Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Espacios estrella P

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemático

presenta:

Diego Eduardo Aldana Receña

Tutor:

Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2021

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mis padres y mis hermanos por su apoyo incondicional. Así como a mi primo Luis por siempre haberme guiado con sus valiosos consejos. En la misma linea quiero agradecer a Vicky, Ricardo y Ceci por darme un segundo hogar.

Por otro lado, agradezco a Marian por todo el apoyo, paciencia, amor que me ha tenido y por mantenerme siempre con ánimos para seguir adelante.

A mis amigos, Edwin, Ayax, Margarita, Lua, Ariadna, Karim, Ramón y Roxana que hicieron que la facultad fuera un lugar tremendamente agradable y siempre me ayudaron a ser un mejor matemático y persona.

A mi tutor Alejandro, por su paciencia y apoyo durante la redacción de mi trabajo, así como también por su maestría en la enseñanza gracias a la cual me enamore de la topología. También a Ángel Tamariz y Luis Enrique Gutiérrez Domínguez por sus valiosos comentarios que ayudaron a complementar este trabajo.

Por último, quisiera agradecer a la UNAM por todas las oportunidades que me ha dado. En particular agradezco el apoyo recibido por PAPIIT-DGAPA-UNAM IN119020.

Índice general

Introducción **v**

1. Una introducción a los espacios estrella P **1**
- 1.1. Nociones básicas . . . 1
- 1.2. Teoremas generales . . . 5

2. Espacios estrella compactos y estrella finitos. **9**
- 2.1. Estrella compacto y estrella finito como nuevas propiedades . . . 9
- 2.2. Propiedades de espacios estrella finitos y estrella compactos . . . 11

3. Espacios estrella numerables y estrella Lindelöf **21**
- 3.1. Los espacios estrella numerables y estrella Lindelöf como dos nuevas clases de espacios 21
- 3.2. Las propiedades de los espacios estrella Lindelöf . . . 23

4. Espacios estrella numerablemente compactos **33**
- 4.1. Espacios numerablemente compactos, una nueva clase de espacios . . . 33
- 4.2. Propiedades de espacios estrella numerablemente compactos . . . 33

5. Espacios estrella σ-compactos **37**
- 5.1. Estrella σ-compacto una nueva propiedad. . . . 37
- 5.2. Propiedades de los espacios estrella σ-compactos . . . 39

6. Espacios estrellas P y espacios metrizables. **45**
- 6.1. Espacios metrizables . . . 45
- 6.2. Espacios de Moore . . . 46
- 6.3. Espacios semiestratificables . . . 54

A. **57**
- A.1. Espacios Pseudocompactos y espacios de Mrówka . . . 57
- A.2. Duplicado de Alexandroff . . . 58
- A.3. Espacios de Moore y espacios semiestratificables . . . 60

Bibliografía **61**

Introducción

Las propiedades estrella P son parte de la familia de las propiedades de cubierta. En un comienzo, éstas se utilizaron para generar una herramienta que ayudara a esclarecer y enriquecer algunos resultados ya conocidos mediante el uso de caracterizaciones de las estrellas. Como consecuencia, surgió una nueva gama de generalizaciones de espacios tipo Lindelöf, compacto, numerablemente compacto, entre ellos, los denominados espacios estrella P, donde P representa un propiedad topológica de tipo Lindelöf, compacto o numerablemente compacto.

En general las propiedades estrella P quedan dadas por las siguientes dos definiciones:

Definición 0.0.1. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X y $A \subset X$. Definimos la estrella de A sobre $\mathcal{U}$ como*

$$st(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Además si $st(A,\mathcal{U}) = X$, entonces decimos que A es un núcleo estrella de $\mathcal{U}$.

Definición 0.0.2. *Sea P una propiedad topológica. Decimos que un espacio X es estrella P si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe $A \subset X$ tal que A tiene la propiedad P y es el núcleo estrella de la cubierta $\mathcal{U}$, es decir, se cumple:*

$$st(A,\mathcal{U}) = X.$$

Y aunque puedan parecer simples estas dos definiciones, realmente abren un campo de trabajo enorme, puesto que para cualquier propiedad topológica P siempre existe su respectiva propiedad estrella P.

En esta tesis se pretenden introducir y estudiar a los espacios estrella P, en donde P representará alguna de las propiedades topológicas más importantes como la compacidad, la compacidad numerable, la propiedad de Lindelöf entre otras. El objetivo es darle al lector una introducción de manera apropiada a este nuevo tipo de propiedades de cubierta haciendo particular hincapié en cómo encajan éstas con las tradicionales propiedades de cubierta.

El trabajo se enfoca en la presentación de los espacios estrella P como propiedades nuevas. Cabe destacar que dependiendo de la propiedad topológica P con la que se inicie, es posible que la correspondiente propiedad estrella P no genere un concepto nuevo. Por lo cual, dentro del trabajo se destina mucho esfuerzo en mostrar que las propiedades topológicas P que usaremos en efecto generarán propiedades nuevas.

En el primer capítulo, se presentará la definición de la estrella de un conjunto respecto a una familia de subconjuntos y la definición de los espacios estrella-P. También vamos a dar algunos resultados generales sobre los espacios estrella P que serán de gran utilidad a lo largo de todo este trabajo .

El segundo capítulo se concentrará únicamente en los espacios estrella compactos y estrella finitos. Primero, se va a ver que estas propiedades no coinciden con ninguna otra propiedad de cubierta que conozcamos, y después nos enfocaremos en ver cuáles son sus diferencias y similitudes con los espacios compactos.

En el capítulo tres, se hablará sobre los espacios estrella numerables y estrella Lindelöf. Al igual que en el anterior capítulo, primero comprobaremos que estas propiedades sí nos definen nuevas propiedades de cubierta y luego vamos a compararlas con los espacios Lindelöf.

En los capítulos cuatro y cinco, se seguirá la misma línea de trabajo que en los capítulos dos y tres, solamente que esta vez concentrándonos en los espacios estrella numerablemente compactos (en el capítulo cuatro) y los espacios estrella $\sigma-$compactos (en el capítulo cinco).

Por último en el capítulo seis, se abordará el problema de determinar algunas clases de espacios en donde las diferentes propiedades estrella P, que se han estudiado en los anteriores capítulos son equivalentes entre sí. En concreto se estudiará a los espacios estrella P dentro de la clase de los espacios metrizables, de los espacios de Moore y de los espacios semiestratificables. Cabe destacar que en algunos de estos problemas será necesario el uso de axiomas adicionales a ZFC, por lo que será de mucha ayuda la aplicación de algunas técnicas propias de la Teoría de Conjuntos. También es importante decir que, a diferencia de los capítulos uno al cinco, el contenido relacionado a las propiedades estrella P en el capítulo seis no se puede encontrar en la bibliografía de esta tesis, puesto que éste es producto de el autor de esta tesis en conjunto con el Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Capítulo 1

Una introducción a los espacios estrella P

En este capítulo definiremos la estrella de un conjunto respecto a una familia de subconjuntos, los espacios estrella-P, así como algunos resultados generales sobre estos.

Cabe hacer notar que durante este texto, cuando se hable de un espacio o un espacio topológico siempre nos estaremos refiriendo a un espacio topológico Hausdorff con al menos 2 puntos a menos claro que se especifique lo contrario.

1.1. Nociones básicas

Definición 1.1.1. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X y $A \subset X$. Definimos la estrella de A sobre $\mathcal{U}$ como:*

$$st(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Además si $st(A,\mathcal{U}) = X$, entonces decimos que A es un núcleo estrella de $\mathcal{U}$.

Ahora, probaremos unas pocas propiedades inmediatas de las estrellas.

Proposición 1.1.2. *Si X es un espacio, $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X y $x, y \in X$, entonces $x \in st(\{y\},\mathcal{U})$ si y sólo si $y \in st(\{x\},\mathcal{U})$.*

Demostración. Para demostrar la suficiencia supongamos que $x \in st(\{y\},\mathcal{U})$, entonces, tenemos que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ y tal que $x \in U$, por lo tanto $y \in U$ y $U \cap \{x\} \neq \emptyset$. De lo que concluimos que $y \in st(\{x\},\mathcal{U})$.

La otra implicación es análoga. □

Por comodidad en la notación escribiremos $st(x,\mathcal{U})$ para denotar la estrella de $\{x\}$ sobre $\mathcal{U}$. En cuanto a la notación y terminología en general se usará como en [2]. En particular, para un espacio X y $A \subset X$ denotaremos $cl_X(A)$ e $int_X(A)$ como la cerradura y el interior respectivamente de A en el espacio X. Una función perfecta se definirá como una función cerrada y compacta; es decir, una función tal que la preimagen de cada punto en su codominio sea un conjunto compacto. Los símbolos ω y ω_1 denotarán el primer ordinal infinito y el primer ordinal no numerable respectivamente. Si α es un ordinal, entonces $[0,\alpha)$ y $[0,\alpha]$ serán vistos como espacios topológicos siempre con la topología de orden, a menos de que se mencione lo contrario. El número $\mathfrak{c}$ representará al cardinal del continuo y dado un cardinal κ, κ^+ denotará al cardinal sucesor de κ. Para representar la compactación Stone Čech de un espacio Tychonoff X, utilizaremos el símbolo βX y para un ordinal α, $\beta\alpha$ representará la compactación Stone Čech del espacio $[0,\alpha)$ con la topología de orden. Por último dado un conjunto A, $|A|$ denotará la cardinalidad de A.

Ahora demostraremos otra proposición que aunque es fácil de probar, es de gran utilidad.

Proposición 1.1.3. *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una colección de abiertos de X, entonces para todo $A \subset X$ se tiene que*

$$st(A,\mathcal{U}) = st(cl_X(A),\mathcal{U}).$$

Demostración: Como $A \subset cl_X(A)$, se sigue de la definición que $st(A,\mathcal{U}) \subset st(cl_X(A),\mathcal{U})$. Ahora, si tomamos $x \in st(cl_X(A),\mathcal{U})$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ y $U \cap cl_X(A) \neq \emptyset$. Por lo que $U \cap A \neq \emptyset$, pues U es una vecindad abierta de cualquier punto en $U \cap cl_X(A)$ y las vecindades de estos puntos intersectan a A por estar en la cerradura. Por tanto $x \in st(A,\mathcal{U})$. $\square$

Ya que hemos definido el concepto de estrella, estamos en condiciones para definir qué es un espacio estrella P.

Definición 1.1.4. *Sea P una propiedad topológica. Decimos que un espacio X es estrella P, si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe $A \subset X$ tal que A tiene la propiedad P y es el núcleo estrella de la cubierta $\mathcal{U}$; es decir, se cumple:*

$$st(A,\mathcal{U}) = X.$$

Cabe destacar que para cada propiedad topológica P, se tiene asociada la correspondiente propiedad topológica estrella P.

En este texto nos enfocaremos en estudiar sólo algunos tipos de espacios estrella P, como lo son: los estrella compactos, estrella finitos, estrella numerables, estrella Lindelöf, estrella $\sigma-$compactos y estrella numerablemente compactos.

Como corolario de la Proposición 1.1.3, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.1.5. *Sea X un espacio. Si existe $D \subset X$ tal que D es denso y tiene una propiedad topológica P, entonces X es un espacio estrella P.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por la Proposición 1.1.3 tenemos que:

$$st(D,\mathcal{U}) = st(cl_X(D),\mathcal{U}) = st(X,\mathcal{U}) = X.$$

De lo que se concluye que X es espacio estrella P, puesto que D tiene la propiedad P. $\square$

Un resultado inmediato de la definición de espacio estrella P es el siguiente.

Proposición 1.1.6. *Si X es un espacio tal que tiene una propiedad topológica P, entonces X es un espacio estrella P.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como $st(X,\mathcal{U}) = X$ y X tiene la propiedad P, entonces X es un espacio estrella P. $\square$.

La siguiente proposición, será una proposición que aunque sea fácil de demostrar, nos ayudará mucho en las futuras pruebas.

Proposición 1.1.7. *Dada una propiedad P, un espacio X es estrella P si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de X tal que toda cubierta abierta de básicos de $\mathcal{B}$ tiene un núcleo estrella con la propiedad P.*

Demostración: La suficiencia se sigue directamente de la definición, por lo que nos ocuparemos de demostrar la necesidad.

Supongamos que existe una base $\mathcal{B}$ de X con la propiedad de la proposición. Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Para cada $x \in X$ se tiene que existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Luego, como $\mathcal{B}$ es base, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U_x$. Ahora, para cada $x \in X$ escojamos su B_x y U_x respectivos y formemos

$$\mathcal{U}' = \{B_x : x \in X\}.$$

Por lo tanto, por hipótesis, existe $A \subset X$ tal que A tiene la propiedad P y $st(A,\mathcal{U}') = X$. Ahora, A será el conjunto que nos servirá como estrella núcleo de $\mathcal{U}$. En efecto, si tomamos $x \in X$, existe $B_{x'}$ tal que $B_{x'} \cap A \neq \emptyset$ y $x \in B_{x'}$, además de que tenemos que $U_{x'} \in \mathcal{U}$ y $B_{x'} \subset U_{x'}$. Por lo tanto $x \in U_{x'}$ y $U_{x'} \cap A \neq \emptyset$, lo que quiere decir que $x \in st(A,\mathcal{U})$ y así se da que $st(A,\mathcal{U}) = X$. Por último, como A tiene la propiedad P, podemos concluir que X es estrella P. $\square$

Notemos que con la Proposición 1.1.6, podemos ver que un espacio con una propiedad topológica P siempre será estrella P, pero una pregunta natural que puede surgir es si para algunas propiedades topológicas (o todas) el converso de esta proposición se vale. Si esto resulta cierto para alguna propiedad P, entonces significa que realmente no estamos definiendo "algo nuevo" por lo que no tiene ningún sentido estudiarlo desde el punto de vista de los espacios estrella P. Para demostrar que esto sí puede pasar, daremos dos ejemplos de propiedades P tales que P=estrella P. Sin embargo, las propiedades que se estudiarán en esta tesis no cumplen el converso de la Proposición 1.1.6

Proposición 1.1.8. *Si X es un espacio estrella conexo, entonces X es un espacio conexo*

Demostración: Procederemos por contrapuesta, así que tomemos un espacio no conexo X. Como X no es conexo existen abiertos no vacíos W y V ajenos de X tales que $X = W \cup V$. Luego, tenemos que $\mathcal{U} = \{W, V\}$ es una cubierta abierta de X, y si existe $A \subset X$ tal que $st(A, \mathcal{U}) = X$, se tiene que $A \cap W \neq \emptyset$ y que $A \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, como $A = (W \cap A) \cup (V \cap A)$, tenemos que A se puede ver como la unión de dos abiertos ajenos no vacíos de A, por lo que A no es conexo. Por lo tanto X no es estrella conexo. □

Proposición 1.1.9. *Si X es un espacio estrella pseudocompacto, entonces X es pseudocompacto (vease A.1.1).*

Demostración: Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la siguiente cubierta abierta en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{V} = \{(0 + \frac{n}{2}, 1 + \frac{n}{2}) : n \in \omega\} \cup \{(\frac{-1}{2} - \frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}) : n \in \omega\}.$$

Luego, tomemos $\mathcal{U}$ como la cubierta abierta de X dada por las preimágenes de $\mathcal{V}$ es decir:

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}.$$

Entonces como X es un espacio estrella pseudocompacto, tenemos que existe $A \subset X$ tal que A es pseudocompacto y $st(A, \mathcal{U}) = X$. Por otro lado tenemos que $f|_A$ es una función continua real valuada definida en un pseudocompacto, así que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $f[A] \subset [-M, M]$ y con esto podemos dar la siguiente afirmación:

Afirmación: $f[X] \subset [-M - 1, M + 1]$.

Prueba: Tomemos $x \in X$ tal que $x \notin A$, entonces sabemos que como A es núcleo estrella, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ y $U \cap A \neq \emptyset$. Ahora, si suponemos sin pérdida de generalidad que $f(x) \geq 0$, tenemos que

$$U = f^{-1}[(0 + \frac{n}{2}, 1 + \frac{n}{2})]$$

para alguna $n \in \omega$ ó

$$U = f^{-1}[(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})].$$

De esta manera, si tenemos el primer caso podemos notar que como $f[A] \subset [-M, M]$ y $U \cap A \neq \emptyset$, entonces existe un $y \in A \cap U$ tal que

$$f(y) \in (0 + \frac{n}{2}, 1 + \frac{n}{2}) \cap [-M, M].$$

Por tanto, como $|f(y) - f(x)| < 1$, es claro que $f(x) \in [-M - 1, M + 1]$ y ya con esto obtenemos que f es una función acotada. Por otro lado el segundo caso es análogo, por lo que concluimos nuestra afirmación.

Entonces con la afirmación hemos probado que X es un espacio pseudocompacto. □

En estas últimas dos proposiciones hemos dejado claro que algunas propiedades estrella P son lo mismo que la propiedad P y en general, por la Proposición 1.1.6, podemos ver que la clase de espacios estrella P es una clase mas grande que la de los espacios con la propiedad P, para cualquier propiedad topológica P. Pero, esto muy posiblemente nos hace preguntar sobre qué tan grande puede llegar a ser la clase de espacios estrella P; es decir, ¿puede existir una propiedad P tal que la clase de los espacios estrella P contenga más clases de espacios, además de los espacios con la propiedad P? La respuesta a esta pregunta resulta afirmativa, tal como veremos en el siguiente ejemplo, pero el ejemplo siguiente no sólo contesta esta pregunta, sino que muestra que existe una propiedad P tal que la clase de los espacios estrella P, se vuelve tan grande, que incluso se vuelve la clase de todos los espacios topológicos.

Teorema 1.1.10. *Si X es un espacio topológico, entonces para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe un núcleo de $\mathcal{U}$ cerrado y discreto. En particular X es estrella discreto.*

Demostración: Sea X un espacio y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Tomemos $x_0 \in X$ y consideremos al siguiente conjunto

$$\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} : x_0 \in U\}.$$

Ahora, si $X \setminus \bigcup \mathcal{U}_0 \neq \emptyset$, entonces consideramos $x_1 \in (X \setminus \bigcup \mathcal{U}_0)$ y hacemos

$$\mathcal{U}_1 = \{U \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0 : x_1 \in U\}.$$

De esta manera continuamos con un proceso de recursión transfinita, de tal modo que en general si α es un ordinal tal que para todo $\beta < \alpha$, se tiene que

$$X \setminus \bigcup (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta) \neq \emptyset$$

Definimos

$$\mathcal{U}_\alpha = \{U \in \mathcal{U} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta : x_\alpha \in U\}$$

donde x_α es un elemento arbitrario tomado en $(X \setminus \bigcup(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta))$. De esta manera, designamos a γ como el primer ordinal tal que $(X \setminus \bigcup(\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{U}_\beta)) = \emptyset$ y hacemos

$$D = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}.$$

Consecuentemente, por la forma que fueron tomados los elementos de D, sucede que $st(D,\mathcal{U}) = X$.

Notemos que D es discreto, puesto que si tomamos $x_\alpha \in D$, podemos afirmar que para cualquier $U \in \mathcal{U}_\alpha$ se tiene que $U \cap D = \{x_\alpha\}$. Ya que por la construcción de $\mathcal{U}_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$ se tiene que si $U \in \mathcal{U}_\alpha$, entonces, $U \notin \mathcal{U}_\beta$, por lo que $x_\beta \notin U$. Además, que si $\gamma > \delta > \alpha$, se puede ver que $x_\delta \in X \setminus \bigcup(\bigcup_{\beta<\delta} \mathcal{U}_\beta)$, por lo que en particular $x_\delta \notin U$. Con esto es claro que se cumple nuestra afirmación, lo que al mismo tiempo nos dice que D es discreto.

Por último, veamos que D es cerrado. Para esto notemos que si tomamos un $x \in X \setminus D$, entonces podemos ver que existe $\alpha < \gamma$, tal que

$$x \in \bigcup \mathcal{U}_\alpha.$$

De este modo, existe un $U \in \mathcal{U}_\alpha$, tal que $x \in U$. Además, por nuestra afirmación del parrafo anterior tenemos que $U \cap D = \{x_\alpha\}$, por lo que como U es una vecindad abierta de x que solamente in tersecta a D en un conjunto finito y X es Hausdorff, tenemos que $x \notin cl_X(D)$. Por tanto, D es cerrado.

Con esto concluimos que D es un núcleo discreto y cerrado para la cubierta $\mathcal{U}$. En particular X es estrella discreto.

□

De esto podemos deducir un corolario, puesto que si tenemos un espacio X tal que

$$sup\{|D| \subset X : D \text{ es cerrado y discreto } \} \leq \omega,$$

tenemos que por 1,1,10 X será estrella numerable. Cabe hacer notar que al cardinal que anteriormente definimos como el supremo de las cardinalidades de los subespacios cerrados y discretos de un espacio X más el cardinal $\aleph_0$ se le llama la extensión de X y se le denota como $e(X)$.

Corolario 1.1.11. *Si X es un espacio, tal que $e(X) = \omega$, entonces X es un espacio estrella numerable*

Demostración Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Por el Teorema 1,1,10 existe un cerrado discreto D de X, tal que es núcleo de $\mathcal{U}$. Como $|D| \leq e(X) \leq \omega$, tenemos que D es un núcleo numerable. □

1.2. Teoremas generales

Como se va a ver en el transcurso de este trabajo, los espacios estrella P no se comportan tan bien como se esperaría, con esto se quiere decir que aunque una propiedad P se preserve bajo ciertas condiciones, esto no siempre se conservará cuando lo pasemos al lenguaje de los espacios estrella. Sin embargo, ahora daremos algunos teoremas y proposiciones importantes y sencillos, en los que podemos ver bajo qué condiciones sí se siguen comportando de la misma manera los espacios estrella P con respecto a los espacios con la propiedad P.

Proposición 1.2.1. *Si P y P' son propiedades topológicas tales que P implica P', entonces estrella P implica estrella P'.*

Demostración: Sean P y P' como en el enunciado, y sea X un espacio estrella P y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es estrella P existe $A \subset X$ tal que A tiene la propiedad P y $st(A,\mathcal{U}) = X$. Luego, como P implica P' entonces A tiene la propiedad P' y por tanto X es estrella P'. □

Ahora, podemos recordar que la propiedad de compacidad hace que algunas otras propiedades se "mantengan bajo el producto". Es decir, a veces cuando tenemos un espacio X con una propiedad P y un espacio compacto, Y, se puede ver que el espacio $X \times Y$ es un espacio que mantiene la propiedad P. Cuando esto pasa para todo espacio X con la propiedad P y todo espacio Y, compacto, se dice que P es una propiedad compactamente productiva (algunos ejemplos son la compacidad o la propiedad de ser lindelöf). Entonces, ahora vamos a ver que si una propiedad P es compactamente productiva, se va a tener que estrella P también lo va a ser.

Teorema 1.2.2. *Si P es una propiedad topológica compactamente productiva, entonces estrella P también es compactamente productiva.*

Demostración: Sean X, Y espacios topológicos tales que X es estrella P, con P una propiedad compactamente productiva y Y es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de básicos canónicos de $X \times Y$.

Si fijamos $x \in X$, tenemos que para cada $y \in Y$, existe $U_y^x \times V_y^x \in \mathcal{U}$ tal que $\langle x, y\rangle \in U_y^x \times V_y^x$. De esta manera si tomamos

$$\mathcal{V}(x) = \{V_y^x : U_y^x \times V_y^x \in \mathcal{U}\}$$

podemos ver que $\mathcal{V}(x)$ es una cubierta abierta de Y. Como Y es compacto, existe $\mathcal{V}'(x) \subset \mathcal{V}(x)$, tal que $\mathcal{V}'(x)$ es una subcubierta finita de Y. De esta forma podemos ver que

$$U(x) = \bigcap\{U_y^x : V_y^x \in \mathcal{V}'(x)\}$$

es un abierto en X que tiene a x. De este modo haciendo esto para cada $x \in X$, podemos tomar

$$\mathcal{U}_X = \{U(x) : x \in X\}.$$

Así, $\mathcal{U}_X$ es una cubierta abierta de X, por lo que podemos encontrar $A \subset X$ tal que A tenga la propiedad P y $st(A,\mathcal{U}_X) = X$. Así, nuestro núcleo estrella buscado va a ser $A \times Y$. Como $A \times Y$ tiene la propiedad P, solo nos faltaría verificar que

$$st(A \times Y,\mathcal{U}) = X \times Y.$$

Para este propósito tomemos $\langle x, y\rangle \in X \times Y$. Sabemos que existe $U(x')$ tal que $x \in U(x')$ y $U(x') \cap A \neq \emptyset$, por lo que de este modo existe $V_{y'}^{x'} \in \mathcal{V}'(x')$ tal que $y \in V_{y'}^{x'}$ y así, como se tiene que $U(x') \subset U_{y'}^{x'}$ podemos ver que $\langle x, y\rangle \in U_{y'}^{x'} \times V_{y'}^{x'}$ y que

$$U_{y'}^{x'} \times V_{y'}^{x'} \cap A \times Y \neq \emptyset,$$

por lo que $\langle x, y\rangle \in st(A \times Y,\mathcal{U})$ y por lo tanto $st(A \times Y,\mathcal{U}) = X$. Así obtenemos que $X \times Y$ es estrella P. □

Teorema 1.2.3. *Si P es una propiedad topológica invariante bajo imágenes continuas, entonces la propiedad estrella P también lo es.*

Demostración: Sea P una propiedad invariante bajo imágenes continuas. Sean X, Y espacios topológicos tal que X es estrella P, y sea

$$f : X \to Y$$

una función continua y sobreyectiva. Queremos demostrar que Y es estrella P y para esto vamos a tomar una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y y definimos

$$\mathcal{U}' = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}.$$

Entonces $\mathcal{U}'$ define una cubierta abierta en X. Luego, como X es estrella P, existe $A \subset X$ tal que A tiene la propiedad P y

$$st(A,\mathcal{U}') = X.$$

Así, proponemos a $f[A]$ como nuestro candidato a núcleo estrella de $\mathcal{U}$. Entonces, si tomamos $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, además, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$x \in f^{-1}[U] \;\text{ y }\; f^{-1}[U] \cap A \neq \emptyset.$$

Esto significa que $U \cap f[A] \neq \emptyset$ y que $y \in U$. Por tanto, $y \in st(f[A],\mathcal{U})$ y así $f[A]$ sí es núcleo estrella. Ahora, como P es invariante bajo imágenes continuas, tenemos que $f[A]$ tiene la propiedad P y por lo tanto Y es estrella P $\square$.

Teorema 1.2.4. *Si X es un espacio estrella P, tal que P se hereda a subespacios cerrados, entonces para todo $A \subset X$, tal que A es un conjunto abierto y cerrado, se tiene que A es estrella P.*

Demostración: Sea X un espacio estrella P y $A \subset X$ un subespacio de X abierto y cerrado. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A. Como A es abierto en X, entonces para todo $U \in \mathcal{U}$, U es abierto de X. Puesto que A es cerrado, podemos considerar a la siguiente cubierta de X

$$\mathcal{U}' = \{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}.$$

Dado que X es estrella P, entonces existe $B \subset X$, tal que B tiene la propiedad P y $st(B,\mathcal{U}') = X$. Por otro lado, como A es cerrado, tenemos que $B \cap A$ tiene la propiedad P, y también cabe hacer notar que si $x \in A$, entonces $x \notin X \setminus A$ y por tanto, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $U_x \cap B \neq \emptyset$ y $x \in U_x$, pero $U_x \subset A$, por lo que $U_x \cap (B \cap A) \neq \emptyset$. Por lo tanto concluimos que $st(A \cap B,\mathcal{U}) = A$ $\square$

Teorema 1.2.5. *Si X y Y son espacios topológicos, tales que Y es un espacio estrella P (con P una propiedad que se preserva bajo preimágenes perfectas y se hereda a cerrados) y además existe $f : X \to Y$ tal que f es una función perfecta y abierta, entonces X es estrella P.*

Demostración: Notemos que dado que f es una función abierta y cerrada (esto último por ser perfecta), tenemos que $f[X]$ es un conjunto abierto y cerrado de Y. Ahora, si tomamos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X y $y \in f[X]$, tenemos que como $f^{-1}[\{y\}]$ es compacto, existe una subcolección finita $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}$ tal que

$$f^{-1}[\{y\}] \subset \bigcup \mathcal{U}_y$$

y $U \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}_y$. Por otro lado, tomemos

$$V_y = Y \setminus f[X \setminus \bigcup \mathcal{U}_y].$$

Como f es cerrada, podemos darnos cuenta que V_y es una vecindad abierta de y en $f[X]$. Por la forma en que fue definido V_y cumple lo siguiente:

$$f^{-1}[V_y] \subset \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}_y\}.$$

Como V_y es abierto de $f[X]$, entonces también es abierto en Y. Dado que f es abierta podemos asumir que $V_y \subset \bigcap \{f[U] : U \in \mathcal{U}_y\}$, de otra forma cambiamos a V_y por $V_y \cap \bigcap \{f[U] : U \in \mathcal{U}_y\}$, pero para no complicarnos vamos a hacer esta suposición. Ahora, tomando el abierto V_y para cada $y \in f[X]$, obtenemos la cubierta abierta

$$\mathcal{V} = \{V_y : y \in f[X]\}$$

de $f[X]$. Además, por el Teorema 1.2.4, tenemos que $f[X]$ es un espacio estrella P, por lo que podemos tomar $A \subset f[X]$ que tenga la propiedad P tal que

$$st(A, \mathcal{V}) = f[X].$$

Dado que f es una función perfecta, entonces $f^{-1}[A]$ tiene la propiedad P en X.

