UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA
DOCTORADO EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA Y DEL DESARROLLO

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN LA JERARQUÍA DE OPERACIONES Y EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN PRIMARIA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN PSICOLOGÍA

PRESENTA:

URIEL ESCOBAR DURÁN

COMITÉ TUTOR:

TUTOR PRINCIPAL:
DR. FELIPE DE JESÚS TIRADO SEGURA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO – FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES IZTACALA

TUTORA ADJUNTA:
DRA. PATRICIA DEL CARMEN COVARRUBIAS PAPAHIU
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO – FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES IZTACALA

TUTOR EXTERNO:
DR. MARIO SÁNCHEZ AGUILAR
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL – CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

JURADO A:
DR. GERARDO ORTIZ MONCADA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL – UNIDAD AJUSCO

JURADO B:
DR. ULISES XOLOCOTZIN ELIGIO
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL – CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

ESTADO DE MÉXICO. NOVIEMBRE 2021

Agradecimientos

A mi Alma Máter, la Universidad Nacional Autónoma de México, principalmente a la Facultad de Estudios Superiores Iztacala, ya que durante más de 10 años me ha otorgado todos los medios para ser un mejor profesional, una persona capaz de aprender de los demás, así como una visión social de mi labor como psicólogo educativo. Al Programa de Maestría y Doctorado en Psicología.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (registro 609098 – beca 450414) por su apoyo financiero durante cuatro años. Sin este apoyo, no hubiera podido concluir mis estudios de doctorado.

A mis padres, comenzando por mi madre, Lupita. *Eres una persona admirable, mi ejemplo a seguir durante toda mi vida, no solo porque eres una extraordinaria mamá, sino también porque eres muy trabajadora, atenta, inteligente y solidaria con tu familia, quienes te amamos con todo nuestro corazón. Gracias a ti pude terminar de estudiar; nunca dejaste de confiar en mí y eso siempre lo llevaré conmigo en el corazón.* Papá. *Cada día de mi vida nos has apoyado en todo lo que has podido. Eres un hombre trabajador, atento y dedicado a tu familia y sobre todo a mi mamá. Suerte tenemos tus hijos de tener a un padre tan admirable, incansable y leal.*

Al amor de mi vida, Ari. *Si en la vida pudiera agradecerle a alguien su dedicación y amor incondicional, sería a ti. No solo eres mi novia, sino mi mejor amiga, mi brillante colega psicóloga y mi futura esposa. Desde hace más de 10 años, me has demostrado que eres una mujer maravillosa. Soy muy afortunado de tenerte en mi vida, no solo porque te admiro, sino porque te amo y te amaré durante el resto de mi vida. Gracias a ti siempre luché por lo que más amaba hacer, la docencia y la investigación; gracias a ti mi día a día tiene una razón importante de ser, recordarte de nuevo, como en la última tesis, que "eres la razón de mis sonrisas y de mis metas; porque tu belleza, nobleza e inteligencia siempre te llevarán tan lejos como quieras. ¡Te amo!".*

A mi familia, especialmente a mis hermanos, Iván y Lizbeth, y a sus familias, porque son personas dignas de ser hijos de mis padres; por su fraternidad y por compartir sus logros y metas con nosotros por su apoyo tanto moral como material. A Zoé, por ser una persona muy inteligente y compartir conmigo muchos momentos divertidos, de reflexión, llenos de oportunidades para mejorar. Por ser mi primera persona de estudio.

A mi Tutor Principal y amigo, el Doctor Felipe Tirado. Porque admiro su amor por la docencia y la investigación; su visión social de nuestra labor educativa; su ética y lealtad a principios fundamentales como el respeto, la equidad, la justicia y la solidaridad; por ser tan fraterno, inteligente, simpático, así como por su convicción hacia la disciplina y el orden en el trabajo; por tantos años de llenos de diálogo, apoyo y empatía; por ser, en palabras de Moisés y ahora en las mías, un Maestrazo.

A mi magnífico Comité Tutor, Patricia Covarrubias, Gerardo Ortiz, Mario Sánchez y Ulises Xolocotzin. De cada uno me llevo el amor por la investigación. En cada seminario, tutoría o encuentro, me tendieron la mano incondicionalmente. No tengo las suficientes palabras para agradecerles el tiempo que han dedicado en mí y en la revisión de la tesis. Son además de un grupo excelente de investigadores, unas excelentes personas y mis queridos amigos con los que sé que cuento en todo momento. Al CINVESTAV y a la UPN Unidad Ajusco, por abrirme las puertas durante tantos años.

A todos los miembros del Proyecto PsicoEducativa con los que tuve el honor de convivir, particularmente a mi amigo Jesús Peralta, por ser tan solidarios conmigo hacerme sentir como en casa en ese maravilloso sitio. A mis amigos y compañeros del Doctorado, desde Montse, Luis Enrique, Fernando, Diana, Ana, hasta mis queridos colegas de la UPN, Erika, Edda, Vicente, por su sabiduría, fraternidad y solidaridad.

A todos los profesores con los que me encontré en el Doctorado: Sara Cruz, Pepe Martínez, Tere Rojano, Armando Solares, María Ito Sugiyama. A Luis Zarzosa, porque sin él, admirado y querido profesor y amigo, no estaría aquí ni me habría dado cuenta de que amo el estudio del razonamiento matemático. A mis amigos de toda la vida, particularmente Arnold, Jorge Arturo, Yurani, Diego, Sofía; Jorge, Pedro, Raúl, Roberto, Ceci.

Finalmente, a las primarias Juan Crisóstomo Bonilla y Acayucan, a sus profesoras Erika y Edith, a sus directivos, pero sobre todo a mis niños amados. Sin ustedes, el núcleo de esta tesis no sería una realidad. Los llevaré siempre en mi corazón y en cada paso que dé como psicólogo e investigador. ¡Gracias!

Índice

Resumen

El dominio de conceptos matemáticos, por parte de alumnos de diversas edades y distintos entornos culturales, se ha visto inaccesible para muchos de ellos, debido al fracaso en la enseñanza de relaciones cuantitativas, particularmente las más básicas como la aritmética y su relación con las más abstractas como el álgebra. A partir del análisis y promoción del razonamiento matemático, así como de experiencias educativas basadas en el dominio de relaciones cuantitativas por medio de la jerarquía de operaciones y el álgebra temprana, esta tesis tiene como objetivo analizar el razonamiento matemático en jerarquía de operaciones y pensamiento algebraico (álgebra temprana). Para desarrollar dicho objetivo, se realizaron dos experiencias de enseñanza, basadas en tareas de jerarquía de operaciones y pensamiento algebraico en 30 alumnos de tercer grado, en dos primarias públicas de la Ciudad de México. Estas experiencias de enseñanza consistieron en una estrategia metodológica denominada *didáctica fenomenológica*, la cual vincula la manipulación de objetos o eventos concretos, como la manipulación de recipientes con agua o bolsas de dulces, con su equivalencia conceptual y abstracta, como la igualdad por equivalencia, las propiedades numéricas, así como con la notación y representación simbólico-algebraica. Estas actividades tenían como meta evaluar el razonamiento matemático de los participantes y sus trayectorias a lo largo de distintos momentos de evaluación: una etapa diagnóstica, basada en pruebas estandarizadas y la evaluación de profesores encargados de los grupos; otra de proceso, estructurada sobre una secuencia psicoeducativa; y una sumativa, a partir de evaluaciones de dominio tanto procedimentales como conceptuales. Otra estrategia metodológica empleada fue el aprendizaje cooperativo, el cual versa sobre el trabajo en equipos pequeños, en este caso, de 4 integrantes, distribuidos homogéneamente. Como parte de la validez interna de las experiencias de enseñanza, varios indicadores se correlacionaron a partir de la prueba RhO Spearman, por medio de una evaluación sistémica. Los resultados muestran distintos niveles de dominio. Por una parte, en términos de nivel de logro, un 67% de los participantes lograron expresar al menos un nivel de entendimiento genérico distinto al aritmético en las tareas de pensamiento algebraico, y un 77% de las tareas de jerarquía de operaciones (72% en promedio para ambas tareas). Por otra parte, en términos de la trayectoria de aprendizaje, algunos participantes mostraron un avance proporcionalmente significativo, si se comparan los niveles de dominio iniciales y finales, lo cual también repercutió en sus equipos de trabajo a partir del aprendizaje cooperativo. Los resultados en jerarquía de operaciones, en combinación con tareas de pensamiento algebraico, desde una dinámica basada en una didáctica fenomenológica y en el aprendizaje cooperativo, son inéditos. La evidencia se discute en términos de su relación con el razonamiento matemático, con las tareas basadas en la jerarquía de operaciones, el impacto del pensamiento algebraico y de actividades basadas en álgebra temprana en el dominio de relaciones cuantitativas, así como de la importancia de la equidad en la evaluación de logro, las implicaciones de la didáctica fenomenológica y el aprendizaje cooperativo, así como la importancia de los escenarios escolarizados en la investigación del razonamiento matemático.

Palabras clave: razonamiento matemático, jerarquía de operaciones, álgebra temprana, didáctica fenomenológica, aprendizaje cooperativo.

Abstract

The understanding of mathematical concepts, by students of different ages and different cultural backgrounds, has been inaccessible for many of them, due to the failure in teaching quantitative relationships, particularly the most basic ones such as arithmetic and its relationship with the more basic ones. abstract like algebra. Based on the analysis and promotion of mathematical reasoning, as well as educational experiences based on the understanding of quantitative relationships through the order of operations and early algebra, this thesis aims to analyze mathematical reasoning in the order of operations and algebraic thinking (early algebra). To develop this objective, two teaching experiences were carried out, based on tasks of the order of operations and algebraic thinking, in 30 third-grade students, in two public elementary schools in Mexico City. These teaching experiences were based on a methodological strategy called *didactical phenomenology*, which links the manipulation of concrete objects or events, such as the manipulation of containers with water or bags of sweets, with their conceptual and abstract equivalence, such as equality by equivalence, numerical properties, as well as with the symbolic-algebraic notation and representation. These activities aimed to evaluate the mathematical reasoning of the participants and their trajectories throughout different evaluation moments: a diagnostic stage, based on standardized tests and the evaluation of teachers in charge of the groups; another of process, structured on a psychoeducational sequence; and a summative one, based on both procedural and conceptual domain evaluations. Another methodological strategy used was cooperative learning, which deals with working in small teams, in this case, with 4 members, homogeneously distributed. As part of the internal validity of the teaching experiences, several indicators were correlated by a test statistic (RhO Spearman) through a systemic evaluation. The results show different levels of understanding. First, regarding the level of achievement, 67% of the participants managed to express at least one level of generic understanding (not arithmetic) in the algebraic thinking tasks, and 77% of the order of operations tasks (72% on average for both tasks). Also, in terms of the learning trajectory, some participants showed a proportionally significant advance, if the initial and final mastery levels are compared, which also affected their work teams from cooperative learning. The results in the order of operations, in combination with algebraic thinking tasks, from a didactic dynamic based on phenomenological didactics and cooperative learning, are unprecedented. The evidence is discussed in terms of its relationship to mathematical reasoning, tasks based on the order of operations, the impact of algebraic thinking, and early algebra-based activities on the domain of quantitative relationships, as well as the importance of equity in evaluation. performance, the implications of phenomenological didactics and cooperative learning, as well as the importance of school environments in the investigation of mathematical reasoning.

Keywords: mathematical reasoning, order of operations, early algebra, didactical phenomenology, cooperative learning.

Introducción

Existe una cercana e inevitable relación entre el campo de estudio de la psicología y la comprensión de relaciones cuantitativas, particularmente desde el análisis de los procesos psicológicos inmersos en la formación de conceptos abstractos. Durante las últimas décadas, se ha demostrado la importancia de la promoción del razonamiento matemático desde edad temprana, con el objetivo de convertir el conocimiento abstracto en un hábito de pensamiento accesible y significativo.

Como punto de partida del campo de conocimiento del razonamiento matemático, es importante describir un problema mundial persistente en el entrenamiento de relaciones cuantitativas: el fracaso en los estudiantes de secundaria o preparatoria en el dominio conceptual y procedimental de conceptos algebraicos. De acuerdo con Molina (2006), muchas investigaciones alrededor del mundo se han enfocado en encontrar métodos efectivos en la enseñanza del álgebra, ya que actualmente se reconoce que los hábitos de pensamiento y razonamiento están relacionados con actividades algebraicas, por lo que existe una gran oportunidad de hacer más accesible la comprensión del álgebra a un número mayor de estudiantes. En otras palabras, existe una gran cantidad de esfuerzos por promover el entendimiento de relaciones cuantitativas abstractas para alumnos que, comúnmente, son marginados del entendimiento de conceptos matemáticos. Con esta oportunidad, se podría dejar de concebir a las matemáticas como algo aversivo, y ver a través de ellas una oportunidad de comprender fenómenos cruciales en la vida escolar y extraescolar.

El razonamiento matemático se basa en la reflexión de las relaciones entre cantidades, lo que permite elaborar la comprensión. Sin esa reflexión, se corre el riesgo de únicamente operar mecánicamente con cantidades. De haber reflexión, se está más cerca de la comprensión de los aspectos más generales de las relaciones de cantidad, que permiten poder resolver y razonar matemáticamente en más de un tipo de problema. En otras palabras, a mayor reflexión, hay una mayor probabilidad de transferir el núcleo conceptual de un contexto a otro, lo que permitiría adquirir habilidades para resolver problemas matemáticos en otros contextos y novedosos. De acuerdo con el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas

(National Council of Teachers of Mathematics, 2000) o NCTM (por sus siglas en inglés), el razonamiento matemático requiere el desarrollo de habilidades para construir y evaluar conjeturas y argumentos matemáticos, así como hacer uso de varios tipos de representaciones a partir del lenguaje verbal y escrito.

Razonar matemáticamente implica aplicar el conocimiento matemático a diversas situaciones, tanto escolares como de la vida cotidiana, de múltiples modos de representación y argumentación. No es lo mismo sumar cantidades para obtener un total, que saber si la proporción de dos líquidos mezclados es la adecuada; se requieren distintos tipos de análisis.

¿Cómo promover el razonamiento matemático a un entorno escolarizado? Para analizar esta pregunta, se puede partir de la relación entre eventos concretos (comúnmente observados en la vida cotidiana) y conceptos abstractos, los cuales requieren una guía en su consolidación y entendimiento. V. V. Davydov es uno de los pioneros en el estudio de los conceptos abstractos en edades tempranas. Desarrolló una línea de investigación con base en las propiedades generales de los objetos o la relación abstracta de eventos, a través de su esquema *parte-todo*, dentro de un diseño curricular denominado *Currículum de Davydov*. Este modelo se aplicó no solo en la ex unión soviética, sino en muchos entornos culturales diversos entre sí. Esta propuesta se suma a los desarrollos curriculares de países como China o Singapur, los cuales han tenido un gran éxito en sus estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

De estos temas trata el capítulo 1, el cual versa sobre la formación de conceptos a temprana edad, no solo en estos modelos curriculares o didácticos, sino en uno de los teóricos de la psicología más importantes, Lev Vygotsky, a través del paradigma histórico-cultural. Este paradigma versa sobre el desarrollo psicológico a partir de la transformación bidireccional de los individuos y su entorno histórico y cultural. Los conceptos más importantes del paradigma parten del desarrollo infantil y se consolidan en la interacción del infante con su entorno, así como en la consolidación de sus conceptos iniciales en los llamados *conceptos científicos* o abstractos, o en el desarrollo del aprendizaje entre expertos y aprendices, por medio de la Zona de Desarrollo Próximo.

Como parte de los conceptos científicos, la aritmética y el álgebra figuran como los principales ejemplos en el desarrollo psicológico. Su integración ha sido por demás polémica a lo largo de la historia del estudio de los procesos psicológicos más sofisticados. Una idea generalizada acerca de la relación entre la aritmética y el álgebra consiste en situar a la aritmética como prerrequisito del entendimiento del álgebra. De ser cierta esta premisa, ¿por qué hay alumnos que teniendo dominio aritmético tienen serios problemas de entendimiento algebraico? ¿el problema radica en la aritmética, en el álgebra o en su relación? Estas preguntas son fundamentales para entender una de las premisas de esta tesis: la aritmética y el álgebra son subáreas necesariamente relacionadas, en sus propiedades, estructura y significación. El capítulo 2 rescata una de las premisas iniciales del comienzo de esta introducción, la cual hace hincapié en la necesidad de incluir de un modo más efectivo y equitativo a una mayor cantidad de alumnos en la posibilidad de entender conceptos matemáticos básicos, pero en este caso, en la aritmética y el álgebra.

Una de las variables principales de esta tesis, consiste en contemplar en la integración de la aritmética y el álgebra el estudio de las propiedades numéricas, a partir del sentido de una estructura matemática. Dicho de otro modo, las propiedades numéricas son fundamentales en el entendimiento de relaciones cuantitativas, incluidas aquellas que parten de la aritmética y el álgebra. Una manera de aplicar estas propiedades consiste en el dominio de la jerarquía de operaciones. La jerarquía de operaciones implica la relación entre operaciones numéricas y su estructura, obteniendo como resultado una concepción organizada de expresiones numéricas. Por ejemplo, en el campo de los números enteros, una suma y una resta se pueden relacionar de múltiples enfoques: son operaciones básicas; parece que son contrarias, pero a la vez son complementarias en su uso. Una relación estructural entre ambas indica que al sumar dos cantidades se obtiene una mayor (parte-todo), pero al restar dos cantidades, no se obtiene una cantidad mayor, al contrario, se obtiene un número menor y en ocasiones, un número negativo; las relaciones entre sumas y restas son estructuralmente distintas.

De acuerdo con Freudenthal (1974), la jerarquía de operaciones constituye un aspecto esencial del álgebra. En este capítulo, se podrán responder las siguientes preguntas: ¿por qué es importante la jerarquía de operaciones? ¿cuáles son sus antecedentes? ¿cuál es la relación entre la jerarquía de operaciones, el pensamiento algebraico y el razonamiento matemático? La importancia de la jerarquía de operaciones, el sentido de la estructura y su relación con la integración en la aritmética y el álgebra se analizarán en el capítulo 3.

Lamentablemente, no todos los estudiantes tienen el mismo nivel de logro ni las mismas oportunidades de alcanzarlo. Incluso en países que puntúan en los primeros lugares de pruebas internacionales no escolarizadas como el Programa de Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés), existe una gran cantidad de alumnos que no logran comprender relaciones de cantidad básicas. Dicho de otro modo, la mayor parte de los estudiantes no pueden transferir sus conocimientos matemáticos a entornos significativos, lo cual limita la resolución de problemas en los cuales se aplica el conocimiento profundo de los conceptos.

Es necesario que, además de evaluar el logro de los alumnos en el dominio de conceptos matemáticos, se pueda también evaluar el nivel de avance de algunos estudiantes respecto a su punto inicial de dominio. Es decir, la evaluación de logro se debe complementar con una *evaluación proporcional de logro*. La evaluación proporcional consiste en medir a través de un análisis de variables de dominio cognitivo, cuánto ha mejorado el desempeño de un alumno en la resolución de tareas matemáticas, específicamente aquellas que impliquen razonar matemáticamente. Por ejemplo, si aun alumno en una preevaluación obtiene 4 puntos de 10 posibles, pero en una post-evaluación logra ascender su puntaje a 6 puntos, a pesar de tener un puntaje bajo en relación con los que obtuvieran 9 o 10 puntos, en términos proporcionales, representa una mejoría del 50%. En otras palabras, un alumno de bajo desempeño podría mejorar 50% en su rendimiento, y el de alto desempeño mejorar tan solo un 10%. No se trata de algo menor, en tanto se trata de valorar y dar reconocimiento al logro de los alumnos menos favorecidos.

¿Cómo situar la integración de la aritmética, el álgebra y la jerarquía de operaciones en el aula, junto al concepto de evaluación proporcional en el aula? Al respecto, Hans Freudenthal fue un matemático que desarrolló una línea de investigación llamada *Didáctica fenomenológica*, la cual se basa en la conexión entre la vida cotidiana y los conceptos matemáticos. A partir de esta línea de investigación, se desarrolló la teoría de enseñanza y aprendizaje denominada Matemáticas Realistas (en inglés Realistic Mathematics Education - RME) la cual versa sobre modelos de enseñanza basados en el análisis de eventos o fenómenos con los que un alumno puede interactuar directamente. Por ejemplo, describir la relación entre volúmenes y cantidades, longitudes y equivalencias o, dicho de otro modo, la relación abstracta entre cantidades de objetos y sus propiedades. La didáctica fenomenológica puede ser un medio por el cual los conceptos matemáticos de aritmética, álgebra y jerarquía de operaciones se puedan relacionar a partir de eventos significativos de manipulación de objetos. El rato consiste en representar los conceptos con objetos y tareas que representen sus propiedades básicas.

Pero no es suficiente contar con una evaluación proporcional o un tipo de didáctica centrada en los objetos concretos y su relación con conceptos abstractos. También es necesario definir un parámetro en la dinámica escolarizada. Si la concepción de la formación de conceptos se basa en postulados histórico-culturales, los cuales versan sobre la interacción de un individuo con su entorno social y su relación bidireccional, el aprendizaje cooperativo puede promover conceptos fundamentales como la mediación y la Zona de Desarrollo Próximo, ya que el aprendizaje cooperativo consiste en el trabajo en grupos reducidos en los que los alumnos pueden colaborar para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás (Johnson y Johnson, 2008). En síntesis, el capítulo 4 versará sobre el tema de la escolarización del pensamiento algebraico desde el álgebra temprana y de la jerarquía de operaciones, a partir de una concepción de equidad e interacción en la evaluación,

El capítulo 5 implica la descripción del plan metodológico de la tesis, el cual se divide en dos estudios: una primera experiencia de enseñanza a partir de un estudio piloto (capítulo 6) y una segunda y consolidada experiencia de enseñanza (capítulo 7).

Finalmente, en el capítulo 8 se revisan algunos conceptos fundamentales para el desarrollo de la reflexión matemática a temprana edad, como la formación de conceptos científicos o abstractos, el de álgebra temprana, jerarquía de operaciones, representación, didáctica fenomenológica, equidad y aprendizaje cooperativo. Además, se desarrollarán una serie de conclusiones vinculadas con el razonamiento matemático a temprana edad, así como con la importancia de la escolarización del álgebra y la jerarquía de operaciones.

Preguntas de investigación

Las preguntas de investigación son las siguientes:

1) ¿Cuál es la relación entre el razonamiento matemático y la didáctica fenomenológica, en el dominio de la jerarquía de operaciones y el pensamiento algebraico?

2) ¿Cuál es el efecto del aprendizaje cooperativo en el dominio de conceptos matemáticos?

3) ¿Cuál es el grado de significación de las representaciones de relaciones algebraicas y de jerarquía de operaciones en niños de tercer grado de primaria?

Objetivos

El objetivo de la presente tesis es analizar el razonamiento matemático en jerarquía de operaciones y pensamiento algebraico (álgebra temprana). Para cumplir con este objetivo, se realizaron los siguientes tres objetivos particulares:

1) Promover hábitos de pensamiento matemático en alumnos de una primaria pública, desde su entorno cotidiano de enseñanza, en una dinámica de aprendizaje cooperativo.

2) Evaluar el nivel de logro en el dominio conceptual de tareas de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones, por medio de la resolución de tareas y el análisis del discurso, a partir de tareas concretas de manipulación de objetos, derivados de una didáctica fenomenológica.

3) Analizar las representaciones de cantidades, expresadas en la igualdad por equivalencia, la notación algebraica y las unidades operativas.

Capítulo 1. Razonamiento matemático: formación de conceptos y su representación

1.1 Aproximaciones curriculares en diversos contextos culturales.

El razonamiento matemático, en muchas partes del mundo, se ha desarrollado a través de distintas estrategias. En este subtema, se analizarán un par de ejemplos importantes, como lo son los casos de Singapur y China. Ambos países se han destacado en pruebas basadas en la resolución de problemas matemáticos extraescolares con los máximos puntajes posibles.

En la década de los años 90, el currículum de matemáticas en Singapur se enfocó en un aprendizaje autodirigido y de la vida real, con base en tres grandes rubros: 1) aprendizaje basado en problemas en escenarios reales (estudiantes son activos en la resolución de problemas y los docentes son entrenadores mediadores) 2) contextos sociales en educación 3) aplicaciones del mundo real (Reimers y Chung, 2016).

El componente principal del currículum de Singapur es la resolución de problemas verbales (problemas inmersos en un entorno de la vida cotidiana), los cuales eran tanto aritméticos como algebraicos. Este componente deriva de un currículum basado en un diagrama heurístico envolvente, es decir, un currículum basado en una herramienta para resolver problemas tanto aritméticos como algebraicos, la cual se denomina “Barras de Singapur” o método de modelo, el cual está basado en la idea de que la estructura subyacente de los problemas puede hacerse manifiesta, y dicha estructura abarca conceptos fundamentales como el parte-todo y el razonamiento proporcional (Kho, 1987).

El currículum de Singapur pretende proveer a los alumnos de una gran cantidad de oportunidades relativas a la creación de generalizaciones a través de patrones numéricos, ecuaciones gráficas y métodos de modelos (Barras de Singapur). Se lleva a cabo del siguiente modo: en los grados tempranos, se utilizan imágenes de objetos reales para modelar situaciones, después esas imágenes son reemplazadas por rectángulos. Este uso provee un enlace pictórico, con la idea abstracta de representar incógnitas con letras, por lo que la estructura completa del modelo puede ser descrita como una ecuación pictórica, lo cual representa una transición más sutil en la representación de incógnitas en ecuaciones. En los grados más avanzados, se utiliza una estructura de patrones – por ejemplo, hacer-deshacer figuras o expresiones (p.ej., 8 + 15 se puede descomponer en 4 x 2 + 10 + 5, entre otras combinaciones), construir reglas (p.ej., 2, 5, 8, 11…) o representar funciones; hacer-deshacer implica una reversibilidad de operaciones, lo cual es un principio básico para el desarrollo del pensamiento abstracto; crear series numéricas implica el planteamiento de números subsecuentes entre sí a partir de un patrón, lo cual se vincula estrechamente con el pensamiento funcional (Cai et al., 2011).

A partir de la descripción del currículum de matemáticas en Singapur, ¿qué se puede concluir? En primer lugar, existen evidencias a nivel curricular (Cai y Wang 2002) acerca de la capacidad de los niños al pensar algebraicamente. Estudios como los de Cai et al. (2002), demuestran que los niños pueden pensar de un modo algebraico desde edades tempranas, sobre todo aquellos que están aprendiendo matemáticas en el currículum de China o de Singapur. Por ejemplo, es este par de estudios citados, Cai y sus colaboradores demostraron que los niños chinos piensan más algebraicamente que los niños de primaria estadounidenses, ya que los niños chinos no suelen usar estrategias concretas al enfrentarse a problemas aritméticos y algebraicos, de hecho, emplean métodos más abstractos, en contraste con el uso mayoritario de estrategias concretas por parte de los niños de los EE.UU; teniendo como referente el desempeño de los alumnos de primaria de China y Singapur, así como el diseño y la metodología que se emplea en ambas naciones, los niños son capaces de pensar de un modo algebraico e integrando a la aritmética en ello (Cai, et al., 2011).

Si los niños de primaria son capaces de pensar algebraicamente, ¿cómo podemos ayudar a los estudiantes a pensar aritmética y algebraicamente? Kieran (2004), sugiere 5 tipos de ajuste o modos de enseñanza y aprendizaje para ayudar a los alumnos de primaria a pensar algebraicamente:

1. Enfocarse en las relaciones, y no solo en los cálculos.
2. Enfocarse en el inverso de las operaciones básicas.
3. Enfocarse en representar y resolver problemas.

4. Enfocarse en letras, no solo en números.

5. Enfocarse en el signo igual.

La esencia del álgebra, para Cai et al. (2011) es el entendimiento de estructuras y relaciones. La estrategia metodológica de los currículos tanto de China como de Singapur consiste en variables como la actitud, la comunicación intergrupal, la autoevaluación, la curiosidad por los fenómenos matemáticos, entre otros, así como en el denominado "Hands on", el cual consiste en la manipulación de objetos con el fin de observar el desarrollo de un concepto matemático. Por ejemplo, el concepto de constante puede observarse al intercambiar volúmenes de agua dados entre un recipiente y otro; sin importar la manipulación, la cantidad de agua en ambos recipientes será constante. Si estas estrategias son exitosas en estas naciones, su aplicación en una metodología como la que subyace de este apartado teórico puede ser útil, prudente, parsimoniosa y compatible con los objetivos de la presente tesis.

Existe un ejemplo cultural en el cual el pensamiento algebraico se promueve desde una dinámica escolarizada. En el currículum de China se enfatiza la examinación de relaciones cuantitativas desde varias perspectivas. Por ejemplo, el término variable no está definido formalmente, en cambio, se le asigna la cualidad a la variable de ser una representación de muchos números simultáneamente, es decir, sin un valor fijo. Las variables son usadas de diferentes modos: como lugares para incógnitas en resolución de ecuaciones, las cuales pueden ser representadas por un signo de interrogación, una imagen, una palabra o una caja; y como patrones generalizados o como representaciones de un rango de valores, es decir, las palabras son usadas para representar variables que letras, ya que pueden ayudar al entendimiento de fórmulas, con lo cual se asciende poco a poco a la representación de variables con letras (Cai et al., 2011).

Al principio de la educación formal de alumnos de primaria en pensamiento algebraico, el objetivo radica en la comprensión de ecuaciones y en su resolución. Una vez que la resolución de ecuaciones es introducida, ésta se aplica para entender otros temas, como fracciones, porcentajes y estadística. De este modo, los estudiantes son alentados y se les proporciona consistentemente oportunidades para representar relaciones cuantitativas. En el caso de otro concepto matemático como la función el currículum proporciona, a los estudiantes, la oportunidad de desarrollar el concepto desde un nivel concreto, a través de la comparación y operación de números enteros, con la ayuda de campos semánticos y numéricos, además del empleo de imágenes, diagramas, tablas, gráficas y ecuaciones. La función tampoco se define formalmente, por lo que es desarrollado de un modo informal con el objetivo de proveer una fundamentación sólida de aprendizajes más avanzados relacionados con el concepto (p.ej., función exponencial, función inversa, función logarítmica, entre otros). Los conceptos de ecuación, resolución de ecuaciones, variables y funciones, permean este currículum desde el primer grado hasta el cuarto de primaria (Cai et al., 2011).

El currículum de China fue desarrollado de este modo porque pretende desarrollar al menos tres hábitos de pensamiento en sus alumnos:

1. Examinar cuantitativamente relaciones cuantitativas desde diferentes perspectivas
2. Resolver problemas usando tanto álgebra como aritmética
3. Invertir las operaciones al resolver ecuaciones

Respecto al primer hábito de pensamiento, un ejemplo sería el siguiente: “Xiao Qing compró dos baterías, ella le dio a la cajera 6 yuanes y le dieron de cambio 4, ¿cuánto le costó cada batería?”. La representación del problema se podría hacer escribiendo las palabras completas y la relación entre ellas:

Dinero – Precio de la batería = Cambio

Precio de la batería + Cambio = Dinero

Dinero – Cambio = Precio de la batería

El segundo hábito de pensamiento se basa en el principio de considerar múltiples perspectivas como medio para fomentar un entendimiento profundo de las relaciones entre cantidades, al usar tanto a la aritmética como al álgebra para ayudar a los estudiantes a construir, por ellos mismos y con la orientación del docente, modos de pensamiento de ambas ramas matemáticas, en la resolución de problemas. En el futuro, los alumnos ven las ventajas de usar álgebra al emplear ecuaciones para resolver problemas. Por lo tanto, el uso de aritmética y álgebra en la resolución de problemas puede ser un auxiliar en la demostración, hacia los estudiantes, qué tan vinculados están tanto la aritmética como el álgebra.

Cai et al. (2011) aseguran que existen tres razones para unir a la aritmética y al álgebra, con base en el currículum de matemáticas en China. La primera razón consiste en auxiliar a los estudiantes a alcanzar un entendimiento profundo de las relaciones cuantitativas, al representarlas tanto algebraicamente como aritméticamente. La segunda razón es que esta unión sirve para guiar a los estudiantes, principalmente en la posibilidad de contemplar las diferencias y similitudes entre ambas ramas de conocimiento, de tal modo que ellos mismos podrían entender la utilidad de una aproximación más general y algebraica, en caso de ser necesaria. La tercera razón versa sobre la posibilidad de desarrollar, en términos generales, habilidades de pensamiento, así como de flexibilidad en el uso apropiado de una o de otra (de álgebra o de aritmética) en la resolución de problemas, con base en el principio citado por Post (1988, citado por Cai et al., 2011): primero describe, después calcula.

El tercer hábito de pensamiento, es decir, invertir las operaciones al resolver ecuaciones, considera que los estudiantes deben ser orientados en la creación de expresiones generales, específicamente para encontrar áreas, perímetros, volúmenes, entre otros. Esta guía puede permear en todos los hábitos de pensamiento en los alumnos, ya que implica la función de reversibilidad, la cual es fundamental en el desarrollo del pensamiento, tanto abstracto como concreto (Cai et al., 2011).

En conclusión, el currículum de China se enfoca en las oportunidades que pueden tener los alumnos al momento de resolver problemas. Estos problemas implican el empleo de la aritmética y el álgebra, así como de conceptos derivados, como ecuación, variable y función. Este empleo asciende de un nivel concreto, con la intención de demostrar que hasta en los fenómenos más básicos, estos conceptos se pueden observar, desde el uso de literales hasta el de números y ecuaciones formales.

La intención de ejemplificar estos dos acercamientos curriculares radica en que, a pesar de las circunstancias complejas que definen la educación básica de un país, los alumnos pueden dominar exitosamente conceptos matemáticos complejos, a partir de la promoción de hábitos de pensamiento abstracto. En otras palabras, sin importar un modelo curricular o las diferencias culturales, el razonamiento matemático puede ser la vía del desarrollo cognitivo y el aprendizaje de conceptos abstractos en estudiantes de primaria.

1.2 Abstracción

¿Cómo se configura el desarrollo cognitivo? Un ámbito importante previo a cualquier proceso psicológico superior, como el lenguaje o el pensamiento, es la apropiación de los objetos del mundo de un niño. La apropiación es, desde el punto de vista del paradigma histórico-cultural, un fenómeno intra e intersubjetivo.

Leontiev (1986) indica que los objetos con los que un niño interactúa al inicio de su vida están condicionados por la cultura en la que nace. El lenguaje está presente desde antes de que una persona se dé cuenta de su propia existencia. Esto no quiere decir que solamente el niño tenga que adaptarse al mundo. Cuando el niño está en un entorno, se apropia de los objetos que subyacen de la cultura en la que está inmerso; la apropiación consiste en la reproducción en un individuo de la configuración del comportamiento humano. Es aquí donde el lenguaje funge como vía de acceso para el niño a los significados de su entorno. También la actividad o el uso que un individuo le otorga a los objetos es importante para esta apropiación.

Leontiev (1978) asegura que la apropiación de los objetos y la actividad que un niño realice sobre ellas implica el modo en el que éste se relaciona con las personas de su entorno, en sus prácticas y en su discurso:

> "Los procesos más importantes que caracterizan el desarrollo mental del niño son los procesos específicos mediante los cuales asimila y se apropia de las conquistas de su propia cultura … este proceso se produce en la actividad del niño con referencia a objetos y fenómenos del mundo que lo rodea, de las anteriores generaciones humanas … dicha actividad no puede desarrollarse en el niño mediante las relaciones prácticas y verbales que existen entre él y las personas que le circundan" (pp. 89-90).

Además de la apropiación de objetos en un niño, la dimensión dinámica de la asimilación cultural de su entorno contempla las relaciones o conexiones cognitivas que puede formar. Las relaciones implican una conexión entre dos o más objetos. Desde el punto de vista psicológico, las relaciones representan la unidad básica de los procesos psicológicos superiores, formando el núcleo del desarrollo cognitivo, una vez que comienza el proceso de asimilación cultural. El concepto de relación también es la base de la construcción de conocimiento abstracto.

Vygotsky (1988), afirman que el intelecto no es solamente el conjunto de capacidades psicológicas generales, como la observación, la atención o la memoria, sino la suma de varias capacidades diferentes, las cuales son independientes una de otras y que, por lo tanto, se desarrollan por su cuenta a través de una interacción que lo propicie.

> "La tarea del enseñante consiste en desarrollar no una única capacidad de pensar, sino muchas capacidades particulares de pensar en campos diferentes; no en reforzar nuestra capacidad general de prestar atención, sino en desarrollar diferentes facultades de concentrar la atención sobre diferentes materias… desarrollar el intelecto significa desarrollar muchas capacidades específicas e independientes, y formar muchos hábitos específicos, ya que la actividad de cada capacidad depende del material sobre el que dicha capacidad opera" (p. 29).

Las relaciones están inmersas en un campo intelectual. El intelecto, a su vez, puede ser desarrollado a partir de diversos procesos psicológicos, que a su vez se interrelacionan de diversos modos. De esos diversos procesos psicológicos, quizá los más relacionados con el intelecto y con la abstracción sean el pensamiento y el lenguaje.

¿Cómo se desarrolla el pensamiento? ¿Cuál es su relación con el lenguaje? Esta cuestión implica diversos puntos de partida. Los postulados de Lev Vygotsky sitúan al lenguaje y al pensamiento de un modo independiente ontológicamente. Sin embargo, existe una etapa prelingüística en el pensamiento, así como otra preintelectual cuando se desarrolla el lenguaje a través del habla; en el desarrollo filogenético, ambos procesos psicológicos superiores se encuentran, relacionándose entre sí a partir de un lenguaje intelectual y un pensamiento verbalizado.

Referente al lenguaje y al pensamiento, Vygotsky (1988), indica que:

> "la relación entre el pensamiento y el lenguaje cambia durante el proceso de desarrollo, tanto en cantidad como en calidad… la evolución del lenguaje y el pensamiento no es paralela ni uniforme. Sus curvas de crecimiento se juntan y

> separan repetidas veces, se cruzan, durante determinados periodos se alinean en paralelo y llegan incluso a fundirse en algún momento, volviendo a bifurcarse a continuación (pp. 47-48)”

El desarrollo cognitivo se configura sobre estas estructuras básicas formadas en el lenguaje y el pensamiento. Cuando el desarrollo cognitivo se expresa en un niño, se puede asegurar que entiende el lenguaje como elemento de mediación social de pensamiento. Esta tesis versa sobre el desarrollo cognitivo, particularmente el que subyace a entornos escolarizados, con estudiantes de nivel básico de educación. Para abordar el desarrollo cognitivo, existen varias etapas tanto en el pensamiento como en el lenguaje, que serán desarrolladas en los siguientes capítulos, para dar cuenta de las bases del pensamiento abstracto, el cual contempla el dominio o la potenciación de los conceptos científicos.

Los conceptos científicos hacen referencia al dominio abstracto de los elementos constitutivos de un fenómeno o de un objeto. Cuando un niño expresa este dominio, es crucial centrarse en el significado que puede otorgarles a las palabras, las cuales a su vez derivan de una generalización. Vygotsky (1988) asegura que “la palabra constituye un acto de pensamiento... al mismo tiempo, el significado es parte integral de la palabra, pertenece al dominio del lenguaje en igual medida que al del pensamiento. Sin significado, la palabra no es tal, sino sonido hueco, y deja de pertenecer ya al dominio del lenguaje… el significado puede ser considerado por igual como fenómeno del lenguaje y del pensamiento” (p. 20).

Vygotsky (1988) también asegura que el significado que deriva de una palabra constituye un fenómeno del pensamiento, siempre y cuando ambos estén ligados entre sí. El significado también es un fenómeno del lenguaje, solamente si el lenguaje está conectado con el pensamiento. Por lo tanto, el significado representa un fenómeno del pensamiento verbal, y funge como la unidad crítica del pensamiento y la palabra.

En el significado se encuentra no solo una relación entre lenguaje y pensamiento, sino en un modo de dar cuenta del desarrollo cognitivo, a través del entendimiento expresado por los niños de una tarea en particular. En otras palabras, el entendimiento tendría como anclaje el significado que el niño le otorga en su discurso a una experiencia, la que puede ser de carácter escolarizada o informal. Por tanto, esta tesis de grado contempla, además del desarrollo cognitivo, el rol que juega el significado como estimación del entendimiento, en entornos escolarizados, en nivel básico de educación.

El significado y el sentido que se le otorga a ese significado, juegan en conjunto un papel importante para el entendimiento. Luria (1987) afirma que el significado se puede definir como "el sistema de relaciones que se ha formado objetivamente en el proceso histórico, y que están encerradas en las palabras… el significado es un sistema estable de generalizaciones que se encuentran en cada palabra" (p. 49). Para situar el significado de una palabra, se requiere de un sentido. El sentido es también un sistema de relaciones que están subordinados no solo a las palabras, sino al contexto y la situación específica en donde se utiliza la palabra y su significado; es la apropiación individual del significado. Para Leontiev (1978), el significado es formador de la conciencia humana, en el marco de la actividad y las acciones que una persona realiza para cumplir con un objetivo.

