



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS SIMETRÍAS DE LAS TESELACIONES
EN EL PLANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

DANIEL GONZÁLEZ CASANOVA AZUELA



TUTOR

DR. VINICIO ANTONIO GÓMEZ
GUTIÉRREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi tutor Vinicio Gómez por su incondicional apoyo y consejo,
y a mi querida familia.

Índice

Introducción	5
Parte I: Teoría de teselaciones	6
1. Primeras teselaciones	7
2. Grupos de simetrías de teselaciones	18
2.1 Teselaciones de roseta	22
2.2 Frisos	26
2.3 Teselaciones periódicas	33
Parte II: Los 17 grupos de simetrías de teselaciones periódicas	37
3. Resultados geométricos preliminares	38
4. Presentaciones con generadores y relaciones para grupos	41
5. Análisis de los 17 grupos de simetrías de teselaciones periódicas	42
Referencias	94

Introducción

Esta tesis surgió a partir de un Seminario de Geometría de la Facultad de Ciencias donde estudié por primera vez el tema de las teselaciones con Vinicio. Estos objetos llamaron mucho mi atención por su aspecto gráfico, y mucho más que escribir una tesis sobre teoremas y demostraciones, me dediqué a elaborar explicaciones visuales de las propiedades geométricas de las teselaciones.

Quizás una de las razones por las que me interesaron tanto las teselaciones fue porque las conocía en el trabajo de M. C. Escher. Muchas de las ilustraciones que hice fueron usando sus dibujos, y durante alguna parte de la investigación me dediqué a explorar el vínculo entre Escher y las matemáticas. Quizás la mejor referencia sobre este tema es la obra de Doris Schattsneider, cuyo trabajo fue usado no sólo para las cuestiones relacionadas con Escher sino también para reforzar la teoría [2][8].

La intención inicial era hacer un trabajo sobre teselaciones usando las ilustraciones de Escher. Con el tiempo se dividió en dos partes, la primera con una introducción a la teoría de las teselaciones, y la segunda con un recorrido por los 17 grupos de simetrías que se pueden usar para clasificar las teselaciones de Escher.

La primera parte está basada en los dos primeros capítulos del libro *Tilings and Patterns* de Grünbaum y Shepard [5], y la segunda, que es más formal en cuanto a las construcciones geométricas, está basada en un capítulo de *Transformation Geometry* de George E. Martin [7].

Originalmente queríamos incluir en la Parte II una gráfica de Cayley de cada grupo de simetrías. Estas gráficas, además de ser una descripción de la estructura algebraica de los grupos, son teselaciones en sí mismas. Coxeter da un ejemplo de cada una en su libro *Generators and Relators for Discrete Groups* [1].

Parte I: Teoría de teselaciones

En esta parte desarrollaremos las herramientas que necesitamos para responder las siguientes preguntas: ¿qué son las teselaciones y cómo podemos distinguir unas de otras?

Comenzaremos construyendo una definición matemática de teselación que se ajuste a nuestra idea intuitiva de lo que debe ser, y luego dirigiremos nuestros esfuerzos a explicar qué es el grupo de simetrías de una teselación. Dejaremos que nuestro interés nos conduzca naturalmente a las teselaciones formadas por polígonos, que son en muchos sentidos las más fáciles de estudiar.

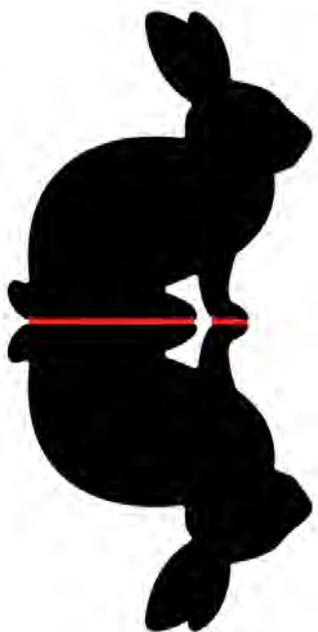
En el segundo capítulo analizaremos los distintos grupos de simetrías de las teselaciones. Describiremos la estructura algebraica de estos grupos y veremos los rasgos geométricos que tienen las teselaciones que les corresponden. Nos encontraremos con tres grandes familias: teselaciones de roseta, frisos y teselaciones periódicas.

1. Primeras teselaciones

Una *teselación* es un arreglo de figuras, llamadas *teselas*, que cubren el plano sin dejar espacios vacíos ni superponerse unas con otras. Los rompecabezas son excelentes ejemplos de teselaciones, y también los panales de abejas. Una pared de ladrillos puede ser pensada como una teselación, así como muchos mosaicos artesanales de culturas de todo el mundo.

Nuestro punto de partida será traer esta idea al lenguaje de las matemáticas. Diremos que una teselación es una colección numerable de conjuntos cerrados $T = \{T_1, T_2, T_3 \dots\}$ tal que su unión es igual a todo el plano y sus elementos tienen interiores ajenos dos a dos.

La condición de que la cantidad de teselas sea numerable excluye la posibilidad de que éstas sean curvas o simplemente puntos. Hay otros casos extraordinarios, como por ejemplo en el que las teselas son figuras no acotadas, que debemos excluir de nuestra definición. Agregaremos la condición de que la frontera de cada tesela sea una curva cerrada simple, es decir, una curva que no se autointerseca salvo por los puntos inicial y final, que son el mismo.



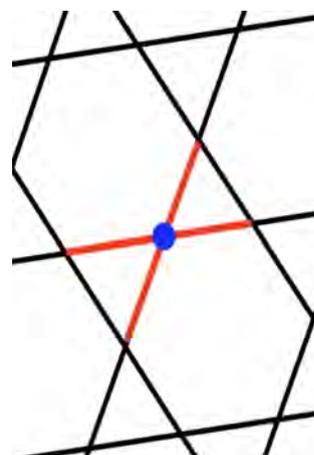
Como las teselas deben tener interiores ajenos, la intersección de dos de ellas, a no ser que fuera vacía, debe estar contenida en la frontera de ambas, y por la observación anterior ésta debe ser una curva. Los conjuntos contenidos en curvas pueden ser familias de curvas o puntos.

En la figura que del lado izquierdo vemos dos teselas con forma de conejo. La intersección de ellas está resaltada en color rojo, y aunque está contenida en la frontera de ambas, no es una sola curva, sino que es la unión de dos segmentos horizontales.

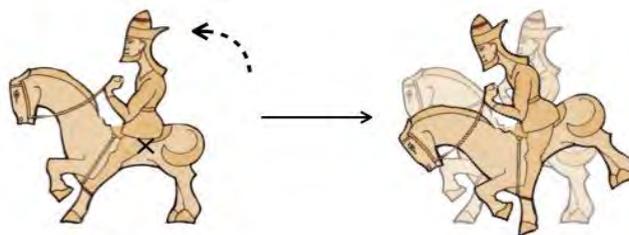
Estudiaremos teselaciones en las que no ocurren casos de este estilo, así que agregaremos a nuestra definición que la intersección de dos teselas sea una sola curva o un solo punto. Cuando se trate de una curva la llamaremos *arista*, y cuando sea un punto, lo llamaremos *vértice*.

En la figura del lado derecho vemos una teselación que tiene resaltados un vértice y las cuatro aristas que inciden en él. Es fácil ver que una arista siempre conecta dos vértices, y que en un vértice inciden por lo menos tres aristas y tres teselas.

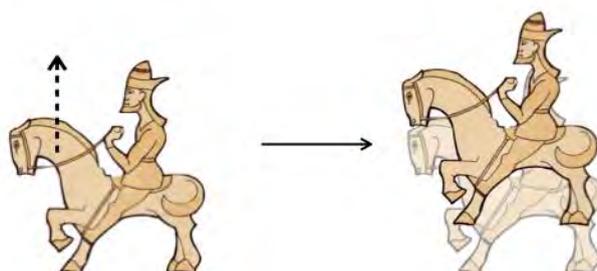
La *valencia* de un vértice es el número de aristas que inciden en él. Agregaremos una última condición a nuestra definición de teselación: para evitar que en un vértice incida una infinidad de teselas (cada vez más pequeñas), necesitamos que la valencia de cada vértice sea una cantidad finita.



Estas condiciones son suficientes para nuestra definición de teselación. Ahora trataremos de definir el concepto de grupo de simetrías, para lo cual comenzaremos platicando sobre las *isometrías*.

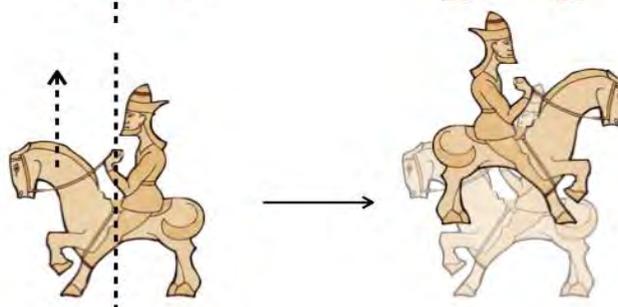
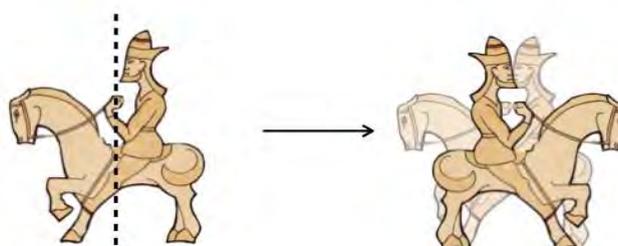


Una isometría es una función $\sigma: E^2 \rightarrow E^2$ del plano euclidiano en sí mismo que preserva distancias. Es decir, que para cualesquiera dos puntos A y B , la distancia entre ellos es igual a la distancia entre sus imágenes $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$.



Podemos clasificar todas las isometrías del plano euclidiano en cuatro tipos [5]:

1. Rotaciones alrededor de un punto por cierto ángulo
2. Traslaciones en alguna dirección y con cierta magnitud
3. Reflexiones respecto a una línea
4. Reflexiones deslizadas



En la figura del lado derecho vemos un ejemplo de cómo actúa cada una sobre la figura de un jinete, presentadas en el orden en el que las enumeramos.

El cuarto tipo, reflexiones deslizadas, son las isometrías que resultan de reflejar respecto a una línea y luego trasladar en una dirección paralela a esa misma línea. Más adelante las estudiaremos con detalle.

Recordemos que un *grupo* es una estructura algebraica conformada por un conjunto G y una operación binaria $\cdot: G \times G \rightarrow G$ tales que:

1. Para cualesquiera elementos $a, b, c \in G$ se satisface que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. Existe un elemento $e \in G$ tal que para cualquier $x \in G$, $e \cdot x = x \cdot e = x$.
3. Para cualquier elemento $a \in G$ existe otro elemento $a' \in G$ tal que $a \cdot a' = a' \cdot a = e$.

Ahora consideremos una figura cualquiera F en el plano euclidiano. Una simetría de F es una isometría $\sigma: E^2 \rightarrow E^2$ tal que $\sigma(F) = F$. Resulta que la colección de todas las simetrías de

F junto con la operación de composición de funciones es un grupo en el sentido que acabamos de explicar, y lo denotaremos por $S(F)$. Para extender este concepto al caso de una teselación T , diremos que σ es una simetría de T si para cualquier tesela T_1 existe otra tesela T_2 tales que $\sigma(T_1) = T_2$.

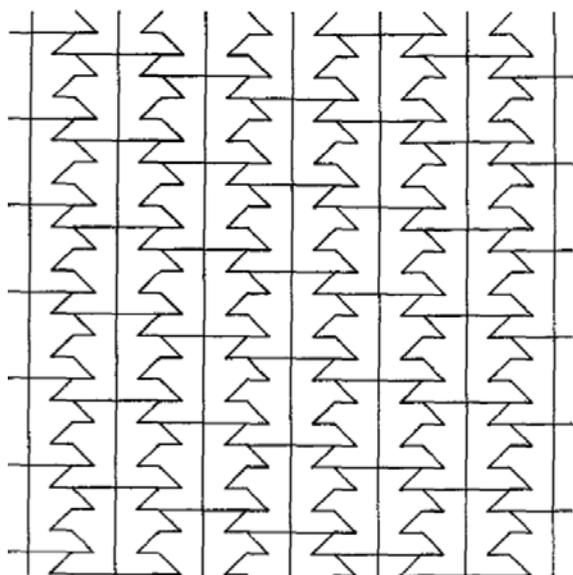
De acuerdo a esta definición, el grupo de simetrías $S(T)$ está equipado con una acción sobre T . Recordemos qué quiere decir esto.

En general, para un conjunto X y un grupo (G, \cdot) decimos que una función $*$: $G \times X \rightarrow X$ es una *acción* si $e*x = x$ y $(g \cdot h)*x = g*(h*x)$, donde g y h son elementos cualquiera de G , e es el elemento neutro y x es cualquier elemento de X [4]. Es fácil ver que estas dos condiciones se cumplen para el caso de una teselación y su grupo de simetrías.

Consideremos ahora una tesela T_1 en alguna teselación T . Llamaremos la *órbita* de T_1 a la colección de teselas que obtenemos cuando le aplicamos todas las simetrías de $S(T)$, es decir, al conjunto $\{\sigma(T_1) : \sigma \in S(T)\}$. La colección de órbitas resulta ser una partición del conjunto de teselas, de manera que se puede dar una relación de equivalencia donde cada órbita es una *clase de transitividad*.

Cuando una teselación tiene sólo una clase de transitividad, todas las teselas tienen la misma forma y tamaño, ya que para cualesquiera dos hay una simetría que envía una en la otra. Interesantemente, lo contrario no necesariamente es cierto: hay teselaciones cuyas teselas tienen todas la misma forma y tamaño, pero hay más de una clase de transitividad.

La siguiente figura es un ejemplo de esto [5]. Es claro que todas las teselas son copias de una misma figura, pero no todas pertenecen a la misma clase de transitividad. Para ver esto, basta encontrar dos teselas que no se puedan relacionar mediante una simetría de la teselación. ¿Puedes encontrarlas?



El hecho de que todas las teselas tengan la misma forma y tamaño quiere decir que son congruentes entre sí, o bien que para cualesquiera dos teselas de T existe una isometría que envía una en la otra. El detalle está en si esta isometría es una simetría de T .

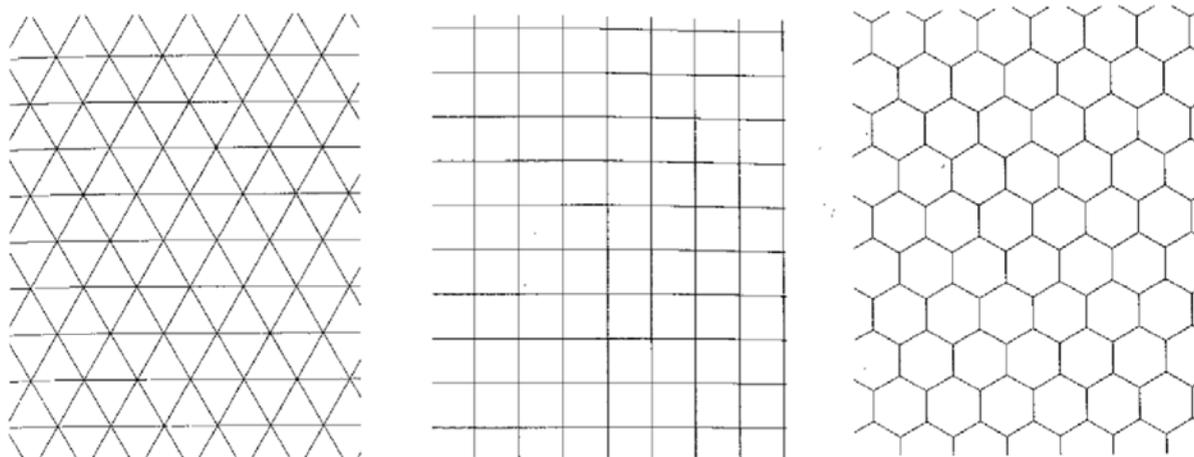
Para distinguir entre estos dos casos, diremos que una teselación con una sola clase de transitividad es *isohédrica* o *transitiva en las teselas*. El concepto se extiende a *k-isohédrica* para k clases de transitividad.

Una teselación es *monohédrica* cuando todas las teselas tienen la misma forma y tamaño, o *k-hédrica* cuando hay k distintas teselas de T tales que cualquier otra es congruente a una de esas k .

Como las simetrías de una teselación son funciones que están definidas en todo el plano, también podemos considerar cómo actúan sobre los conjuntos de vértices y las aristas de una teselación. Esto nos permite definir las correspondientes clases de transitividad, y obtenemos dos conceptos análogos: diremos que una teselación es *isogonal* cuando tiene una única clase de transitividad para vértices, e *isotaxal* cuando tiene una única clase de transitividad para aristas.

Un último concepto relacionado a clases de transitividad se usa para definir un tipo de teselaciones, llamadas *teselaciones regulares*. Una *bandera* es una triada (V, E, T) que consiste de un tesela T , una arista E contenida en la tesela T , y un vértice V contenido en la arista E . Las *teselaciones regulares* son aquellas para las cuales hay sólo una clase de transitividad en las banderas.

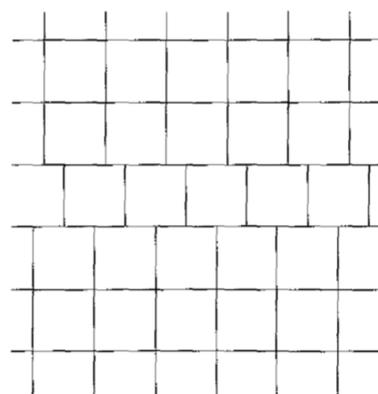
Salvo por la orientación y el tamaño de las teselas, resulta ser que hay sólo tres teselaciones regulares [5]:



Estas tres teselaciones son monohédricas y sus teselas son polígonos regulares. De hecho, son las únicas tres teselaciones monohédricas formadas por polígonos regulares que son *arista con arista*. Este último término significa que el lado de cualquier polígono es una arista de la teselación, y simplemente nos sirve para descartar arreglos como el que se muestra del lado derecho [5].

Complicando un poco la situación, podemos considerar las teselaciones arista con arista cuyas teselas son polígonos regulares de diferentes tipos. Para clasificarlas, observaremos la estructura de los vértices. Supongamos que en un vértice inciden r polígonos regulares, cada uno con n_1, n_2, \dots, n_r lados.

Como el ángulo interior en cualquiera de las esquinas de un polígono regular de n lados es $(n-2)\pi/n$, tenemos la siguiente igualdad:

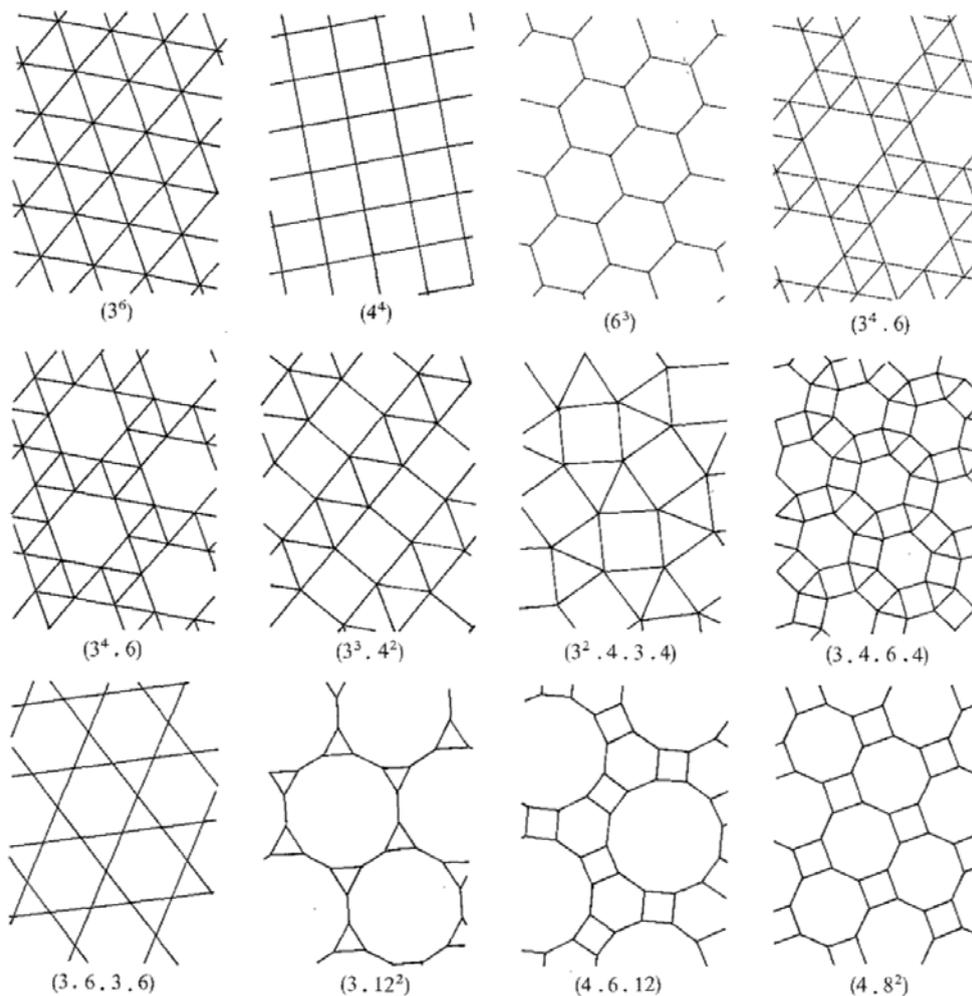


$$\frac{n_1-2}{n_1} + \frac{n_2-2}{n_2} + \dots + \frac{n_r-2}{n_r} = 2$$

Existen 17 elecciones de números enteros n_1, n_2, \dots, n_r que solucionan esta ecuación [5], cada uno representando una combinación de polígonos regulares que se pueden acomodar alrededor de un vértice. Resulta que para cuatro de esas combinaciones hay dos maneras distintas de ordenar los polígonos, así que hay en total 21 combinaciones diferentes.

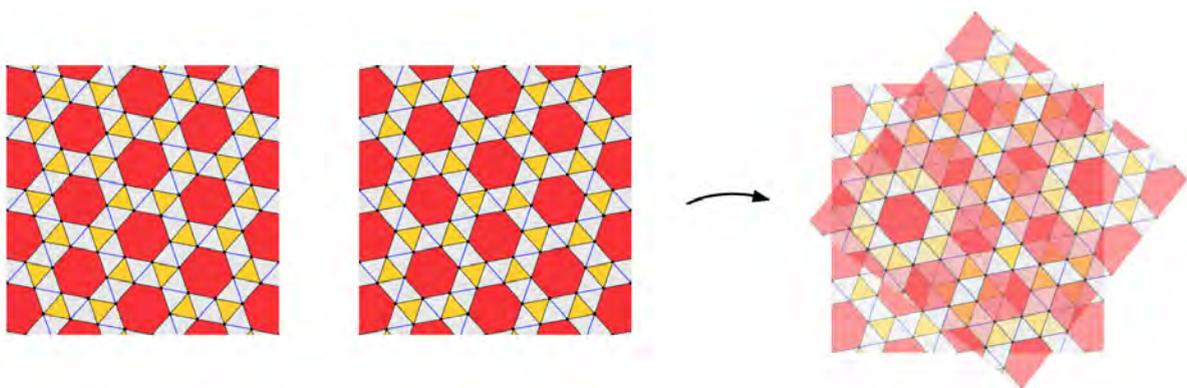
Esta última observación nos permite definir el *tipo de vértice* como la combinación que le corresponde a un vértice tomando en cuenta el orden de los polígonos, que denotaremos por $(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)$, usando exponentes cuando sea posible para simplificar la notación.

Este razonamiento describe cómo pueden ser los vértices de las teselaciones arista con arista cuyas teselas son polígonos regulares. Ésta es una familia muy grande de teselaciones, pero resulta que si agregamos el requerimiento de que todos los vértices sean del mismo tipo, existen sólo 11 posibilidades [5]. Un ejemplo de cada una se muestra en la continuación [5] (de hecho en la figura hay 12 teselaciones, en breve explicaremos por qué).

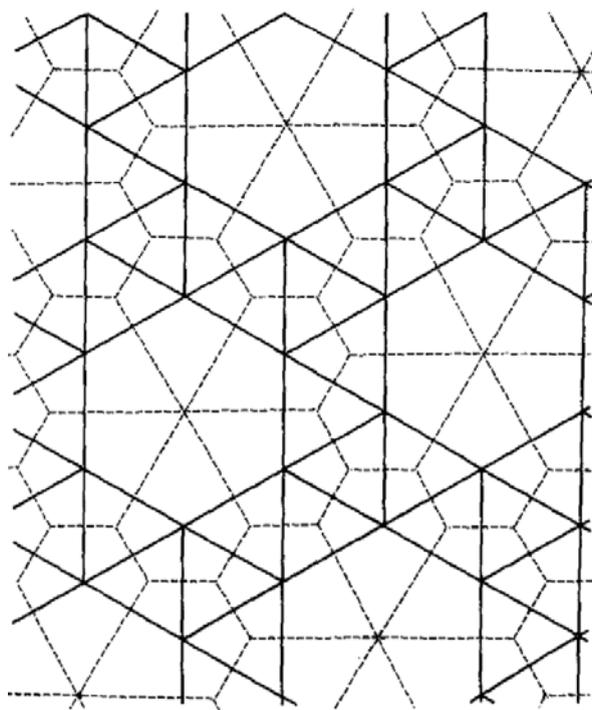


Estas teselaciones se conocen comúnmente como teselaciones *Arquimedianas*, *semirregulares* o *uniformes*. El término uniforme hace referencia a una propiedad que no es evidente: no sólo los vértices son todos del mismo tipo, sino que son teselaciones isogonales, es decir, que cualesquiera dos vértices se pueden relacionar mediante una simetría de la teselación.

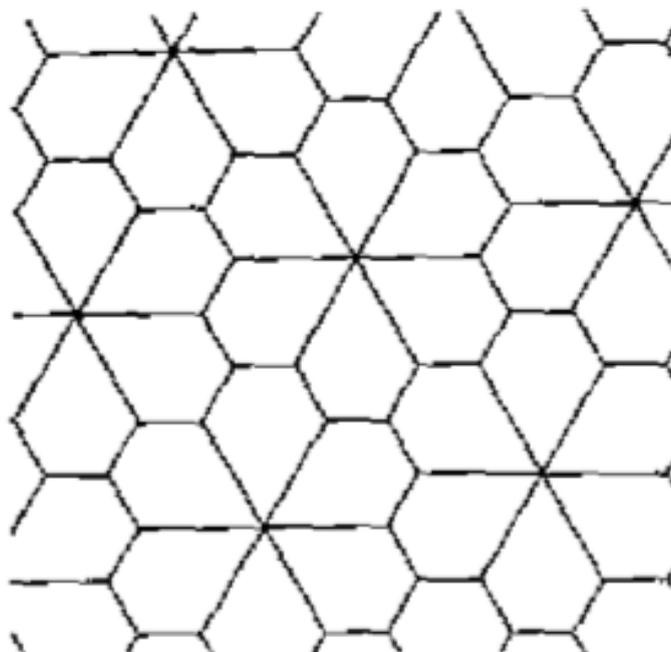
La teselación con tipo de vértice $(3^4.6)$ aparece dos veces porque no es equivalente a su imagen bajo alguna reflexión. Esto quiere decir que la teselación y su imagen especular no se pueden sobreponer de tal forma que coincidan las teselas, como vemos a en la siguiente figura [12]:



Ahora fijemos nuestra atención en la teselación $(3^4.6)$. Si consideramos un punto en el centro de cada polígono y dibujamos una línea entre dos de ellos si las teselas que les corresponden comparten una arista, obtenemos el siguiente resultado [5]:



Las líneas negras corresponden a la teselación con la que comenzamos, y las líneas punteadas son el resultado de nuestra construcción. Si quitamos las líneas negras, tenemos la siguiente figura [5]:



El resultado es una teselación monohédrica cuyas teselas son pentágonos. No puede ser Arquimideana, ya que los pentágonos que la conforman no son polígonos regulares y además tiene dos diferentes tipos de vértices.

Observemos que el ángulo entre cualesquiera dos aristas que inciden en cada vértice es el mismo. En general, diremos que un vértice es *regular* cuando esto sucede, es decir, cuando n aristas inciden en él y el ángulo entre cualesquiera dos de ellas es $2\pi/n$.

