



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

**EVOLUCIÓN TEMPORAL APROXIMADA PARA SISTEMAS OPTOMECÁNICOS
HÍBRIDOS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
LUIS ALBERTO MEDINA DOZAL

TUTOR PRINCIPAL

DR. JOSÉ FCO. RÉCAMIER ANGELINI
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

COMITÉ TUTORIAL

DR. W. LUIS MOCHÁN BACKAL
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

Cuernavaca, Morelos, octubre 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Comienzo agradeciendo a mis padres, absolutamente nada de lo que he logrado habría sido posible sin su apoyo y cariño. Aún estando lejos me acompañaron en todo momento.

A mi familia, mis hermanas y sobrinos, Mateo, Alán, Sebastián y Adrián. Gracias por su cariño y entusiasmo, gracias por siempre esperarme con un abrazo cuando vuelvo.

A mis amigos que me acompañaron en Cuernavaca, Marimar y el Chegar. Gracias por compartir conmigo esta etapa de tantos cambios y aprendizajes. Aún les debo una comida en Italianni's.

A Rocío, gracias por esas tardes con buena música en el cubo y otras cuantas buenas anécdotas.

Gracias a mi novia, por quererme y acompañarme en la distancia.

A mis amigos, el Sr. Alexis Juárez, Ing. Pity Alamillo, Andrea (la prima) y Lorena. Muchas gracias por su amistad.

Agradezco especialmente al Dr. José Récamier, quien me ha apoyado desde el comienzo, he aprendido muchísimo de él. Gracias por haberme recibido en ese verano de investigación. Espero seguir colaborando y aprendiendo de usted.

Al comité tutorial y sinodales, gracias por el tiempo que le dedicaron a la revisión de esta tesis.

Gracias a CONACYT por la beca de maestría. A la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo recibido a través del proyecto PAPIIT IN1111119.

Gracias al resto de personas que por descuido olvido mencionar pero que influyeron positivamente en estos últimos tres años.

Por tantas cosas, gracias una vez más.

Resumen.

La electrodinámica cuántica de cavidades (CQED) es el estudio de la interacción totalmente cuántica entre la luz (el campo electromagnético) confinada y materia. La estructura de un campo electromagnético confinado es modificado y controlado por las condiciones de contorno. Las propiedades radiativas de un átomo en un entorno confinado pueden ser muy diferentes a las que se presentan en el espacio libre. Por ejemplo, las tasas de emisión espontánea pueden alterarse y los niveles de energía pueden modificarse.

En este trabajo, se presentan tres sistemas de interés en el campo de la electrodinámica de cavidades. Primeramente, estudiamos la interacción entre un campo electromagnético y un átomo confinados en una cavidad de paredes totalmente reflejantes. El campo es considerado como un haz monocromático y el átomo se modela en la aproximación de dos niveles.

Luego, consideramos un sistema optomecánico, compuesto por un modo de campo confinado en una cavidad donde una de sus paredes puede oscilar libremente. En este mismo contexto, examinamos la respuesta del sistema optomecánico a un forzamiento inducido por un láser externo sobre el campo confinado.

Posteriormente, estudiamos las interacciones dadas en un sistema constituido por un campo forzado y un átomo dentro de una cavidad con una de sus paredes libre de oscilar.

Finalmente, presentamos un apéndice donde introducimos la posibilidad de explorar el campo de los sistemas cuánticos abiertos, es decir, estudiar interacciones dentro de cavidades con paredes parcialmente reflejantes, que permitan la interacción del sistema con los alrededores.

Índice

1. Introducción.	9
2. Modelo de Jaynes-Cummings	13
2.1. La aproximación de dos niveles: operadores de espín y estados atómicos.	14
2.2. La aproximación dipolar	15
2.3. Solución al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.	22
2.3.1. Oscilaciones de Rabi producidas por un campo en un estado de Fock.	24
2.3.2. Colapsos y reavivamientos de las oscilaciones de Rabi inducidas por un campo coherente.	25
2.4. Solución alternativa al Hamiltoniano de JC.	29
2.4.1. Evolución temporal.	31
2.5. Conclusión.	34
3. Sistema Optomecánico.	35
3.1. El Hamiltoniano optomecánico.	37
3.2. Solución al sistema optomecánico.	39
3.3. Evolución temporal y cálculo de observables.	41
3.4. Función Q-Husimi.	46
3.5. Forzando el sistema optomecánico.	50
3.5.1. Evolución temporal y cálculo de observables.	53
3.5.2. Función Husimi.	57
3.6. Conclusión.	61
4. Sistema cuántico híbrido Acoplando el MJC al sistema optomecánico.	63
4.1. El Hamiltoniano híbrido.	64

4.2. Evolución temporal y cálculo de observables.	68
4.3. Función Husimi y Función de Wigner.	77
4.4. Conclusión.	82

A. Trabajos a futuro: Abriendo el sistema

híbrido.	84
A.1. La ecuación maestra en óptica cuántica.	87
A.2. Ecuaciones de Langevin.	89
A.2.1. El campo de salida en una cavidad	92
A.3. Conclusión.	94

1. Introducción.

Combinar dos o más sistemas físicos en un mismo marco teórico de sistemas cuánticos híbridos ha impulsado el desarrollo de novedosas tecnologías, procesamiento de información cuántica [1], la detección cuántica mejorada [2, 3], hasta dispositivos mesoscópicos superconductores [4] y nanomecánicos [5]. Una característica fundamental de un sistema cuántico híbrido funcional es la capacidad de comunicar estados cuánticos entre sus diferentes componentes con alta fidelidad. Para dos sistemas físicos A y B esto requiere un Hamiltoniano de interacción \hat{H}_{AB} que o bien condiciona la evolución de un sistema al estado del otro, o que impulsa, de forma correlacionada, las transiciones en los dos sistemas [6]. En la mayoría de los ejemplos, nos encontraremos con interacciones de la forma:

$$\hat{H}_{AB} = \hbar g_{eff}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}), \quad (1.1)$$

donde $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$ y $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\}$ son los operadores de creación y aniquilación que, básicamente provocan transiciones entre estados dentro de los sistemas A y B, respectivamente. Así, el producto $\hat{a}\hat{b}^\dagger$ indica un proceso de intercambio en el que una excitación en un sistema va acompañada de una absorción en el otro. Con una identificación adecuada de los operadores, la Ec. (1.1) representa sistemas que interactúan, como los campos ópticos cuánticos acoplados por un divisor de haz, los átomos que interactúan de forma resonante con un campo dentro de una cavidad, y espines que interactúan a través de sus momentos magnéticos, entre otros.

El marco establecido de la electrodinámica cuántica de cavidades (CQED) es un campo ampliamente explorado de sistemas híbridos que interconecta fotones con átomos. Su objetivo es aislar un átomo en una cavidad con paredes altamente reflectantes, que lo separa eficazmente del mundo exterior. El campo dentro de la cavidad es cuantizado como un conjunto de osciladores armónicos, siendo uno de ellos reso-

nante o casi resonante con una transición entre dos niveles del átomo.

El campo no puede considerarse independiente de las paredes de la cavidad, las distribuciones espaciales y frecuencia de los modos del campo dependen de las condiciones físicas limitantes impuestas, que pueden ser modificadas y controladas [7]. Dentro de CQED encontramos el régimen de acoplamiento fuerte, este se alcanza cuando la interacción átomo-campo supera los procesos disipativos. La primera evidencia de acoplamiento fuerte se obtuvo con muestras multiatómicas en las que todos los átomos estaban acoplados simétricamente al mismo modo. Se han observado oscilaciones cuánticas de Rabi colectivas en átomos en el rango de frecuencias de las microondas [8] y ópticas [9], utilizando cavidades Fabry-Perot. La primera manifestación del régimen de acoplamiento fuerte fue la observación de la llamada “división de Rabi en el vacío” con átomos térmicos [10]. Una fuente láser excitaba el sistema atómico acoplado al campo en la cavidad y la señal transmitida registraba su espectro. Cuando la cavidad estaba vacía, el láser excitaba la transición $|0\rangle$ a $|1\rangle$ de los modos del campo, con una distribución de Lorentz centrada en la frecuencia de la cavidad. Cuando un átomo, en resonancia con el campo, estaba presente en la cavidad, el láser provocaba una transición del estado base $|g, 0\rangle$ al primer estado excitado de los estados vestidos, $|\pm, 0\rangle = (|e, 0\rangle \pm i|g, 1\rangle)/\sqrt{2}$ (ver la sección 2). Estos niveles están separados por la frecuencia de vacío de Rabi Ω_0 . En lugar de encontrar una distribución Lorentziana, se observa una distribución de dos picos. Este efecto de división proporciona una forma sensible de contar uno a uno los átomos que cruzan la cavidad [11]. Cuando un átomo atraviesa la cavidad, la respuesta se modifica drásticamente. La transmisión del campo es alta cuando la cavidad está vacía y baja cuando hay un átomo presente. Este esquema de recuento de átomos también puede utilizarse para atrapar de forma determinista átomos dentro de la cavidad, dando lugar a las llamadas trampas FORT (Far Off-Resonance Traps) donde se han registrado atrapamiento de átomos de Cesio durante tiempos que han alcanzado el rango de segundos [12].

Otro sistema dentro del conjunto de sistemas híbridos es la cavidad optomecánica. Este sistema ofrece una vía para determinar y controlar el estado cuántico de los objetos macroscópicos. La optomecánica cuántica permite detectar el movimiento y la fuerza cerca del límite fundamental impuesto por la mecánica cuántica [5, 13].

La cavidad óptica más convencional es la cavidad Fabry-Perot, en la que uno de los extremos reflejantes es fijo, el otro está ligado armónicamente y se le permite oscilar bajo la acción de presión de radiación del campo luminoso dentro de la cavidad. El interés por el estudio de la dinámica de osciladores mecánicos acoplados a los modos de oscilación de campo, ha aumentado considerablemente en las últimas décadas [14, 15]. Algunas aplicaciones recientes de este tipo de resonadores incluyen el proyecto LIGO, que utiliza interferómetros de ondas gravitacionales cuyo camino óptico se modifica por la presión de la radiación [16], el enfriamiento de resonadores mecánicos para el estudio de la transición entre el comportamiento cuántico y el clásico [17], y la amplificación y medición de fuerzas a escala nanométrica [18].

El régimen de acoplamiento fuerte proporciona una interfaz cuántica que permite la transferencia coherente de estados cuánticos entre el oscilador mecánico y los átomos. Sin embargo, aunque el acoplamiento de un espejo oscilante a un átomo o un ion no se realiza directamente esto puede hacerse mediante un acoplamiento común añadiendo al sistema un modo de campo en una cavidad [5, 19]. En este sentido, podemos referirnos al trabajo de Garg y Biswas [19] donde estudian la transmisión de un campo de prueba por medio de un sistema híbrido optomecánico constituido por un campo en una cavidad, un oscilador mecánico y un sistema atómico modelado como un sistema de dos niveles. En este punto, la evolución individual de cada subsistema ofrece la posibilidad de obtener, bajo ciertas condiciones, la evolución exacta del sistema híbrido, es decir, si conocemos el operador de evolución de cada componente, utilizando el teorema de Wei-Norman [20], es posible obtener, por un lado, la solución exacta o aproximada de la dinámica de los observables físicos, y por otro, funciones de cuasi-probabilidad que permiten dilucidar el comportamiento

cuántico del sistema.

A lo largo de esta tesis, repasaremos tres sistemas dentro del régimen de acoplamiento fuerte en el marco de la electrodinámica cuántica de cavidades, desde su planteamiento hasta la solución del sistema. En primer lugar, estudiamos el modelo de Jaynes-Cummings, el cual explica de forma aproximada la interacción entre un átomo, modelado como un sistema de dos niveles y el campo electromagnético dentro de una cavidad. En el capítulo 3, resolvemos el sistema optomecánico. Posteriormente, la cavidad optomecánica es bombeada por un láser externo. Usando técnicas algebraicas encontramos un operador de evolución temporal aproximado, el cual nos permite construir un vector de estado a cualquier tiempo, calcular observables y funciones de distribución como la función Q-Husimi y Wigner. En el capítulo 4, consideramos un sistema híbrido optomecánico compuesto por una cavidad con un campo forzado por un láser externo, un oscilador mecánico y un átomo de dos niveles dentro de la cavidad. El modo de la cavidad está acoplado al sistema de dos niveles y juntos están acoplados a los modos vibracionales de una de las superficies reflejantes de la cavidad. Conociendo los operadores de evolución temporal de ambos subsistemas, el sistema de dos niveles y la cavidad optomecánica (capítulo 2 y 3), construimos un operador de evolución temporal para el sistema híbrido completo, evaluamos varios observables como el número de fotones y fonones, calculamos el parámetro de Mandel, las funciones de distribución Q-Husimi y de Wigner.

Los resultados obtenidos en este capítulo, derivaron en la escritura y reciente publicación de un artículo titulado: *Approximate Evolution for A Hybrid System: An Optomechanical Jaynes-Cummings Model*.

Finalmente, incluimos un apéndice donde se explora la posibilidad de continuar con esta investigación permitiendo que el sistema híbrido interactúe con el entorno. Presentamos una breve introducción a los sistemas abiertos, así como, dos de los procedimientos más generales para abordarlos.

2. Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings (JCM) es probablemente el modelo más sencillo para analizar un sistema puramente cuántico de interacción radiación y materia. Se propuso en 1963 para examinar los aspectos clásicos de la emisión espontánea y probar la existencia de oscilaciones de Rabi en las excitaciones atómicas inducidas por campos con energías bien definidas (estados de Fock). Para campos con una distribución estadística correspondiente a estados coherentes en el número de fotones, se observó que las oscilaciones colapsan hacia un valor fijo. En 1980 se descubrió que para ciertas condiciones iniciales para el átomo y el campo, las oscilaciones de Rabi, llevan a cabo un proceso repetido de colapso seguido de un reavivamiento. La existencia de los reavivamientos resulta ser evidencia directa de la cuantización de las excitaciones del campo (fotones) y por consecuencia la naturaleza cuántica del campo electromagnético [21]. Más recientemente el JCM ha permitido la generación de estados no-clásicos como las superposiciones de estados coherentes, llamadas gatos de Schrödinger [22], estados de número [23] y estados comprimidos [24]. Más aún, debido a que sus propiedades algebraicas son similares a las de sistemas de interacción ión-laser, se han propuesto generalizaciones para modelos de Jaynes - Cummings no lineales [25, 26, 27, 28].

En el presente capítulo mostramos las consideraciones que deben tomarse en cuenta para usar el JCM, resolvemos detalladamente la ecuación de Schrödinger del modelo y exploramos las propiedades que dan lugar a los colapsos y reavivamientos.

Finalmente presentamos una forma alternativa para resolver el modelo de Jaynes-Cummings, escribiendo el operador de evolución temporal como un producto de exponenciales, mediante el uso del teorema de Wei-Norman.

2.1. La aproximación de dos niveles: operadores de espín y estados atómicos.

Debido a que el espectro de los átomos es en general complicado, puede esperarse que la descripción de la interacción atómica con luz resulte ser extremadamente compleja. Sin embargo, para las situaciones de interés en óptica cuántica, podemos ignorar la mayoría de los estados atómicos exceptuando unos pocos. La explicación es la siguiente. La luz envía cierta cantidad de fotones con la energía justa para que el átomo realice una transición del estado base al estado excitado, identificados con los kets, $|g\rangle$ y $|e\rangle$ respectivamente. Ahora bien, como el espectro de energía del átomo es no uniforme, cada transición tiene esencialmente una energía distinta. Por lo que, si hacemos interactuar al átomo con luz monocromática, esperamos que solo una pareja de estados reaccionen a esta. Estos estados serán aquellos cuya diferencia de energía sea la misma o aproximadamente la misma a la energía dada por la frecuencia del campo incidente. Todos los demás estados pueden ignorarse, ya que la probabilidad de que los fotones incidentes produzcan una transición es muy pequeña. Este procedimiento es conocido como la aproximación de dos niveles. Formalmente podemos expresar la aproximación de dos niveles como:

$$\hat{H}_a = \sum_n E_n |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \approx E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e|, \quad (2.1)$$

donde \hat{H}_a representa el Hamiltoniano característico del átomo.

Ahora que el espacio de Hilbert del sistema ha sido reducido a uno de dos dimensiones, podemos hacer uso del formalismo desarrollado para sistemas con momento angular de espín 1/2. En particular podemos escribir el Hamiltoniano atómico de la forma:

$$\hat{H}_a = \frac{E_e + E_g}{2} (|e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g|) + \frac{E_e - E_g}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|). \quad (2.2)$$

El primer término del Hamiltoniano puede verse como un simple corrimiento en la energía, el cual no desempeña un papel importante en la dinámica del sistema.

Si identificamos a los estados excitado y base como estados de un sistema con espín $\pm 1/2$ (también llamados *pseudo-espín*), entonces podemos introducir los operadores de Pauli:

$$\hat{\sigma}_x = |g\rangle\langle e| + |g\rangle\langle e|, \quad \hat{\sigma}_y = i(|g\rangle\langle e| - |g\rangle\langle e|), \quad \hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (2.3)$$

los cuales cumplen con la relación de conmutación: $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{i,j,k}\sigma_k$. Usando los operadores de Pauli, el Hamiltoniano atómico en la aproximación de dos niveles queda como:

$$\hat{H}_a = \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z, \quad (2.4)$$

donde hemos definido la frecuencia de radición atómica $\omega_a = \frac{E_e - E_g}{\hbar}$.

2.2. La aproximación dipolar

La aproximación dipolar, está basada en el formalismo clásico para las interacciones luz-materia. Se considera a la materia como una colección de partículas cargadas en una configuración en general con carga neutra. A grandes rasgos, la acción del campo electromagnético sobre las cargas consiste en separar las cargas negativas y las positivas pero sin romper la configuración. En esencia, esto se traduce a que la materia puede ser descrita como un conjunto de dipolos eléctricos. Adicionalmente, se considera que el campo eléctrico no varía a lo largo de la extensión del átomo. Esta condición resulta razonable para las longitudes de onda del campo usadas en óptica cuántica, las cuales son del orden de $100nm$, mientras que las escalas atómicas rondan los $100pm$, 3 órdenes de magnitud menor.

Consideremos entonces, un átomo de dos niveles que interactúa de forma resonante con un pulso de luz enfocado con un diámetro a_0 . Podemos estimar cualitativamente

la probabilidad de dispersión del fotón, en términos de la fracción de potencia del haz que se dispersa por el átomo. Esta fracción está dada por la relación entre el área de la sección transversal de absorción atómica y el área de la sección transversal del haz: $R_{disp} \approx \frac{\sigma_{abs}}{A}$.

El área del pulso de luz es: $A = \frac{\pi}{4}a_0^2$, la sección transversal de absorción del átomo está dada por: $\sigma_{abs} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}$, donde λ denota la longitud de onda del haz incidente.

Tomamos como ejemplo la dispersión del ^{133}Cs con $\lambda = 852\text{nm}$, $\sigma_{abs} \approx 0.35\mu\text{m}^2$ y un diámetro $a_0 = 1\text{mm}$. Dados estos valores, la relación de dispersión es del orden de $R_{disp} \approx 2.2 \times 10^{-7}$ por lo que prácticamente no habría dispersión. Para que la dispersión sea apreciable, la interacción átomo-campo requiere $\sigma_{abs} \gg A$.

Claramente, esta condición no es alcanzable en el espacio vacío. La situación es diferente cuando el átomo se sitúa en una cavidad. En cada extremo de la cavidad se fijan dos espejos, de tal forma que el haz puede reflejarse una y otra vez.

En consecuencia, se incrementa la sección transversal de absorción del átomo por un factor \mathfrak{F} (refinamiento), el cual en esencia representa el número de rebotes del haz dentro de la cavidad.

Existen varios enfoques diferentes para realizar este tipo de resonadores, siendo el más destacado el uso de cavidades Fabry-Perot. Este tipo de cavidad consiste en dos espejos curvos, enfrentados entre sí a corta distancia, como se ilustra en la Fig. 1. Además, pedimos que estos espejos reduzcan al máximo las pérdidas. Esto puede lograrse con espejos super pulidos, normalmente recubiertos con una pila de capas de dieléctricas que se depositan mediante una técnica de pulverización de haces de iones. Usando esta técnica se han reportado pérdidas de transmisión y dispersión por debajo de 1ppm por espejo [29].

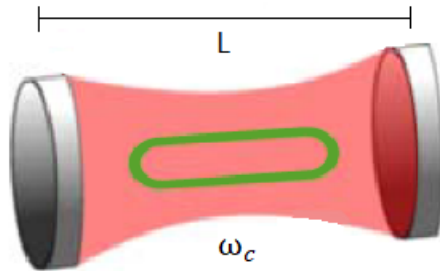


Figura 1: Representación esquemática de una cavidad Fabry-Perot de longitud L con un solo modo de campo de frecuencia ω_c .

Asumiendo sin pérdida de generalidad, que el centro de masa del átomo está localizado en la posición $\mathbf{r} = (0, 0, z_0)$ dentro de la cavidad. El Hamiltoniano de interacción átomo-campo se escribe entonces:

$$\hat{H}_{ac} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(z_0), \quad (2.5)$$

donde $\hat{\mathbf{D}} = q\hat{\mathbf{r}}$ representa el operador dipolar eléctrico.

El campo eléctrico $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ está dado por:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mathbf{e} \sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 L S}} \text{sen}(k_m \mathbf{r}) [\hat{a}_m - \hat{a}_m^\dagger]. \quad (2.6)$$

En la ecuación anterior se da la forma explícita en la representación de Schrödinger del campo eléctrico que interactúa con el sistema de dos niveles, \mathbf{e} representa el vector polarización del campo, ϵ_0 es la constante de permitividad eléctrica, L y S son parámetros relativos al volumen de la cavidad que contiene al campo, su longitud y superficie respectivamente.

Volviendo al Hamiltoniano de interacción \hat{H}_{ac} sustituimos la expresión para el campo eléctrico y desarrollamos el operador de posición en términos de la base atómica.

$$\hat{H}_{ac} = \sum_m \sum_{n, n'} iq \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 L S}} \text{sen}(k_m z_0) \langle \mathbf{n} | \hat{\mathbf{r}} | \mathbf{n}' \rangle (\hat{a}_m - \hat{a}_m^\dagger) | \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{n}' |, \quad (2.7)$$

donde $\hat{r} = \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{r}}$. Ahora introducimos la aproximación de dos niveles, asumiendo que todas las frecuencias de la cavidad están lejos de resonancia con las transiciones atómicas excepto por una, denotada por ω_c y además usamos el hecho de que el operador de posición sólo conecta estados con paridad distinta. Entonces el Hamiltoniano de interacción queda:

$$\hat{H}_{ac} = -i\hbar \frac{\Omega_0}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \hat{\sigma}_x, \quad (2.8)$$

donde hemos definido la “frecuencia de Rabi del vacío”.

$$\Omega_0 = 2q \sqrt{\frac{\omega}{\hbar \epsilon_0 L S}} \text{sen}\left(\frac{\omega_c z_0}{c}\right) \langle g | \hat{r} | e \rangle, \quad (2.9)$$

la cual mide la intensidad del acoplamiento del átomo con el campo.

Entonces, expresamos el Hamiltoniano del sistema completo átomo-campo como la suma del Hamiltoniano del átomo de dos niveles, el del campo eléctrico y la interacción dipolar:

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{a-c} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar \frac{\Omega_0}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \hat{\sigma}_x, \quad (2.10)$$

este Hamiltoniano se conoce como el *Hamiltoniano cuántico de Rabi*.

Resulta útil ahora introducir los operadores de ascenso y descenso atómicos $\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_-$.

$$\hat{\sigma}_\pm = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y), \quad (2.11)$$

en términos de los eigenestados del espín, los operadores quedan:

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|; \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_+^\dagger = |g\rangle\langle e|. \quad (2.12)$$

La acción de estos operadores sobre los eigenestados del espín es:

$$\hat{\sigma}_+|g\rangle = |e\rangle; \quad \hat{\sigma}_-|e\rangle = |g\rangle; \quad \hat{\sigma}_+|e\rangle = 0; \quad \hat{\sigma}_-|g\rangle = 0, \quad (2.13)$$

sustituyendo los operadores de ascenso y descenso en 2.10 obtenemos:

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{ac} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} - i\hbar\frac{\Omega_0}{2}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (2.14)$$

fijándonos solamente en la parte correspondiente al Hamiltoniano de interacción, vemos que, el desarrollo del producto escalar arroja cuatro términos.

Dos de ellos son proporcionales a $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ y $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$. El primero corresponde a una transición desde el nivel superior $|e\rangle$ al nivel inferior $|g\rangle$, junto con la absorción de un fotón. El segundo describe el proceso inverso, la emisión de un fotón acompañada de la transición del estado $|g\rangle$ al $|e\rangle$. Cuando las frecuencias de la cavidad y de transición atómica, ω_c y ω_a , están proximas, estos términos corresponden a procesos altamente no resonantes. Estos tienen una participación menor en la evolución del sistema, comparado con los otros dos términos, proporcionales a $\hat{\sigma}_+\hat{a}$ y $\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$, correspondientes a los procesos usuales de absorción y emisión de fotones. Podemos descartar los términos no resonantes, mediante la aproximación de onda rotante.

Formalmente podemos estudiar la aproximación de onda rotante, usando la representación de interacción, considerando la condición $\Omega_0 \ll \omega_a$, definimos un Hamiltoniano no perturbado \hat{H}_0 .

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_a + \hat{H}_c, \quad (2.15)$$

cuyo operador de evolución temporal es:

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}t} e^{-\frac{i\omega_a\hat{\sigma}_z t}{2}}, \quad (2.16)$$

que cumple con la ecuación.