El desarrollo cognitivo, el significado y el sentido del discurso de los niños en entornos escolarizados son la base que constituye el pensamiento matemático, el cual se asume como subordinado a los conceptos científicos desde la perspectiva histórico-cultural.

1.3 Zona de Desarrollo Próximo

Dado que la comprensión varía de acuerdo con cada alumno, un concepto que trata de describir la situación de aprendizaje es el de Zona de Desarrollo Próximo. La Zona de Desarrollo Próximo, se puede definir como la diferencia que existe entre la Zona Real y la Zona Potencial de una interacción entre dos participantes. Vygotsky (1988) asegura que es "la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (p. 133). La capacidad de un participante cuando interactúa con otro es contrastante cuando lo hace solo, ya que deben ser capaces de usar artefactos y palabras con la intención de ampliar más allá su capacidad actual de comprensión (Cole, 1999). La Zona Real se entiende como el grado de comprensión de un (os) individuo (s), mientras que la

Zona Potencial versa sobre el grado de comprensión de otro (s) individuo (s), al cual puede acceder el primer o primeros individuos en cuestión. Por ejemplo, cuando alguien está aprendiendo un idioma nuevo, la Zona Real implicaría el grado de dominio o comprensión del idioma de los aprendices, mientras que la Zona Potencial sería el grado de dominio o comprensión del idioma, ya sea del docente o de los estudiantes más capacitados.

Para Vygotsky (1996), la imitación era un andamio en el desarrollo en la conciencia del niño. La imitación en el marco del grado intelectual que implica la colaboración con otras personas de un nivel intelectual mayor, por medio de la instrucción. La colaboración, la imitación, el desarrollo intelectual, la conciencia, la enseñanza y el aprendizaje son los conceptos críticos de los cuales subyace la Zona de Desarrollo Próximo. La Zona de Desarrollo Próximo representa "el aspecto más determinante en lo que se refiere a la instrucción y el desarrollo…lo que el niño es capaz de hacer hoy por colaboración, será capaz de hacerlo por sí mismo mañana" (p. 240).

Vygotsky deja muy claro que al niño solamente se le puede enseñar lo que es capaz de aprender, por lo que la enseñanza debe partir de un nivel de desarrollo en el niño ya alcanzado, para poder potenciar en él los niveles inmaduros intelectuales. En la escritura, por ejemplo, comúnmente se parte de los niveles intelectuales alcanzados, como el sonido de las letras, o la representación de cada letra, luego la unión de las letras en sílabas, etcétera. "La instrucción, es válida cuando precede al desarrollo…la instrucción sería totalmente inútil si sólo pudiera utilizar lo que ya ha madurado en el desarrollo, si no constituyese ella misma una fuente de desarrollo, una fuente de aparición de algo nuevo" (Vygotsky, 1996, p. 242). Dicho de otro, la enseñanza a veces parte de conocimientos que tienden a potenciar otros que están en proceso de maduración o adquisición, por lo que es importante que un alumno tenga oportunidades de aprendizaje a través del trabajo colectivo. Quizá en ese momento, en el cual está aprendiendo algo nuevo, no sea para él del todo fácil. La interacción con el conocimiento y las oportunidades de aprendizaje, no van concatenadas en todos los casos. En ocasiones, ciertos conocimientos "toman sentido" después, a la par de otros conocimientos o de la construcción de otros significados que lo permitan.

Uno de los núcleos críticos de la Zona de Desarrollo Próximo, la enseñanza, juega un papel importante al momento de entender la interacción del alumno con los niveles de dominio de su contexto. Para Vygotsky (1996), “enseñarle a un niño aquello que es incapaz de aprender, es tan inútil como enseñarle a hacer lo que es capaz de realizar por sí mismo” (p. 244). En otras palabras, la Zona de Desarrollo Próximo, no implica per se el aprendizaje, por el simple hecho de colocar a dos personas de diferentes niveles de dominio de un tema a colaborar. La Zona de Desarrollo del alumno puede estar por debajo o por arriba del conocimiento con el cual se enfrenta.

Davydov y Shuare (1987) indican que la Zona de Desarrollo Próximo, designa las acciones del individuo que al inicio él puede cumplir en forma completamente autónoma y voluntaria. Estas acciones voluntarias surgen a partir de las relaciones sociales y de fuentes semióticas, mismas que median las acciones de un individuo. La Zona de Desarrollo Próximo define las funciones en los niños que aún no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración; están próximas a mostrarse.

La Zona de Desarrollo Próximo tiene un papel muy importante en el ámbito del aprendizaje y de la educación. Para Vygotsky, es crucial que los individuos se apropien de su propia cultura, ya que esto se lleva a cabo mediante el establecimiento histórico de las pautas de esta apropiación. Un ejemplo de este establecimiento histórico es la enseñanza y la educación, las cuales componen formas universales del desarrollo individual en diversas culturas del mundo. Por lo tanto, el desarrollo individual de los individuos presenta regularidades en distintas épocas históricas. Con esto, la determinación del desarrollo ontogenético de un individuo tiene la siguiente estructura: actividad colectiva y comunicación / cultura (signos) / apropiación de la cultura (enseñanza y educación) / actividad individual / desarrollo psicológico del individuo (Davydov y Shuare, 1987).

1.4 Signos

De acuerdo con la tesis de Vygotsky expresada por Cole (1999), los componentes centrales que están inmersos en la cultura son los siguientes: la mediación, los signos, los esquemas, los guiones y los artefactos. Estos conceptos serán descritos a continuación, aunque cabe destacar que no son mutuamente excluyentes, por lo que puede haber diversos signos que, al mismo tiempo, funjan como esquemas o como elementos de mediación.

Primeramente, la mediación es un proceso de representación interna de una operación externa, a través de signos (Cole, 1999). Muchos elementos pueden ser sujetos a mediación. Dentro del ámbito educativo, el cálculo, la escritura, los docentes, los materiales con los que trabajan, los libros de texto, recursos tecnológicos y la interacción entre alumnos, son algunos ejemplos de objetos que personas que, configurados de un modo o de otro, brindan operaciones externas que son internalizadas.

La mediación es el proceso de enseñanza, también llamado herramienta psicológica, (lenguaje, signos, conceptos, símbolos, entre otros) el cual, una vez adquirido dominado e internalizado por los niños, puede mediar su pensamiento y la resolución de problemas. La mediación del aprendizaje curricular en los niños comienza cuando ellos van a la escuela y comienzan, a lo largo de los años, a adquirir dominar e internalizar conceptos científicos, mismo que les servirán como herramientas de mediación en la resolución de los problemas de las materias de un currículum dado. La mediación es el eje rector del desarrollo y el aprendizaje infantil dentro de los postulados de Vygotsky (Karpov, 2013).

La internalización la describe Vygotsky (1988) de este modo:

> "La internalización es la reconstrucción interna de una operación externa. Un ejemplo de internalización se puede hallar en el desarrollo de gesto de señalar. Al principio, este ademán no es más que un intento fallido de alcanzar algo… cuando acude la madre en ayuda del pequeño y se da cuenta de que su movimiento está indicando algo, la situación cambia radicalmente. El hecho de señalar se convierte en un gesto para los demás. El fracasado intento del niño engendra una reacción de otra persona…únicamente más tarde, cuando el niño es capaz de relacionar su fallido movimiento de agarrar con la situación objetiva como un todo, comienza a interpretar dicho movimiento como acto de señalar… el movimiento de asir se transforma en el acto de señalar" (pp. 92-93).

Los signos, por otra parte, son recursos psicológicos que operan entre el medio circundante y un individuo (Cole, 1999). La palabra representa un signo, ya que puede ser empleada de múltiples modos en operaciones intelectuales.

Los determinantes del comportamiento se encuentran en la cultura en que un individuo se desarrolla históricamente, y los signos tienen significados estables, que se forman en el desarrollo de la cultura. El signo, indica Vygotsky (1988), es “el instrumento, fuera del organismo, que está separado de la persona y por esencia constituye un órgano o un medio sociales” (p. 146); el mismo autor asegura que “el signo siempre es inicialmente un medio de vinculación social, un medio de acción sobre los otros y sólo luego se convierte en un medio de acción sobre sí mismo” (p. 141). Contar con los dedos, agrupar objetos, vestirse de cierto modo, los juegos, las reglas, los algoritmos, el dinero, son —entre muchos otros— ejemplos de signos.

Para Vygotsky, los esquemas son herramientas psicológicas, mismos que especifican el modo en que ciertos elementos se relacionan entre sí, mientras dejan que los menos esenciales se ocupen, de acuerdo con las necesidades relativas a una circunstancia dada. Las tablas, las gráficas, los recipientes, los paréntesis, un juego de llaves, una batería de cocina, son algunos ejemplos de esquemas. Los guiones se entienden como esquemas de acontecimientos, mismos que especifican las personas apropiadas para participar en una situación; determinan los roles sociales que desempeñan ciertos objetos utilizados en diversas situaciones; e indican la secuencia y relaciones causales. Derramar un líquido en papel, los cubiertos en una mesa, la vestimenta de autoridades, docentes y alumnos en un aula de clases o las secuencias didácticas, son ejemplos de guiones. Finalmente, los artefactos son elementos ideales y materiales, los cuales se conciben en términos de heterarquía de niveles e incluyen modelos culturales. Está heterarquía se puede esquematizar en tres sectores, los materiales o de producción, los de referencia directa (recetas, instrucciones), y los abstractos (arte, ciencia, modelización). Estos artefactos requieren de situaciones, actividades y contextos, los cuales les brindan un significado (Cole, 1999).

1.4.1 Esquema parte-todo de Davydov

V. V. Davydov fue un psicólogo ruso y discípulo de Lev Vygotsky que desarrolló una línea de investigación, en colaboración con otros investigadores, la cual se basa en el aprendizaje de conceptos algebraicos, partiendo de la enseñanza de conceptos generales en primera instancia, los cuales pueden fungir como base del entendimiento de conceptos particulares, con la intención de enfocarse en el aprendizaje teórico en vez de hacerlo únicamente con el aprendizaje empírico (Davydov et al., 2001). Esta línea de investigación también es conocida como La aproximación del aprendizaje teórico, de la cual forman parte varios psicólogos discípulos o neo-vygotskianos (Davydov, 1990; Galperin, 1982; Talizina, 1981). El aprendizaje teórico abarca la aprehensión de un concepto en su modo más general y abstracto, así como la aplicación de entendimientos generalizados de casos particulares (Schmittau y Morris, 2004).

Davydov desarrolló un currículum basado tanto en postulados propios y derivados de Lev Vygotsky, el cual consistía en una serie de secuencias instruccionales y didácticas basadas en problemas que requieren métodos de solución progresivos y basados en ideas cada vez más generales (Schmittau, 2004). También se basaba en la idea de que la adquisición de razonamiento teórico algebraico era posible si los alumnos de primaria (desde los seis años) si éstos participaban en actividades de aprendizaje apropiadas referente a la comparación y clasificación de objetos. Dichas actividades guían a los estudiantes desde lo más general y abstracto de los conceptos matemáticos, hasta lo más particular de ellos (Lee, 2004).

Schmittau (2011) indica que, como ejemplo de estas actividades, los alumnos, bajo el currículum de Davydov, emplean herramientas psicológicas, las cuales están internamente orientadas para el control del comportamiento, es decir, estás herramientas orientan la atención de los niños hacia las relaciones básicas que están inmersas en las cantidades, en vez de orientarlos a las características empíricas de un problema o de un número. Por ejemplo, en la suma "5 + 15 = 20", una herramienta psicológica orientaría al alumno hacia la comprensión de las relaciones que implica el signo igual (5 más quince es igual a 20, por lo que el lado izquierdo de la suma es igual al lado derecho) en vez de solo poner atención al resultado de la suma (5 + 15 da 20).

Ejemplos de herramientas psicológicas que orientan hacia relaciones básicas de cantidades son las tablas, el esquema "parte-todo", el uso de literales y las agrupaciones de elementos comunes (objetos, propiedades, números). Estas herramientas psicológicas que cumplen un rol de mediación en la apropiación del entendimiento numérico y están representadas esquemáticamente. Como ejemplo del esquema "parte-todo", el cual hace alusión a la representación de la relación entre las partes que conforman una cantidad total (5 – parte; 15 – parte; 20 – todo, en el caso de una suma) o los factores que conforman un producto (6 – factor; 3 – factor; 18 – producto, en el caso de una multiplicación).

El esquema "parte-todo" se representa con tareas en las cuales los alumnos de primaria (primer grado del currículum de Davydov) intercambian volúmenes de un recipiente "A" a un recipiente "B", obteniendo el mismo resultado del volumen total realizando el intercambio al revés; comparan dos diferentes tamaños de maderas; o en donde suman el peso de una piña o alguna fruta mediana y lo comparan con el peso de patrones de bloques sin importar el orden. Si el recipiente A es mayor que el B, y la diferencia entre los volúmenes es C, entonces la relación entre las cantidades puede ser modeladas por el esquema dicho (p.ej., A – 18 y B – 12, la diferencia es C – 6, entonces el volumen A se obtiene de la suma de B y C, el volumen B se obtiene de la diferencia entre A y C y el C se obtiene de la diferencia entre A y B; dicho de otro modo, $A = B + C$; $B = A – C$; $C = A – B$).

¿Qué ventaja implica el esquema "parte-todo"? Implica concebir el signo igual, la suma y la resta como una configuración de relaciones, no como operaciones separadas. El esquema brinda la oportunidad de obtener cantidades desconocidas, algo que no se podría obtener solo por conteo. Además, el esquema hace explícita la relación entre cantidades, por lo que se puede corregir una expresión sin sentido o coherencia numérica (p.ej., $T – 4 – 4 = T$, la expresión correcta sería $T – 4 – 4 = C$, ya que no se puede tener como parte algo que al mismo tiempo es todo, bajo este esquema). Cabe destacar que el método típico para balancear una ecuación para obtener un resultado (en el cual el esquema "parte-todo" no tiene por qué ser parte del modelamiento matemático), no asegura el entendimiento de la esencia teórica de la relación entre las cantidades representadas, ya que tanto las variables como las incógnitas derivan de una comparación progresiva entre cantidades de objetos y magnitudes, como del origen del número y su subsecuente expresión en una gran variedad de situaciones (Schmittau, 2011). Por lo tanto, el esquema "parte-todo" representa comprensión de las relaciones de cantidad, no solo algoritmos por sí solos.

Las tablas usadas por Davydov implican agrupaciones de elementos comunes, los cuales se especializan en propiedades y objetos, los cuales transitan a representaciones de cantidades conocidas y desconocidas. Por ejemplo, Si agrupamos frutas por su color, tendríamos varios grupos de frutas, como fresas, uvas y plátanos. Después podríamos representar cantidades en tablas de las frutas, como 5 fresas, 8 uvas y algunos plátanos. Finalmente, se podrían representar una cantidad total, las cantidades conocidas y cómo relacionarlas para encontrar la cantidad desconocida de plátanos.

El sentido de las tablas es familiarizar a los alumnos en su uso de un modo flexible para cualquier constructo (desde frutas, hasta literales), con lo que el ordenamiento de estos constructos les puede auxiliar en la solución de problemas, a pesar de que – en un principio – las tablas no sean tan necesarias, pero sirvan después para problemas más complejos (Schmittau, 2011).

Con estas actividades de intercambio de volúmenes y comparación y agrupación de objetos, los niños están desarrollando, a partir de actividades empíricas, la relación con el concepto teórico, que en este caso es la propiedad conmutativa de suma en enteros positivos y es la base del esquema "parte-todo". Esta relación con la propiedad conmutativa da paso a la generalización de las cantidades comparadas, ya sea en volúmenes, peso o área, en letras (p.ej., $T + C = C + T$), con lo cual se hace uso de literales para representar una generalidad aplicada a relaciones de cantidad. Al respecto, Davydov (1990) indica que "el dominio del proceso de conocimiento general y abstracto familiariza éste con un conocimiento más particular y concreto. Dicho principio viene desde la necesidad de averiguar el origen de los conceptos y corresponde a los requisitos para ascender de lo abstracto a lo concreto" (p. 371).

La comparación es un procedimiento lógico del cual subyace el conocimiento de cualquier objeto, en el cual se establecen propiedades comunes de los objetos comparados. Esta semejanza implica una relación dentro de una clase general de objetos (p.ej., borrador, plumón, pizarrón, tienen en común su pertenencia a un salón de clases, con lo cual adoptan la categoría de "utensilios de un aula"). Esta clase general de objetos supone una transición de objetos singulares y aislados a la clase a la cual corresponden. Es importante la generalización ya que brinda a los estudiantes oportunidades de abstraer el objeto que compara en consideración a sus propiedades plurales (p.ej., el color, el tamaño y la forma de un borrador o un pizarrón se generalizan dentro de la categoría de "los utensilios del aula"), por lo que los atributos comunes de los objetos se transforman en objetos singulares de pensamiento. Éste es un proceso abstractivo y el resultado de dicho proceso se denomina simplemente abstracción (Davydov, 1984).

En el currículum de Davydov, el concepto de cantidad es la base de un sistema de relaciones. En dicho sistema, con la ayuda de los objetos concretos (los recipientes en donde se intercambian volúmenes, la madera, los bloques de objetos) los alumnos se familiarizan con las propiedades de las cantidades inmersas en el peso, el volumen y el tamaño de los objetos, comenzando con magnitudes (antes de entrar en el aprendizaje de algoritmos) de tal modo que pueden ver demostrados principios generales de igualdad (A=B) o desigualdad (A>B); la noción de cantidad y la estructura matemática es tanto amplio como flexible, lo que permite hacer más grande todo el sistema conceptual de relaciones sin una reestructuración a gran escala del entendimiento de los aprendices (Lee, 2004).

Para Davydov (1990), un rubro que antecede a las relaciones cuantitativas es el desarrollo del concepto preliminar. El concepto que antecede a las relaciones cuantitativas consiste en actividades de comparación de magnitudes (como las anteriormente mencionadas) con un énfasis en las cantidades continuas. En un nivel básico y como parte de un desarrollo histórico e individual posterior a la magnitud, es un elemento que interactúa con cantidades medidas y con unidades de medición, al ser parte de una relación general entre dos cantidades.

El autor asegura que el número es desarrollado desde la medición más que desde el conteo, lo que representa una base adecuada para el desarrollo de los números reales y las cuatro operaciones básicas, ya que “el número depende de la relación de la que está conformada por los métodos originales de su transformación” (p. 362). Esto quiere decir que el número puede equivaler a la relación que existe entre una cantidad a ser medida y una unidad de medida. Por ejemplo, el número 10 tiene sentido porque es equivalente a la relación entre la cantidad de agua de un recipiente y un referente de medición (volumen (10 mililitros)), por lo que, si la cantidad de agua está vinculada con el referente de medición, se puede indicar que un recipiente hay 10 mililitros de agua. Esta concepción del número se extiende al razonamiento multiplicativo, ya que un producto es equivalente a una unidad de medida y el número de unidades.

El eje rector del currículum de Davydov es el desarrollo cognitivo. Uno de los centros del análisis del currículum son tanto el pensamiento algebraico como las estructuras algebraicas, de las cuales derivan conceptos matemáticos y la prudencia del empleo de símbolos y algoritmos, tanto aritméticos como algebraicos. Davydov buscó introducir la teoría del pensamiento algebraico temprano en la experiencia escolar con la implementación de su currículum, al considerar que su currículum rompía con la práctica común del comienzo formal de las matemáticas sin número, basándose en que el desarrollo cultural e individual de la cantidad es predecesor del concepto de número, por lo que usar primero el número reflejaba la ignorancia del verdadero origen de los conceptos matemáticos (Schmittau, 2011). El currículum de Davydov implicaba que aprendizaje de los alumnos avanzara hacia modelos poderosos que han sido construidos culturalmente a lo largo de la historia de las matemáticas (1999, en Schmittau, 2004).

Otro rubro del análisis inmerso en el currículum de Davydov es la cultivación de las capacidades del niño para el pensamiento creativo, el cual requiere de una instrucción tal que pueda ser reproducida en una forma abreviada del proceso histórico real del nacimiento y desarrollo del conocimiento matemático. Esto último requiere de un análisis de la tarea a realizar (o un análisis genético conceptual, mismo que se analizará más adelante) con la intención de crear problemas que sean interesantes y accesibles para los niños, pero inmersos en la esencia del conocimiento matemático desarrollado históricamente en contextos distintos (Schmittau, 2004).

El análisis de las actividades de un alumno al momento de aprender conceptos matemáticos básicos, dentro del currículum de Davydov (1990), sugiere que los niños, en un principio, son capaces de resolver problemas de muchos modos, después, son puestos a prueba respecto a la elección del método más parsimonioso de todos los implementados, por lo que el currículum es capaz de poner a prueba prácticas de cálculo desde entornos escolares y naturales, lo que promueve la necesidad de notar el potencial de la aritmética, al hacerla cada vez más general y compleja, aunado a la identificación de la prudencia de métodos de solución (en qué situaciones es adecuado aplicarlos y en qué otras no).

Los postulados de Lev Vygotsky relacionados con las matemáticas son vitales para el desarrollo teórico y metodológico del currículum de Davydov. Como ya se ha mencionado anteriormente, Vygotsky (1988) indica que, en el desarrollo de los conceptos en la niñez, se pueden clasificar los conceptos en dos clases: espontáneos y científicos: los conceptos espontáneos versan sobre las reflexiones del alumno acerca de su experiencia cotidiana. Por otra parte, los conceptos científicos surgen de una actividad estructurada –comúnmente en un aula de clases– y se le imponen al estudiante conceptos definidos de modo lógico. Entre los conceptos espontáneos y científicos existen los preconceptos que fungen como eslabones entre la experiencia cotidiana del alumno y la generalización que implica un concepto real o científico.

Por ejemplo, el concepto utópico puede provocar que una persona perciba de un modo distinto su entorno, a tal grado de poder identificar situaciones o escenarios que no corresponden a las condiciones que brinda su propio entorno y llamarles a estas situaciones utópicas. En otro ejemplo, cuando un alumno se enfrenta a un concepto como falacia, y cuando pueda interiorizar dicho término, podría dar cabida a una sistematización de argumentos que se basen en la lógica y que requieren ciertas características para ser, ya sea verdad o falacia.

Volviendo al contenido del currículum de Davydov, éste provee una reestructuración del contenido y la forma en el aprendizaje en el aula, y el objetivo que subyace de este currículum (formar en los alumnos de primaria el concepto científico del número a partir del desarrollo genuino del pensamiento conceptual) puede representar una gran innovación, ya que, por ejemplo, generalmente se asume que los niños en los primeros años de educación primaria "saben cuáles son los números", por lo que se tendría que entrenar a los niños en las operaciones con números (comenzando por las sumas y las restas de números de un solo dígito). El currículum de Davydov se organiza de lo general a lo particular, teniendo en cuenta que lo general no es necesariamente lo abstracto, sino la unidad más básica de un fenómeno que se replica como un patrón, con lo cual puede ser comprendido de un mejor modo un concepto matemático al vincularlo con eventos cotidianos que le den sentido (Moxhay, 2008).

Es por eso por lo que el álgebra es concebida en el currículum de Davydov como una unidad general y básica en varios fenómenos, ya sea cotidianos o abstractos, por lo cual es posible y útil integrarla en la enseñanza de las matemáticas desde los primeros años de escolarización. El álgebra se puede considerar como una formulación científica que implica, tal como indica Vygotsky (1988), un nivel de pensamiento superior, el cual permite organizar las relaciones cuantitativas a través de generalizaciones y signos. Existen diferencias entre herramientas y signos dentro de los postulados vygotskianos. Las herramientas, por sí mismas, son objetos que permiten transformar el medio circundante; están externamente orientadas y no necesariamente son psicológicas. En contraste, el signo es aquel recurso o herramienta psicológico (en un principio externo a la persona) que opera entre el medio circundante y el individuo cumpliendo una función de mediación; es un intermediario que, cuando se interioriza, acaba permitiendo la reconstrucción interna de una operación externa. Este signo puede tener una modalidad más elaborada o compleja –ser un grupo de signos articulados en un todo– pero que también cumple funciones de mediación entre el medio y el individuo. No habría problema si le llamáramos "esquema" siempre y cuando siga cumpliendo la misma función de herramienta psicológica, herramienta internamente orientada y que acaba controlando la conducta intelectual del individuo.

El uso de signos en álgebra y en aritmética puede facilitar que los alumnos la utilicen, de tal modo, que les permita organizar de un modo general los casos concretos que implican las relaciones cuantitativas de la aritmética. Por ejemplo, nuevamente la palabra falacia, no corresponde a sus conceptos espontáneos en primera instancia, pero herramientas auxiliares psicológicas (la instrucción o la ejemplificación) pueden facilitar que el alumno interiorice el signo que implica una falacia: la relación lógica o ilógica entre planteamientos. En matemáticas, una ecuación implica una herramienta auxiliar que facilita la comprensión del signo que, en este caso, podría ser la igualdad como equivalencia.

Precisamente dentro del ámbito de las matemáticas, también se puede considerar que la aritmética implica una noción científica, aunque de menor grado de abstracción. Vygotsky (1988) asegura que los conocimientos de aritmética –si bien representan una transformación de los conceptos espontáneos de un estudiante– son mejorados a su vez por el álgebra, en la medida que convierte lo concreto de la aritmética en planteamientos más generales a la manera de leyes algebraicas generales. Es decir, el álgebra implica generalizar las previas generalizaciones de la aritmética, por lo que el álgebra es equivalente a una concepción científica de orden superior, mientras que la aritmética es un sistema con menor grado de abstracción (sin dejar de tener un estatus de concepto científico). Por lo tanto, los conceptos científicos transforman gradualmente la estructura de los conceptos espontáneos y ayuda a organizarlos dentro de un sistema o clase general.

1.5 La representación

La importancia de la representación radica en varios rubros: la relación con la construcción de conocimiento; su significación como medio de lenguaje y pensamiento; su concepción como vía y estándar de entendimiento. En términos generales, la representación en el ámbito educativo implica la expresión de un conocimiento, ya sea este espontáneo o más sofisticado. La representación escrita, contempla el dominio de una lengua, de una técnica de trazo, la comprensión numérica.

La representación es el medio por el cual se puede evaluar el entendimiento de un alumno. Más allá de la precisión de la representación en torno a un modelo determinado, es la significación de dicha representación la que la valida.

Bruner (1984) define a la representación como un conjunto de reglas por las cuales se pueden mantener o postergar los eventos experimentados a partir de acontecimientos. La representación, desde la perspectiva de este autor, implica la memorización de eventos o aspectos derivados de la experiencia, a partir de ciertas reglas. La representación implica herramientas que pueden ser orientadas hacia objetivos definidos, como resolver un problema, expresar un concepto o tomar decisiones. “La descripción de lo que hace un niño cuando está pensando en un problema, debe incluir un análisis lógico de las operaciones que realiza, tan minucioso como sea posible (p. 120).

Existen tres sistemas básicos de representación, desde una perspectiva cognitiva: la presentación enactiva o motora, la cual se basa en las reacciones inmediatas de las personas, por lo que corresponden a una etapa sensorial y motriz muy temprana; la representación a través de imágenes, las cuales son independientes de la acción o el evento que representan; y la representación simbólica, la cual emplea el lenguaje u otras reglas preestablecidas abstractas (Bruner, 1984).

La representación en el ámbito educativo y matemático, son producciones tangibles, como tablas, diagramas, rectas numéricas, gráficas, la manipulación de objetos, expresiones matemáticas, formulas y ecuaciones, ya sea en un medio escrito o a través de mediadores tecnológicos. Nominar a algo una representación implica una referencia a un significado que se supone tiene, y estas representaciones se denominan externas, ya que tienen un sentido previo al uso que le da un estudiante, por lo que es accesible a otras personas para su observación, discusión, interpretación o manipulación. Además, contemplan la posibilidad de construir argumentos, justificar su resolución de problemas, comunicar su razonamiento a otros y expresar ideas matemáticas de un modo preciso (Novack et al., 2014).

La representación no solamente es externa, también es interna o guarda características cognitivas. Por ejemplo, la representación visual de objetos geométricos, patrones matemáticos, situaciones u operaciones, modelos conceptuales matemáticos, nociones matemáticas, el idioma de las descripciones matemáticas, las estrategias para resolver problemas, e incluso los estados afectivos en relación con problemas matemáticos, representan en su conjunto ejemplos del vínculo entre la representación y la construcción cognitiva del conocimiento matemático (Novack et al., 2014).

1.5.1 Errores en la representación matemática

Los errores en la representación matemática son diversos, y pueden dificultar el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos. Conceptos como la función, la igualdad por equivalencia, la desigualdad, la jerarquía de operaciones, o inclusive las operaciones básicas, pueden abarcar una serie de malinterpretaciones en su operación que conllevan poco entendimiento de ellos por parte de los alumnos.

Knuth et al. (2006) aseguran que una variedad de conceptos erróneos abunda en el entendimiento del álgebra. Por ejemplo, que el signo menos representa únicamente la resta y no la modificación de la estructura de igualdad, que el signo igual es un indicador de una operación que debe realizarse o que las variables no pueden representar más de un valor. Estos errores persisten después de la instrucción en clase, entorpecen el aprendizaje de un nuevo tema y múltiples investigaciones se han encargado de analizar errores específicos.

Filloy y Rojano (1989) hacen referencia a que los errores algebraicos cometidos por estudiantes de matemáticas, principalmente aquellos relacionados con la naturaleza del signo igual, no se resuelven únicamente enfocándose en el ámbito operacional del álgebra, en cambio, en el marco de la introducción de nociones algebraicas, se debe poner una mayor atención a la modelación de conceptos algebraicos; el problema se encuentra en el método de enseñanza, no en la capacidad de los alumnos para comprender un procedimiento.

Askey (1999) evidenció el potencial de los denominados azulejos de álgebra, los cuales son rectángulos de diversos tamaños con los cuales se pueden representar variables. Esta herramienta funge como un modo de modelamiento a través de la ubicación y proporción de los rectángulos, relacionando estos elementos con variables, exponentes o números. Booth y Koedinger (2012) indican que las herramientas, tales como los azulejos de álgebra, el esquema parte-todo, el Word Grammar Problem Solving, entre otros, requieren de una familiarización por parte del estudiante, es decir, los materiales con los cuales un alumno puede modelar un evento matemático, pueden ser un obstáculo si los estudiantes no están familiarizados con ellos.

Es por ello por lo que, en la dinámica de una clase relacionada con el aprendizaje del álgebra, están en juego varios rubros: el énfasis conceptual que le puede brindar un docente a su clase; el tiempo de la clase; el uso de herramientas didácticas; o las diferencias individuales de los estudiantes (Booth et al., 2014).

Si la poca familiarización de las herramientas didácticas auxiliares puede ser un obstáculo en la comprensión de ciertos conceptos algebraicos, ¿cuáles serían los principales errores que cometen los estudiantes al momento de aprender álgebra? Booth et al. (2014), mencionan que destacan principalmente cuatro: operar con el signo menos, operar con el signo igual, simplificar expresiones, jerarquía de operaciones.

Todos los errores implican problemas en la comprensión de las relaciones que convergen en una estructura algebraica subyacente (aunque en el caso de la simplificación de expresiones, se puede añadir una falta de equivalencia entre expresiones). Los errores se identifican en el trabajo de los alumnos, por lo que hacer un énfasis en dichos errores puede mejorar la calidad de las intervenciones que buscan desarrollar una correcta comprensión conceptual del conocimiento algebraico. Si un error es persistente, implica que los estudiantes continúan con un nivel bajo de desarrollo y comprensión del concepto, por lo que los conceptos erróneos probablemente pueden predecir el tipo de error que los estudiantes cometerán al momento de enfrentarse a problemas algebraicos.

Específicamente, el signo igual y su comprensión suelen ser de bajo nivel en estudiantes de secundaria y bachillerato. El signo igual es usado en muchas áreas de estudio de las matemáticas. Por ejemplo, en las cuatro operaciones básicas, en la medición, en el álgebra, en la geometría, en el empleo de decimales, fracciones y funciones, principalmente. La malinterpretación del signo igual no implica necesariamente una inhabilidad, ya que se le atribuye este malentendido en mayor medida al tipo de enseñanza recibida (Powell, 2015).

La correcta interpretación del signo igual implica un signo relacional, en donde hay relación entre dos lados de una ecuación, por lo que el signo igual debería balancear los dos lados de una ecuación. El signo igual es la piedra angular de la equivalencia matemática, debido a que, si los estudiantes logran entender el signo como un elemento relacional, podrían balancear ambos lados de una ecuación. El signo igual como elemento relacional quizá no sea crucial en primaria, pero su uso relacional es sumamente relevante en la secundaria o el bachillerato (Powell, 2015).

En conclusión, el signo igual significa “lo mismo que”, lo cual implica la necesidad de balancear los dos lados de una ecuación; cuando dos cosas son lo mismo, entonces son iguales. Se pueden hacer uso de objetos concretos, los cuales pueden vincular la interpretación del signo igual con la necesidad de balancear una ecuación. Por ende, se puede aplicar el signo igual en una variedad amplia de contextos, pero para que eso suceda es necesario brindar varias oportunidades a los alumnos para poder lidiar con problemáticas que requieran el uso significativo del signo igual.

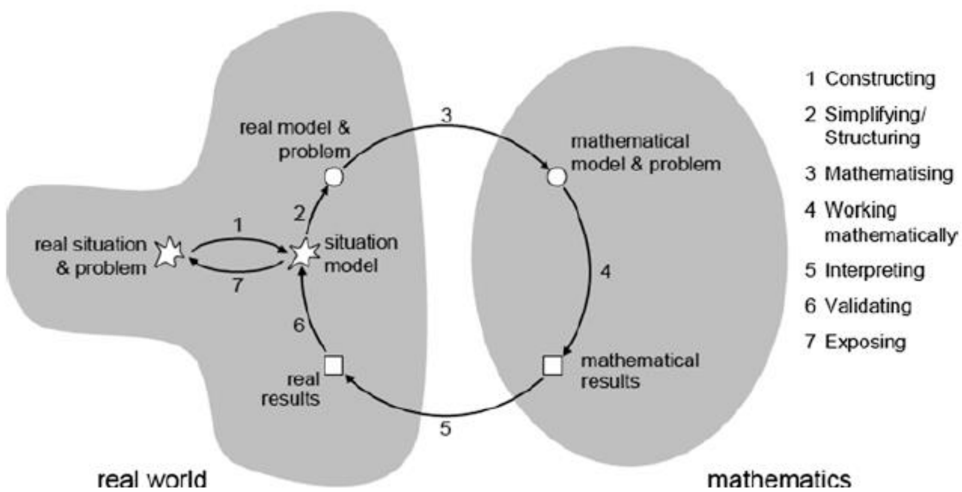
1.5.2 Niveles de representación

El Common Core Standards for Mathematics (Common Core State Standards Initiative, 2010) recomienda que, en el campo de la enseñanza de las matemáticas, se debe enfatizar la comprensión de ideas, el modelamiento matemático, el reconocimiento y uso tanto de estructuras como de patrones, en la resolución y creación de problemas matemáticos. Uno de los aspectos más importantes de esta recomendación radica en el modelamiento matemático.

El modelamiento matemático implica la representación de un problema real a través de un modelo o situación. Este modelo matemático se basa en la construcción de ideas, su simplificación y estructuración, la matematización de esa idea, así como su posterior interpretación, validación y exposición. De esta dinámica se obtendrían resultados matemáticos, que a su vez se convertirían en resultados reales (Blum et al. (2007). Modelling and applications in mathematics education (pp. 3-33). New York: Springer.). En otras palabras, se trata de unir conceptualmente el mundo real o cotidiano con las matemáticas. Algo similar pasa en, por ejemplo, modelos de cognición encarnada, en los cuales el comportamiento humano es el objeto de análisis a través de modelos de inteligencia artificial que trata de representar las circunstancias del comportamiento original y complejo. En la figura 1, se puede observar el clásico ciclo de modelamiento matemático (Blum et al., 2007, p. 225).

Figura 1

Ciclo de Modelamiento matemático



Nota. Adaptado de *Modelling and Applications in Mathematics Education* (p. 225), por W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss, 2007, Springer.

El modelamiento matemático tiene un campo amplio de estudio. Además, se encuentra inmerso en una constante discusión acerca del término que más represente la acción de vincular el mundo real con las matemáticas (modelamiento, modelación, modelaje, etc.). Resulta importante destacar que no es intención de esta tesis ahondar en este tema más allá de lo elemental, que consiste en establecer que los alumnos de primaria, a través del modelamiento matemático, establecen y aplican una serie de procesos psicológicos vinculados con el razonamiento matemático. Estos procesos van desde poner atención hasta ejercicios de metacognición. El modelamiento matemático implica la ejecución de procesos psicológicos, en ocasiones superiores, como el razonamiento y la reflexión.

¿Cómo se pueden vincular esta diversidad de procesos psicológicos con la representación? Existen diversos tipos de representación: pictórica, semiótica, numérica, entre otras. Lo más importante de estos niveles es que pueden dar cuenta de cómo un estudiante construye una idea. Al respecto, existe una estrategia basada en una secuencia instruccional, que ha sido muy exitosa en el vínculo entre la comprensión de conceptos matemáticos, su representación y la manipulación de objetos concretos; se trata de la secuencia instruccional Concrete-Representational-Abstract (CRA, por sus siglas en inglés). Esta secuencia funge como una guía cognitiva en el proceso de construcción de conocimiento matemático (Maccini y Ruh; Miller y Mercer, 1993; Witzel et al., 2003).

Dentro de esta estrategia, los estudiantes se sitúan en distintos niveles de representación:

1) Nivel concreto: manipulación o interacción con objetos, sin establecer ninguna relación abstracta.
2) Nivel semiconcreto: la representación pictórica o semiótica, de los objetos, manteniendo las condiciones em las que el objeto fue presentado.
3) Nivel abstracto: la representación del objeto em cualquier situación, independientemente del entorno de presentación.

En el estudio de Xin et al. (2016), estudiantes con necesidades educativas especiales, bajo la estrategia CRA, lograron representar relaciones de cantidad en la resolución de problemas matemáticos verbales por medio de distintos niveles de representación. La mayoría logró niveles de representación semiconcreto o concreto, y solamente algunos cuantos alcanzaron un nivel de representación abstracta.

En conclusión, los niveles de representación pueden servir para evaluar el grado de comprensión de un alumno en una tarea determinada. Estos niveles, además, forman parte de un modelamiento matemático, en el cual el alumno trata de dar cuenta de una tarea, en distintos niveles de comprensión y representación. Entre más abstracta sea la solución, mayor será el nivel de desarrollo cognitivo que puede tener un alumno.

1.6 La metacognición en el razonamiento matemático

Flavell (1979) en el contexto de la psicología del desarrollo, introdujo el concepto de metacognición. La metacognición la define como el conocimiento que tiene una persona sobre sus propios procesos cognitivos, productos o cualquier cosa relacionada con ellos. En otras palabras, la metacognición implica reflexionar sobre el conocimiento que se adquiere.

¿Cómo se desarrolla la metacognición en las matemáticas? Si la metacognición es el conocimiento y el entendimiento profundo de los procesos cognitivos y de sus productos (Flavell, 1979), entonces eso llevaría a un alumno a comprobar una división multiplicando el divisor por el cociente, pero no comprobar una suma o una resta, ya que no resulta prudente.

Una manera de categorizar los tipos de metacognición aplicada en las matemáticas es a través de las categorías *declarativas, procedimentales y condicionales* de conocimiento. La metacognición declarativa hace referencia a el conocimiento adquirido a través de proposiciones lógicas. La metacognición procedimental versa sobre el conocimiento de métodos o modos en los cuales resolver una tarea aplicando el conocimiento. La metacognición condicional se trata acerca de la fusión de los otros dos niveles de metacognición, es decir, cuándo y cómo aplicar el conocimiento, convirtiendo esta aplicación en algo prudente, al seleccionar las estrategias adecuadas para una situación en particular (Jacobs y Paris, 1987).

La metacognición es un elemento crucial en la resolución de problemas y en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, a tal nivel que los estudiantes pueden crear un hábito de automonitoreo de sus estrategias y niveles de entendimiento (Schraw y Dennison, 1994).

Existe un tipo particular de aplicación de la metacognición, descrita por Lucangeli y Cornoldi (1997) como metacognición basada en el control ejecutivo sobre la tarea, es decir, controlar el proceso que precede, guía y acompaña la ejecución de una tarea, orientada a la resolución de un problema por medio de un ejercicio metacognitivo. En sus estudios realizados con niños de tercer grado de primaria, demostraron que la metacognición y la resolución de problemas aritméticos demostraba tener una alta compatibilidad, por lo que a mayor metacognición mayor entendimiento de tareas aritméticas.

Es a través del análisis del discurso como se puede evaluar el nivel de metacognición que construye un alumno. Si bien no existe un único modo de establecer que los alumnos dominan conceptos a través de su metacognición, se puede analizar el nivel de abstracción que los estudiantes contemplan en sus representaciones.

Capítulo 2. La integración de la aritmética y el álgebra

2.1 La transición de la aritmética al álgebra

Por una parte, en relación con diseño educativo, el estudio del aprendizaje del álgebra, particularmente de las dificultades con esta rama de las matemáticas, se ha centrado en la aparente limitante en el desarrollo cognitivo de los niños (Schliemann et al., 2003).

