UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

UN ANÁLISIS DE LA PARADOJA DE YABLO DESDE LA TEORÍA DE LA RECURSIÓN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

LIC. JESÚS EDUARDO GRANADOS GURROLA

TUTOR: DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ (FFyL-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO AGOSTO 2021

ESTA TESIS FUE ELABORADA CON EL APOYO DE UNA BECA NACIONAL CONACyT

Dedicado a la memoria de José Ricardo Gurrola Betancourt. Quisiera charlar contigo una vez más, tener un día más para escuchar tu voz, y cantar nuevamente los dos a dueto.

- So, I read in your profile that you like esoteric matters. Is it right?
- Yes, it is.
- I like them too
- What kind do you like?
- Semantic paradoxes analized in the language of arithmetics.
- Are you kidding?
- Yes and No.
Match cancelled.

– Granados, J.E. [@justcallmeM_ OK]. (2021, 18 de marzo).

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mis lectores, Axel Arturo Barceló Aspeitia, Karen González Fernández, Max Fernández de Castro y Mario Gómez Torrente, por sus valiosos comentarios a este trabajo. En especial, agradezco los comentarios del Dr. Gómez Torrente, realizados incluso antes de ser uno de mis lectores, y las recomendaciones bibliográficas del Dr. Barceló. Su apoyo me permitió repensar muchas de mis ideas y, sin duda, fue determinante en la realización de mi investigación.

Agradezco también a mi tutor, Cristian Gutiérrez, por todo el apoyo brindado y por su siempre presente y valiosa guía, sobre todo en la elaboración de este trabajo.

También me gustaría agradecer todo el apoyo de mi familia, sin el cual no podría haber realizado mis estudios de maestría.

Me gustaría agradecerle a mis amigos por el apoyo, las discusiones y el trabajo que hicimos en conjunto. En especial, a Cristina Flores, Abraham Olivetti, Raymundo Meza, Juan Manoel Sandoval Rios, Samuel Lomelí y Alejandro Vázquez del Mercado. Gracias a todos. Gracias, Cristina y Alejandro, por permitirme presentar avances de mi investigación en sus espacios de trabajo, fue realmente útil para mí.

Agradezco también a los miembros del proyecto PIFFyL 001 006 2019 "El lugar de la lógica en los estudios filosóficos", del cual fue miembro. Esta tesis se desarrollo dentro de dicho proyecto.

Agradezco al CONACyT por el apoyo que me proporcionó mediante una beca para realizar mis estudios de maestría dentro de su Programa de Becas Nacionales.

Índice general

Introducción

Se cuenta que Russell preguntó en una ocasión a Moore si siempre decía la verdad y que consideró la respuesta negativa de Moore como la única falsedad emitida por Moore. No hay duda de que nadie ha tenido un olfato más fino para las paradojas que Russell. Sin embargo, es obvio que no se percató de que si, como él pensaba, todas las otras proferencias de Moore eran verdaderas, la respuesta negativa de Moore no sólo era falsa, sino paradójica.)

Saul Kripke, *Un esbozo sobre una teoría de la verdad.*

La mayoría de las paradojas conocidas suelen ser atribuidas a fenómenos relacionados con la autorreferencia y la circularidad. Por ejemplo, la paradoja del mentiroso, la paradoja de Grelling, etc. En estos casos se considera que la paradoja surge, por lo menos en parte, debido a que las oraciones (o los adjetivos) se refieren a sí mismos. De tal suerte que para algunos autores la autorreferencia (o circularidad) es una condición necesaria para la existencia de paradojas. Sin embargo, Yablo (1993) presentó una paradoja que tenía la pretensión de emular a la paradoja del mentiroso sin recurrir a la autorreferencia. De haber logrado su propósito, habría mostrado que ni la autorreferencia ni la circularidad son condiciones necesarias para tener una paradoja.

Como tal, las preguntas que guiarán mi investigación son: "¿Cuáles son las condiciones necesarias para que se dé una paradoja *liar-like*?" y "¿la paradoja de Yablo es realmente un ejemplo de una?". Considero que es importante responder tal pregunta, porqué tanto en el contexto de las ciencias formales como de su filosofía, nos ayuda a identificar cuáles son los requisitos que se deben cumplir para que se dé una paradoja y así poder saber si al ausentarse estos podemos evitar que se den paradojas. De tal modo que podemos realizar teorías que no tengan dichas propiedades para evitar caer en paradojas. También es importante porque puede arrojar nuevos argumentos relevantes en las discusiones de si hay o no paradojas sin circularidad y si es la paradoja de Yablo una de ellas. Una última razón para considerar de importancia el responder esta pregunta es porque puede arrojar conexiones estructurales con otras paradojas similares a la del mentiroso.

En este texto me propongo demostrar que la llamada "Paradoja de Yablo" si recurre a la circularidad (e incluso es posible que recurra a la autorreferencia[1]). No pretendo que esto me lleve a mostrar o defender que no existen otras paradojas que no impliquen circularidad.

Con esto en mente el presente trabajo se dividirá en dos capítulos. El primero de ellos está dedicado a estudiar las características generales de la paradoja de Yablo y otras estructuras con propiedades similares, con el fin de analizar si estas características implican la circularidad. El segundo capítulo estará dedicado a clarificar la importancia de elementos semánticos dentro de la paradoja, así como mostrar que la paradoja de Yablo involucra cierto tipo de circularidad, valiéndose para ello, tanto de argumentación filosófica como de la metodología formal ofrecida por la teoría recursión clásica y los resultados presentes en el trabajo de William Lawvere sobre teoremas de punto fijo y diagonalización.

[1]Por el momento, no he podido ofrecer una caracterización precisa de estos dos fenómenos que me permita diferenciarlos, esto es un trabajo pendiente.

Capítulo 1

La paradoja de Yablo

So one often hears that the surest way of keeping a language paradox-free is to impose an absolute ban on all self-reference. 'This may be using a cannon against a fly,' it is said, 'but at least it stops the fly'. Except that it does not stop the fly: paradoxes like the Liar are possible in the complete absence of self-reference.

Stephen Yablo, *Paradox without Self-Reference.*

1.1. Introducción

En este capítulo se estudiará cuáles son las características estructurales que son propias a la paradoja de Yablo y construcciones similares (*estructuras y secuencias tipo Yablo*); en especial, cómo es que algunas de éstas devienen en paradojas. El objetivo del capítulo es establecer un análisis de las *estructuras tipo Yablo* y clarificar cuáles son las propiedades de éstas que en algunos casos nos llevan a caer en paradojas. Esto con el fin de poder analizar, más adelante, si dichas características implican o no alguna forma relevante de circularidad.

El capítulo se divide en dos secciones. Partiremos primero del análisis de lo que llamaremos *secuencias tipo Yablo*, dentro de las cuales se encuentra la propia paradoja del mismo nombre. El análisis ofrecido será una mezcla de razonamientos formales e informales. Aquí buscamos destacar que las *secuencias tipo Yablo* no necesariamente son paradojas y que su construcción depende de la estructura del conjunto de los números naturales con su orden usual. Este tipo de secuencias son presentadas por autores como

Roy T. Cook para estudiar la paradoja desde un punto de vista más general, pero como veremos existen estructuras aún más generales que pueden ser consideradas en este tipo de construcciones, de las cuales las *secuencias tipo Yablo* son sólo un subconjunto. Así, en la sección siguiente definiremos cuáles son las características más sobresalientes de este tipo de estructuras y, en específico, de aquellas que son paradójicas. Mostraremos que es suficiente construir las *estructuras tipo Yablo* a partir de un orden parcial sin elementos maximales. En la parte final de dicha sección se abordará qué características mínimas ha de tener una de estas estructuras para ser una *secuencia tipo Yablo*.

1.2. Construcciones tipo Yablo

Como ya he dicho, el objetivo de esta tesis es ofrecer un análisis de la paradoja de Yablo y mostrar que encierra circularidad. Pero antes de adentrarse a dicho análisis, considero importante presentar con un poco más de detalle la paradoja y algunas otras secuencias de oraciones que son estructuralmente similares. A dichas construcciones las llamaré *secuencias tipo Yablo*, siguiendo a Roy Cook (2017), pues dependen de la construcción de secuencias infinitas de oraciones tales que cada una de ellas afirma que todas o algunas de las siguientes oraciones tienen alguna propiedad. Como se verá más adelante, se pueden dar condiciones más generales para la construcción: bastará con que las oraciones formen una estructura parcialmente ordenada con ramas infinitas, sin elementos maximales y que cada oración refiera a todas o a algunas de las otras oraciones que están en el orden parcial.

Cabe aclarar que las *secuencias tipo Yablo* no sólo serán útiles en la construcción de paradojas, también nos permitirán construir oraciones con otras propiedades interesantes; por ejemplo, oraciones que son equivalentes a la oración G de Gödel.[1] En este sentido, las *secuencias tipo Yablo* nos permiten generar oraciones con propiedades interesantes, similares a aquellas que podemos generar mediante diagonalización o algún otro método usado para obtener oraciones autorreferenciales; por decirlo de otra forma, son mecanismos que nos permiten construir oraciones que implican que ellas mismas tienen cierta

[1] La oración G de Gödel es la oración que está involucrada en el primer teorema de incompleción de la aritmética y que, *grosso modo*, afirma que ella misma no es demostrable.

propiedad (verdad, demostrabilidad, etc.) y pretenden no ser circulares de ningún modo. Todo esto se clarificará más adelante. Pero primero presentaré algunas de las *secuencias tipo Yablo*.

1.2.1. Yablo clásica

La paradoja de Yablo como aparece en (Yablo,1993) se presenta de la siguiente forma. Considérese, en primer lugar, una secuencia denumerable infinita de enunciados, cada uno de ellos nombrado por una "S" indexada por un número natural; es decir, que los nombres de los enunciados conforman el siguiente conjunto:

$$(1)\quad \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Al nombrar los enunciados que conforman la secuencia de esta manera particular, se induce de manera automática una relación de orden heredada de los números naturales. Es decir, que los nombres de los enunciados forman una estructura bien ordenada isomorfa a la estructura de los naturales con su orden usual. La secuencia tiene la siguiente forma

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

Este orden es esencial en la construcción de la secuencia, pues cada enunciado afirma que todos los enunciados subsecuentes son falsos. Así la secuencia tendría la siguiente forma:

(S_1) $\forall \kappa > 1$, S_κ es falso,

(S_2) $\forall \kappa > 2$, S_κ es falso,

(S_3) $\forall \kappa > 3$, S_κ es falso,

$\ldots$

Ahora, en segundo lugar, podemos demostrar que la secuencia nos lleva a una contradicción. Supongamos ahora por reducción al absurdo que un S_n arbitrario es verdadero. Dado que S_n nos dice que $\forall \kappa > n,\ S_\kappa$ es falso tenemos que:

(a) S_{n+1} es falso y

(b) $\forall \kappa > n+1,\ S_\kappa$ es falso.

Por (b), lo que nos dice $Sn+1$ es de hecho el caso, de tal modo que contrario a lo que nos dice (a), tenemos:

(c) S_{n+1} es verdadero.[2]

lo que nos lleva a una contradicción. Así tenemos que, dado que tomamos un enunciado arbitrario, para cada enunciado S_n en la secuencia, éste es falso. Pero siendo este el caso, todos los enunciados subsecuentes a algún S_n arbitrario son falsos, lo que significa que S_n es verdadero después de todo, y así llegamos nuevamente a una contradicción.[3]

Hay que notar que la secuencia expuesta se sirve de un orden particular para presentar el razonamiento paradójico; a saber, el orden usual de los números naturales. Dicho orden es un buen orden, lo que implica que es un orden parcial. En este punto me gustaría llamar la atención sobre la siguiente pregunta: ¿Cada una de las oraciones S_n que conforman la secuencia tiene un significado independiente de la secuencia misma? Es decir, ¿una oración S_n tiene un significado independiente de su lugar en la secuencia?

Notemos que, por un lado, si la respuesta es negativa, entonces parece que el significado de la oración S_n depende, por lo menos parcialmente, de las oraciones que le anteceden y las que le son subsecuentes. De ser esto así, entonces parece que al hablar de otras oraciones en la secuencia, la oración también estaría hablando de sí misma. Esto por supuesto se tiene que desarrollar, pues en este momento sólo es una idea informal que quiero introducir. Por otro lado, si la respuesta es positiva, entonces tendríamos que ofrecer una explicación de cómo es que los elementos que conforman a la oración no dependen de la secuencia a la que pertenece S_n. Si consideramos que dos de los elementos de las oraciones de este tipo son los números naturales y su orden, entonces responder a esta pregunta también nos llevaría cuestionarnos si podemos dar cuenta de los números

[2]En este caso particular, podríamos decir que (c) es clásicamente equivalente a la afirmación "$S_n + 1$ no es falsa", esa presentación puede ser útil para establecer una comparación con la versión existencial de la paradoja.

[3]Es relevante aclarar que la contradicción sólo surge en el contexto de una semántica funcional bivaluada. Si nuestra semántica fuera distinta, no surgiría una contradicción de manera inmediata. Por ejemplo, si nuestra semántica fuese relacional, simplemente tendríamos oraciones que serían tanto verdaderas como falsas.

y su orden apelando a propiedades internas de éstos, o, si esto es imposible, defender que sólo puedo dar cuenta de estos objetos apelando a las relaciones externas que tienen con los otros objetos que componen el conjunto de los números naturales, lo que nos llevaría a defender una respuesta negativa a la pregunta.

Antes de profundizar en esta discusión considero pertinente mostrar otras *secuencias tipo Yablo* para enfatizar que, en todas ellas, se requiere apelar al orden usual de los naturales.

1.2.2. Construcción tipo Yablo equivalente

A diferencia del caso de la paradoja de Yablo el siguiente caso es una secuencia en la que todos los enunciados son verdaderos. Considérese de nueva cuenta el conjunto de nombres (1) y el orden inducido en ellos: $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Ahora cada enunciado de la secuencia afirma que hay un enunciado subsecuente tal que él y su sucesor son equivalentes (es decir, que tienen el mismo valor de verdad). Así la secuencia sería:

(S_1) $\exists \kappa > 1,\ S_\kappa$ y $S_{\kappa+1}$ son equivalentes,

(S_2) $\exists \kappa > 2,\ S_\kappa$ y $S_{\kappa+1}$ son equivalentes,

(S_3) $\exists \kappa > 3,\ S_\kappa$ y $S_{\kappa+1}$ son equivalentes,

$\ldots$

Una vez que tenemos la nueva secuencia tipo Yablo probemos que todos los enunciados que la componen son verdaderos. Sea S_n un enunciado cualquiera que pertenece a la secuencia, asumamos por reducción al absurdo que S_n es falso. Entonces, para cualquier κ donde $\kappa > n$, S_κ y $S_{\kappa+1}$ no son equivalentes; es decir, que uno será verdadero y el otro falso. Por lo que hay un enunciado S_p tal que $p > n$ y S_p es verdadero. Si esto es el caso, hay un $q > p$ tal que el enunciado S_q y su sucesor S_{q+1} son equivalentes, es decir, tienen el mismo valor de verdad. Dado que $q > p$ y $p > n$ hay un S_κ, a saber, S_q, tal que $\kappa > n$, S_κ y $S_{\kappa+1}$ son equivalentes, por lo que llegamos a una contradicción. Y dado que lo probamos de un S_n arbitrario, todos los enunciados de la secuencia son verdaderos. Además, esto no contradice lo dicho por los enunciados que forman la secuencia, dado que todos son equivalentes (pues todos tienen el mismo valor de verdad).

