UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA Y DEL DESARROLLO

PROMOCIÓN DEL DESARROLLO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO ELEMENTAL EN EDUCACIÓN BÁSICA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN PSICOLOGÍA

PRESENTA:

ANA MARÍA MEDRANO MOYA

TUTORES PRINCIPALES

DRA. ROSA DEL CARMEN FLORES MACÍAS

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

DR. FELIPE TIRADO SEGURA

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES IZTACALA

DR. ARMANDO SOLARES ROJAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUROJURADO

DRA. BÁRBARA BRIZUELA

TUFTS UNIVERSITY

DR. ULISES XOLOCOTZIN ELIGIO

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

MÉXICO, D. F. OCTUBRE 2021

Lo que sabemos, es una gota de agua,

lo que ignoramos, es el océano.

Isaac Newton

Emilio, gracias por tu paciencia y apoyo durante todo este proceso. Gracias por tus contribuciones directas o indirectas a las diferentes fases del trabajo. Gracias por tu amor incondicional y por aguantar todo lo que implicó llegar a este momento, recuerda que te puedes bajar del tren, pero nunca olvidar tu destino.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo, mediante la beca No. 478960.

A los integrantes del Comité Tutor y Jurado de Examen por sus valiosas observaciones y aportaciones en la elaboración del manuscrito.

A mis padres, por contribuir a forjar mi carácter y determinación, y por mostrarme con hechos que la vida no es color de rosa.

A Ulises, por su gran compromiso y dedicación, no sólo con este trabajo, sino con la psicología, la academia y la vida.

A Ale, por las oportunas charlas y por su empuje constante a siempre seguir adelante.

A todas las personas que de manera directa o indirecta contribuyeron en el desarrollo del trabajo y/o en mi desarrollo académico y profesional.

Índice

1. Resumen 1
2. Abstract 3
3. Introducción 5
4. La aritmética y el álgebra, un posible continuo en el aprendizaje de las matemáticas 8
    4.1. Dificultades reportadas en el aprendizaje del álgebra: etapa pre algebraica 9
        4.1.1. Las letras y sus múltiples significados en matemáticas 10
        4.1.2. El signo de igualdad: relación de operación o equivalencia 12
5. Desarrollo del pensamiento algebraico: el continuo entre la aritmética y el álgebra 14
6. Hacía una propuesta de desarrollo del Pensamiento Algebraico 17
7. Análisis de problemas como vía para la promoción del Pensamiento Algebraico (PA) 21
8. Pensamiento Algebraico: Cuerpo empírico 25
    8.1. Aritmética Generalizada (AG) o Construir generalización a partir del razonamiento aritmético y cuantitativo 27
    8.2. Generalizar hacia la idea de función o Pensamiento Funcional 33
    8.3. Una propuesta integradora 37
9. Modelar como una actividad algebraica 39
10. Breves notas críticas sobre las investigaciones presentadas 40
11. La representación: constructo esencial en el proceso cognitivo 42
    11.1. Representación externa como herramienta de mediación 44
12. Justificación y objetivo 48
13. Método 50
14. Selección de datos 64

14.1.Medidas 64

15. Análisis de datos 65

16. Resultados 66

16.1.Desempeño grupal global 67

16.1.1. Desempeño grupal por eje algebraico 68

16.1.2. Desempeño por tipo de problema 69

16.2.Transición de la representación externa en la solución de problemas: taxonomía de análisis 71

16.2.1. Transición de la representación externa en la solución del problema: análisis cuantitativo grupal 80

16.3.Desempeño individual 84

16.3.1. Transición individual de la representación externa en la solución de problemas 91

16.3.2. Análisis cualitativo de las representaciones externas en función de la taxonomía de análisis 93

16.4.Síntesis de los resultados 135

16.4.1. Resultados estadísticamente significativos 135

16.4.2. Principales resultados cualitativos 136

17. Análisis de resultados 139

18. Discusión 142

18.1.Desempeño del grupo ante el eje aritmética generalizada (AG) 144

18.2.Desempeño de los participantes en el algebraico pensamiento funcional (PF) 147

18.3.Sobre la concepción de igualdad 149

18.4.Respecto al uso y concepción de literales 151

18.5.Sobre la identificación de las relaciones implicadas en los problemas 154

18.6.El papel de las representaciones externas en el análisis y comprensión de los problemas 155

18.7.Tareas pendientes 159

18.8.Implicaciones teóricas 161

18.9.Implicaciones educativas 163

18.10. Consideraciones finales 166

19. Referencias 168

20. Anexos 178

1. *Resumen*

La presente tesis sostiene que el proceso de educación y aprendizaje de las matemáticas presenta dificultades tanto en la comprensión de los conceptos y procedimientos como en la relación de estos dentro de las diferentes áreas de las matemáticas. Se señala que dichas dificultades atienden a la segmentación disciplinar que actualmente se sigue en los contenidos disciplinares, así como en la práctica misma que se lleva a cabo dentro de las aulas, aspecto que desarrolla formas de pensamiento estereotipadas y carentes de comprensión. Se argumenta que dadas tales prácticas y ruptura al interior de la disciplina el proceso de enseñanza y aprendizaje puede ser abordado como un proceso inclusivo que haga explícita la continuidad entre los conceptos y procedimientos matemáticos a lo largo de toda la educación matemática formal. Con base en lo anterior, y a partir de la propuesta de la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) se presenta un estudio que pretende identificar condiciones promotoras en el desarrollo de tal comportamiento.

El estudio evaluó el efecto de una secuencia instruccional denominada propuesta *Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA*) sobre el desempeño y la representación externa que muestra un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria al resolver problemas de diferentes ejes algebraicos a lo largo del estudio. El grupo de tercer grado de primaria estuvo conformado por veintisiete estudiantes (18 mujeres, M = 8.5). Se utilizó un diseño A – B – A (*pretest - post test*) con metodología mixta. Los resultados sugieren cuatro principales efectos. a) Hay un efecto positivo de la *PPEPPA* sobre el desempeño efectivo del grupo y sus representaciones; b) hay un desempeño diferencial ante cada uno de los ejes algebraicos trabajados y evaluados, en lo que a desempeño y representación externa elaborada refiere; c) la representación externa elaborada por los estudiantes del grupo es una herramienta viva y dinámica, la cual permite pensar sobre el problema, al mismo tiempo que modifica el pensamiento mismo, y d) las representaciones externas, psicológicamente hablando, pueden ser diferenciadas por la complejidad que cada una de ellas muestra, considerando los elementos que las componen, aspecto que permite analizar de manera diferencial el proceso de comprensión en la solución de problemas matemáticos de diferente complejidad. Los hallazgos se discuten en torno a: i) los beneficios que muestra el diseño instruccional sobre la promoción del *PA*, y ii) las diferencias entre el análisis de las representaciones externas y los elementos que las conforman.

