UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

LA RESPUESTA DEL TRIVIALISMO PLATÓNICO AL DILEMA DE BENACERRAF

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA (FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA)

PRESENTA:
CHRISTIAN OLIVA RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN FILOSOFÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA , CD. MX. ENERO DE 2022

Índice

Contenido

Agradecimientos

En primer lugar, mi más sincero agradecimiento al Dr. Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez. Sin su paciencia, tolerancia y sus atinados comentarios, esta investigación no se habría podido llevar a cabo. Gracias Cristian por escucharme, orientarme y aclarar mis dudas. Te agradezco por aceptar dirigir esta investigación. En todo momento fuiste amable e incondicional al compartir tus vastos conocimientos, al hacer críticas puntuales y constructivas para la investigación. Te agradezco por el tiempo, la dedicación, la amistad y tu gran calidad humana. Mi más sincero agradecimiento.

Mi agradecimiento a mis queridos padres: María Cristina Ramírez y Crisóforo Oliva. Además, a cada uno de mis hermanos: Oscar, Ariel, Edgar y Esmeralda, por el apoyo incondicional que a diario me brindan. A mis cuñadas Ana Aguilar, Elvira Alemán, Maritza López y a mis sobrinos Ricardo, Ethan, Sean, Evan, Mariel y Alan que siempre mantendrán la alegría en la casa.

A Diana Ordaz, por todo su cariño y comprensión, por su apoyo constante e incondicional. Y por creer en mí.

A Axel Barceló Aspeitia, Alejandro Vázquez del Mercado, María del Rosario Martínez Ordaz, Max Fernández de Castro. Estoy profundamente agradecido por las observaciones y recomendaciones que, sin duda, ayudaron a mejorar esta investigación.

Agradezco a los profesores del Instituto de Investigaciones Filosóficas que siguen siendo parte de mi formación académica y que me permiten valorar, profundizar e involucrarme en aquellos tópicos filosóficos que antes pasaban desapercibidos para mí. En especial para: Mayte Muñoz, Nydia Lara, Sergio Martínez, Elías Okon, Enrique Segoviano, Luís Estrada, Ricardo Vázquez, Atocha Aliseda, Alfonso Arroyo, Edna Suárez, Vivette García, Raymundo Morado, Carlos Álvarez y Francisco Quiroz.

A mis profesores de la UACM, Jesús Jasso, Patricia Díaz, David Gaytán, Alicia Pazos, Inés Pazos, Leonel Toledo, Gabriela Guevara, Alberto Fonseca. Agradezco su apoyo incondicional que en todo momento me han brindado.

A Yenifef López, Sandra Sánchez, Daniel M. Olivera, Ricardo Nicolas, Karina García, Dzahy Islas, Cesar Altamirano, Juan Antonio Díaz, Claudia Tanús, Andrea Guerrero, Arturo Núñez, Erick López, Carolina Leschevich, Juan Guzmán, Waldemar Ruíz, Santiago Chanatasig, Emanuel González, Gonzalo Zurita, Cristina Siqueiros, Andrés Moreno, Balam Martínez, Abril Serratos, Cesar Rivera, Adriana Armendarez, Alejandra Viesca, Aldo Palafox, Gabriel Martínez, Cesar Campuzano, Eleonora González, Carlos González, Gilberto Navarro. Agradezco enormemente el cariño y la gran amistad que me han ofrecido a lo largo de estos años.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me brindó durante los dos años de estudios de Maestría.

Que el blanco sea blanco
Que el negro sea negro
Que uno y uno sean dos
Como exactos son los números
Depende.

Dones, Pau. Depende, 1998

Introducción

A lo largo de mi formación académica, una de mis inquietudes recurrentes ha sido el problema filosófico de explicar cómo es posible el conocimiento matemático. La tarea anterior es bastante complicada dado que, si consideramos que los objetos matemáticos son abstractos y causalmente inertes, entonces no es del todo claro cómo podemos justificar que tenemos conocimiento matemático.

Benacerraf, en su célebre artículo *Mathematical Truth* de 1973, marcó la segunda mitad del siglo XX con un reto intelectual a resolver por parte los teóricos de la ciencia y, particularmente, por los filósofos de las matemáticas. El reto consiste en un dilema bastante difícil de solucionar.

Son dos las preocupaciones que incitan a Benacerraf a exigir una explicación sobre la verdad matemática.

a. Establecer una teoría semántica homogénea entre las proposiciones del lenguaje natural y las proposiciones del lenguaje matemático.

b. Establecer una explicación acerca de la verdad matemática que se compagine con una epistemología adecuada que dé cuenta de cómo obtenemos el conocimiento matemático.

De esta manera, una teoría que explique la verdad matemática será adecuada únicamente si cumple con una semántica homogénea y una epistemología adecuada, tal como lo señalan los puntos a. y b. De acuerdo con Benacerraf, son dos las explicaciones existentes de la verdad matemática que dan cuenta de cómo obtienen su verdad las proposiciones matemáticas:

c. La explicación estándar de la verdad es una explicación semántica: esto es, la verdad dependía directamente de los objetos a los que se hacía referencia en la oración y a sus propiedades. Si los términos que componen a una oración tienen referencia empírica, entonces se considera que podemos hablar con legítima verdad sobre ellos.

d. La explicación combinatoria de la verdad: es una explicación en donde la verdad de las proposiciones matemáticas se daba en términos de una prueba formal expresada únicamente por medios deductivos axiomáticos, sobre la base de hechos sintácticos.

Siguiendo a Benacerraf, una buena epistemología de las matemáticas debería explicar, a la vez, las verdades de las proposiciones matemáticas y no matemáticas bajo una misma teoría de la verdad. Sin embargo, lo anterior no parece ser posible dada la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos. Si optamos por una explicación de la verdad matemática combinatoria, será imposible tener una teoría semántica homogénea entre las proposiciones del lenguaje natural y las proposiciones del lenguaje matemático. Ya que, las condiciones de verdad en nuestro lenguaje natural se encuentran establecidas por cuestiones semánticas de tipo estándar como la referencia a los objetos físicos. Entretanto, los enunciados matemáticos (aritméticos) se basan en hechos sintácticos. Por otra parte, si se admite una explicación de tipo estándar será complicado ofrecer una epistemología adecuada que explique cómo es que obtenemos conocimiento matemático. Así, las dos explicaciones de la verdad matemática serán inapropiadas, ya que la explicación existente recae en el tipo c. o d. entorpeciendo las condiciones a. y b. respectivamente[1].

Dar respuesta al dilema no ha sido una tarea fácil. De hecho, mucha gente ha trabajado sobre tal dilema[2] aunque las respuestas que se han ofrecido no han sido del todo satisfactorias. Esto es debido a que no es sencillo ofrecer una respuesta concluyente a la pregunta: *¿cómo justificar que tenemos conocimiento matemático si es abstracto y causalmente inerte?*

---

1 Esto lo desarrollamos con mayor detalle en el Capítulo I de esta investigación.

2 Quine, 1953, sostiene que, dado que creemos que las teorías matemáticas son verdaderas y que las teorías empíricas tienen implicaciones matemáticas, debemos de aceptar las verdades matemáticas. Lo anterior presupone que el compromiso ontológico de la existencia de los objetos matemáticos está presente, pues, de acuerdo con Quine, es necesario comprometerse con las existencia de las entidades abstractas en tanto que son indispensables para el desarrollo de nuestras mejores teorías científicas. Esto es, estamos lo suficientemente justificados para afirmar que los objetos matemáticos son verdaderos y están epistémicamente justificados en virtud que son indispensables para el desarrollo de nuestras mejores teorías científicas. (Quine, 1953).

De acuerdo con P. Maddy, 1992, el argumento de indispensabilidad que ofrece Quine, no es suficiente para garantizar la existencia de los objetos abstractos (objetos matemáticos), pues del hecho que algún concepto abstracto ocupe un lugar en una teoría, no significa que éste, de hecho, exista realmente. No es muy claro como legitimar los entes abstractos a partir de la estipulación de los elementos teóricos de otras disciplinas. Maddy identifica a los objetos abstractos como producto de nuestra percepción espacio temporal. Ella dice que tenemos algo parecido a un detector neuronal, y que a partir de este detector se forman nuestras creencias por medio del repetido encuentro con los objetos físicos. Si lo anterior es correcto, se cumplen las condiciones que la teoría causal del conocimiento exige como medio para obtener justificadamente conocimiento. Sin embargo, si es el caso que por medio de un detector neuronal podamos obtener conocimiento de los objetos matemáticos no queda claro, ¿cómo podríamos dar cuenta desde su postura de la objetividad y la universalidad de las matemáticas? Pues si cada sujeto cognoscente tiene un detector neuronal, y en tanto que es posible pensar que éste puede variar de individuo a individuo, ¿cómo podríamos explicar que una misma persona con un mismo detector neuronal pueda llegar a entender dos teorías de diferente manera? Además, no es claro ¿cómo se justifica la facultad de la percepción de objetos matemáticos al parejo de la percepción de los objetos físicos?

Shapiro, 2000, considera la objetividad de los objetos matemáticos, pero sin comprometerse con la existencia de estos. Los números naturales, reales, racionales, etc., son solamente estructuras que estudian las matemáticas. En el caso del estructuralismo llamado Ante Rem, sostiene que las estructuras matemáticas existen y son independientes de la mente humana; es decir, que en este tipo de estructuralismo se compromete con un realismo ontológico, por tal motivo, este tipo de estructuralismo también debe de explicar ¿cómo tenemos acceso a los objetos matemáticos?

Esta investigación deriva de mi trabajo terminal de licenciatura, en el cual me quedó claro que el proyecto logicista de Frege consistía en demostrar que la matemática se puede fundamentar en la lógica: es decir, que los enunciados matemáticos eran reducibles a la misma. El *logicismo* fregeano sostiene que las oraciones de la aritmética son enunciados analíticos *a priori.* Esto se debe a que los enunciados de la lógica son semánticamente analíticos y *a priori*, de manera epistemológica, al probarse exclusivamente mediante definiciones y reglas lógicas. Si los enunciados matemáticos son reducibles (en el sentido anterior) a enunciados lógicos, entonces, por transitividad, los enunciados matemáticos serán analíticos y su justificación será *a priori.* De tal forma que los enunciados de la aritmética son verdaderos en virtud de su significado y no requieren de verificación empírica para constatar su verdad.

Sin embargo, si consideramos al conocimiento matemático como abstracto y causalmente inerte, ¿cómo sabemos que las verdades matemáticas son verdaderas?, ¿cómo justificamos el aumento de nuestro conocimiento matemático?

Dado lo anterior, me parece importante explicar en qué sentido desde el *trivialismo platónico* que propone Agustín Rayo (2015)[3] encontramos una respuesta plausible al dilema planteado por Benacerraf. Al mismo tiempo, me parece importante explicar cuáles son algunas de las ventajas y desventajas que implica su respuesta a dicho dilema. Adicionalmente, explicaré en qué consiste el logro cognitivo en las matemáticas y cuál es la ventaja de fragmentar los logros cognitivos de acuerdo con el trivialismo platónico[4].

Así, los objetivos principales que guían este trabajo de investigación tienen por finalidad explicar cuatro cosas: (i) Explicar en qué consiste el dilema de Benacerraf (ii) La respuesta que ofrece Rayo al dilema planteado por Benacerraf, (iii) Algunas ventajas y desventajas de la respuesta del trivialismo platónico a tal dilema y, (iv) Explicar si el logro cognitivo del que habla Rayo es suficiente para dar cuenta del conocimiento matemático. Para lograr mi objetivo, recurriré a la propuesta de Pritchard (2013), la cual utilizaré para mostrar que los problemas de la postura de Rayo (2015) puede fortalecerse (o clarificarse) si se hacen explícitos algunos otros

[3] Filósofo Mexicoestadounidense, (1973). Egresado de la Facultad de Filosofía y Letras FFyL de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Actualmente es profesor en el Massachusetts Institute of Technology (MIT).

[4] Rayo sostiene que las verdades matemáticas son triviales (son verdaderas sin importar cómo sea el mundo, tienen condiciones de verdad triviales), pero considera que sí existe conocimiento matemático.

requerimientos para que el logro cognitivo nos lleve al conocimiento matemático.
La estrategia conceptual que seguimos para obtener los resultados esperados es la siguiente:

1.- Ofrecer una explicación del dilema planteado por Benacerraf.

2.- Explicar, de manera general, en qué consiste la epistemología de las matemáticas que propone Rayo (2015).

3.- Identificar y explicar cómo es que Rayo (2015) da cuenta del dilema planteado por Benacerraf.

4.- Explicar algunas ventajas y desventajas de la respuesta del trivialismo platónico a tal dilema.

5.- Finalmente, explicar cómo se da el logro cognitivo de acuerdo con Rayo (2015) y Pritchard (2013) al comparar ambas explicaciones.

La investigación se divide en cuatro capítulos. Estos capítulos son consistentes y limitados con el orden señalado en mi estrategia conceptual. En el Capítulo I, *"El dilema de Benacerraf",* explicaré algunos de los antecedentes que llevaron a Benacerraf a plantear su dilema. Luego explicaré en qué consiste dicho dilema de acuerdo con el texto *Mathematical Truth* de 1973.

En el Capítulo II, "*El trivialismo platónico de Rayo",* explicaré en qué consisten los enunciados de identidad de acuerdo con Rayo (2015), sesiones 1. ¿Qué es el espacio de posibilidades y en qué sentido lo construimos? y 2. ¿Qué tipo de correspondencia existe entre nuestro lenguaje y la realidad que representa?

En el Capítulo III, "*Respuesta de Rayo al dilema planteado por Benacerraf",* explicaré en qué consiste la respuesta que se ofrece a dicho dilema de acuerdo con Rayo (2015), sesiones 2. ¿Qué tipo de correspondencia existe entre nuestro lenguaje y la realidad que representa? y 4. Una semántica trivialista para el lenguaje de la aritmética.

Finalmente, en el Capítulo IV, "*El nuevo reto del trivialismo platónico",* explicaré por qué, de acuerdo con el trivialismo platónico, el nuevo reto en filosofía de las matemáticas ha cambiado. También explicaré en qué consiste el logro cognitivo en las matemáticas y porque es conveniente fragmentar nuestros logros cognitivos de acuerdo con Rayo (2015), sesión 5. ¿Cómo modelar logros cognitivos que no dividan el espacio de posibilidades? Después, explicaré en qué consiste el logro cognitivo de acuerdo con Pritchard (2013). Esclareceré, mediante ejemplos, cuál es la diferencia entre comprensión, logro cognitivo y conocimiento de las causas relevantes.

Posteriormente, utilizaré ambas explicaciones del logro cognitivo que ofrecen ambos filósofos con el fin de mostrar que el logro cognitivo que propone Rayo (2015) podría dar cuenta al análisis del trabajo de Pritchard (2013), si se hacen explícitos algunos otros requerimientos que nos lleven al conocimiento matemático.

No revisaré toda la propuesta de Rayo, sino que únicamente expondré aquellos pasajes medulares que permiten explicar los objetivos que guían a esta investigación.

Considero este trabajo como un contenido introductorio a la epistemología de las matemáticas que propone Rayo. Pretendo que este trabajo contribuya a una mejor comprensión de la respuesta que ofrece la propuesta del trivialismo platónico al dilema planteado por Benacerraf. De esta manera, el lector interesado en este tema puede tomar esta investigación como un punto de partida claro, sencillo y riguroso. De este modo, puede servir como una lectura inicial para comprender el dilema de Benacerraf, comprender en general la epistemología de las matemáticas de Rayo y, particularmente, comprender algunas de las ventajas y desventajas de la respuesta a dicho dilema.

Por último, incluyo una sección de consideraciones finales y una de bibliografía. En las conclusiones, recapitularé de manera breve y concisa los puntos más significativos realizados a lo largo de este trabajo de investigación. Adicionalmente, ofreceré una conjetura que bien podría encaminar a una posible investigación posterior como seguimiento a este trabajo de investigación.

Capítulo I

El dilema de Benacerraf

Capítulo I: El dilema de Benacerraf

1.1 Introducción al capítulo I

La filosofía de las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX no puede entenderse sin contemplar la divulgación del escrito de Benacerraf *Mathematical Truth* de 1973. En este escrito, Benacerraf señala algunos de los problemas a los que se enfrentan las explicaciones que se ofrecen acerca de la verdad y la justificación del conocimiento matemático. Benacerraf demanda un análisis adecuado para explicar la naturaleza de las verdades matemáticas. De acuerdo con él, tal análisis debe contemplar, por lo menos, dos aspectos fundamentales:

(i) Debe ofrecer una teoría de la verdad matemática que descanse en una semántica que sea análoga a la semántica del lenguaje natural (no se quiere tener una teoría de la verdad matemática que sea *ad hoc*) y,

(ii) Debe explicar ¿cómo es posible el conocimiento matemático dado que los objetos matemáticos son abstractos[5] y causalmente inertes?

Esto, en principio, no parece ser problemático puesto que hay un consenso amplio sobre que las oraciones de las teorías matemáticas son verdaderas y que, de hecho, tenemos conocimiento matemático. Además, no parece que los matemáticos tengan algún tipo de facultad especial que les permita tener acceso al conocimiento matemático, una facultad que no tengan el resto de los individuos. Sin embargo, nuestra epistemología parece requerir algún tipo de acceso causal a los objetos sobre los que versan las teorías matemáticas, pero esto no parece posible dada la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos. Así que, de acuerdo con Benacerraf, tenemos que elegir entre cumplir (i) o cumplir (ii). Justo a esto se le ha denominado el dilema de Benacerraf: si damos cuenta de (i), no es claro cómo podemos explicar (ii); o si se da cuenta de (ii), no es claro cómo podemos explicar (i). Barceló dice:

> […] por un lado, el hecho de que las matemáticas no parecen tratar sobre objetos y hechos

[5] Al parecer una de las características que tienen los objetos matemáticos es que son abstractos. Esta característica se debe a que se acepta comúnmente que los objetos matemáticos son independientes de nosotros y de nuestras prácticas (aunque esto puede ser puesto en duda). Además, se espera que sus propiedades no sean afectadas por aspectos contingentes del mundo (en algún sentido los objetos matemáticos y sus propiedades son necesarias). Esto parece impedir que dichos objetos sean objetos físicos o concretos que sean susceptibles de ser afectados por el cambio presente en el mundo físico. Sin embargo, no es nada sencillo explicar a qué nos referimos exactamente cuando decimos que los objetos matemáticos son "abstractos" y, particularmente, cómo se diferencian exactamente de los objetos "concretos". Decir que un objeto es abstracto, en parte, es la idea de que no tenemos ningún contacto físico con éstos, es decir, no podemos verlos, escucharlos, palparlos, olerlos o saborearlos, en pocas palabras, no podemos interactuar físicamente con ellos tal como si lo hacemos con los objetos físicos.

> concretos; dicho de otro modo, que los objetos como números, grupos algebraicos o los espacios topológicos no parecen ser objetos concretos y que las propiedades que nos interesan de ellos parecen ser propiedades *objetivas* que tienen con independencia de nosotros, de nuestros deseos o convenciones y, por el otro, la fuerte intuición de que los matemáticos no tienen ningún tipo de capacidad epistémica extraordinaria sino que, cuando hacen matemática, trabajan con lo mismo que tenemos todos los seres humanos: la experiencia de objetos y situaciones concretas y particulares en el mundo. En otras palabras, el problema es explicar cómo es posible que, con sólo cálculos en lápiz y papel, con la mera observación de hechos contingentes, concretos y particulares, podemos obtener un conocimiento matemático supuestamente necesario abstracto y universal. (Barceló, 2019, pp. 49-50).

Así, en este capítulo abordaré la siguiente pregunta, ¿cuáles fueron algunas de las motivaciones y propósitos que impulsaron a Benacerraf a plantear su dilema?

La importancia de responder a tal cuestionamiento consiste en examinar a detalle las condiciones que Benacerraf instaura en su texto *Mathematical Truth,* con la finalidad de sentar las bases para presentar la postura de Rayo (2015) en los siguientes capítulos y la respuesta que él ofrece a dicho dilema.

Para hacerlo procedemos en cinco pasos. Primero, identificamos y explicamos algunas distinciones entre una teoría clásica del conocimiento y una teoría causal del conocimiento de acuerdo con Hurtado (1996), Gettier (1963) y Goldman, (1967). Segundo, explicamos de acuerdo con Benacerraf (1973), cuáles son las posturas teóricas sobre la verdad matemática que se han considerado, a saber, combinatoria y estándar. Tercero, explicamos cuál es la teoría de la verdad que satisfacía las condiciones que demanda Benacerraf, es decir, la teoría de la verdad de Tarski. Cuarto, explicamos la diferencia entre verdad y justificación de acuerdo con Benacerraf (1973). Quinto, explicamos en qué consiste el dilema de Benacerraf. Finalmente, en la Sec. 1.4, esbozo algunas conclusiones.

1.2 Algunos antecedentes al dilema planteado por Benacerraf

Para comprender el dilema de Benacerraf, es prudente comenzar con la enunciación de dos tesis que parecen ser aceptadas por la mayoría de los individuos de manera intuitiva las cuales pareciera ser que la mayoría de los matemáticos las aceptarían sin mayor problema. Dichas ideas son:

- **[Verdad matemática]**: Existen oraciones matemáticas verdaderas (necesariamente verdaderas), típicamente aquellas aceptadas por los matemáticos profesionales.

- **[Conocimiento matemático]**: Conocemos al menos algunas de las verdades de las matemáticas.

Cada una de estas ideas nos aportan motivaciones para desarrollar una teoría de la verdad matemática pues, una vez que las aceptamos, surgen algunas preguntas de naturaleza filosófica como ¿cuáles son las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas?, ¿cómo es posible que dichas oraciones (al menos algunas de ellas) sean verdaderas?, ¿cómo puede un ser humano tener conocimiento matemático?, ¿los seres humanos tenemos acceso a aquello que hace verdaderas a dichas oraciones?

Benacerraf en su texto de 1973 trata de responder a estas preguntas. De acuerdo con él, las motivaciones principales para desarrollar una teoría de la verdad matemática son:

> (1) La preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje, y (2) la preocupación por que la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable. (Benacerraf, 1973, p. 403)[6].

La primera motivación pretende dar cuenta de [Verdad matemática] pues tal parece que, si aceptamos dicha tesis, como filósofos nos comprometemos a explicar bajo qué condiciones las oraciones de la matemática serían verdaderas. Además, parece que tenemos la fuerte intuición de que el lenguaje que usamos para hablar de matemáticas es, en parte, el lenguaje natural (tal vez enriquecido con un poco de aparato lógico) y, por ello mismo, pretendemos que la explicación semántica de las oraciones matemáticas sea muy similar a la explicación semántica del resto de las oraciones sin importar el contenido. Después de todo, parece que usamos el mismo lenguaje.

La segunda motivación pretende dar cuenta de [Conocimiento matemático]. Al aceptar que tenemos conocimiento sobre algunas de las verdades de las matemáticas, como filósofos adquirimos el compromiso de explicar cómo es que los seres humanos pueden tener acceso a dicho conocimiento. Esto se dificulta si aceptamos la teoría del conocimiento tradicional pues, entre sus requisitos, está que aquello que conocemos sea verdadero y que estemos justificados en creer dicha verdad. Así, la segunda motivación para desarrollar una teoría de la verdad matemática impone ciertos requisitos, el más importante de ellos es que aquello que hace verdaderas a las oraciones

6 (1) the concern for having a homogeneous semantical theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantics for the rest of the language, and (2) the concern that the account of mathematical truth mesh with a reasonable epistemology. (Benacerraf, 1973, p. 403).

matemáticas que conocemos sea de tal naturaleza que sea compatible con el tipo de justificaciones que usamos al adjudicarnos conocimiento sobre dichas oraciones.

De acuerdo con Benacerraf, a pesar de que aceptemos tanto [Verdad matemática] como [Conocimiento matemático] no podemos desarrollar una teoría de la verdad que satisfaga al mismo tiempo los requisitos impuestos por las motivaciones (1) y (2) arriba expuestas. Justo el dilema se puede plantear de la siguiente manera: una teoría de la verdad matemática tiene que elegir entre cumplir los requisitos impuestos por (1) o los requisitos impuestos por (2), pero no ambos. De tal suerte que o no se da cuenta de [Verdad matemática] o no se da cuenta de [Conocimiento matemático]. Para comprender esto a detalle hay que explicar con un poco más de profundidad los requisitos impuestos por Benacerraf, tanto a la semántica como a la epistemología.

1.2.1 Teoría clásica del conocimiento

Benacerraf considera que una buena teoría del conocimiento debe explicar la verdad de las proposiciones matemáticas, así como las condiciones requeridas para su justificación. Una teoría del conocimiento que sólo explique el conocimiento empírico y el conocimiento teórico por separado resulta deficiente por su incapacidad de poder mostrar la relación entre las diferentes áreas de nuestro conocimiento empírico y teórico. Por ejemplo, "la silla que está a lado de la ventana es negra" es verdadera porque existe el término al cual me refiero, es decir, "la silla" que tiene la propiedad de ser negra. Por eso, se dice que el enunciado es verdadero: porque hay algo que tiene la propiedad que se está predicando acerca del término con el cual me estoy refiriendo al objeto. Este mismo esquema también tiene que aplicar para los enunciados de la aritmética porque así es como son verdaderos los enunciados. Los enunciados de la aritmética son como, por ejemplo: "el 1 no es un número primo". ¿Cuándo es verdadero el enunciado "el 1 no es un número primo"? Bajo esta misma explicación "el 1 no es un número primo" será una oración verdadera si y solo si es el caso que exista un objeto que es al que me estoy refiriendo con "el 1" y tal objeto tiene la propiedad de "no ser un número primo".

No puede ser que se diga que las verdades de los enunciados aritméticos son verdaderas por otra explicación diferente. Si lo anterior fuera el caso, quería decir que existen dos tipos de verdad. Una verdad sobre el mundo, la que se hace verdadera por las propiedades que predicamos acerca de los objetos y, la segunda verdad la de las matemáticas. Lo anterior es un resultado nada deseable, ya que no se cree que la verdad sea algo así, pues tendríamos dos tipos de verdad, una verdad no matemática y una verdad matemática. En este sentido, una teoría de la verdad matemática no debería estar apartada de una teoría de la verdad en el lenguaje natural.