Notemos que, de nueva cuenta, se está recurriendo para la formulación de la *secuencia tipo Yablo* y para las pruebas sobre sus propiedades a la estructura de los números naturales, en especial, a su orden usual. Además, uno podría, en principio, cambiar el predicado de equivalencia por cualquier otro. De hecho si cambiamos el predicado de equivalencia por el de falsedad, podemos obtener otros resultados similares a la paradoja de Yablo.

1.2.3. Variante de Yablo con pares de oraciones

Como dijimos, la construcción original sugiere otras posibles construcciones. En este caso podemos obtener una variante de la paradoja de Yablo cambiando "ser equivalente" por "ser falso"; siempre partiendo del conjunto (1) de nombres. Así, consideremos la secuencia denumerable infinita de enunciados $S_1, S_2, S_3, \ldots$, de tal modo que cada enunciado afirma que hay un enunciado subsecuente tal que él y su sucesor son falsos. La secuencia tendría la siguiente forma:

(S_1) $\exists\kappa > 1,\ S_\kappa$ y $S_{\kappa+1}$ son falsos,

(S_2) $\exists\kappa > 2,\ S_\kappa$ y $S_{\kappa+1}$ son falsos,

(S_3) $\exists\kappa > 3,\ S_\kappa$ y $S_{\kappa+1}$ son falsos,

$\ldots$

Asumamos por *reductio* que un S_n arbitrario en la secuencia es falso. Por lo que para cualquier $\kappa > n$, S_κ y $S_{\kappa+1}$ son tales que por lo menos uno de ellos es verdadero. Sea $p > n$ tal que S_p es verdadero. Siguiendo esto, hay un $\kappa > p$ tal que S_κ y $S_\kappa + 1$ son falsos, pero como $p > n$, eso significa que hay un $\kappa > n$ tal que S_κ y $S_{\kappa+1}$ son falsos y eso nos lleva a una primera contradicción. Dado que S_n fue un enunciado arbitrario podemos decir que todos los enunciados de la secuencia son verdaderos.[4] Pero, a diferencia del caso "equivalente" esto entra en conflicto con lo afirmado por los enunciados que forman la secuencia. Pues, de cualquier S_n arbitrario decimos que éste es verdadero y dado que cualquier S_n nos dice que $\exists\kappa > n$, tal que, S_κ y $S_{\kappa+1}$ son falsos eso nos permite hacer la siguiente asunción.

[4]Podemos notar aquí las similitudes tanto con la construcción anterior como con la paradoja de Yablo en su versión clásica.

(a) Sea $o > n$, tal que, S_o y S_{o+1} son falsos.

(b) $\forall\kappa > n+1,\ S_\kappa$ es verdadero, pues S_n es cualquier enunciado de la secuencia.

De esto se sigue que $o > n$, tal que, S_o y S_{o+1} son verdaderos, lo que nos lleva a una contradicción con (a). Y así nuevamente caemos en una paradoja. Esta construcción sugiere que de cambiar los cuantificadores de la paradoja original de Yablo podemos llegar a un resultado similar, a una paradoja. Parece que lo esencial para generar la paradoja es poder apelar al orden usual de los naturales y al predicado de verdad. Otro elemento importante que está surgiendo de los análisis de las *secuencias tipo Yablo* es que al parecer todos los enunciados que las componen tienen siempre el mismo valor de verdad, por lo que son equivalentes por lo menos en un sentido débil. Esto puede deberse a que hasta aquí sólo hemos usado el predicado de verdad o algún otro predicado definido en términos de dicho predicado.[5]

1.2.4. Variante de Yablo con cuantificador existencial

Si nosotros cambiamos el cuantificador universal de la paradoja de Yablo en su versión original por el cuantificador existencial tenemos nuevamente una paradoja. Consideremos la secuencia denumerable infinita de enunciados: $S_1, S_2, S_3, \ldots$, de tal modo que cada enunciado afirma que hay un enunciado subsecuente tal que dicho enunciado es falso, de este modo la secuencia sería:

(S_1) $\exists\kappa > 1,\ S_\kappa$ es falso,

(S_2) $\exists\kappa > 2,\ S_\kappa$ es falso,

(S_3) $\exists\kappa > 3,\ S_\kappa$ es falso,

$\ldots$

Veamos que de nueva cuenta esto implica un razonamiento paradójico. Sea un S_n cualquiera. Asumamos por reducción al absurdo que S_n es falso, como S_n dice que $\exists\kappa > n$

[5]En el siguiente capítulo profundizaré en este punto y sostendré que las oraciones que pertenecen a una secuencia tipo Yablo tradicional (donde la propiedad atribuida es la verdad o la falsedad) no solamente son equivalentes respecto a su valor de verdad, sino que tienen el mismo contenido semántico.

tal que S_κ es falso, podemos inferir que para todo $\kappa > n$ S_κ es verdadero. Así, tenemos que:

(a) S_{n+1} es verdadero y

(b) $\forall \kappa > n+1,\ S_\kappa$ es verdadero.

Pero de ser (b) el caso, S_{n+1} tendría que ser falso. Lo que contradice (a), pues si (a) fuese el caso sería cierto que $\exists \kappa > n+1,\ S_\kappa$ es falso. Por lo que:

(c) S_{n+1} es falso,

teniendo así una contradicción, por lo que S_n es verdadera. Así tenemos que, dado que tomamos un enunciado arbitrario, para cada enunciado S_n de la secuencia es verdadero. Pero siendo esto el caso, todos los enunciados subsecuentes a algún S_n arbitrario son verdaderos, lo que significaría que S_n es falso después de todo, y así llegamos nuevamente a una contradicción. Podemos notar que existe una cierta dualidad y analogía con la prueba presentada en la sección 1.2.1.

1.3. Estructuras tipo Yablo

En esta sección quiero ofrecer una caracterización general de las *secuencias tipo Yablo*. En sentido estricto, más que generar secuencias, en un primer momento, generaremos *estructuras tipo Yablo*; para generar secuencias podemos agregar algunos requisitos extra, como se verá más adelante. Llamaré a este tipo de estructuras "estructuras tipo Yablo" pues me permitirán reformular el mismo tipo de razonamiento que da origen a la paradoja. En general para que tengamos una *estructura tipo Yablo* necesitamos de un orden parcial sin elementos maximales, $(P, <)$;[6] es decir que se cumplan las siguientes propiedades estructurales:

- Antirreflexividad: $\forall x \in P \neg x < x$

[6]Nótese que el conjunto de los números naturales con su orden usual cumple con estos requisitos, aunque tiene más propiedades. Dichas propiedades extra nos permitirán generar una gama más amplia de *estructuras tipo Yablo*, pero en este momento quiero caracterizar los requisitos mínimos para generar dichas estructuras.

- Transitividad: $\forall x, y, z \in P((x < y \land y < z) \supset x < z)$

- Sin elementos maximales: $\forall x \in P \exists y \in P x < y$

Definamos ahora el conjunto (2) de nombres para los enunciados de nuestra estructura.

$$(2) \quad \{S_n \mid n \in P\}$$

Ahora, podemos definir las oraciones en la estructura como sigue:

Para cada $n \in P$ tenemos que S_n: $Q\kappa > n$ S_κ tiene la propiedad φ, donde Q es un cuantificador y $\kappa \in P$.

El uso de este tipo de estructuras nos puede llevar a paradojas o no, esto depende tanto del cuantificador elegido como de la propiedad φ. Veamos un ejemplo.

1.3.1. Estructura tipo Yablo paradójica

Consideremos el caso en el que el cuantificador es el cuantificador universal y la propiedad φ es "es falsa". Así las oraciones de la estructura sería de la siguiente forma:

$$S_n : \forall \kappa > n \ S_\kappa \text{ es falsa.}$$

Esto genera una estructura de oraciones que termina siendo paradójica. Para mostrar esto pongamos atención en la siguiente prueba:

Supongamos que una S_n arbitraria es verdadera y sea m un elemento de P tal que $m > n$. Considerando que S_n es verdadera, tenemos que S_m es falsa. Pero esto mismo aplica para toda S_p tal que $p > m$. Así que tenemos:

a. S_m es falsa.

b. $\forall \kappa > m$ S_κ es falsa.

El problema es que dado b., tenemos que la oración S_m es verdadera, pues justo afirma que todas las oraciones que le siguen de acuerdo al orden son falsas. Así que tenemos:

c. S_m es verdadera!

Esta contradicción, implica que nuestra hipótesis es incorrecta así que tenemos que

S_n es falsa

Pero, dado que S_n era una oración arbitraria, tenemos que

$\forall n \in P \ S_n$ es falsa

Pero esto a su vez implica que todas las oraciones son verdaderas, pues cada una de ellas afirma que todas las oraciones que le sigue de acuerdo con el orden parcial son falsas. Así:

$\forall n \in P \ S_n$ es verdadera !

Lo que nos lleva finalmente a la paradoja.

Nótese que al menos en lo que respecta $(P, <)$, tiene que ser un orden parcial sin elementos maximales, pues si asumimos que existe un $n \in P$ tal que no hay un $m > n$, S_n sería verdadera por vacuidad pues se cumpliría que $\forall \kappa > m \ S_\kappa$ es falsa.

Si bien esto nos permite reconstruir una paradoja tipo Yablo, no nos permite recuperar todas las variantes que se presentaron más arriba. Pues éstas dependen de que la estructura de los números naturales es un buen orden, lo que implica, entre otras cosas, que es un orden discreto. Para recuperar esos casos, podemos pedir que la estructura $\langle P, < \rangle$ sea un buen orden isomorfo con un ordinal límite. No pedí este requisito desde un principio pues quiero resaltar que la paradojicidad de ciertas estructuras depende, en términos estructurales, sólo de que el orden sea parcial sin elementos maximales. Esto será relevante más adelante pues justo lo que se requiere es que se pueda generar una secuencia (o rama del orden parcial) infinita que no tenga un último elemento.[7]

Más arriba dije que no es necesario que una *estructura tipo Yablo* nos lleve a un razonamiento paradójico y es por esto que quiero presentar el siguientes caso, uno en el que tendremos una estructura en la que todas las oraciones serán verdaderas.

1.3.2. Estructura tipo Yablo equivalente

En esta subsección presentaré una *estructura tipo Yablo* semejante a la presentada 1.2.2., pero recurriendo a un orden parcial sin elementos maximales. Sea, $\langle P, < \rangle$, un orden parcial

[7]Esto permite generar una secuencia de oraciones tales que su verdad depende del valor de verdad de las oraciones posteriores, de tal suerte que el proceso para determinar el valor de verdad de una oración dada no pueda concluirse en un tiempo finito. Esto se analizará con mayor detalle en el segundo capítulo.

sin elementos maximales. Consideremos ahora la *estructura tipo Yablo* en la que cada enunciado afirma que existe un enunciado posterior a partir del cual todos los enunciados son equivalentes. Así las oraciones de la estructura serían de la siguiente forma:

$$S_n : \exists m > n(\forall \kappa \geq m\ S_\kappa \text{ es verdadero} \vee \forall \kappa \geq m\ S_\kappa \text{ es falso})$$

Veamos ahora que la estructura es tal que todos los enunciados que la conforman son verdaderos. Sea S_n un enunciado arbitrario. Supongamos por reducción al absurdo que S_n es falso. Entonces para todo $m > n$ existe un $p > m$ tal que S_m y S_p tienen diferente valor de verdad. Sea un S_m con $m > n$ arbitrario. Entonces existe un $p > m$ tal que S_m y S_p tienen diferente valor de verdad. Dado que nuestra semántica es bivaluada, entonces por lo menos uno de los dos enunciados es verdadero. Lo que nos daría dos posibilidades:

(a) S_m es verdadero y, por lo tanto, $\exists x > m(\forall z \geq x\ S_z \text{ es verdadero} \vee \forall z \geq x\ S_z \text{ es falso})$

(b) S_p es verdadero y, por lo tanto, $\exists x > p(\forall z \geq x\ S_z \text{ es verdadero} \vee \forall z \geq x\ S_z \text{ es falso})$

Sin importar cual de las dos posibilidades sea correcta y considerando que $m > n$ y $p > n$ (por transitividad), tenemos que:

(c) $\exists x > n(\forall z \geq x\ S_z \text{ es verdadero} \vee \forall z \geq x\ S_z \text{ es falso})$

Lo que implica que después de todo S_n es verdadero, lo que nos lleva a una contradicción. Esto prueba que S_n es verdadero. Pero como era un enunciado arbitrario, tenemos que para todo $n \in P$ S_n es verdadero. Además, esto es compatible con lo dicho por cada uno de los enunciados. Así, tenemos una *estructura tipo Yablo* en la que todos sus enunciados son verdaderos.

1.3.3. Estructura de las secuencias tipo Yablo

Para concluir con esta sección, solamente me gustaría presentar la forma general de las *secuencias tipo Yablo*, que serán un subconjunto de las *estructuras analizadas en las secciones anteriores*, con la única diferencia de que en este caso se tratará de secuencias bien definidas y con ello presentar un ejemplo especial de *secuencias tipo Yablo*. Para recuperar la idea de secuencia apelaré a la noción de número ordinal, esto me permitirá recuperar las condiciones mínimas para una *estructura tipo Yablo* y al mismo tiempo hablar de secuencias (estructuras lineales, discretas y con elemento inicial).

Sea α un ordinal límite. Considérese ahora, la estructura $\langle \alpha, \in \rangle$. Ahora construyamos el siguiente conjunto de nombres:

$$(3)\quad \{S_\lambda \mid \lambda \in \alpha\}$$

Una *secuencia tipo Yablo* generada por este conjunto de nombres es una secuencia de oraciones nombradas por (3) y que tienen la siguiente forma: S_n: $Q\kappa > n$ S_κ tiene la propiedad φ, donde Q es un cuantificador y $\kappa \in \alpha$.