Palabras clave: Álgebra temprana, aritmética generalizada, pensamiento funcional, representación externa, solución de problemas.

2. *Abstract*

The present thesis holds that the process of teaching and learning mathematics shows difficulties. Some difficulties are with the concepts and procedure comprehension, while other difficulties are in mathematics itself because of the lack of thematic continuity. Also, those difficulties belong to disciplinary segmentation and the actual practices themselves inside the classroom. Both reasons develop stereotyped thinking and obstruct mathematical comprehension. The thesis argues that one way to confront the difficulties could be by an inclusive process of teaching and learning mathematics. This inclusive process should explicit the continuity of mathematical processes and procedures, throughout all educational levels. Based on the previous observation and considering, the arguments from the area called early algebra (promoting algebraic thinking), this thesis presents a study that pretends to identify conditions that promote the development of algebraic thinking.

The study evaluated the effect of an instructional sequence called Psychoeducational proposal in Promotion of Algebraic Thinking (PPEPPA, given by the Spanish name) over the performance and the external representation that a third-grade group of elementary school students shows while solving different mathematical problems. This third-grade group of elementary school students had twenty-seven students (18 female, M = 8.5). The study used an A – B – A design (pre-test – post-test) with mixed methodology. The results suggest four main effects: a) there exist a positive effect of the PPEPPA over the group's effective performance and its representation; b) the group shows a different performance according to each algebraic strand (including solution and external representation of the mathematics problems); c) the external representation, made by the students of the group, is a dynamic and living tool, it allowed them to think about the problem, and also, modify the thinking itself during the solution process; and d) the external representation, psychologically speaking, can be classified considering the elements present in it, this aspect allows differentiation it in terms of complexity.

The findings are discussed around two general points: i) the benefits that the instructional sequence shows over the algebraic thinking's promotion, and ii) the differences between the external representation's analysis and their elements.

Keywords: Early algebra, arithmetic generalization, functional thinking, external representation, word-problem solution.

3. *Introducción*

La educación, es el proceso mediante el cual una sociedad reproduce su cultura, en el sentido más amplio del término, a través de diversas instituciones algunas formalmente establecidas para este propósito y otras que lo hacen de manera informal, pero que no por ello son menos eficaces. La escuela, constituye en nuestros días la institución educativa por excelencia, y sus funciones primordiales, aunque no únicas, tienen que ver con la capacitación de los individuos para su inserción en los distintos niveles de la compleja estructura social de la división del trabajo. La educación escolarizada, entendida como capacitación en el sentido más amplio, cubre un variado espectro que va desde la preparación para la alfabetización y el desarrollo motriz (el jardín de niños y el prescolar), hasta la formación de investigadores y técnicos altamente especializados (los postgrados universitarios). El pretender enseñar a grupos numerosos, y formar individuos críticos y creativos, actualmente es un mito. Para corroborarlo basta echar un vistazo a la condición actual de nuestras instituciones educativas y a los desempeños de nuestros estudiantes.

En el ámbito de la educación la psicología puede aportar modelos y principios para plantear y sistematizar las diferentes interacciones que se presentan entre todos los factores que conforman el proceso educativo, con el propósito de cumplir los objetivos institucionales planteados (Bernal, 2005). Dentro del proceso educativo, el desarrollo psicológico es de suma importancia ya que es el predictor de cambio. El desarrollo psicológico puede ser entendido como el cambio longitudinal de la socialización del individuo biológico mediante y en la forma del lenguaje, en este sentido, tiene lugar como la aceptación y el ajuste progresivamente diferenciado del niño a una forma de vida articulada lingüísticamente.

De manera particular, en este trabajo nos ocupamos de la educación matemática. Las matemáticas, de manera general, son consideradas como la ciencia de la estructura, orden y relación que se ha desarrollado a partir de las prácticas elementales de conteo, medición y descripción de las formas de los objetos. Tiene que ver con el razonamiento lógico y cuantitativo de cálculo (Enciclopedia Británica); de esta forma cuenta con un conjunto de conocimientos con características propias y relaciones específicas, las cuales posibilitan determinadas relaciones entre sus símbolos generando distintos tipos de sistemas de notación simbólica.

Actualmente, las matemáticas junto con la lectoescritura constituyen los aprendizajes básicos necesario que todo estudiante necesita aprender desde los primeros años escolares. Estos conocimientos y habilidades son necesarios para la adquisición y ampliación de los subsecuentes.

La educación matemática en México enfrenta dos retos, el primero demanda una mejora en la preparación de los estudiantes, o lo que es lo mismo, que los estudiantes comprendan (conocer) y apliquen (saber) los conocimientos y habilidades adquiridos en esta disciplina a diferentes situaciones problema; el segundo reto, demanda elevar el logro académico, medido por el desempeño, de todos los estudiantes. Sin embargo, los resultados de pruebas internacionales y nacionales coinciden en que los estudiantes presentan grandes dificultades al enfrentarse a actividades pertenecientes a este dominio disciplinar (PISA, 2013; NAEP, 2015). Tres pruebas estandarizadas e independientes entre sí (PISA, 2013; TERCE, 2013 y EXCALE, 2013) coinciden en que un porcentaje importante de estudiantes no cuentan con un buen desempeño académico en este ámbito, lo cual se agudiza en la secundaria.

Ante este panorama, la Secretaría de Educación Pública (2011) planteó que la enseñanza de las matemáticas debería estar ligada a situaciones de la vida cotidiana; con esto los problemas fueron subordinados a contextos cotidianos con el fin de hacerlos significativos para los niños. Esta medida se llegó a interpretar como aprender rutinas para resolver problemas referidos a situaciones puntuales y, con frecuencia, con razonamientos simples. El resultado de esta práctica fue que los estudiantes memorizan un conjunto reducido de pasos para llegar a una solución de problemas que siguen un patrón fácilmente identificable, sin que se medie la comprensión de las relaciones implicadas en el problema, práctica que frecuentemente los lleva al fracaso. Con esto, la práctica de las matemáticas, dentro de las aulas mexicanas, se ha ido alejado de la promoción del pensamiento crítico, relacional y analítico.