Ahora, ya con todo esto podemos hacer la siguiente afirmación:

Afirmación: $st(f^{-1}[A],\mathcal{U}) = X$.

Prueba: Para mostrar esto, tomemos $x \in X$ y de este modo, tenemos que existe $y \in f[X]$ tal que $f(x) \in V_y$ y $V_y \cap A \neq \emptyset$. Luego por como fueron elegidos los miembros de $\mathcal{V}$ tenemos que:

$$x \in f^{-1}[V_y] \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}_y\}.$$

Por lo que existe $U \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \in U$, y como $V_y \subset f[U]$, pues $V_y \subset \bigcap\{f[U] : U \in \mathcal{U}_y\}$, se obtiene que $U \cap f^{-1}[A] \neq \emptyset$. Por tanto, concluimos que $x \in st(f^{-1}[A],\mathcal{U})$ y como x era arbitrario, obtenemos que X es estrella P. $\square$

Capítulo 2

Espacios estrella compactos y estrella finitos.

En este capítulo nos enfocaremos en los espacios estrella compactos y un poco en los espacios estrella finitos. Principalmente vamos a concentrarnos en ver cómo se comportan estos espacios con respecto a los espacios compactos en distintos aspectos (producto topológico, suma topológica, entre otras cosas). También, por supuesto vamos a ver que estas son propiedades totalmente nuevas, aunque la propiedad de ser estrella finito va a coincidir con la compacidad numerable en espacios Hausdorff, que es básicamente en lo que vamos a estar trabajando en esta tesis. Cabe resaltar que va a ser más útil, de vez en cuando, trabajar la propiedad de la compacidad numerable en terminos de la estrella finitud

2.1. Estrella compacto y estrella finito como nuevas propiedades

En esta sección vamos a demostrar que las propiedades que se estudiarán en este capítulo son propiedades nuevas a las que ya conocemos, y para esto comenzaremos dando un ejemplo de un espacio estrella compacto y estrella finito que no es compacto ni finito. Este ejemplo resulta ser sencillo, pero para esto, antes requerimos un teorema que nos relacionará los espacios numerablemente compactos con los espacios estrella compactos y estrella finitos.

Teorema 2.1.1. *Si X es un espacio numerablemente compacto, entonces X es estrella finito.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio numerablemente compacto, pero que no es estrella finito. De esta manera, existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, tal que no tiene núcleo finito. Por lo que si tomamos $x_0 \in X$ y hacemos

$$V_0 = st(x_0, \mathcal{U}),$$

entonces existe $x_1 \in X \setminus V_0$. Podemos considerar:

$$V_1 = st(\{x_0, x_1\}, \mathcal{U}),$$

y de nuevo podemos encontrar $x_2 \in X \setminus V_1$. Siguiendo así, en general, si ya hemos escogido los primeros n-terminos (para alguna $n \in \mathbb{N}$) definimos

$$V_n = st(\{x_0, x_1, ..., x_n\}, \mathcal{U})$$

y escogemos un elemento arbitrario de

$$X \setminus [V_n]$$

al cual llamaremos x_{n+1}. De este modo podemos construir el siguiente subconjunto numerablemente infinito

$$A = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}.$$

Y también podemos construir la sucesión de abiertos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Por otro lado, podemos notar que $cl_X(A)$ es numerablemente compacto, pues es un subespacio cerrado de un espacio numerablemente compacto. Así, si $x \in cl_X(A)$ tenemos que como $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ y por tanto $U \cap A \neq \emptyset$. Es decir existe x_k para alguna $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in U \cap A$, por lo que $x \in V_k$, así que de esta manera

$$\mathcal{V} = \{V_n \cap cl_X(A) : n \in \mathbb{N}\}$$

es una cubierta abierta numerable de $cl_X A$, pero por la construcción de A no existe subcubierta finita de $\mathcal{V}$ tal que cubra a A y por tanto esto contradice que $cl_X(A)$ sea numerablemente compacto. □

Notemos que con este resultado y la Proposición 1.2.1 podemos ver que compacidad numerable implica estrella compacidad, por lo que basta con dar un espacio numerablemete compacto, que no sea compacto para dar un ejemplo de que estrella compacidad no implica compacidad. Este ejemplo es el espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ (Ver lema 2.2.2), el cual es bien conocido que no es compacto pero sí numerablemente compacto (notemos que este ejemplo también nos dice que estrella finito no implica finito).

Ahora, el siguiente paso natural, sería ver si se cumple el converso de este último teorema, o al menos bajo qué condiciones sí se cumple.

Teorema 2.1.2. *Si X es un espacio estrella finito, entonces X es numerablemente compacto.*

Demostración: Se demostrará por contrapositiva. Tomemos un espacio Hausdorff no numerablemente compacto X. De esta manera, existe un conjunto $D \subset X$ tal que es cerrado, discreto e infinito numerable, por lo que podemos etiquetar a D como $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego para cada $x_n \in D$, se tiene que existe un abierto de X, U_n, tal que $U_n \cap D = \{x_n\}$.

Ahora, para cada $m \in \omega$, definimos el siguiente conjunto

$$B_m = \{x_n : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}.$$

Notemos que

$$2^{k+1} - 2^k = 2^k(2-1) = 2^k$$

por lo que de este modo pasa que $|B_m| = 2^m$ para cualquier $m \in \omega$. Como B_m es un conjunto finito y X es un espacio Hausdorff, podemos encontrar abiertos para cada $x_n \in B_m$, digamos V_n, tal que

$$x_n \in V_n \text{ y } V_n \cap V_j = \emptyset$$

para toda $j \neq n$ con $2^m \leq j < 2^{m+1}$. Luego consideremos

$$\mathcal{V}_m = \{V_n \cap U_n : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$$

y sea $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_m : m \in \mathbb{N}\}$. Entonces, $\mathcal{V}$ es una cubierta para D, y como D es cerrado se tiene que

$$\mathcal{U} = \{X \setminus D\} \cup \mathcal{V}$$

es una cubierta abierta de X. Esta será la cubierta que no tendrá un núcleo finito. Para ver esto, tomemos $A \subset X$ tal que A tiene cardinalidad finita y sea $|A| = m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, entonces podemos ver que $|A| < 2^m = |B_m|$. Por otro lado, cada punto de B_m sólo está en uno y sólo uno de los abiertos de $\mathcal{V}_m$, los cuales son abiertos ajenos entre sí, por lo que como $|\mathcal{V}_m| > m$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^m \leq j < 2^{m+1} \text{ y } (U_j \cap V_j) \cap A = \emptyset.$$

Por tanto $x_j \notin st(A, \mathcal{U})$, por lo que para todo $A \subset X$ tal que A es finito, A no es núcleo estrella de la cubierta $\mathcal{U}$ y así X no es estrella finito. □

Ahora, como habíamos dicho los espacios que estudiaremos van a definir propiedades nuevas, por lo que es normal pensar que si quitamos la hipótesis de ser Hausdorff en el Teorema 2.1.2, entonces este va a fallar tal como el siguiente ejemplo lo demuestra.

Ejemplo 2.1.3. *Existe un espacio topológico X, no Hausdorff, tal que es estrella finito pero que no es numerablemente compacto.*

Demostración: Consideremos un conjunto X tal que $|X| \geq \aleph_0$, y fijemos $p \in X$. Luego le vamos a dar la siguiente topología a X:

$$\tau = \{U \subset X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Podemos ver que la cubierta $\mathcal{V}' = \{\{x, p\} : x \in X \setminus \{p\}\}$ es una cubierta abierta la cual no tiene subcubiertas finitas, por lo que (X, τ) no es numerablemente compacto.

Por otro lado, tomamos una cubierta abierta arbitraria $\mathcal{U}$ de X, entonces tenemos que $st(p, \mathcal{U}) = X$, pues si $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, y como U es un abierto no vacío de (X, τ) se tiene que $p \in U$, de este modo $x \in st(p, \mathcal{U})$, por lo que se obtiene la igualdad deseada y así concluimos que X es estrella finito pero no es numerablemente compacto. $\square$

Del mismo modo nos falta verificar si estrella compacidad implica estrella finitud, pues de ser así, por la Proposición 1.2.1, resultarían ser lo mismo, pero veremos un ejemplo de que esto no sucede.

Teorema 2.1.4. *Existe un espacio X Tychonoff, estrella compacto pero que no es estrella finito.*

Demostración: Consideremos a los espacios $\beta\omega$ y $[0, \omega_1]$ y tomemos al producto de estos con la topología producto. Ahora tomemos:

$$X = (\beta\omega \times [0, \omega_1]) \setminus (((\beta\omega) \setminus [0, \omega)) \times \{\omega_1\})$$

considerado con la topología de subespacio. Entonces notemos que X es Tychonoff, pues es el subespacio del producto de dos espacios Tychonoff.

Ahora bien, demostremos que efectivamente X es estrella compacto, para esto tomemos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, la cual sin pérdida de generalidad podemos suponer cubierta de básicos canónicos. De esta manera para cada $n \in \omega$, existen $\alpha_n < \omega_1$ y $U_n \in \mathcal{U}$ tales que:

$$\{n\} \times (\alpha_n, \omega_1] \subset U_n.$$

Luego, hagamos $\alpha = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ y notemos que $\alpha < \omega_1$, por lo que $\alpha + 1$ también lo es. Ahora, si hacemos $K_1 = \beta\omega \times \{\alpha + 1\}$, entonces podemos ver que K_1 es compacto y más aún, $K_1 \cap U_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$, por lo que $[0, \omega) \times \{\omega_1\} \subset st(K_1, \mathcal{U})$, pues para cada $n \in \omega$, $\langle n, \omega_1 \rangle \in U_n$.

Ya con esto, sólo nos falta encontrar otro compacto tal que su estrella cubra la parte restante de X y de esta manera nuestro compacto buscado será la unión de estos dos. Pero esto resulta no tan complicado, ya que la parte restante es $\beta\omega \times [0, \omega_1)$ y esto es numerablemente compacto, pues es un producto de un compacto con un numerablemente compacto. Ahora, por el Teorema 2.1.1 tenemos que $\beta\omega \times [0, \omega_1)$ es estrella finito y por lo tanto existe $K_2 \subset \beta\omega \times [0, \omega_1)$ tal que K_2 es finito y $\beta\omega \times [0, \omega_1) \subset st(K_2, \mathcal{U})$. Por tanto tomando $K = K_1 \cup K_2$ tenemos que K es compacto y que $X = st(K, \mathcal{U})$ y así esto prueba que X es estrella compacto.

Por último nos falta ver que X no es estrella finito, pero por el Teorema 2.1.2 esto es equivalente a ver que X no es numerablemente compacto, y esto es relativamente sencillo ya que si nos fijamos en el conjunto

$$A = \{\langle n, \omega_1 \rangle : n \in \omega\},$$

podemos ver que es un conjunto cerrado, pues el complemento de A es $\beta\omega \times [0, \omega_1)$ y este es un abierto.

Se puede observar que A es infinito y discreto, por que ω es discreto y $\{\omega_1\}$ visto como subespacio también lo es. Por lo tanto estamos en presencia de un subconjunto de X infinito, discreto y cerrado, es decir infinito y sin puntos de acumulación, lo que nos dice que X no puede ser numerablemente compacto. $\square$

2.2. Propiedades de espacios estrella finitos y estrella compactos

Ahora pasaremos a verificar las propiedades topológicas que tienen los espacios estrella compactos y estrella finitos. Como hemos dicho, estos espacios no se comportan tan bien como se esperaría.

Por ejemplo, la compacidad se hereda a subespacios cerrados y se preserva bajo imagenes inversas de funciones perfectas, pero la estrella compacidad no. Sin embargo, una buena táctica es primero ver qué propiedades cumplen los espacios con la propiedad P y de ahí ver si eso se sigue cumpliendo para los espacios estrella P, así esto nos dará una buena idea de qué tanto se aleja P de estrella P.

Primero veremos que la propiedad de estrella compacidad no se preserva bajo la imagen inversa de funciones perfectas, a pesar de que la propiedad de compacidad sí lo hace. Para esto, antes necesitaremos dar un corolario del Teorema 1.2.4 y un lema que no se demostrará pues sale un poco del contexto de esta tesis, pero se puede consultar en [3].

Corolario 2.2.1. *Si X es un espacio estrella compacto y $A \subset X$ es un subespacio abierto y cerrado de X, entonces A, dotado de la topología de subespacio, es un espacio estrella compacto.*

Demostración: Se sigue del Teorema 1.2.4, pues la compacidad se hereda a espacios cerrados.□

Lema 2.2.2. *[3]si κ es un cardinal tal que la cofinalidad de κ es igual a $\aleph_0$, entonces el espacio $[0,\kappa)$ es σ-compacto, y si la cofinalidad de κ es mayor que $\aleph_0$, entonces el espacio de ordinales $[0,\kappa)$ es numerablemente compacto.*

Teorema 2.2.3. *Existe una función perfecta, continua y sobreyectiva de un espacio no estrella compacto a un espacio estrella compacto.*

Demostración: Consideremos al siguiente espacio:

$$X = (\beta D \times [0, \mathfrak{c}^+]) \setminus ((\beta D \setminus D) \times \{\mathfrak{c}^+\})$$

donde D es el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$. X será tomado con la topología de subespacio del espacio $\beta D \times [0, \mathfrak{c}^+]$, el cual a su vez es considerado con la topología producto.

Lo primero que haremos es probar que este es un espacio estrella compacto, pues este nos servirá como nuestro contradominio para nuestra función perfecta.

Tomemos una cubierta abierta de básicos canónicos $\mathcal{U}$ de X. Notemos que $\beta D \times [0, \mathfrak{c}^+)$ es numerablemente compacto, pues por el lema anterior, como $[0, c^+)$ tiene cofinalidad no numerable (ya que es un cardinal sucesor de un cardinal infinito), entonces es numerablemente compacto; por tanto al hacer el producto con un compacto nos queda numerablemente compacto. Ahora, por el Teorema 2.1.1, tenemos que $\beta D \times [0, \mathfrak{c}^+)$estrella finito y así existe $F_1 \subset \beta D \times [0, c^+)$ tal que F_1 es finito y

$$\beta D \times [0, c^+) \subset st(F_1, \mathcal{U}).$$

Ahora, con esto sólo nos falta cubrir a $D \times \{c^+\}$. Para esto veamos que para cada $d \in D$, existe un $\alpha_d < c^+$ tal que $\{d\} \times [\alpha_d, c^+)$ está contenido en algún miembro de $\mathcal{U}$, ya que éstas son vecindades básicas para $\{(d, \{c^+\})\}$. Ahora consideremos

$$\alpha = sup\{\alpha_d : d \in D\}.$$

Entonces $\alpha < c^+$, pues la cardinalidad de D es menor que $\mathfrak{c}^+$. Esto también nos indica que $\alpha + 1$ es menor que $\mathfrak{c}^+$, por lo que si hacemos

$$F_2 = \beta D \times \{\alpha + 1\},$$

tenemos que F_2 es un subconjunto compacto de X, y más aun $D \times \{c^+\} \subset st(F_2, \mathcal{U})$, pues $\alpha + 1 \in [\alpha_d, c^+)$ para todo $d \in D$; así $K = F_1 \cup F_2$ es un subconjunto compacto de X tal que $X = st(K, \mathcal{U})$. Por tanto X es un espacio estrella compacto.

Lo siguiente que haremos es construir al espacio que servirá como dominio para nuestra función y este será A(X), es decir el duplicado de Alexandroff de X (vease A.2.1). Para que funcione como nuestro dominio, debemos demostrar que A(X) no es estrella compacto. Para este propósito demostraremos la siguiente afirmación:

Afirmación: $F = (D \times \{c^+\}) \times \{1\}$ es un conjunto cerrado, abierto, infinito y discreto de A(X).

Prueba: Primero vamos a probar que es cerrado al probar que su complemento es abierto. Notemos que si tomamos un punto en $X \times \{1\} \setminus F$ se tiene que el punto es aislado, por lo que es claro que el unitario de ese punto es un abierto que no intersecta al conjunto F. Luego si tomamos

$x \in X \times \{0\}$, entonces $x = \langle\langle d, c^+\rangle, 0\rangle$ (para algún $d \in D$) ó $x \in (\beta D \times [0, c^+)) \times \{0\}$. Entonces, en el primero de los casos si consideramos

$$U = ((\{d\} \times [0, c^+]) \times \{0\}) \cup ((\{d\} \times [0, c^+]) \times \{1\}) \setminus (\{\langle d, c^+\rangle\} \times \{1\})$$

tenemos que U es un abierto que no toca a F y que es vecindad abierta de x.

En el segundo de los casos $x = \langle\langle y, \gamma\rangle, 0\rangle$ para algún $y \in \beta(D)$ y $\gamma < c^+$, por lo que si tomamos

$$U = \beta D \times [\gamma, c^+),$$

y si hacemos $V = U \times \{0, 1\}$ es claro que $V \cap F = \emptyset$, pues $U \cap (D \times \{c^+\}) = \emptyset$. Así, con todo esto concluimos que F es cerrado. Ahora, F claramente es infinito, además de que es abierto y discreto por como se construyó la topología de $A(X)$, por lo que damos por cierta la afirmación.

Ahora, F no es estrella compacto, pues la cubierta dada por todos los unipuntuales no tiene núcleo compacto dado que el conjunto es infinito. Esto quiere decir que A(X) no es un espacio estrella compacto, pues por el Corolario 2.2.1 sabemos que la propiedad estrella compacidad se hereda a cerrados y abiertos.

Ahora, la función f que servirá será la función natural del duplicado de Alexandroff (vease A,2,2) La cual va a cumplir todo lo que queremos gracias al Teorema A,2,3

Cabe destacar que a la función que definimos en el teorema anterior, la llamaremos la función natural del duplicado de Alexandroff; es decir, siempre que tengamos un espacio arbitrario X y a $A(X)$, cuando nos estemos refiriendo a la función natural del duplicado de Alexandroff $A(X)$, nos referiremos a la función

$$f : A(X) \to X$$

dada por $f(\langle x, i\rangle) = x$ donde $i \in \{0, 1\}$. Por otro lado esta función va a ser perfecta, continua y sobreyectiva y la prueba de esto es totalmente análoga a lo que hicimos en el Teorema 2.2.3.

Algo que le puede parecer extraño al lector, es que en el Corolario 2.2.1 se demostró que los espacios estrella compactos se heredan bajo subespacios cerrados y abiertos, sin embargo los espacios compactos se heredan bajo subespacios cerrados, por lo que sería natural preguntarse si los espacios estrella compactos se heredan bajo cerrados. La respuesta a esta pregunta será lo siguiente que nos ocupará, pero antes de esto necesitamos definir un espacio topológico muy importante, que será el espacio de Isbell-Mrówka o el espacio de Mrówka.

A lo largo de este trabajo se ocupará en repetidas ocasiones el espacio de Mrówka y se darán por hecho algunas de sus propiedades, por lo que es importante que el lector tenga un buen conocimiento sobre esto y para eso se recomienda la lectura [1].

Definición 2.2.4. *Decimos que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de ω es casi ajena si para cada $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ con $A_1 \neq A_2$ se tiene $|A_1 \cap A_2| < \aleph_0$, y para cada $A \in \mathcal{A}$, $|A| \geq \aleph_0$. Si además $\mathcal{A}$ es maximal por contención entre las familias casi ajenas, entonces diremos que $\mathcal{A}$ es una familia maximal casi ajena o una familia MAD de ω.*

Definición 2.2.5. *Definimos $\Psi(\mathcal{A})$ como el espacio topológico que tiene como conjunto base a $\omega \cup \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena de ω. A este conjunto le damos la siguiente topología definida por el siguiente sistema de vecindades abiertas $\mathcal{B} = \{B_x : x \in \omega \cup \mathcal{A}\}$, donde*

$$B_x = \{\{x\}\}$$

si $x \in \omega$ y

$$B_x = \{\{x\} \cup x \setminus F : F \in [x]^{<\aleph_0}\}$$

si $x \in \mathcal{A}$.

Es fácil notar que en realidad $\mathcal{B}$ sí es un sistema de vecindades, pues es claro que para cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$, se tiene que $B_x \neq \emptyset$ y para cada $V \in B_x$, $x \in V$.

Por otro lado, si tomamos $V_1, V_2 \in B_x$ tenemos que $V_1 \cap V_2 \in B_x$, pues este hecho es trivial si $x \in \omega$, y si $x \in \mathcal{A}$, se deduce rápidamente de que

$$x \setminus F_1 \cap x \setminus F_2 = x \setminus (F_1 \cup F_2)$$

y si $F_1, F_2 \in [x]^{<\aleph_0}$, entonces es claro que $F_1 \cup F_2 \in [x]^{<\aleph_0}$, por lo que se sigue que $V_1 \cap V_2 \in B_x$.

Por último, probemos que si $x \in V \in B_y$ para $y \neq x$, entonces existe $U \in B_x$ tal que $U \subset V$. Es claro que para que pase esto y debe de pertenecer a $\mathcal{A}$, y si $x \in \omega$, es claro que $\{x\} \subset V$. Por otro lado no es posible que $x \in \mathcal{A}$, por como definimos B_x para $x \in \mathcal{A}$.

Por tanto, $\mathcal{B}$ si es un sistema de vecindades y nos genera una topología, la cual será la topología de nuestro espacio. Al espacio $\Psi(\mathcal{A})$ lo llamaremos el Psi-espacio de $\mathcal{A}$, el espacio de Isbell-Mrówka de $\mathcal{A}$ o el espacio de Mrówka de $\mathcal{A}$.

Lema 2.2.6. *Si X es un espacio estrella compacto, entonces para cada cubierta $\mathcal{U}$ de X existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V}$ es finito y $st(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es un espacio estrella compacto, existe un $A \subset X$ tal que A es compacto y $st(A, \mathcal{U}) = X$. Luego, tomemos

$$\mathcal{U}' = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}.$$

De esta manera $\mathcal{U}'$ es una cubierta abierta de A, por lo que podemos extraer una subcubierta abierta finita $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{U}'$, así que si hacemos $\mathcal{V} = \{U : U \cap A \in \mathcal{V}'\}$, tenemos que $\mathcal{V}$ es finito y más aún $A \subset \bigcup \mathcal{V}$. Se sigue que $st(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$. □

Lema 2.2.7. *[11] Si X es un espacio topológico regular, tal que existe $D \subset X$ cerrado, discreto y $|D| = w(X) \geq \aleph_0$ (donde $w(X)$ es el peso de X), entonces X no es un espacio estrella compacto.*

Demostración: Para demostrar esto, vamos a probar que existe una cubierta $\mathcal{U}$ tal que no tiene ninguna subcolección finita $\mathcal{V}$, tal que $st(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$, y después aplicar el Lema 2.2.6.

Sea $\mathcal{B}$ una base de X de cardinalidad mínima. Como D es discreto y cerrado, para cada $x \in D$ existe vecindad abierta V_x de x tal que $V_x \cap D = \{x\}$, y para cada $y \in X \setminus D$, existe una vecindad abierta V_y de y tal que $V_y \cap D = \emptyset$. Por otro lado, como X es regular, tenemos que para cada $x \in D$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subset cl_X(B_x) \subset V_x$$

y para cada $y \in X \setminus D$ existe $A_y \in \mathcal{B}$ tal que

$$y \in A_y \subset cl_X(A_y) \subset V_y.$$

Entonces, dicho esto, consideremos

$$\mathcal{U} = \{B_x : x \in D\} \cup \{A_y : y \in X \setminus D\}.$$

Se puede notar que $|\mathcal{U}| = |\mathcal{B}|$, puesto que $|\mathcal{B}| \geq |\mathcal{U}| \geq |D|$ y $|D| = |\mathcal{B}|$, pues es base de cardinalidad mínima y el tamaño de D es el del peso de X.

Ahora, sea

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{U} : \mathcal{F} \text{ es finito y } \mathcal{F} \neq \emptyset\},$$

entonces $|\mathfrak{F}| = |D| = |\mathcal{U}|$ puesto que $|D| \geq \aleph_0$ y la cardinalidad del conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto Z de cardinalidad infinita siempre es igual a la del conjunto Z. Ahora bien, si tomamos $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, tenemos que

$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$$

para alguna $n \in \mathbb{N}$ y para $U_i \in \mathcal{U}$ donde $i \in \{1, 2, ..., n\}$. De este modo $cl_X(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_i)$, por lo que

$$|cl_X(\bigcup \mathcal{F}) \cap D| = |(\bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_i)) \cap D| \leq n$$

ya que por la construcción de la cubierta $\mathcal{U}$, cada elemento de esta cubierta al cerrarlo intersecta en a lo más un elemento a D.

Ahora vamos a indizar a $\mathfrak{F}$ como $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (donde λ es el cardinal de D). Entonces, apoyándonos de inducción transfinita construiremos algunos abiertos que serán parte de la base que usaremos. Supongamos que para cada $\beta < \alpha < \lambda$, existe $x_\beta \in D$ tal que $x_\beta \notin cl_X(\bigcup \mathcal{F}_\beta)$ y $x_\beta \neq x_\gamma$ para cada $\beta \neq \gamma$, con $\beta, \gamma < \alpha$ (notemos que esto se puede hacer porque la intersección de la cerradura de la unión de cualquier elemento de $\mathfrak{F}$ con D es finita y $|D| = |\mathfrak{F}|$), de esta manera juntando esto con el hecho de que $|cl_X(\bigcup \mathcal{F}_\alpha) \cap D| < \aleph_0$ para cada $\alpha < \lambda$, obtenemos

$$D \setminus ((\{x_\beta : \beta < \alpha\}) \cup cl_X(\bigcup \mathcal{F}_\alpha)) \neq \emptyset.$$

Por lo que podemos tomar x_α tal que $x_\alpha \in D \setminus ((\{x_\beta : \beta < \alpha\}) \cup cl_x(\bigcup \mathcal{F}_\alpha)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, por inducción transfinita hemos construido una sucesión tal que para todo $\alpha < \lambda$, se tiene que $x_\alpha \notin cl_X(\bigcup \mathcal{F}_\alpha)$ y $x_\alpha \neq x_\beta$, para todo $\alpha, \beta < \lambda$ tales que $\alpha \neq \beta$. Luego, definimos:

$$U_x = \begin{cases} B_x \cap (X \setminus cl_X(\cup \mathcal{F}_\alpha)) & \text{si } x = x_\alpha \text{ para alguna } \alpha < \lambda \\ B_x & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde B_x es el básico de la cubierta $\mathcal{B}$ que tiene a x, su cerradura se queda contenida en el abierto V_x y $V_x \cap D = \{x\}$). Por construcción de B_x, este es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene a x. También notemos que en cualquiera de los dos casos, U_x es una vecindad abierta de x, pues en el primer caso es intersección de abiertos y además $x_\alpha \notin cl_X(\cup \mathcal{F}_\alpha)$ y el segundo caso es evidente.

Ya con esto construiremos la cubierta requerida de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}' = \{A_y : y \in X \setminus D\} \cup \{U_x : x \in D\}.$$

Entonces, se ve que $\mathcal{U}'$ si es una cubierta abierta de X. Ahora, si tomamos $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}'$ tal que $\mathcal{H}$ es finito, tenemos que se puede ver a $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\} \cup \{A_{y_1}, ...A_{y_m}\}.$$

De esta manera, si tomamos

$$\mathcal{F} = \{B_{x_1}, ..., B_{x_n}\} \cup \{A_{y_1}, ..., A_{y_m}\},$$

podemos notar que $\bigcup \mathcal{H} \subset \bigcup \mathcal{F}$. Por otro lado tenemos que para algún $\alpha < \lambda$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha$, por lo que $x_\alpha \notin cl_X(\bigcup \mathcal{F}_\alpha)$, y así $x_\alpha \notin cl_X(\bigcup \mathcal{H})$. Ahora, como el único abierto que tiene a x_α es U_{x_α}, tenemos que

$$x_\alpha \in st(\bigcup \mathcal{H}, \mathcal{U}') \text{ si y sólo si } U_{x_\alpha} \cap (\bigcup \mathcal{H}) \neq \emptyset,$$

pero $U_{x_\alpha} = B_{x_\alpha} \setminus (\bigcup cl_X(\mathcal{F}_\alpha))$. Por tanto $(\bigcup \mathcal{H}) \cap U_{X_\alpha} = \emptyset$ y de este modo $x_\alpha \notin st(\bigcup \mathcal{H}, \mathcal{U}')$, así esta cubierta no tiene ninguna subcolección finita tal que la unión de esta subcolección sea núcleo estrella de esta cubierta.

Por tanto usando la contrapositiva del Lema 2.2.6, obtenemos que X no es un espacio estrella compacto $\square$.