Como puede verse, los ejemplos originales se adecuan bien a esta definición, considerando el caso particular en el que $\alpha = \omega$, el ordinal del conjunto de los números naturales. Las secuencias construidas a partir del ordinal ω tienen además la ventaja de poder recuperar en ellas procesos recursivos muy sencillos, aquellos que pueden ser realizados en una cantidad finita de pasos. Esta característica será importante para mi análisis en el próximo capítulo, pues sostendré que para poder predicar la verdad de una oración de manera adecuada, debe existir un procedimiento que en una cantidad finita de pasos nos permita determinar dicho valor de verdad.

1.3.4. ¿Una secuencia tipo Yablo paradójica?

En esta subsección presentaré una *secuencia tipo Yablo* muy particular. Lo particular de esta secuencia estriba en que podemos demostrar que todos los enunciados que la componen son equivalentes, esto es que tienen el mismo valor de verdad. Pero no parece haber manera de determinar si todos los enunciados son verdaderos o son falsos.

Lo primero que haré será considerar el orden usual de los números naturales, $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Ahora definiré la secuencia tal que cada oración sostiene que todas las oraciones que le siguen son verdaderas. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que:

$$S_n : \forall x > nS_x \text{ es verdadera.}$$

Lo primero que debemos notar es que si todas las oraciones de la estructura fuesen verdaderas, entonces para un S_n arbitrario todas las oraciones que le siguen serían verdaderas, que es justo lo que ella afirma. Lo segundo es que si todas las oraciones de la estructura fuesen falsas, entonces dada una S_n arbitraria sucedería que no todas las oraciones que le siguen son verdaderas, lo que la haría falsa, que es justo lo que supusimos. En otras palabras, la secuencia es compatible con que todas sus oraciones sean verdaderas o todas sean falsas. Pero además sucede que todas las oraciones de la secuencia son equivalentes, tienen el mismo valor de verdad. Cosa que probaré a continuación.

Supongamos por reducción al absurdo que existen S_n y S_m con $n < m$ tales que no son equivalentes. Esto nos arroja dos casos:

Caso 1: S_n es verdadera y S_m es falsa. Dado que S_n es verdadera y $n < m$ tenemos que S_m debe ser verdadera, lo que nos lleva a una contradicción.

Caso 2: S_n es falsa y S_m es verdadera. Sea FS el conjunto de todas las oraciones falsas de la secuencia. Observemos que se cumple lo siguiente para este conjunto:

(1) $FS \neq \emptyset$, pues $S_n \in FS$.

(2) FS está acotado superiormente, pues dado que S_m es verdadero, y por un razonamiento similar al del caso 1, todas las oraciones que le siguen a S_m son verdaderas.

(3) FS tiene un elemento maximal, dado que es acotado superiormente y los índices se generaron a partir de los número naturales con su orden usual.

Sea S_p el elemento maximal de FS. Dado que $S_p \in FS$, S_p es falsa. Esto implica que existe una q mayor que p y menor que m tal que S_q es falsa. Pero dado que S_q es falsa, tenemos que $S_q \in FS$ lo que contradice la maximalidad de S_p. Lo que concluye la prueba.

Tenemos entonces que o bien todas las oraciones de la secuencia son verdaderas o todas son falsas. Pero, ¿qué nos podría ayudar a decidir sobre su valor de verdad? No parece que tengamos muchas opciones, pues la verdad de cada enunciado depende de la verdad de los otros enunciados en la estructura. Si los otros enunciados son verdaderos, la oración será verdadera; pero si no, será falsa. Parece que nos encontramos en un *impasse*. El caso recién presentado es muy similar al de la oración que afirma su propia verdad.

$$V : \text{La oración } V \text{ es verdadera.}$$

La oración V es una oración autorreferente que no lleva a una paradoja directamente, pero sí implica un problema para la noción de verdad. El problema es que no parece existir un hecho objetivo que determine su valor de verdad. Si suponemos que la oración es verdadera, lo será. Pero lo mismo pasa si suponemos que es falsa.

Esto apunta a un hecho más profundo sobre la noción de verdad; a saber, la necesidad de poder determinar el valor de verdad de una oración dada mediante un proceso efectivo. Parece ser que lo necesario al hablar de la verdad de una oración es que exista un mecanismo que en una cantidad finita de pasos nos permita determinar su valor de verdad, ya sea porque llegamos a un hecho que la determina o ya sea mediante un razonamiento como en el caso de la *estructura tipo Yablo equivalente* analizado con anterioridad. El procedimiento efectivo nos permitirá fundamentar la verdad de la oración. Este será uno de los temas centrales del segundo capítulo. Ello no significa que debe ser posible averiguar si una oración verdadera o falsa es verdadera o falsa mediante un proceso efectivo, pues existen oraciones que en principio no existe un método efectivo para determinar si ellas o su negación son verdaderas (e.g.: la oración del continúo), sino que en aquellos casos en los que sea posible hacerlo para poder determinar el valor de verdad de una oración es preciso que lleguemos en una cantidad finita de pasos a un punto en el que el predicado de verdad no aparezca. Abordaré esto con más detalles en el siguiente capítulo.

exista

1.4. Conclusiones

Recapitulando, en este capítulo hemos analizado con detenimiento las *estructuras tipo Yablo* que se forman a partir del orden de un ordinal límite. Las estructuras generadas recurriendo al orden usual de los números naturales ocupan un lugar especial, pues nos permiten hablar de procesos computables en una cantidad finita de tiempo. Así mismo, estudiamos estas estructuras desde un punto de vista más general, como parte de las estructuras generadas a partir de un orden parcial, $\langle P, < \rangle$. Partimos de un conjunto (2) de nombres para los enunciados de nuestra estructura:

$$(2) \quad \{S_n \mid n \in P\}$$

Y se cumple para cualquier $n \in P$ que dado un cuantificador Q y una propiedad φ, $Q\kappa > n \quad \varphi(S_\kappa)$. Respecto a cómo se vincula esto último con la paradojicidad de una estructura habíamos dicho que dependiendo del cuantificador, y de la propiedad elegida, podemos llegar a una paradoja o no. Se recurre a un orden parcial para evitar la circularidad de la relación y se pide que no existan elementos maximales para que en algunos casos no tengamos verdad por vacuidad. Además, recurrir a secuencias generadas por ordinales nos permite definir o apelar a estructuras más complejas en la construcción de nuestra oraciones.

Nuestro análisis también apuntó hacia un hecho en torno a la noción de verdad, y es que para usar adecuadamente dicha noción con la finalidad de analizar una oración es necesario que exista un mecanismo que en una cantidad finita de pasos nos permita determinar su valor de verdad (un proceso efectivo) de tal suerte que haya un paso en que el predicado de verdad no aparezca.

Capítulo 2

Paradojas, autorreferencia y circularidad

To put the discussion into context, think, first, of the standard Liar para- dox, 'This sentence is not true'. Writing T as the truth predicate, then the Liar sentence is one, t, such that $t = `-iTt'$. The fact that 't' occurs on both sides of the equation makes it a fixed point of a certain kind, and, in this context, codes the self-reference. In this particular case, the existence of the fixed point is obvious, due to the use of the demonstrative 'This sentence', but in general one often has to work quite hard to show the existence of fixed points.

Graham Priest, *Yablo's Paradox.*

2.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a clarificar, en la medida de lo posible, los elementos más importantes en la construcción de la paradoja de Yablo y su relevancia dentro de la misma. Como veremos, la noción central es la noción de verdad. Y sólo en un segundo plano aparecen nociones como la de orden y la de autorreferencia. Es por eso que buena parte del capítulo está dedicado a la noción de verdad, su definibilidad y algunos de los diferentes tratamientos que ha recibido durante los últimos cien años. Así mismo, hacia el final del capítulo se trabajan las nociones de orden y autorreferencia.

Los objetivos principales del capítulo son tres. El primero es clarificar cómo es que el análisis de la noción de verdad hecho desde la teoría de la recursión resuelve la paradoja del mentiroso. La solución, *grosso modo* consiste en demostrar que la noción de verdad no es definible en ningún lenguaje de una teoría consistente, recursivamente axiomatizable y tan fuerte como para reconstruir las nociones básicas de la aritmética. Así, desde este punto de vista, la manera de solucionar la paradoja del mentiroso consiste en disolverla. Se mostrará que no es posible formularla con rigor desde la teoría de la recursión, justo porque no existe un predicado de verdad bien definido y de aplicación universal.

El segundo objetivo es mostrar que las *secuencias tipo Yablo* son tales que no pueden expresar un enunciado a menos de que se consideren en el contexto de la estructura de la que forman parte. Por decir de otro modo, una oración de la paradoja de Yablo por sí misma no expresa un contenido completo.

El tercer objetivo consiste en demostrar que la paradoja de Yablo sí implica circularidad. Para lograrlo, se recurrirá a los teoremas de Lawvere sobre puntos fijos.

El capítulo se dividirá en siete secciones. Una dedicada a la clarificación de la noción de paradoja a partir de la cual se va a trabajar. La segunda dedicada al estudio de la noción de verdad desde la teoría de la recursión y a la presentación de algunos elementos esenciales de las teorías de Tarski y Kripke. La tercera corresponderá al análisis de la paradoja de Yablo realizado por Roy Cook. Las siguientes dos secciones estarán dedicadas a clarificar cómo es que la autorreferencia no es el elemento más importante en la formulación de las paradojas estudiadas y cómo es que las *secuencias tipo Yablo* siguen siendo autorreferentes. En la última sección se exploran a detalle los resultados formales que permiten justificar mi propuesta. Usando la maquinaria desarrollada por Lawvere mostraré que la paradoja de Yablo es una paradoja que se sirve de la existencia de puntos fijos para la verdad y por ello puede ser considerada una paradoja de circularidad.

2.2. ¿Qué es una paradoja?

Responder a la pregunta que titula esta sección nos permitirá clarificar en qué sentido la paradoja de Yablo es problemática, pero además nos permitirá clarificar por qué es importante enfrentarla y dar cuenta de ella. Existen diferentes formas de dar cuenta de una paradoja, por ejemplo: resolverla, mostrar que la conclusión que obtenemos a partir de ella no es tan problemática después de todo; disolverla, mostrar que uno de los elementos que nos permiten formularla tiene un error.

Empezaré revisando algunas nociones presentes en la literatura. Algo que podremos ver de manera inmediata es que no hay un acuerdo claro entre los especialistas sobre qué es una paradoja, pues algunos le dan al concepto una mayor amplitud. También siguiendo a Roy Cook incluiré en mi búsqueda algunos términos relacionados como lo son el de aporía y antinomia. Podemos comenzar nuestra revisión por lo dicho por el diccionario de filosofía de Cambridge:

> [A paradox is] a seemingly sound piece of reasoning based on seemingly true assumptions that leads to a contradiction (or other obviously false conclusion). A paradox reveals that either the principles of reasoning or the assumptions on which it is based are faulty. It is said to be solved when the mistaken principles or assumptions are clearly identified and rejected. The philosophical interest in paradoxes arises from the fact that they sometimes reveal fundamentally mistaken assumptions or erroneous reasoning techniques (Etchemendy, 2019, p.755).

De acuerdo con esta definición, una paradoja necesariamente tiene que implicar una contradicción o una conclusión claramente falsa y de antemano supone que esto se debe a un error en el razonamiento o en alguno de los supuestos de los que parte el razonamiento. Algunos autores como Atocha Aliseda parten de una idea similar, pero la acotan a campos específicos del conocimiento humano. En sus palabras:

> Las paradojas se caracterizan por revelar alguna dificultad seria en nuestro entendimiento intuitivo de nociones básicas de semántica y teoría de conjuntos [...] Las paradojas semánticas y lógicas comparten dos aspectos: hacen uso de la autorreferencia y derivan una contradicción (Aliseda, Llera, 2008, p.p. 53, 55).

El problema central con aceptar una definición como la antes propuesta es que restringe el campo de estudio de las paradojas y, de antemano, decide el tema de discusión central de esta investigación, pues presupone que un razonamiento paradójico requiere de un mecanismo que permita la autorreferencia. En otras palabras, la definición misma supone que la autorreferencia es condición necesaria para la paradojicidad. Esto es comprensible, considerando que el conjunto de paradojas estudiado por la autora sólo incluye paradojas de la autorreferencia, pero esto más que un rasgo constitutivo podría ser una coincidencia. En particular, si Yablo tiene razón y su paradoja no es circular, la autorreferencia no será condición necesaria para la paradojicidad. Con todo algo que es más que rescatable de esta propuesta es que pone énfasis en los conceptos y las nociones intuitivas que se utilizan en la construcción del razonamiento problemático. De acuerdo con la autora, muchas veces, tal vez siempre, las paradojas son provocadas por un problema en nuestro entendimiento de las nociones básicas de las que partimos. Hasta aquí tenemos que las paradojas son razonamientos con conclusiones problemáticas, generalmente contradictorias, tales que involucran problemas relacionados con nuestro entendimiento de nociones o conceptos básicos de la disciplina en la que se formula el razonamiento. Y esto último es lo que nos mostraría la relevancia (o parte de ella) del estudio de las paradojas, nos ayuda a la comprención de las nociones y conceptos básicos de nuestra teoría de fondo. Esto parece ir en sintonía con la presentación que Roy Cook hace de las paradojas en su libro dedicado al estudio de la paradoja de Yablo:

> [A] paradox is a particular type of argument, one that ends with an unacceptable conclusion of some sort. One of the main tasks of the chapters to follow is to convince the reader that paradoxes are not only interesting puzzles but also constitute real problems regarding our understanding of central and important concepts – problems that need to be addressed and solved (Cook, 2013, p.3).

> A paradox (or aporia) is a type of argument. In particular, a paradox is an argument that:
>
> (a) Begins with premises that seem uncontroversially true.
>
> (b) Proceeds via reasoning that seems uncontroversially valid.
>
> (c) Arrives at a conclusion that is a contradiction, is false, or is otherwise absurd, inappropriate, or unacceptable.

Aquí quiero destacar que en las condiciones (a) y (b) se recurre a que hay una "apariencia de" verdad o de validez incontrovertible, lo que no implica que de hecho las premisas sean verdaderas y los pasos del razonamiento sean válidos, sólo se dice que deben parecerlo. Ahora bien, la condición (c) nos dice que la conclusión es contradictoria, falsa, absurda, inapropiada o inaceptable. El problema con algunos de estos conceptos es que requieren de otros elementos para poder ser aplicados. Consideremos, por ejemplo, la afirmación "X es inaceptable", dicha oración no expresa una idea completa, salvo que podamos decir bajo qué parámetros estamos trabajando, es decir, qué conjunto de principios hacen que una afirmación sea o no "aceptable". Supongamos que la afirmación es "hay oraciones que son tanto verdaderas como falsas", esta oración sería *inaceptable* desde el punto de vista de la lógica clásica y su semántica estándar, pero no lo sería desde el punto de vista de una teoría dialeteísta.[1] Esto último es lo que se destaca en la definición propuesta por

[1]Una teoría dialeteísta es justo aquella que sostiene que existen contradicciones verdaderas, lo que implica que hay oraciones que son verdaderas y falsas al mismo tiempo. Así, no sólo la afirmación sería aceptable desde su punto de vista, sino que sería algo que es obviamente verdadero.