Si se considera que el aprendizaje es un cambio comportamental producido por la experiencia que tiene el individuo y que éste guarda una relación con el cumplimiento de criterios convencionales de logros, podemos evaluar el aprendizaje estableciendo el grado en el que su desempeño se modifica y ajusta a las condiciones de la tarea, así como determinar si dicho cambio se ajusta o no a la convención matemática que se estudia. En este sentido y considerando la problemática actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el presente trabajo plantea una propuesta de alternativa dentro del actual proceso de enseñanza y aprendizaje. Dicha propuesta se sustenta en la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) desde el inicio de la educación formal (la propuesta es detallada en las secciones subsecuentes), para ello se planteó el objetivo de evaluar el efecto de una secuencia instruccional denominada propuesta *Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA*) enfocada en los ejes algebraicos *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*) sobre el desempeño y las representaciones externas de un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria al comprender y solucionar diferentes problemas matemáticos. Se espera que la actual propuesta dibuje una nueva brecha para desarrollar los conocimientos y habilidades matemáticas de una forma profunda, integradora y eficiente a lo largo de los diferentes niveles educativos.

4. *La aritmética y el álgebra, un posible continuo en el aprendizaje de las matemáticas*

Analizando la práctica educativa en los dos primeros niveles que componen la educación básica (preescolar y primaria), se observa que la enseñanza pone especial énfasis en que los niños aprendan los principios y procedimientos aritméticos (ver Secretaría de Educación Pública, 2017). La aritmética tiene como objeto de estudio los números y sus operaciones básicas; los cuales derivan de un sistema lógico correspondiente a la teoría de los números y a todos los métodos de demostración efectivamente usados en esa teoría (Mateos, 1989; Runes, 1981). Tradicionalmente se ha supuesto que la aritmética es fundamental para el desarrollo de otros conocimientos matemáticos, como puede ser el álgebra y la geometría, de este punto de vista la aritmética se considera el pilar de las matemáticas (Skemp, 1999).

Al iniciar la secundaria, aproximadamente a los doce años y de acuerdo con los planes y programas de educación en México (ver Secretaría de Educación Pública, 2017), el estudiante es adentrado en las nociones, formas y conceptos del álgebra. El álgebra se centra en el trabajo con variables; en la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, incluyendo la capacidad de describir las relaciones y los procedimientos para resolver los problemas de manera general; en la formación y funcionamiento de expresiones polinómicas y racionales; en la representación de los problemas verbales con expresiones algebraicas que contienen variables y aspectos desconocidos; en la comprensión y descripción del pensamiento funcional y el modelado como una actividad algebraica (Carraher y Schliemann, 2007; Encyclopedia of Mathematics Education, 2014; Freudenthal, 1977; Kaput, 2008; Lins y Kaput, 2004). Todos esos conocimientos algebraicos permiten la generalización y la expresión de las generalizaciones en sistemas de símbolos, así como, el dominio progresivo de las reglas y principios.

Tradicionalmente, se ha supuesto que, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes deben aprender primero la aritmética y posteriormente el álgebra. Este supuesto se basa en dos grandes argumentos. El primer argumento se sustenta en el desarrollo histórico de las matemáticas mismas, esto es, dentro del desarrollo histórico de las matemáticas la aritmética surge antes que el álgebra, por ello, los estudiantes deben aprender primero aritmética y después álgebra; dentro de esta visión la aritmética tiene su fin al concluir la primaria, mientras que el inicio del álgebra se da en el primer año de secundaria. El segundo argumento surge de una interpretación sesgada de la teoría psicogenética, la cual estableció que los estudiantes de primaria tienen ciertas restricciones cognitivas que impiden entender los conceptos, las relaciones y las estructuras que demanda el álgebra, por ello se debe esperar hasta los doce años para que el pensamiento formal se alcance. Este argumento cobró fuerza con las primeras investigaciones realizadas en el área, las cuales se enfocaron en analizar las dificultades que muestran los estudiantes sobre el entendimiento del álgebra (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Kieran, 2004; Lins y Kaput, 2004).

4.1. Dificultades reportadas en el aprendizaje del álgebra: etapa pre algebraica

Las primeras investigaciones que se realizaron encaminadas a analizar el proceso de aprendizaje del álgebra se enfocaron en la comprensión que muestran los estudiantes de secundaria, justo al tener su primer contacto con el álgebra. Esta área de investigación se denomina *pre-álgebra* (Carraher y Schliemann y Schwartz, 2008; Lins y Kaput, 2004).

La investigación en *pre-álgebra* tuvo su mayor desarrollo durante las décadas de 1980 y 1990. Su principal interés estuvo dirigido a tratar de mejorar la educación algebraica mediante la comprensión de los errores u omisiones que los estudiantes mostraban, ya sea por el tipo de enseñanza recibida o por restricciones en su desarrollo cognitivo (Lins y Kaput, 2004). A continuación, se presentan únicamente dos errores reportados en dicha literatura. La razón de únicamente presentar los errores mostrados con la comprensión de literales, así como con el signo de igualdad es que dichos conceptos son el foco de toda la presente investigación, razón por la cual serán retomados dentro de los objetivos y resultados de la presente investigación.

4.1.1. *Las letras y sus múltiples significados en matemáticas*

Dado que el álgebra se centra en la comprensión y manipulación de cantidades desconocidas, variables, covariables y funcionales, requiere hacer uso de elementos alfanuméricos para denotar dichos conceptos. En este sentido, las letras (*literales*) forman parte de las expresiones algebraicas. Sirven para denotar diferentes cantidades, valores o relaciones.

En el tránsito de la aritmética al álgebra, los estudiantes deben aceptar que las *literales* no son exclusivas del lenguaje escrito y hablado, por el contrario, éstas se retoman en diferentes disciplinas. Para el caso específico de las matemáticas, las *literales* forman parte de las estructuras matemáticas y de los conceptos mismos. Al iniciar con los estudios de álgebra, los estudiantes deben cambiar el significado que hasta ahora tienen de las *literales* en el ámbito matemático. Para ellos, las *literales* aluden al nombre del concepto específico, por ejemplo, la "*a*" significa área y la "*p*" perímetro, en este sentido, las letras con las que ellos trabajan son una mera abreviatura del concepto con el cual se trabaja.

A lo largo del aprendizaje y dominio del álgebra, los estudiantes deben comprender que el concepto de *literal* no es estático, por el contrario, este concepto es completamente dinámico, de aquí que entender, usar y dominar los diferentes roles que puede llegar a tener (i.e. incógnita, variable, número generalizado) demanda la flexibilidad de pensamiento.

El aprendizaje del álgebra, la comprensión y el tratamiento de *literales*, requiere que los estudiantes dejen de considerar que éstas representan una cosa, un aspecto concreto o un concepto matemático específico (Enfedaque, 1990; Filloy y Rojano, 1989; Flores y Castellanos, 2011; Ursini, 1999, 2001; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2008). Al respecto, Kieran (1992) y Kieran y Filloy (1989) menciona que las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria en la comprensión de las *literales* pueden atribuirse a que no son enseñadas en contextos que permitan ser dotadas de diferentes significados.