Consideremos un polígono en una teselación monohédrica con r vértices regulares, cada uno con valencia v_1, v_2, \dots, v_r . Por la observación anterior, cada uno de los ángulos internos debe medir $2\pi/v_i$, y como la suma de los ángulos internos de un polígono de r lados es $(r - 2)\pi$, tenemos la siguiente ecuación [5]:

$$\frac{2\pi}{v_1} + \frac{2\pi}{v_2} + \dots + \frac{2\pi}{v_r} = (r - 2)\pi$$

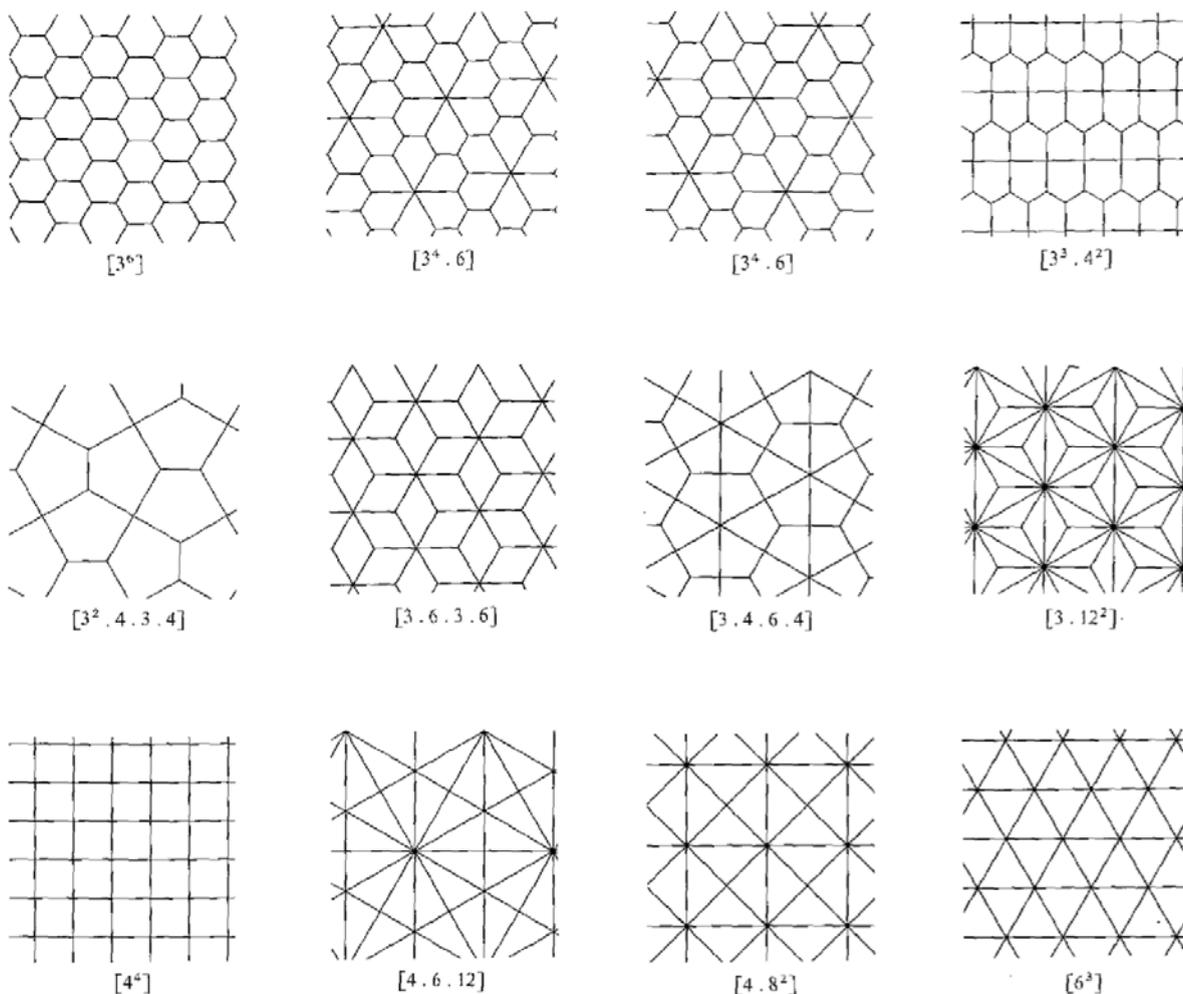
Reacomodando términos, obtenemos que:

$$\frac{v_1 - 2}{v_1} + \frac{v_2 - 2}{v_2} + \dots + \frac{v_r - 2}{v_r} = 2$$

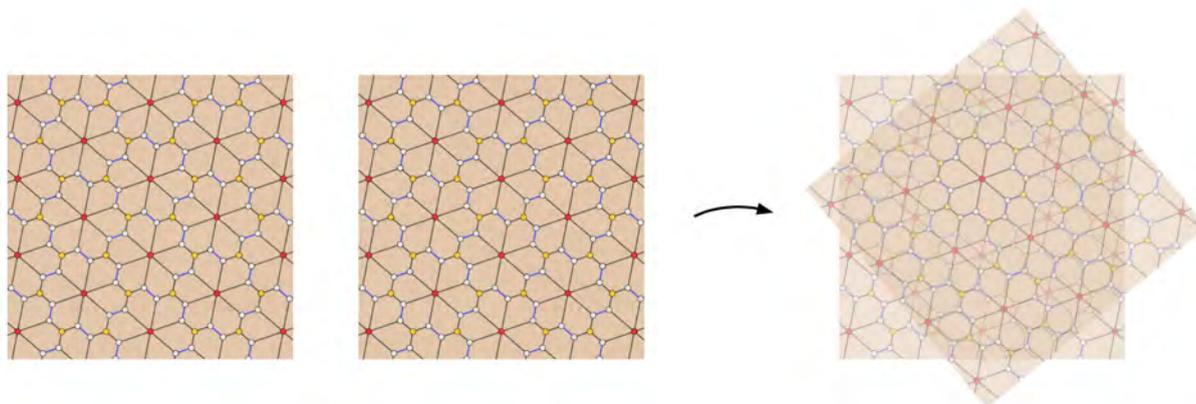
Esta expresión es casi idéntica a la que obtuvimos cuando analizamos el caso de las teselaciones Arquimedianas, sustituyendo los valores del número de lados de cada polígono por la valencia de los vértices.

De hecho, el mismo razonamiento nos lleva a concluir que existen exactamente 11 teselaciones monohédricas con vértices regulares. Cada una de ellas está determinada por la valencia en cada uno de sus vértices, que se puede representar con el símbolo $[v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_r]$.

A continuación mostramos una figura [5] con estas 11 teselaciones, que se conocen como las teselaciones de Laves. Intercambiando el concepto de polígono regular por el de vértice regular, y el de vértices del mismo tipo por polígonos del mismo tipo (teselación monohédrica), estas teselaciones son el objeto dual al de las teselaciones Arquimedianas. Cada una se puede construir a partir de una teselación Arquimediana mediante el proceso que hicimos con la teselación $(3^4 \cdot 6)$, y viceversa.



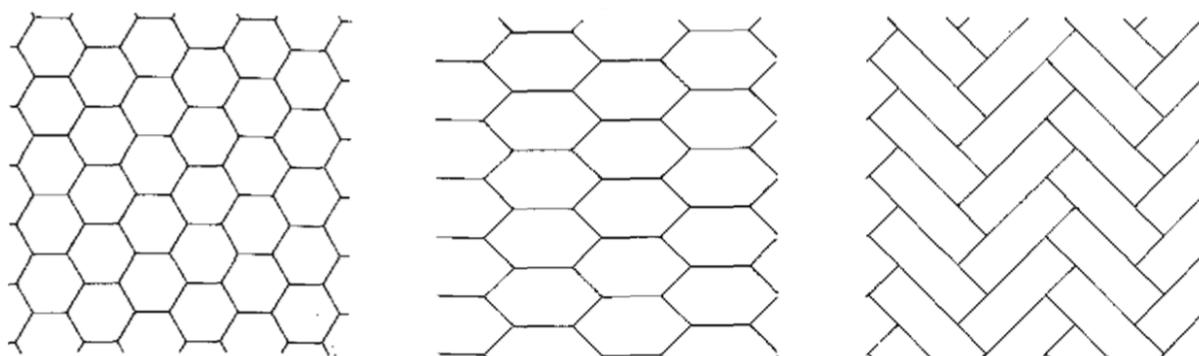
Observemos que nuevamente hay dos representaciones para esta teselación [3⁴.6] , ya que no es equivalente a su imagen especular [10]:



Así como las teselaciones Arquimedianas son isogonales, las teselaciones de Laves son isohédricas, es decir, cualesquiera dos teselas se pueden asociar mediante una simetría de la teselación.

Las teselaciones Arquimedianas y las teselaciones de Laves son particularmente fáciles de construir por las nociones de polígonos regulares y vértices regulares. Para ampliar nuestro estudio sobre teselaciones, nos gustaría considerar arreglos con más libertades geométricas.

Una manera natural de hacer esto es tomar como base las teselaciones que ya conocemos y tratar de modificarlas sin que se pierda la propiedad fundamental que nos permitió clasificarlas. Por ejemplo, podemos tomar la teselación regular de hexágonos y modificarla como se muestra a continuación [5]:



Aunque las dos teselaciones de la derecha perdieron la regularidad tanto en los vértices como en los polígonos que las conforman, todas sus teselas tienen la misma valencia en cada uno de sus vértices. Llamaremos a las teselaciones con esta propiedad *homogéneas*.

Igual que para las teselaciones de Laves, una teselación homogénea cuyas teselas tienen r vértices con valencias v_1, v_2, \dots, v_r queda representada por el símbolo $[v_1, v_2, \dots, v_r]$.

Además de la homogeneidad, las tres teselaciones de la figura anterior tienen una propiedad importante: cada una se puede obtener de otra mediante una deformación continua. Las deformaciones continuas son una idea fundamental en la topología, donde se estudian objetos geoméricamente diferentes pero deformables uno en el otro. El concepto de homeomorfismo captura esta idea: los hexágonos de las teselaciones de arriba son geoméricamente diferentes pero son homeomorfos.

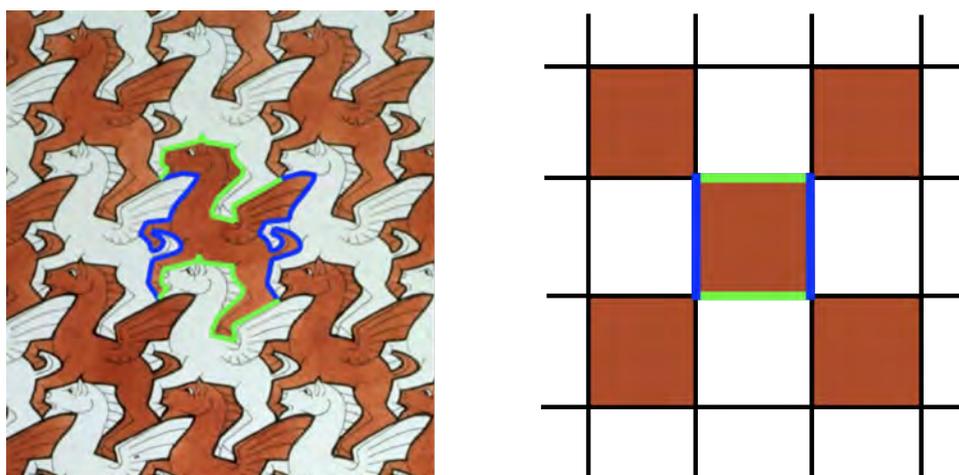
Diremos que un *homeomorfismo* es una función biyectiva y continua φ cuya inversa también es continua. La continuidad se refiere a que si la distancia entre dos puntos P y Q es pequeña, la distancia entre sus imágenes, $\varphi(P)$ y $\varphi(Q)$ también será pequeña.

Dos figuras F y F' son *homeomorfas* cuando existe un homeomorfismo tal que $\varphi(F) = F'$. Análogamente, dos teselaciones son del mismo *tipo topológico* o *topológicamente equivalentes* cuando existe un homeomorfismo que lleva una en la otra, es decir, manda teselas en teselas, aristas en aristas y vértices en vértices.

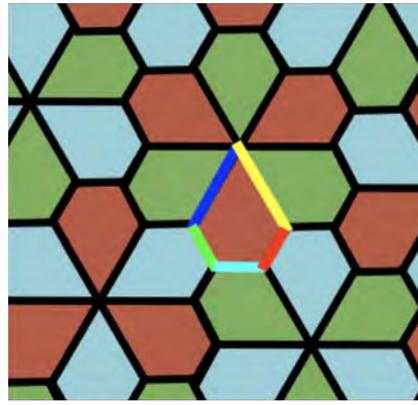
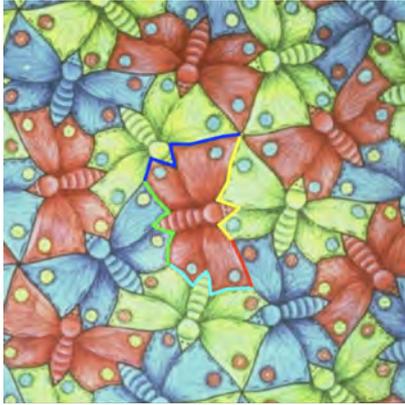
Las tres teselaciones homogéneas de la figura anterior son del mismo tipo topológico. De hecho, siempre que dos teselaciones homogéneas tengan el mismo tipo de vértice, serán del mismo tipo topológico [5].

Además, resulta que no existen teselaciones homogéneas cuyos vértices no sean de alguno de los 11 tipos que encontramos para las teselaciones de Laves [5]. Esto nos permite hacer una clasificación natural de las teselaciones homogéneas, representando cada una de acuerdo a la teselación de Laves a la que es topológicamente equivalente.

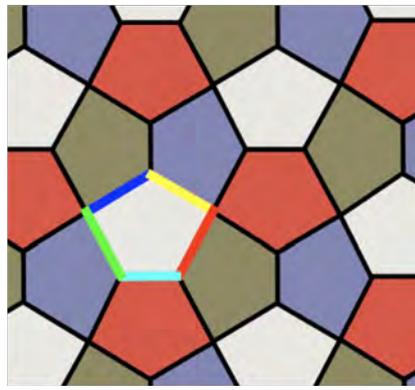
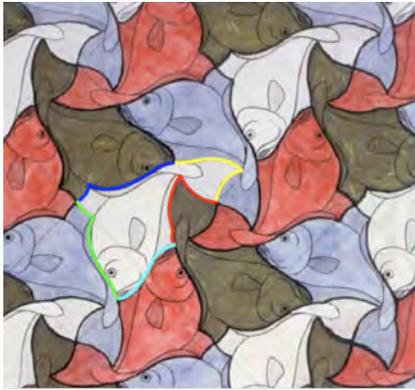
A continuación mostramos algunos ejemplos de teselaciones homogéneas que hizo Escher acompañadas de las teselaciones de Laves que les corresponden:



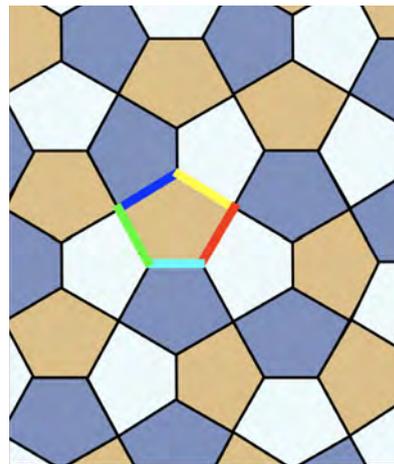
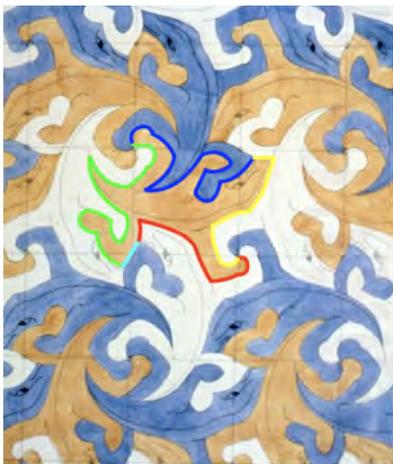
[44]



[3⁴.6]



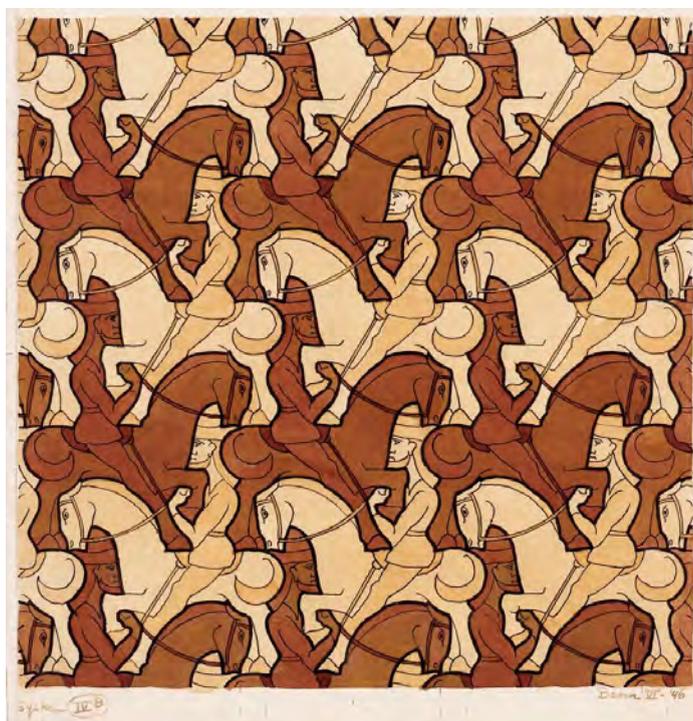
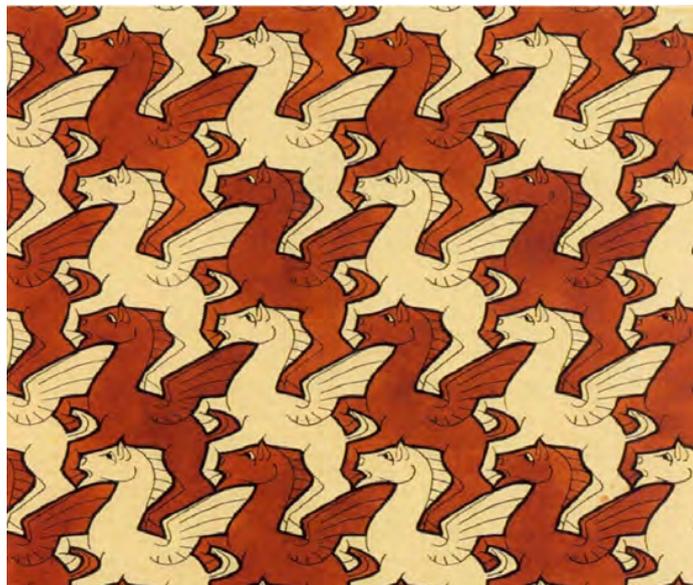
[3².4.3.4]



[3².4.3.4]

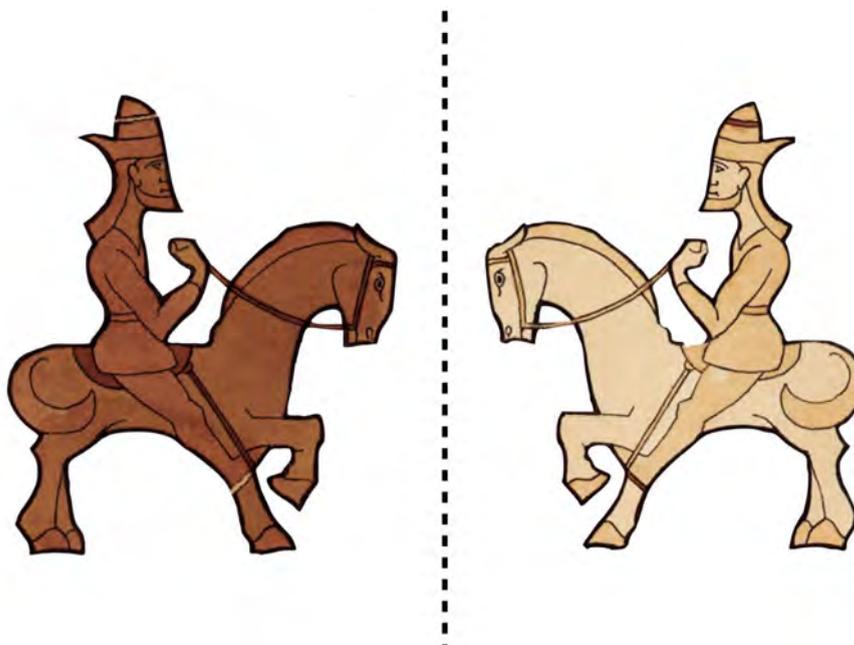
2. Grupos de simetrías de teselaciones

Tomaremos como motivación para realizar el desarrollo de este capítulo la siguiente pregunta: ¿en qué son diferentes estas dos teselaciones?



Un vistazo rápido nos hace notar que en la teselación de abajo, algunos caballos miran hacia un lado y otros hacia el otro, a diferencia de los pegasos que miran todos en la misma dirección. Nuestra intención para esta sección es usar los grupos de simetrías de las teselaciones para capturar esta diferencia.

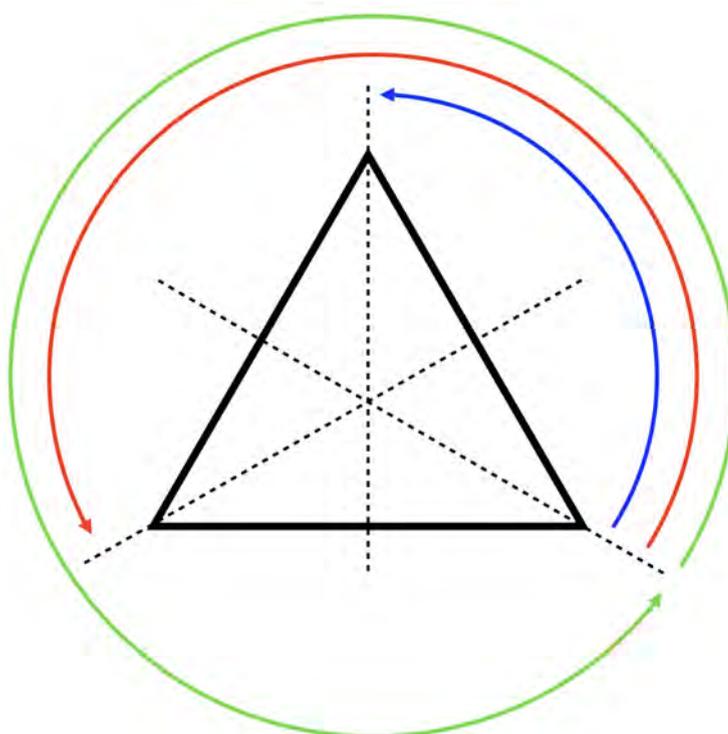
Resulta adecuado interpretar el cambio en la orientación de una pieza como una reflexión respecto a una línea vertical, como se muestra a continuación:



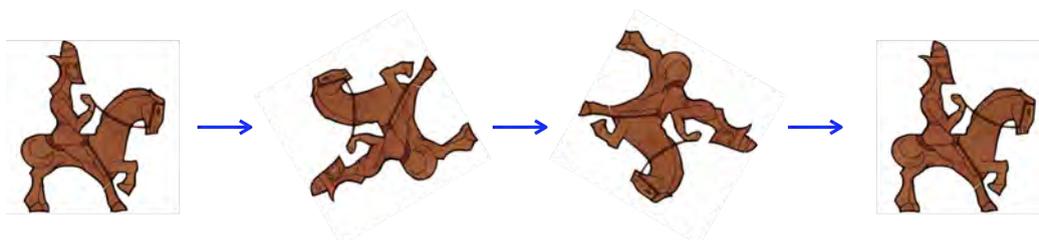
Parece que los caballos de un color son la imagen especular de los caballos del otro color. ¿Qué se puede decir matemáticamente sobre la idea de reflejar? Como explicamos en el capítulo anterior, resulta ser que las reflexiones son funciones que preservan la distancia, es decir, son isometrías.

Para recordar el concepto de simetría basta hacernos esta pregunta: dada una figura cualquiera, ¿cuáles isometrías la dejan en su lugar?

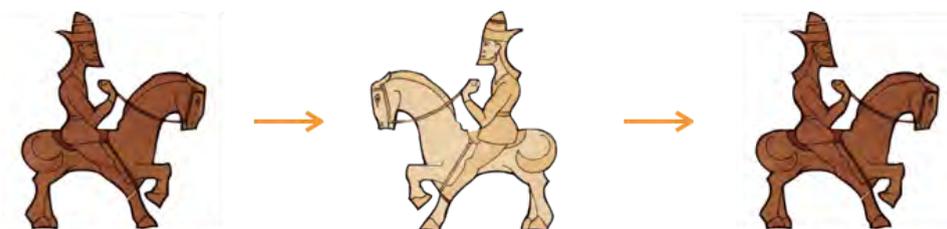
Por ejemplo, en el caso del triángulo, es posible hacer una rotación de 120° y parece que no hemos hecho nada. También podemos rotar el doble de eso, 240° , o el triple, 360° (que es la identidad), y sucede lo mismo. Además, podemos hacer tres reflexiones sobre las líneas punteadas que están en la figura y el triángulo permanece intacto. Esas seis isometrías son todas las simetrías del triángulo.



Ahora observemos que aplicar a cualquier figura una rotación de 120° tres veces consecutivas es lo mismo que aplicar una rotación de 360° :

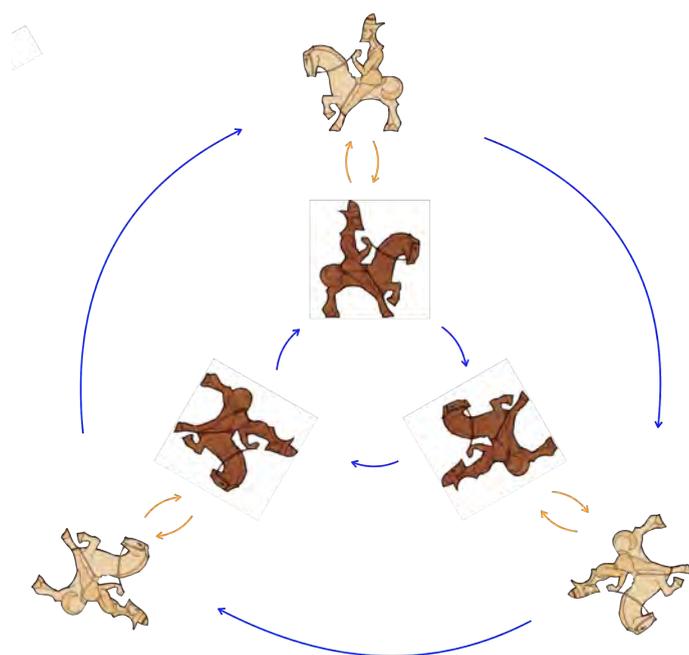


Un fenómeno semejante sucede cuando reflejamos sobre la línea vertical dos veces, llegamos al punto inicial:



¿Qué pasa cuando combinamos estas operaciones? La respuesta a esta pregunta se puede resumir en el diagrama de la siguiente página.

Sin importar cuántas veces ni de qué forma apliquemos la rotación de 120° y la reflexión vertical, la figura del jinete puede estar sólo de 6 maneras diferentes. Cada una de esas 6 maneras está asociada con alguna combinación de la rotación de 120° y la reflexión vertical, que no es más que una isometría.



Esta manera de representar las combinaciones de isometrías fue idea de un matemático llamado Arthur Cayley, y los llamamos diagramas o gráficas de Cayley [3].

Para dar una definición formal de estas gráficas, conviene recordar primero el concepto de *conjunto generador de un grupo*.

Dado un grupo G y una colección de elementos $S \subset G$, decimos que S genera a G si el grupo más pequeño que contiene a todos los elementos de S es G . En este caso, los elementos de G se pueden expresar como productos

finitos de potencias enteras de los elementos de S . Lo contrario también es cierto: cuando podemos expresar cualquier elemento de un grupo en términos de los elementos de algún subconjunto, éste resulta ser un conjunto generador [4].

Lo que podemos observar en el diagrama de Cayley es que aplicar cualquiera de las tres rotaciones o de las tres reflexiones en el grupo de simetrías del triángulo es lo mismo que aplicar alguna combinación de la rotación más pequeña y la reflexión vertical. En otras palabras, el grupo de simetrías del triángulo está generado por dos elementos.

El concepto de gráfica de Cayley se puede definir para cualquier grupo G con un conjunto generador S . Para definirla, recordemos que una *gráfica dirigida* está formada por un conjunto V cuyos elementos llamamos *vértices* y un conjunto $E \subset V \times V$ cuyos elementos llamamos *aristas*. Podemos representar los vértices como puntos y las aristas como flechas que unen pares de puntos. (Como las aristas son pares ordenados, se pueden representar como flechas, lo que distingue las gráficas dirigidas de las gráficas en general).

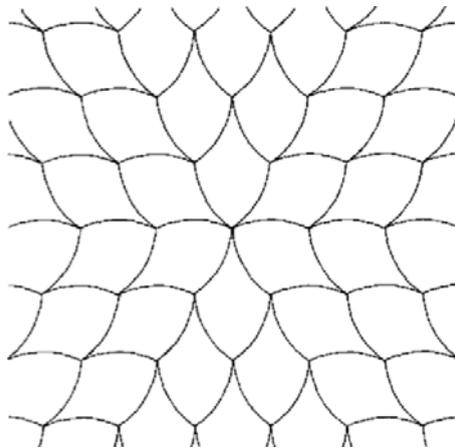
En una gráfica de Cayley, los vértices son los elementos del grupo G , y una arista entre dos vértices quiere decir que uno de los elementos correspondientes se puede obtener del otro multiplicando por algún elemento generador. Más concretamente, dos vértices $a, b \in G$ están conectados por una arista si existe algún elemento $s \in S$ tal que $as = b$. La flecha correspondiente se representa desde a hacia b .

Para saber exactamente mediante cuál elemento en S están relacionados dos elementos de G , conviene colorear las aristas de acuerdo a los elementos generadores, como es el caso de nuestro ejemplo. Las gráficas de Cayley serán una herramienta que usaremos para analizar la estructura de los grupos de simetrías de las teselaciones que estudiemos.

2.1 Teselaciones de roseta

A continuación presentaremos tres grandes familias de teselaciones que se pueden clasificar de acuerdo a sus grupos de simetrías: las teselaciones de roseta, los frisos y las teselaciones periódicas. Como veremos, la presencia de traslaciones en los grupos de simetrías es clave para definir esta clasificación. Mostraremos ejemplos de teselaciones que correspondan con cada familia y en algunos casos las acompañaremos con una gráfica de Cayley que muestre la estructura de su grupo de simetrías.