La teoría tradicional del conocimiento se basa en la llamada definición tripartita de conocimiento.

> *S* sabe que *p* si y sólo si:
> 1) *p* es verdadera
> 2) *S* cree que *p*
> 3) *S* está completamente justificado en creer que *p*. (Hurtado, 1996, p. 131).

Luego, podemos llamar "conocimiento" si se cumplen con las tres condiciones anteriores: una creencia verdadera y justificada. El problema del esquema anterior es que no evita por completo el caso de la suerte epistémica, esto posiblemente se deba a que la noción de justificación no es del todo precisa. De tal forma que será posible que se cumplan las tres condiciones, pero la creencia no se basa en razones suficientes. Veamos un ejemplo parecido al que ofrece Gettier[7] en contra de la definición clásica de conocimiento como creencia verdadera y justificada.

Supongamos que María tiene un reloj colgado en la cocina de su casa y que, forzosamente, lo consulta a diario por las mañanas. Ella sale a trabajar de lunes a viernes a las siete de la mañana y regresa a las siete de la tarde a su casa, a excepción de los viernes que suele llegar un poco más tarde de lo habitual. El jueves, el reloj de María se quedó sin batería justo a las siete de la noche, exactamente cuándo María llegó de trabajar. Ella revisó el reloj y marcaba las 7 de la noche. (María ya no volvió a revisar el reloj de su cocina hasta el día siguiente). El viernes por la mañana, cuando María salió a trabajar, observó que el reloj (casualmente) marcaba las siete de la mañana. Así que ella creyó "Son justo las siete de la mañana". Por la tarde del viernes María llegó más tarde de lo habitual a su casa y observó que su reloj marcaba las siete de la noche. Por un momento ella pensó "Son justo las siete de la noche". Pero un instante después, recordó que ese día había salido a las ocho de la noche de su trabajo. Acto seguido, María revisó el reloj de su cocina y se dio cuenta que la batería de su reloj ya no funcionaba.

A pesar de que el reloj de María se había detenido a las siete de la noche del jueves, María estaba justificada en creer que su reloj aún marcaba correctamente la hora. El reloj había sido confiable hasta ese momento y la lectura que hizo por la mañana del viernes coincidía con la lectura

---

7 La creencia entendida como creencia verdadera y justificada arroja resultados indeseables. Existen casos en donde se cumplen dichos criterios y no por ello se le considera casos genuinos de conocimiento. Véase (Gettier, 1963).

habitual. Sin embargo, tal justificación no se basó en razones adecuadas, pues en realidad la batería de su reloj había dejado de funcionar, y sólo fue suerte epistémica que coincidiera la hora en que María salía de su casa al trabajo el viernes por la mañana. Es claro que el viernes por la noche María no sabe realmente que "Son justo las 7 de la tarde", pues es falso y su justificación es inadecuada. Lo mismo se puede decir sobre su creencia de la mañana del viernes "Son justo las 7 de la mañana" pues, si bien la creencia era verdadera, sólo era un caso de suerte epistémica.

Si se tienen resultados no deseables como el anterior, tal parece que la mejor estrategia será reforzar o clarificar la noción de justificación que aparece en la definición tripartita de conocimiento. Una de las primeras propuestas que sigue la línea de pensamiento anterior es la ofrecida por Goldman en su texto de (1967)[8]. Él considera que para que sea el caso que "*S* sabe que *p",* es necesario agregar una cuarta condición, una condición que elimine los casos de suerte epistémica presente en los contraejemplos tipo Gettier. De acuerdo con Goldman, es necesario que exista una relación causal entre aquello que hace verdadera a la oración y aquello que genera nuestra creencia. De tal suerte que, la nueva definición de conocimiento sería la siguiente:

> *S* sabe que *p* si y sólo si:
> 1) *p* es verdadera,
> 2) *S* cree que *p,*
> 3) S está completamente justificado en creer que p, y
> **4)** "se requiere que haya una conexión causal entre p y la creencia de S." (Goldman, 1967, p. 364)[9].

La condición que propuso Goldman para evitar en la medida de lo posible los problemas planteados por Gettier consistía en que, para estar seguros de que "*S* sabe que *p",* debería de existir una relación en términos materiales por la cual el sujeto cognoscente pudiera advertir la presencia del objeto a conocer. Es decir, para que la creencia de *S* de que *p* estuviera totalmente justificada, necesitaba haber una relación causal entre aquello que genera la creencia de *S* con las condiciones que hacen verdadera a *p* en términos estrictamente empíricos. Esta manera particular de entender el conocimiento parecía funcionar bien respecto del conocimiento empírico (por la relación causal en términos materiales), pero no funcionaba o no era claro cómo podría funcionar o ser aplicada al conocimiento teórico, por ejemplo, al conocimiento matemático. Esto es debido a que,

8 Goldman, A.I. A Causal Theory of Knowing. The Journal of Philosophy 1967. 64, 12: pp. 357-372.

9 [...] requires that there be a *causa*l connection between p and S's belief [...]. (Goldman, 1967, p. 364).

comúnmente, consideramos que los objetos matemáticos son abstractos y causalmente inertes. Recordemos lo dicho por Benacerraf:

> Sostengo que dos tipos de preocupaciones muy distintas tienen explicaciones motivadas por separado de la naturaleza de la verdad matemática: (1) la preocupación por tener una teoría semántica homogénea en la que la semántica para las proposiciones de las matemáticas es paralela a la semántica para el resto del lenguaje y (2) la preocupación de que la explicación de la verdad matemática se mezcle con una epistemología razonable. Será mi tesis general que casi todas las explicaciones del concepto de verdad matemática pueden identificarse con servir una u otra de ellas *a expensas de las demás*. Ya que creo que ambas preocupaciones deben ser resueltas por alguna explicación adecuada […]. (Benacerraf, 1973, p. 403)[10].

Una teoría del conocimiento que únicamente explique el conocimiento empírico, y no el conocimiento teórico por separado, resulta deficiente pues no logra evidenciar el vínculo entre las áreas empíricas y no empíricas que conforman nuestro conocimiento. De acuerdo con Benacerraf, una teoría del conocimiento debería poder apoyarse en una teoría de la verdad que permitiera explicar dos cosas: **a.** la verdad de nuestras proposiciones matemáticas y no matemáticas (aspecto semántico), y **b.** la justificación de su conocimiento (aspecto epistémico). Esto es, que **a** y **b** juntas pudieran ser de aplicación general para todas las disciplinas.

La teoría causal del conocimiento propuesta por Goldman, a pesar de sumar una cuarta condición a la teoría tripartita de conocimiento, no lograba sortear eficazmente los contraejemplos del tipo Gettier: esto es, no lograba evitar los casos de suerte epistémica. Veamos un ejemplo.

Supongamos que el profesor X deja su automóvil en el estacionamiento de la escuela donde imparte clases. El profesor X ha pensado últimamente que debe cambiar las llantas de su automóvil pues la marca que usa actualmente ha mostrado tener mucho deterioro en poco tiempo, pero no está muy seguro. El profesor X tiene una carga de trabajo de seis horas seguidas de clases por lo que recurrentemente regresa a su automóvil seis horas después de haberlo estacionado. Una hora después de que el profesor X estaciona su automóvil en el estacionamiento de la misma escuela, el profesor Z (un profesor poco estimado) cambia las 4 llantas al carro del profesor X. Las llantas del profesor Z tienen las mismas características que las llantas del profesor X (son de la misma

---

10 It is my contention that two quite distinct kinds of concerns have separately motivated accounts of the nature of mathematical truth: (1) the concern for having a homogeneous semantic theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantics for the rest of the language, and (2) the concern that the account of mathematical truth mesh with a reasonable epistemology. It will be my general thesis that almost all accounts of the concept of mathematical truth can be identified with serving one or another of these *at the expense of the others.* Since I believe further that both concerns must be met by any adequate account […]. (Benacerraf, 1973, p. 403).

marca y medida), sólo que las llantas del profesor Z están muy desgastadas. Cuando llega el profesor X a su automóvil lo inspecciona minuciosamente, lo pone en marcha y se dirige a su nuevo destino; en el transcurso, se le poncha una llanta por lo que se dirige al negocio de compra y venta de llantas para solucionar el problema. Después de la revisión de las cuatro llantas, le recomiendan al profesor X cambiar las cuatro llantas de su automóvil porque están muy desgastadas. Una de las conclusiones a las que llega el profesor X es que lo más probable es que la marca de las llantas que trae su vehículo es de muy baja calidad, por lo que concluye que tendrá que cambiar de marca de llantas.

Expongamos el asunto:

1. El profesor X tiene la creencia verdadera de que las llantas de la marca que usa su carro son de muy mala calidad (se desgastan muy rápido).

2. El profesor X está justificado en creer que las llantas de su automóvil se desgastan rápido, dado el incidente de la ponchadura y el hecho de que él no sabe que sus llantas fueron cambiadas.

3. Sin embargo, la justificación del profesor X es inadecuada, pues él tiene la creencia (no verdadera) que las llantas de su automóvil son las mismas que traía su automóvil por la mañana. Pero, lo cierto es que a pesar de que el profesor X realizó una inspección física de su automóvil, las llantas no eran las mismas, pues las llantas en realidad eran las del profesor Z.

4. A pesar de ello, el hecho que hace verdadero que "las llantas de la marca usada son de mala calidad" si está en relación causal con la creencia del profesor X. Por lo que sería un caso de conocimiento de acuerdo con las condiciones impuestas por la teoría causal del conocimiento.

La teoría de Goldman ha sido fuertemente criticada desde que fue propuesta y son pocos los defensores que tiene en la actualidad. Algunos otros problemas de dicha teoría son:

> Por atractivo que sea este punto de vista, plantea varias dificultades. La primera es la dificultad en suponer que los hechos causen algo; son demasiado inertes como para afectar la manera en que funciona el mundo, incluso si el mundo es el mundo meramente mental de las creencias. Después de todo, ¿qué son los hechos? Una primera idea es que los hechos no son similares, sino idénticos, a las proposiciones verdaderas (lo que explicaría por qué no hay hechos falsos). Pero ¿pueden las proposiciones verdaderas causar algo? Ciertamente, los hechos (o las proposiciones verdaderas) parecen reflejar el mundo más que actuar sobre él. Los análisis más corrientes de la causación parecen estar en lo cierto al no permitir que sean causas más que los sucesos y, posiblemente, los agentes. En segundo lugar, hay un problema sobre el conocimiento del futuro; la sugerencia de Goldman parece implicar que

> nos encontramos en este punto con un caso de causación hacia atrás (backward causation) —el futuro causando el pasado— o que el conocimiento del futuro es imposible, ya que las causas no pueden ser posteriores a sus efectos. En tercer lugar, está el problema del conocimiento universal o, en líneas más generales, del conocimiento por inferencia. Mi creencia de que todos los hombres son mortales está causada, pero no por el hecho de que todos los hombres sean mortales; si hay hechos que causen tal creencia, son los hechos de que este hombre, ese hombre, etc., han muerto. Y lo que ha causado que esos hombres mueran no es el hecho de que todos los hombres mueran (lo que reivindicaría de nuevo al análisis causal, con una causa intermedia); más bien sucede que todos los hombres mueren porque esos hombres concretos (junto con otros muchos) lo hacen. ¿Cómo podría mostrar el análisis causal que yo sé que todos los hombres mueren? (Dancy, 1993, pp. 50-51).

Si bien, la Teoría causal del conocimiento ya no es muy aceptada, esto no quiere decir que el dilema haya sido resuelto. Esto se debe a que la tensión entre la semántica tarskiana y una teoría del conocimiento se mantendrá siempre y cuando la teoría del conocimiento no ofrezca una explicación de cómo es que tenemos acceso a los hechos y a los objetos matemáticos que hacen verdaderas a las oraciones de la matemática. Además, tenemos razones para seguir aceptando la semántica de Tarski pues, de otra forma, no parece que podamos explicar los fenómenos inferenciales presentes en la práctica matemática. En palabras de Raúl Orayen:

> [...] sino postulamos objetos aritméticos [...] no podemos interpretar de la misma manera referencial corriente los enunciados de la aritmética ordinaria. Podemos, de todos modos, seguir simbolizándolos de la manera lógica usual. Pero, si no desarrollamos una semántica exitosa diferente de las usuales, no tendremos *ninguna* explicación de por qué las técnicas lógicas pueden reconstruir adecuadamente las inferencias aceptadas por los matemáticos [...]. (Orayen, 1991, pp. 131-132).

Por tal motivo, sigue en pie la demanda de ofrecer una explicación clara entre nuestras creencias matemáticas y lo que hace verdaderas a las mismas. Tal explicación debe dar cuenta de la justificación de las verdades de las oraciones matemáticas de tal suerte que dicha explicación evite los casos de suerte epistémica (por lo menos a un nivel razonable) y, además, sea compatible con nuestra noción de verdad matemática.

1.2.2 Teoría de la verdad

De acuerdo con Benacerraf, son dos las posturas teóricas sobre la verdad matemática que deben ser consideradas, a saber:

(i) combinatoria y,

(ii) estándar.

En el caso de **i (teoría combinatoria de la verdad),** tiene su desarrollo más significativo a partir de la filosofía formalista de David Hilbert. El proyecto formalista de Hilbert consistía básicamente en cuatro puntos: 1) Formalización de las matemáticas: el establecer un lenguaje formal definiendo claramente sus reglas de tal suerte que puedan ser estudiadas por la matemática (finitaria o discreta) misma; 2) Compleción: poder derivar, mediante pasos finitos y verificables, matemáticamente las verdades matemáticas a partir de axiomas; 3) Consistencia: verificar que el sistema o teoría matemática generada a partir de los puntos 1 y 2 sea consistente, es decir, que no exista contradicción al interior del sistema formal; 4) Decidibilidad: esto es, encontrar un método efectivo para determinar si una fórmula dada es o no un teorema del sistema. De esta manera, el proyecto de Hilbert pretendía conseguir seguridad y fiabilidad de las teorías matemáticas y sus oraciones verdaderas.

> Hilbert, denominó esta empresa *teoría de la demostración*. Su principal objetivo era probar, con métodos finitistas, la consistencia de la matemática clásica.

Además, dice inmediatamente a pie de página:

> *Grosso modo*, la matemática finitista es la matemática de la evidencia sensible, en la que solo se consideran propiedades y relaciones entre objetos de la experiencia sensible (signos y combinaciones finitas de signos), y solo se toman en consideración métodos combinatorios. (Torres, 2009, p. 38).

De acuerdo con Hilbert, si a partir de ciertos axiomas dados se pueden derivar lógicamente teoremas matemáticos, entonces las matemáticas estarían libres de errores ya que las pruebas que proporciona el formalismo son rigurosas y no permiten que existan huecos en la misma prueba deductiva. Esto es posible porque los axiomas de la teoría son verdaderos y la deducción lógica preserva verdad. Así, se consideraba que una proposición matemática era verdadera si podía ser derivada por medio de pasos correctos por un método recursivo a partir de los axiomas. Dado lo anterior, parecía que el proyecto formalista de Hilbert había logrado mostrar consistentemente los fundamentos de las matemáticas pues la verdad de las proposiciones matemáticas se daba en términos de una prueba formal expresada únicamente por medios deductivos axiomáticos.

El caso **ii. (teoría estándar de la verdad)** se centra en las propiedades que se les atribuyen a los objetos (típicamente objetos empíricos). En este caso, a diferencia de **i.** la verdad dependía directamente de los objetos a los que se hacía referencia en la oración y a sus propiedades. Si los términos que componen a una oración tienen referencia empírica, se considera que podemos hablar con legítima verdad sobre ellos. Ahora bien, en el caso de las oraciones matemáticas, las cosas deben funcionar de manera similar: la verdad de estas oraciones debe depender de los objetos matemáticos a los que se alude en la oración y a sus propiedades.

> [En] esta explicación (Tarski) asimila la forma lógica de las proposiciones matemáticas a la de las empíricas, aparentemente similares: tanto las proposiciones matemáticas como las empíricas contienen predicados, términos singulares, cuantificadores, etc. (Benacerraf, 1973, p. 410)[11].

Desde la teoría estándar de la verdad, el análisis de las proposiciones matemáticas se centraba en los objetos y las propiedades que cada uno de éstos poseía. La teoría de la verdad estándar aplicada a oraciones que hablaban de situaciones empíricas funciona muy bien, pero no era claro si sucedía lo mismo al ser aplicada a oraciones de la matemática. Si las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas refieren a las propiedades de los objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta y causalmente inerte, ¿cómo es posible llegar a conocer a los objetos matemáticos y sus propiedades mediante nuestra percepción sensorial dado que son abstractos? Tal parece que desde el punto de vista de Benacerraf las preguntas versan sobre qué es lo que hace verdaderas a las oraciones matemáticas y cómo es que conocemos su verdad deben ser respondidas al mismo tiempo, como si fuesen dos caras de la misma moneda.

A decir de Benacerraf, los casos **i.** y **ii.** se enfocan sólo en uno de los dos elementos de la explicación de la verdad matemática, abandonando el otro aspecto.

En síntesis, de acuerdo con Benacerraf, la situación es la siguiente: son dos las explicaciones existentes de la verdad matemática que dan cuenta de cómo obtienen su verdad las proposiciones matemáticas:

> 1. La explicación estándar de la verdad es una explicación semántica: esto es, la verdad dependía directamente de los objetos a los que se hacía referencia en la oración y a sus propiedades. Si los términos que componen a una oración tienen referencia empírica, se considera que podemos hablar con verdad sobre ellos.
>
> 2. La explicación combinatoria de la verdad, es una explicación en donde la verdad de las proposiciones matemáticas se daba en términos de una prueba formal expresada únicamente por medios deductivos axiomáticos, sobre la base de hechos sintácticos

Siguiendo a Benacerraf, una buena epistemología de las matemáticas debería explicar, a la vez, las

[11] [...] this account assimilates the logical form of mathematical propositions to that of apparently similar empirical ones: empirical and mathematical propositions alike contain predicates, singular terms, quantifiers, etc. (Benacerraf, 1973, p. 410).

verdades de las proposiciones matemáticas y no matemáticas bajo una misma teoría de la verdad. Sin embargo, lo anterior no parece ser posible dada la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos. Si optamos por una explicación de la verdad matemática combinatoria, será imposible tener una teoría semántica homogénea entre las proposiciones del lenguaje natural y las proposiciones del lenguaje matemático. Ya que las condiciones de verdad en nuestro lenguaje natural se encuentran establecidas por cuestiones semánticas de tipo estándar como la referencia a los objetos físicos. Entretanto, los enunciados matemáticos (aritméticos) se basan solamente en hechos sintácticos. Por otra parte, si se admite una explicación de tipo estándar será complicado ofrecer una epistemología adecuada que explique cómo es que obtenemos conocimiento matemático. Así, las dos explicaciones de la verdad matemática serán inapropiadas ya que la explicación existente recae en la teoría combinatoria de la verdad o en la teoría estándar de la verdad, lo cual entorpece las condiciones de una teoría semántica homogénea entre las proposiciones del lenguaje natural y las proposiciones del lenguaje matemático y, de la misma manera, entorpece una explicación acerca de la verdad matemática que se compagine con una epistemología adecuada que dé cuenta de cómo obtenemos el conocimiento matemático.

Las posturas que afirman que las entidades matemáticas son reales, se identifican con una explicación de la verdad del tipo estándar. Es la idea de que, si las entidades matemáticas existen, serán ellas mismas las que hagan verdaderas a las proposiciones matemáticas. Una posición realista en matemáticas se halla posicionada en el segundo cuerno del dilema. No basta con decir cómo son verdaderos los enunciados matemáticos sino, cómo podemos conocer su verdad, esto es, se necesita dar una epistemología adecuada que dé cuenta de cómo adquirimos conocimiento matemático (aritmético).

El caso de **(ii)**, debe de explicar qué es lo que hace que una verdad matemática sea una oración verdadera. Esto es, qué es lo que, de hecho, hace que una verdad matemática sea considerada como un caso genuino de verdad. Para que una teoría de la verdad fuera apropiada, ésta debería ser consistente con una teoría global de la verdad; es decir, una teoría de la verdad aplicable por igual para los objetos matemáticos y los objetos empíricos. De acuerdo con Benacerraf, la teoría de la verdad que satisface las condiciones anteriores era la teoría de la verdad de Tarski.

Considero que sólo tenemos una explicación de ese estilo: la de Tarski, y que su característica esencial es la de definir la verdad en términos de referencia (o satisfacción) sobre la base de un tipo particular de análisis sintáctico-semántico del lenguaje, y así que cualquier supuesto de análisis genuino de la verdad matemática debe ser el análisis de un concepto de verdad por lo menos en el sentido de Tarski. (Benacerraf, 1973, p. 408)[12].

Con la teoría de la verdad de Tarski era posible analizar las oraciones del lenguaje natural y a las oraciones del lenguaje matemático mediante un lenguaje formal. Como se dijo líneas arriba, con las oraciones de las matemáticas no podemos tener una relación causal a diferencia de las oraciones que refieren a los objetos físicos donde sí tenemos una relación causal. Entonces, ¿cómo analizar las oraciones del lenguaje natural a la par de las oraciones del lenguaje matemático (como lo demanda Benacerraf), si los objetos matemáticos son abstractos? Al respecto, Benacerraf dice:

> Consideren los dos enunciados siguientes:
> (1) Hay al menos tres ciudades grandes más antiguas que Nueva York
> (2) Hay al menos tres números perfectos mayores que 17
> ¿Tienen la misma forma lógico-gramatical? Más específicamente, ¿tienen ambos la forma
> (3) Hay al menos tres elementos de *FG* que tienen la relación *R* con *a,*
> donde, "Hay al menos tres" es un cuantificador numérico eliminable del modo habitual por medio de cuantificadores existenciales, variables e identidad, y donde *F y G* han de ser reemplazados por predicados monádicos, ¿*R* por un predicado diádico y *a* por el nombre de un elemento del universo del discurso de los cuantificadores? Cuáles son las condiciones de verdad de (1) y (2) son ¿Significativamente análogas? (Benacerraf, 1973, p. 405)[13].

Lo atrayente de la teoría de la verdad de Tarski es que, con su teoría, podemos evaluar si la oración (2), "Hay al menos tres números perfectos mayores que 17", tiene la misma forma sintáctica que la oración, (1) "Hay al menos tres ciudades grandes más antiguas que Nueva York"

---

12 I take it that we have only one such account: Tarski's, and that is essential feature is to define truth in terms of reference (or satisfaction) on the basis of a particular kind of syntactic semantical analysis of the language, and thus that any putative analysis of mathematical truth must be an analysis of a concept which is a truth concept at least in Tarski's sense. (Benacerraf, 1973, p. 408).

13 Consider the following two sentences:
(1) There are at least three larger cities than New York.
(2) There are at least perfect numbers greater than 17.
Do they have the same logic grammatical form? More specifically, are they both of the form
(3) There are at least three *FG*'s that bear *R* to *a*.
where "There are at least three" is a numerical quantifier eliminable in the usual way in favor of existential quantifiers, variables, and identity: '*F*' and 'G' are to be replaced by one-place predicates, 'R' by a two-place predicate, and 'a' by the name of an element of the universe of discourse of the quantifiers? [...] What are the truth conditions of (1) and (2?) ¿Are they relevantly parallel? (Benacerraf, 1973, p. 405).

[14]. Si es el caso que la oración (2) sea análoga a la oración (1); es decir, que la oración (2) tenga la misma forma sintáctica que la oración (1) entonces, al parecer, tenemos una buena teoría (homogénea) de la verdad que nos permite explicar con claridad las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas a la par de las oraciones del lenguaje natural. Esto es, las proposiciones matemáticas coinciden con los enunciados del lenguaje natural, ya que las oraciones matemáticas y las oraciones del lenguaje natural incluyen términos singulares, propiedades y relaciones a pesar de que los objetos matemáticos no sean objetos de referencia empírica.

> […] (1) será verdadera si y sólo si la cosa nombrada por la expresión que reemplaza a '*a*' ('Nueva York') tiene la relación designada por la expresión que reemplaza a '*R*' ('1' es más antigua que '2') con al menos tres elementos (del dominio de discurso de los cuantificadores) que satisfacen los predicados que reemplazan a '*F*' y '*G*' (grande y ciudad respectivamente). (Benacerraf, 1973, p. 405)[15].

A partir del análisis de los términos que componen a la oración (1) podemos afirmar lo siguiente: Hay tres ciudades grandes que están en una relación 'ser más antiguas' con Nueva York, y que esas tres ciudades, así como Nueva York, existen. La oración 1 podemos expresarla de la siguiente forma sintáctica.

Oración (1): Hay al menos tres ciudades grandes más antiguas que Nueva York.

Forma sintáctica de la oración (1), donde:

[x, y, z] = Ciudades (C)

[A] = Antiguas

[n] = Nueva York

sustituyendo la oración (1), tenemos que:

$$\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz \wedge xAn \wedge yAn \wedge zAn)$$

Ahora, si analizamos la oración (2) como lo hicimos con la oración (1) encontramos que se afirma lo siguiente: existen tres números perfectos y que tales números están en una relación 'ser mayor que' con el número 17. Además, se considera que tienen una genuina existencia análoga a la de los objetos empíricos.

---

14 Nótese que para asignarle un valor de verdad a la oración (1), se necesita realizar un trabajo empírico y, para asignar un valor de verdad a la oración (2), no se necesita realizar ningún trabajo empírico.

15 [...] (1) will be true if only if the thing named by the expression replacing '*a*' ('New York') bear the relation designated by the expression replacing '*R*' ('1 is older than 2') to at least three elements (of the domain of discourse of the quantifiers) which satisfy the predicates replacing '*F* and *G*' ('large' and 'city' respectively. (Benacerraf, 1973, p. 405).

Oración (2): Hay al menos tres números perfectos mayores que 17.