Peña y Ausín:

> Se suele entender como paradoja, no algo precisamente contradictorio, sino más bien algo que va contra ciertas expectativas que tenemos en un determinado tipo de razonamiento o que teniendo una demostración convincente contradice principios que consideramos correctos (Peña y Ausín, 2011, p. 442).

La razón de tomar este camino e incluir adjetivos para la conclusión como *inaceptable*, *absurda*, *inapropiada* u otros semejantes, parece ser la intención de incluir algunos casos de paradojas que en principio no tienen una conclusión contradictoria o que no implican una contradicción. Sin embargo, por lo antes dicho, parece que podríamos considerar que en esos casos sí hay una contradicción, pero ésta será no con uno de los elementos que aparecen de manera explícita en el razonamiento, sino con algún conjunto de principios normativos o de intuiciones que determinan qué es lo que es aceptable, apropiado o correcto.

> Las paradojas son resultados contrarios a la opinión común que a primera vista no parecían problemáticos, pero que, con un razonamiento adecuado nos llevan a una contradicción [...] Son argumentos que nos llevan a una contradicción con alguna suposición que inocentemente parecía correcta y clara a la intuición. [...] Si un razonamiento impecable conduce a contradecir una intuición particular que se tiene sobre algo, lo que probablemente estará mal es la intuición particular [...] Así pues, las paradojas son inferencias correctas en una teoría, pero que chocan fuertemente con nuestra intuición o sentido común (Amor Montaño, 2008, p. 80).

De acuerdo con Amor, casi siempre el análisis de una paradoja nos llevará al rechazo de las intuiciones previas o de los principios problemáticos de los que partimos, pero esto no es del todo claro. Algunos autores podrían considerar que otra opción perfectamente legítima sería cambiar nuestros estándares de prueba y preservar las intuiciones de las que partimos. Por ejemplo, si consideramos las llamadas paradojas conjuntistas, una primera opción de enfrentarlas, la visión estándar, consiste en rechazar principios como el axioma de comprensión, este camino fue el que se tomo en la creación de sistemas axiomáticos como ZFC. Pero existe trabajo muy serio y con desarrollos importantes que parte del cambio de lógica y de la permanencia del axioma de comprensión. Llamaré al primer de tipo de solución, la metodología clásica de la resolución de paradojas, en tanto busca mantener la lógica clásica y elimina o redefine conceptos y nociones que considera problemáticas. Esta será la metodología de análisis que seguiré para la paradoja de Yablo. Aclaro que esto no quiere decir que crea que otras metodologías sean inadecuadas o inferiores, mi visión en este punto es pluralista, creo que cada uno de los análisis posibles nos permitirá mostrar diferentes elementos para comprender a profundidad las paradojas.

A modo de resumen puedo dar la siguiente definición, que será la usada en adelante.

> **Definición de paradoja:** Una paradoja es un conjunto de oraciones que mediante un razonamiento aceptable (válido) nos lleva a concluir algo que resulta contradictorio o inaceptable a nivel de aquellas intuiciones o principios que consideramos conceptualmente correctos. Cabe aclarar que no necesariamente dentro de las paradojas hay una contradicción formal explícita o interna entre aquellos enunciados que la conforman; sino que ésta se da principalmente respecto a nuestras intuiciones, ya sea sobre el mundo o sobre las nociones y conceptos de nuestras teorías, pero siguiendo a Amor Montaño, esto normalmente es señal de que es necesario hacer una revisión de dichas intuiciones para su resolución, y no necesariamente del razonamiento involucrado.

Si bien está definición me parece correcta, todavía es necesario hacer algunas acotación para el estudio particular de la paradoja de Yablo. Esto debido a que nuestra definición de paradoja es demasiado amplia.

La mayoría de las paradojas lógicas conocidas suelen ser atribuidas a fenómenos relacionados con la autorreferencia y la circularidad (*e. g.* la paradoja del mentiroso, la paradoja de Grelling, la paradoja de Richard, etc.). En estos casos se considera que la paradoja surge, por lo menos en parte, debido a que las oraciones (o los adjetivos) se refieren a sí mismos. De tal suerte que para algunos autores la autorreferencia (o circularidad) es una condición necesaria para la existencia de paradojas genuinas. Este punto es el que está en juego en la paradoja de Yablo. Pero, además, la paradoja de Yablo es especial en un segundo sentido y es que pertenece a las paradoja llamadas del tipo mentiroso (*liar-like*).

2.2.1. Paradojas *Liar-Like*

Las paradojas *liar-like* son aquellas en las que se obtienen oraciones tales que son verdaderas si y sólo si son falsas. Ejemplos muy conocidos son la paradoja del cretense y la paradoja clásica del mentiroso, pero existe muchos más. Como ya puede verse, la paradoja de Yablo es una de ellas, pues al final del razonamiento obtenemos que cada una de las oraciones que componen la secuencia son verdaderas si y sólo si son falsas. Así que considero relevante presentar este tipo de paradojas con un poco más de detalle.

Decimos que una paradoja es *Liar-Like* sii:

A. Se dan en lenguajes que contienen un predicado de verdad.

B. Involucran una negación.

C. Implican una contradicción.

Llamaremos paradojas *Liar-like clásicas* a las paradojas que cumplen todos los puntos antes mencionados y además, una vez son formalizadas, cumplen con ser circulares. Ejemplo de esto es la oración del mentiroso:

Esta oración no es verdadera

Otra forma de ver el objetivo del artículo de Yablo, es que su paradoja muestra (o pretende mostrar) que hay paradojas (en particular, la paradoja expuesta en el artículo) que son Liar-Like pero no son Liar-Like clásicas.

2.3. Paradojas y el predicado de verdad

Como ya se menciona en la sección anterior el tipo de paradojas que se están estudiando en este trabajo, las paradojas *liar-like*, involucran lenguajes con un predicado de verdad, por lo que tendremos que poner un poco más de atención a la forma en la que podemos trabajar con dicho predicado. Es por esto que presentaré parte de los trabajos de dos de los filósofos más relevantes en el área de lógica en el siglo XX, a saber, Alfred Tarski y Saul Kripke. Pero para ello tendré que presentar algunos elementos teóricos previos.

2.3.1. Un poco de teoría de la recursión

Para continuar con nuestro trabajo del análisis de la noción verdad es necesario acercarnos a algunas nociones de teoría de la recursión. La teoría de la recursión es una teoría que pretende dar un tratamiento matemático a la noción de procedimiento efectivo o de procedimiento mecánico. Un procedimiento efectivo es un procedimiento que puede ser llevado a cabo paso por paso siguiendo una regla, que determina, dado un estado de cosas, cuál debería ser el estado de cosas que le sigue; en otras palabras, un procedimiento mecánico o algorítmico.

Si bien para muchos la mejor recuperación matemática de la idea de procedimiento mecánico o efectivo se da mediante el trabajo de Alan Turing, la teoría de la recursión recupera esta noción con una precisión notable. La idea central detrás de la teoría de la recursión consiste en definir una serie de funciones básicas sobre el conjunto de los números naturales, funciones que por su naturaleza se consideran efectivamente calculables y, partiendo de ellas, definir un conjunto de nuevas funciones, a partir de mecanismos que preserven la cualidad de ser efectivamente calculables. De tal suerte que esta naturaleza mecánica o algorítmica se preserve para aquellas funciones construidas a partir de las funciones básicas mediante estos mecanismos bien definidos. Las funciones básicas o iniciales son tres:

1. **La función cero:** Esta función va de los naturales a los naturales y para cada valor de entrada, su valor de salida es 0.

$$zero(x) = 0$$

2. **La función sucesor:** Es la función cuyo valor de salida para cualquier número natural es el siguiente número natural.

$$succ(x) = \text{ uno más que } x$$

3. **Las funciones proyección:** La función de n lugares hasta la posición i, donde $0 \leq i \leq (n-1)$, que toma n argumentos y arroja como resultado de aplicar la función el i-ésimo argumento (contando desde 0).

$$P_i^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i$$

Como puede verse estas funciones son tales que dado un valor de entrada para ellas, se puede calcular de manera mecánica cuál será el valor de salida. Son funciones para las que existe un procedimiento efectivo para calcularlas. Para construir funciones más complejas usaremos los siguientes mecanismos, mismos que buscan preservar la propiedad de ser efectivamente calculables que tienen las funciones básicas.

1. **Composición:** Sean f una función de m-lugares y g_0, g_1, ..., g_{m-1} funciones de n-lugares, entonces la composición de f con g_0, g_1, ..., g_{m-1} es una función h de n-lugares tal que:

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, g_{m-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

2. **Recursión primitiva:** Sean f una función de n-lugares y g una función de $(n+2)$-lugares. La función h definida por recursión primitiva a partir de f y g es una función de $(n+1)$-lugares tal que:

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}, y+1) = g(x_0, \ldots, x_{n-1}, y, h(x_0, \ldots, x_{n-1}, y))$$

3. **Minimización:** Si f es una función $(n+1)$-lugares tal que para cada conjunto de números naturales $x_0, \ldots, x_{n-1}$ existe siempre un mínimo número y tal que

$f(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) = 0$, entonces la función definida por minimización a partir de f es una función h de n-lugares tal que:

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \text{el mínimo } y \text{ tal que } f(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) = 0$$

Se dice que una función es *recursiva* cuando puede ser definida a partir de las funciones básicas y de los tres mecanismos de construcción de nuevas funciones, si además no se recurre a la función minimización, entonces se le llama a la función *recursiva primitiva.*

Estos mecanismos permite definir no sólo a las funciones recursivas, sino que también se puede hablar de *relaciones recursivas*. En este caso decimos que una relación R es *recursiva (primitiva)* si y sólo si la función característica de R es recursiva (primitiva).[2]

Uno podría pensar que el conjunto de funciones y relaciones que pueden ser definidas a partir de estos elementos es muy básico; sin embargo, el conjunto es bastante amplio, e incluso puede abarcar a las funciones representables de las teorías aritméticas más sencillas, por ejemplo la aritmética de Robinson (Q) o la aritmética de Peano (PA). Además, ese conjunto de funciones coincide con las funciones que son Turing-computables.

Incluso se puede demostrar que todas las funciones recursivas son computables (en un sentido intuitivo), pero el regreso es una conjetura dado que la noción de computabilidad (intuitiva) no es del todo precisa. A esta ultima afirmación se le conoce como la tesis Church-Turing. Así, si nosotros podemos demostrar que una función es recursiva, podemos demostrar que se puede calcular de manera mecánica, en una serie finita de pasos.

Como dijimos, la recursividad se aplica tanto a funciones como a relaciones y un caso particular de estas últimas sería las relaciones de un lugar, que en lógica relacionamos con conjuntos de objetos (su interpretación). Es por esto que podemos hablar de conjuntos recursivos. Decir que un conjunto de números naturales es recursivo implica que existe un mecanismo o un procedimiento efectivo para determinar si un número pertenece o no a dicho conjunto. En otras palabras, los conjuntos recursivos son de una naturaleza tal que tienen asociado un procedimiento que en una cantidad finita de pasos nos permite determinar si dado un número natural cualquiera este número pertenece o no al conjunto dado.

Ahora bien, cuando trabajamos desde una teoría formal de los números naturales, por ejemplo la aritmética de Peano o la de Robinson, podemos preguntarnos si dicha teoría tiene o no el poder para expresar, describir o trabajar con ciertas funciones definidas

[2]Dada una relación R de n-lugares, su función característica es una función X_R de n-lugares tal que para cualesquiera $k_0, \ldots, k_{n-1}$ sucede que

$$X_R(k_0, \ldots, k_{n-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } R(k_0, \ldots, k_{n-1}), \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

sobre los naturales. Es perfectamente posible que yo tenga una teoría muy incompleta que no permita recuperar todo lo que sé (informalmente) sobre funciones. Y es por esto que se apela a la noción de representabilidad.

Función representable: Dada una teoría T decimos que una función f de n argumentos es representable en T sii existe una fórmula con $n + 1$ variables libres de T, $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, tal que para cada secuencia de números naturales $k_1, \ldots, k_n, m$, si $f(k_1, \ldots, k_n) = m$, entonces:

(a) $T \vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{m})$

(b) $T \vdash \forall y\ (\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, y) \rightarrow \overline{m} = y)$[3]

Que una función sea representable en una teoría nos permite asegurar que podemos estudiarla con toda la precisión necesaria desde la teoría misma. Esto también se aplica a relaciones y conjuntos de números.

Relación representable: Dada una teoría T decimos que una relación R de n argumentos es representable en T sii existe una fórmula con n variables libres de T, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, tal que para cada secuencia de números naturales $k_1, \ldots, k_n$ sucede que:

(a) Si $R(k_1, \ldots, kn)$, entonces $T \vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$

(b) Si no $R(k_1, \ldots, kn)$, entonces $T \vdash \neg\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$

La introducción de la noción de representabilidad en una teoría nos lleva a preguntarnos si las teorías para la aritmética que usamos recuperan todas las funciones y relaciones que son recursivas, si éstas son representables o si existen funciones representables que no son recursivas. La respuesta a estos planteamientos depende de qué sistema consideremos, pero sabemos que en sistemas como la aritmética de Robinson y la de Peano, la relación entre recursividad y representabilidad es muy estrecha. Veamos el siguiente resultado:

Resultado: Dada una función f definida sobre los números naturales, f es recursiva sii es representable en la aritmética de Robinson (en la aritmética de Peano).

Esto implica un hecho sorprendente y es que en nuestras teorías, las funciones de las que podemos hablar y representar en nuestras teorías son justo las recursivas, que son efectivamente calculables (si la tesis Church-Turing es verdadera, entonces las funciones representables en Q y PA son exactamente las efectivamente calculables). Este resultado, por sí mismo ya es impresionante, pero aún falta mostrar que esto nos permitirá hablar de las propiedades mismas de la teoría y para ello recurriremos a un mecanismo que nos permitirá codificar las oraciones de la teoría con números, este procedimiento se conoce como gödelización.

[3] Aquí puede verse que la representabilidad de una función presupone su definibilidad.