González y Diez (2002) señalan que la manipulación y el cálculo de las *literales* demandan un gran número de conocimientos, dentro de los cuales se encuentra el conocimiento sintáctico del álgebra, es decir, el conocimiento de las reglas formales de manipulación. La manipulación de letras implica un cambio en las convenciones usadas hasta ese momento por los estudiantes, lo que les demanda la comprensión de nuevas reglas, nuevas actividades y nuevos conceptos, aspectos que complejizan aún más el aprendizaje y dominio del álgebra.

Los significados que los estudiantes de secundaria llegan a dar a las *literales* (Enfedaque, 1990; Flores y Castellanos, 2011; Palarea, 1999; Palarea y Socas, 1994; Stacey y MacGregor, 2000; Ursini y Trigueros, 2006) se pueden agrupar en las siguientes cinco categorías:

a. *Literal omitida*. La *literal* que acompaña a los números en un problema dado no se dota de ningún significado y se excluye de la relación matemática implicada en el problema. La *literal* únicamente se escribe.

b. *Literal* como *cosa*. Los estudiantes consideran que las literales con las que están trabajando son la abreviatura o la letra inicial de un objeto, cosa o procedimiento específico.

c. *Literal* como *valor específico*. Los estudiantes al ver una literal, le asignan un valor único y específico. Éste es elegido de forma arbitraria y con él se realizan las actividades o manipulaciones explicitadas en el problema.

Estos tres significados se alejan de los diferentes roles que pueden adoptar las literales dentro de una expresión o problema matemático. Los cuales son: a) La literal se concibe como un número específico y único, el cual se puede localizar al realizar algunas operaciones, a esto se le denomina incógnita. b) La literal es vista como un rango de valores inespecíficos, considerando la existencia de una relación sistemática entre dos conjuntos de valores, a esto se le denomina literal como variable. c) Cuando se otorgan diferentes valores a la literal en función de las relaciones implicadas en la situación, se concibe a la literal como número generalizado.

4.1.2. *El signo de igualdad: relación de operación o equivalencia*

Otro gran problema en el proceso de enseñanza y aprendizaje que se reporta en la literatura de Pre-álgebra es la comprensión y significación que se da al *signo de igualdad*. El *signo de igualdad* es un concepto importante dentro de las matemáticas, éste participa tanto de las relaciones aritméticas como de las algebraicas. De aquí la relevancia de concebirlo de la manera más amplia y generalizable posible.

Como ya se mencionó, la enseñanza de la aritmética en la primaria suele acentuar el carácter operador de las expresiones matemáticas y por ende del *signo de igualdad*. Cuando el algoritmo se presenta de forma vertical no se explicita qué elemento de todos los que componen el algoritmo es el signo de igualdad, mucho menos se explicita la relación que se establece entre los dos miembros del algoritmo – expresión matemática -. Los estudiantes aprenden explícita o implícitamente que hay que realizar la operación con los elementos que componen el algoritmo, así como las reglas de acción de cada algoritmo, dentro de estos aprendizajes se encuentra colocar el resultado obtenido debajo de la línea que separa los elementos a operar del resultado obtenido. Este procedimiento se repite cuando se trabaja de forma horizontal las diferentes operaciones matemáticas. Esta práctica lleva a la comprensión limitada, tanto del algoritmo como del *signo de igualdad*. La comprensión limitada del *signo de igualdad* no es funcional ante los conceptos y procesos para el estudio posterior del álgebra. Ya que, al iniciar con sus estudios del álgebra, el estudiante necesita comprender que el *signo de igualdad* significa una relación de *equivalencia* entre dos relaciones matemáticas (Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1981, 1992; Kieran y Filloy, 1989; Molina, 2009).

Las dificultades conceptuales y operacionales que los estudiantes de secundaria muestran al iniciar sus estudios del *álgebra*, son producto de una ruptura epistemológica entre la aritmética y el álgebra, pero también de las formas de enseñanza que hasta hoy día se mantienen vigentes. La evidencia reportada muestra que existe una oposición entre la enseñanza de la aritmética, la cual se mantiene ligada a los aspectos concretos, particulares y únicos, y la enseñanza del álgebra, la cual se centra en patrones y generalidades. Los resultados obtenidos de las diferentes investigaciones sugieren una falta de incorporación gradual e integral de los conceptos, conocimiento y procedimientos matemático.

Esta concepción segmentada de los contenidos matemáticos promueve en los estudiantes constantes y diferentes obstáculos cognitivos. Esto es, los estudiantes adquieren cierto conocimiento dentro de un dominio matemático específico, dicho conocimiento es efectivo dentro del dominio lo que lleva a su consolidación y mantenimiento. Sin embargo, cuando ese conocimiento es utilizado fuera del dominio o contexto donde fue adquirido lleva a respuestas inadecuadas y/o incorrectas. En este sentido, los obstáculos cognitivos son productos de la experiencia previa que tienen los estudiantes, así como, de su procesamiento interno (Palarea y Socas, 1994). El enfrentamiento constante a obstáculos cognitivos dificulta y complejiza el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En resumen, la evidencia mostrada sugiere la necesidad de repensar y modificar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en toda la educación formal, resaltando la urgencia de pensar cómo relacionar la aritmética y el álgebra dentro del continuo educativo.

5. *Desarrollo del Pensamiento Algebraico: el continuo entre la aritmética y el álgebra*

Con base en la información proporcionada por las investigaciones en el periodo denominado "*Pre álgebra*" (Enfedaque, 1990; Filloy y Rojano, 1989; Flores y Castellanos, 2011; González y Diez, 2002; Kieran, 1981, 1992; Kieran y Filloy, 1989; Molina, 2005, 2009; Palarea, 1999; Palarea y Socas, 1994; Pinson y Gallardo, 2000; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011; Ursini, et al., 2008) se puede sostener que los fracasos de los estudiantes de educación básica, tanto primaria como secundaria, se deben a tres principales aspectos.

Primer aspecto: la enseñanza matemática segmenta el contenido matemático aritmético y algebraico, generando obstáculos cognitivos e incongruencia entre los conceptos, elementos y procedimientos matemáticos.

Segundo aspecto: la enseñanza que se brinda en los primeros años de educación formal pone especial énfasis en el carácter operacional – computacional – de las matemáticas, aspecto que interfiere con la comprensión de los conceptos y procedimientos requeridos en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la secundaria.

Tercero y último aspecto: la actual enseñanza promueve una comprensión limitada, aislada y superficial de las matemáticas, lo que imposibilita verlas como un cuerpo poderoso de análisis, reflexión y aplicación.