Respecto al rubro de la transición de la aritmética al álgebra, cabe destacar que ésta se encuentra inmersa en la diferenciación que existe, tradicionalmente, entre ambas ramas de conocimiento matemático, al considerar más concreta a la aritmética en cuanto al álgebra, y a ésta más formal que la aritmética; es por esa razón que la enseñanza del álgebra ha sido concebida como posterior a la aritmética (Lins y Kaput, 2004). Las relaciones matemáticas son elementales en las representaciones algebraicas, mas no así en la enseñanza tradicional de la aritmética. Filloy y Rojano (1989) sugieren que existe una evolución discrepante en las nociones y modos de representación inmersos en la transición entre la aritmética y el álgebra. Esta discrepancia radica, principalmente, en la incapacidad de los estudiantes de matemáticas para operar de manera espontánea con variables, ante la representación y resolución de problemas.

De acuerdo con Booth (1989, 1999), una de las dificultades de los estudiantes de matemáticas es la falta de comprensión de las relaciones aritméticas. Además de las relaciones aritméticas, algunos alumnos asumen que tan solo requieren hacer cálculos cuando se enfrentan a la necesidad de resolver problemas, sin la necesidad de algún método o regla de procedimiento y de organización de la información. Esta situación puede derivar en una problemática para los alumnos cuando se encuentren con contenidos que implican, precisamente, el uso de generalizaciones (problemas aritméticos, algebraicos o al momento de operar con variables). Esto quiere decir que el manejo de signos, cantidades y símbolos en aritmética puede entorpecer el aprendizaje del álgebra si no se hace integralmente, es decir, si la aritmética se desliga por completo del álgebra, teniéndolas como antagonistas en vez de coprotagonistas.

El aprendizaje del álgebra puede ayudar a organizar relaciones cuantitativas implicadas en la enseñanza de matemáticas, incluidas aquellas derivadas de la aritmética.

Kieran (1992), indica que, en la transición de la aritmética al álgebra, son elementos cruciales el uso en el álgebra de símbolos para representar cantidades y la metacognición de los métodos matemáticos que son simbolizados, a través del uso tanto de números como de símbolos, ya que, en el aprendizaje del álgebra, los alumnos se enfrentan con la necesidad de operar con representaciones simbólicas que no están vinculadas con un resultado numérico. Además, los alumnos de matemáticas no tienen oportunidades de hacer conexiones entre la aritmética y el álgebra en primaria antes de enfrentarse a una forma algebraica prefabricada, que puede adquirir significado sólo después de haberla relacionado de nuevo aritméticamente mediante la sustitución de valores (Herskovics y Kieran, 1980; Kieran y Chalou, 1993)

A pesar de la evidente relación entre ambas ramas de conocimiento matemático, existen diferencias entre aritmética y álgebra. Por una parte, la aritmética implica la generalización de situaciones subyacentes a números; la manipulación de números fijos; un razonamiento con cantidades conocidas; y tiene como objetivo encontrar una solución numérica. Mientras que el álgebra implica, por otro lado, la generalización de relaciones entre números; una manipulación de variables, teniendo en cuenta que los símbolos son variables o incógnitas; un razonamiento con cantidades desconocidas; y tiene como objetivo general la generalización y simbolización de métodos de resolución de problemas (Molina, 2006). ¿Cómo se relacionan la aritmética y el álgebra con la falta de transferencia? ¿Cuál sería la razón para integrarlas? ¿Es posible que los niños de primaria comprendan conceptos algebraicos?

Drijvers (2003), indica que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende de su fundamentación aritmética, así como la aritmética tiene muchas el potencial para poder simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. La aritmética se basa en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado; cuando se es capaz de contar, se requiere una base algebraica debido a que contar implica un cierto orden, forma y estructura (Hewitt, 1998).

Ambas ramas de conocimiento matemático, tanto álgebra como aritmética, están relacionadas no solo por el currículum tradicional (en el cuál la aritmética se enseña primero), sino por competencias matemáticas que son necesarias en el aprendizaje de ambas. Por ende, para desarrollar el pensamiento algebraico subyacente a la relación entre la aritmética y el álgebra, se requieren una serie de competencias: enfatizar las relaciones numéricas y no solo los cálculos numéricos; enfocarse en las operaciones y sus inversos (suma-resta, igualdad-desigualdad); la representación y la resolución de problemas, en vez de solamente resolverlos; trabajar con letras concebidas como letras, variables o parámetros; lidiar con expresiones literales incompletas como expresiones (n + 3, a + b), en contraposición de la creencia general de que toda expresión hay que hacerla una ecuación; comparar expresiones de equivalencia basándose en la comprensión de las relaciones que existen entre sus propiedades, más que en una evaluación numérica; enfocarse en el significado y las diversas interpretaciones del signo igual; y tomar en cuenta relaciones numéricas en un problema, ponerlas a discusión y representarlas simbólicamente (Herscovics y Linchevski, 1994; Kieran, 2004).

Las competencias descritas sugieren un acercamiento entre estos dos dominios matemáticos. Este acercamiento implica un nivel de abstracción superior que puede ser continuo, por lo que la comprensión de conceptos matemáticos y el dominio de competencias derivados de éstos, no tendrían que ser reaprendidos y concebidos como una ruptura necesaria, sino como una integración mutua entre ambas ramas de conocimiento matemático. Dicha ruptura ocurre, por ejemplo, con el concepto de igualdad por equivalencia. Una concepción del signo igual —elemento nuclear de la igualdad por equivalencia— como relación entre cantidades o magnitudes (en vez de una mera operación) puede ayudar a la comprensión de problemas tanto numéricos como algebraicos, a pesar de que en los problemas algebraicos se asocian cantidades concretas y en el álgebra relaciones cuantitativas generales expresadas en literales.

Se han desarrollado diversas investigaciones que indican la capacidad de los alumnos para elaborar y simbolizar afirmaciones relativas a relaciones aritméticas (Carpenter, Franke y Levi, 2003), así como emplear representaciones algebraicas para analizar y representar problemas verbales con la ayuda de recursos como tablas, histogramas y ecuaciones. Dichas representaciones implican el uso de cantidades desconocidas en las que se utilizan tanto en posiciones no estándares de la incógnita (por ejemplo, ubicar la incógnita en el lado izquierdo de la ecuación, en vez de solo ubicarla en el lado derecho) como en letras (Brizuela y

Schliemann, 2003). El NCTM (2000) indica que los componentes principales del álgebra son la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones cuantitativas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, entre otros. Por ende, basado en estos y en las siguientes pruebas empíricas que se analizarán, se puede afirmar que los niños de primaria podrían comprender conceptos algebraicos básicos, los cuales les pueden permitir un mayor dominio de competencias matemáticas, derivado del pensamiento algebraico.

Dicha comprensión también depende de los recursos de mediación que pueden existir dentro del aula de clases. Dichos recursos pueden ser desde los materiales con los cuales se cuenta en un salón de clases (papel, accesorios, pizarrón, plumones), recursos tecnológicos (software, presentaciones, videos) y, sumamente importante, la dinámica de la clase, entendiéndose ésta como parte de las secuencias didácticas o psicoeducativas que implementa un docente en relación con la interacción de sus alumnos entre sí. La importancia de la dinámica de la clase versa sobre la interacción del alumno con el fenómeno matemático, ya que este puede ser representado de múltiples modos, por lo que encontrar los más parsimoniosos y significativos, forman parte del reto de esta tesis. En otras palabras, proponer una dinámica a partir de diseños educativos que permitan la escolarización exitosa de la intervención temprana en matemáticas es el reto en innovación de esta tesis.

Este reto converge en un tema poco abordado en educación primaria. Se trata del tema de jerarquía de operaciones, también citado como el sentido de la estructura. La jerarquía de operaciones implica una estructura matemática, misma que se relaciona con propiedades matemáticas (conmutativa, distributiva), de tal modo que dicha estructura guarda un orden al momento de combinarse operaciones básicas. Kieran (1989) indica que uno de los orígenes de las dificultades de los estudiantes de matemáticas (tanto de álgebra como de aritmética) es reconocer y usar una estructura.

2.2 Álgebra temprana

Kaput (2008) propuso que el álgebra y el pensamiento algebraico, están compuestos por tres rubros:

> "1. El álgebra como estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidas las que surgen en la aritmética (álgebra como aritmética generalizada), y en el razonamiento cuantitativo.
>
> 2. El álgebra como estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.
>
> 3. El álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelado, tanto dentro como fuera de las matemáticas" (p. 11).

La propuesta del autor establece las bases de comparación de diversos enfoques denominados álgebra temprana, que tienen el objetivo de integrar los rubros del álgebra y del pensamiento algebraico desde la primaria, en diversas edades, y desde entornos tanto experimentales como escolarizados.

Blanton y Kaput (2005), indican que el álgebra temprana tiene como finalidad, la integración del pensamiento algebraico, basándose en la promoción de hábitos de pensamiento y representación, que puedan identificar el ámbito estructural de las matemáticas. De acuerdo con Carraher y Schliemann (2007), el "álgebra temprana" versa sobre el conocimiento algebraico, el pensamiento algebraico, y las representaciones y técnicas de estudiantes a edad temprana, relacionadas con la resolución de problemas que, generalmente, sólo estudiantes más avanzados logran resolver utilizando la notación algebraica moderna. En el mismo sentido, Kieran, Pang, Ng, Schifter y Steinweg (2017), considera que el énfasis del álgebra temprana se encuentra en identificar y expresar una estructura matemática.

Las estructuras matemáticas se relacionan directamente con las propiedades matemáticas, y se desarrollan gracias a la comparación entre problemas, expresiones o igualdades comunes entre sí. Warren y Cooper (2009), indican que la abstracción es facilitada por la comparación de diferentes representaciones, y la identificación de puntos comunes que abarcan un modelo mental. En otras palabras, un alumno puede abstraer una estructura matemática, si tiene la oportunidad de relacionar expresiones o problemas matemáticos diferentes entre sí en términos numéricos, que se transfiere de la misma representación general a diferentes representaciones, dentro de la misma estructura, para poder identificar puntos comunes que abarquen el núcleo del modelo (p.ej.: 5+2=10, es equivalente a 4 + 7 = 11 en términos estructurales: parte + parte = todo). O bien, cuando se transfieren del fenómeno mismo a valores en una tabla numérica, de esta a su representación gráfica en un plano cartesiano, y finalmente a una representación algebraica.

El álgebra temprana abarca no solo la enseñanza temprana de matemáticas abstractas, sino la comprensión del contenido curricular matemático, lo que implica un aprendizaje basado en la comprensión de ese contenido, lo cual podría facilitar el aprendizaje del álgebra. Concibe el currículum como una serie de experiencias académicas, más que como un listado de contenidos dados (Molina, 2011). En capítulos anteriores, se hacía referencia a que la falta de un entendimiento aritmético era una de las principales causas de la poca comprensión algebraica. En particular, el álgebra temprana concibe la integración de ambas ramas de las matemáticas (aritmética y álgebra) en un continuo vinculado con conceptos matemáticos, ya que considera que éstos pueden emerger de las matemáticas enseñadas en primaria y, tal como indica Molina (2009), "tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética… en particular, se considera que unas matemáticas elementales algebrizadas darán poder a los alumnos, promoviendo un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentando su capacidad de expresar generalidad" (p.136).

Esto quiere decir que la aritmética sería el campo en el cual se basarían e integrarían estos distintos modos de pensamiento, considerando los múltiples modos de analizar y representar relaciones entre cantidades, así como conceptualizar relaciones numéricas y estudiar y analizar patrones y cómo las cantidades varían y se correlacionan (Molina, 2009). Además, el álgebra temprana se concibe tanto como una actividad matemática y como un cuerpo de conocimientos (Kaput, Carraher y Blanton, 2008).

Son varios los objetivos que implica una propuesta tan ambiciosa: añadir coherencia, profundidad y poder al currículum de la educación básica; facilitar el acceso de todos los estudiantes al pensamiento y a la actividad algebraica, favoreciendo el desarrollo de una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más abstracto en el álgebra de los siguientes años escolares; dar tiempo para el desarrollo progresivo y prolongado de los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como de los significados novedosos para los símbolos de la aritmética y del álgebra; eliminar la poco vinculada introducción del álgebra (con la aritmética y con otras ramas matemáticas) en los siguientes niveles de educación (Kaput, Carraher y Blanton, 2008; NCTM, 2000).

El álgebra, desde este punto de vista, puede hacerse manifiesta a partir de cinco contenidos o experiencias algebraicas, también llamadas cinco grandes ideas, mismas que representan una oportunidad para los alumnos de involucrarse en el núcleo de las practicas algebraicas de generalización, representación, justificación y razonamiento con relaciones matemáticas. Las cinco grandes ideas son las siguientes: 1) equivalencia, expresiones, ecuaciones y desigualdades 2) aritmética generalizada 3) pensamiento funcional 4) variable 5) razonamiento proporcional (Kaput, 2008).

Blanton, Levi, Crites y Dougherty (2011) indican lo que incluyen las primeras cuatro experiencias algebraicas. En primer lugar, la idea 1 incluye el desarrollo del entendimiento relacional del signo igual; la representación y el razonamiento con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica, y la descripción de relaciones entre cantidades generalizadas que pueden ser o no equivalentes. La idea 2 abarca las relaciones aritméticas generalizadas, incluyendo las propiedades fundamentales de los números y las operaciones (como la propiedad conmutativa en la suma) y el razonamiento de la estructura de las expresiones aritméticas, en vez de meramente el valor del cálculo. La idea 3 versa sobre las relaciones generalizadas entre cantidades que covarían, así como el razonamiento y la representación de esas relaciones a través de un lenguaje natural, de notación algebraica, tablas y gráficas. La idea 4 se refiere a la notación simbólica como una herramienta lingüística de representación de ideas matemáticas en modos sucintos, e incluye los diferentes roles que puede jugar un contexto matemático. Finalmente, Blanton et al. (2015) indica que la idea 5 se basa en las oportunidades de razonar algebraicamente respecto a dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal modo que el radio de una cantidad respecto a otra es invariante.

El potencial de esta propuesta curricular radica en varios rubros. Por una parte, este potencial se puede ver reflejado al explorar su aplicación, así como analizar el desarrollo del pensamiento y razonamiento algebraico por alumnos de primaria, aunado a la posibilidad de identificar qué contenidos algebraicos pueden ser promovidos y enfatizados en una clase de primaria, a la vez que dichos contenidos pueden ser integrados en la enseñanza y aprendizaje de otras ramas de las matemáticas. También radica en analizar qué herramientas psicológicas (diagramas, notaciones, graficas, imágenes) pueden conducir con éxito a los alumnos a desarrollar modos algebraicos de pensar, además de estudiar las implicaciones de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación más avanzados (Lins y Kaput, 2004). Al respecto del potencial de esta propuesta, Bastable y Schifter (2007) indica lo siguiente: "cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tienden a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética geometría o medida" (p. 2).

Dentro del álgebra temprana, existen diferentes enfoques, relacionados con conceptos como razonamiento proporcional, variación conjunta, generalización, entre muchos otros. El pensamiento algebraico es un concepto tan amplio que puede ser analizado desde dos rubros relevantes tanto matemática como psicológicamente: pensamiento funcional y pensamiento relaciona. Esta tesis considera los aportes de estos dos tipos de pensamiento algebraico, con la intención de integrarlos en la propuesta de investigación.

2.2.1 Pensamiento relacional

La representación, entendida como un modo de interiorizar o entender un evento o fenómeno, ya sea concreto o abstracto, es la base de la representación algebraica, en el caso del pensamiento algebraico, y de la representación de equivalencia, en el caso de la jerarquía de operaciones. El pensamiento relacional funge como unión entre estas nociones, a partir de un modo de pensamiento que guía el entendimiento de relaciones de cantidades.

Cuando se tiene la oportunidad de relacionar dos expresiones como, por ejemplo, 5 x 3 o 4 x 6, se puede decir que ambas son multiplicaciones de dos factores, una da como resultado 15 y otra 24. Cuando recién se aprende a multiplicar, un ámbito común dentro de su enseñanza es memorizar las "tablas de multiplicar", de tal modo que cuando un profesor o un tutor mencione la multiplicación, el alumno pueda responder de manera correcta, incluso hasta de un modo automático. La gran mayoría de los estudiantes de primaria se aprenden las tablas, es decir, son capaces de memorizarlas y recitarlas ya sea para demostrar que las aprendieron, o para resolver ejercicios de la vida cotidiana. La operatividad que implica saber multiplicar de un modo correcto nos ha hecho creer que solamente a través de la memorización se puede llegar a su dominio.

¿Será que la única manera de enseñar a multiplicar es la memorización? En este capítulo, el concepto denominado pensamiento relacional nos servirá para asegurar que el entendimiento de la multiplicación, no solamente se basa en operar con dos factores y saber de memoria un producto, sino con el vínculo que guarda estructuralmente con operaciones numéricas como la suma o la división. Este vínculo estructural no solamente es aritmético, ya que también se puede concebir a la aritmética como una subárea estructuralmente relacionada con el algebra.

El término pensamiento relacional está inmerso en dos nociones matemáticas fundamentales: la jerarquía de operaciones y el pensamiento algebraico. Antes analizar este par de nociones (capítulos 5 y 6), es necesario realizar un encuadre del concepto pensamiento relacional que se emplea en esta tesis. Se puede adelantar que este concepto deriva de la matemática educativa, vinculando las estructuras de las propiedades matemáticas con una actividad intelectual, guiada a través de equivalencias entre expresiones aparentemente distintas, pero con un mismo patrón abstracto que las configura en su núcleo de operación.

El pensamiento relacional es definido por Carpenter, Franke y Zeringue (2005) como la acción de atender al conjunto de relaciones numéricas estructurales, que están implicadas en expresiones y ecuaciones. Si analizamos la definición de estos autores, es evidente que el núcleo conceptual de su definición son las relaciones numéricas estructurales, derivadas de un acto intelectual. Molina (2006) concibe al pensamiento relacional como una actividad intelectual no solo de atención, sino de examinación de expresiones, tanto algebraicas como aritméticas, al considerarlas una entidad total. Esta examinación que subyace a una actividad intelectual debe tener una intención, ya sea del propio alumno o de un requerimiento didáctico. La intención converge en la resolución o en la representación de una ecuación o una expresión matemática.

Es importante ejemplificar el pensamiento relacional, tanto en expresiones como en igualdades, para poder analizar la dimensión misma del concepto. Aunque cabe destacar que el pensamiento relacional no se reduce a expresiones y ecuaciones. Por ejemplo, Mason (2008) hace un especial énfasis en el pensamiento relacional en la geometría y el razonamiento proporcional, para dar cuenta de la relación entre el cálculo de áreas y su proporción al resto de una figura geométrica.

El pensamiento relacional puede ayudar a que los alumnos piensen de un modo integral, que aprenda a ver el signo igual no como una expresión procedimental basada en el cálculo, sino como una expresión de una relación de equivalencia, donde la cantidad de la izquierda equivale a la cantidad de la derecha del signo (4 + 5 = 9), lo que en realidad equivale a 9 = 9; y con esto concebir nuevas relaciones en los procedimientos matemáticos.

El uso del pensamiento relacional en la aritmética funciona como un auxiliar en la disminución de operaciones numéricas, aumentando la necesidad de examinar relaciones, pensar en propiedades de las operaciones, manipular expresiones numéricas y su efecto en las mismas expresiones en su conjunto. Con esto, es más probable el desarrollo de un aprendizaje significativo de la aritmética y la adquisición de nociones de álgebra elemental (Carpenter, et al., 2003; Molina, 2009).

¿Cuál sería la aportación del pensamiento relacional en el entendimiento de relaciones de cantidad, tanto en la aritmética como en el álgebra elemental? Hacer más sencilla la integración de las propiedades aritméticas en el aprendizaje del álgebra (Carpenter et al., 2005). La aritmética no se entiende sin la comprensión de las relaciones estructurales, en tanto un cálculo aritmético implica encontrar su estructura. Hewitt (2010) indica que la búsqueda de una estructura en un cálculo aritmético es buscar la estructura algebraica, es una "conciencia de conciencia".

Molina (2009) indica que el pensamiento relacional es un constructo similar a las denominadas meta estrategias conceptuales, las cuales se contraponen con las meta-estrategias procedimentales, las cuales versan sobre la aplicación de ciertos procedimientos estandarizados aprendidos, después de identificar el área a la que pertenece el problema. El pensamiento relacional, tal como las meta estrategias conceptuales, implican modos flexibles de abordar una situación matemática centrando la atención en las relaciones y elementos clave que la definen para construir la estrategia de resolución, en vez de aplicar únicamente algoritmos. El pensamiento relacional también abarca centrarse en una estructura o factor común de un problema que se puede solucionar, por lo que se considera como una entidad total o más general que solo un problema dado.

Por ejemplo, en el siguiente par de operaciones: a) 7+7+9 = 14+9 y b) 27+48-48 = 27, si se requiriera saber si son verdaderas o falsas (es decir, si se cumple o no la igualdad), en vez de hacer los cálculos en ambos lados de la ecuación, se podría hacer uso del pensamiento relacional y concluir que, en el caso de la expresión a, hay dos elementos idénticos (9) y otros que, al sumarse, se vuelven iguales al número 14; la expresión a es verdadera. La expresión b implicaría, sin hacer cálculos, una igualdad verdadera al anularse el número 48 y manteniendo el 27 en ambos lados de la ecuación (Molina, 2011).

El pensamiento relacional puede considerar una serie de características que le dan un carácter algebraico. Por una parte, este tipo de pensamiento puede emplear expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural o total, al promover un enfoque que no solo se base en el resultado de las operaciones. Este enfoque total, tal como se ha indicado con anterioridad, implica concebir a las expresiones como parte de una estructura subyacente en la cual pueden ser categorizadas.

En otras palabras, concibe las expresiones como parte de un patrón común, en la cual convergen otras expresiones que guardan entre sí características comunes. A su vez, el pensamiento relacional puede favorecer el desarrollo y el uso del sentido numérico y operacional, lo cual puede facilitar la concepción de operaciones y expresiones aritméticas como objetos. Además, puede potenciar la exploración, la identificación y la descripción de patrones y relaciones sobre números y operaciones, lo cual puede ser elemental en el proceso de su generalización. Aunado a que puede favorecer la exploración de la igualdad como la representación de una relación entre dos expresiones, así como la interpretación bidireccional de las igualdades. El pensamiento relacional puede ser potenciador de un enfoque que se aplique a la resolución de ecuaciones, al favorecer el desarrollo de los alumnos de sus métodos propios y flexibles de resolución (Molina, 2009).

¿Qué tan importante puede ser concebir operaciones y números en términos estructurales? Kieran (2011) indica lo siguiente al respecto:

> “Los estudiantes que conciben los números y las operaciones en términos de sus inherentes relaciones estructurales, es decir, como objetos que pueden ser relacionalmente comparados a partir de sus componentes y que, además pueden usar

> las propiedades básicas de las operaciones y de la igualdad, entonces podrían concebir a la aritmética desde un punto de vista algebraico" (p. 584).

La cita de Kieran indica que las relaciones cuantitativas pueden comprenderse de un mejor modo si se conciben algebraicamente, ya que éste a su vez implica una generalización de relaciones entre números y operaciones, lo que abre el panorama de las características en común que pueden tener entre sí expresiones y ecuaciones, lo cual no podría llevarse a cabo únicamente aritméticamente. En otras palabras, encontrar patrones a una serie de expresiones y ecuaciones ordena el pensamiento y el desarrollo matemático de los alumnos, haciendo más probable que comprendan la relación entre cantidades y operaciones, en vez de únicamente operar con algoritmos que, en el mejor de los casos, dominarían sin la necesidad de entender las relaciones que conllevan o de las cuales subyacen.

Finalmente, el pensamiento relacional es también una acción intelectual, misma que es alternativa a la aplicación de procedimientos estándares, debido a que está centrada en la exploración y contemplación de la estructura de las expresiones aritméticas y algebraicas. El pensamiento relacional puede aplicarse en varios rubros. Por ejemplo, en el cálculo numérico, este pensamiento sugiere el uso de patrones de resolución y planeación alternativos (como en el ejemplo de las expresiones a y b). En estos casos, los alumnos pueden actuar de un modo flexible al notar la estructura de la expresión, lo cual favorece en la resolución de problemas de un modo parsimonioso.

Si el pensamiento relacional tiene como base conceptual y metodológica el sentido de la estructura, los estudios de Molina (2006, 2009 y 2011), Carpenter et al. (2003), Mason (2008), entre otros que abarcan la problemática desde otros conceptos, esto quiere decir que, probablemente, exista una relación entre hábitos de pensamiento como este y modos generales de operar con propiedades matemáticas. Más adelante se abordará a profundidad el tema de jerarquía de operaciones y su relación con el pensamiento tanto funcional como relacional.

Por otra parte, basarse en una estructura para pensar, planear y resolver problemas a partir de su comprensión general, es una estrategia que no solo es exclusiva del campo de las propuestas curriculares. En el área de la educación especial – específicamente denominado campo basado en inhabilidades matemáticas– también es un recurso didáctico y de investigación partir de una estructura o esquema, en el cual converjan diversos tipos de problemas, con el fin de identificar la relación entre problemas y, de este modo, facilitar tanto la comprensión como la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

2.2.2 Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico puede ser definido como una aproximación tanto a situaciones como al desarrollo de modos de pensamiento, que enfatizan los aspectos generales y relacionales del álgebra, con herramientas no necesariamente simbólicas, que pueden ser usadas como soporte cognitivo, para introducir y nutrir el discurso tradicional del álgebra escolarizada, en edades tempranas, principalmente en la educación primaria (Kieran, 1996).

Lins y Kaput (2004) indican que existe un dominio del constructivismo Piagetiano en la idea de enseñar álgebra después de la aritmética, bajo el argumento de que el álgebra requiere un pensamiento formal con relación a las etapas de desarrollo; la aritmética se enseña primero y luego el álgebra. Una de las maneras de atender el problema, es romper con esta lógica a través de la introducción de conceptos y operaciones algebraicas desde los primeros niveles de educación primaria, por medio del desarrollo del pensamiento relacional, utilizando al álgebra como vía de comprensión de relaciones de cantidad (álgebra como una aritmética generalizada), así lo proponen organizaciones como la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Tal como indica Hewitt (2010) "la aritmética se ocupa de obtener respuestas. El álgebra desplaza la atención de las respuestas a lo que se debe hacer para obtener una respuesta, es decir, las operaciones" (p. 21). Esta cita sugiere que existe una relación en el entendimiento aritmético a partir de una base algebraica y viceversa, un entendimiento del álgebra elemental sobre una base aritmética.

La aproximación "primero la aritmética, después el álgebra", en la cual la aritmética era parte del currículum en los primeros años de primaria, seguido por una enseñanza formal del álgebra en los años más avanzados, se ha demostrado ser insuficiente para desarrollar un pensamiento algebraico profundo en los estudiantes, al generar un lamentable fracaso escolar en matemáticas (para la mayor parte de los alumnos) y una subsecuente limitación en la oferta relativa a carreras profesionales, lo que puede orillarles a pocas oportunidades económicas (Kaput, 2008; Moses y Cobb, 2001). Derivado de este cambio, el álgebra se concibe por la National Council of Teachers of Mathematics (2006) como un tópico longitudinal, desde incluso preescolar hasta preparatoria, con la idea de que los estudiantes tengan una amplia experiencia algebraica, misma que se puede construir de un modo natural, con intuiciones informales acerca de patrones y relaciones en modos formales de pensamiento matemático.

El origen de esta propuesta curricular se relaciona ampliamente con la evidencia de las investigaciones de Davydov (1962), Freudenthal (1974) o Vergnaud (1991) los cuales –tal como se han analizado algunos de ellos en la presente tesis– plantean la enseñanza del álgebra desde los primeros años de educación primaria. Surge una cuestión ante estas investigaciones: ¿por qué está tan arraigada la concepción de primero la aritmética, después el álgebra en la educación primaria, si desde hace tanto tiempo hay evidencia de su poca efectividad?

Lins y Kaput (2004) indican que la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada, desde entonces e incluso ahora, en aquellas cosas que los alumnos no podían hacer, en vez de explorar lo que sí podían hacer y comprender en matemáticas, así como con qué potencial de desarrollo contaban para ello. Sin embargo, algunas investigaciones a partir de la década de los 90, reportaron que los alumnos en edades tempranas pueden pensar algebraicamente a partir de experiencias y una enseñanza distinta, más centrada en el origen y desarrollo de algunos conceptos matemáticos que en la repetición de procedimientos o en el orden ya citado de primero la aritmética, después el álgebra. Particularmente, las investigaciones de Carpenter y Levi (2003), Carraher et al. (2006) y Kaput (1998, 2000, 2008) –entre otras– demostraron que las dificultades de los alumnos en relación con el álgebra, no se debían a que esta rama de las matemáticas fuera per se difícil o muy abstracta para los alumnos, sino que se debía en mayor proporción al tipo de enseñanza recibida.

Capítulo 3. Propiedades numéricas y la jerarquía de operaciones

3.1 Antecedentes

A lo largo de muchos años, profesores, matemáticos, alumnos y hasta las calculadoras, han estado programados de distintos modos, para operar bajo diversas reglas. Por ejemplo, en la primaria, era muy común memorizar la regla “menos por menos es más”, o “si de un lado suma, del otro se resta”. Estas reglas aparentemente incontrovertibles, han limitado el entendimiento de las propiedades numéricas, de nociones como la equivalencia y del uso de los signos en expresiones o ecuaciones. “Menos por menos es más” bajo ciertas circunstancias, así como también la equivalencia opera con los signos bajo ciertos parámetros.

Por ejemplo, en la siguiente operación: $-52 + 25 = x$. La respuesta puede ser 50 o puede ser 0. Es una diferencia importante obtener un resultado u otro. ¿Bajo qué parámetros sería 50? Si operamos con la clásica regla “menos por menos es más”, el 5 al cuadrado se convierte en 25 positivo, y sumado con el otro 25 tenemos el 50. Quizá estaríamos aplicando correctamente la regla incontrovertible. Sin embargo, esa es la manera equivocada de resolverlo. Las reglas de los exponentes indican que éste opera en el coeficiente que esté a su izquierda, por lo que el signo negativo está fuera del efecto del exponente. Si la expresión fuera la siguiente: (-5)2, entonces sí, el resultado sería 25 positivo, ya que el paréntesis está considerando al signo y al coeficiente. Como la expresión original indica el cuadrado del coeficiente, pero no su signo, entonces el resultado parcial es 25 negativo, y sumado al 25 de la derecha el resultado global es 0.

Se puede decir que hay una carga semántica basada en una estructura en las expresiones matemáticas. El esquema parte-todo aplica para sumas y multiplicaciones, y para sus inversos la resta y la división respectivamente. Pero no es lo mismo operara con dos factores que operaras con el cociente, u operar con la diferencia de dos números que con la suma de dos números. Aunque estén bajo un mismo esquema, las cantidades guardan diferentes relaciones entre sí. Estas relaciones son las que dan origen a ciertas convenciones, las cuales pretenden preservar las propiedades numéricas. El entendimiento de las propiedades y operaciones numéricas, que derivan de relaciones de cantidad, pueden ser un paso previo en el concepto del sentido de la estructura.

¿Por qué la jerarquía de operaciones tiene que ver con el álgebra, con la aritmética y con el pensamiento relacional? La jerarquía de operaciones es crucial para el entendimiento de la aritmética y del álgebra, ya que un entendimiento relacionado con operar correctamente un cálculo aritmético es necesario para entender una estructura algebraica y operar con principios algebraicos básicos de un modo correcto (Headlam, 2013). Por ejemplo, en la operación 5 + 4 x 3 = ¿?, el resultado debería ser 17. Si se opera de izquierda a derecha – tal como se opera comúnmente la aritmética y la escritura de muchos países – el resultado sería 27. El resultado correcto es 17 dado que la multiplicación (4 x 3) guarda una relación jerárquica en comparación con el 5. Romper con esta linealidad implica operar correctamente con los principios aritméticos y, por lo tanto, relacionarlos correctamente con los principios algebraicos. Otra razón radica de acuerdo con Wu (2007) en las operaciones inversas que implican los polinomios. Un principio algebraico indica que una división de C es igual a una multiplicación de 1/C, así como menos C es igual a sumar un menos C. De este modo, la división y la multiplicación operan en el mismo nivel jerárquico, así como la suma y la resta. Por lo tanto, en este polinomio los paréntesis se resuelven primero, luego los exponentes después las multiplicaciones-divisiones y finalmente las sumas-restas. De esta convención deriva la jerarquía de operaciones enseñada a partir de reglas preestablecidas: Paréntesis, Exponentes, Multiplicación-División, Suma-Resta.

A lo largo de muchos años, la jerarquía de operaciones se ha considerado una gran convención entre matemáticos y docentes. La convención indica el orden en el cual deben realizarse las operaciones, con el fin de obtener un resultado único. En estos intentos (de los cuales se analizarán sus implicaciones más adelante), nuevamente el elemento procedimental parece dirigir la convención. Es muy relevante este elemento, en términos generales. Sin embargo, en el caso de la jerarquía de operaciones, el núcleo principal de su conformación no es el procedimiento, sino las relaciones inmersas en una expresión o igualdad matemática.

En otras palabras, el entendimiento de la jerarquía de operaciones va más allá de operar con una heurística; el factor decisivo para lograr aplicar correctamente la jerarquía de operaciones es establecer un modo relacional de concebir a las cantidades. Las cantidades son una especie de unidades encriptadas que, a través de su combinación en una expresión, pueden llegar a perder dicha propiedad.

Una expresión como 5 + 3 x 5, otra como (5 + 3) x 5, y otra como 3 x 5 + 5, resultan equivalentes solamente entre dos cantidades de las tres. En la primera expresión, la suma del 5 no es con el 3, no están unidos, sino hasta que el 3 se multiplique por el 5 de la derecha. El 3 y el 5 al multiplicarse representan una cantidad encriptada como el 15, que después de salir a la luz como el producto de dos factores, se puede sumar con el 3. En la segunda expresión, el paréntesis delimita la relación que existe entre dos coeficientes, una suma que da como resultado 8, y que después se puede multiplicar por 5, obteniendo un 40. En la tercera expresión no hay necesidad de aplicar la jerarquía de operaciones, ya que de izquierda a derecha están acomodadas las relaciones, aunque eso no quiere decir que esas relaciones cambien con la ubicación, ya que como se pudo observar en las otras dos expresiones, el orden de las operaciones lo determina las relaciones de las cantidades, no su ubicación. Cuando el orden se mantiene, entonces la ubicación, ahora sí, puede ser un factor decisivo para operar primero con una operación, de un modo jerárquico.

¿Con qué operaciones puede suceder este último escenario? La ubicación es crucial, cuando las operaciones ya están relacionadas. Por ejemplo, en la expresión 8 / 4 x 5, o en la expresión 4 x 5 / 8, el resultado no es el mismo. En la primera expresión, la relación jerárquica primaria es el 8 el que ocupa el lugar del dividendo, y el 4 el del divisor. El cociente de la división, 2, es quién ahora será un factor junto con el 5 para obtener el resultado de 10. En la segunda expresión, los factores son el 4 y el 5, el producto 20, se convierte en el dividendo en la división, teniendo al 8 como divisor, obteniendo el cociente, 2.5.

La verdadera jerarquía está en las relaciones. En cierto momento, las relaciones dependen de la ubicación de la expresión, como en el último ejemplo, y en ocasiones dependen del tipo de operación, como en el penúltimo ejemplo.

Así como la NCTM propone que la enseñanza del álgebra pueda comenzar desde la primaria, el Common Core State Standards for Mathematics (2010) recomienda introducir las propiedades numéricas desde el tercer grado de primaria. Como parte importante de la implementación de las propiedades numéricas, Freudenthal (1974), asegura que la jerarquía de operaciones constituye una parte crucial del álgebra, y distingue el lenguaje algebraico del lenguaje de la vida cotidiana. La jerarquía de operaciones implica la realización de expresiones o ecuaciones de un modo estructural, con base en las propiedades numéricas, en vez de únicamente a su posición lineal (de izquierda a derecha).

La jerarquía de operaciones ha sido enseñada, principalmente, a través de mnemotecnias (p.ej., PEMDAS -paréntesis, exponentes, multiplicación, división, suma (add) y resta (subtraction)- GEMDAS, BOMDAS, BIMDAS). Sin embargo, las mnemotecnias resultan insuficientes para aplicar las propiedades de los números adecuadamente (Dupree, 2016). Aunque han sido útiles para algunos niños en la aplicación de las reglas de la jerarquía de operaciones, no han logrado hacer un énfasis en el significado de la jerarquía de operaciones, incluso en los más avanzados niveles de cursos de matemáticas (Glidden, 2008).

Gunnarsson et al. (2016), explican que las expresiones matemáticas implican varias convenciones, y una de esas convenciones describe el orden en el cual las operaciones se realizan. Este orden ha sido comúnmente reducido a través de mnemotecnias como la mencionada PEMDAS. La necesidad de operar con expresiones o igualdades en orden se encuentra, en mayor cantidad, en el álgebra. Este orden no se basa en la típica secuencia de izquierda a derecha para resolver una expresión aritmética, por lo tanto, provoca que los alumnos de secundaria o bachillerato, así como algunos profesores, fallen al momento de interpretar una expresión matemática.

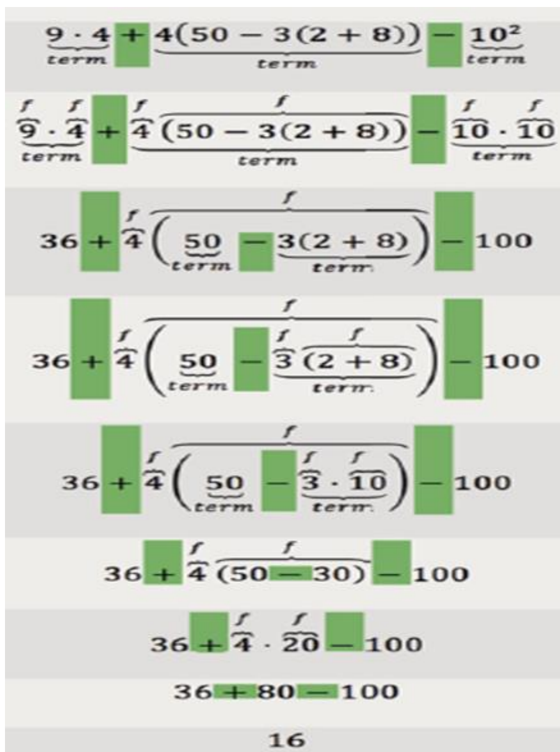
Asimismo, Dupree (2016) indica cuatro malinterpretaciones de la jerarquía de operaciones derivadas del uso de mnemotecnias: la multiplicación se realiza antes de la división, la suma se hace antes de la resta, las operaciones se resuelven de izquierda a derecha, y el paréntesis se resuelve primero.

La comprensión del concepto del orden en la jerarquía de operaciones es, de acuerdo con Headlam (2013), un primer paso para adquirir una percepción de la lógica del álgebra, al operar con una operación aritmética. Por ejemplo, resolver la operación 4 + 2 x 5 puede resolverse de "izquierda a derecha" o de un modo estructural, a + bc. Entender la lógica detrás de esta operación, podría ser un paso hacia la comprensión del significado de una expresión algebraica como a + bc y obtener el resultado correcto, 14.

¿Cómo abordar una regla o convención como la jerarquía de operaciones de un modo significativo? Taff (2017) sugiere que se pueden analizar los componentes de una expresión matemática en sus términos y en sus factores. Los términos son los componentes de una expresión separado por un signo aditivo o negativo. El factor es cuando se multiplica una serie de números. En la figura 2 se observa una representación de este método denominado iTaff:

Figura 2

Modelo ITaff.



Nota. Se pueden identificar los términos (term) y los factores (f). Adaptado de *Rethinking order of operations* (p. 131), por J. Taff, 2017, *Mathematics Teacher, 111* (2).

Esta propuesta contempla una concepción de la jerarquía de operaciones, como una equivalencia estructural de factores de una expresión matemática, misma que también es visible en otras investigaciones. (Dupree, 2016; Liebenberg, Sasman y Oliver, 1999; Zorin y Carver, 2015).

La habilidad de identificar una estructura en una forma generalizada es crucial al momento de enfrentar una actividad algebraica que implique transformaciones, ya que así estas transformaciones encuentran sentido. La relación entre la generalización y encontrar una estructura subyacente a una expresión o igualdad, impulsa el desarrollo del pensamiento algebraico, brindando la posibilidad a los escolares de "mirar a través" de objetos matemáticos (Kieran, 2017).