La gödelización es un mecanismo de codificación en el que se establece una función que va de las expresiones de un lenguaje formal dado, en nuestro caso el de la aritmética, al conjunto de los números naturales. Esto se hace considerando que existe una cantidad finita de símbolos en el lenguaje y que una expresión es o no una fórmula dependiendo únicamente del orden en que dichos símbolos aparezcan. Presentar de esta forma el proceso de codificación nos permite además que el cálculo del número asociado a una expresión sea mecánico (recursivo). Así, la gödelización nos permitirá asignar de manera mecánica a cada expresión un número natural. Y además, podemos invertir el proceso y dado un número natural, determinar si es el número de una expresión del lenguaje y, en caso de que sí, determinar cuál es exactamente dicha expresión. El número natural asociado a una expresión se conoce como su número de Gödel.

Esto nos permite tomar conjuntos de expresiones y asociarles el conjunto de sus números de Gödel, que no sería otra cosa que un conjunto de números naturales. Pero como acabo de decir, dado un conjunto de números naturales nos podemos preguntar si es recursivo, o equivalentemente, si es representable en PA. En caso de que el conjunto de números de Gödel que corresponde con un conjunto de expresiones dado sea recursivo, entonces también podemos decir que ser ese tipo de expresión es representable en PA. Esto es justo lo que nos permitirá hablar de la posibilidad de un predicado de verdad, en el marco de la teoría de la recursión. Esto se debe a que, si consideramos el conjuntos de las oraciones de una teoría que son verdaderas, podemos preguntarnos si es que el conjunto de sus números de Gödel es o no representable. En caso de que sí, tenemos la garantía de que desde la teoría misma podemos tener una fórmula $T(x)$ con x como única variable libre tal que sería satisfecha por todos y sólo los números de Gödel que corresponden a oraciones verdaderas. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, dicho conjunto no es recursivo y, por ello, no es representable.

Con todo, existen muchos conjuntos de expresiones que sí son representables. Ejemplos de esto son, entre muchos otros, el conjunto de las fórmulas, de los axiomas, de las secuencias de fórmulas, de las secuencias de fórmulas que son pruebas del sistema y de los pares ordenados de números tal que el primero es el número de Gödel de una prueba para un fórmula tal que el segundo número del par ordenado es su número de Gödel.[4] Esto último permite construir una fórmula que será satisfecha por todos y sólo los números de Gödel de fórmulas que son teoremas. Esto último no implica que el conjunto de los números de Gödel de los teoremas sea representable, pues no existe un procedimiento efectivo para determinar en una cantidad finita de pasos si dado un número cualquiera, este es o no un elemento del conjunto de los números de Gödel de los teoremas. Esto se debe a que la fórmula que define al conjunto sólo afirma que existe un número que es el

[4]Esto es posible porque PA es una teoría recursivamente axiomatizable.

número de Gödel de una demostración para la fórmula, pero no dice nada sobre cómo obtenerla.

Ahora bien, si hemos encontrado una función que permite hablar de propiedades de otras fórmulas, de referirse a ellas, ¿será que una fórmula puede hablar de ella misma? ¿Será posible que esta función sea tal que tenga un punto fijo?[5] Por más sorprendente que esto pueda parecer dichos puntos fijos existen. Para demostrar esto se recurre a un método conocido como diagonalización, aunque existen otros posibles, lo que nos permite generar puntos fijos y obtener así oraciones que expresen que ellas mismas tienen o no cierta propiedad, con la única condición de que dicha propiedad sea definible (incluso si no es representable). De hecho esto puede expresarse de manera general en el siguiente teorema:

Teorema Diagonal o del Punto Fijo: Para toda teoría T en la cual todas las funciones recursivas puedan ser representables, se cumple que para cualquier fórmula $\varphi(x)$ con x como única variable libre existe una fórmula ψ tal que:

$$T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner),$$

donde $\ulcorner \psi \urcorner$ refiere al numeral (el término del lenguaje) del número de Gödel de la fórmula ψ. Así, el teorema diagonal nos afirma que para cada fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje con x como única variable libre existe una fórmula ψ que es equivalente a la afirmación de que ella misma tiene la propiedad definida por la fórmula $\varphi(x)$.

Un caso particular de este teorema nos permite construir la famosa oración de Gödel, que afirma de ella misma que no es demostrable. Para ver esto, sólo tenemos que notar que el conjunto de las fórmulas demostrables es definible, es decir, que existe una fórmula $Dem(x)$ del lenguaje de PA que es satisfecha por todos y sólo los números de Gödel de las fórmulas que son teoremas. Considerando esto y que nuestro lenguaje incluye la negación podemos observar que el teorema nos garantiza que existe una oración G_{PA} tal que:

$$PA \vdash G_{PA} \leftrightarrow \neg Dem(\ulcorner G_{PA} \urcorner)$$

Una oración que afirma de ella misma que no es demostrable en PA.[6] La siguiente subsección estará dedicada a presentar el estudio que Alfred Tarski realizó de la paradoja del mentiroso usando este aparato teórico.

[5] Un punto fijo para una función $f : A \to A$ es un objeto $a \in A$ tal que $f(a) = a$.

[6] Para poder obtener de este resultado el teorema de incompleción de la aritmética es necesario suponer que la teoría es consistente. Así, las condiciones para que una teoría pueda tener esta clase de resultado es que sea consistente, recursivamente axiomatizable y que pueda representar todas las funciones recursivas. Esto permite generalizar el resultado de incompleción a todas las teorías con estas propiedades.

2.3.2. La aproximación tarskiana

Como ya se adelantó la verdad no es ni representable ni definible en sistemas consistentes tan fuertes como PA. Esto quiere decir que la verdad no puede ser definida en estos sistemas, no existe un predicado de verdad. Esto es conocido como el teorema de indefinibilidad de la verdad de Tarski. Este resultado es limitativo, ya que muestra que ninguna teoría consistente, recursivamente axiomatizable y capaz de representar todas las funciones recursivas puede definir un predicado de verdad para ella misma. Lo que implica que el conjunto de los números de Gödel de las oraciones verdaderas de la teoría no es recursivo y, por ello mismo, no es representable. No hay manera de generar un procedimiento recursivo que en una cantidad finita de pasos nos permita determinar si una fórmula arbitraria es verdadera o falsa. La demostración de este resuelto es la siguiente.

Asúmase el siguiente conjunto de números de Gödel.

True=$\{$ $x|$ x es el número de Gödel de una oración verdadera en el modelo estándar de la aritmética$\}$

(1) Supongamos que True es representable, es decir, que existe una fórmula $Tr(x)$ con x como única variable libre .t.

   (I) Si φ es verdadera, entonces $T \vdash Tr(\ulcorner\varphi\urcorner)$ y

   (II) Si φ es falsa, entonces $T \vdash \neg Tr(\ulcorner\varphi\urcorner)$

(2) Supongamos además que tenemos todos los esquema T para las oraciones del lenguaje.

(3) Dado que $Tr(x)$ es una fórmula con x como única variable libre, su negación también es una fórmula con x como única variable libre, así que, podemos aplicar el teorema del punto fijo. Tenemos así que existe una L $.t.$

$$T \vdash L \leftrightarrow \neg Tr(\ulcorner L\urcorner)$$

(4) Supongamos que L es verdadera. Entonces, dado que $Tr(x)$ representa al conjunto $True$, tenemos que

$$T \vdash Tr(\ulcorner L\urcorner)$$

(5) Dado que tenemos los esquemas T, de (4) podemos obtener que

$$T \vdash L$$

(6) Pero, por (3) y (4), tendríamos que

$$T \vdash \neg L$$

(7) Y por (5) y (6), tendríamos una contradicción. Por lo que tenemos que L no es verdadera.

(8) Pero de (7) y (1), tenemos que

$$T \vdash \neg Tr(\ulcorner L \urcorner)$$

(9) De (8) y (2) tenemos que

$$T \vdash \neg L$$

(10) Pero de (8) y (3) tenemos que

$$T \vdash L$$

(11) De (9) y (10) tenemos una contradicción. Así que podemos concluir que si **T** es consistente, $True$ no es representable.

Esto mostraría que la paradoja del mentiroso no puede ser formulada en un lenguaje como el antes descrito y representa una solución de la paradoja.

2.3.3. Algunas notas sobre la verdad en Kripke

En 1975, Saul Kripke presentó un artículo titulado "Esbozo de una teoría de la verdad", en el que ofrece reflexiones en torno a la posibilidad de una teoría de la verdad después de los resultados ofrecidos por Tarski. Una de las primeras cosas que menciona Kripke es que cualquier teoría de la verdad debe hacer frente a la paradoja del mentiroso.

> Desde que Pilatos preguntó: «¿Qué es la verdad?» (San Juan, XVIII, 38) la búsqueda subsecuente de una respuesta correcta se ha visto inhibida por otro problema que, como es bien sabido, surge también en el contexto del Nuevo Testamento. Si, como supone el autor de la Epístola a Tito (Tito 1, 12), un profeta cretense, «incluso un profeta de ellos mismos», afirma que «los cretenses son siempre mentirosos» y si «este testimonio es verdadero» con respecto a todas las demás proferencias cretenses, parece entonces que las palabras del profeta cretense son verdaderas si y sólo si son falsas. Cualquier tratamiento del concepto de verdad tiene que evitar esta paradoja. (Kripke, 1997, p. 110)

La manera en la que Kripke presenta la paradoja no es casual, pues una de las cosas que quiere mostrar es que los mecanismos de autorreferencia no tienen que ser tan directos como se podría pensar, incluso en algunas ocasiones pueden depender de cuestiones empíricas. La autorreferencia no siempre es evidente.

> Las versiones de la paradoja del Mentiroso que usan predicados empíricos señalan ya un aspecto importante del problema: muchas de nuestras afirmaciones ordinarias sobre la verdad y la falsedad, probablemente la mayoría de ellas, son susceptibles de exhibir rasgos paradójicos cuando los hechos empíricos son extremadamente desfavorables.(Kripke, 1997, p. 111)

En este sentido, lo que muestran Gödel y Tarski con su trabajo es que los mecanismos de autorreferencia pueden presentarse de manera puramente sintáctica, pero no que la autorreferencia se deba presentar necesariamente bajo este formato.

Para enfrentar los razonamientos paradójicos que involucran el predicado de verdad, Kripke propone la noción de fundamento (*grounding*). La idea detrás de la noción es sencilla: Si una oración φ_1 afirma que alguna otra oración φ_2 es verdadera, la verdad de φ_1 dependerá de la verdad de φ_2; es posible, a su vez que φ_2 afirme que otra oración φ_3 es verdadera y el proceso se repita una y otra vez; si en algún momento una oración φ_n no contiene el predicado de verdad, es tal que su verdad no depende de la verdad de otra oración, entonces se dice que las oraciones de la secuencia están fundadas, de otra manera se dice que no están fundadas.

Si bien uno esperaría que la propiedad de ser una oración fundada sea definible en términos intrínsecos (propiedades sintácticas o semánticas de la oración), esto no es así. Pues como lo muestra el ejemplo presentado más arriba, muchas veces que una oración esté o no fundada depende de hechos empíricos (por ejemplo, que el profeta sea cretense).

La propuesta de Kripke consiste en separse del tratamiento de Tarski para la noción de verdad apelando a una jerarquía de lenguajes tales que cada uno tiene un predicado de verdad que se aplica al nivel anterior, esto por considerar, probablemente con razón, que el tratamiento es un tanto artificial y poco fiel al uso intuitivo de la noción de verdad. Además, la visión tarskiana no resuelve el problema de la fundación de la oraciones.

Notesé que hasta aquí no se ha presentado una definición exacta de fundamentación, sólo se han esbozado los principios en los que dicha noción debe basarse. La propuesta formal de Kripke parte de la idea de que algunas oraciones como las del mentiroso o la oración V son tales que, a pesar de tener un significado, no representan un enunciado. En sus palabras:

> Una oración como (1) [una oración autorreferente por cuestiones empíricas] es siempre significativa, pero bajo distintas circunstancias puede no «hacer un

enunciado» o no «expresar una proposición».(Kripke, 1997, p. 123)

Para presentar formalmente su propuesta, Kripke analiza los predicados del lenguaje de una manera no ortodoxa. Sea D un dominio de interpretación, a cada predicado $P(x)$ se le asocia un par ordenado $\langle s_1, s_2 \rangle$, donde s_1 y s_2 son subconjuntos de D, el primero será la extensión del predicado (aquellos objetos que lo satisfacen) y el segundo será su antiextensión (los objetos que no lo satisfacen). Hay que notar que no es necesario que s_2 sea el complemento relativo de s_1, esto implica que la asignación será tal que no para todo objeto de D se cumple que satisface o no el predicado. Además, propone cambiar la lógica por una lógica trivaluada como la lógica fuerte de Kleene, lo que le permite incluir un tercer valor de verdad, indeterminado; mismo que aplicará a las oraciones tales que no estén fundadas. Este movimiento le permite definir un predicado de verdad, aunque de manera parcial, en tanto no todas las aplicaciones del predicado son calificables como verdaderas o falsas, y esto en un momento posterior le permitará definir formalmente la noción de fundación.

Si bien el desarrollo que ofrece es muy interesante y útil por sí mismo, no será objeto de estudio en esta tesis. Esto debido a que la propuesta misma pide que se realice un cambio de lógica. Sin embargo, algunas de las ideas centrales de la propuesta nos serán de gran utilidad, en especial:

(a) La autorreferencia no es algo que se pueda caracterizar en términos puramente intrínsecos. En muchos casos la autorreferencia de una oración dependerá de hechos empíricos. Esto puede aportar información sobre la paradoja de Yablo y es que el hecho de que aunque en su sintaxis no se muestra explícitamente una autorreferencia, esto no quiere decir que ésta no exista.

(b) La noción de verdad no parecer ser algo que se pueda definir de manera precisa para todos los casos, algo que ya nos había adelantado Tarski. Lo destacable del trabajo de Kripke es que pretende hacer este trabajo de manera progresiva.

(c) Las oraciones que resultan problemáticas y que pueden generar paradojas son aquellas en las que aparece el predicado de verdad, pero no están fundadas. Por decirlo de otra forma, en los casos paradójicos se hace un uso *ilegítimo* del predicado de verdad.

2.4. El análisis de Cook

Roy T. Cook es uno de los filósofos que más ha trabajado en torno a la paradoja de Yablo y, si bien no tomaré el mismo camino que él en mi análisis, considero importante reconstruir su postura y explicar por qué no optaré por una propuesta similar a la suya.