Corolario 2.2.8. *Si $\mathcal{A}$ es una familia maximal casi ajena (MAD) de ω, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es estrella compacto.*

Demostración: $\mathcal{A}$ es un subespacio denso cerrado y $|\mathcal{A}| = w(\Psi(\mathcal{A})) \geq \aleph_0$. Además $\Psi(\mathcal{A})$ es Tychonoff y en particular regular. Por lo tanto, por el Lema 2.2.7 tenemos que este no es un espacio estrella compacto. $\square$

Teorema 2.2.9. *Existe un espacio estrella compacto con un subespacio cerrado regular que no es estrella compacto.*

Demostración: Consideremos al espacio X del Teorema 2.2.3. Sea $\mathcal{A}$ una familia maximal casi ajena tal que $|\mathcal{A}| = c$, entonces tomemos al espacio $\Psi(\mathcal{A})$ y sin pérdida de generalidad digamos que $X \cap \Psi(\mathring{A}) = \emptyset$. Hagamos la suma topológica de $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ y sea

$$f : D \times \{c^+\} \to \mathcal{A}$$

un homeomorfismo. Consideremos el espacio cociente Y, que es obtenido de identificar los puntos $p \in D \times \{\mathfrak{c}^+\}$ con $f(p)$ y a los demás puntos de $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ solamente consigo mismos, de esta manera nuestro espacio Y se ve de la siguiente forma:

$$Y = \beta D \times [0, c^+) \cup \{\langle\langle d, c^+\rangle, f(\langle d, c^+\rangle)\rangle : d \in D\} \cup \omega$$

Donde los puntos de la forma $\langle\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle, f(\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle)\rangle$ los podemos también denotar como $\overline{[\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle]}$ (la clase de equivalencia del punto $\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle$). Ahora bien, consideremos a la proyección natural ϕ de $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ a Y.

Afirmación : $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ es un subespacio cerrado regular de Y que es homeomorfo a $\Psi(\mathcal{A})$.

Prueba: Primero mostremos que $\phi[\Psi(\mathcal{A})] = cl_Y(int_Y(\phi[\Psi(\mathcal{A})]))$. Para esto observemos que las vecindades abiertas básicas de los puntos en ω son las mismas que en el Mrówka y las vecindades abiertas básicas de los puntos en $\beta D \times [0, \mathfrak{c}^+)$ siguen siendo las mismas que en X, pero las vecindades básicas de las clases de equivalencia de la forma $\overline{[\langle d, c^+\rangle]}$, son de la siguiente forma:

$$V = (\{d\} \times [a, \mathfrak{c}^+) \cup \{\langle\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle, f(\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle)\rangle\}) \cup (f(\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle) \setminus F)$$

para algún $a < \mathfrak{c}^+$ y $F \subset f(\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle)$ tal que F es finito, ya que

$$\phi^{-1}[\{\overline{[\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle]}\}] = \{\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle, f(\langle d, \mathfrak{c}^+\rangle)\},$$

por lo que toda vecindad abierta básica de este punto, deberá de ser una especie de unión de las vecindades básicas de cada uno de estos puntos.

Ahora, podemos notar que $int_Y(\phi[\Psi(\mathcal{A})]) = \omega$, pues cada punto de ω es aislado, por lo que se queda en el interior, pero por lo visto anteriormente los puntos de la forma $\overline{[(d, \mathfrak{c}^+)]}$ no se quedan en el interior. Por otro lado $cl_Y(int_Y(\phi[\Psi(\mathcal{A})])) = \phi[\Psi(\mathcal{A})]$, pues pasa que

$$\phi[\Psi(\mathcal{A})] \subset cl_Y(int_Y(\phi[\Psi(\mathcal{A})])),$$

puesto que todas las vecindades abiertas de los puntos de la forma [(d,$\mathfrak{c}^+$)] intersectan a $int_Y(\phi[\Psi(\mathcal{A})])$.

Por otra parte, dado que $\beta D \times [0, \mathfrak{c}^+)$ es abierto en Y se da la siguiente igualdad:

$$\phi[\Psi(\mathcal{A})] = cl_Y(int_Y(\phi[\Psi(\mathcal{A})]))$$

Por último notemos que la misma función ϕ define un homeomorfismo entre $\Psi(\mathcal{A})$ y $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ (este último visto como subespacio de Y). Entonces con esto concluimos nuestra afirmación.

Gracias a esta afirmación y el Corolario 2.2.8 podemos concluir que $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ es un subespacio cerrado regular no estrella compacto de Y.

Ya con esto, sólo nos faltaría ver que Y sí es un espacio estrella compacto. Para esto tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y. Notemos que ϕ define un homeomorfismo entre X y $\phi[X]$ (este último visto como subespacio de Y). de esta forma, como X es estrella compacto, existe un compacto $K_1 \subset \phi[X]$ tal que

$$\phi[X] \subset st(K_1, \mathcal{U}).$$

Por otra parte notemos que

$$\phi[X] = \{\langle\langle d, c^+\rangle, f(\langle d, c^+\rangle)\rangle : d \in D\} \cup \beta D \times [0, c^+),$$

así que $Y \setminus st(K_1, \mathcal{U}) \subset \omega$. Ahora observemos que

$$|(Y \setminus st(K_1, \mathcal{U})) \cap A| < \aleph_0$$

para cada $A \in \mathcal{A}$, puesto que por la observación de las bases de vecindades de $\overline{[(d, c^+)]}$, como $\phi[X] \subset st(K_1, \mathcal{U})$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ existe una vecindad básica U de $\overline{[A]}$ (la clase de equivalencia de A) tal que $U \subset st(K_1, \mathcal{U})$ y de este modo existe $F \subset A$ finito tal que

$$A \setminus F \subset st(K_1, \mathcal{U}).$$

Luego como esto pasa para todo $A \in \mathcal{A}$, es claro que $Y \setminus st(K_1, \mathcal{U}) \notin \mathcal{A}$ y como $\mathcal{A}$ es maximal, forzosamente $|Y \setminus st(K_1, \mathcal{U})| < \aleph_0$ (pues al intersectar este conjunto con cualquier elemento de A obtenemos un conjunto de cardinalidad finita). Por tanto si hacemos $K = K_1 \cup Y \setminus st(K_1, \mathcal{U})$

tenemos que K es compacto y que $Y = st(K, \mathcal{U})$. □

Hemos visto que la propiedad de compacidad numerable implica la propiedad de estrella finitud y esta última implica la propiedad de compacidad numerable, por lo que una pregunta natural es: ¿cómo está todo esto relacionado con la propiedad de pseudocompacidad? Sabemos que la propiedad de compacidad numerable implica la propiedad de pseudocompacidad (A.1.2) y por el Corolario 2.2.8 es claro que pseudocompacidad no implica la propiedad de estrella compacidad, entonces la pregunta recae en si la propiedad de estrella compacidad implica la pseudocompacidad. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, pues esto se sigue fácilmente de las Proposiciones 1.1.6, 1.1.9 y 1.2.1. Con esto obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.10. *En un espacio X normal son equivalentes:*

1. *El espacio X es numerablemente compacto;*
2. *El espacio X es estrella finito;*
3. *El espacio X es estrella compacto;*
4. *El espacio X es pseudocompacto.*

Demostración: (1) $\to$ (2), ya fue demostrada. (2) $\to$ (3) se deduce de la Proposición 1.2.1. (3) $\to$ (4) se sigue de 1.1.6, 1.1.9 y 1.2.1, y, finalmente, se sabe que en un espacio normal la pseudocompacidad es equivalente a la compacidad numerable (4) $\to$ (1) (A.1.3) □

Como la propiedad de ser compacto es una propiedad productiva, podríamos preguntarnos si la propiedad de ser estrella compacto también se comporta del mismo modo, pero la respuesta a esta pregunta es negativa y eso nos concernerá en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.11. *Existen dos espacios numerablemente compactos X y Y, tales que $X \times Y$, no es estrella compacto.*

Demostración: El primer espacio X, que ocuparemos, será un subconjunto de $\beta\omega$ que construiremos de forma recursiva.

Primero para cada $A \in [\beta\omega]^\omega$ (donde $[\beta\omega]^\omega$ es el conjunto de todos los subconjuntos de cardinalidad ω de $\beta\omega$) fijemos $x_A \in der_{\beta\omega}A$. Notemos que esto se puede hacer porque como $\beta\omega$ es un espacio compacto, entonces todos sus subconjuntos infinitos tienen puntos acumulación; es decir, su derivado es distinto del vacío. Consideremos la función:

$$f : [\beta\omega]^\omega \to \beta\omega$$

dada por $f(A) = x_A$.

Ahora sí, hagamos la construcción de nuestro conjunto X por recursión transfinita, de la siguiente manera:

$$X_0 = \omega$$
$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \cup f[[\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta]^\omega], \text{ Si } \alpha < \omega_1.$$

De este modo hacemos $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, y lo dotamos con la topología de subespacio dada por $\beta\omega$. Ahora, demostremos que X es numerablemente compacto, pues si demostramos esto, entonces X es estrella compacto. Para esto, basta con demostrar que si tomamos $A \in [X]^\omega$, se cumple que $der_X(A) \neq \emptyset$. Para este propósito, veamos que para cada $a \in A$, existe $\alpha_a < \omega_1$ tal que $a \in X_{\alpha_a}$, por lo que si tomamos la función $\phi : A \to [0, \omega_1)$ dada por $\phi(a) = \alpha_a$, podemos ver que $sup(\phi[A]) < \omega_1$ (puesto que A es numerable), por lo que si hacemos $sup(\phi[A]) = \alpha$, tenemos que $A \subset X_\alpha$, y, así,

$$f(A) \in X_{\alpha+1} \cap der_{\beta\omega}A \subset X \cap der_{\beta\omega}A = der_X A \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, X es numerablemente compacto

Antes de mencionar cuál es el espacio Y que nos servirá, vale la pena hacer la observación de que $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, pues nos va a ser de utilidad a la hora de demostrar que nuestro espacio Y también es estrella compacto. Entonces, primero por un argumento inductivo vamos a ver que para toda $\alpha < \omega_1$ se tiene que $|X_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$. Primero, es evidente que se cumple para X_0 y para X_1 se tiene que:

$$|X_1| = |\omega \cup f[[\omega]^\omega]| \leq |[\omega]^\omega| = 2^{\aleph_0}.$$

Esto porque a lo más $f[[\omega]^\omega]$ tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los subconjuntos de tamaño numerable infinito de ω.

Suponemos que para un ordinal $\gamma < \omega_1$ se cumple que para todo $\beta < \gamma$, $|X_\beta| \leq 2^{\aleph_0}$. Entonces, tenemos que

$$|\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta| \leq 2^{\aleph_0}$$

ya que es una unión numerable de conjuntos de cardinalidad a lo más $2^{\aleph_0}$. Así, con esto vemos que $2^{\aleph_0} = |[\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta]^\omega| \geq f[[\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta]^\omega]$ y por lo tanto, de esta igualdad podemos concluir lo siguiente:

$$|X_\gamma| = |\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta \cup f[[\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta]^\omega]| \leq 2^{\aleph_0}.$$

Entonces, con esto queda demostrado que para todo $\delta < \omega_1$, se tiene que $|X_\delta| \leq 2^{\aleph_0}$. Finalmente, como $|\omega_1| \leq 2^{\aleph_0}$, se puede ver que

$$|X| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}.$$

Ahora, ya con esto definamos nuestro espacio Y como

$$Y = (\beta\omega \setminus X) \cup \omega,$$

y probemos que Y también es un espacio numerablemente compacto y por lo tanto estrella compacto. Para esto, tomemos $A \in [Y]^\omega$, como A es infinito $|cl_{\beta\omega}(A)| = 2^{2^{\aleph_0}}$, por lo que tenemos que $|(cl_{\beta\omega}(A)) \setminus (A \cup X)| = 2^{2^{\aleph_0}}$, de lo que concluimos que el $|der_y(A)| \neq \emptyset$, y, así, Y es numerablemente compacto.

Por último, demostremos que $X \times Y$, no es estrella compacto, demostrando que no es pseudocompacto.

Tomemos la diagonal en $\beta\omega \times \beta\omega$, la cual denotaremos como Δ. Como $\beta\omega$ es Hausdorff tenemos que Δ es cerrado en $\beta\omega \times \beta\omega$, por lo que $\Delta \cap X \times Y$ es cerrado en $X \times Y$, y dado que $X \cap Y = \omega$, se tiene que

$$\Delta \cap X \times Y = \{\langle n, n\rangle : n \in \omega\}.$$

Dado que para cada $n \in \omega$, $\{n\}$ es abierto en $\beta\omega$, podemos observar que $\{\langle n, n\rangle : n \in \omega\}$ es un conjunto discreto abierto, infinito y cerrado en $X \times Y$, por lo que como es discreto e infinito tenemos que no es pseudocompacto, y como es abierto y cerrado, tendríamos que si $X \times Y$ fuese pseudocompacto, también lo debería de ser $\{\langle n, n\rangle : n \in \omega\}$. Por tanto, $X \times Y$ no es pseudocompacto y como estrella compacidad implica pseudocompacidad tampoco es estrella compacto. □

Ahora que ya se han dado bastantes resultados negativos de la estrella compacidad con respecto a la compacidad, pasaremos a probar algunos resultados positivos.

De los Teoremas 1.2.2, 1.2.3 y 1.2.5 tenemos que la estrella compacidad es compactamente productiva, que se preserva bajo imágenes continuas y se preserva bajo preimágenes perfectas y abiertas, por lo que solo nos faltaría ver que pasa bajo la suma topológica.

Teorema 2.2.12. *Dada una colección de espacios topológicos ajenos dos a dos y no vacíos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$, se tiene que $\oplus_{\alpha\in J} X_\alpha$, es un espacio estrella compacto si y sólo si X_α, es un espacio estrella compacto para cada $\alpha \in J$ y $|J| < \aleph_0$.*

Demostración:$\Rightarrow$ Primero supongamos que $\oplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es un espacio estrella compacto. Por el Corolario 2.2.1 tenemos que como para cada $\alpha \in J$, X_α, es un subespacio abierto y cerrado, entonces, X_α también es estrella compacto. Si tomamos $\mathcal{U} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$, podemos notar que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta del espacio suma, por lo que existe $A \subset \oplus_{\alpha\in J} X_\alpha$, tal que A es un compacto y más aún es núcleo de la cubierta $\mathcal{U}$, por lo que $A \cap X_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in J$, y como $A = \oplus_{\alpha \in J}(X_\alpha \cap A)$, entonces $|J| < \aleph_0$, pues A es un compacto que se puede representar como una suma topológica.

$\Leftarrow$ Ahora probemos que $\oplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es un espacio estrella compacto, para esto tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $\oplus_{\alpha \in J} X_\alpha$, y hagamos para cada $\alpha \in J$

$$\mathcal{U}_\alpha = \{U \cap X_\alpha : U \in \mathcal{U}\}.$$

Como cada X_α es estrella compacto, existe para cada $\alpha \in J$, un núcleo de $\mathcal{U}_\alpha$ compacto A, tal que $A \subset X_\alpha$. Ahora, como $|J| < \aleph_0$, $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ es compacto en $\oplus_{\alpha \in J} X_\alpha$. Afirmamos que A es núcleo para la cubierta $\mathcal{U}$, puesto que para cada $\alpha \in J$ pasa que $X_\alpha = st(A_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \subset st(A, \mathcal{U})$ y por ende sucede que

$$X = \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} st(A_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \subset st(A, \mathcal{U}).$$

Por tanto como A es compacto y es núcleo para $\mathcal{U}$, obtenemos que $\oplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es un espacio estrella compacto $\square$

El último resultado que vamos a dar dentro de este capítulo nos relaciona a los espacios Tychonoff con los espacios estrella compactos Tychonoff. Sin embargo, antes de dar este último resultado necesitaremos definir el número de Lindelöf.

Definición 2.2.13. *Dado un espacio topológico X, definimos el número de Lindelöf de X como el cardinal más pequeño κ tal que para cada cubierta abierta de X, existe una subcubierta de tamaño a lo más κ. Denotaremos al número de Lindelöf de un espacio X como $l(X)$.*

Teorema 2.2.14. *Todo espacio Tychonoff se puede encajar en un espacio estrella compacto, Tychonoff como un subespacio cerrado.*

Demostración: Sea X un espacio Tychonoff. Notemos que si $l(X) < \aleph_0$, entonces X es compacto y por tanto X es estrella compacto, por lo que se sigue trivialmente el teorema. Ahora, supongamos que $l(X) \geq \aleph_0$ y consideremos:

$$Z = \beta X \times [0, \tau^+] \setminus ((\beta X \setminus X) \times \{\tau^+\})$$

Donde τ es un cardinal regular tal que $\tau > l(X)$.

Si consideramos $\overline{X} = X \times \{\tau^+\}$, se puede ver que este subconjunto de Z es cerrado, pues $\beta X \times [0, \tau^+)$ es un abierto en Z y es el complemento de $\overline{X}$, por lo que concluimos que este último es cerrado. Además, $\overline{X}$ con la topología de subespacio es homeomorfo a X pues la función $f : X \to \overline{X}$ dada por $f(x) = \langle x, \tau^+ \rangle$ denota el homeomorfismo. Por tanto X se encaja en Z como un subespacio cerrado.

Ahora demostremos que Z es Tychonoff y estrella compacto. Lo propiedad de Tychonoff se deduce de que es un subespacio del producto de dos espacios Tychonoff ($\beta X \times [0, \tau^+]$).

Para demostrar que Z es estrella compacto tomemos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Z. Notemos, que $\tau > \omega$ y de este modo $\tau^+ > \omega$. Como τ es regular tiene cofinalidad mayor que $\aleph_0$ y de este modo también τ^+ cumple con esto, entonces, por el Lema 2.2.2 tenemos que $[0, \tau^+)$ es numerablemente compacto. Por tanto, $\beta X \times [0, \tau^+)$ es numerablemente compacto, pues es el producto de un compacto con un numerablemente compacto. Esto nos dice que $\beta X \times [0, \tau^+)$ es estrella finito, por lo que si tomamos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Z tenemos que existe $F \subset \beta X \times [0, \tau^+)$ finito tal que

$$\beta X \times [0, \tau^+) \subset st(F, \mathcal{U}).$$

Ya con esto, solo nos basta con encontrar un subconjunto compacto K_1 tal que $K_1 \subset Z$ y $\overline{X} \subset st(K_1, \mathcal{U})$. Para esto primero denotemos como

$$\mathcal{V} = \{V = (W \times (\alpha, \tau^+]) \cap Z : \ \alpha < \tau^+, \, W \in \tau_{\beta X} \text{ y existe } U \in \mathcal{U}, \text{ tal que } V \subset U\}.$$

Notemos que $\mathcal{V}$ cubre a $\overline{X}$, pues si tomamos $\langle x, \tau^+ \rangle \in \overline{X}$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ y de este modo podemos encontrar un abierto básico canónico V de la forma de los elementos de $\mathcal{V}$, tal que $\langle x, \tau^+ \rangle \in V \subset U$. Como $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de $\overline{X}$, y este es homeomorfo a X existe una subcubierta abierta $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{V}'| \leq l(X)$, por lo que si para cada $V \in \mathcal{V}$ nombramos como $\alpha(V)$ al α tal que $V = W \times (\alpha, \tau^+]$ y hacemos

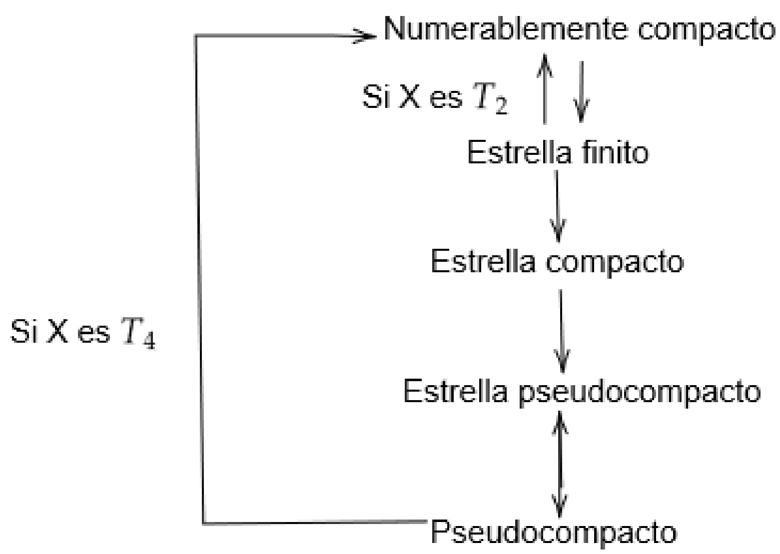
$$\alpha^* = sup\{\alpha(V) : V \in \mathcal{V}'\} + 1$$

tenemos que $\alpha^* < \tau^+$, pues $\tau > l(X)$. Así, tomando $K_1 = \beta X \times \{\alpha^*\}$, tenemos que K_1 es compacto. Y más aún $\overline{X} \subset st(K_1, \mathcal{V}')$, pero como los abiertos de $\mathcal{V}'$ están contenidos en los abiertos de $\mathcal{U}$, se sigue que

$$\overline{X} \subset st(K_1, \mathcal{U}).$$

De esta manera, si hacemos $K = K_1 \cup F$ obtenemos un compacto tal que $Z = st(K, \mathcal{U})$, lo que quiere decir que Z es nuestro espacio estrella compacto, Tychonoff, en el cual se encaja X como un subespacio cerrado. $\square$

Por último, para cerrar el capítulo vamos a terminar con un diagrama de las relaciones que hemos dado entre las propiedades que hemos estudiado.



Capítulo 3

Espacios estrella numerables y estrella Lindelöf

En este capítulo vamos a hablar sobre los espacios estrella numerables y estrella Lindelöf, así como, también de su relación entre ellos mismos, entre los espacios estrella finitos y los espacios estrella compactos que se estudiaron en el capítulo anterior. Al igual que en el anterior capítulo dividiremos el estudio de estos tipos de espacios en dos secciones, siendo la primera sección en la que vamos a demostrar que efectivamente estas propiedades son distintas a las que ya conocemos comúnmente, y la segunda sección en la que las compararemos con sus respectivas propiedades P.

3.1. Los espacios estrella numerables y estrella Lindelöf como dos nuevas clases de espacios

Vamos a comenzar mostrando que estas propiedades no son lo mismo que las propiedades de las que estas surgen, es decir la propiedad de Lindelöf y la propiedad de numerabilidad.

Ejemplo 3.1.1. *Existe un espacio estrella numerable que no es numerabe y no es Lindelöf.*

Demostración: Sea $X = [0, \omega_1)$. Sabemos que X no es Lindelöf, pues es un numerablemente compacto (por el Lema 2.2.2) que no es compacto. Dado que la compacidad numerable implica la estrella finitud, y a su vez la estrella finitud implica la estrella numerabilidad (por 1.2.1), se deduce que X es estrella numerable. □

Notemos que con este ejemplo también se deduce, por la Proposición 1.2.1, que los espacios estrella Lindelöf no son Lindelöf. En general, podemos decir que cualquier espacio numerablemente compacto no compacto va a ser un espacio estrella Lindelöf no Lindelöf.

Ahora, como sabemos que la propiedad de estrella numerabilidad implica la propiedad de estrella Lindelöf, probaremos que la implicación contraria no pasa, y, así, se verá que estas propiedades no son equivalentes.

Teorema 3.1.2. *Existe un espacio estrella Lindelöf que no es estrella numerable.*

Demostración Sea D el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Definamos:

$$X = (\beta D \times [0, \omega]) \setminus ((\beta D \setminus D) \times \{\omega\}).$$

Sabemos que $\beta D \times [0, \omega)$ es Lindelöf, puesto que es el producto de un compacto con un Lindelöf. Además, como es denso en X, tenemos que para cualquier cubierta abierta este conjunto es núcleo estrella de esa cubierta, y, así, X es un espacio estrella Lindelöf.

Ahora bien, probemos que X no es un espacio estrella numerable. Para esto, tomemos la siguiente cubierta abierta de X:

$$\mathcal{U} = \{\{d\} \times [0, \omega] : d \in D\} \cup \{\beta D \times \{n\} : n \in \omega\}.$$

Sea $B \subset X$, tal que $|B| \leq \aleph_0$. Como B es numerable tenemos que existe $d' \in D$ tal que

$$B \cap (\{d'\} \times [0, \omega]) = \emptyset,$$

y como el único miembro de la cubierta que tiene a $\langle d', \omega \rangle$ es $U = \{d'\} \times [0, \omega]$, entonces concluimos que $\langle d', \omega \rangle \notin st(B, \mathcal{U})$ y de este modo X no es estrella numerable. $\square$

Por último, antes de poder concluir que estas propiedades son totalmente nuevas nos falta verificar que estas sean distintas de las propiedades del capítulo anterior. Y esto es importante puesto que por la Proposición 1.2.1 sabemos que al menos la estrella finitud implica las propiedades de estrella numerabilidad y la propiedad estrella Lindelöf, y la estrella compacidad implica la propiedad estrella Lindelöf, por lo que si queremos demostrar que efectivamente estas propiedades son "distinas", debemos mostrar algún espacio estrella Lindelöf que no sea estrella compacto y, un espacio estrella numerable que no sea ni estrella finito ni estrella compacto. Por suerte esto no resulta ser tan complicado, y como podremos ver el siguiente ejemplo nos dará todo lo que requerimos.

Ejemplo 3.1.3. *Existe un espacio estrella numerable que no es estrella compacto.*

Demostración: Tomemos a $[0, \omega)$ con la topología usual de orden, entonces éste espacio es estrella numerable, pero no es estrella compacto, puesto que cualquier subespacio compacto de $[0, \omega)$, es finito y si tomamos la cubierta abierta dada por

$$\mathcal{U} = \{\{n\} : n \in \omega\}$$

es claro que ningún subespacio finito puede ser núcleo estrella de esta cubierta. Por tanto, concluimos que nuestro espacio no es estrella compacto. $\square$

Ahora, notemos que gracias a la Proposición 1.2.1, tenemos que el Ejemplo 3.1.3, en realidad nos dio un espacio que no es estrella compacto, ni estrella finito y que a su vez es estrella numerable, y, por ende, estrella Lindelöf.

Con todo esto hemos demostrado que la propiedad de estrella numerable y estrella Lindelöf, son propiedades completamente distintas, a todas las que ya conocíamos. Sabemos que la propiedad de ser separable es implicada por la propiedad de ser numerable, aunque se sabe que esto no pasa al revés, pero como hemos notado en el lenguaje de los espacios estrella, que algo suceda para una propiedad P no es garantía de que siga sucediendo para la propiedad estrella P. Un ejemplo de todo esto lo podemos encontrar justo en el siguiente teorema, donde vamos a ver que la estrella separabilidad y estrella numerabilidad resultan ser la misma propiedad.

Teorema 3.1.4. *Si X es un espacio, entonces X es estrella numerable si y sólo si es estrella separable.*

Demostración: Si suponemos que X es un espacio estrella numerable, entonces por la Proposición 1.2.1 podemos concluir que X es un espacio estrella separable.

Si por otro lado, suponemos que X es un espacio estrella separable, tenemos que si tomamos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe un conjunto separable $S \subset X$, tal que

$$st(S, \mathcal{U}) = X.$$

Dado que S es separable, existe un subconjunto $N \subset S$ que es numerable y denso en S. Por la Proposición 1.1.3 tenemos que:

$$st(N, \mathcal{U}) = st(cl_X(N), \mathcal{U})$$

y dado que $S = cl_S(N) \subset cl_X(N)$ obtenemos que

$$X = st(S, \mathcal{U}) \subset st(cl_X(N), \mathcal{U}) = st(N, \mathcal{U}),$$

y, así,

$$st(N, \mathcal{U}) = X,$$

por lo que concluimos que X es un espacio estrella numerable. $\square$

3.2. Las propiedades de los espacios estrella Lindelöf

Ahora, al igual que en el capítulo pasado vamos a pasar a examinar las propiedades topológicas que tienen los espacios estrella Lindelöf y estrella numerables y vamos a hacer esto mientras comparamos estas propiedades con las propiedades de los espacios Lindelöf, para de este modo, también ir notando qué tan semejantes son entre sí.

Comenzaremos probando que a diferencia de los espacios Lindelöf, en los espacios estrella Lindelöf esta propiedad no se hereda ni siquiera a conjuntos cerrados regulares.

Teorema 3.2.1. *Existe un espacio estrella numerable tal que tiene a un cerrado regular que no es estrella Lindelöf.*

Demostración: Tomemos $\mathcal{A}$ una familia MAD de ω tal que $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ y consideremos el siguiente conjunto:

$$X = \mathcal{A} \cup ([0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)).$$

A este conjunto le damos la siguiente topología: a $[0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)$ lo consideramos como un subespacio abierto dotado de la topología producto usual. Por otro lado, para cada punto $A \in \mathcal{A}$, sus vecindades abiertas básicas serán de la siguiente forma:

$$G_{\beta,K}(A) = ((\beta, \mathfrak{c}) \times A \setminus K) \cup \{A\}$$

donde $\beta < \mathfrak{c}$ y $K \in [\omega]^{<\omega}$. Luego, se puede notar que esto nos induce una topología en X.