Mirar a través de objetos matemáticos implica una descomposición y una recomposición en términos estructurales, con la única intención de hacer evidente una estructura matemática. Por ejemplo, una expresión como 5 + 5 + 5 = 15 es equivalente estructuralmente a 5 x 3 = 15. Por otra parte, 5 + 3 x 2 puede ser descompuesta en términos aditivos: 5 + 3 + 3, manteniendo la misma estructura conmutativa. Estas expresiones pueden ser representadas en términos estructurales, de un modo algebraico: a + bc = y, o a + (b + c) = 15. Esta clase de equivalencias, además de buscar que los alumnos puedan generalizar una estructura, pueden hacer evidente la necesidad de operar con la jerarquía de operaciones, desde un punto de vista relacional, que puede ser llevado al campo del pensamiento algebraico, gracias a la jerarquía de operaciones.

La estructura constituye un contenido esencial para las matemáticas (Bourbaki, 1963), además, el entendimiento de una estructura algebraica requiere un enfoque en las características más abstractas de los fenómenos de la vida cotidiana. Este estudio se basa en el entendimiento de las relaciones de cantidades que se encuentran en una expresión matemática, a partir de la identificación de una estructura subyacente a factores o unidades operativas, mismas que pueden ser significativas para los niños de primaria, en un entorno escolar en el que se desenvuelven.

Esta significación se basa en eventos fenoménicos, utilizando agua y dulces, que sirven como vía del entendimiento, partiendo de un fenómeno concreto que permite el entendimiento de las relaciones abstractas.

La jerarquía de operaciones implica una estructura matemática, misma que se relaciona con propiedades matemáticas, de tal modo que dicha estructura guarda un orden al momento de combinarse operaciones básicas. Kieran (1989) indica que uno de los orígenes de las dificultades de los estudiantes de matemáticas (tanto de álgebra como de aritmética) es reconocer y usar una estructura. Esta estructura incluye la parte más superficial (p.ej., en la expresión 8 + 9 (x + 5) significa que el valor de X es la suma de 5 más la suma entre 8 y 9) y la estructura sistemática (p.ej., la equivalencia de la expresión 8 + 9 (x + 5) con la expresión 8x + 9x + 85, de acuerdo con la propiedad distributiva).

3.2 La jerarquía de operaciones y el sentido de la estructura

¿Para qué sirve la jerarquía de operaciones? ¿Cuál es el sentido de su introducción en edades tempranas? La jerarquía de operaciones implica el ordenamiento de operaciones básicas. Cuando una expresión aritmética o algebraica abarca sumas, restas, multiplicaciones, divisiones e incluso paréntesis, la jerarquía de operaciones indica que existen reglas para la resolución de una expresión matemática. Es decir, primero se deben resolver las operaciones que haya entre paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones, y finalmente las sumas y restas (en caso de haber potencias, deben ser resueltas antes de las multiplicaciones y divisiones). La jerarquía de operaciones organiza las relaciones cuantitativas, al priorizar el uso del paréntesis o la multiplicación sobre la suma con base en propiedades matemáticas. La importancia de esta organización radica en que de este modo se obtendría siempre un resultado único al momento de combinar operaciones básicas (de ser el caso con paréntesis o potencias). Por ejemplo, ante la siguiente expresión "3 + 5 x 8", el resultado correcto sería 43 aplicando la jerarquía de operaciones (primero se multiplica la expresión 5 x 8 y luego se suma el 3). Si no se aplica la jerarquía de operaciones y se suma primero, el resultado cambiaría a 64.

Respondiendo la cuestión relativa a la prudencia de una intervención temprana en el tema, Booth (1989), indica lo siguiente:

> "…la mayor parte de las dificultades de los estudiantes en álgebra radican en su falta de entendimiento de relaciones aritméticas. La habilidad para trabajar de un modo significativo en álgebra, y por lo tanto manejar las convenciones notacionales con facilidad, requiere primero desarrollar un entendimiento semántico de la aritmética" (p. 58).

Si los problemas en álgebra requieren de la comprensión de las relaciones aritméticas, la jerarquía de operaciones puede brindar un entendimiento significativo de las propiedades matemáticas, de las relaciones de cantidad y de dimensiones, así como de elementos cruciales al momento de resolver problemas o expresiones matemáticas (p.ej., signo igual, función, igualdad por equivalencia), lo cual podría mejorar el desempeño de los estudiantes tanto en álgebra como en aritmética. Este entendimiento significativo requiere de una relación de las reglas de la jerarquía de operaciones con eventos o problemas que puedan tener sentido para los alumnos de primaria. Dichos eventos o problemas configurarían la prudencia de la jerarquía de operaciones.

Otro ámbito importante, además del desempeño curricular en aritmética y en álgebra, sería la posibilidad del empleo de estructuras por parte de los estudiantes de primaria como base del entendimiento de relaciones cuantitativas, lo cual puede coadyuvar en las competencias de un alumno de matemáticas al lidiar con problemas. La jerarquía de operaciones también rompe con la linealidad de las operaciones básicas, al priorizar ya sea paréntesis, potencias o multiplicaciones o divisiones, en vez de la posición de las operaciones en una expresión.

A partir de este panorama descrito, se puede afirmar que tanto las investigaciones descritas hasta ahora como las que se analizarán a continuación, sugieren que es importante y necesario la intervención y capacitación tempranas en matemáticas, particularmente en la comprensión de las relaciones cuantitativas y de dimensiones en aritmética y en álgebra. Por ende, se describirán en los siguientes apartados qué se ha construido teórica y empíricamente en consideración a la problemática vinculada con el desempeño académico que implica la comprensión derivada del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, particularmente aquellas líneas de investigación que integran como eje rector de su metodología estructuras y esquemas algebraicos en el aprendizaje temprano de las matemáticas que facilitan la transferencia del aprendizaje hacia contextos complejos.

La jerarquía de operaciones, incluyendo las reglas y el uso del paréntesis, constituyen un esencial parte del algebra y distingue el lenguaje algebraico del lenguaje de la vida cotidiana (Freudenthal, 1974). La jerarquía de operaciones es una regla que subyace de la interacción entre propiedades matemáticas (conmutativa, asociativa, distributiva) con el fin de mantener un orden en las operaciones que impliquen sumar, restar, multiplicar, dividir, usar paréntesis o resolver potencias. Ese orden permite obtener un único resultado o una equivalencia entre expresiones.

La jerarquía de operaciones implica resolver 1) las operaciones que se encuentren entre paréntesis 2) evaluar las potencias o raíces 3) realizar las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha 4) realizar las sumas y restas de izquierda a derecha (Papadopoulos, 2016). En caso de que alguna situación – ya sea la 1, 2, 3 o la 4 – no estuviera presente, continua el orden jerárquico. Por ejemplo, en la expresión 3 x 5 + 2 + 3 = X, de acuerdo con la jerarquía de operaciones, se tendría que resolver primero multiplicación (obteniendo 15) y después sumar el resultado con el resultado de 2 + 3 (obteniendo 5) y obtener el resultado final al sumar las cantidades subyacentes (15 + 5 daría como resultado 20). Si no hubiese esta jerarquía, no se cumpliría con la propiedad conmutativa, es decir, no permanecería un resultado invariable al cambiar el orden de los términos de las operaciones como suma y multiplicación. Por ejemplo, si la expresión anterior implica una multiplicación y una suma, el resultado tendría que ser invariable si cambiamos el orden de estas operaciones (ya que, en este caso, la multiplicación y la suma comparten la propiedad conmutativa). Al invertir la operación se obtendría 2 + 3 + 3 x 5 = 20. Si no hubiera jerarquía de operaciones, tampoco se podría aplicar la propiedad conmutativa, obteniéndose el resultado de 40, realizando las operaciones de izquierda a derecha. La jerarquía de operaciones es la aplicación de las propiedades matemáticas, ya que mantiene el orden entre operaciones cuando éstas se combinan en expresiones o enunciados matemáticos.

¿Cuál es el problema con la jerarquía de operaciones si ya están las reglas establecidas? Wu (2007) menciona que los alumnos son alentados a la memorización de las reglas, sin necesidad de entenderlas en su uso y en su significación; gran parte del problema radica en que tampoco los profesores son capaces de entender ni su uso ni su concepción. Papadopoulos et al. (2002) con los alumnos y Glidden (2008) con docentes, dan evidencia de esta situación, al indicar que, por una parte, el caso de los alumnos, solamente aplican la regla sin un entendimiento de las propiedades que sustentan dicha regla. A partir de este problema, demostró que el uso de técnicas mnemotécnicas puede hacer más sencilla la aplicación de la regla. En el caso de los docentes, el autor indica que los profesores de educación primaria manifestaron contestar incorrectamente a una serie de problemas que implicaban jerarquía de operaciones, y estos errores se atribuían a una falta de comprensión de la regla establecida.

Booth (1989) menciona que, típicamente, derivado de la poca comprensión de la jerarquía de operaciones, los alumnos no usan paréntesis en la resolución de problemas matemáticos, debido a que asumen que tan solo requieren hacer cálculos, sin la necesidad de algún método o regla de procedimiento y de organización de la información. También consideran que la secuencia escrita de operaciones determina el orden en el cual debe ser el cálculo. Es decir, el paréntesis dentro de la lectura cotidiana de las operaciones matemáticas (de izquierda a derecha) no tendría utilidad práctica, por lo que el paréntesis no implicaría una compatibilidad con la secuencia cotidiana de una operación aritmética –lo cual es totalmente cierto–. Precisamente el paréntesis no tendría por qué seguir una secuencia lineal, sino una excepción a la misma conforme a ciertas circunstancias de acuerdo con modo en el cual se le interprete. Por ejemplo, si se le interpreta como un signo en el que se debe operar primero o, de otro modo, un signo que siempre aparece primero, o como un símbolo simple, pares con contenidos o pares vacíos (Kieran, 1979; Gunnarsson y Karlsson, 2014).

Dada esta particularidad, se ha analizado la jerarquía de operación a partir del concepto sentido de la estructura o únicamente estructura matemática. El término estructura se refiere a un análisis general del modo en el cual una entidad – o un todo – es formado por cada una de sus partes, a partir de la descripción de conexiones y relaciones de sistemas y las partes que configuran sus componentes (Hoch y Dreyfus, 2004). La estructura sugiere un sentido de esta, a partir de una colección de habilidades tanto manipulativas como conceptuales, las cuales habilita a los estudiantes a hacer uso de un mejor modo de las técnicas algebraicas aprendidas (Hoch, 2003). En otras palabras, el sentido de una estructura implica la descripción de las dificultades de los alumnos de matemáticas para usar su conocimiento aritmético de las propiedades matemáticas al momento de aprender álgebra (Linchevski y Livneh, 1999). El entendimiento de las operaciones numéricas, que derivan de relaciones de cantidad, pueden ser un paso previo en el concepto del sentido de la estructura. El estudio del sentido de la estructura ha sido enfocado, mayoritariamente, en la población de nivel secundaria, preparatoria y universitario. Estudios como los de Novotná y Hoch (2008), dan cuenta de las dificultades de los estudiantes en el entendimiento de conceptos algebraicos básicos, debido (entre otras circunstancias) a la ausencia de la concepción de una estructura algebraica.

Cuando se está aprendiendo álgebra, la estructura se entiende en términos de forma y orden de propiedades matemáticas. Hoch y Dreyfus (2004) aseguran que cualquier expresión o enunciado algebraico representa una estructura algebraica, dado que la forma externa de un enunciado o expresión revela a su vez un orden interno (derivado de propiedades matemáticas – conmutativa, distributiva, asociativa). Dicho orden interno está determinado por las relaciones entre las cantidades y operaciones, los cuales son las partes que componen la estructura algebraica.

Kieran (1989) identifica esta estructura desde un modo similar. Esta autora enfatiza la importancia de las dificultades de los estudiantes al momento de reconocer y usar una estructura algebraica, en el aprendizaje de ideas básicas en el pensamiento algebraico temprano. Dicha estructura puede ser tanto superficial como sistémica. La estructura superficial se ejemplifica del siguiente modo: en la expresión 3 (x + 2), se puede decir que el valor de x es sumado al 2 (quedando idéntica la expresión) y luego multiplicado por 3. La estructura sistémica se ejemplifica de este modo: la expresión 3 (x + 2) puede ser equivalente a (x + 2) * 3, o a 3x + 6. El primer tipo de estructura corresponde a la lectura de la expresión, es decir, a la descripción del procedimiento de su resolución o factorización. El segundo tipo de estructura implica una equivalencia con otras expresiones, en relación con, nuevamente, las propiedades matemáticas correspondientes.

Kieran (1989) asegura que las experiencias previas con el manejo y la comprensión de estructuras en expresiones numéricas en la escuela primaria, puede tener un efecto importante en la habilidad de darle un sentido al álgebra, o, en otras palabras, darle un sentido a la estructura algebraica de expresiones y enunciados matemáticos. Además, indica que la habilidad para trabajar de un modo significativo el álgebra, así como dominar las convenciones notacionales con facilidad, implica que los estudiantes, primero, desarrollen un entendimiento semántico o superficial, al menos, de la aritmética. A partir de esta implicación, Booth (1989) formula dos tareas en la investigación del tema de la estructura algebraica:

1) Examinar el reconocimiento y el uso de una estructura, y como este reconocimiento puede ser desarrollado.

2) Idear actividades de aprendizaje y entornos que asistan a los estudiantes en su desarrollo.

A partir de estas directrices, autores como Liebenberg, Sasman y Olivier (1999) se enfocaron en desarrollar el concepto de equivalencia numérica, desde un punto de vista estructural de las expresiones numéricas. Particularmente, su objetivo fue poner a prueba a 40 estudiantes de sexto grado de primaria en relación con varias tareas. Las primeras tareas implicaban dos tareas: a) pensar diferentes modos en los cuales tres números –15, 8 y 4– y las operaciones sumas "+" y multiplicación "x" podían ser utilizadas, de tal modo que se obtuviera como respuesta el número 47 b) pensar diferentes modos en los cuales los números 9, 6, 8 y 4, así como las operaciones suma y multiplicación podían ser utilizadas para obtener el número 47. Ambas expresiones son equivalentes, ya que la suma del 9 y el 6 de la segunda tarea es equivalente al 15 de la segunda expresión. En ambas tareas, la mayoría de los estudiantes procedían calculando, de tal modo que en la segunda tarea no reemplazaban los números 9 y 6 con el número 15 de la primera tarea; no se percataron que eran expresiones equivalentes. Los estudiantes que sí lograron identificar la equivalencia lo hacían a partir de una estrategia estructural, la cual implica propiedades de los números (en este caso, conmutativa) y la jerarquía de operaciones. Las opciones podían ser 8 x 4 + 15; 15 + 4 x 8; 4 x 8 + 15; o 15 + 8 x 4.

En una segunda ronda de tareas, los estudiantes tenían que resolver ejercicios en los cuales no podían calcular el resultado de pares de expresiones, con el fin de identificar alguna equivalencia entre ellas indicando cuales eran iguales (tenían que marcarlas con el signo igual "=") o eran no equivalentes. Algunos pares de expresiones eran 1) 28 + (2 x 5) y 28 + 2 x 5, 2) 288 / 32 / 8 y 288 / (32 / 8) y 3) 21 x 13 x 42 / 6 y (21 x 13) x (42 / 6). En la misma ronda, se les retaba a encontrar, de entre seis opciones, expresiones equivalentes a esta: 367 + 68 x 1966 x 214 + 814 x 45. En esta ronda, los estudiantes, a pesar de seguir manteniendo una tendencia por el cálculo de las expresiones, no tuvieron tantos problemas, ya que aplicaban las reglas de la jerarquía de operaciones y se orientaban por el paréntesis y lo relacionaban con la ubicación de la otra expresión.

Para una tercera ronda de tareas, los estudiantes tenían que indicar si eran o no equivalentes 2 pares de expresiones:

a) $(208 + 59)\, x\, 61\, x\, 48 \,/\, 208 + 59\, x\, 61\, x\, 48$

b) $(415\, x\, 58)\, x\, (232 / 29) \,/\, 415\, x\, 58\, x\, 232 / 29$

En el primer par de expresiones, los estudiantes proveían justificaciones para indicar la no equivalencia de las expresiones; lo hacía de un modo sencillo en términos generales. 29 alumnos aplicaron las reglas correctamente, dos se basaron en las diferencias estructurales, uno se enfocó en los números únicamente, en cambio, solo 8 alumnos aplicaron incorrectamente la regla. En el segundo par de expresiones, solo 8 estudiantes reconocieron que la segunda expresión puede ser calculada del mismo modo que la primera, a pesar de la "regla del paréntesis" o de la "multiplicación antes de la suma".

Estos resultados indican que la estructura de las operaciones está ensombrecida por la necesidad de calcular o de aplicar reglas. Es decir, no existe una amplia comprensión de la estructura que subyace de operaciones, la cual a su vez responde a reglas establecidas (jerarquía de operaciones) conforme a propiedades matemáticas. Los alumnos, en su mayoría, resolvían las tareas conforme a su historia de aprendizaje y enseñanza de matemáticas, así como de su comprensión profunda de las propiedades de una expresión.

En otro estudio realizado por Linchevski y Livneh (1999), se analizó si los estudiantes podían identificar nociones estructurales derivadas de expresiones numéricas. En otras palabras, este estudio analizó si los malentendidos o interpretaciones equivocadas de la estructura algebraica ocurrían en contextos meramente numéricos, o se presentaban en contextos cotidianos. Para ello se evaluó la comprensión y el desempeño en expresiones numéricas relacionadas con jerarquía de operaciones en 53 estudiantes de dos naciones, Israel y Canadá, de sexto grado, y fueron entrevistados individualmente. La intervención constó de una serie de ejercicios divididos en tres problemas: 1) sin usar calculadora, solo al deducir a partir de ver los números, ¿podrías indicar rápidamente un modo de resolver este problema? (se mostraban tres problemas, dos de suma y resta y uno de división); se esperaba que los alumnos pudieran eliminar las expresiones que se neutralizaban (p.ej., 10 – 10); 2) sin usar calculadora, podrías indicar cuáles expresiones son equivalentes en su respuestas (se mostraban tres cuatro expresiones basadas en sumas, restas y uso de paréntesis); se esperaba que los alumnos relacionaran las expresiones entre sí, teniendo como resultado óptimo relacionar dos pares (el 1 con el 3 y el 2 con el 4) que eran equivalentes; 3) dos expresiones que requerían cancelar u operar con sumas y restas (tal como el primer problema).

Los ejercicios implicaban aplicar jerarquía de operaciones o simplemente realizar la operación de izquierda a derecha. Algunos estudiantes mostraban errores de apreciación estructural meramente en los problemas que contemplaban paréntesis (problema 2), con lo cual aplicaban erróneamente la jerarquía de operaciones. Sin embargo, lo importante del estudio radicó en que algunos alumnos mostraban inconsistencias en sus respuestas, esto es, que en ocasiones los alumnos contestaban correctamente ejercicios en ciertos problemas, mientras que en otros ejercicios equivalentes en otros problemas se equivocaban. En total, solamente 6 alumnos lograron resolver correctamente los ejercicios en los tres problemas. El resto de los alumnos tuvieron tres tipos de errores: malentender la jerarquía de operaciones, ignorar el signo menos cuando era seguido de un paréntesis, e ignorar el término de la operación indicada. Con estos resultados, los investigadores concluyeron que existían problemas de comprensión tanto de la estructura matemática que subyace de las expresiones numéricas como de la jerarquía de operaciones.

Enfocarse en el estudio de los errores de los alumnos en jerarquía de operaciones y en otros conceptos algebraicos, puede mejorar la calidad de las investigaciones relacionadas, ya que el error conceptual puede ser concebido como un tipo de predictor de las clases de errores que los estudiantes cometerán al enfrentarse a problemas algebraicos, ya que los errores conceptuales muestran el nivel de desarrollo y comprensión del propio concepto (Booth et al., 2014) En un estudio relacionado, realizado por Booth et al. (2014), se examinaron seis categorías de errores conceptuales, es decir, concepciones erróneas, en la resolución de problemas algebraicos: variable, signo menos, igualdad/desigualdad, operaciones, fracciones y propiedades matemáticas. El objetivo de la examinación versaba sobre la identificación de los errores más persistentes en 565 estudiantes estadounidenses de séptimo, octavo, noveno y décimo grado, identificados como estudiantes no sobresalientes en su desempeño académico en matemáticas. Los estudiantes resolvieron tareas vinculadas con estos conceptos en una prueba. Los resultados mostraron una gran cantidad de errores al operar principalmente con el signo igual (en todos los grupos evaluados) el signo negativo y con la jerarquía de operaciones. Los estudiantes mostraban un patrón en dichos errores. Por ejemplo, el error en el signo igual es el más persistente en todos los grupos y se relaciona con la necesidad del entendimiento conceptual del signo igual, así como los errores en la jerarquía de operaciones implican una necesidad de entendimiento de estructuras y propiedades matemáticas. En conjunto, los autores indican que estos errores requieren intervenciones distintas a las cotidianas, preferentemente aquellas que se enfoquen en el entendimiento conceptual de los temas evaluados.

En relación con las actividades didácticas, existen mnemotecnias como PEMDAS que, aunque han sido útiles para algunos niños en la aplicación de las reglas de la jerarquía de operaciones, no han logrado hacer un énfasis en el significado de la jerarquía de operaciones, incluso en los más avanzados niveles de cursos de matemáticas (Joseph, 2014; Glidden, 2008).

A manera de conclusión, la jerarquía de operaciones se incluye como parte del diseño psicoeducativo porque implica una serie de operaciones condicionales, en las que se tiene que realizar una operación para resolver otra subsecuente, pero de un modo estructural, ya que se pone énfasis en las relaciones jerárquicas de las operaciones, en vez de únicamente en su posición lineal. De este modo, se mantiene la propiedad conmutativa de las relaciones previamente establecidas y se establecen jerarquías en las operaciones cuantitativas, rompiendo con la inercia posicional de resolución de problemas (de izquierda a derecha) y siguiendo la línea de investigación de autores que han propuesto alternativas al uso de mnemotecnias en el tema (Ameis, 2011; Zorin & Carver, 2015).

3.2.1 Unidades operativas

Papadopoulos y Gunnarsson (2020); Taff (2017); o Zorin y Carver (2015), dan cuenta de varios aspectos del estudio de la jerarquía de operaciones, entre los que destacan:

1. Hay muy diversas maneras de operar las propiedades numéricas
2. Las propiedades numéricas no responden a la posición del número
3. La comprensión de nociones de jerarquía de operaciones, requieren pensamiento complejo

4. El hábito del alumno por memorizar la jerarquía de operaciones con nemotecnias
5. Las dificultades de los alumnos de secundaria para comprender jerarquía de operaciones.

Desde el punto de vista de la presente tesis, la jerarquía de operaciones se fundamenta en las unidades operativas subyacentes a las propiedades numéricas. Las unidades operativas en la jerarquía de operaciones se definen como las relaciones intrínsecas de cantidad en una expresión, que se establecen a partir de las propiedades numéricas. Por ejemplo, en la igualdad (5+(2) (8) = a) el resultado malinterpretado comúnmente sería 56, al sumar 5 y 2 y luego multiplicar el 7 por el 8. Si nos basamos en las unidades operativas, entonces la relación intrínseca jerarquizada (que no responde a la posición de las cantidades) sería sumar el 5 al producto de 2 por 8, obteniendo el resultado correcto, 21 ((a+(b) (c)= x)). El término unidades operativas también se basa en la concepción de Taff (2017), acerca de los factores (números) y los términos (las operaciones de esos números) inmersos en la jerarquía de operaciones.

Es aquí donde el pensamiento relacional y la jerarquía de operaciones se contemplan mutuamente. El pensamiento relacional está ligado a un análisis estructural de expresiones y ecuaciones, tanto a nivel algebraico como en la jerarquía de operaciones. La jerarquía de operaciones se relaciona con la representación de equivalencias entre operaciones aritméticas, con el fin de hacer evidentes las relaciones entre unidades operativas que son la base de su aplicación. Las unidades operativas se definen como las relaciones de cantidad en una expresión o ecuación, al aplicar la jerarquía de operaciones. Por ejemplo, en la expresión (6) / 2 (2 + 2) = X, las unidades operativas son la división ((6) / 2), la operación entre paréntesis (2 + 2), y la multiplicación posterior del cociente y de la suma (3 x 4), lo que dará el valor de x (12). Esta misma expresión puede ser calculada aplicando la jerarquía de operaciones erróneamente, multiplicando el 2 por el valor de la suma del paréntesis, y luego el resultado de esa operación sería el divisor del 6 (6 / 8). La importancia de las unidades operativas radica en que fungen como una guía al momento de utilizar la jerarquía de operaciones para resolver correctamente una igualdad, al reconocer que una expresión como 6/2 o 3 x 4 constituyen una unidad operativa que requiere ser decodificada para poder continuar con la operación de la concatenación de las relaciones numéricas.

En la siguiente figura 3 se muestra una representación de las unidades operativas, inspirado en el modelo iTaff (Taff, 2017).

Figura 3

Unidades operativas desde entornos simbólico-algebraicos y aritméticos.

$b^2 / c\ (d + e) + f = x$ // $5^2 / 2\ (9 + 3) + 1 = x$

$b^2 / c\ (d + e) + f = x$	$5^2 / 2\ (9 + 3) + 1 = x$	$25 / 2\ (9 + 3) + 1 = x$
$25 / c\ (d + e) + f = x$	$25 / 2\ (9 + 3) + 1 = x$	$12.5\ (12) + 1 = x$
$12.5\ (12) + f = x$	$12.5\ (12) + 1 = x$	$258 + 1 = x = 259$

Nota. Los círculos y las zonas de color rojo representan las unidades operativas, que implican relaciones entre cantidades que no se puede separar hasta que se opere con ellas. La figura es de elaboración propia

Capítulo 4. La escolarización de la jerarquía de operaciones y el álgebra temprana

4.1 Didáctica fenomenológica

El término didáctica fenomenológica, se refiere a la relación entre un concepto matemático y su representación concreta, como una especie de modelación realista. El término fenomenológico, en esta propuesta, versa sobre la descripción de conceptos matemáticos, estructuras o ideas, a través de objetos en su relación con algún fenómeno del mundo físico, social o mental, que puede ser organizado a través de esos objetos. Por otra parte, el término didáctica tiene una carga semántica derivada de la tradición Didáctica Magna o Great Didactics, la cual se enfoca en la enseñanza que deberían tener los estudiantes, en contraste con la concepción anglosajona orientada a las técnicas de enseñanza (Jupri, et al., 2014).

Freudenthal (1983), aseguraba que la didáctica fenomenológica podía fungir como una base para los docentes de matemáticas, en la cual los estudiantes podrían empezar la construcción del aprendizaje de los fenómenos de la vida cotidiana, organizando dichos fenómenos en sus elementos más representativos de los conceptos matemáticos, llevando a los estudiantes a un nivel de desarrollo superior.

La didáctica fenomenológica representa los conceptos o ideas matemáticas, a través de su relación con eventos. Estos eventos son la base empírica de la comprensión del fenómeno, es decir, el significado potencial de los conceptos matemáticos, pueden tener como auxiliar un ejemplo asequible en la realidad de los estudiantes de matemáticas.

Freudenthal (1983), intenta transferir ciertas reglas del lenguaje algebraico y aritmético al de la vida cotidiana, subrayando los elementos que los hacen comunes, sin mezclarlos. Por ejemplo, el orden en el cual se escribe una historia es similar al modo en el que se usa una calculadora (7 + 5 = es aceptable, pero 7 + = 5 no lo es, del mismo modo que una palabra produce a la siguiente en cualquier historia). También eran equiparables para el autor dos relaciones primitivas, tanto el matemático como en el lenguaje: tarea – desempeño y su relación con pregunta – respuesta.

La importancia de la obra de Freudenthal es su sensibilidad hacia la necesidad de relacionar el ámbito formal del estudio de las matemáticas no solo con la resolución de problemas, sino con el ámbito estructural de áreas diversas del lenguaje. El lenguaje cotidiano representaba para este autor una convergencia de los elementos críticos de subáreas matemáticas como la geometría y el álgebra.

El lenguaje inmerso en las matemáticas es parte de la abstracción de un individuo cuando logra apropiarse del entendimiento de relaciones cuantitativas. Las relaciones que subyacen de ese entendimiento no son heterogéneas, ya que dependen de qué ámbitos de las relaciones cuantitativas se relacionan entre sí. Para analizar con mayor detalle los tipos de relaciones que se pueden formar en el entendimiento de una abstracción matemática, es momento de analizar dos tipos de relaciones: sintagmáticas y paradigmáticas.

4.2 Equidad: evaluación proporcional y trayectorias de aprendizaje

Existe una gran cantidad de evidencia en la literatura de la matemática educativa, en la que la palabra equidad significa muchas cosas: desde generar oportunidades para sectores históricamente minorizados, hasta luchas feministas (Forgasz y Rivera, 2012). En este estudio, el término equidad contempla de un modo más genérico. Se hará referencia a la equidad como un medio por el cual se reconoce la inevitable diferencia individual entre el dominio conceptual entre los alumnos que pertenecen a un grupo y a una institución. Estas diferencias se basan en la complejidad de cada alumno, en función de su entorno social, familiar, sus condiciones de seguridad, económicas, la infraestructura del país al que pertenece, entre otros.

Si los alumnos comienzan en un nivel distinto de dominio y eso repercute en su desempeño, ¿cómo medir la adquisición de conocimiento más allá del nivel de logro? Una manera puede ser a través de las trayectorias de aprendizaje. Sztajn et al. (2012) indican que existen diversas líneas de investigación en el campo de las trayectorias de aprendizaje, entre los que destacan:

1) Conocimiento y contenido curricular
2) Conocimiento especializado
3) Conocimiento común
4) Conocimiento horizontal
5) Conocimiento relativo a los estudiantes
6) Conocimiento relativo a los docentes

En esta tesis, se analizará la trayectoria de aprendizaje desde el quinto punto, es decir, el conocimiento relativo a los estudiantes. Para realizar esta aplicación, se requiere medir en distintos momentos, el desempeño de los estudiantes y comparar qué tanto se movió, ya sea en favor del dominio conceptual o en contra. En otras palabras, se analizará el efecto de variables como la didáctica fenomenológica, la secuencia instruccional o el trabajo en equipo, en el desempeño de estudiantes de primaria.

4.3. La importancia del trabajo en equipo en el aula: aprendizaje cooperativo.

El aprendizaje cooperativo, (también denominado aprendizaje por colaboración por autores posteriores ubicados en el paradigma socioconstructivista) en una estrategia educativa en la que se enseñan métodos, los cuales contemplan el trabajo de alumnos en grupos pequeños, para que puedan apoyarse y aprender algún concepto o procedimiento entre sí (Slavin, 2008).

El aprendizaje cooperativo incrementa el logro de los estudiantes en dos rubros clave: los objetivos de un grupo y la responsabilidad individual. Los grupos son recompensados con base en el aprendizaje individual alcanzado por los miembros del grupo; el grupo se enseña intereses, modos de ayuda, métodos de obtener recompensas o completar una actividad de un modo mutuo. (Webb y Palincsar, 1996). De acuerdo con Wittrock y Peterson (1990), una de las maneras más efectivas en la construcción de conocimiento es la explicación de un concepto a alguien más, es decir, fomentar el uso de la argumentación como vía de análisis del entendimiento. Al respecto, Slavin (1995), afirma que la experiencia de interacción mutua puede ayudar a los niños en el dominio no solo de procesos sociales, sino de procesos cognitivos como la participación y la argumentación. Además, indica que la colaboración entre pareas puede facilitar el pensamiento creativo a partir del aprendizaje por descubrimiento, así como promover la motivación de los alumnos entre sí, al poder abandonar malentendidos de los conceptos y buscar soluciones mejores. Por ejemplo, si un compañero de equipo sugiere que las sumas y las restas son lo mismo, muy probablemente otro compañero pueda argumentar en favor de la idea contraria. Si ese argumento es lo suficientemente válido en términos empíricos y conceptuales, quizá el alumno con la idea inicial de la igualdad entre sumas y restas pueda cambiar de parecer.

Un malentendido común en el marco del aprendizaje cooperativo radica en la creencia de que en cualquier grupo de trabajo existe aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo implica más que solamente un grupo de trabajo, ya que cuando hay aprendizaje de este tipo, los grupos de trabajo son asignados a una tarea en la que la contribución de cada integrante es crucial. Por lo tanto, el aprendizaje cooperativo requiere un alto nivel de responsabilidad individual, dado que deriva de las esferas de colaboración tanto individual como grupales (Johnson y Johnson, 2008; Schul, 2011).

¿Qué se requiere para que exista un aprendizaje cooperativo? En principio, el grupo debe tener una mezcla de niños; estudiantes tanto competentes en términos de expresión verbal, como alumnos más pasivos verbalmente; estudiantes líderes y estudiantes seguidores o que se desenvuelven mejor siguiendo indicaciones; así como estudiantes entusiastas y otros más reacios que el resto de sus compañeros (Johnson y Johnson, 1986). La idea principal del aprendizaje cooperativo es concebir al grupo como intercomplementario, es decir, que las diferencias individuales de los alumnos logren equilibrarse entre sí, supliendo mutuamente las carencias de un alumno con las habilidades de otro compañero.

Existe un par de modelos de aprendizaje cooperativo llamados Students Team-Achievement Divisions y Team-Games-Tournaments, derivados de los estudios de la Universidad John Hopkins, en los cuales los estudiantes trabajan en equipos de 4 o 5 miembros. Cada equipo está en la posibilidad de recibir un reconocimiento basado en el aprendizaje de todos los miembros del equipo (Slavin, 1995). De estos modelos, se derivaron propuestas instruccionales didácticas: Team Accelerated Instruction (TAI), especializado en el área de matemáticas (Slavin, Madden y Leavey, 1984), y Cooperative Integrated Reading and

Composition (CIRC), centrado en la comprensión de textos y dominio de la lengua inglesa (Stevens y Slavin, 1995). Estas propuestas derivan de la problemática que tienen algunos profesores de educación básica, principalmente, para poder llevar a las aulas las innovaciones didácticas y poder combinarlas con los libros de texto que utilizan, así como con los objetivos curriculares de los cuales depende se labor docente. 33

La propuesta que se relaciona con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Team Accelerated Instruction (TAI), según lo indicado por Slavin (1989), está orientada hacia alumnos de 3° a 6° grado de primaria. Se compone de varios estratos: formación de equipos, prueba, materiales, grupos de enseñanza, método de estudio, etapa de formación y reconocimiento. La formación de equipos se compone de 4 o 5 miembros, en los cuales debe haber una mezcla de alumnos de nivel alto, medio y bajo desempeño académico. Los integrantes de los equipos eran reasignados cada 8 semanas.

Por otra parte, en el inicio del TAI, los estudiantes eran preevaluados en su dominio de operaciones matemáticas, y su desempeño final era el punto inicial de su conformación como equipos, es decir, los equipos de 4 o 5 miembros, además, tenían otro equipo, conformado por compañeros de su mismo nivel de dominio de las competencias matemáticas preevaluadas. Esta etapa es sintetizada como la prueba.

Los materiales, se basaban en guías, ejercicios prácticos, pruebas basadas en opciones múltiples, así como problemas matemáticos verbales y pruebas de cada unidad del programa. Las unidades se basaban en los conceptos de suma, resta, multiplicación, división, numeración, decimales, fracciones, estadística y álgebra. En cuanto a los grupos de enseñanza, como ya se mencionó, había dos tipos de grupos los del mismo nivel de dominio matemático (preevaluación) y los que se formaban de modo heterogéneo, de 4 o 5 miembros. Los profesores instruían la lección a cada equipo por nivel de dominio, y luego esos alumnos regresaban a su equipo heterogéneo, para poder colaborar de acuerdo con su nivel base de dominio.

En el método de estudio, los alumnos tenían que localizar la unidad en la que iban a trabajar, después localizar los ejercicios prácticos de la unidad y resolver cuatro problemas de un modo correcto. Si lograban conseguirlo, entonces podían pasar a la siguiente unidad. En la etapa de formación, los alumnos tenían que resolver al menos cuatro pruebas satisfactoriamente. Estas pruebas son de las unidades en las que los alumnos trabajaban. Al tener 4 unidades contestadas de manera correcta, recibían un reconocimiento como equipo. Cabe destacar que los profesores, cada 3 semanas, daban una retroalimentación grupal en cada unidad.

El TAI representa una manera de aplicar al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, la colaboración de un grupo de alumnos. La colaboración representa una oportunidad de interacción entre diversos niveles de dominio en el entendimiento matemático. Esta interacción no se hace de un modo espontáneo, ya que requiere de una estructura instruccional preestablecida, la cual no limita la construcción propia del entendimiento, sino que la orienta, de tal modo que se consoliden los conceptos abstractos de un modo significativo y colectivo.

Existen otros tipos de técnicas de aprendizaje cooperativo. Algunos ejemplos son: el trabajo cooperativo en parejas (Kagan, 1988); la técnica del rompecabezas (Slavin, 1980); el grupo pequeño de enseñanza (Slavin, 1980); o el grupo de investigación (Knight y Bohlmeyer, 1990).

4.4 Evaluación sistémica

Dentro del aprendizaje cooperativo, un rubro que subyace es el modo en el cual se evalúa dicho aprendizaje. El campo de la evaluación es sumamente diverso y complejo, por lo cual en esta tesis solamente se abordarán algunas características orientadas al entendimiento matemático dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos abstractos. En específico, se analizarán tres tipos de evaluación: la evaluación diagnóstica, la sumativa y la evaluación formativa.

Por una parte, la evaluación sumativa tradicional tiene como objetivo registrar o informar el logro de un estudiante, cristalizado en juicios o perspectivas de su desempeño a través de pruebas hasta un momento determinado (Harlen, 2007) es una herramienta establecida para documentar el desempeño de los estudiantes vinculado con el final o el producto de un aprendizaje. Como una asignatura o curso, la evaluación sumativa sirve para juzgar el aprendizaje expresado por el alumno (William, 2006). Rosales (2014), indica que la evaluación sumativa "tiene por objetivo establecer balances fiables de los resultados obtenidos al final de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Pone el acento en la recogida de información y en la elaboración de instrumentos que posibiliten medidas fiables de los conocimientos a evaluar" (p. 4). Dicho de otro modo, la evaluación sumativa se enfoca en el análisis de los productos de varias tareas que un alumno puede desarrollar. La evaluación diagnóstica, por ejemplo, se centra en detectar el nivel de competencia de un alumno antes de una investigación, una intervención, o como parte de una prueba derivada de otros objetivos. Sin embargo, no se le puede considerar como evaluación sumativa porque la característica principal de este tipo de evaluación es el momento en el cual se lleva a cabo, es decir, al final de una secuencia instruccional o didáctica.

Respecto a la evaluación formativa, se puede definir como un proceso frecuente e interactivo del progreso y la comprensión de los estudiantes, enfocado en la identificación de las necesidades de los estudiantes respecto al aprendizaje, y poder ajustar el ámbito didáctico a su nivel de competencias (William, 2006). Rosales (2014), define del siguiente modo a la evaluación formativa:

> "La evaluación formativa es la que se realiza durante el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje para localizar las deficiencias cuando aún se está en posibilidad de remediarlas, esto es, introducir sobre la marcha rectificaciones a que hubiere lugar en el proyecto educativo y tomar las decisiones pertinentes, adecuadas para optimizar el proceso de logro del éxito por el alumno" (p. 3).

Knight (2002) establece similitudes entre las evaluaciones formativas y sumativas. Primeramente, toda evaluación busca evidencia de logro; en toda evaluación se realizan juicios sobre la relación entre la evidencia y los criterios implementados; los juicios implican información y modos de comunicar. Por lo tanto, es necesario concebir a la evaluación como un sistema complejo de comunicación e información, inmersas en prácticas de aprendizaje.

Tanto la evaluación formativa como la sumativa, son parte de un método para dar cuenta del aprendizaje de un alumno en diferentes momentos, dentro del contexto de la escolarización. Si bien es cierto que los productos de una tarea o secuencia didáctica importan en gran medida en una evaluación sumativa, es conveniente comenzar cualquier tipo de investigación o intervención, considerando el estado inicial de los alumnos, con relación a sus competencias, sus carencias y su situación compleja particular.

La evaluación sistémica es una unión entre la evaluación formativa y la sumativa; consiste en correlacionar todos los indicadores entre sí, con la intención de verificar su relación a través de estadística inferencial no probabilística. Los indicadores (ver capítulo 8) fungen como los criterios de evaluación del entendimiento de los alumnos en relación con las tareas con las cuales tuvieron que crear modos de solución, desde un punto de vista individual y después por equipo.

Capítulo 5. Plan metodológico

5.1 Desarrollo

El plan metodológico se basa en tres planes derivados: el plan conceptual y procedimental; el plan institucional; el plan de evaluación. La implementación de estos planes particulares en conjunto, configuran el plan metodológico. A continuación, se dan detalles generales de cada plan derivado.

Figura 4

Estructura del plan metodológico.