La oración (2) podemos expresarla de la siguiente forma sintáctica, donde:

[x, y, z] = Números

[P] = Perfectos mayores

[d] = diecisiete

sustituyendo la oración 2, tenemos que:

$$\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Px \wedge Py \wedge Pz \wedge xPd \wedge yPd \wedge zPd)$$

Ahora comparemos la forma sintáctica que tienen las oraciones (1) y (2).

oración (1) $\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz \wedge xAn \wedge yAn \wedge zAn)$

oración (2) $\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Px \wedge Py \wedge Pz \wedge xPd \wedge yPd \wedge zPd)$

De acuerdo con los resultados obtenidos, las oraciones (1) y (2) comparten una forma sintáctica muy parecida. Esto sugiere que es posible aplicar la teoría semántica de la verdad de Tarski a las oraciones del lenguaje natural, así como a las oraciones del lenguaje matemático. Una de las consecuencias de hacer este tipo de análisis, por ejemplo, para oraciones del tipo (2) es que se puede comprometer con la existencia de los objetos matemáticos análogo a la existencia de los objetos físicos. De esta manera, se considera que el compromiso ontológico para las oraciones del tipo (2) es análogo al compromiso ontológico de las oraciones del tipo (1). Si lo anterior es correcto, entonces la teoría semántica de la verdad de Tarski es una teoría de la verdad global que es posible aplicar a las oraciones del tipo matemático y a oraciones del lenguaje natural que hablan sobre objetos empíricos.

De tal forma que, la teoría de la verdad de Tarski cumple con la exigencia que demanda Benacerraf. Esto es, una teoría de la verdad que sea aplicable por igual a las oraciones del lenguaje natural y a las oraciones del lenguaje matemático. Sin embargo, queda pendiente responder, ¿cómo es que tendremos acceso epistémico a dichos objetos?

En el caso de la teoría i. (teoría combinatoria de la verdad) el reto es un poco distinto, en este caso, lo que se debe explicar es cómo es posible que una noción sintáctica como la derivabilidad puede dar cuenta de una noción semántica como la verdad. Esto se analiza en la siguiente sección.

1.2.3 Verdad y Prueba

El requisito que demanda Benacerraf versa sobre la verdad semántica y la justificación epistémica del conocimiento matemático. Al parecer, no es contraintuitivo suponer que poseemos conocimiento matemático y que tal conocimiento matemático es verdadero. En parte, el trabajo que le corresponde a la epistemología consiste dar cuenta de esta exigencia; es decir, justificar cuáles son las condiciones que hacen verdaderas a las proposiciones matemáticas y explicar cómo podemos adquirir conocimiento de estas. De tal suerte que, algunos de los retos filosóficos que tiene la epistemología de las matemáticas son explicar:

a) ¿Cómo los objetos matemáticos al ser independientes de los sujetos cognoscentes son estos objetivos (y algunas de las oraciones que hablan de ellos sean verdaderas)?
b) ¿Cómo por medio de las facultades cognitivas humanas (las cuales son limitadas) logramos adquirir conocimiento matemático dado que sus objetos son abstractos y causalmente inertes?
c) ¿Es posible que se obtenga al mismo tiempo una semántica y una epistemología como las solicitadas por Benacerraf?

Responder los puntos ***a***, ***b*** y ***c*** desde **i.** (teoría combinatoria de la verdad[16]), al parecer, no es problemático pues la demostración (prueba formal) explica la verdad (aspecto semántico) y la justificación (aspecto epistémico) de la adquisición de nuestro conocimiento matemático. En este caso, como se dijo, la visión combinatoria parece ser suficiente para establecer y analizar pruebas formales y así estar justificados en que nuestras proposiciones matemáticas son verdaderas y que tenemos conocimiento matemático verdadero. "[…] las condiciones de verdad para los enunciados de la aritmética son proporcionadas a modo de derivabilidad formal a partir de conjuntos de axiomas especificados." (Benacerraf, 1973, p. 406)[17]. Sin embargo, si sólo se hacía énfasis en las características que las pruebas ofrecen para dar cuenta de la verdad y de la justificación de nuestro conocimiento matemático, entonces la derivación de las verdades matemáticas no estarían lo suficientemente justificadas. Veamos por qué:

> [...] estas concepciones fueron torpedeadas por los teoremas de incompletud. […]. La idea principal de las concepciones combinatorias es la de asignar valores de verdad a los enunciados de la aritmética sobre la base de ciertos hechos sintácticos generalmente demostrativos sobre ellos. A menudo la verdad se define como la derivabilidad (formal) a partir de ciertos axiomas. [...]. El predicado "verdad" se define sintácticamente. (Benacerraf,

16 Véase la sección:1.2.2 de esta investigación, p.19.

17 [...] the truth conditions for arithmetic sentences are given as their formal derivability from a specified set of axioms. (Benacerraf, 1973, p. 406).

1973, p. 406)[18].

La verdad obtenida como una derivación deductiva o axiomática no justifica de manera decisiva la relación necesaria y suficiente para determinar la conexión entre prueba y verdad porque: "[…] la noción de verdad nunca coincide con la de demostrabilidad; puesto que todas las oraciones que pueden deducirse son verdaderas, pero hay oraciones verdaderas que no son deducibles." (Tarski, 1966, p. 20). Esto es, podemos tener como consecuencia lógica una verdad en un sistema formal matemático sin que por ello podamos ofrecer necesariamente la prueba correspondiente[19]. Lo anterior, implica que -en ocasiones- los matemáticos introducen más proposiciones que las que pueden demostrar en un sistema formal. Así, parece que la teoría combinatoria no será adecuada. Más adelante Benacerraf dice:

> [...] las concepciones "combinatorias" nos ofrecen condiciones de verdad cuya satisfacción o insatisfacción pueden determinar los simples mortales, pero el precio que pagan es su incapacidad para conectar esas llamadas "condiciones de verdad" con la verdad de las proposiciones para las cuales son condiciones. (Benacerraf, 1973, p. 419)[20].

Una de las enseñanzas notables que se vislumbra en los teoremas de incompletud de Gödel es que nos demuestran que en cualquier sistema formal "S" con la expresividad suficiente para reconstruir la aritmética, va a haber proposiciones tales que ni ellas ni su negación sean demostrables. Si aceptamos este punto, la teoría de la verdad combinatoria no puede ser adecuada como una teoría de la verdad matemática[21].

---

18 [...] these views were torpedoed by the incompleteness theorems. [...] The leading idea of combinatorial views is that of assigning truth values to arithmetic sentences on the basis of certain (usually proof-theoretic) syntactic facts about them. Often, truth is defined as (formal) derivability from certain axioms [...]. The "truth" predicate is syntactically defined. (Benacerraf, 1973, p. 406).

19 Véase: Gödel, K. (1981). "Sobre proposiciones formalmente indecidibles en Principia Mathematica y sistemas afines" en K. Gödel, Obras Completas, Madrid: Alianza Editorial. (pp. 53-89).

20 [...] they come up with truth conditions whose satisfaction or nonsatisfaction mere mortals can ascertain; but the price they pay is their inability to connect these so-called "truth conditions" with the truth of the propositions for which they are conditions. (Benacerraf, 1973. p. 419).

21 Esto no es del todo claro, pues el argumento se basa en que ningún sistema formal (con las características apropiadas) puede ser completo y consistente. Sin embargo, esto no implica que no exista para cada oración matemática verdadera un sistema matemático (bien justificado) en el que sea teorema. Esto abre discusiones que exceden el límite de este trabajo, por lo que no volveré a tocar el punto.

1.3 El dilema de Benacerraf

El dilema de Benacerraf representaba dos cuernos opuestos e incompatibles. Por un lado, consideraba significativamente verdaderas a las oraciones matemáticas en virtud de su referencia predicativa, pero esto entraba en conflicto con su epistemología basada en una "teoría causal del conocimiento" (TCC).

En resumen, no podemos tener al mismo tiempo una semántica homogénea (como la tarskiana) que nos comprometa con la existencia de los objetos matemáticos como entidades abstractas y una epistemología adecuada (como la teoría causal del conocimiento) que requiera de acceso causal o directo con los objetos matemáticos.

Las estrategias más usuales que se han dado para dar cuenta de los objetos matemáticos son: 1) Negar que los términos de las oraciones matemáticas refieran a objetos abstractos; en este sentido se puede negar la existencia de tales objetos en general o decir que son objetos concretos, pero en el primer caso perdemos la verdad de las oraciones y en el segundo perdemos su necesidad. 2) Aceptar la existencia de objetos matemáticos abstractos y modificar nuestra epistemología para que los mecanismos de acceso a los objetos abstractos no requieran de una interacción causal con los mismos (algunas de estas propuestas están ligadas con estrategias lingüísticas de acceso). Agustín Rayo sigue esta línea.

1.4 Conclusiones del capítulo I

Benacerraf en su texto de (1973), argumenta que, comúnmente, se explican las verdades de las oraciones matemáticas y las verdades de las oraciones del lenguaje natural de diferente manera. Ya sea privilegiando a una o a la otra; pero no se ofrece una teoría de la verdad que abarque a ambas a la vez. De acuerdo con nuestro autor, una explicación genuina de las verdades matemáticas debe de ofrecer una explicación de la justificación de ¿cómo es posible el conocimiento matemático? basada en una teoría de la verdad que pueda explicar que las oraciones matemáticas, así como las oraciones de nuestro lenguaje natural sean verdaderas y estén lo suficientemente justificadas.

Las explicaciones que uno ofrezca sobre la verdad y la justificación de los objetos matemáticos implican compromisos ontológicos, semánticos y epistémicos que se adquieren frente a éstos, dependiendo de la posición filosófica sobre la explicación de las verdades matemáticas que se acepte. Por ejemplo:

- Si uno se compromete con una posición “realista”, entonces uno contrae compromisos ontológicos tales como la existencia de los objetos matemáticos en donde la verdad matemática se da en virtud de lo que las oraciones matemáticas predican. Este tipo de explicación es llamada por Benacerraf como posición “estándar”. Esta explicación realista de los objetos matemáticos sostiene que cuando un *S* conoce una proposición matemática *p*, es porque *S* sabe que los objetos matemáticos de los que habla *p* corresponden a las características que se predican de ellos en *p*. El problema consiste en explicar ¿cómo es posible establecer una explicación de la verdad matemática que no es causal con base en una explicación de la verdad con criterios causales? En este sentido, el acceso a los objetos empíricos es muy diferente al acceso de los objetos matemáticos. Al realista se le dificulta explicar ¿cómo se tiene acceso a los objetos matemáticos? pues tales objetos -como lo hemos considerado- son abstractos y causalmente inertes. Por tal motivo, quien defiende una explicación realista frente a los objetos matemáticos se enfrenta a un problema filosófico de índole epistémico.
- Por otra parte, si uno se compromete con una posición “antirrealista”, entonces uno no contrae compromisos ontológicos con la existencia de los objetos matemáticos. Es decir, no es necesario comprometerse con la existencia de los objetos matemáticos (como abstractos). Este tipo de explicación es llamada por Benacerraf como posición “combinatoria”. En la explicación combinatoria la verdad matemática se da por medio de relaciones sintácticas de las oraciones matemáticas derivadas dentro de un sistema formal. En el caso de una postura “antirrealista” las condiciones de verdad de los objetos matemáticos son diferentes a las condiciones de verdad que se dan en el lenguaje natural[22]. En este sentido, el antirrealista se encuentra en un problema filosófico de índole semántico, el antirrealista puede o no comprometerse con la existencia de los objetos matemáticos.

Cada una de las explicaciones que uno adopte, ya sea “realista” o “antirrealista” se suponen diferentes tipos de compromisos, por ejemplo, ontológicos sobre la explicación acerca de las verdades matemáticas.

Dar respuesta al dilema de Benacerraf ha sido un reto para la comunidad filosófica desde

22 Véase el punto: 1.2.3 Verdad y Prueba, de esta investigación, p. 24.

que fue planteado. Como se dijo, de acuerdo con Benacerraf, una buena epistemología de las matemáticas es significativa si: **a.** puede explicar a las proposiciones del lenguaje natural y a las proposiciones del lenguaje matemático bajo una misma teoría semántica de la verdad y, **b.** sí puede dar cuenta de la verdad matemática acoplada a una epistemología que logre explicar por lo menos ¿cómo es que sabemos que las verdades de las matemáticas son verdaderas? y, ¿cómo es posible obtener conocimiento matemático dado que es abstracto y causalmente inerte?

Las estrategias que se han realizado para dar respuesta al dilema de Benacerraf han sido muy variadas y controvertidas[23]. Algunas de ellas ofrecen una explicación desde el cuerno semántico y algunas otras desde el cuerno epistémico. Sin embargo, tales estrategias no han sido del todo satisfactorias, hasta la fecha las respuestas siguen siendo muy discutidas. Nuestro interés no es realizar un análisis de las estrategias que se han ofrecido para dar respuesta al dilema planteado por Benacerraf pues no es el objetivo de esta investigación. Tan solo daré cuenta al lector que las respuestas a tal dilema han sido varias y debatibles. Y la discusión aún sigue vigente.

Lo que nos interesa desarrollar en el siguiente capítulo es la epistemología de las matemáticas que ofrece Agustín Rayo (2015). Como se dijo líneas arriba, no desarrollaremos en su totalidad la propuesta del autor, sino que sólo abordaremos las tesis centrales que consideramos son necesarias para, desde ellas, responder al dilema planteado por Benacerraf. En este sentido, el Capítulo II será básicamente expositivo donde desarrollaremos y explicaremos lo que consideramos es la propuesta central del trivialismo platónico, la defensa y su utilidad que ofrece como herramienta que nos sirve para el teorizar filosófico y/o el quehacer científico.

[23] Por ejemplo: Quine, W.V.O. (1953), Maddy, P. (1992), Shapiro, S. (2000), etc.

Capítulo II

El trivialismo platónico de Agustín Rayo

Capítulo II: El trivialismo platónico de Agustín Rayo

2.1 Introducción al capítulo II

La idea central de la propuesta del trivialismo platónico de Rayo afirma que las verdades matemáticas son triviales (son verdaderas sin importar cómo sea el mundo, tienen condiciones de verdad triviales). Sin embargo, sostiene que sí existen los objetos y el conocimiento matemático. De acuerdo con esta postura, las verdades de la matemática no requieren nada del mundo empírico para estar justificadas.

En este capítulo abordare la siguiente pregunta, ¿en qué consiste la propuesta del trivialismo platónico?

La importancia de responder a tal pregunta consiste en ofrecer una perspectiva general de la postura de Rayo (2015), así como algunos aspectos importantes de su epistemología de las matemáticas; explicamos algunas de las ideas principales de su postura, de tal manera que nos permita dar cuenta de la respuesta que él ofrece al dilema planteado por Benacerraf.

La hipótesis que busco defender en este capítulo es que es posible explicar algunas oraciones matemáticas, parafraseando en un lenguaje sin términos matemáticos.

Para realizar lo anterior, procederé en cinco pasos. Primero, explico en qué consisten los enunciados de identidad de acuerdo con Rayo (2015); sólo abordamos algunos pasajes de las sesiones 1. ¿Qué es el espacio de posibilidades y en qué sentido lo construimos? y 2. ¿Qué tipo de correspondencia existe entre nuestro lenguaje y la realidad que representa? Segundo, exponemos cuáles son algunas de las características que tienen los enunciados de identidad que propone nuestro autor para desarrollar su propuesta. Tercero, aclaramos algunas de las condiciones que suponen cada uno de los enunciados de identidad. Cuarto, explicamos cuáles son algunas de las diferencias más significativas entre una postura metafisicalista y una postura composicionalista. Quinto, explicamos cuáles son algunos de los beneficios de rechazar la postura metafisicalista y aceptar la postura composicionalista. Finalmente, en la Sec. 2.7, esbozo algunas conclusiones.

2.2 Trivialismo platónico de Agustín Rayo

El trivialismo platónico es la combinación de dos ideas: (i) los objetos matemáticos existen y, (ii) las oraciones verdaderas de las matemáticas tienen condiciones de verdad triviales.

De acuerdo con esta posición las ideas (i) y (ii) consideran que la existencia de los objetos matemáticos no sobrepasa la existencia del mundo físico y que no se necesita nada del mundo para saber que las condiciones de verdad de las matemática (aritmética) sean verdaderas. Esto es, las condiciones de verdad de nuestros enunciados matemáticos se dan a partir de distinciones de las regiones del espacio de posibilidades.

La idea del espacio de posibilidades sostiene que nosotros, como seres humanos, desarrollamos una concepción de lo que es posible y de lo que es imposible a partir de las distinciones que usamos para representar cómo creemos que es el mundo. La idea es que los seres humanos construimos el mundo a partir de las descripciones que realizamos con base en nuestro lenguaje, pues tales descripciones de las regiones del espacio de posibilidades se hacen bajo el lenguaje natural. El lenguaje juega un papel fundamental cuando teorizamos, ya que el lenguaje es la manera fundamental de hacer distinciones teóricas. Esto es debido a que consideramos al lenguaje (metafóricamente hablando) como el vehículo de nuestro conocimiento.

Teorizar a partir de las regiones del espacio de posibilidades nos ayuda a entender cómo es que nuestras maneras de representar el mundo[24] están estrechamente ligadas con la manera en que nosotros lo entendemos. Entendemos el mundo bajo una descripción que realizamos por medio de nuestro lenguaje, esto es, primero decidimos qué distinciones utilizar al momento de teorizar para después diferenciar entre escenarios que consideramos como regiones posibles del espacio y escenarios que consideramos imposibles.

Para explicar en qué consiste la idea de las regiones del espacio de posibilidades, veamos a continuación algunos ejemplos de enunciados de identidad, ya que la propuesta de Rayo encuentra sustento en lo que él llama *enunciados de identidad.* Tales enunciados, de acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, son ejemplos que representan regiones del espacio de posibilidades.

[24] La propuesta de Rayo supone que la existencia del mundo ya está dada y que tal existencia es un hecho objetivo, pero, lo que depende de nosotros son los recursos que vamos a utilizar para describirlo. “[…] construimos el espacio de posibilidades a partir del mundo con el que nos encontramos. Es el proceso de teorizar acerca del mundo en el que vivimos como construimos nuestra concepción del espacio de posibilidades”. (Rayo, 2015, p. 135).

2.2.1 Enunciados de Identidad

Cuando consideramos la distinción entre que “el vaso contenga agua” y que “el vaso no contenga agua”, esa es una distinción de la región del espacio de posibilidades. El mundo podría ser tal como lo describe una de las dos distinciones anteriores. O bien, también es posible pensar que, si teorizamos y utilizamos categorías diferentes, entonces el mundo para nosotros podría ser de manera diferente. Por ejemplo, otra distinción de las regiones del espacio de posibilidades podría ser la siguiente, que “el vaso contenga H_2O” y que “el vaso no contenga H_2O”.

Afirmar lo anterior, pone en tela de juicio cuáles son las distinciones con las que nos comprometeremos a utilizar cuando queramos describir el mundo dado que, si nos preguntamos si las dos distinciones arriba mencionadas son las mismas o no, en ocasiones no es muy claro distinguir entre una u otra. Es decir, si distinguir en que haya agua o no haya agua es lo mismo que distinguir entre “que haya H_2O” o “no haya H_2O”.

> Dado lo que sabemos hoy día sobre Química […], que haya agua es simplemente que haya H_2O; *no hay ninguna diferencia* entre un mundo con agua y un mundo con H_2O, o si lo quieren pensar de una manera más pintoresca: cuando Dios creó al mundo y se aseguró de que hubiera agua no había nada *adicional* que tuviera que hacer o dejar de hacer para que hubiera H_2O; y también al revés: cuando Dios se aseguró de que hubiera H_2O no había nada *adicional* que tuviera que hacer para que hubiera agua. (Rayo, 2015, p. 17).

Una de las maneras en las que decidimos qué distinciones utilizar y qué distinciones coinciden con otras distinciones de las regiones del espacio de posibilidades es a través de la ciencia y/o la filosofía. Por ejemplo, cuando tenemos enunciados distintos y no es claro para nosotros si tales enunciados gramaticalmente diferentes refieren a la misma región del espacio de posibilidades o no.

Un caso podría ser que dos enunciados sean gramaticalmente diferentes, pero consideramos que uno es más sencillo de entender que el otro porque aún no sabemos que refiere a la misma distinción. El enunciado sencillo podría utilizar terminología fácil de entenderse, pero el otro enunciado podría emplear terminología más difícil, así como terminología no matemática. Para tales casos tenemos que recorrer un proceso que no es nada trivial y, tal vez, un procedimiento que no es *a priori* para poder saber cuáles son las condiciones de verdad de ambos enunciados y, posteriormente, decidir si a pesar de las diferencias gramaticales entre los enunciados estamos hablando de la misma distinción del espacio de posibilidades.

Dada la tarea anterior, es preciso preguntarse ¿cómo saber si dos enunciados que se escriben diferente y que tienen diferente significado refieren a la misma región del espacio de posibilidades? Por ejemplo, cuando consideramos dos conceptos como *agua* y *H_2O* podríamos pensar lo siguiente: Que haya agua *es simplemente* que haya H_2O, sabemos de acuerdo con nuestro quehacer científico que agua y H_2O no tienen el mismo significado, pero ambas distinciones refieren a la misma región del espacio de posibilidades. Esto es, que haya agua *es simplemente* decir que haya H_2O, y viceversa. Ahora, ¿que haya agua y que no haya agua es la misma distinción que haya H_2O y que no haya H_2O? Lo que nuestro quehacer científico sugiere es que estar hecho de agua *es simplemente* estar hecho de H_2O.

Lo que la ciencia advierte es que las distinciones entre agua y H_2O son las mismas, refieren a la misma región del espacio de posibilidades, a pesar de que se escriben de manera diferente. "Un aspecto fundamental de mi proyecto es que la decisión de qué enunciados de identidad hemos de aceptar está estrechamente vinculado con nuestro quehacer científico." (Rayo, 2015, p. 134). Desde este punto de vista, será en función del quehacer científico y, a veces en conjunto con la filosofía, como será posible determinar qué distinciones del espacio de posibilidades tienen sentido para nosotros y qué distinciones del espacio de posibilidades no lo tienen.

De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, los enunciados de identidad: que haya agua *es simplemente* que haya H_2O y, que haya H_2O *es simplemente* decir que haya agua, corresponden a la misma región de posibilidades a pesar de que sean gramaticalmente diferentes. Sin embargo, lo que a veces no es tan claro saber, es, no sólo si ambos enunciados refieren a la misma región del espacio de posibilidades sino, ¿cómo se logró saber que agua y H_2O corresponden a la misma distinción de la región del espacio de posibilidades?

> Diremos […] que dos enunciados hacen la misma distinción cuando correspondan a la misma región del espacio de posibilidades. Si p y q son enunciados diferentes […] según la propuesta que quiero defender, corresponderán a la misma región del espacio de posibilidades siempre y cuando sea verdadero lo siguiente: Que p sea el caso es simplemente que q sea el caso. (Rayo, 2015. p. 18).

2.2.1.0 [Agua]

> Que haya agua es simplemente que haya H_2O. (Rayo, 2015. p. 18).

El caso del enunciado de identidad [Agua], es decir, "que haya agua" *es simplemente* que haya agua y viceversa, a pesar de ser dos enunciados gramaticalmente distintos. De acuerdo con la

Química, refieren a la misma región del espacio de posibilidades. Las distinciones de las regiones del espacio de posibilidades nos permiten teorizar y categorizar nuestros espacios de diferentes maneras. Por ejemplo, si uno cree que las distinciones de agua y H_2O son las mismas en realidad y aceptamos tales distinciones, entonces no tiene sentido hablar de espacios de posibilidades en donde haya agua, pero que no haya H_2O, o viceversa, espacios de posibilidades en donde haya H_2O, pero no haya agua (pues incurrimos en un absurdo). En cambio, si uno realiza distinciones en las regiones del espacio de posibilidades, en donde agua y H_2O son diferentes, es decir, que agua y H_2O no refieren a la misma región del espacio de posibilidades, entonces sí tiene sentido hablar de situaciones donde un vaso contenga agua, pero no contenga H_2O (en este caso no habría absurdo)[25], y viceversa, tendría sentido hablar de situaciones donde el vaso contenga H_2O, pero que no contenga agua, en este caso tampoco habría absurdo.

De acuerdo con el enunciado de identidad de [Agua], aceptar las distinciones entre agua y H_2O consiste en que nosotros decidimos con qué distinciones trabajar cuando teorizamos para posteriormente conducirnos de acuerdo con una manera muy particular de ser el mundo a partir de las regiones del espacio de posibilidades que previamente aceptamos y que consideramos como verdaderas. Así, tales consideraciones estarán determinadas por dos momentos:

(1) Por la manera como es el mundo.

(2) Por la parte que corresponde a nosotros, es decir, decidir qué recursos utilizaremos para describir esos aspectos del mundo.

Dependiendo de los recursos lingüísticos que utilicemos para describir el mundo vamos a describir los aspectos de este y tales descripciones estarán constreñidas por los enunciados de identidad previamente aceptados en función de su utilidad para resolver problemas científicos y/o filosóficos. Tal tarea, como se dijo, estará determinada por la ciencia y/o en ocasiones por la filosofía.

Otros enunciados de identidad que propone Rayo para desarrollar su propuesta acerca de la verdad y la justificación de nuestro conocimiento matemático son los siguientes[26]:

---

25 No es una decisión arbitraria aceptar o no ciertos enunciados de identidad, sino que tales enunciados son aceptados o no bajo los criterios que nuestras mejores teorías científicas puedan explicar. Y en ocasiones con ayuda de la filosofía, si es el caso.

26 El objetivo principal de presentar estos enunciados de identidad consiste en hacerlos familiares al lector, de tal suerte que, cuando se presenten los enunciados identidad relacionados con la Filosofía de las Matemáticas, estos no parezcan *ad hoc* o extraños.

2.2.1.1 [Hermano]

> Que Julián sea un hermano es simplemente que comparta un padre con alguna persona. (Rayo, 2015, p. 20).

De acuerdo con Rayo, quien acepta el enunciado [Hermano], acepta lo siguiente: Que Julián sea un hermano *es simplemente* que comparta un padre con alguna persona. Compartir un padre con alguna persona *es simplemente* que Julián sea un hermano. Lo anterior, en este caso, de acuerdo con una consideración *a priori* se sabe que está justificado sólo realizando una reflexión acerca del significado de cada uno de los términos que componen al enunciado.

Lo interesante de algunos enunciados de identidad que propone Rayo es que no siempre es posible conocerlos *a priori* o lo que es lo mismo, si ambos enunciados refieren a la misma región del espacio de posibilidades sin necesidad de realizar una investigación extralógica. Tal como el enunciado [Agua] donde no es posible saber *a priori* que agua = H_2O, sino que se requiere de una investigación empírica para asignar el valor de verdad correspondiente.