Con esto, demostraremos que X no es estrella Lindelöf. Para esto enumeremos $\mathcal{A}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}.$$

Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, hagamos $U_\alpha = \{A_\alpha\} \cup ((\alpha, \mathfrak{c}) \times A_\alpha)$, y tomemos la siguiente cubierta abierta:

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{[0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)\}.$$

Si tomamos $L \subset X$, tal que L es Lindelöf, podemos notar que $L \cap \mathcal{A}$ es numerable, pues como subespacio, $\mathcal{A}$ es discreto y cerrado, ya que $[0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)$ es abierto en X y además las vecindades básicas de los puntos de $\mathcal{A}$ solo tocan a un punto de $\mathcal{A}$. De este modo, $L \cap \mathcal{A}$ es un subespacio cerrado y discreto de un Lindelöf, por lo que como máximo puede ser numerable. Entonces, existe $\beta' < \mathfrak{c}$ tal que:

$$L \cap \{A_\alpha : \alpha > \beta'\} = \emptyset$$

Por otro lado, tenemos que $L \cap ([0, \mathfrak{c}) \times \{n\})$ es acotado en $[0, \mathfrak{c}) \times \{n\}$ para cada $n \in \omega$, ya que $[0, \mathfrak{c}) \times \{n\}$ es cerrado en X. Además, $L \cap ([0, \mathfrak{c}) \times \{n\})$ es homeomorfo a $[0, \mathfrak{c})$, por lo que $L \cap ([0, \mathfrak{c}) \times \{n\})$ es homeomorfo a un Lindelöf en $[0, \mathfrak{c})$ y todo Lindelöf en $[0, \mathfrak{c})$ es acotado, por la cofinalidad de $[0, \mathfrak{c})$. Así, para cada $n \in \omega$, existe $\beta_n < \mathfrak{c}$ tal que $\beta_n > sup\{\alpha < \mathfrak{c} : \langle \alpha, n \rangle \in L\}$.Tomemos

$$\beta'' = sup\{\beta_n : n \in \omega\} + 1,$$

de este modo tenemos que β'' es tal que $\mathfrak{c} > \beta'' > \beta_n$ para cada $n \in \omega$ y así pasa que

$$((\beta'', \mathfrak{c}) \times [0, \omega)) \cap L = \emptyset.$$

Ahora bien, si hacemos $\gamma = max\{\beta', \beta''\} + 1$, tenemos que U_γ es el único elemento de $\mathcal{U}$ tal que tiene al punto A_γ, pero $U_\gamma \cap L = \emptyset$, de lo que se sigue que $A_\gamma \notin st(L, \mathcal{U})$, y por tanto X no es estrella Lindelöf.

Por otro lado, teniendo esto presente ya podemos construir el espacio que queremos. Para esto primero tomemos una familia MAD $\mathcal{A}'$ de ω de cardinalidad $\mathfrak{c}$, y luego consideramos $\Psi(\mathcal{A}')$ el espacio de Mrówka asociado a $\mathcal{A}'$. Notemos que como $\Psi(\mathcal{A}')$ es un espacio separable, entonces es estrella numerable, pues existe $D \subset \Psi(\mathcal{A}')$ denso de cardinalidad ω, y así para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $\Psi(\mathcal{A}')$ se tiene que $st(D, \mathcal{U}) = \Psi(\mathcal{A}')$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\Psi(\mathcal{A}') \cap X = \emptyset$, y hagamos $Z = \Psi(\mathcal{A}') \oplus X$. Enumeremos $\mathcal{A}'$ como $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, e identifiquemos A_α con A'_α para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ y los demás puntos en Z los identificamos solamente consigo mismos, luego, denotamos por Y al espacio cociente de Z dado por esta relación. Nuestro espacio se ve de a siguiente forma:

$$Y = \omega \cup \{\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup ([0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)).$$

En cuanto a la topología de Y podemos ver que las vecindades abiertas básicas de los puntos de ω son iguales a como lo son en $\Psi(\mathcal{A})$, y las vecindades abiertas básicas de los puntos en $[0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)$ son las mismas que en X. Por otra parte, las vecindades abiertas básicas de $\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle$ son una unión de las vecindades básicas de A_α y A'_α, solamente que en lugar de los puntos A_α y A'_α se agrega el punto $\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle$; es decir, se ven de la siguiente manera:

$$U_{\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle} = (\{\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle\} \cup (G_{\beta,K}(A_\alpha) \setminus \{A_\alpha\})) \cup A'_\alpha \setminus F$$

donde $\beta < \mathfrak{c}$, $K \in [A_\alpha]^{<\omega}$ y $F \in [A'_\alpha]^{<\omega}$. Ahora, si restringimos estas vecindades a $\phi[X]$ nos queda de la siguiente forma:

$$U_{\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle} \cap \phi[X] = \{\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle\} \cup (G_{\beta,K}(A_\alpha) \setminus \{A_\alpha\}).$$

Con lo cual se puede ver que la proyección natural $\phi\mid_X$ nos da un homeomorfismo entre $\phi[X]$ y X por lo que $\phi[X]$ no es estrella Lindelöf. Por otro lado,

$$int_Y(\phi[X]) = [0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega),$$

pues $[0, \mathfrak{c}) \times [0, \omega)$ es abierto y por ende todo el conjunto se queda contenido en el interior. Y, por otro lado, para cualquier punto de la forma $\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle$, tenemos que cualquier vecindad abierta básica de este punto intersecta a ω, así que no pertenecen al interior.

Por otro lado, también se tiene que las vecindades abiertas de cualquier punto de la forma $\langle A_\alpha, A'_\alpha \rangle$ siempre intersecta a $int_Y(\phi[X])$, por lo que podemos ver que $\phi[X] \subset cl_Y(int_Y(\phi[X]))$, y además como ω es abierto en Y se tiene que

$$\phi[X] = cl_Y(int_Y(\phi[X])).$$

Por lo tanto $\phi[X]$ es un cerrado regular que no es estrella Lindelöf.

Por último, solo nos falta mostrar que Y sí es un espacio estrella numerable. Para esto, primero notemos que análogamente a como lo hicimos con $\phi[X]$ y X podemos probar que $\phi[\Psi(\mathcal{A}')]$ es homeomorfo a $\Psi[\mathcal{A}']$. De esto se sigue que $\phi[\Psi(\mathcal{A}')]$ es estrella numerable, por lo que si tomamos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y, entonces existe $L_1 \subset \phi[\Psi(\mathcal{A}')]$ numerable tal que $\phi[\Psi(\mathcal{A}')] \subset st(L_1, \mathcal{U})$.

Por otro lado como para cada $n \in \omega$ tenemos que $\phi[[0, c) \times \{n\}]$ es numerablemente compacto, (pues es la imagen continua del producto de un numerablemente compacto con un compacto) existe $F_n \subset \phi[[0, c) \times \{n\}]$ finito tal que $\phi[[0, c) \times \{n\}] \subset st(F_n, \mathcal{U})$. Por tanto, si hacemos $L_2 = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ tenemos que:

$$\phi[[0, c) \times [0, \omega)] \subset st(L_2, \mathcal{U}).$$

Luego, como L_2 es numerable, entonces $L = L_1 \cup L_2$ es numerable y además se tiene que $Y = st(L, \mathcal{U})$, así que Y es estrella numerable. □

Cabe recalcar que el anterior ejemplo también nos dice que la propiedad estrella Lindelöf no se hereda a conjuntos cerrados regulares, pues el espacio Y es estrella Lindelöf por ser estrella numerable. Ahora bien, el paso natural sería ver a qué tipo de subespacios se hereda la propiedad estrella Lindelöf, aunque realmente, gracias al Teorema 1.2.4, ya sabemos que la propiedad estrella Lindelöf se hereda a conjuntos abiertos y cerrados. Sin embargo, podemos generalizar esto aún más, tal como se verá con el siguiente resultado

Teorema 3.2.2. *Si X es un espacio estrella Lindelöf, entonces para todo $A \subset X$ tal que A es F_δ-conjunto y A es abierto, se tiene que A es estrella Lindelöf.*

Demostración: Sea X, un espacio estrella Lindelöf y $A \subset X$, un subconjunto abierto y F_δ de X. Notemos que podemos ver a A como

$$A = \bigcup\{H_n : n \in \omega\},$$

donde H_n es un cerrado de X para cada $n \in \omega$. Ahora, tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de A y mostremos que existe $L \subset A$ tal que L es Lindelöf y $st(L, \mathcal{U}) = A$. Para esto, notemos que como A es abierto, entonces los miembros de la cubierta $\mathcal{U}$ también son abiertos en X, y, así, como H_n es cerrado podemos considerar para cada $n \in \omega$ las siguientes cubiertas abiertas de X:

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \cup \{X \setminus H_n\}.$$

Entonces, como X es estrella Lindelöf tenemos que existe $L'_n \subset X$, tal que L'_n es un Lindelöf y $st(L'_n, \mathcal{U}_n) = X$. Ya con esto, observemos que como A es F_δ tenemos que $M_n = L_n \cap A$ es Lindelöf y además sabemos que $H_n \subset st(M_n, \mathcal{U})$.

Por último hagamos $L = \bigcup\{M_n : n \in \omega\}$. El conjunto L es Lindelöf porque es unión numerable de subespacios Lindelöf. Además, como $st(L, \mathcal{U}) = A$, se concluye que A es estrella Lindelöf. □

Corolario 3.2.3. *Si X es un espacio estrella Lindelöf y $A \subset X$ es un subconjunto abierto y cerrado de X, entonces A es estrella Lindelöf.*

Demostración: Como todo conjunto cerrado es F_δ, entonces A es abierto y F_δ en X. Por tanto, por el Teorema 3.2.2 tenemos que A es estrella Lindelöf (otra prueba es por el Teorema 1.2.4, dado que la propiedad de Lindelöf se hereda a cerrados) □

Corolario 3.2.4. *Si X es un espacio estrella Lindelöf y $Z \subset X$ es un subespacio conulo, entonces Z es estrella Lindelöf.*

Demostración: Como Z es conulo, entonces es un conjunto abierto, además existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}[(0, 1]] = Z$. De esta manera $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[[\frac{1}{n}, 1]]$, por lo que Z es un conjunto F_δ, y así por el Teorema 3.2.2 concluimos lo requerido. □

Si nos preguntamos bajo qué funciones se preservan las imágenes y preimágenes de los espacios estrella Lindelöf, sabemos que gracias a los Teoremas 1.2.5 y 1.2.3, bajo imágenes continuas se preserva la propiedad estrella Lindelöf, pues bajo imágenes continuas se preserva la propiedad de Lindelöf, y bajo preimágenes perfectas y abiertas se preserva la propiedad estrella Lindelöf, pues la propiedad de Lindelöf se hereda a cerrados y se preserva bajo preimágenes perfectas. Sin embargo, como hemos dicho, la propiedad de Lindelöf se preserva bajo preimágenes perfectas, por lo que sería natural preguntarnos si esto también pasa en los espacios estrella Lindelöf. Por lo tanto lo siguiente que nos concernerá será verificar si es válido esto último.

Teorema 3.2.5. *Existe una función sobreyectiva, perfecta y continua, $f : X \to Y$, donde X es un espacio que no es estrella Lindelöf y Y es un espacio estrella Lindelöf.*

Demostración: Sea Y el espacio que se ocupó en el Teorema 3.1.2. Sea $X = A(Y)$ el duplicado de Alexandroff de Y. Por lo probado en 3.1.2 sabemos que Y es un espacio estrella Lindelöf. Sin embargo, aunque pasa esto para Y, vamos a probar que X no es un espacio estrella Lindelöf. Puesto que vamos a ver que el subespacio

$$(D \times \{\omega\}) \times \{1\}$$

es un subespacio discreto, abierto, no numerable y cerrado, así que este subespacio no va a poder ser estrella Lindelöf y por el Corolario 3.2.3 tampoco lo será X.

Podemos notar que $(D \times \{\omega\}) \times \{1\}$ es discreto y abierto por la definición de la topología del duplicado de Alexandroff, y no es numerable porque D no lo es. Con esto sólo falta ver que es cerrado en X. Para esto, primero notemos que como $\beta D \times [0, \omega)$ es un abierto en Y, $D \times \{\omega\}$ es un cerrado en Y (pues es el complemento de $\beta D \times [0, \omega)$). De este modo, si tenemos un punto de la forma $\langle y, i\rangle$ con $y \in Y \setminus (D \times \{\omega\})$ e $i \in \{0, 1\}$, existe un abierto $U \subset Y$ tal que $y \in U$ y

$$((D \times \omega) \times \{1\}) \cap U \times \{0, 1\} = \emptyset.$$

Así que $\langle y, i\rangle \notin cl_X((D \times \omega) \times \{1\})$. Por otro lado, si tomamos un punto de la forma $\langle(d, \omega), 0\rangle$ (con $d \in D$) tenemos que el abierto

$$V = (\{d\} \times [0, \omega]) \times \{0, 1\} \setminus \{\langle(d, \omega), 1\rangle\}$$

es una vecindad abierta de nuestro punto que no intersecta al conjunto $(D \times \omega) \times \{1\}$. Por tanto, concluimos que como todos los puntos en el complemento de $(D \times \{\omega\}) \times \{1\}$ no se encuentran en su cerradura, entonces éste es cerrado. Al tener a $(D \times \{\omega\}) \times \{1\}$ como subespacio de X, obtenemos que X no es estrella Lindelóf.

Ahora consideremos la función natural del duplicado de Alexandroff

$$f : X \to Y.$$

De esta manera, por el Teorema A,2,3 sabemos que f cumple con ser perfecta, sobreyectiva y continua, por lo que con esto se concluye la prueba. □

Es bien conocido que el producto de dos espacios Lindelöf no es necesariamente Lindelöf, pues el ejemplo del plano de Sorgenfrey atestigua que a pesar de que la línea de Sorgenfrey es Lindelöf, el producto de ésta consigo misma ya no lo es. Con esto, cabe esperar que la propiedad estrella Lindelöf tampoco sea productiva, por lo que con el siguiente teorema demostraremos que la propiedad estrella Lindelöf no es productiva. Sin embargo, este teorema va aun más allá, pues con esto también podremos demostrar que la propiedad estrella numerable no es productiva. Cabe hacer notar que la técnica que utilizaremos para el siguiente teorema, será bastante similar a la utilizada en el Teorema 2.2.11

Teorema 3.2.6. *Existen dos espacios estrella numerables tales que su producto no es estrella Lindelöf.*

Demostración: Primero consideremos al espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, el cual denotaremos por D.

Luego, del mismo modo a como hicimos en el Teorema 2.2.11, podemos fijar para cada $A \in [\beta D]^{\omega}$ un $x_A \in der_{\beta D} A$, para de esta manera tomar la función

$$f : [\beta D]^{\omega} \to \beta D$$

dada por $f(A) = x_A$. Ya con esto podemos definir a nuestro primer espacio X por recursión transfinita, empezando de la siguiente manera:

- $X_0 = D$.
- $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \cup f[[\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta]^{\omega}]$ para $\alpha < \omega_1$.

Así, $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$. Podemos notar que X es numerablemente compacto, pues si tomamos $A \in [X]^{\omega}$, para todo $a \in A$ existe X_{α_a} con $\alpha_a < \omega_1$ tal que $a \in X_{\alpha_a}$ y $a \notin X_\gamma$ para todo $\gamma < \alpha_a$. Así, si definimos la función

$$\phi : A \to [0, \omega_1]$$

dada por $\phi(a) = \alpha_a$, $sup(\phi[A]) < \omega_1$, y por tanto si hacemos $\alpha = sup(\phi[A])$ tenemos que $A \subset X_\alpha$, de modo que :

$$f(A) \in X_{\alpha+1} \cap der_{\beta\omega} A \subset X \cap der_{\beta\omega} A = der_X A.$$

Por tanto, como $der_X A \neq \emptyset$, X es numerablemente compacto, y así X es estrella numerable pues es estrella finito.

Por otro lado, afirmamos que $|X| = 2^{\aleph_0}$, y para probar nuestra afirmación, probaremos por inducción transfinita que $|X_\alpha| = 2^{\aleph_0}$ para todo $\alpha < \omega_1$. Es claro que X_0 tiene esta cardinalidad y además

$$|X_1| = |X_0 \cup f[[D]^{\omega}]| \leq |X_0| + |[D]^{\omega}| = |2^{\aleph_0}| + |2^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}.$$

Ahora, supongamos que para un ordinal γ se cumple que para todo ordinal $\beta < \gamma$, $|X_\beta| = 2^{\aleph_0}$. Con esto tenemos que:

$$|f[[\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta]^{\omega}]| \leq |[\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta]^{\omega}| = 2^{\aleph_0},$$

donde la última igualdad se da por la hipótesis de inducción. Así, tenemos que:

$$|X_\gamma| = |\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta \cup f[[\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta]^{\omega}]| \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Entonces, por inducción transfinita concluimos que $|X_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Ya con esto, es evidente que $|X| = 2^{\aleph_0}$, pues $|X| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha| = 2^{\aleph_0}$.

Definimos el segundo espacio que nos servirá como $Y = (\beta D \setminus X) \cup D$. Vamos a probar que Y es estrella numerable al probar que Y es numerablemente compacto. Para esto, tomemos $A \in [Y]^{\omega}$, entonces, como A es infinito, $|der_{\beta D} A| = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$, y así, como $|A| = \aleph_0$, $|(cl_{\beta D} A) \setminus (A \cup X)| = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$, de lo que se puede concluir que $der_Y A \neq \emptyset$, por lo que obtenemos que Y es numerablemente compacto.

Por último, demostremos que $X \times Y$ no es estrella Lindelöf. Para esto denotemos como Δ a la diagonal de $\beta D \times \beta D$. Como $\beta D \times \beta D$ es un espacio T_2, tenemos que la diagonal es cerrada. Por otro lado como $X \cap Y = D$, tenemos que $X \times Y \cap \Delta = \{\langle d, d \rangle : d \in D\}$ y este es un subespacio cerrado de $X \times Y$.

Además, $\{\langle d, d \rangle : d \in D\}$ es discreto, abierto y no numerable, lo que quiere decir, por el Corolario 3.2.3, que si $X \times Y$ fuese estrella Lindelöf, entonces $\{\langle d, d \rangle : d \in D\}$ también lo sería, pero esto es imposible pues la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{\{\langle d, d \rangle\} : d \in D\}$ de $\{\langle d, d \rangle : d \in D\}$ solo tiene un único núcleo estrella, el cual es $\{\langle d, d \rangle : d \in D\}$ que claramente no es Lindelöf. Por lo tanto $\{\langle d, d \rangle : d \in D\}$ no es estrella Lindelöf, y así tampoco lo es $X \times Y$. □

Ahora bien, por el Teorema 1.2.2 sabemos que estrella Lindelöf y estrella numerable son propiedades compactamente productivas, pero por lo que acabamos de ver no son productivas por sí solas y más aún los espacios que dimos eran numerablemente compactos. Entonces, el paso natural sería preguntarse si estas propiedades son Lindelöf productivas. Sin embargo, como vamos a ver con el siguiente teorema, estas propiedades no son Lindelöf productivas.

Teorema 3.2.7. *Existe un espacio Lindelöf Y, y un espacio numerablemente compacto X, tal que $X \times Y$ no es estrella Lindelöf.*

Demostración: Sea $X = [0, \omega_1)$ con la topología usual de orden y $Y = [0, \omega_1]$ con la topología dada por la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \{\{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\} \cup \{U \subset Y : \omega_1 \in U, |Y \setminus U| \leq \aleph_0\}.$$

Podemos notar que Y es un espacio Lindelöf, pues si tomamos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y, entonces existe $U_{\omega_1} \in \mathcal{U}$ tal que $\omega_1 \in U_{\omega_1}$, por lo que $|Y \setminus U_{\omega_1}| \leq \aleph_0$; de este modo, como para cada punto $x \in Y \setminus U_{\omega_1}$ existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$, tenemos que

$$\mathcal{V} = \{U_x : x \in Y \setminus U_{\omega_1}\} \cup \{U_{\omega_1}\}$$

es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$, por lo que Y es Lindelöf. Por otro lado, ya sabemos que X es numerablemente compacto.

Ahora, es hora de demostrar que $X \times Y$ no es estrella Lindelöf. Para esto, para cada $\alpha < \omega_1$ hacemos $U_\alpha = [0, \alpha] \times [\alpha, \omega_1]$ y $V_\alpha = (\alpha, \omega_1) \times \{\alpha\}$. Es claro que U_α y V_α son abiertos, por lo que podemos considerar la siguiente cubierta abierta de $X \times Y$:

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

Tomemos un subespacio Lindelöf L de $X \times Y$. Considerando $\pi_X : X \times Y \to X$ la proyección sobre X, tenemos que como ésta es una función continua, $\pi_X[L]$ es un subespacio Lindelöf de X, por tanto existe $\beta < \omega_1$ tal que

$$\pi_X[L] \cap (\beta, \omega_1) = \emptyset,$$

por lo que

$$L \cap ((\beta, \omega_1) \times Y) = \emptyset.$$

Ahora, si escogemos $\gamma > \beta$, tenemos que para todo $\alpha < \omega_1$, $\langle \gamma, \beta \rangle \notin U_\alpha$, por lo que el único abierto de la cubierta que tiene a $\langle \gamma, \beta \rangle$ es V_β, pero $V_\beta \cap L = \emptyset$, de lo que concluimos que $\langle \gamma, \beta \rangle \notin st(L, \mathcal{U})$ y por ende $X \times Y$ no es estrella Lindelöf □

Ahora que ya hemos dado en general las propiedades que tienen y que no tienen los espacios estrella Lindelöf, vamos a pasar a algo un poco diferente. Lo siguiente que vamos a hacer es organizar un poco las relaciones que tenemos de los espacios estrella Lindelöf y estrella numerable con otros tipos de espacios como los numerablemente compactos, estrella finitos, etc. Para esto, primero introduciremos una nueva clase de espacios, los cuales contendrán una subclase, la cual implicará la estrella numerabilidad.

Definición 3.2.8. *Dado τ un cardinal infinito. Decimos que un espacio topológico X es Lindelöf-τ-acotado, si cada subconjunto de X con cardinalidad menor o igual que τ está contenido en un subconjunto Lindelöf de X.*

Teorema 3.2.9. *Si X es un espacio Lindelöf-ω_1-acotado, entonces X es estrella numerable.*

Demostración: Supongamos por el contrario que X no es un espacio estrella numerable. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tal que $st(N,\mathcal{U}) \neq X$ para todo $N \subset X$ con $|N| \leq \aleph_0$. Por inducción definimos el conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de puntos de X tal que

$$x_\alpha \notin st(\{x_\beta : \beta < \alpha\},\mathcal{U})$$

para cada $\alpha < \omega_1$.

Como X es Lindelöf-ω_1-acotado, tenemos que existe un subconjunto Lindelöf $L \subset X$ tal que

$$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset L.$$

Por otro lado, como L es Lindelöf, existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, numerable, tal que $L \subset \bigcup \mathcal{V}$, por lo que tiene que existir $V \in \mathcal{V}$ tal que tiene una cantidad no numerable de puntos x_α, pero esto es imposible, pues significa que para cada $\alpha < \omega_1$, tal que $x_\alpha \in V$, existe γ, tal que $\alpha < \gamma < \omega_1$ con $x_\gamma \in V$, por lo que como $V \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ se tiene que

$$x_\gamma \in st(\{x_\beta : \beta < \gamma\},\mathcal{U})$$

lo cual es una contradicción por como habíamos tomado el conjunto. Por tanto tenemos que X sí es estrella numerable. □

Prosiguiendo con esto, es válido preguntarse si en realidad esta nueva propiedad es una caracterización de los espacios estrella numerable, pero realmente esta pregunta es muy fácil de responder y solo basta con tomar el espacio $[0, \omega_1)$ con la topología de orden usual. Podemos ver que $[0, \omega_1)$ es estrella numerable, puesto que es numerablemente compacto. Pero no es Lindelöf-ω_1-acotado, pues para $[0, \omega_1)$ no existe ningún subconjunto Lindelöf del espacio que lo contenga.

Podemos hacer una especie de generalización para este último resultado, solo que con esto no alcanzaremos la propiedad estrella numerable. Para esto, hay que recordar que si X es un espacio topológico, entonces $l(X)$ denota su número de Lindelöf tal como se vio en el capítulo 2 en la definición 2.2.13

Teorema 3.2.10. *Sea $\tau \geq \omega_1$ un cardinal. Si X es un espacio tal que $X = Y \cup Z$, donde Y es un denso en X, Lindelöf-τ-acotado y Z es tal que $l(Z) \leq \tau$, entonces X es estrella Lindelöf.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Dado que Y es Lindelöf-τ-acotado, en particular es Lindelöf-ω_1-acotado, y por el teorema anterior tenemos que existe $N \subset Y$ tal que N es numerable y $Y \subset st(N,\mathcal{U})$. Por otro lado dado que $l(Z) \leq \tau$, existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que

$$|\mathcal{V}| \leq \tau \text{ y } Z \subset \bigcup \mathcal{V}.$$

Como Y es denso tenemos que para cada $V \in \mathcal{V}$, $V \cap Y \neq \emptyset$, por lo que para cada $V \in \mathcal{V}$ podemos tomar $x_V \in V \cap Y$. Ahora, como Y es Lindelöf-τ-acotado, existe $L' \subset Y$ tal que

$$\{x_V : V \in \mathcal{V}\} \subset L'$$

y L' es Lindelöf como subespacio de Y. De este modo $Z \subset st(L',\mathcal{U})$, por lo que haciendo $L = N \cup L'$, podemos ver que L es Lindelöf y además $X = st(L,\mathcal{U})$. Así, concluimos el resultado. □

Hasta ahora sabemos que la compacidad numerable implica la estrella numerabilidad y por ende la propiedad estrella Lindelöf. Sin embargo, sabemos que la compacidad numerable no implica la propiedad de Lindelöf, ni viceversa. Por tanto, se esperaría que la estrella compacidad numerable no implique la propiedad estrella Lindelöf, ni viceversa, y tal como veremos con los siguientes resultados ninguna de estas propiedades implica la otra.

Teorema 3.2.11. *Existe un espacio estrella Lindelöf que no es estrella numerablemente compacto.*

Demostración: Consideremos al espacio

$$X = (\beta\omega \times [0,\omega]) \setminus ((\beta\omega \setminus [0,\omega)) \times \{\omega\})$$

con la topología de subespacio dada por $\beta\omega \times [0,\omega]$, donde a este último espacio lo tomamos con la topología producto.

Podemos notar que X es estrella Lindelöf, puesto que $\beta\omega \times [0,\omega)$ es un subconjunto Lindelöf, denso de X. Ahora bien, pasemos a mostrar que X no es estrella numerablemente compacto. Para esto consideremos la siguiente cubierta abierta numerable de X:

$$\mathcal{U} = \{\{n\} \times [n,\omega] : n \in \omega\} \cup \{(\beta\omega \setminus \{m \in \omega : m \leq n\}) \times \{n\} : n \in \omega\}.$$

Tomemos $C \subset X$ tal que C es numerablemente compacto. Notemos que el conjunto

$$\{n \in \omega : C \cap (\{n\} \times [n,\omega]) \neq \emptyset\}$$

tiene que ser finito, ya que de otro modo la cubierta $\mathcal{U}$ restringida a C, sería una cubierta numerable sin subcubiertas finitas, puesto que para un punto de la forma $\langle n,\beta\rangle$ (con $\beta \geq n$), tenemos que el único abierto de $\mathcal{U}$ que lo tiene es $\{n\} \times [n,\omega]$. Luego, con esto dicho, podemos observar que existe $n_1 \in \omega$ tal que

$$C \cap (\{n\} \times [n,\omega]) = \emptyset \tag{3.1}$$

para cada $n \geq n_1$.

Por otro lado, si tomamos un punto de la forma $\langle k,n\rangle$ (con $n < k < \omega$), tenemos que el único abierto de $\mathcal{U}$ que tiene a este punto es

$$(\beta\omega \setminus \{m \in \omega : m \leq n\}) \times \{n\}.$$

Por tanto, podemos notar que

$$\{n \in \omega : C \cap ((\beta\omega \setminus \{m \in \omega : m \leq n\}) \times \{n\}) \neq \emptyset\}$$

es finito, puesto que de no serlo, tendríamos de nuevo que la cubierta $\mathcal{U}$, restringida a C, sería una cubierta abierta numerable sin subcubiertas finitas. Por tanto, tenemos que existe $n_2 \in \omega$ tal que

$$C \cap ((\beta\omega \setminus \{m : m \leq n\}) \times \{n\}) = \emptyset \tag{3.2}$$

para todo $n > n_2$.