De aquí que esos tres aspectos dificulten y limiten el aprendizaje y dominio completo de las matemáticas.

Las dificultades que se han observado y analizadas en los estudiantes de secundaria junto con sus bajos desempeños han llevado a organizaciones y gobiernos (ver, por ejemplo, Cai y Knuth, 2011) a tratar de relacionar los contenidos aritméticos y algebraicos en todos los niveles de educación formal. Al respecto, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) (2000) definió y recomendó una visión longitudinal de la enseñanza de las matemáticas teniendo como eje rector al álgebra. El NCTM señaló que el álgebra puede brindar la oportunidad de promover diferentes habilidades matemáticas y de pensamiento si ésta se introduce como el eje rector en todos los niveles educativos. Kieran (2004) en concordancia con el NCTM (2000) señaló que ver el álgebra como eje conductor en el plan de estudios de educación básica, puede ayudar a los estudiantes a construir una base sólida y profunda de conocimiento y experiencia para llegar a la comprensión y uso del álgebra formal.

Al respecto, Kaput (2000, 2008) expone cuatro razones para establecer el álgebra como el eje rector de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante toda la educación formal.

- La primera razón señala que aprender principios y nociones algebraicas agregaría coherencia, profundidad y poder a los conocimientos matemáticos.
- La segunda razón señala que enseñar matemáticas desde este enfoque mejoraría y/o eliminaría la falta de continuidad entre los conocimientos matemáticos, aspecto curricular más perjudicial de la enseñanza de las matemáticas.
- La tercera razón es brindar y generalizar el acceso a las ideas algebraicas de gran alcance, lo cual potencia la comprensión y aplicación de las matemáticas en todos los niveles educativos.
- La cuarta y última razón es fortalecer institucionalmente, el currículo de primaria para promover aprendizajes que se necesitan en el nivel secundario y superior, ampliando con ello las oportunidades educativas de los niños.

Para delimitar y guiar el establecimiento del álgebra como eje rector del proceso de enseñanza y aprendizaje de toda la educación formal, Kaput (2008), realiza un análisis entre el *Pensamiento Algebraico* (*PA*) y el Álgebra propiamente dicho. Señala que el álgebra es un artefacto cultural escolarizado, el cual está incrustado en el sistema de educación, mientras que el *PA* es toda la actividad humana que se realiza con y entorno con el álgebra (formas de hacer, pensar y hablar). Una vez delimitado cómo se entiende el *Pensamiento Algebraico* (*PA*), Kaput señala que éste se compone de dos aspectos centrales (*A* y *B*) los cuales deben ser contemplados en todas las propuestas que pretenden desarrollar el *PA* en toda la enseñanza formal de las matemáticas. En las líneas que siguen se describen de manera sintética.

- El *aspecto central A,* es la generalización y la expresión de las generalizaciones en sistemas de símbolos. La operación con dichos sistemas de símbolos se debe ir ajustando a las convenciones formales, en otras palabras, el *aspecto central A* refiere a la generalización del uso de símbolos llegando a conocer las reglas para relacionarlos entre sí (aspecto central B).

- El *aspecto central B* es el aspecto sintáctico, el cual debe guiar las acciones de los símbolos dentro del sistema de organización. Este aspecto refiere al dominio progresivo de las reglas y principios que rigen la formación y tratamiento de los sistemas de símbolos.

6. *Hacía una propuesta de desarrollo del Pensamiento Algebraico*

Las primeras ideas sobre el desarrollo del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) surgen en la Unión Soviética con Davydov (1966, 1995). Sus ideas son retomadas y desarrolladas por Freudenthal en los países bajos (1962, 1974, citado en Lins y Kaput, 2004). Ambos autores señalaron que es importante la promoción del *Pensamiento Algebraico (PA)* en estudiantes de grados escolares elementales, ya que ello fomenta la generalidad en el pensamiento. Ambos autores sostuvieron que si se ofrece a los estudiantes diferentes herramientas culturales apropiadas (i.e. diagramas y anotaciones) pueden comprender y solucionar problemas que tradicionalmente se había supuesto que son para estudiantes con un mayor desarrollo biológico y cognitivo.

Los planteamientos que Davydov y Freudenthal desarrollaron sobre la promoción del *PA* se pueden alinear con las ideas del NCTM (2000) y las de Kaput (2000, 2008), de esta esta forma se puede decir que la promoción del *PA* plantea la integración del álgebra como hilo rector de toda la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El *PA* considera que diferentes formas de establecer relaciones pertenecientes al ámbito algebraico pueden guardar una estrecha relación con la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética; esta relación puede favorecer en los estudiantes el desarrollo conceptual ante situaciones matemáticas cada vez más complejas desde edades muy tempranas (Blanton y Kaput, 2005). En términos generales, la propuesta de desarrollo del *PA* propone *algebraizar* el currículum de la escuela primaria con la finalidad de que el *álgebra* promueva la comprensión integral y profunda de las matemáticas. Promover en la educación primaria la enseñanza y el aprendizaje del *álgebra* permite no sólo la búsqueda de un resultado, sino también la comprensión de las relaciones entre conceptos y principios matemáticos, aspectos que permiten transitar de lo particular y concreto a lo relacional y general. En última instancia, se contribuirá a eliminar las dificultades, que actualmente presentan los estudiantes de secundaria al iniciar sus estudios algebraicos (Carraher y Schliemann, 2007), así como la generación de obstáculos cognitivos.

Pensar y enseñar matemáticas teniendo presente en todo momento la promoción del *PA* permitiría que tanto los docentes como los estudiantes aprecien que las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido y conocimientos, por el contrario, son un campo integrado de contenidos y conocimientos, los cuales se relacionan y complementan entre sí (Alsina, 2012). Con la finalidad de guiar el proceso de integración del PA en toda la educación formal, Kaput (2008) desglosó tres diferentes ejes algebraicos (strands) con base en los cuales se pueden generar actividades o vincular el conocimiento matemático. Dichos ejes algebraicos son: construir generalizaciones a partir del razonamiento aritmético y cuantitativo (building generalizations from arithmetic and quantitative reasoning); generalizar hacia la idea de función (generalizing toward the idea of function) y; modelar como una actividad algebraica (modeling as an algebraic activity). Cabe mencionar que los tres ejes algebraicos contemplan los dos aspectos centrales descritos en la sección anterior. A continuación, se describe cada uno.