2.2.1.2 [Venus]

> Que Susana viaje a Héspero es simplemente que viaje a Fósforo. (Rayo, 2015, p. 21).

El enunciado [Venus], de acuerdo con Rayo, es aceptado únicamente si es el caso que creamos que Héspero y Fósforo son idénticos en términos que refieren a la misma distinción de la región del espacio de posibilidades, ambos refieren al planeta Venus. A pesar de que Héspero y Fósforo se escriben de diferente manera. Héspero y Fósforo son idénticos, entendiendo "idéntico" en un sentido débil de identidad.

> […] lo que tenemos en mente en el sentido débil de identidad, de acuerdo con el cual "Héspero = Fósforo" no implica "Héspero existe". Cuando "Héspero = Fósforo" se entiende en su sentido fuerte, es equivalente a la conjunción de "ser idéntico a Héspero es simplemente ser idéntico a Fósforo" y "Héspero existe" (Rayo, 2015. p. 21).

Ser idéntico a Fósforo *es simplemente* ser idéntico a Héspero y viceversa. De esta manera, cuando se dice que Susana viaja a Héspero no podemos decir que Susana puede no ir a Fósforo, y viceversa. Dado lo anterior, negar el enunciado [Venus] sería absurdo, ya que si previamente se había aceptado que Fósforo = Héspero, entonces, el hecho que Susana viaje a Héspero *es simplemente* el hecho que viaje a Fósforo, y viceversa, pues estamos comprometidos con una manera particular de distinguir la región del espacio de posibilidades en la cual Fósforo = Héspero.

El enunciado de identidad [Venus] es un ejemplo que nos deja en claro que una vez que nos comprometemos con algún/os enunciado/s de identidad, estamos comprometidos con una manera particular de ser el mundo y, a su vez, con una manera particular de distinguir regiones del espacio de posibilidades de acuerdo a cómo nosotros creemos que es el mundo a partir de las descripciones que hacemos del mismo.

2.2.1.3 [Calor]

> Que algo esté caliente es simplemente que su energía cinética promedio sea alta. (Rayo, 2015, p. 21).

Aceptar este tipo de enunciados está en función de la teoría científica vigente. Supongamos que lo que nuestras mejores teorías científicas actuales consideran es que si algo está caliente *es simplemente* que tiene energía cinética promedio alta y viceversa.

Sin embargo, por ejemplo, lo que la historia documenta es que a finales del siglo XVIII se consideraba que si algo estaba caliente era porque tenía una gran cantidad de "sustancia de calórico"[27]. Aceptar "energía cinética promedio alta" o "sustancia de calórico" está en función de la teoría científica vigente. Supongamos (nuevamente) que nuestras mejores teorías científicas consideran que el enunciado [Calor] es verdadero, entonces no podemos aceptar enunciados que consideren que existen objetos con energía cinética promedio alta y que tales objetos no estén calientes, o viceversa, que existan objetos que estén calientes y que tales objetos no tengan energía cinética promedio alta. Afirmar alguno de estos dos últimos enunciados no está dentro de las distinciones del espacio de posibilidades porque se está afirmando una situación absurda, pues si es el caso que previamente estábamos comprometidos con el enunciado [Calor] entonces no es correcto afirmarlo y posteriormente negarlo al momento de teorizar y categorizar.

Aun así, quien no acepta energía cinética promedio alta pero que acepta sustancia de calórico, no tendrá dificultad en aceptar enunciados de identidad tales como que un objeto esté caliente *es simplemente* que tiene gran cantidad de calórico, y viceversa. Otra situación posible del espacio de posibilidades sería que puede existir un objeto con energía cinética promedio alta pero que contenga poca sustancia de calórico, y viceversa.

Otra situación basada en el ejemplo de [Calor] podría ser la siguiente: que tener energía promedio cinética alta *sea simplemente* que se tiene mucha sustancia de calórico, y viceversa, tener

[27] Cfr. Moliner, María. DICCIONARIO DE USO DEL ESPAÑOL A-H, Gredos. Segunda Edición, 1998. España, p. 479. CALÓRICO: Fluido imaginario al que se recurría para explicar los fenómenos de transmisión de calor.

mucha sustancia de calórico *es simplemente* que se tiene energía cinética promedio alta, en este caso, sería absurdo afirmar que un objeto tenga energía cinética promedio alta y que tal objeto no tenga mucho calórico, o viceversa.

La importancia de expresar enunciados posibles de [Calor] es que tales enunciados son lógica o analíticamente consistentes[28] de acuerdo con un espacio y tiempo determinado, sin embargo, son metafísicamente inconsistentes. Lo anterior sugiere que no siempre es posible reconocer la inconsistencia metafísica *a priori*.

> Aquí entenderemos “metafísica” en “posibilidad metafísica” de un modo muy distinto. Vamos a usar la palabra no para indicar un nivel de exigencia, sino para enfatizar el hecho de que hablamos de una posibilidad *de mundo*. […]. Las posibilidades *de mundo* son maneras en las que podría ser el mundo […]. (Rayo, 2015, p. 119).

Desde este punto de vista, es lógicamente posible tener enunciados significativos y gramaticalmente bien formados pero que no sean metafísicamente consistentes con la manera actual de ser o describir el mundo, pues tales enunciados de identidad no están vigentes. Lo anterior implica que hay que ser coherentes con el uso de nuestro lenguaje y lo que nuestras mejores ciencias actuales prueban al momento de describir el mundo. Por ejemplo, si aceptamos el enunciado [Calor], es decir, que algo esté caliente *es simplemente* que su energía cinética promedio sea alta, no es correcto afirmar enunciados de identidad tales como:

(i) X objeto está caliente, pero no tiene energía cinética promedio alta, o viceversa, que

(ii) X objeto tiene energía cinética promedio alta pero tal objeto no está caliente[29].

Los enunciados (i) y (ii) son significativos y gramaticalmente bien formados, sin embargo, como se dijo, son enunciados metafísicamente inconsistentes ya que se está considerando que es vigente que si un objeto tiene energía cinética promedio alta *es simplemente* que ese objeto está caliente, y viceversa. Aceptar los enunciados (i) y (ii) implica generar un absurdo, pues previamente se había aceptado teorizar con el enunciado [Calor].

Aceptar enunciados de identidad estilo [Calor] tiene ventajas y desventajas. La ventaja es que cerramos espacios teóricos, es decir, por ejemplo, cuando alguien pregunta ¿por qué X objeto está caliente? La respuesta es, el objeto X está caliente porque tiene energía cinética promedio alta, (aceptando previamente que cuando un objeto está caliente es porque tiene energía cinética

---

28 La forma de elegir una lógica está en función de cuál nos proporciona más elementos útiles para resolver problemas.

29 Podremos afirmar los enunciados anteriores sólo si tenemos la prueba correspondiente de que el enunciado de identidad previamente aceptado con el que estamos teorizando está equivocado. Pero, de otra forma, estos enunciados se convierten en imposibilidades metafísicas.

promedio alta). Sin embargo, la desventaja de trabajar con distinciones de las regiones del espacio de posibilidades es que una vez que son aceptados los enunciados de identidad estamos limitando las distinciones de las regiones del espacio de posibilidades y, por lo tanto, tenemos menos recursos teóricos para elaborar teorías científicas. Dado lo anterior, nuestras teorías científicas se encuentran ceñidas a nuestros enunciados de identidad previamente aceptados, es decir, a los enunciados de identidad que consideramos que describen cómo es el mundo.

> [...] cuando aceptamos un enunciado de identidad el resultado es que eliminamos cierto espacio teórico. Los casos en los que hemos de aceptar el enunciado de identidad son casos en los que las ventajas de eliminar ese espacio teórico son suficientes para compensar las desventajas. (Rayo, 2015, p. 82).

Una de las enseñanzas que nos dejan enunciados [Calor] es que los enunciados de identidad nos proporcionan información particular para saber cuáles son las distinciones de las regiones del espacio de posibilidades vigentes que utilizamos para teorizar y categorizar. Esto es, una vez que la distinción es aceptada, tal distinción nos marca la pauta para saber cómo debemos comportarnos ante situaciones específicas de ser el mundo. Comportarse de diferente manera a la distinción de la región del espacio de posibilidades previamente aceptada implica que no estamos respetando los enunciados de identidad vigentes, por lo que, si en algún momento se niegan estaríamos incurriendo en un absurdo[30].

2.2.1.4 [Rojo]

> Que María experimente la sensación de ver rojo es simplemente que María esté en el estado cerebral R. (Rayo, 2015, p. 24).

El enunciado [Rojo] presupone un ejercicio mental, esto es, que María ha estado en contacto toda su vida únicamente con los colores blanco y negro[31]. Sin embargo, María sabe todo lo que se tiene que saber acerca de todos los colores que existen. Dado lo anterior, quien no acepta el enunciado [Rojo] tendrá que responder la/s pregunta/s incómoda/s.

---

30 Eso no quiere decir que sea imposible cambiar los enunciados de identidad, lo que se considera absurdo es permanecer con los mismos enunciados de identidad y al mismo tiempo aceptar enunciados que son metafísicamente incompatibles con ellos. Para cambiarlos muy probablemente tengamos que apelar a revoluciones en la forma en la cual hacemos ciencia y/o filosofía; los cambios en estas disciplinas nos permitirían e incluso nos obligarían a cambiar los enunciados de identidad, pero es muy importante insistir en que estos cambios no pueden darse de manera completamente arbitraria.

31 Este enunciado está relacionado con el experimento mental realizado por Frank Jackson, 1982.

¿Por qué cuando María ve al objeto de color rojo está en el estado cerebral rojo y no en otro, por ejemplo, en el estado cerebral negro o morado, etc.? O ¿Por qué cuando María está en el estado cerebral de ver colores tiene experiencias?

Las preguntas anteriores no se contestan fácilmente, requieren de un análisis científico y/o filosófico de fondo. Rayo apuesta por aceptar [Rojo][32]. Quien acepta el enunciado de identidad [Rojo] no tiene que hacer ese tipo de preguntas, porque diría simplemente: si ya aceptaste estar en el estado cerebral R en eso consiste experimentar la sensación de ver rojo, y viceversa.

Sopesar el enunciado [Rojo] no es una tarea fácil, no es tan obvio. Si aceptamos [Rojo] tenemos menos recursos teóricos para explicar el logro cognitivo de María. Pero, si aceptamos [Rojo], tenemos una respuesta eficiente para contestar ¿cómo se explica que María experimenta la sensación de ver rojo? La respuesta sería, porque María está en el estado cerebral R, y viceversa. ¿Cómo se explica que María esté en el estado cerebral R? La respuesta sería, porque María está experimentando la sensación de ver rojo. Estas dos últimas preguntas son análogas a la pregunta ¿cómo es que lo que está hecho de agua está hecho de H_20? arriba expuesta[33].

La lección que nos deja el enunciado [Rojo] es que el quehacer científico y/o el quehacer filosófico, nos darán las pautas para saber qué distinciones de las regiones del espacio de posibilidades podríamos aceptar en función de la utilidad que encontremos en ellos para resolver problemas. Elegir con qué espacio de posibilidades trabajar está en función de las herramientas que sean provechosas para resolver tareas específicas. Al llevar a cabo la tarea anterior, estamos describiendo el mundo y tal descripción del mundo estará en función de los enunciados de identidad previamente aceptados.

Los ejemplos de enunciados de identidad que a continuación explicaremos comúnmente son más difíciles de ser aceptados por toda la comunidad filosófica, ya que se considera que tales enunciados no pueden ser tratados como enunciados de identidad porque los compromisos metafísicos que cada uno de ellos tienen son muy diferentes. Sin embargo, de acuerdo con Rayo, los siguientes enunciados pueden explicarse en términos de enunciados de identidad. Veamos por qué.

---

32 En el capítulo IV esta investigación desarrollamos la explicación de las ventajas que tiene entender el conocimiento de manera fragmentada. Eso será de mayor relevancia para nuestro trabajo, pues parte de la respuesta que ofrece Rayo al dilema de Benacerraf es explicar cómo es que a pesar de que las oraciones de las Matemáticas son verdaderas trivialmente o generan un logro cognitivo en aquel que las aprende.

33 Véase la sección: 2.2.1.0, p. 36 de esta investigación.

2.2.1.5 [Muerte]

> Que ocurra la muerte de Sócrates *es simplemente* que Sócrates muera. (Rayo, 2015, p. 26).

El enunciado [Muerte] también considera un ejercicio mental: "Supongamos que Dios está creando el mundo y que se asegura de que exista Sócrates y de que muera [...]" (Rayo, 2015, p. 26). Para quien acepta [Muerte] no hay diferencia alguna en que ocurra la muerte de Sócrates y que Sócrates muera, o viceversa, que Sócrates muera y que ocurra la muerte de Sócrates, pues refieren a la misma región del espacio de posibilidades. Quien rechaza [Muerte] considera que el hecho de que Sócrates muera es un hecho diferente del hecho de que ocurra la muerte de Sócrates.

Quien rechaza el enunciado [Muerte] se le considera que defiende la postura metafisicalista. A grandes rasgos, la tesis metafisicalista sostiene que cuando tenemos un hecho en el mundo, existe una y sólo una manera privilegiada en el mundo de dividir ese hecho en objetos y propiedades; es decir, es la idea de que dos enunciados gramaticalmente diferentes no pueden describir un mismo hecho[34].

2.2.1.6 [Mesa]

> Que haya una mesa es simplemente que haya partículas organizadas mesísticamente. (Rayo, 2015, p. 27).

Quien acepta [Mesa] considera que no existe ningún absurdo cuando se afirma, que haya una mesa *es simplemente* que haya partículas organizadas mesísticamente, y viceversa. Quien rechaza [Mesa], considera que es absurdo afirmar que haya una mesa *es simplemente* que haya partículas organizadas mesísticamente, y viceversa. Se considera que pueden existir partículas organizadas mesísticamente y que tal organización no sea una mesa[35].

---

34 Las tesis que defiende el metafisicalismo las explicamos con más detalle en la sección: 2.4 Metafisicalismo, p. 44 de esta investigación.

35 Por ejemplo, van Inwagen, (1990) en Núñez Erices, G. G. (2019), considera que pueden existir partículas organizadas mesísticamente pero que no conformen a una mesa. La idea es que no es tan fácil ofrecer una explicación que nos diga con precisión cuáles son los límites y criterios claros que utiliza el composicionalista para determinar cuándo dos o más objetos son parte o conforman a otros objetos, es decir, en qué momento podemos decir que dos o más objetos componen algo. Utilizando el ejemplo de [Mesa], explicaré a grandes rasgos la objeción que hace van Inwagen. Supongamos que todo objeto físico tiene un límite, por ejemplo, la materia de la cual está compuesta una mesa tiene un límite. Una mesa es un objeto físico la cual tiene un límite bien definido. Que existan partículas organizadas mesísticamente es simplemente que sea una mesa. Si observamos a la mesa de lejos parece que tiene una forma aislada bien definida y que reconocemos que tiene un límite evidente que podemos determinar dónde empieza y donde termina. Sin embargo, si observamos a la mesa con un microscopio muy potente advertiríamos que la materia que la constituye se nos presenta, esta vez, como una gran colección de partículas separadas unas de otras en el espacio vacío. Si avanzamos en nuestra inspección con el microscopio apreciaremos que algunas partículas son parte de la mesa, mientras que para muchas otras partículas en los entornos de la mesa no parece ser tan claro que tales partículas pertenezcan o no a la mesa. En este sentido, podemos tomar como límite de la mesa al tomar sólo una porción de estas partículas que están en esa región indeterminada. Sin embargo, si escogemos otra porción de partículas que están en esa región el límite sería otro. De tal manera que, existen muchos conglomerados de partículas que se encuentran ubicadas en la línea fronteriza de la mesa. Así, existen también varios límites posibles para la mesa los cuales son diferentes unos de otros. En este sentido, si hay varios límites que pueden ser límites de la mesa, se dice que hay varias mesas, donde se supone que sólo hay una mesa bien definida físicamente. ¿Cuál es el criterio para determinar que uno o más objetos conforman realmente a otro objeto? Si no podemos saber un límite exacto que nos especifique en

Para alguien que no acepta [Mesa] significa una expansión innecesaria en la ontología básica, dado que su ontología sólo requiere de partículas fundamentales para explicar el estado actual del mundo. Aceptar el enunciado [Mesa] implicaría tener una ontología sobrecargada y completamente innecesaria. Ya que consideran que existe una y solo una manera fundamental de ser el mundo y que las descripciones que se hacen del mundo son privilegiadas y fundamentales.

Nótese que para estas visiones existe una única manera de identificar las regiones correctas del espacio de posibilidades. Una de las desventajas de estas posiciones es que al admitir una única manera de entender el espacio de posibilidades es que tendrán problemas para explicar logros cognitivos que vayan más allá de estas descripciones. Desventajas que podrían evitarse si teorizamos con la idea de que podemos expandir nuestro compromiso ontológico de existencia, aceptando que podemos describir un mismo hecho de diferentes maneras y no sólo de una manera privilegiada o fundamental tal como lo demanda la postura metafisicalista.

2.2.1.7 [Dinosaurios]

> Que el número de dinosaurios sea cero es simplemente que no haya dinosaurios. (Rayo, 2015, p. 27).

Quien acepta el enunciado [Dinosaurios] considera que cuando el número de los dinosaurios es cero *es simplemente* que no hay dinosaurios, y viceversa. Que no haya dinosaurios *es simplemente* que el número de los dinosaurios es cero. Quien rechaza [Dinosaurios] considera que del hecho de que el número de los dinosaurios sea cero no es suficiente para estar justificados en decir que no hay dinosaurios, y viceversa, del hecho de que no haya dinosaurios no es suficiente para estar justificados que el número de los dinosaurios sea cero; ya que considera que existe un espacio teórico que debe justificarse entre: que el número de los dinosaurios sea cero y, que no haya dinosaurios. Metafóricamente hablando, quien rechaza el enunciado [Dinosaurios] considera que, si fuera el caso de que Dios se asegurara de que no hubiera dinosaurios, eso no bastaba para que el número de los dinosaurios fuera cero, sino que Dios tendría adicionalmente que añadir el número cero al mundo. En este sentido, el caso del enunciado [Dinosaurios] es muy semejante a los casos de [Muerte], [Mesa], etc., arriba expuestos.

Un defensor de una ontología básica y muy modesta preferiría rechazar este tipo de enunciados de identidad para no contraer ningún compromiso metafísico con la existencia de

qué momento dos más cosas en realidad conforman algo y cuando no, habrá un límite que será ontológicamente confuso. En este sentido, si no es claro cómo trazar tales límites se considera que se amplía infructuosamente la ontología del mundo.

objetos que no formen parte de una descripción básica o fundamental de la realidad; pero, de nueva cuenta, se vería en problemas para explicar aspectos relacionados con la epistemología de estas oraciones, en tanto que no tendría maquinaria suficiente para explicar logros cognitivos al adquirir diferentes descripciones de este fragmento de la realidad.

2.4 Metafisicalismo

Quien rechaza los enunciados como [Dinosaurios], [Mesa], [Muerte], [Rojo], etc., arriba expuestos puede considerarse que defiende una posición "metafisicalista", esto es, considerar que el mundo está construido por una colección de objetos y propiedades y que tales objetos y propiedades son esenciales en la manera de ser el mundo. Desde este punto de vista, la posición metafisicalista[36] es una posición con un compromiso ontológico de existencia bastante exigente, porque parte del supuesto de que hay una manera fundamental de ser el mundo, y porque considera que las descripciones que hacemos acerca del mismo son privilegiadas y objetivas. El metafisicalismo defiende dos ideas.

(i) ¿Cómo es el mundo? y,

(ii) ¿Cómo es el vínculo entre lenguaje y el mundo?

De acuerdo con **(i)**, considera que existe una manera genuina (única) de separar un hecho en objetos y propiedades. Por ejemplo, consideremos el hecho de que "Sócrates murió". El metafisicalista cree que hay una y sólo una manera particular de decir cómo está dividido el hecho de que "Sócrates murió". Esto es, (supongamos) que el hecho se divide en el objeto Sócrates y en la propiedad de morir. De acuerdo con el metafisicalista, existe una manera privilegiada de describir cómo es el mundo y que tal manera es fundamental porque, de hecho, corresponde a como en realidad es el mundo.

De acuerdo con **(ii)**, la tesis lingüística considera que, para describir un hecho, debe de haber una correspondencia entre la estructura sintáctica del enunciado y la estructura metafísica

---

36 Por ejemplo, Sider, Theodore, 2013 en Núñez Erices, G. G. (2019), considera que el mundo está terminado y algunos conceptos son privilegiados y que expresan de manera fundamental y con exactitud determinados estados de las cosas. La idea es que la realidad tiene una estructura fundamental de cómo es el mundo y que está siendo privilegiada sobre las demás. En parte, el asunto es que si se acepta que no se pueden trazar con claridad límites cuando dos o más objetos conforman a otros objetos compuestos, tal imprecisión del mundo desemboca en que comienzan a surgir una gran cantidad objetos. Esto incita a favorecer una ontología fundamental la cual considera que la composicionalidad no puede realizarse, pues si los objetos no están conformados por partes, no hay que multiplicar innecesariamente nuestra ontología.

del hecho.

> La tesis central del metafisicalismo es que, para que un enunciado atómico sea verdadero, su forma lógica tiene que coincidir con la estructura metafísica del hecho que describe. Por ejemplo, si la forma lógica de "Ángeles está sentada" es *"P(a)",* entonces el enunciado sólo puede ser verdadero si la división canónica del hecho de que "Ángeles esté sentada consiste en un objeto (Ángeles) y en una propiedad (la propiedad de estar sentada). (Rayo, 2015, p. 55).

Volvamos a nuestro ejemplo, el hecho de que "Sócrates murió" y, consideremos que su estructura metafísica de tal hecho consiste en el objeto Sócrates y la propiedad de morir, en este sentido, el enunciado "Sócrates murió" (supongamos) que describe correctamente el hecho de que "Sócrates murió", porque el objeto Sócrates corresponde a Sócrates y la propiedad de murió corresponde a murió tal como lo reclaman las dos tesis que componen al metafisicalismo. Pero, por ejemplo, el enunciado "sucedió la muerte de Sócrates", no corresponde a la estructura sintáctica de "Sócrates murió" porque la estructura sintáctica de "sucedió la muerte de Sócrates", es diferente de la estructura metafísica del hecho expresado por medio del enunciado "Sócrates murió", o lo que es lo mismo, no hay una correspondencia entre la estructura sintáctica del enunciado y la estructura metafísica del hecho.

Quien rechaza la concepción metafisicalista, es decir, el composicionalista, considera que existen diferentes maneras de describir un hecho, por ejemplo, el hecho de "Sócrates murió" puede describirse o dividirse en más componentes y no sólo en uno privilegiado. Por ejemplo, de acuerdo con la tesis composicionalista, no solamente es posible dividir el hecho de que "Sócrates murió" en el objeto Sócrates y la propiedad de morir, tal como lo podría considerar el metafisicalista, sino que tal hecho podría dividirse, por ejemplo, en el objeto Sócrates, el universal "ser la muerte de" y la instanciación de dicho universal en el objeto "Sócrates". Las conceptualizaciones que propone el composicionalista para describir algún hecho, sólo son diferentes formas en que nuestro lenguaje puede describir un hecho de diferentes maneras.

Uno de los problemas que tiene la posición metafisicalista es que considera que hay una manera fundamental de cómo es el mundo y que está siendo privilegiada sobre las demás, es decir, que una de esas maneras de ser el mundo corresponde a cómo es el mundo de manera fundamental[37]. Uno de los problemas a los que se enfrenta el metafisicalista es explicar, por

[37] La concepción fundacionista, en general, sostiene que una creencia básica, no referencial, indubitable parten las demás creencias, creencias que a su vez están sostenidas en otras creencias. Podemos pensar lo anterior imaginándonos la punta de un iceberg, la punta del iceberg sería una creencia básica, no referencial, indubitable y, dichas creencias son sostenidas por otras creencias. "Para el fundacionista cada creencia está en la cima de una

ejemplo, cuando una manera de ser del mundo es más o menos fundamental que otra.

El composionalista considera que la forma en que se desarrolla el espacio de posibilidades está en función de qué enunciados de identidad aceptamos. Por ejemplo, que Héspero sea fósforo es, simplemente, aceptar que el hecho de que Héspero es Fósforo y viceversa o, que "X" este hecho de agua es simplemente aceptar que "X" está hecho de H_2O. En este sentido, la posición composicionalista es una postura más neutral sobre naturaleza metafísica del mundo. La concepción del mundo se desarrolla conforme se va teorizando, en vez de presuponer desde el inicio ideas fundacionistas acerca de cómo construir el mundo.

Una de las ventajas de rechazar la tesis metafisicalista y aceptar la tesis composicionalista es que estamos abiertos para aceptar que podemos describir un hecho no sólo de una manera fundamental como lo sostiene la tesis metafisicalista; sino que, se abre el espacio de posibilidad para admitir enunciados de identidad como los explicados en los párrafos de arriba, por ejemplo, los enunciados de identidad: [Rojo], [Muerte], [Mesa], [Dinosaurios], etc.[38]

Por ejemplo, de acuerdo con el composicionalismo el enunciado [Muerte] es verdadero, (porque por lo menos) los siguientes dos enunciados:

(i) "Que suceda la muerte de Sócrates".

(ii) "Que Sócrates muera",

describen el mismo hecho a pesar de que no corresponda la estructura sintáctica de (i) y (ii) con la estructura metafísica del hecho. Sin embargo, desde la posición metafisicalista los enunciados (i) y (ii) no describen el mismo hecho, dado que (i) y (ii) son enunciados con dos formas sintácticas diferentes, tal como lo proclama la tesis lingüística del metafisicalista arriba expuesta.

Rechazar el metafisicalismo nos permite admitir enunciados de identidad del tipo (i) y (ii), a pesar de que tengan formas sintácticas diferentes. Rechazar el metafisicalismo nos permite

---

pirámide que descansa en firmes y seguros cimientos cuya estabilidad y seguridad no deriva de los pisos o secciones." (Sosa. E. 1992, p. 248).