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_0(t)}{dt} = \hat{H}_0 \hat{U}_0(t); \quad \hat{U}_0(t_0, t_0) = \mathbb{1}. \quad (2.17)$$

Expresamos el Hamiltoniano \hat{H}_{ac} en la representación de interacción mediante la transformación:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_{ac} \hat{U}_0(t), \\ \hat{H}_I(t) &= \frac{-i\hbar\Omega_0}{2} \left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega_c - \omega_a)t} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{i(\omega_c - \omega_a)t} \right) - \frac{i\hbar\Omega_0}{2} \left(\hat{a}\hat{\sigma}_- e^{-i(\omega_c + \omega_a)t} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+ e^{i(\omega_c + \omega_a)t} \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

en la ecuación anterior, vemos que el primer término oscila lentamente, debido a que la frecuencia de vibración del átomo y la frecuencia de la cavidad están cerca de resonancia. Por otra parte, el segundo término oscila muy rápidamente, por lo que si promediamos en el tiempo, este término resulta despreciable.

Tomando en cuenta el cálculo anterior, escribimos entonces el Hamiltoniano de Rabi, en la aproximación de onda rotante.

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar \frac{\Omega_0}{2} (\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.19)$$

este Hamiltoniano es conocido como el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, el cual fue introducido por Jaynes y Cummings en 1963 como una idealización de la interacción de materia y campo electromagnético.

Examinamos ahora los eigenestados desacoplados de \hat{H}_a y \hat{H}_c . Estos son los productos tensoriales de las bases $|e\rangle \otimes |n\rangle \equiv |e, n\rangle$ y $|g\rangle \otimes |n\rangle \equiv |g, n\rangle$ de los estados atómicos y de la cavidad. Sus energías son:

$$\langle n, g | \hat{H}_a + \hat{H}_c | n, g \rangle = \hbar(-\omega_a/2 + n\omega_c),$$

$$\langle n, e | \hat{H}_a + \hat{H}_c | n, e \rangle = \hbar(\omega_a/2 + n\omega_c),$$

definimos el desfase entre el átomo y la cavidad.

$$\Delta_c = \omega_a - \omega_c, \quad (2.20)$$

cuando el desfase Δ_c es 0 o pequeño comparado con ω_c , los estados desacoplados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ están degenerados o cercanamente degenerados. Los estados excitados de $\hat{H}_a + \hat{H}_c$ están entonces organizados como una escalera de dobletes, separados cada uno por una energía $\hbar\Delta_c$ (Fig. 2).

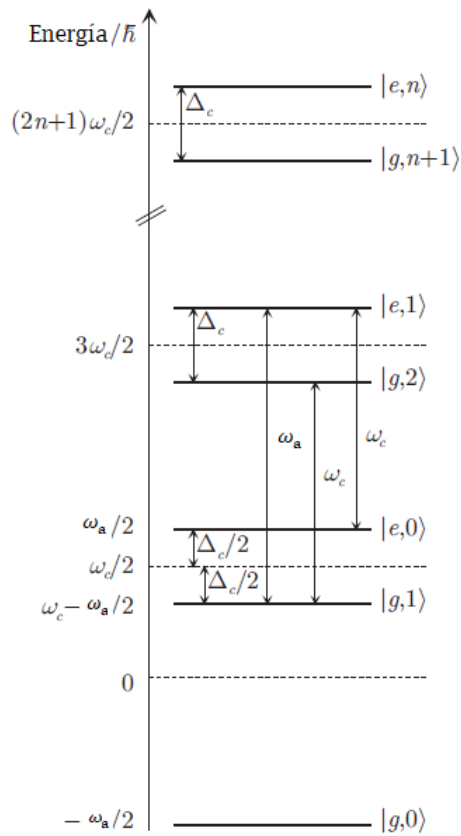


Figura 2: Representación esquemática del espectro de la base desacoplada átomo-campo para el caso $\Delta_c > 0$. Como puede observarse, dejando de lado el estado base $|g, 0\rangle$, los estados forman una escalera infinita de dobletes separados por la frecuencia del campo ω_c . En cada doblete, los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ están separados por $\hbar\Delta_c$.

El estado base $|g, 0\rangle$, representa al átomo en su estado más bajo en una cavidad de vacío, éste es el único estado que no está acoplado en la escalera.

El n -ésimo doblete tiene $n + 1$ excitaciones, estas pueden verse como $n + 1$ excitaciones del campo ($|g, n + 1\rangle$) o como la suma de n fotones con una excitación atómica ($|e, n\rangle$).

Introducimos el operador $\hat{M} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-$ que representa el número total de excitaciones del campo y del átomo, conmuta con \hat{H} por lo que es una constante de movimiento. Al conservar el número de excitaciones, el Hamiltoniano de interacción entre el átomo y el campo, \hat{H}_{ac} conecta solo los estados dentro de cada doblete. La diagonalización del Hamiltoniano completo se reduce entonces a resolver por separado N problemas de dos niveles.

2.3. Solución al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

Llamemos \hat{H}_n al n -ésimo doblete del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \hbar\omega_c n + \frac{\hbar\omega_a}{2} & \frac{-i\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} \\ \frac{i\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} & \hbar\omega_c(n+1) - \frac{\hbar\omega_a}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

introduciendo la “ n -ésima frecuencia de Rabi”:

$$\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1},$$

y en términos del desfase Δ_c .

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \hbar\omega_c(n+1/2) + \hbar\frac{\Delta_c}{2} & \frac{-i\hbar\Omega_n}{2} \\ \frac{i\hbar\Omega_n}{2} & \hbar\omega_c(n+1/2) - \hbar\frac{\Delta_c}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

así, podemos escribir \hat{H}_n de la forma:

$$\hat{H}_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)\mathbb{1} + \hat{V}_n, \quad (2.23)$$

con:

$$\hat{V}_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta_c & -i\Omega_n \\ i\Omega_n & -\Delta_c \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} [\Delta_c \hat{\sigma}_Z + \Omega_n \hat{\sigma}_Y]. \quad (2.24)$$

Escrito de esta forma vemos que la diagonalización de \hat{H}_n es formalmente idéntica a la determinación de los eigenestados de un sistema de espín situado en un campo magnético cuyos componente a lo largo de O_z y O_y son proporcionales a Δ_c y Ω_n . Este campo ficticio forma un ángulo θ_n respecto a Z, definido por:

$$\tan \theta_n = \frac{\Omega_n}{\Delta_c}, \quad (2.25)$$

este ángulo de mezclado, varía entre 0 y π , y es útil para expresar de una manera sencilla la forma de los eigenestados del sistema átomo-campo.

Al diagonalizar \hat{H}_n obtenemos los eigenvalores:

$$E_n^\pm = \hbar\omega_c(n + 1/2) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta_c^2 + \Omega_n^2}, \quad (2.26)$$

con sus correspondientes eigenvectores:

$$|+, n\rangle = \cos(\theta_n/2)|e, n\rangle + i\sin(\theta_n/2)|g, n + 1\rangle, \quad (2.27)$$

$$|-, n\rangle = \sin(\theta_n/2)|e, n\rangle - i\cos(\theta_n/2)|g, n + 1\rangle, \quad (2.28)$$

estos estados, los cuales por lo general están entrelazados, son llamados los “estados vestidos” del sistema átomo-campo.

2.3.1. Oscilaciones de Rabi producidas por un campo en un estado de Fock.

En el caso resonante, el ángulo de mezclado es $\theta_n = \pi/2$ para cualquier valor de n . Los estados vestidos en este caso son:

$$|\pm, n\rangle = [|e, n\rangle \pm i|g, n+1\rangle] / \sqrt{2}. \quad (2.29)$$

Tomando un estado inicial particular, consideramos el caso de un átomo que se encuentra en $t = 0$ en el estado excitado $|e\rangle$ y hay n fotones en el cavidad.

El estado inicial del sistema $|\Psi_e(0)\rangle = |e, n\rangle$, escrito en la base de los estados vestidos es:

$$|\Psi_e(0)\rangle = [|+, n\rangle + |-, n\rangle] / \sqrt{2}, \quad (2.30)$$

describimos la evolución del estado en la representación de interacción, con respecto al término constante $\hbar\omega_c(n+1/2)\mathbf{1}$.

$$|\tilde{\Psi}_e(t)\rangle = [|+, n\rangle e^{-\frac{i\Omega_n t}{2}} + |-, n\rangle e^{\frac{i\Omega_n t}{2}}] / \sqrt{2}, \quad (2.31)$$

en términos de la base desacoplada, $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ el vector de estado al tiempo t es:

$$|\tilde{\Psi}_e(t)\rangle = \cos\frac{\Omega_n t}{2}|e, n\rangle + \text{sen}\frac{\Omega_n t}{2}|g, n+1\rangle. \quad (2.32)$$

Se observa que el acoplamiento átomo-campo resulta en un intercambio reversible de energía entre los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ con frecuencia Ω_n . Las oscilaciones entre el estado excitado y el estado base, también pueden verse, desde la perspectiva de dos sistemas separados como “oscilaciones de emisión espontáneas”. Un átomo que se encuentra inicialmente en $|e\rangle$ emite un fotón mientras lleva a cabo una transición hacia el estado $|g\rangle$. En el espacio libre, el fotón escapa y el átomo continúa en el estado $|g\rangle$. Este es el proceso usual de emisión espontánea irreversible.

Por otro lado, en la cavidad, el fotón es emitido por el átomo confinado. Este fotón emitido puede ser posteriormente absorbido y después emitido nuevamente.

2.3.2. Colapsos y reavivamientos de las oscilaciones de Rabi inducidas por un campo coherente.

Suponemos ahora que el átomo se encuentra inicialmente en el estado excitado $|e\rangle$, interactuando con un campo coherente:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle; \quad c_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (2.33)$$

con ayuda de la ecuación (2.32), calculamos el estado del sistema al tiempo t .

$$|\tilde{\Psi}_e(t)\rangle = \sum_n c_n \cos\frac{\Omega_0\sqrt{n+1}t}{2} |e, n\rangle + \text{sen}\frac{\Omega_0\sqrt{n+1}t}{2} |g, n+1\rangle, \quad (2.34)$$

la probabilidad $P_e(t)$ de encontrar al átomo en $|e\rangle$ es:

$$P_e(t) = \sum_n |c_n|^2 \left(\frac{1 + \cos(\Omega_0\sqrt{n+1}t)}{2} \right). \quad (2.35)$$

Las oscilaciones de Rabi en un campo coherente son entonces la suma de términos que oscilan a frecuencias $\Omega_0\sqrt{n+1}$, valuadas sobre la probabilidad de encontrar el correspondiente estado de número n en el estado coherente inicial.

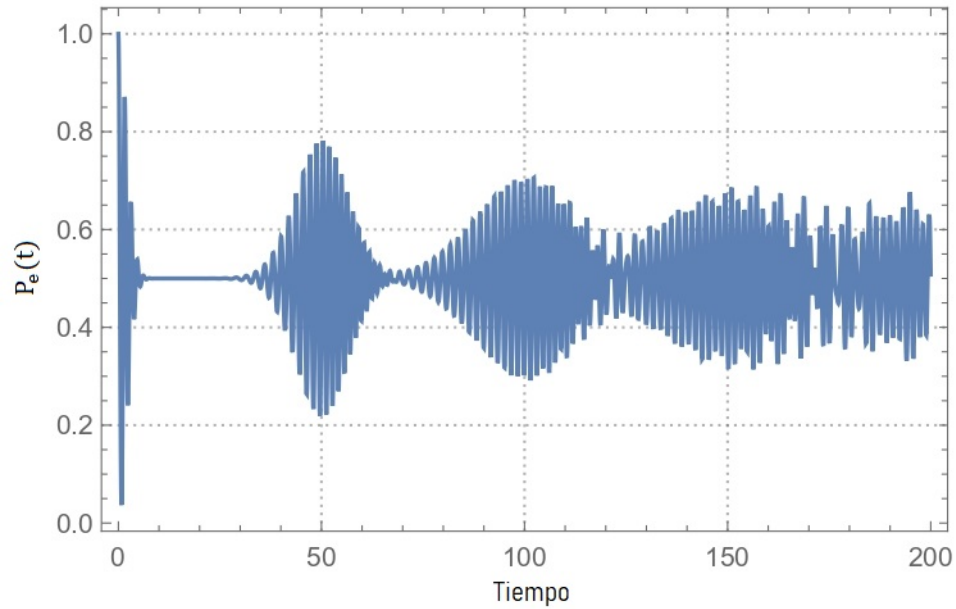


Figura 3: Evolución temporal de la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado $P_e(t)$ con un número medio de fotones $\bar{n} = 10$ y $\Omega_0 = 0.5$.

La figura 3 presenta resultados interesantes. Para tiempos cortos, las oscilaciones de Rabi aparecen con una frecuencia cercana a $\Omega_0\sqrt{\bar{n}}$, proporcional a la amplitud del campo clásico cuando $\bar{n} \gg 1$. Estas oscilaciones, sin embargo, son rápidamente amortiguadas y $P_e(t)$ toma el valor de $1/2$. Para estimar la tasa de amortiguamiento, tomamos el límite cuando el número de medio de fotones es grande $\bar{n} \gg 1$, que es justamente la frontera entre mecánica cuántica y clásica. En este límite, es válido aproximar la distribución de Poisson por una Gaussiana de ancho $\sqrt{\bar{n}}$.

$$e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{\sqrt{n!}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\bar{n}}, \quad |\alpha|^2 = \bar{n},$$

$$P_e(t) = \sum_n |c_n|^2 \frac{1 + \cos(\Omega_0\sqrt{n+1}t)}{2} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\bar{n}} \cos(\Omega_0\sqrt{\bar{n}}t). \quad (2.36)$$

Desarrollamos \sqrt{n} alrededor del número medio de fotones \bar{n} .

$$\sqrt{n} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\bar{n}} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n}}}. \quad (2.37)$$

Dentro de este régimen, también es posible sustituir la suma por una integral y extender el límite de integración inferior a $-\infty$, ya que la distribución Gaussiana garantiza que los valores negativos no contribuyan.

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{e^{-(n-\bar{n})^2/2\bar{n}}}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \left(e^{\frac{i\Omega_0 t}{2}(\sqrt{\bar{n}}+n/\sqrt{\bar{n}})} + e^{-\frac{i\Omega_0 t}{2}(\sqrt{\bar{n}}+n/\sqrt{\bar{n}})} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\Omega_0^2 t^2}{8}} \cos \Omega_0 \sqrt{\bar{n}} t. \end{aligned} \quad (2.38)$$

De la expresión anterior¹, encontramos que las oscilaciones son amortiguadas a una tasa $\gamma_c = \frac{\Omega_0}{2\sqrt{2}}$, es notable que la tasa de colapso sólo depende del acoplamiento Ω_0 y no del número promedio de fotones \bar{n} . Notamos que en el límite clásico, la frecuencia de Oscilaciones de Rabi $\Omega_0 \sqrt{\bar{n}} t$ es mucho mayor que la tasa de amortiguamiento $\gamma_c = \frac{\Omega_0}{2\sqrt{2}}$. Este es el comportamiento que se obtiene clásicamente, el átomo transita entre los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ con una amplitud de oscilacion estacionaria. Por lo que, los efectos cuánticos para $\bar{n} \gg 1$ comienzan a ser apreciables para escalas de tiempo muy grandes.

¹En general $\int_{\mathbb{R}} dz \exp[-\frac{1}{2}ax^2 + Jx] = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{J^2}{2a}\right]$ Esta integral es conocida como la transformada Hubbard-Stratonovich.

Por otro lado, los reavivamientos pueden interpretarse como el refase de los elementos de la suma (2.36). Calculamos el orden de magnitud del tiempo de reavivamiento, tomando dos oscilaciones cuyos términos estén en fase.

$$(\Omega_{\bar{n}+1} - \Omega_{\bar{n}-1})t_r = \Omega_0(\sqrt{\bar{n}+1} - \sqrt{\bar{n}-1})t_r = 2\pi m; \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.39)$$

donde usamos la aproximación $\sqrt{\bar{n} \pm 1} = \sqrt{\bar{n}} \pm \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}$, obtenemos:

$$t_r \approx \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}m}{\Omega_0}. \quad (2.40)$$

La expresión anterior nos indica que los reavivamientos están uniformemente espaciados en el tiempo, además predice que el espaciamento se incrementa proporcionalmente a la raíz cuadrada del número promedio de fotones en el estado coherente, esto se puede confirmar gráficamente en la figura 4.

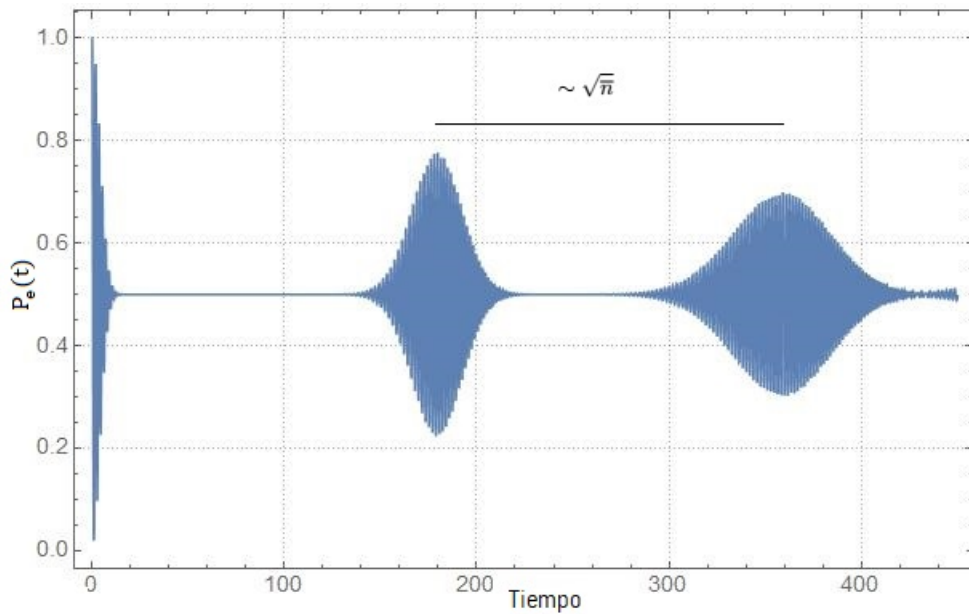


Figura 4: Evolución temporal de la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado $P_e(t)$ con un número medio de fotones $\bar{n} = 50$ y $\Omega_0 = 0.5$

2.4. Solución alternativa al Hamiltoniano de JC.

Volviendo al \hat{H}_{JC} , es conveniente escribirlo como la suma de dos partes, un Hamiltoniano no perturbado más una interacción.

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (2.41)$$

donde $\hat{V} = \frac{-i\hbar\Omega_0}{2}(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)$. El Hamiltoniano en la representación de interacción es:

$$\hat{H}_I^{(1)}(t) = \frac{-i\hbar\Omega_0}{2}(e^{i\Delta_c t}\hat{a}\hat{\sigma}_+ - e^{-i\Delta_c t}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.42)$$

introducimos los operadores [30]:

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{\hat{M}}}\hat{a}\hat{\sigma}_+, \quad \hat{c}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\frac{1}{\sqrt{\hat{M}}}, \quad (2.43)$$

la acción de estos operadores sobre la base de los estados es:

$$\begin{aligned} \hat{c}|e, n\rangle &= 0 & \hat{c}|g, n+1\rangle &= |e, n\rangle \\ \hat{c}^\dagger|e, n\rangle &= |g, n+1\rangle & \hat{c}^\dagger|g, n+1\rangle &= 0 \\ \hat{M}|e, n\rangle &= (n+1)|e, n\rangle & \hat{M}|g, n+1\rangle &= (n+1)|g, n+1\rangle, \end{aligned}$$

de las expresiones anteriores se obtienen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = \hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{c}] = 2\hat{c}, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{c}^\dagger] = -2\hat{c}^\dagger. \quad (2.44)$$

El Hamiltoniano en la representación de interacción puede escribirse en términos de los operadores \hat{c} y \hat{c}^\dagger como:

$$\hat{H}_I^{(1)}(t) = \frac{-i\hbar\Omega_0}{2}\sqrt{n+1}(e^{i\Delta_c t}\hat{c} - e^{-i\Delta_c t}\hat{c}^\dagger). \quad (2.45)$$

El conjunto de operadores que constituyen el Hamiltoniano de interacción, cierran ante la conmutación, lo que hace posible escribir el operador de evolución temporal como un producto de exponenciales [20].

$$\hat{U}_I^{(1)}(t) = e^{\epsilon_1 \hat{c}^\dagger} e^{\epsilon_2 \hat{c}} e^{\epsilon_3 \hat{\sigma}_z}, \quad (2.46)$$

con funciones dependientes del tiempo ϵ_i . El operador de evolución temporal en la representación de interacción, es solución de la ecuación y cumple con la condición inicial:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_I(t)}{dt} = \hat{H}_I \hat{U}_I(t); \quad \hat{U}_I(t_0, t_0) = \mathbf{1}, \quad (2.47)$$

sustituyendo $\hat{U}_I(t)$ en la ecuación anterior.

$$\dot{\epsilon}_1 \hat{c}^\dagger + e^{\epsilon_1 \hat{c}^\dagger} \dot{\epsilon}_2 \hat{c} e^{-\epsilon_1 \hat{c}^\dagger} + e^{\epsilon_1 \hat{c}^\dagger} e^{\epsilon_2 \hat{c}} \dot{\epsilon}_3 \hat{\sigma}_z e^{-\epsilon_2 \hat{c}} e^{-\epsilon_1 \hat{c}^\dagger} = -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} (e^{i\Delta ct} \hat{c} - e^{-i\Delta ct} \hat{c}^\dagger), \quad (2.48)$$

realizando las transformadas usando el teorema BCH [31] y resolviendo para $\dot{\epsilon}_i$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} (e^{i\Delta ct} + e^{-i\Delta ct} \epsilon_1^2) \\ \dot{\epsilon}_2 &= -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} (1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2) e^{i\Delta ct} \\ \dot{\epsilon}_3 &= -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} e^{i\Delta ct} \epsilon_1, \end{aligned}$$

on las condiciones iniciales $\epsilon_1(0) = \epsilon_2(0) = \epsilon_3(0) = 0$.

Conociendo las expresiones anteriores, construimos el operador de evolución completo para el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

$$\hat{U}_{JC}(t) = \hat{U}_0(t) \hat{U}_I^{(1)}(t). \quad (2.49)$$

2.4.1. Evolución temporal.

Consideramos un estado inicial dado por $|\Psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle \equiv |e, \alpha\rangle$ correspondiente al átomo de dos niveles en su estado excitado y la cavidad en un estado coherente. Aplicando el operador $\hat{U}_{JC}(t)$ al estado inicial obtenemos:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{\epsilon_3} \left(e^{-it(\omega_c n + \omega_a/2)} |e, n\rangle + \epsilon_1 e^{-it(\omega_c(n+1) - \omega_a/2)} |g, n+1\rangle \right), \quad (2.50)$$

de igual forma que en 2.35, podemos calcular la probabilidad de encontrar al sistema en el estado excitado.

$$P_e(t) = \sum_n |c_n|^2 e^{2\text{Re}[\epsilon_3]}. \quad (2.51)$$

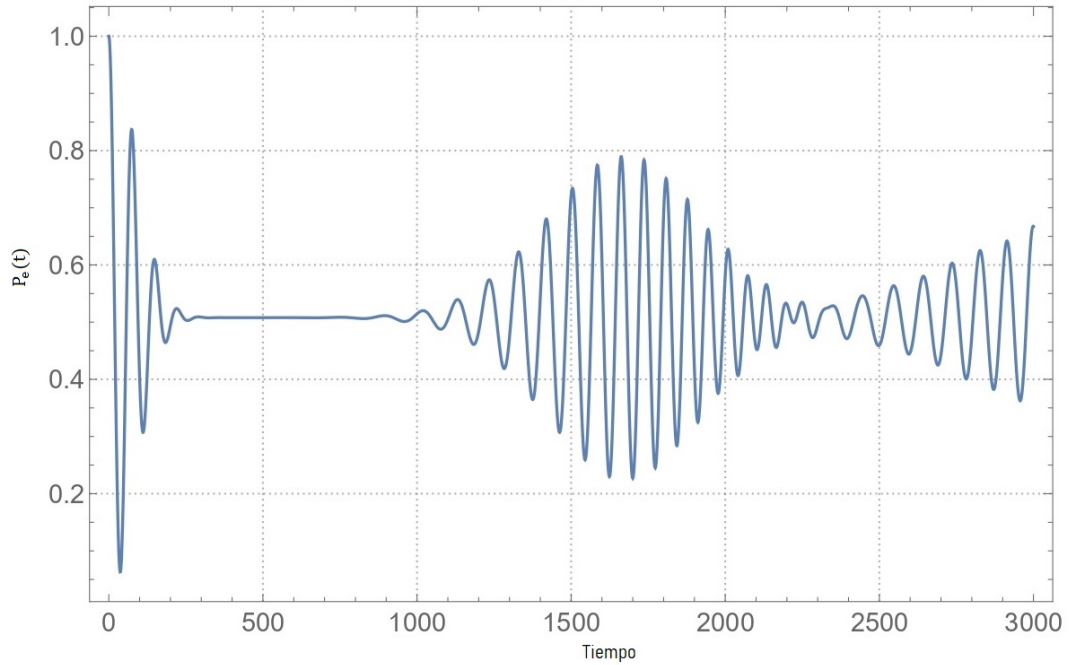


Figura 5: Evolución temporal de la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado $P_e(t)$ con un número medio de fotones $\bar{n} = 10$ y $\Omega_0 = 0.025$.