Comencemos con la siguiente teselación [5]:



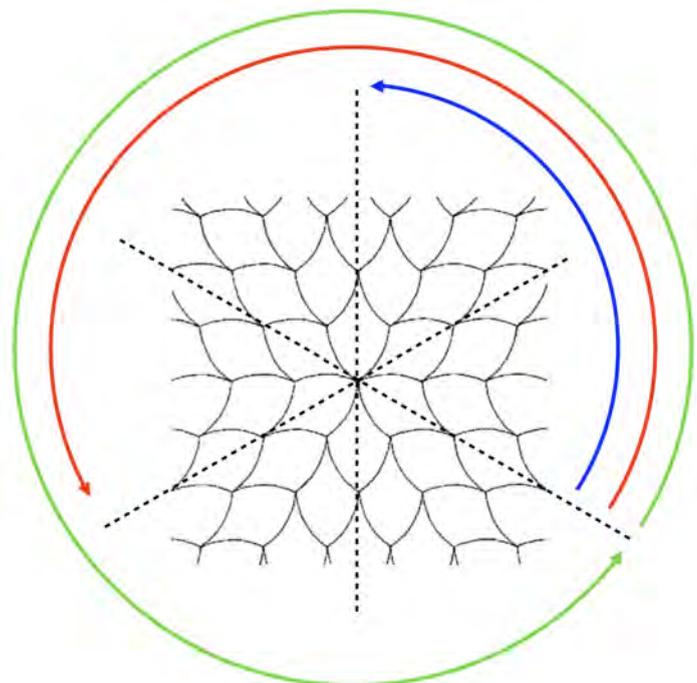
¿Qué tiene de particular? Si desplazamos en cualquier dirección todas las teselas de esta teselación, siempre van a caer desfasadas porque el centro nunca puede caer sobre sí mismo. Es decir, el grupo de simetrías de esta teselación no contiene traslaciones.

Comenzaremos por describir los grupos de simetría de teselaciones con esta propiedad, que reciben el nombre de *grupos de roseta* o *grupos puntuales*.

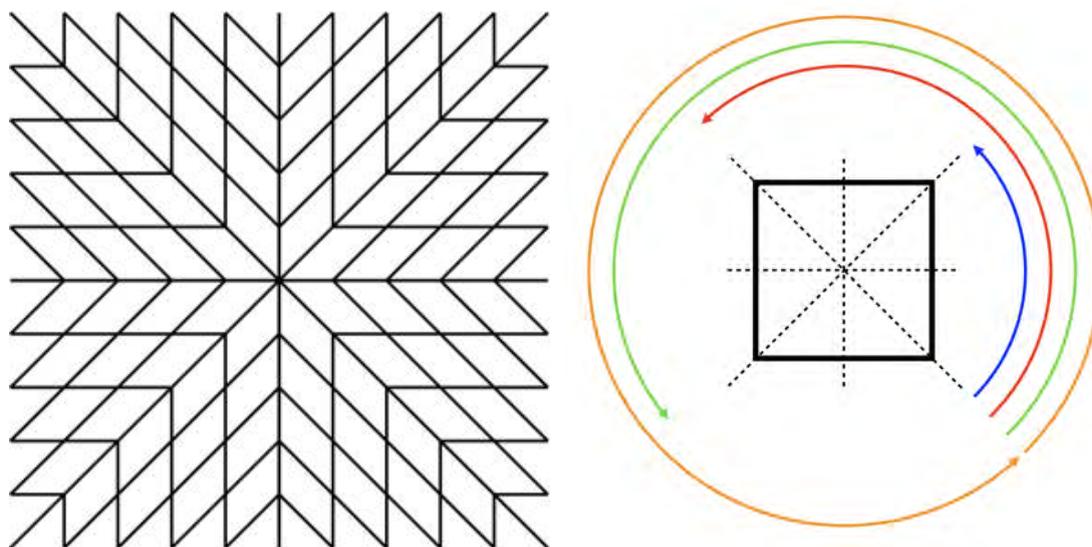
Resulta que el grupo de simetrías de esta teselación es exactamente el mismo que el del triángulo que vimos antes. Esto se muestra en la imagen del lado derecho.

Este fenómeno se puede generalizar al siguiente teorema [5]:

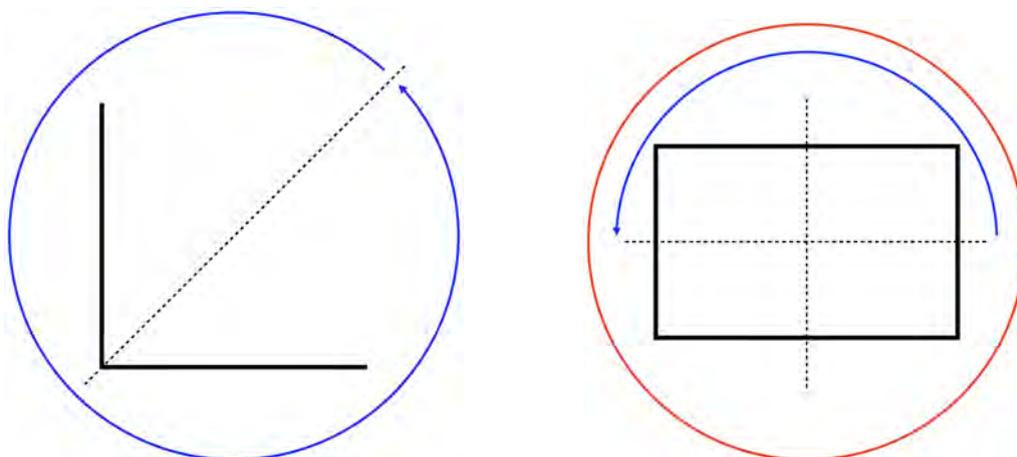
Si el grupo de simetrías de una teselación contiene exclusivamente rotaciones y reflexiones, este grupo es el mismo que el de algún polígono regular.



A estos grupos se les conoce como *grupos dihédricos*. A cada uno de ellos se le asocia el número de lados del polígono regular que le corresponde, y le llamamos d_n . Este ejemplo muestra una teselación [9] cuyo grupo de simetrías es el mismo que el de un cuadrado, d_4 .

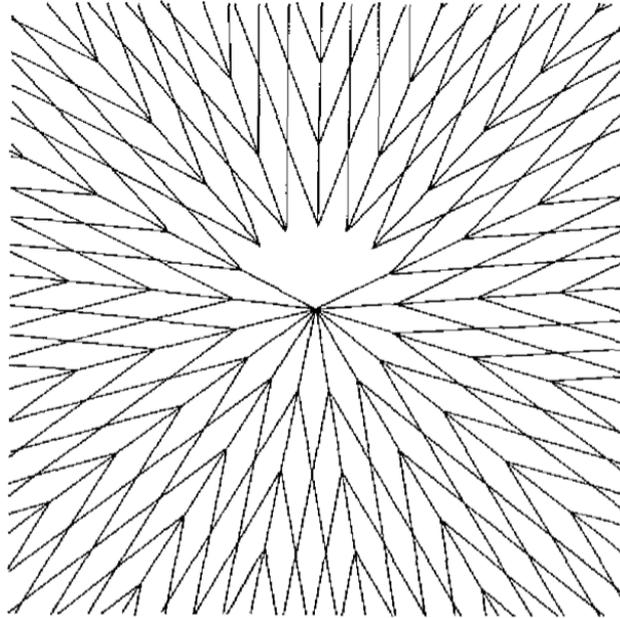


Como no hay polígonos regulares de uno ni de dos lados, debemos analizar los casos de d_1 y d_2 por separado. Aquí tenemos un ejemplo de dos figuras que tienen grupos de simetría d_1 y d_2 :



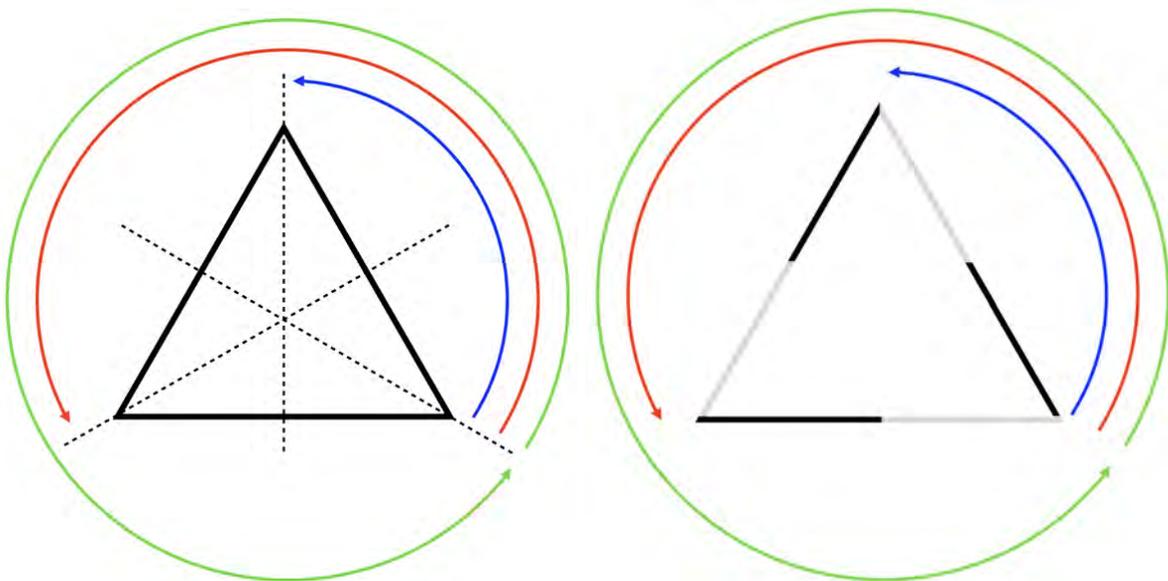
Para entender por qué tiene sentido que estas figuras correspondan con esos grupos, basta notar que el grupo dihédrico de orden n está caracterizado por contener al menos una reflexión, y que la rotación más pequeña es de $360/n$ °. El grupo d_1 contiene sólo la identidad y una reflexión. El grupo d_2 contiene la identidad y dos reflexiones cuyos ejes forman un ángulo de 90° , de tal forma que su composición es una rotación de 180° con centro en el punto de intersección de los ejes.

En la siguiente página mostramos una teselación cuyo grupo de simetrías es d_1 [5]. Hay dos tipos de teselas en esta teselación, y la única posible simetría que envía la tesela grande en ella misma es la reflexión respecto a la recta vertical que pasa por el centro de la imagen.



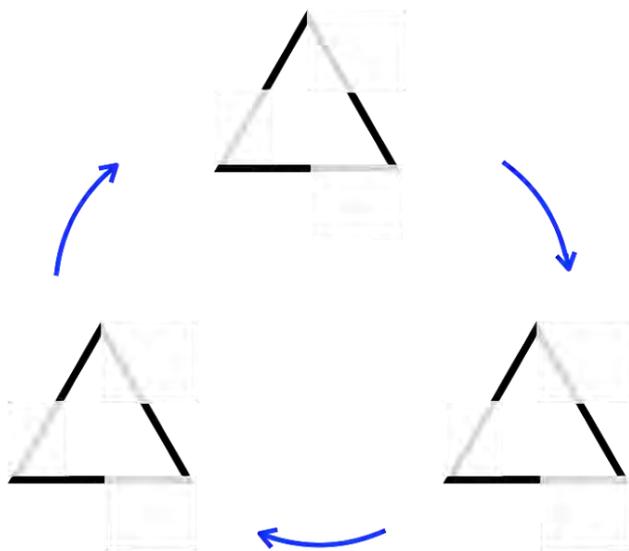
Abordemos ahora la pregunta por el grupo de simetrías de una teselación que contenga sólo rotaciones. Nos gustaría que hubiera una familia de figuras como los polígonos regulares tales que sus grupos de simetría coincidieran con los de esta clase de teselaciones. Para esto, basta tomar algún polígono regular y hacerle una modificación que elimine la posibilidad de realizar una reflexión.

Por ejemplo, podemos quitar la mitad de cada uno de los lados de un triángulo para obtener una figura que no admite reflexiones, pero sí rotaciones:



Evidentemente, esta operación se puede realizar para cualquier polígono regular de n lados y obtenemos un grupo que consiste exactamente de n rotaciones. Esta familia de grupos se conoce como *grupos cíclicos* y cada uno se denota por c_n .

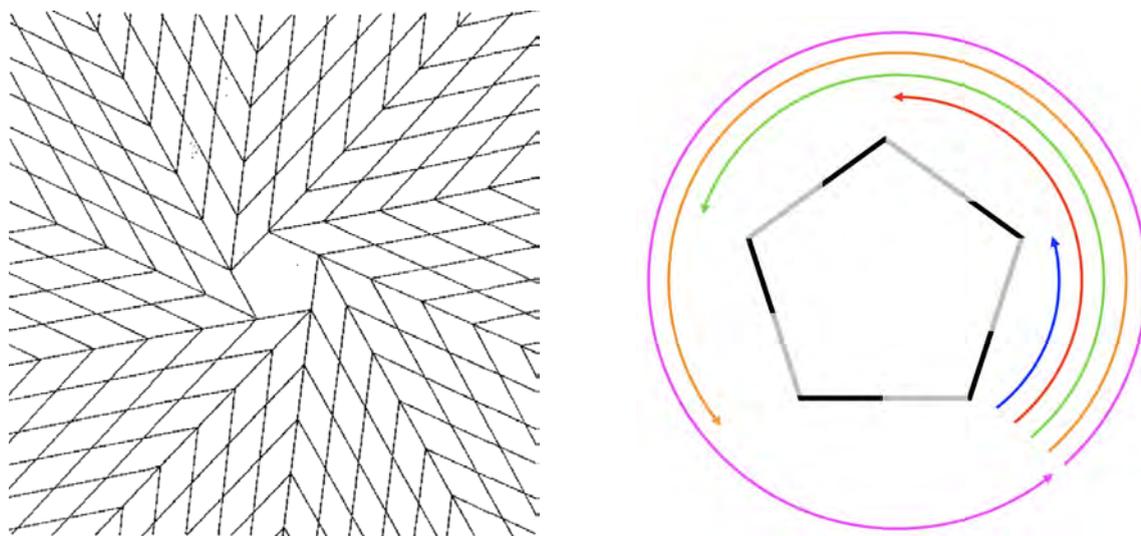
De hecho, la gráfica de Cayley que le corresponde al grupo c_n es la gráfica cíclica de orden n , generada por la rotación más pequeña. Para el caso $n = 3$, podemos usar flechas azules para representar la acción de una rotación de 120° , y obtenemos el siguiente diagrama:



En general, tenemos el siguiente resultado [5]:

Si el grupo de simetrías de una teselación contiene sólo rotaciones, es un grupo cíclico

Aquí tenemos un ejemplo de una teselación cuyo grupo de simetrías es el grupo cíclico de orden 5 [5]:



Volviendo a nuestra motivación de usar los grupos de simetrías para distinguir entre las dos teselaciones de caballitos de Escher, nos damos cuenta de que hasta ahora no podemos lograr nuestro objetivo porque esas teselaciones no son de roseta. De hecho, ninguna de las teselaciones que hizo Escher es de roseta [2].

2.2 Frisos

Continuaremos estudiando cómo son las teselaciones que sí contienen traslaciones en su grupo de simetrías. Observemos la siguiente imagen:

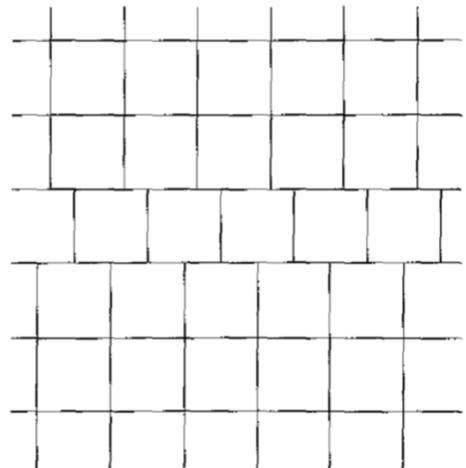


Suponiendo que el patrón se repite infinitamente, es claro que podemos trasladarlo horizontalmente y parece que no hemos hecho nada. Esta idea se puede representar con una flecha, o vector, que indique en qué dirección y qué tan lejos debemos trasladar (¡no cualquier longitud preservará el dibujo!).

Pero claro, si hemos encontrado una dirección y una magnitud que preserven una figura, también podemos trasladar el doble, o el triple, o en sentido contrario... Esto quiere decir que si un grupo de simetrías contiene una traslación, entonces contiene infinitas de ellas, así que a diferencia de los grupos anteriores, éstos están conformados por una infinidad de elementos.

A los patrones como éste se les llama *frisos*. La característica principal de los frisos es que son patrones que admiten traslaciones en su grupo de simetrías, y estas traslaciones son todas paralelas. Es decir, todas las traslaciones son múltiplos de una sola. Esta propiedad hace que tengan aspecto de franjas o bandas que se extienden infinitamente.

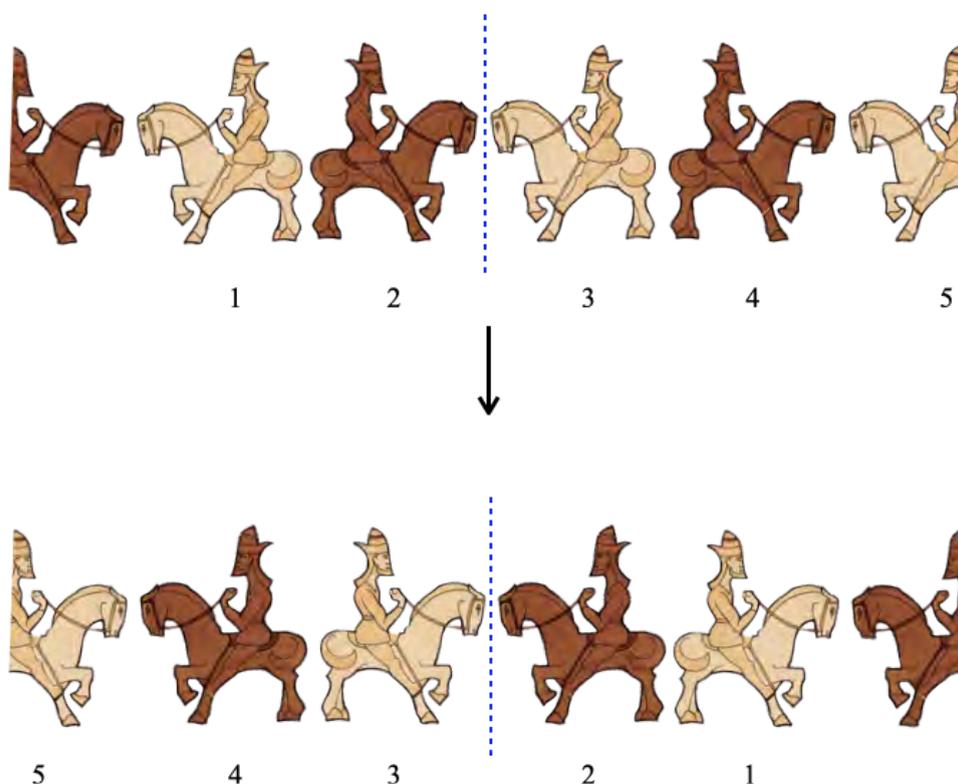
Más adelante estudiaremos cómo son las teselaciones que tienen traslaciones en dos direcciones distintas en su grupo de simetrías. Aunque toda la información geométrica de un friso está contenida en una franja horizontal, podemos pensarlos como teselaciones pegando copias de la franja de tal forma que no se generen traslaciones en otras direcciones, como en la figura del lado derecho.



En la siguiente figura aparecen jinetes blancos y cafés intercalados. Nuevamente podemos trasladar la figura horizontalmente sin alterarla, pero ahora hay otras simetrías que la preservan: reflexiones.

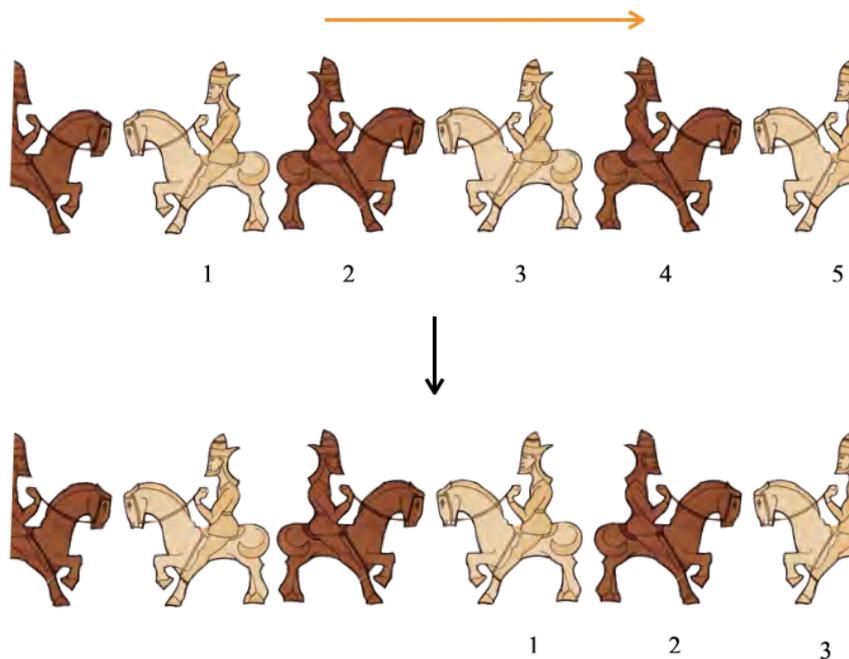


Podemos hacer una reflexión sobre cualquier recta vertical que esté en medio de dos caballos. Ignorando el hecho de que los colores de los jinetes se intercambian, estas reflexiones son simetrías del patrón. Podemos observar con mayor claridad cómo es la acción de una reflexión enumerando algunos jinetes:

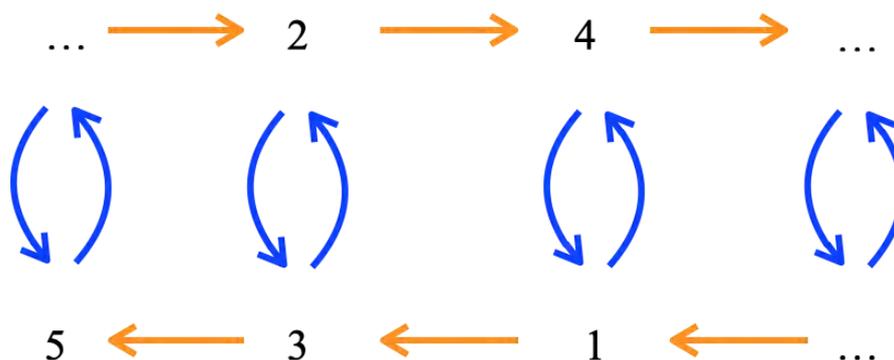


Tenemos una infinidad de rectas sobre las cuales podemos reflejar. Cuando pensamos en el friso en toda su extensión, notamos que cada una de las reflexiones tiene una acción diferente sobre el patrón. De hecho, la reflexión sobre la recta azul en la figura de arriba es la única que intercambia los jinetes 2 y 3 (y al mismo tiempo al 1 y al 4, etc).

La acción de una traslación horizontal se puede analizar de la misma manera: trasladar respecto a la flecha naranja mueve el jinete 2 al lugar 4, el 3 al 5, etc:



Esta información se puede representar de la siguiente manera:



Ésta es una gráfica de Cayley que representa el grupo de simetrías del friso con jinetes alternados. Funciona de la misma manera que la gráfica de Cayley que encontramos para el triángulo hace algunas páginas. Cada flecha representa la acción de la reflexión azul o la traslación naranja. Cada vértice de la gráfica representa una simetría que deja el patrón en su lugar.

¿Qué sucede con las demás simetrías de la figura? Por ejemplo, la reflexión que intercambia los jinetes 3 y 4, o la traslación que lleva el 1 al 5. Podemos ver en el diagrama que intercambiar al jinete 3 y al 4 es lo mismo que aplicar la reflexión azul, y luego la traslación naranja. De esta manera se pueden obtener todas las simetrías de este friso, es decir, su grupo de simetrías se puede generar con dos elementos.

En la siguiente figura hay 7 diferentes frisos hechos con jinetes:



p1



p11g



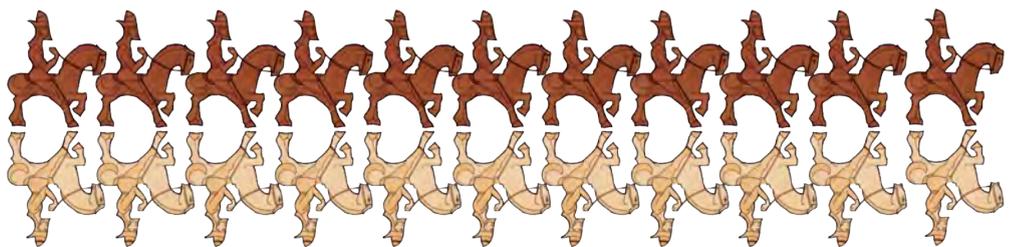
p1m1



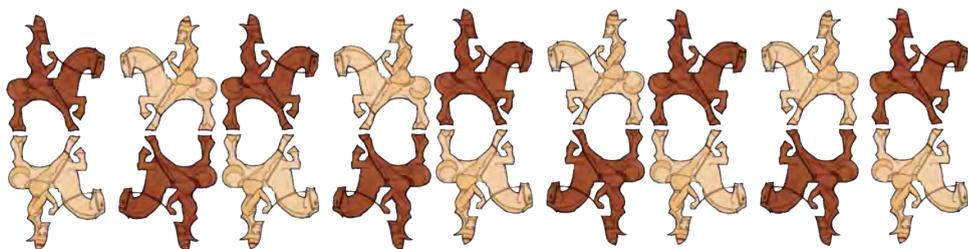
p2



p2mg



p11m



p2mm

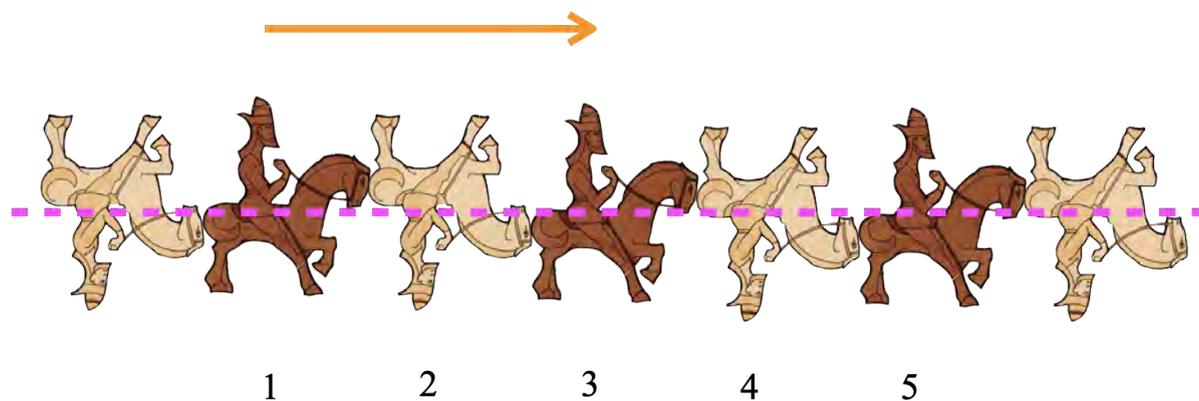
Estos 7 patrones tienen grupos de simetría diferentes, y cada uno tiene el nombre que aparece a su derecha. La letra p se refiere a “primitive cell”, haciendo referencia a una unidad básica o primitiva que se repite mediante las traslaciones.

El número a continuación se refiere al orden de la rotación más pequeña que hay en el grupo. Si este número es 2, se trata de una rotación de 180° . Si es 1, es porque no hay rotaciones más que la identidad. El tercer símbolo describe si hay una reflexión, denotada por m de “mirror reflection”, que sea perpendicular al vector de traslación. Si no hay ninguna, se deja en blanco o se agrega un 1. El último símbolo indica la presencia de un deslizamiento, denotado por g de “glide reflection”.

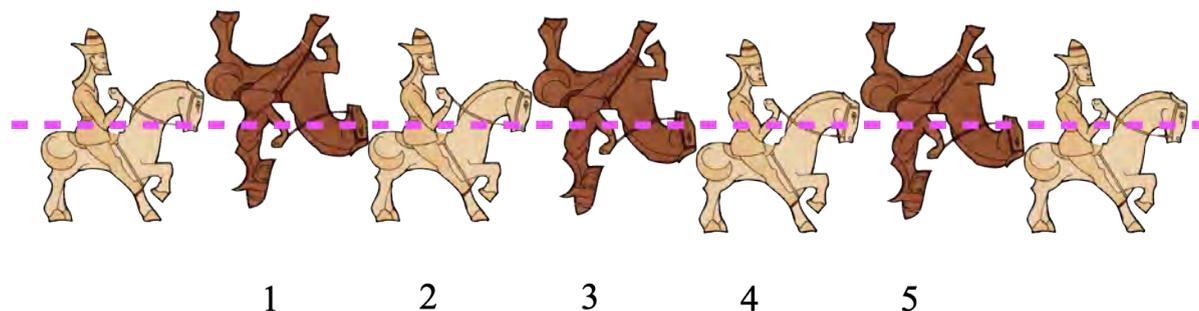
¿Qué significa cuando decimos que estos grupos de simetría son diferentes? En general, cuando dos grupos tienen la misma estructura algebraica, decimos que son isomorfos. Más concretamente, dados dos grupos (G, \cdot) y $(H, *)$, un *isomorfismo* entre ellos es una función biyectiva $\varphi : G \rightarrow H$. que preserva las operaciones de grupo, es decir, para cualesquiera elementos $a, b \in G$ se tiene que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ [4].

Dos grupos pueden estar formados por objetos muy distintos pero tener la misma estructura algebraica, es decir, sus elementos son distintos pero los grupos son isomorfos. El concepto de isomorfismo nos servirá para distinguir los diferentes grupos de simetrías que hemos encontrado salvo por dos casos excepcionales.

