(K) + \lambda(K) \leq \lambda(U)$$

y $2\lambda(K) \leq \lambda(U)$, una contradicción. Entonces se sigue que $V \subseteq KK^{-1}$ y $1_G \in V \subseteq AA^{-1}$, como se quería. □

Corolario 3.3.8. *Si $\pi \colon G \to H$ es un morfismo universalmente medible entre grupos polacos (G, τ), (H, τ') y G es localmente compacto, entonces es continuo.*

Demostración. Por la hipótesis de la compacidad local de G, existe una medida Haar-izquierda μ no nula en G. Sea $V \in \tau$ que contiene a $1_H \in V$. Basta probar que $\pi^{-1}(V)$ es una vecindad de 1_G. Por la continuidad de las operaciones inversión y producto, puede hallarse $W \in \tau'$ tal que $WW^{-1} \subseteq V$.

Como H es polaco y W es abierto, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\phi(G)$ tal que

$$\phi(G) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n W.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un único $g_n \in G$ tal que $\phi(g_n) = x_n$. Se tiene entonces

$$G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n \phi^{-1}(W).$$

Como $\mu(G) > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(g_n\phi^{-1}(W)) > 0$. Por la invarianza por la izquierda de μ, $\mu(\phi^{-1}(W)) > 0$. Por el Teorema 3.3.7,

$$\phi^{-1}(W)(\phi^{-1}(W))^{-1} = \phi^{-1}(WW^{-1}) \subseteq \phi^{-1}(V)$$

es una vecindad de 1_G. □

Se presenta a continuación una versión modificada por André Weil de un destacado resultado incluido en el trabajo de Steinhaus.

El Teorema 3.3.7 también nos permite concluir un resultado de continuidad dependiente de la numerabilidad topológica del contradominio.

Definición 3.3.9. *Sean (X,τ) un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, (Y,τ') un espacio topológico y μ una medida Haar-izquierda de X. A la aplicación $f : X \to Y$ se le llama Haar-medible si para todo $V \in \tau'$, $f^{-1}(V)$ es μ-medible.*

Teorema 3.3.10. *Sean (G,τ) un grupo localmente compacto, (H,ν) un grupo topológico segundo numerable y ϕ un morfismo de grupos Haar-medible. Entonces $\phi : G \to H$ es continuo.*

Demostración. Sea $V \in \nu$ que contiene a 1_H. Como H es segundo-numerable, $\phi(G)$ es de Lindelöf. Para todo $h \in \phi(G)$, $h(V \cap \phi(G))$ es abierto en $\phi(G)$. Existe pues una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\phi(G)$ tal que $\phi(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n(V \cap \phi(G))$, ya que $\phi(G) = \bigcup_{h\in\phi(G)} h(V \cap \phi(G))$. Para cada $h_n \in \phi(G)$ se elige $g_n \in G$ tal que $\phi(g_n) = h_n$. De aquí se deduce que

$$G \subseteq \phi^{-1}(\bigcup_{h\in H} h(V \cap \phi(G))) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n\phi^{-1}(V)$$

Esto exhibe que $\phi^{-1}(V)$ no tiene medida cero. Por el Teorema 3.3.7,

$$\phi^{-1}(V)(\phi^{-1}(V))^{-1} \subseteq \phi^{-1}(VV^{-1})$$

es una vecindad de 1_G. En resumen: si $W \in \nu$ contiene a 1_H, por la continuidad de las operaciones del grupo, existe $V \in \nu$, vecindad de 1_H tal que $VV^{-1} \subseteq W$. Por lo demostrado anteriormente, $\phi^{-1}(V)$ es una vecindad de 1_G y se prueba la continuidad de ϕ. □

3.4. Discontinuidades

Uno de los objetivos para estudiar la continuidad de estas soluciones es, naturalmente, la existencia de morfismos discontinuos y ejemplos de situaciones patológicas cuando los grupos polacos son de determinada naturaleza. Como se hace evidente y dicta la tendencia en matemáticas, el preguntarse qué ocurriría si se trabajase con un grupo polaco arbitrario resulta inminente. El matemático Jens Peter Reus Christensen impulsó destacadamente la solución de esta cuestión.

Inicialmente, se presenta el ejemplo de un funcional discontinuo definido en un espacio de Banach separable de dimensión infinita sobre un campo K. Antes, revisemos algunos conceptos importantes.