Así, si escogemos $n \in \omega$ tal que $n > max\{n_1, n_2\}$, tenemos que $\{n\} \times [n,\omega]$ es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene al punto $\langle n,\omega\rangle$, pero por (3.1) y (3.2) pasa que $\{n\} \times [n,\omega] \cap C = \emptyset$, de lo que se sigue que $\langle n,\omega\rangle \notin st(C,\mathcal{U})$, es decir X no es estrella numerablemente compacto. □

Teorema 3.2.12. *Existe un espacio estrella numerablemente compacto que no es estrella Lindelöf.*

Demostración: Sea $X_1 = [0,\mathfrak{c}]$ con la topología de orden usual y sea $X_2 = [0,\mathfrak{c}]$ con la siguiente topología: cada $\alpha < \mathfrak{c}$ será un punto aislado y si $U \subset X_2$ es tal que $\mathfrak{c} \in U$, entonces U es abierto si y solo si $X_2 \setminus U$ es finito. Ahora, definimos

$$X = (X_1 \times X_2) \setminus \{\langle\mathfrak{c},\mathfrak{c}\rangle\}$$

dotado de la topología de subespacio del producto de $X_1 \times X_2$. Es claro que X es estrella numerablemente compacto, pues $[0,\mathfrak{c}) \times X_2$ es un denso de X, que es numerablemente compacto (pues X_2 es compacto y además sabemos que $[0,\mathfrak{c})$ es numerablemente compacto). Por tanto, solo queda demostrar que X no es estrella Lindelöf. Para esto, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, hacemos $U_\alpha = (\alpha,\mathfrak{c}] \times \{\alpha\}$. Podemos notar que $U_\alpha \cap U_{\alpha'} = \emptyset$ siempre que $\alpha \neq \alpha'$. Ahora, consideremos la siguiente cubierta abierta de X:

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{[0,\mathfrak{c}) \times X_2\}$$

y tomemos un subespacio Lindelöf $L \subset X$ arbitrario. Consideramos el siguiente conjunto:

$$B = \{\alpha : \langle\mathfrak{c},\alpha\rangle \in L\}.$$

Podemos notar que B es numerable, puesto que $\{\langle\mathfrak{c},\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un conjunto de X cerrado, discreto y no numerable, y es claro que B tiene la misma cardinalidad que $\{\langle\mathfrak{c},\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \cap L$, pero éste último es un subespacio de L cerrado y discreto, por lo que como L es un Lindelöf, tenemos que sólo le queda a este subconjunto ser numerable.

Por otro lado, hacemos
$$L' = L \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in B\}.$$
Notese que si $L' = \emptyset$, entonces se sigue que para $\alpha_0 = sup\{\alpha : \alpha \in B\} + 1$ pasa que $U_{\alpha_0} \cap L = \emptyset$, por tanto $\langle \mathfrak{c}, \alpha_0\rangle \notin st(L,\mathcal{U})$, pues U_{α_0} es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle \mathfrak{c}, \alpha_0\rangle$.

Si por otro lado tenemos que $L' \neq \emptyset$, entonces se puede notar que L' es Lindelöf, puesto que por como se definió, este es un subespacio cerrado de L. Además, también por como se definió L', podemos ver que $L' \subset [0, \mathfrak{c}) \times X_2$. Por otro lado, si consideramos a
$$\pi : [0, \mathfrak{c}) \times X_2 \to [0, \mathfrak{c})$$
la proyección sobre $[0, \mathfrak{c})$, obtenemos que como esta es una función continua, entonces $\pi[L']$ es un subespacio Lindelöf de $[0, \mathfrak{c})$, por lo que existe $\alpha_1 < \mathfrak{c}$ tal que $\pi[L'] \cap (\alpha_1, \mathfrak{c}) = \emptyset$. Si tomamos un $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\alpha > \alpha_1$ y $\alpha \notin B$ (lo cual podemos hacer porque B es numerable), podemos ver que $\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle \notin st(L,\mathcal{U})$. Donde esto último pasa porque U_α es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle$ y $U_\alpha \cap L = \emptyset$. Por tanto, esto muestra que, en cualquiera de los dos casos, X no es un espacio estrella Lindelöf. □

Como ya se había mencionado antes, estos dos resultados eran de esperarse, pero por otro lado sabemos que la propiedad de Lindelöf junto con la compacidad numerable implican la compacidad y la Proposición 1.2.1 nos dice que si una propiedad P implica una propiedad P', entonces estrella P implica estrella P'. Por tanto, sería bastante natural pensar que todo espacio estrella numerablemente compacto y estrella Lindelöf, será un espacio estrella compacto, pero como ya hemos visto los espacios estrella P no se comportan siempre como sería lo esperado, por lo que por increíble que parezca esto no pasa así y es lo que veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.13. *Existe un espacio estrella Lindelöf y estrella numerablemente compacto Tychonoff que no es estrella compacto.*

Demostración: Consideremos como X al espacio del teorema anterior. Vamos a hacer la siguiente afirmación:
Afirmación: $w(X) = \mathfrak{c}$.

Prueba: Observemos que $w(X_2) = \mathfrak{c}$, puesto que es discreto en todos los puntos menos uno, además, que el conjunto de todos los abiertos que tienen a $\mathfrak{c}$ es de cardinalidad $\mathfrak{c}$, ya que este conjunto tiene la misma cardinalidad que todos los subconjuntos finitos de $[0, \mathfrak{c})$. Nótese, que con esto se sigue que $w(X) \geq \mathfrak{c}$. Por otro lado, sabemos que $w([0, \mathfrak{c}]) \leq \mathfrak{c}$ (puesto que la cofinalidad de $\mathfrak{c}$ a lo más es $\mathfrak{c}$) y por tanto tenemos que $w(X) = \mathfrak{c}$, ya que la base canónica de $X_1 \times X_2$ se podría decir que es el producto de las dos bases canónicas de estos, por lo cual esta base tendrá cardinalidad $\mathfrak{c}$, con lo que se concluye que $w(X) \leq \mathfrak{c}$, y por ende $w(X) = \mathfrak{c}$, y, así, queda demostrada nuestra afirmación.

Por otro lado, podemos notar que $\{\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un subespacio de X, el cual es discreto, cerrado y tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. De este modo por el Lema 2.2.7 observamos que X no es estrella compacto.

Tomemos una familia MAD $\mathcal{A}$ de ω tal que $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ y consideremos $\Psi(\mathcal{A})$. Como es bien sabido $\Psi(\mathcal{A})$ es separable, por tanto $\Psi(\mathcal{A})$ es estrella numerable. Además, recordemos que $\Psi(\mathcal{A})$ por el Corolario 2.2.8 no es un espacio estrella compacto.

Ahora bien, asumamos que $X \cap \Psi(\mathcal{A}) = \emptyset$ y tomemos
$$f : \{\mathfrak{c}\} \times [0, \mathfrak{c}) \to \mathcal{A}$$
una función biyectiva. Sea S el espacio cociente obtenido del espacio suma $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ al identificar $\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle$ con $f(\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle)$, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ y los demás puntos se identifican solamente consigo mismos, es decir nuestro espacio S es de la siguiente forma:
$$S = \omega \cup \{\langle\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle, f(\langle \mathfrak{c}, \alpha\rangle)\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup ([0, \mathfrak{c}) \times X_2).$$

Afirmación: El espacio S no es estrella compacto

Prueba: veamos que
$$\{\langle\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle, f(\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle)\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$$
es un subespacio cerrado, discreto y de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por otra parte, podemos notar que $w(S) = \mathfrak{c}$, puesto que se tiene que
$$\{\langle\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle, f(\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle)\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup ([0,\mathfrak{c}) \times X_2)$$
es homeomorfo a X bajo la proyección natural, así, que esto nos dice que $w(S) \geq \mathfrak{c}$, pero por otro lado, dado que X y $\Psi(\mathcal{A})$ tienen peso $\mathfrak{c}$, podemos ver que $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ tiene una base de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por tanto, la base en S, inducida por la base en $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$; es decir, la base que une dos a dos los abiertos de la base en el espacio $X \oplus \Psi(\mathcal{A})$ que tengan a un punto de la forma $\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle$ con los abiertos que tengan a un punto de la forma $f(\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle)$ y los abiertos que no tengan puntos de esta forma se mantienen de la misma manera, tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ de lo que se deduce que $w(S) = \mathfrak{c}$. Por tanto, por el Lema 2.2.7, S no es estrella compacto.

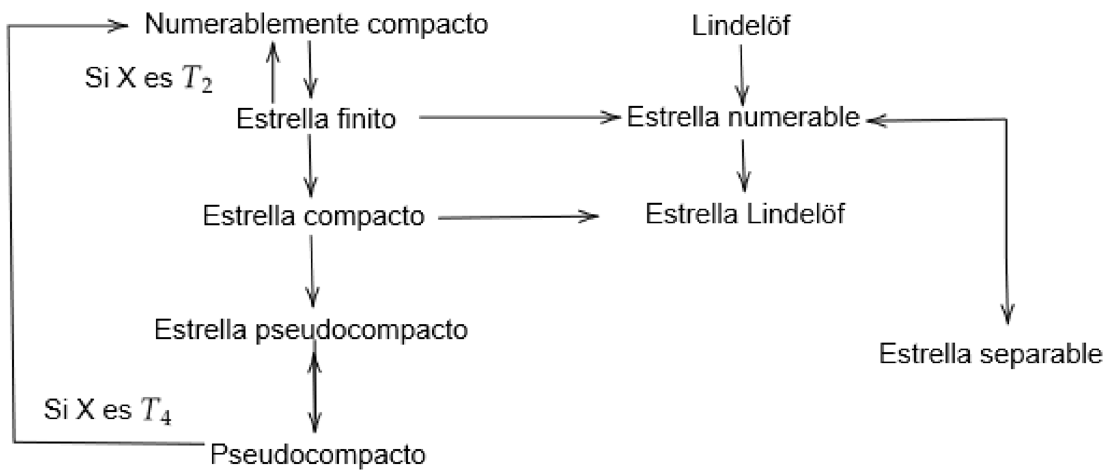
El espacio final que nos servirá será S, por lo que ahora toca mostrar que S es estrella Lindelöf y estrella numerablemente compacto. Primero, comencemos demostrando que es estrella numerablemente compacto. Para este propósito, tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de S, y consideremos la proyección natural
$$\phi : X \oplus \Psi(\mathcal{A}) \to S.$$
Dado que la proyección natural es continua, entonces $\phi[[0,\mathfrak{c}) \times X_2] = [0,\mathfrak{c}) \times X_2$ es un subconjunto numerablemente compacto en $\phi[X]$. Además,
$$\phi[X] = \{\langle\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle, f(\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle)\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup ([0,\mathfrak{c}) \times X_2).$$
Podemos observar que $[0,\mathfrak{c}) \times X_2$ es denso en $\phi[X]$, por lo que $\phi[X] \subset st(([0,\mathfrak{c}) \times X_2), \mathcal{U})$. Afirmamos que existe $F \subset \phi[\omega]$ finito tal que $\phi[\omega] \subset st(F, \mathcal{U})$, ya que de otro modo si no pasara esto, entonces podríamos definir por inducción una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ en $\phi[\omega]$ tal que
$$x_n \notin st(\{x_i : i < n\}, \mathcal{U})$$
para todo $n \in \omega$. Pero, como $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ es homeomorfo $\Psi(\mathcal{A})$, tenemos que todos los subconjuntos infinitos de $\phi[\omega]$ tiene puntos de acumulación en $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$, por lo que $\{x_n : n \in \omega\}$, tiene un punto de acumulación, $x \in \phi[\Psi(\mathcal{A})]$. Esto significa que si tomamos un $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, podemos tomar $n, m \in \omega$ tal que $n < m$ y $x_n \in U$, $x_m \in U$, por lo que $x_m \in st(\{x_i : i < m\}, \mathcal{U})$. Lo cual justamente contradice como construimos nuestra sucesión. Por tanto se concluye nuestra afirmación.

Ya con esto, haciendo $D = \phi[[0,\mathfrak{c}) \times X_2)] \cup F$, tenemos que D es un subconjunto numerablemente compacto de S y que $S = st(D, \mathcal{U})$. Por lo que de esto concluimos que S es estrella numerablemente compacto.

Por último, mostraremos que S es un espacio estrella Lindelöf. Primero, notemos que $\phi[\omega]$ es denso en $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$, por lo que $\phi[\Psi(\mathcal{A})] \subset st(\phi[\omega], \mathcal{U})$. Por el otro lado como $\phi[[0,\mathfrak{c}) \times X_2]$ es numerablemente compacto, entonces es estrella finito, por lo que existe $F' \subset \phi[[0,\mathfrak{c}) \times X_2]$ finito tal que $\phi[[0,\mathfrak{c}) \times X_2] \subset st(F', \mathcal{U})$. Entonces, ya por último podemos notar que
$$\phi[\Psi(\mathcal{A})] = \{\langle\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle, f(\langle \mathfrak{c},\alpha\rangle)\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \omega.$$
De lo que concluimos que $N = F' \cup \phi[\omega]$ es un subconjunto numerable de S, que cumple que $S = st(N, \mathcal{U})$. Luego, de esto se sigue que S es estrella Lindelöf. $\square$

Nótese que este último teorema nos dice que existe un espacio estrella Lindelöf y estrella numerablemente compacto que no es estrella compacto, lo que nos hace notar que si dos propiedades P y P' implican una tercera propiedad P", no necesariamente pasa que estrella P más estrella P' implican estrellan P". Sin embargo, este teorema es aún mas fuerte, pues lo que realmente se probó fue que la estrella numerabilidad junto con la estrella compacidad numerable no implican estrella compacto.

Ahora, estamos en plenas condiciones para hacer un diagrama de todas las relaciones que hemos hecho.


Numerablemente compacto
Lindelöf
Si X es T_2
Estrella finito
Estrella numerable
Estrella compacto
Estrella Lindelöf
Estrella pseudocompacto
Estrella separable
Si X es T_4
Pseudocompacto

Capítulo 4

Espacios estrella numerablemente compactos

Es turno de hablar de los espacios estrella numerablemente compactos, entonces, vamos a proceder al igual que en los anteriores dos capítulos. Primero vamos a comprobar que esta es una propiedad totalmente “distinta” a las ya estudiadas y luego vamos examinar las propiedades de los espacios estrella numerablemente compactos al mismo tiempo que las comparamos con las propiedades de los espacios numerablemente compactos.

4.1. Espacios numerablemente compactos, una nueva clase de espacios

Para comprobar que la estrella compacidad numerable es una propiedad distinta, notemos que por las Proposiciones 1.2.1 y 1.1.9, la estrella compacidad numerable implica la pseudocompacidad y que la estrella compacidad implica la estrella compacidad numerable, por lo tanto, para probar que ésta es una nueva propiedad, necesitamos que las implicaciones contrarias no se den, así que daremos un ejemplo de un espacio pseudocompacto que no es estrella numerablemente compacto y un ejemplo de un espacio estrella numerablemente compacto que no es estrella compacto. Sin embargo, este último ya lo hemos dado en el Teorema 3.2.12, puesto que por la Proposición 1.2.1 se deduce que la estrella compacidad implica la propiedad estrella Lindelöf; es decir, que como la estrella compacidad numerable ni siquiera implica la propiedad estrella Lindelöf, entonces, es claro que no implica la estrella compacidad. Ahora, sin mas preámbulo, demos el ejemplo de que la pseudocompacidad y la estrella compacidad numerable no son equivalentes.

Ejemplo 4.1.1. *Existe un espacio pseudocompacto tal que no es estrella numerablemente compacto.*

Demostración: Sea una familia MAD $\mathcal{A}$ de ω, tal que $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ y sea $X = \Psi(\mathcal{A})$. Sabemos que X no es estrella compacto pero que sí es pseudocompacto. Por otro lado, si tomamos $C \subset X$ tal que C es numerablemente compacto, podemos notar que $C \cap \mathcal{A}$ es finito, puesto que de no serlo $C \cap \mathcal{A}$ sería un infinito, discreto y cerrado de C (ya que $\mathcal{A}$ es cerrado en X), lo cual es imposible, pues la compacidad numerable se hereda a cerrados pero un conjunto infinito discreto nunca es numerablemente compacto. Con esto se ve que $|C| \leq \aleph_0$, ya que

$$C = (C \cap \mathcal{A}) \cup (C \cap \omega).$$

Así, concluimos que C es numerable y por ende es compacto, puesto que es un numerable, numerablemente compacto. Entonces, X no es estrella numerablemente compacto, puesto que existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ tal que para todo $C \subset X$ compacto, $st(C, \mathcal{U}) \neq X$. $\square$

4.2. Las propiedades de los espacios estrella numerablemente compactos

Comenzaremos el estudio de las propiedades de los espacios estrella numerablemente compactos viendo a que subespacios se hereda esta propiedad y a que subespacios no, entonces primero para hacer un contraste con la propiedad de la compacidad numerable, veamos que la propiedad de estrella compacidad numerable no siempre se hereda a subespacios cerrados, a pesar de que la compacidad numerable sí lo hace, es más, el teorema que vamos a ver nos arrojará que la estrella compacidad numerable ni siquiera se hereda a los subespacios cerrados regulares.

Teorema 4.2.1. *Existe un espacio estrella numerablemente compacto tal que tiene un subespacio cerrado regular que no es estrella numerablemente compacto.*

Demostración: Consideremos al mismo espacio S del Teorema 3.2.13 y a ϕ como la proyección natural del espacio suma a S. Sabemos de 3.2.13, que S es un espacio estrella numerablemente compacto. Por otro lado, tal y como hemos probado en el Teorema 4.1.1, si $\mathcal{A}$ es una familia MAD de ω de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es estrella numerablemente compacto, por lo que como $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ es homeomorfo a $\Psi(\mathcal{A})$, entonces $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ no es estrella numerablemente compacto. Además, $int_S(\phi[\Psi(\mathcal{A})]) = \omega$, puesto que los puntos de ω son aislados y si tomamos un punto de la forma $\langle\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle, f(\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle)\rangle$, (para alguna $\alpha < \mathfrak{c}$) tenemos que las vecindades básicas abiertas de estos puntos siempre intersectan a

$$[0, \mathfrak{c}) \times X_2,$$

puesto que las vecindades básicas de estos puntos de alguna manera son como la unión de las vecindades abiertas de $\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle$ con las de $f(\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle)$. De este modo como se cumple que $int_S(\phi[\Psi(\mathcal{A})]) = \omega$, tenemos que

$$cl_S(int_S(\phi[\Psi(\mathcal{A}))]) = \phi[\Psi(\mathcal{A})],$$

puesto que todo punto de la forma $\langle\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle, f(\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle)\rangle$ está en $cl_S(\omega)$, además de que $[0, \mathfrak{c}) \times X_2$ es abierto $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$.

Por lo tanto concluimos que $\phi[\Psi(\mathcal{A})]$ es un cerrado regular en S que no es estrella numerablemente compacto. □

Sin embargo, a pesar de ser una propiedad que no se hereda ni siquiera bajo cerrados regulares, gracias al Teorema 1.2.4, podemos probar que sí se hereda a los subespacios cerrados y abiertos.

Corolario 4.2.2. *Si X es un espacio topológico estrella numerablemente compacto y $A \subset X$ es un subespacio cerrado y abierto de X, entonces A es estrella numerablemente compacto.*

Demostración: La propiedad de compacidad numerable se hereda a cerrados, por lo que por el Teorema 1.2.4 concluimos el resultado. □

Ya que hemos visto a qué tipo de espacios sí se hereda, podemos pasar a ver bajo qué tipo de imágenes y preimágenes de funciones se sigue preservando la propiedad. Es inmediato de los Teoremas 1.2.3 y 1.2.5 que la propiedad de estrella compacidad numerable se preserva bajo imágenes continuas y preimágenes de funciones abiertas y perfectas, sin embargo, al contrario de la propiedad de compacidad numerable que se preserva bajo preimágenes perfectas, la propiedad de estrella compacidad numerable no se preserva bajo este tipo de funciones, y esto lo demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3. *Existe una función perfecta, sobreyectiva y continua $f : X \to Y$, donde X es un espacio no estrella numerablemente compacto y Y es un espacio estrella numerablemente compacto.*

Demostración: Sea Y el espacio que se ocupó en el Teorema 3.2.12 y sea $X = A(Y)$ el duplicado de Alexandroff del espacio Y. Sabemos por el Teorema 3.2.12 que Y es un espacio estrella numerablemente compacto. Sin embargo, afirmamos que el espacio X no es estrella numerablemente compacto. Esto, puesto que el conjunto

$$\{\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

es un conjunto cerrado, discreto e infinito en Y, por lo que al ser discreto e infinito, no es estrella numerablemente compacto. Por lo tanto

$$\{\langle\mathfrak{c}, \alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \times \{1\}$$

es un subconjunto abierto, cerrado, discreto e infinito de X, por lo que si X fuese estrella numerablemente compacto, por el Corolario 4.2.2 también lo tendría que ser este último conjunto, pero eso no sucede. Así, concluimos que X no es estrella numerablemente compacto.

Ahora, tomando nuestra función f, como la función natural del duplicado de Alexandroff, podemos ver que esta función es perfecta, abierta y sobreyectiva por A,2,3.

□

Es el momento de verificar la productividad de los espacios estrella numerablemente compactos. Notemos, que por el Teorema 1.2.2 la propiedad de estrella compacidad numerable es compactamente productiva, pero vale la pena preguntarse si esta propiedad es Lindelöf productiva, numerablemente compacto productiva o si incluso el producto de dos espacios estrella estrella numerablemente compactos es estrella numerablemente compacto. Sin embargo, en realidad ya hemos visto que no es numerablemente compacto productiva y el producto de dos estrella numerablemente compactos no necesariamente es estrella numerablemente compacto. Puesto que en el Teorema 2.2.11, lo que realmente probamos fue que existen dos espacios numerablemente compactos tal que su producto no es pseudocompacto y por las Proposiciones 1.1.9 y 1.2.1 podemos concluir que la estrella compacidad numerable, implica pseudocompacto, por lo que el producto de estos dos espacios numerablemente compactos (y por ende estrella numerablemente compactos) no es estrella numerablemente compacto. Por otro lado, tal como se verá en el siguiente teorema, esta propiedad no va a ser Lindelöf productiva.

Teorema 4.2.4. *Existe un espacio numerablemente compacto (por tanto estrella numerablemente compacto) X y un espacio Lindelöf Y, tal que $X \times Y$ no es estrella numerablemente compacto.*

Demostración: Sea $X = [0, \omega_1)$, dotado de la topología de orden. Sea D, el espacio discreto de cardinalidad ω_1. Y sea Y la extension Lindelöf por un punto de D. Podemos enumerar a D como

$$D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Luego, consideremos a $X \times Y$ con la topología producto y para cada $\alpha < \omega_1$ consideremos los siguientes abiertos

$$U_\alpha = [0, \alpha] \times (\{d_\beta : \omega_1 > \beta \geq \alpha\} \cup \{p\})$$

y

$$V_\alpha = (\alpha, \omega_1) \times \{d_\alpha\},$$

donde p es el punto agregado al hacer la extensión Lindelöf. Consideremos la siguiente cubierta abierta de $X \times Y$

$$\mathcal{U} = \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Notemos que si tomamos un subconjunto numerablemente compacto $C \subset X \times Y$ de $X \times Y$, tenemos que $\pi_Y[C]$ (donde π_y es la proyección sobre el espacio Y) es un subespacio numerablemente compacto de Y. Además, podemos notar que $\pi_Y[C]$ es finito, ya que si no fuese finito, tenemos dos opciones, que $p \notin \pi_Y[C]$ o que $p \in \pi_Y[C]$. Sin embargo, si sucede que $p \notin \pi_Y[C]$, tendriamos que $\pi_Y[C]$ es un espacio infinito discreto y numerablemente compacto, lo cual no es posible. Por otro lado si tenemos que $p \in \pi_Y[C]$ podemos tomar un $U \subset Y$ tal que $|\pi_Y[C] \setminus U| = \aleph_0$, $|Y \setminus U| = \aleph_0$ y $p \in U$,por lo que podemos notar que U es un abierto en Y y que $U \cap \pi_Y[C]$ es un abierto en $\pi_Y[C]$, por lo que de este modo

$$\mathcal{U}' = \{\{d_\alpha\} : d_\alpha \in \pi_Y[C] \setminus U\} \cup \{U\}$$

es una cubierta abierta numerable de $\pi_Y[C]$, que no tiene subcubiertas finitas, lo cual es totalmente imposible. De este modo, concluimos que $\pi_Y[C]$ es finito. Por tanto, existe $\beta < \omega_1$ tal que

$$\pi_Y[C] \cap \{d_\alpha : \alpha \geq \beta\} = \emptyset.$$

Ahora, si tomamos el punto $\langle \beta+1, d_\beta \rangle$, podemos notar que el único abierto que tiene a $\langle \beta+1, d_\beta \rangle$ es V_β, pero como $\pi_Y[C] \cap \{d_\alpha : \alpha \geq \beta\} = \emptyset$, obtenemos que en particular $\langle \alpha, d_\beta \rangle \notin C$ para todo $\alpha < \omega_1$, por lo que $V_\beta \cap C = \emptyset$, de lo que se concluye que $\langle \beta + 1, d_\beta \rangle \notin st(C, \mathcal{U})$; es decir, $X \times Y$ no es estrella numerablemente compacto. □

Por último, es el turno de hablar sobre las condiciones bajo las que se preserva lo estrella numerablemente compacto con respecto de la suma topológica. Por un lado sabemos que la suma de espacios topológicos es numerablemente compacta si y solo si es una suma finita de espacios numerablemente compactos. Por lo tanto se esperaría que la suma topológica de espacios estrella numerablemente compactos se comporte de la misma manera y como hemos visto anteriormente las propiedades estrella sí se comportan como se esperaría bajo la suma. Así, que tal como demostraremos con el siguiente teorema, notaremos que la propiedad de estrella compacidad numerable también sigue el mismo camino que las anteriores propiedades.

Teorema 4.2.5. *Si $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ es estrella numerablemente compacto si y solo si cada X_α es estrella numerablemente compacto y $|I| < \aleph_0$.*

Demostración: Primero probemos la suficiencia. Para esto, notemos que por el Corolario 4.2.2, X_α es un subespacio abierto y cerrado, entonces X_α es un espacio estrella numerablemente compacto para toda $\alpha \in I$. Ahora, por otro lado, si suponemos por el contrario que $|I| \geq \aleph_0$, entonces al tomarnos la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{X_\alpha : \alpha \in I\}$$

de $\oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$, podemos ver que como $\oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ es estrella numerablemente compacto, entonces existe

$$C \subset \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$$

un subconjunto numerablemente compacto, tal que $st(C,\mathcal{U}) = \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$, pero esto significa que $C \cap X_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$. Además, por otro lado podemos ver a C como

$$C = \oplus_{\alpha\in I} C \cap X_\alpha,$$

por lo que C es un numerablemente compacto que se ve como una suma topológica infinita de espacios no vacios, lo cual no es posible. Por tanto $|I| < \aleph_0$.

Ahora para probar la necesidad, notemos que si tomamos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$, entonces para $\alpha \in I$

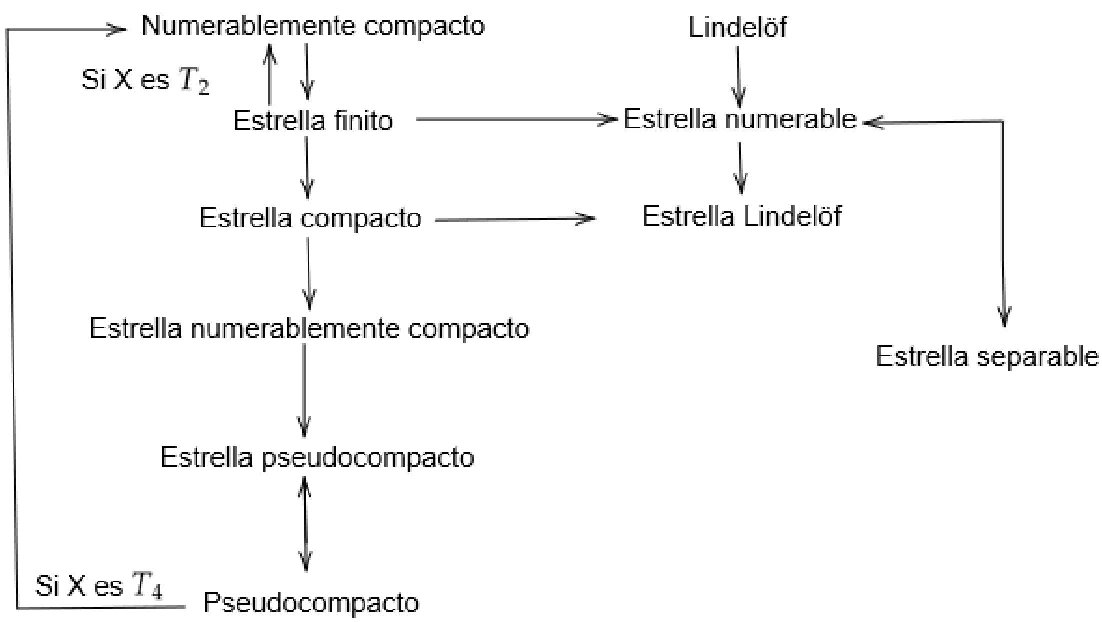
$$\mathcal{U}_\alpha = \{U \in \mathcal{U} : U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$$

es una cubierta abierta de X_α, y como X_α es estrella numerablemente compacto existe $C_\alpha \subset X_\alpha$, tal que es un subespacio numerablemente compacto y $st(C_\alpha,\mathcal{U}_\alpha) = X_\alpha$. Como $|I| < \aleph_0$, entonces $\oplus_{\alpha\in I} C_\alpha$ es numerablemente compacto y también cumple que $st(\oplus_{\alpha\in I} C_\alpha,\mathcal{U}) = \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$, puesto que

$$st(\oplus_{\alpha\in I} C_\alpha,\mathcal{U}) = \bigcup_{\alpha\in I} st(C_\alpha,\mathcal{U}_\alpha) = \oplus_{\alpha\in I} X_\alpha.$$

Por lo tanto $\oplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ es estrella numerablemente compacto. □

Por último, terminamos este capítulo dando nuestro clásico diagrama de todas las relaciones entre todos los espacios que hemos visto hasta ahora.