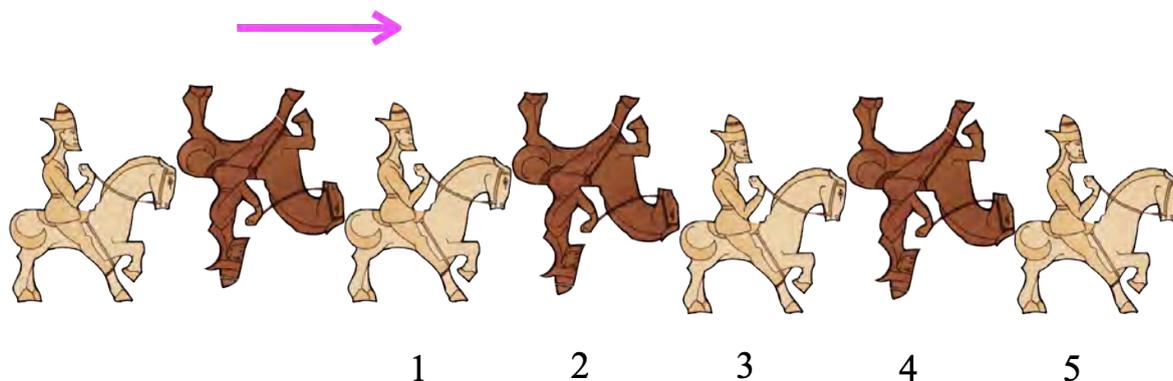
Observemos el friso en el segundo renglón, cuyo grupo de simetrías es $p11g$:



Desde luego, la traslación respecto a la flecha naranja deja todo en su lugar, pero, ¿qué sucede con la línea punteada rosa? Si reflejamos sobre ella, obtenemos la siguiente figura, que no se puede sobreponer con la anterior sin que dejen de coincidir los jinetes:



Pero si después de hacer la reflexión, y hacemos una traslación que mueva los jinetes un lugar, todo parece funcionar:



Como en la figura inicial, los jinetes en lugares impares están de pie y los jinetes en lugares pares de cabeza (recordemos que no nos importa que se intercambien los colores).

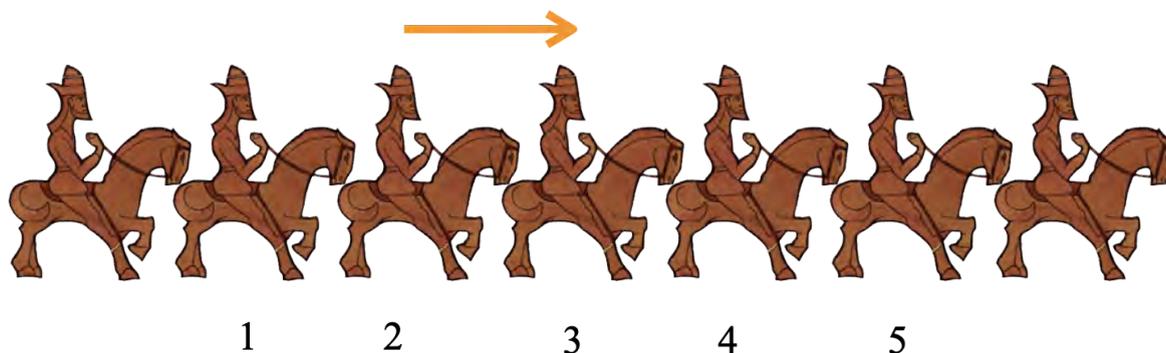
Resulta entonces que la reflexión respecto a la recta rosa y la traslación respecto a la flecha rosa no están en el grupo de simetrías de este friso, pero la composición de ellas sí. Este tipo de isometrías las mencionamos en el capítulo anterior, se llaman deslizamientos, y se caracterizan por ser la composición de una reflexión respecto a alguna línea seguida de una traslación respecto a un vector paralelo a la línea.

El diagrama de Cayley que le corresponde a este friso es el siguiente:



Claro, el deslizamiento rosa desplaza cada jinete por un lugar, y ya no hace falta incluir en el diagrama la traslación naranja porque ésta es el resultado de aplicar dos veces consecutivas el deslizamiento. Este grupo de simetría está generado por un único elemento.

Lo interesante es que esto mismo sucede en el caso del friso con el grupo de simetrías más sencillo, $p1$:



Este friso no tiene otra simetría más que la traslación respecto a la flecha naranja, y su diagrama de Cayley parece ser el mismo que el anterior:



Estos dos grupos son isomorfos, pero los patrones que les corresponden son cualitativamente diferentes. El otro caso excepcional en el que sucede esto es para los grupos d_1 y c_2 , que están generados por un único elemento que compuesto consigo mismo es la identidad. Como en un caso se trata de una reflexión y en otro de una rotación de 180° , los patrones correspondientes pueden ser muy distintos.

Para evitar esta ambigüedad, diremos que dos grupos de simetrías son del mismo tipo si son isomorfos y además el isomorfismo asocia simetrías de un tipo con simetrías del mismo tipo (rotaciones con rotaciones, reflexiones con reflexiones, etc.).

Clasificando de esta manera, los 7 frisos que presentamos tienen grupos de simetrías de diferente tipo. Además, resulta que el grupo de simetría de cualquier friso debe ser de alguno de esos 7 tipos. Así es que tenemos el siguiente resultado [5]:

Existen exactamente 7 grupos de simetría de frisos.

Aunque las gráficas de Cayley son una buena herramienta para mostrar la estructura algebraica de los grupos de simetrías, no son suficientes para derivar este resultado. Puede haber grupos isomorfos con gráficas de Cayley muy diferentes. De hecho, un mismo grupo puede tener más de una gráfica de Cayley asociada. Un ejemplo de esto es el caso del grupo de simetrías del triángulo, que se puede representar como generado por dos reflexiones o por una reflexión y una rotación.

2.3 Teselaciones periódicas

Ahora veamos qué sucede cuando tomamos varias copias de un friso y las pegamos ordenadamente:

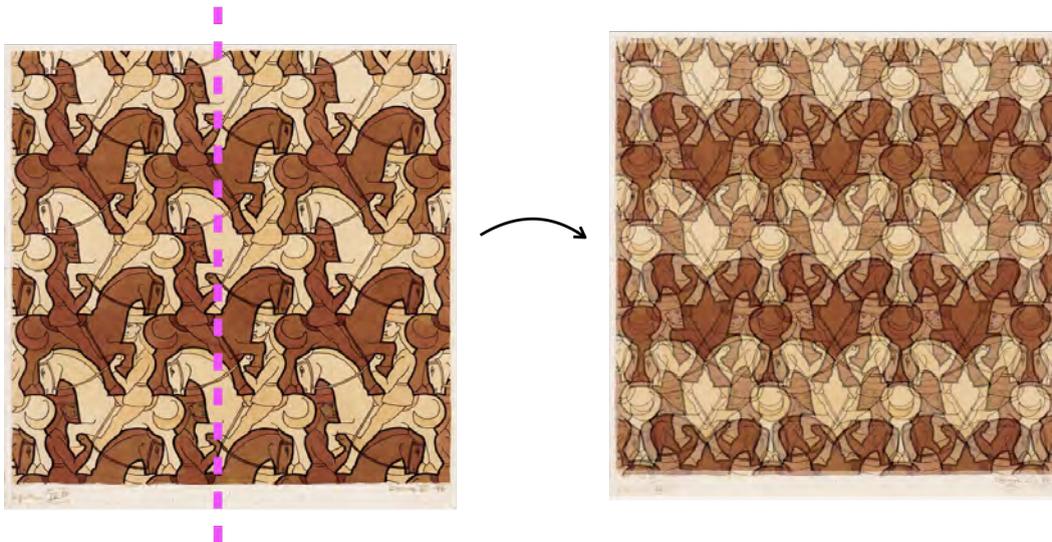


Parece que hemos llegado a la teselación inicial de Escher. Este patrón está formado por copias del friso del primer renglón, cuyo grupo de simetrías es el generado por una traslación, $p1$.

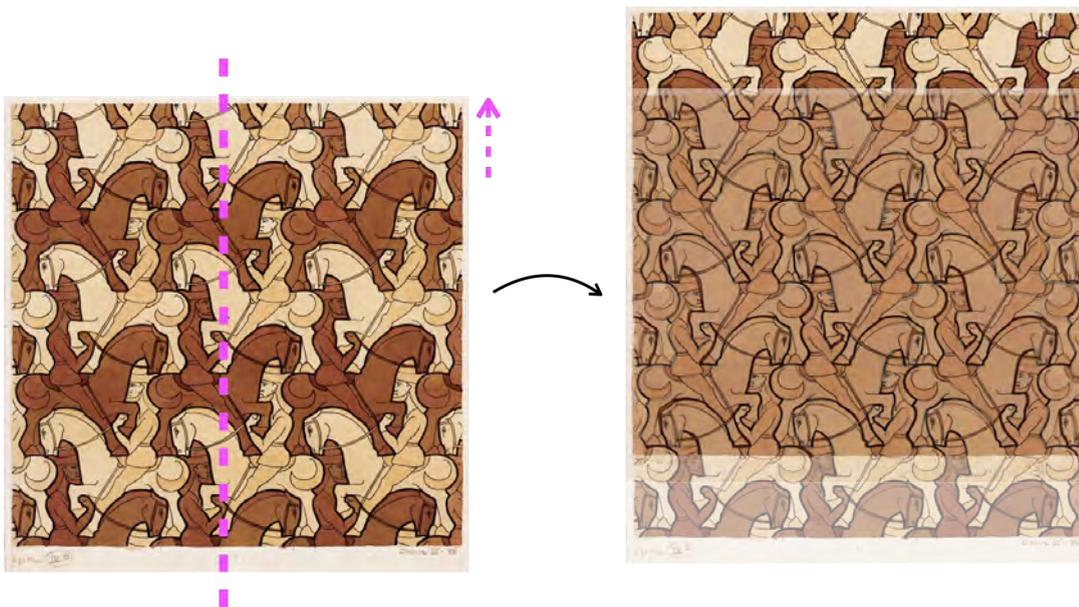
Esa misma traslación sigue preservando esta nueva figura, pero ahora hay otras simetrías que considerar. Ahora podemos hacer una traslación vertical que desplace todo el patrón un renglón hacia arriba o hacia abajo, y todo quedará en su lugar. (Recordemos que el patrón se repite infinitamente).

Esta característica determina la última familia de teselaciones que vamos a estudiar: las *teselaciones periódicas*. Son teselaciones en cuyo grupo de simetrías podemos encontrar dos traslaciones no paralelas, es decir, que sus vectores de traslación son linealmente independientes.

En los espacios vacíos de la figura anterior se ven las siluetas de los jinetes blancos, que miran en la dirección contraria a los jinetes cafés. Podría parecer que una reflexión vertical dejaría todo en su lugar, pero esto no es del todo cierto. Volviendo a la teselación original de Escher, esto es lo que sucede si reflejamos respecto a una recta vertical y sobreponemos el resultado:



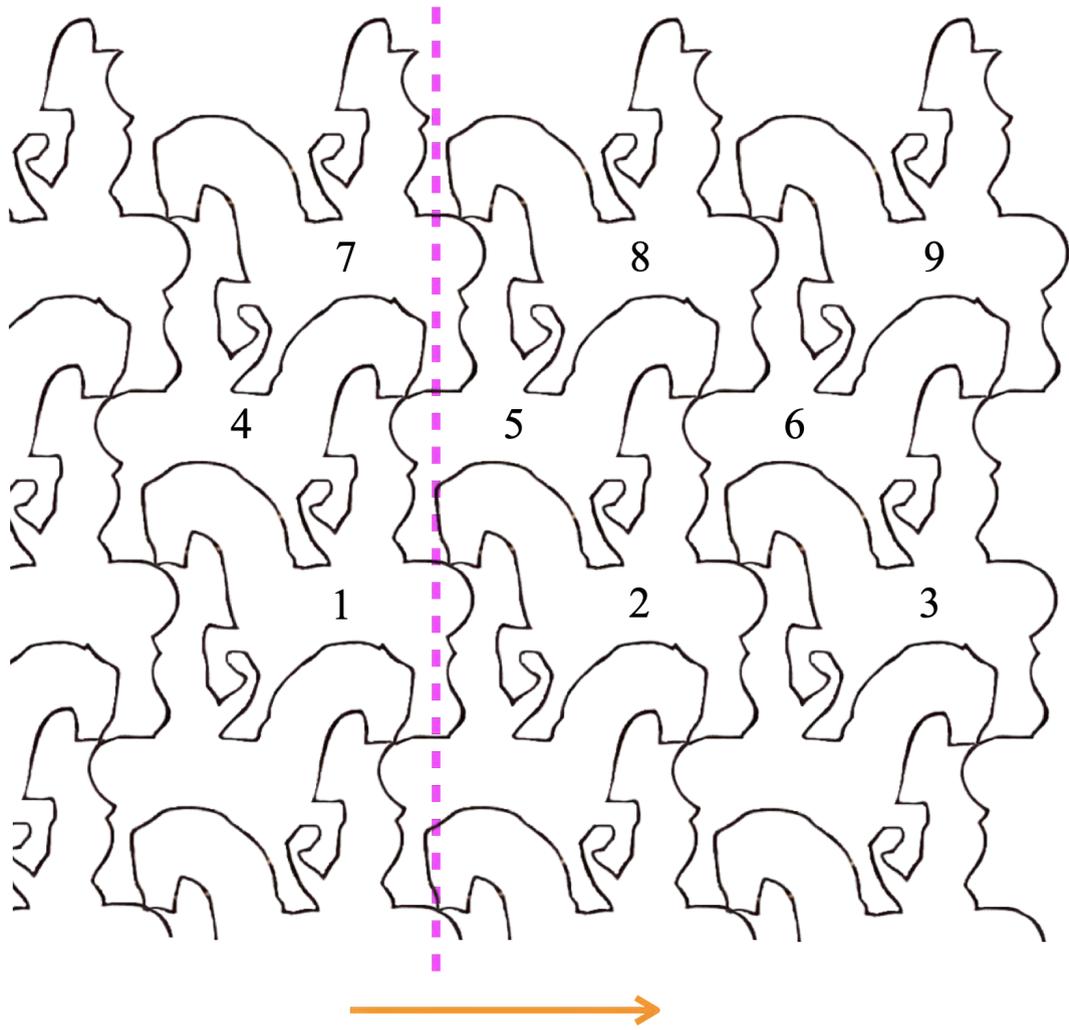
Ahora bien, si reflejamos y después trasladamos hacia arriba:



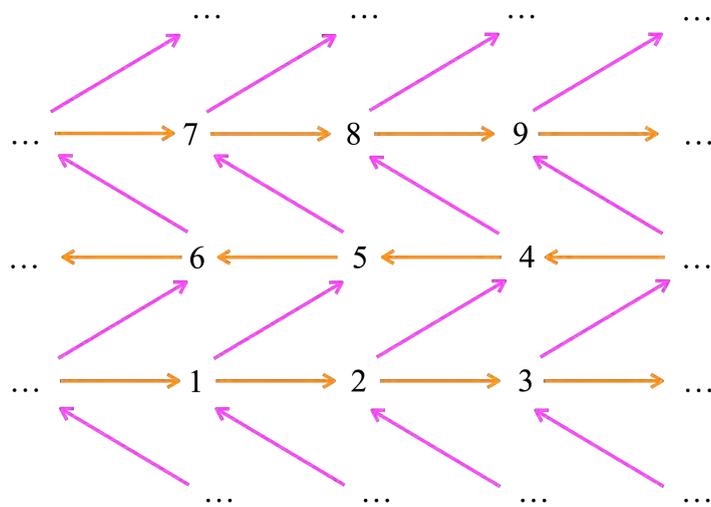
Resulta que esta teselación admite un deslizamiento, justo como en el caso del friso *p11g*. De hecho, esta teselación contiene una infinidad de deslizamientos: entre cualesquiera dos jinetes que compartan una arista podemos trazar una línea vertical y aplicar la acción anterior.

¿Habría alguna otra simetría? Cualquier rotación haría que alguno de los jinetes estuviera inclinado o de cabeza, así que podemos descartar esa opción. Ya vimos que una reflexión vertical no funciona, y de hecho ninguna reflexión lo hará. Este grupo de simetrías está conformado exclusivamente por deslizamientos y traslaciones.

Para construir un diagrama de Cayley podemos enumerar algunas teselas como hicimos en con los frisos:



Obtenemos la siguiente gráfica de Cayley:



La acción de la traslación vertical, llevar la tesela 1 a la 7 es igual a la acción del deslizamiento compuesto consigo mismo. Es exactamente lo mismo que sucedía con el friso del segundo renglón.

La acción de cualquier otro deslizamiento se puede reducir a la composición del deslizamiento rosa con la traslación naranja. Este grupo está generado por dos elementos: una traslación y un deslizamiento cuyo eje sea perpendicular al vector de la traslación.

Volvamos a la otra teselación de caballitos con la que comenzamos:



¿Cuál será su grupo de simetrías? Desde luego, tenemos las traslaciones horizontales y verticales, y todas las composiciones de ellas. Quizás ya tengamos suficiente destreza para asegurar sin mayor problema que esta teselación no tiene ninguna otra simetría. Rotaciones, reflexiones, o deslizamientos no preservarían el patrón.

Esta información es suficiente para decir de acuerdo a nuestras definiciones que este grupo de simetrías no es del mismo tipo que el grupo de simetrías de los jinetes, y por fin concluir que son dos teselaciones muy distintas. En el siguiente capítulo vamos a estudiar con detalle los grupos de simetrías de las teselaciones periódicas, así que dejaremos hasta aquí esta sección.

Parte II: Los 17 grupos de simetrías de teselaciones periódicas

Existen exactamente 17 grupos de simetría de teselaciones periódicas [5]. Este resultado fue publicado por primera vez por Fedorov en 1891, y fue redescubierto por Fricke y Klein en 1897 y por Polyá y Niggli en 1924 [7]. Nuestra intención para esta sección no es demostrar formalmente la existencia de estos 17 grupos, sino más bien conocer sus propiedades geométricas y algebraicas.

Para esto, partiremos de la hipótesis de que los grupos contienen al menos dos traslaciones cuyos vectores de traslación son linealmente independientes, y veremos qué ocurre cuando agregamos otras simetrías. Hay simetrías que no pueden estar en el mismo grupo que otras, y al contrario, hay simetrías que obligan a otras simetrías a estar en grupo.

Comenzaremos con un breve capítulo citando algunos teoremas de geometría que explican este tipo de condiciones, y otros que servirán como herramientas para nuestra exploración. Nos será de gran utilidad, por ejemplo, expresar las simetrías como productos de reflexiones para visualizar cómo es su acción sobre el plano euclidiano.

En otro capítulo, de tan sólo una página, explicaremos qué son las *presentaciones con generadores y relaciones*. Ésta será la manera en la que describiremos la estructura algebraica de los 17 grupos.

En el tercer capítulo estudiaremos caso por caso cada grupo de simetrías.

3. Resultados geométricos preliminares

Estos resultados y sus demostraciones se pueden consultar en [7]. Comenzaremos presentando un teorema que nos ayuda a caracterizar las isometrías del plano euclidiano:

Dados dos triángulos congruentes $\triangle PQR$ y $\triangle ABC$, existe una única isometría f tal que $f(P) = A$, $f(Q) = B$, $f(R) = C$.

Es gracias a este resultado que podremos identificar una isometría cuando sepamos a dónde envía tres puntos no colineales. Otra herramienta importante es la siguiente:

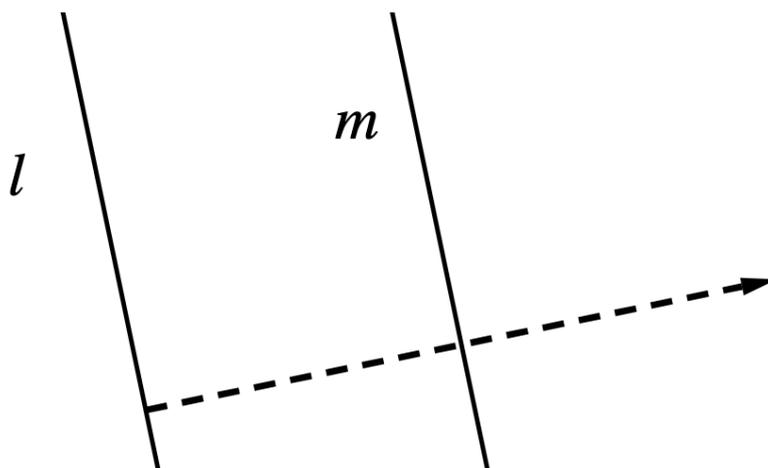
Cualquier isometría del plano euclidiano se puede expresar como el producto de a lo más tres reflexiones

Dependiendo de cómo estén situados los ejes de reflexión de una colección de dos o tres reflexiones, al componerlas obtendremos una traslación, una rotación, un deslizamiento u otra reflexión. A continuación mostramos los diferentes casos:

Si los ejes de reflexión de dos reflexiones son líneas paralelas, al componerlas obtenemos una traslación. De hecho, toda traslación es la composición de dos reflexiones cuyos ejes son líneas paralelas.

Más aún, se tiene que:

Dadas dos reflexiones σ_l y σ_m respecto a las líneas paralelas l y m , la composición $\sigma_m\sigma_l$ es la traslación respecto al doble del vector distancia de l a m .

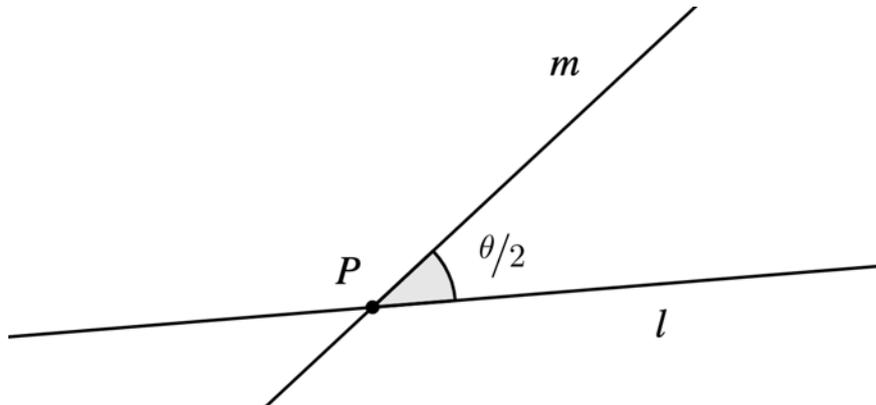


Ahora veamos el caso de las rotaciones:

La composición de dos reflexiones cuyos ejes no son líneas paralelas es una rotación, y toda rotación es la composición de dos reflexiones cuyos ejes sean líneas no paralelas.

Y luego:

Si dos líneas l y m se intersecan en un punto P con un ángulo dirigido de l a m de $\theta/2$, la composición de las reflexiones σ_m y σ_l es una rotación con centro en P por un ángulo de θ , es decir, $\sigma_m\sigma_l = r_{P,\theta}$.

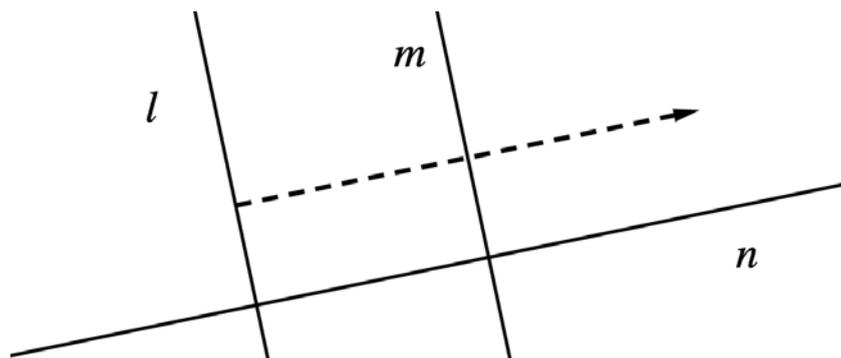


Falta sólo el caso de los deslizamientos:

Tres líneas l , m y n no son concurrentes ni tienen una paralela en común si y sólo si la composición $\sigma_n\sigma_m\sigma_l$ es un deslizamiento.

Y por último:

Si dos líneas m y n son perpendiculares a la línea l , la composición $\sigma_n\sigma_m\sigma_l$ es un deslizamiento cuyo vector de traslación es el doble de la distancia de l a m .



Los centros de rotaciones por ángulos de la forma $360/n$ serán llamados n -centros. Resulta que:

En un grupo de isometrías, n -centros van a dar a n -centros bajo la acción de las isometrías del grupo.

Por último, presentamos el teorema de la Restricción Cristalográfica:

Una rotación perteneciente al grupo de simetrías de una teselación periódica sólo puede ser de orden 2, 3, 4 o 6.

Este teorema nos será de gran ayuda para nuestra exploración de los 17 grupos de simetrías.

4. Presentaciones con generadores y relaciones para grupos

Continuamos con el concepto de presentación con generadores y relaciones para un grupo. Tomemos cualquier conjunto S y por ahora pensemos en los elementos de S como letras de un alfabeto. Expresiones de la forma $s_1s_2\dots s_k$ serán llamadas palabras, y expresiones de la forma s^n serán llamadas sílabas. También consideraremos un elemento distinguido e , que llamaremos la palabra vacía.

Si una palabra contiene una expresión de la forma $s_i^m s_i^n$, podemos reemplazar esta expresión por otra de la forma s_i^{m+n} . Análogamente, podemos reemplazar una sílaba de la forma s_i^0 por el elemento e , o bien, no escribirla dentro de la palabra. Mediante estas dos operaciones cualquier palabra se puede llevar a otra a la que no se le pueden hacer más reemplazamientos, que llamaremos una *palabra reducida*.

Llamaremos $F[S]$ al conjunto de palabras reducidas formadas a partir del alfabeto S . A $F[S]$ le podemos dar estructura de grupo mediante la operación concatenación de palabras. Es decir, si p_1 y p_2 son elementos en $F[S]$, $p_1 \cdot p_2$ es la palabra formada por las letras de p_1 seguidas de las letras en p_2 expresada en su forma reducida. Al conjunto $F[S]$ se le llama grupo libre generado por S .

Puede ser que dado un grupo G exista algún conjunto S tal que G sea isomorfo a $F[S]$, en cuyo caso decimos que G es un grupo libre sobre S . Sin embargo, este no es siempre el caso. Los elementos de un grupo pueden satisfacer relaciones, como la conmutatividad entre dos elementos, que no satisfacen las palabras de un grupo libre.

Una ecuación en términos de los elementos de un grupo libre se traduce a que dos palabras que originalmente eran distintas deban ser reconocidas como una sola. Para que un grupo tenga una estructura que tome en cuenta estas relaciones, es necesario identificar algunas palabras. Esto quiere decir que necesitamos dar una relación de equivalencia y considerar el grupo cociente correspondiente.

Por ejemplo, si quisiéramos que dos elementos a y b conmutaran, tendríamos que identificar las palabras ab y ba para que en el grupo cociente las clases de equivalencia de estos dos elementos fueran la misma. Notemos que esto es equivalente a identificar las palabras $b^{-1}aba^{-1}$ y e . Diremos que la ecuación $b^{-1}aba^{-1} = e$ es una relación en el conjunto $F[S]$.

Supongamos ahora que tenemos una colección de relaciones de la forma $r_i = e$, y consideremos el menor subgrupo normal de $F[S]$ que contiene a los elementos r_i , que llamaremos R . En el grupo cociente $F[S] / R$, cualquier elemento de R está identificado con el elemento identidad, de manera que éste es el grupo buscado.

Diremos que una presentación con generadores y relaciones para G es una expresión de la forma $G = \langle s_j \mid r_i = e \rangle$, donde los elementos s_j son generadores y las relaciones están dadas en términos de s_j .

5. Análisis de los 17 grupos de simetrías de simetrías de teselaciones periódicas

Presentaremos cada grupo comenzando con una teselación representativa. Para 13 de los 17 grupos de simetrías mostraremos una teselación creada por Escher perteneciente a una colección de 137 dibujos realizados entre 1937 y 1967 [10].

Entre sus trabajos de simetría, Escher tiene dibujos de 16 de los 17 grupos de simetría de teselaciones periódicas. Los correspondientes a los grupos cmm , $p4m$ y $p6m$ son bocetos que se pueden encontrar en el libro de Doris Schattschneider *Visions of Symmetry* [2], pero no están disponibles en la red. El grupo pm es el único del que no se tiene registro en la obra de Escher de acuerdo a [2].

En los casos en los que no podemos tomar ilustraciones de Escher, escogeremos piezas del libro *The Grammar of Ornament* de Jones Owen [6], que es una excelente colección de ornamentos de distintas culturas. No todas las piezas que escogimos son teselaciones propiamente, pero todas son patrones que corresponden con los grupos de simetrías.

Para cada grupo mostraremos un diagrama donde se puedan visualizar las simetrías que lo conforman. Esto se hará usando la propiedad de que las teselaciones son periódicas, ya que como los patrones se repiten a lo largo del plano, podemos distinguir una región finita que contiene toda la información geométrica. Esta región será llamada *celda unitaria*, y las imágenes de ella bajo la acción de las traslaciones del grupo de simetrías cubren todo el plano con la teselación.

De hecho, podemos encontrar una región aún más pequeña, llamada *región fundamental*, cuyas imágenes bajo la acción de todas las simetrías (no sólo las traslaciones) cubren todo el plano con la teselación. Esta región está contenida en la celda unitaria, y destacaremos un ejemplo para cada grupo.