Definición 3.4.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Decimos que $B \subset K$ es una* ***base de Hamel*** *si B es linealmente independiente (es decir, si todo subconjunto finito de B es linealmente independiente en el sentido usual) y para todo $x \in V$ existen dos confuntos finitos $F_x = \{x_1, ..., x_n\} \subset B$ y $G_x = \{c_1, ..., c_n\} \subset K$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = x.$$

Por el Lema de Zorn, todo espacio vectorial tiene al menos una base de Hamel. En particular, todo espacio de Banach tiene una base de Hamel. Una aplicación del Teorema de la Categoría de Baire permite probar que en un espacio de Banach de dimensión infinita toda base de Hamel es infinita no numerable.

Ejemplo 3.4.2. *Sea X un espacio de Banach sobre K separable de dimensión infinita. Considérese el espacio topológico asociado (X, τ) donde la topología es inducida por la norma. Éste es un espacio polaco.*

Elíjase $\{x_i\}_{i\in I}$ una base de Hamel densa de X [1]. Considérese un índice arbitrario pero fijo $i_0 \in I$. Para cada $x \in X$, sea $I_x \subset I$ un conjunto finito (ver Definición 3.4.1) tal que

$$\sum_{i\in I_x} a_i x_i,$$

[1] El hecho de que todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene una base de Hamel densa está prolíficamente demostrado en [2]

con $a_i \in K$ *para todo* $i \in I_x$.

Defínase $\phi : X \to \mathbb{R}$ *como*

$$\phi(\sum_{i \in I_x} a_i x_i) = a_{i_0}.$$

Como la descomposición de cada $x \in X$ *como combinación lineal de* $\{x_i\}_{i\in I}$ *es única (definición de base de un espacio vectorial),* ϕ *está bien definida.*

Debido a que $\{x_i\}_{i\in I}$ *es denso, existe una sucesión de elementos de* $\{x_i\}_{i\in I} - \{x_{i_0}\}$ *que converge a* x_{i_0}. *Es decir, existe una sucesión* $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $j_n \in I - \{i_0\}$ *de tal manera que* $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x_{i_0}. *Se afirma que* ϕ *no es continuo en* x_{i_0}. *En efecto, pues para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\phi(x_{j_n}) = 0$. *Y, sin embargo,* $\phi(x_{i_0}) = 1$ *Es decir, la sucesión* $\{\phi(x_{j_n})\}$ *es constante y converge a cero; sin embargo,*

$$1 = \phi(x_{i_0}) \neq \lim_{n\to\infty} \phi(x_{j_n}) = 0.$$

Se muestra ahora un ejemplo que exhibe la similitud algebraica entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.4.3. *Nótese que* $\mathbb{R}$*, con el campo de los racionales, es un espacio vectorial de dimensión infinita. Esto puede observarse de la existencia de los números trascendentes.*[2] *Recuérdese que los números trascendentes son aquellos que no son solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales. Un ejemplo de un número trascendente es* π*, resultado recurrentemente demostrado en diversos textos de teoría de números. Concretamente, elíjase cualquier número natural* n *y sea*

$$S = \{1, \pi, \pi^2, ...\pi^n\}.$$

Obsérvese que S *es linealmente independiente en* $\mathbb{Q}$*, ya que de no serlo existirían*

$$a_0, a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{Q},$$

no todos cero, tales que

$$a_0 + a_1\pi + ... + a_n\pi^n = 0.$$

[2]Es común encontrar el término *número trascendental* en la literatura en castellano; sin embargo, preferimos aquí utilizar la palabra *trascendente* en alusión a lo que trasciende, lo que está más allá. En este caso, los números trascendentes están más allá del alcance de los números racionales y de las raíces de polinomios racionales.

Cosa que es imposible, ya que π es trascendente. Así, es posible hallar para cada $n \in \mathbf{N}$ un conjunto de cardinalidad $n+1$ linearmente independiente en $\mathbb{Q}$ y se sigue que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión infinita. Adicionalmente y de forma análoga, $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión infinita. De hecho, la dimensión correspondiente es infinita no numerable: aunque $\mathbb{Q}$ es infinito numerable, $\mathbb{R}$ es infinito no numerable. De lo anterior puede observarse que $(\mathbb{R}^2, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$ son isomorfos. Sean A y B bases para $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Se tiene que