Primer eje, *construir generalizaciones a partir del razonamiento aritmético y cuantitativo* se refiere a construir generalizaciones a partir del razonamiento aritmético y cuantitativo. Este eje incluye la generalización de las operaciones aritméticas y sus propiedades, así como el razonamiento sobre las relaciones más generales y sus formas (por ejemplo, propiedades de cero, conmutatividad, relaciones inversas, etc.). También, incluye la construcción de generalizaciones sobre propiedades particulares numéricas o relaciones, así como la búsqueda de regularidades y expresiones que las representen. Finalmente, incluye la construcción del aspecto sintáctico del álgebra, así como la promoción de la idea básica de que una expresión puede ser sustituida por una expresión equivalente. Este eje, enfatiza mirar las expresiones aritméticas de forma diferente en cuanto a su forma y no en términos de su valor cuantificable.

Segundo eje, *generalizar la idea de función*. Implica la generalización de una clase particular de relación matemática, donde a partir de la idea de función, la generalización puede expresar la variación sistemática de instancias a través de algunos dominios. El aspecto sintáctico del álgebra se da al contrastar la expresión que denotan regularidades con diferentes expresiones de un mismo patrón para determinar si son equivalentes o determinar cuándo las funciones adquieren valores particulares. Incluyen, por ejemplo, los diversos tipos de cambio.

Tercer eje, *modelar como una actividad algebraica*. Este eje se divide en tres diferentes tipos de modelados de la función. Un primer tipo corresponde al modelado de un número o cantidad específica, sin pretensión de modelar una clase general de situaciones, por ejemplo, un problema aritmético. Por lo general, este modelado toma la forma de una ecuación, que puede requerir el uso del aspecto sintáctico de álgebra para dar una solución donde la variable es considerada como una incógnita. El segundo tipo de modelado utiliza el primer aspecto central de la generalización y la expresión de los patrones y regularidades en situaciones o fenómenos, ya sea fuera de las matemáticas o dentro de las matemáticas (i.e. patrones geométricos); la generalización toma la forma de uso de una o más variables que pueden expresar una función o una clase de funciones. Por supuesto, el trabajo con este tipo de expresiones implica el aspecto sintáctico de álgebra. Un tercer tipo de modelización algebraica consiste en generalizar a partir de soluciones a situaciones de modelado de respuesta única (i.e. problemas aritméticos puros que no requieren maniobras algebraicas como los problemas aritméticos de combinación).

Los tres ejes algebraicos propuestos por Kaput (2008) para guiar la promoción del *PA* son retomados y detallados por Blanton, Stephens, Knuth, Murphy y Kim (2015), ellos proponen cinco grandes ideas para desarrollar y aplicar diferentes prácticas algebraicas en todos los niveles educativos.

La primera gran idea es *Equivalencia, Expresiones, Ecuaciones y Desigualdades* que enfatiza la comprensión del signo de igualdad y el razonamiento con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica.

La segunda gran idea es *Aritmética Generalizada* (*AG*), la cual habla de la generalización de relaciones aritméticas, incluidas las propiedades fundamentales del número y operaciones, así como del razonamiento sobre la estructura de expresiones aritméticas.

La tercer gran idea es el *Pensamiento Funcional* (*PF*) el cual pone en juego relaciones entre cantidades generalizadas que covarían, así como el razonamiento a través del lenguaje natural y la notación algebraica.

La cuarta gran idea es la *Variable*, ésta implica el uso de la notación simbólica como herramienta lingüística para representar ideas matemáticas de manera sucinta, lo cual incluye los diferentes roles de los números.

La quinta y última gran idea es el *Razonamiento Proporcional* el cual demanda relacionar una o dos cantidades generalizadas entre las que la proporción de una cantidad a la otra es invariante.

Estos dos esfuerzos por orientar la práctica matemática y el desarrollo de actividades que promuevan el desarrollo del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) desde los primeros años de educación formal, permiten delimitar y explicar diferentes áreas a trabajar en todos los niveles educativos.

En línea con los tres ejes algebraicos propuestos por Kaput (2008) y las cinco grandes ideas descritas por Blanton, et al. (2015), el NCTM (2000) señala que los estudiantes de primaria deben trabajar con ciertos temas que involucran contenido algebraico, dichos temas son: identificación de patrones, análisis de relaciones entre cantidades, diferentes formas de representación de relaciones matemáticas, análisis de diferentes situaciones matemáticas, empleo de símbolos algebraicos, comprensión de las nociones de función, de número negativo y de procesos de generalización sobre las propiedades de la aritmética.

Estos planteamientos, así como la delimitación del contenido algebraico han servido como base para diseñar diferentes investigaciones empíricas con el objetivo común de promover el desarrollo del pensamiento algebraico.

7. *Análisis de problemas como vía para la promoción del Pensamiento Algebraico (PA)*

La solución de problemas es clave para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pues da un contexto social y cognoscitivo al empleo de los conocimientos, lo que fomenta en el estudiante la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana (Alsina, 2012; Llanos, 2011). La creatividad que se utilice para encontrar una solución a una problemática planteada generará un repertorio de acciones que el escolar podrá utilizar posteriormente en situaciones novedosas. En la enseñanza matemática, la compresión y solución de problemas es uno de los principales intereses pues fomenta la capacidad de pensar matemáticamente para explicar, predecir y modificar la realidad con el comprender lo que pasa en ella, adicionalmente promueve el uso de hábitos de razonamiento, el desarrollo de la reflexión lógica, el análisis y síntesis de elementos y situaciones.

La promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) resulta una alternativa prometedora para el aprendizaje de las matemáticas y para el análisis y solución de problemas como medio para aprender y utilizar el conocimiento matemático.

La comprensión que tenga del problema el estudiante lo llevarán a optar por una u otra ruta de acción. De acuerdo con Jitendra, Griffin, Haria, Leh, Adams y Kaduvettoor (2007), encontrar la solución correcta a un problema matemático implica poner en juego diferentes recursos cognitivos, dentro de los cuales se destaca; comprender las sutilezas del lenguaje, identificar los datos fundamentales de la situación, traducir el problema a una representación conceptual matemática adecuada, elaborar y ejecutar un plan de solución y llevar a cabo los cálculos adecuados, verificando en todo momento su pertinencia respecto al planteamiento original. El empleo de todos estos recursos cognitivos puede implicar dificultades durante el proceso de comprensión y solución del problema matemático, llevando en algunos casos a la generación de confusiones y/o soluciones equivocadas.

Al pensar alrededor de las relaciones implicadas en el problema, el estudiante puede desarrollar, conforme a sus conocimientos, diferentes alternativas de solución. Por ejemplo, en el problema "Leonardo tenía 10 boligomas guardadas en su bolsa, cuando regresaba de la escuela se le cayeron 3. Por la tarde, su hermana Andrea, sin que se diera cuenta Leonard, le quitó 3. ¿Cuántas boligomas perdió Leonardo?" Un estudiante podría restar 10 menos 3 y al resultado (7) restarle 3. Al resultado obtenido de la segunda resta (4) restarlo del 10 original (10 - 4) para concluir que Leonardo perdió seis boligomas. Un procedimiento distinto es sumar las boligomas perdidas (3 más 3) para llegar al valor de boligomas que Leonardo perdió (6). Otro procedimiento que se puede realizar con la información numérica proporcionada es sumar todos los números mencionados en el problema (10 + 3 + 3), sin atender las relaciones implicadas entre cada una de ellas.