38 No es que haya un espacio de posibilidades objetivamente correcto, sino que tenemos que pensar en los espacios de posibilidades como herramientas que sean útiles; una vez que tenemos una herramienta útil comenzamos a tratar de determinar qué posibilidades aceptar y a partir de eso estamos describiendo el mundo. Podemos preguntarnos cuál de esas posibilidades es verdadera o qué enunciado es verdadero en tanto que hace una distinción entre las posibilidades de nuestro espacio de posibilidad y se compromete con el lado de esa distinción que es la que consideramos correcta. De acuerdo con esta concepción de verdad para que tenga sentido hablar de verdad debemos de tener ya una concepción del espacio de posibilidades con las cuales trabajar. En este sentido, es que podemos hablar de verdad, lo que ocurre cuando hablamos de verdad es que ya nos comprometimos con una concepción de ser el mundo de un conjunto de distinciones. Así, la concepción de verdad es una que se puede utilizar de manera útil para distinguir entre distintas concepciones del espacio de posibilidades. En este sentido, se puede hablar de verdad, pero, es una concepción de verdad relativa a la concepción del espacio de posibilidades.

aceptar una gran cantidad de enunciados con los que se puede teorizar. Por ejemplo, el enunciado de identidad [Dinosaurios], el hecho de aceptar que no haya dinosaurios es simplemente aceptar que el número de los dinosaurios sea cero. Si se rechaza la tesis metafisicalista se incrementa significativamente el rango de enunciados de identidad que podemos aceptar para teorizar y, adicionalmente, si se aceptan enunciados de identidad en el sentido de los enunciados de arriba expuestos, tenemos más elementos para solucionar problemas en filosofía de las matemáticas. Por ejemplo, podemos encontrar una respuesta al dilema planteado por Benacerraf[39]. Esto es, se abre la posibilidad de lograr explicaciones a nivel epistémico que dependan de la aceptación de distintos enunciados de identidad. Lo anterior es posible porque nos estaremos enfrentando a un mismo hecho descrito de diferentes formas.

En síntesis, el trivialista platónico considera que es un error suponer como lo hace el metafisicalista que si dos enunciados son gramaticalmente diferentes no pueden describir el mismo hecho.

2.5 Composicionalismo

El composicionalismo considera que no existe una regla esencial en la cual basarnos para dividir el mundo en objetos y propiedades. El composicionalismo es una posición más neutral acerca de la naturaleza metafísica del mundo, porque sostiene que los objetos y propiedades que describamos al explicar el mundo estarán en función de los medios lingüísticos que utilicemos para nuestra descripción acerca del mismo. Según la tesis composicionalista, "cuando Dios se aseguró que no hubiera dinosaurios, Dios ya había hecho todo lo que tenía que hacer para garantizar que el número de los dinosaurios fuera cero" (Rayo, 2015, p. 28). Esto es, el hecho de que no haya dinosaurios es ya el hecho de que el número de los dinosaurios sea cero; no se tiene que hacer nada adicional para justificar que el número de los dinosaurios sea cero, pues no hay dinosaurios y eso basta para estar justificados que el número de los dinosaurios sea cero.

De acuerdo con la tesis composicionalista, la concepción del mundo que nosotros tengamos se desarrollará poco a poco conforme vamos teorizando, en lugar de suponer ideas fundacionistas sobre cómo es el mundo, tal como lo considera la tesis metafisicalista.

Una vez que uno acepta enunciados de identidad de la manera en que los hemos venido explicando, podemos aceptar enunciados de identidad que nos sean útiles para resolver problemas

39 Esto lo explicamos con mayor detalle en el Capítulo III, p. 54 de esta investigación.

científicos y/o filosóficos. Por ejemplo, nos permite solucionar problemas en filosofía de las matemáticas. Podemos aceptar el enunciado de identidad como [Dinosaurios], lo anterior supone comprometerse con la existencia de los números, sin comprometerse que la existencia de los números se comprometa con la existencia de un tercer reino donde se encuentran los objetos abstractos. La postura del "trivialismo platónico" se distingue por que defiende no tanto, a [Dinosaurios] sino a [Números], es decir, Que el número de las *Fs* sea *n* es simplemente que haya *n Fs.*

El enunciado de identidad [Números] es un principio que nos indica cómo hallar las condiciones de verdad de enunciados de identidad tipo [Dinosaurios]. Si sabemos esto, sabremos cuáles son las condiciones de verdad de afirmaciones de enunciados de identidad matemáticos como [Dinosaurios], es decir, que el número de los dinosaurios es cero, o sea, que no haya dinosaurios.

Así, si aceptamos enunciados de identidad tipo [Dinosaurios] y [Números], podemos reconocer dos tesis muy importantes acerca de la verdad matemática y que no son triviales. La primera tesis es que sabemos que hay números y, la segunda es que sabemos cuáles son las condiciones de verdad de enunciados tipo [Dinosaurios].

2.6 [Números]

> Que el número de las *Fs* sea *n* es *simplemente* que haya *n Fs.* (Rayo, 2015, p. 28).

Si al enunciado [Números] se le hace el mismo ejercicio que se le ha venido realizando a los ocho enunciados de identidad arriba expuestos, obtenemos los siguientes resultados. Quien acepta [Números] está de acuerdo en que al afirmar: que haya *n Fs es simplemente* que el número de las *Fs* sea *n,* y viceversa, que el número de las *Fs* sea *n* es *simplemente* que haya *n Fs.* Negar alguno de estos dos últimos enunciados de identidad desemboca en un absurdo, porque, como hemos visto, de acuerdo con la posición composicionalista ha abierto la posibilidad de que ambos enunciados refieran a la misma región del espacio de posibilidades; es decir, refieren al mismo hecho aunque sean gramaticalmente distintos. En este sentido, el enunciado [Números] es análogo a los ocho enunciados de identidad arriba explicados.

A continuación, recapitulamos los enunciados de identidad que se han explicado a lo largo de este capítulo.

Enunciados de Identidad	**Se dice que son verdaderos de acuerdo con:**

1) [Agua] Que haya agua es simplemente que haya H_2O.	**[Agua]** Lo que sugiere la Química es que agua y H_2O son la misma distinción.
2) [Hermano] Que Julián sea un hermano es simplemente que comparta un padre con alguna otra persona.	**[Hermano]** Verdadero *a priori*, se justifican sólo reflexionando a la luz del lenguaje.
3) [Venus] Que Susana viaje a Héspero es simplemente que Susana viaje a Fósforo.	**[Venus]** Verdadero por analiticidad (dado que la astronomía ha probado que Héspero es idéntico a Fósforo).
4) [Calor] Que algo esté caliente es simplemente que su energía cinética promedio sea alta.	**[Calor]** Verdadero de acuerdo con la/s teoría/s científica/s aceptada/s actualizada.
5) [Rojo] Que María experimente la sensación de ver rojo es simplemente que María está en el estado cerebral R.	**[Rojo]** Verdadero de acuerdo con la posición de Filosofía de la Mente con la que uno esté comprometido.
6) [Muerte] Que ocurra la muerte de Sócrates es simplemente que Sócrates muera.	**[Muerte]** Verdadero dependiendo de la posición filosófica con que uno esté comprometido, Metafisicalista o Composicionalista.
7) [Mesa] Que haya una mesa es simplemente que haya partículas organizadas mesísticamente.	**[Mesa]** Posición filosófica 1. No tiene sentido hablar de regiones del espacio de posibilidades donde existan partículas organizadas mesísticamente y que tal organización de partículas no sea una mesa, lo anterior es un pseudoproblema. Posición filosófica 2. Tiene sentido hablar de regiones del espacio de posibilidades donde existan partículas organizadas mesísticamente y que tal organización de partículas no sea una mesa, lo anterior no es un pseudoproblema.
8) [Dinosaurios] Que no haya dinosaurios es simplemente que el número de dinosaurios sea cero.	**[Dinosaurios] (Posición composicionalista)** No aceptar la existencia del cero, una vez que se aceptó [Dinosaurios], es un absurdo. Ya que el **hecho que describe** que no haya dinosaurios está ya contenido el mismo hecho de que el número de los dinosaurios sea cero.
9) [Números] Que el número de las *Fs* sea *n* es simplemente que haya *n Fs*.	**[Números] (Posición composicionalista)** No aceptar la existencia de números una vez que se aceptó [Números], es un absurdo. Ya que el hecho de que el número de las *Fs* sea *n* está ya contenido el mismo hecho de que haya *n Fs*.

Los nueve enunciados de identidad hasta aquí explicados dan cuenta que las distinciones que hacemos de las regiones del espacio de posibilidades están estrechamente ligadas a un compromiso ontológico de existencia directamente dependiente de los enunciados de identidad previamente aceptados de acuerdo con nuestras descripciones de cómo creemos que es el mundo. Para el trivialista platónico no importa cómo se "representan" los enunciados de identidad, lo que realmente es importante es la manera en que se considera cómo "es" el mundo para nosotros.

Cada uno de los enunciados de identidad representan distinciones de las regiones del espacio de posibilidades. Lo interesante de los enunciados de identidad, (en parte) consiste en que cada enunciado con el operador *"es simplemente"* refiere a una misma distinción de la región del espacio de posibilidades. Es decir, que lo que está a la izquierda del operador "*es simplemente"* es equivalente o describe el mismo hecho que se describe por el enunciado que está a la derecha del operador "*es simplemente",* y viceversa, lo que está a la izquierda del operador "*es simplemente"* es una descripción distinta del mismo hecho que está descrito a la derecha del operador "*es simplemente"*.

Sin embargo, que sucede con "un número infinito de números primos es simplemente que hay una infinidad de números primos" y ¿cómo eso resuelve el problema de nuestro conocimiento del infinito?

Existe una diferencia entre tener información trivial cómo que hay un número infinito de números primos es simplemente que hay una infinidad de números primos, *versus* tener información utilizable para un cierto propósito. Por ejemplo, supongamos que queremos responder la pregunta: (w) ¿el conjunto de los números pares que esta contenido dentro de los números naturales es menor al conjunto de los números naturales? No es sencillo demostrar que la respuesta a esta pregunta sea verdadera. Sin embargo, queremos saber si a partir de los axiomas y reglas de inferencia con los que nuestro sistema cuenta, podemos determinar que (w) es verdadero. El reto consiste demostrar que, con la información con la que cuenta nuestro sistema podamos decir que (w) efectivamente es verdadero. Para lograr nuestro cometido necesitamos desenmarañar el método de organización que se encuentra contenido en la estructura lógica del tal enunciado. Lo anterior se presenta como un misterio a resolver, es decir, esclarecer, cómo es que nuestros axiomas y reglas de nuestro sistema logran determinar un valor de verdad para (w). Explicar esto implica que lo estamos modelando como la transferencia de información del fragmento: ¿la estructura lógica de (w) es verdadera? Al fragmento, se logró probar que la estructura lógica de (w) **sí** es verdadera.

Si se consigue probar más teoremas con información que estaba disponible para propósitos ya sabidos, es decir, propósitos (triviales) consideramos que vamos avanzando. Avanzamos en tanto que logramos describir, es decir, probar más teoremas y esa información se puede utilizar para explicar más propósitos, por ejemplo, para dar cuenta de que otro enunciado es un teorema y, cuando terminamos desenmarañando que (w) es verdadera, lo que sucede es que se logró ampliar el rango de recursos (informacionales) disponibles para el propósito de contestar la pregunta, ¿(w) es verdadera? A su vez, estos recursos informacionales pasan a ser parte de un conjunto de información matemática (trivial) disponible para ser utilizada para responder, no sólo los propósitos triviales, sino para responder nuevos propósitos que aún no son considerados como triviales. Posteriormente vuelve a comenzar el ciclo, es decir:

1.- Tenemos información matemática trivial y,

2.- Existe un propósito matemático que no es trivial.

3.- El reto consiste en descifrar el enigma de (2), es decir, explicar cómo con la información matemática trivial con la que se cuenta en (1), podemos desenmarañar el propósito matemático que aún no es trivial, es decir, (2).

Posibles opciones:

3.1.- Si se logra desenmarañar el propósito matemático que no es nada trivial, entonces el conocimiento matemático no trivial pasa a ser parte del conocimiento matemático trivial.

3.2.- Si no se logra desenmarañar el propósito matemático que no es nada trivial, entonces el conocimiento matemático no trivial aún no es parte del conocimiento matemático trivial.

Cuando se aceptan enunciados de identidad, no es correcto decir que el enunciado que está a la derecha del operador *"es simplemente"* es más fundamental que el enunciado que está a la izquierda del operador; pues, de acuerdo con el composicionalismo, no existe tal cosa como un enunciado de identidad más fundamental que otro. Lo que existe son diferentes descripciones del mundo que refieren a un mismo hecho o, si se quiere, se puede entender como descripciones diferentes que refieren a la misma región del espacio de posibilidades.

Las distinciones de las regiones del espacio de posibilidades estarán en función de nuestro quehacer científico, y/o filosófico, de acuerdo a cómo nosotros describimos el mundo a partir de los enunciados de identidad previamente aceptados.

2.7 Conclusiones del capítulo II

De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, cuando nos preguntamos ¿cómo es el mundo? lo hacemos apoyándonos en una acumulación de posibilidades y, es a partir de esa acumulación de posibilidades que determinamos cómo es el mundo. Cuando investigamos el mundo tenemos que decidir con qué posibilidades vamos a teorizar y categorizar, es decir, con qué posibilidades vamos a trabajar para llevar a cabo nuestra investigación acerca del mundo. Lo anterior, con el fin de poder optar por una decisión entre las diferentes opciones del cúmulo de posibilidades. De esta manera, mantendremos algunas posibilidades como pretendientes a la verdad y rechazaremos a algunas otras posibilidades por considerarlas como falsas. Serán escogidas de entre las distintas posibilidades aquellos enunciados de identidad que nos posibiliten sistematizar las observaciones realizadas del mundo.

La elección del espacio de posibilidades que vamos a utilizar para trabajar estará en función de aquellas posibilidades que nos sean útiles para resolver problemas, esto es, una vez que se ha elegido qué espacio de posibilidades es útil para resolver alguna tarea, emprendemos la labor de diagnosticar qué posibilidades admitir. Al realizar lo anterior, estamos a su vez describiendo cómo es el mundo para nosotros a partir de los enunciados de identidad previamente aceptados.

Que las matemáticas tengan condiciones de verdad triviales, es la idea de que no se requiere nada del mundo para saber que tales verdades son genuinas, pues las verdades matemáticas están cimentadas en los enunciados de identidad previamente aceptados que consideramos que describen el mundo matemático. En este sentido, se considera que tienen condiciones de verdad triviales. Por ejemplo, podemos tener conocimiento matemático (trivial) de las siguientes operaciones: 5+5=10, 3x5=15, 1-1=0, etc. Sin embargo, de acuerdo con el trivialismo platónico, no siempre es claro conocer las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas que son mucho más complejas que los ejemplos anteriores; pues del hecho de que las condiciones de verdad de las matemáticas sean triviales, no implica que es también trivial conocer sus condiciones de verdad[40].

[40] Esto último lo explicamos con mayor detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo III

Respuesta de Agustín Rayo al dilema planteado por Benacerraf

Capítulo III: Respuesta de Agustín Rayo al dilema planteado por de Benacerraf

3.1 Introducción al capítulo III

En el capítulo anterior, explicamos que el enunciado de identidad [Dinosaurios]

Que no haya dinosaurios, es simplemente que, el número de los dinosaurios es cero involucra a diferentes descripciones del mundo, a saber:

a) Que no hay dinosaurios.

b) Que el número de los dinosaurios es cero.

c) Que hay 0 dinosaurios.

y que tales descripciones refieren la misma región del espacio de posibilidades.

Lo anterior, a pesar de ser enunciados gramaticalmente distintos. De esta manera, no es necesario ofrecer una explicación adicional que ligue al enunciado (a) con el enunciado (b) y/o (c), pues se considera que en el enunciado (a) está descrito el mismo hecho que expresa la descripción del enunciado (b) y/o (c) y viceversa (una vez que hemos aceptado [Dinosaurios] como parte de nuestra descripción del mundo).[41] El enunciado (b) y/o (c), no es un hecho adicional que tenga que justificarse aparte, sino que, de acuerdo con el composicionalismo, es la idea que un mismo hecho puede describirse de maneras diferentes.

En este sentido, se considera que las diferentes descripciones que se realizan de un mismo hecho no son más o menos fundamentales entre ellos; por lo que no existe un espacio teórico que deba justificarse entre el enunciado (a) y el enunciado (b) y/o (c), tal como lo señala el dilema planteado por Benacerraf.

Así, la tarea de este capítulo será explicar a detalle esta última parte.

---

41 ¿Y qué hacemos con la identidad de Euler? En este caso, las estructura matemática del enunciado codifica una especie de condiciones de verdad, pero el proceso de codificación que requiere es un proceso intelectual no obvio. Lo que tenemos que hacer, de acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico es un ejercicio mental que no es para nada trivial. El fin consiste en revelar de esa forma matemática las condiciones de verdad que contiene el enunciado matemático. Si uno toma la identidad de Euler, ese enunciado codifica condiciones de verdad triviales, el chiste es que las codifica, pero de una manera demasiado complicada; una versión, por ejemplo, de 2+3= 6, pero con un nivel de codificación extremadamente difícil. Es importante diferenciar entre las condiciones de verdad de un enunciado y, las condiciones que tiene que cumplir un usuario para que pueda usar el enunciado competentemente. Ambas condiciones son muy diferentes. El hecho de que un enunciado de identidad en matemáticas tenga condiciones de verdad triviales no quiere decir que sea trivial conocerlo.

3.2 Objetivos del capítulo III

En este capítulo abordare las siguientes preguntas, ¿cuál es la respuesta que ofrece Rayo al dilema planteado por Benacerraf? y ¿cuáles son algunas de las ventajas y desventajas de teorizar a partir de los enunciados de identidad?

La importancia de responder a tales cuestionamientos consiste examinar cuál es la estrategia que utiliza Rayo para dar cuenta de los objetos abstractos.

La hipótesis que busco defender en este capítulo es que no se requiere interacción causal con los objetos matemáticos para dar cuenta de estos.

Para hacerlo procederé en cuatro pasos. Primero, explicamos la respuesta que ofrece el defensor del trivialismo platónico a dicho dilema de acuerdo con el texto de Rayo (2015); sólo abordaremos algunos pasajes de las sesiones 2. ¿Qué tipo de correspondencia existe entre nuestro lenguaje y la realidad que representa? y 4. Una semántica trivialista para el lenguaje de la aritmética. Segundo, utilizamos algunas de las conclusiones a las que llegamos en el Capítulo I de esta investigación, con el fin de hacer énfasis en que no existe un espacio teórico que tenga que justificarse entre las verdades de las oraciones matemáticas y la justificación que requiera interacción causal con los objetos matemático. Tercero, explicamos algunas de las consecuencias filosóficas de aceptar la propuesta del trivialismo platónico al dilema planteado por Benacerraf. Cuarto, explicamos porque no es correcto hablar de regiones del espacio de posibilidades objetivamente correctas. Finalmente, en la Sec. 3.4, esbozo algunas conclusiones.

3.3 Agustín Rayo: una respuesta al dilema planteado por Benacerraf

La propuesta del trivialismo platónico considera que, aunque sea el caso que nadie hable de números, los números van a existir. La idea es la siguiente, se considera que para que existan los números es suficiente con que el número de los dinosaurios sea cero y para que el número de los dinosaurios sea cero es suficiente con que no haya dinosaurios y es el caso que no hay dinosaurios. En este sentido, lo que el mundo tiene que poner de su parte para que el enunciado “el número de los dinosaurios sea cero” es simplemente “que no haya dinosaurios”.

> De acuerdo con el trivialismo platónico, el mundo matemático es como es independientemente de cómo lo describimos. Esto significa, en particular, que hay números independientemente de si alguien asevera enunciados que contengan expresiones matemáticas. Si no hubiera expresiones matemáticas, no hablaríamos explícitamente de objetos matemáticos, pero los objetos matemáticos seguirían existiendo. (Rayo, 2015, p. 86).

Si consideramos una región del espacio de posibilidades en donde no existiera ninguna mente capaz de realizar abstracción matemática y, además, se da el caso de, “que no haya dinosaurios”. En esa posibilidad, el mundo es tal que colocó todo lo que tenía que colocar para que “el número de los dinosaurios fuera cero” sea una oración verdadera. En este caso, el enunciado: “el número de los dinosaurios es cero” se le considera como verdadero de acuerdo con esa región del espacio de posibilidades. De tal forma que, a pesar de que no hubiera ninguna mente capaz de abstracción matemática que pudiera describir con terminología numérica o no numérica el hecho de: “que no haya dinosaurios *es simplemente* que el número de los dinosaurios sea cero”, los números existirían. En este sentido, lo único que el mundo tuvo que poner de su parte es solamente que no hubiera dinosaurios, en esta posibilidad el mundo ya puso todo lo que tenía que poner. Así, el número de los dinosaurios es cero contaría como verdadero con respecto a ese mundo.

De acuerdo con el dilema de Benacerraf, existe un vacío teórico que debe justificarse entre: “(i) que no haya dinosaurios y, (ii) que el número de los dinosaurios sea cero. (Rayo, 2015, p. 103).” Según la propuesta del trivialismo platónico, no existe un vacío teórico que explicar entre los enunciados (i) y (ii), pues de acuerdo con el composicionalismo el enunciado (ii), está ya descrito en el enunciado (i).

La propuesta del trivialismo platónico es la idea de que podemos captar objetos abstractos a través del lenguaje. De esta forma, no es necesario responder a la pregunta, ¿cómo obtenemos conocimiento matemático bajo una interacción con el mundo causalmente constituido como lo demanda el dilema de Benacerraf?

Benacerraf considera que una buena epistemología de las matemáticas debe explicar a la vez, la verdad de las oraciones matemáticas y la verdad de las oraciones del lenguaje natural que refieren a objetos empíricos bajo una misma teoría de la verdad. Siguiendo a Benacerraf, existe un espacio teórico que debe de justificarse entre la parte semántica y la parte epistémica de las oraciones matemáticas.

De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico:

> […] el dilema [de Benacerraf] no es un dilema genuino porque hace una presuposición falsa. Presupone que hay un espacio teórico entre el hecho de que no haya dinosaurios y el hecho de que el número de dinosaurios sea cero. Presupone, por lo tanto, un espacio teórico que

> tendríamos que llenar de alguna manera (tal vez postulando que tenemos una facultad cuasi perceptual que nos permite "observar" el mundo abstracto de los objetos abstractos) […]. (Rayo, 2015, p. 103).

Cuando realizamos distinciones en el espacio de posibilidades con las cuales teorizamos y las aceptamos como verdaderas, nos comprometemos con ellas, pero no existe un espacio teórico que deba justificarse tal como lo demanda Benacerraf, entre una semántica y epistemología. Esto es debido a que, para dar cuenta de que nuestro conocimiento matemático es verdadero y que está justificado, no es necesario explicar cómo obtenemos conocimiento matemático por medio de una interacción causal con el mundo físico; esto es, el mundo no es necesario para explicar las condiciones de verdad y la justificación de las oraciones verdaderas de la matemática.

> [...] una ventaja fundamental de aceptar [Número] es que quedaríamos exentos de responder a la siguiente pregunta incómoda: Sé que no hay dinosaurios. Lo que me gustaría entender ahora si *también* es cierto que el número de los dinosaurios es cero. Me gustaría entender, además, cómo es que podríamos estar justificados para tener una opinión al respecto, dado que no gozamos de ningún tipo de acceso causal al mundo de los objetos abstractos. Alguien que acepta [Números] diría que cuando llegamos a la conclusión de que no hay dinosaurios ya habremos llegado a la conclusión de que el número de los dinosaurios es cero, porque *no hay diferencia* entre lo uno y lo otro: que el número de los dinosaurios sea cero es simplemente que no haya dinosaurios. Quien hace la pregunta incómoda introduce, por lo tanto, una presuposición falsa en la discusión: Presupone que hay un espacio teórico entre que no haya dinosaurios y que el número de los dinosaurios sea cero. Dado que es un error pensar que exista tal espacio teórico, la pregunta incómoda no es realmente una pregunta legítima (Rayo, 2015, p. 83).

Al trabajar con enunciados de identidad como lo propone Rayo, no se adquiere el compromiso de explicar la transferencia de un lado de la identidad al otro, por lo que no es necesario postular de una interacción causal con el mundo físico que dé cuenta del espacio teórico que tenga que justificarse entre el hecho de "que no haya dinosaurios" y "el hecho de que el número de los dinosaurios sea cero"; pues, de acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, el hecho de "que no haya dinosaurios" es el mismo hecho de "que el número de los dinosaurios sea cero". Simplemente se usan dos descripciones (ambas correctas) de la misma región del espacio de posibilidad.

En este sentido, una de las ventajas que tiene trabajar con enunciados de identidad es que uno puede rechazar la obligación de ofrecer un cierto tipo de explicación, como, por ejemplo, cuando tenemos que responder a la pregunta recalcitrante, ¿cómo obtenemos conocimiento matemático? Esto porque, de acuerdo con Benacerraf, es preciso ofrecer una epistemología para las oraciones matemáticas y para las oraciones del lenguaje natural que explique cómo obtenemos conocimiento matemático bajo una interacción causal con el mundo físico. De acuerdo con el trivialismo platónico, el dilema de Benacerraf, es un falso dilema, ya que no hay un espacio teórico que tenga que justificarse entre los enunciados (i) que el número de dinosaurios sea cero y (ii) que no haya dinosaurios.

De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, cuando se trabaja con enunciados de identidad no se adquiere la obligación de explicar el traspaso de un lado de la identidad al otro, pues se considera que en un lado de la identidad está ya el mismo hecho descrito que está en el otro lado de la identidad. De tal forma que:

El dilema de Benacerraf es un falso dilema

i. Que no haya dinosaurios.
Es falso que exista un espacio teórico, entre los enunciados **i.** y **ii.** que se tenga que justificar. El enunciado **ii.** no es un hecho adicional que deba explicarse tal como lo demanda Benacerraf.
ii. El número de dinosaurios sea cero. Por lo tanto, no existe un espacio teórico entre semántica y epistemología que deba justificarse. basta con que no haya dinosaurios para estar justificados que el número de los dinosaurios sea cero.