El valor esperado de un operador $\hat{O}(t)$ es:

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{O} \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle. \quad (2.52)$$

Consideramos ahora el valor promedio de fotones.

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{2\text{Re}[\epsilon_3]} (n + |\epsilon_1|^2 (n + 1)), \quad (2.53)$$

y el valor esperado del operador $\hat{\sigma}_z(t)$

$$\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{2\text{Re}[\epsilon_3]} (1 - |\epsilon_1|^2). \quad (2.54)$$

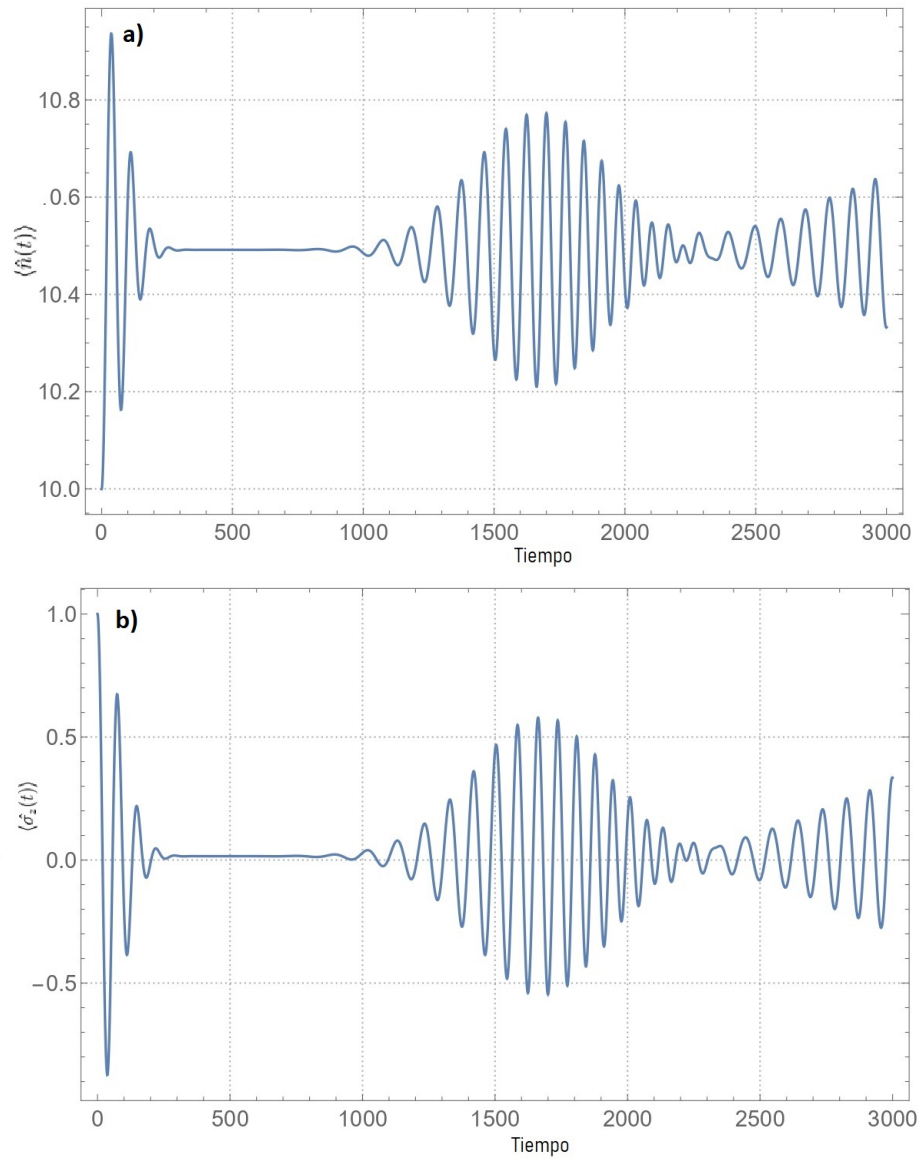


Figura 6: a) Evolución temporal del valor promedio del número de fotones. b) Evolución temporal del valor medio de las excitaciones atómicas. En ambos casos el valor promedio inicial de fotones es $\bar{n} = 10$ y $\Omega_0 = 0.025$.

Finalmente al analizar las figuras (6a) y (6b), es evidente el entrelazamiento de la evolución atómica con el campo en la cavidad. Al tiempo inicial ($t = 0$) el átomo se encuentra en el estado excitado y la cavidad tiene $\bar{n} = 10$ fotones. Tiempo después, el átomo “cede” energía y en la cavidad aumentan el número de fotones $\bar{n} \approx 11$. Dando lugar a las ya mencionadas oscilaciones de Rabi.

2.5. Conclusión.

En este capítulo estudiamos a detalle la formulación del Modelo de Jaynes-Cummings, un modelo ampliamente utilizado para analizar la interacción radiación-materia.

Comenzamos explicando las aproximaciones que se proponen para llegar el Hamiltoniano característico \hat{H}_{JC} , parte del arreglo experimental que se usa comúnmente para reproducir este tipo de interacciones, el confinamiento del átomo dentro de una cavidad Fabry-Perot que nos permite controlar las propiedades del campo electromagnético incidente. Luego, resolvimos el sistema en cuestión, primeramente por medio del procedimiento encontrado en la literatura [7], repasamos la explicación para los colapsos y reavivamientos que se presentan en la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado $P_e(t)$. Finalmente propusimos una solución distinta, basada en métodos algebraicos, calculamos el valor esperado del número medio de fotones y de la excitación atómica, lo que nos permitió evidenciar claramente el intercambio que se da entre las excitaciones atómicas y del campo.

3. Sistema Optomecánico.

Brevemente podemos definir la optomecánica cuántica como el campo que estudia a un nivel fundamental las interacciones entre radiación electromagnética dentro de una cavidad óptica y un oscilador mecánico. Ofrece una vía para determinar y controlar el estado cuántico de objetos macroscópicos y traza el camino para nuevos experimentos que conducen a un entendimiento más profundo de la mecánica cuántica en general; además, desde una perspectiva más práctica, las técnicas usadas en optomecánica cuántica, en los regímenes del óptico y las microondas, proveen formas de medir movimientos y fuerzas cerca de los límites impuestos por la mecánica cuántica [13].

Esta rama tiene sus orígenes en los primeros intentos para desarrollar detectores de ondas gravitacionales [32] usando las deformaciones elásticas de resonadores mecánicos e interferómetros ópticos con superficies reflejantes [33]. En esencia, estos detectores funcionan acoplando masas de prueba del orden de kilogramos a los osciladores mecánicos en un interferómetro óptico de gran longitud. Los cambios en la longitud de la trayectoria óptica se asocian a cambios locales en la curvatura del espacio-tiempo, estos cambios, modulan la frecuencia de resonancia de la cavidad y a su vez, modulan la transmisión óptica a través del interferómetro. Los trabajos teóricos iniciales fueron realizados por Braginsky [34], Caves [35] entre otros. Los avances en optomecánica cuántica tuvieron una aceleración durante la década pasada con el desarrollo de nuevas formas de construir resonadores mecánicos macroscópicos a diferentes escalas; haces de luz nanométricos acoplados a cavidades de microondas [36], cristales fotónicos-fonónicos [37], micro resonadores ópticos toroidales [38], capacitores superconductores en resonadores de microondas [39]. Una gran variedad de sistemas optomecánicos [40] y electromecánicos [41, 42] se han desarrollado con el objetivo de posibilitar la detección y control de elementos mecánicos a escalas que alcancen la frontera impuesta por la mecánica cuántica.

Un elemento clave de la optomecánica cuántica es la capacidad de preparar uno o más modos de un oscilador mecánico en un estado cuántico bien definido (el estado base, por ejemplo) para posteriormente manipular este estado coherentemente y realizar mediciones ultra precisas del desplazamiento o la energía del oscilador. Generalmente, esto se logra acoplando el oscilador mecánico a un campo electromagnético con frecuencias en el orden del óptico o las microondas [43]. Esto permite, entre otros procesos, enfriar los modos mecánicos de interés dando la posibilidad de observar una gama de efectos cuánticos de este sistema, estados de gato [22], entrelazamiento [19] y detección de estados de Fock [15], entre otros.

Estos tres procesos, preparar el estado, control coherente y mediciones cuánticas, son la base para el desarrollo de una gran variedad de tecnologías. La motivación de estos avances va desde el entendimiento fundamental de la mecánica cuántica [44], el estudio de física cuántica disipativa no lineal, construcción de dispositivos extremadamente sensibles para medir masas y fuerzas [45, 46] hasta aplicaciones en el procesamiento de información cuántica [47].

El arreglo experimental más sencillo para un sistema optomecánico consiste de una cavidad óptica (Fig. 7), cuya longitud depende de la posición del oscilador mecánico, en consecuencia la frecuencia de oscilación del campo $\omega_c(\hat{z})$ es una función dependiente de la posición del resonador mecánico. El ejemplo más común es una cavidad tipo Fabry-Perot con un espejo movable.

La descripción teórica de los sistemas optomecánicos no está dada en términos de la dinámica cuántica de los átomos constituyentes del oscilador mecánico, esta descripción es prácticamente imposible de realizar. En su lugar, se hace una cuantización efectiva de los modos de vibración del oscilador. Se comienza con la ecuación de onda para las excitaciones del resonador y se define un conjunto de modos ortonormales. Estos modos se cuantizan directamente de forma similar a la cuantización de un campo escalar.

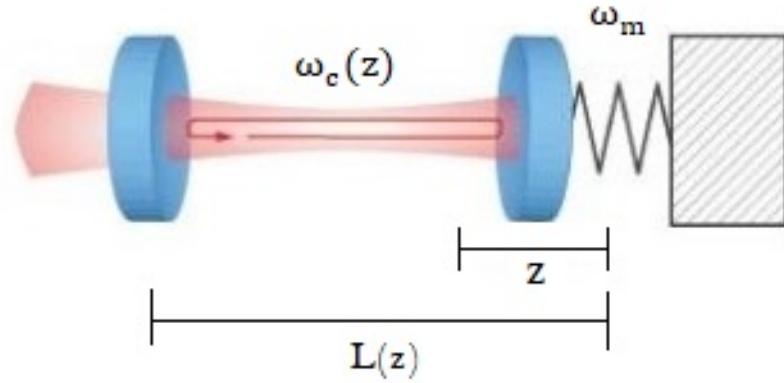


Figura 7: Representación esquemática de un sistema optomecánico de un espejo con posición variable z y frecuencia ω_m acoplado a una cavidad de longitud $L(z)$ y a un solo modo del campo con frecuencia ω_c .

A continuación se presenta la solución exacta del sistema, basado en el método algebraico mostrado en el capítulo anterior. Posteriormente, se estudia la inclusión de un término de forzamiento en el campo, en este caso se propone una solución aproximada. En el escenario con forzamiento, se contrastan los resultados obtenidos, resolviendo el sistema numéricamente.

3.1. El Hamiltoniano optomecánico.

El Hamiltoniano del sistema se deriva del trabajo propuesto por C. K. Law [48], donde se presenta un Hamiltoniano no relativista que describe la interacción, debido a la presión de radiación, entre el campo en la cavidad y un espejo que oscila con una frecuencia $\omega_m(\hat{z})$, usando la ecuación de movimiento del espejo (considerado como un oscilador armónico) y la ecuación de onda del campo.

Considerando un solo modo de campo en la cavidad y expresando los términos asociados a la posición y momento del espejo oscilante en términos de los operadores de creación y aniquilación de las excitaciones mecánicas (fonones), podemos expresar

el Hamiltoniano para el sistema optomecánico.

$$\hat{H} = \hbar\omega_c(\hat{z})\hat{n} + \hbar\omega_m\hat{N} \quad (3.1)$$

Típicamente, dado que la amplitud de las oscilaciones mecánicas es pequeña, podemos desarrollar $\omega_c(\hat{z})$ en serie de Taylor.

$$\omega_c(\hat{z}) = \omega_c + \frac{\partial\omega_c}{\partial\hat{z}}\hat{z} + O(\hat{z}^2) + \dots \quad (3.2)$$

Quedándonos a primer orden en z :

$$\hat{H} = \hbar\omega_c\hat{n} + \hbar\omega_m\hat{N} + \hbar\frac{\partial\omega_c}{\partial z}\hat{z}\hat{n}, \quad (3.3)$$

vemos que en 3.3 el último término es aquel que acopla la posición del modo mecánico con el número de fotones en la cavidad. Reescribimos 3.3 ahora en términos de los operadores de creación y aniquilación mecánicos:

$$\hat{H}_{opt} = \hbar\omega_c\hat{n} + \hbar\omega_m\hat{N} - \hbar G\hat{n}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (3.4)$$

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad \hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b}.$$

Donde $G \equiv -\frac{\partial\omega_c}{\partial x}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$. En el caso particular de una cavidad de Fabry-Pérot, la constante de acoplamiento puede ser determinada directamente de la geometría del sistema [48] $G = -\frac{\omega_c}{L}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$.

Antes de resolver el sistema, podemos obtener un resultado interesante del Hamiltoniano anterior. Si calculamos el valor esperado de la fuerza sobre la variable del modo mecánico:

$$\hat{F} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial z}, \quad \langle \hat{F} \rangle = G\sqrt{2\hbar m\omega_m} \langle \hat{n} \rangle. \quad (3.5)$$

En la ecuación anterior se muestra que la fuerza que el modo mecánico siente es proporcional al número de fotones en la cavidad, esta fuerza es la denominada presión de radiación.

3.2. Solución al sistema optomecánico.

El conjunto de operadores que aparecen en \hat{H}_{opt} tienen las siguientes relaciones de conmutación:

	\hat{n}	\hat{N}	$\hat{n}\hat{b}$	$\hat{n}\hat{b}^\dagger$	\hat{n}^2
\hat{n}	0	0	0	0	0
\hat{N}	0	0	$-\hat{n}\hat{b}$	$\hat{n}\hat{b}^\dagger$	0
$\hat{n}\hat{b}$	0	$\hat{n}\hat{b}$	0	\hat{n}^2	0
$\hat{n}\hat{b}^\dagger$	0	$-\hat{n}\hat{b}^\dagger$	$-\hat{n}^2$	0	0
\hat{n}^2	0	0	0	0	0

En esta tabla, hemos incorporado el operador \hat{n}^2 el cual proviene del conmutador entre $\hat{n}\hat{b}$ y $\hat{n}\hat{b}^\dagger$. El conjunto de operadores que se muestran en la tabla es cerrado ante las relaciones de conmutación. Entonces, el operador de evolución temporal correspondiente a \hat{H}_{opt} se puede escribir de forma exacta como un producto de exponenciales [49].

$$\hat{U}_{opt} = e^{\alpha_1 \hat{n}} e^{\alpha_2 \hat{N}} e^{\alpha_3 \hat{n}^2} e^{\alpha_4 \hat{n}\hat{b}^\dagger} e^{\alpha_5 \hat{n}\hat{b}}, \quad (3.6)$$

donde las α_i son funciones dependientes del tiempo.

\hat{U}_{opt} debe satisfacer:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_{opt}}{\partial t} = \hat{H}_{opt} \hat{U}_{opt}; \quad \hat{U}_{opt}(t_0, t_0) = \mathbf{1}, \quad (3.7)$$

realizando primero la derivada respecto al tiempo de \hat{U}_{opt} , obtenemos:

$$\frac{\partial \hat{U}_{opt}}{\partial t} = \left(\dot{\alpha}_1 \hat{n} + \dot{\alpha}_2 \hat{N} + \dot{\alpha}_3 \hat{n}^2 + e^{\alpha_2 \hat{N}} \dot{\alpha}_4 \hat{n} \hat{b}^\dagger e^{-\alpha_2 \hat{N}} + e^{\alpha_2 \hat{N}} e^{\alpha_4 \hat{n} \hat{b}^\dagger} \dot{\alpha}_5 \hat{n} \hat{b} e^{-\alpha_4 \hat{n} \hat{b}^\dagger} e^{-\alpha_2 \hat{N}} \right) \hat{U}_{opt}, \quad (3.8)$$

haciendo las transformadas y sustituyendo en la ecuación 3.7.

$$i \left(\dot{\alpha}_1 \hat{n} + \dot{\alpha}_2 \hat{N} + \dot{\alpha}_3 \hat{n}^2 + \dot{\alpha}_4 e^{\alpha_2 \hat{N}} \hat{n} \hat{b}^\dagger + \dot{\alpha}_5 (e^{-\alpha_2 \hat{N}} \hat{n} \hat{b} - \dot{\alpha}_4 \hat{n}^2) \right) = \omega_c \hat{n} + \omega_m \hat{N} - G \hat{n} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (3.9)$$

a partir de 3.9, encontramos la forma explícita de las α_i :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -i\omega_c t, \\ \alpha_2 &= -i\omega_m t, \\ \alpha_3 &= -\left(\frac{G}{\omega_m}\right)^2 (-i\omega_m t + (1 - e^{-i\omega_m t})), \\ \alpha_4 &= -\frac{G}{\omega_m} (1 - e^{i\omega_m t}), \\ \alpha_5 &= \frac{G}{\omega_m} (1 - e^{-i\omega_m t}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

de las relaciones anteriores, notamos que $\alpha_5 = -\alpha_4^*$. Por lo tanto, resulta de utilidad reescribir \hat{U}_{opt} usando la identidad de Glauber [31].

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}, \quad [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \quad (3.11)$$

sustituyendo las últimas exponenciales en \hat{U}_{opt} :

$$e^{\alpha_4 \hat{n} \hat{b}^\dagger} e^{-\alpha_4^* \hat{n} \hat{b}} = e^{\alpha_4 \hat{n} \hat{b}^\dagger - \alpha_4^* \hat{n} \hat{b}} e^{\frac{1}{2}|\alpha_4| \hat{n}^2}. \quad (3.12)$$

Finalmente, en términos del operador de desplazamiento de Glauber:

$$\hat{D}_{\hat{A}}(\alpha) = e^{\alpha\hat{A}^\dagger - \alpha^*\hat{A}}, \quad (3.13)$$

$$\hat{U}_{opt} = e^{\alpha_1\hat{n}} e^{\alpha_2\hat{N}} e^{(\alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2)\hat{n}^2} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4\hat{n}). \quad (3.14)$$

3.3. Evolución temporal y cálculo de observables.

Consideramos ahora un estado inicial dado por el producto de estados coherentes

$$|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_c \otimes |\Gamma\rangle_m, \quad (3.15)$$

donde $|\alpha\rangle_c$ corresponde a un estado coherente del campo y $|\Gamma\rangle_m$ es un estado coherente mecánico. Aplicamos \hat{U}_{opt} al estado inicial para encontrar el estado al tiempo t .

$$\begin{aligned} \hat{U}_{opt}|\Psi(0)\rangle &= e^{\alpha_1\hat{n}} e^{\alpha_2\hat{N}} e^{(\alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2)\hat{n}^2} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4\hat{n})|\alpha\rangle_c \otimes |\Gamma\rangle_m \\ &= |\Psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comenzamos aplicando el operador de desplazamiento $\hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4\hat{n})$ sobre el estado coherente mecánico $|\Gamma\rangle_m$. Para esto es necesario repasar brevemente algunas identidades. Recordando una de las definiciones de estados coherentes propuestas por Glauber [50]. Un estado coherente se construye a partir de aplicar el operador de desplazamiento sobre el estado de vacío.

$$\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (3.17)$$

de esta forma podemos escribir:

$$\hat{D}_{\hat{a}}(\beta)|\alpha\rangle = \hat{D}_{\hat{a}}(\beta)\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha)|0\rangle, \quad (3.18)$$

desarrollamos el lado derecho de la igualdad usando 3.11

$$\hat{D}_{\hat{a}}(\beta)\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}e^{\beta\hat{a}^\dagger}e^{-\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}, \quad (3.19)$$

con la finalidad de escribir los operadores en 3.11 en orden normal, usamos de nueva cuenta 3.11

$$e^{-\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}}e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta^*}, \quad (3.20)$$

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\beta^*\hat{a}}e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta^*}, \quad (3.21)$$

sustituimos 3.20 en 3.21 y obtenemos:

$$e^{-\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\beta^*\hat{a}}e^{-\alpha\beta^*}, \quad (3.22)$$

reemplazando en 3.19:

$$e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}e^{-\alpha\beta^*}e^{\beta\hat{a}^\dagger}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\beta^*\hat{a}}e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}e^{-\alpha\beta^*}e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger}e^{-(\alpha+\beta)^*\hat{a}}, \quad (3.23)$$

reordenando las funciones α y β en las exponenciales obtenemos:

$$\hat{D}_{\hat{a}}(\beta)\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha) = e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^*-\alpha\beta^*)}e^{-|\alpha+\beta|^2}e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger}e^{-(\alpha+\beta)^*\hat{a}}, \quad (3.24)$$

de la ecuación anterior vemos que se tiene la estructura del operador de desplazamiento.

$$\hat{D}_{\hat{a}}(\beta)\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha) = e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^*-\alpha\beta^*)}\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha+\beta), \quad (3.25)$$

dada 3.25, podemos expresar la acción del operador de desplazamiento sobre un estado coherente.

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\hat{a}}(\beta)|\alpha\rangle &= e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^*-\alpha\beta^*)}\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha+\beta)|0\rangle \\ &= e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^*-\alpha\beta^*)}|\alpha+\beta\rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Reemplazando el operador de desplazamiento $\hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4 \hat{n})$ y el estado coherente mecánico $|\Gamma\rangle_m$ en 3.26.

$$\hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4 \hat{n})|\Gamma\rangle_m = e^{\frac{1}{2}(\alpha_4 \Gamma^* - \Gamma \alpha_4^*) \hat{n}} |\Gamma + \alpha_4 n\rangle_m, \quad (3.27)$$

para continuar con el cálculo del estado al tiempo t es conveniente expresar el estado coherente del campo $|\alpha\rangle_c$ en términos de la base de los estados de número $|n\rangle_c$

$$|\alpha\rangle_c = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_c, \quad (3.28)$$

$$\hat{U}_{opt}|\Psi(0)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{[\alpha_1 + \frac{1}{2}(\alpha_4 \Gamma^* - \Gamma \alpha_4^*)] \hat{n}} e^{\alpha_2 \hat{N}} e^{(\alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2) \hat{n}^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_c \otimes |\Gamma + \alpha_4 n\rangle_m, \quad (3.29)$$

aplicando el resto de los operadores.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{[\alpha_1 + \frac{1}{2}(\alpha_4 \Gamma^* - \Gamma \alpha_4^*)]n} e^{(\alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2)n^2} |n\rangle \otimes |\Gamma_n(t)\rangle_m, \quad (3.30)$$

dadas las expresiones explícitas de las funciones α_i (3.10), tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2 &= i \left(\frac{G}{\omega_m} \right)^2 (\omega_m t - \text{sen} \omega_m t), \\ \alpha_1 + \frac{1}{2}(\alpha_4 \Gamma^* - \Gamma \alpha_4^*) &= -i[\omega_c t - \Im(\alpha_4 \Gamma^*)], \end{aligned} \quad (3.31)$$

y

$$\Gamma_n(t) = \Gamma e^{-i\omega_m t} + n \frac{G}{\omega_m} (1 - e^{-i\omega_m t}), \quad (3.32)$$

en consecuencia la función de onda o el vector de estado del sistema optomecánico al tiempo t es:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i \left(\frac{G}{\omega_m} \right)^2 (\omega_m t - \text{sen} \omega_m t) n^2} e^{-i[\omega_c t - \Im(\alpha_4 \Gamma^*)]n} |n\rangle \otimes |\Gamma_n(t)\rangle_m, \quad (3.33)$$

de las ecuaciones 3.32 y 3.33 se observa que el entrelazamiento entre el campo y el oscilador mecánico es máximo para $\omega_m t = \pi$ y el sistema regresa a su estado no entrelazado en $\omega_m t = 2\pi$.

Conociendo el vector de estado del sistema a cualquier tiempo, podemos calcular el valor esperado de las observables.

El valor esperado de fotones, no resulta de interés para este sistema ya que es simplemente el número promedio de fotones en la cavidad cuyo valor se mantiene constante en el tiempo.

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}. \quad (3.34)$$

Por otra parte, el número promedio de fonones el tiempo t depende del número de fotones y está dado por:

$$\langle \hat{N}(t) \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\Gamma_n(t)|^2. \quad (3.35)$$

Para el cálculo de los observables, se tomaron los siguientes valores para el conjunto de parámetros presentes en el Hamiltoniano (\hat{H}_{opt}), los cuales son del orden correspondiente a un oscilador nanomecánico [49]. Sin embargo, por simplicidad en el cálculo numérico se hizo una normalización $\omega_c = 1$, $\omega_m = 1.6 \times 10^{-3}\omega_c$, $G/\omega_m = 2 \times 10^{-2}$.