Capítulo 5

Espacios estrella σ-compactos

En este capítulo se estudiarán las propiedades de los espacios estrella σ-compactos, así como las relaciones que tiene con todos los otros espacios que hemos estudiado.

Dado que regularmente la propiedad de $\sigma-$compacidad no es estudiada en cursos básicos de topología, vamos a comenzar dando la definición de la propiedad para después pasar al estudio de su respectiva propiedad estrella.

Definición 5.0.1. *Decimos que un espacio X es $\sigma-$compacto si existe una colección numerable de subespacios compactos $\mathcal{U}$ de X tal que $\bigcup \mathcal{U} = X$.*

5.1. Estrella σ-compacto una nueva propiedad.

Al igual que en anteriores capítulos vamos a empezar nuestro estudio de los espacios estrella $\sigma-$compactos, probando que esta es una propiedad totalmente distinta a la propiedad de ser σ-compacto y a las demás propiedades que hemos estudiado a lo largo de esta tesis.

Entonces vamos a empezar probando que estrella σ-compacto, no es lo mismo que σ-compacto.

Teorema 5.1.1. *Existe un espacio estrella σ-compacto no σ-compacto.*

Demostración: Sea X la recta de Sorgenfrey. Como X es separable, tenemos que X es estrella numerable. Podemos ver que la propiedad de numerabilidad implica la propiedad de σ-compacidad. Por la Proposición 1.2.1 tenemos que la propiedad estrella numerable implica la propiedad de estrella σ-compacidad, de lo que concluimos que la recta de Sorgenfrey es estrella σ-compacto.

Por otro lado, se sabe que la recta de Sorgenfrey no es σ-compacto, pero como se ha dicho anteriormente, ya que la σ-compacidad no es una propiedad tan común, desarrollaremos la prueba. Para este propósito primero vamos a probar la siguiente afirmación

Afirmación: Todo subespacio compacto de la linea de Sorgenfrey es a lo más numerable.

Prueba: Tomemos un subconjunto compacto no vacío $C \subset X$. Como la topología euclidiana es mas "gruesa"que la de Sorgenfrey; es decir, la de Sorgenfrey contiene a la euclidiana, tenemos que C es un subconjunto compacto en la topología eucidiana y por tanto es cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo, al cual lo denotaremos por m.

Supongamos que existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ en C tal que es estrictamente creciente. Luego, como C es cerrado y acotado en la topología euclidiana, existe $s = sup\{x_n : n \in \omega\}$ y este está en C, por lo que de este modo, podemos formar la siguiente cubierta de C:

$$\mathcal{U} = \{[m, x_0)\} \cup \{[x_{n-1}, x_n) : n \in \omega \setminus \{0\}\} \cup \{[s, \rightarrow)\} \cap C.$$

Pero ésta evidentemente es una cubierta abierta infinita, en la cual sus abiertos son ajenos dos a dos y no tiene subcubiertas finitas de C, lo cual claramente es una contradicción. Por tanto no existen sucesiones estrictamente crecientes en C.

Por otro lado, sabemos que $\mathbb{R}$ con el orden usual es isomorfo a $\mathbb{R}$ con el orden "volteado o al revés"(es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $a \leq b$ con este "nuevo orden", si $a \geq b$ con el orden usual.) y con este orden tendríamos que C no puede tener sucesiones estrictamente decrecientes. Esto nos dice que C es un buen orden en $\mathbb{R}$, de lo que a su vez se sigue que C es a lo mas numerable, puesto que todo buen orden en $\mathbb{R}$ con su orden usual es a lo más numerable, por lo que con esto concluimos nuestra afirmación.

Ya por último, con todo esto queda claro que X no es σ-compacto, pues toda unión numerable de subconjuntos compactos de X, a lo más es numerable y por ende no puede ser todo X. $\square$

Por la Proposición 1.2.1 la estrella numerabilidad implica la estrella σ-compacidad y la estrella σ-compacidad implica la propiedad estrella Lindelöf. A continuación dos resultados en los que se muestra que esta propiedad no es ninguna de las dos que ya conocíamos previamente.

Ejemplo 5.1.2. *Existe un espacio Tychonoff estrella σ-compacto que no es estrella numerable.*

Demostración: Denotemos como D al espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Definamos al espacio X que cumplirá lo que queremos, justo como el espacio del Teorema 3.1.2.

Como podemos ver βD al ser compacto es σ-compacto y $[0, \omega)$ también es σ-compacto, pues es numerable. Por lo tanto como la σ-compacidad se preserva bajo productos finitos, tenemos que $\beta D \times [0, \omega)$ es σ-compacto. Además, $\beta D \times [0, \omega)$ es denso en X, por lo que así tenemos que X es estrella σ-compacto.

Por otro lado, en el Teorema 3.1.2 ya habíamos comprobado que este espacio no era estrella numerable.

Teorema 5.1.3. *Existe un espacio estrella Lindelöf que no es estrella σ-compacto.*

Demostración: Denotemos de nuevo a D como el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, al cual vamos a numerar como $D = \{d_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Sea p un punto tal que $p \notin D$ y luego con esto definimos el espacio

$$Y = D \cup \{p\}.$$

El cual va a ser la extensión Lindelöf por un punto de D. Si suponemos que existe un subespacio $C \subset Y$ compacto e infinito, tenemos dos casos, $p \in C$ o que $p \notin C$. En el primer caso podemos ver que $C \subset D$ y por ende es un conjunto discreto, infinito y compacto, lo cual es imposible así que este caso queda descartado. Por otro lado, si sucede que $p \notin C$, tenemos que si tomamos la siguiente cubierta abierta de C:

$$\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in C \setminus \{p\}\} \cup \{U\}$$

donde U es tal que $p \in U$, $|Y \setminus U| = \aleph_0$ y $|(Y \setminus U) \cap C| = \aleph_0$, podemos ver que no existe una subcubierta abierta finita de C, ya que no hay una subcolección finita de la cubierta que cubra a $(Y \setminus U) \cap C$. Por tanto este caso también es descartado, pues C es compacto. Así, obtenemos que todo subconjunto $C \subset Y$ compacto es finito y por ende Y no es σ-compacto, ya que cualquier unión numerable de compactos a lo más tiene cardinalidad numerable.

Ahora, con base en esto describiremos el espacio que utilizaremos, el cual será:

$$X = (Y \times [0, \omega]) \setminus \{\langle p, \omega \rangle\}$$

Entonces $Y \times [0, \omega)$ es denso y mas aún es Lindelöf, puesto que a este subespacio lo podemos representar como

$$Y \times [0, \omega) = \bigcup_{n \in \omega} (Y \times \{n\})$$

lo que quiere decir que lo podemos representar como la unión numerable de subespacios Lindelöf, y de este modo, $Y \times [0, \omega)$ es un espacio Lindelöf. Por tanto, con esto hemos probado que el espacio X es estrella Lindelöf (pues contiene un denso Lindelöf). Ahora, probaremos que no es estrella σ-compacto.

Para esto, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, hagamos $U_\alpha = \{d_\alpha\} \times [0, \omega]$ y notemos que $U_\alpha \cap U_{\alpha'} = \emptyset$ para cualesquiera α y α' distintos. Consideremos la siguiente cubierta abierta de X

$$\mathcal{U}' = \{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{Y \times \{n\} : n \in \omega\}.$$

Luego, tomemos un subconjunto σ-compacto arbitrario C de X. Como $D \times \{\omega\}$ es un cerrado discreto, tenemos que $C \cap (D \times \{\omega\})$ es numerable, puesto que la σ-compacidad se hereda a cerrados. Por otro lado, $C \cap (Y \times \{n\})$ es numerable para cualquier $n \in \omega$, ya que $Y \times \{n\}$ es cerrado y homeomorfo a Y. Así, tenemos que $C \cap (Y \times \{n\})$ es σ-compacto y todo subconjunto compacto de Y es finito y por ende todo subconjunto σ-compacto de $Y \times \{n\}$ es numerable.

Por tanto, esto nos quiere decir que C es un conjunto a lo más numerable de X, pues C se puede ver como

$$C = C \cap ((\bigcup_{n \in \omega} (Y \times \{n\})) \cup (D \times \{\omega\})).$$

Dado que C es numerable y que $\{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un conjunto ajeno 2 a 2, tenemos que el conjunto $Z = \{\alpha : U_\alpha \cap C \neq \emptyset\}$ es a lo mas numerable, por lo que existe α_ω tal que:

$$C \cap U_\beta = \emptyset$$

para todo $\beta > \alpha_\omega$. Por tanto, tomando cualquier $\alpha' > \alpha_\omega$, tenemos que $\langle d_{\alpha'}, \omega \rangle \notin st(C,\mathcal{U})$, puesto que $U_{\alpha'}$ es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle d_{\alpha'}, \omega \rangle$ y $U_{\alpha'} \cap C = \emptyset$. Así, se concluye que X no es estrella σ-compacto. □

5.2. Propiedades de los espacios estrella σ-compactos

Ahora, vamos a pasar a hablar de las propiedades que tienen los espacios estrella σ-compactos, y como hemos estado haciendo, vamos a comenzar viendo a qué espacios se hereda la propiedad, de ser estrella σ-compacto.

Notemos que con el Teorema 5.1.2 hemos descubierto incluso más de lo que se dijo en ese teorema, pues es claro que como $D \times \{\omega\}$ es un discreto no numerable, tenemos que éste no es estrella σ-compacto, ya que si tomamos a la cubierta de los unipuntuales, entonces para cualquier conjunto se tiene que la estrella de este conjunto con esta cubierta resulta ser el mismo conjunto, por lo que como todo σ-compacto en $D \times \{\omega\}$ es a lo más numerable, obtenemos que ningún σ-compacto es núcleo estrella de esta cubierta y por ende este no es un espacio estrella σ-compacto. Pero, por otro lado, sabemos que $D \times \{\omega\}$ es cerrado en el espacio del Teorema 5.1.2, y este espacio sí es estrella σ-compacto. Por lo tanto hemos demostrado que a diferencia de la σ-compacidad que se hereda a cerrados, la estrella σ-compacidad no se hereda a cerrados. Podemos generalizar esto último al probar que la estrella σ-compacidad no se hereda a cerrados regulares G_δ, tal y como lo haremos en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1. *Existe un espacio estrella numerable, tal que tiene un subespacio cerrado regular G_δ, que no es estrella σ-compacto.*

Demostración: Primero consideremos al espacio X del teorema 5.1.3. Tomemos una familia MAD $\mathcal{A}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y hagamos $Z = \Psi(\mathcal{A})$. Sabemos que Z es estrella numerable, ya que es separable.

Ahora, sin pérdida de generalidad consideremos que $X \cap Z = \emptyset$ y tomemos

$$f : D \times \{\omega\} \to \mathcal{A},$$

una biyección entre estos dos espacios. Consideremos $X \oplus Z$ y formemos al espacio cociente sobre $X \oplus Z$, resultante de la relación de equivalencia en la que a cada elemento de la forma $\langle d_\alpha, \omega \rangle$, (donde $\alpha < \mathfrak{c}$) se relaciona únicamente con el mismo y con $f(\langle d_\alpha, \omega \rangle)$ y a todos los demás puntos los relacionamos solamente consigo mismos. Vamos a llamar W al espacio cociente resultante de esta relación en $X \oplus Z$. Ahora, vamos a probar que W es un espacio estrella numerable.

Para mostrar que W es un espacio estrella numerable, primero consideremos $\phi : X \oplus Z \to W$ la proyección natural y tomemos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta arbitraria de W. Notemos que $\phi[\omega]$ es un denso numerable de $\phi[Z]$ ya que $\phi[Z]$ es homemorfo Z y $\phi[\omega]$ es homeomorfo a ω. Por tanto pasa que:

$$\phi[Z] \subset st(\phi[\omega],\mathcal{U}).$$

Por otro lado, $\phi[Y \times [0,\omega)]$ es Lindelöf, pues $Y \times [0,\omega)$ es Lindelöf y la proyección natural es continua. De este modo podemos ver $\phi[Y \times [0,\omega)]$ que es estrella numerable, por lo que existe un conjunto C_1 numerable, tal que $C_1 \subset \phi[Y \times [0,\omega)]$ y $\phi[Y \times [0,\omega)] \subset st(C_1,\mathcal{U})$. Por tanto, tenemos que si hacemos $C = C_1 \cup \phi[\omega]$, entonces

$$st(C,\mathcal{U}) = W$$

y así hemos comprobado que W es estrella numerable y por tanto estrella σ-compacto.

Por otro lado, $\phi[X]$ es nuestro cerrado regular, puesto que $int_W(\phi[X]) = Y \times [0,\omega)$, ya que $Y \times [0,\omega)$ es abierto en X y por tanto es abierto en W, pues esta parte del espacio se quedó igual, lo que nos quiere decir que $Y \times [0,\omega) \subset int_W(\phi(X))$, además que tenemos que para los puntos de la forma $\langle\langle d_\alpha,\omega\rangle, f(\langle d_\alpha,\omega\rangle)\rangle$ se tienen que todas sus vecindades intersectan a ω, lo que quiere decir que estos puntos no pertenecen al interior de $\phi(X)$ en W. Por tanto, concluimos que $int_W(\phi[X]) = Y \times [0,\omega)$. Con esto se puede notar que:

$$cl_W(int_W(\phi[X])) = \phi[X],$$

ya que todo punto en ω es discreto y por tanto no pertenece a $cl_W(int_W(\phi[X])$, pero si tomamos un punto de la forma $\overline{[\langle d_\alpha,\omega\rangle]}$ (la clase de equivalencia de el punto $\langle d_\alpha,\omega\rangle$) con $\alpha < \mathfrak{c}$, tenemos que las vecindades básicas de este punto se ven como la unión de este punto con una vecindad básica de $f(\langle d_\alpha,\omega\rangle)$ y una vecindad básica de $\langle d_\alpha,\omega\rangle$, pero las vecindades básicas de este último son de la forma $\{d_\alpha\} \times (\alpha,\omega]$ para algún $\alpha < \omega$, de lo que podemos concluir que $\langle d_\alpha,\omega\rangle \in cl_W(int_W(\phi[X]))$ y así pasa que $cl_W(int_W(\phi[X])) = \phi[X]$.

Puesto que para cada $n \in \omega$ tenemos que $W \setminus \{n\}$ es abierto en W y dado que

$$\phi[X] = \bigcap\{W \setminus \{n\} : n \in \omega\},$$

podemos ver que $\phi[X]$ es un conjunto G_δ.

Por último, como $\phi[X]$ es homeomorfo a X y ya habíamos probado antes que X no es estrella σ-compacto, entonces tenemos que este es nuestro espacio buscado. □

Ahora, pasaremos a probar a qué espacios se hereda esta propiedad y tal como las otras propiedades que hemos estudiado se va a heredar a los conjuntos cerrados y abiertos. Sin embargo, al igual que la propiedad de estrella Lindelöf, podemos ir aún más allá y demostrar que se hereda a todo conjunto abierto F_δ. Sin más preámbulos pasemos a demostrar este resultado.

Teorema 5.2.2. *Si X es un espacio estrella σ-compacto y $A \subset X$ es un subespacio abierto F_σ de X, entonces A es estrella σ-compacto.*

Demostración: Sea X un espacio estrella σ-compacto, y sea $Y = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ un subconjunto abierto de X, tal que $F_n \subset X$ y F_n es cerrado en X para toda $n \in \omega$. Para mostrar que Y es estrella σ-compacto, consideremos una cubierta abierta arbitraria $\mathcal{U}$ de Y y tomemos las siguientes cubiertas abiertas de X:

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F_n\}$$

para cada $n \in \omega$. Podemos ver que éstas sí son cubiertas abiertas ya que como Y es abierto en X todos sus abiertos también son abiertos en X. Por otro lado, como X sí es estrella σ-compacto, entonces, para cada una de estas cubiertas existe un subespacio σ-compacto $C_n \subset X$, tal que $X = st(C_n,\mathcal{U}_n)$. Luego, como Y es un conjunto F_δ y la σ-compacidad se hereda a este tipo de conjuntos, obtenemos que

$$D_n = C_n \cap Y$$

es un conjunto σ-compacto, para cada $n \in \omega$. Por último, la σ-compacidad se preserva bajo uniones numerables de σ-compactos, por lo que $C = \bigcup_{n\in\omega} D_n$ es σ-compacto y más aún $st(C,\mathcal{U}) = Y$, puesto que como $st(C_n,\mathcal{U}_n) = X$, entonces, forzosamente pasa que $F_n \subset st(D_n,\mathcal{U})$ por la forma en que se construyó $\mathcal{U}_n$. Por tanto, se concluye que Y es estrella σ-compacto. □

De este resultado se desprenden dos Corolarios y las pruebas son análogas a como se hizo en el capítulo de los espacios estrella Lindelöf en los Corolarios 3.2.3 y 3.2.4, por lo que las demostraciones se omitirán.

Corolario 5.2.3. *Si X es un espacio estrella σ-compacto y $Y \subset X$ es abierto y cerrado, entonces Y es estrella σ-compacto.*

Corolario 5.2.4. *Si X es un espacio estrella σ-compacto, entonces todo subconjunto co-nulo de X es estrella σ-compacto.*

Ahora estudiemos el comportamiento de esta propiedad bajo ciertas funciones. Sabemos por el Teorema 1.2.3 y el hecho de que la σ-compacidad se preserva bajo imágenes continuas, que la estrella σ-compacidad se preserva bajo imágenes continuas. Por otro lado, en cuanto a las preimágenes sabemos que la propiedad de σ-compacidad es preservada bajo preimágenes de funciones perfectas. Sin embargo, en todas las propiedades que hemos estudiado, éstas no tienen el comportamiento que se esperaría ante las funciones perfectas, es más ni siquiera ante las funciones perfectas y continuas, por tanto cabe señalar que esta no es la excepción, tal como veremos con el siguiente teorema.

Teorema 5.2.5. *Existe una función perfecta, sobreyectiva y continua $f : X \to Y$, donde X es un espacio no estrella σ-compacto y Y es un espacio que sí lo es.*

Demostración: Sea Y el espacio que se utilizó en el Teorema el 5.1.2. Sabemos que Y es estrella σ-compacto y tiene un subconjunto cerrado discreto infinito no numerable $F = D \times \{\omega\}$. Hacemos a $X = A(Y)$ el duplicado de Alexandroff del espacio Y.

Podemos mostrar que X no es estrella σ-compacto, puesto que $F \times \{1\}$ es un subconjunto cerrado, discreto, infinito no numerable y abierto, donde lo abierto y discreto se obtiene directamente de como está definida la topología de Alexandroff. Por otro lado, es cerrado ya que si tomamos un punto de la forma $\langle a, 1\rangle$ tal que $a \notin F$ pero $a \in Y$, tenemos que como $\langle a,1\rangle$ es un punto aislado en Y, entonces no pertenece a $cl_X(F \times \{1\})$, y si el punto es de la forma $\langle a, 0\rangle$, tenemos que como F es discreto y cerrado, existe un abierto U en Y tal que U es vecindad abierta de a y $U \cap F = \{a\}$ ó $U \cap F = \emptyset$, por lo que

$$((U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{\langle a, 1\rangle\})) \cap (F \times \{1\}) = \emptyset$$

lo que nos dice que $\langle a, 0\rangle \notin cl_X(F \times \{1\})$ y de esto concluimos que $F \times \{1\}$ es cerrado. Por tanto, con esto vemos que X no es estrella σ-compacto, puesto que de serlo, $F \times \{1\}$ también debería de serlo, al ser un subespacio abierto y cerrado, pero al ser éste último discreto e infinito no numerable, no es estrella σ-compacto.

Considerando $f : X \to Y$ la función tal que $f(\langle a, i\rangle) = a$ para todo $a \in Y$ e $i \in \{0, 1\}$; es decir, la función natural del duplicado de Alexandroff, podemos ver que es continua, sobreyectiva y perfecta, por lo que esto finaliza la prueba. □

Ahora, vamos a ver que como en los anteriores espacios que hemos estudiado, al agregar a las funciones perfectas la hipótesis de ser abierta, obtenemos que esta propiedad se preserva bajo preimágenes de este tipo de funciones.

Teorema 5.2.6. *Si f es una función perfecta y abierta de un espacio X a otro espacio Y, con Y estrella σ-compacto, entonces X es estrella σ-compacto.*

Demostración: Dado que la propiedad de $\sigma-$compacidad se hereda a cerrados y se preserva bajo preimágenes perfectas, por el Teorema 1.2.5 concluimos el resultado. □

Es momento de verificar la productividad de esta propiedad. Como es bien sabido la σ-compacidad se preserva ante productos finitos de σ-compactos, por lo que es compactamente productiva. De esto último, y del Teorema 1.2.2 se deduce que la estrella σ-compacidad es compactamente productiva, sin embargo podemos generalizar este último resultado tal y como lo haremos con el siguiente teorema.

Teorema 5.2.7. *Si X es un espacio estrella σ-compacto y Y es un espacio Lindelöf, localmente compacto, entonces $X \times Y$ es estrella σ-compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X \times Y$. Para cada $y \in Y$ tomemos V_y una vecindad abierta de y en Y, tal que $cl_Y V_y$ es compacta. Por el Teorema 1.2.2, sabemos que $X \times cl_Y V_y$ es un espacio estrella σ-compacto, por lo que existe un σ-compacto

$$C_y \subset X \times cl_Y V_y,$$

tal que

$$X \times cl_Y V_y \subset st(C_y, \mathcal{U}).$$

Luego, si hacemos $\mathcal{V} = \{V_y : y \in Y\}$, tenemos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de Y, por lo que como Y es Lindelöf, existe $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ una subcubierta numerable de Y, así, que si hacemos $C = \bigcup\{C_y : V_y \in \mathcal{V}_0\}$, tenemos que C es σ-compacto, puesto que es unión numerable de σ-compactos, y más aún obtenemos que $st(C, \mathcal{U}) = X \times Y$, de lo cual concluimos que $X \times Y$ es estrella σ-compacto. □

Hay que notar que la hipótesis de ser localmente compacto es totalmente necesaria, puesto que si la quitamos podemos llegar a casos en donde no se cumple el teorema.

Teorema 5.2.8. *Existe un espacio numerablemente compacto X y un espacio Lindelöf Y tales que $X \times Y$ no es estrella σ-compacto*

Demostración: Sea $X = [0, \omega_1)$ con la topología de orden usual y sea Y la extensión Lindelöf por un punto de X, donde el punto agregado justamente va a ser ω_1. Podemos notar que X es numerablemente compacto y que evidentemente Y es Lindelöf.

Sólo nos falta demostrar que $X \times Y$ no es estrella σ-compacto. Para esto, consideremos para cada $\alpha < \omega_1$ a $U_\alpha = [0, \alpha] \times [\alpha, \omega_1]$ y $V_\alpha = (\alpha, \omega_1) \times \{\alpha\}$ y tomemos la siguiente cubierta abierta de $X \times Y$:

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Tomemos $C \subset X \times Y$ un subconjunto σ-compacto, entonces $\pi_X[C]$ es σ-compacto en X (donde $\pi_X : X \times Y \to X$ es la función proyección sobre X). Por tanto afirmamos que existe $\beta < \omega_1$ tal que

$$\pi_X[C] \cap (\beta, \omega_1) = \emptyset$$

pues todo compacto en X es a lo más numerable.

Tomando $\alpha_0 > \beta$, podemos notar que $V_{\alpha_0} \cap C = \emptyset$, y si tomamos cualquier α' tal que $\alpha' > \alpha_0$, es claro que $\langle \alpha', \alpha_0 \rangle \notin st(C, \mathcal{U})$, puesto que V_{α_0} es el único abierto de la cubierta que tiene a $\langle \alpha', \alpha_0 \rangle$. Por lo tanto $X \times Y$ no es estrella σ-compacto. □

Observemos que a pesar de que hemos mejorado el resultado del Teorema 1.2.2, en el Teorema 5.2.6, todavía queda la duda de si esta propiedad podría ser productiva por sí misma, es decir, si el producto de dos espacios estrella σ-compactos es un espacio estrella σ-compacto. Sin embargo, como ha pasado con nuestras anteriores propiedades, podremos ver que esta no es productiva por sí sola. De hecho, esto ya lo hemos demostrado en el Teorema 5.2.8, pues al ser un espacio X numerablemente compacto y un espacio Lindelöf tenemos que ambos son estrella $\sigma-$compactos, por tanto, como su producto no es $\sigma-$compacto podemos concluir que el producto de un espacio estrella $\sigma-$compacto consigo mismo no tiene porque ser estrella $\sigma-$compacto

Ahora, veamos que esta propiedad no se preserva cuando se hace el producto de un espacio separable con un espacio Lindelöf.

Teorema 5.2.9. *Existe un espacio separable X y un espacio Lindelöf Y, tales que su producto no es estrella σ-compacto.*

Demostración: Sea Y el mismo espacio Y que se utilizó en el Teorema 5.1.3, y sea $\mathcal{A}$, una familia MAD de ω. Hagamos $X = \Psi(\mathcal{A})$ el espacio de Mrówka asociado a la familia $\mathcal{A}$. Sabemos que X es separable, y que Y es Lindelöf.

Enumeremos $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Para mostrar que $X \times Y$ no es estrella σ-compacto, hagamos para cada $\alpha < \mathfrak{c}$

$$U_\alpha = X \times \{d_\alpha\} \text{ y } V_\alpha = (\{A_\alpha\} \cup A_\alpha) \times (Y \setminus \{d_\alpha\}).$$

Luego, para cada $n \in \omega$, sea

$$W_n = \{n\} \times \ Y.$$

Consideremos la siguiente colección de subconjuntos abiertos de $X \times Y$:

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{W_n : n \in \omega\}$$

Afirmamos que ésta colección es una cubierta, puesto que para cada $\langle x, y\rangle \in X \times Y$, tenemos que si $y \in D$, entonces $y = d_\alpha$ para algún $\alpha < \mathfrak{c}$, por lo que $\langle x, y\rangle \in U_\alpha$. Por otro lado, si $y \notin D$, podemos considerar el caso cuando $x \in \omega$ o cuando $x \in \mathcal{A}$. Si $x \in \omega$, tenemos que $x = n$ para algún $n \in \omega$ y así $\langle x, y\rangle \in W_n$, por último, si $x \in \mathcal{A}$, entonces $x = A_\alpha$ para algún $\alpha < \mathfrak{c}$, por lo que es claro que $\langle x, y\rangle \in V_\alpha$. Así concluimos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para $X \times Y$.

Tomemos un subconjunto σ-compacto $C \subset X \times Y$ de $X \times Y$. Entonces, $\pi_Y[C]$ es σ-compacto en Y, (donde $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es la función proyección sobre Y). Con esto, podemos notar que existe $\alpha_0 < \mathfrak{c}$ tal que

$$\{d_\alpha : \alpha_0 \leq \alpha < \mathfrak{c}\} \cap \pi_Y[C] = \emptyset,$$

puesto que todo compacto en Y es a lo más finito y por tanto todo σ-compacto es a lo más numerable.

Por lo tanto, tenemos que $U_{\alpha_0} \cap C = \emptyset$, de lo que podemos notar que el $\langle A_{\alpha_0}, d_{\alpha_0}\rangle \notin st(C,\mathcal{U})$, puesto que U_{α_0} es el único elemento de la cubierta que lo contiene. Por lo tanto, concluimos que $X \times Y$ no es estrella σ-compacto □

Por último, es momento de ver cómo se comporta esta propiedad con la suma topológica, y como ha pasado con las anteriores propiedades resulta que la estrella σ-compacidad se preserva bajo los mismos términos que se preserva lo σ-compacto.