Para cada grupo mostraremos dónde podemos situar una celda unitaria respecto a la teselación de Escher que le corresponda. Dentro de ella representaremos algunas simetrías del grupo de acuerdo a la siguiente tabla:



Eje de reflexión



Eje de deslizamiento



Centro de rotación de 180°



Centro de rotación de 120°



Centro de rotación de 90°



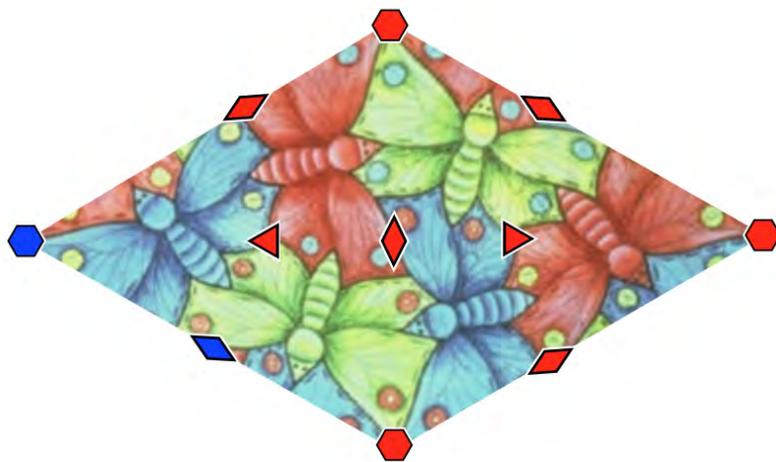
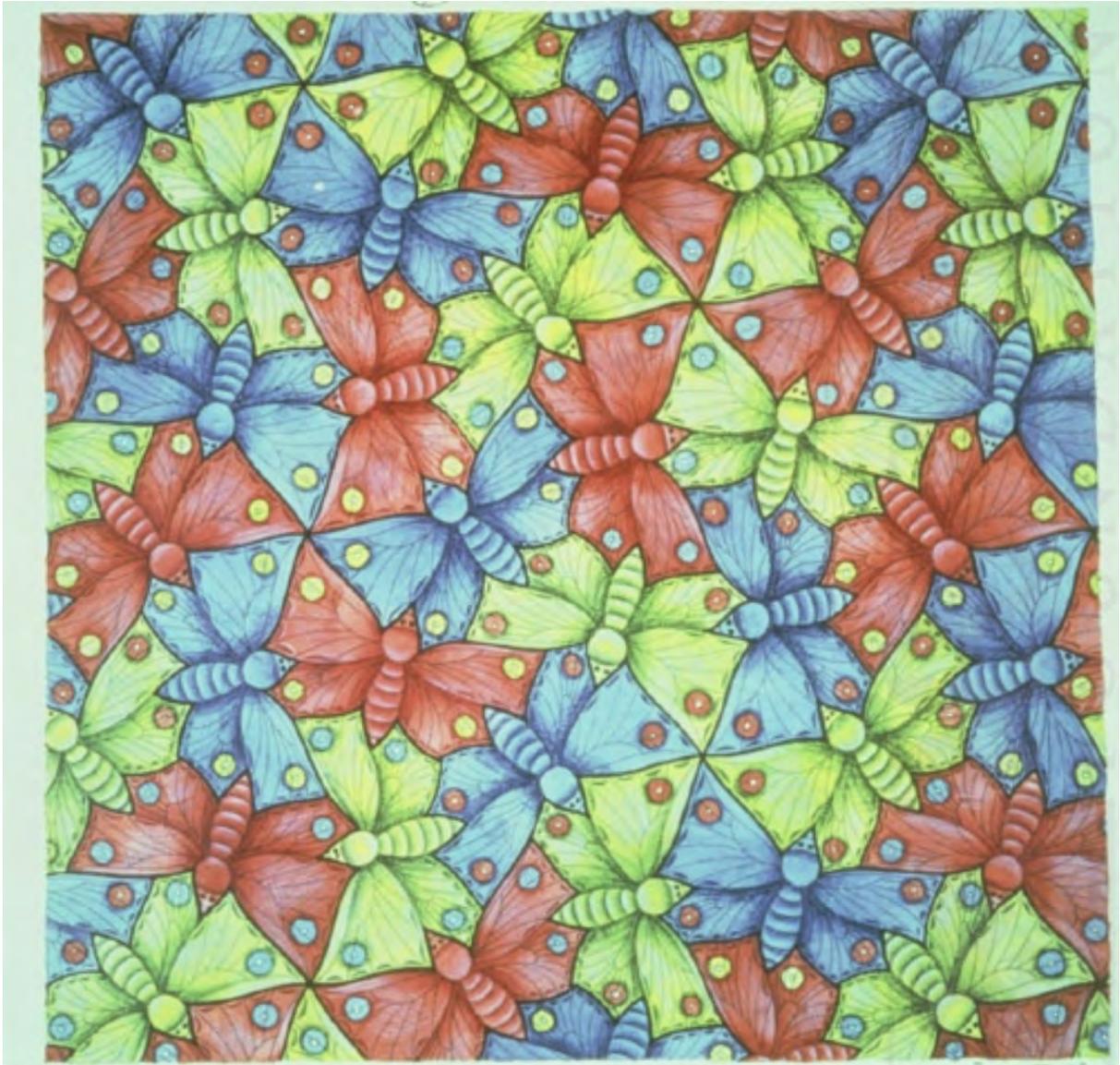
Centro de rotación de 60°

Los símbolos azules corresponden con simetrías que conforman un conjunto generador del grupo, y los símbolos rojos representan otras simetrías del grupo. La orientación de los polígonos es decorativa.

Para cada grupo realizaremos la construcción geométrica de la celda unitaria usando los teoremas del Capítulo 1. Justificaremos por qué las simetrías se deben representar de esa manera. Comenzaremos con los grupos que contienen rotaciones de orden 6, y luego los que contienen rotaciones de orden 4, 3 y 2, hasta llegar a los grupos que no contienen rotaciones.

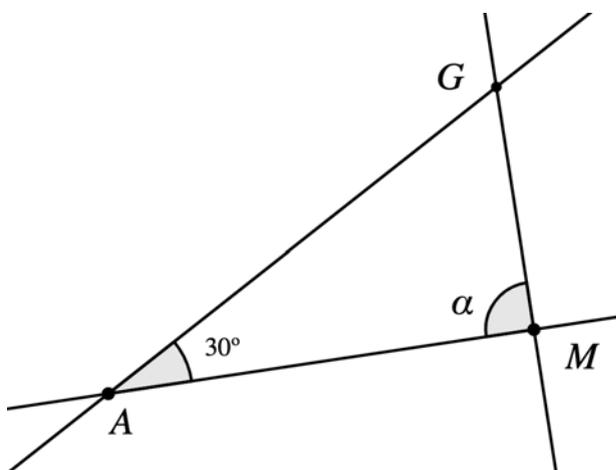
Una vez destacado el conjunto generador del grupo, veremos qué relaciones se pueden dar para construir una presentación con generadores y relaciones, y mostraremos por qué esas relaciones son suficientes.

5.1 p6



Comenzaremos con el único grupo que contiene rotaciones de orden 6 y no contiene reflexiones. Para la construcción de la celda unitaria, supongamos que el grupo de simetrías de una teselación periódica contiene, además de las traslaciones, una rotación de orden 6 con centro en un punto A , denotada por $r_{A,60}$.

Tratemos de encontrar el centro de rotación más cercano a A , digamos M . Si M fuera un centro de orden 3, 4 o 6, la composición de la rotación con centro en M seguida de $r_{A,60}$ resultaría en otra rotación cuyo centro sería más cercano a A que M . Para verlo, podemos expresar ambas rotaciones como el producto de dos reflexiones, como se muestra en la figura.



Si el ángulo α es de 30° , de 45° o de 60° , la distancia $|GA|$ es estrictamente menor que $|AM|$, pero por hipótesis M es el n -centro a distancia mínima de A . Si, en cambio, M es un 2-centro, el ángulo α es de 90° y la distancia $|GA|$ es mayor que $|AM|$, evitando la contradicción. Así es que el centro de rotación más cercano a A debe ser un 2-centro, que denotaremos por S_M .

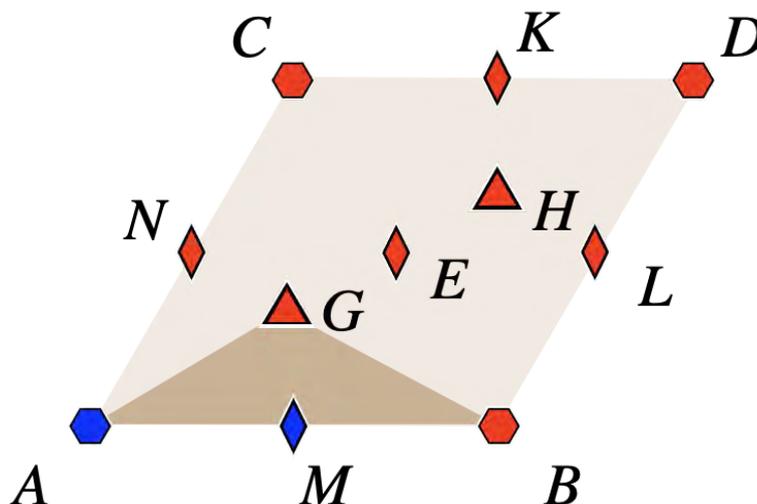
Además, podemos ver que como el ángulo que incide en el punto G es de 60° , G debe ser un centro de rotación de orden 3. Veamos qué otras simetrías se pueden encontrar. La imagen del punto A bajo el semigiros en M debe ser otro 6-centro, llamémosle B . Podemos expresar la rotación centrada en B como la conjugación de A por S_M , es decir, $r_{B,60} = S_M r_{A,60} S_M$.

Un semigiros con centro en un punto E se puede obtener conjugando S_M por $r_{G,60}$, y luego conjugando $r_{G,60}$ por S_E se obtiene la rotación $r_{H,120}$. Finalmente, otros dos semigiros S_K y S_L se obtienen conjugando S_E por las dos potencias de $r_{H,60}$.

La rotación con centro en A por un ángulo de 180° seguida del semigiros S_M resulta en una traslación $t_{AB} = S_A S_M$. Análogamente, si $N = r_{A,60}(M)$ y $C = S_N(A)$, tenemos que $S_N S_A = t_{AC}$. La imagen de A bajo cualquier traslación debe ser otro 6-centro, y los puntos B y C son 6-centros a distancia mínima de A , así que las traslaciones t_{AB} y t_{AC} son traslaciones mínimas.

Esta información se puede representar en el siguiente diagrama. Los 6-centros están marcados con hexágonos, los 3-centros con triángulos y los 2-centros con diamantes. Aunque sabemos que hay una infinidad de centros de rotación en el plano, toda la

información geométrica se puede capturar dentro del paralelogramo $ABCD$, que es la celda unitaria de este grupo y está determinada por las traslaciones mínimas t_{AB} y t_{AC} .



Notemos que el triángulo ABG está sombreado. Las imágenes de esta región bajo $r_{G,60}$ cubren el triángulo ABC , y la imagen de éste bajo el semigiros S_E es suficiente para cubrir la celda unitaria completa. El triángulo ABG es una región fundamental, la mínima región que bajo la acción del grupo de simetrías puede cubrir el plano entero.

Notemos que ni la celda unitaria ni la región fundamental son únicas para una teselación. De hecho, siempre existen una infinidad de posibles celdas unitarias para una teselación, y si la región fundamental no es igual a la celda unitaria (esto sólo sucede en el grupo $p1$), hay muchas posibles elecciones de región fundamental dentro de una celda unitaria dada.

Hemos visto que es suficiente agregar un 6-centro al grupo de simetrías de una teselación periódica para obtener el grupo $p6$, así que el grupo debe estar generado por tres elementos:

$$p6 = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,60} \rangle$$

Sin embargo, podemos dar otro conjunto de generadores para el grupo. Como $S_M S_A = t_{AB}$ y $S_N S_A = t_{AC}$, es posible generar todas las simetrías con las tres rotaciones $r_{A,60}$, S_M y S_N . Y como además $S_N = r_{A,60} S_M r_{A,-60}$, no es necesario agregar S_N . Tenemos dos conjuntos generadores:

$$p6 = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,60} \rangle = \langle r_{A,60}, S_M \rangle$$

Ahora daremos una presentación con generadores y relaciones para el grupo. Usaremos las letras u y v para representar los elementos generadores $r_{A,60}$ y S_M . Para dar las relaciones, comenzaremos agregando que

$$u^6 = v^2 = e$$

La rotación $r_{G,120}$ corresponde con el elemento vu^5 , de forma que tenemos la relación

$$(vu^5)^3 = e$$

Resulta que estas relaciones son suficientes para una presentación del grupo $p6$:

$$p6 = \langle u, v \mid u^6 = v^2 = (vu^5)^3 = e \rangle$$

Para asegurarnos de esto, podemos ver que las relaciones correspondientes a las demás simetrías dentro de la celda unitaria se pueden deducir de las anteriores. Para el semigiro S_N , queremos ver que $(uvu^1)^2 = e$, y de hecho:

$$\begin{aligned} (uvu^1)^2 &= (uvu^1)(uvu^1) \\ &= uv^2u^1 \\ &= uu^1 \\ &= e \end{aligned}$$

Para la rotación $r_{B,60}$, queremos ver que $(vuv^1)^6 = e$:

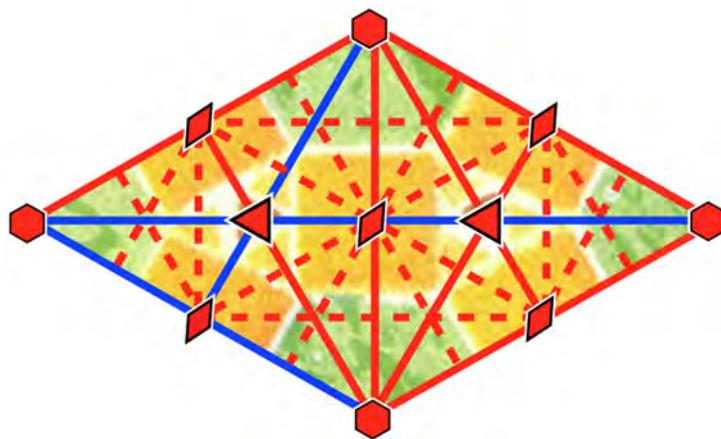
$$\begin{aligned} (vuv^1)^6 &= (vuv^1)(vuv^1)(vuv^1)(vuv^1)(vuv^1)(vuv^1) \\ &= vu^6v^1 \\ &= vv^1 \\ &= e \end{aligned}$$

De la misma manera se deducen las demás. Aunque no profundizaremos en ellas, incluiremos para cada grupo otras presentaciones con generadores y relaciones que se pueden encontrar en [1].

Para el grupo $p6$ tenemos:

$$\begin{aligned} p6 &= \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^6 = e \rangle \\ &= \langle a, b, c \mid a^3 = b^2 = c^3 = (ac)^3 = e, bab = c \rangle \\ &= \langle a, b, c \mid a^6 = b^3 = c^2 = abc = e \rangle \end{aligned}$$

5.2 $p6m$



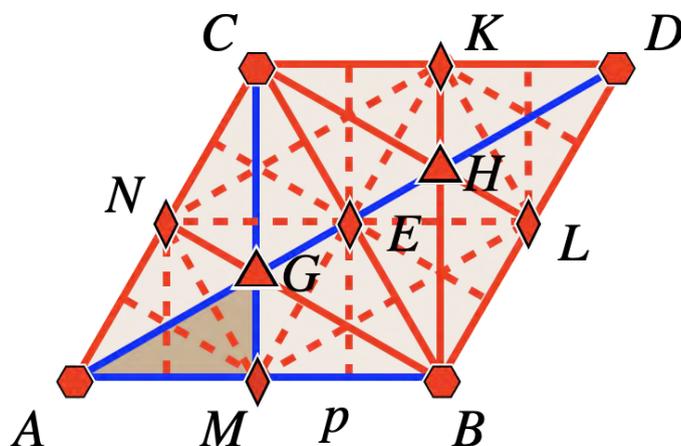
Este grupo se obtiene a partir de $p6$ agregando una reflexión. Para agregar una reflexión adecuada, debemos asegurarnos que los centros de rotación bajo la reflexión vayan a dar a otros (o posiblemente el mismo) centros de rotación. Resulta que agregar cualquier reflexión de este tipo conduce al mismo grupo. Agregaremos la reflexión respecto a la recta CM , σ_{CM} , y deduciremos las demás simetrías.

Conjugando σ_{CM} con la rotación de orden 3 con centro en G obtenemos dos reflexiones, $\sigma_{NB} = r_{G,120} \sigma_{CM} r_{G,-120}$ y $\sigma_{AD} = r_{G,240} \sigma_{CM} r_{G,-240}$. Haciendo lo mismo pero conjugando la reflexión σ_{AD} por la rotación centrada en H , obtenemos $\sigma_{BK} = r_{H,120} \sigma_{AD} r_{H,-120}$ y $\sigma_{CL} = r_{H,240} \sigma_{AD} r_{H,-240}$.

También es posible obtener las cuatro reflexiones respecto a los lados del paralelogramo $ABCD$. La reflexión σ_{AB} se obtiene al componer σ_{CM} con el semigiros S_M , es decir, $\sigma_{AB} = S_M \sigma_{CM}$. Una vez obtenida ésta, conjugamos por las rotaciones con centros en las esquinas del paralelogramo para obtener σ_{AC} , σ_{BC} y σ_{DB} .

Éstas son todas las posibles reflexiones dentro de la celda unitaria dada por el paralelogramo $ABCD$, aunque no son todas las simetrías del grupo. La composición del semigiros con centro en E y la reflexión respecto a la recta CD resulta en un deslizamiento $\gamma_p = \sigma_{CD} S_E$ cuyo eje de reflexión p es la recta que biseca los segmentos CK y MB y su vector de traslación es MC .

Análogamente, componiendo el semigiros con centro en E y la reflexión respecto a la recta BK obtenemos el deslizamiento $\gamma_{NE} = \sigma_{BK} S_E$ cuyo eje de reflexión es la recta NE y su vector de traslación es precisamente NE . Conjugando estos dos deslizamientos por múltiplos de las rotaciones de orden 3 y orden 6 se obtienen 9 deslizamientos más, con lo que completamos las simetrías que se pueden representar dentro de la celda unitaria.



El grupo está generado agregando la simetría σ_{CM} a cualquier conjunto de generadores para $p6$. Sin embargo, también es posible generarlo con las reflexiones σ_{CM} , σ_{AB} y σ_{AD} . Para verlo

basta expresar los generadores $r_{A, 60^\circ}$ y S_M en términos de las tres reflexiones. Tenemos que $\sigma_{AB} = S_M \sigma_{CM}$. Despejando, $\sigma_{AB} \sigma_{CM} = S_M$. El ángulo entre las rectas AM y AD es de 30° , por lo que la composición $\sigma_{AD} \sigma_{AB}$ debe ser una rotación de 60° con centro en su intersección A , es decir, $r_{A, 60^\circ} = \sigma_{AD} \sigma_{AB}$. Tenemos que

$$p6m = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A, 60^\circ}, \sigma_{CM} \rangle = \langle r_{A, 60^\circ}, S_M, \sigma_{CM} \rangle = \langle \sigma_{CM}, \sigma_{AB}, \sigma_{AD} \rangle.$$

Ahora daremos una presentación abstracta de acuerdo al último conjunto de generadores. Tomamos tres elementos u , v y w que correspondan con σ_{CM} , σ_{AB} y σ_{AD} . Entonces, tendremos las relaciones de orden

$$u^2 = v^2 = w^2 = e$$

Luego, como $r_{A, 60^\circ} = \sigma_{AD} \sigma_{AB}$, agregamos la relación

$$(wv)^6 = e$$

También tenemos que $\sigma_{CM} \sigma_{AB} = S_M$, que corresponde con la relación

$$(uv)^2 = e$$

Por último, las rectas CM y AD se intersecan en G con un ángulo de 60° , por lo que su composición debe ser $r_{G, 120^\circ}$, y tenemos la relación

$$(uw)^3 = e$$

Estas relaciones son suficientes para una presentación del grupo $p6m$:

$$p6m = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = (wv)^6 = (uv)^2 = (uw)^3 = e \rangle$$

Veamos cómo deducir las relaciones que corresponden a las simetrías faltantes. Para las simetrías que pertenecen al grupo $p6 = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = (ba^{-1})^3 = e \rangle$, es suficiente encontrar dos elementos a y b en términos de u , v y w que satisfagan las relaciones anteriores. Tomando $a = wv$ y $b = uv$, se tiene trivialmente que $a^6 = b^2 = e$. Además, $(ba^{-1})^3 = ((uv)(wv)^{-1})^3 = (uvv^{-1}w^{-1})^3 = (uw)^3 = e$.

Resta deducir las relaciones correspondientes a las reflexiones. Comenzando con $\sigma_{NB} = r_{G, 120^\circ} \sigma_{CM} r_{G, -120^\circ}$, queremos ver que

$$((uw)u(uw)^{-1})^2 = e,$$

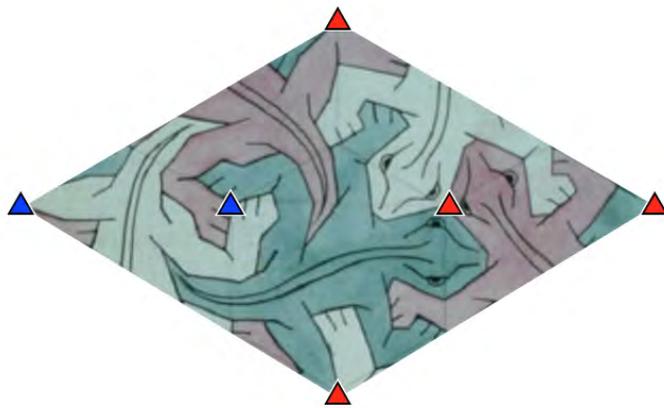
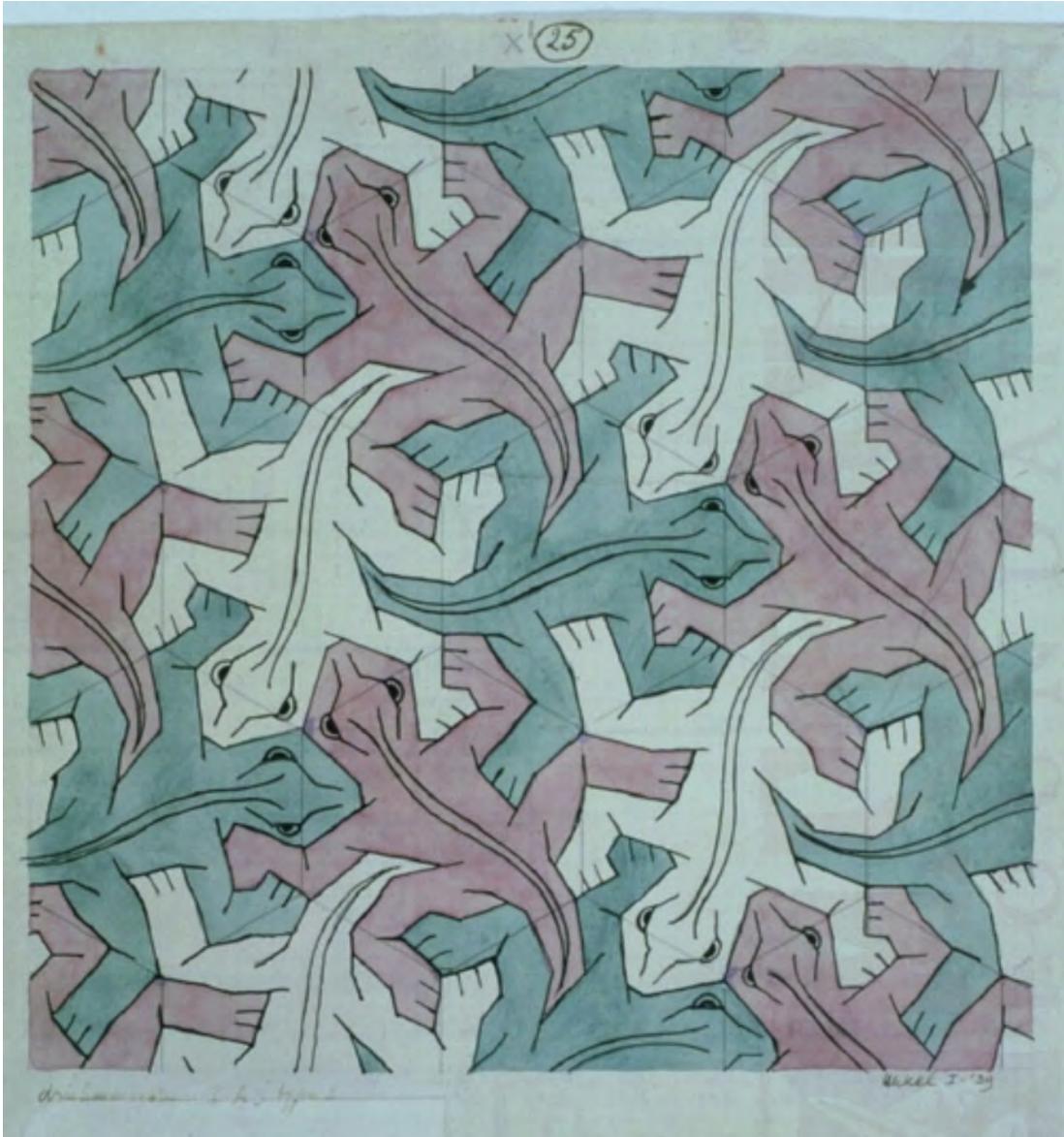
cuya verificación es sencilla. Lo mismo sucede en los demás casos, ya que todas se obtienen a partir de la conjugación de alguna reflexión por otro elemento del grupo.

Por último, quedaría ver las relaciones que corresponden a los deslizamientos. Sin embargo, los deslizamientos no tienen asociados una relación de orden, ya que al componer cualquiera consigo mismo se obtiene una traslación.

Existe al menos otra presentación:

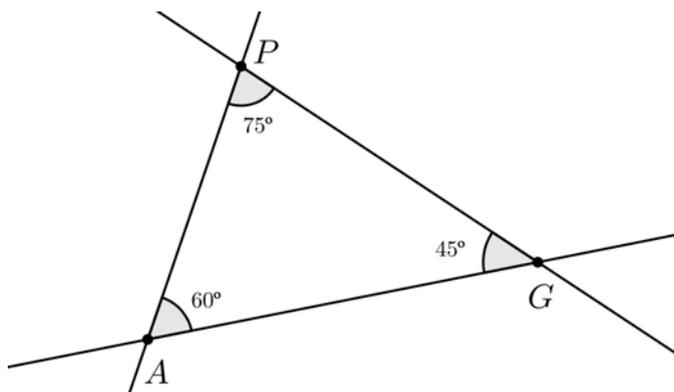
$$p6m = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = e, dad = c, dbd = b \rangle$$

5.3 p3



Un grupo de simetrías cuyas rotaciones de orden mayor son de 120° y no contiene reflexiones debe ser $p3$. Su construcción es parecida a la del grupo $p6$, comenzaremos suponiendo que el grupo de simetrías de una teselación periódica tiene una rotación de 120° con centro en un punto A . Para evitar volver al grupo $p6$, supondremos que en este grupo no hay rotaciones de orden 6. Ahora trataremos de encontrar el centro de rotación más cercano a A .

La composición de una rotación de orden 3 con una rotación de orden 4 resulta en una rotación por un ángulo de 150° , como se muestra en la figura. Este tipo de rotaciones no pueden ser parte del grupo simetrías por el teorema de la restricción cristalográfica.



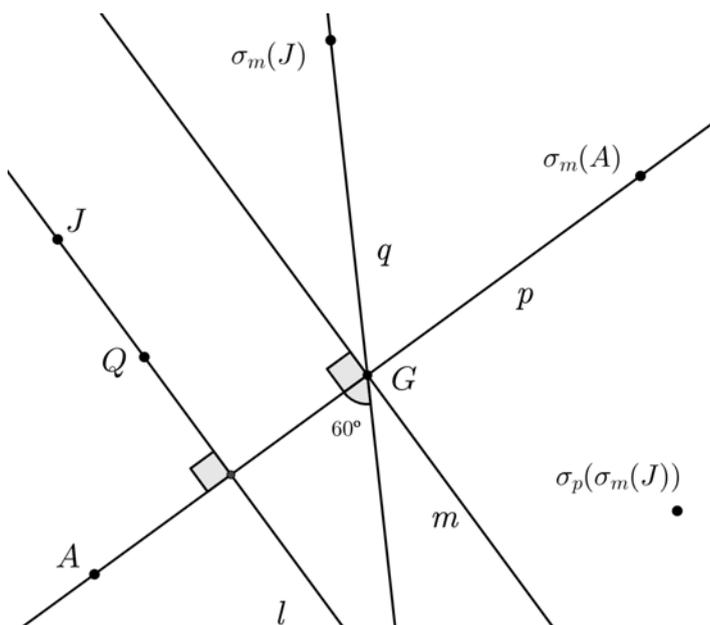
La composición de una rotación de orden 3 con una de orden 2 resulta en otra de orden 6, que no puede estar en el grupo por hipótesis. Esto implica que el centro de rotación más cercano a A debe ser de orden 3, y de hecho, que todos los centros de rotación del grupo deben ser de orden 3.

Ahora trataremos de encontrar las traslaciones mínimas. Suponiendo que el centro de rotación más cercano a A es el punto G , una posibilidad es la traslación t_{AG} porque, como sabemos, la imagen de un 3-centro debe ser otro 3-centro.

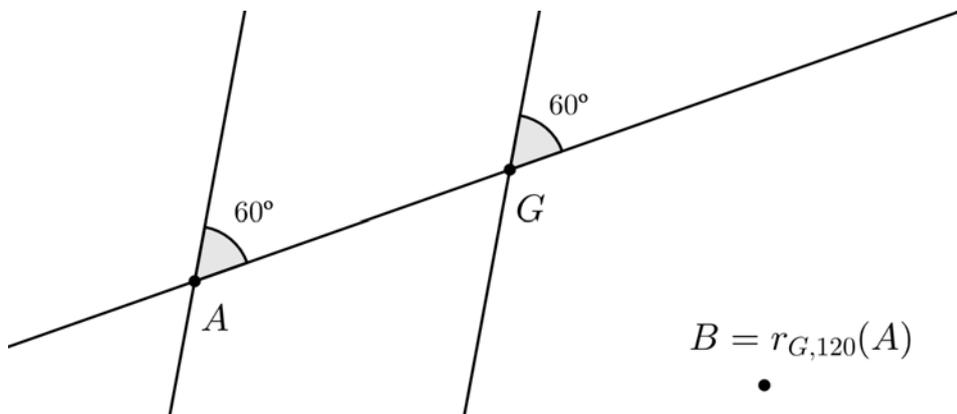
Sin embargo, si esta traslación estuviera en el grupo, resulta que se generaría un 3-centro más cercano a A que G , cosa que no es posible por definición de G .