Aunque los dos primeros procedimientos que se describen llevan a la respuesta correcta, las diferencias en la comprensión de las relaciones implicadas en el problema indican, por un lado, que el lenguaje permite comprender una situación de diferente forma, retomando para ello, diferentes relaciones que se consideran relevantes, así como la jerarquía que se otorga en la narración del problema o que el estudiante le asigna a cada relación. Por otro lado, las diferencias indican que los conocimientos matemáticos del estudiante le llevan a enfocar su atención en determinados aspectos o relaciones enunciadas en la narrativa del problema. Ambos aspectos guardan relación con lo señalado por Mason, Graham, Pimm y Gowar (1988) y Mason, et al. (1999) sobre las diferentes formas de ver un problema. Estos autores señalan que un problema se puede descomponer de diferente forma, lo que generará diferentes comprensiones y diferentes representaciones, todas estas comprensiones están en función de los conocimientos que posee cada estudiante. Sin embargo, todas esas diferentes formas de ver deben ser equivalentes entre sí, es decir, aunque se comprenda con diferentes conocimientos, se represente y solucione de diferente forma, si se comprendieron adecuadamente las relaciones implicadas en el problema se llegará al mismo resultado correcto (ver el procedimiento 1 y 2 del problema Leonardo descrito previamente). Si no se cuenta con conocimientos y herramientas que contribuyan en este proceso, el análisis que realice el estudiante está destinado al fracaso (ver el último procedimiento presentado en el problema de Leonardo).

Como se aprecia, la identificación de las relaciones implicadas en el problema es el cimiento en el que el estudiante construirá su comprensión. De aquí que resulta relevante la promoción del *Pensamiento Relacional* (*PR*) en todos los niveles de educación formal. Molina (2006) define este tipo de pensamiento como la actividad cognoscitiva de examinar integralmente las expresiones para detectar relaciones entre ellas o entre sus términos para después utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como lo puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados.

En el contexto específico de la solución de un problema, en el presente trabajo se entiende el *Pensamiento Relacional* (*PR*), como el proceso por el cual el estudiante identifica, al comprender y buscar la solución de un problema, los conceptos matemáticos, así como, sus relaciones que son parte de la narrativa del problema, en este sentido, el texto del problema es entendido en virtud del significado matemático que el estudiante le atribuye, lo cual requiere una interacción constante entre éste y el problema y en la que los procesos de asimilación y acomodación son clave. En este sentido, el conocimiento matemático tiene un carácter dinámico y flexible durante toda la comprensión y solución del problema. Cuando un estudiante actúa ante una situación problemática, pone en práctica su conocimiento, al mismo tiempo lo confronta y lo ajusta en función de las relaciones y los resultados que vaya obteniendo, este proceso lleva al estudiante a descartar o construir el conocimiento (Flores, 2002).

La identificación de las relaciones fortalece la comprensión profunda de las matemáticas, y por consecuencia brinda la posibilidad de integrar los conocimientos en diferentes problemas, lo que en última instancia incrementa el éxito en su solución. El *PR* promueve un cambio de pensamiento pasando de la solución rutinaria de casos particulares y conocidos centrados en la aplicación de una operación a establecer generalizaciones entre los aspectos del problema y entre los diferentes problemas, centrándose en la identificación de relaciones entre conceptos, principios y procedimientos matemáticos (Schliemann, Carraher, Brizuela, 2011).

Promover desde la educación primaria la identificación y comprensión de las relaciones implicadas en los diferentes problemas puede resultar ventajoso para la solución de problemas, que como ya se mencionó es una práctica recurrente en la enseñanza de las matemáticas. El *PR* se puede promover de diferente forma. Una de ellas es trabajar con puras expresiones matemáticas, cambiando algunos de los miembros con la finalidad de centrar la atención del estudiante en la estructura misma presentada y en las afecciones que ésta está sufriendo. Otra forma es introducir diferentes tipos de representaciones de las mismas relaciones implicadas en un problema dado, de esta forma se busca que los estudiantes identifiquen que, sin importar el tipo de representación, las relaciones que se representan son las mismas. Una forma adicional de promover el *PR* es presentar y analizar problemas matemáticos de diferente complejidad desde edades tempranas esto lleva a que los niños logren diferenciar las relaciones importantes dentro de todo el contexto narrativo.

En las líneas que siguen se presentan diferentes investigaciones empíricas las cuales han servido para dotar de evidencia la propuesta de la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) desde los primeros años de educación formal provista por Kaput (2008) y Blanton et al. (2015).

8. *Pensamiento Algebraico: Cuerpo empírico*

Desde hace aproximadamente quince años, se han realizado investigaciones empíricas con estudiantes de primaria. Dichas investigaciones han evaluado el desempeño que muestran los estudiantes al comprender y solucionar actividades relacionadas con los tres ejes algebraicos propuestos por Kaput (2000, 2008). Las principales metodologías empleadas en dichas investigaciones son: entrevistas a estudiantes mientras resuelven un problema dado y análisis de episodios de clase seleccionados por el investigador por el contenido.

En el caso de las entrevistas, el problema es leído y resuelto por los estudiantes, se les explicita que en todo momento pueden realizar todas las anotaciones o representaciones que se consideren necesarias para llegar a una solución. Durante el trabajo del estudiante, el investigador va realizando preguntas y dando ayudas graduadas que llevan a los investigadores a identificar el razonamiento y los conocimientos que el estudiante está poniendo en juego. Durante el desarrollo de la entrevista los investigadores identifican y analizan las diferentes formas de compresión, los conocimientos implicados y las diferentes estrategias que desarrolla al solucionar los problemas.

En el caso del análisis de episodios de clase, los investigadores se centran en transcribir cada una de las participaciones hechas durante el episodio, tanto de los investigadores como del o los estudiantes involucrados. Posteriormente y con base en la información de las transcripciones, se identifican los conocimientos, las diferentes formas de comprender el problema y las herramientas que facilitan dicha comprensión.

El empleo de ambas metodologías permite analizar de forma individualizada lo que los estudiantes pueden hacer en relación con el contenido matemático que se presenta en cada problema.