Así, no es necesario postular un espacio teórico para explicar cómo tenemos acceso a los objetos abstractos, ya que en el mismo enunciado de identidad [Dinosaurios], está el hecho que necesitábamos conocer para hablar con verdad de la existencia de los números.

> Un defecto crucial en algunos trabajos sobre filosofía de las matemáticas es que se presupone -sin argumento- que por el simple hecho de que dos enunciados tengan formas gramaticales diferentes describen hechos diferentes. En particular, se presupone que “no hay dinosaurios” y “el número de los dinosaurios es cero” describen hechos distintos. Esto ha generado un sinfín de teorías dedicadas a llenar el espacio teórico entre los dos hechos, y mi sospecha es que algunas de esas teorías no van a ningún lado. La gran ventaja de atacar el problema utilizando enunciados de identidad, como lo hacemos aquí, es que podemos tomar la decisión de cerrar ese espacio teórico y, así, enfrentar los retos de la filosofía de las matemáticas utilizando otro conjunto de herramientas. (Rayo, 2015, pp. 83-84).

En síntesis, de acuerdo con el trivialismo platónico, no es necesario postular una interacción causal con el mundo físico que relacione nuestro aparato perceptual con los objetos matemáticos para dar cuenta de estos, tal como lo demanda Benacerraf.

3.3.1 Algunas ventajas y desventajas de teorizar a partir de las regiones del espacio de posibilidades

Una de las ventajas que tiene teorizar a partir de las regiones del espacio de posibilidades es que con los enunciados de identidad cerramos un espacio teórico, por ejemplo, cuando tenemos que responder a la pregunta ¿por qué es cierto que cuando decimos que haya agua *es simplemente* decir que haya H_2O? o ¿por qué es cierto que el número de las *Fs* sea *n es simplemente* que haya *n Fs*?

Para el caso del enunciado [Agua], la respuesta del trivialista platónico consiste en decir, que haya agua *es simplemente* decir que haya H_2O, y viceversa[42]. Lo que se está declarando es que estar compuesto de agua implica ya el hecho de estar compuesto de H_20. El caso es que, si aprendemos que estar compuesto de agua es ya el hecho de estar compuesto de H_2O; si sabemos que algo está compuesto de agua, no tenemos por qué dar cuenta porque está hecho de H_2O, pues previamente habíamos llegado a la misma conclusión porque estar hecho de agua y estar hecho de H_2O describen al mismo hecho.

Para el caso del enunciado [Números], la respuesta es análoga al enunciado [Agua], es decir, que el número de las *Fs* sea *n es simplemente* que haya *n Fs,* y viceversa, porque que el número de las *Fs* sea *n,* es el mismo hecho que haya *n Fs;* es decir, ya se había llegado a la misma conclusión que se está hablando de la misma región del espacio de posibilidad. De esta manera, los enunciados de identidad nos permiten reducir explicaciones, ya que cuando no existe espacio teórico que tenga que justificarse entre "que A *es simplemente* que B", no se tiene que ofrecer una explicación de la forma, si es el caso que "B" porque es el caso que "A", y viceversa. Por lo tanto, aceptar que el número de las *Fs* sea *n es simplemente* decir que haya *n Fs,* es simplemente que el enunciado: que haya *n Fs,* no es un hecho adicional que necesite justificación complementaria.

Una de las desventajas de teorizar a partir de las regiones del espacio de posibilidades, es que nuestras distinciones para teorizar y categorizar están limitadas a las regiones del espacio de posibilidades previamente aceptadas, -como dijimos líneas arriba- al teorizar de esta manera perdemos recursos teóricos, pues hemos aceptado una manera de ser el mundo basado en los enunciados de identidad previamente aceptados por la ciencia y/o la filosofía. Lo anterior implica que nos quedamos con menos posibilidades para trabajar, esto es, menos posibilidades para

[42] Nuestro espacio de posibilidades está en función de qué enunciados de identidad aceptar. Cuando uno decide con que posibilidades trabajar uno también está aceptando qué distinciones utilizamos para teorizar y qué cuenta como posible y qué cuenta como imposible. Desde este punto de vista estamos aceptando lo que cuenta como necesario y lo qué cuenta como contingente.

teorizar y menos posibilidades para categorizar.

Cuando utilizamos enunciados de identidad, sellamos el espacio teórico entre “que A *es simplemente* que B”, por lo que abandonamos la posibilidad en donde conservamos un enunciado de identidad, por una parte, pero no tenemos el otro. Por ejemplo, cuando consideramos el enunciado de identidad: que haya agua *es simplemente* que haya H_2O, estamos perdiendo recursos teóricos para trabajar, es decir, perdemos la posibilidad de estudiar o considerar circunstancias en donde haya agua pero que el agua no sea H_2O.

De tal manera que, aceptar enunciados de identidad está en función de si estamos dispuestos a cerrar espacios de posibilidades y a aceptar la reducción de recursos teóricos que perdemos, ya que con los enunciados de identidad excluimos situaciones de nuestro espacio de posibilidades[43].

3.3.3 ¿Existe un espacio de posibilidades objetivamente correcto?

La propuesta del trivialismo platónico al asumir enunciados de identidad basados en las regiones del espacio de posibilidades no adquiere el compromiso de justificar espacios de posibilidades objetivamente correctos, pues considera que teorizamos y categorizamos de acuerdo con los enunciados de identidad que describen cómo creemos que es el mundo, más no, cómo de hecho es el mundo. Una cosa es pensar los espacios de posibilidad humana como nosotros los usamos comúnmente y los consideramos objetivos de acuerdo con un tiempo y espacio determinado, pero otra muy distinta es si las categorías que utilizamos son las correctas o las fundamentales. En este sentido, la representación del espacio de posibilidades no es objetiva, sino que es sólo una de tantas maneras posibles de representar el mundo en la medida que lo describimos en función de cómo éste es para nosotros.

Para realizar una distinción en las divisiones de las regiones del espacio de posibilidades, antes debemos fijar una verdad para poder comenzar a trabajar. Es solamente con respecto a un espacio de posibilidades cómo es posible ofrecer una respuesta a las posibilidades que consideramos como verdaderas. De acuerdo con la postura del trivialismo platónico, no es que haya un espacio de posibilidades correcto ni tiene sentido hablar de distinciones del espacio de posibilidades objetivamente correctas; sino que, sólo tiene sentido hablar de distinciones del

---

43 Aceptar enunciados de identidad implica que estamos comprometidos con una forma particular en que se describe el mundo. Esto es, nuestro compromiso ontológico de existencia estará determinado por los enunciados de identidad que aceptamos.

espacio de posibilidades que son verdaderas en función de su utilidad o no para teorizar. Tenemos que pensar los espacios de posibilidades como un tipo de herramientas que nos sean provechosas y ya que tenemos tales herramientas escogemos qué posibilidades admitir y, a partir de éstas, describimos el mundo. Pero no es correcto preguntarnos si las regiones del espacio de posibilidades con las que teorizamos y categorizamos son realmente descripciones correctas del mundo.

Es importante aclarar que la elección de los enunciados de identidad para teorizar y categorizar no es arbitraria. La elección depende de la utilidad de dichos enunciados, es decir, que tan bien nos sirven para entender, estudiar y describir el mundo de acuerdo con los objetivos que tengamos.

Normalmente, la elección de dichos enunciados depende del desarrollo de la ciencia y/o de la filosofía. Si bien nosotros podemos elegir un conjunto cualquiera de enunciados de identidad, estos tienen que mostrar ser útiles, y en caso de no serlo serán descartados.

3.4 Conclusiones del capítulo III

La propuesta del trivialismo platónico ofrece una respuesta al dilema planteado por Benacerraf, esto es, si aceptamos distinciones de las regiones del espacio de posibilidades en matemáticas, a partir de cómo nosotros creemos que es el mundo matemático; teorizamos y categorizamos con ellas, entonces las razones para explicar ese espacio teórico que considera Benacerraf que existe entre una semántica y epistemología (o contestar a la pregunta, ¿cómo justificamos nuestro conocimiento matemático?) estará justificado en las distinciones matemáticas que aceptamos como verdaderas.
Veamos a continuación en qué consiste la postura platonista de las matemáticas.

El platonismo o realismo matemático es la postura que considera que la realidad de los entes matemáticos tiene tres cualidades, son: i. abstractos, ii. tienen existencia alejada de la actividad humana y, iii. objetivos[44]. Si consideramos que las cualidades que tiene las entidades matemáticas no son concretas, comúnmente se aceptará que de existir tales entidades matemáticas

---

44 Si uno se compromete con una posición “antirealista”, entonces no se contraen compromisos ontológicos con la existencia de los objetos matemáticos, esto es, no es necesario comprometerse con la existencia de los objetos matemáticos (como abstractos). En la postura “antirrealista” las condiciones de verdad de los objetos matemáticos son diferentes a las condiciones de verdad que se dan en el lenguaje natural. En este sentido, el antirrealista se encuentra en un problema filosófico de índole semántico. El antirrealista se encuentra en un problema filosófico de índole semántico. Véanse, por ejemplo, Balaguer, M. (2018), Celluci, C. (2017), Beall, J. (1999.)

tendrían que ser abstractas.

Si aceptamos lo anterior, dar cuenta de la existencia de los objetos matemáticos es bastante complicado. No es sencillo aceptar la existencia de objetos que no podemos palpar, ver, o saborear, etc. Si uno se compromete con una posición platonista, es decir, "realista", sobre los objetos matemáticos se sostiene que cuando un *S* conoce una proposición matemática *p*, es porque *S* sabe que los objetos matemáticos de los que habla *p* corresponden a las características que se predican de ellos en *p*. El problema consiste en explicar: ¿cómo es posible establecer una explicación de la verdad matemática que no es causal con base en una explicación de la verdad con criterios causales? El acceso a los objetos empíricos es muy diferente al acceso de los objetos matemáticos. Al realista se le dificulta explicar ¿cómo se tiene acceso a los objetos matemáticos?, pues tales objetos (como lo hemos considerado) son abstractos. Por tal motivo, quien defiende una explicación "realista" frente a los objetos matemáticos, se enfrenta a un problema filosófico de índole epistémico.

La propuesta del trivialismo platónico que hemos venido explicando sostiene que las verdades matemáticas son triviales (son verdaderas sin importar cómo sea el mundo, tienen condiciones de verdad triviales), pero considera que sí existe el conocimiento matemático. Esta propuesta nos permite explicar cómo logramos referirnos a los objetos abstractos a partir de los enunciados de identidad que aceptamos, es decir, ofrece una respuesta semántica.

Para responder a la pregunta epistémica la postura del trivialismo platónico considera que podemos captar a los objetos abstractos a través del lenguaje. Se piensa que en realidad ya sabemos toda la matemática, y lo que hace falta es revelarla para consolidarla y volverla conocimiento trivial, pero para revelarla por completo es necesario desarrollar nuestro lenguaje para dar cuenta de ésta. En este sentido, para que la matemática sea verdadera el mundo ya no tiene que hacer nada. Así, no es necesario ofrecer una epistemología de las matemáticas que explique cómo obtenemos conocimiento matemático bajo una interacción con el mundo causalmente constituido.

De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, los objetos matemáticos son independientes del mundo físico. El mundo físico no es necesario para justificar las condiciones de verdad de las verdades matemáticas, por tal motivo, no se necesita postular una relación causal con los objetos matemáticos; pues no es necesario el mundo empírico para saber que las condiciones de verdad y la justificación de las verdades matemáticas que consideramos a partir de los enunciados de identidad. Se considera que la existencia de los números no está más allá de los hechos que describimos cuando empleamos terminología que no es matemática, esto es, el mismo hecho puede describirse (en la mayoría de los casos matemáticos) ocupando terminología matemática y utilizando terminología no matemática.

Más que resolver el dilema de Benacerraf, Rayo lo disuelve. Esto, puesto que, desde su postura, el dilema está sustentado en un planteamiento equivocado; a saber, que hay un espacio de explicación teórica entre las diferentes oraciones que describen un mismo hecho.

Si la verdad de un enunciado matemático no requiere nada del mundo, entonces uno podría decir que tal enunciado matemático tiene condiciones de verdad triviales. Por ejemplo, podemos decir que las siguientes operaciones, 2+2= 4, 3+3 = 6, 2x2= 4, etc., tienen condiciones de verdad triviales. Sin embargo, hay enunciados matemáticos que conocer sus condiciones de verdad no es nada trivial, pero tienen condiciones de verdad triviales, es decir, el hecho de que todos los enunciados matemáticos verdaderos tengan condiciones de verdad triviales no implica que sea sencillo saberlo, revelarlo y consolidarlo.

Al parecer, en general, no es claro para nosotros saber cuáles son las condiciones de verdad de los enunciados matemáticos, el reto consiste en desenmarañar los enunciados matemáticos (que ya se tienen) para posteriormente estar en condiciones de catalogarlos como enunciados matemáticos triviales. Lo anterior es posible, ya que desde la postura del trivialismo platónico, una cosa es ser capaz de entender el lenguaje, es decir, ser capaz de entender el uso de un enunciado y, otro reto intelectual muy diferente es reconocer los valores de verdad de tal o tales enunciados matemáticos. Por ejemplo, uno puede ser capaz de entender las palabras de Héspero y Fósforo y entender el enunciado, Fósforo no es Héspero, sin saber que el enunciado Fósforo no es Héspero es un absurdo ya que tiene condiciones de verdad imposibles, dado que Héspero es Fosforo y viceversa.

Finalmente, es incorrecto preguntarnos si ¿las posibilidades que previamente hemos aceptado son las verdaderamente correctas?, pues es una pregunta que sobrepasa los límites del espacio de posibilidades, ya que no existe un criterio que nos dirija a la elección de una distinción como tal[45]. Ante tal caso, lo que se dice es que nosotros determinamos cómo es el mundo a partir de nuestras distinciones de las regiones del espacio de posibilidades que elegimos, pero no existe

45 La manera en que se decide qué tipo de enunciados de identidad aceptar es a través del quehacer científico y/o filosófico vinculado con un razonamiento de ventajas y desventajas. Se debe determinar que enunciados de identidad son teóricamente más útiles, pero es muy importante insistir en que estos cambios no pueden darse de manera arbitraria. La idea es que no podemos separar la pregunta de, ¿qué enunciados de identidad aceptar? del resto de nuestro quehacer científico y/o filosófico?

un compromiso ontológico de existencia que implique que, de hecho, las descripciones que se ofrecen del mundo a partir de los enunciados de identidad describan correctamente como, de hecho, es el mundo.

Capítulo IV

El nuevo reto del defensor trivialismo platónico

Capítulo IV: El nuevo reto del defensor del trivialismo platónico

4. Introducción al Capítulo IV

En este capítulo abordaré la siguiente pregunta, ¿el logro cognitivo del que habla Rayo es suficiente para dar cuenta del conocimiento matemático?

La importancia de responder a tal cuestionamiento radica en mostrar que no siempre que se tiene un logro cognitivo es correcto afirmar que se tiene conocimiento. Y en este sentido, podría pensarse que la propuesta epistemológica del trivialista falla en dar cuenta del conocimiento matemático. Sin embargo, creo que la propuesta puede fortalecerse (o clarificarse) si se hacen explícitos algunos otros requerimientos para que el logro cognitivo nos lleve al conocimiento matemático.

Para lograr mi objetivo, recurriré a la propuesta de Pritchard (2013), la cual utilizaré para mostrar los problemas de la postura de Rayo (2015). Para hacerlo procederemos en cinco pasos. Primero, explicaremos en qué radican las proposiciones informacionales y las proposiciones como logros cognitivos de acuerdo con Rayo (2015). ¿Cómo modelar logros cognitivos que no dividan el espacio de posibilidades? Segundo, mostramos mediante un ejemplo la relevancia del uso de las proposiciones informacionales y las proposiciones cognitivas. Tercero, explicamos cuál es la función de las proposiciones informacionales y proposiciones cognitivas. Cuarto, explicamos en qué consiste el logro cognitivo de acuerdo con Pritchard (2013). Quinto, contrastamos ambas explicaciones del logro cognitivo de nuestros dos autores, mostraremos los problemas de la propuesta de Rayo y propondremos una solución. Finalmente, en la Sec. 4.5, esbozo algunas conclusiones.

4.1 Introducción al problema

De acuerdo con lo explicado en el capítulo anterior de esta investigación, se dijo que para que existan los números el mundo no tiene nada más que poner de su parte para que sea cierto que los números existan, una vez que hemos aceptado los enunciados adecuados.

Cuando se decide con qué distinciones del espacio de posibilidades trabajar se está aceptando una descripción de ser el mundo. La propuesta del trivialismo platónico considera que aceptar o no oraciones de identidad está en función de que tales oraciones nos resuelvan problemas científicos y/o filosóficos. Por ejemplo, si aceptamos el enunciado de identidad [Dinosaurios], es decir, que no haya dinosaurios *es simplemente* que el número de los dinosaurios sea cero, aceptamos una descripción de ser el mundo. Esto es, quien acepta [Dinosaurios] adquiere el compromiso en donde los números existen -por lo menos el número cero-, lo anterior, sin que tal compromiso de existencia sobrepase la existencia de los objetos del mundo físico.

El razonamiento es el siguiente, de acuerdo con el defensor del trivialismo platónico para que exista el número cero basta con que el número de los dinosaurios sea cero y, para que el número de los dinosaurios sea cero basta con que no haya dinosaurios. Pero, de hecho, ocurre que no hay dinosaurios. Por lo que, el número cero existe.

Lo anterior no implica la existencia del número cero en el mundo empírico, es decir, como un objeto físico, pero sí implica su existencia. El lenguaje permite que las diferentes divisiones de las regiones del espacio de posibilidades sean visibles para nosotros, ya que corresponde a los recursos representacionales que se están utilizando. La idea es que no existe nada que se requiera del mundo para que las verdades matemáticas sean verdaderas[46].

Así mismo, se defiende el enunciado de identidad [Números], es decir, que el número de las *Fs* sea *n es simplemente* que haya *n Fs,* y viceversa. El operador "*es simplemente*" se aplica a las oraciones y se puede entender como un bicondicional. En este sentido, se dice que son enunciados de identidad porque tienen las mismas condiciones de verdad solo que se representan de diferente manera y tienen diferente significado. Al aceptar el enunciado de identidad [Números] tenemos un principio que nos permite encontrar las condiciones de verdad de oraciones *"es simplemente"* como el caso de [Dinosaurios].

Así, son dos consideraciones importantes que sabemos acerca de la verdad en las matemáticas. Sabemos dos cosas, (i) hay números y (ii) sabemos cuáles son las condiciones de verdad de afirmaciones como los enunciados [Dinosaurios] y [Números]. Recordemos que los enunciados matemáticos tienen condiciones de verdad triviales; es decir, que son verdaderos sin importar cómo sea el mundo, una vez que hemos aceptado los enunciados de identidad pertinentes. En este sentido, desde los enunciados de identidad no se tiene que explicar la transferencia de conocimiento de un lado de la identidad al otro. No es necesario recurrir a una interacción causal con los objetos matemáticos para dar cuenta del conocimiento matemático, por lo que no es

[46] Para más detalles, véase la sección 3.3 p. 56 de esta investigación. El dilema de Benacerraf: una respuesta desde el trivialismo platónico de Agustín Rayo.

necesario acudir al mundo para determinar las condiciones de verdad y de justificación de las proposiciones matemáticas (aritmética).

Hasta aquí, hemos explicado cómo la propuesta del trivialismo platónico defiende cómo logramos referirnos a los objetos abstractos. El conocimiento matemático sería entonces explicado mediante el logro cognitivo que representa obtener las consecuencias de nuestros enunciados de identidad, pero ya no hace falta explicar cómo nuestro mecanismos psicológicos nos permite captar objetos abstractos. Así, de acuerdo con la postura del trivialismo platónico, el reto en filosofía de las matemáticas ha cambiado, el nuevo reto consiste en ofrecer una explicación de ¿cómo es posible el logro cognitivo en la matemática? Esta última pregunta tiene que ser resuelta, de lo contrario, será sospechoso que el trivialismo platónico sea reconocido como una epistemología de las matemáticas adecuada. En otras palabras, hay que explicar en qué consiste el logro cognitivo para dar una explicación adecuada del conocimiento matemático.

En los siguientes apartados nos concentramos en explicar en qué consiste el logro cognitivo de acuerdo con Rayo (2015) y, para lograr una clarificación de su postura, presentaremos la propuesta de Pritchard (2013), después compararemos brevemente ambas explicaciones. Al final de este capítulo hacemos una breve evaluación de ellas y ofrecemos razones para apoyar la idea de que la explicación de Pritchard (2013) de logro cognitivo resulta ser más explicativa que la de Rayo (2015), pero justo esto nos permitirá clarificar la postura del trivialista platónico.

4.2. El proceso epistémico/cognitivo según Rayo

De acuerdo con Rayo, si queremos describir cómo es el mundo, necesitamos realizar afirmaciones para distinguir entre las regiones del espacio de posibilidades en donde tales afirmaciones corresponden a una distinción de las posibles maneras de ser el mundo. Por ejemplo, cuando decimos "La nieve es blanca", hacerlo implica que nos comprometemos con una manera particular de ser el mundo, en donde el mundo es tal que: "La nieve es blanca" y, a la vez, descartamos maneras de ser el mundo en el cual "La nieve no es blanca".

La manera en que desarrollamos nuestro espacio de posibilidades está en función de cuáles enunciados de identidad aceptamos y cuáles no. Por ejemplo, el hecho de que el vaso contenga agua *es simplemente* el hecho de aceptar el hecho de que el vaso contenga H_2O, y viceversa. O que Héspero sea Fósforo, *es simplemente* aceptar el hecho de que Héspero es Fósforo, y viceversa, etc. Cuando decidimos con qué distinciones teorizar, a su vez, también estamos aceptando los enunciados de identidad que cuentan como posibles e imposibles de acuerdo con las descripciones del mundo que se realicen y que sean previamente aceptadas por la comunidad científica y/o filosófica. En este sentido, cuando se decide con qué regiones del espacio de posibilidades trabajar, estamos aceptando lo que vamos a considerar como útil o no para teorizar.

Una de las ventajas de trabajar con enunciados de identidad es que encontramos una respuesta que anula el dilema planteado por Benacerraf[47]. Sin embargo, al aceptar enunciados de identidad surge un nuevo reto para el defensor del trivialismo platónico, porque ahora se debe dar cuenta de cómo se da el logro cognitivo en la matemática. Si no es necesario recurrir a una interacción causal con los objetos matemáticos que explique, ¿cómo obtenemos conocimiento matemático? Lo que sigue es explicar ¿cómo se da el logro cognitivo cuando hablamos de conocimiento matemático?

En las siguientes dos secciones nos enfocamos en dar respuesta a esta última pregunta.

4.2.1 Proposiciones informacionales y Proposiciones como logros cognitivos

Para explicar cómo se da el logro cognitivo en matemáticas, necesitamos explicar la siguiente distinción: la distinción entre (i) proposiciones como trozos de información y, (ii) proposiciones como logros cognitivos. El propósito de (i) es localizar y organizar regiones del espacio de posibilidades. "Una consecuencia de esta manera de pensar es que 'Héspero es Héspero' y 'Héspero es Fósforo' expresan la misma proposición porque están verificados por la misma región del espacio de posibilidades" (Rayo, 2015, p. 104). Lo anterior considera que tenemos información para un propósito en particular, por ejemplo, en el caso de "Héspero" y "Fósforo", ambas proposiciones comparten las mismas condiciones de verdad, tienen diferente significado, sin embargo, refieren a Venus.

En el caso de (ii), su propósito consiste en ubicar la información como lo hace (i) y, además, separar las proposiciones como logros cognitivos. Por ejemplo, alguien podría pensar que "Héspero es Héspero" y lo aceptaría sin ningún problema, pero, si es el caso que no se sabe lo anterior, no creería que cuando se habla de Héspero también se está refiriendo a Fósforo, y viceversa, pues, en este caso, ambos términos corresponden a logros cognitivos diferentes.

Lo que es relevante de los puntos (i) y (ii), es que se logre identificar y separar proposiciones como logros informacionales y proposiciones como logros cognitivos. Lo anterior

---

47 Véase el capítulo III de esta investigación, p. 54.

es importante porque nos permite explicar porque es conveniente distinguir entre proposiciones como trozos de información y proposiciones como logros cognitivos.

Expliquemos la importancia de realizar distinciones fragmentadas de proposiciones como logros informacionales y proposiciones como logros cognitivos, mediante un ejemplo.

4.2.2 El ejemplo del granjero

Imaginemos que existe un granjero que tiene un terreno cuadrado y que en algún momento midió un lado de su terreno y se dio cuenta que medía 9 metros de largo. Sin embargo, cuando el granjero calculó el área de su terreno concluyó que el área era de 64 metros cuadrados. "No hay ningún punto en el espacio de posibilidades en el que el terreno de Godínez [granjero], tenga nueve metros de largo y sesenta y cuatro metros cuadrados de área." (Rayo, 2015, p. 104). Sin embargo, a pesar del resultado erróneo que el granjero tuvo al calcular el área de su terreno, él tiene verdades que están correlacionadas a ese error. Por ejemplo, si el granjero quisiera construir una barda de un metro de altura por todo el perímetro de su terreno, sólo tendría que comprar 36 metros cuadrados de material para construir una barda de un metro de altura.

Sin embargo, cuando el granjero no quiere material para construir un metro de barda en el perímetro de su terreno, sino que lo que quiere es comprar material para cubrir 64 metros cuadrados de área (área de su terreno), y no material para cubrir 81 metros cuadrados de área, él tendrá problemas. En este caso, las creencias del granjero son inconsistentes, una manera de entender al granjero es pensar que él cree que hay un terreno cuadrado que mide 9 metros de cada lado y que tal terreno tiene 64 metros cuadrados de área. El problema es que no hay un terreno con tales medidas, porque mientras estamos hablando de terrenos cuadrados con tales dimensiones, ser un terreno cuadrado con 9 metros de largo *es simplemente ser* un terreno cuadrado con 81 metros cuadrados de área. Es decir, no existe ninguna forma coherente con el mundo en donde ser un terreno cuadrado con 9 metros de largo es *ser simplemente* un terreno cuadrado con 64 metros cuadrados de área. Lo anterior implica que el granjero tiene creencias que ahora sabemos que son inconsistentes.