Para verlo, usaremos la imagen del lado derecho. Expresamos la traslación t_{AG} como la composición de la reflexión σ_l seguida de σ_m , y $r_{G,120}$ como la composición $\sigma_p\sigma_q$.

La composición $r_{G,120}t_{AG}$ envía A en G , G en J y J en A . La única simetría que satisface estas tres condiciones es $r_{Q,120}$.

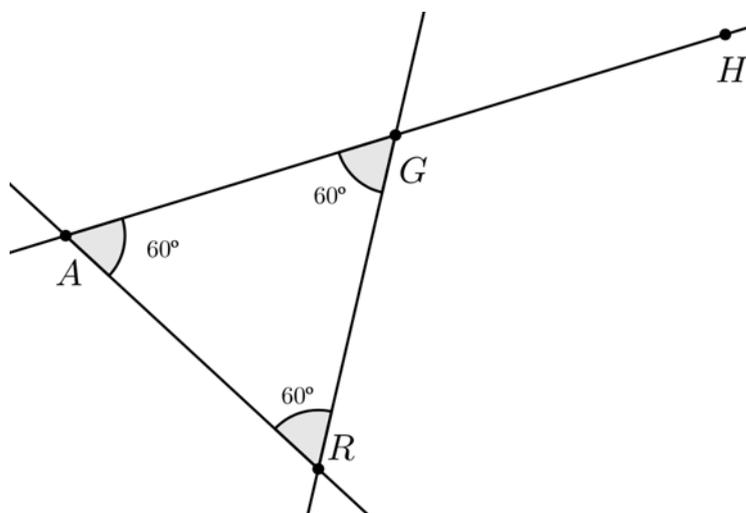


El siguiente 3-centro más cercano a A es, entre otros, el punto $B = r_{G,120}(A)$, así que la traslación t_{AB} es mínima. Esta traslación se puede expresar como la composición de la inversa de la rotación con centro en A con la rotación con centro en G , como se muestra en la figura siguiente:



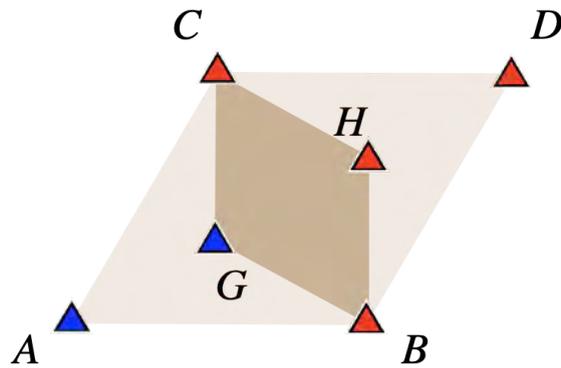
Análogamente, tenemos la traslación $t_{AC} = r_{G,-120}r_{A,120}$ con $C = r_{G,-120}(A)$. Estas dos traslaciones son las que buscamos.

La imagen del punto A bajo $r_{C,120}$ es el punto D , que es el último vértice de la celda unitaria. Falta por describir una última rotación con centro en un punto H . Para construirla, notemos que la composición de $r_{G,120}$ seguida de $r_{A,-120}$ es una rotación con centro en un punto R :



Luego, $r_{H,120}$ es el resultado de conjugar $r_{R,120}$ por $r_{G,120}$.

Con esto completamos la celda unitaria del grupo $p3$:



Como las traslaciones mínimas se obtuvieron a partir de $r_{A,120}$ y $r_{G,120}$, tenemos los conjuntos generadores

$$p3 = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,120} \rangle = \langle r_{A,120}, r_{G,120} \rangle$$

Para una presentación abstracta, tomamos dos elementos, u y v . Comenzamos con las relaciones de orden

$$u^3 = v^3 = e$$

Las relaciones asociadas a las rotaciones en las esquinas de la celda unitaria se pueden deducir como sigue. La rotación con centro en B se puede expresar conjugando la rotación con centro en A por la rotación con centro en G , es decir, $r_{B,120} = r_{G,120}r_{A,120}r_{G,-120}$. Queremos la relación

$$(vuv^{-1})^3 = e,$$

que se deduce trivialmente de las anteriores. Lo mismo sucede con la relación $(v^{-1}uv)^3 = e$, que corresponde a la rotación con centro en C y con la relación $((v^{-1}uv)u(v^{-1}uv)^{-1})^3 = e$, que corresponde a la rotación con centro en D .

Finalmente, por cómo la construimos geoméricamente, la rotación con centro en H corresponde con la relación $(vu^{-1}vu)^3 = (vu^{-1})^3 = e$. Con esta relación completamos la presentación

$$p3 = \langle u, v \mid u^3 = v^3 = (vu^{-1})^3 = e \rangle$$

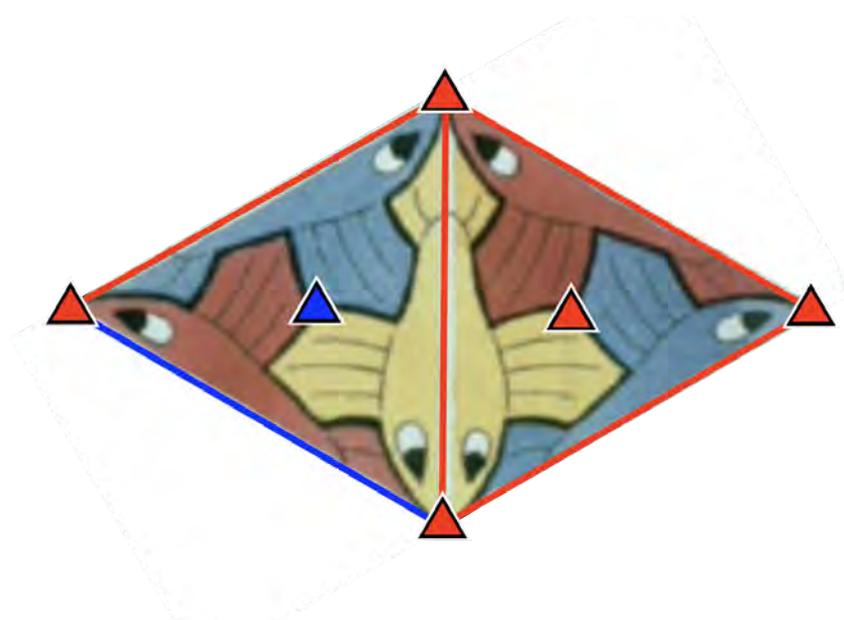
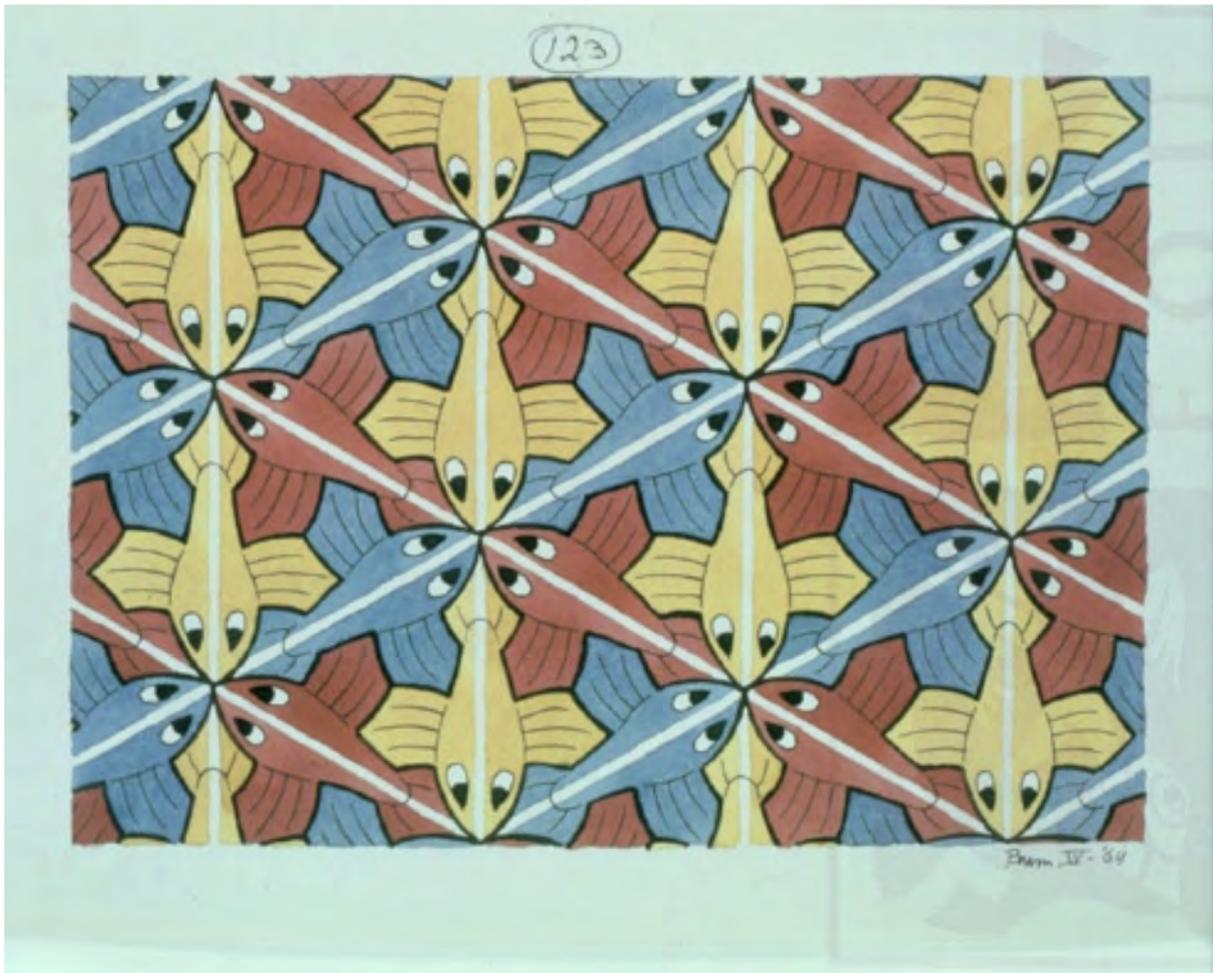
Existen otras presentaciones para este grupo:

$$p3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^3 = e \rangle$$

$$= \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = abc = e \rangle$$

$$= \langle a, b, c, d \mid abc = cba = e, d^3 = e, d^{-1}ad = b, d^{-1}bd = c, d^{-1}cd = a \rangle$$

5.4 p31m

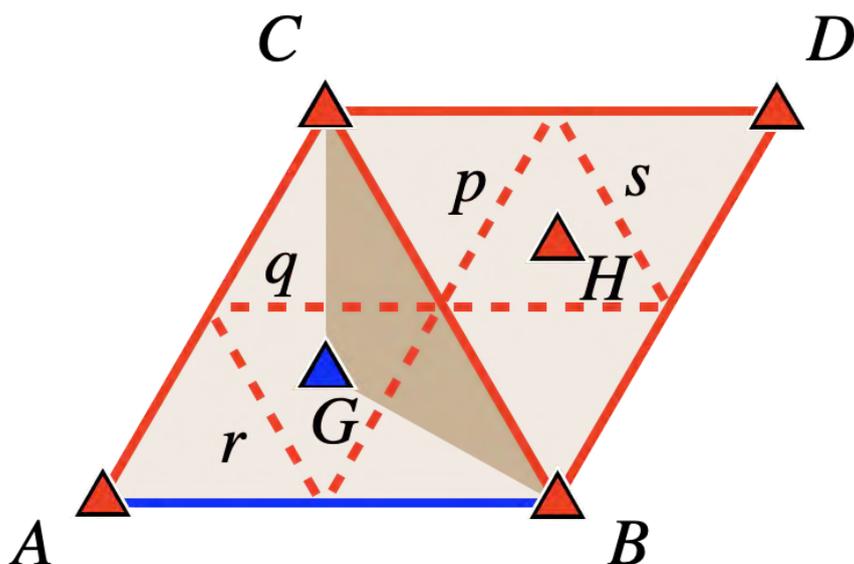


Existen dos extensiones del grupo $p3$ que se obtienen añadiendo reflexiones. Consideremos en primer lugar el grupo $p31m$, que se obtiene agregando la reflexión respecto a la recta AB .

Los lados restantes del paralelogramo $ABCD$ y una de sus diagonales también resultan ser ejes de reflexión. Conjugando σ_{AB} por las dos potencias de la rotación con centro en G obtenemos σ_{AC} y σ_{BC} , y conjugando esta última por la rotación con centro en H obtenemos σ_{CD} y σ_{BD} .

Componiendo la rotación con centro en G con la reflexión σ_{BC} se obtiene un deslizamiento $\gamma_p = \sigma_{BC}r_{G,120}$ cuyo eje de deslizamiento pasa por los puntos medios de AB y de CD , y su vector de traslación tiene magnitud $\frac{1}{2} AC$.

Conjugando este deslizamiento por la rotación con centro en G obtenemos $\gamma_q = r_{G,120} \gamma_p r_{G,-120}$ y $\gamma_r = r_{G,240} \gamma_p r_{G,240}$, y conjugando por la inversa de la rotación con centro en H obtenemos $\gamma_s = r_{H,120} \gamma_p r_{H,-120}$.



También es posible generar el grupo sólo con dos elementos, $r_{G,120}$ y σ_{AB} . Para verlo, basta expresar $r_{A,120}$ en términos de ellos. Como $r_{A,120} = \sigma_{AC}\sigma_{AB}$, y $\sigma_{AC} = r_{G,-120}\sigma_{AB}r_{G,120}$, entonces $r_{A,120} = r_{G,-120}\sigma_{AB}r_{G,120}\sigma_{AB}$. Tenemos que

$$p31m = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,120}, \sigma_{AB} \rangle = \langle r_{A,120}, r_{G,120} \rangle = \langle r_{G,120}, \sigma_{AB} \rangle$$

Para una presentación abstracta consideramos dos elementos u y v , y las relaciones

$$u^3 = v^2 = e.$$

Es necesario añadir la relación que corresponde a $r_{A,120}$,

$$(u^{-1}vuv)^3 = e.$$

Estas relaciones son suficientes para la presentación

$$p31m = \langle u, v \mid u^3 = v^2 = (vu^{-1}vu)^3 = e \rangle$$

Para mostrar que se satisfacen las relaciones de orden de las rotaciones faltantes, podemos usar la presentación del grupo $p3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^3 = e \rangle$. Tomando $a = (u^{-1}vuv)$ y $b = u$, únicamente falta mostrar que $(ab)^3 = e$, que se deduce fácilmente.

También es fácil ver que se satisface la relación $(u^{-1}vu)^2 = e$, que corresponde con la reflexión $\sigma_{BC} = r_{G,-120}\sigma_{AB}r_{G,120}$. Las demás reflexiones se obtienen conjugando σ_{BC} por $r_{A,120}$ y $r_{G,120}$, y las relaciones que les corresponden son análogas a la anterior.

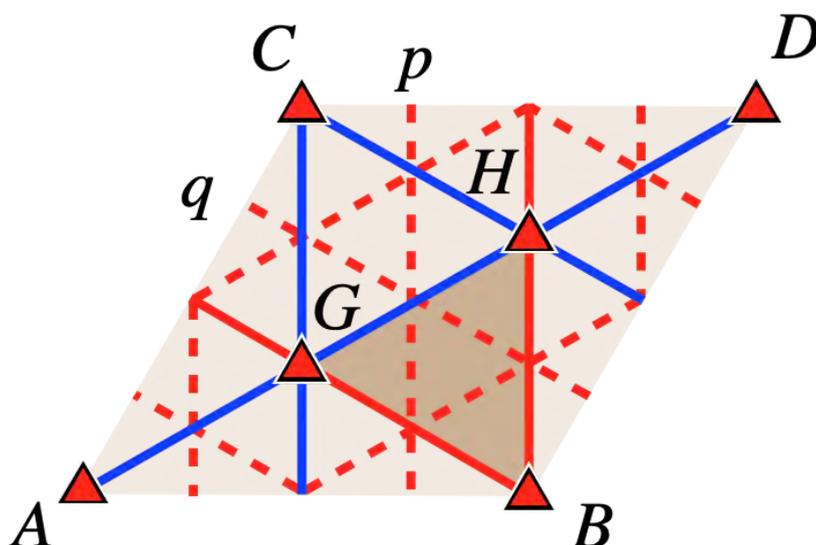
Tenemos otra presentación:

$$p31m = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = (ab)^3 = e, c^2 = e, cac = b^{-1} \rangle$$

Consideremos ahora extender el grupo $p3$ añadiendo la reflexión σ_{AD} . Conjugando σ_{AD} por la rotación $r_{G,120}$ obtenemos las reflexiones σ_{BG} y σ_{CG} , y al conjugar por $r_{G,120}$ obtenemos σ_{CH} y σ_{BH} .

Existen 8 distintos deslizamientos en la celda unitaria de $p31m$. Componiendo la rotación con centro en H con la reflexión σ_{BG} se obtiene uno de ellos, cuyo eje de deslizamiento es la recta p y su vector de traslación tiene por magnitud la altura del paralelogramo. Conjugando este deslizamiento por las reflexión σ_{BH} y σ_{CG} , obtenemos otros dos con ejes paralelos a p .

Análogamente, al componer $r_{B,120}$ con σ_{AD} obtenemos γ_q , y conjugando por σ_{BG} y σ_{CH} obtenemos dos deslizamientos más. Por último, al conjugar γ_p por σ_{CH} y σ_{BG} obtenemos los últimos dos, cuyos ejes son paralelos a la recta AD .



Veamos que también es posible generar el grupo usando las reflexiones σ_{AD} , σ_{CG} y σ_{CH} . Es suficiente expresar $r_{A,120}$ y $r_{G,120}$ en términos de las tres reflexiones. En primer lugar, $r_{G,120} = \sigma_{CG}\sigma_{AD}$. Luego, $r_{A,120}$, es la composición de σ_{AD} seguida de alguna reflexión cuyo eje sea paralelo a BH y pase por A . Una forma de expresar dicha reflexión es primero conjugando σ_{CH} por σ_{AD} , y el resultado conjugarlo por σ_{CG} .

Entonces,

$$p3m1 = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,120}, \sigma_{AD} \rangle = \langle r_{A,120}, r_{G,120}, \sigma_{AD} \rangle = \langle \sigma_{AD}, \sigma_{CG}, \sigma_{CH} \rangle$$

De acuerdo a este último conjunto de generadores, una presentación para el grupo es

$$p3m1 = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = (uv)^3 = (vw)^3 = (wu)^3 = e \rangle$$

Las últimas tres relaciones corresponden con las rotaciones $r_{G,120}$, $r_{C,-120}$ y $r_{H,-120}$.

Como en el caso del grupo anterior, podemos deducir las relaciones de las demás rotaciones usando la presentación del grupo $p3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^3 = e \rangle$. Basta dar las expresiones para $r_{A,120}$ y $r_{G,120}$ en términos de nuestros generadores, es decir, tomamos $a = vuwu^{-1}v^{-1}$ y $b = uv$.

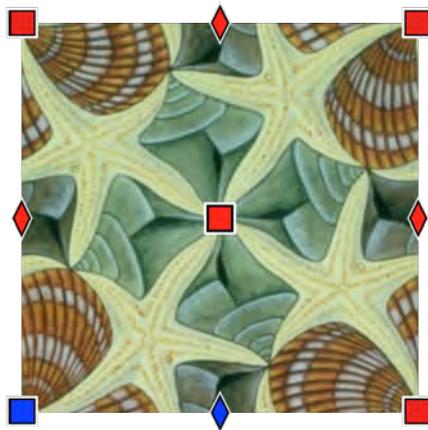
Las dos reflexiones faltantes se expresan fácilmente al conjugar uno de los generadores por otro. Por ejemplo, $\sigma_{BG} = \sigma_{AD}\sigma_{CG}\sigma_{AD}$, y de hecho $(uvu)^2 = e$.

Otra presentación de este grupo es:

$$p3m1 = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = (ab)^3 = e, c^2 = e, a^{-1} = cac, b^{-1} = cbc \rangle$$

Ninguna de las teselaciones que hizo Escher con grupo de simetrías $p3m1$ es monohédrica. Mostramos una teselación con tres teselas distintas cuyo grupo de simetrías es $p3m1$.

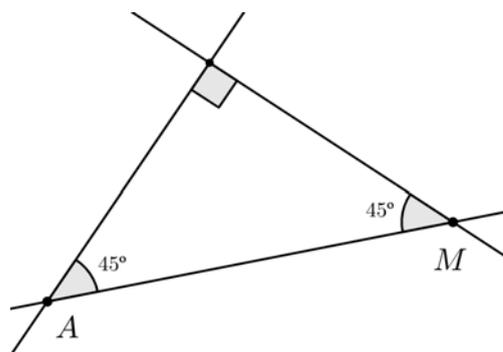
5.6 p4



Este grupo es el único que contiene rotaciones de orden 4 y no contiene reflexiones. Para su construcción, comenzaremos suponiendo que un grupo de simetrías contiene una rotación de orden 4 centrada en un punto A y, como en los casos anteriores, buscaremos el centro de rotación más cercano.

En las construcciones de los grupos $p6$ y $p3$ observamos que, por el teorema de la restricción cristalográfica, las rotaciones de órdenes 6 y 3, no pueden estar en el mismo grupo que una de orden 4, así que en este grupo sólo puede haber 4-centros y 2-centros.

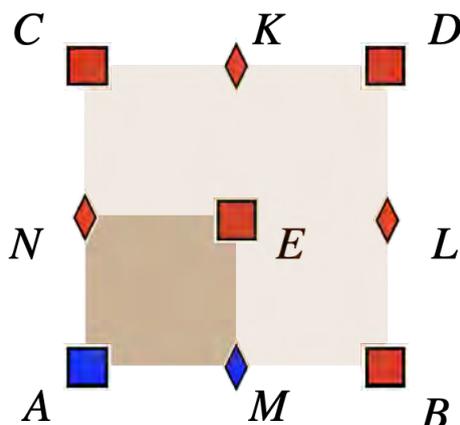
Si el centro de rotación más cercano a A , digamos M , fuera otro 4-centro, la composición $r_{M,90}r_{A,-90}$ resultaría en un semigiro cuyo centro de rotación sería más cercano a A que M , como se muestra en la figura del lado derecho. M debe ser el centro de rotación de un semigiro.



Para encontrar las traslaciones mínimas, nos interesa encontrar el 4-centro más cercano a A .

Este punto se puede ver como el centro de rotación E de la composición $S_M r_{A,-90}$. Sin embargo, resulta que la traslación t_{AE} no puede pertenecer al grupo de simetrías, ya que la composición $t_{AE} S_A$ resultaría en un semigiro cuyo centro de rotación sería más cercano a A que M , de manera que esto no es posible.

Por otro lado, si $N = r_{A,90}(M)$, tenemos las traslaciones $t_{AB} = S_N S_A$ y $t_{AC} = S_M S_A$ donde $B = S_N(A)$ y $C = S_M(A)$. Estas traslaciones son mínimas y sus vectores de traslación son perpendiculares. Finalmente, las imágenes de los puntos A y M bajo las potencias de $r_{E,90}$ forman los demás centros de rotación en la celda unitaria:



Como $r_{E,90} = S_M r_{A,-90}$, podemos expresar S_M en términos de $r_{A,90}$ y $r_{E,90}$. Lo mismo sucede con $t_{AC} = S_M S_A$, y también para la otra traslación mínima t_{AB} . Así, es posible generar el grupo usando las simetrías $r_{A,90}$ y $r_{E,90}$, o bien, $r_{A,90}$ y S_M . Tenemos las expresiones:

$$p4 = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,90} \rangle = \langle r_{A,90}, r_{E,90} \rangle = \langle r_{A,90}, S_M \rangle$$

Una presentación abstracta para el grupo es

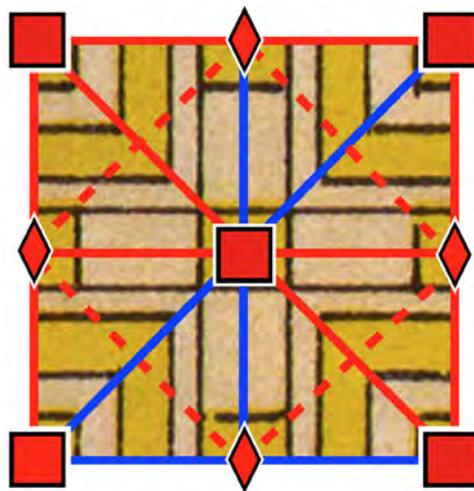
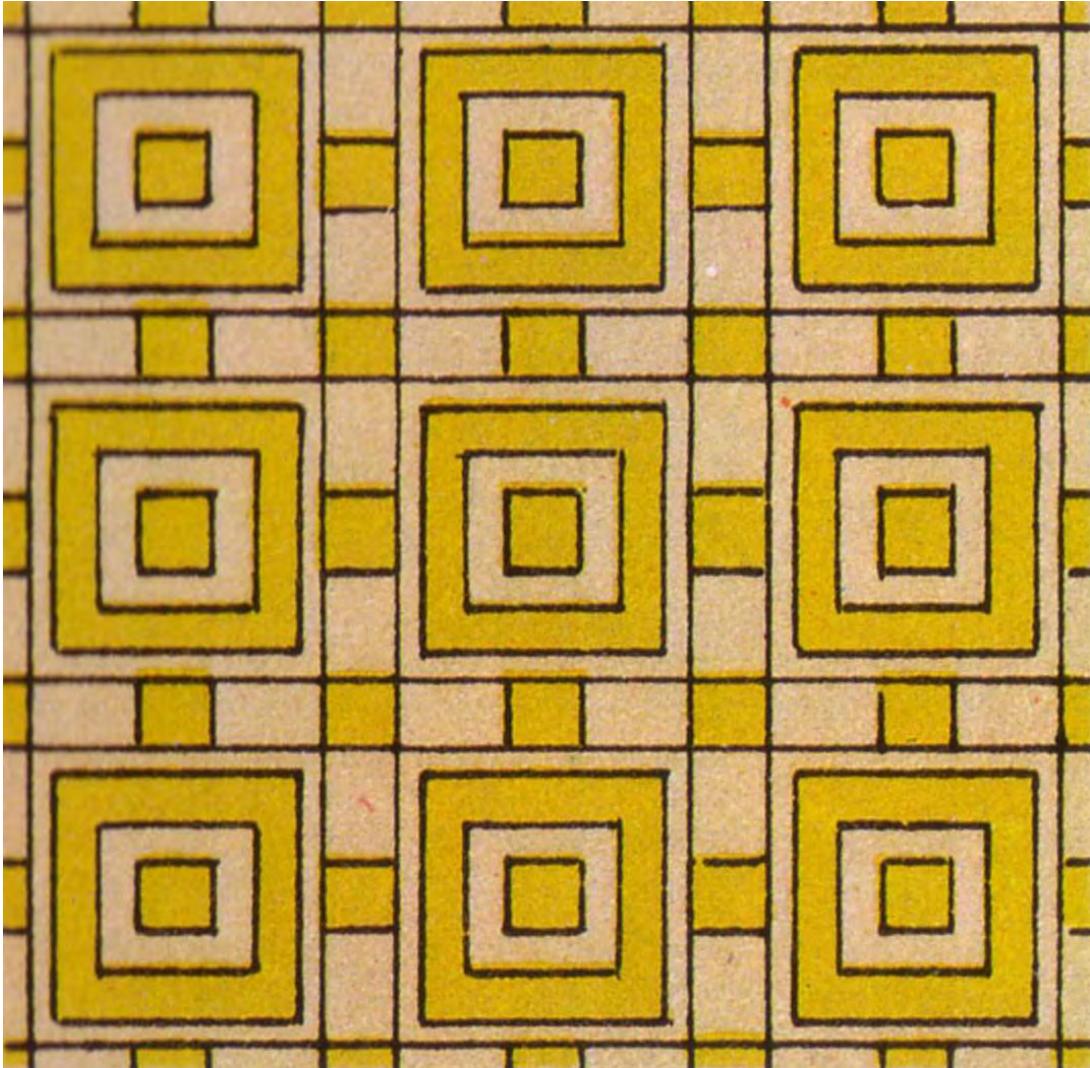
$$p4 = \langle u, v \mid u^4 = v^2 = (uv)^4 \rangle$$

La última relación corresponde con la expresión $r_{E,-90} = r_{A,90} S_M$. Como las rotaciones con centros en los vértices restantes de la celda unitaria se obtienen conjugando u por uv , las relaciones correspondientes se deducen fácilmente de las anteriores. Lo mismo sucede para los semigiros, ya que basta conjugar v por potencias de uv .

Otra presentación para este grupo es:

$$p4 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b \mid a_i^2 = e, a_1 a_2 a_3 a_4 = e, b^4 = e, b^{-1} a_i b = a_i \text{ para } i=1,2,3,4 \rangle$$

5.7 $p4m$

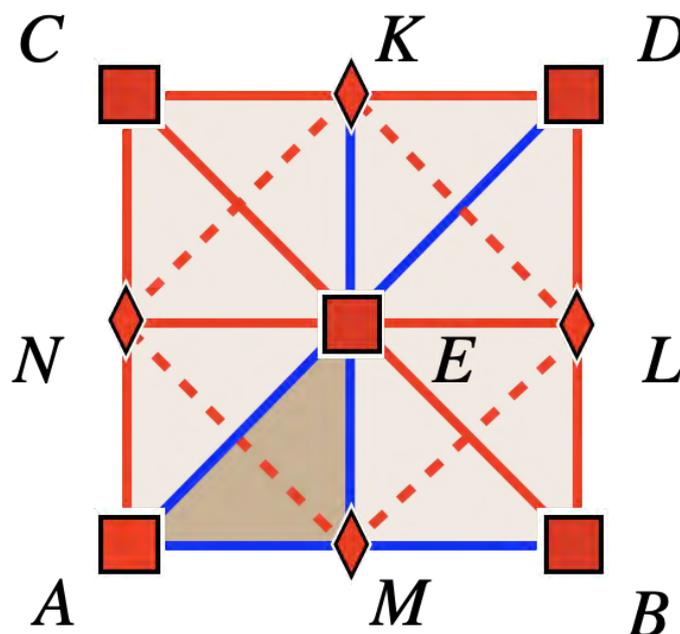


Podemos obtener dos extensiones del grupo $p4$ agregando reflexiones. Estas extensiones se pueden distinguir notando si los ejes de reflexión pasan por los 4-centros o no. Consideremos en primer lugar agregar la reflexión σ_{AE} .