Teorema 5.2.10. *Si $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos ajenos dos a dos, entonces el espacio $X = \oplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ es un espacio estrella σ-compacto si y solo si para cada $\alpha \in I$, se tiene que X_α es estrella σ-compacto y $|I| \leq \aleph_0$.*

Demostración: Primero supongamos que X es un espacio estrella σ-compacto. Notemos que por el Corolario 5.2.3 tenemos que para cada $\alpha \in I$, X_α es un espacio estrella σ-compacto. Si suponemos por el contrario que $|I| > \aleph_0$, Y tomamos la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{X_\alpha : \alpha \in I\}$$

de X, tenemos que existe un núcleo σ-compacto $C \subset X$ de $\mathcal{U}$; es decir, $X = st(C,\mathcal{U})$, por lo que $X_\alpha \cap C \neq \emptyset$. Por otro lado, observemos que podemos ver a C, como:

$$C = \oplus_{\alpha \in I}(X_\alpha \cap C)$$

pero tenemos una contradicción, puesto que C es un $\sigma-$compacto que es igual a una suma topológica de una cantidad no numerable de espacios (lo cual es imposible, puesto que una suma topológica de espacios es σ-compacto si solo si todos los sumandos son σ-compactos y la cantidad de sumandos es a lo más numerable). Por lo tanto tenemos que $|I| \leq \aleph_0$.

Ahora, hagamos la parte de la necesidad. Para esto, tomemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Como para cada $\alpha \in I$ tenemos que

$$\mathcal{U}_\alpha = \{U \cap X_\alpha : U \in \mathcal{U}\}$$

es una cubierta abierta en X_α, se tiene que existe un subconjunto σ-compacto C_α de X_α, tal que

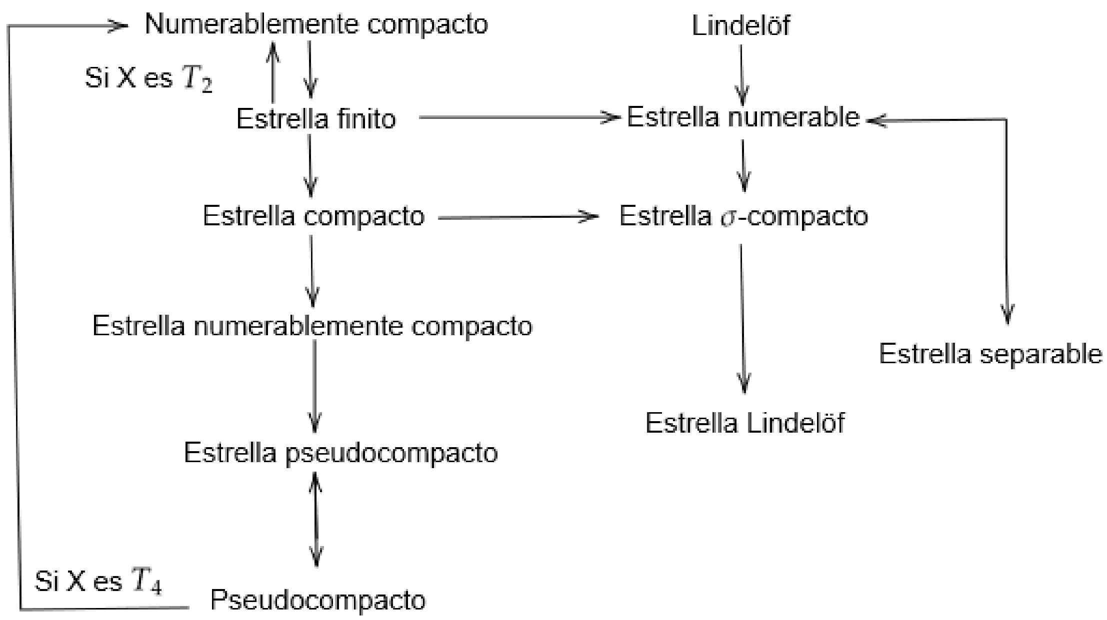
$$X_\alpha = st(C_\alpha,\mathcal{U}_\alpha).$$

Por lo que si hacemos $C = \oplus_{\alpha \in I} C_\alpha$, tenemos que este es un subespacio σ-compacto de X, tal que

$$X = st(C,\mathcal{U})$$

de lo que concluimos que X es un espacio estrella σ-compacto. □

Por último terminamos el capítulo con nuestro diagrama de las relaciones que hemos desarrollado hasta ahora.


Numerablemente compacto
Lindelöf
Si X es T_2
Estrella finito
Estrella numerable
Estrella compacto
Estrella σ-compacto
Estrella numerablemente compacto
Estrella separable
Estrella Lindelöf
Estrella pseudocompacto
Si X es T_4
Pseudocompacto

Capítulo 6

Espacios estrellas P y espacios metrizables.

Hasta ahora lo que hemos hecho es explorar propiedades desde el lenguaje de los espacios estrella e investigar que tanto se separan de las propiedades originales. También hemos revisado nuevas características que se obtienen cuando se está hablando de la propiedad estrella P en comparación a cuando se habla simplemente de la propiedad P, y de la misma manera nos hemos dado cuenta que muchas otras características se pierden. Además, también hemos visto las relaciones que existen entre todos los espacios estrella, así como las relaciones con propiedades más comunes (compacidad numerable, Lindelöf, pseudocompacidad, etc.). Y hemos hecho algunos descubrimientos como que la compacidad numerable implica absolutamente todas las propiedades estrella que se han planteado en esta tesis.

También, se vio que en el Teorema 2.2.10 se dio un resultado en el que exponíamos que en los espacios normales, las propiedades de compacidad numerable, estrella finitud, estrella compacidad y pseudocompacidad, eran equivalentes entre sí. Por lo que con esto nos puede surgir una pregunta natural, que es: ¿en qué clases de espacios algunas o todas nuestras propiedades coinciden entre sí? De esta pregunta nos vamos a encargar en este capítulo, por lo que estudiaremos las propiedades que ya hemos visto pero desde una clase de espacios en específico. Por ejemplo, vamos a hablar desde la perspectiva de los espacios métricos, espacios de Moore y espacios semiestratificables, para de esta manera ver qué tanto se acercan las propiedades estrella que hemos estudiado en estas clases de espacios y lo natural será que entre más crezcan las clases más se alejarán nuestras propiedades.

6.1. Espacios metrizables

En esta sección estudiaremos qué tanto se acercan nuestras propiedades en la clase de espacios metrizables y veremos que aunque casi todas las propiedades coinciden en está clase de espacios, existen algunas que siguen siendo distintas. Entonces, comenzaremos mejorando el resultado del Teorema 2.2.10 para espacios metrizables.

Teorema 6.1.1. *En un espacio metrizable X son equivalentes:*

(i) El espacio X es compacto;

(ii) El espacio X es numerablemente compacto;

(iii) El espacio X es estrella finito;

(iv) El espacio X es estrella compacto;

(v) El espacio X es estrella numerablemente compacto;

(vi) El espacio X es pseudocompacto.

Demostración: (i) implica (ii), es directo de la definición de compacidad. Luego, (ii) implica (iii) ya lo hemos demostrado en el capítulo 2, las implicaciones (iii) implica (iv), (iv) implica (v) y (v) implica (vi) son todas resultado de la Proposición 1.2.1. Por otro lado (vi) implica (ii) lo obtenemos de que todo espacio metrizable es normal y es bien conocido que en espacios normales la pseudocompacidad coincide con la compacidad numerable. Por último, sabemos que en los espacios métricos coincide la compacidad con la compacidad numerable, por lo que de esto obtenemos (ii) implica (i) y así concluimos que todas las propiedades son equivalentes. □

Ahora, con esto solo nos falta ver cómo se comportan los espacios Lindelöf, estrella numerable, estrella σ-compacto y estrella Lindelöf entre ellos y entre los espacios del Teorema 6.1.1 en la clase de espacios metrizables. Sin embargo, lamentablemente estos espacios no son equivalentes a los espacios del Teorema 6.1.1, pero algunos de ellos sí son equivalentes entre sí en la clase de espacios metrizables. Entonces, sin más preámbulo daremos el ejemplo que nos dice que ninguno de estos espacios es equivalente a los espacios del Teorema 6.1.1.

Ejemplo 6.1.2. *Existe un espacio Lindelöf y metrizable que no es compacto.*

Demostración: Tomemos a $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana, entonces $\mathbb{R}$ es metrizable y segundo numerable, por lo que es Lindelöf, pero este es un espacio que es bien conocido que no es compacto. □

Notemos que aunque este era un ejemplo realmente fácil, nos dice que la propiedad de ser Lindelöf no implica ninguna de las propiedades del Teorema 6.1.1 (pues son equivalentes a la compacidad en espacios métricos), pero como Lindelöf implica la estrella numerabilidad y está a su vez implica la estrella $\sigma-$compacidad, que al mismo tiempo implica la propiedad de estrella Lindelöf, tenemos que este ejemplo en realidad nos dice que todas estás propiedades no implican ninguna de las del Teorema 6.1.1. Entonces, ahora lo único que nos falta ver es como se relacionan estás propiedades entre sí, que va a ser lo que vamos a ver en el siguiente Teorema.

Teorema 6.1.3. *En un espacio X, metrizable, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) El espacio X es estrella numerable;

(ii) El espacio X es estrella; $\sigma-$compacto.

(iii) El espacio X es estrella Lindelöf.

Demostración: Únicamente tenemos que mostrar que un espacio metrizable y estrella Lindelöf es estrella numerable. Esto se sigue porque la propiedad estrella numerable es lo mismo que estrella separable y las propiedades Lindelöf y separable coinciden en un espacio métrico, por lo que si tenemos para toda cubierta abierta un núcleo Lindelöf, entonces, tenemos un núcleo separable y por ende X es un espacio estrella separable, por lo que gracias al Teorema 3.1.4 concluimos que X es un espacio estrella numerable. □

Notemos que en el Teorema 6.1.3, no incluimos la propiedad de Lindelöf, pero esto únicamente fue porque este resultado lo vamos a generalizar en la siguiente sección de espacios de Moore dado que vamos a necesitar un Teorema que tiene que ver con los espacios de Moore.

6.2. Espacios de Moore

En está sección vamos a presentar los espacios de Moore, así como comparar todas las propiedades que hemos visto, justo como lo hicimos con los espacios metrizables. Sin embargo, tal como veremos, gracias a que la clase de espacios de Moore es contiene a la clase de los espacios metrizables, vamos a tener que las propiedades estrella se van a alejar más en comparación con lo que sucede con los espacios metrizables. Por ejemplo, vamos a ver que el Teorema 6.1.1 ya no es siempre válido en espacios de Moore, aunque el resultado del Teorema 6.1.3 sí lo será.

Entonces sin más espera, vamos a pasar a dar la definición de los espacios de Moore, aunque para esto necesitaremos una primera definición que nos ayudará a su vez a definir a los espacios de Moore. Nótese que aunque daremos la definición de estos los espacios de Moore, no vamos a profundizar tanto en estos, pues lamentablemente sale del contexto de esta tesis, por lo que se recomienda que el lector tenga buenos conocimientos de este tipo de espacios. Sin embargo, dentro del apéndice de esta tesis estarán los resultados más importantes sobre espacios de Moore que utilizaremos. Además, si el lector gusta profundizar más en este tipo de espacios se recomienda la lectura [4].

Definición 6.2.1. *Sea X un espacio. Decimos que una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de X, es un desarrollo para el espacio X si cumple que para todo $x \in X$, la familia*

$$\{st(x,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$$

es una base local de x. Por otro lado, diremos que X es desarrollable si tiene un desarrollo.

Ahora, ya con esta definición ya estamos en condiciones de dar la definición de los espacios de Moore.

Definición 6.2.2. *Decimos que un espacio X es de Moore, si X es regular y desarrollable.*

Ya que tenemos bien presente la definición de un espacio de Moore, vamos a probar tal como ya habíamos dicho, que el Teorema 6.1.1 no siempre se cumple para todos los espacios de Moore.

Teorema 6.2.3. *Existe un espacio de Moore pseudocompacto pero que no es estrella numerablemente compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD de ω de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Sea $X = \Psi(\mathcal{A})$, sabemos que X es un espacio pseudocompacto, pero por el Teorema 4.1.1 sabemos que X no es estrella numerablemente compacto, por lo que si demostramos que X es un espacio de Moore, habremos terminado.

Es bien sabido que X es un espacio Tychonoff y por lo tanto es regular, por lo que basta con que demostremos que X es desarrollable. Para esto tomemos

$$\mathcal{U}_n = \{\{l\} : l \in \omega\} \cup \{\{A\} \cup (A \setminus \{m : m \in \omega \text{ y } m \leq n\}) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Notemos que para cada $n \in \omega$, tenemos que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de básicos de X y además tenemos que para todo $k \in \omega$, pasa que

$$st(k,\mathcal{U}_k) = \{k\}$$

por lo que $\{st(k,\mathcal{U}_k)\}$ es una base local para k y de esto a su vez concluimos que $\{st(k,\mathcal{U}_k) : k \in \omega\}$ es una base local para k. Ahora, por otro lado notemos que para todo $A \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$st(A,\mathcal{U}_n) = \{A\} \cup (A \setminus \{m : m \in \omega \text{ y } m \leq n\})$$

Por lo que tenemos que si tomamos un abierto básico de A; es decir, un abierto de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, donde F es un conjunto finito. Entonces, tenemos que si $F \neq \emptyset$ podemos denotar a p, como el elemento máximo de F y de este modo vamos a tener que

$$st(A,\mathcal{U}_p) = \{A\} \cup (A \setminus \{m : m \in \omega \text{ y } m \leq p\}) \subset (\{A\} \cup (A \setminus F)).$$

Y por otro lado si $F = \emptyset$, entonces tomando cualquier $n \in \omega$ pasa que

$$st(A,\mathcal{U}_n) = \{A\} \cup (A \setminus \{m : m \in \omega \text{ y } m \leq n\}) \subset (\{A\} \cup A).$$

Por lo que con todo esto podemos concluir que $\{st(A,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ es una base local para A.

Así, concluimos que X es un espacio de Moore. □

Por otro lado, ya habíamos comentado que aunque este resultado rompa el Teorema 6.1.1 , vamos a ver que el Teorema 6.1.3 se sigue conservando aún en espacios de Moore. Sin embargo, con el concepto de espacios de Moore podemos mejorar el Teorema 6.1.3, y conseguir un nuevo resultado para la clase de espacios metrizables que no se va a seguir manteniendo para la clase de espacios de Moore. Lo siguiente que vamos a hacer será demostrar este resultado mejorado y mostrar que no es válido cuando se habla dentro de la clase de espacios de Moore. Pero para esto primero necesitaremos un teorema que nos relaciona los espacios estrella Lindelöf con los espacios separables.

Teorema 6.2.4. *Si X es un espacio de Moore, entonces X es separable si y solo si es estrella Lindelöf.*

Demostración: Observemos que solo necesitamos demostrar que si X es un espacio de Moore y estrella Lindelöf, entonces tenemos que X es separable.

Como X es un espacio de Moore, podemos tomar un desarrollo de X,

$$\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$$

y luego para cada cubierta $\mathcal{U}_n$, tomemos $L_n \subset X$, tal que L_n es Lindelöf y $st(L_n, \mathcal{U}_n) = X$ para cada $n \in \omega$ (lo cual se puede hacer porque X es un espacio estrella Lindelöf). Dado que la propiedad de ser un espacio de Moore es hereditaria, tenemos que para cada L_n, este es un espacio Lindelöf y de Moore, por lo que por el Lema A.3.2, L_n es un espacio metrizable, con lo que a su vez tenemos que es separable (pues separable y Lindelöf coincide en la clase de espacios Metrizables).

Por tanto podemos tomar para cada L_n, un denso numerable, $D_n \subset L_n$. Con esto, vamos a formar

$$D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$$

el cual vamos a proponer como nuestro conjunto denso numerable de X.

Podemos ver que D es numerable ya que D es la unión numerable de conjuntos numerables, por lo que de este modo solo nos faltaría ver que es denso en X. Para esto vamos a tomar un abierto U de X y un $x \in U$. Como $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un desarrollo de X, tenemos que existe $n \in \omega$ tal que:

$$st(x, \mathcal{U}_n) \subset U.$$

Además, como L_n es núcleo estrella de $\mathcal{U}_n$, se sigue que existe un $V \in \mathcal{U}_n$, tal que $x \in V$ y $V \cap L_n \neq \emptyset$. De este modo, tenemos que

$$V \subset st(x, \mathcal{U}_n) \subset U.$$

Y por otro lado, sabemos que $L_n \cap V$ es un abierto en L_n, por lo que $(L_n \cap V) \cap D_n \neq \emptyset$ (pues D_n es denso en L_n).

Entonces con todo esto concluimos que

$$\emptyset \neq (D_n \cap V) \subset (D_n \cap U) \subset D \cap U;$$

es decir, D es un denso en X. Por tanto X es separable. □

Con este último Teorema podemos dar el resultado que mejora al Teorema 6.1.3.

Corolario 6.2.5. *En un espacio metrizable X, son equivalentes los siguientes enunciados:*

(i) El espacio X es un espacio Lindelöf;

(ii) El espacio X es un espacio separable;

(iii) El espacio X es un espacio estrella numerable;

(iv) El espacio X es un espacio estrella σ-compacto;

(v) El espacio X es un espacio estrella Lindelöf.

Demostración: Es bien conocido que en un espacio metrizable (i) si y solo si (ii) se cumple. Además, (iii) si y solo si (iv) si y solo si (v) ya lo hemos probado en el Teorema 6.1.3. Y por último (v) si y solo si (ii) lo hemos probado en el Teorema 6.2.4. □

Tal y como se ha dicho anteriormente, vamos a tener que para la clase de espacios de Moore, el Corolario 6.2.5 no siempre se va a cumplir y esto pasa porque si tomamos una familia MAD de ω, $\mathcal{A}$, tal que $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$, sabemos por el Teorema 6.2.3, que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Moore. Por tanto sabemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Moore que es separable, pero no es Lindelöf. Sin embargo, tal y como se va a probar en el siguiente teorema, vamos a tener que las propiedades (ii)-(v) del Corolario 6.2.5, van a seguir siendo equivalentes en la clase de espacios de Moore.

Teorema 6.2.6. *En un espacio X de Moore, se tiene que lo siguiente es equivalente*

(i) El espacio X es separable;

(ii) El espacio X es estrella numerable;

(iii) El espacio X es estrella σ-compacto;

(iv) El espacio X es estrella Lindelöf.

Demostración: De nuevo, notemos que las implicaciones (i) implica (ii), (ii) implica (iii) y (iii) implica (iv) siempre se dan no importando en qué clase de espacios estemos. Además, por otro lado, con el Teorema 6.2.4 ya hemos probado (iv) implica (i), por lo que de este modo concluimos el resultado. □

Ahora, vamos a ver que aunque el Teorema 6.1.1 no se cumple en esta clase de espacios, tenemos que una buena parte de este teorema si se cumple asumiendo la hipótesis del continuo y sin asumir esto se cumplen algunas partes, por lo que ahora nos daremos a la tarea de verificar qué tanto sí se sigue valiendo el Teorema 6.1.1 para la clase de espacios de Moore. Pero, para lograr esto, precisamos primero de unos cuantos resultados. Por lo que pasaremos a enunciar y demostrar éstos para luego dar la versión del Teorema 6.1.1 para espacios de Moore asumiendo la hipótesis del continuo.

Lema 6.2.7. *Si (X,τ) es un espacio compacto con una diagonal G_δ, entonces X es metrizable.*

Demostración: Dado que (X,τ) es un espacio con una diagonal G_δ tenemos que existen abiertos $\{U_n : n\in\omega\}$ de $X\times X$, tales que

$$\Delta = \{\langle x,x\rangle : x\in X\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n.$$

Para cada $x\in X$ y $n\in\omega$, sabemos que existe un abierto V_x^n de X, tal que $V_x^n\times V_x^n\subset U_n$ y $x\in V_x^n$. Además, como X es Hausdorff y compacto, entonces es normal, por lo que existe un abierto W_x^n en X, tal que $x\in W_x^n\subset cl_X(W_x^n)\subset V_x^n$. Por tanto tenemos que

$$\mathcal{U}_n = \{W_x^n : x\in X\}$$

es una cubierta abierta de X, por lo que existe un $A_n\subset X$ tal que A_n es finito y

$$\mathcal{V}_n = \{W_x^n : x\in A_n\}$$

es una subcubierta abierta para X de $\mathcal{U}_n$. De este modo, haciendo esto para cada $n\in\omega$, obtenemos que

$$\mathcal{W} = \{W_x^n : n\in\omega \text{ y } x\in A_n\}\cup\{X\setminus cl_X(W_x^n) : n\in\omega \text{ y } x\in A_n\}$$

es una cubierta numerable para X.

Afirmamos que $\mathcal{W}$ separa puntos. Puesto que si tomamos $z,y\in X$, tal que $z\neq y$, tenemos que

$$\langle z,y\rangle\notin\Delta,$$

por lo que existe $n\in\omega$ tal que $\langle z,y\rangle\notin U_n$. Luego, por como fueron definidos los abiertos en $\mathcal{U}_n$, podemos ver que para todo $x\in X$, tal que $z\in W_x^n$, se tiene que $y\notin cl_X(W_x^n)$, por lo que esto también pasa para los abiertos en $\mathcal{V}_n$ y como $\mathcal{V}_n$ es cubierta, tenemos que existe $x\in A_n$, tal que $z\in W_x^n$, y por ende $y\in X\setminus cl_X(W_x^n)$. Entonces con esto concluimos que $\mathcal{W}$ separa puntos.

Así, podemos considerar a $\mathcal{W}$ como una subbase que nos genera una topología en X, $\tau_{\mathcal{W}}$, que es segundo numerable (puesto que $\mathcal{W}$ es numerable) y Hausdorff. Pero esta topología está contenida en la topología original de X, por lo que la función identidad, de (X,τ) a $(X,\tau_{\mathcal{W}})$, es una función continua, además de que es cerrada, puesto que va de un Hausdorff compacto a un Hausdorff , lo que la hace un homeomorfismo (ya que es claro que es biyectiva). Por tanto tenemos que nuestro espacio (X,τ) es un espacio normal (ya que es un Hausdorff compacto) y segundo numerable, por lo que por el teorema de metrización de Urysohn, obtenemos que (X,τ) es un espacio metrizable.□

Lema 6.2.8. *Si (X,τ) es un espacio numerablemente compacto con una diagonal G_δ, entonces X es compacto.*

Demostración: Como X es un espacio con una diagonal G_δ, tenemos que existen abiertos en $X\times X$, $\{U_n : n\in\omega\}$, tales que

$$\Delta = \{\langle x,x\rangle : x\in X\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n.$$

Para cada $n \in \omega$ y $x \in \omega$, podemos encontrar un V_x^n, tal que es una vecindad abierta de x en X y $V_x^n \times V_x^n \subset U_n$, por lo que para cada $n \in \omega$ existe una cubierta abierta $\mathcal{U}_n$ de X, tal que para todo abierto $U \in \mathcal{U}_n$, sucede que $U \times U \subset U_n$. Por tanto, por la forma en que construimos estas cubiertas podemos notar que para todo $x, y \in X$, existe $k \in \omega$, tal que para todo $U \in \mathcal{U}_k$, si $x \in U$, entonces $y \notin U$. De este modo, esto último lo podemos traducir en que

$$\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}.$$

Con esto dicho vamos a pasar al objetivo principal de este lema, y para esto vamos a suponer por el contrario que X no es compacto, lo que realmente se traduce en que X no es Lindelöf. Es decir, existe $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, tal que no tiene subcubiertas numerables.

Vamos a demostrar por medio de inducción transfinita que existe un conjunto

$$Y = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\},$$

que cumple con que para todo $\alpha \in \omega_1$, existe $m(\alpha) \in \omega$ tal que

1. $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$;
2. Para cualquier $\alpha \in [0, \omega_1)$ no existe una cantidad numerable de abiertos en $\mathcal{U}$, tales que cubren a $X \setminus \bigcap_{\beta\leq\alpha} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$.

Entonces, primero comencemos tomando $x_0 \in X$ y afirmamos que existe $m(0) \in \omega$, tal que no existe una colección numerable de $\mathcal{U}$ que cubra a $X \setminus st(x_0,\mathcal{U}_{m(0)})$. De no existir tal $m(0)$, tendríamos que para todo $n \in \omega$, existe $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}$, tal que $\mathcal{V}_n$ es numerable y cubre a $X \setminus st(x_0,\mathcal{U}_n)$, por lo que a su vez tendríamos que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ es una subcolección numerable de $\mathcal{U}$, que cubre a

$$\bigcup_{n\in\omega}(X \setminus st(x_0,\mathcal{U}_n)) = X \setminus \bigcap_{n\in\omega} st(x_0,\mathcal{U}_n) = X \setminus \{x_0\}.$$

Lo que significa que si tomamos algún $W \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in W$, tenemos que

$$\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\} \cup \{W\}$$

es una subcubierta numerable para X de $\mathcal{U}$, lo cual habíamos supuesto que no sucedía. Por lo tanto podemos concluir que sí existe un $m(0) \in \omega$, que hace justo lo que queremos.

Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ (con $\alpha \in \omega_1$) existe nuestro punto x_β, con su respectivo $m(\beta)$, que cumple las 2 condiciones que habiamos puesto. Luego, hacemos la siguiente afirmación:

Afirmación: Al conjunto $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$ no se le puede cubrir por medio de ninguna subcolección numerable de la cubierta $\mathcal{U}$.

Prueba: Si suponemos que existe un $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ numerable que cubre a este conjunto, tenemos que

$$\mathcal{W} = \{st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)}) : \beta < \alpha\} \cup \mathcal{V}$$

es una cubierta numerable de X, lo que significa que existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{W}$, tal que $\mathcal{F}$ es finito y cubre a X. De este modo, como $\mathcal{F}$ es finito, podemos tomar κ el ordinal máximo tal que $st(x_\kappa,\mathcal{U}_{m(\kappa)}) \in \mathcal{F}$ (notemos que este ordinal siempre debe de existir, puesto que si X, fuese cubierto solo por miembros de $\mathcal{V}$, significaría que $\mathcal{V}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$, lo cual no es posible por como supusimos $\mathcal{U}$). Y de este modo, notar que $X \setminus \bigcup_{\beta\leq\kappa} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$ es cubierto únicamente por miembros de $\mathcal{V}$, puesto que los demás miembros de $\mathcal{F}$, se quedan contenidos en el complemento de este conjunto. Por tanto, hemos llegado a que existe una subcolección numerable de $\mathcal{U}$, tal que cubre a $X \setminus \bigcup_{\beta\leq\kappa} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$, lo cual no es posible debido a la hipótesis de inducción. Así que con esto concluimos que nuestra afirmación.

Por último, debemos de encontrar un $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$ y $m(\alpha)$, que cumplan nuestras condiciones (1) y (2), y para esto simplemente tomaremos cualquier punto de $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$ y lo denotaremos por x_α. Si nuestro $m(\alpha)$ no existiera, para todo $n \in \omega$ existiría una subcolección numerable de $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}_n$, tal que cubriese a $X \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)}) \cup st(x_\alpha,\mathcal{U}_n))$. De tal forma que

$\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{W}_n$ es una subcolección numerable de $\mathcal{U}$, tal que cubre a:

$$\bigcup_{n\in\omega}(X\setminus((\bigcup_{\beta<\alpha}st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)}))\cup(st(x_\alpha,\mathcal{U}_n))))=X\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}(st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})\cup\{x_\alpha\})$$

lo que a su vez nos dice que una subcolección numerable de $\mathcal{U}$ cubre a $X\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$. Pero de nuevo por lo que habíamos probado, eso no es posible, así que con esto concluimos que si existe nuestro $m(\alpha)$.

Por lo tanto hemos probado que nuestro conjunto Y existe. Además,como para cada $\alpha\in\omega_1$, tenemos asociado un $m(\alpha)\in\omega$, entonces existe un $n\in\omega$, tal que el conjunto $D=\{\alpha\in\omega_1 : m(\alpha)=n\}$ es un conjunto no numerable, por lo que si hacemos

$$Z=\{x_\alpha:\alpha\in D\}$$

podemos afirmar que Z es un subconjunto de X, no numerable, cerrado y discreto.

Donde lo discreto lo obtenemos de que si tomamos $x_\alpha,x_\beta\in Y$, tales que $\alpha>\beta$ y $m(\alpha)=m(\beta)$, pasa que para todo abierto $U\in\mathcal{U}_{m(\alpha)}$, tal que $x_\alpha\in U$, se tiene que $x_\beta\notin U$, ya que

$$x_\alpha\in X\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha}st(x_\gamma,\mathcal{U}_{m(\gamma)}),$$

lo que en particular nos dice que $x_\alpha\notin st(x_\beta,\mathcal{U}_{m(\beta)})$; es decir, x_α y x_β no pueden pertenecer a un mismo abierto de la cubierta $\mathcal{U}_{m(\alpha)}=\mathcal{U}_{m(\beta)}$. Con esto último vemos que si tomamos un $x_\alpha\in Z$, se va a tener que para todo $U\in\mathcal{U}_{m(\alpha)}$ tal que $x_\alpha\in U$ va a pasar que

$$U\cap Z=\{x_\alpha\}.$$

De este modo concluimos que Z es discreto.