Plan conceptual y aplicado

Concepto central	Concepto derivado	Concepto aplicado	
		Implementación	Evaluación
Razonamiento matemático	Dominio aritmético Pensamiento algebraico Jerarquía de operaciones	Niveles de representación Aprendizaje cooperativo Didáctica fenomenológica	Nivel de logro individual Nivel de logro por equipo Metacognición
Equidad	Entendimiento proporcional		Nivel proporcional de logro

Plan institucional

Institución	Grupo	Sesiones	Materiales	Tiempo por sesión
José Crisóstomo Bonilla	3er grado de primaria	8	Agua, vasos, papel y colores	60 minutos
Acayucan		10	Agua, vasos, papel, colores, dulces y bolsas	90 minutos

Plan de evaluación

Etapa de evaluación	Recursos de evaluación estandarizados	Recursos de evaluación situados	Recursos de evaluación longitudinales
Evaluación diagnóstica	WISC-IV (aritmética) Prueba Planea (Reactivos de matemáticas)	No aplica	Calificación de matemáticas Opinión de la profesora sobre desempeño académico
Evaluación de proceso	No aplica	Preguntas de evaluación de las tareas de proceso	No aplica
Evaluación sumativa	WISC-IV (aritmética) Prueba Planea (Reactivos de matemáticas)	Preguntas de evaluación de las tareas de pensamiento algebraico Preguntas de evaluación de las tareas de jerarquía de operaciones	Opinión del investigador sobre el desempeño académico de los estudiantes

Para llevar a cabo este plan metodológico, se realizaron dos experiencias de enseñanza: el I o estudio piloto; y el II o estudio de investigación.

Capítulo 6. Experiencia de enseñanza I

6.1 Método

La experiencia de enseñanza I se realizó con 22 estudiantes (8-9 años) que pertenecían al grupo de 3° de la primaria "Juan Crisóstomo Bonilla". Esta institución es pública y se encuentra en la Ciudad de México. Cada participante firmó por escrito (tanto ellos como sus padres o tutores) su aceptación para formar parte de la investigación.

Si bien los objetivos de la tesis están desarrollados en el plan metodológico, esta primera investigación contó con sus propios objetivos, dado que se trata de un estudio piloto. La importancia de una primera aproximación al campo de estudio de esta tesis (el razonamiento matemático) implica necesariamente delimitar qué objetivos corresponden a esta etapa. Los objetivos de esta primera investigación fueron los siguientes:

1. Evaluar la factibilidad de aplicar una dinámica de enseñanza de conceptos matemáticos a partir de actividades concretas por medio de la manipulación de objetos (didáctica fenomenológica).

2. Evaluar las diferencias individuales de los alumnos y su repercusión en su integración en el trabajo en equipo.

3. Analizar la relación entre la jerarquía de operaciones y el pensamiento algebraico, desde un punto de vista tanto conceptual como procedimental.

Para llevar a cabo dichos objetivos, la experiencia de enseñanza I se desarrolló en tres etapas: la preevaluación o el diagnóstico de las competencias básicas de los escolares; la implementación de la secuencia psicoeducativa o evaluación de proceso; la post-evaluación o evaluación sumativa del entendimiento de los alumnos.

Se utilizaron notas de campo, para registrar algunos comportamientos de los alumnos mientras resolvían los ejercicios de las sesiones, así como grabaciones de audio de sus interacciones, tanto con el investigador, como con la maestra y con sus propios compañeros.

Evaluación diagnóstica.

La evaluación diagnóstica se basó en dos pruebas estandarizadas: WISC IV (sección de aritmética), y 10 reactivos de la prueba PLANEA, la cual fue diseñada por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). Los reactivos de la prueba PLANEA fueron seleccionados de acuerdo con su dominio: números y sistemas de numeración, problemas aditivos y problemas multiplicativos. Estas pruebas se aplicaron el primer y el segundo día del estudio piloto. La prueba WISC se aplicó oral y de manera escrita a cada alumno dentro del salón de clases, en un espacio reservado para ello. Asimismo, la prueba PLANEA se aplicó de modo escrito.

Esta evaluación sirvió para, además de indagar las competencias aritméticas con las que contaban los alumnos, integrar equipos de 4 alumnos en promedio de modo balanceado por rendimiento, de manera que hay un estudiante de: alto, medio alto, medio bajo y bajo rendimiento. Esta estrategia deriva de los postulados de Slavin (1990), respecto al trabajo cooperativo.

Los datos de la evaluación diagnóstica fueron los puntajes de las pruebas WISC IV y PLANEA. Estos datos se correlacionaron con el resto de las puntuaciones (secuencia y post-evaluación). Los puntajes fungieron como indicadores del desempeño de los escolares, principalmente en el área de las competencias aritméticas.

Finalmente, la profesora del grupo facilitó información de los escolares a nivel sociofamiliar, derivada de las entrevistas que ella realizó al principio del año escolar. Esa información fue tomada en cuenta en la evaluación diagnóstica, por considerarse importante al momento de ponderar los resultados de los alumnos en las tareas que formaron parte.

Evaluación de proceso.

La secuencia psicoeducativa o evaluación de proceso se basa en el 'constructivist oriented learning', concepto derivado de la propuesta de Miller y Mercer (1993) y de Witzel et al. (2003), la cual versa sobre una combinación entre una didáctica instruccional y una didáctica basada en la indagación. Se desarrollaron 8 sesiones en una secuencia donde se promovió el pensamiento aritmético, algebraico y la lógica de jerarquía de operaciones, a través de actividades fenoménicas (learning by doing) manipulando agua y objetos que estructuran relaciones cuantitativas o de magnitud.

Las primeras tres sesiones se basaron en el concepto ‘igualdad por equivalencia’ y tenían tres distintos niveles de representación: concreto, semiconcreto y simbólico. Las sesiones 4, 5 y 6 se basaron en el concepto ‘razonamiento multiplicativo’ y tuvieron los mismos niveles de representación que las tres sesiones anteriores. Finalmente, las últimas dos sesiones tuvieron como tema central la ‘jerarquía de operaciones’ con los mismos niveles de representación que el resto de las sesiones.

A continuación, se presenta la estructura de las 8 sesiones de la secuencia psicoeducativa en la tabla 1.

Tabla 1

Estructura de las sesiones de la secuencia psicoeducativa.

Noción	Sesión y Objetivo	Descripción de la sesión
Igualdad por equivalencia	Sesión 1: comparar cantidades de agua en recipientes de plástico, y crear una constante para poder medir el liquido intercambiado.	La sesión uno comenzó con la integración de los equipos. En cada equipo se repartieron 4 vasos, dos vasos A y dos vasos B. Para poder medir el liquido en cada vaso, y obtener el total de agua en los vasos, los escolares construyeron una regla que pegaron en los vasos, con la ayuda de cinta adhesiva y una regla de plástico. Una vez construida la regla, los alumnos tuvieron la oportunidad de medir con mayor precisión el liquido en cada intercambio.
	Sesión 2: representar las cantidades que se intercambiaron en tablas	Se representaron las cantidades de los vasos en tablas organizadas en tres partes: vaso A, vaso B y Total. Las cantidades totales podian ser 10, luego 20 y 25. Después, las cantidades eran representadas en tablas, tanto el vaso A, como el B y el Total, con la intención de hacer evidente una constante (10, 20 o 25) a pesar de todos los intercambios de los vasos A y B.
Razonamiento multiplicativo	Sesión 3: representar en un nivel concreto, multiplicaciones de objetos (dulces y bolsas)	Los escolares tuvieron que agrupar una serie de dulces en equipo. El criterio de agrupación era el tipo de dulce (cacahuates, chicles, caramelos), y tenian la misma cantidad de dulces de cada tipo. Una vez agrupados, los multiplicaban para obtener el total de dulces, de acuerdo a dos factores: factor A (cantidad de dulces de un tipo) y factor B (cantidad de tipos de dulce).
	Sesión 4: representar en tablas las multiplicaciones, obteniendo una constante y evaluando la relación	Una vez que los escolares tuvieron el total de dulces por equipo, tenian que representar la relación entre factores y el total en una tabla en tres secciones: factor A, factor B y Total. Los alumnos podian observar que el total de los dulces no cambiaba, a pesar de las diferentes multiplicaciones.
Álgebra Básica	Sesión 5: Hacer evidente la saturación que existe al contar dibujos de animales, propiciando el uso de algún signo que las represente.	Los alumnos tuvieron que dibujar la mayor cantidad de animales que pudieran en 5 minutos. A medida que el tiempo disminuia o la cantidad de animales a dibujar aumentaba, igualmente requerian dibujar todos los animales deseados. La cuestión hacia los alumnos radicó en identificar alguna estrategia para evitar tener que contar todos los animales, ya que el resultado derivaria de una estructura previa: Animales (A) + Animales (B) = Total.
	Sesión 6: Representar con literales cantidades desconocidas de objetos en bolsas.	Los niños tenian signos para representar cantidades muy variables o desconocidas: ¿?, x, y, a, b, e incluso figuras. Con estos signos, los alumnos tenian que representar la cantidad desconocida de dulces que faltaban por equipo, al tener una cantidad conocida y el total de dulces que tenian que tener por equipo.
Jerarquia de operaciones	Sesión 7: Representar y resolver situaciones que impliquen el uso de la jerarquia de operaciones	En la sesión los niños tuvieron que resolver problemas con esta estructura: a + bc = y, de un modo aritmético. Después tenian que expresar grupalmente por qué, en este caso, se tenia que multiplicar primero para obtener el resultado correcto.
	Sesión 8: Calcular el total de dulces dentro de una bolsa, utilizando la jerarquia de operaciones	Los alumnos calcularon el total de dulces, a partir de cantidades desconocidas, usando la estructura a + bc = y. Las cantidades desconocidas estaban en bolsas de papel obscuro, por lo que, para saber la cantidad correcta de dulces, tuvieron que aplicar la jerarquia de operaciones.

El detalle de cada sesión se puede observar en el anexo 1, titulado *método de guía para el aula*. En cada sesión, los alumnos tenían que resolver dos tipos de reactivos: los concernientes a la actividad de la sesión, y los que servían para evaluar la sesión. Los reactivos que evaluaban la sesión se aplicaron al final de las actividades que realizaban los escolares.

Las puntuaciones de los escolares fueron obtenidas de estas actividades finales en cada sesión. Los resultados se sumaban por cada participante, y se obtuvo un promedio final por alumno en la secuencia.

Evaluación sumativa.

La evaluación sumativa consistió en dos tipos de tareas: una prueba por escrito (ver anexo 2) acerca de los conceptos evaluados en las sesiones de la secuencia psicoeducativa, es decir, jerarquía de operaciones y álgebra básica, y una entrevista semiestructurada. Las puntuaciones de la prueba por escrito se obtenían por cada alumno, y se correlacionaron con el resto de los indicadores (preevaluación y secuencia). En el caso de la entrevista semiestructurada, se implementó un análisis de contenido ad hoc (Kvale, 2006), con el fin de identificar categorías de respuesta de los escolares, en relación con el entendimiento de las tareas que realizaron por escrito, así como su descripción o argumentación de los conceptos algebraicos y de jerarquía de operaciones, con la intención de indagar en el significado que les habían otorgado a los conceptos utilizados en las etapas anteriores.

Para determinar si los estudiantes habían logrado entender alguno de los conceptos, los resultados de las entrevistas se categorizaban en tres niveles: alto entendimiento, medio entendimiento y sin entendimiento.

6.2 Resultados

La siguiente tabla representa el nivel de logro de los estudiantes en la evaluación diagnóstica de acuerdo con sus condiciones sociofamiliares: color rojo, condiciones problemáticas (violencia, abandono de algún padre, trabajo, problemas económicos); amarillo, condiciones neutrales (sin indicios particulares); y verde, condiciones favorables (estimulación de los padres, sin problemas económicos, logros académicos). Los participantes tienen un número como indicativo nominal, por lo que en cada sesión los participantes mantienen ese número. Por ejemplo, como se observa en la tabla 2, el participante 1 en la evaluación diagnóstica es el mismo que en la evaluación del proceso y que en la evaluación sumativa.

Tabla 2

Evaluación diagnóstica de los estudiantes.

PARTICIPANTES	WISC (PRE-TEST)	%	PLANEA (PRE-TEST)	%
1	6	31.6%	2	18.2%
2	9	47.4%	5	45.5%
3	14	73.7%	4	36.4%
4	6	31.6%	1	9.1%
5	12	63.2%	5	45.5%
6	14	73.7%	5	45.5%
7	12	63.2%	3	27.3%
8	15	78.9%	6	54.5%
Promedio	11	58%	3.875	35%
9	12	63.2%	3	27.3%
10	15	78.9%	8	72.7%
11	11	57.9%	5	45.5%
12	11	57.9%	5	45.5%
13	14	73.7%	9	81.8%
14	13	68.4%	4	36.4%
15	15	78.9%	5	45.5%
16	11	57.9%	2	18.2%
17	10	52.6%	7	63.6%
Promedio	12.44444444	65%	5.333333333	48%
18	19	100.0%	11	100.0%
19	13	68.4%	9	81.8%
20	15	78.9%	11	100.0%
21	16	84.2%	10	90.9%
22	15	78.9%	10	90.9%
Promedio	15.6	82%	10.2	93%

Como puede observarse, la gran mayoría de los estudiantes se encuentran en un desempeño diverso. Por ejemplo, en los estudiantes con condiciones sociofamiliares poco favorables, solamente 3 de 8 alcanzaron puntajes altos, en comparación con los estudiantes con condiciones socioeconómicas favorables, de los cuales solamente 1 de 5 presentó un puntaje medio. Ningún alumno con condiciones sociofamiliares neutras mostró puntajes bajos en la en la prueba diagnóstica WISC-IV, pero muchos de ellos sí mostraron puntajes bajos en Planea (aunque su promedio no es más bajo que los alumnos con condiciones familiares adversas).

En la tabla 3 se muestran los resultados de la evaluación de proceso del estudio piloto.

Tabla 3

Evaluación de proceso de los estudiantes.

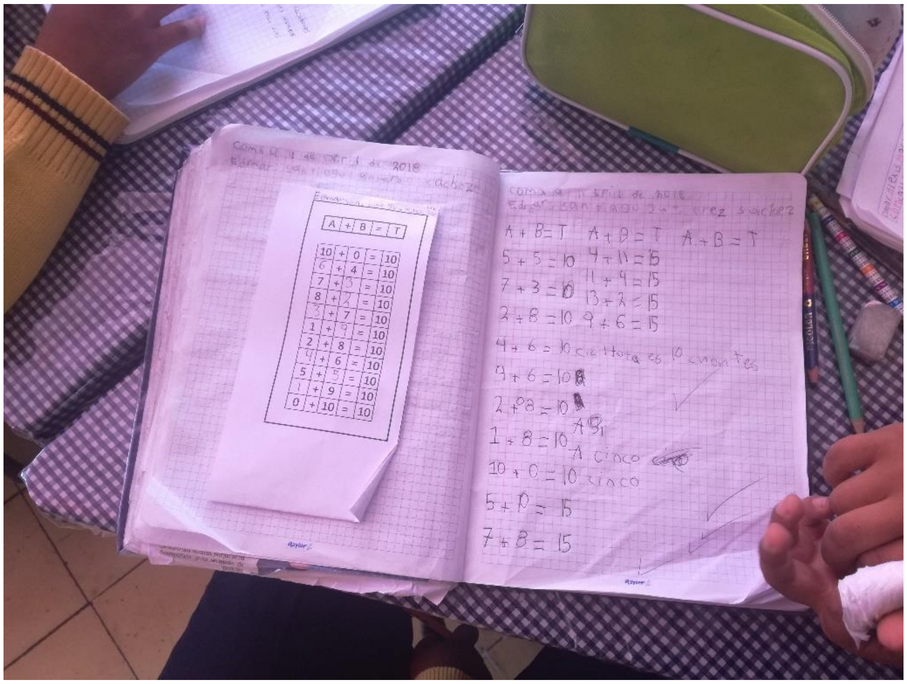
Participantes	Puntaje	
1	66.50	
2	95.46	
3	78.94	
4	49.31	
5	89.50	
6	77.14	
7	99.06	
8	91.67	
Promedio	80.947344	
9	62.64	
10	98.28	
11	93.61	
12	80.13	
13	93.50	
14	83.33	
15	92.20	
16	80.13	
17	87.50	
Promedio	85.700954	
18	99.06	
19	94.44	
20	90.50	
21	98.50	
22	99.06	
Promedio	96.311111	

Como se puede observar, en este caso 14 de los 22 participantes (equivalentes al 63.6%) lograron obtener un puntaje muy alto en las sesiones de evaluación de proceso. La mitad de los alumnos que obtuvieron un puntaje bajo en la evaluación diagnóstica, lograron un puntaje alto en el proceso, mientras que un 44.4% también consiguieron una puntuación alta después de un puntaje medio en el diagnóstico. Todos los participantes que lograron un puntaje alto en el diagnóstico lograron un puntaje alto en la evaluación de proceso.

En la figura 5 se puede observar un ejemplo de las actividades que realizaron los alumnos.

Figura 5

Imagen de una de las actividades de los escolares.



Nota. La imagen es de autoría propia.

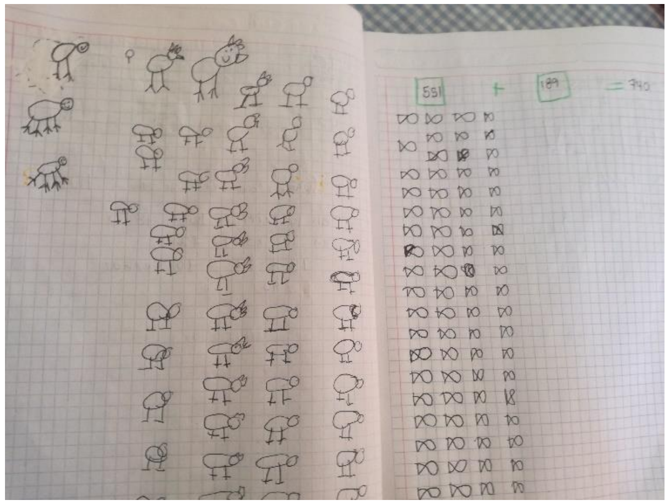
Este alumno utilizó una plantilla preestablecida de las relaciones entre las cantidades del vaso A y las del vaso B en una tabla, del lado izquierdo. En el lado derecho, resolvió las sumas necesarias, no solo para las relaciones de $A + B = 10$, sino para aquellas que requerían transferir a otros números, como el 15. Aparentemente, las sumas no suponen un reto especial, pero lo importante de la representación de una suma es la relación entre sus componentes: las cantidades de A más las cantidades de B y el total.

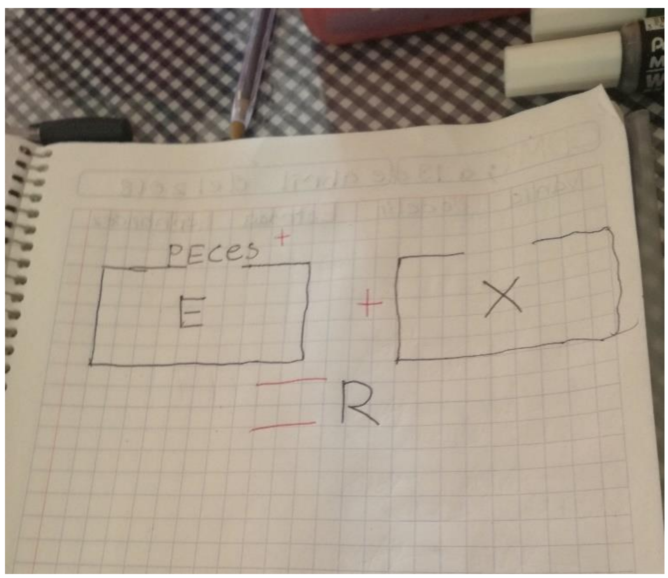
Por otro lado, en las tareas de pensamiento algebraico, se implementó una estrategia de saturación de cantidades, en la que, ante la imposibilidad de representar las cantidades de objetos uno a uno, podía emplearse como recurso auxiliar una literal, la cual representaba una cantidad, sin número, pero con el mismo significado de relaciones de cantidad.

En la figura 6 se puede apreciar un ejemplo de esta actividad.

Figura 6

Dos imágenes de representación concreta y simbólica de actividades de pensamiento algebraico.





Nota. Las imágenes son de autoría propia.

Los peces se pueden representar de una manera numérica (arriba) o de una manera general (abajo). Esta relación entre cantidades forma parte del razonamiento inicial de los alumnos a través de los primeros indicios de pensamiento algebraico.

En la tabla 4 se muestran los resultados de la evaluación sumativa, en cada participante.

Tabla 4

Evaluación sumativa de los participantes.

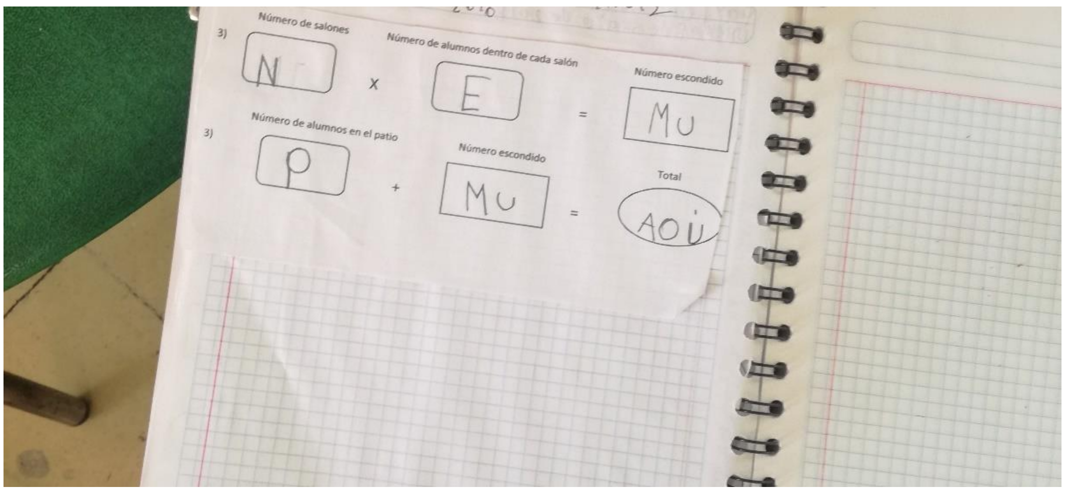
Participantes	Nivel aritmético	Nivel Algebraico	Jerarquía de operaciones	Pensamiento algebraico
1	0	0	0	0
2	62.5	25	0	0
3	62.5	0	0	0
4	0	0	0	0
5	25	25	0	0
6	100	0	1	0
7	25	25	0	0
8	50	0	0	0
Promedio	40.625	9.375		
9	37.5	0	0	0
10	0	0	0	0
11	75	75	1	0
12	37.5	25	0	0
13	75	62.5	1	0
14	50	25	0	0
15	62.5	100	0	1
16	25	37.5	0	0
17	75	25	1	0
Promedio	48.61111111	38.88888889		
18	100	100	1	0
19	100	100	1	1
20	100	100	1	1
21	100	100	1	1
22	87.5	100	0	1
Promedio	97.5	100		

En la tabla es evidente la consistencia de los alumnos que han puntuado alto en todas las etapas de la experiencia de enseñanza. De los 5 alumnos con el mayor puntaje, 3 de ellos lograron un entendimiento de las tareas de jerarquía de operaciones y de las tareas de pensamiento algebraico. En el caso de dos de ellos, lograron un alto puntaje en alguna de las dos tareas. Si bien ningún alumno logró la comprensión de ambas tareas en el caso de los puntajes medios y bajos en las dos evaluaciones previas, sí existieron alumnos con el dominio de al menos un tipo de tarea: 4 alumnos de las tareas de jerarquía de operaciones y una de pensamiento algebraico. En total, 8 alumnos (36.4%) lograron la comprensión de tareas de jerarquía de operaciones y 5 (22.7%) de pensamiento algebraico, destacando 3 alumnos que en ambas tareas lograron mostrar un alto nivel de entendimiento.

En la figura 7 se puede observar un ejemplo de las actividades que realizaron los participantes en la primera parte de la evaluación sumativa.

Figura 7

Actividad ejemplo de la primera parte de la evaluación sumativa.



Nota. La imagen es de autoría propia.

6.3 Discusión y ajustes de la experiencia de enseñanza I

Los objetivos de esta primera parte de la investigación fueron los siguientes:

1. Evaluar la factibilidad de aplicar una dinámica de enseñanza de conceptos matemáticos a partir de actividades concretas por medio de la manipulación de objetos (didáctica fenomenológica).

2. Evaluar las diferencias individuales de los alumnos y su repercusión en su integración en el trabajo en equipo.

3. Analizar la relación entre la jerarquía de operaciones y el pensamiento algebraico, desde un punto de vista tanto conceptual como procedimental.

De acuerdo con los resultados, es factible aplicar una dinámica de enseñanza en conceptos matemáticos, basada en una didáctica fenomenológica en una institución de educación básica pública. La investigación parte del principio de validez ecológica, por lo que se toma en cuenta el rol del docente del grupo de primaria y su planificación original; el currículum vigente de la institución, es decir, no se interrumpen las clases de matemáticas o de cualquier otra materia; las circunstancias de privacidad y permisos que puede otorgar la institución tampoco son parte de las variables que se pueden controlar, por lo que se contemplan como parte inevitable del estudio.

Por otra parte, la trayectoria de aprendizaje de los alumnos, es decir, qué tan bien les va en los distintos tipos de evaluación, está vinculada con sus aspectos socioemocionales. El rubro socioemocional, aunque cuenta con suficiente evidencia en el estudio piloto, resulta sumamente complejo y en ocasiones contradictorio, ya que depende de circunstancias particulares de la institución educativa en la que se realice el estudio. Por ejemplo, si los directivos aceptan que un investigador indague en aspectos familiares; si los profesores tienen esta información, la recolección del dato es diversa, ya que en ocasiones es superficial y en otras, aunque tienen más profundidad, no existe modo factible de validar esta información; entre otras consideraciones. Por lo tanto, en el siguiente estudio no se tomará en cuenta este factor debido a dos circunstancias, sumadas a las anteriores mencionadas: 1) no se pudo indagar con más profundidad la validez de las opiniones de la profesora; 2) no todos los padres compartieron información personal a la profesora responsable del grupo.

La secuencia psicoeducativa basada en actividades fenoménicas tuvo un efecto positivo en el entendimiento de jerarquía de operaciones y algebraica de algunos de los escolares de tercer grado de primaria. Hay indicios de un efecto en el desempeño escolar relacionado con los factores sociofamiliares favorables de los alumnos.

Dado que los resultados, si bien son muestra del potencial de la secuencia psicoeducativa, fue necesario mejorar algunas configuraciones de la experiencia de campo piloto. Principalmente, en la segunda experiencia de campo, se buscó 1) mejorar el ámbito de la representación tanto numérica como algebraica, es decir, permitir a los alumnos expresar su entendimiento matemático de un modo gráfico, que ayudara a complementar los indicios de su comprensión en las tareas a las que eran puestos a prueba; 2) mejorar la colaboración entre los participantes a través del trabajo en equipo, evaluando el desempeño de los alumnos a nivel individual y colectivo; 3) mejorar el discurso de introducción al núcleo conceptual de la jerarquía de operaciones. Este discurso se basaría en la idea de desencriptar una serie de jerarquías numéricas con el fin de simplificar la expresión de varias cantidades en su mínimo nivel: sumas y restas.

Las sesiones aumentaron y fueron ahora 10. La duración fue de 90 minutos y la institución fue otra, dentro de un contexto social parecido, es decir, una escuela pública de la Ciudad de México con una cercanía en su ubicación, con la intención de mantener las variables sociodemográficas estables.

Capítulo 7. Experiencia de enseñanza II

7.1 Método

Se desarrolló una experiencia de enseñanza con 30 alumnos de tercer grado de primaria (entre 8 y 9 años), de una primaria pública de la Ciudad de México. Los padres y los alumnos firmaron su consentimiento informado de los objetivos de la investigación y uso de los datos. El salón de clases contaba con 18 mesas de trabajo que se integraron para trabajar con ocho equipos de 4 integrantes en promedio. Las sesiones fueron audiograbadas, y se elaboraron notas de campo.

Al igual que en la experiencia de enseñanza I, los equipos de trabajo fueron constituidos a partir del concepto de máxima heterogeneidad, desarrollado por DeVries y Slavin (1978), así como bajo el concepto de la Zona de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1988), de modo que alumnos de alto desempeño facilitaran el conocimiento conceptual de las tareas matemáticas abstractas, a los alumnos de medio y bajo desempeño. Para hacer este arreglo, se emplearon diversos indicadores del desempeño aritmético atendiendo la diversidad de los alumnos, a partir de su ejecución en la sección aritmética de la prueba WISC-IV, así como de los reactivos de matemáticas de la prueba PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes / Instituto Nacional de Evaluación Educativa - INEE). También se consideraron los promedios de los alumnos en matemáticas otorgados por la profesora del curso. De este modo se conformaron los equipos de trabajo, los cuales se pueden observar en la tabla 5:

Tabla 5

Conformación de equipos con base en el promedio de la evaluación diagnóstica.

Equipo	Promedio PE	Promedio PM	Promedio total
	%WISC-IV %PLANEA Aritmética	%	%
1	74.85	60.50	67.07
2	61.03	69.85	65.44
3	64.68	56.70	60.69
4	62.14	65.73	63.33
5	66.73	62.33	64.53
6	59.64	66.56	61.94
7	58.07	63.37	60.72
8	62.72	69.21	65.97

PE: Promedio de pruebas estandarizadas.
PM: Promedio de la calificación asignada por la profesora en matemáticas

La puntuación promedio de los participantes en estos tres indicadores, se obtuvo sumando sus puntajes individuales en cada indicador, obteniendo un promedio individual. En cada equipo, se sumaron los promedios individuales y, de ese modo, se obtuvo el puntaje promedio en porcentaje. El promedio total obtenido por equipo, indica el nivel de balance de los equipos antes de la implementación de la experiencia de enseñanza.

Una vez conformados los equipos de trabajo, los estudiantes eran puestos a prueba en su habilidad para resolver experiencias concretas de manejo de cantidades, a través de una secuencia didáctica. Esta secuencia didáctica tiene como base el concepto de desvanecimiento de lo concreto (Fyfe, McNeil & Borjas, 2015), el cual consiste en relacionar conceptos matemáticos abstractos, con eventos concretos que representen sus principios básicos (p.ej., igualdad por equivalencia y su relación con el equilibrio, ya sea en líquidos o en cantidades contables), con la intención de transferir la comprensión de los eventos concretos a una comprensión formal de conceptos abstractos.

La secuencia consistió en tres etapas y cinco fases graduadas por su nivel de abstracción, realizadas durante las clases escolares, en 10 sesiones de trabajo de 90 minutos cada una y 3 sesiones de síntesis de 45 minutos, dos días por semana.

Etapa I) experiencia fenoménica, a partir del nivel de abstracción concreto y aritmético, haciendo trasvases de líquidos de un recipiente a otro y manipulación de conjuntos de dulces; con dos fases: 1) constante y métrica; 2) construcción de una variable, en tres sesiones.

Etapa II) organización de las relaciones numéricas, a partir del nivel abstracto aritmético, con base en la representación numérica de los cambios en la cantidad de líquido dentro de recipientes, o en la cantidad de dulces dentro del conjunto en un dibujo, una tabla o un gráfico de valores; esto en dos fases: 3) transferencia de los valores observados a estructuras organizadas de relaciones cuantitativas; 4) estructuración aritmética gráfica, realizado en dos sesiones.

Etapa III) pensamiento algebraico, a partir de un nivel de abstracción algebraico, con base en la notación algebraica, aplicación de propiedades numéricas y representación simbólica algebraica; en dos fases: 5) estructuración simbólica algebraica inicial y 6) estructuración simbólica intermedia, en cuatro sesiones.

La fase 1 de la etapa I se desarrolló a partir del manejo de agua en recipientes (recipiente A, recipiente B y el total de agua, T), a partir de transferir cantidades de agua de un recipiente a otro, observando la relación de esas cantidades variables y su representación abstracta (escrita) en tablas e histogramas.

El objetivo de esta fase fue que los niños concibieran la necesidad de construir y estructurar una métrica que les permitiera comparar, relacionar e igualar cantidades de agua (dónde hay menos o más agua, qué tanto menos o más, o si es igual la cantidad) y así comprender la estructura parte-todo. Para ello, las parejas de estudiantes trabajaron con dos vasos, nominados A y B. A los vasos se les puso cantidades variables de agua. Se les problematizó a los niños preguntando dónde había menos o más agua, lo que se contestó rápidamente por comparación, pero luego se les problematizó acerca de qué tanto menos o más agua tenían cada uno de los vasos, lo cual exigió tener una métrica. Para poder medir la cantidad de agua, se promovió que cada alumno diseñara una regla de papel de 10 centímetros, de tal modo que pudieran pegarla en los vasos y así poder medir con precisión la cantidad con que se contaba por la altura del agua. Para construir el sentido de igualdad por equivalencia, en el vaso A se colocaron 10 cm de agua y se solicitó a cada pareja que igualara la cantidad de agua de sus dos vasos, haciendo el trasvase del vaso A al B, corroborando la igualdad al apreciar que en cada vaso queda a 5 cm de altura del agua. Posteriormente, a efecto de experimentar una variable, se le solicitó a cada pareja que trasvasara una cierta cantidad que no fuera la misma del vaso A al vaso B, de manera que ahora pudieran medir con precisión la varianza, es decir, qué tanto menos o más tenían los vasos de agua; haciendo evidente empíricamente la estructura parte-todo.

El objetivo en la fase 2 de esta etapa I fue consolidar el nivel de comprensión del esquema básico de las relaciones numéricas, a partir de un proceso de transferencia en el que los elementos concretos constituyan otra circunstancia. De aquí que se procedió a una experiencia en la que ahora las relaciones contables concretas (fenoménicas o de didáctica fenomenológica) se hicieron colocando dulces dentro de bolsas. A cada pareja se le dio una determinada cantidad de dulces (12 en promedio), y una cierta cantidad de bolsas (3 en promedio), de tal manera que el número de dulces en las bolsas fuera variable entre los equipos. Las cantidades se otorgaron en múltiplos que permitieran operar la igualdad al repartir en cada bolsa un número igual de dulces, por ejemplo, en 3 bolsas repartir 15 dulces. La tarea consistió en agrupar la misma cantidad de dulces en cada bolsa, bajo el principio de igualdad por equivalencia. Para organizar las relaciones numéricas variables en las bolsas, se les da, por ejemplo, a unos niños 15 dulces y 3 bolsas; de manera tal que ahora agruparan dulces (multiplicación fenoménica) y se repartieran en las bolsas (división fenoménica).

El objetivo de la etapa II fase 1 fue la organización conceptual de las relaciones de cantidades, instrumentadas en tablas y gráficos, así como la consolidación del concepto de variable utilizando nuevamente agua y dulces. En esta sesión se estructuraron las relaciones numéricas variables obtenidas por todos los equipos del grupo, al observar los números de la cantidad de agua en los vasos (A y B) que tenía cada equipo, las cuales fueron referidas al profesor, quien las anota en el pizarrón dentro de una tabla.

La fase 2 de esta etapa se basó en la representación concreta de cantidades desconocidas, a partir de bolsas cerradas con dulces en su interior. Unas bolsas eran transparentes y se podían contar los dulces, otras oscuras y no se podía saber el número de dulces que contenían (la incógnita). Todos tenían que encontrar el número de dulces dentro de las bolsas oscuras, primero organizando las cantidades (orden de operación), después representar las cantidades con números o letras (x, y, z), para así encontrar la cantidad desconocida al despejar la incógnita, aplicando el principio parte 1 + parte 2 = todo (x + y = z) / todo menos parte = parte (z – y = x). Por ejemplo, si hay 5 dulces en una bolsa transparente y sabemos que en total hay 12 dulces, ¿cuántos dulces hay en la bolsa obscura? Primero organiza el planteamiento, 5 (parte 1) + dulces bolsa oscura (parte 2) = 12 (todo); después representa con literal, 5 + x = 12; luego despeja el 5, manteniendo la igualdad, al restar 5 en ambos lados de la ecuación, 5 menos 5 + x = 12 menos 5; hace la equivalencia, 0 + x = 12 menos 5; y obtiene el valor de la incógnita, x = 7.

En la siguiente fase, se hicieron dos tablas en el pizarrón con el número de bolsas y dulces que se obtuvieron en cada equipo de trabajo, en una tabla para concebir la división y en la otra la multiplicación; de manera que en una tabla se registraron las cantidades repartidas en las bolsas (división fenoménica) y en la otra las cantidades de dulces que hay en cada bolsa (multiplicación fenoménica), estableciendo la relación multiplicación-división de la tarea para saber las relaciones numéricas; de tal modo que los alumnos pudieran comprobar empíricamente (fenoménicamente) la cantidad observada por manipulación, con la calculada por operación aritmética. De forma que se pueda referir de manera general la varianza numérica que hay en cada equipo, las cantidades se substituyeron con literales, para hacer la transición entre la expresión numérica y la algebraica, ya que lo importante era la relación y no el número, de modo que así se articula la aritmética con el álgebra, para llegar a una ecuación con la estructura parte-todo: a + b = c, en el caso del agua; o bien, a + b + c = x en el caso de los dulces.

La etapa III fase 1 se basó en la jerarquía de operaciones, a través de la construcción de elementos multiplicativos, utilizando varias bolsas obscuras (x) con una cantidad fija desconocida de dulces (y); y elementos aditivos, cantidades de dulces contables en una bolsa transparente (z); si los alumnos eran capaces de generar una unión entre las representaciones concretas y su relación con representaciones abstractas, entonces debían decidir si se multiplicaba primero o se sumaba, independientemente del orden en el que eran presentados los elementos, multiplicativos o aditivos. Por ejemplo, (x) (y) + z = w   z +(x) (y) = w.

Ahora los niños se llevaron una bolsa de dulces, para lo cual requirieron calcular cuántos dulces había en la bolsa que les tocó. Los dulces se les dieron en bolsas oscuras y solo sabían que había el mismo número en cada bolsa. Para calcular la cantidad de dulces que había en cada bolsa, tenían dos datos: el número de bolsas y el total de dulces que tiene el equipo. El objetivo fue encontrar el número de dulces en cada bolsa que, multiplicado por el número de bolsas, diera el total de dulces, con base en la estructura a x b = c antes trabajada a nivel fenoménico y aritmético. Pero ahora, ya que solo conocían el número total de dulces y de bolsas, requirieron transferir la operación a su inverso, es decir, dividir el número total de dulces entre el número de bolsas. Para transferir el problema a otra situación y comprobar la comprensión, ahora se les dio una cantidad de dulces en múltiplos, y se cuestionó cuántas

Posteriormente, en la fase siguiente de la etapa III, para transferir a otro contexto y así comprobar la comprensión, los niños repitieron el procedimiento de la fase anterior con bolsas oscuras con dulces, pero ahora para operar con valores variables, las cantidades de dulces no fueron solo las de un equipo, sino de todo el grupo. Lo importante es que, aunque dichas cantidades fueron variables, se mantuvo la estructura a x b = c. Una vez que los niños calcularon y registraron las cantidades desconocidas de cada equipo, tenían que contestar las siguientes preguntas: ¿cuál es el valor de la cantidad desconocida en su equipo? ¿el valor de la cantidad desconocida en el grupo es variable? ¿se puede operar la formula a x b = c si las cantidades varían? Finalmente, se repitió el procedimiento descrito en la sesión anterior, pero con la variante de que los alumnos tenían que crear una estructura algebraica para representar las actividades de las sesiones anteriores: el agua en los vasos A y B (a + b = c), los dulces y las bolsas (a x b = c). Una vez creada la estructura algebraica, la sesión terminó.

Las sesiones de síntesis se realizaron al finalizar las fases, con el objetivo de vincular la fase anterior con los planteamientos de la nueva fase. Por ejemplo, en la sesión de síntesis de la etapa I, los alumnos reflexionaron acerca de la relación entre el ejercicio con el agua y el de los dulces; en la etapa II la relación entre las observaciones de la manipulación de agua y dulces con el gráfico y las tablas de valores de multiplicación y división; y en la etapa III la relación entre las representaciones en gráficos y tablas con las notaciones en estructuras algebraicas con variables.