Al conjugar por la rotación con centro en E obtenemos la reflexión σ_{BC} . Luego, la composición de la reflexión σ_{AE} seguida de la rotación con centro en E es σ_{KM} , y al conjugarla por la rotación con centro en E , obtenemos σ_{LN} .

Componiendo la reflexión σ_{AE} ahora seguida de la rotación con centro en A obtenemos σ_{AC} , y conjugando esta reflexión por potencias de la rotación con centro en E obtenemos σ_{AB} , σ_{BD} y σ_{CD} .

La composición del semigiro con centro en M seguido de la reflexión σ_{AE} resulta en un deslizamiento cuyo eje es la recta MN y su vector de traslación es precisamente MN . Conjugando este deslizamiento por potencias de la rotación con centro en E se obtienen tres deslizamientos más.



También es posible generar este grupo usando las reflexiones σ_{AE} , σ_{AB} y σ_{ME} . Para verlo, basta notar que las rotaciones que generan el grupo $p4$ se pueden expresar fácilmente como composiciones de algunas de estas reflexiones.

$$p4m = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,90^\circ}, \sigma_{AE} \rangle = \langle r_{A,90^\circ}, r_{E,90^\circ}, \sigma_{AE} \rangle = \langle \sigma_{AE}, \sigma_{AB}, \sigma_{ME} \rangle$$

Una presentación abstracta es

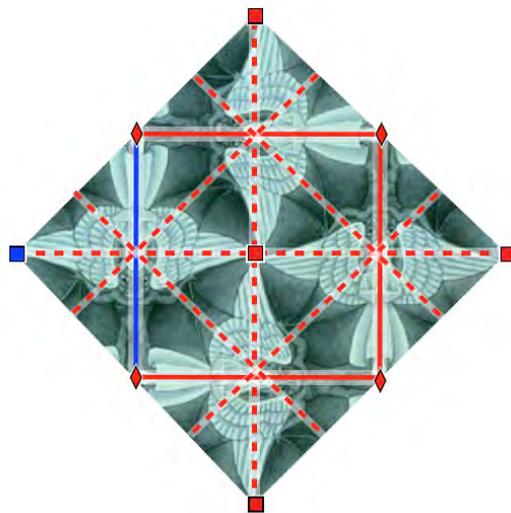
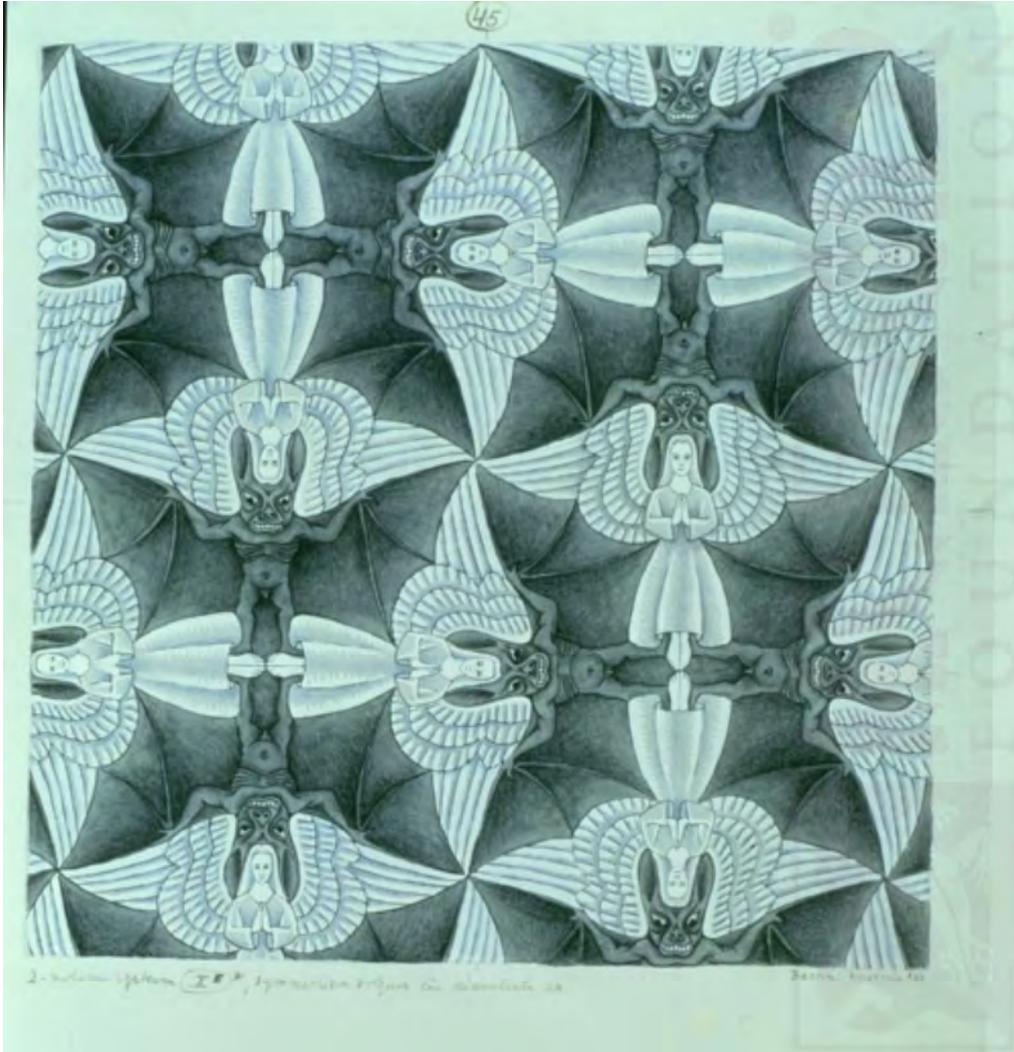
$$p4m = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = (uv)^4 = (vw)^4 = (wu)^4 \rangle$$

Como en el caso de los grupos generados por reflexiones que hemos visto, las últimas relaciones corresponden a las rotaciones asociadas a las composiciones de las reflexiones. El método para deducir las relaciones asociadas a las rotaciones es idéntico al del grupo anterior, y de hecho con el mismo procedimiento podemos obtener las relaciones asociadas a las demás reflexiones, ya que todas se obtienen mediante conjugaciones.

Otra presentación para el grupo es:

$$p4m = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b \mid a_i^2 = e, (a_1 a_2)^2 = (a_2 a_3)^2 = (a_3 a_4)^2 = (a_4 a_1)^2 = e, \\ b^2 = e, b a_i b = a_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \rangle$$

5.8 p4g

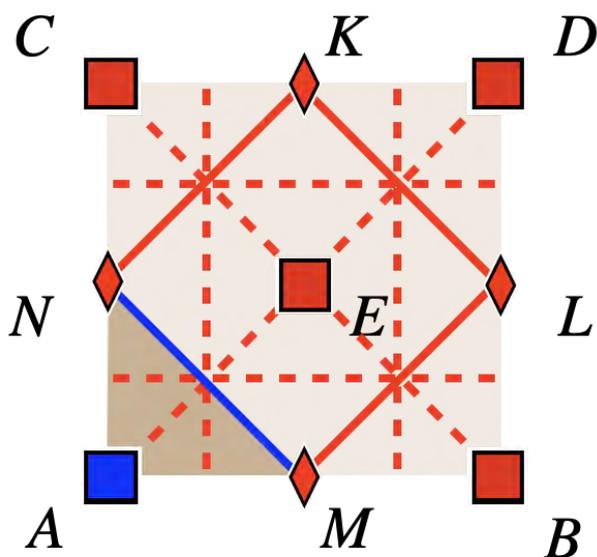


Consideremos ahora extender $p4$ agregando una reflexión cuyo eje no pase por ningún 4-centro, digamos σ_{MN} .

Conjugando por potencias de la rotación con centro en E obtenemos las reflexiones σ_{NK} , σ_{KL} y σ_{ML} . Luego, la composición de la rotación con centro en E seguida de σ_{MN} resulta en un deslizamiento cuyo eje p pasa por los puntos medios de N y E y de A y M , y su vector de traslación es EM , $\gamma_p = \sigma_{MN}r_{E,90}$. La conjugación de este deslizamiento por potencias de $r_{E,90}$ resulta en tres deslizamientos más.

Finalmente, la composición del semigirotación con centro en E seguido de σ_{MN} resulta en un deslizamiento cuyo eje es la recta AE , y su vector de traslación es LM , $\gamma_{AE} = \sigma_{MN}S_E$. Como en los casos anteriores, obtenemos tres deslizamientos más conjugando con potencias de $r_{E,90}$.

Hemos completado la siguiente celda unitaria:



Como $r_{E,90}$ es el conjugado de $r_{A,90}$ bajo σ_{MN} , tenemos los conjuntos generadores

$$p4g = \langle t_{AB}, t_{AC}, r_{A,90}, \sigma_{MN} \rangle = \langle r_{A,90}, \sigma_{MN} \rangle$$

Una presentación abstracta es

$$p4g = \langle u, v \mid u^4 = v^2 = (vu^{-1}vu)^2 \rangle$$

La última relación corresponde con el semigirotación con centro en M . Las relaciones de las rotaciones y las reflexiones faltantes se deducen fácilmente conjugando cualquiera de los tres elementos u , v y $vu^{-1}vu$ por potencias de vuv , que corresponde con $r_{E,90}$.

Por ejemplo, la reflexión σ_{NK} corresponde con el elemento $(vuv)v(vuv)^{-1} = vuvu^{-1}v$. Tenemos que

$$(vu^{-1}vu)^2 = e$$

$$(vu^{-1}vu)(vu^{-1}vu) = vu^{-1}(vuvu^{-1}v)u = e$$

$$vuvu^{-1}v = uvu^{-1}$$

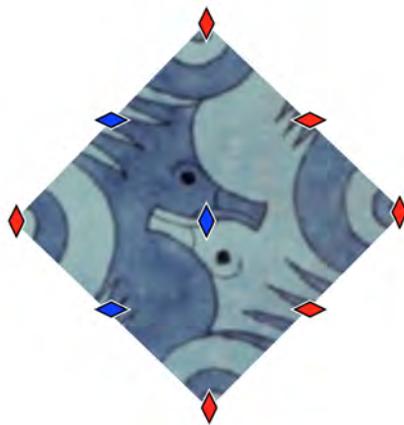
Luego, $(uvu^{-1})^2 = e$ es fácil de corroborar.

Otra presentación es:

$$p4 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b \mid a_i^2 = e, (a_1a_2)^2 = (a_2a_3)^2 = (a_3a_4)^2 = (a_4a_1)^2 = e,$$

$$b^4 = e, b^{-i}a_i b^i = a_i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \rangle$$

5.9 p2



Las rotaciones de orden mayor en este grupo son de orden 2, y no contiene reflexiones. Para su construcción, supongamos que tenemos un semigiros con centro en un punto E y alguna traslación mínima t_{PR} . La composición de t_{PR} con S_E resulta en un semigiros, digamos $S_N = S_E t_{PR}$. Equivalentemente, $S_E S_N = t_{PR}$. De aquí se sigue que el vector de traslación PR debe ser el doble del vector NE .

Repitiendo este proceso para otra traslación mínima t_{PQ} cuyo vector de traslación PQ sea linealmente independiente a PR , obtenemos el semigiros $S_M = S_E t_{PQ}$.

La conjugación del semigiros S_M por el semigiros S_E resulta en otro semigiros, digamos $S_G = S_E S_M S_E$. Análogamente, conjugar S_N por el semigiros S_E resulta en el semigiros S_F .

La composición de los tres semigiros S_E , S_M y S_N también devuelve un semigiros, $S_B = S_E S_N S_M$. El centro de rotación de S_B es una esquina del paralelogramo que tiene a N , M , G , y F en los puntos medios de sus lados.

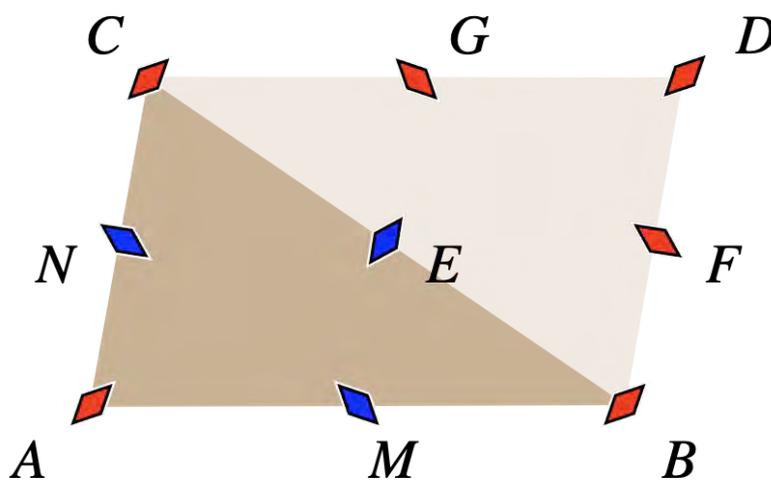
Es posible obtener tres semigiros más de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$S_A = S_N S_E S_M = S_M S_E S_N$$

$$S_C = S_E S_M S_N = S_N S_M S_E$$

$$S_D = S_E S_M S_E S_N S_E = S_E S_N S_E S_M S_E$$

Los centros de rotación de estos semigiros están situados en las tres esquinas faltantes del paralelogramo que tiene a N , M , G , y F en los puntos medios de sus lados. Volviendo a las traslaciones iniciales t_{PR} y t_{PQ} , podemos escoger $P = A$, $R = B$ y $Q = C$.



Tenemos dos conjuntos generadores para el grupo:

$$p_2 = \langle t_{AB}, t_{AC}, S_E \rangle = \langle S_E, S_M, S_N \rangle.$$

Una presentación abstracta para este grupo es

$$p_2 = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = (uvw)^2 = e \rangle$$

La última relación corresponde con S_C . El semigiros con centro en A corresponde con la relación $(vuw)^2 = e$. Se puede deducir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (uvw)^2 &= e \\ (uvw)(uvw) &= e \\ uvw &= wvu \\ uvwu &= wvuu = wv \\ uvwuv &= wv = w \\ vwuv &= uw \\ wuv &= vuw \\ (vuw)^2 &= e \end{aligned}$$

Los semigiros restantes se pueden obtener conjugando alguno de los anteriores por u . Por ejemplo, el semigiro con centro en G corresponde con

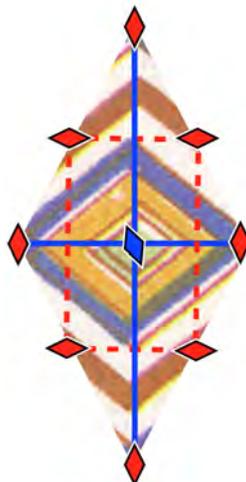
$$(uwu)^2 = e,$$

que se deduce fácilmente.

Otras dos presentaciones para este grupo son:

$$\begin{aligned} p_2 &= \langle a, b, c \mid ab = ba, c^2 = e, a^{-1} = cac, b^{-1} = cbc \rangle \\ &= \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = abcd = e \rangle \end{aligned}$$

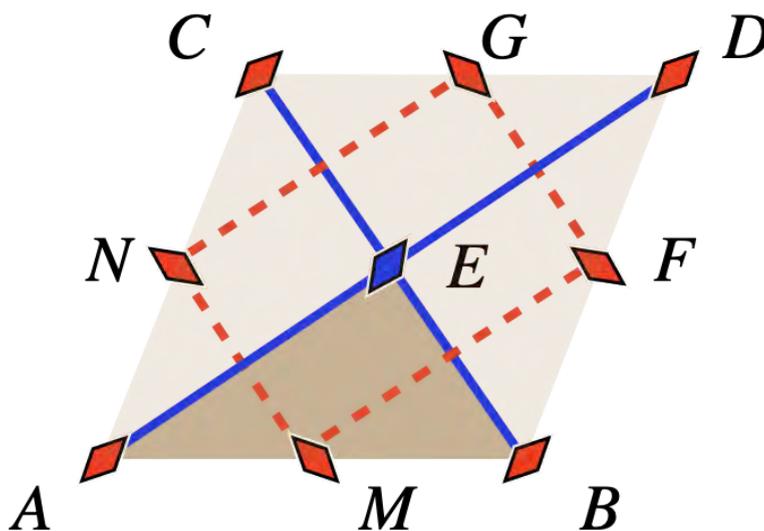
5.10 *cmm*



Existen muchas extensiones del grupo $p2$. Resulta que, en general, cuando el grupo de simetrías de una teselación periódica contiene una reflexión, la celda unitaria sólo puede ser rectangular o rómbica [6]. El grupo cmm se obtiene cuando agregamos una reflexión al grupo $p2$ y se obtiene una celda rómbica no cuadrada.

Para que la reflexión que agregamos envíe centros de rotación en centros de rotación, el eje de reflexión debe ser paralelo a una de las diagonales del rombo, de forma que debe pasar por uno de los 2-centros. Supongamos que agregamos la reflexión σ_{AE} . Notemos que como $S_E = \sigma_{AE}\sigma_{BE}$, es necesario que σ_{BE} pertenezca al grupo de simetrías, y como no es posible obtenerla a partir de los elementos que tenemos hasta ahora, también debemos agregarla.

Además de los semigiros y estas dos reflexiones, podemos construir cuatro deslizamientos en la celda unitaria. La composición del semigiro S_M seguido de σ_{AE} es uno de ellos, cuyo eje de reflexión es la línea MN y su vector de traslación es precisamente MN . Al conjugar por S_E obtenemos otro, con eje de reflexión y vector de traslación GF . Análogamente, la composición de S_M seguido de σ_{BE} es un deslizamiento con eje de reflexión y vector de traslación MF , y al conjugar por S_E obtenemos lo respectivo para NG .



De acuerdo a las ecuaciones $S_E = \sigma_{AE}\sigma_{BE}$ y $S_N = \sigma_{AE}S_M\sigma_{AE}$, vemos que el grupo también es generado por σ_{AE} , σ_{BE} y S_M . Tenemos que:

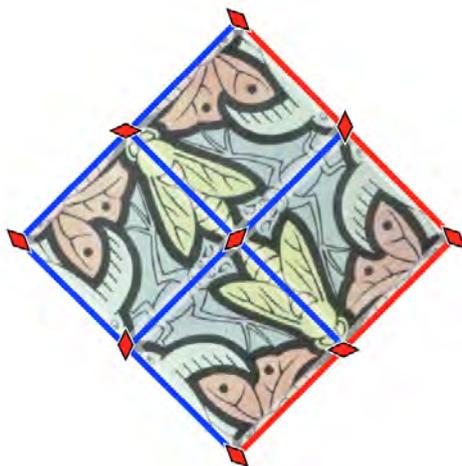
$$cmm = \langle t_{AB}, t_{AC}, S_E, \sigma_{AE}, \sigma_{BE} \rangle = \langle S_E, S_M, S_N, \sigma_{AE}, \sigma_{BE} \rangle = \langle \sigma_{AE}, \sigma_{BE}, S_M \rangle$$

Una presentación de este grupo es

$$cmm = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = (uv)^2 = (uvw)^2 = e \rangle$$

Los elementos uv y $uwvw$ corresponden a los semigiros S_E y S_A . Para ver que se satisfacen las relaciones de los semigiros faltantes, podemos usar la presentación para $p_2 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 \rangle$ tomando $a = uv$, $b = w$ y $c = uwv$.

5.11 pmm

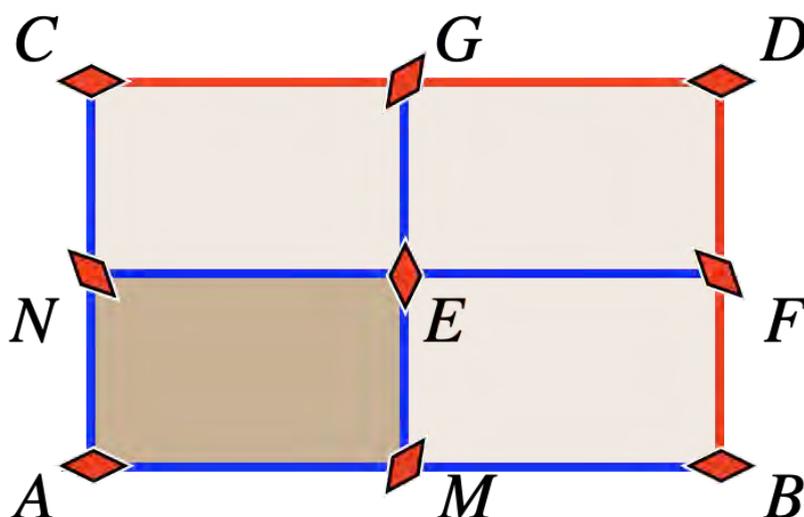


Consideremos ahora el caso en el que al agregar una reflexión a $p2$ obtenemos una celda unitaria rectangular. Para que una reflexión dentro de una celda unitaria rectangular preserve los centros de rotación, el eje de reflexión debe ser paralelo a uno de los lados del rectángulo. En este caso es posible que el eje de reflexión pase por algún centro de rotación o que no pase por ninguno. El grupo pmm corresponde con la primera posibilidad.

Notemos que en el caso excepcional en el que la celda unitaria fuera un cuadrado, también sería posible agregar la reflexión mediante la cual se obtuvo el grupo cm . Sin embargo, en tal caso se obtendrían ángulos de 45° entre algunas de las reflexiones y terminaríamos por reconstruir el grupo $p4m$.

Supongamos que agregamos la reflexión σ_{AM} . Como en el caso del grupo cm , tenemos que $S_A = \sigma_{AM}\sigma_{AN}$, así que es necesario agregar también σ_{AN} .

Al conjugar σ_{AM} por S_E obtenemos σ_{CD} , y al componer S_M seguida de σ_{AM} tenemos σ_{ME} . Análogamente se obtienen σ_{BD} y σ_{NE} .



Es fácil corroborar que también podemos generar el grupo con las cuatro reflexiones σ_{AN} , σ_{AM} , σ_{ME} y σ_{NE} . Tenemos que:

$$pmm = \langle t_{AB}, t_{AC}, S_E, \sigma_{AM}, \sigma_{AN} \rangle = \langle S_E, S_M, S_N, \sigma_{AM}, \sigma_{AN} \rangle = \langle \sigma_{AN}, \sigma_{AM}, \sigma_{ME}, \sigma_{NE} \rangle$$

Obtenemos un último grupo generado únicamente por reflexiones. Daremos una presentación abstracta análoga a los casos anteriores, donde se agregan las relaciones de orden para los generadores y las rotaciones que se forman al componerlos:

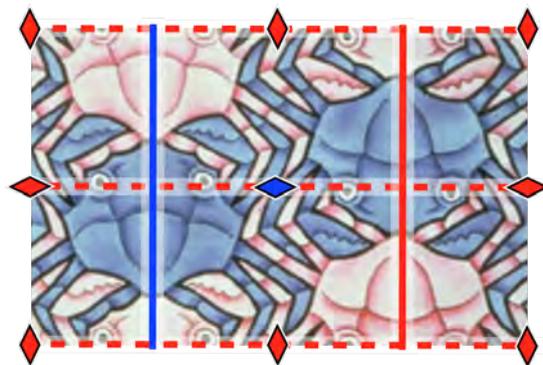
$$pmm = \langle u, v, w, x \mid u^2 = v^2 = w^2 = x^2 = (uv)^2 = (vw)^2 = (wx)^2 = (xu)^2 = e \rangle$$

Sólo queda por deducir las relaciones asociadas a dos reflexiones y cinco semigiros. Estas simetrías se pueden expresar conjugando combinaciones de las cuatro reflexiones generadores con los semigiros que se forman al componerlas, y así se pueden deducir fácilmente las relaciones correspondientes. Por ejemplo, como el semigiro con centro en G se obtiene al conjugar S_M por σ_{NE} , le asociamos la relación de orden $(x(vw)x^{-1})^2 = e$, cuya verificación es sencilla.

Otra presentación para este grupo es:

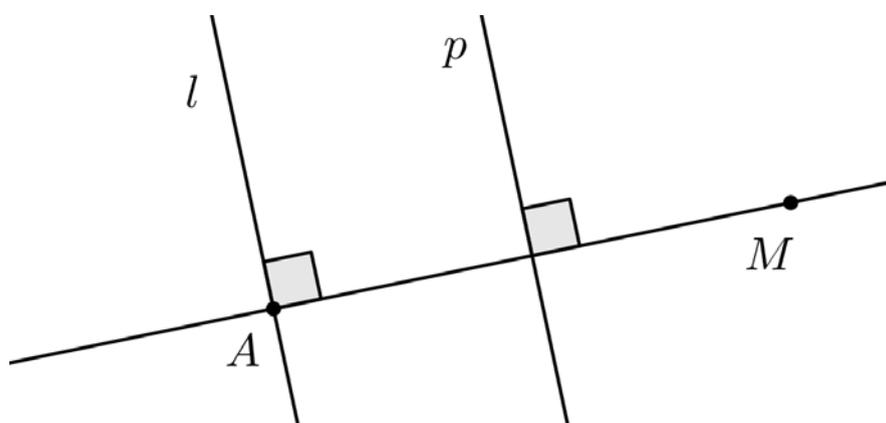
$$pm = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, ad = da, bd = db, a = cac, b = cbc, d^{-1} = cdc \rangle$$

5.12 pmg

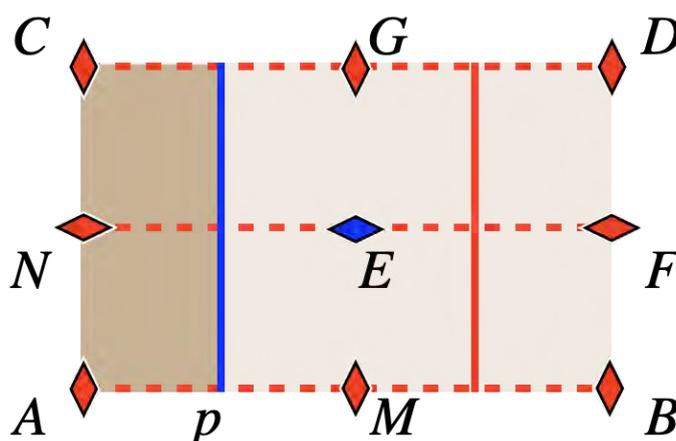


Consideremos ahora el caso en el que agregamos a $p2$ una reflexión cuyo eje de reflexión no pase por los 2-centros. En este caso, el eje de reflexión debe ser paralelo a uno de los lados de la celda unitaria y debe pasar en medio de dos hileras de 2-centros. Supongamos que agregamos la reflexión respecto a la mediatriz del segmento AM , digamos σ_p .

Al conjugar σ_p por S_E obtenemos la reflexión cuyo eje de reflexión es la mediatriz del segmento MB . De acuerdo a la siguiente figura, al componer $S_A = \sigma_p \sigma_{AM}$ seguido de σ_p obtenemos un deslizamiento cuyo eje de reflexión es AM su vector de traslación también es AM . Otros dos deslizamientos análogos se obtienen al componer S_A y S_C seguidos de σ_p .



Con esto completamos la siguiente celda unitaria:



Por último, notemos que como $S_E = \sigma_p S_N \sigma_p$ y $S_M = \sigma_p S_A \sigma_p$, podemos generar el grupo con S_N , S_A y σ_p . Tenemos las expresiones:

$$pmg = \langle t_{AB}, t_{AC}, S_E, \sigma_p \rangle = \langle S_E, S_M, S_N, \sigma_p \rangle = \langle S_N, S_A, \sigma_p \rangle$$

Para dar una presentación de este grupo, notemos que al conjugar σ_p por cualquiera de los semigiros S_N o S_A se obtiene la misma reflexión. Esta relación, junto con las relaciones de orden para cada generador, nos permite completar la siguiente presentación:

$$pmg = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = e, uwu = vvw \rangle$$

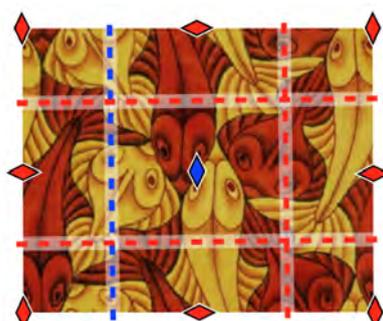
Para asegurarnos de que se satisfacen las relaciones de orden correspondientes a los demás semigiros, usaremos nuevamente la presentación $p2 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 \rangle$. En este caso, $a = wuw$ corresponde con $S_E = \sigma_p S_N \sigma_p$, $b = wvw$ con $S_M = \sigma_p S_A \sigma_p$ y por último $c = u$ con S_N .

La relación de orden para la reflexión faltante es $((wuw)w(wuw)^{-1})^2 = e$, que se deduce fácilmente.