$$|A| = |B| = 2^{\omega},$$

donde $B = B_1 \times B_2$, donde B_1, B_2 son bases de $\mathbb{R}$. Defínase la función $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada para los elementos de la base e_λ mediante $\phi(e_\lambda) = (e_i(\lambda)_1, e_i(\lambda)_2)$, donde $i\colon A \to B_1 \times B_2$ es una función biyectiva (se sabe que existe debido a que el dominio y el contradominio son equipotentes). Obsérvese que puede extenderse por linealidad la función definida $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ para los vectores de la base debido a que éstos representan de forma única los elementos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ a través de combinaciones lineales. Esto exhibe que la función es en realidad una transformación lineal; además, es fácilmente verificable que la función es biyectiva y que es, por lo tanto, un isomorfismo. Por otro lado, debido a un simple argumento que compara la preservación de la conexidad de los espacios topológicos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, se sigue que éstos no son homeomorfos (recuérdese que la conexidad es una propiedad topológica y compruébese que al remover en cada espacio cualquier elemento uno conserva la conexidad y el otro no). De tal manera que entre estos espacios existe una estrecha relación algebraica; sin embargo, desde el punto de vista topológico, son entidades distintas. Es por esto que ningún morfismo de grupos definido entre estos dos espacios es un homeomorfismo.

Antes de continuar con los siguientes ejemplos, se define un concepto recurrente en el estudio de las topologías desde el punto de vista del análisis matemático. La siguiente definición se desarrolla en un ambiente en particular, a saber, en los conjuntos parcialmente ordenados (COPO). De manera intuitiva, se entiende *filtro* como un sunconjunto de un COPO cuyos elementos son aquellos lo *suficientemente grandes* para cumplir una condición establecida. Por ejemplo, si x es un elemento en la recta real, la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que incluyen a x en su interior es un caso de filtro de $\mathbb{R}$ conocido como *el filtro de vecindades en x* y a la colección de conjuntos que contienen a x es llamado *filtro principal.* De manera general, un filtro principal es aquel que tiene un elemento mínimo.

Parece oportuno enunciar, primero de manera coloquial, las características que distinguen a un filtro. Primero, como puede ya insinuarse de la descripción anterior, un filtro nunca ha de manifestarse en un conjunto sin elementos. Segundo, si existen dos conjuntos cuyos elementos cumplen la propiedad establecida, el conjunto intersección de ellos también deberá estar formado por elementos de la naturaleza deseada. Finalmente, si un conjunto está compuesto de elementos que satisfacen la propiedad, todo conjunto que lo contiene también deberá cumplirla en cada uno de sus elementos. Se le conoce como *ultrafiltro* a un conjunto que satisface la definición anterior y tiene naturaleza maximal. Es decir, aquel que satisface la cualidad de que no exista algún otro filtro que lo contenga propiamente.

Para introducir el siguiente ejemplo, se trabaja con la definición de ultrafiltros dada en [4], a saber aquel que se define sobre el conjunto potencia.

Definición 3.4.4. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialemente ordenado. Una colección de subconjuntos, F, de P es un ultrafiltro si*

I.- *F no contiene al conjunto vacío.*

II.- *Si $A, B \subseteq P$, $A \subseteq B$ y $A \in F$, entonces $B \in F$,*

III.- *Si $A, B \in F$, $A \cap B \in F$,*

IV.- *Si $A \subseteq P$, entonces A o $P - A$ está en F.*

Nótese que I y III implican que IV es una disyunción estricta.

Como ya mencionamos, un ultrafiltro principal tiene un elemento mínimo respecto del orden impuesto por la contención de conjuntos. De aquí puede probarse que en todo ultrafiltro principal hay un elemento unitario.

Para empezar, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro principal de X, necesariamente $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$. Si $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$ no es un conjunto unitario, existen dos conjuntos ajenos no vacíos V, W tales que $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \in \mathcal{F} = V \cup W$. Como $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$ es elemento mínimo en $\mathcal{F}$, $V, W \notin \mathcal{F}$. Por ende, $X - V \in \mathcal{F}$ y

$$(\bigcap_{A\in F} A) \cap (X - V) = W \in F,$$

una contradicción.

Recuérdese que el grupo de permutaciones definidas en todo $\mathbb{N}$ (sin limitarse necesariamente a un subconjunto finito) es denotado mediante S_∞. Considérese a S_∞ con la topología generada por la subbase compuesta por conjuntos de la siguiente forma.

$$B_{n,m} = \{g \in S_\infty \mid g(n) = m\},$$

para cada par $n, m \in \mathbb{N}$.