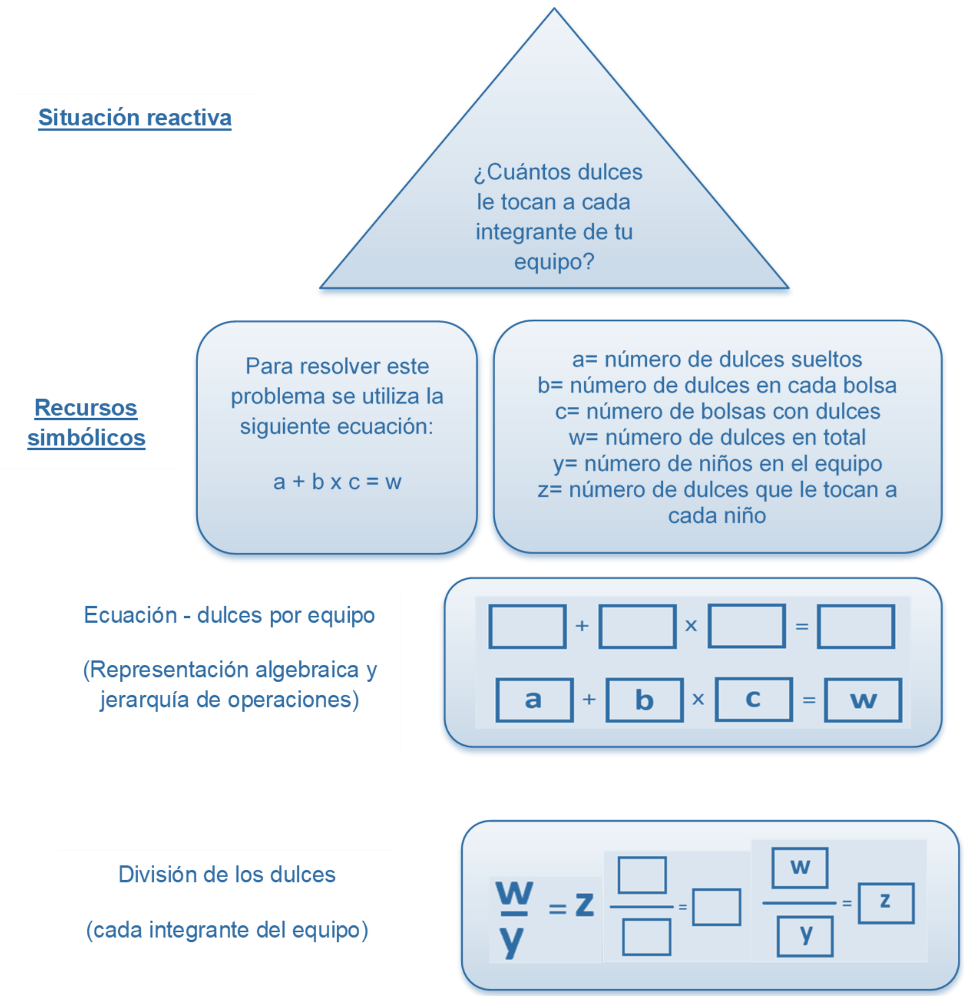
Después de estas tres etapas, comenzó la evaluación dividida en dos etapas: la etapa de la evaluación situada y la evaluación adaptativa semántica. La evaluación situada se basó en la resolución de tareas matemáticas relacionadas con los conceptos analizados en la secuencia didáctica. Los alumnos por equipo resolvieron la situación reactiva “cuántos dulces tenemos en el equipo”, y la tarea de división de dulces “cuántos nos tocan a cada uno”, a partir de utilizar la equivalencia, la representación de incógnitas y variables, así como el manejo de las propiedades numéricas al ordenar y aplicar la jerarquía de operaciones.

Para lograr estas tareas, los alumnos tenían a su alcance recursos simbólicos a partir de literales algebraicas y de la estructura de una ecuación, representando la relación algebraica y de jerarquía de operaciones. Las literales algebraicas podían ser variables o incógnitas de acuerdo con la organización de los datos que le dieran los niños. De manera de promover la significación de la experiencia y ganar el interés de los niños, el planteamiento se hace a partir de dulces. Las literales representaron dulces fuera de bolsas (a = número de dulces sueltos), los dulces dentro de bolsas (b = número de dulces en cada bolsa), y las bolsas (c = número de bolsas con dulces); para estructurar las relaciones se planteó algebraicamente a + (b) (c), expresada para los niños como a + b *x* c.

Para generar la acción de la operatividad matemática, entusiasmando a los niños en la resolución del problema, se les planteó que tenían que saber cuántos dulces les tocaban (z = número de dulces que le tocan a cada niño), contando la cantidad de dulces que había (w = número de dulces en total), y la cantidad necesaria para realizar la división de los dulces en función de los niños (y = número de niños en el equipo); siendo su estructura algebraica: w/y=z. En la figura 8 se observa la organización de esta actividad.

Figura 8

Organización de la evaluación situada.



Nota. La tarea consta de una situación reactiva, así como de diversos recursos simbólicos. Figura de elaboración propia.

Para la evaluación situada, si los alumnos lograban calcular el número de dulces que les toca a cada uno, el equipo obtenía un punto. Si solo podían calcular el total de dulces obtenían 0.5 puntos, y si no obtenían ningún cálculo correcto se otorgaba 0 puntos.

En la otra evaluación, la adaptativa semántica, se realizaron sesiones individuales de entrevistas semiestructuradas, para evaluar la comprensión de la estructuración de las relaciones matemáticas en el pensamiento algebraico y de la jerarquía de operaciones. Para esto, se planteó un problema que requiere ser resuelto a partir de la estructuración algebraica.

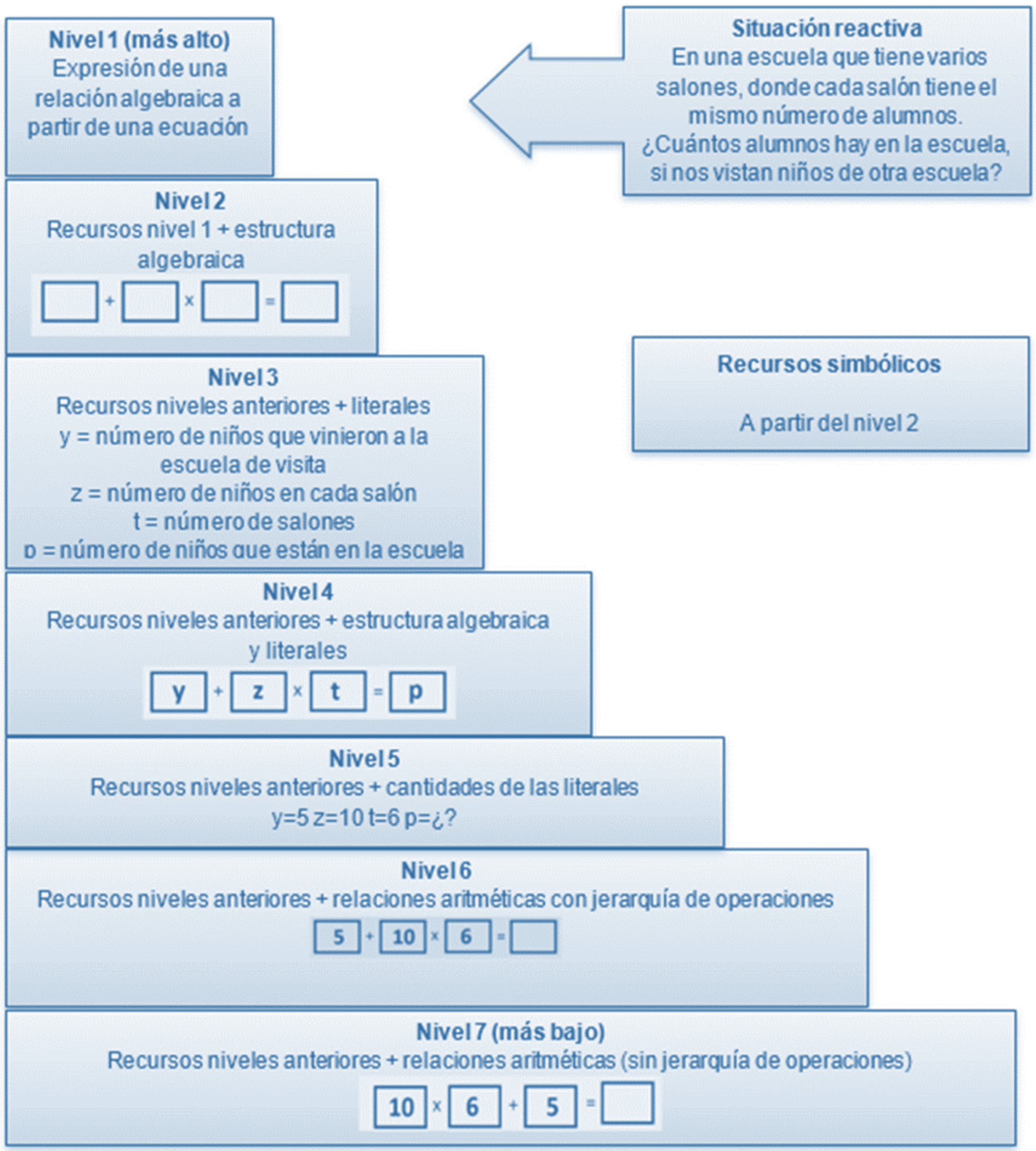
De manera que el planteamiento del problema fuera fácilmente comprensible por los niños en términos de un contexto que les sea familiar, se atendió la metacognición del niño, poniendo el problema en términos coloquiales de su entorno (niños - profesores - escuela - director - salones).

En las tareas de pensamiento algebraico, el criterio de evaluación se basó en registrar las verbalizaciones de acuerdo con el mayor nivel de abstracción que los participantes fueran capaces de expresar (criterio fijo), al concebir a las cantidades como abstractas (no contables) y la relación de estas cantidades en una expresión dada (p.ej.: "dos veces una cantidad más otra"). Si la expresión fuese 2x+ y, entonces la relación entre las literales debería ser expresada por los participantes, desde su Zona Real y Potencial de Desarrollo (criterio flexible).

En la figura 9 se puede observar la estructura de la prueba adaptativa semántica de las tareas de pensamiento algebraico. La tarea comenzaba con la situación reactiva. Después, los estudiantes tuvieron la oportunidad de expresar la solución a la situación reactiva del modo más general posible, es decir, a partir de una relación algebraica (nivel 1, el más alto). Si no conseguían expresar dicha relación, en cada nivel subordinado se les proporcionaba recursos simbólicos a manera de estructuras algebraicas basadas en una ecuación. Los detalles iban aumentando en los niveles subordinados hasta que el alumno resolvía la situación reactiva.

Figura 9

Estructura de la evaluación adaptativa semántica para las tareas de pensamiento algebraico.



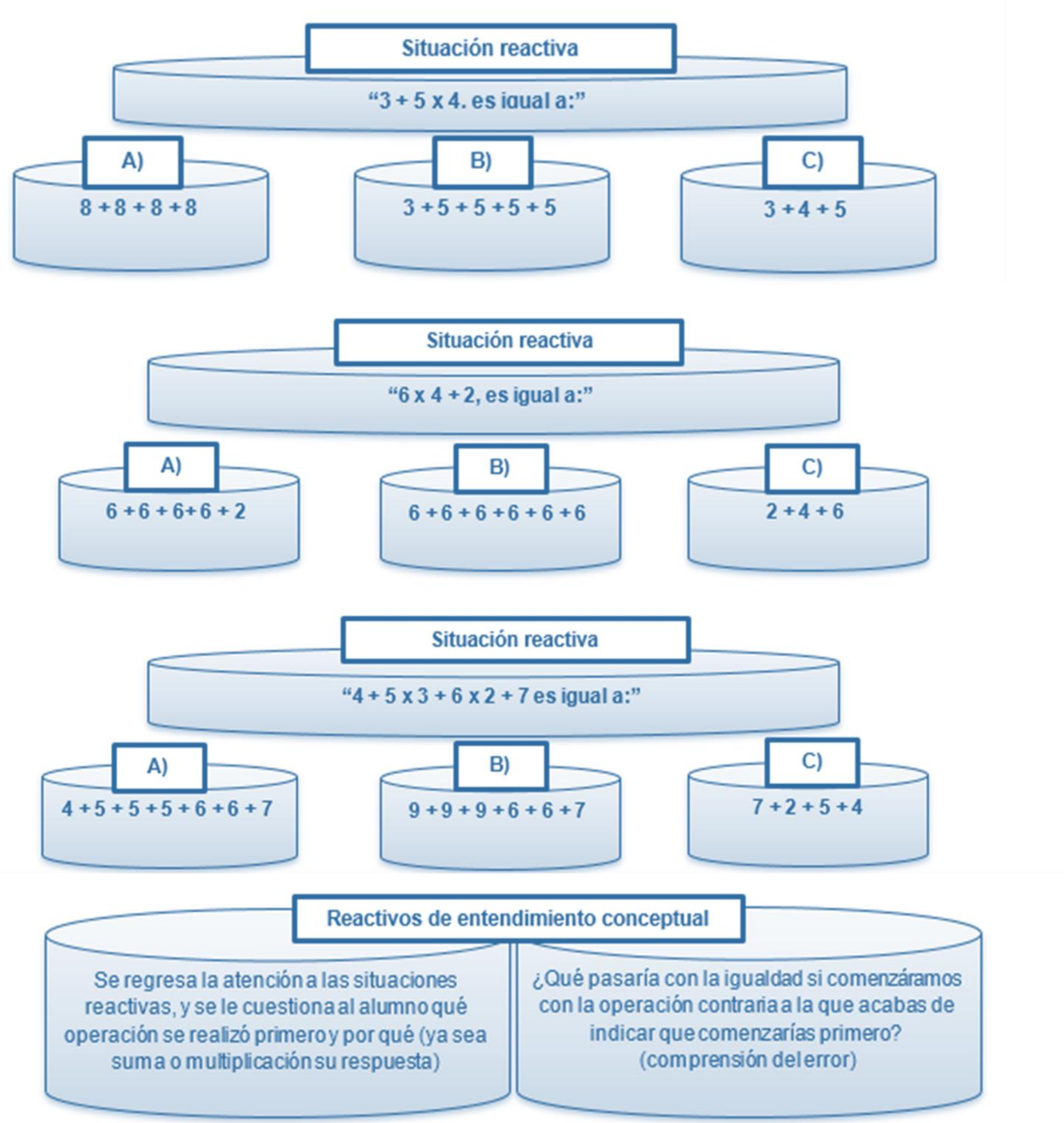
Nota. Figura de elaboración propia.

Cabe destacar que, en la prueba de pensamiento algebraico, también se evaluó si los alumnos jerarquizaban las relaciones cuantitativas algebraicas o, en su caso, aritméticas. En el caso de la evaluación de la comprensión de la jerarquía de operaciones, la expresión inicial de evaluación era la siguiente: a+ bc=x, y el criterio de evaluación de comprensión se basó en que los alumnos expresaran la relación entre una multiplicación (bc), la suma (a) y el total (x) de un modo jerarquizado, es decir, a través de las unidades operativas.

La prueba adaptativa semántica de este tipo de tareas contempló una situación reactiva, la cual versó sobre tres expresiones de equivalencia, mismas que tenían tres opciones de respuesta: una opción con relaciones aritméticas sin jerarquía de operaciones, otra con relaciones aritméticas y jerarquía de operaciones, y otra con relaciones de semejanza entre los números de la situación reactiva. La resolución de estas expresiones se vinculó con las explicaciones o descripciones de los participantes acerca del motivo de sus respuestas, para que finalmente tuvieran la oportunidad de expresar la relación entre unidades operativas de un modo abstracto.

Figura 10

Estructura de la evaluación adaptativa semántica para las tareas de jerarquía de operaciones.



Nota. Figura de elaboración propia.

En ambos tipos de tareas, la comprensión se evaluó en función de la adecuación de los participantes a un criterio establecido de relaciones cuantitativas (criterio fijo), así como de sus propias competencias y dominio conceptual acerca de las tareas que resolvieron y externalizaron (criterio flexible). Finalmente, los escolares podían obtener 5 puntuaciones: comprensión del concepto, lo cual implica la capacidad de expresar una relación algebraica a través de variables e incógnitas (en el caso de las tareas de pensamiento algebraico) y la aplicación de la jerarquía de operaciones a partir de las unidades operativas (tareas de jerarquía de operaciones), los cuales alcanzaron 4 puntos; comprensión potencial del concepto, en la que cumplían con los criterios de la puntuación máxima pero presentaban algunas imprecisiones operativas o conceptuales (3 puntos), conocimiento operativo, que representaba la ausencia de conocimiento conceptual pero la presencia de conocimiento procedimental (2 puntos), dominio genérico, es decir, tiene constituida la noción de la resolución pero no puede expresarla simbólicamente (1 punto), dominio aritmético o contable, el cual representa un cambio que no fue significativo en los alumnos en relación con su comprensión o conocimiento procedimental (0 puntos).

7.2 Resultados

Los resultados se dividen en varios rubros: 1) trayectoria de aprendizaje de los alumnos en las tres etapas de la evaluación de proceso, tanto en un nivel individual como en su puntuación promedio como grupo; 2) el desempeño de los estudiantes en las tareas tanto de evaluación situada, o nivel de Dominio Operativo, como de la evaluación adaptativa semántica, o nivel de *conocimiento conceptual*; 3) la consistencia en las tareas de evaluación situada y adaptativa semántica con las puntuaciones individuales de los alumnos en las diez sesiones de la secuencia didáctica; 4) desempeño de los equipos de trabajo y el efecto de la ZDP en el desempeño individual de los participantes

En la tabla 6, se observa la trayectoria de cada alumno en sus puntajes individuales en cada etapa de la evaluación de proceso.

Tabla 6

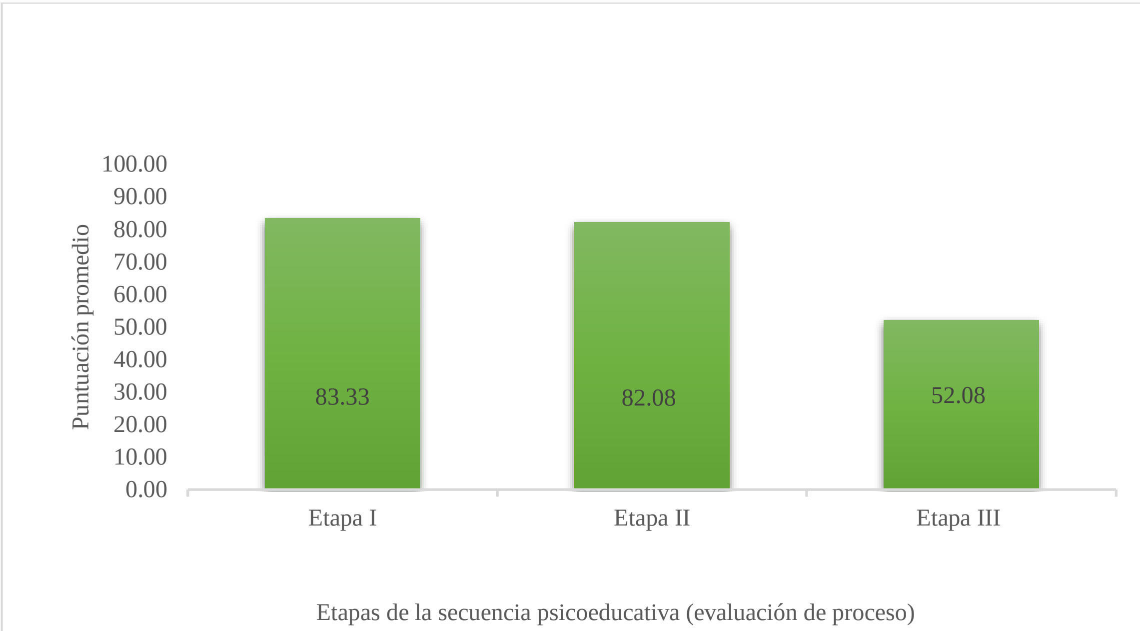
Trayectoria en el nivel de logro de los participantes en las tres etapas de la experiencia educativa II.

Alumno	Etapa I	Etapa II	Etapa III
1	48.33	87.50	62.50
2	83.33	87.50	62.50
3	65.00	87.50	12.50
4	91.67	87.50	62.50
5	100.00	87.50	62.50
6	83.33	75.00	75.00
7	91.67	87.50	75.00
8	83.33	87.50	37.50
9	91.67	87.50	37.50
10	91.67	87.50	37.50
11	83.33	87.50	62.50
12	75.00	87.50	12.50
13	62.50	50.00	100.00
14	100.00	87.50	50.00
15	60.00	50.00	50.00
16	91.67	87.50	75.00
17	91.67	87.50	100.00
18	75.00	50.00	12.50
19	85.00	87.50	75.00
20	100.00	75.00	12.50
21	91.67	87.50	62.50
22	100.00	87.50	50.00
23	75.00	100.00	12.50
24	91.67	87.50	100.00
25	66.67	62.50	37.50
26	91.67	87.50	37.50
27	83.33	87.50	25.00
28	100.00	87.50	75.00
29	68.33	75.00	12.50
30	77.50	87.50	75.00
Promedio	83.33	82.08	52.08

Como herramienta de análisis de la tendencia general de esos resultados individuales, en la figura 11 se muestra el promedio del grupo en cada etapa.

Figura 11

Etapas de la secuencia psicoeducativa (evaluación de proceso).

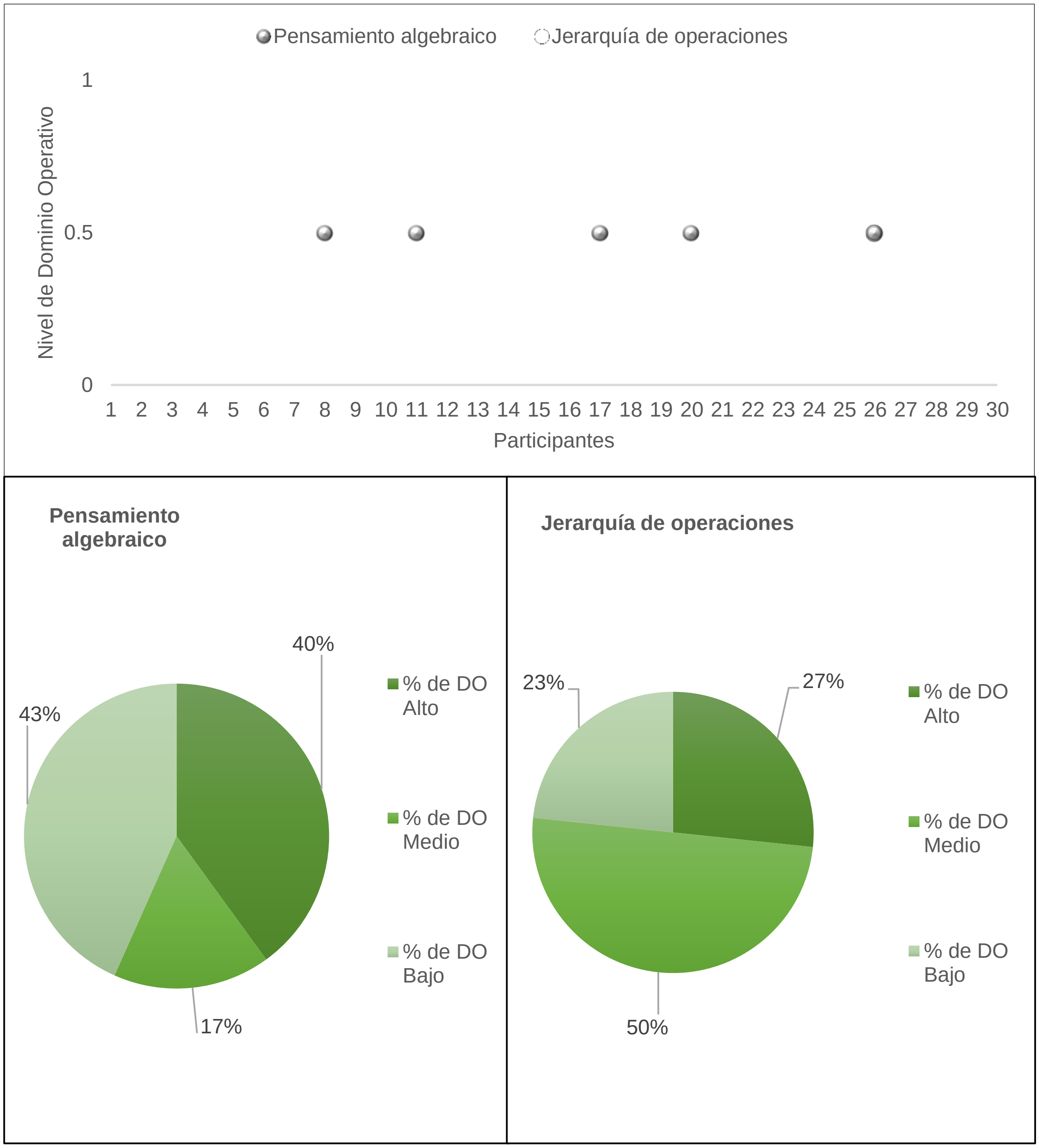


Como se indica en la figura, en la etapa I se alcanzó un puntaje de 83.33 en promedio, mientras que en la etapa II un 82.08. En la etapa III el puntaje bajó a 52.08, lo que era de esperarse, dada la dificultad de las tareas.

En la figura 12, se pueden observar los resultados del primer rubro, con relación al *conocimiento procedimental* en los dos tipos de tareas en la evaluación situada. En la parte superior, se representan la dispersión de las puntuaciones de los participantes en las tres puntuaciones posibles (0, 0.5 o 1). El círculo bicolor (gris y blanco) representa el marcador del nivel de *conocimiento procedimental* en el que se encontraron los participantes en las tareas de pensamiento algebraico, y el círculo con borde negro con fondo blanco en nivel de *conocimiento procedimental* de los escolares en las tareas de jerarquía de operaciones. En ocasiones, estos marcadores se ubicaron en el mismo sitio, dado que los participantes podían estar en el mismo nivel de *conocimiento procedimental* en ambas tareas (círculo bicolor con borde negro). En la parte inferior, está representada esta dispersión en términos de porcentajes, por lo que están agrupados los alumnos que alcanzaron el *conocimiento procedimental* alto (1), medio (0.5) y bajo (0). En las tareas de pensamiento algebraico, el 40% de los alumnos lograron expresar un *conocimiento procedimental* alto, un 17% alcanzaron un *conocimiento* *procedimental* medio, y un 43% un dominio bajo. Cabe destacar que, en la evaluación situada, el *conocimiento procedimental* implica la representación de cantidades desconocidas, sean variables o incógnitas, con literales. En el caso de las tareas de jerarquía de operaciones, un 27% manifestó un *conocimiento procedimental* alto, un 50% un *conocimiento procedimental* medio, y un 23% un *conocimiento procedimental* bajo. El *conocimiento procedimental* en este tipo de tareas implicaba la aplicación de la jerarquía de operaciones en igualdades basadas en multiplicaciones y sumas simultáneamente.

Figura 12

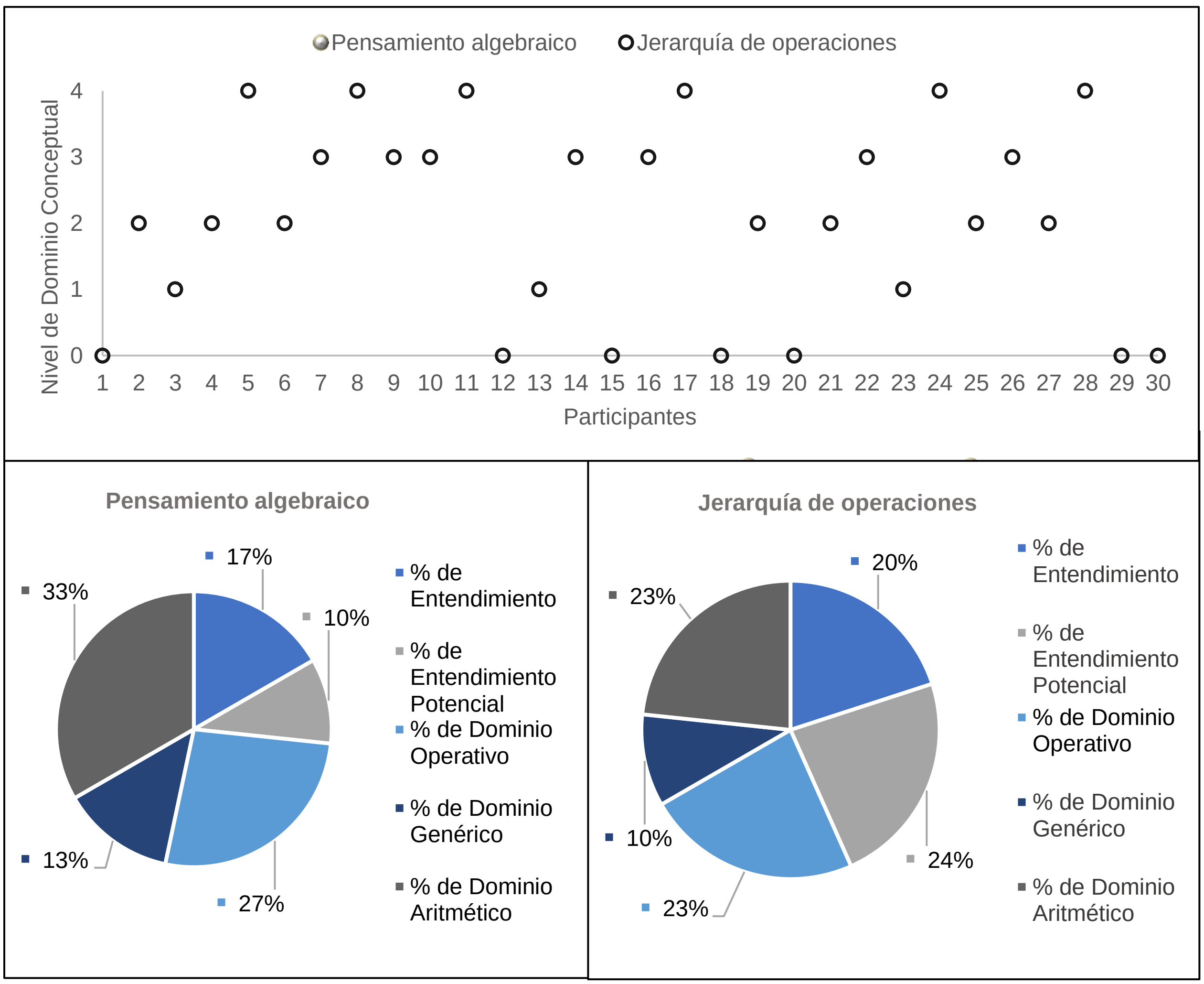
Nivel de porcentaje de Dominio Operativo (DO) de los escolares en las tareas de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones, derivadas de la evaluación situada.



Por otra parte, en la figura 13, como parte de los resultados del primer rubro, se observa en la parte inferior, la dispersión de los puntajes de los alumnos en la evaluación adaptativa semántica. Los niveles de comprensión fueron el 4 y el 3 (comprensión y comprensión potencial), el nivel de dominio a nivel operativo fue el 2, mientras que el dominio genérico y aritmético el 1 y el 0 respectivamente. En la parte inferior, se encuentra el porcentaje de escolares de acuerdo con su puntaje en este tipo de evaluación en ambas tareas. En las tareas de pensamiento algebraico, el 17% de los escolares manifestaron comprensión, un 10% una comprensión potencial, el 27% un dominio a nivel operativo, el 13% un dominio genérico y un 33% un dominio aritmético. En el caso de las tareas de jerarquía de operaciones, mostraron comprensión un 20% de los escolares, un 24% alcanzaron comprensión potencial, un 23% tuvieron un nivel de *conocimiento procedimental*, el 10% un dominio genérico de las tareas, y finalmente un 23% expresaron un nivel aritmético.

Figura 13

Nivel y porcentaje de Entendimiento Conceptual (EC) de los escolares en las tareas de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones, derivadas de la evaluación adaptativa semántica.



En cuanto al *segundo rubro* de los resultados, la consistencia de la evaluación, en la tabla 7 se ubican las correlaciones entre los distintos indicadores de desempeño individual de los participantes, tanto en las tareas de pensamiento algebraico como de jerarquía de operaciones. Las correlaciones más altas y con un nivel de significancia de 0.01, se observan entre los indicadores del promedio individual de las sesiones de la secuencia didáctica, tanto con la Evaluación adaptativa semántica en las tareas de pensamiento algebraico (0.769 (p<0.000)) como en las de jerarquía de operaciones (0.719 (p<0.000)); la evaluación situada individual de las tareas de pensamiento algebraico con las tareas de jerarquía de operaciones (0.761 (p<0.000)); el promedio de las sesiones de la secuencia didáctica tanto con la evaluación situada individual de las tareas de pensamiento algebraico (0.545 (p<0.002)), como con las de jerarquía de operaciones (0.658 (p<0.000)). El indicador de la evaluación adaptativa semántica en las tareas de jerarquía de operaciones se correlacionó en un nivel medio y significativo con el indicador de la evaluación situada individual en las tareas del mismo tipo (0.488 (p<0.006)). También se pueden observar el resto de las correlaciones, ya sea si éstas fueron significativas a un nivel de significancia distinto (0.05) o en una menor intensidad en comparación con las mencionadas anteriormente.

Tabla 7

Correlaciones entre las distintas evaluaciones individuales de las tareas de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones.

Tareas individuales	Evaluación situada individual (PA)	Evaluación situada individual (JO)	Evaluación adaptativa semántica (PA)	Evaluación adaptativa semántica (JO)	Secuencia didáctica (promedio individual)
	Rho de Spearman *(α = 0.05) **(α = 0.01)				
Evaluación situada individual (PA)	1	0.761**	0.420*	0.299	0.545**
	0.000	0.000	0.021	0.109	0.002
Evaluación situada individual (JO)	0.761**	1	0.446*	0.488**	0.658**
	0.000	0.000	0.013	0.006	0.000
Evaluación adaptativa semántica (PA)	0.420*	0.446*	1	0.733**	0.769**
	0.021	0.013	0.000	0.000	0.000
Evaluación adaptativa semántica (JO)	0.299	0.488**	0.733**	1	0.719**
	0.109	0.006	0.000	0.000	0.000
Secuencia didáctica (promedio individual)	0.545**	0.658**	0.769**	0.719**	1
	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000

Nota. PA: Tareas de pensamiento algebraico. JO: Tareas de jerarquía de operaciones.

En la tabla 8 se encuentran las correlaciones entre los indicadores de desempeño de los participantes por equipo: evaluación situada (tareas de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones), y el promedio por equipo en las 10 sesiones de la secuencia didáctica. En un nivel de significancia de 0.01, los indicadores que correlacionaron a un nivel más elevado fueron la evaluación situada en tareas de pensamiento algebraico con las de jerarquía de operaciones (0.654 ($p<0.000$)), y con el promedio de las sesiones de la secuencia didáctica (0.475 ($p<0.002$)).

Tabla 8

Correlaciones entre la evaluación situada por equipo de las tareas de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones y el promedio de la puntuación por equipo en las 3 fases de la secuencia didáctica.

Tareas por equipo	Evaluación situada por equipo (PA)	Evaluación situada por equipo (JO)	Secuencia didáctica (promedio por equipo)
	Rho de Spearman *(α = 0.05) **(α = 0.01)		
Evaluación situada por equipo (PA)	1 0.000	0.654** 0.000	0.475** 0.002
Evaluación situada por equipo (JO)	0.654** 0.000	1 0.000	0.482* 0.013
Secuencia didáctica (promedio por equipo)	0.475** 0.021	0.482* 0.013	1 0.000

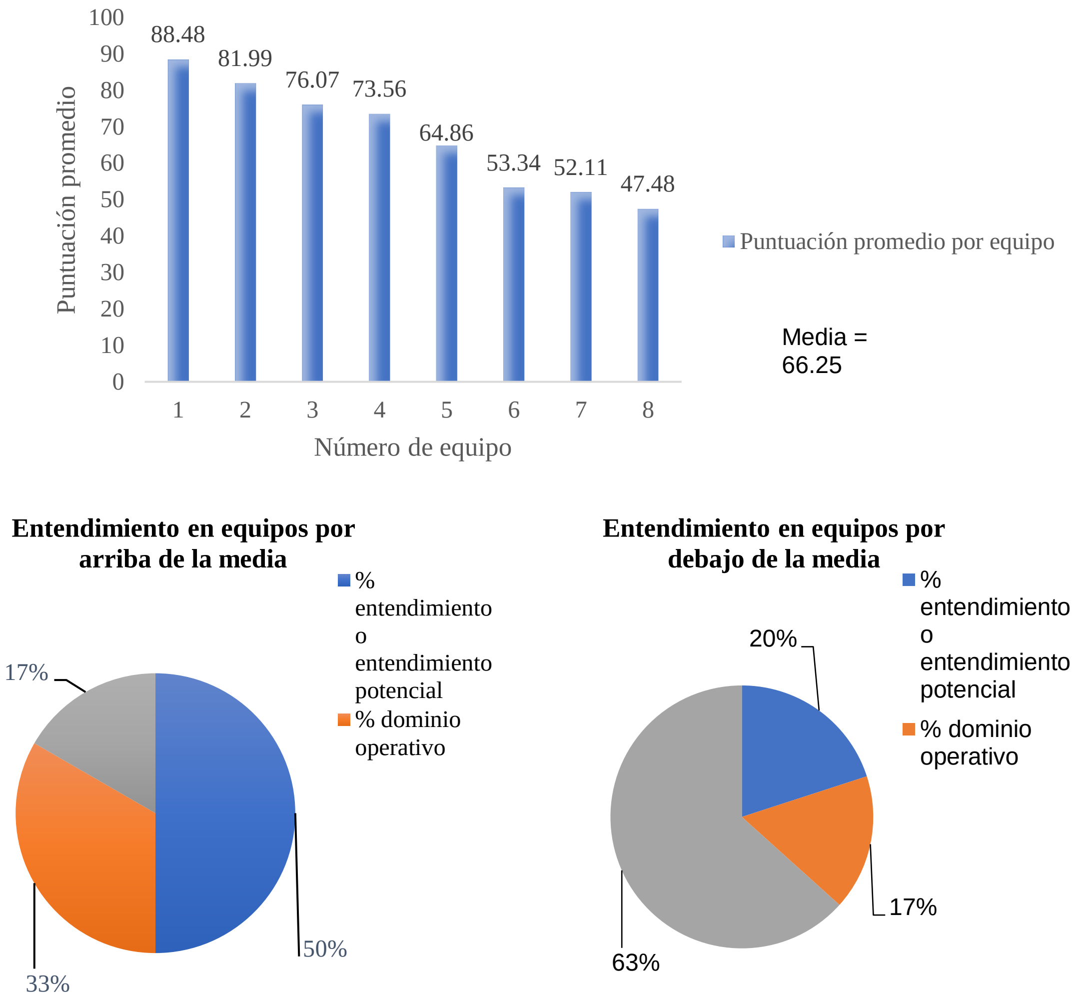
Nora. PA: Tareas de pensamiento algebraico. JO: Tareas de jerarquía de operaciones.

Como parte del *tercer rubro* de los resultados, el efecto del trabajo cooperativo en la ZDP de cada participante, la figura 14 está dividida en dos secciones. La primera sección, en la parte superior, indica el nivel de desempeño promedio de los ocho equipos a lo largo de todas las evaluaciones por equipo durante la experiencia de enseñanza. El equipo con un mejor desempeño fue el #2, con una puntuación media de 88.48, seguido del equipo #8 con un puntaje de 81.99. El equipo #7 alcanzó un puntaje de 76.07, mientras que el equipo #3 alcanzó una puntuación de 73.56. Estos cuatro equipos se encuentran en un desempeño por encima de la media (66.25). Los equipos que se encuentran debajo de la media de desempeño son los equipos #1 (puntaje de 64.86, muy cercano a la media en relación con los siguientes tres equipos), equipo #5 (53.34), equipo #4 (52.11) y finalmente equipo #6 (47.48).

En la sección inferior, se observa el nivel de comprensión de los alumnos de acuerdo con la ubicación por arriba o por debajo de la media, del equipo del cual eran parte. Por lo que, en los equipos que se encontraban por encima de la media, sus participantes mostraron un nivel de comprensión al menos potencial, en ambos tipos de tareas, en un 50%; un nivel de *conocimiento procedimental* en un 33%; y un dominio genérico o aritmético en un 17%. Mientras que, en los equipos que se encontraban por debajo de la media, sus integrantes se ubicaron en un nivel de comprensión al menos potencial del 20%; un nivel de dominio a nivel operativo del 17%; y un nivel de dominio genérico o aritmético del 63%.

Figura 14

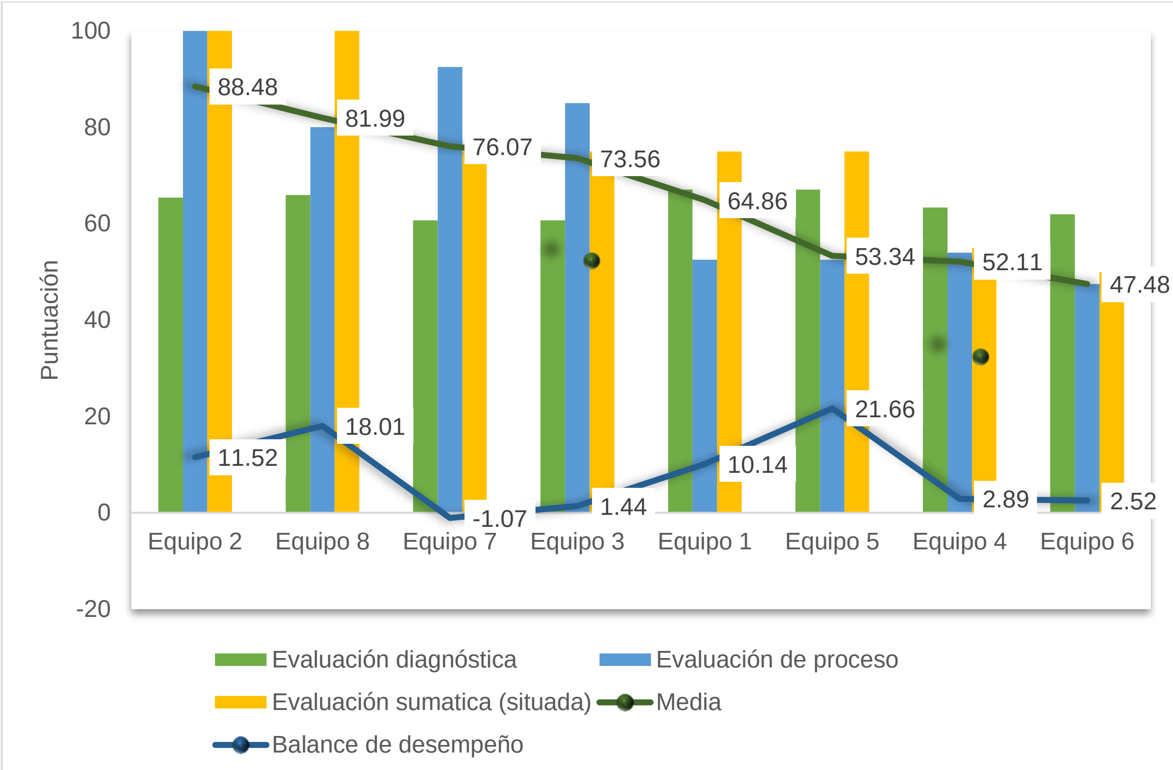
Comparación entre el puntaje promedio total por equipos y el porcentaje de entendimiento de los participantes de acuerdo con la media.