Dado lo anterior, ¿cómo podríamos modelar las creencias del granjero? La idea es modelar las situaciones del granjero de manera fragmentaria. Esto es (i), el fragmento del granjero que estaría ocupado de contestar la pregunta ¿cuál es el perímetro de un terreno que es cuadrado donde cada lado tiene 9 metros de largo?; y (ii), el fragmento del granjero que se encargaría de contestar la pregunta ¿cuál es el área del terreno del granjero? que tiene la información (falsa), de que el terreno tiene un área de 64 metros cuadrados (sólo que el granjero aún no tiene disponible la información de que ser un terreno cuadrado de 8 metros de lado es *ser simplemente* un terreno cuadrado con 64 metros cuadrados de área).

El ejemplo del granjero nos ofrece algunas pistas de cómo modelar el logro cognitivo. Si consideramos el caso del granjero dividido en diferentes momentos tenemos que, el granjero aún no ha realizado ningún cálculo respecto al área de su terreno. El granjero sólo ha medido un lado del terreno cuadrado que tiene y mide perfectamente el área de su terreno. En este caso, es posible modelar la desigualdad entre el estado mental del granjero en dos momentos al hacer el cálculo de su terreno.

> Godínez [granjero] tiene información acerca del tamaño de su terreno y puede emplearla para ciertos propósitos. (Tal vez tiene acceso a la información para el propósito de responder la pregunta "¿qué tan largo es tu terreno?" o para el propósito de decidir cuántos metros de barda comprar para cercar su terreno.) Hay, sin embargo, propósitos diferentes para los cuáles Godínez no tiene acceso a esa misma información. (Tal vez para el propósito de contestar la pregunta "¿cuál es el área de tu terreno?" o para el propósito de decidir cuántos azulejos comprar). (Rayo, 2015, p. 108).

El granjero, antes de hacer los cálculos de su terreno tenía dos propósitos:

(1) el propósito de saber el perímetro de su terreno y,

(2) el propósito de querer saber el área de su terreno.

Para realizar los propósitos (1) y (2), el granjero contaba con proposiciones informacionales disponibles para cada uno de los propósitos, aunque el cálculo del propósito (2) fuera erróneo. De tal forma que, podemos modelar los puntos (1) y (2) de la siguiente manera, esto es:

Momento (I)

(A) Estado mental del granjero antes de realizar los cálculos de su terreno

Propósito (1). El propósito de comprar material para construir una barda de un metro de altura para cercar el perímetro de su terreno. El granjero además del propósito (1), tiene información disponible para ese propósito, es decir, tiene la información que un lado del terreno mide nueve metros de largo, que un cuadrado tiene cuatro lados, etc. Por lo que, el granjero sabe que el perímetro de su terreno es de 9 metros de largo y que necesita 36 metros de material para el propósito de bardear el perímetro de su terreno, etc.

Propósito (2). El propósito de comprar material para cubrir 64 metros cuadrados de área y no material para cubrir 81 metros cuadrados de área. El granjero en el caso del propósito (2), **no** tiene proposiciones informacionales disponibles (reveladas y consolidadas), es decir, no tiene información relevante para contestar la pregunta acerca de cuánto material necesita para cubrir un área donde un lado de un terreno cuadrado mide 9 metros de largo. Ni tiene información para contestar la pregunta ¿cuál es el área de un terreno cuadrado que mide 9 metros de largo? Sin embargo, una vez que el granjero realiza la operación matemática su estado mental se modifica, porque, aunque el granjero tenga la misma información, esto es:

Momento (II)

(B) Estado mental del granjero después de realizar los cálculos correctos de su terreno.

Propósito (1'). El propósito de comprar material para construir una barda de un metro de altura para cercar el perímetro de su terreno. El granjero además del propósito **(1')**, tiene información disponible para ese propósito, es decir, tiene la información que un lado del terreno mide nueve metros de largo, que un cuadrado tiene cuatro lados, etc. Por lo que, el granjero sabe que el perímetro de su terreno es de 9 metros de largo y que necesita 36 metros de material para el propósito de bardear el perímetro de su terreno.

Propósito (2'). El propósito de comprar material para cubrir 81 metros cuadrados del área de su terreno. El granjero en el momento (II) y el propósito 2', pasa a tener información revelada y consolidada que un lado de su terreno cuadrado mide 9 metros de largo, o lo que es lo mismo, que tiene la información que 81 metros cuadrados de área, es el área de un terreno cuadrado en el que uno de sus lados mide 9 metros.

De esta manera, la información que el granjero tenía -antes de ser transferida para un propósito nuevo- era utilizada sólo para un propósito, es decir, la información sólo estaba disponible para el propósito de comprar material para construir una barda de un metro de altura en el perímetro de su terreno. Sin embargo, el granjero tuvo la capacidad de consolidar esa misma información para un nuevo propósito, el propósito de comprar material para cubrir 81 metros cuadrados de área y, por lo tanto, para dar respuesta a la pregunta, ¿cuánto es el área de un terreno cuadrado que tiene 9 metros cada lado?

Así, de acuerdo con Rayo, el logro cognitivo del granjero radica en que, en un logro de *transferencia de información* [48] que estaba disponible para un propósito en particular, pasó a estar

[48] Esto no es del todo claro, porque no se explica en qué consiste que un estado mental logre transferir información de un propósito a otro. La información no es suficientemente puntual para explicar qué es lo que ocurre

disponible para un nuevo propósito.

> […] el sistema cognitivo de una persona contiene cierta información, pero el sistema no tiene acceso irrestricto a esa información. Tiene acceso a la información para algunos propósitos, pero no para otros. Podemos pensar en un sistema cognitivo de este tipo como un sistema *fragmentado.* (Rayo, 2015, p. 116).

No es que el granjero esté obteniendo nueva información ligada a cómo es el mundo y que él advirtiera que los resultados matemáticos que arrojan el perímetro y el área de su terreno existieran en un mundo abstracto. Ni tampoco que el granjero pensara que es verdad que 9x9 = 81 metros cuadrados y que en un principio para el granjero no era posible saber qué sucedía en ese mundo abstracto. Una vez que el granjero adquirió la información de que 9x9 = 81 metros cuadrados de terreno, lo añade a su estado mental y captura tal conocimiento para emplearlo posteriormente.

Lo anterior, de acuerdo con la postura del trivialismo platónico es falso, ya que considera que lo que en realidad sucedió, es que el granjero logró la capacidad de revelar y consolidar la información que ya tenía disponible y la emplea para un nuevo propósito; es decir, se logra revelar el logro cognitivo de saber que si se tiene un terreno cuadrado en el que un lado mide 9 metros de largo, tal terreno tendrá 81 metros cuadrados de área. Esta última información el granjero no la tenía, sino que en un segundo momento logró transferir la información que tenía respecto al propósito de cercar el perímetro de su terreno; al nuevo propósito de lograr la capacidad de consolidar la información para saber que tener un terreno cuadrado que mide 9 metros de cada lado *es simplemente* tener un terreno que tiene 81 metros cuadrados de área, y viceversa.

Lo que Rayo propone, es que consideremos a los procesos cognitivos como fragmentarios y, que la mejor manera de modelar logros cognitivos en matemáticas y en las demás disciplinas, es modelarlos como logros de trozos de información; es decir, logros en donde un trozo de información que previamente estaba disponible en el sistema para contestar un/s propósito/s en particular, logremos transferirlos en función de resolver otras tareas matemáticas.

Pensar nuestros sistemas cognitivos como fragmentados permite tener un recurso adicional con el que podemos modelar nuestros logros cognitivos. Así, como en el caso de las matemáticas se puede modelar una enseñanza, no como la ***adquisición*** de información adicional en un tercer

exactamente cuándo se logra hacer la transición de un propósito a otro. Lo único que sabemos es que la nueva información pudo ser utilizada de manera adecuada para lograr el segundo propósito.

reino donde se cree que se encuentran los objetos abstractos, sino como una ***transferencia*** de información.

Sin embargo, en mi opinión no es suficiente claro qué es exactamente un logro cognitivo y por qué nos ayuda a dar cuenta del conocimiento matemático. Es por ello, que a continuación presentaré la postura de Pritchard sobre dicha noción y espero poder aprovecharla para por fin clarificar la postura del trivialista platónico.

4.3. ¿Qué es un logro cognitivo de acuerdo con Duncan Pritchard? Comprensión, logro cognitivo y conocimiento de las causas relevantes

La tarea de dar cuenta que tenemos conocimiento auténtico es un trabajo muy complicado, en realidad podríamos descubrir que sabemos muy poco de lo que consideramos que sabemos. En parte, la dificultad consiste en demostrar que el conocimiento que tenemos es genuino. Por ejemplo, de acuerdo con Pritchard (2013) comúnmente se ha considerado que la comprensión junto con el logro cognitivo son maneras de conocimiento. Sin embargo, él considera que lo anterior no siempre es verdadero, ya que hay casos en donde se tiene comprensión y/o logro cognitivo, pero no conocimiento de las causas relevantes, y viceversa. Para explicarlo veamos un ejemplo.

Imaginemos que mi hermano Oscar está manejando su automóvil y repentinamente escucha un ruido raro en el motor. Unos metros adelante el carro se apaga y por más que Oscar intenta encenderlo no logra hacerlo. Posteriormente, Oscar desciende del carro, levanta el cofre y empieza a realizar una inspección minuciosa. Después de unos minutos se da cuenta de que el cable del distribuidor está zafado; razón por la cual, ahora sabe por qué el carro no enciende. Oscar conecta el cable zafado al distribuidor y procede a encenderlo. El carro enciende con éxito.

En un primer momento Oscar tuvo la comprensión de que su carro ya no funcionaba (no encendía); y, posteriormente, Oscar tuvo el conocimiento de que su carro se había descompuesto porque el cable del distribuidor se había zafado. De esta manera, su comprensión de por qué el carro no encendía está fundamentado por qué Oscar sabe la causa que originó que el carro ya no encendiera, es decir, el cable zafado del distribuidor. "[…] la idea es que la comprensión es esencialmente un tipo de conocimiento-*viz*., conocimiento de las causas. Más específicamente, tener comprensión de por qué X es el caso es saber por qué X es el caso, donde saber por qué X es el caso es saber que X es el caso es debido a Y." (Pritchard, 2013, p. 1)[49]. Así, pareciera que es

[49] […] the idea is that understanding is essentially a type of knowledge-*viz*., knowledge of causes. More specifically,

cierto que la comprensión es un tipo de conocimiento genuino, ya que, en este caso, las creencias de Oscar no tienen ninguna falsedad, y él está en condiciones de saber correctamente las causas relevantes que originaron que su carro no encendiera.

4.3.1. Conocimiento de las causas relevantes sin tener comprensión

Sin embargo, a pesar de que existe una gran cantidad de casos en los que podemos considerar que es correcto afirmar que comprensión es un tipo de conocimiento verdadero; no siempre es cierto. Por ejemplo, existen casos en donde se tiene conocimiento verdadero de las causas y, sin embargo, se carece de la comprensión correspondiente.

Volviendo a nuestro ejemplo del carro, supongamos ahora que, en este caso, Oscar sabe que su carro no funciona. Además, supongamos que Oscar es especialista en el área de aire acondicionado en los automóviles, pero él no sabe sobre mecánica y del sistema eléctrico automotriz. Así que, un compañero especialista en mecánica y sistema eléctrico en automóviles revisa el carro y le hace saber a Oscar la causa eléctrica de la avería, esto es, el cable zafado del distribuidor. De tal forma que, Oscar sabe que el carro no funciona porque el cable se zafó del distribuidor, pero no porque él lo supiera sino porque su compañero especializado en ese tipo de fallas eléctricas se lo dijo. Oscar sabe que el cable zafado del distribuidor es la causa de que su auto no encendiera.

Dado que Oscar no está especializado en el área eléctrica automotriz en realidad no está entendiendo cómo, el hecho de que el cable del distribuidor esté desconectado no permite el encendido de su automóvil. Para que Oscar tenga comprensión de por qué el cable debe estar conectado al distribuidor, él necesita saber de manera necesaria porque es que el cable debe de estar conectado al distribuidor. A Oscar le falta comprensión del funcionamiento del distribuidor en los automóviles.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, el conocimiento de las causas relevantes no constituye una legítima comprensión de Oscar. En este sentido, es posible tener conocimiento relevante de las causas y, sin embargo, carecer de la comprensión correspondiente.

to have understanding of why X is the case is to know why X is the case, where to know why X is the case is to know that X is the case is because of Y. (Pritchard, 2013, p. 1).

4.3.2. Comprensión sin tener conocimiento de las causas relevantes

En defensa de esta afirmación veamos el siguiente ejemplo, imaginemos -nuevamente- que a Oscar se le descompuso su automóvil y que él lleva consigo un escáner que sirve solo para automóviles de la marca BMW, pero no sirve para la marca del carro que tiene actualmente. Aun así, Oscar decide probar el escáner en su automóvil. El escáner tarda unos minutos en inicializarse, y de pronto, Oscar ve que el escáner detecta el código P0320, código que, de acuerdo con el escáner refiere a una falla en las bobinas de encendido y segundos después el escáner se apaga.

Posteriormente, Oscar revisa las bobinas de su carro y se da cuenta que el cable del distribuidor estaba zafado. En este caso, Oscar tendría una creencia justificada, es decir, que la causa de que el carro no enciende es porque el cable del distribuidor estaba zafado. Sin embargo, Oscar no tendría conocimiento genuino, ya que su creencia está sustentada en una cuestión de suerte epistémica, dado que el origen de su creencia fue muy poco confiable; el escáner que utilizó no era el indicado para la marca de su carro y es probable que no haya logrado hacer un escaneo confiable. Sin embargo, el escáner funcionó, al parecer, correctamente, pero fue solo cuestión de suerte, ya que el escáner que utilizó comúnmente funciona solo para automóviles de la marca BMW.

En síntesis, hay diferencias epistémicas notables entre tener comprensión sobre un evento sin tener conocimiento genuino de causas relevantes de tal evento. Dado lo anterior, en realidad, la compresión no siempre puede ser concebida como un tipo de conocimiento.

> Creo que hay una buena razón por la que la comprensión y el conocimiento se desmoronan en las formas particulares que acabamos de especificar, que apoya aún más la lectura ofrecida de los casos en cuestión. Esto es que la comprensión, a diferencia del conocimiento, es un tipo específico de logro [cognitivo]. Los logros [cognitivos] son, más o menos, éxitos que se den a la capacidad; es decir, cuando el éxito en cuestión es principalmente acreditable al ejercicio de la capacidad pertinente por parte del agente. Así, por ejemplo, el éxito de un arquero al golpear el ojo del toro cuenta como su logro siempre y cuando este éxito sea principalmente acreditable para su ejercicio de aquellas habilidades relevantes para el tiro con arco y no para otros factores (como una ráfaga de viento de la suerte). (Pritchard, 2013, p. 4)[50].

---

[50] I think there is a good reason why understanding and knowledge come apart in the particular ways just specified, one which further supports the reading offered of the cases in question. This is that understanding, unlike knowledge, is a specific kind of achievement. Achievements are, roughly, successes that are because of ability; that is, where the success in question is primarily creditable to the agent's exercise of the relevant ability. So, for example, an archer's success at hitting the bull's eye counts as her achievement so long as this success is primarily creditable to her exercise of those abilities relevant to archery and not to other factors (such as a lucky gust of wind). (Pritchard, 2013, p. 4).

Retomando el caso de Oscar arriba expuesto, se explicó que en ocasiones se puede tener conocimiento de las causas relevantes sin exhibir comprensión o el logro cognitivo correspondiente. Es decir, Oscar puede saber porque su automóvil se apagó. Sin embargo, este conocimiento no constituye un logro cognitivo por su parte, ya que su creencia no está lo suficientemente justificada por su capacidad cognitiva. En este sentido, conocimiento y logro cognitivo no son equiparables entre sí. Pero no sucede lo mismo con la comprensión y el logro cognitivo, ya que la comprensión implica un logro cognitivo. Uno puede exhibir un logro cognitivo y no tener conocimiento de las causas relevantes. De esta manera, el logro cognitivo es compatible con la suerte epistémica y el conocimiento de las causas relevantes no.

El conocimiento no debe de sustentarse sobre creencias que sean poco confiables como la suerte epistémica. Sin embargo, el logro cognitivo y la comprensión si son compatibles con casos de suerte epistémica, ya que, como se explicó líneas arriba, un agente epistémico puede tener comprensión o un logro cognitivo y carecer de conocimiento de las causas relevantes, pues en la comprensión y en el logro cognitivo no siempre tienen fundamentos contundentes a favor de sus creencias, es decir, muy probablemente se sabe el efecto, pero se desconocen realmente las causas.

Lo que sí es muy claro es que el conocimiento genuino no puede darse cuando llegamos a la creencia verdadera debido a un caso de suerte. De esta manera, nuestro conocimiento matemático no puede estar fundamentado en la suerte, esto se debe incluir en una epistemología adecuada de las matemáticas.

4.4. El logro cognitivo de acuerdo con Rayo (2015) y Pritchard (2013)

Retomando nuestro ejemplo del granjero expuesto líneas arriba, el logro cognitivo del granjero consiste en que el granjero logró transferir información entre fragmentos. “[L]os logros cognitivos en matemáticas consisten, en parte, en la introducción de “puentes” entre los distintos propósitos con respecto a los cuales podría estar disponible cierto trozo de información” (Rayo, 2015, p. 107). De acuerdo con este modelo, cuando se aprende algo en matemáticas no es que se está adquiriendo nueva información acerca de cómo es el mundo, sino que se está adquiriendo la capacidad de utilizar la información matemática que ya se tenía para posteriormente emplearla de nuevas maneras.

Lo que sucede cuando logramos transferir información matemática para dar respuesta a un nuevo propósito matemático es que los fragmentos matemáticos están mejor organizados, pero, no es que se adquiera nueva información matemática. La idea es que se posee desde el principio toda la información para determinar cualquier verdad matemática. Sin embargo, no siempre es posible saber cuáles son las condiciones de verdad de cualquier enunciado matemático, el reto consiste en descubrir cuáles son las condiciones de verdad de tales enunciados (en realidad, sólo hay dos opciones, o tiene condiciones de verdad triviales o tiene condiciones de verdad imposibles). Es legítimo pensar que tales fragmentos ya contienen información matemática previa. Si es así, es razonable preguntarse, ¿cómo es posible obtener ese primer acercamiento al fragmento matemático que posteriormente permitirá hacer las sincronizaciones propuestas? Una estrategia es pensar que existe un mundo abstracto que desconocemos del cual adquirimos nueva información matemática, luego, cuando descubrimos algo matemático lo que sucede es que aprendemos qué es lo que hay en ese mundo abstracto, esta opción no está disponible para el trivialista. De tal manera que, la información que había en esa región del mundo abstracto fue lo que nos permitió apropiarnos del conocimiento matemático.

Otra estrategia, la que defiende el trivialismo platónico, es considerar a la información que corresponde a una verdad matemática como una información trivial. Pero, hay una gran diferencia entre: **a.** poseer esa información matemática y, **b.** tener esa información matemática disponible para ciertos propósitos. Es decir, no es lo mismo saber que una oración matemática es verdadera, y por tanto tiene condiciones de verdad triviales, que entender por qué es verdadera, de que oraciones proviene, cuál es la justificación que se tiene para asignar dichas condiciones de verdad. Lo que hay que hacer en matemáticas es tener la capacidad de acceder no sólo a la información trivial matemática sino acceder a información acerca de cómo funciona el sistema matemático con el que se está trabajando y utilizar esa misma información para contestar nuevos propósitos matemáticos.

Por ejemplo, el granjero tenía cierta información proposicional informacional y cognitiva de algunos de los datos con los que contaba su terreno. Tales datos le permitían al granjero saber cómo obtener el perímetro de su terreno, pero no le eran suficientes para saber cómo obtener el área de su terreno. Algunos de los datos cognitivos con los que contaba el granjero, por ejemplo, eran los siguientes: que un cuadrado tiene cuatro lados, que para obtener el perímetro de un cuadrado hay que sumar lado + lado + lado + lado, que un cuadrado tiene cuatro ángulos iguales, que cada ángulo en un cuadrado mide 90 grados y, además, que su terreno como tiene forma de cuadrado tiene las propiedades de este, etc. De esta manera, el logro cognitivo a la Rayo, podemos explicarlo de la siguiente manera.

Fragmento 1 y momento 1

El granjero tenía dos propósitos bien definidos:

(1) el propósito de saber el perímetro de su terreno que mide 9 metros de lado y que sabe que es de 36 metros y,

Transferencia de información

(2) el propósito de querer saber cuál es el área de su terreno, pero **no** sabe cómo obtenerla, erróneamente pensaba que el área de su terreno era de 64 metros cuadrados.

Fragmento 2 y momento 2

El granjero y sus dos propósitos:

(1´) el propósito de saber el perímetro de su terreno que mide 9 metros de lado y que sabe que es de 36 metros y,

(2´) el propósito de querer saber cuál es el área de su terreno, donde logra desenmarañar la información que estaba disponible en las proposiciones informacionales y proposiciones como logros cognitivos para consolidarla, revelarla y responder a más propósitos. A saber, que el área de un terreno cuadrado que mide 9 metros de lado es igual a 81 metros cuadrados.

De acuerdo con lo anterior, el punto **b.** no es trivial, porque, que el área de un terreno cuadrado que mide 9 metros de lado es de 81 metros cuadrados es verdad, es consecuencia de desenmarañar la información para encontrar el método de codificación que está implícito en la forma de presentación del enunciado que nos explica cómo obtener el perímetro de un cuadrado. Es decir, se tiene que descifrar el misterio que consiste en explicar cómo es que la fórmula del perímetro del cuadrado determina una valor de verdad para el enunciado que explica cómo obtener el área de un cuadrado. Ese desenmarañar se está modelando como la transferencia de información de un fragmento a otro.

Al principio, antes de saber cómo obtener el área de un cuadrado, la información fragmentada con la que se contaba solo estaba disponible para propósitos particulares como para responder la/s pregunta/s, ¿cuántos lados tiene un cuadrado? ¿cómo obtener el perímetro de un cuadrado? ¿cuántos ángulos tiene un cuadrado?, etc. Pero, conforme se va avanzando y se logran desenmarañar los diferentes modos de presentación de un enunciado, la información que se tenía pasa a estar disponible para responder más propósitos; por ejemplo, para el propósito de responder a la pregunta, ¿cómo obtener el área de un cuadrado?

En este sentido, cuando finalmente se logra modelar la transferencia de información, entonces, se dice, que se ha logrado extender el rango de disponibilidad de información para el propósito de contestar la pregunta, ¿cómo obtener el área de un cuadrado? De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, es correcto pensar que poseemos desde el principio toda la información que hace falta para determinar cualquier verdad matemática. Pero, de eso no se sigue que tenemos disponible tal información para resolver cualquier propósito matemático. "Los logros cognitivos en lógica y matemáticas consisten, en parte, en la adquisición de una habilidad para transmitir información entre diferentes fragmentos de nuestro sistema cognitivo (Rayo, 2015, p. 116)." En síntesis, la propuesta del trivialismo platónico considera que los sistemas cognitivos son fragmentados y aprovechando ese modelo se postula que la mejor manera de modelar los logros cognitivos en matemáticas no es como logros de *adquisición de información* sino como logros de *transferencia de información*. Logros de hacer que un pedazo de información que ya estaba en el sistema pase a estar disponible para consolidar nueva información para resolver nuevos propósitos.

De acuerdo con la explicación de D. Pritchard (2013), el logro cognitivo no siempre es equivalente a tener conocimiento de las causas relevantes porque puede darse el caso que se tenga un logro cognitivo, pero, sin saber el conocimiento de las causas relevantes y, por lo tanto, tal logro cognitivo no será considerado como conocimiento genuino. Como se explicó líneas arriba[51], sucede que el logro cognitivo es compatible con casos de suerte epistémica, es decir, que habrá situaciones en donde se supondrá que se ha conseguido un logro cognitivo y, por lo tanto, que se tiene conocimiento confiable de él. Sin embargo, lo anterior resulta ser problemático porque es posible que tal logro esté sustentado en un caso de suerte epistémica. Así, tal logro cognitivo no

51 Véase la sección 4.3.2. Comprensión sin tener conocimiento de las causas relevantes, de esta investigación, p. 76.

puede ser considerado como conocimiento fiable.

Por ejemplo, cuando se dice que el logro cognitivo del granjero consiste en tener la habilidad para transferir información entre distintos fragmentos para resolver diferentes propósitos; en este caso, el granjero logró transferir la información de proposiciones informacionales y cognitivas de, ¿cómo obtener el perímetro de un terreno cuadrado?, a consolidar la información y revelar, ¿cómo obtener el área de un terreno cuadrado? Digamos que el granjero logró desenmarañar la información que estaba implícita o codificada en la fórmula para obtener el perímetro de un cuadrado a la información para obtener el área de un cuadrado, es decir, L*L. Sin embargo, es posible que ese desenmarañar pueda estar sustentado en un caso de suerte epistémica, ya que como lo sostiene Pritchard (2013), es posible que uno exhiba un logro cognitivo y no tener conocimiento de las causas relevantes, así, ¿el logro cognitivo como lo explica Rayo (2015), puede estar sustentado en un caso de suerte de epistémica?

La explicación del logro cognitivo que proporciona Rayo no es muy clara. La descripción es muy general ya que no expone de manera concluyente cómo se da el logro cognitivo en la matemática. Es decir, la *transferencia de información* no demuestra o permite entender con claridad cómo se obtiene el logro cognitivo o si éste implica que tenemos conocimiento. En este sentido, la explicación está basada en un supuesto en donde las consecuencias no son del todo claras, y, por lo tanto, confiables[52]. Pero todavía se puede decir algo más.