Cook sostiene que la paradoja original es circular, pero también cree que se puede desarrollar una versión modificada que no es ni circular ni implica procesos autorreferenciales de ningún tipo. Él propone la siguiente reconstrucción de la paradoja de Yablo como un acercamiento más formal a la misma, pues desde su punto de vista los razonamientos antes presentados son demasiado informales. Propone así construirla en el marco de la aritmética de Peano (o una teoría en la que la aritmética pueda ser interpretada) de primer orden (o en una más fuerte) que contiene un predicado de verdad $Tr(x)$. En pocas palabras, propone reconstruir la paradoja usando teoría de la recursión. Parte de una aritmetización del lenguaje, en la que usaremos $\ulcorner \Phi \urcorner$ como el numeral del número de Gödel de una fórmula (u otra forma apropiada para nombrar). Además de los axiomas de la aritmética, la teoría contiene todas las instancias del *esquema-Tr de Tarski para cualquier oración ϕ*:

$$T(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi^7$$

Para presentar una versión de la paradoja en este marco necesitamos hacer algunas consideraciones extra e introducir un poco más de maquinaria técnica. Primero pongamos atención en un resultado que nos servirá más adelante, el *lema de diagonalización*, el cual afirma que para cada predicado unario $\Phi(x)$ hay una oración ψ tal que:

$$\psi \leftrightarrow \Phi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

Sea ahora $\Delta(x, y)$ la función (recursiva) que toma el número de Gödel de un predicado unario $\phi(x)$ y un número n (estándar)[8] cualquiera como argumentos y arroja el número de Gödel de la fórmula obtenida al remplazar todas las ocurrencias libres de "x" en $\Phi(x)$ con el numeral canónico de n así:

$$\Delta(\ulcorner \Phi(x) \urcorner, n) = \ulcorner \Phi(n) \urcorner$$

Definamos ahora una relación de satisfacción:

$$Sat(x, y) =_{def} T(\Delta(x, y))$$

[7]Esto parece implicar que el marco teórico al que se apela es lo suficientemente fuerte para tener su propio predicado de verdad, además de los axiomas para una teoría de la verdad tal como lo solicita Tarski. Esto parece ser demasiado fuerte, pues, como vimos un poco antes en este capítulo, Tarski mismo sostiene que una teoría con las características deseadas no puede tener su propio predicado de verdad si es recursivamente axiomatizable, puede representar las funciones recursivas y es consistente.

[8]Aquí se está suponiendo que se pueden trabajar con modelos no estándar de la aritmética. Llamaremos estándar a un número cuando pertenece a la ω-secuencia a la que refieren los numerales de la teoría; y no estándar a los otros objetos que pertenecen al modelo.

Y como en el caso del *esquema-T* podemos tener un esquema similar para la relación de satisfacción, al que llamaremos *esquema simple de satisfacción*, para cualquier término τ y cada predicado unario $\Phi(x)$:

$$Sat(\ulcorner \Phi(x) \urcorner, \tau) \leftrightarrow \Phi(\tau)$$

Por tanto si $\Phi(x)$ es un predicado particular, se puede considerar una sub-instacia de *ESS* para cualquier término τ ($\Phi(x)$-*esquema simple de satisfacción* o $\Phi(x)$-*ESS*). Y de manera similar dado un término τ particular para cualquier predicado $\Phi(x)$ obtenemos un sub-esquema (τ-*esquema simple de satisfacción* o τ-*ESS*).

Si nosotros remplazamos cualquier término τ con una variable ligada a un cuantificador, obtenemos el siguiente esquema para cada predicado $\Phi(x)$ al cual llamaremos *Esquema Generalizado de Satisfacción* (*EGS*):

$$\forall x \ (Sat(\ulcorner \Phi(x) \urcorner, x) \leftrightarrow \Phi(x))$$

Y como puede notarse, dado un predicado particular $\Phi(x)$, podemos generar un $\Phi(x)$-*Principio Generalizado de Satisfacción* ($\Phi(x)$-*PGS*). La importancia de estos dos últimos resultados se encuentra en que, a diferencia de las versiones puramente esquemáticas, las versiones generalizadas nos permiten garantizar que (en el caso de la aritmética de Peano) un predicado se sostiene de un número particular no estándar si y sólo si el numeral de Gödel de ese número cae dentro de nuestro predicado de satisfacción.[9]

Esto nos sugiere que el análisis de Cook pretende ser lo más general posible, el cual funcionaría incluso si no estamos en el modelo estándar, esto es muy importante por razones que abordaremos más tarde en esta sección y porque la derivación de la contradicción de esta versión de la reconstrucción de la paradoja de Yablo requiere una versión particular de $\Phi(x)$-*PGS*.

Por ahora hagamos notar que un principio completamente general se daría en segundo orden pues estamos cuantificando sobre predicados (al menos en el metalenguaje). Nuevamente, más tarde, haremos más notas sobre cuantificación en segundo orden; por ahora pensemos por qué habíamos introducido $\Phi(x)$-*PGS*. Aunque tal cosa no es estrictamente necesaria para generar la paradoja de Yablo en este marco como el análisis de Cook muestra.

Ahora vamos a la construcción de la paradoja. Primero usaremos una versión generalizada modificada del lema de diagonalización que vimos más arriba. Decimos que para cualquier símbolo de relación $\Phi(x, y)$ hay un predicado unario $\Psi(x)$ tal que:

[9]Esto sólo es posible porque se ha eliminado el requisito de que el modelo con el es que se está trabajando es el modelo pretendido de la aritmética.

$$\forall x \ (\psi(x) \leftrightarrow \Phi(\ulcorner \psi(x) \urcorner, y)$$

El lema lo aplicaremos sobre el siguiente predicado binario.

$$\forall x \ (n > y \rightarrow \neg Sat(x, n))$$

De ello obtenemos la siguiente fórmula que en (Ketland, 2005) aparece como *Principio Uniforme de Punto Fijo de Yablo* (*PUPFY*):

$$\forall z (Y(z) \leftrightarrow \forall n \ (n > z \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n)))$$

La paradoja de Yablo se forma tomando una omega secuencia de fórmulas $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$ ... En la que cada una de las siguientes son teoremas:

$Y(1) \leftrightarrow \forall n \ (n > 1 \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$

$Y(2) \leftrightarrow \forall n \ (n > 2 \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$

$Y(3) \leftrightarrow \forall n \ (n > 3 \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$

...

Ahora, ¿qué necesitamos que se cumpla para que esta secuencia implique la contradicción? Primero vamos a generar la instancia particular de $\Phi(x)$-*PGS* para el predicado $Y(x)$[10]. $Y(x)$-*PGS* es:

$$\forall x \ (Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, x) \leftrightarrow Y(x))$$

Sean entonces *PUPFY* y $Y(x)$-*PGS*. Asumamos por *reductio* que $Y(m)$ de un m cualquiera $\overset{P.L.}{\Rightarrow}$ De lo anterior y *PUPFY* obtenemos que $\forall n \ (n > m \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$ si ese es el caso, dado que $m+1 > m \overset{Def}{\Rightarrow} \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, m+1) \overset{P.L.}{\Rightarrow}$ De $Y(x)$-*PGS* y el paso anterior, tenemos que $\neg Y(m+1)$. Dado que tenemos que $\forall n \ (n > m \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$ $\overset{P.L.}{\Rightarrow} \forall n \ (n > m+1 \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$ por *PUPFY* $\overset{P.L.}{\Rightarrow} Y(m+1)$ es el caso, pero esto nos lleva a contradicción (!).

Lo que implica que $\neg Y(m)$. Como se trata de un m cualquiera $\overset{P.L.}{\Rightarrow} \forall x \neg Y(x) \overset{P.L.}{\Rightarrow}$ $\neg Y(1)$, por el paso anterior y $Y(x)$-*PGS* $\overset{P.L.}{\Rightarrow} \forall x \ \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, x)$ de ello podemos decir $\overset{P.L.}{\Rightarrow} \forall n \ (n > 1 \rightarrow \neg Sat(\ulcorner Y(x) \urcorner, n))$ pero por *PUPFY* $\overset{P.L.}{\Rightarrow} Y(1)$, esto nos lleva nuevamente a contradicción (!).

[10]Uno podría pensar que dado el análisis de Cook se puede mostrar que hay una contradicción usando *PUPFY* + $Y(x)$-*ESS*, o $\{Y(n) : n \in \omega\} + Y(x)$-*PGS*, sin embargo, esto no es el caso, pues apelando a modelos no estándar es posible mostrar que ambas partes de la anterior disyunción son consistentes.

Cook se hace la pregunta: ¿por qué son necesarios estos elementos para que se dé la contradicción en la paradoja formalizada y no en su versión *informal*? Esto se debe a que la prueba informal presupone de alguna forma el modelo estándar de la aritmética. Pero entonces, ¿esto significaría que el argumento de su paradojicidad es erróneo? No necesariamente, esto también puede significar que el lenguaje adoptado por Cook es insuficiente. Ciertamente, como ya había adelantado, se puede optar por un lenguaje de segundo orden, donde siempre trabajamos con la estructura pretendida (dado que todos los modelos son isomorfos), por lo que si la meta en sí hubiera sido la máxima generalidad quizá el hacerlo en esta presentación hubiese sido mejor para el análisis. El porqué funciona en su versión informal se debe a que de entrada se asume que la construcción tiene la estructura de los naturales, pero cada oración sólo puede ser entendida por su lugar en la estructura.

Aún así Cook nos da una receta para generar construcciones tipo Yablo y sus respectivas construcciones duales. Para generar construcciones tipo Yablo y sus duales basta con aplicar la forma generalizada del lema de diagonalización a las siguientes fórmulas:

$$\forall n\ (n > y \rightarrow \Phi(\Delta(x, n)))$$

Y para su respectivo dual:

$$\exists n\ (n > y\ \ \&\ \ \Phi(\Delta(x, n)))$$

Lo que nos provee de los siguientes predicados X_1 y X_2 tal que:

(A) $\forall z\ (X_1(z) \leftrightarrow \forall n\ (n > z \rightarrow \Phi(\Delta(\ulcorner X_1(x)\urcorner, n))))$, y

(B) $\forall z\ (X_2(z) \leftrightarrow \exists n\ (n > z\ \ \&\ \ \Phi(\Delta(\ulcorner X_2(x)\urcorner, n))))$

La $\Phi(x)$-Yablo secuencia correspondiente a (A) estará formada por la ω-secuencia $X_1(1)$,$X_1(2)$, $X_1(3)$... donde cada una de de las siguientes fórmulas son teoremas:

$$X_1(1) \leftrightarrow \forall n\ (n > 1 \rightarrow \Phi(\Delta(\ulcorner X_1(x)\urcorner, n)))$$

$$X_1(2) \leftrightarrow \forall n\ (n > 2 \rightarrow \Phi(\Delta(\ulcorner X_1(x)\urcorner, n)))$$

$$X_1(3) \leftrightarrow \forall n\ (n > 3 \rightarrow \Phi(\Delta(\ulcorner X_1(x)\urcorner, n)))$$

$$\ldots$$

De manera análoga procederemos con el caso de la dual usando X_2 para generar una secuencia dual de la anterior.

Cook estará de acuerdo en que la paradoja de Yablo presenta algún tipo de circularidad, pero considera que ésta no es "directa" y que no es viciosa, ni la fuente de paradojicidad de la paradoja, así como tampoco lo es algo relacionado a nociones semánticas como la satisfacibilidad o la verdad. Para defender esto último muestra que la noción de circularidad no es clara y que hay al menos dos sentidos distintos para ella. Para ello se vale en un primer momento de dos formalizaciones distintas de la paradoja del mentiroso: Una que sería la versión anticuada *(old fashioned)* de la paradoja usando una técnica descrita por (Kripke, 1997), en ésta tenemos que una oración, a la que asignamos un nombre Λ_{AM}, que usamos, mediante el uso de comillas, para nombrar otra oración, a saber, "Λ_{AM} es falsa". Así, Λ_{AM} será el nombre asignado a la oración que dice que Λ_{AM} es falsa. De esta forma, tenemos que:

$$\Lambda_{AM} = \text{``}\neg Tr(\Lambda_{AM})''$$

Ahora si nosotros aplicamos el lema de diagonalización al predicado $Tr(x)$ para obtener una oración Λ_C, tal que:

$$\Lambda_C \leftrightarrow \neg Tr(\ulcorner \Lambda_C \urcorner)$$

Como puede notarse la primera nos habla sobre identidad mientras que la otra lo hace sobre equivalencia, por lo que en esos dos sentidos puede entenderse la circularidad. En un segundo momento, para aclarar los tipos de circularidad se vale de la nación matemática de punto fijo, pero advierte que ésta no es unívoca. Da cuenta de ello al mostrar que hay al menos dos nos definiciones distintas de lo que quiere decir ser un punto fijo, presentes en la literatura al respecto. Así para los dos tipos de circularidad corresponde un tipo distinto de forma bajo la cual una oración Φ puede ser un punto fijo de un predicado $\Psi(x)$:

Una oración Φ es un *punto fijo oracional fuerte* de un predicado $\Psi(x)$ sii:

$$\Phi = \Psi(\ulcorner \Phi \urcorner)$$

Una oración Φ es un *punto fijo oracional débil* de un predicado $\Psi(x)$ sii es un teorema que:

$$\Phi \leftrightarrow \Psi(\ulcorner \Phi \urcorner)$$

Nótese sin embargo que tal como ha planteado Cook su análisis en la paradoja de Yablo no involucra a una oración siendo igual o equivalente a un predicado unario, sino un predicado unario que es equivalente a una afirmación que involucra el numeral de

Gödel de dicho predicado, por lo que hace una segunda distinción. Dado un predicado $\Phi(x)$ y un predicado binario $\Psi(x, y)$:

Un predicado unario $\Phi(x)$ es un *punto fijo predicado fuerte* de un predicado binario $\Psi(x, y)$ sii:

$$\Phi(x) = \Psi(\ulcorner \Phi(w) \urcorner, x)$$

Un predicado unario $\Phi(x)$ es un *punto fijo predicado débil* de un predicado binario $\Psi(x, y)$ sii es teorema que:

$$\Phi(x) \leftrightarrow \Psi(\ulcorner \Phi(w) \urcorner, x)$$

Haciendo estas consideraciones logra mostrar que la paradoja en su versión aritmética, así como una versión construida usando la técnica involucrada en la versión *anticuada* de la paradoja del mentiroso caen bajo estas dos últimas clasificaciones respectivamente. Sin embargo, esta circularidad no es viciosa, es decir, no lo es en tanto que no es la fuente de la paradojicidad de la secuencia, pues se puede demostrar que todo predicado unario es un *punto fijo débil* de algún predicado binario. Pensar que la presencia de puntos fijos es la fuente de paradojicidad sería aceptar que todos los predicados dentro de la aritmética tienen el mismo problema presente en paradojas como la de Yablo o la del mentiroso. Pero si no es así, ¿por qué en algunos casos llegamos a contradicciones y en otros esta circularidad parece ser más benigna? Para Cook la respuesta simple es que en realidad la circularidad no es la que está detrás de la paradojicidad. También rechaza que la causa sean las nociones semánticas involucradas, pues demuestra que cada predicado unario es un punto fijo para la relación de satisfacción y el predicado de verdad.