Un análisis posterior de la trayectoria de los equipos deriva del balance en su desempeño en los tres momentos de evaluación. El balance de desempeño corresponde a la diferencia entre el puntaje en la evaluación diagnóstica, la evaluación de proceso y la evaluación sumativa. En la figura 15 se muestran los resultados de cada equipo.

Figura 15

Balance de desempeño entre las diferentes etapas de evaluación por equipo. En la parte superior se destaca la media de cada equipo en las tres etapas.



Nota. En la parte inferior, la diferencia entre el puntaje inicial y los puntajes intermedios y finales.

El equipo 2 fue el que mantuvo una media más alta en los tres puntajes, con 88.48 en sus tareas resueltas. Su balance fue positivo de un 11.52 (el tercero más alto). El equipo 8 obtuvo un puntaje promedio de 81.99, mientras que su balance en el desempeño fue positivo de 18.01 (el segundo más alto). El equipo 7 obtuvo un puntaje de 76.07 en promedio, sin embargo, el balance en su desempeño fue negativo, aunque casi neutro, es decir, obtuvieron un -1.07. El equipo 3 obtuvo tanto un promedio muy cercano al anterior equipo, 73.56, como un balance similar, aunque positivo de 1.44. El equipo 1 obtuvo un puntaje promedio de 64.86, con un balance positivo de desempeño de 10.14. El equipo 5 alcanzó un puntaje de 53.34, con un balance positivo de 21.66 (el más alto). Finalmente, el equipo 4 y 6 obtuvieron un puntaje promedio de 52.11 y 47.48 respectivamente, mientras que su balance de desempeño fue muy similar y positivo, con 2.89 para el equipo 4 y 2.52 para el equipo 6.

En el procedimiento de la evaluación adaptativa, que va del nivel más complejo al más simple, se le plantea al niño un problema en el que debe tener un nivel de comprensión conceptual de orden abstracto algebraico para construir la respuesta, lo que representa el mayor grado de dominio. En este nivel se ubicaron el 17% de los niños; al nivel de comprensión conceptual potencial el 10% logró dar la respuesta, el 27% de los escolares lograron el nivel de dominio procedimental, el 13% alcanzó el dominio procedimental genérico y el 33% alcanzaron solo un nivel de dominio aritmético.

Algunos alumnos lograron alcanzar un nivel de comprensión conceptual. Como muestra de ese nivel de entendimiento, en el siguiente diálogo se describe cómo el alumno estructura la solución al problema de los pasteles y las rebanadas (evaluación conceptual) a través de su propio discurso:

> *Investigador: ¿Cómo podrías representar el problema relacionando las cantidades simbólicamente?*
>
> *Escolar A: …se puede hacer con letras, creo, porque las cantidades no se saben, pero pueden saberse, las que sean son multiplicación.*
>
> *Investigador: ¿Puedes mostrar una manera de representar el problema?*
>
> *Escolar A: … (**Escribe A x A + A = D**) … Le voy a borrar porque estoy poniendo das letras iguales (escribe la ecuación completa y correctamente: **escribe A x Y + E = D**). La A es el número de grupos, la Y son los niños y sus profesores en cada salón o grupo y la D son los niños de visita, las personas que hay.*
>
> *Investigador: ¿Qué operación harías para relacionar esas cantidades que acabas de poner?*
>
> *Escolar A: …Yo multiplico, aunque no sé la cantidad si tengo niños y grupos, pero multiplico los grupos y las personas de los grupos y ya. Multiplico lo que valga. En las otras veces tocaba sumar y luego multiplicar, pero aquí creo que, sí la multiplicación está aquí en los niños y grupos, los niños de visita no tienen como, no sé, mucho chiste que se multipliquen.*
>
> *Investigador: Si tuvieras que asignarle un valor numérico a las cantidades que escribiste, ¿cuál sería en cada letra?*
>
> *Escolar A: … Al total no sé todavía… a lo mejor, 9 grupos, bueno aquí son 10 grupos, entonces en la A sería 10… y como 25 personas por grupos, que sería la Y, eso me da… 250 que son las personas y lo que se necesita tener… pues el total que es D. Los niños de visita que sean, no sé, 15.*

El "Escolar A" describe que el problema de los grupos y los niños en cada salón puede resolverse, en primera instancia, a través de relacionar literales variables con los elementos cruciales del problema (grupos, niños y profesores) por medio de una multiplicación. Después, es capaz de asignarle valores determinados a las literales, manteniendo la relación de las variables entre sí. Con este arreglo, puede resolver el problema con sus propios valores numéricos.

En otro caso, el "Escolar B" indica que se puede resolver el problema con literales, pero además de multiplicar se puede sumar varias veces la cantidad de niños por grupo:

Investigador: ¿Cómo podrías representar el problema relacionando las cantidades simbólicamente?

*Escolar B: …me acuerdo de que eso lo hicimos, pero diferente, a ver, si tengo grupos y no se sabe cuántos son ahorita, pues lo importante es que… me imagino que sacamos a las maestras y a los niños de cada salón y ya … Le puedo poner así (**escribe X + Y + A + B + F + G = P**)*

Y x A + V = P (deja un espacio considerable entre la A y la V).

Investigador: ¿Qué significan las letras que pusiste?

Escolar B: … Son grupos que son diferentes… El X es un grupo, el de primero, y los demás son otros grupos, los de tercero o quinto y así, … así obtengo grupos de donde sales los niños y las maestras.

Investigador: ¿De dónde obtienes los niños y los profesores?

Escolar B: …Haga de cuenta que cada letra es un grupo, ¿ok?, entonces pues cada letra tiene personas, compañeros y sus profesoras, las mismas, no importa, y cuando sumamos las mismas personas del grupo pues obtenemos la cantidad que necesitamos. Luego los niños de visita nada más los sumamos aparte, no junto… son sumas, pero no son juntas.

Investigador: Si tuvieras que asignarle un valor numérico a las cantidades que escribiste, ¿cuál sería en cada letra?

Escolar B: … creo que son 6 grupos porque son 6 letras… entonces las 6 letras tienen la misma cantidad de personas entre niños y maestras, supongamos, entonces eso me tiene que dar… ¿50? o ¿60? Si puede ser 50, pero necesito otro número… si repartimos 50 entre los 6 grupos… 7, me faltan dos… a ver 60…. 10… 10 personas por grupo. Sí serían 10 personas de un grupo chiquitito

Investigador: ¿Y dónde puedes poner el 10 en las letras que pusiste?

Escolar B: … Dentro de las letras, o sea dentro de 6, cada letra dentro tiene las personas, entonces eran… yo creo que, 10 personas, entonces con 6 grupos son 10 personas.

A pesar de que la estructura de suma de literales parecería que no resuelve el problema a nominando a todos sus elementos con alguna de las literales, el "Escolar B" consideró que las personas del grupo estaban "dentro de las letras" o dentro de los grupos, ya que, al asignarles valores numéricos a las literales, el niño expresó una relación multiplicativa a partir de la equivalencia con una estructura aditiva, es decir, 4 grupos contenían 5 personas ($4\,x\,5\; = \;20$).

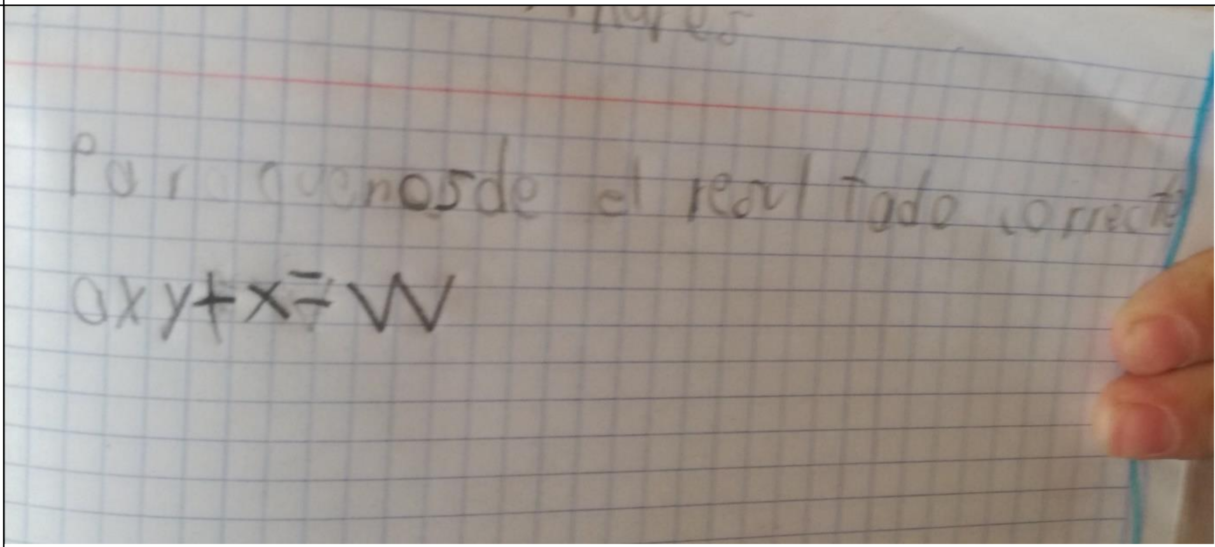
¿Cómo es el discurso de un alumno que no logra apropiarse del concepto de jerarquía de operaciones o de significar una relación algebraica? En la mayoría de los casos, los alumnos no logran expresar relaciones más allá de las contables o las concretas. Un ejemplo de esta situación se puede observar en el caso del Escolar C

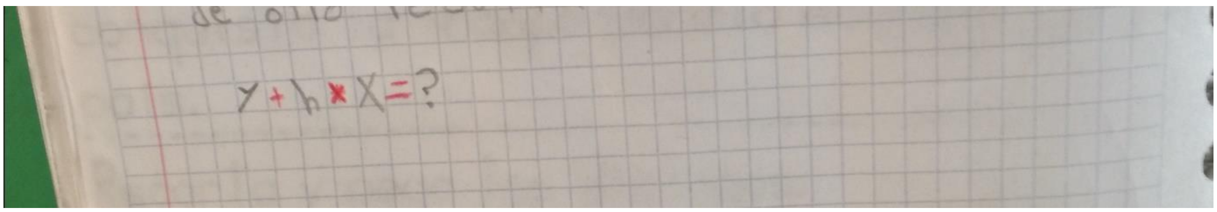
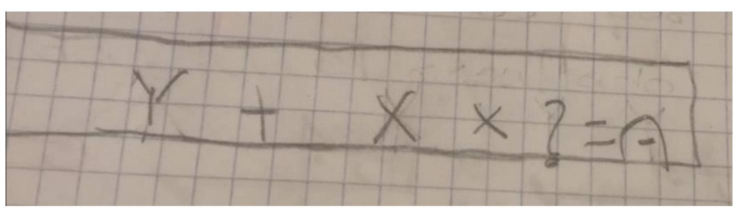
> *Investigador: ¿Cómo podrías representar el problema relacionando las cantidades simbólicamente?*
>
> *Escolar C: ...pues con números, pero no hay, entonces… no sé. Necesito unos números porque, así como así, pueden ser muchas cosas.*
>
> *Investigador: Si tuvieras que asignarles un valor numérico a las cantidades, ¿cuál sería?*
>
> *Escolar B: … pues 5, luego 4, luego 2, no sé.*

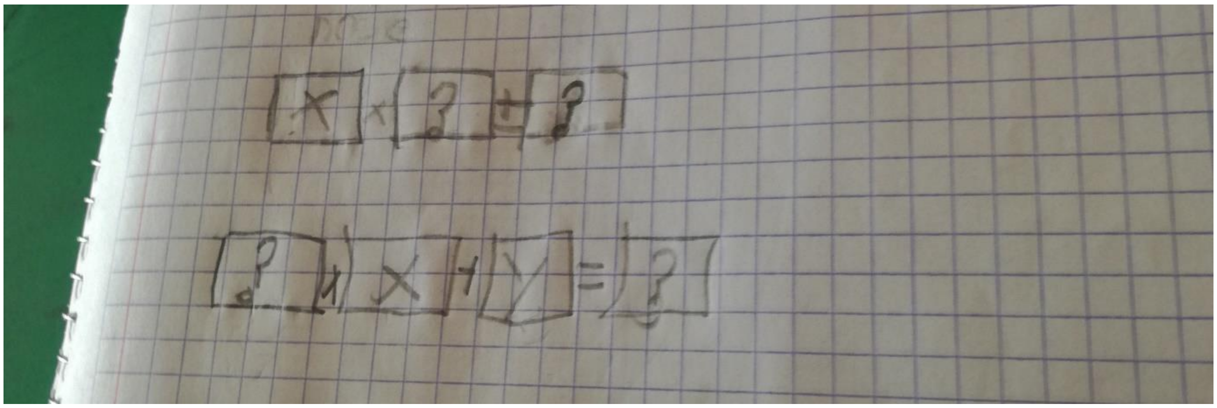
Otras de las respuestas de los alumnos, se analizan a partir de sus representaciones algebraicas y de jerarquía de operaciones, las cuales se sintetizan en la tabla 9.

Tabla 9

Respuestas y representaciones de algunos alumnos en la evaluación adaptativa semántica.

Clave del alumno	Explicación de los alumnos
AJ	 (Escribe la ecuación correctamente, solo le faltan los niños de visita). Le voy a borrar porque me faltan los niños de visita (escribe la ecuación completa y correctamente). La A es el número de salones, la D son los niños, la X son los niños que vienen de visita y la W es el total de niños que están en la escuela.

MB	Y más h más X igual a ¿? Una cantidad representa los salones, los niños de cada salón y luego los niños que vienen de visita, Pero no se obtiene, sumando, se obtiene multiplicando, los niños del salón y los salones, pero a lo mejor se suma… Solamente se tiene que multiplicar. (Resuelve la operación). 
IJ	… ¡Ya le entendi! Está bien fácil. Y mas Y por E igual a Y, es una cantidad que no sabemos, y como no sabemos cuál cantidad es, pues le podemos poner x, z, signo de interrogación. (Luego cambia las incógnitas, la Y por la A, luego otra Y por X). Y + X por ¿? = A. No di el número correcto, no me hace falta, pero con las letras es más fácil. 

DM	Está difícil, es una cantidad desconocida. Yo le haría así: pondría un x, aquí un signo de ¿, aquí una y, luego el total. Aunque sin una cantidad no sabremos el resultado. X más signo por y, igual a signo. No sabemos la cantidad. Como no nos dio la cantidad de ningún dato, aún no podremos saber la cantidad de salones. Este representa la cantidad de niños de visita, luego la multiplicación representa la cantidad de niños y luego la de los salones. (Las literales las cambia de lugar para que coincida con el planteamiento del problema). 

Nota. Cada imagen es de autoría propia.

Algunos niños utilizaron como literales los signos de interrogación. Se permitió que los usaran durante la evaluación, con la intención de indagar el significado que les daban a estos, en comparación con el uso de literales.

AJ propuso una ecuación para representar la cantidad de niños que había en una escuela, al multiplicar los salones de la escuela por los niños que había en cada salón. Cuando se dio cuenta que le hacían falta “los niños que vienen de visita”, borró su primera ecuación para construir otra, en la que agrega la suma.

MB logró plantear una ecuación al problema de los niños en la escuela, diferenciando las literales entre sí, incluyendo un signo de interrogación. Aunque en un principio no detectó la necesidad de multiplicar, se dio cuenta que necesitaba multiplicar para obtener el total de niños en los salones. Pero no fue sino hasta que se le dieron los elementos para facilitar la solución, que pudo confirmar que la multiplicación se podía realizar y completó el ejercicio.

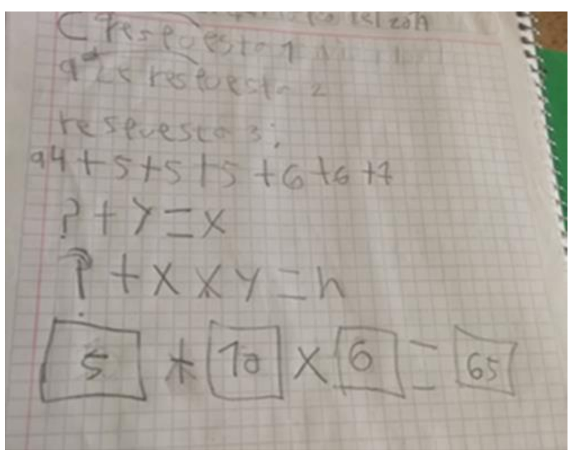
Por su parte, IJ planteó una solución al problema de un modo algebraico, logrando comprender la relación entre el problema planteado y la representación del problema con cantidades desconocidas. En un principio no sabía cómo operar, pero después recordó cómo aplicaba las literales en la secuencia, y pudo crear una ecuación. Después representó las literales con diferentes letras entre sí (incluido un signo de interrogación), para distinguir una cantidad desconocida de otra.

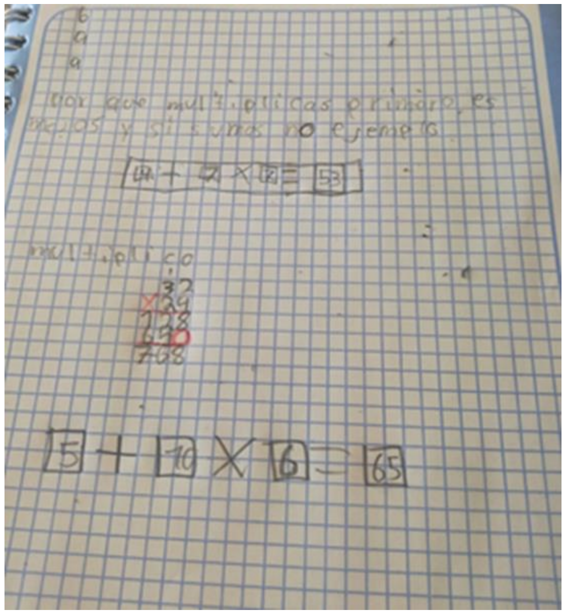
Finalmente, DM planteó una solución al problema de un modo potencialmente algebraico, pero hizo notar que se requería de aritmética para darle solución al problema, afirmando que no se podrá saber si el número de niños en la escuela es uno u otro. Sin embargo, después desecha la idea y utiliza literales y signos de interrogación para representar la relación de manera abstracta.

Otros de los resultados se pueden observar en la figura 16

Figura 16

Ejemplos de representaciones de algunos alumnos en la etapa de la evaluación adaptativa semántica.





Nota. Las imágenes son de autoría propia.

Capítulo 8. Discusión y conclusión

8.1 Representación y didáctica fenomenológica

De acuerdo con los objetivos y las preguntas de investigación de la tesis, los resultados confirman que los alumnos de tercer grado de primaria pueden participar y modificar su dominio conceptual de pensamiento algebraico y jerarquía de operaciones, con base en experiencias algebraicas que impliquen argumentar y representar la solución de un problema. Esta aseveración se basa en los puntajes obtenidos en la evaluación adaptativa semántica. (67% de los alumnos logró al menos un nivel de dominio genérico en las tareas de pensamiento algebraico, así como un 77% en las tareas de jerarquía de operaciones). Además, las representaciones de los alumnos, tanto a nivel gráfico como verbal, sustentan la construcción de relaciones de cantidad, muchas de ellas abstractas.

Estos resultados no solo son satisfactorios porque implican que los alumnos presentaron un mejor dominio con la experiencia educativa de esta investigación, además, porque significan el primer estudio en la literatura que vincula exitosamente las variables de razonamiento matemático, pensamiento algebraico, jerarquía de operaciones y didáctica fenomenológica. De estas variables, resulta trascendental destacar que son los primeros datos de una secuencia psicoeducativa exitosa en el campo de la jerarquía de operaciones. En otras palabras, los resultados con la jerarquía de operaciones son inéditos.

Las preguntas de investigación fueron las siguientes:

1) ¿Cuál es la relación entre el razonamiento matemático y la didáctica fenomenológica, en el dominio de la jerarquía de operaciones y el pensamiento algebraico?

2) ¿Cuál es el efecto del aprendizaje cooperativo en el dominio de conceptos matemáticos?

3) ¿Cuál es el grado de significación de las representaciones de relaciones algebraicas y de jerarquía de operaciones en niños de tercer grado de primaria?

Respondiendo a la primera pregunta, es muy importante el peso de la didáctica fenomenológica en el entendimiento de la jerarquía de operaciones y de tareas de pensamiento algebraico. Sin estas actividades, las tareas en ambos conceptos carecerían de un potencial significativo. Este potencial significativo implica que los alumnos se puedan acercar a una concepción abstracta de relaciones cuantitativas de un modo prudente, es decir, con un dominio tal que puedan discernir en qué situaciones se aplican ciertos métodos o maneras de representar cantidades.

Entre más atractiva sea la tarea para los alumnos, el impacto en su dominio podría ser mayor, siempre y cuando la didáctica fenomenológica, o la manipulación de objetos, esté vinculada conceptualmente con el razonamiento matemático.

La evidencia relacionada con la didáctica fenomenológica es basta a lo largo de las últimas décadas (Das, 2020; Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020; Webb, Van der Kooij y Geist, 2011), al igual que en este estudio, relaciona a la didáctica con la importancia de la comprensión de conceptos científicos, es decir, con postulados de Lev Vygotsky relacionados con el dominio de relaciones abstractas.

Por otra parte, en relación con la segunda pregunta de investigación, el razonamiento matemático de los participantes fue diverso y en distintos niveles de abstracción. De acuerdo con los resultados del estudio piloto, dejaron evidencia del potencial del trabajo en equipo, bajo una dinámica de aprendizaje cooperativo, en el dominio y entendimiento de tareas de razonamiento matemático. Algunos mejoraron en términos proporcionales su dominio de conceptos matemáticos derivados de relaciones aritméticas; otro porcentaje más alcanzaron el dominio conceptual de la jerarquía de operaciones, en las relaciones de multiplicación y suma combinadas; otro porcentaje más no solo representó cantidades de manera simbólica, sino que logró construir expresiones algebraicas basadas en la notación, de un modo significativo, al transferir esa expresión a un entorno novedoso.

Esta clase de transferencia es una de las bases del currículum de Davydov, nombre con el que Davydov (1962) describe la relación entre los eventos cotidianos con una potencial enseñanza de conceptos científicos, partiendo de andamiajes simbólicos, basados en los postulados de Vygotsky (1988).

Además, estos porcentajes de diversos niveles de dominio dan cuenta de la relación entre un conocimiento procedimental y un conocimiento conceptual. El conocimiento procedimental es importante, ya que representa la dimensión procedimental que un alumno debe interiorizar para poder alcanzar un conocimiento conceptual; ambas dimensiones están interrelacionadas, aunque jerárquicamente el conocimiento conceptual resulta crucial al momento de evaluar qué tanto un alumno logra apropiarse de un concepto y poder aplicarlo en la resolución de problemas. Estos resultados coinciden con los hallazgos de Schneider et al. (2015), y de Rittle-Johnson et al. (2016), en relación con el potencial que representan tareas de tipo teóricas y su combinación con tareas procedimentales en la comprensión de conceptos matemáticos, así como en su énfasis en que la comprensión de una tarea matemática se relaciona en mayor medida con un conocimiento conceptual que con un dominio procedimental.

Los indicadores que se correlacionaron entre sí brindaron indicios de la coherencia de la evaluación integral en el entendimiento de nociones matemáticas de los alumnos. También reflejan su desarrollo cognitivo, expresado en sus representaciones matemáticas y en el significado que le otorgaron. Las apreciaciones evaluativas, tanto de la profesora como del investigador, se correlacionaron significativamente entre sí, lo cual tiene implicaciones importantes: el trabajo de los alumnos durante las 10 sesiones de la secuencia, base de la apreciación del investigador, es congruente a su desempeño durante la evaluación sistemática realizada por la profesora. La secuencia también está vinculada con la post-evaluación en término de correlaciones: la jerarquía de operaciones y el pensamiento algebraico presentaron una alta correlación con el promedio de los escolares en las sesiones de la secuencia. Esto implica que las 10 sesiones estuvieron orientadas a potenciar el entendimiento de las tareas de jerarquía de operaciones y de pensamiento algebraico, partiendo de la aritmética; específicamente, de las nociones de constante, igualdad por equivalencia y pensamiento relacional. Comúnmente se separa la enseñanza aritmética de la algebraica, por el contrario, en esta experiencia se integraron mutuamente en términos estructurales, sin dejar de lado los principios que las hacen distintas.

Esto último se ve reflejado en las puntuaciones de WISC IV y PLANEA de la subárea de la aritmética, en tanto se correlacionaron de un mejor modo con el promedio de la calificación de los escolares en matemáticas, en comparación con los puntajes en jerarquía de operaciones y pensamiento algebraico que se basan en pensamiento relacional. Esto quiere decir que, a pesar de la integración mutua en la secuencia, si hay diferencias en las competencias aritméticas respecto a las de jerarquía de operaciones y las algebraicas.

Respecto a la tercera pregunta de investigación, el nivel de significación de las tareas corresponde al nivel de representación de una relación de cantidad. Tal como indican Doerr et al. (2017), o Meaney et al. (2016), los estudiantes que tienen un dominio de conceptos matemáticos, con base en el nivel de significación que tienen, pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas, los cuales pueden surgir en la vida cotidiana; de manera que los estudiantes se pueden sentir cómodos haciendo supuestos y aproximaciones para simplificar una situación complicada. La manera de evaluar si un estudiante en realidad comprende un problema y aplica una estrategia que derive de su entendimiento tanto conceptual como procedimental de la tarea, es a través de su nivel de representación. Tal como lo indican Xin et al. (2016), el nivel de representación de un estudiante se vincula con su potencial de transferencia de conocimiento entre diversos contextos de aplicación, ya sea este un nivel concreto, uno semiconcreto o uno abstracto tanto en términos de aritmética como de álgebra.

En otras palabras, la representación es un medio por el cual se expresa el nivel de dominio de un concepto. Los alumnos en sus representaciones dejaron por sentado en qué nivel de dominio se encuentran. Los niveles de dominio dependen de si el alumno se encuentra en un proceso inicial de abstracción o avanzado; en otras palabras, cuál es su Zona Real de Desarrollo.

En relación con el valor ecológico del estudio, las actividades en las que los alumnos formaron parte derivan de una concepción activa del aprendizaje, contraria a la concepción pasiva tradicional, en la que los alumnos únicamente escuchan y realizan los ejercicios que el profesor indica. Este tipo de aprendizaje no es común en la enseñanza de las matemáticas, por lo que es aún más complicado que los docentes adopten prácticas que pueden considerar incompatibles con sus métodos didácticos tradicionales. Es por esta razón que la flexibilidad que tuvieron las docentes de las dos primarias es especial e importante, ya que no en cualquier escenario educativo los docentes están dispuestos a ser parte activa y colaborativa del trabajo de campo. Un investigador se ve envuelto en una dinámica absolutamente dependiente de las condiciones, ideas y posibilidades de la institución en la que desarrolla su investigación.

Uno de los valores agregados de esta tesis en el estudio del razonamiento matemático, no se basa solamente en el nivel de logro de los alumnos. Un rubro sumamente destacado es el análisis de los procesos de adquisición de conocimiento matemático de un modo significativo, o, en otras palabras, la operatividad cognitiva de los estudiantes de primaria.

La operatividad cognitiva de los alumnos se puede analizar con base en las actividades de manipulación. Por ejemplo, en el intercambio de agua en los vasos, la relación entre la cantidad total de agua y las cantidades en cada vaso, podrían promover en el alumno un modo distinto de concebir el concepto de igualdad por equivalencia, o el concepto del signo igual. Cada alumno, a través de su discurso, dio cuenta de su razonamiento basado en cómo estructuraban ese conocimiento adquirido.

Otro ejemplo de la operatividad cognitiva se puede observar en la manipulación de dulces con bolsas. Esta manipulación, representó la unidad de las operaciones de suma y multiplicación. Cada bolsa al tener la misma cantidad de dulces equivalía a uno de los factores de una multiplicación. Los dulces, dentro de las bolsas, eran el otro factor de la relación, por lo que la cantidad total es el producto de esta relación entre factores. Lo más importante de este arreglo, era analizar cómo los estudiantes relacionaban este evento con sus condiciones particulares, con el concepto de jerarquía de operaciones, o el equivalente que ellos pudieran otorgar. Este fenómeno se puede ver reflejado en el estudio de Escobar y Tirado (2021).

En conclusión, a este apartado de la discusión, la operatividad cognitiva representa un aporte crucial en el estudio del razonamiento matemático en niños de primaria.

8.2 La Zona de Desarrollo Próximo y el aprendizaje cooperativo

En relación con el desempeño de los equipos y su efecto en la Zona de Desarrollo Próximo de cada alumno, se puede observar que los equipos que mejor desempeño tuvieron, en su integración, cooperación y colaboración, lograron también a nivel individual comprensión de las tareas. En otras palabras, los alumnos que pertenecieron a buenos equipos de trabajo tenían una mayor probabilidad de comprensión que los alumnos que pertenecían a equipos con un bajo desempeño. Este dato resulta crucial en favor de la promoción del trabajo por cooperación y colaboración en un escenario tan complejo como el salón de clases, y coincide con los hallazgos de Johnson y Johnson (2008).

El aprendizaje cooperativo implica una dinámica de colaboración entre miembros de equipos de trabajo. Es a través de la Zona de Desarrollo Próximo como se puede promover el desarrollo del entendimiento de cada miembro de un equipo. No solamente a partir de competencias intelectuales, sino también con competencias sociales. Un ejemplo de estas competencias sociales es el liderazgo que ejercen algunos integrantes de equipo. Un liderazgo positivo, es decir, aquel que organiza la interacción de un equipo, a partir de la equidad y las oportunidades de participación, provoca que el equipo se integre de un mejor modo, en comparación con liderazgos que acaparan toda la atención y la toma de decisiones en un solo miembro de un equipo. En este escenario, la Zona de Desarrollo Próximo se puede dar siempre y cuando los alumnos tengan las mismas oportunidades de participar en las decisiones y reflexiones de un equipo.

En los equipos que no lograron un buen desempeño, hay niños que están fuera de la Zona de Desarrollo Próximo, es decir, la Zona Potencial, establecida en el conocimiento procedimental o el conocimiento conceptual de sus compañeros. En las tareas fenoménicas y su relación con conceptos abstractos desarrollados por los investigadores de este estudio, pueden ser los rubros que no alcanzaron a impactar su Zona Real de Desarrollo. Otro factor crucial puede ser el impacto de las interrelaciones personales que no fluyen dadas las características personales de los estudiantes, como los liderazgos o las actitudes pasivas y evasivas de algunos alumnos, lo que puede influir de manera decisiva en cancelar la cooperación o colaboración del trabajo en equipo.

El trabajo en equipo resultó crucial para el establecimiento de una Zona de Desarrollo Próximo en los escolares. El conocimiento potencial se puede situar tanto en la dirección que le daba el investigador a la secuencia psicoeducativa, como a la habilidad de los miembros de un equipo para proponer soluciones a las tareas que resolvieron. En los equipos también se forman liderazgos, y son cruciales en el análisis del desempeño general de los equipos de trabajo.

Si bien la secuencia didáctica es importante para el vínculo entre eventos fenoménicos y conceptos abstractos, la Zona de Desarrollo Próximo resulta más fructífera entre pares, probablemente porque los alumnos toman mayor confianza en expresar sus ideas o dudas con un compañero, lo cual implica una mayor cercanía ideológica-conceptual.

Finalmente, cabe destacar que, con base en el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, los alumnos de alto desempeño que lograron crear un entorno de colaboración con el resto de los integrantes de su equipo facilitaron la comprensión de estudiantes con una baja expectativa de comprensión. En otras palabras, los alumnos de bajo desempeño que lograron avanzar en su comprensión en un mayor grado porcentual de lo esperado eran parte de equipos con alto puntaje, por lo que el efecto de la cooperación se expresó en un mayor nivel de comprensión para todos los integrantes de estos equipos. La conformación de equipos de trabajo de un modo balanceado, la evaluación individual y por equipo de su desempeño, así como las tareas derivadas de una secuencia didáctica basada en conceptos espontáneos y conceptos abstractos, dentro de una dinámica escolarizada y con base en el aprendizaje cooperativo, resultan ser las implicaciones más relevantes de este estudio.

8.3 Álgebra temprana: pensamiento algebraico y pensamiento relacional

Los resultados confirman que los alumnos de tercer grado de primaria pueden participar activamente en experiencias algebraicas, que impliquen argumentar y representar la solución de un problema que contemplen el pensamiento algebraico, tal como lo afirman Blanton et al. (2017), quienes también indican que las intervenciones tempranas en álgebra con niños de primaria han demostrado mejorar el entendimiento algebraico de los alumnos, en los niveles de secundaria o bachillerato.

El uso del signo de interrogación, si bien no es parte de las convenciones acerca del empleo de literales en álgebra, representa un acercamiento para los escolares hacia la noción de incógnita, aunque no haya la noción de variable como la cualidad de ser una representación infinita de números simultáneamente, es decir, sin un valor fijo (Cai et al., 2011). Aunque hay indicios en su discurso acerca de una distinción entre ambas, hace falta una mayor investigación de esta diferenciación.

Es probable que los alumnos que no lograron mostrar un entendimiento en el pensamiento algebraico, pero que demostraron un dominio aritmético en la preevaluación y durante las sesiones de la secuencia, estén “sobrearitmetizados”, en el sentido de operar numéricamente (contable) mas no entender las relaciones de cantidades abstractas, debido a una tendencia por el cálculo sin comprensión estructural de las operaciones que resuelven. En otros casos, tiene que ver con varios escenarios, como la limitante que tienen algunos niños en la comprensión de lectura; sus competencias previas en aritmética; la ausencia de significado subyacente a las tareas que realizaron; dificultad de algunos alumnos para realizar tareas novedosas; o aspectos socioemocionales.

La representación de cantidades con literales no implica el pensamiento algebraico, tal como lo indica Kieran (2016) en tanto un niño puede nominar solamente cantidades desconocidas usando letras sin entender la relación abstracta. Las tareas de pensamiento algebraico implican una mayor dificultad, porque la representación funge como una base del entendimiento de relaciones abstractas.

8.4 Jerarquía de operaciones: propiedades numéricas y unidades operativas

Un gran porcentaje de los niños lograron entender en un nivel alto la aplicación significativa de la jerarquía de operaciones. La clave para haber obtenido estos resultados puede radicar en la aplicación de la jerarquía de operaciones, al relacionar las tareas matemáticas de didáctica fenomenológica y la utilidad para organizar y jerarquizar la estructura de las operaciones. Esto derivó en el pensamiento relacional aplicado a estas tareas. Este estudio siguió una línea de investigación planteada por varios autores (Dupree, 2016: Linchevski y Livneh, 1999: Taff, 2017), en cuanto a que el sentido de una estructura en una expresión matemática requiere de un grado de significación para los alumnos, en entornos algebraicos y numéricos. En este estudio, las tareas de jerarquía de operaciones estuvieron relacionadas con tareas matemáticas de didáctica fenomenológica, que lograron en algunos alumnos generar el grado de significación de la jerarquía, de acuerdo con el análisis semántico implementado.

El reto de la experiencia de campo radica en llevar las innovaciones de álgebra temprana, y nuestra teorización de la jerarquía de operaciones, al entorno escolarizado. Este reto implica un entorno de investigación con un mayor grado de validez ecológica, ya que asume que, en la complejidad escolar, se pueden encontrar circunstancias que pueden promover o dificultar el entendimiento de los niños en relación con conceptos abstractos. La configuración del salón de clases, de la dinámica de trabajo, de las oportunidades que tienen los alumnos para poder expresar sus construcciones matemáticas, sus explicaciones o argumentos que, probablemente, indiquen un nivel de entendimiento abstracto relacionado con el álgebra básica y la jerarquía de operaciones.

Cabe reiterar que los resultados confirman que existe una relación estructural entre la jerarquía de operaciones, el álgebra básica y el eje que los relaciona, el pensamiento relacional. Lo importante no es la mera estructura, sino que pueda ser significativa para los alumnos, en contextos escolarizados, es decir, en condiciones ecológicas.

Cabe destacar que las unidades operativas representan un aporte al campo de la jerarquía de operaciones. Además, son una ventaja frente a las clásicas nemotecnias PEMDAS, BOMDAS, entre otras. La ventaja más importante es que las unidades operativas implican una relación semántica entre cantidades. El orden en el que se resuelven las operaciones no es lo más relevante, sino cómo están vinculadas entre sí.

Por otra parte, la representación probablemente hace más sencillo entender la lógica del pensamiento algebraico (lógica estructural y general, en vez de una lógica basada en el cálculo y en cantidades específicas). En suma, las tareas de pensamiento algebraico implicaron una mayor dificultad para los escolares, respecto a las tareas de representación algebraica, probablemente porque la representación funge como una base del entendimiento del pensamiento algebraico. También es probable que las tareas de jerarquía de operaciones sean más asequibles para los niños, dado que se basan en relaciones de cantidad numéricas, a pesar de contar con un componente estructural ($a + bc = y$) necesario para lograr su entendimiento.

Los niños lograron entender en mayor cantidad las tareas de jerarquía de operaciones, gracias a su capacidad de abstraer una relación estructural en las tareas de aritmética realizadas con la ayuda del pensamiento relacional. Aunque las tareas de jerarquía de operaciones y de pensamiento algebraico contemplan una estructura subyacente, en la jerarquía de operaciones, parece que el componente numérico ayuda a hacer más significativa la resolución de un problema, en comparación con los problemas de pensamiento algebraico, aunado a que el pensamiento relacional, parece tener mayor impacto en tareas de jerarquía de operaciones, ya que los niños, en el análisis semántico, tuvieron una mayor posibilidad de aplicar el pensamiento relacional, si comparamos la oportunidad que tuvieron de hacerlo con las tareas de pensamiento algebraico.

El desarrollo del pensamiento relacional puede evaluarse en el desempeño de los alumnos, principalmente en el análisis semántico de las tareas realizadas, ya que resultaron novedosas para ellos; se trata de su primera oportunidad de enfrentarse a situaciones abstractas a través de herramientas que se enfocaron en modos de pensamiento abstracto y relacional.

La evaluación del entendimiento de los escolares se realizó a través de varias pruebas de jerarquía de operaciones y pensamiento algebraico, así como por medio de entrevistas individuales para la evaluación del análisis semántico. A pesar de que el 72% mostró un entendimiento alto o medio, tanto en jerarquía de operaciones y/o en pensamiento algebraico, probablemente el 28.3% restante de los alumnos que no lograron familiarizarse con las tareas, se debió a la falta de significación que pudieron haber tenido. Otra posibilidad es que la cantidad de las sesiones, si bien están adecuadas a la ecología escolar de los participantes y de la institución, probablemente no lograron ser suficientes para que más alumnos alcanzaran un grado de entendimiento que pudiera ser evaluado en las pruebas de análisis semántico.

Las sesiones de la secuencia psicoeducativa fueron tanto audio grabadas como registradas a través de notas de campo y fotografías, de acuerdo con el convenio realizado con los padres de familia y la institución. Por lo tanto, los resultados tienen un mayor énfasis en la construcción de los productos de las sesiones, es decir, los resultados de los alumnos en las tareas que realizaron al final de cada sesión, en la post-evaluación, así como en el análisis semántico individual.

Se puede concluir que este estudio permite señalar la coherencia que hubo en los múltiples indicadores del desempeño de los niños gracias a la evaluación sistémica; mostrar que la estrategia educativa tiene factibilidad de ser implementada por un profesor de primaria en las condiciones escolares cotidianas; sustentar que en un escenario natural de la escolaridad pública de una primaria, es posible formar pensamiento relacional; demostrar el potencial de las experiencias de didáctica fenomenológica para el entendimiento matemático; apreciar que cuando el niño llega a comprender y ver la significación, logra entusiasmo para aprender matemáticas; potenciar la formación de hábitos de pensamiento complejo, a partir de esquemas del pensamiento primario; y demostrar que los niños a temprana edad son capaces de comprender principios básicos de pensamiento algebraico a partir de representaciones simbólicas, que derivan de la manipulación de objetos.