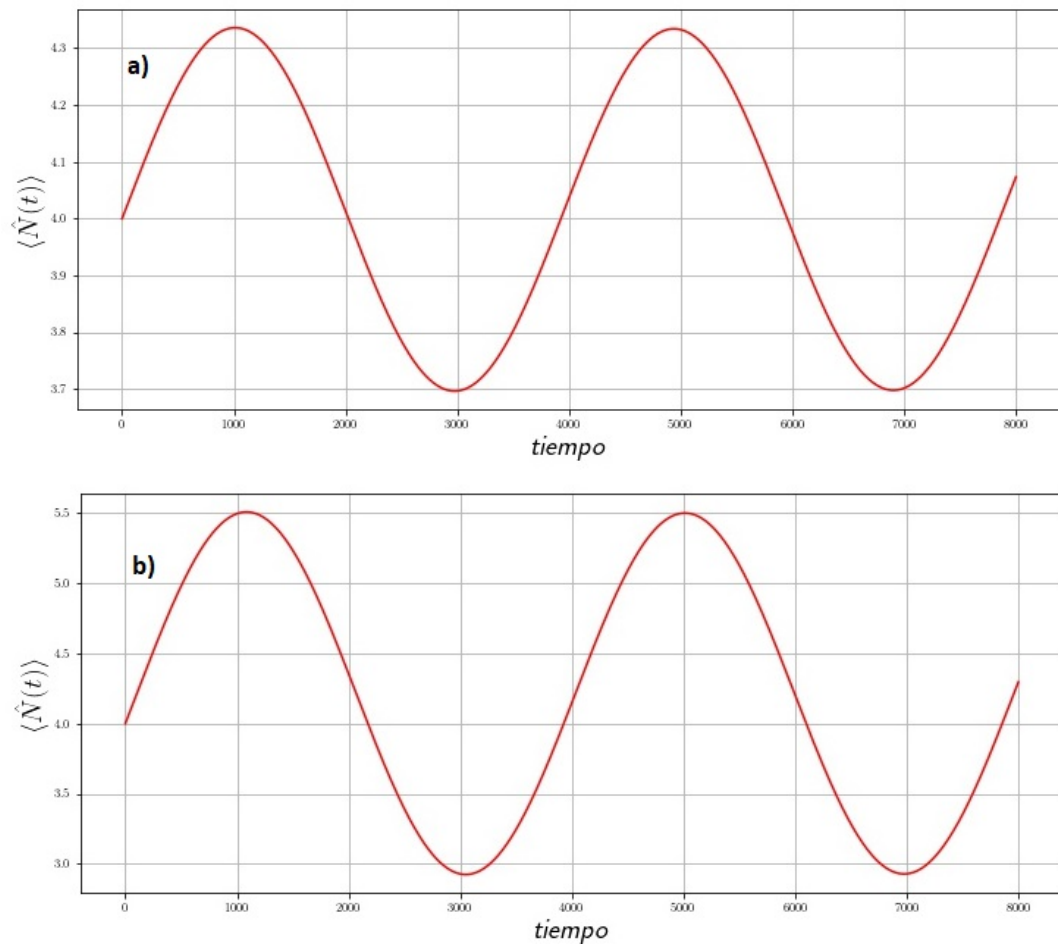


Figura 8: Valor promedio del número de fonones como función del tiempo. a) Estado inicial $|\alpha = 2\rangle \otimes |\Gamma = 2i\rangle$. b) Estado inicial $|\alpha = 4\rangle \otimes |\Gamma = 2i\rangle$.

En la figura 8, se aprecia gráficamente el entrelazamiento dado por el número de fotones en la evolución temporal de las excitaciones mecánicas. En 8a, para un valor medio de fotones $\bar{n} = 4$, el número promedio de fonones cambia de un valor inicial de $\bar{N} = 4$ a un comportamiento oscilatorio con periodo del orden de 10^2 y una amplitud que ronda los 4.3.

Mientras que cuando se incrementó el número promedio de fotones a $\bar{n} = 16$, debido al entrelazamiento mostrado en 3.32, se observa un incremento en la amplitud de las oscilaciones del número medio de fonones llegando a alcanzar valores cercanos a los 5.5, debido que el período de las oscilaciones depende solo de la frecuencia de oscilador mecánico $T_m = 2\pi/\omega_m$, el período para ambos casos coincide.

3.4. Función Q-Husimi.

La formulación de la mecánica cuántica en el espacio fase ha desempeñado un papel fundamental en el esclarecimiento del comportamiento no clásico de ciertos sistemas cuánticos [51]. En este contexto, la representación de campos cuánticos en el espacio fase en términos de cuasiprobabilidades es ampliamente usada en óptica cuántica, especialmente la función de Wigner y la función Q-Husimi.

El cálculo de estas funciones de cuasiprobabilidad resulta en ocasiones una tarea laboriosa la cual involucra la integración sobre el espacio fase, sin embargo, cuando se conoce la matriz de densidad del sistema, el cálculo de estas funciones puede hacerse mediante una representación en series [52]. La forma más simple de evaluar la función Husimi está dada por [7]:

$$\begin{aligned} Q^{[\rho]}(\alpha; t) &= \frac{1}{\pi} \text{Tr}[\rho(t)|\alpha\rangle\langle\alpha|], \\ &= \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\rho(t)|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} |\langle\alpha|\Psi(t)\rangle|^2, \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente y $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ es la matriz de densidad para un estado puro al tiempo t .

Por definición sabemos que la función Husimi es siempre positiva y normalizada.

Para el sistema optomecánico, la función Husimi asociada a las variables mecánicas es:

$$Q^{[\rho_m]}(\mu; t) = \frac{1}{\pi} \langle \mu | \rho_m(t) | \mu \rangle, \quad (3.37)$$

donde $|\mu\rangle$ es un estado coherente mecánico y $\rho_m(t)$ es la traza parcial de la matriz de densidad sobre las variables del campo dada por:

$$\rho_m(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\Gamma_n(t)\rangle \langle \Gamma_n(t)|, \quad (3.38)$$

sustituyendo en 3.37 obtenemos:

$$Q^{[\rho_m]}(\mu; t) = \frac{1}{\pi} e^{-|\mu|^2 - |\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\Gamma_n(t)|^2} e^{2\Re(\mu^* \Gamma_n(t))}, \quad (3.39)$$

la función Husimi para el campo es:

$$Q^{[\rho_c]}(\epsilon; t) = \frac{1}{\pi} \langle \epsilon | \rho_c(t) | \epsilon \rangle, \quad (3.40)$$

donde $|\epsilon\rangle$ es un campo coherente del campo y $\rho_c(t) = Tr_m[\rho(t)]$. La función Husimi para el campo resulta:

$$Q^{[\rho_c]}(\epsilon; t) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - |\epsilon|^2} \sum_{p,q} F_p(\alpha, \Gamma, \epsilon; t) F_q^*(\alpha, \Gamma, \epsilon; t) e^{\Gamma_p(t) \Gamma_q^*(t)}, \quad (3.41)$$

con

$$F_p(\alpha, \Gamma, \epsilon; t) = \frac{(\epsilon \alpha)^p}{p!} e^{i(\frac{\epsilon}{\omega_m})^2 (\omega_m t - \text{sen} \omega_m t) p^2} e^{-i[\omega_c t - \Im(\alpha_4 \Gamma^*)] p} e^{-\frac{1}{2} |\Gamma_p(t)|^2}, \quad (3.42)$$

y α_4 dada por la ecuación 3.10.

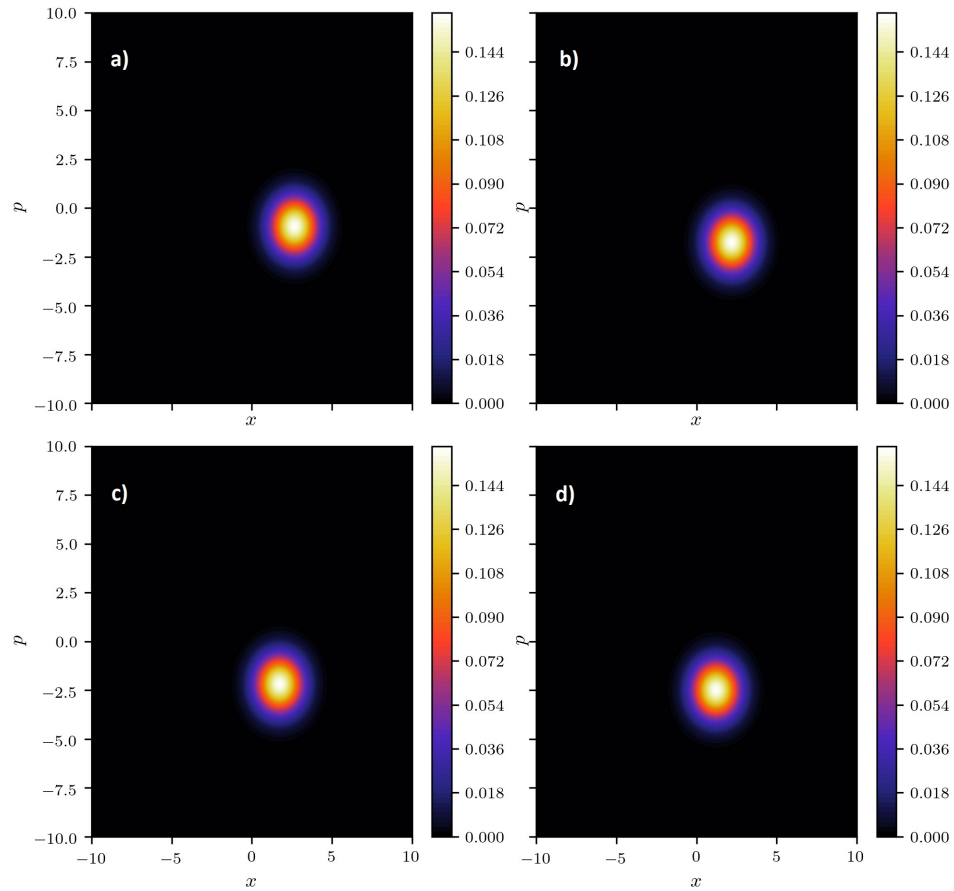


Figura 9: Representación pictográfica de la función Husimi $Q^{[\rho_m]}(\mu; t)$ para un estado coherente mecánico. Donde $|\alpha = 2\rangle$ y $|\Gamma = 2\rangle$ son los estados iniciales del campo y del espejo. Consideramos cuatro diferentes tiempos: a) $t = 0$, b) $t = 2400$, c) $t = 3200$ y d) $t = 4000$.

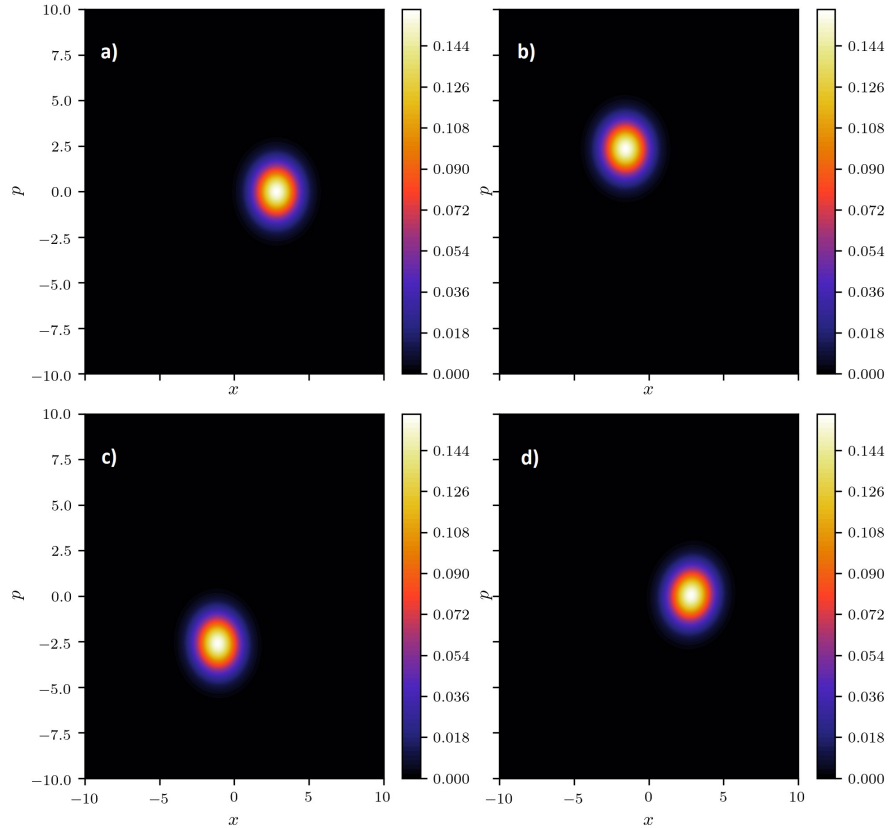


Figura 10: Representación pictográfica de la función Husimi $Q^{[\rho_c]}(\phi; t)$ para un estado coherente del campo. Donde $|\alpha = 2\rangle$ y $|\Gamma = 2\rangle$ son los estados iniciales del campo y del espejo. Consideramos cuatro diferentes tiempos: a) $t = 0$, b) $t = 400$, c) $t = 800$ y d) $t = 1200$.

En la figura 9 y 10 se muestran a distintos tiempos, la función Husimi del oscilador mecánico y del campo respectivamente. En el caso mecánico, la función comienza con la distribución característica de un estado coherente, centrado en el valor $\Gamma = (2, 0)$, para tiempos posteriores del orden de 10^3 apenas hay un ligero desplazamiento en el espacio fase y no se presenta deslocalización en la distribución de probabilidad. Por otra parte, para el campo, se conserva la distribución de probabilidad a través del tiempo, a diferencia de la distribución mecánica va claramente desplazándose por el espacio fase, regresando aproximadamente a su posición inicial $\alpha = (2, 0)$ al tiempo $t = 1200$.

3.5. Forzando el sistema optomecánico.

Una forma de amplificar la interacción optomecánica es forzar el campo en la cavidad mediante un láser externo. En presencia de un láser de bombeo suficientemente potente, el aumento del campo dentro de la cavidad óptica es lo suficientemente grande como para desencadenar un comportamiento no lineal del sistema. Dependiendo de la potencia de entrada y del desfaseamiento del láser con respecto a la resonancia de la cavidad, los sistemas optomecánicos presentan diferentes tipos de comportamiento no lineal. En este sentido, incorporamos ahora un término de forzamiento en el campo representado por un láser externo de frecuencia ω_d y amplitud Ω

$$\hat{H}_d = \hat{H}_{opt} + \hbar\Omega\cos(\omega_d t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.43)$$

con \hat{H}_{opt} dado por la ecuación 3.4. Para tratar con el término de forzamiento pasamos a la representación de interacción. El operador de evolución completo para el sistema optomecánico forzado lo escribimos como $\hat{U}_d = \hat{U}_{opt}\hat{U}_I^{(2)}$, donde el operador de evolución temporal en la representación de interacción $\hat{U}_I^{(2)}$ satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\hat{U}_I^{(2)}}{\partial t} &= \hat{H}_I\hat{U}_I^{(2)}, \\ i\hbar\frac{\partial\hat{U}_I^{(2)}}{\partial t} &= \hat{U}_{opt}^\dagger\hat{H}_d\hat{U}_{opt}\hat{U}_I^{(2)}, \\ i\hbar\frac{\partial\hat{U}_I^{(2)}}{\partial t} &= \hbar\Omega\cos(\omega_d t)[\hat{U}_{opt}^\dagger(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{U}_{opt}]\hat{U}_I^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

con la condición inicial $\hat{U}_I^{(2)}(t_0, t_0) = 1$. Realizando la transformada anterior.

$$\begin{aligned} \hat{U}_{opt}^\dagger\hat{a}\hat{U}_{opt} &= e^{iE(t)(2\hat{n}+1)}e^{iF(t)[\hat{b}^\dagger e^{i\frac{\omega_m t}{2}} + \hat{b}e^{-i\frac{\omega_m t}{2}}]}\hat{a}e^{-i\omega_c t}, \\ \hat{U}_{opt}^\dagger\hat{a}\hat{U}_{opt} &= \hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t}e^{-iF(t)[\hat{b}^\dagger e^{i\frac{\omega_m t}{2}} + \hat{b}e^{-i\frac{\omega_m t}{2}}]}e^{-iE(t)(2\hat{n}+1)}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \left(\frac{G}{\omega_m} \right) \text{sen} \left(\frac{\omega_m t}{2} \right), \\ E(t) &= \left(\frac{G}{\omega_m} \right)^2 (\omega_m t - \text{sen}(\omega_m t)), \end{aligned} \quad (3.46)$$

en 3.45, vemos que hay operadores en las exponenciales, lo que imposibilita el uso de los métodos algebraicos (teorema de Wei-Norman). Sin embargo, el factor G/ω_m es mucho menor que uno, por lo que podemos aproximar el Hamiltoniano de interacción [49].

$$\hat{H}_I = \hbar \Omega \cos(\omega_d t) (\hat{a} e^{-i\omega_c t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t}), \quad (3.47)$$

de esta forma, podemos escribir el operador de evolución temporal $\hat{U}_I^{(2)}(t)$, en la estructura de Wei-Norman como:

$$\hat{U}_I^{(2)}(t) = e^{\beta \hat{a}^\dagger} e^{\gamma \hat{a}} e^\delta, \quad (3.48)$$

donde β , γ y δ son funciones dependientes del tiempo que pueden obtenerse a partir de la ecuación de Schrödinger para el operador de evolución temporal en la representación de interacción 3.44.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\beta \hat{a}^\dagger} e^{\gamma \hat{a}} e^\delta = \hbar \Omega \cos(\omega_d t) (\hat{a} e^{-i\omega_c t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t}) e^{\beta \hat{a}^\dagger} e^{\gamma \hat{a}} e^\delta, \quad (3.49)$$

realizando las operaciones correspondientes, encontramos que las funciones β , γ y δ satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -i\Omega \cos(\omega_d t) e^{i\omega_c t}, \\ \dot{\gamma} &= -i\Omega \cos(\omega_d t) e^{-i\omega_c t}, \\ \dot{\delta} &= \beta \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

con las condiciones iniciales $\beta(0) = \gamma(0) = \delta(0)$.

Integrando obtenemos las expresiones analíticas:

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= -\frac{\Omega}{2} \left(\frac{e^{i(\omega_d + \omega_c)t}}{\omega_d + \omega_c} - \frac{1}{\omega_d + \omega_c} \right) + \frac{\Omega}{2} \left(\frac{e^{-i(\omega_d - \omega_c)t}}{\omega_d - \omega_c} - \frac{1}{\omega_d - \omega_c} \right), \\
\gamma(t) &= -\frac{\Omega}{2} \left(\frac{e^{i(\omega_d - \omega_c)t}}{\omega_d - \omega_c} - \frac{1}{\omega_d - \omega_c} \right) + \frac{\Omega}{2} \left(\frac{e^{-i(\omega_d + \omega_c)t}}{\omega_d + \omega_c} - \frac{1}{\omega_d + \omega_c} \right), \\
\delta(t) &= i \frac{\Omega^2}{4} \left(\frac{1}{\omega_d + \omega_c} - \frac{1}{\omega_d - \omega_c} \right) t + \frac{\Omega^2}{4} \left[\frac{e^{2i\omega_d t} - 1}{2\omega_d(\omega_d + \omega_c)} - \frac{e^{i(\omega_d - \omega_c)t} - 1}{\omega_d^2 - \omega_c^2} \right] \\
&\quad + \frac{\Omega^2}{4} \left[\frac{e^{-i(\omega_d + \omega_c)t} - 1}{(\omega_d + \omega_c)^2} + \frac{e^{i(\omega_d - \omega_c)t} - 1}{(\omega_d - \omega_c)^2} + \frac{e^{-2i\omega_d t} - 1}{2\omega_d(\omega_d - \omega_c)} - \frac{e^{-i(\omega_d + \omega_c)t} - 1}{\omega_d^2 - \omega_c^2} \right],
\end{aligned} \tag{3.51}$$

de las ecuaciones anteriores notamos que $\gamma = -\beta^*$, así que, es posible usar de nuevo el operador de desplazamiento de Glauber.

$$\hat{U}_I^{(2)} = e^\delta e^{\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}} = e^\delta e^{\frac{1}{2}|\beta|^2} \hat{D}_{\hat{a}}(\beta), \tag{3.52}$$

en el caso resonante, cuando $\omega_d = \omega_c$ la intergración queda:

$$\begin{aligned}
\beta &= -\frac{\Omega}{4\omega_d} (e^{2i\omega_d t} - 1) - i \frac{\Omega t}{2}, \\
\delta &= \frac{\Omega^2}{16\omega_d^2} [(1 - 2i\omega_d t)\cos(2\omega_d t) + i(1 + 2i\omega_d t)\text{sen}(2\omega_d t) + 1 - 2\omega_d^2 t^2]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Finalmente, podemos escribir el operador de evolución temporal completo para el sistema optomecánico forzado:

$$\hat{U}_d = e^{\delta + \frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\alpha_1 \hat{n}} e^{\alpha_2 \hat{N}} e^{\left(\alpha_3 + \frac{|\alpha|^2}{2}\right) \hat{n}^2} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4 \hat{n}) \hat{D}_{\hat{a}}(\beta). \tag{3.54}$$

3.5.1. Evolución temporal y cálculo de observables.

Al igual que en el caso del sistema sin forzamiento, consideramos un estado inicial dado por el producto de estados coherentes.

$$|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_c \otimes |\Gamma\rangle_m, \quad (3.55)$$

usando la relación obtenida en 3.27, y aplicando el resto del operador de evolución temporal tenemos:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{U}_{opt} e^{\delta + \frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} |\alpha + \beta\rangle_c \otimes |\Gamma\rangle_m \\ &= e^{\delta + \frac{1}{2}|\beta|^2 + \frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha) - \frac{1}{2}|\alpha + \beta|^2} \sum_p \frac{(\alpha + \beta)^p}{\sqrt{p!}} e^{[\alpha_1 + \frac{1}{2}(\alpha_4\Gamma^* - \alpha^*\Gamma)]p}, \\ &\quad \times e^{(\alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2)p^2} |p\rangle_c \otimes |\Gamma_p(t)\rangle_m \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde las funciones α_i son las expresiones encontradas en 3.10 y $\Gamma_p(t)$ está dada por 3.32. En consecuencia, el vector de estado del sistema optomecánico forzado al tiempo t es:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{\delta + \frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha + \beta|^2} e^{i\Im(\beta\alpha^*)} \sum_p \frac{(\alpha + \beta)^p}{\sqrt{p!}} e^{i(G/\omega_m)^2(\omega_m t - \text{sen}\omega_m t)p^2} \\ &\quad \times e^{-i[\omega_c t - \Im(\alpha_4\Gamma^*)]p} |p\rangle_c \otimes |\Gamma_p(t)\rangle_m. \end{aligned} \quad (3.57)$$

El Hamiltoniano del sistema optomecánico forzado dado por la ecuación 3.43 contiene operadores de creación y aniquilación del campo y un término de acoplamiento entre el número de fotones en el campo con los operadores escalera del oscilador mecánico. Debido al forzamiento, el número de fotones cambiará con el tiempo, a diferencia del sistema no forzado 3.4. Puesto que el acoplamiento entre el campo y el oscilador mecánico depende del número de fotones en la cavidad, resulta interesante evaluar la evolución temporal del número promedio de fotones y fonones.

El número promedio de fotones al tiempo t es:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \hat{n} | \Psi(t) \rangle \\ &= e^{2\Re(\delta) + |\beta|^2} |\alpha + \beta|^2 = |\alpha + \beta|^2, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde usamos la condición de unitariedad $2\Re(\delta) + |\beta|^2 = 0$.

En esta ocasión para los cálculos numéricos, conservamos el conjunto de parámetros: $\omega_c = 1$, $\omega_m = 1.6 \times 10^{-3}\omega_c$, $G/\omega_m = 2 \times 10^{-2}$. Y fijamos el término de forzamiento $\Omega = 0.1\omega_c$.

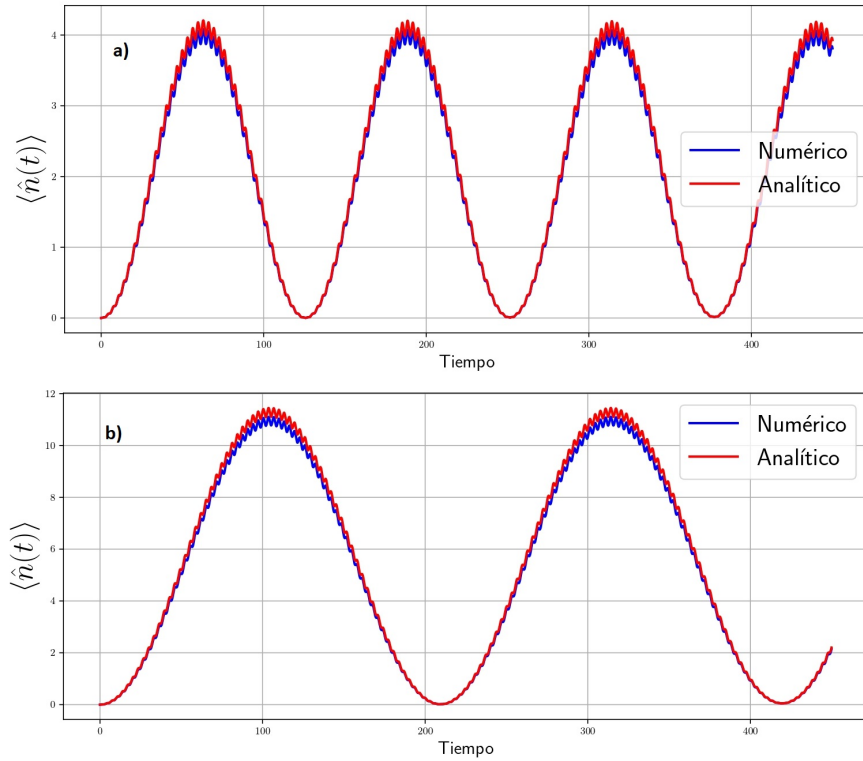


Figura 11: Valor promedio del número de fotones como función del tiempo con un estado coherente inicial para el campo $|\alpha = 0\rangle$ y un estado coherente mecánico $|\Gamma = 0\rangle$. a) $\omega_d = 0.95\omega_c$. b) $\omega_d = 0.97\omega_c$.