Si bien el trabajo de Cook es impresionante quiero hacer notar lo siguiente:

- No se adecúa a los objetivos de la tesis ni a la metodología elegida. Esto se debe a que la tesis pretende restringir el análisis de la paradoja al uso de herramientas clásicas y Cook tomará el camino de recurrir a una lógica no clásica.

- El enorme esfuerzo de Cook por ofrecer una versión formal de la paradoja se ve ensombrecido por su uso de los lenguajes de la lógica de primer orden. Esto se debe a que la lógica de primer orden no permite construir teorías categóricas, es decir, que tengan un único modelo salvo isomorfismo. Esto se debe al teorema de Lowenheim-Skolem. El problema principal con esto es que, como enfatizamos en secciones anteriores, las versiones informales de la paradoja recurren fuertemente al uso de una estructura particular, la de los números naturales. De tal suerte que el análisis de Cook omite este hecho que es fundamental.

- Cook presupone que podemos tener un predicado general de verdad, pero esto está fuera de los límites clásicos, como vimos con Tarski, y es algo imposible. Además, tiene algunas consecuencias que considero indeseables, sin mencionara que de cierta manera parece pedir la cuestión.

Sin embargo, el trabajo de Cook apunta a un elemento central en nuestro análisis que es el uso de la teoría de la recursión, la gödelización del lenguaje y otras herramientas formales, mismas que usaré en los siguientes secciones.

2.5. ¿El problema es la autorreferencia?

En esta sección me gustaría problematizar la idea de que la autorreferencia es el mecanismo que provoca las paradojas. En principio esto parecería extraño considerando que parte de los objetivos de esta tesis es mostrar que la paradoja de Yablo sí es un caso de autorreferencia. Sin embargo, lo que quiero enfatizar en esta sección es que la autorreferencia por sí misma no genera paradojas, lo que es más, los mecanismos que permiten generar autorreferencia bien utilizados pueden disolver las paradojas y generar teoremas a partir del estudio de éstas.

Un caso paradigmático del estudio de paradojas que propició el desarrollo de importantes teoremas matemáticos es justo el caso de la paradoja del mentiroso. Recordemos que la paradoja del mentiroso es una oración que afirma que ella misma es falsa, o equivalentemente no es verdadera.

$$M: \text{ La oración } M \text{ no es verdadera.}$$

Como hemos visto, la oración M permite generar un razonamiento paradójico. Pero si se modifica la oración cambiando la propiedad de “no es verdadera” por ser “no es demostrable” obtenemos la famosa oración de Gödel que afirma de ella misma que no es demostrable.

$$G: \text{ La oración } G \text{ no es demostrable.}$$

Esta oración, mediante un razonamiento similar al que muestra la paradojicidad de la oración del mentiroso, nos permite desmostrar que ni la oración G, ni su negación son demostrables y por ello mismo la aritmética (y casi toda teoría matemática) es incompleta.[11]

Justo la maquinaria de teoría de la recursión presentada un poco antes y que nos sirvió para demostrar que el predicado de verdad no es representable (el teorema de Tarski),

[11]Recordemos que el resultado se aplica a todas las teorías recursivamente axiomatizables, consistentes y que puedan representar todas las funciones recursivas.

fue desarrollada y utilizada para mostrar con todo el rigor matemático que la oración G de Gödel puede ser construida. Para ello se demuestra que el conjunto de los números de Gödel de las oraciones que son demostrables (teoremas) es definible por un fórmula del lenguaje de la aritmética de Peano. Una vez hecho esto, recurriendo al método de diagonalización se puede construir una oración que afirma que ella misma que no es demostrable. Esto lejos de ser un razonamiento problemático, permitió obtener uno de los resultado más importantes para la lógica matemática del siglo XX.

Hasta este punto uno podría preguntarse si la autorreferencia no resulta ser problemática y es la que permite obtener paradojas, pero eso parece ser falso. Pues justo los mecanismos de teoría de la recursión que permiten mostrar que se puede lograr obtener oraciones autorreferenciales, también permiten mostrar que la noción de verdad no es definible o tractable en el mismo sentido. La maquinaria que muestra que la autorreferencia es posible elimina el predicado de verdad, lo que diluye la paradoja. Pero, ¿esto sucede de la misma forma con la paradoja de Yablo? ¿Hay un resultado semejante que permita construir una *secuencia de Yablo* que use el predicado de demostrabilidad? Y, en caso de que sí, ¿permitiría desarrollar un razonamiento que sea otra demostración del teorema de Gödel de incompleción de la aritmética? La respuesta es que sí.

En un artículo de 2013, Cezary Cieśliński y Rafal Urbaniak mostraron que si se construye una *secuencia tipo Yablo* en la que cada enunciado afirme que todos los enunciados que le siguen en la secuencia no son demostrables, entonces todos los enuenciados serán equivalentes entre sí y equivalentes con la oración G de Gödel.

Pero si esto es así, incluso si las *secuencias tipo Yablo* no son autorreferentes parace que podemos usar un razonamiento similar al de Tarski para mostrar que justo la paradoja de Yablo, más que una paradoja, puede ser la base para una prueba de que el conjunto de las oraciones verdaderas no es representable (una demostración alternativa del teorema de Tarski). Después de todo, la moraleja que nos deja la paradoja de Yablo parece ser muy similar a la que nos ofrece la paradoja del mentiroso.

2.6. Secuencias, autorreferencia y estructuras

Esta sección tiene como objetivo mostrar que las oraciones que componen la secuencia que origina la paradoja de Yablo son después de todo autorreferentes. Para hacerlo recurriré a un análisis filosófico de las oraciones dentro de la secuencia.

Si consideramos dos ejemplos de las oraciones que forman la secuencia podemos ver que sólo son distintas en un elemento, a saber, el numeral (el nombre del número que indexa a la nombre de la oración). Por ejemplo, consideremos las siguientes dos oraciones:

$$S_5 : \forall x > 5 S_x \text{ es falsa.}$$

$$S_8 : \forall x > 8 S_x \text{ es falsa.}$$

Este elemento parece modificar la proposición expresada por la oración, pues cada una de ellas afirma que las oraciones de la secuencia que están después de determinado punto son todas falsas. El punto es determinado por el numeral que refiere al número que indexa la oración. Pero, desde este punto vista, el numeral lo único que hace es señalar un lugar en la estructura formada por las oraciones, algo que no parece que pueda ser caracterizado sin apelar a la estructura en su conjunto.

Empero, existe una alternativa. Podríamos sostener que los numerales refieren a un número natural y que el significado de ese número no depende de la estructura a la que pertenece, sino que se puede hablar del número apelando a alguna propiedad interna del objeto que es. Algo parecido a esto ha sido propuesto por autores como Frege. Desde su punto de vista un número natural es un objeto que es la extensión de un concepto, un concepto que agrupa a todas las colecciones de objetos que son equipotentes, es decir, que tienen la misma cardinalidad. Si bien la propuesta de Frege, o alguna otra similar, podría dar cuenta de la clase de objeto que es un determinado número natural, no parece ofrecer el aporte necesario para construir la paradoja de Yablo. Recordemos que la paradoja de Yablo requiere de la construcción de una secuencia de enunciados que son indexados por los elementos de una ω-secuencia, lo relevante de esto no es que clase de objetos son los que forman la secuencia, sino el orden que tienen. Así, una propuesta que pretenda asignar significado a las oraciones de la secuencia apelando a la referencia de los numerales no parece que llegará a buen puerto, pues no recupera de manera directa el orden de la secuencia. Lo que es más, es perfectamente posible construir un contraejemplo a esta postura. Asumamos que se existen objetos que son los referentes de los numerales, que son únicos y que se pueden caracterizar sin apelar a la estructura a la que pertenecen. Si esto es posible, oraciones como S_5 y S_8 expresarían lo mismo sin importar en que secuencia se encuentren. Sin embargo, esto es claramente falso. Consideremos una ω-secuencia construida a partir de los números naturales (que asumimos existen), pero en la cual el lugar del número 5 y del número 8 han sido intercambiados. Al ser una ω-secuencia se podría generar otra paradoja de Yablo haciendo algunos pequeños cambios. Sin embargo, es claro que la oración S_5 expresaría cosas distintas en las secuencias consideradas, esto se debe a que el 5 denotaría lugares distintos en la estructura.

Tal parece que después de todo las oraciones de Yablo si son circulares pues para determinar su significado es necesario que se consideré el lugar que ocupan en la estructura, una estructura de la que ellas son parte constitutiva.

Con todo, falta contestar una interrogante, ¿es posible establecer un significado de las oraciones sólo apelando a la estructura formada por los números naturales? Afortunadamente, esto no parece del todo problemático lo único que requerimos es explicar como es que podemos caracterizar de manera adecuada una ω-secuencia y esto es posible apelando a una teoría de los ordinales (de ahí la importancia de la caracterización de las *secuencias tipo Yablo* dada en el capítulo anterior). Incluso existen posturas en filosofía de las matemáticas que sostienen que un número natural no es más que el lugar que ocupa en una ω-secuencia; me refiero al estructuralismo matemático. La metodología detrás de esta postura es la siguiente:

> Consider the entities most contemporary mathematicians simply assume in their everyday practice: the natural numbers, the integers, the rational, real, and complex numbers, various groups, rings, modules, etc., different geometric spaces, topological spaces, function spaces, and so forth. Mathematicians with a structuralist methodology stress the following two principles in connection with them: (i) What we usually do in mathematics (or, in any case, what we should do) is to study the structural features of such entities. In other words, we study them as structures, or insofar as they are structures. (ii) At the same time, it is (or should be) of no real concern in mathematics what the intrinsic nature of these entities is, beyond their structural features.(Reck y Price, 2000, p. 345)

De acuerdo a está postura ser un número natural no es más que ser o bien el lugar en la estructura de los números naturales o bien el objeto que ocupa dicho lugar. De acuerdo con Cristian Gutiérrez:

> Una pregunta inicial es qué tipo de objeto es una estructura. Lo primero que tenemos que notar es que las estructuras, al igual que los universales, tienen muchas instancias, es decir son objetos tales que están ejemplificados en muchos objetos, tienen la propiedad de ser uno-en-muchos. Este tipo de entidades han sido analizadas desde la antigüedad por muchos filósofos, ejemplos de ellas son las formas platónicas, los universales o las propiedades. En la jerga contemporánea, la distinción se hace entre tipos y casos. Existen por lo menos dos tratamientos usuales para este tipo de entidades: 1) Sostener que existen independientemente de sus ejemplificaciones, existen incluso si no hay ninguna ejemplificación de ellas (esto corresponde a la perspectiva "places-are-objects"), esta posición se conoce como realismo Ante rem. 2) Estos objetos no existen realmente, lo que llamamos estructuras, formas o universales sólo son las formas comunes a todas sus ejemplificaciones, son completamente dependientes de ellas, si acabas con todas sus instancias, ellas también desaparecen. (Gutiérrez, 2011, p. 49)

De cualquier forma, aquello que caracteriza a dicho objeto no es más que el rol que juega en la estructura de la que forma parte. En palabras de Shapiro:

> [W]e can distinguish an object that plays the role of 2 in an exemplification of the natural-number structure from the number itself. The number is the office, the place in the structure. The same goes for real numbers, points of Euclidean geometry, members of the set-theoretic hierarchy, and just about every object of a nonalgebraic field of mathematics. Each mathematical object is a place in a particular structure.(Shapiro, 1997, p. 78)

Lo dicho hasta aquí sobre el estructuralismo es útil para mostrar que es posible incluso sostener una postura más fuerte y es que no es posible entender el significado de un número más allá de la estructura de los naturales. Pero, no es necesario adoptar una postura estructuralista, puesto que, en este caso, incluso si ser un número natural no puede ser reducido a condiciones estructurales, el uso que se hace de ellos en las *secuencias tipo Yablo* sí es completamente estructural. Y como esto es así, tenemos que las oraciones involucradas en la secuencia que da origen a la paradoja sí son autorreferentes.

2.7. Teoremas de punto fijo y paradojas

Este última sección del capítulo tiene un objetivo más bien modesto y es mostrar mediante un mecanismo más formal lo que ya se defendió anteriormente, a saber, que la paradoja de Yablo sí está construida mediante oraciones autorreferenciales y que dicha paradoja se puede disolver al mostrar que no existe un predicado de verdad $Tr(x)$ de aplicación general, es decir, que se pueda aplicar a todas y sólo las oraciones que son verdaderas. El aporte de este capítulo es que presenta algunos resultados un poco más técnicos construidos a partir de los teoremas de diagonalización y de punto fijo propuesto por William Lawvere.

2.7.1. Teorema del punto fijo

El teorema del punto fijo es un teorema de teoría de la recursión que nos es útil para demostrar algunos resultados limitativos respecto a la representación de ciertas funciones de los naturales a los naturales, por ejemplo, los teoremas de incompleción de Gödel o el teorema de Tarski. La relevancia de este resultado para nosotros es que nos permite analizar la paradoja del mentiroso y la solución clásica para ella, es decir, negar la existencia de un predicado $Tr(x)$ que represente al conjunto de los números de Gödel de oraciones verdaderas en el modelo estándar de la aritmética.

Teorema del punto fijo: Para cualquier teoría **T** en la cual todas las funciones recursivas son representables se cumple que para cada fórmula $\varphi(x)$ con x como única variable libre existe una fórmula bien formada ψ *.t.*:

$$\mathbf{T} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

Demostración:

(1) Supongamos una teoría **T** y una fórmula abierta $\varphi(x)$ cualesquiera

(2) **T** representa la función recursisva daigonal. Por loque hay una fórmula bien formada $\Theta_{diag}(x, y)$ donde si diag(k)=m:

$\mathbf{T} \vdash \Theta_{diag}(\overline{k}, \overline{m})$

$\mathbf{T} \vdash \forall y(\Theta_{diag}(\overline{k}, y) \to \overline{m} = y)$

(3) Consídrese la fórmula $\forall y(\Theta_{diag}(x, y) \to \varphi(y))$ .t. $\alpha(x) \overset{Def.}{\Leftrightarrow} \forall y(\Theta_{diag}(x, y) \to \varphi(y))$

(4) Sea ψ .t. $\psi \overset{Def.}{\Leftrightarrow} \alpha(\ulcorner \alpha(x) \urcorner)$

(5) Dado como está construida ψ:

$diag(^{\#}\alpha(x)^{\#}) =^{\#} \psi\ ^{\#}$

(6) Por (2) y (5) tenemos que:

(6a) $\mathbf{T} \vdash \Theta_{diag}(\ulcorner \alpha(x) \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)$

(6b) $\mathbf{T} \vdash \forall y(\Theta_{diag}(\ulcorner \alpha(x) \urcorner, y) \to \ulcorner \psi \urcorner = y)$

(7) $\mathbf{T} \vdash \psi \to \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$. Prueba:

1. ψ Sup.
2. $\alpha(\ulcorner \alpha(x) \urcorner)$ Def. ψ: 1
3. $\forall y(\Theta_{diag}(\ulcorner \alpha(x) \urcorner, y) \to \varphi(y))$ Def. $\alpha(x)$: 2
4. $\Theta_{diag}(\ulcorner \alpha(x) \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner) \to \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ E$\forall$: 3
5. $\varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ MP: 4, (6a)
6. $\psi \to \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ PC: 1-5

(8) $\mathbf{T} \vdash \varphi(\ulcorner \psi \urcorner) \to \psi$. Prueba:

1. $\varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ Sup.
2. $\Theta_{diag}(\ulcorner \alpha(x) \urcorner, b)$ Sup.