Por otro lado, para probar que es cerrado tomemos $x\in X\setminus Z$. Así, tenemos que para todo abierto $U\in\mathcal{U}_n$ (donde n es la que define al conjunto D), tal que $x\in U$, se tiene que

$$|Z\cap U|\leq 1$$

(por lo antes probado cuando se demostró que Z era discreto). Por tanto, como X es Hausdorff, obtenemos que $x\notin cl_X Z$. Así, concluimos que Z es un subespacio discreto, cerrado y no numerable de X, lo cual causa una contradicción, puesto que X es un espacio numerablemente compacto. Por lo tanto concluimos que X es un espacio compacto. □

Lema 6.2.9. *Si X es un espacio de Moore, entonces X tiene una diagonal G_δ.*

Demostración: Tomemos un desarrollo de X, $\{\mathcal{U}_n:n\in\omega\}$, y para cada $n\in\omega$, definamos:

$$U_n=\bigcup\{U\times U:U\in\mathcal{U}_n\}$$

Entonces, como para cada $x\in X$, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega}st(x,\mathcal{U}_n)=\{x\}$, se tiene que para todo $y\in X$, tal que $y\neq x$, existe $n\in\omega$ que cumple con que todo abierto que tiene a x en $\mathcal{U}_n$ no tiene a y. Puesto que si no existiera este n, entonces tendríamos que para todo $n\in\omega$, existe un $U\in\mathcal{U}_n$, tal que $x,y\in U$, lo que a su vez nos dice que $y\in st(x,\mathcal{U}_n)$ y como esto pasa para toda $n\in\omega$, entonces $y\in\bigcap_{n\in\omega}st(x,\mathcal{U}_n)$, lo cual no es posible. Por tanto, con esto podemos asegurar que existe esta n. Ahora, afirmamos que

$$\Delta=\bigcap_{n\in\omega}U_n$$

ya que es claro que $\Delta\subset\bigcap_{n\in\omega}U_n$. Y, por otra parte si tomamos $\langle x,y\rangle\in X\times X$, con $x\neq y.$, entonces por lo que habíamos probado anteriormente existe $n\in\omega$, tal que ningún abierto de $\mathcal{U}_n$ tiene a x y a y al mismo tiempo, por lo que esto nos dice que $\langle x,y\rangle\notin U_n$ y por ende obtenemos que $\Delta=\bigcap_{n\in\omega}U_n$. Por tanto, como cada U_n es abierto tenemos que X tiene una diagonal G_δ

Corolario 6.2.10. *Si X es un espacio de Moore numerablemente compacto, entonces X es compacto y metrizable.*

Demostración: Se sigue directamente de los tres anteriores Lemas. □

Corolario 6.2.11. *Si X es un espacio de Moore estrella numerablemente compacto, entonces X es estrella compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es un espacio estrella numerablemente compacto, entonces tiene un núcleo numerablemente compacto. Y como la propiedad de Moore es hereditaria, tenemos que ese núcleo es un espacio de Moore, numerablemente compacto. Por lo que por el Corolario 6.2.10, tenemos que este es compacto. □

Corolario 6.2.12. *Un espacio X de Moore, es estrella finito, si y solo si es un espacio compacto y metrizable.*

Demostración Se sigue directamente de que los espacios de Moore son espacios regulares y de que la estrella finitud y la compacidad numerable coinciden en espacios Hausdorff.

Sólo nos falta verificar si en la clase de espacios de Moore siguen siendo equivalentes la propiedad de compacidad numerable, con la propiedad de estrella compacidad. Como vamos a ver en lo que sigue, resulta ser que sí son equivalentes o al menos lo son asumiendo la hipótesis del continuo (el autor de esta tesis no está seguro de que es lo que sucede sin asumir la hipótesis del continuo). Entonces, vamos a pasar a resolver este problema, pero antes vamos a precisar de dos lemas.

Lema 6.2.13. *Si X es un espacio de Moore tal que $w(X)$ no tiene cofinalidad numerable, entonces existe un cerrado discreto de X, D, tal que $|D| = w(X)$.*

Demostración: Primero vamos a necesitar demostrar la siguiente afirmación:

Afirmación: Existe una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de X, tal que $\kappa = w(X)$, y $U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$.

Prueba: Supongamos por el contrario que esto no sucede y tomemos un desarrollo de X, $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$, tal que $|\mathcal{U}_n| \leq w(X)$. Para cada $n \in \omega$ vamos a crear las siguientes cubiertas

$$\mathcal{V}_n = \{V_{n,\alpha} : \alpha < \lambda_n\} \subset \mathcal{U}_n$$

donde λ_n es el máximo cardinal tal que para toda $\alpha < \lambda_n$ se cumple que

$$V_{n,\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_{n,\beta} \neq \emptyset.$$

De esta manera, por lo que habíamos supuesto, tenemos que para cada $n \in \omega$, $\lambda_n < w(X)$, lo que a su vez quiere decir que si hacemos $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, entonces

$$|\mathcal{B}| = |\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n| < |w(X)|,$$

puesto que $w(X)$ tiene cofinalidad no numerable y de esta manera su cardinalidad es mayor a la de ω.

Pero por otro lado podemos notar que $\mathcal{B}$ es una base para X, puesto que si tomamos un abierto U de X y $x \in U$, tenemos que como $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un desarrollo, entonces existe $m \in \omega$, tal que

$$st(x, \mathcal{U}_m) \subset U,$$

lo que quiere decir que todo abierto de $\mathcal{U}_m$ que tenga a x, se queda contenido en U y ya que $\mathcal{V}_m$ es una cubierta, entonces existe un abierto V, tal que $x \in V$, por lo que como $V \in \mathcal{U}_m$, tenemos que

$$x \in V \subset U.$$

Por lo tanto con todo esto obtenemos que $\mathcal{B}$ es una base para X de menor cardinalidad que el peso de X, lo que marca una contradicción y por ende hace cierta nuestra afirmación.

Ahora, ya que hemos probado que existe nuestra cubierta $\mathcal{U}$. Vamos a tomar para cada $\alpha \in \kappa$ un $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ y vamos a crear el conjunto

$$E = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

De este modo, si hacemos para cada $n \in \omega$, $E_n = \{x_\alpha : st(x_\alpha, \mathcal{U}_n) \subset U_\alpha\}$ podemos notar que $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$, puesto que $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un desarrollo y por ende siempre existe una $n \in \omega$, tal que $st(x_\alpha, \mathcal{U}_n) \subset U_\alpha$, por lo que para todo $\alpha < \kappa$, existe $n \in \omega$, tal que $x_\alpha \in E_n$.

Luego, tenemos que como $|E| = \kappa = w(X)$, entonces existe $m \in \omega$, tal que $|E_m| = w(X)$. Y, podemos probar que este E_m es discreto, ya que si tomamos un $x_\alpha \in E_m$, entonces para todo $\beta > \alpha$, con $\beta < w(X)$, se tiene que $x_\beta \notin U_\alpha$, y para todo $\gamma < \alpha$, tal que $x_\gamma \in E_m$, tenemos que

$$x_\alpha \notin st(x_\gamma, \mathcal{U}_m),$$

puesto que $st(x_\gamma, \mathcal{U}_m) \subset U_\gamma$ y $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Lo que quiere decir que todo abierto de $\mathcal{U}_m$ que sea vecindad abierta de x_α, no tiene a x_γ. Por tanto, tenemos que $st(x_\alpha, \mathcal{U}_m) \cap E_m = \{x_\alpha\}$ y así concluimos que E_m es discreto.

Por último afirmamos que E_m es cerrado, puesto que si tomamos $x \in X \setminus E_m$, existe un $\delta < \kappa$, tal que es el mínimo ordinal que cumple que $x \in U_\delta$. Es claro que esta es una vecindad abierta tal que para todo $\alpha > \delta$, se tiene que $x_\alpha \notin U_\delta$. Además, tenemos que para todo $\beta < \delta$, tal que $x_\beta \in E_m$, pasa que $x \notin st(x_\beta, \mathcal{U}_m)$, puesto que

$$st(x_\beta, \mathcal{U}_m) \subset U_\beta.$$

Y como X es T_3, existe un abierto U, tal que es vecindad de x, pero no es vecindad de x_δ y por ende obtenemos que

$$x \in (U \cap U_\delta) \cap st(x, \mathcal{U}_m)$$

y

$$((U \cap U_\delta) \cap st(x, \mathcal{U}_m)) \cap E_m = \emptyset.$$

Es decir, E_m es nuestro cerrado discreto de cardinalidad $w(X)$. $\square$

Lema 6.2.14. *Si X es un espacio regular, entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$, donde*

$$d(X) = min\{|D| : D \text{ es denso en } X\}.$$

Demostración: Tomemos D un denso de X, tal que $|D| = d(X)$. Luego, tomemos

$$\mathcal{B} = \{int_X(cl_X(A)) : A \subset D\}$$

y notemos que $\mathcal{B}$ es una base para X, puesto que si tomamos U un abierto de X y $x \in U$, entonces tenemos que como X es un espacio regular, existe un abierto V de X, tal que $x \in V \subset cl_X V \subset U$. Además, por otro lado como D es denso tenemos que

$$cl_X(D \cap V) = cl_X(V)$$

por lo que con esto obtenemos que

$$x \in V \subset int_X(cl_X(D \cap V)) \subset U$$

con lo que queda claro que $\mathcal{B}$ es una base para X, y además por la forma en que fue construido $\mathcal{B}$ podemos ver que $|\mathcal{B}| \leq \mathbb{P}(D) = 2^{d(X)}$. $\square$

Ya con esto podemos dar el teorema en el que vamos a demostrar que las propiedades de estrella compacidad y compacidad son equivalentes en la clase de espacios de Moore. Pero, como habíamos dicho antes, vamos a requerir de la hipótesis del continuo, así que para lo siguiente se va a asumir ésta y para tener bien presente esto, vamos a escribir [CH], en cualquier enunciado que requiera de la hipótesis del continuo.

Teorema 6.2.15. *[CH] Si X es un espacio de Moore, entonces X es un espacio estrella compacto si y solo si X es un espacio compacto y metrizable.*

Demostración: Es claro que si X es un espacio compacto, entonces es estrella compacto y por ende solo nos falta demostrar la otra implicación.

Supongamos que X es un espacio estrella compacto. Por la Proposición 1.2.1, X es un espacio estrella Lindelöf y por el Teorema 6.2.4, sabemos que X es un espacio separable; es decir, existe un denso numerable $D \subset X$. Por lo que por el Lema 6.2.14, tenemos que

$$w(X) \leq 2^{\aleph_0} = \omega_1$$

pero si $w(X) = \omega_1$, obtendríamos por el Lema 6.2.13 que X tiene un cerrado discreto, tal que su cardinalidad es ω_1. Lo que a su vez nos diría por el Lema 2.2.7 que X no es estrella compacto, pero dado que esto es imposible, tenemos que

$$w(X) < \omega_1$$

lo que significa que $w(X) = \aleph_0$. Esto quiere decir que X es segundo numerable, por lo que como X también es de Moore , en particular es regular y segundo numerable, así que por el teorema de metrización de Urysohn tenemos que X es un espacio metrizable. Por lo tanto X es un espacio metrizable y estrella compacto, lo que implica que X es un espacio compacto por el Teorema 6.1.1. □

Entonces, ahora sí vamos a pasar a probar nuestra versión del Teorema 6.1.1 para espacios de Moore

Teorema 6.2.16. *[CH] En un espacio X de Moore los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) El espacio X es compacto y metrizable;

(ii) El espacio X es numerablemente compacto;

(iii) El espacio X es estrella finito;

(iv) El espacio X es estrella compacto;

(v) El espacio X es estrella numerablemente compacto.

Demostración: (i) si y solo si (iii) se demostró en el Corolario 6.2.12 y sabemos que (ii) implica (iii) siempre pasa sin importar en que clase de espacios estemos. Luego, (iv) si y solo si (v) se demostró en el Corolario 6.2.11 y por último (iv) si y solo si (i) se demostró en el Teorema 6.2.15. □

6.3. Espacios semiestratificables

En esta sección vamos presentar la clase de espacios semiestratificables. Dado que ésta no es una clase de espacios muy común, dentro del apendice de esta tesis se destina una sección donde se pueden consultar los resultados más importantes que estaremos usando sobre estos espacios. Dicho esto, en esta sección vamos a explorar las relaciones que hay entre las propiedades que hemos estado estudiando desde la clase de espacios semiestratificables. Dado que la clase de los espacios de Moore está contenida en la clase de los espacios semiestratificables (vease *A*,3,3) es normal pensar que las propiedades se van alejar aún más que en la clase de espacios de Moore. Sin embargo, vamos a tener que gran parte de los Teoremas 6.2.6 y 6.2.12 se van a seguir manteniendo.

Entonces, primero que nada, vamos a dar la definición de un espacio semiestratificable

Definición 6.3.1. *Sea X un espacio y U un abierto de X, entonces una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de cerrados en X es una semiestratificación de U si cumple:*

$$\bigcup_{n\in\omega} U_n = U.$$

Definición 6.3.2. *Sea X un espacio. Decimos que X es un espacio semiestratificable si a cada abierto de X se le puede asignar una semiestratificación de tal modo que se cumpla que si U y V son abiertos de X, tales que $U \subset V$ y $\{U_n : n \in \omega\}$, $\{V_n : n \in \omega\}$ son sus respectivas semiestratificaciones, entonces $U_n \subset V_n$ para todo $n \in \omega$.*

Teorema 6.3.3. *Si X es un espacio semiestratificable, entonces lo siguiente es equivalente:*

(i) El espacio X es estrella numerable;

(ii) El espacio X es estrella σ-compacto;

(iii) El espacio X es estrella Lindelöf.

Demostración: Sabemos que las implicaciones (i) implica (ii) y (ii) implica (iii), siempre se dan sin importar la clase de espacios en la que estemos.

Ahora, para la implicación (iii) implica (i), tomemos X, un espacio estrella Lindelöf, semiestratificable y una cubierta abierta arbitraria $\mathcal{U}$ de X. Tenemos que existe un subespacio Lindelöf $L \subset X$, tal que es núcleo de nuestra cubierta $\mathcal{U}$. Por lo que si vemos a L con la topología de subespacio, tenemos que L es un espacio semiestratificable, Lindelöf, lo que al mismo tiempo nos dice por el Teorema A.3.5 que L es un espacio hereditariamente separable y en particular separable, por lo que con esto obtenemos que X es estrella separable y por el Teorema 3.1.4 tenemos que X es un espacio estrella numerable, con lo que concluimos nuestro resultado. □

Cabe destacar que este último resultado a diferencia del Teorema 6,2,4 no tiene la propiedad de ser separable entre sus equivalencias, y esto es porque el autor de esta tesis no está seguro de si la propiedad de ser separable es equivalente a las tres propiedades del Teorema 6,3,3.

Por último, para concluir esta tesis nos faltaría ver si existe una versión del Teorema 6.2.16 para espacios semiestratificables. Para este propósito notemos que gracias los Teoremas A.3.4, y 2.1.2 podemos ver que las primeras tres propiedades del teorema 6.2.16 siguen siendo equivalentes en espacios semiestratificables. Y por otro lado, gracias a los Teoremas 1.2.1 y A.3.4 sabemos que las propiedades cuatro y cinco de 6.2.16 también son equivalentes entre sí en la clase de espacios semiestratificables. Además, sabemos que siempre se cumple que las primeras tres propiedades de 6.2.16 implican la cuarta y quinta propiedad de este mismo teorema. Por lo que si deseamos ver si se sigue valiendo el Teorema 6,2,16 tendríamos que demostrar que la estrella compacidad numerable o la estrella compacidad implica cualquiera de las primeras tres propiedades del Teorema 6.2.16. Sin embargo, el autor de esta tesis no logró demostrar eso, ni tampoco logró demostrar que no se implicara. Por tanto, solo podemos dar los siguientes resultados parciales.

Corolario 6.3.4. *Si X es un espacio semiestratificable, entonces X es un espacio estrella numerablemente compacto si y solo si es estrella compacto.*

Demostración: Es directo de la Proposición 1.2.1 y del Teorema A.3.4. □

Corolario 6.3.5. *Si X es un espacio semiestratificable, entonces lo siguiente es equivalente*

(i) El espacio X es compacto;

(ii) El espacio X es numerablemente compacto;

(iii) El espacio X es estrella finito.

Demostración Es directo de los Teoremas A.3.4 y 2.1.2. □

Apéndice A

Vamos a comenzar nuestro apéndice con algunos de los resultados más importantes sobre los espacios de Mrówka y espacios Pseudocompactos. Cabe destacar que en el transcurso de este apéndice algunos de los teoremas no tendrán demostración y esto es porque requieren mucha teoría previa que sale totalmente del contexto de esta tesis. Sin embargo, si el lector así lo desea, puede consultar sus pruebas en sus respectivas referencias.

A.1. Espacios Pseudocompactos y espacios de Mrówka

Definición A.1.1. *Decimos que un espacio X es un espacio pseudocompacto si para toda función continua*

$$f : X \to \mathbb{R},$$

se tiene que $f[X]$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Teorema A.1.2. *Si un espacio X es numerablemente compacto, entonces es pseudocompacto.*

Demostración: Procederemos por contrapositiva. Sea X un espacio que no es pseudocompacto. Como X no es pseudocompacto, existe una función f tal que $f[X]$ no es acotado en $\mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que no es acotado por arriba. De este modo podemos tomar un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \geq 0$, y después de esto podemos tomar $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \geq max\{1, f(x_0)\}$. Por tanto, siguiendo de manera inductiva, en general vamos a tomar $x_{n+1} \in X$ tal que

$$f(x_{n+1}) \geq max\{n + 1, f(x_n)\}.$$

Si tomamos el conjunto

$$A = \{f(x_n) : n \in \omega\}$$

tenemos que A es un subconjunto cerrado, infinito y discreto de $f[X]$, por lo que $f[X]$ no es numerablemente compacto, y como la propiedad de compacidad numerable se mantiene bajo imágenes continuas, podemos concluir que X tampoco es numerablemente compacto.

Teorema A.1.3. *Si X es un espacio normal, entonces X es pseudocompacto si y sólo si X es un espacio numerablemente compacto.*

Demostración: Supongamos que X no es numerablemente compacto. Existe un conjunto infinito numerable $A \subset X$ tal que A es cerrado y discreto en X. Dado que A es numerable, lo podemos enumerar como

$$A = \{x_n : n \in \omega\}$$

y como A es discreto, toda función desde A es continua, por lo que en particular

$$f : A \to \mathbb{R}$$

dada por $f(x_n) = n$ para todo $n \in \omega$, es una función continua y no acotada. Ahora, como A es cerrado y X es normal, podemos aplicar el teorema de extensión de Tietze-Urysohn y de este modo encontramos una función continua g tal que

$$g : X \to \mathbb{R}$$

y la restricción de g al conjunto A es igual a f. Por lo tanto, notemos que g es una función continua de X a $\mathbb{R}$ tal que no es acotada (ya que f no lo es), lo que nos dice que X no es pseudocompacto. De este modo, por contrapositiva concluimos la parte de la necesidad del teorema.

Por otro lado, la parte de la suficiencia ya está demostrado en el Teorema $A,1,2$

Teorema A.1.4. *[1] Existe una familia casi ajena de ω que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Teorema A.1.5. *Cada familia casi ajena de ω está contenida en una familia casi ajena maximal (MAD) de ω.*

Demostración: Sean $\mathcal{A}$ una familia casi ajena de ω y $\mathfrak{A}$ el conjunto de todas las familias casi ajenas de ω que contienen a $\mathcal{A}$. Podemos ver que $(\mathfrak{A}, \subset)$ es un COPO y que

$$\mathfrak{A} \neq \emptyset,$$

puesto que en particular $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Si tomamos $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ tal que $(\mathfrak{C}, \subset)$ es una cadena, podemos afirmar que

$$\bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{A},$$

ya que es claro que $\mathcal{A} \subset \bigcup \mathfrak{C}$ (puesto que $\mathcal{A}$ está contenido en cada elemento de $\mathfrak{C}$). Además, si tomamos $A, B \in \mathfrak{C}$, tenemos que existe $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ tal que $A, B \in \mathcal{C}$ por lo que la cardinalidad de $A \cap B$ es finita, y de este modo obtenemos que

$$\bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{A}.$$

Por último, como $\bigcup \mathfrak{C}$ contiene a cualquier elemento de $\mathfrak{C}$, tenemos que es un supremo de $\mathfrak{C}$.

Con todo esto podemos ver que se cumplen todas las hipótesis del lema de Zorn, por lo que existe un elemento maximal en $\mathfrak{A}$. Es decir, existe una familia casi ajena maximal que contiene a $\mathcal{A}$ □

Teorema A.1.6. *[1] Para toda familia casi ajena $\mathcal{A}$ de ω se cumplen los siguientes enunciados:*

- *El espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es primero numerable;*
- *El espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto;*
- *ω es denso en $\Psi(\mathcal{A})$;*
- *$\mathcal{A}$ es cerrado y discreto en $\Psi(\mathcal{A})$;*
- *Si $\mathcal{A}$ es infinito, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es numerablemente compacto;*
- *El espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es 0-dimensional;*
- *El espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es Tychonoff;*
- *La famililа $\mathcal{A}$ es una familia maximal casi ajena si y sólo si $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio pseudocompacto.*

A.2. Duplicado de Alexandroff

Ahora vamos a pasar a ver la definición del duplicado de Alexandroff y de la función natural del duplicado de Alexandroff, así como un resultado importante que se ocupa bastante a lo largo de la tesis.

Definición A.2.1. *Dado un espacio topológico (X, τ), definimos el espacio topológico $A(X)$ como el espacio que tiene como conjunto base a*

$$X \times \{0, 1\}$$

con la topología inducida por el siguiente sistema de vecindades:

$$\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}, \text{ si } x = \langle y, 1\rangle \text{ para alguna } y \in X,$$

y

$$\mathcal{B}_x = \{U \times \{0\} \cup ((U \times \{1\}) \setminus F \times \{1\}) : U \in \tau, x \in U \text{ y } F \in [U]^{<\aleph_0}\}$$

si $x = \langle y, 0\rangle$ para alguna $y \in X$, en donde $[U]^{<\aleph_0}$ denota el conjunto de los subconjuntos finitos de U.

Entonces para que quede claro que este sistema de bases locales de vecindades sí nos induce una topología, vamos a demostrarlo. Para esto primero recordemos las tres propiedades que necesitamos para que un sistema de bases locales de vecindades nos induzca una topología:

1. *Para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ y para cada $V \in \mathcal{B}_x$ se tiene que $x \in V$.*
2. *Para cualesquiera V_1, $V_2 \in \mathcal{B}_x$, existe un $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$.*
3. *Si $x \in V \in \mathcal{B}_y$, entonces existe $V' \in \mathcal{B}_x$ tal que $V' \subset V$.*

Entonces, ahora sí, pasemos a demostrar estas tres propiedades.

Primero, por como fue definido el sistema de bases locales de vecindades, tenemos que para cada $x \in A(X)$, $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ y que si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$. Por lo que con esto hemos probado (1).

Luego, para $x = \langle y, 0\rangle$ tomemos $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, y así

$$V_1 = (U_1 \times \{0\}) \cup ((U_1 \times \{1\}) \setminus (F_1 \times \{1\}))$$

y

$$V_2 = (U_2 \times \{0\}) \cup ((U_2 \times \{1\}) \setminus F_2 \times \{1\}).$$

Para algunos $U_1 \cap U_2 \in \tau, F_1 \in [U_1]^{<\aleph_0}$ y $F_2 \in [U_2]^{<\aleph_0}$ tales que $y \in U_1, U_2$. Con esto podemos ver que

$$V_1 \cap V_2 = ((U_1 \cap U_2) \times \{0\}) \cup (((U_1 \cap U_2) \times \{1\}) \setminus (F_1 \cup F_2) \times \{1\})),$$

con lo cual $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}_x$. Por otro lado, si $x = \langle y, 1\rangle$, entonces este mismo resultado es trivial, pues $\mathcal{B}_x$ sólo tiene un elemento. Así (2) se cumple.

Ahora, si tomamos x, x' distintos tales que $x \in V \in \mathcal{B}_{x'}$, tenemos que si $x = \langle y, 1\rangle$ para algún $y \in X$, pasa que $\{x\} \subset V$ y $\{x\} \in \mathcal{B}_x$. Por otro lado, si $x = \langle y, 0\rangle$, observemos que $x' = \langle y', 0\rangle$, pues x y x' son distintos y $x \in V \in \mathcal{B}_{x'}$. Entonces, V es de la siguiente forma

$$V = (U \times \{0\}) \cup ((U \times \{1\}) \setminus\ (F \times \{1\})).$$

Por lo que basta tomar un básico U' de X tal que $U' \subset U$ y $y \in U'$, pues si tomamos a

$$V' = (U' \times \{0\}) \cup ((U' \times \{1\}) \setminus\ ((F \times \{1\}) \cup \{y\} \times \{1\}))$$

tenemos que $V' \subset V$ y $V' \in \mathcal{B}_x$. Así que con esto obtenemos que también se cumple (3)

De esta manera queda demostrado que la colección $\mathcal{B} = \{B_x : x \in A(X)\}$ es un sistema de vecindades locales de X, y la topología generada por $\mathcal{B}$, será la topología que le daremos al duplicado de Alexandroff.

Definición A.2.2. *Dado X un espacio topológico, definimos la función natural de X al duplicado de Alexandroff de X como la función*

$$f : A(X) \to X$$

la cual está dada por $f(\langle x, i\rangle) = x$ (donde $i \in \{0, 1\}$).

Teorema A.2.3. *La función natural del duplicado de Alexandroff es una función sobreyectiva, continua y perfecta*

Demostración: Sea X un espacio topológico, $A(X)$ su duplicado de Alexandroff y

$$f : A(X) \to X,$$

la función natural del duplicado de Alexandroff de X.

Esta función es una función compacta pues las fibras de f siempre son finitas (de hecho esta es una función 2 a 1 como mucho). Ahora toca demostrar que f es cerrada. Para esto tomemos $C \subset A(X)$ cerrado y tomemos $x \notin f[C]$, entonces $\langle x, 0\rangle \notin C$, por lo que existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y

$$((U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus F \times \{1\})) \cap C = \emptyset$$

para algún $F \subset U$ finito. Además como $\langle x, 1\rangle \notin C$, entonces

$$(U \times \{0\} \cup ((U \times \{1\}) \setminus ((F \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}))) \cap C = \emptyset,$$

y como X es Hausdorff, existe un abierto V de X tal que $x \in V$, $V \subset U$ y $V \cap (F \setminus \{x\}) = \emptyset$. Entonces es claro que $V \times \{0, 1\} \cap C = \emptyset$, por lo que $V \cap f[C] = \emptyset$ y de este modo $f[C]$ es cerrado en X.

Por último, probaremos que f es continua, lo cual es muy fácil de ver, pues si tomamos $U \subset X$ tal que U es abierto en X, entonces

$$f^{-1}[U] = (U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\})$$

lo cual evidentemente es abierto en $A(X)$ y por ende tenemos que f es una función continua.

Por tanto f es una función perfecta, sobreyectiva y continua de un espacio no estrella compacto a un espacio estrella compacto. □

A.3. Espacios de Moore y espacios semiestratificables

Por último pasaremos a ver algunos resultados importantes sobre los espacios de Moore y los espacios semiestratificables, mismos cuyas pruebas se podrán consultar en [4]

Teorema A.3.1. *Si X es un espacio Metrizable, entonces X es un espacio de Moore*

Teorema A.3.2. *Si X es un espacio de Moore, Lindelöf, entonces X es un espacio metrizable*

Teorema A.3.3. *Si X es un espacio de Moore, entonces X es un espacio semiestratificable.*

Teorema A.3.4. *Si X es un espacio semiestratificable, entonces X es un espacio numerablemente compacto si y solo si es compacto.*

Teorema A.3.5. *Si X es un espacio semiestratificable, entonces lo siguiente es equivalente:*

(i) El espacio X es Lindelöf.

(ii) El espacio X es hereditariamente separable.

(iii) Todo subconjunto no numerable tiene un punto de acumulación.

Bibliografía

[1] Ámano Patiño, N.G., Algunas propiedades de los espacios de Mrówka, Tesis de1 Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[2] Engelking, R., General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] Porter, J. y Woods, R., Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces, 1a edición Springer-Verlag, Nueva York , 1988.

[4] Tovar Acosta, E.E., Espacios semiestratificables, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2019.

[5] Song, Y.K, On C-starcompact spaces, Mathematica Bohemica, 133 (3), 2006, 259-266.

[6] Song, Y.K., On K-starcompact spaces, Bulletin of the Malaysian Mathematical Science Society, 30 (1), 2007, 59-64.

[7] Song, Y.K., On $L-$starcompact spaces, Czechoslovak math, J., 56 (2), 2006, 781-788.

[8] Song, Y.K., Remarks on star covering properties in pseudocompact spaces, Mathematica Bohemica, 138 (2), 2013, 165-169.

[9] Song, Y.K., On relative star-Lindelöf spaces, New Zealand Journal of Math, 34, 2005, 159-163.

[10] Song, Y.K., On σ-starcompact spaces, Applied General Topology, 9 (2), 2008, 293-299.

[11] van Douwen, E., Reed, G.M., Roscoe, A.W., Tree I.J., Star covering properties, Topology Appl 39., 1991, 71-103.