Es decir, puede verse este espacio precisamente como un subespacio de $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, el espacio de Baire. En otras palabras, se considera el espacio resultante de efectuar el producto numerable de $\mathbb{N}$ dotado con la topología discreta. Para verificar que así S_∞ resulta un grupo polaco, basta comprobar que es un subconjunto G_δ de $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ (ver Teorema 1.1.4). Véase a continuación este hecho: Sean

$$I = \{(x_n) \mid (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, inyectiva\}$$

y

$$S = \{(x_n) \mid (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, suprayectiva\}.$$

De la misma definición, $S_\infty = I \cap S$. Basta exhibir que los intersecandos $I \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ son subconjuntos G_δ. Obsérvese que $x \in S$ si, y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = x(m)$. De aquí se desprende que

$$S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{m-1} \times \{n\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}-m}.$$

Dada la topología considerada (el espacio de Baire), es inmediato que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos de la forma

$$\mathbb{N}^{m-1} \times \{n\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}-m}$$

son abiertos y S es G_δ. Por el otro lado, $x \in I$ si, y sólo si, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, si $n \neq m$, entonces $x(n) \neq x(m)$.

Definimos para $n, m \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$A_{n,m} = \{f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \mid f(n) = f(m)\}.$$

Éstos son cerrados en el espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Luego, es fácil ver que

$$I = \bigcap_{n<m} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A_{n,m}).$$

Esto prueba que tanto I como S son G_δ, como se quería. S_∞ admite así la topología polaca. Para verificar que S_∞ es un grupo topológico, basta con comprobar que la métrica $d(x, y) = 2^{-n}$ es compatible, donde $n = \text{ínf}\{m \mid x(m) \neq y(m)\}$. La bola centrada en x y de radio 2^{-n} se define como

$$B(x, 2^{-n}) = \{y \mid \forall i \leq n \; x(i) = y(i)\}.$$

De modo que S_∞ es un grupo polaco.

Proposición 3.4.5. *Si (G, τ) es un grupo polaco con un subgrupo no abierto $H \subseteq G$ con índice*[3] *numerable, entonces existe un morfismo π definido en G que es discontinuo.*

Demostración. Defínase $\pi : G \to \mathcal{S}_{G/H}$ como la acción en G hacia G/H vía traslación izquierda. Es decir, para todo $g \in G$, $\pi(g) = gH$. Si resulta que el índice de H en G es finito, se considera el espacio topológico $(\mathcal{S}_{G/H}, \mathcal{P}(\mathcal{S}_{G/H}))$. Nótese que en este caso el conjunto

$$\phi = \{\sigma \in \mathcal{S}_{G/H} \mid \sigma(1H) = H\} \subseteq \mathcal{S}_{G/H}$$

es abierto y $\pi^{-1}(\phi) = H$, que no es abierto. Por tanto, π es discontinuo. En el caso en el que H tiene índice infinito se concluye de forma similar, pues en este caso $\mathcal{S}_{G/H}$ es isomorfo a S_∞ (ya se exhibió que este es polaco), el conjunto ϕ es abierto y de la misma manera $\pi^{-1}(\phi) = H$ no es abierto. $\square$

Ejemplo 3.4.6. *Función canónica suprayectiva discontinua $\pi : F^{\mathbb{N}} \to F^{\mathbb{N}}/H$. Supóngase que F es un grupo finito no trivial. Sea U un ultrafiltro no principal $U \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Después, defínase un subconjunto $H \subseteq F^{\mathbb{N}}$ como sigue:*

$$H = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid f_n = 1\} \in U\}$$

[3] Si G es un grupo y $H \subseteq G$ es un subgrupo, el *índice* de H en G es el número de clases laterales de H en G.

No es difícil ver que H es un subgrupo del hecho de que U es ultrafiltro. Se afirma que el índice de H es $|F|$. Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$, existe $f \in F$ tal que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid g_n = f\} \in U.$$

En caso contrario, para todo $f \in F$, por la Definición 3.4.4, parte IV,

$$A_f = \{n \in \mathbb{N} \mid g_n \neq f\} \in U.$$

Nótese que $\bigcap_{f\in F} A_f = \emptyset$. Por la Definición 3.4.4, III, $\bigcap_{f\in F} A_f \in U$, pero esto contradice la parte I de esta misma definición. Se concluye entonces que el índice de H es $|F|$.