El número promedio de fonones al tiempo t depende el número de fotones al tiempo t y está dado por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | N | \hat{\Psi}(t) \rangle \\ &= e^{-|\alpha+\beta|^2} \sum_p \frac{|\alpha+\beta|^{2p}}{p!} |\Gamma_p(t)|^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

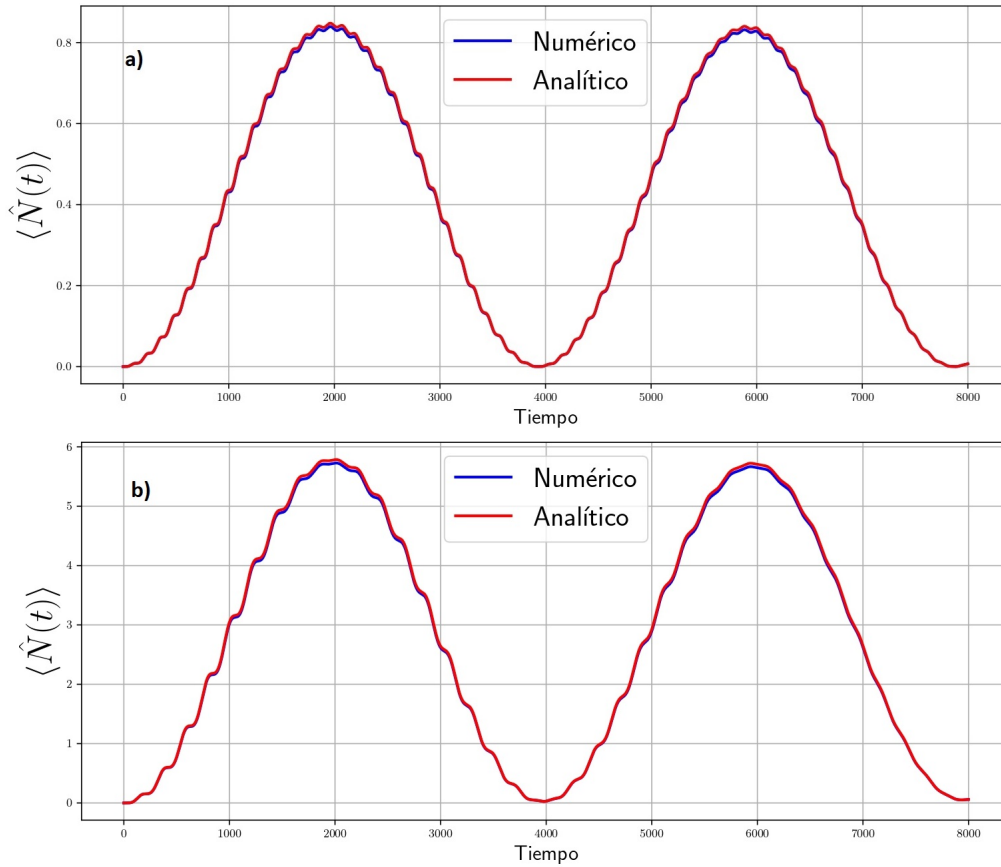


Figura 12: Valor promedio del número de fonones como función del tiempo con un estado coherente inicial para el campo $|\alpha = 0\rangle$ y un estado coherente mecánico $|\Gamma = 0\rangle$. a) $\omega_d = 0.95\omega_c$. b) $\omega_d = 0.97\omega_c$.

En las figuras 11 y 12 se presentan los resultados obtenidos mediante el método algebraico propuesto (rojo) y en azul aquellos dados por el cálculo numérico para la generación de fotones y fonones respectivamente cuando el campo y el oscilador mecánico se encuentran inicialmente en el estado de vacío. La similitud entre ambas soluciones es notable.

En 11a se muestra el caso cuando $\omega_d = 0.95\omega_c$; al tiempo inicial no hay fotones en la cavidad, conforme el sistema evoluciona, el número medio de fotones se incrementa periódicamente con un periodo del orden de 10^2 y una amplitud cercana a los 4. En la figura 11b, se muestra el caso en que la frecuencia de forzamiento se acerca a resonancia con la frecuencia del campo $\omega_d = 0.97\omega_c$. Al igual que en la figura anterior hay un comportamiento oscilatorio, sin embargo, se presenta un incremento en la amplitud de las oscilaciones llegando a valores que rondan los 11 fotones en promedio, también se observa un cambio en la frecuencia de las oscilaciones siendo para este caso aproximadamente dos veces menor que el anterior. Cuando nos alejamos más de resonancia, la generación de fotones disminuye considerablemente, por ejemplo, para el caso $\omega_d = 0.7\omega_c$ el número medio de fotones llega hasta el valor de 0.14.

Se eligió un rango de frecuencias cercano a resonancia, mas no se alcanza la resonancia ya que en esta situación, el número promedio de fotones se incrementa rápidamente, en consecuencia es necesario un espacio de Hilbert muy grande para reproducir estos resultados, esto resulta complicado computacionalmente.

En la figura 12 se presenta la evolución temporal del número promedio de fonones, partiendo al tiempo $t = 0$ en el estado de vacío. En 12a se encuentran los resultados cuando $\omega_d = 0.95\omega_c$. En este caso, el número promedio de fonones sigue una función periódica con amplitud cercana a 0.8 con un período de oscilación $T_m = 2\pi/\omega_m \approx 3900$.

Finalmente, en 12b está el escenario cuando $\omega_d = 0.97\omega_c$, en este caso, la generación de fotones es mayor, en consecuencia, debido al entrelazamiento entre las variables del campo y las mecánicas, la generación de fonones aumenta hasta casi los 6. A causa de que el período de oscilación en el número promedio de fonones depende solamente de la frecuencia del oscilador mecánico, vemos que en ambos casos el período de oscilación es el mismo. Por último señalamos que la simulación numérica se realizó usando la herramienta de python llamada Qutip [60].

3.5.2. Función Husimi.

Como vimos en el cálculo de la función Husimi para el sistema sin forzamiento, es necesario encontrar la matriz de densidad tanto para el campo como para el espejo. En este sentido, la matriz de densidad para el espejo está dada por la traza parcial sobre las variables del campo.

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= Tr_c[\rho(t)] \\ &= e^{-|\alpha+\beta|^2} \sum_p \frac{|\alpha+\beta|^{2p}}{p!} |\Gamma_p(t)\rangle\langle\Gamma_p(t)|, \end{aligned} \quad (3.60)$$

mientras que la matriz de densidad para el campo es:

$$\rho_c(t) = e^{-|\alpha+\beta|^2} \sum_{p,q} G_p(\alpha, \Gamma, \beta, t) G_q^*(\alpha, \Gamma, \beta, t) e^{\Gamma_p(t)\Gamma_q^*(t)} |p\rangle\langle q|, \quad (3.61)$$

con

$$G_p(\alpha, \Gamma, \beta, t) = \frac{(\alpha+\beta)^p}{\sqrt{p!}} e^{i(G/\omega_m)^2(\omega_m t - \text{sen}\omega_m t)p^2} e^{-i[\omega_c t - \Im(\alpha_4\Gamma^*)]p} e^{-\frac{1}{2}|\Gamma_p(t)|^2}, \quad (3.62)$$

para el sistema en consideración la función Husimi del oscilador mecánico es:

$$Q^{[\rho_m]}(\nu; t) = \frac{1}{\pi} \langle \nu | \rho_m(t) | \nu \rangle, \quad (3.63)$$

donde $|\nu\rangle$ es un estado coherente mecánico.

$$Q^{[\rho_m]}(\nu; t) = \frac{1}{\pi} e^{-|\nu|^2 - |\alpha + \beta|^2} \sum_p \frac{|\alpha + \beta|^{2p}}{p!} e^{-|\Gamma_p(t)|^2} e^{2\Re(\nu^* \Gamma_p(t))}, \quad (3.64)$$

la función Husimi para el campo está dada por:

$$Q^{[\rho_c]}(\phi; t) = \frac{1}{\pi} \langle \phi | \rho_c(t) | \phi \rangle, \quad (3.65)$$

donde $|\phi\rangle$ es un estado coherente del campo.

$$Q^{[\rho_c]}(\phi; t) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha + \beta|^2 - |\phi|^2} \sum_{p,q} F_p(\alpha, \Gamma, \phi, \beta; t) F_p^*(\alpha, \Gamma, \phi, \beta; t) e^{\Gamma_p(t) \Gamma_q^*(t)}, \quad (3.66)$$

con

$$F_p(\alpha, \Gamma, \phi, \beta; t) = \frac{\phi^p}{\sqrt{p!}} G_p(\alpha, \Gamma, \beta; t), \quad (3.67)$$

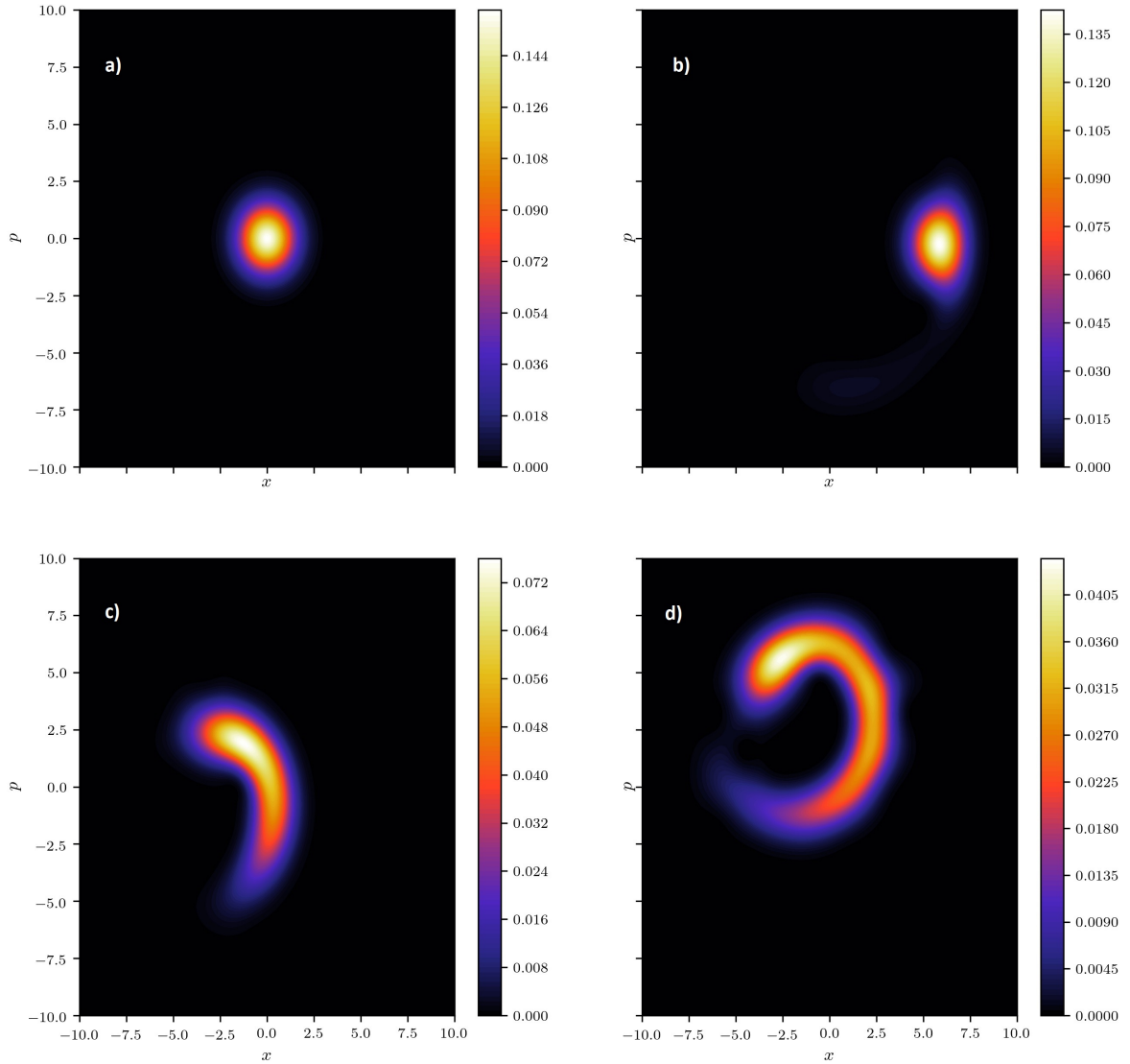


Figura 13: Representación pictográfica de la función Husimi $Q^{[\rho_c]}(\phi; t)$ para un estado coherente del campo. Donde $|\alpha = 0\rangle$ y $|\Gamma = 0\rangle$ son los estados iniciales del campo y del espejo. Consideramos cuatro diferentes tiempos: a) $t = 0$, b) $t = 400$, c) $t = 800$ y d) $t = 1200$. La frecuencia de forzamiento se fijó en $\omega_d = 0.97\omega_c$

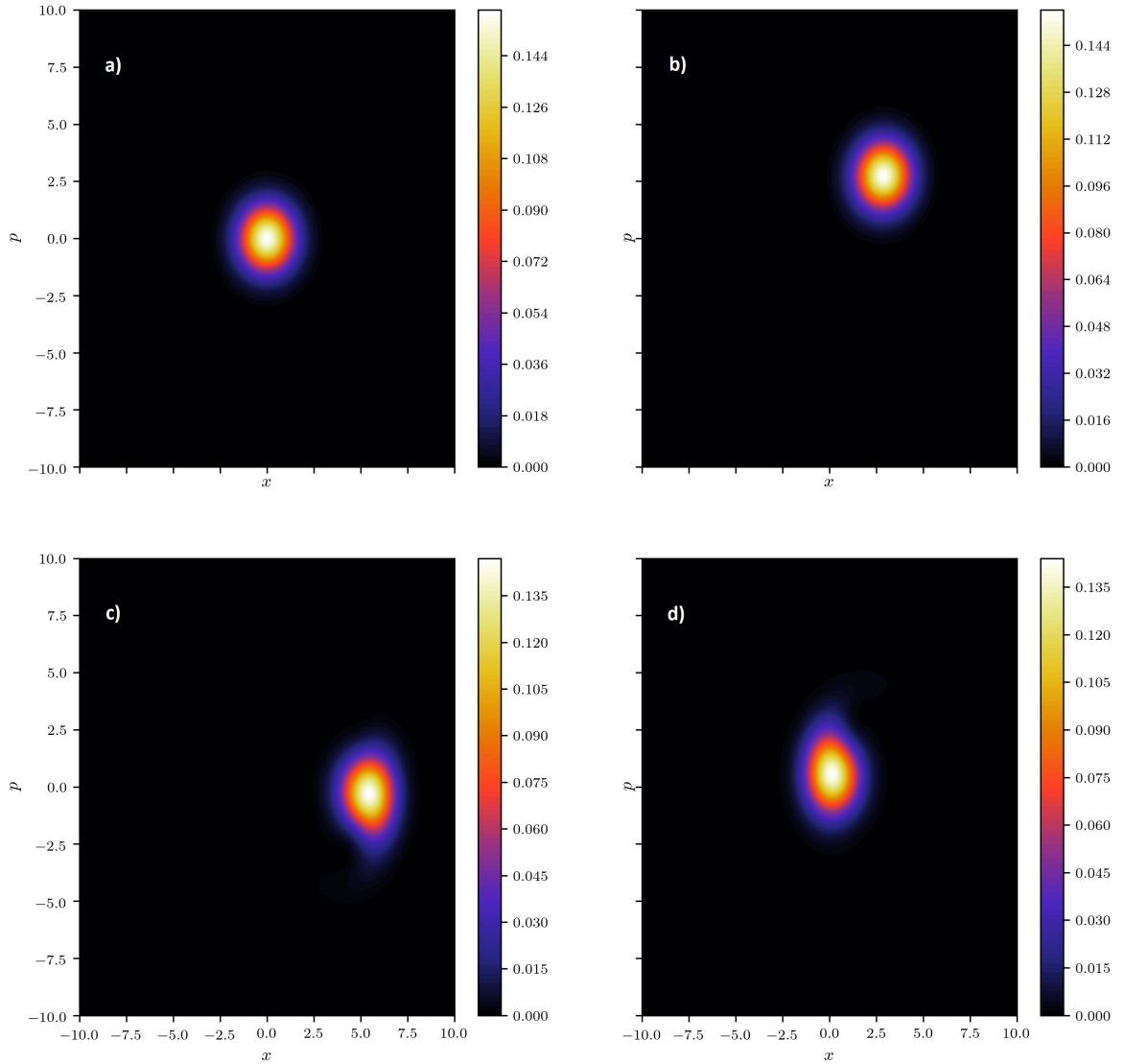


Figura 14: Representación pictográfica de la función Husimi $Q^{[\rho_m]}(\mu; t)$ para un estado coherente mecánico. Donde $|\alpha = 2\rangle$ y $|\Gamma = 2\rangle$ son los estados iniciales del campo y del espejo. Consideramos cuatro diferentes tiempos: a) $t = 0$, b) $t = 2400$, c) $t = 3200$ y d) $t = 4000$. La frecuencia de forzamiento se fijó en $\omega_d = 0.97\omega_c$.

En la figura 13 mostramos la función Husimi correspondiente al campo $Q^{[\rho_c]}(\phi; t)$ a cuatro diferentes tiempos para un estado inicial del campo $|\alpha = 0\rangle$ con el mismo conjunto de parámetros previamente establecidos y una frecuencia de forzamiento $\omega_d = 0.97\omega_c$. Al tiempo $t = 0$ el estado del sistema es un estado coherente, conforme transcurre el tiempo podemos ver una deslocalización en la distribución de probabilidad. Esta deslocalización corresponde a una situación de alto entrelazamiento, lo que resulta en estados altamente no-clásicos.

Vemos una situación similar para el caso de la función Husimi mecánica $Q^{[\rho_m]}(\nu; t)$, figura 14, también parte a un tiempo inicial $t = 0$ desde un estado $|\Gamma = 0\rangle$. Inicialmente comienza en un estado coherente, el sistema evoluciona y vemos una ligera deslocalización, sin embargo, esta no se extiende aún a tiempos considerablemente largos ($t = 4000$), esta baja deslocalización indica un nivel de enredamiento menor al obtenido en el campo. Se espera que la deslocalización aumente de forma parecida al caso del campo pero esto requeriría tiempos de evolución largos, los cuales resultan complicados de calcular computacionalmente.

3.6. Conclusión.

En este capítulo presentamos un método algebraico para resolver de forma aproximada el Hamiltoniano del sistema optomecánico forzado. Comenzando por calcular de forma exacta el operador de evolución temporal del Hamiltoniano optomecánico \hat{H}_{opt} . Hecho esto, separamos el Hamiltoniano completo $\hat{H}_d = \hat{H}_{opt} + \hat{V}$ con \hat{V} siendo el término de forzamiento, transformamos hacia el marco de interacción usando el operador \hat{U}_{opt} . Como resultado, los operadores de creación y aniquilación del campo adquirieron una estructura complicada con algunos operadores en los exponentes de las exponenciales. Para lidiar con estas complicaciones, linearizamos las transformadas de los operadores de creación y aniquilación y obtuvimos un Hamiltoniano de interacción aproximado cuyo operador de evolución temporal se escribió de forma

exacta como un producto de exponenciales. Posteriormente, escribimos el operador de evolución completo para el sistema optomecánico forzado como dicta la estructura del teorema de Wei-Norman. Es importante resaltar que las aproximaciones se consideraron dentro del Hamiltoniano de interacción, una vez que se hizo la linealización el operador de evolución resultante es exacto. Los términos que descartamos para obtener el Hamiltoniano de interacción aproximado son proporcionales a G/ω_m y $(G/\omega_m)^2$ cuyos valores numéricos resultan mucho menores que uno para el conjunto de parámetros propuestos. Calculamos el valor promedio de fotones y fonones como función del tiempo y de la frecuencia de forzamiento ω_d . Lejos de resonancia notamos que la generación de fotones es baja, caso contrario, cerca de resonancia $\omega_d \simeq \omega_c$ hay un incremento rápido en el número de fotones. El número de fonones depende del número de fotones presentes en la cavidad y cuando el número de fotones es distinto de cero, la generación de fonones se incrementa aún en condiciones fuera de resonancia. El valor medio de fonones es una función periódica con una frecuencia dada por la frecuencia del oscilador mecánico.

Con el propósito de probar la validez de nuestras aproximaciones hicimos un cálculo puramente numérico de las observables usando Python con una base suficientemente grande para garantizar la convergencia. Tomando el Hamiltoniano completo \hat{H}_d , se encontró un excelente acuerdo entre ambos procedimientos. Finalmente, también obtuvimos expresiones analíticas para la función Q de Husimi del oscilador mecánico y para el campo, en ambos casos evaluamos tomando como estado inicial un estado coherente.

4. Sistema cuántico híbrido Acoplado el MJC al sistema optomecánico.

El estudio y desarrollo de sistemas cuánticos híbridos, ha atraído considerablemente la atención dado el potencial que provee para desarrollar nuevas tecnologías [1, 53]. Recientemente se propusieron interfaces átomo-fotón para construir redes cuánticas [54, 55]. Aquí, los fotones funcionan como mensajeros debido a su capacidad para conservar la información durante la propagación, mientras que los átomos son adecuados para almacenar la información en nodos estacionarios. La transferencia eficiente de información cuántica entre los átomos y fotones es esencial, requiere que el proceso controlado de absorción-emisión de fotones tenga una alta probabilidad.

En este capítulo consideramos un sistema optomecánico híbrido compuesto por una cavidad, un oscilador mecánico y un sistema de dos niveles dentro de la cavidad.

El modo de la cavidad está acoplado al sistema de dos niveles siguiendo el modelo de Jaynes-Cummings y ambos a su vez están acoplados a un oscilador mecánico. Además, la cavidad optomecánica es forzada mediante un láser externo de frecuencia ω_d y amplitud Ω (Fig. 15).

En los dos capítulos anteriores encontramos la evolución temporal de ambos subsistemas, el JCM y el sistema optomecánico, partiendo de esto construimos un operador de evolución temporal aproximado para el sistema híbrido y evaluamos la evolución temporal de algunas observables, tales como, el número medio de fotones y fonones. Con el fin de validar los resultados obtenidos en la aproximación propuesta, los comparamos haciendo un cálculo puramente numérico.

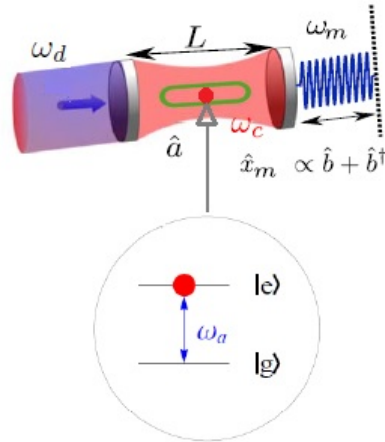


Figura 15: Representación esquemática de un sistema optomecánico forzado por un láser externo de frecuencia ω_d . Además un modo del campo interactúa con un átomo de dos niveles siguiendo el modelo de Jaynes-Cummings.

4.1. El Hamiltoniano híbrido.

Comenzamos considerando el Hamiltoniano para el sistema híbrido optomecánico.

$$\hat{H}_{hib} = \hat{H}_d + \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z - \frac{i\hbar\Omega_0}{2}(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (4.1)$$

este Hamiltoniano ha sido usado anteriormente en modelos donde la *hibridación* juega un papel importante, por ejemplo, división del espectro óptico y mecánico [56], bloqueo de fotones y *antibunching* [57, 58] y en el entrelazamiento en trampas de iones [19].

En el capítulo anterior, desarrollamos un procedimiento útil para encontrar una buena aproximación del operador de evolución temporal para el Hamiltoniano \hat{H}_d . Ahora, usamos un método similar para obtener el operador de evolución temporal del sistema híbrido descrito por el Hamiltoniano \hat{H}_{hib} .

Una vez que conocemos el operador de evolución temporal correspondiente al Hamiltoniano \hat{H}_d (ec. 3.54) transformamos la interacción para obtener un Hamiltoniano

aproximado en la representación de interacción.

$$\hat{H}_I^{(3)} = \hat{U}_d^\dagger \left[\frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z - \frac{i\hbar\Omega_0}{2} (\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \right] \hat{U}_d, \quad (4.2)$$

luego, empleamos el mismo nivel de aproximación que usamos para obtener el Hamiltoniano de interacción aproximado del sistema optomecánico forzado, es decir, despreciamos los términos proporcionales a G/ω_m y $(G/\omega_m)^2$.

$$\hat{H}_I^{(3)} \simeq \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z - \frac{i\hbar\Omega_0}{2} \left((\hat{a} + \beta)\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega ct} - (\hat{a}^\dagger + \beta^*)\hat{\sigma}_- e^{i\omega ct} \right). \quad (4.3)$$

El operador de evolución temporal en la representación de interacción satisface la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_I^{(3)}}{\partial t} = \hat{H}_I^{(3)} \hat{U}_I^{(3)}; \quad \hat{U}_I^{(3)}(0) = 1. \quad (4.4)$$

Resulta conveniente escribir el Hamiltoniano de interacción como la suma de un Hamiltoniano que contiene el conjunto de operadores $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$, $\hat{\sigma}_z$ y otro con $\hat{a}\hat{\sigma}_+$, $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$.

$$\hat{H}_I^{(3)} = \hat{H}_1^{(3)} + \hat{H}_2^{(3)}, \quad \hat{U}_I^{(3)} = \hat{U}_1^{(3)} \hat{U}_2^{(3)}, \quad (4.5)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^{(3)} &= \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z - \frac{i\hbar\Omega_0}{2} \left(\beta\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega ct} - \beta^*\hat{\sigma}_- e^{i\omega ct} \right), \\ \hat{H}_2^{(3)} &= -\frac{i\hbar\Omega_0}{2} \left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega ct} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{i\omega ct} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

El Hamiltoniano $\hat{H}_1^{(3)}$ es una combinación lineal de operadores que forman un álgebra de Lie, por lo tanto podemos aplicar el Teorema de Wie-Norman y escribir el correspondiente operador de evolución temporal como un producto de exponenciales [20].

$$\hat{U}_1^{(3)} = e^{\alpha_z \hat{\sigma}_z} e^{\alpha_+ \hat{\sigma}_+} e^{\alpha_- \hat{\sigma}_-}. \quad (4.7)$$

Para encontrar $\hat{U}_2^{(3)}$, sabemos que debe cumplir con la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_2^{(3)}}{\partial t} = [\hat{U}_1^{(3)\dagger} \hat{H}_2^{(3)} \hat{U}_1^{(3)}] \hat{U}_2^{(3)}, \quad (4.8)$$

transformando la interacción tenemos:

$$[\hat{U}_1^{(3)\dagger} \hat{H}_2^{(3)} \hat{U}_1^{(3)}] \simeq -\frac{i\hbar\Omega_0}{2} (\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega_c t - 2\alpha_z} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{i\omega_c t + 2\alpha_z}), \quad (4.9)$$

donde tomamos en consideración que la constante de acoplamiento $\Omega_0 \ll \omega_a$ y $\omega_a \simeq \omega_c$ por lo que la aproximación de onda rotante es apropiada. Podemos ver que el Hamiltoniano de interacción $\hat{H}_2^{(3)}$ tiene una estructura similar que el Hamiltoniano de interacción de Jaynes-Cummings 2.42, es importante resaltar que el número total de excitaciones se mantiene constante, bajo esta interacción.