Modifiquemos un poco el caso anterior. Imaginemos que el granjero ha logrado calcular el área correcta de su terreno cuadrado, pero utilizando una fórmula equivocada y recurriendo a una calculadora descompuesta. Él puede creer que la fórmula para calcular el área de un cuadrado es (L-1)x(L-1), así la multiplicación que él tendrá que hacer será de 8 x 8 dado que su terreno mide 9 metros de lado. Sin embargo, al realizar la multiplicación recurre a una calculadora descompuesta que siempre suma 17 al resultado de la multiplicación, así arroja como resultado del cálculo 81. En algún sentido podemos decir que el granjero ha logrado tener su logro cognitivo, pues tiene la información correcta y puede transferirla para los propósitos de saber cuántos metros cuadrados de azulejo necesitará para cubrir su terreno. Sin embargo, en este caso, parecería que estamos ante un caso de suerte epistémica y que la explicación dada resultaría inadecuada, pues se ha logrado

52 Un tema interesante para investigaciones futuras consistiría en rastrear y explicar a detalle, que más ha dicho Agustín Rayo para dar cuenta sobre la transferencia de información y el logro cognitivo en la matemática (aritmética). Quizás lo que esté pensando Rayo es que el enfoque la fragmentación y transmisión de información funcionan como heurísticas para la adquisición de productos epistémicos.

tener el logro cognitivo en términos de transmisión de la información por malas razones. Se ha obtenido la respuesta correcta y aun así no podríamos decir que estamos ante un caso de conocimiento matemático genuino. Sin embargo, algo que puede considerarse para poder descartar esta posible situación es lo siguiente. Si bien este caso particular nos mostraría que se pueden cumplir las condiciones de Rayo sin tener conocimiento matemático, no parece claro que se pueda generalizar. La idea central es la siguiente: imaginemos que el granjero obtiene su cálculo de manera que el área es correcta, transfiere la información y logra cubrir su terreno de azulejos; pero después intenta hacer lo mismo con otro terreno cuadrado, pero de 20 metros de lado, así que recurre a la misma metodología, pero en este caso la calculadora le da como respuesta 378 metros cuadrados. Lo que lo llevaría a cuestionar su resultado presente y probablemente también lo llevaría a pensar qué hubo algún problema en su cálculo anterior. Tendrá que regresar a su método original y evaluarlo, se dará cuenta que en realidad nunca supo realmente que su terreno medía 81 metros cuadrados, sino que simplemente tuvo suerte.

El caso anterior nos lleva a pensar que hay que hacer explícito un elemento que no es muy claro en la propuesta de Rayo; a saber, que la transmisión de información tiene que estar sustentada para casos similares y que el conocimiento obtenido debe descansar en cálculos correctos. De otra manera parecería que simplemente se está diciendo que, si el resultado funciona, entonces debe ser correcto y estamos ante un caso de conocimiento matemático. Dicho de otra manera, para tener conocimiento matemático es necesario poder hacer la transferencia de información para la aplicación de casos, pero esta información debe provenir de un procesamiento de información adecuado, debe provenir de un método confiable, además de que tiene que aplicarse a casos similares. Esto no nos dará nueva información sobre el mundo, pero sí nos dirá cómo es que debemos decodificar de manera correcta la información y cómo es que una vez hecho esto podemos transferirla para lograr aplicaciones en el mundo. En este sentido, el logro cognitivo no sólo involucra la transferencia de información, sino que requiere el descubrimiento de métodos correctos para decodificar la información.

4.5 Conclusiones del capítulo IV

De acuerdo con la propuesta del trivialismo platónico, el dilema planteado por Benacerraf es un falso dilema. Es la idea de considerar que no existe un espacio teórico entre, que no haya dinosaurios y que el número de los dinosaurios sea cero, pues en el mismo hecho de que no haya dinosaurios está ya el hecho de que en número de los dinosaurios sea cero; es decir, el enunciado: el número de los dinosaurios es cero, no es un hecho adicional que tenga que explicarse.

Desde la posición del trivialismo platónico, encontramos una respuesta al dilema planteado por Benacerraf[53]. Sin embargo, aún no es claro cómo se da el logro cognitivo en la matemática (aritmética) y cómo esto explica el hecho de que tengamos conocimiento matemático. Tal reto tiene que ser explicado. Para explicar el logro cognitivo en las matemáticas, Rayo considera dos tipos de proposiciones: **(i)** proposiciones informacionales y, **(ii)** proposiciones como logros cognitivos. Las proposiciones informacionales son aquellos trozos de información (regiones del espacio de posibilidades) que tienen un propósito en particular. Por ejemplo, el trozo de información de saber la información que tiene un terreno como el siguiente: (1) que un terreno cuadrado tiene cuatro lados. (2) que un terreno que es cuadrado y que un lado mide 9 metros de largo, tendrá 36 metros de perímetro. (3) que si el terreno es cuadrado cada uno de sus lados medirá lo mismo, es decir, para este caso, 9 metros cada lado, etc.

Por otra parte, las proposiciones **(ii)**, proposiciones como logros cognitivos son aquellas que nos permiten modelar situaciones cognitivas, es decir, con las proposiciones informacionales (como primer logro cognitivo) nos permiten acumular información que resuelve una tarea en particular, por ejemplo, para contestar preguntas como, ¿cuántos lados tiene un cuadrado? ¿los cuadrados tienen los cuatro lados iguales? ¿para obtener el perímetro de un cuadrado necesitamos multiplicar lado por lado?, etc. Sin embargo, supongamos que no sabemos cómo obtener el área de un terreno cuadrado. En este caso, las proposiciones informacionales y las proposiciones cognitivas arriba expuestas están disponibles hasta este momento solamente para responder preguntas dirigidas en obtener el perímetro de un terreno cuadrado, etc.

Sin embargo, las proposiciones informacionales y las proposiciones cognitivas no están disponibles -consolidadas- para responder la pregunta ¿cuánto es el área de un terreno cuadrado que mide 9 metros de lado? De tal manera que, la información está disponible para un propósito, pero no para otro. En este caso, las proposiciones informacionales y las proposiciones como logros cognitivos están disponibles para contestar la pregunta: ¿cuál es el perímetro de un cuadrado que mide 9 metros de lado?, etc., pero, la información no está disponible para contestar la pregunta, ¿cuál es el área de un cuadrado que tiene 9 metros de lado? En este caso, el logro cognitivo se da

---

53 Para más detalles véanse los capítulos I y III de esta investigación págs. 11 y 53 respectivamente.

cuando se descubre que la información que estaba disponible e implícita para contestar la pregunta, ¿cuál es el perímetro de un cuadrado que tiene nueve metros de lado?, etc., pasa a estar disponible, pasa a ser consolidada y revelada para contestar nuevos propósitos, por ejemplo, el propósito de contestar la pregunta, ¿cuál es el área de un terreno cuadrado que tiene 9 metros de lado?, o lo que es lo mismo, el logro cognitivo se da cuando se transfiere información que estaba disponible respecto a un propósito en particular, ahora, la misma información pasa a estar disponible o consolidada para responder a otros propósitos matemáticos.

En síntesis, primero debemos de entender el propósito para el que vamos a utilizar la información que tenemos para resolver un problema en particular, y posteriormente, a partir de la información que tenemos, desenmarañar la información, revelarla y consolidarla para ofrecer una respuesta al nuevo propósito matemático.

Sin embargo, como pudimos observar a partir del Análisis del trabajo de Pritchard, todavía es posible que se cumpla el requisito de la transferencia de información y que no estemos ante casos de conocimiento matemático genuino. Esto se debe a que podemos enfrentarnos a casos de suerte epistémica, incluso en matemáticas. Con todo creo que Rayo puede hacer frente a estas objeciones si hace explícito en su propuesta que no solamente se requiere la transferencia de información en un caso particular, sino que pueda aplicarse el mismo tipo de transferencia a casos similares y que además la información que va a ser transferida provenga de un método de decodificación confiable para obtener la información que se sigue de nuestros principios matemáticos. Creo que esto está presente de manera implícita en el trabajo de Rayo, pero también creo que es relevante decirlo de manera explícita para poder clarificar cómo es que el logro cognitivo puede explicar nuestra posesión de conocimiento matemático.

V Consideraciones finales

Basándonos en el orden señalado en nuestra estrategia conceptual que se dio en la introducción de esta investigación, a continuación, presentamos sintetizados los resultados obtenidos de la misma.

5.1 ¿Qué es el espacio de posibilidades?

Grosso modo, la propuesta del trivialismo platónico considera que cuando queremos saber ¿cómo es el mundo?, lo que hacemos es considerar un cúmulo de formas en las cuales el mundo puede ser, es decir, un espacio de posibilidades. El espacio de posibilidades "es el conjunto de alternativas con las que trabajamos cuando nos preguntamos cómo es el mundo." (Rayo, 2015, p.15). Una vez que tenemos un cúmulo de espacio de posibilidades tomamos decisiones a través de la observación y la reflexión para determinar las posibilidades que tenemos disponibles y, posteriormente, elegimos las posibilidades que consideramos que describen correctamente el mundo. Son dos momentos, previos que se necesitan para elegir entre las distintas posibilidades:

(i) la elección de las alternativas que tenemos para elegir entre las diferentes posibilidades y,

(ii) tomar una decisión para elegir cuáles de las alternativas aceptar.

Al tiempo que ocurre (i)[54] y (ii), tenemos que desarrollar una concepción del espacio de posibilidades para determinar con cuáles trabajar y, adicionalmente, utilizar nuestra investigación con el fin de elegir entre las opciones para mantener unas opciones a la verdad y rechazar otras como falsas. Decidir con qué posibilidades trabajar y con cuales no, está en función del análisis que posteriormente organiza las observaciones que previamente se han realizado. Por ejemplo, cuando se decide trabajar con la distinción del enunciado de identidad: que haya agua *es simplemente* que haya H_2O, nos comprometemos con una manera en que nosotros describimos el mundo, el mundo en el que es verdadero el enunciado: que haya agua *es simplemente* que haya H_2O y, viceversa.

La tarea anterior, conlleva a que nos hemos comprometido con una manera particular en que nosotros describimos el mundo, por lo tanto, si en algún momento se negara el enunciado de

[54] El punto (i), es imperante, pues, la mayoría de las veces necesitamos acudir al mundo empírico con el fin de decidir con qué distinciones trabajar y, si funcionan admitirlas si no funcionan rechazarlas, pues no hay forma de saber si se está trabajando con la/s hipótesis correctas de acuerdo con la manera de ser el mundo. Es la idea que necesitamos arriesgarnos a nuestras primeras hipótesis, ya que no siempre es posible saber *a priori* con qué posibilidades teorizar.

identidad, que haya agua *es simplemente* que haya H_2O, o viceversa, generará un absurdo; pues si se había aceptado previamente teorizar con tal enunciado de identidad, no está dentro del espacio de posibilidades afirmarlo y posteriormente negarlo.

Los criterios que se utilizan para elegir con qué posibilidades teorizar, estarán en función de considerar a los espacios de posibilidades como herramientas útiles para resolver tareas particulares. Al hacer esto, consideramos a las herramientas que nos son útiles y cuáles no. Por ejemplo, en el caso de los Químicos, cuando se preguntan, ¿cómo está compuesta una molécula de agua?, en este caso, necesitamos acudir al mundo y realizar una investigación empírica, para posteriormente, después de la observación, reflexión y experimentación llegar a la conclusión de que el agua está compuesta por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Es útil para los Químicos saber cómo está compuesta una molécula de agua, para posteriormente teorizar a partir de la distinción del espacio de posibilidades, en donde se considera como verdadero que una molécula de agua está conformada por dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno o lo que es lo mismo, ser una molécula de aguas *es simplemente* estar compuesta de dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno y, viceversa.

5.2 ¿En qué consiste el logro cognitivo en las matemáticas?

Para el caso de las matemáticas, es diferente que con el ejemplo de los Químicos arriba expuesto. Las matemáticas no necesitan de una investigación empírica, ya que es suficiente comprender exactamente la descripción del problema matemático a resolver, para posteriormente, utilizar la información matemática que tenemos disponible respecto a ciertos propósitos para luego transferirla en otros propósitos; es decir, (desenmarañar) el problema matemático a resolver para, posteriormente, ofrecer una respuesta al problema matemático en cuestión. En el caso matemático, lo que sucede cuando logramos desenmarañar el problema matemático es que se logró transferir información matemática[55] que se tenía para resolver un propósito matemático en otro propósito

[55]55 Tenemos que ser cuidadoso al momento de explicar el logro cognitivo, de manera que se ofrezcan razones sustanciales que impliquen de manera necesaria un conocimiento de las causas relevantes. El logro cognitivo no debe estar sustentado en una cuestión de supuesto porque tal logro será considerado como poco confiable, en el sentido que muy fácilmente podría estar equivocado. La suerte epistémica mengua el conocimiento, ataca directamente a la verdad de la creencia en cuestión. La suerte epistémica debilita las condiciones que se consideran iniciales para considerar que se tiene conocimiento. Así, los logros cognitivos no se deben obtener a través de la suerte ¿cómo saber si un logro cognitivo no es un caso de logro afortunado o suerte epistémica?

matemático.

De acuerdo con la postura del trivialismo platónico, para los casos matemáticos, no es que existiera un tercer mundo donde habitan los objetos abstractos; en donde se logra capturar la información que necesitábamos para resolver un problema y, que posteriormente pasó a ser parte de nuestro sistema mental y que logramos capturar de alguna manera tal información matemática que antes no sabíamos, pero que ahora sabemos para el fin de resolver un problema matemático. Sino que, lo que sucede, es que logramos transferir información matemática para el fin de resolver otros propósitos matemáticos. Lo anterior, sin necesidad de tener que realizar una tarea empírica, es decir, es la idea que las matemáticas (aritmética) se justifican al margen de la experiencia. Es la idea de que, ya que tenemos una herramienta teórica que consideramos útil para teorizar, estamos en condiciones para decidir qué posibilidades nos conviene aceptar. Por ejemplo, en el caso de las matemáticas, si lo que hacemos es transferir información de un propósito a otro, entonces no es necesario postular una interacción causal con los objetos matemáticos que dé cuenta de nuestro conocimiento matemático análogo al conocimiento de los objetos empíricos, tal como lo profiere Benacerraf, pues, de acuerdo con la postura del trivialismo platónico, las verdades de las matemáticas se justifican al margen de las descripciones que previamente aceptamos como regiones del espacio de posibilidades. Desde este punto de vista, encontramos una respuesta al dilema planteado por Benacerraf[56] o, mejor dicho, la propuesta del trivialismo platónico disuelve tal dilema.

5.3 Respuesta de Agustín Rayo al dilema planteado por Benacerraf

Una característica de los enunciados de identidad que propone Rayo es que están vinculados a la explicación, es decir, si uno acepta enunciados de identidad, uno está en condiciones de no ofrecer cierto tipo de explicaciones. Cuando aceptamos enunciados de identidad, no tenemos que explicar la transferencia de un lado de la identidad al otro, por ejemplo, el enunciado de identidad [Dinosaurios], es decir, que no haya dinosaurios *es simplemente* que el número de dinosaurios sea cero. Si alguien preguntara, ¿por qué el número de los dinosaurios es cero?, la respuesta sería, porque no hay dinosaurios. Y si alguien preguntara, ¿por qué no hay dinosaurios?, la respuesta sería, porque el número de los dinosaurios es cero. De acuerdo con Rayo, Benacerraf en su texto de 1973, consideraría que existe un espacio teórico que debe de justificarse entre los enunciados:

56 Para una explicación más desarrollada, véase el capítulo III de esta investigación, p. 54.

i. que no haya dinosaurios y, ii. que el número de dinosaurios sea cero.

De acuerdo con el trivialismo platónico, el espacio teórico que tiene que justificarse entre los enunciados i. y ii. no existe, pues del hecho de que “no haya dinosaurios” es ya el mismo hecho “que el número de los dinosaurios sea cero”, por lo tanto, no existe tal espacio teórico que deba justificarse entre (i) y (ii) tal como lo demanda Benacerraf.

En síntesis, el trivialismo platónico nos ofrece una alternativa bastante plausible que nos permite explicar los logros cognitivos en matemáticas sin necesidad de postular una interacción causal con los objetos matemáticos que dé cuenta de estos, tal como lo demanda Benacerraf en su texto, *Mathematical Truth* de 1973.

5.4 ¿Existe un espacio de posibilidades que describa objetiva y correctamente el mundo?

Una vez que aceptamos espacios de posibilidades, estamos describiendo el mundo de acuerdo con los enunciados de identidad previamente aceptados bajo la revisión de la ciencia y/o la filosofía. En este sentido, no es adecuado preguntarnos si las posibilidades que previamente hemos aceptado para teorizar son realmente las correctas, pues tales posibilidades son verdaderas en tanto que las hemos admitido para teorizar; y que nos son útiles para un propósito en particular. Sin embargo, eso no implica que las posibilidades aceptadas sean las posibilidades que en realidad describen objetiva o correctamente el mundo. La propuesta del trivialismo platónico considera que el mundo es de una cierta manera, esto es, el mundo es así tal y como lo estamos viendo, existe un conjunto de cosas que son independientes de nosotros, desde este punto de vista, el trivialismo platónico considera que el mundo es objetivo. Pero, donde no hay objetividad es en el tipo de recursos lingüísticos que utilizamos para describirlo, ya que sólo es con respecto a un espacio de posibilidades como podemos considerar que tal espacio es objetivo.

Las distinciones entre los espacios de posibilidades que los enunciados de identidad hacen, únicamente se comprometen con el lado de la región de posibilidades que previamente se han considerado como correctos, pero no hay un hecho objetivo sobre cuáles de esas posibilidades utilizar. Para entender mejor la no objetividad de los espacios de posibilidades, hagamos una analogía con los diferentes lenguajes que existen en el mundo. Podemos decir que hay un modo objetivo de ser el mundo porque una vez que hemos aceptado un espacio de posibilidades sucede un hecho objetivo sobre, ¿cuáles de esas posibilidades son falsas? y, cuáles de esas posibilidades describen el mundo de acuerdo a cómo nosotros lo describimos. Pero, si nos preguntamos, por ejemplo, ¿cuál es el lenguaje objetivamente correcto que describe el mundo correctamente?, al parecer no hay un lenguaje objetivamente correcto, sino que los lenguajes son sólo un tipo de herramientas que empleamos para describir el mundo de acuerdo a cómo consideramos que éste es.

Lo único que podemos considerar como objetivamente correcto es la manera en que de hecho es el mundo, pero, otra cosa muy diferente, es considerar como objetivas a las distinciones de las regiones del espacio de posibilidades previamente aceptadas que hacemos a través de las descripciones del mundo mediante los enunciados de identidad. De tal forma que, de acuerdo con el trivialismo platónico, no existe tal cosa como un espacio de posibilidades objetivamente correcto.

Sin embargo, a pesar de que el trivialismo platónico no acepta un espacio de posibilidades que sea objetivamente correcto, si permite cierta objetividad. Pues, una vez que consideramos una concepción del espacio de posibilidad admitido, estamos en condiciones de decir que: con respecto a ese espacio de posibilidades en particular, qué es lo que consideramos como verdadero y, qué es lo que consideramos como falso. Desde este punto de vista, podemos decir que tal espacio de posibilidad es verdadero, siempre y cuando se haya aceptado trabajar previamente tal región del espacio de posibilidad.

Para el trivialismo platónico, es imposible hablar de verdad sin antes haber aceptado un espacio de posibilidad, pues sino es el caso que previamente tengamos enunciados de identidad que funjan como criterios de corrección de lo que aceptamos como verdadero o no, no se podría decir en función de qué vamos a considerar a un enunciado como verdadero o falso.

5.5 ¿Cuáles son algunas ventajas y desventajas de teorizar a partir del espacio de posibilidades?

La postura del trivialismo platónico se contrapone a la posición metafisicalista. El metafisicalismo defiende la tesis que el mundo está construido de hechos que se pueden expresar por medio de una colección de objetos y propiedades y, que la forma en que es el mundo depende simplemente de cuáles de esos objetos esenciales tienen tales propiedades esenciales o fundamentales.

La propuesta del trivialismo platónico considera que el metafisicalismo[57] es una postura muy arriesgada, pues no es claro cuál sería el criterio para decidir qué enunciados serían más esenciales o fundamentales que otros cuando explicamos hechos del mundo a partir de objetos y propiedades. El metafisicalismo cancela la posibilidad de describir un hecho de diferentes maneras, lo que desemboca en que no es posible ampliar la cantidad de enunciados que puedan describir un mismo hecho de diferentes maneras, por lo que tenemos menos recursos para teorizar. Para evitar lo anterior, una alternativa consiste en pensar que el mundo está compuesto por hechos, objetos y propiedades (igual que lo considera el metafisicalismo), pero a diferencia de éste, la tesis composicionalista[58] sostiene que los hechos pueden describirse de maneras distintas. Considerar que no hay una manera esencial, canónica o fundamental de describir los hechos de los que está compuesto el mundo.

Adoptar una posición composicionalista permite ampliar la cantidad de enunciados que describen hechos y, no sólo de una manera fundamental como lo sostiene la tesis metafisicalista. En este sentido, el trivialismo platónico es una posición más imparcial acerca de la naturaleza metafísica del mundo. De esta manera, en la posición composicionalista a diferencia del metafisicalismo, la concepción del mundo se va desarrollando de acuerdo a cómo vayamos teorizando.

Finalmente, nos parece oportuno hacer notar que se podría llevar a cabo una investigación que se enfoque en lo que Agustín Rayo llama "logro de transferencia de información" cuando explica la manera en que se da el logro cognitivo en la matemática (aritmética). Es claro que, para Rayo, el logro cognitivo en matemáticas ocurre cuando se logra transferir información matemática que se tenía respecto a un propósito particular. Posteriormente desenmarañar esa información matemática de manera que logremos revelarla y consolidarla para resolver nuevos propósitos matemáticos. Sin embargo, consideramos que lo que merece la pena explicar a profundidad es: ¿Qué es lo que ocurre a nivel cerebral cuando se da el logro cognitivo para el caso de las matemáticas? Rayo menciona que su epistemología de las matemáticas se basa en la práctica matemática, y parece que la expresión *transferencia de información* captura bastante bien cómo

[57] Para más detalles véase la sección: 2.4 Metafisicalismo de esta investigación, p. 44.

[58] Para más detalles véase la sección: 2.5 Composicionalismo de esta investigación, p. 47.

ocurre el logro cognitivo en la matemática. Pero no es claro qué sucede a nivel cerebral cuando se da esa transferencia de información.

VI Bibliografía

Balaguer, M. "Fictionalism in the Philosophy of mathematics", en E. Zalta (Ed.), Stanford Encyclopedia of Philosophy, (2018).

Barceló, A. Sobre el análisis. Filosofía Contemporánea. México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM. México, 2019. pp. 282.

Beall, J. "From full blooded platonism to really full blooded platonism" Philosophia Mathematica 7 (3), (1999), pp. 322-325.

Benacerraf, P. Mathematical Truth. in P. Benacerraf y H. Putnam (Eds.), Philosophy of Mathematics: Selected Readings Second Edition Cambridge: Cambridge University Press. 1983. pp. 403-420.

Celluci, C. "Varieties of maverick philosophy of mathematics", en B. Sriraman (Ed.), Humanizing Mathematics and its Philosophy. Cham: Birkhäuser, 2017. pp. 223-251.

Dancy, J. Introducción a la epistemología contemporánea. Traducido por José Luís Prades Colma, Tecnos, Madrid, pp. 275.

Gettier, E. L. Is Justified true belief knowledge? Analysis, 1963. pp. 121-123.

Goldman, A.I. A Causal Theory of Knowing. The Journal of Philosophy 1967. 64, 12: pp. 357-372.

HURTADO GUILLERMO, El *(supuesto)* trilema del saber en: Crítica. REVISTA HISPANOAMERICANA DE FILOSOFÍA. IIF. Vol. XXVII / No. 83 / México, agosto 1996. pp. 131-137.

Jackson, Frank. Epiphenomenal Qualia, Philosophical Quarterly, vol. 32, no. 127, pp. 127-136. [Versión en castellano: ``Qualia epifenoménicos", en Maite Ezcurdia y Olbeth Hansberg (comps.), La naturaleza de la experiencia, trad. Laura E. Manríquez, Instituto de Investigaciones Filosóficas - UNAM, México, 2011, pp. 95-110.

Kripke, Saul. El nombrar y la necesidad. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM. Segunda edición. Traducción Margarita M. Valdés, México, 2017. pp. 176.

La Balsa y la Pirámide: Coherencia *versus* fundamento en la Teoría del Conocimiento, en Conocimiento y Virtud Intelectual, UNAM-FCE, México, 1992. pp. 213-249.

Maddy, P. Indispensability and Practice. The Journal of Philosophy, 84 (6), (1992). pp. 275-289.

Moliner, María. DICCIONARIO DE USO DEL ESPAÑOL A-H, Gredos. Segunda Edición, España. 1998. pp. 1519.

Núñez Erices, G. G. (2019). La pregunta sobre la composición material como una pregunta sobre límites. Estudios de Filosofía, 59, 97-120.

Orayen, Raúl. La Lógica y el dilema de Benacerraf en: Crítica, REVISTA HISPANOAMERICANA DE FILOSOFÍA. IIF. Vol. XXIII / No. 68 / México, agosto 1991. pp. 127-138.

Pritchard, D.H. The Knowledge account of understanding, University of Edimburgo, 2013. pp. 1-15.

Quine, W.V.O. On What There Is, en su From a Logical Point of View. Harvard, Harvard University Press. 1953. pp. 1-19.

Rayo, F. Agustín. La construcción del espacio de posibilidades. Cátedra José Gaos. 2013. Editado por el Instituto de Investigaciones Filosóficas. IIF. UNAM, 2015. pp. 144.

R. Consuegra F. LO QUE ES Y LO QUE NO ES VERDAD MATEMÁTICAS, Nota introductoria a La verdad matemática de Paul Benacerraf. Universidad de Valencia, ÁGORA - Papeles de Filosofía- (2004), Vol. 23, n° 2. pp. 227-232.

Sider, T. (2013). Against Parthood. En D. Zimmerman (Ed.), Contemporary Debates in Metaphysics (Vol. 8, pp. 237-293). Oxford: Blackwell.

Sosa. E. La Balsa y la Pirámide: Coherencia *versus* fundamento en la Teoría del Conocimiento" en Conocimiento y Virtud intelectual, UNAM-FCE, México, 1992. pp. 213-249.

Shapiro, S. Structuralism, Thinking about Mathematics. New York: Oxford University Press. Capítulo 10, 2000. pp. 257- 289.

Torres Alcaraz, Carlos. ¿Ignoramus et ignorabimus? En Anuario de Filosofía. Volumen 1, 2007, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Filosofía y Letras, México 2009. pp. 33-49.

van Inwagen, Peter, Material Beings, Cornell University Press, Ithaca. 1990.