Como U no es principal, H es denso en $F^{\mathbb{N}}$ y H no es cerrado, ya que es un subconjunto propio. Por el Teorema 2.3.1, tampoco es abierto. Como F es finito y tiene la topología discreta, es un espacio polaco. Por ende, $F^{\mathbb{N}}$ es polaco. La Proposición 3.4.5 nos permite concluir la existencia de un morfismo discontinuo definido en $F^{\mathbb{N}}$.

Conclusión

Infortunadamente, los alcances de este trabajo se limitan a mostrar someramente la teoría de continuidad automática en grupos polacos. Sin embargo, hay una amplia variedad de conceptos que, por motivos de tiempo, tuvimos que dejar atrás.

Por ejemplo, hemos dejado de lado el concepto de *genericidad amplia*[4], que es una fuerte propiedad topológica en grupos que asegura la continuidad automática. De hecho, en [16] está demostrado que todo grupo genérico amplio es de Steinhaus (ver la Definición 3.1.6) con exponente 10. Algunos subgrupos cerrados de $\mathcal{S}_\infty$ son genéricos amplios; sin embargo, Kechris y Rosendal demostraron en [10] la existencia de un grupo genérico que no es subgrupo de $\mathcal{S}_\infty$. A partir de aquí, la variedad de grupos con esta propiedad crece radicalmente. Por ejemplo, si G es un grupo polaco con genericidad amplia y $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mu, G)$ es el grupo de funciones $f : G \to G$ μ-medibles y se equipa con la topología de convergencia de medida, $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mu, G)$ es un grupo genérico amplio (consúltese [9]). Por ende, todo morfismo entre $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mu, G)$ y otro grupo polaco es continuo. Esto ofrece posibilidades para estudiar, por ejemplo, los funcionales lineales definidos en este espacio.

A. Kaïchouh estudia en [9] la cuestión de si G tiene la propiedad de continuidad automática, el producto topológico $G^{\mathbb{N}}$ también la tiene.

Estos son tan sólo ejemplos sobre las posibilidades de estudio de este extenso fenómeno. Redirigimos al lector interesado en el tema a las fuentes incluidas en esta tesis. Cabe hacer notar que es aún un área fértil y de oportunidad para elaborar más trabajos prolíficos de investigación.

[4]en término anglosajón es *ample generics*

Bibliografía

[1] G. R. Allan, 1980, *A Remark in Automatic Continuity Theory*, Bulletin of the London Mathematical Society, vol.12, 452-454

[2] T. Bartoszynski, M. Dzamonja, L. Halbeisen, Eva Murtinová and A. Plichko, 2005, *On bases in Banach spaces*, Studia Mathematica, vol.170, 147-171.

[3] S. K. Berberien, 1974, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer Verlag

[4] W. W. Comfort, 1977, *Ultrafilters: some old and some new results*, Bulletin of the American Mathematical Society 83 (4): 417-455

[5] H.G. Dales, 2000, *Banach Algebras and Automatic Coninuity*, Larendon Press

[6] R. Engelking, 1989, *General Topology*, Hieldermann Verlag Berlin

[7] S. Gao, 2009, *Invariant Descriptive Set Theory*, CRC Press

[8] G. Hjorth, 2010. *Measure Theory*, UCLA, `https://www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2010-measure/MT-Notes.pdf`

[9] A., Kaïchouh, 2020 *Variation on Automatic Continuity*, `http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/kaichouh/Variations`

[10] A. S. Kechris; C. Rosendal, 2007, *Turbulence, amalgamation, and Generic Automorphisms of Homogeneous Structures*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 94 (2007), no. 2, 302–350.

[11] A. S. Kechris, 1995, *Classical Descriptive Set Theory.*, Springer Verlag

[12] J. L. Kelley, 2017, *General Topology*, Dover Publication

[13] S. Kesavan, 2009, *Functional Analysis*, Hindustian Book Agency (India)

[14] F. Le Maître, 2010, *Automatic Continuity of Some Group Homomorphisms*,`http://math.univ-lyon1.fr/~melleray/rapport-LeMaitre.pdf`

[15] J. Melleray. *Polish groups and Baire category methods*, Logic [math.LO], Université Lyon 1, 2014, `http://math.univ-lyon1.fr/~melleray/HDR-article.pdf`

[16] C. Rosendal, 2009, *Automatic Continuity of Group Homomorphisms* The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 15, no. 2, pp. 184–214