Sustituyendo la ecuación 4.7 en la ecuación 4.8 obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para las funciones $\alpha_z, \alpha_+, \alpha_-$.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_z &= -i \left(\frac{\omega_a}{2} + i\Omega_0 \beta^* e^{2\alpha_z + i\omega_c t} \alpha_+ \right), \\ \dot{\alpha}_+ &= -\frac{\Omega_0}{2} \left(\beta e^{-2\alpha_z - i\omega_c t} + 2\beta^* \alpha_+^2 e^{2\alpha_z + i\omega_c t} \right), \\ \dot{\alpha}_- &= -\frac{\Omega_0}{2} \beta^* e^{2\alpha_z + i\omega_c t}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

las cuales resolvimos numéricamente. Ahora podemos traer de vuelta los operadores que usamos anteriormente 2.43.

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{\hat{M}}} \hat{a} \hat{\sigma}_+, \quad \hat{c}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \frac{1}{\sqrt{\hat{M}}}. \quad (4.11)$$

El Hamiltoniano de interacción se puede escribir en términos de los operadores \hat{c} y \hat{c}^\dagger como:

$$\left[\hat{U}_1^{(3)\dagger} \hat{H}_2^{(3)} \hat{U}_1^{(3)} \right] = -\frac{i\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} \left(\hat{c} e^{-i\omega_c t - 2\alpha_z} + \hat{c}^\dagger e^{i\omega_c t + 2\alpha_z} \right), \quad (4.12)$$

entonces tenemos:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_2^{(3)}}{\partial t} = -\frac{i\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} \left(\hat{c} e^{-i\omega_c t - 2\alpha_z} + \hat{c}^\dagger e^{i\omega_c t + 2\alpha_z} \right) \hat{U}_2^{(3)}, \quad (4.13)$$

cuya solución tiene la forma:

$$\hat{U}_2^{(3)} = e^{\xi_1 \hat{c}^\dagger} e^{\xi_2 \hat{c}} e^{\xi_3 \hat{\sigma}_z}, \quad (4.14)$$

con funciones complejas dependientes del tiempo ξ_i tales que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} \left(e^{i\omega_c t + 2\alpha_z} - \epsilon_1^2 e^{-i\omega_c t - 2\alpha_z} \right), \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} (1 + 2\epsilon_1 \epsilon_2) e^{-i\omega_c t - 2\alpha_z}, \\ \dot{\xi}_3 &= -\frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} \epsilon_1 e^{-i\omega_c t - 2\alpha_z}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

con la condición inicial $\xi_1(0) = \xi_2(0) = \xi_3(0) = 0$.

Por último, tomando en cuenta las relaciones anteriores, en particular, 3.54, 4.7 y 4.14, el operador de evolución temporal completo para el sistema híbrido es [59]:

$$\hat{U}_{hib}(t) = \hat{U}_d(t) \hat{U}_1^{(3)}(t) \hat{U}_2^{(3)}(t). \quad (4.16)$$

Donde cada término ha sido escrito como un producto de exponenciales y puede ser aplicado con cierta simplicidad a algún estado inicial dado, por lo que la construcción del vector de estado a cualquier tiempo resulta relativamente directa.

4.2. Evolución temporal y cálculo de observables.

Consideramos ahora un estado inicial dado por $|\Psi(0)\rangle = |n\rangle \otimes |e\rangle \otimes |\Gamma\rangle$ correspondiente a una cavidad con n fotones, un átomo de dos niveles en su estado excitado y un oscilador mecánico en un estado coherente Γ . Aplicando el operador $\hat{U}_I^{(3)}(t) = \hat{U}_1^{(3)}(t)\hat{U}_2^{(3)}(t)$ al estado inicial obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{U}_2^{(3)}|n, e\rangle \otimes |\Gamma\rangle &= e^{\xi_3} \left[|n, e\rangle + \xi_1 |n+1, g\rangle \right] \otimes |\Gamma\rangle, \\ \hat{U}_1^{(3)} \left[\hat{U}_2^{(3)}|n, e\rangle \otimes |\Gamma\rangle \right] &= e^{\xi_3} \left[e^{\alpha z} (1 + \alpha_+ \alpha_-) |n, e\rangle + \alpha_- e^{-\alpha z} |n, g\rangle \right] \otimes |\Gamma\rangle \\ &\quad + e^{\xi_3} \epsilon_1 \left[e^{-\alpha z} |n+1, g\rangle + \alpha_+ e^{\alpha z} |n+1, e\rangle \right] \otimes |\Gamma\rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

debido al término de forzamiento en el Hamiltoniano el número total de excitaciones no permanece constante, a diferencia del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

Este estado descrito en 4.17 lo expresamos como:

$$\hat{U}_I^{(3)}|n, e\rangle \otimes |\Gamma\rangle = \left[c_1(n, t)|n, e\rangle + c_2(n, t)|n, g\rangle + c_3(n, t)|n+1, g\rangle + c_4(n, t)|n+1, e\rangle \right] \otimes |\Gamma\rangle, \quad (4.18)$$

con

$$\begin{aligned} c_1(n, t) &= e^{\xi_3} e^{\alpha z} (1 + \alpha_+ \alpha_-), \\ c_2(n, t) &= e^{\xi_3} \alpha_- e^{-\alpha z}, \\ c_3(n, t) &= e^{\xi_3} \epsilon_1 e^{-\alpha z}, \\ c_4(n, t) &= e^{\xi_3} \epsilon_1 \alpha_+ e^{\alpha z}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si en lugar de un estado de número para el campo tenemos un estado coherente $|\alpha\rangle$.

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_I &= \hat{U}_I^{(3)} |\alpha, e\rangle \otimes |\Gamma\rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[c_1(n, t) |n, e\rangle + c_2(n, t) |n, g\rangle + c_3(n, t) |n+1, g\rangle + c_4(n, t) |n+1, e\rangle \right] \otimes |\Gamma\rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $c_n = \exp[-\frac{1}{2}|\alpha|^2] \alpha^n / \sqrt{n!}$.

El operador de evolución temporal \hat{U}_d no involucra a los grados de libertad atómicos, así que podemos usar la ecuación 4.20 para evaluar la evolución temporal atómica. Por ejemplo, la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado al tiempo t está dada por:

$$P_e(\alpha, t) = |\langle e | \Psi(t) \rangle_I|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n [c_1(n, t) |n\rangle + c_4(n, t) |n+1\rangle] \right|^2. \quad (4.21)$$

En la figura 16 mostramos la probabilidad de encontrar al átomo en su estado excitado para el sistema híbrido (rojo) y para el Hamiltoniano dado por el Modelo de Jaynes-Cummings (azul). El estado inicial de la cavidad es un estado coherente con un número promedio de fotones $\bar{n} = 4$ y la constante de acoplamiento átomo-campo $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, la amplitud del forzamiento $\Omega = 0.01\omega_c$ y una frecuencia atómica $\omega_a = 0.95\omega_c$. En ambos casos podemos ver el patrón usual de colapsos y reavivamientos presentes en el JCM, sin embargo, la longitud de los colapsos y la forma de los reavivamientos no son iguales. En el caso híbrido, el tiempo entre el colapso y el primer reavivamiento es mayor que en el caso de Jaynes-Cummings; la estructura del reavivamiento está más definida en el caso del sistema híbrido y la probabilidad de encontrar el átomo en estado excitado es mayor para el caso híbrido.

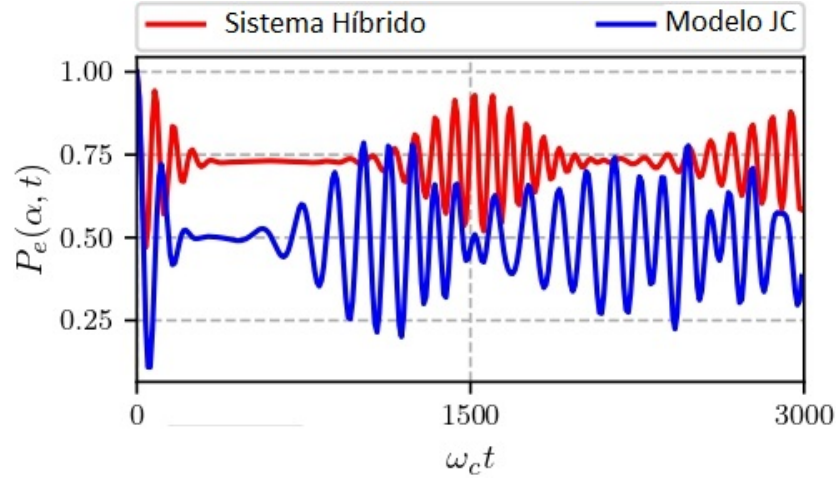


Figura 16: Probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado $p_e(\alpha, t)$ con $|\alpha = 2\rangle$, $\omega_a = 0.95\omega_c$, $\omega_d = 0.5\omega_c$, $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, $\Omega = 0.01\omega_c$. En rojo se muestra el sistema híbrido, en azul los resultados dados por el modelo de Jaynes-Cummings.

Consideramos ahora el valor esperado del operador de número de fotones, el cual está dado por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(t) \rangle &= \langle \Psi(t_0) | \hat{U}_I^{(3)\dagger} \hat{U}_0^\dagger \hat{n} \hat{U}_0 \hat{U}_I^{(3)} | \Psi(t_0) \rangle \\ &= {}_I \langle \Psi(t) | \hat{n}_I(t) | \Psi(t) \rangle_I, \end{aligned} \quad (4.22)$$

con $\hat{n}_I(t)$ el operador de número de fotones en la representación de interacción. Tomando la forma explícita de operador \hat{U}_d (ecuación 3.54) obtenemos:

$$\hat{n}_I(t) = \hat{n} + \beta^* \hat{a} + \beta \hat{a}^\dagger + |\beta|^2, \quad (4.23)$$

y $|\Psi(t)\rangle_I$ está dada por la ecuación 4.20. Para el operador de número de fonones tenemos:

$$\hat{N}_I(t) = \hat{N} + (\alpha_4 \hat{b}^\dagger + \alpha_4^* \hat{b}) \hat{n}_I(t) + |\alpha_4|^2 \hat{n}_I^2(t), \quad (4.24)$$

podemos ver que de nueva cuenta el operador de número de fonones depende del número de fotones presentes en la cavidad. Debido a que el término de forzamiento

modifica el número de fotones, modifica también la evolución en el número de fonones.

Con el propósito de validar las aproximaciones propuestas, realizamos también un cálculo puramente numérico para el valor promedio de fotones, fonones, la función de Husimi y función de Wigner usando Python [60].

En la figura 17 mostramos los resultados obtenidos numérica y analíticamente para la evolución del número promedio de fotones y el número promedio de fonones, usando el conjunto parámetros presentes en el Hamiltoniano: $\omega_a = 0.95\omega_c$, $\omega_d = 0.5\omega_c$, $\omega_m = 0.016\omega_c$, $G = 0.00032\omega_c$, $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, $\Omega = 0.01\omega_c$.

El estado inicial del sistema es $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\Gamma\rangle \otimes |e\rangle$ correspondiente a un átomo en su estado excitado, un estado coherente en la cavidad con $\alpha = 2$ y el oscilador mecánico en un estado coherente con $\Gamma = 1$.

El número promedio de fonones oscila con una frecuencia ω_m desde su estado inicial de 1 hasta aproximadamente 0.7 lo que corresponde a un enfriamiento en el oscilador mecánico. Esto se puede explicar dado que los fotones que inciden a una frecuencia desfasada hacia el rojo respecto a la frecuencia de la cavidad, se dispersan preferentemente hacia una energía mayor para entrar en resonancia con la cavidad, absorbiendo un fonón del oscilador mecánico. Por otro lado, el número promedio de fotones presenta oscilaciones más rápidas con frecuencia ω_c las cuales son consecuencia del intercambio energético entre el campo en la cavidad y el sistema de dos niveles, para tiempos posteriores podemos ver los colapsos y reavivamientos típicos del modelo de Jaynes-Cummings.

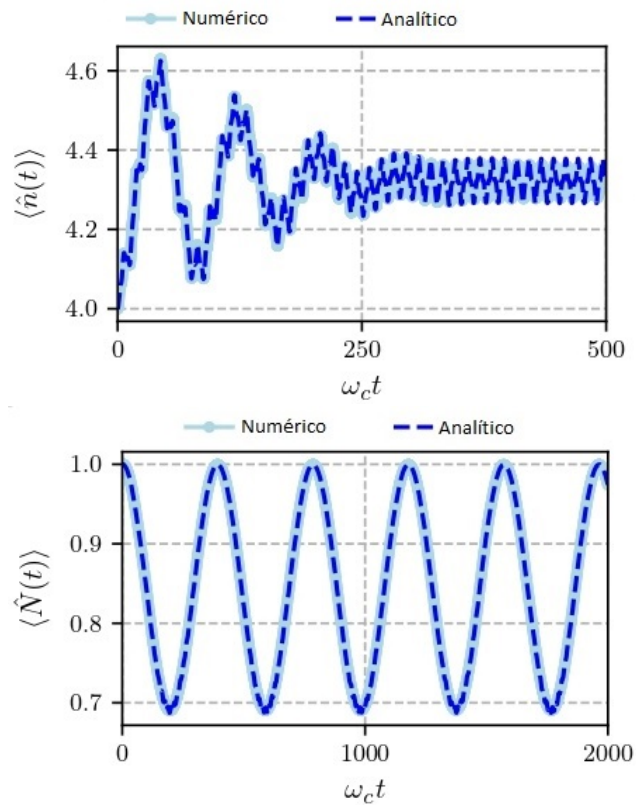


Figura 17: Evolución temporal del número promedio de fotones (superior) y evolución temporal del número promedio de fonones (inferior). Resultados analíticos en azul oscuro, resultados numéricos en azul claro.

La evolución se hizo para el intervalo $0 \leq \omega_c t \leq 500$ para los fotones y $0 \leq \omega_c t \leq 2000$ para los fonones. Podemos ver una excelente concordancia entre los resultados analíticos y los cálculos numéricos. Es importante mencionar que la frecuencia de forzamiento se encuentra lejos de resonancia con la frecuencia de la cavidad ω_c .

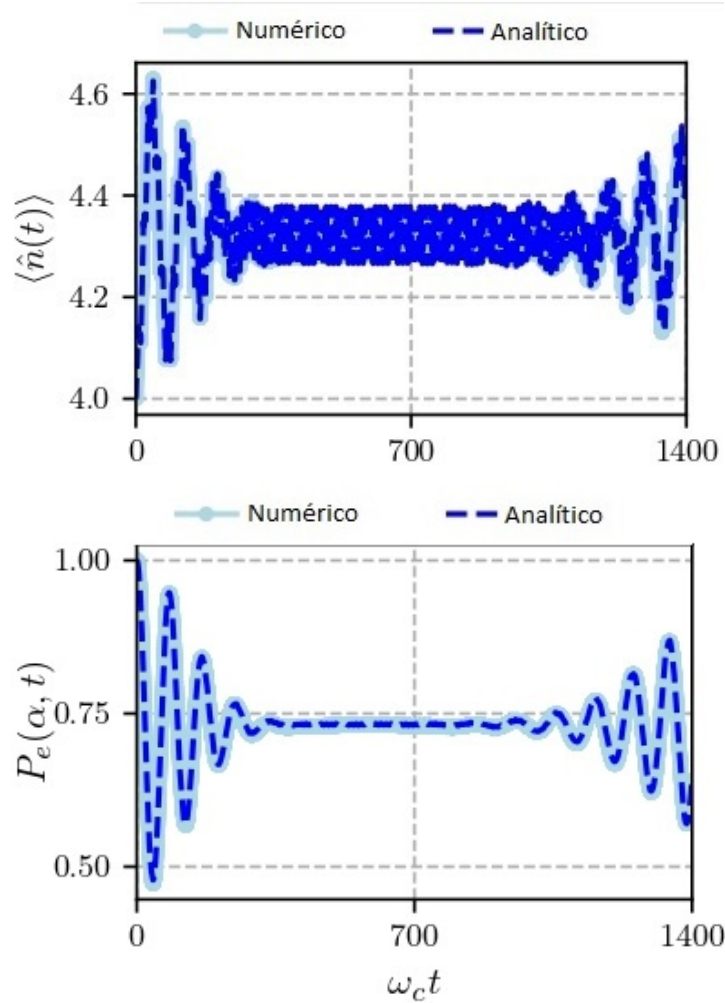


Figura 18: Evolución temporal del número promedio de fotones (superior) y evolución temporal de la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado (inferior). Resultados analíticos en azul oscuro, resultados numéricos en azul claro. $|\alpha = 2\rangle$, $\omega_a = 0.95\omega_c$, $\omega_d = 0.5\omega_c$, $\omega_m = 0.016\omega_c$, $G = 0.00032\omega_c$, $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, $\Omega = 0.01\omega_c$.

En la figura 18 se presentan la evolución temporal del operador de número de fotones sujeto a la condición inicial $|\alpha = 2\rangle$ lo que corresponde a un número promedio de fotones $\bar{n} = 4$ (superior) y la probabilidad de encontrar al átomo en su estado excitado (inferior). Se observa un intercambio en las excitaciones entre el sistema de dos niveles y el campo. Inicialmente, la evolución de la probabilidad de que el átomo permanezca en el estado excitado $P_e(\alpha, t)$ disminuye hasta 0.5 y al mismo tiempo el número promedio de fotones se incrementa a 4.5, notamos también oscilaciones rápidas y de amplitud pequeña alrededor del valor medio del operador de número de fotones, estas son dadas por el término de forzamiento. Posteriormente, $P_e(\alpha, t)$ alcanza un valor constante cercano a 0.75 y el número promedio de fotones oscila alrededor 4.3 hasta $\omega_c t \simeq 1000$ donde se presenta el primer reavivamiento.

En la figura 19 se grafica la evolución temporal del valor medio del número de fonones para diferentes valores de la amplitud del campo en la cavidad, los parámetros del Hamiltoniano están dados al pie de la imagen. Inicialmente el átomo se encuentra en su estado excitado.

En azul se muestra el caso cuando el estado inicial del campo es un estado coherente con $\alpha = 2$ y valor medio de fotones $\langle \hat{n}(0) \rangle = 4$ y en verde graficamos el caso cuando el estado inicial del campo es un estado coherente $\alpha = 3$, $\langle \hat{n}(0) \rangle = 9$. En ambos casos el estado inicial del oscilador mecánico es un estado coherente con $\Gamma = 2$, $\langle \hat{N}(0) \rangle = 4$. Usamos una frecuencia de forzamiento cerca de resonancia $\omega_d = 0.9\omega_c$. Vemos que $\langle \hat{N} \rangle$ evoluciona periódicamente con la frecuencia del oscilador mecánico, esta disminuye desde su valor inicial 4 hasta aproximadamente 2.7, posteriormente regresa a su valor inicial. De la ecuación 4.24 vemos que el valor promedio de fonones depende de la función α_4 y del valor medio de fotones. α_4 está en función de la constante de acoplamiento G y la frecuencia del oscilador mecánico, por su parte, el número promedio de fotones está en función de la frecuencia del campo a través de la función β (ver ecuaciones 3.50 y 4.23).

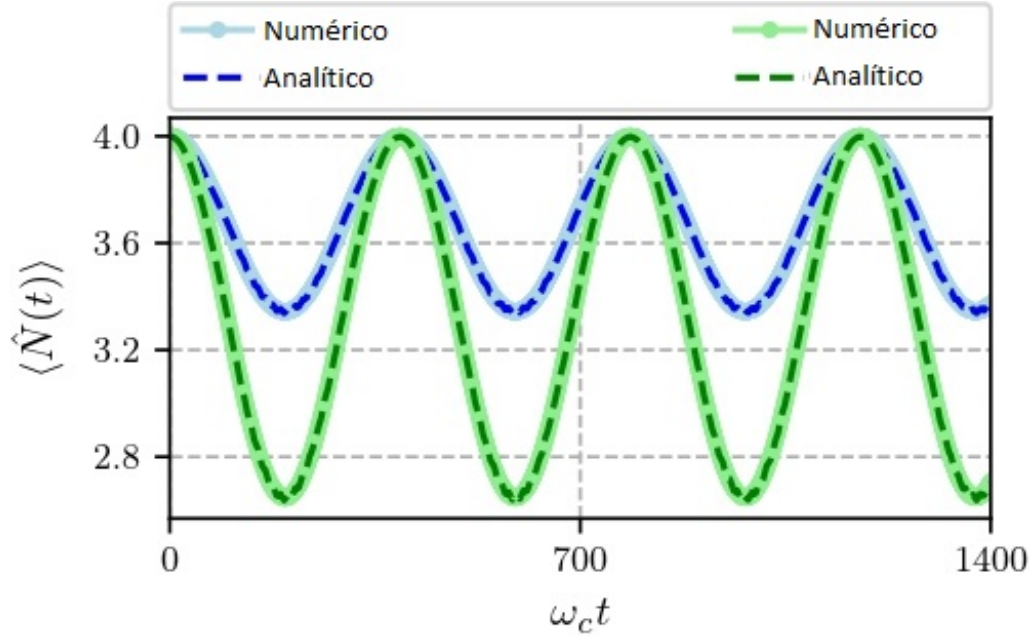


Figura 19: Evolución temporal del número medio de fonones con el siguiente conjunto de parámetros: $\omega_a = 0.95\omega_c$, $\omega_d = 0.9\omega_c$, $\omega_m = 0.016\omega_c$, $G = 0.00032\omega_c$, $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, $\Omega = 0.01\omega_c$ y $\{\alpha, \Gamma\} = \{2, 2\}$ (azul), $\{\alpha, \Gamma\} = \{3, 2\}$ (verde).

Notamos que la disminución es mayor para el caso cuando el número medio de fotones aumenta, de esta forma podemos manipular el número de fonones en función del tiempo de interacción, la amplitud del campo en la cavidad y la frecuencia de forzamiento. También en esta gráfica mostramos los resultados obtenidos mediante un cálculo puramente numérico y de forma algebraica, de nuevo podemos ver que las aproximaciones propuestas reproducen muy bien los resultados numéricos.

Un parámetro útil para caracterizar la no clasicidad en óptica cuántica es el llamado parámetro de Mandel [61]. Este está definido como:

$$Q(t) = \frac{\langle \hat{n}^2(t) \rangle - \langle \hat{n}(t) \rangle^2}{\langle \hat{n}(t) \rangle} - 1, \quad (4.25)$$

caben mencionar las siguientes propiedades del parámetro de Mandel:

- Para $Q(t) < 0$ se dice que el estado óptico sigue una estadística sub-Poissoniana ya que el ruido en el conteo de fotones es menor que en el caso de un estado coherente $Q(t) = 0$.
- Para $Q(t) > 0$ se dice que el estado es super-Poissoniano debido a que presenta un ruido en el conteo de fotones mayor que en el caso de un estado coherente.

En la figura 20 graficamos la evolución temporal del parámetro de Mandel $Q(t)$ para un estado coherente como estado inicial del campo ($|\alpha = 2\rangle$).