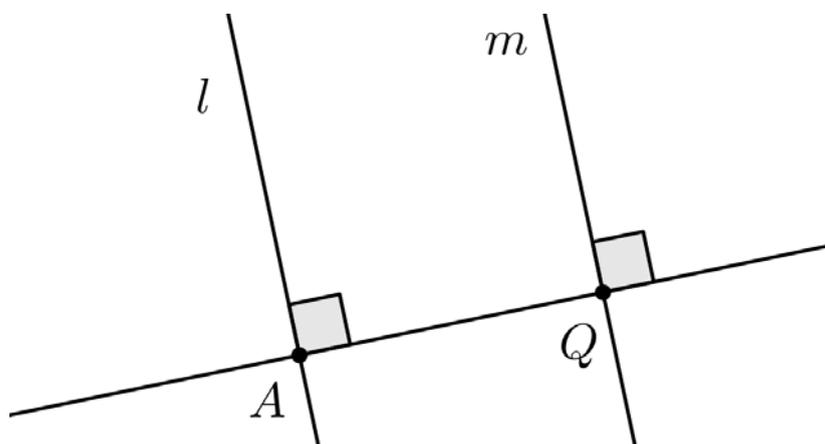
Otra presentación del grupo es:

$$pmg = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2, c^2 = e, a^{-1} = cac, b^{-1} = cbc \rangle$$

5.13 pgg



Es posible obtener una última extensión de $p2$ agregando un deslizamiento. Primero veamos que si agregamos un deslizamiento que pase por alguno de los 2-centros, tendríamos que agregar una reflexión. Basta notar que la composición de un semigiro cuyo centro estuviera en el eje de reflexión seguido del deslizamiento sería una reflexión:



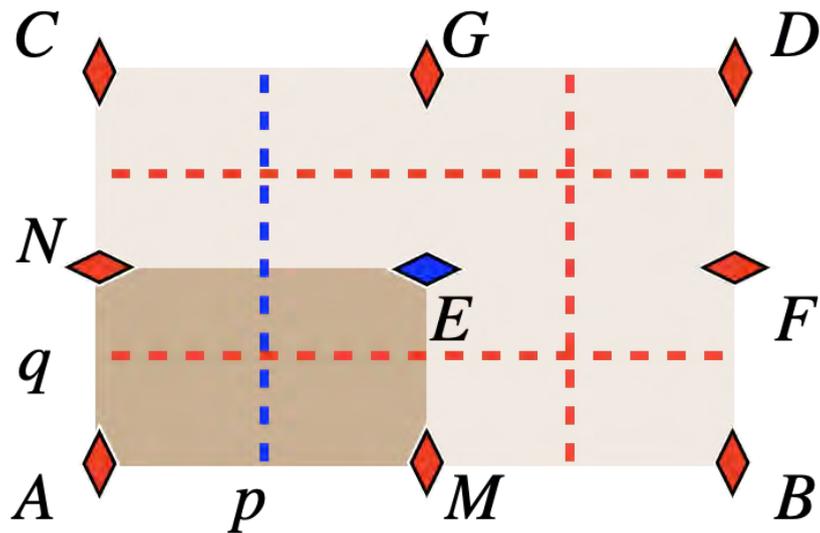
Suponiendo que agregamos un deslizamiento cuyo eje pase por el punto A y su vector de traslación sea $2AQ$, la composición de $S_A = \sigma_{AQ}\sigma_l$ seguida de $\gamma_{AQ} = \sigma_m\sigma_l\sigma_{AQ}$ es una reflexión. En este caso, terminaríamos reconstruyendo el grupo pmg .

Para construir el grupo pgg agregaremos un deslizamiento cuyo eje de reflexión pase por en medio de dos hileras de 2-centros. Sabemos que si la celda unitaria del grupo de simetrías de una teselación periódica contiene un deslizamiento, ésta debe ser un rómbrica o un rectangular, y agregando la propiedad de que el deslizamiento preserve los 2-centros correspondientes al grupo $p2$, la celda unitaria debe ser rectangular.

Supongamos que agregamos un deslizamiento γ_p , donde el eje reflexión p es la mediatriz de AM . Para encontrar un vector de traslación adecuado, notemos que si $\gamma_p(M) = C$, al componer después con la traslación t_{AC}^{-1} , obtendríamos una reflexión respecto a la recta p . Así, el único 2-centro que puede ser imagen de M es N , por lo que el vector de traslación debe ser AN .

Al componer el semigiro S_A seguido de γ_p obtenemos un deslizamiento $\gamma_q = \gamma_p S_A$ cuyo eje q es la mediatriz de AN y su vector de traslación es AM . Esto se puede corroborar notando que dicha composición envía A en E , N en M y M en F .

Por último, al conjugar γ_p y γ_q por S_E obtenemos dos deslizamientos cuyos ejes son paralelos a los de γ_p y γ_q , y comparten el vector de traslación con sus respectivos.



Podemos generar el grupo usando sólo los deslizamientos γ_p y γ_q . Es fácil notar que $\gamma_p^2 = t_{AC}$ y $\gamma_q^2 = t_{AB}$. Resta expresar S_E en términos de los deslizamientos. Por un lado, tenemos que $\gamma_q = \gamma_p S_A$. Además, resulta que $S_E = t_{AC} t_{AB} S_A$. Tenemos las expresiones:

$$pgg = \langle t_{AB}, t_{AC}, S_E, \gamma_p \rangle = \langle \gamma_p, \gamma_q \rangle$$

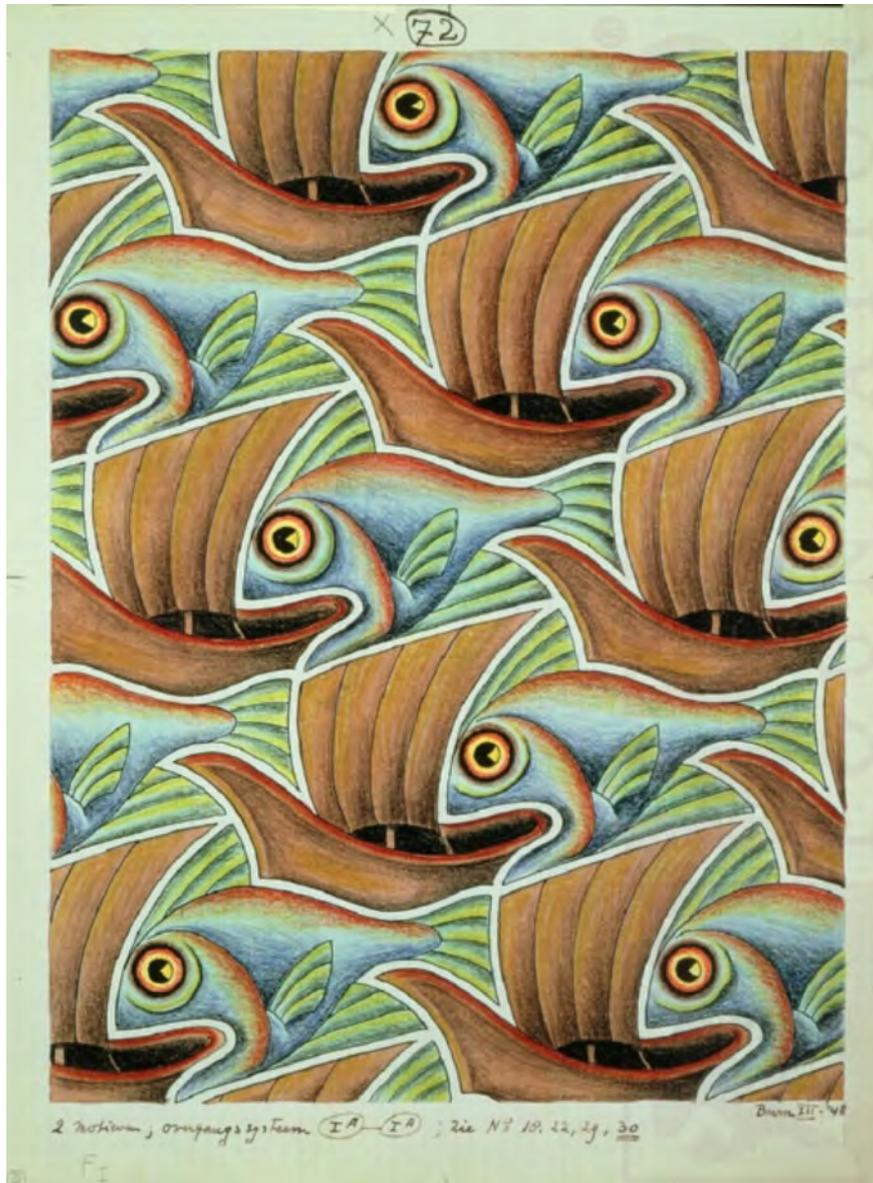
Una presentación abstracta es

$$pgg = \langle u, v \mid (uv)^2 = (u^{-1}v)^2 = e \rangle$$

La primera relación corresponde con el semigiro S_N , pues $\gamma_p \gamma_q$ fija N , y manda A en C y E en $\sigma_M(E)$. Luego, como $\gamma_q = \gamma_p S_A$, la segunda afirmación corresponde con S_A .

Para deducir las relaciones de orden de las rotaciones del grupo usando la presentación $p2 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 \rangle$ basta tomar $a = vu^{-1}$, $b = vu$ y $c = uv$.

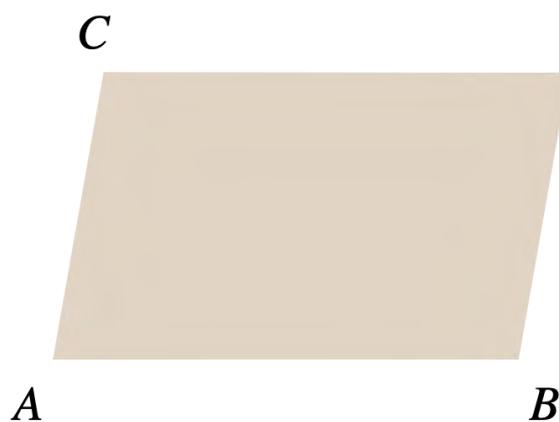
5.14 p1



Consideremos ahora un grupo de simetrías sin rotaciones. El caso más simple es $p1$, que está generado por dos traslaciones cuyos vectores de traslación no son linealmente independientes. Para construirlo, basta escoger tres puntos A , B y C no colineales que determinen las traslaciones t_{AB} , t_{AC} .

Otra presentación es:

$$p1 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2, c^2 = e, b^{-1} = cac \rangle$$

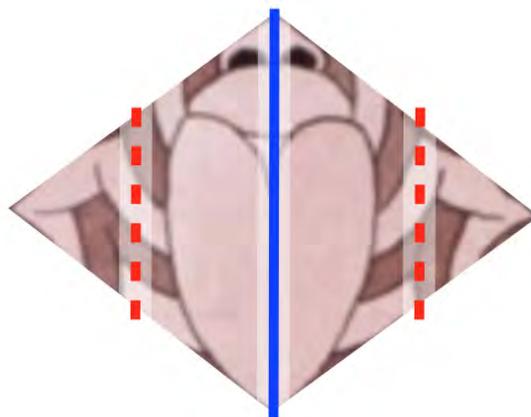
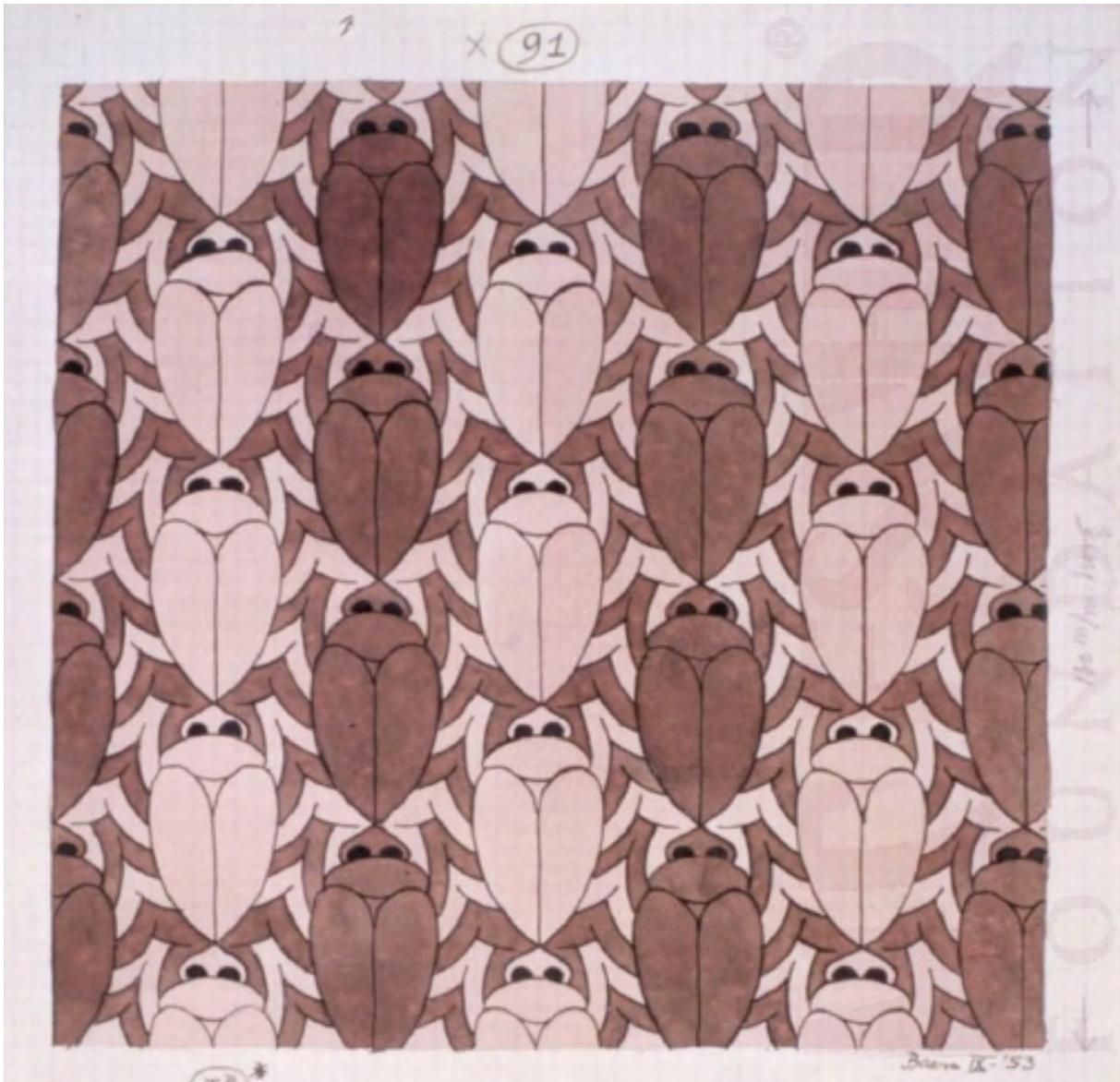


$$p1 = \langle t_{AB}, t_{AC} \rangle$$

Las traslaciones conmutan entre sí, por lo que una presentación abstracta es

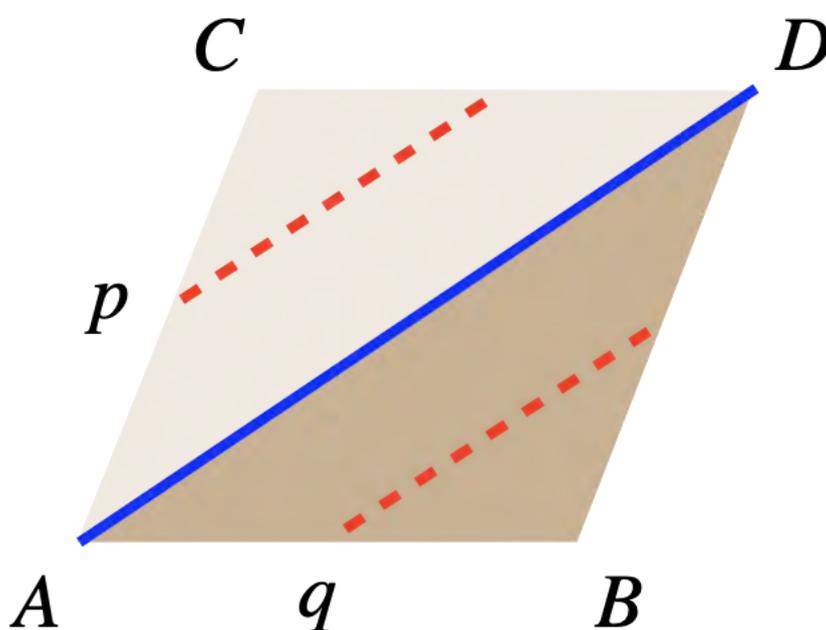
$$p1 = \langle u, v \mid uv = vu \rangle$$

5.15 cm



Como en el caso de $p2$, existe más de una manera de extender $p1$ agregando una reflexión. El grupo cm corresponde con el caso en el que al agregar una reflexión se obtiene una celda unitaria rómbica no rectangular. En este caso, la reflexión debe ser paralela a una de las diagonales de la celda unitaria, así que podemos suponer que agregamos la reflexión σ_{AD} .

La composición de la traslación t_{AB} con σ_{AD} es un deslizamiento $\gamma_p = \sigma_{AD}t_{AB}$ cuyo eje de reflexión p pasa por los puntos medios de los segmentos AC y CD , y su vector de traslación es $\frac{1}{2} AD$. Si componemos con la traslación t_{AC} obtenemos un otro deslizamiento $\gamma_q = \sigma_{AD}t_{AC}$.



Notemos que $\gamma_p^2 = t_{AD}$, y además $t_{AD}t_{AB}^{-1} = t_{AC}$, de manera que podemos generar el grupo usando sólo γ_p y σ_{AD} .

$$cm = \langle t_{AB}, t_{AC}, \sigma_{AD} \rangle = \langle \sigma_{AD}, \gamma_p \rangle$$

Una presentación abstracta para este grupo es

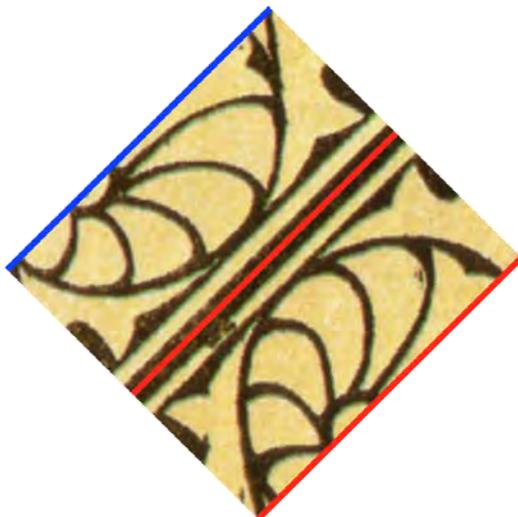
$$cm = \langle u, v \mid u^2 = e, uv^2 = v^2u \rangle$$

La segunda relación describe la conmutatividad de t_{AD} con σ_{AD} , que es consecuencia de que el vector de traslación AD sea paralelo al eje de reflexión AD .

Existe otra presentación:

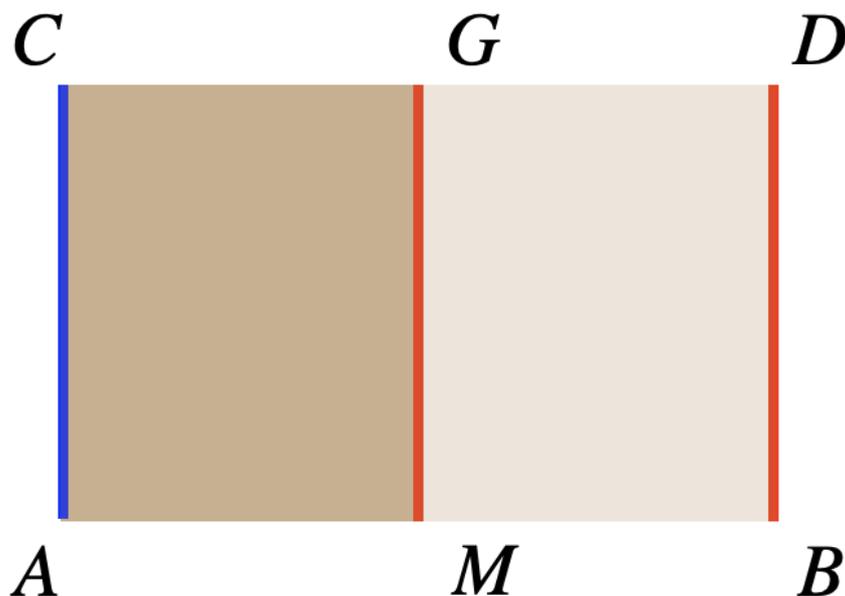
$$pm = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2, c^2 = e, cac = b \rangle$$

5.16 μm



El grupo pm se obtiene cuando al agregar una reflexión a $p1$ obtenemos una celda unitaria rectangular, en cuyo caso el eje de reflexión debe ser alguno de los lados del rectángulo. Supongamos que agregamos σ_{AC} .

Al conjugar σ_{AC} por la traslación t_{AB} obtenemos la reflexión respecto a la recta BD , es decir $\sigma_{BD} = t_{AB}\sigma_{AC}t_{AB}^{-1}$. Por otro lado, la composición $\sigma_{AC}t_{AB}^{-1}$ es la reflexión σ_{MG} .



Usando la definición de σ_{MG} , tenemos dos conjuntos de generadores:

$$pm = \langle t_{AB}, t_{AC}, \sigma_{AC} \rangle = \langle t_{AC}, \sigma_{AC}, \sigma_{MG} \rangle$$

Una presentación es

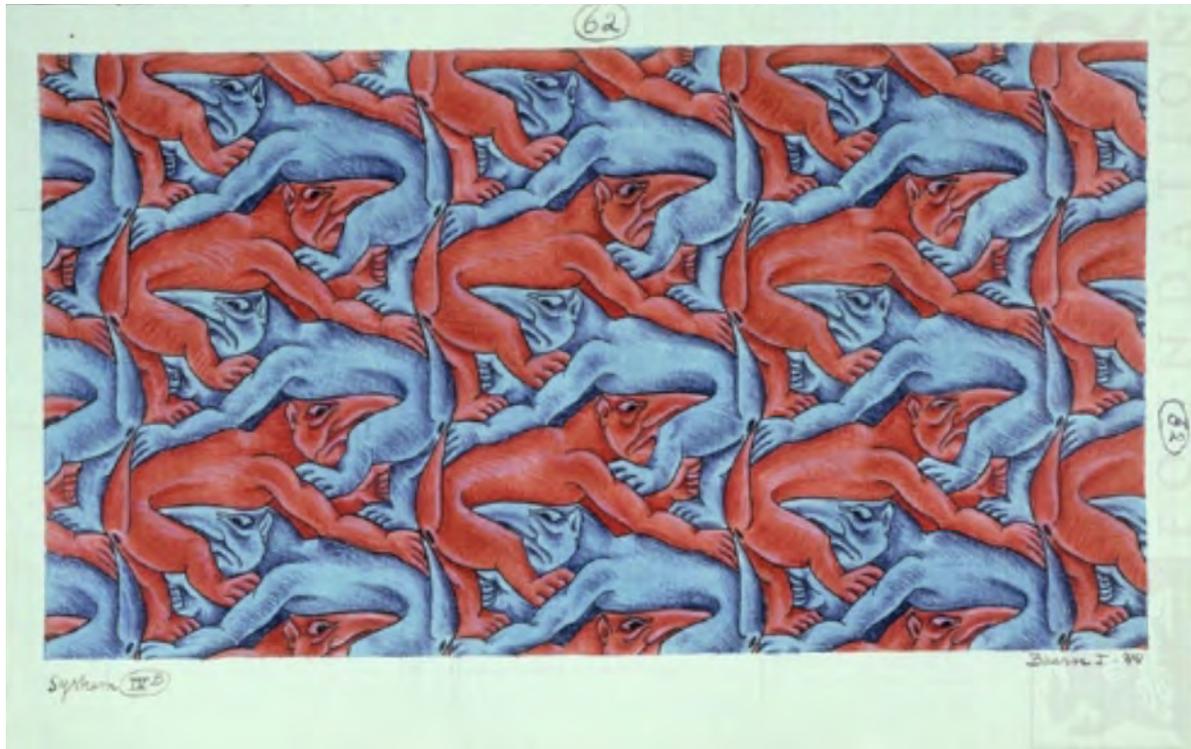
$$pm = \langle u, v, w \mid v^2 = w^2 = e, uv = vu, uw = wu \rangle$$

donde las últimas dos relaciones corresponden a la conmutatividad de las reflexiones con la traslación t_{AC} , que, como en el caso anterior, se debe a que el vector de traslación es paralelo al eje de reflexión. La relación correspondiente a σ_{BD} es $(wvw)^2 = e$.

Otra presentación es:

$$pm = \langle a, b, c \mid ab = ba, c^2 = e, a^{-1} = cac, b = cac \rangle$$

5.17 pg



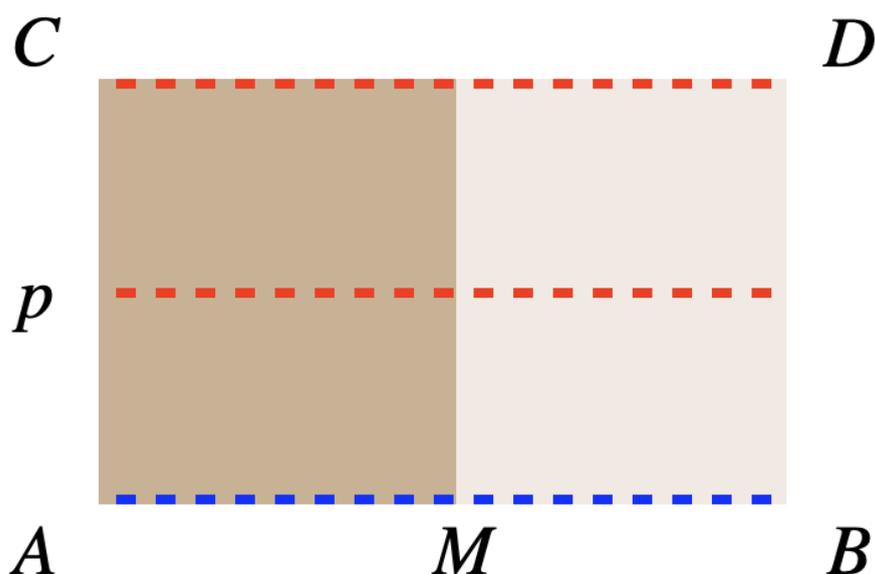
Existe una única manera de extender $p1$ agregando sólo deslizamientos. Si existieran dos deslizamientos cuyos ejes de reflexión no fueran paralelos, su composición generaría una rotación y volveríamos a alguno de los grupos anteriores, así que descartamos este caso. Cuando el eje de reflexión de un deslizamiento no es paralelo o perpendicular a alguna traslación, la composición de ambas es una reflexión y se genera el grupo cm . Al excluir esta posibilidad, se reduce el caso a una celda unitaria rectangular posiblemente cuadrada.

Para definir un deslizamiento mínimo que satisfaga estas condiciones basta pedir que al elevarlo al cuadrado se obtenga una de las dos traslaciones mínimas. Supongamos que

agregamos el deslizamiento cuyo eje de reflexión es AM y su vector de traslación es AM , con M el punto medio de AB .

Al conjugar γ_{AM} por la traslación t_{AC} obtenemos un deslizamiento con el mismo vector de traslación pero cuyo eje de reflexión es la recta CD , es decir $\gamma_{CD} = t_{AC}\gamma_{AM}t_{AC}^{-1}$.

Por último, la composición $t_{AC}\gamma_{AM}$ es un deslizamiento γ_p , donde p es la mediatriz de AC .



Tenemos las expresiones:

$$pg = \langle t_{AB}, t_{AC}, \gamma_{AM} \rangle = \langle \gamma_{AM}, \gamma_p \rangle$$

Dos presentaciones para este grupo son

$$\begin{aligned} pg &= \langle u, v \mid u^2 = v^2 \rangle \\ &= \langle a, b, c \mid ab = ba, c^2 = b, a^{-1} = c^{-1}ac \rangle \end{aligned}$$

Referencias

Libros y artículos

- [1] Coxeter, H. S., & Moser, W. O. *Generators and Relators for Discrete Groups*. Springer Science & Business Media, 1957.
- [2] Escher, M. C., & Schattschneider, D. *Visions of Symmetry*. Thames & Hudson, 2004.
- [3] Farmer, D. W. *Groups and Symmetry: a Guide to Discovering Mathematics*. American Mathematical Soc, 1996.
- [4] Fraleigh, J. B. *A First Course in Abstract Algebra*. Pearson Education Limited. 2014.
- [5] Grünbaum, B., & Shephard, G. C. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, 1987.
- [6] Jones, O. *The Grammar of Ornament*. Day and Son, Limited, 1856.
- [7] Martin, G. E. *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag New York Inc, 1982.
- [8] Schattschneider, D. The plane symmetry groups: their recognition and notation. *The American Mathematical Monthly*, 85(6), 439-450, 1978

Imágenes

- [9] Cornell University. (2009). *Periodic Tilings*. Department of mathematics, 2009. <http://pi.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/KathrynLindsey/PROJECT/Page4.htm>
- [10] Escher, M. C. *Symmetry, 1937 - 1967*. M. C. Escher – The Official Website, 2021. <https://mcescher.com/gallery/symmetry/>
- [11] Piesk, T. *Tiling snub 3-6 left dual simple*. 2020. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiling_snub_3-6_left_dual_simple.svg
- [12] Piesk, T. *Tiling snub 3-6 left simple*. 2020. https://en.wikipedia.org/wiki/Snub_trihexagonal_tiling#/media/File:Tiling_snub_3-6_left_simple.svg

Las imágenes originales de los dibujos de Escher fueron descargadas de [10]. The M. C. Escher Company B. V. fue notificada al respecto.

Las imágenes de los grupos que no tienen ilustraciones de Escher fueron tomadas de [6] y están disponibles en la red como mostramos a continuación. Cada una corresponde a las siguientes culturas:

p6m. Bizantina (No. 3, placa 30)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wallpaper_group-p6m-4.jpg

p4m. Asiria. (No. 2, placa 13)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wallpaper_group-p4m-1.jpg

cmm. Egiptia (No. 6, placa 9)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wallpaper_group-cmm-5.jpg

pm. India (No. 1, plate 49)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wallpaper_group-pm-5.jpg