Las actividades básicas de la jerarquía de operaciones son las unidades operativas. En otras palabras, las relaciones de cantidad estructurales son el núcleo conceptual y operativo de la jerarquía de operaciones. La concatenación de relaciones de cantidad funge como el primer paso de la transferencia del concepto a actividades que representen su entendimiento concreto y abstracto.

En este estudio se confirma la importancia del pensamiento algebraico en primaria, como un integrador de competencias aritméticas. Si bien es cierto que el álgebra contempla un nivel de abstracción mayor al de la aritmética, también se ve mediado por las competencias numéricas de los escolares. Una subárea y otra tienen una relación estructural tan contundente que se complementan en un entorno escolarizado.

El pensamiento relacional fue la directriz en las relaciones entre los conceptos de jerarquía de operaciones y pensamiento algebraico, y las subáreas de las matemáticas de aritmética y álgebra. El pensamiento relacional implica, en su esquema más básico, concebir equivalencias entre representaciones de cantidad desde un punto de vista estructural. Dicho de otro modo, contempla el vínculo entre diversos modos de expresiones matemáticas, a partir de una categoría en común. Esta característica implica una gran cantidad de oportunidades para los alumnos, acerca de enfrentarse con una cantidad de problemas que pueden estar vinculados entre sí, no en sus características más superficiales, sino en su configuración estructural. Además, el pensamiento relacional constituye un modo de razonamiento matemático, ya que es un hábito intelectual que puede integrar de un mejor modo a la aritmética, la jerarquía de operaciones y al álgebra básica, teniendo una mayor probabilidad de que un alumno pueda comprender relaciones de cantidad.

La escolarización de nociones matemáticas complejas representa un reto sinuoso pero necesario de enfrentar. La complejidad no solamente está presente en la naturaleza de los conceptos, también (y en mayor medida) se sitúa en el salón de clases. Los alumnos son una muestra de sus propios entornos, muchas veces convulsos y otras más favorables, y por tanto diversos e impredecibles. Desde ahí es donde se pueden construir aportes a los modos en los cuales ellos aprenden; a la manera en la cual pueden encontrar conexiones entre eventos y conceptos, favoreciendo la formación de conceptos y un aprendizaje con un mayor grado de significación; la oportunidad de los alumnos para poder resolver problemas.

El análisis semántico representa la validez de la secuencia psicoeducativa, ya que en él convergen los significados y las competencias que los alumnos desarrollaron a lo largo de la investigación, y que se complementan con sus nociones preestablecidas de relaciones cuantitativas. Su discurso, si bien fue analizado bajo un paradigma cognitivo y desde una experiencia de enseñanza, guarda una gran importancia para el análisis del entendimiento, lo cual es a grandes rasgos, la mayor meta de la tesis, es decir, basarse en la mayor cantidad de indicadores para poder dar cuenta de al menos la parte más significativa y nuclear de la comprensión de relaciones de cantidad. Sin el análisis semántico, se limitaría la veracidad, validez y confiabilidad de los datos en su conjunto.

La evaluación sistémica tuvo como objetivo validar los instrumentos o indicadores de entendimiento de los participantes, a través de toda la investigación. Las correlaciones, en la mayor cantidad de los casos, son la base de la coherencia del método.

8.5 Áreas de oportunidad en el campo de investigación

Además del contraste entre los principales tópicos de la tesis y los hallazgos, surgieron varias eventualidades en el trabajo de campo, las cuales se describirán a continuación. Estas eventualidades, a su vez, sugieren áreas de oportunidad en el campo de investigación de la tesis, las cuales se pueden desarrollar en futuras investigaciones.

Una de las primeras necesidades en la tesis, fue ajustar progresivamente el plan del trabajo de campo. En un primer momento, la estructura de las sesiones se diseñó a través de un estudio piloto n=1. Este estudio exploratorio fue la base de la primera experiencia de enseñanza. Sin embargo, en la experiencia de enseñanza empezó a ser evidente que un alumno destacado, también era favorecido en su entorno familiar. Este aspecto no se tomó en cuenta en la planeación inicial, a pesar de ser sumamente estudiado en las últimas décadas. Los alumnos que más participaban mayoritariamente pertenecían a los mismos grupos de alumnos que en su entorno familiar tenían menores carencias. De esta situación, derivó una necesidad extra: contemplar la Zona de Desarrollo Próximo considerando esta condición. El desempeño de los alumnos con base en la Zona de Desarrollo Próximo confirmaría o rechazaría las premisas de la tesis, las cuales se basan en las ventajas de la promoción del razonamiento matemático a partir de conceptos como la jerarquía de operaciones o el pensamiento algebraico, por lo cual, era importante crear un modo de evaluación que no fuera demasiado impreciso en el reconocimiento de diferencias individuales iniciales. La evaluación proporcional basada en la Zona de Desarrollo Próximo no disminuye el peso de una evaluación sumativa, al contrario, la enriquece al mostrar el nivel de avance de un alumno con un nivel de dominio de conceptos matemáticos bajo o medio. Los alumnos con un nivel alto de desempeño inicial evidentemente tienen un margen de crecimiento casi nulo, pero con la evaluación sumativa se compensa esta situación, tal como la evaluación proporcional basada en la Zona de Desarrollo Próximo lo hace con el nivel de logro de alumnos marginados académicamente.

Algunos alumnos contaban con situaciones personales devastadoras, por lo cual la experiencia educativa significó muy poco. Es importante considerar que, por más sofisticada o cercana a los intereses de los participantes esté diseñada una experiencia de campo, existen circunstancias muy complejas en entornos tanto familiar como escolar, que imposibilitan un beneficio latente en una pequeña parte de los alumnos. Sin embargo, en ningún momento esta tesis tuvo como objetivo ignorar esta condición de investigación, al contrario, uno de los puntos más relevantes de esta investigación radica en que se desarrolla en un escenario escolarizado complejo, sin el control de muchas de las variables del entorno, pero con una meta muy bien establecida, que es tratar de impactar en la mayor parte de estudiantes posibles en su desempeño académico, su autoeficacia, su motivación y su autoestima.

En síntesis, la evaluación proporcional bajo una concepción de equidad tiene el objetivo de otorgar visibilidad a los progresos de alumnos desfavorecidos con evaluaciones únicamente sumativas. Además, proporciona un parámetro más preciso de la trayectoria de su aprendizaje.

En el marco del estudio del trabajo en equipo, siempre se ha generado un debate acerca de cómo deberían estar constituidos. Desde el punto de vista procedimental, la primera idea que se tuvo al respecto fue un acomodo a partir de los promedios escolares. Sin embargo, esta clase de criterios suelen omitir importantes factores como el liderazgo de los participantes, su nivel de confianza con sus pares, sus habilidades sociales, entre muchos otros. Como una manera de acercarse a ese ámbito tan complejo de un modo práctico, se tomó en cuenta la opinión de las profesoras a través de una escala Likert, para colocar a ciertos líderes en ciertos equipos de trabajo, a partir de la percepción que habían generado en ellas a lo largo del año escolar. Este criterio no solo benefició el nivel de equilibrio en los equipos, sino integró la visión de la docente al trabajo de campo, convirtiendo su apreciación en una manera de ser activa en la investigación. Las variables de promedio durante el año escolar y el promedio de las pruebas estandarizadas, no se vieron afectados, ya que, si existía algún cambio, en términos de los indicadores descritos, eran equivalentes y se mantenía el equilibrio en cada equipo de trabajo.

Una de las dificultades más apremiantes que se presentaron en el trabajo de campo, fue la imposibilidad de grabar las sesiones en video. En las dos instituciones, tanto directivos como padres de familia se negaron a otorgar el permiso de grabación en video. Ante esta condición, se decidió usar dispositivos móviles para grabar audio, así como notas de campo y un número importante de hojas de trabajo o cuadernillos, en los que los alumnos lograban plasmar el nivel de sus representaciones. Tener un número importante de indicadores de evidencia, enriqueció el nivel de análisis de los resultados. Dicho de otro modo, aunque una grabación en video habría otorgado un mayor número de elementos de análisis, las notas de campo y los audios, así como la evidencia fotográfica de las representaciones de los participantes, compensaron gran parte del análisis de resultados y lo resignificaron.

Finalmente, uno de los puntos más polémicos de la tesis fue llevar a una actividad concreto el concepto de jerarquía de operaciones, en combinación con el pensamiento algebraico. La solución se halló en los dulces y las bolsas que lo contenían, pero estos no fueron los primeros acercamientos a una estrategia efectiva. Se pensó en usar canicas, figuras de distinto color y tamaño, barras de Singapur, palomitas, agua y vasos, entre otros menos significativos. Se decidió que los dulces en general tienen un mayor aprecio por parte de los participantes, despierta su interés, además, por ello servían como un excelente medio por el cual se podía promover la importancia de una estructura matemática, a partir de una necesidad práctica, que era repartir u organizar dulces.

8.6 Conclusión

A manera de conclusión, la psicología y las matemáticas son ciencias que, en conjunto, son la base del estudio de procesos intelectuales abstractos derivados de las relaciones de cantidad que un niño establece en sus primeros años de escolarización. Como psicólogos, nuestro interés radica en los procesos superiores y básicos que sustentan la base de la operatividad y el entendimiento matemático. Los tres grandes campos que se dedican al estudio matemático, es decir, la matemática educativa, la psicología y las propias matemáticas, con el innegable apoyo de la pedagogía, pueden convivir en un mismo escenario, enriqueciendo los alcances de nuestro interés genuino por mejorar la manera en la cual las matemáticas intervienen en nuestro bienestar general. El razonamiento matemático nos puede facilitar la resolución de problemas, al poder crear herramientas de síntesis, análisis y argumentación de eventos, lo cual debe ser accesible para la mayor parte posible de estudiantes en diversos contextos culturales.

Es evidente que las matemáticas potencian en las personas, particularmente en los niños, un modo diferente de concebir el mundo que hace pensar de manera diferente la realidad.

Bibliografía

Ameis, J. A. (2011). The Truth About PEMDAS: A hierarchy-of-operators triangle shapes students' conceptual understanding or the order of operations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *16* (7), 414-421.

Askey, R. (1999). The third mathematics education revolution. *Contemporary Issues in Mathematics Education, 36*, 95–107.

Bastable, V., y Schifter, D. (2007). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., … Stylianou, D. (2017). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5 – to 12-Years-Olds* (pp. 79-105) Springer.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (135–142). Bergen University College.

Blanton, M. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes Algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36* (5), 412-446.

Blanton, M. & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai y E. Knuth, (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education.* Springer-Velag, 71-86.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching Mathematics in grades 3-5. En R. Zbiek (Ed.), *Essential understanding series.* NCTM.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46* (1), 39-87.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-33). Springer.

Booth, L. R. (1989). A question of structure or a reaction to: “the early learning algebra: a structural perspective”. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, 4* (57-62). National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. R. (1999). Children’s difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12*, 20-32.

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Bagloev, J. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving*, *7*, 10-24.

Booth, J. L., & Koedinger, K. R. (2012). Are diagrams always helpful tools? Developmental and individual differences in the effect of presentation format on students’ solutions of algebra problems. *British Journal of Educational Psychology, 82* (3), 492–511.

Bourbaki, N. (1963). Essays on the History of Mathematics. IL.

Brizuela, B., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “Best Deal” problem. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Taylor & Francis Group & NCTM.

Bruner, J. S. (1984). Lenguaje. Alianza.

Cai, J. & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese student’s mathematical problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21* (4), 401-421.

Cai, J., Fong, S., Moyer, J. (2011). Developing Student's Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore. En J. Cai y E. Knuth (eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education.* Springer-Velag, 25-41.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking, *ZDM, 37* (1), 53-59.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2* (669-705). Information Age Publishing.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37* (2), 87-115.

Cole, M. (1996). *Cultural psychology: A once and future discipline*. Harvard University Press.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Cornoldi, D. L. C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship? *Mathematical cognition, 3* (2), 121-139.

Das, K. (2020). Realistic Mathematics & Vygotsky's Theories in Mathematics Education. *Shanlax International Journal of Education*, *9* (1), 104-108.

Davydov, V. V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education, 8,* 27-37.

Davydov, V. V. (1984). *Problems of developmental Instruction.* NCTM.

Davydov, V. V. (1990). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Editorial Pueblo y Educación.

Davydov, V. V. y Shuare, M. (1987*). La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS: Antología*. Editorial Progreso.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G., Savyelyeva, O. V., & Tabachnikova, N. L. (2001). *Mathematics: 3rd Grade*. Binghamton, NY: State University of New York.

DeVries, D. L., & Slavin, R. E. (1978). Teams-Games-Tournaments (TGT): Review of Ten Classroom Experiments. *Journal of research and development in education*, *12* (1), 28-38.

Doerr, H. M., Ärlebäck, J. B., & Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. En *Mathematical modelling and applications* (pp. 71-81). Springer.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. (Tesis Doctoral).

Dupree, K. M. (2016). Questioning the Order of Operations. *Mathematics teaching in the Middle School, 22* (3), 152-159.

Escobar, U. y Tirado, F. (2021). Pensamiento relacional en la escolarización de la jerarquía de operaciones y el álgebra temprana en primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24* (1), 9-34.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transformations from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 19-25.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist*, *34* (10), 906.

Forgasz, H., & Rivera, F. (2012). *Towards equity in mathematics education. Gender, Culture, and Diversity*. Springer.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *5*, 391-412.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing.

Galperin, P. Y. (1982). *Introducción a la psicología.* Editorial Pueblo y Educación.

Glidden, P. L. (2008). Prospective Elementary Teachers' Understanding of Order of Operations. *School Science and Mathematics, 108* (4), 130-137.

Gunnarsson, R. & Karlsson, A. (2014). Brackets and the structure sense. *Journal of School of Education and Communication, 25,* 1-9.

Gunnarsson, R., Hernell, B. & Sönnerhed, W. W. (2012). Useless brackets in arithmetic expressions with mixed operations. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (275-282). Taipei, Taiwan: PME, 354-359.

Gunnarsson, R. Sönnerhed, W. W. & Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations? *Educational Studies of Mathematics*, *92*, 91-105.

Harlen, W. (2007). Criteria for evaluating systems for student assessment. *Studies in Educational Evaluation, 33* (1), 15-28.

Headlam, C. (2013). *An investigation into children understanding of the order of operations*. (Tesis Doctoral).

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73* (8), 572-580.

Herscovics, D. & Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27* (1), 59-78.

Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching, 163,* 19-29.

Hewitt, D. (2010) *Approaching Arithmetic Thinking Algebraically ATM 2010*. Disponible en: http://www.atm.org.uk/journal/archive/mt163files/ATM-MT163-19-29.pdf (descargado el 26 de febrero del 2018).

Hoch, M. (2003). Structure sense. Presented at the *3rd Conference of the European Researchers in Mathematics Education*. Bellaria, Italy.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (49-56). Bergen, Norway.

Jacobs, J. E., & Paris, S. G. (1987). Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement, and instruction. *Educational psychologist*, 22(3-4), 255-278.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1986). Mainstreaming and cooperative learning strategies. *Exceptional children, 52* (6), 530-561.

Johnson, R. T., & Johnson, D. W. (2008). Active learning: Cooperation in the classroom. *The annual report of educational psychology in Japan*, *47*, 29-30.

Joseph, K. N. (2006). *College Students' Misconceptions of the Order of Operations.* (Tesis doctoral).

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26* (4), 683-710.

Kagan, S. (1988): *Cooperative Learning*, California, Resources for Teachers.

Kaput, J. J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebraying the K-12 curriculum.* Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* Routledge.

Karpov, Y. V. (2013). A way to implement the Neo-Vygotskian Theoretical Learning Approach in the Schools. *International Journal of Pedagogical Innovations, 1* (1), 25-35.

Kho, T. H. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. En *Proceedings of the Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI-SEAMS). Mathematical Education in the 1990's, 4*, (345-351). Singapore: Institute of Education.

Kieran, C. (1985). Constructing meaning for equations and equation-solving. En A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research, and practice in mathematical education* (pp. 243–248). Shell Center for Mathematical Education.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S. A. E. M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8* (1), 139-151.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on Early Algebraization: Perspectives for research and teaching. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue form multiple perspectives* (557-577). Springer.

Kieran, C. (2017). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5 – to 12-Years-Olds* (pp. 79-105). Springer.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). The transition from arithmetic to algebra. En T. D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (179-198). Macmillan Publishing Company.

Kieran, C., Pang, J. S., Ng, S. F., Schifter, D., & Steinweg, A. S. (2017). Topic Study Group 10: Teaching and learning of early algebra. En G. Kaiser (Ed.), *The Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Springer.

Knight, G. P. & Bohlmeyer, E. M. (1990). Cooperative learning and achievement: Methods for assessing causal mechanisms. En S. Sharan (Ed.), Cooperative learning - Theory and research (pp. 1-22). New York, NY: Praeger Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37* (4), 297-312.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education, 37* (4), 297-312.

Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V. S., & Miller, S. M. (2003). *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*. Cambridge University Press.

Kvale, S. (2006). Dominance through interviews and dialogues. *Qualitative Inquiry 12* (3), 480-500.

Lee, L. (2004). *An analysis of difficulties encountered in teaching Davydovs's mathematics curriculum to students in a US setting and measures found to be effective in addressing them*. (Tesis Doctoral).

Leontiev, A. N. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Ciencias del Hombre.

Leontiev, A. N. (1986). Sobre la formación de las capacidades. *Antología de la psicología pedagógica y de las edades*, 44-53.

Liebenberg, R., Sasman, M. & Olivier, A. (1999). From numerical equivalence to algebraic equivalence. *Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa, 2*, 173-183.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structural Sense: the relationship between algebraic and numerical context. *Educational Studies in Mathematics, 40* (2), 173-196.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (47-70). Kluwer Academic Publishers.

Luria, A. R. (1987). *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos*. Akal.

Maccini, P., & Ruhl, K. L. (2000). Effects of a graduated instructional sequence on the algebraic subtraction of integers by secondary students with learning disabilities. *Education& Treatment of Children*, *23*, 465–489.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Taylor & Francis Group & NCTM.

Meaney, T., Edmonds-Wathen, C., McMurchy-Pilkington, C., & Trinick, T. (2016). Distribution, recognition, and representation: Mathematics education and Indigenous students. En *Research in Mathematics Education in Australasia 2012-2015* (pp. 143-164). Springer

Miller, S. P., & Mercer, C. D. (1993). Using data to learn Concrete-Semiconcrete-Abstract instruction for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *8*, 89–96.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (Tesis doctoral).

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria, *PNA*, *3* (3), 135-156.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica: un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. *Actas del encuentro de Investigación en Educación Matemática*, 27-51.

Moxhay, P. (2008). Assessing the scientific concept of number in primary school children. *ISCAR*, *4 (2)*, 1-24.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal or prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence.* NCTM.

Novack, M. A., Congdon, E. L., Hemani-Lopez, N., & Goldin-Meadow, S. (2014). From action to abstraction: Using the hands to learn math. *Psychological Science*, *25* (4), 903-910.

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 93-104.

Papadopoulos, I. (2016). The rules for the order of operations: The case of an In-service teacher. En K. K. Krainer y N. Vondrová (eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of The European Society for Research in Mathematics Education.* CERME 9, 324-330.

Papadopoulos, I., & Gunnarsson, R. (2020). Exploring the way rational expressions trigger the use of “mental” brackets by primary school students. *Educational Studies in Mathematics*, *103* (2), 191-207.

Powell, S. (2015). The influence of Symbols and Equations on Understanding Mathematical Equivalence. *Intervention in School and Clinic, 50* (5), 266-272.

Reimers, F., & Chung, C. K. (2016). *Enseñanza y aprendizaje en el siglo XXI: metas, políticas educativas y currículo en seis países*. Fondo de Cultura Económica.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., & Loehr, A. M. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge: The impact of instructional content within a mathematics lesson. *British Journal of Educational Psychology*, 86 (4), 576–591.

Rosales, M. (2014). Proceso evaluativo: Evaluación sumativa, evaluación formativa y su impacto en la educación actual. Trabajo presentado en el Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires. Recuperado de www.oei.es/congreso2014/memoriactei/662

Schliemann, A. D., Carraher, D.W., y Brizuela, B.M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Paidós.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group or the Psychology of Mathematics Education and the 25th conference of Psychology of Mathematics Education North America,* (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Schmittau, J (2004). Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education, 19* (1), 19-43.

Schmittau, J. (2011). The Role of Theoretical Analysis in Developing Algebraic Thinking: A Vygotskian Perspective. En J. Cai y E. Knuth, ed., *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education.* Springer-Velag, 71-86.

Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of VV Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2015). Not a One-way Street: Bidirectional Relations between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review, 27,* 587-597.

Schraw, G., & Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary educational psychology, 19* (4), 460-475.

Schul, J. E. (2011). Revisiting an old friend: The practice and promise of cooperative learning for the twenty-first century. *The Social Studies*, *102* (2), 88-93.

Slavin, R. E., Madden, N. A., & Leavey, M. (1984). Effects of team assisted individualization on the mathematics achievement of academically handicapped and nonhandicapped students. *Journal of educational Psychology*, *76* (5), 813.

Slavin, R. E. (1989). Research on cooperative learning: An international perspective. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *33* (4), 231-243.

Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning: Theory, research, and practice*. (2a edición). Allyn & Bacon.

Slavin, R. E. (2008). Perspectives on evidence-based research in education—What works? Issues in synthesizing educational program evaluations. *Educational Researcher, 37* (1), 5-14.

Stevens, R. J., & Slavin, R. E. (1995). The cooperative elementary school: Effects on students' achievement, attitudes, and social relations. *American educational research journal*, *32* (2), 321-351.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory-based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational researcher*, *41* (5), 147-156.

Taff, J. (2017). Rethinking order of operations (or what is the matter with Dear Aunt Sally). *Mathematics Teacher*, *111* (2), 126-132.

Talizina, N. F. (1981). *The psychology of learning.* Moscú: Editorial Progreso.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 713-717.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las Matemáticas y la realidad*. Trillas.

Vygotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Grijalbo.

Vygotsky, L. S. (1996). *Pensamiento y lenguaje.* Paidós.

Warren, E., y Cooper, T. J. (2009). Developing Mathematics Understanding and Abstraction: The case of Equivalence in the Elementary Years. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (2), 76-95.

Webb, D. C., Van der Kooij, H., & Geist, M. R. (2011). Design research in the Netherlands: Introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *2* (1), 47-52.

Webb, N. M., & Palincsar, A. S. (1996). *Group processes in the classroom*. Prentice Hall International.

William, D. (2006). Formative assessment: Getting the focus right. *Educational Assessment*, *11*, 283-289.

Wittrock, M. C., & Peterson, P. L. (1990). *Students' thought processes* (Vol. 3). Macmillan Publishing Company.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*, 121-131.

Wu, H. (2007). *Order of Operations and other oddities in school mathematics*. Disponible en http://math.berkeley.edu/~wu/order5.pdf (descargado el 18 de enero del 2018).

Xin, Y. P., Liu, J., Jones, S. R., Tzur, R. & Si, L. (2016). A preliminary discourse analysis of constructivist-oriented Mathematics in a student with learning disabilities. *The Journal of Educational Research, 109* (4), 436-447.

Zorin, B. & Carver, D. (2015). Operation: Save Aunt Sally. *Mathematics Teaching in the Middle School*. National Council of Teachers of Mathematics, *20* (7), 438-443.

Anexos

ANEXO 1. MÉTODO GUÍA PARA EL AULA

FASE I. La constante y la igualdad por equivalencia.

Sesión 1

Objetivo: que los alumnos representen la relación consecutiva de cantidades de líquidos en una tabla de acuerdo con una constante.

Los alumnos podrán realizar comparaciones de líquidos, con el fin de encontrar una constante en el total del volumen a pesar de las diversas combinaciones posibles entre los vasos A y B. Podrán crear una regla, de tal modo que sea más sencillo el intercambio de líquidos. Al final, los alumnos también tendrán la oportunidad de representar las cantidades que intercambiaron en una tabla (los datos de la tabla se llenarán sin un patrón determinado, con el fin de evitar la seriación.

A	+	B	=	C CONSTANTE
10	+	0	=	10
9	+	1	=	10
8	+	2	=	10
7	+	3	=	10
6	+	4	=	10
5	+	5	=	10
4	+	6	=	10
3	+	7	=	10
2	+	8	=	10
1	+	9	=	10
0	+	10	=	10
1	+	9	=	10
2	+	8	=	10
3	+	7	=	10
4	+	6	=	10
5	+	5	=	10
6	+	4	=	10
7	+	3	=	10
8	+	2	=	10
9	+	1	=	10
10	+	0	=	10

A	+	B	=	C CONSTANTE
10	+	0	=	10
9	+	1	=	10
	+	2	=	10
7	+	3	=	10
6	+		=	10
	+	5	=	10
4	+		=	10
3	+	7	=	10
2	+	8	=	10
1	+		=	10
	+	10	=	10
1	+	9	=	10
2	+	8	=	10
	+	7	=	10
4	+	6	=	10
5	+	5	=	10
	+	4	=	10
7	+	3	=	10
8	+		=	10
9	+	1	=	10
10	+	0	=	10

Evaluación: la construcción de una regla para medir la cantidad de agua

Los datos introducidos en la tabla.

Responder las siguientes preguntas, con el fin de indagar la construcción de propuestas: ¿por qué las cantidades siempre nos dan 10? ¿Cómo le haríamos para representar todas las cantidades que puede haber en el vaso A y B sin escribirlas una por una?

Sesión 2

Objetivo: que los alumnos representen la relación de cantidades de cacahuates en una tabla de acuerdo con varias constantes.

Ahora los escolares trabajarán con otros referentes, para observar que las relaciones de cantidad se mantienen iguales. En esta experiencia se introducirán cacahuates para substituir las relaciones observadas en agua, volviendo a generar pares de relación y construyendo la tabla de representación. Ahora en este caso el número de cacahuates corresponderá a la literal A y B, ya no la cantidad dentro del recipiente A y B.

A	**+**	**B**	**=**	**Total**
10	+	5	=	15
	+	4	=	15
14	+		=	15
8	+		=	15
	+	7	=	15
12	+		=	15
	+	11	=	15
	+	6	=	15
13	+		=	15
	+	9	=	15

En el caso de los cacahuates, se hará que los niños operen las relaciones funcionales del 0 al 15 colocando los pares numéricos correspondientes en sus vasos, por ejemplo 2 cacahuates en el alumno “a” y 13 en el alumno “b”, o 6 en el alumno “a” y 9 en el alumno “b”, para provocar el trabajo en equipo (uno pone una cantidad en el vaso y el otro el número de cacahuates requeridos en el otro vaso) y tener los elementos para desarrollar la misma estructura de relaciones que se hizo con el agua.

Los alumnos podrán tendrán la oportunidad de observar qué pasa cuando los objetos disminuyen o aumentan de cantidad en un lado de una ecuación (¿se mantiene la igualdad de una suma cuando le quito a una de las partes cierta cantidad de objetos?) a través de la representación de dichas cantidades en una gráfica, con la ayuda de los ejes cartesianos (A para el eje de las ordenadas y B para el eje de las abscisas).

Evaluación: los números escritos en su cuaderno

Llenar la gráfica con las cantidades de cacahuates (primero en el pizarrón por equipo y después en su cuaderno individualmente)

Responder las siguientes preguntas: ¿Por qué siempre da 15 en el Total? ¿Cómo le haríamos para representar las cantidades de los vasos A y B sin tener que poner todos los números? ¿Por qué la línea que dibujamos es recta? ¿Puede ser curva?

<u>Sesión 3</u>

Objetivo: que los alumnos representen una igualdad a través de múltiples representaciones semiconcretas y variaciones en las posiciones de cantidades.

Los escolares tendrán la oportunidad de analizar igualdades, con el fin de establecer una relación entre las cantidades que hay en el lado derecho de una igualdad y el lado izquierdo. Primero, los estudiantes tendrán que expresar por equipos su opinión en relación con las siguientes operaciones: 4 + 8 = 12; 4 + 8 = 4 + 8; 12 = 4 + 8; 12 = 12.

Después, resolverán en equipos problemas con piedritas de pecera. En el recipiente A tendrán una cantidad, en el recipiente B otra. Algunos equipos tendrán la misma cantidad de piedritas, con lo cual podrán ser representadas dichas cantidades con una igualdad con palabras (piedritas del equipo A = piedritas del equipo B) y luego con cantidades (13 piedritas equipo A = 13 piedritas equipo B).

Preguntas a los niños: si le quitamos 2 cacahuates a los integrantes de un equipo, ¿se mantiene la igualdad? ¿Podemos usar el signo igual cuando no se mantiene la igualdad? ¿Cuándo debemos usar el signo igual? ¿Qué significa el signo igual?

Sesión 4

Objetivo: a) que los alumnos representen algebraica o generalmente la relación de cantidades de dibujos de animales en una ecuación b) provocar la reflexión acerca de la utilidad de aplicar literales a la cantidad de los objetos, con el objetivo de desligarlas de las cantidades (que A no signifique solo 1 o B dos – relación unívoca, sino que signifiquen un número cualquiera), es decir, provocar la reflexión cambiando a constantes cada vez mayores y reconocer la necesidad de la representación abstracta de la cantidad en su formulación algebraica.

Los alumnos podrán categorizar cantidades de objetos. El objetivo de la categorización es que transfieran las cantidades a cualquier cantidad, teniendo en cuenta las cualidades de los objetos.

CACAHUATES 9	+	CACAHUATES 6	=	15

Provocar la reflexión cambiando a constantes cada vez mayores y reconocer la necesidad de la representación abstracta de la cantidad en su formulación algebraica.

+

PERRITOS

6

GATITOS

8

= 14 mascotas

PERRITOS

7

+

GATITOS

4

= 11 mascotas

PECES

+

GALLINAS

50

= Mascotas

170

P + G = M

X + Y = Z

Preguntas a los niños: ¿Se pueden usar letras para representar cantidades? ¿Las letras pueden significar cualquier cantidad de objetos que nos podamos imaginar? ¿Cómo podrías representar la suma de dos diferentes cantidades de objetos sin números? ¿Qué es más fácil, poner todos los números que se te ocurran o poner letras para indicar cualquier número o sea todos los números?

Evaluación: a) cantidad de perros y gatos (por equipo) b) cantidad de peces y gallinas (por grupo) c) representación de una cantidad de un modo general.

A	+	B	=	C

A + B = C Vaso A + Vaso B = Total/Constante

A + B = C Cacahuates A + Cacahuates B = Total/Constante

A + B = C Perritos A + Gatitos B = Total/Constante

FASE II. El núcleo del razonamiento multiplicativo

Sesión 4

Objetivo: que los alumnos representen cantidades de cacahuates y bolsas en una tabla aleatoria.

Los alumnos podrán descubrir las incógnitas (“números encriptados o escondidos”), al interactuar con bolsas y CACAHUATES. La cantidad de bolsas representan un factor, la cantidad de CACAHUATES representan otro factor y el total de CACAHUATES dentro de cada bolsa representan el producto o total.

Problema: encontrar el número de CACAHUATES dentro de bolsas de plástico, teniendo en cuenta la cantidad de CACAHUATES dentro de una bolsa y la cantidad de bolsas. Cabe destacar que cada bolsa tendrá la misma cantidad de CACAHUATES.

B	**x**	**C**	**=**	**Total**
(1)	x	5	=	5
(2)	x	5	=	10
(3)	x	5	=	15
(4)	x	5	=	20
(5)	x	5	=	25
(6)	x	5	=	30
(7)	x	5	=	35
(8)	x	5	=	40
(9)	x	5	=	45
(10)	x	5	=	50

B	**x**	**C**	**=**	**Total**
(1)	x	2	=	2
(2)	x	2	=	4
(3)	x	2	=	6
(4)	x	2	=	8
(5)	x	2	=	10
(6)	x	2	=	12
(7)	x	2	=	14
(8)	x	2	=	16
(9)	x	2	=	18
(10)	x	2	=	20

B	**x**	**C**	**=**	**Total**
(5)	x	1	=	5
(5)	x	2	=	10
(5)	x	3	=	15
(5)	x	4	=	
(5)	x	5	=	25
(5)	x	6	=	
(5)	x	7	=	
(5)	x	8	=	40

Transferencia: representar y organizar la cantidad de bolsas y CACAHUATES en una tabla de datos (B x P = T).

B	**x**	**C**	**=**	**Total**
(1)	x	7	=	7
(2)	x	7	=	14
(3)	x	7	=	21
(4)	x	7	=	28
(5)	x	7	=	35
(6)	x	7	=	42
(7)	x	7	=	49
(8)	x	7	=	56

Sesión 5

Objetivo: que los alumnos representen cantidades de animales y casas en una tabla aleatoria.

PERRITOS 6	X	CASAS 8	=	48 perritos
GATITOS 7	X	CASAS 4	=	28 gatitos
G	X	**C**	=	A

B	**x**	**C**	**=**	**T**

Preguntas para los niños: ¿se pueden representar cantidades de objetos y bolsas, casas u otros contenedores sin números?

Sesión 6

Objetivo: que los alumnos representen con literales cantidades desconocidas de objetos en bolsas.

Los alumnos tenían signos a la mano, para representar cantidades muy variables o desconocidas. Con los signos, los alumnos pudieron representar la cantidad desconocida de dulces que tenían, así como la que faltaba por cada equipo.

FASE III. La jerarquía de operaciones: suma y multiplicación operando en una misma expresión.

Sesión 7

Objetivo: que los alumnos representen cantidades de cacahuates y bolsas en una tabla aleatoria.

Los alumnos podrán representar y organizar las cantidades de dos grupos de alimentos (cacahuates y panditas) en grupos de bolsas o en alimentos sueltos.

Problema: organizar las cantidades de bolsas y alimentos, con tal de poder encontrar un único resultado para cualquier combinación de datos (sin importar si la suma o la multiplicación se encuentran en primera o segunda posición). El paréntesis podrá ser utilizado como un recurso de agrupación, para distinguir de qué grupo de bolsas se está calculando el total.

Bolsas	x	**Cacahuates**	+	**cacahuates**	=
1		5		4	
2		5		3	
3		5		4	
Bolsas	x	**Panditas**	+	**Panditas**	=
1		3		5	
2		3		8	
3		3		2	

Cacahuates

4 + (1 x 5)

3 + (2 X 5)

4 + (3 x 5)

4 + (1 x 5) + 3 + (2 X 5) + 4 + (3 x 5)

Panditas

5 + (1 x 3)

(8 + 2 x 3)

5 + (1 x 3) + (8 + 2 x 3) + (2 + 3 x 3)

Sesión 8

Objetivo: que los alumnos representen cantidades de acuerdo con la aplicación de la jerarquía de operaciones, así como a través de la representación de cantidades abstractas utilizando literales.

Los alumnos podrán representar diversas cantidades de bolsas y alimentos. Una vez que puedan representar y resolver problemas de bolsas y alimentos, podrán intentar representar cantidades de un modo general utilizando literales.

OBJETO_____

5 + 5 x 5 + 4 + 9 x 2 + 4 + 8 x 3

OBJETO_____

7 + 6 x 3 + 8 + 2 x 5 + 5 + 4 x 4

A	+	B	X	C	=	T

ANEXO 2. TEST DE LA EVALUACIÓN SITUADA.

La situación reactiva se presenta iniciando con la siguiente pregunta:

¿Cuántos dulces le toca a cada niño?

Para resolver este problema se utiliza la siguiente ecuación:

a + b x c = w - w / y = z

Donde:

a= número de dulces sueltos
b= número de dulces en cada bolsa
c= número de bolsas con dulce
w= número de dulces en total

$$a+b\times c=w$$

$$\boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$\boxed{a} + \boxed{b} \times \boxed{c} = \boxed{w}$$

----

y= número de niños en el equipo
z= número de dulces que le tocan a cada niño

$$\frac{w}{y} = z$$

$$\frac{\boxed{w}}{\boxed{y}} = \boxed{z} \qquad \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

ANEXO 3. PRUEBAS DEL ANÁLISIS SEMÁNTICO.

Prueba de jerarquía de operaciones

En esta prueba se entrevista a cada uno de los niños participantes y se graba la sesión.

Primera pregunta.

Se empieza planteándole el siguiente problema: "3 + 5 x 4, es igual a":

a. 8 + 8 + 8 + 8

b. 3 + 5 + 5 + 5 + 5

c. 3 + 4 + 5

Una vez que el participante emite su respuesta, se le pregunta "por qué escogió esa opción" y se le pide que escriba su respuesta en su cuaderno (a, b, c).

Se continua con la segunda pregunta, sea la respuesta anterior correcta o errónea.

Segunda pregunta.

Se pregunta "6 x 4 + 2, es igual a":

a. 6 + 6 + 6+ 6 + 2

b. 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6

c. 2 + 4 + 6

Se procede de la misma manera descrita en la pregunta anterior.

Tercera pregunta.

Se le pregunta 4 + 5 x 3 + 6 x 2 + 7 es igual a:

a. 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7

b. 9 + 9 + 9 + 6 + 6 + 7

c. 7 + 2 + 5 + 4

De igual manera, se procede tal como en las dos primeras preguntas.

Una vez contestada la última pregunta, se regresa la atención a la primera pregunta, y se le cuestiona al alumno qué operación se realizó primero y por qué (ya sea suma o multiplicación su respuesta); de acuerdo con su respuesta, se le plantea lo siguiente: "qué pasaría con la igualdad si comenzáramos con la operación contraria a la que acabas de indicar que comenzarías primero, es decir, si el alumno responde que comenzaría con una suma, la pregunta sería qué pasaría si haces primero la multiplicación; si responde que comenzaría con la multiplicación, la cuestión sería qué pasaría si realizas primero la suma. Se aplica este mismo procedimiento con las siguientes dos preguntas.

Prueba de pensamiento algebraico

En esta prueba también se entrevista a cada niño participante y se graba la sesión.

Se presenta una pregunta y el alumno escribe su respuesta en su cuaderno, se le toma una fotografía, y se le pregunta la razón de su respuesta. Si la solución es correcta, se da por terminada la prueba. Si la respuesta no es correcta, se pasa al siguiente nivel, donde se le proporcionan elementos para facilitar la solución, siguiendo el principio de una prueba adaptativa.

Se comienza planteando el siguiente problema:

> ¿Cuántos alumnos hay en la escuela, si nos vistan niños de otra escuela?
>
> En una escuela que tiene varios salones, donde cada salón tiene el mismo número de alumnos.
>
> ¿Cómo representarías esta relación?

Si responde correctamente, se da por terminada la prueba; de lo contrario se procede con la siguiente pregunta.

> ---
>
> ¿Cuántos alumnos hay en la escuela, si nos vistan niños de otra escuela?
>
> En una escuela que tiene varios salones, donde cada salón tiene el mismo número de alumnos.
>
> ¿Cómo representarías esta relación?
>
> Para resolver este problema se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$\square + \square \times \square = \square$$

Si responde correctamente, se da por terminada la prueba; de lo contrario se procede con la siguiente pregunta.

En la escuela hay 6 salones, cada salón tiene 10 alumnos y vinieron de visita 5 niños.

Para resolver este problema se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$\boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

Donde:

y = número de niños que vinieron a la escuela de visita = **5**
z = número de niños en cada salón = **10**
t = número de salones = **6**
p = número de niños que están en la escuela =

¿Cómo representarías esta relación?

Si responde correctamente, se da por terminada la prueba; de lo contrario se procede con la siguiente pregunta.

En la escuela hay 6 salones, cada salón tiene 10 alumnos y vinieron de visita 5 niños.

Para resolver este problema se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$\boxed{y} + \boxed{z} \times \boxed{t} = \boxed{p}$$

Donde:

y = número de niños que vinieron a la escuela de visita = **5**
z = número de niños en cada salón = **10**
t = número de salones = **6**
p = número de niños que están en la escuela =

$$\boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

¿Cómo representarías esta relación?

Si responde correctamente, se da por terminada la prueba; de lo contrario se procede con la siguiente pregunta.

Para resolver este problema se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$\boxed{y} + \boxed{z} \times \boxed{t} = \boxed{p}$$

Donde:

y = número de niños que vinieron a la escuela de visita = **5**
z = número de niños en cada salón = **10**
t = número de salones = **6**
p = número de niños que están en la escuela

$$\boxed{5} + \boxed{10} \times \boxed{6} = \boxed{}$$

Si responde correctamente, se da por terminada la prueba; de lo contrario se procede con la siguiente pregunta.

Para resolver este problema se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$\boxed{y} + \boxed{z} \times \boxed{t} = \boxed{p}$$

Donde:

y = número de niños que vinieron a la escuela de visita = **5**
z = número de niños en cada salón = **10**
t = número de salones = **6**
p = número de niños que están en la escuela =

$$\boxed{\mathbf{10}} \times \boxed{\mathbf{6}} + \boxed{\mathbf{5}} = \boxed{}$$