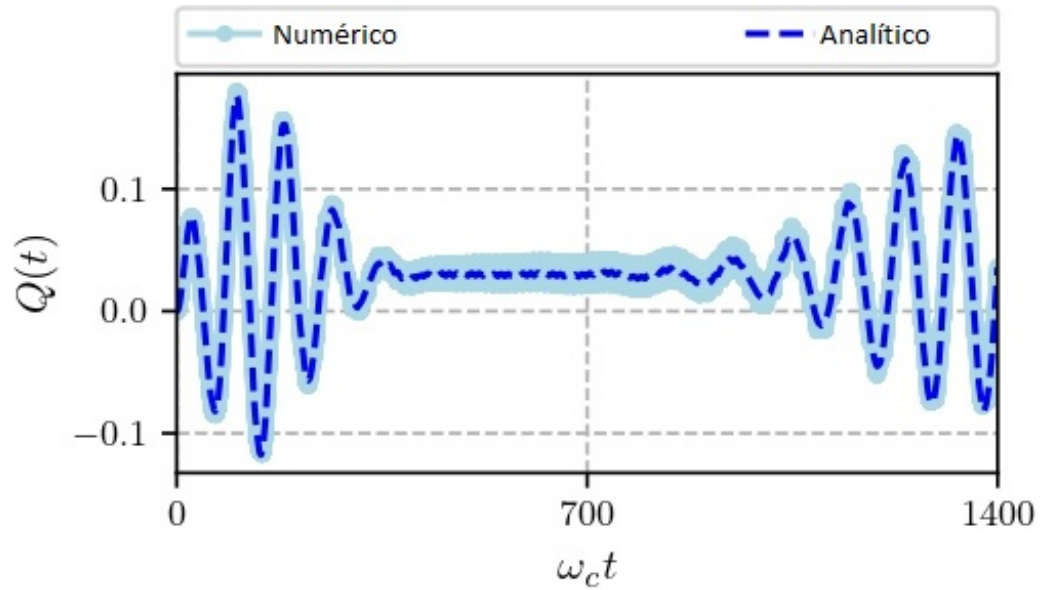


Figura 20: Evolución temporal parámetro de Mandel $Q(t)$ con el siguiente conjunto de parámetros: $\omega_a = 0.95\omega_c$, $\omega_d = 0.5\omega_c$, $\omega_m = 0.016\omega_c$, $G = 0.00032\omega_c$, $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, $\Omega = 0.01\omega_c$ y $\alpha = 2$

Vemos que comienza en cero lo que corresponde a un estado coherente, conforme el sistema evoluciona, la función $Q(t)$ oscila alrededor del cero alternando entre valores positivos y negativos, esto es, entre estados súper y sub-Poissonianos. Esto sucede en la misma ventana de tiempo donde los intercambios de excitaciones entre el campo y el átomo son más evidentes.

Tiempo después, se observan oscilaciones de baja amplitud sobre el cero, estas se dan en la región cuando la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado es constante, estas oscilaciones se mantienen en el régimen super-Poissoniano hasta que se da el primer reavivamiento (ver figura 18).

4.3. Función Husimi y Función de Wigner.

Con el propósito de calcular la función de Husimi usando su representación en series [52], escribimos la función de onda al tiempo t del sistema híbrido, desplazando la función $|\Psi(t)\rangle_I$ con el operador de evolución $\hat{U}_d(t)$. Esto es:

$$\begin{aligned} \hat{U}_d|\Psi(t)\rangle_I &= |\Psi(t)\rangle; \\ \hat{U}_d &= e^{\delta+\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\alpha_1\hat{n}} e^{\alpha_2\hat{N}} e^{\left(\alpha_3+\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\hat{n}^2} \hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4\hat{n})\hat{D}_{\hat{a}}(\beta), \end{aligned} \quad (4.26)$$

el operador de desplazamiento $\hat{D}_{\hat{a}}(\beta)$, lo escribimos en su forma de producto de exponenciales $e^{\delta}e^{\beta\hat{a}^\dagger}e^{-\beta^*\hat{a}}$ para poder aplicarlo sobre los estados de número.

El primer término del operador $\hat{D}_{\hat{a}}(\beta)$ actuando sobre un estado de número $|n\rangle$ da como resultado:

$$e^{-\beta^*\hat{a}}|n\rangle = \sum_k^n \frac{(-\beta^*)^k \sqrt{n!}}{k! \sqrt{(n-k)!}} |n-k\rangle, \quad (4.27)$$

mientras que la acción del segundo término sobre un estado $|n-k\rangle$ es:

$$e^{\beta\hat{a}^\dagger}|n-k\rangle = \sum_j^\infty \frac{(\beta)^j \sqrt{(n-k+j)!}}{j! \sqrt{(n-k)!}} |n-k+j\rangle, \quad (4.28)$$

continuando con el operador $\hat{U}_d(t)$. De forma análoga al procedimiento usado en el caso del sistema optomecánico forzado, podemos aplicar el operador de desplazamiento $\hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4\hat{n})$ sobre el estado $|n-k+j\rangle \otimes |\Gamma\rangle$.

$$\hat{D}_{\hat{b}}(\alpha_4\hat{n})|n-k+j\rangle \otimes |\Gamma\rangle = e^{\left[\frac{1}{2}(\alpha_4\Gamma^* - \alpha^*\Gamma)\right](n-k+j)} |n-k+j\rangle \otimes |\Gamma + \alpha_4(n-k+j)\rangle, \quad (4.29)$$

aplicando el resto de \hat{U}_d y sustituyendo para los demás estados de número en $|\Psi(t)\rangle_I$:

$$|\Psi(t)\rangle = e^\delta \sum_{n,j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n c_n \left[F_{j,k,n} \left(c_1(n,t)|n-k+j,e\rangle + c_2(n,t)|n-k+j,g\rangle \right) \otimes |\Gamma_{j,k,n}(t)\rangle \right. \\ \left. + F_{j,k,n+1} \left(c_3(n,t)|n+1-k+j,e\rangle + c_4(n,t)|n+1-k+j,g\rangle \right) \otimes |\Gamma_{j,k,n+1}(t)\rangle \right], \quad (4.30)$$

con

$$F_{j,k,n} = \frac{(-\beta^*)^k \beta^j \sqrt{n!} \sqrt{(n-k+j)!}}{k! j! (n-k)!} e^{[\alpha_1 + \frac{1}{2}(\alpha_4 \Gamma^* - \alpha^* \Gamma)](n-k+j)} e^{(\alpha_3 + \frac{1}{2}|\alpha_4|^2)(n-k+j)^2}, \quad (4.31)$$

y

$$\Gamma_{j,k,n}(t) = e^{\alpha_2} (\Gamma + \alpha_4(n-k+j)), \quad (4.32)$$

conociendo $|\Psi(t)\rangle$ podemos escribir la matriz de densidad $\rho(t)$.

Similarmente que en el sistema optomecánico, calculamos la traza parcial de la matriz de densidad, en esta ocasión comenzamos trazando sobre las variables atómicas.

$$\rho_{c,m} = \text{Tr}_a[\rho], \quad (4.33)$$

Para simplificar la notación reemplazamos $p \rightarrow n - k + j$ y q por su transpuesto conjugado.

$$\rho_{c,m}(t) = e^{2\Re(\delta)} \sum_{p,q} c_n c_{n'}^* \left[F_p F_q^* (c_1(n,t)c_1^*(n',t) + c_2(n,t)c_2^*(n',t)) |p, \Gamma_p\rangle \langle q, \Gamma_q| \right. \\ + F_p F_{q+1}^* (c_1(n,t)c_3^*(n',t) + c_2(n,t)c_4^*(n',t)) |p, \Gamma_p\rangle \langle q+1, \Gamma_{q+1}| \\ + F_{p+1} F_q^* (c_3(n,t)c_1^*(n',t) + c_4(n,t)c_2^*(n',t)) |p+1, \Gamma_{p+1}\rangle \langle q, \Gamma_q| \\ \left. + F_{p+1} F_{q+1}^* (c_3(n,t)c_3^*(n',t) + c_4(n,t)c_4^*(n',t)) |p+1, \Gamma_{p+1}\rangle \langle q+1, \Gamma_{q+1}| \right]. \quad (4.34)$$

Trazamos ahora sobre las variables mecánicas.

$$\begin{aligned}
\rho_c(t) = e^{2\Re(\delta)} \sum_{p,q} c_n c_{n'}^* & \left[F_p F_q^* (c_1(n,t)c_1^*(n',t) + c_2(n,t)c_2^*(n',t)) e^{-\frac{1}{2}(|\Gamma_p|^2+|\Gamma_q|^2)} e^{\Gamma_p \Gamma_q^*} |p\rangle \langle q| \right. \\
& + F_p F_{q+1}^* (c_1(n,t)c_3^*(n',t) + c_2(n,t)c_4^*(n',t)) e^{-\frac{1}{2}(|\Gamma_p|^2+|\Gamma_{q+1}|^2)} e^{\Gamma_p \Gamma_{q+1}^*} |p\rangle \langle q+1| \\
& + F_{p+1} F_q^* (c_3(n,t)c_1^*(n',t) + c_4(n,t)c_2^*(n',t)) e^{-\frac{1}{2}(|\Gamma_{p+1}|^2+|\Gamma_q|^2)} e^{\Gamma_{p+1} \Gamma_q^*} |p+1\rangle \langle q| \\
& \left. + F_{p+1} F_{q+1}^* (c_3(n,t)c_3^*(n',t) + c_4(n,t)c_4^*(n',t)) e^{-\frac{1}{2}(|\Gamma_{p+1}|^2+|\Gamma_{q+1}|^2)} e^{\Gamma_{p+1} \Gamma_{q+1}^*} |p+1\rangle \langle q+1| \right], \tag{4.35}
\end{aligned}$$

habiendo calculado $\rho_c(t)$ tenemos la posibilidad de calcular la función Husimi para el campo usando la expresión dada en 3.36:

$$\begin{aligned}
Q^{[\rho_c]}(\epsilon; t) = \frac{1}{\pi} e^{2\Re(\delta)-|\epsilon|^2} \sum_{p,q} c_n c_{n'}^* & \left[G_p G_q^* (c_1(n,t)c_1^*(n',t) + c_2(n,t)c_2^*(n',t)) e^{\Gamma_p \Gamma_q^*} \right. \\
& + G_p G_{q+1}^* (c_1(n,t)c_3^*(n',t) + c_2(n,t)c_4^*(n',t)) e^{\Gamma_p \Gamma_{q+1}^*} \\
& + G_{p+1} G_q^* (c_3(n,t)c_1^*(n',t) + c_4(n,t)c_2^*(n',t)) e^{\Gamma_{p+1} \Gamma_q^*} \\
& \left. + G_{p+1} G_{q+1}^* (c_3(n,t)c_3^*(n',t) + c_4(n,t)c_4^*(n',t)) e^{\Gamma_{p+1} \Gamma_{q+1}^*} \right], \tag{4.36}
\end{aligned}$$

donde:

$$G_p = \frac{\epsilon^p}{\sqrt{p!}} e^{-\frac{1}{2}|\Gamma_p|^2} F_p, \tag{4.37}$$

en la figura 21 se muestra la función Husimi correspondiente al campo $Q^{[\rho_c]}(\epsilon; t)$ para cuatro diferentes tiempos partiendo de un estado coherente inicial $|\alpha = 2\rangle$. Inicialmente, al tiempo $t = 0$ vemos la distribución de probabilidad correspondiente a un estado coherente. A medida que el sistema evoluciona vemos una deslocalización en la distribución apareciendo incluso la generación de gatos de Schödinger.

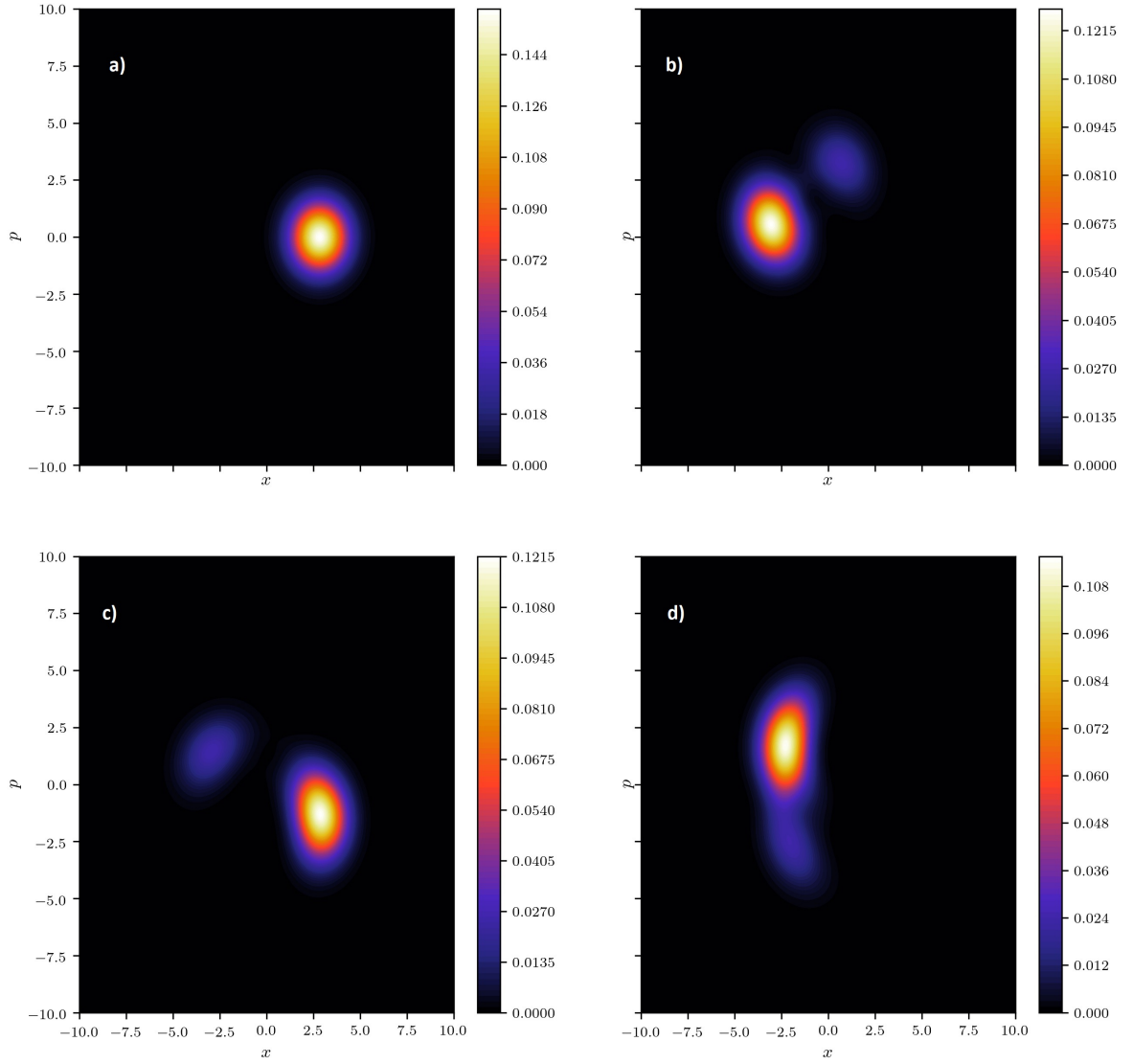


Figura 21: Representación pictográfica de la función Husimi $Q^{[\rho_c]}(\epsilon; t)$ para un estado coherente del campo. Donde $|\alpha = 2\rangle$ es el estado inicial del campo. Se consideraron cuatro diferentes tiempos: a) $t = 0$, b) $t = 400$, c) $t = 800$, d) $t = 1200$. Con el conjunto de parámetros presentes en el Hamiltoniano: $\omega_a = 0.95\omega_c$, $\omega_d = 0.5\omega_c$, $\omega_m = 0.016\omega_c$, $G = 0.00032\omega_c$, $\Omega_0 = 0.025\omega_c$, $\Omega = 0.01\omega_c$.

Para estudiar más a detalle el comportamiento no-clásico del sistema, la función de Wigner desempeña un papel muy importante. En la figura 22 graficamos la función de Wigner para el campo y para el oscilador mecánico al tiempo $\omega_c t = 100$. En la figura se varia la amplitud de la constante de acoplamiento Ω_0 y fijamos la constante de acoplamiento entre el oscilador mecánico y el campo en la cavidad G como se especifica en la figura. En la columna de la izquierda presentamos la función de Wigner evaluada al tiempo $\omega_c t = 100$ para el modelo de Jaynes-Cummings ($G/\omega_c = 0$) y $\Omega_0/\omega_c = 0.05$, aquí se muestra la generación de gatos de Schödinger de múltiples componentes; encontramos que para $\Omega_0/\omega_c \leq 0.02$ la distribución es una función Gaussiana y para $\Omega_0/\omega_c > 0.02$ el sistema presenta un comportamiento no-clásico correspondiente a un gato de Schrödinger de múltiples componentes. También en la figura vemos que para el sistema híbrido ($G/\omega_c \neq 0$) el comportamiento de la función de Wigner es significativamente distinto. El acoplamiento entre el oscilador mecánico y el campo en la cavidad es tan relevante que incluso para valores pequeños de G/ω_c la distribución está dada por un anillo. Para valores grandes de Ω_0/ω_c y el mismo valor de G/ω_c , vemos que la función de Wigner para el campo toma valores negativos (mostrados en azul) y la no clasicidad del sistema se incrementa con la amplitud del acoplamiento Ω_0/ω_c . La función de Wigner para el sistema optomecánico forzado muestra *squeezing* y amplitudes negativas pequeñas independientemente de Ω_0/ω_c .

Debido a la dificultad en el desarrollo para obtener algebraicamente la función de Wigner, así como las complicaciones computacionales para evaluar la expresión 4.36. Los resultados mostrados para el cálculo de las funciones de Wigner y Husimi fueron obtenidos mediante un cálculo puramente numérico (figuras 21 y 22).

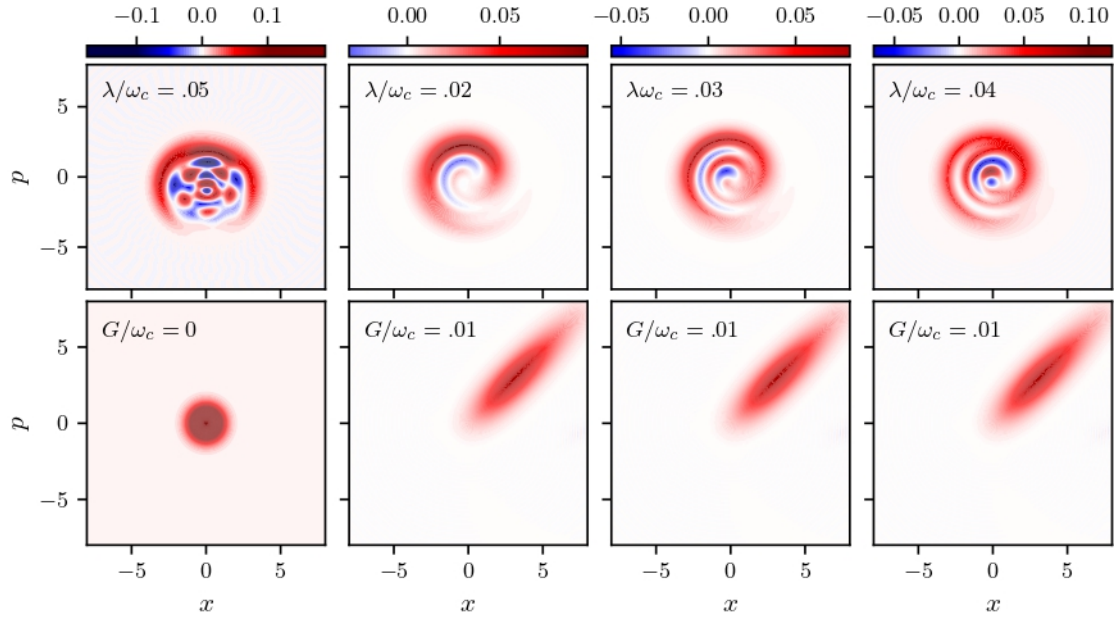


Figura 22: Representación pictográfica de la función de Wigner para un estado coherente del campo (primera hilera) y para el estado de vacío del oscilador mecánico (segunda hilera) ambas evaluadas al tiempo $\omega_c t = 100$

4.4. Conclusión.

En este capítulo presentamos un método aproximado para construir el operador de evolución temporal para un sistema híbrido compuesto por un sistema optomecánico forzado y un átomo de dos niveles dentro de una cavidad, el átomo interactúa solo con el campo en la cavidad via una interacción tipo Jaynes-Cummings. Para encontrar la solución del sistema dividimos el Hamiltoniano como la suma del Hamiltoniano optomecánico forzado y el término correspondiente a la evolución del átomo con la interacción Jaynes-Cummings. El operador de evolución temporal para el Hamiltoniano del sistema optomecánico forzado se aproxima como un producto de exponenciales [49] y es usado para tomar la interacción JC y llevarla a un marco de interacción generalizado. Como resultado obtenemos un conjunto de expresiones para los operadores transformados los cuales aproximamos despreciando los términos que son del orden de G/ω_m y $(G/\omega_m)^2$.

Tomando esta aproximación el Hamiltoniano en la representación de interacción se convierte en el de un átomo libre y una interacción JC desplazada cuyo operador de evolución exacto lo construimos usando el Teorema de Wei-Norman. Una vez obtenido el operador de evolución temporal completo podemos calcular el valor promedio de cualquier observable, por ejemplo, evaluamos la evolución temporal del número de fotones y fonones, la probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado, el parámetro de Mandel para el campo en la cavidad, la función Husimi y la función de Wigner. Usamos un estado inicial dado por $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |e\rangle \otimes |\Gamma\rangle$ donde $|\alpha\rangle$ es el ket correspondiente a un estado coherente α en el campo de la cavidad, $|e\rangle$ corresponde al átomo en su estado excitado y $|\Gamma\rangle$ es el ket de un estado coherente Γ para el oscilador mecánico. El número medio de fotones es una función de la amplitud de la constante de forzamiento Ω y la frecuencia de forzamiento ω_d , cuando $\omega_d \simeq \omega_c$ hay un crecimiento periódico en el número de fotones con amplitud proporcional a Ω . El número promedio de fonones es una función periódica del tiempo que depende también de la constante de acoplamiento G/ω_m y del número de fonones presentes en la cavidad. Dado que la evolución del número de fonones es una función periódica podemos tomar una ventana de tiempo en la interacción tal que el número de fonones esté en su mínimo.

También evaluamos el parámetro de Mandel para el campo en la cavidad y encontramos oscilaciones que van de la estadística sub-Poissoniana a super-Poissoniana en la región de tiempo donde el intercambio de excitaciones entre el átomo y el campo es más notable. Hacemos énfasis en que las aproximaciones propuestas se hicieron en el Hamiltoniano de interacción donde despreciamos los términos proporcionales a G/ω_m y $(G/\omega_m)^2$. El excelente acuerdo entre los resultados analíticos y numéricos obtenidos usando el Hamiltoniano completo dado en 4.1 indican la validez de nuestras aproximaciones.

A. Trabajos a futuro: Abriendo el sistema híbrido.

Finalmente en este capítulo presentamos un vistazo muy general al planteamiento de sistemas abiertos, los cuales no son descritos por las ecuaciones de movimiento de Heisenberg o la ecuaciones de von Neumann sino por unas ecuaciones más generales conocidas como las ecuaciones cuánticas de Langevin y las ecuaciones maestras de Lindblad.

Revisamos brevemente la derivación de estas ecuaciones y su aplicación a algunos sistemas específicos, basándonos principalmente en el libro *The Theory of Open Quantum Systems* [62]. Concluimos presentando algunas posibilidades para, en el marco de los sistemas abiertos, continuar la investigación posteriormente, permitiendo que el sistema híbrido estudiado en el capítulo 4 interactue con los alrededores. En contraste con un sistema cerrado, la dinámica cuántica de un sistema abierto no puede en general representarse en términos de una evolución unitaria. Usualmente es conveniente formular la dinámica del sistema abierto empleando una ecuación de movimiento para su matriz de densidad, es decir, una ecuación maestra.

Llamamos sistema abierto a un sistema cuántico S acoplado a otro sistema B llamado ambiente. El estado del subsistema cuántico S cambiará en consecuencia de su dinámica interna y de la interacción con los alrededores. Estas interacciones conducen a ciertas correlaciones sistema-ambiente tales que los cambios producidos en S no es posible representarlos mediante una evolución unitaria.

Comenzamos considerando un sistema cuántico S acoplado a un reservorio B . Denotamos el Hamiltoniano del sistema completo $\hat{H}(t)$ perteneciente al espacio del Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$.

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_s \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_S \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_I(t), \quad (\text{A.1})$$

\hat{H}_S y \hat{H}_B describen la evolución libre del sistema y del reservorio respectivamente. Mientras que $\hat{H}_I(t)$ denota la interacción entre el sistema y el reservorio. Definimos la dinámica del sistema reducido como la evolución inducida por el Hamiltoniano del sistema completo sobre el subsistema S .

$$\rho_S = Tr_B\{\rho\}, \quad (\text{A.2})$$

la forma más general para representar la dinámica de un sistema abierto es a través de la ecuación maestra de Lindblad.

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t), \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\mathcal{L}\rho_S = -i\hbar[\hat{H}, \rho_S] + \sum_k \gamma_k \left(\hat{A}_k \rho_S \hat{A}_k^\dagger - \frac{1}{2} \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \right), \quad (\text{A.4})$$

el primer término contiene la parte correspondiente a la evolución unitaria de la dinámica generada por \hat{H} . Los operadores \hat{A}_k son conocidos como operadores de Lindblad. Las cantidades γ_k están en términos de funciones de correlación y fungen como tasas de amortiguamiento para la evolución de modos del sistema abierto.

Con el fin de derivar la ecuación maestra de Lindblad para un sistema abierto, debemos tener en cuenta una serie de aproximaciones. Primeramente asumimos que el acoplamiento entre el sistema y el reservorio es lo suficientemente débil, tal que, podemos considerar que la influencia del sistema en el reservorio es pequeña. Entonces, los cambios sobre la matriz de densidad dados por la interacción son despreciables y el estado del sistema completo al tiempo t puede caracterizarse aproximadamente por el producto tensorial:

$$\rho(t) \simeq \rho_S(t) \otimes \rho_B, \quad (\text{A.5})$$

otra aproximación relevante es suponer que la ecuación maestra es local en el tiempo, es decir, que el tiempo de correlación del entorno τ_B es pequeño comparado con el tiempo de relajación del sistema $\tau_B \ll \tau_R$. A grandes rasgos estas dos aproximaciones constituyen la aproximación de Born-Markov.