3. $\Theta_{diag}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner,) \to \ulcorner\psi\urcorner = b$ E$\forall$: (6b)

4. $\ulcorner\psi\urcorner = b$ MP: 2, 3

5. $\varphi(b)$ LL: 1,4

6. $\Theta_{diag}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, b) \to \varphi(b)$ PC: 2-5

7. $\forall y(\Theta_{diag}(\ulcorner\alpha(x)\urcorner, y) \to \varphi(y))$ I$\forall$: 6

8. $\alpha(\ulcorner\alpha(x)\urcorner)$ Def. $\alpha(x)$:7

9. ψ Def. ψ: 8

10. $\varphi(\ulcorner\psi\urcorner) \to \psi$ PC: 1-9

$\therefore \mathbf{T} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$ por 7 y 8

2.7.2. Teoremas de Cantor-Lawvere

William Lawvere demostró en 1969 que los esquemas de razonamiento de muchas paradojas y resultados matemáticos tienen la misma estructura y están relacionados con los teoremas de punto fijo. Algunos de estos resultados son la paradoja del mentiroso, la paradoja de Grelling, el teorema de Cantor, los teoremas de Gödel, el teorema de Tarski, el problema de la detención, entre muchos otros. A continuación sólo presentaré el primero de los teoremas de Lawvere.

Teorema de Cantor: Si Y es un conjunto cualquiera y existe una función $\alpha : Y \to Y$ sin puntos fijos, entonces para cualquier conjunto T y para toda función $f : T \times T \to Y$ existe una función $g : T \to Y$ que no es representable por f (es decir, que para toda $t \in T$ existe una $t' \in T$ tal que $g(t') \neq f(t', t)$).

Demostración: Sean Y y $\alpha : Y \to Y$ como se piden. Consideremos la función diagonal $\Delta : T \to T \times T$ tal que $\Delta(t) = \langle t, t \rangle$. Entonces podemos definir $g : T \to Y$ como la composición de las funciones antes dadas, es decir, $g = \alpha \circ f \circ \Delta$.

$$\begin{tikzcd} T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ T \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Notemos que para toda $t \in T$ sucede que

$$(1)\ g(t) = \alpha(f(t,t))$$

Supongamos ahora por Reducción al Absurdo que g es representable por f, es decir, que existe una $t_0 \in T$ tal que para toda $t \in T$ sucede que

$$(2)\ g(t) = f(t, t_0)$$

Como una instancia de lo anterior tenemos que

$$(3)\ g(t_0) = f(t_0, t_0)$$

De (1) y (3) obtenemos que

$$(4)\ g(t_0) = \alpha(g(t_0))$$

Pero (4) es un punto fijo para α, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, g no es representable.

Ahora bien, ¿por qué consideramos relevante analizar las paradojas desde los teoremas de Lawvere y no simplemente lo hacemos desde el trabajo de Gödel? Esto se debe a la generalidad ofrecida por los teoremas recién visto.

Esta respuesta puede parecer muy simple. Sin embargo, detrás de ella hay una postura filosófica; a saber, que debemos usar las herramientas más generales para entender, estudiar y analizar esta clase de fenómenos de tal manera que nuestros resultados no dependan de la representación particular que hayamos elegido del fenómeno a estudiar. En nuestro caso, podríamos haber partido del teorema de punto fijo de Gödel, pero hay que notar que dicho teorema depende o parte de una manera particular de gödelizar los números. Es decir, que dicho teorema se construye a partir de una función particular que va de las expresiones de nuestro lenguaje a los números naturales y de la manera en la que la definimos.[12] En contraste, el trabajo de Lawvere pretende ser mucho más general. Se busca caracterizar las condiciones necesarias y suficientes que las funciones deben cumplir para tener puntos fijos, sin que esto dependa de la manera particular en la que las definimos.

Así, el trabajo de Lawvere puede evitar críticas a los resultados del análisis, esto gracias a su generalidad. Usemos, entonces, estos resultados para analizar la paradoja de Yablo.

[12] En mi opinión esto no es realmente muy problemático, sin embargo, puede ser usado para atacar el resultado del análisis.

2.7.3. Análisis de la Paradoja de Yablo usando el teorema de Cantor

Una vez que he presentado el teorema de Cantor puedo usarlo para el análisis de la paradoja de Yablo. Pero antes de formalizarlo me gustaría hacer notar el siguiente hecho:

[IY] La implicación de Yablo: Cada oración de Yablo Sn implica que todas las otras oraciones de Yablo son falsas.

La justificación de **[IY]** se da por los siguientes dos hechos.

(a) Sn afirma explicitamente que para toda $x > n$ sucede que Sx es falsa.

(b) Para toda $y < n$, Sy implica que Sn es falsa, pero al tomarla como verdadera sucede que toda Sy es falsa.

Consideremos ahora el siguiente conjunto y las siguientes funciones:

$YA = \{x | x \text{ es una oración de Yablo}\}$

$\neg : 2 \to 2$ tal que $\neg(0) = 1$ y $\neg(1) = 0$.

$\Delta : YA \to YA \times YA$ tal que para toda $Sn \in YA$ sucede que $\Delta(Sn) = \langle Sn, Sn \rangle$.

$f : YA \times YA \to 2$ tal que (i) $f(sn, sm) = 0$ si $n \neq m$ y (ii) $f(Sn, Sm) = 1$ si $n = m$.

Nótese que $\neg : 2 \to 2$ es una función sin puntos fijos y que todas las funciones están definidas tal como el teorema de Cantor pide.

Definamos ahora a la función $g : YA \to 2$ como la composición de las funciones anteriores, es decir

$$g = \neg(f(\Delta))$$

$$\begin{tikzcd}
YA \times YA \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\neg"] \\
YA \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "g"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Por el teorema de Cantor, g no es representable por f.

Ahora bien, notemos que f es una función que nos indica el valor de verdad de una oración de Yablo de acuerdo a su propio punto de vista. Mientras que g es la función característica de las oraciones de Yablo que son falsas. Esto explica la paradoja y muestra que en realidad es una instancia de un esquema circular. Lo que contradice la afirmación de Yablo sobre su propia paradoja.

Esto parece mostrar que si bien en la versión original de Yablo no se muestra una circularidad involucrada, esto sólo se debe a la presentación particular que usó; pero una vez que se analiza el razonamiento que está detrás de la paradoja, es claro que hay una circularidad involucrada. Es importante destacar que esto se puede obtener gracias a un resultado en el que la presentación particular de los elementos relacionados con la paradoja no es central, sino más bien su estructura y la de las funciones involucradas en el razonamiento. Es por ello, que era relevante recurrir al trabajo de Lawvere.

2.8. Conclusiones

En este capítulo he revisado con detenimiento la noción de paradoja y cuál es el papel que juegan las características estructurales en la problemática de algunas de ellas. Si bien resulta que estas tienen un papel importante, este no es un determinante suficiente para la paradojicidad, en lo que uno puede estar de acuerdo tanto con el artículo original de Yablo como con el posterior análisis de Cook. Sin embargo, el análisis clásico, tomando en cuenta el trabajo de la teoría de la recursión, arroja que el verdadero problema se encuentra en el uso de predicados como el de verdad y el de satisfacibilidad, esto es debido al resultado limitativo que representa el teorema de indefinibilidad de la verdad de Tarski.

Del esbozo de Kripke, también presentado en este capítulo, he retomado que algunas de nuestras afirmaciones ordinarias sobre la verdad serán susceptibles de paradojicidad tomando en consideración hechos empíricos. Haciendo revisión de la noción de "fundamento", uno puede llegar a la conclusión de que las oraciones que conforman la paradoja de Yablo no están fundamentadas y no representan genuinamente proposiciones, pues la autorreferencia no es caracterizable en términos extrínsecos y estas oraciones no hacen un uso legitimo del predicado de verdad.

Se puede observar, sin embargo que, a pesar de las diferencias entre una propuesta acorde al planteamiento de Tarski y otra acorde al de Kripke, ambas consideran que la paradojicidad está asociada a las nociones semánticas involucradas. Por ello analizamos la propuesta de Cook, y además de dar razones por las cuales no optar por ella (como lo son el que no se adapta a los objetivos de esta tesis), mostramos que el que su argumento rechace una raíz semántica en la paradoja es debido a ciertas consideraciones y presupuestos muy específicos, entre los que incluyen el considerar una estructura fuera de la usual de los números naturales.

En contraste con lo dicho en este último punto, y a diferencia de Cook, me he mantenido dentro del modelo estándar y lo más afín a un espíritu clásico. Sin embargo, el análisis presentado también muestra que hay un tipo de circularidad en la paradoja de Yablo, como lo muestra el hecho de que la paradoja pueda ser reconstruida usando el trabajo de Lawvere. Por lo que la paradoja de Yablo es una paradoja que presenta circularidad. Cabe aclarar que, esto no implica que no existan paradojas *Liar-like* que no sean circulares ni autorreferentes, lo aquí mostrado sólo aplica a la paradoja de Yablo, aunque es posible generalizar algunos de estos resultados a versiones más generales de dicha paradoja.

Conclusiones generales

Haciendo un repaso de lo que hemos visto con anterioridad, en el primer capítulo se analizaron de manera general cuáles son las características de la paradoja de Yablo y estructuras similares. En especial para el caso de las secuencias tipo Yablo. Lo más destacable al respecto es la necesidad de considerar un orden en especial, que para el caso de la paradoja de Yablo, tal cual fue planteada originalmente, corresponde al orden usual dado a los naturales. Desde entonces habíamos adelantado que más que sólo las características estructurales uno de los determinantes de que se cayera o no en una paradoja dependía de la propiedad relevante dentro de la secuencia, para el caso de la paradoja en su formulación original dicha propiedad era la de verdad.

Utilizar la noción de verdad adecuadamente para el análisis de las oraciones a las que se les adjudica, requiere, según vimos en el primer capítulo y en las notas dadas por Kripke, de una base, es decir se requiere que exista un proceso efectivo para determinar la verdad de una oración de tal suerte que lleguemos a un punto u oración en el que el predicado de verdad no aparezca, lo que implica que su verdad no depende de la verdad de otra oración. Para casos como el de algunas paradojas, y en el caso de la paradoja de Yablo en específico, el uso de dicha noción es ilégitimo.

Por si fuera poco, tanto el análisis presentado por Cook como el que yo ofrezco muestran que sí existe una circularidad dentro de la paradoja. Los análisis se separan respecto a cuál es el elemento que genera la contradicción. Desde mi punto de vista, el problema que genera la paradojicidad se origina con el uso del predicado de verdad.

Un trabajo que queda pendiente es mostrar que las técnicas usadas se pueden extender para el análisis de otras paradojas, en especial, para paradojas que sea generalizaciones de la de Yablo. Tal vez sea posible, incluso, lograr un método general para el análisis de paradojas *liar-like*.

Finalmente, quiero recordar que el análisis ofrecido no pretende mostrar que no pueden existir las paradojas *liar-like* no circulares, simplemente pretende mostrar que la paradoja de Yablo y otras similares sí son circulares.

Bibliografía

- Aliseda Llera, A. (2008). Sobre la parapraxis de Orayen (García de la Sienra, A. Comp.). En *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen*. México: UNAM.

- Amor Montaño, J.A (2008). La teoría de modelos de la teoría de conjuntos: un concepto delicado (García de la Sienra, A. Comp.). En *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen*. México: UNAM.

- Barrio, E. A. (2010). Theories of Truth without Standard Models and Yablo's Sequences. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 96 (3), 375-391.

- ———. (2012). The Yablo Paradox and Circularity. *Análisis Filosófico*, XXXII(1), 7-20.

- ———. (2014). Paradojas, paradojas y más paradojas (1a ed.). Londres: COLLEGE PUBLICATIONS.

- Butler, J. M. (2017). An entirely non-self-referential Yabloesque paradox. Synthese. doi:10.1007/s11229-017-1443-7

- Cieśliński, C., y Urbaniak, R. (2013). Gödelizing the Yablo Sequence. Journal of Philosophical Logic, 42(5), 679-695.

- Cook, R. T. (2006) There are Non-circular Paradoxes (but Yablo's isn't one of Them!). The Monist, 89, 118-149.

- ———. (2014a). Paradoxes (1a ed.). Cambridge: Polity Press.

- ———. (2014b). The Yablo Paradox: An Essay on Circularity (1a ed.). Reino Unido: Oxford University Press.

- Gutiérrez-Ramírez, C. (2011). Estructuralismo, teoría de conjuntos y teoremas de categoricidad. Tesis de mestría. UNAM.

- Hardy, J. (1995). Is Yablo's Paradox Like-Liar? Analysis, 55(3), 197-198.
- Ketland, J. (2005),."Yablo's Paradox and ω-Inconsistency", Synthese 145: 295–302.
- Leitgeb, H. (2002). What is a Self-Referential Sentence? Critical Remarks on the Alleged (Non-)Circularity of Yablo's Paradox. Logique Et Analyse, 45(177/178), Nouvelle Série, 3-14.
- Kripke, S. (1997). Esbozo de una teoría de la verdad en Nicolás y Frapolli (eds.) (1997). Teorías de la verdad en el siglo XX. Tecnos, Madrid, pp. 110-143.
- Peña, L., & Ausín, T. (2011). Paradoja (L. Vega Reñón & P. Olmos Gómez, Eds.). En Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica (1a ed.). Madrid: Trotta.
- Priest, G. (1994). The Structure of the Paradoxes of Self-Reference. Mind, 103(409), new series, 25-34.
- ———. (1997). Yablo's Paradox. Analysis, 57(4), 236-242.
- Reck, E. y Price M. (2000). Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics. Synthese, 125, 341-383.
- Shapiro, S. (1997). Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. Oxford University Press.
- Yablo, S. (1985). Truth and Reflection. Journal of Philosophical Logic, 143(3), 297-349.
- ———. (1993). Paradox without Self-Reference. Analysis, 53(4), 251-252.
- Yanofsky, N. S. (2003). A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points. The Bulletin of Symbolic Logic, 9(3), 362-386.