Continuando con la ecuación maestra, los operadores de Lindblad \hat{A}_k pueden calcularse descomponiendo el Hamiltoniano $\hat{H}_I(t)$ en eigenoperadores del Hamiltoniano \hat{H}_S . Considerando que el espectro de \hat{H}_S es discreto, denotamos los eigenvalores de \hat{H}_S como ε y la proyección sobre el eigenspacio perteneciente al eigenvalor ε como $\Pi(\varepsilon)$ podemos definir los operadores:

$$\hat{A}_\alpha(\omega) = \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \omega} \Pi(\varepsilon) \hat{A}_\alpha \Pi(\varepsilon'), \quad (\text{A.6})$$

la suma en esta expresión se extiende sobre todos los eigenvalores ε y ε' de \hat{H}_S con una diferencia de energía fija ω . Los operadores \hat{H}_S y $\hat{A}_\alpha(\omega)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [\hat{H}_S, \hat{A}_\alpha(\omega)] &= -\omega \hat{A}_\alpha(\omega), \\ [\hat{H}_S, \hat{A}_\alpha^\dagger(\omega)] &= \omega \hat{A}_\alpha^\dagger(\omega), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

empleando estas definiciones podemos escribir la ecuación maestra en la forma de Lindblad como:

$$\frac{d}{dt} \rho_s(t) = -i[\hat{H}, \rho_s(t)] + \mathcal{D}(\rho_s(t)), \quad (\text{A.8})$$

donde hemos introducido el disipador $\mathcal{D}(\rho_s(t))$ que involucra las funciones de correlación sistema-reservorio.

$$\mathcal{D}(\rho_S) \equiv \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}(\omega) \left(\hat{A}_\beta(\omega) \rho_S \hat{A}_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{A}_\alpha^\dagger(\omega) \hat{A}_\beta(\omega), \rho_S \} \right), \quad (\text{A.9})$$

A.1. La ecuación maestra en óptica cuántica.

La interacción de materia con un campo electromagnético de radiación en el contexto de óptica cuántica es una de las aplicaciones típicas de la ecuación maestra. Consideramos entonces el sistema más sencillo, un átomo interactuando con un campo de radiación cuantizado. El campo de radiación está representado por un reservorio donde los modos de radiación se encuentran en un estado de equilibrio térmico a temperatura T .

$$\begin{aligned}\rho_B &= \frac{1}{Z_B} e^{-\beta \hat{H}_B}, \\ &= \prod_m (1 - e^{-\beta \hbar \omega_m}) e^{-\beta \hbar \omega_m \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m}.\end{aligned}\tag{A.10}$$

El átomo desacoplado está descrito por Hamiltoniano característico dado por la aproximación de dos niveles y representa el sistema reducido.

$$\hat{H}_S = \frac{\hbar \omega_a \sigma_z}{2}.\tag{A.11}$$

Mientras que como podemos ver de A.10, el Hamiltoniano del reservorio está dado por:

$$\hat{H}_B = \sum_m \hbar \omega_m \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m,\tag{A.12}$$

asumimos que el Hamiltoniano de interacción está dado por la aproximación dipolar.

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}},\tag{A.13}$$

donde $\hat{\mathbf{D}}$ es el operador dipolar y $\hat{\mathbf{E}}$ es el campo eléctrico en la representación de Schrödinger.

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = ie \sum_m \sqrt{\frac{\hbar \omega_m}{\epsilon_0 L S}} \text{sen}(k_m \mathbf{r}) [\hat{b}_m - \hat{b}_m^\dagger],\tag{A.14}$$

bajo estas consideraciones el Hamiltoniano total del sistema que acopla el átomo con el campo de radiación es:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_I, \quad (\text{A.15})$$

continuamos, realizando la aproximación Born-Markov descomponiendo del operador de dipolo $\hat{\mathbf{D}}$ en los eigenoperadores de \hat{H}_S (ver ecs. A.6 y A.7). Observamos que los operadores de Pauli σ_{\pm} representan eigenoperadores del Hamiltoniano \hat{H}_S :

$$[\hat{H}_S, \sigma_-] = -\omega_a \sigma_-, \quad [\hat{H}_S, \sigma_+] = \omega_a \sigma_+, \quad (\text{A.16})$$

vemos que σ_{\pm} cambia la energía atómica un factor de $\pm\omega_a$, esto corresponde a procesos de absorción y emisión respectivamente. Dadas las expresiones anteriores podemos escribir los operadores de Lindblad para este sistema:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{d}\sigma_-, \quad \hat{\mathbf{A}}^\dagger = \mathbf{d}^*\sigma_+, \quad (\text{A.17})$$

donde $\mathbf{d} = \langle g | \hat{\mathbf{D}} | e \rangle$ es el elemento de matriz del operador dipolar en la base atómica. De esta forma expresamos el operador dipolar en la representación de interacción.

$$\hat{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{d}\sigma_- e^{-i\omega_a t} + \mathbf{d}^*\sigma_+ e^{i\omega_a t}, \quad (\text{A.18})$$

calculando estos operadores, podemos sustituirlos en la ecuación maestra y obtener la evolución para la matriz densidad² ρ_S :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) = & \gamma_0(N+1)(\hat{\sigma}_-\rho_S(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho_S(t) - \frac{1}{2}\rho_S(t)\sigma_+\sigma_-) \\ & + \gamma_0N(\sigma_+\rho_S(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho_S(t) - \frac{1}{2}\rho_S(t)\sigma_-\sigma_+), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

²Un desarrollo más detallado de la derivación de la ecuación maestra para este sistema puede encontrarse en la referencia [62]

con una tasa de emisión espontánea:

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_a^3 |\mathbf{d}|^2}{3\hbar c^3}. \quad (\text{A.20})$$

El disipador en esta ecuación maestra describe el proceso de emisión espontánea a una tasa γ_0 , así como procesos de absorción y emisión térmicos inducidos $\gamma_0 N$. Donde N denota la distribución de Planck a la frecuencia de transición ω_a .

A.2. Ecuaciones de Langevin.

Otra formulación que se puede utilizar para resolver sistemas cuánticos abiertos son las ecuaciones cuánticas de Langevin.

Proponemos el modelo donde la cavidad está acoplada a un espejo parcialmente reflejante que transmite hacia los modos de campo externo (reservorio). Estos modos externos pueden ser modelados como modos de una segunda cavidad que comparte frontera con uno de los espejos parcialmente reflejantes de la cavidad, mientras que la otra frontera se extiende al infinito [63]. Por simplicidad consideramos solo un modo en la cavidad con frecuencia ω_c que evoluciona libremente.

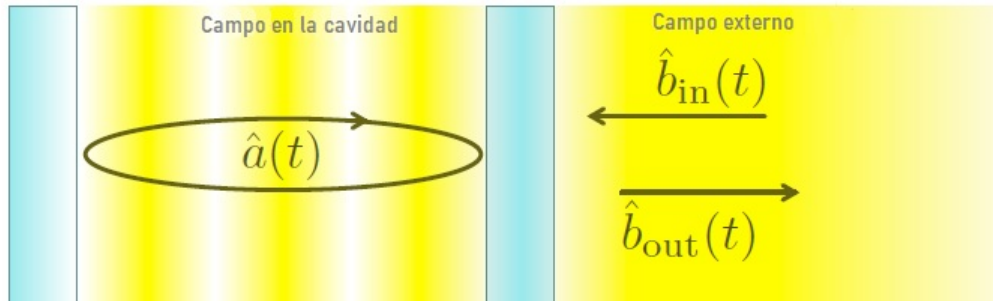


Figura 23: Representación esquemática del modelo de una cavidad óptica abierta. El modo de en la cavidad interactúa con los modos de campo externo por medio de un espejo parcialmente transmisor. Los modos externos pueden describirse como un campo de entrada que fuerza la cavidad y un campo que sale de la cavidad.

El campo externo lo podemos expresar como:

$$\hat{\mathbf{E}}_{ext}(\mathbf{z}) = i\mathbf{e} \lim_{L_{ext} \rightarrow \infty} \sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 L_{ext} S}} (\hat{b}_m - \hat{b}_m^\dagger) \text{sen}(\omega_m(z - L)/c), \quad (\text{A.21})$$

donde los operadores \hat{b}_m^\dagger y \hat{b}_m representan los operadores de creación y aniquilación del campo externo y cumplen con la relación de conmutación $[\hat{b}_m, \hat{b}_{m'}^\dagger] = \delta_{m,m'}$ y $\omega_m = (\pi c/L_{ext})m$. Notamos que conforme la longitud de esta cavidad auxiliar se va al infinito, el conjunto de modos longitudinales se tornan infinitamente densos en el espacio de frecuencias, por lo que la suma sobre m puede reemplazarse por una integral sobre el continuo de frecuencias.

$$\lim_{L_{ext} \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} = \frac{L_{ext}}{\pi c} \int_0^{\infty} d\omega, \quad (\text{A.22})$$

También resulta conveniente definir un conjunto de operadores continuos:

$$\hat{b}(\omega) = \sqrt{\frac{L_{ext}}{\pi c}} \lim_{L_{ext} \rightarrow \infty} \hat{b}_m, \quad (\text{A.23})$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[\hat{b}(\omega), \hat{b}(\omega')] = 0, \quad [\hat{b}(\omega), \hat{b}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega'), \quad (\text{A.24})$$

así, podemos escribir el campo fuera de la cavidad como:

$$\hat{\mathbf{E}}_{ext}(\mathbf{z}) = i\mathbf{e} \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi c \epsilon_0 S}} (\hat{b}(\omega) - \hat{b}^\dagger(\omega)) \text{sen}(\omega(z - L)/c). \quad (\text{A.25})$$

Ahora que tenemos una descripción del campo fuera de la cavidad, podemos continuar hacia el modelo completo a través del Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{ext} + \hat{H}_I, \quad (\text{A.26})$$

con

$$\begin{aligned}\hat{H}_{cav} &= \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, & \hat{H}_{ext} &= \int_0^\infty d\omega \hbar\omega \hat{b}^\dagger(\omega) \hat{b}(\omega), \\ \hat{H}_I &= i\hbar \int_0^\infty d\omega g(\omega) [\hat{b}^\dagger(\omega) \hat{a} - \hat{b}(\omega) \hat{a}^\dagger].\end{aligned}\tag{A.27}$$

El acoplamiento entre la cavidad y los modos externos está modelado mediante el Hamiltoniano \hat{H}_I que corresponde al tunelamiento de fotones entre las cavidades a través del espejo parcialmente transmisor, la tasa de transmisión está determinada por el parámetro $g(\omega)$. Generalmente se propone la forma de $g(\omega)$ como:

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}},\tag{A.28}$$

con $\gamma = \frac{c\tau}{4L}$. Donde τ es la constante de transmitividad del espejo y L la longitud de la cavidad.

Conociendo el Hamiltoniano completo, es posible calcular las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los operadores de aniquilación:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega_c \hat{a} - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{b}(\omega),\tag{A.29}$$

$$\frac{d\hat{b}(\omega)}{dt} = -i\omega \hat{b}(\omega) + \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \hat{a},\tag{A.30}$$

La solución para $\hat{b}(\omega)$ es:

$$\hat{b}(\omega; t) = b_0(\omega) e^{-i\omega t} + \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^t dt' e^{i\omega(t'-t)} \hat{a}(t'),\tag{A.31}$$

donde $b_0(\omega) \equiv b(\omega; 0)$ es la notación para los operadores externos de aniquilación al tiempo inicial.

Sustituyendo esta solución en la ecuación de evolución para \hat{a} , obtenemos:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega_c \hat{a} - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega b_0(\omega) e^{-i\omega t} - \frac{\gamma}{\pi} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{d\omega e^{i\omega(t'-t)}}_{2\pi\delta(t-t')} \hat{a}(t'), \quad (\text{A.32})$$

usamos la propiedad:

$$\int_{\tau_-}^{\tau_+} f(\tau) \delta(\tau - \tau_{\pm}) = f(\tau_{\pm})/2, \quad (\text{A.33})$$

válida para toda función $f(\tau)$ continua en el dominio de integración, y definimos el *operador de entrada*

$$\hat{b}_{in}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega b_0(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.34})$$

De esta forma escribimos la ecuación A.29 como:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -(\gamma + i\omega_c) \hat{a} + \sqrt{2\gamma} \hat{b}_{in}(t), \quad (\text{A.35})$$

la cual es una ecuación de evolución para el modo en la cavidad. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Langevin. El operador $\hat{b}_{in}(t)$ funciona como un ruido externo. $\hat{b}_{in}(t)$ se interpreta como el operador que tiene en cuenta la entrada de campo que fuerza la cavidad. También se obtuvo un término de amortiguamiento $-\gamma\hat{a}$ que corresponde a la pérdida de energía en la cavidad.

A.2.1. El campo de salida en una cavidad

Discutimos ahora el campo de salida asociado con un modo de una cavidad abierta. Trabajando en la representación de Heisenberg usamos la expresión A.25 para escribir la parte de campo saliendo desde la cavidad (esta se propaga en la dirección z positiva):

$$\hat{\mathbf{E}}_{out}^{(+)}(z, t) = ie \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi c\epsilon_0 S}} \hat{b}(\omega; t) e^{i\omega(z-L)/c}. \quad (\text{A.36})$$

Donde el operador $\hat{b}(\omega; t)$ está dado en A.31, en términos de los operadores iniciales $\hat{b}_0(\omega)$ y el modo intra-cavidad. Dado que solo las frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia ω_c contribuyen a la dinámica, podemos reemplazar las pequeñas variaciones de la función $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ por su valor en ω_c , así como extender el límite de integración a $-\infty$, llegando a:

$$\hat{\mathbf{E}}_{out}^{(+)}(z, t) = i\mathbf{e}\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{4\pi c\epsilon_0 S}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{b}(\omega; t) e^{i\omega(z-L)/c}, \quad (\text{A.37})$$

introduciendo la solución para $\hat{b}(\omega; t)$ en esta ecuación y definiendo el “*tiempo de retardo*” $t_R = t - (z - L)/c$, escribimos el campo de salida como:

$$\hat{\mathbf{E}}_{out}^{(+)}(z, t) = i\mathbf{e}\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\pi c\epsilon_0 S}} \hat{b}_{out}(t_R), \quad (\text{A.38})$$

donde hemos definido el *operador de salida*

$$\hat{b}_{out}(t) = \sqrt{2\gamma} \hat{a}(t) - \hat{b}_{in}(t). \quad (\text{A.39})$$

El campo saliendo de la cavidad es entonces una superposición del campo que se escapa de la cavidad y del campo interior que se refleja (ver Fig 23).

Finalmente es fácil mostrar que la energía que sale de la cavidad está en esencia dada por $\hbar\omega_c \langle \hat{n}_{out}(t) \rangle$ con $\langle \hat{n}_{out}(t) \rangle = \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out}$. Por lo que, podemos interpretar $\hat{n}_{out}(t)$ como el operador asociado al número de fotones por unidad de tiempo que sale de la cavidad.

Siguiendo un procedimiento similar es posible calcular el campo irradiado por un átomo de dos niveles dentro de una cavidad .

$$\hat{b}_{out}(t) = \sqrt{\gamma}\hat{\sigma}(t) - \hat{b}_{in}(t). \quad (\text{A.40})$$

En la literatura podemos encontrar multiples fuentes donde calculan las ecuaciones de movimiento para los operadores que constituyen el Hamiltoniano completo en términos de los operadores de entrada y salida del campo y constantes de decaimiento.

A.3. Conclusión.

A lo largo del capítulo repasamos brevemente algunas alternativas para resolver sistemas abiertos. La idea general para continuar esta investigación, es utilizar los procedimientos mostrados para posteriormente encontrar de forma aproximada la evolución del sistema híbrido mostrado en 4.1. Esto podría hacerse calculando los operadores de Lindblad (A.6) y las funciones de correlación para incorporarlas en una ecuación maestra. También puede explorarse la posibilidad de escribir las ecuaciones de Langevin para los operadores de \hat{H}_{hib} .

Referencias

- [1] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information, 2002.
- [2] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Advances in quantum metrology. *Nature photonics*, 5(4):222, 2011.
- [3] P Oetal Schmidt, Till Rosenband, C Langer, Wayne M Itano, James C Bergquist, and David J Wineland. Spectroscopy using quantum logic. *Science*, 309(5735):749–752, 2005.
- [4] Andrew A Houck, Hakan E Türeci, and Jens Koch. On-chip quantum simulation with superconducting circuits. *Nature Physics*, 8(4):292–299, 2012.
- [5] Markus Aspelmeyer, Tobias J Kippenberg, and Florian Marquardt. Cavity optomechanics. *Reviews of Modern Physics*, 86(4):1391, 2014.
- [6] Gershon Kurizki, Patrice Bertet, Yuimaru Kubo, Klaus Mølmer, David Petrosyan, Peter Rabl, and Jörg Schmiedmayer. Quantum technologies with hybrid systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(13):3866–3873, 2015.
- [7] Serge Haroche and J-M Raimond. *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons*. Oxford university press, 2006.
- [8] Y Kaluzny, P Goy, M Gross, JM Raimond, and S Haroche. Observation of self-induced rabi oscillations in two-level atoms excited inside a resonant cavity: The ringing regime of superradiance. *Physical review letters*, 51(13):1175, 1983.
- [9] RJ Brecha, LA Orozco, MG Raizen, Min Xiao, and HJ Kimble. Observation of oscillatory energy exchange in a coupled-atom–cavity system. *JOSA B*, 12(12):2329–2339, 1995.

- [10] RJ Thompson, G Rempe, and HJ Kimble. Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity. *Physical review letters*, 68(8):1132, 1992.
- [11] P Münstermann, T Fischer, P Maunz, PWH Pinkse, and G Rempe. Dynamics of single-atom motion observed in a high-finesse cavity. *Physical review letters*, 82(19):3791, 1999.
- [12] J McKeever, JR Buck, AD Boozer, A Kuzmich, H-C Nägerl, DM Stamper-Kurn, and HJ Kimble. State-insensitive cooling and trapping of single atoms in an optical cavity. *Physical review letters*, 90(13):133602, 2003.
- [13] Pierre Meystre. A short walk through quantum optomechanics. *Annalen der Physik*, 525(3):215–233, 2013.
- [14] Fei Xue, YD Wang, Yu-xi Liu, and Franco Nori. Cooling a micromechanical beam by coupling it to a transmission line. *Physical Review B*, 76(20):205302, 2007.
- [15] JD Thompson, BM Zwickl, AM Jayich, Florian Marquardt, SM Girvin, and JGE Harris. Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane. *Nature*, 452(7183):72–75, 2008.
- [16] Thomas Corbitt and Nergis Mavalvala. Quantum noise in gravitational-wave interferometers. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 6(8):S675, 2004.
- [17] Sumei Huang and GS Agarwal. Enhancement of cavity cooling of a micromechanical mirror using parametric interactions. *Physical Review A*, 79(1):013821, 2009.
- [18] Constanze Metzger, Max Ludwig, Clemens Neuenhahn, Alexander Ortlieb, Ivan Favero, Khaled Karrai, and Florian Marquardt. Self-induced oscillations in an

- optomechanical system driven by bolometric backaction. *Physical review letters*, 101(13):133903, 2008.
- [19] Devender Garg and Asoka Biswas. Coherent coupling between the motional fluctuation of a mirror and a trapped ion inside an optical cavity: Memory, state transfer, and entanglement. *Physical Review A*, 100(5):053822, 2019.
- [20] James Wei and Edward Norman. On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(2):327–334, 1964.
- [21] Bruce W Shore and Peter L Knight. The jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40(7):1195–1238, 1993.
- [22] Christopher Monroe, DM Meekhof, BE King, and David J Wineland. A “schrödinger cat” superposition state of an atom. *Science*, 272(5265):1131–1136, 1996.
- [23] DM Meekhof, C Monroe, BE King, Wayne M Itano, and David J Wineland. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Physical Review Letters*, 76(11):1796, 1996.
- [24] Daniel F Walls. Squeezed states of light. *nature*, 306(5939):141–146, 1983.
- [25] NB Narozhny, JJ Sanchez-Mondragon, and JH Eberly. Coherence versus incoherence: Collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review A*, 23(1):236, 1981.
- [26] B Buck and CV Sukumar. Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival. *Physics Letters A*, 81(2-3):132–135, 1981.
- [27] Sergio Cordero and José Récamier. Selective transition and complete revivals of a single two-level atom in the jaynes–cummings hamiltonian with an additional

- kerr medium. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 44(13):135502, 2011.
- [28] M Tavis and FW Cummings. N atoms interacting with a single mode radiation field. *Phys. Rev*, 170:379, 1968.
- [29] G Rempe, RJ Thompson, H Jeffrey Kimble, and Ramin Lalezari. Measurement of ultralow losses in an optical interferometer. *Optics letters*, 17(5):363–365, 1992.
- [30] Leonard Susskind and Jonathan Glogower. Quantum mechanical phase and time operator. *Physics Physique Fizika*, 1(1):49, 1964.
- [31] William Henry Louisell. Quantum statistical properties of radiation. 1973.
- [32] David G Blair. *The detection of gravitational waves*. Cambridge university press, 2005.
- [33] Barry C Barish and Rainer Weiss. Ligo and the detection of gravitational waves. *Physics Today*, 52:44–50, 1999.
- [34] Vladimir B Braginsky and Braginskii. *Quantum measurement*.
- [35] Carlton M Caves, K Thorne, and R Drever. V. sandberg und m. zimmermann. *Rev. Mod. Phys*, 52:341, 1980.
- [36] T Rocheleau, T Ndukum, C Macklin, JB Hertzberg, AA Clerk, and KC Schwab. Preparation and detection of a mechanical resonator near the ground state of motion. *Nature*, 463(7277):72–75, 2010.
- [37] Matt Eichenfield, Jasper Chan, Ryan M Camacho, Kerry J Vahala, and Oskar Painter. Optomechanical crystals. *Nature*, 462(7269):78–82, 2009.

- [38] Albert Schliesser and Tobias J Kippenberg. Cavity optomechanics with whispering-gallery mode optical micro-resonators. *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 58:207–323, 2010.
- [39] John D Teufel, Tobias Donner, Dale Li, Jennifer W Harlow, MS Allman, Katarina Cicak, Adam J Sirois, Jed D Whittaker, Konrad W Lehnert, and Raymond W Simmonds. Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state. *Nature*, 475(7356):359–363, 2011.
- [40] Florian Marquardt and Steven M Girvin. Trend: optomechanics. *Physics*, 2:40, 2009.
- [41] Miles Blencowe. Quantum electromechanical systems. *Physics Reports*, 395(3):159–222, 2004.
- [42] Keith C Schwab and Michael L Roukes. Putting mechanics into quantum mechanics. *Physics Today*, 58(7):36–42, 2005.
- [43] GJ Milburn and MJ Woolley. An introduction to quantum optomechanics. *acta physica slovacica*, 61(5):483–601, 2011.
- [44] Anthony J Leggett. Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 14(15):R415, 2002.
- [45] KL Ekinci and ML Roukes. Nanoelectromechanical systems. *Review of scientific instruments*, 76(6):061101, 2005.
- [46] Andrew N Cleland and Michael L Roukes. A nanometre-scale mechanical electrometer. *Nature*, 392(6672):160–162, 1998.
- [47] Peter Rabl, Shimon Jacob Kolkowitz, FHL Koppens, JGE Harris, P Zoller, and Mikhail D Lukin. A quantum spin transducer based on nanoelectromechanical resonator arrays. *Nature Physics*, 6(8):602–608, 2010.

- [48] CK Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation. *Physical Review A*, 51(3):2537, 1995.
- [49] A Paredes-Juárez, I Ramos-Prieto, M Berrondo, and J Récamier. Lie algebraic approach to quantum driven optomechanics. *Physica Scripta*, 95(3):035103, 2020.
- [50] Roy J Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963.
- [51] Cosmas Zachos, David Fairlie, and Thomas Curtright. Quantum mechanics in phase space: an overview with selected papers. 2005.
- [52] Héctor Moya-Cessa and Peter L Knight. Series representation of quantum-field quasiprobabilities. *Physical Review A*, 48(3):2479, 1993.
- [53] Alexander V Sergienko. *Quantum communications and cryptography*. CRC press, 2018.
- [54] Juan Ignacio Cirac, Peter Zoller, H Jeff Kimble, and Hideo Mabuchi. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Physical Review Letters*, 78(16):3221, 1997.
- [55] L-M Duan, Mikhail D Lukin, J Ignacio Cirac, and Peter Zoller. Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. *Nature*, 414(6862):413–418, 2001.
- [56] Jens M Dobrindt, I Wilson-Rae, and Tobias J Kippenberg. Parametric normal-mode splitting in cavity optomechanics. *Physical Review Letters*, 101(26):263602, 2008.
- [57] Hui Wang, Xiu Gu, Yu-xi Liu, Adam Miranowicz, and Franco Nori. Optomechanical analog of two-color electromagnetically induced transparency: Photon

- transmission through an optomechanical device with a two-level system. *Physical Review A*, 90(2):023817, 2014.
- [58] Hui Wang, Xiu Gu, Yu-xi Liu, Adam Miranowicz, and Franco Nori. Tunable photon blockade in a hybrid system consisting of an optomechanical device coupled to a two-level system. *Physical Review A*, 92(3):033806, 2015.
- [59] Luis Medina-Dozal, Irán Ramos-Prieto, and José Récamier. Approximate evolution for a hybrid system—an optomechanical jaynes-cummings model. *Entropy*, 22(12):1373, 2020.
- [60] J Robert Johansson, Paul D Nation, and Franco Nori. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 183(8):1760–1772, 2012.
- [61] Leonard Mandel. Sub-poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Optics letters*, 4(7):205–207, 1979.
- [62] Heinz-Peter Breuer, Francesco Petruccione, et al. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [63] Carlos Navarrete-Benlloch. *Introduction to quantum optics*. Shanghai Jiao Tong University, 2020.