Aunque las investigaciones parten del común denominador de promover el *PA* desde edades tempranas, pueden ser diferenciadas por el eje algebraico al cual corresponde el contenido algebraico, así como, por el tipo de enseñanza que se brinda en la investigación. De esta forma, algunas investigaciones se centran en construir generalizaciones a partir del razonamiento aritmético y cuantitativo (eje 1), otras en promover la idea y comprensión de función (eje 2) y unas más en el modelado como una actividad algebraica (eje 3). Otra forma de diferenciar la investigación empírica que se ha realizado en el área consiste en atender el foco específico de interés que persiguen cada una de ellas, de esta forma se puede decir que algunas investigaciones están enfocadas en analizar la generalización, otras introducen el concepto de función y analizan el *Pensamiento Funcional* (*PF*), otras más se centran en analizar la concepción de los números negativos, mientras que otras incluyen el análisis de la identificación de la estructura subyacente, así como la introducción del concepto de literal como *incógnita* y/o *variable*. Es importante recalcar que el *Pensamiento Relacional* (*PR*), como se definió en la sección previa está inmerso en todos los ejes algebraicos propuestos por Kaput (2000, 2008), así como en las cinco grandes ideas planteadas por Blanton et al. (2015).

La investigación empírica que se presenta en las siguientes subsecciones se agrupa en función del eje algebraico al cual corresponde el contenido matemático que se trabaja en las diferentes actividades. Dicha clasificación se realiza para fines meramente analíticos, pues en la práctica todos esos conocimientos se integran tanto al comprender como al representar y solucionar un determinado problema.

8.1. *Aritmética Generalizada (AG) o Construir generalización a partir del razonamiento aritmético y cuantitativo*

Dentro de las diferentes clasificaciones que se han generado para distinguir entre los contenidos y conocimientos algebraicos que pueden formar parte del contenido aritmético, así como dentro de los temas que estipuló el NCTM (2000) se encuentra el *análisis de relaciones entre cantidades.* Fujii (2003) y Fujii y Stephens (2001) proponen incorporar el concepto de *cuasi variable* para indicar la relación matemática subyacente que es verdadera dentro de ciertos enunciados numéricos, por ejemplo: 78 + 49 - 49 = 78. Los autores señalan que la relación establecida en un número se mantiene sin cambios, como se agregar y se resta lo mismo la relación original no se modifica. La intención de los autores no se centra en introducir expresiones formales del tipo “a + b - b = a”, más bien el foco del trabajo de Fujii y colaboradores es contribuir a que los estudiantes comprendan que esa relación numérica es cierta dado que se agrega y se quita la misma cantidad, por lo que la relación original se mantiene.

Molina (2005, 2009, 2011), al igual que Fujii (2003) y Fujii y Stephens (2001) centra su trabajo en la promoción y el análisis de las estructuras (pensamiento relacional) al poner en juego algunas propiedades fundamentales de las operaciones (i.e. conmutativa de la suma, no conmutativa de la resta). La autora señala que, con expresiones aritméticas, los estudiantes, puede comprender varios aspectos fundamentales, los cuales sirven tanto para apreciar e identificar la estructura de la relación misma, como para analizar la comprensión de la estructura algebraica que desarrolla el estudiante. Algunos de los aspectos que se promueven al trabajar con expresiones aritméticas desde este enfoque son: a) considerar expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural; b) concebir las expresiones aritméticas como totalidades, susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas o transformadas; c) potenciar la exploración, identificación y descripción de patrones y relaciones sobre los números y operaciones; d) hacer uso del lenguaje matemático horizontal prototípico del álgebra y e) favorecer la exploración de la igualdad como representación de una relación entre dos expresiones.

En los estudios que ha realizado Molina (2005, 2009, 2011) han participado estudiantes de tercer grado de primaria (de ocho a nueve años de edad). Su propuesta educativa duró seis sesiones distribuidas a lo largo del ciclo escolar. Durante dichas sesiones, se presentan de forma horizontal una serie de expresiones numéricas de suma y resta las cuales ponen en juego algunas de las siguientes propiedades fundamentales: conmutativa de la suma, no conmutativa de la resta, complementariedad de la suma y la resta, compensación, cero como elemento neutro, elemento opuesto, composición y descomposición, magnitud y reflexibilidad de la igualdad. Dentro de las expresiones horizontales aritméticas, la autora presenta expresiones abiertas las cuales pueden ser falsas o verdaderas (i.e. 75

+ 23 = 23 + 7; 100 + 94 - 94 = 100; 24 - 15 = 24 - 10 – 5, etc.), el interés en este último tipo de expresiones es evaluar cómo un estudiante decide si la expresión es falsa o verdadera sin tener que realizar las operaciones. Los resultados que la autora reporta indican que en un 50% de las veces los estudiantes realizaron el cálculo del valor numérico de ambos miembros para concluir si la expresión era verdadera o falsa, sin importar el contenido matemático abordado. Mientras que en un 25 y 30% de las veces, los estudiantes, hicieron uso explícito de pensamiento relacional argumentando en sus respuestas a las características de la estructura aritmética, prescindiendo con ello del cálculo con los números. Con estos datos, la autora concluye que el pensamiento relacional y la comprensión de propiedades fundamentales de las operaciones pueden ser desarrollados a partir de expresiones aritméticas, siendo un aspecto crítico la realización de cálculos para tomar conciencia de la estructura de la expresión.

Los autores antes mencionados consideran que relacionar el álgebra a través de la aritmética generalizada de números y cantidades puede promover un cambio en el pensamiento de los estudiantes., el reto radica en guiar al estudiante para que atienda las relaciones entre los conjuntos de números y medidas, entre las relaciones implicadas y entre los patrones, que aprecie las similitudes que se evidencian en cada una de las situaciones matemáticas con las que se trabaja.

Al respeto, Brizuela, Carraher y Schliemann (2000) analizan las representaciones espontáneas (no convencionales, como por ejemplo dibujos) que estudiantes de primaria realizan al resolver problemas verbales. En el estudio que reportan, participaron dieciocho estudiantes de tercer grado de primaria. La propuesta educativa consistió en una enseñanza con énfasis en la reflexión sobre las relaciones entre las cantidades del problema. Para ello, los investigadores presentaron un problema, después de la lectura y análisis, los estudiantes representaron las relaciones enunciadas. La enseñanza se llevó a cabo cada dos semanas durante todo un año escolar, promoviendo, siempre, el diálogo e intercambio de opinión. Todas las ideas comentadas son cuestionadas mediante la formulación de preguntas, esto con la finalidad de promover la argumentación y defensa de ideas. Los resultados de la investigación son que los estudiantes se apoyan en su representación para estructurar su pensamiento y comprensión del problema; ya que ésta permite reflexionar sobre el problema siendo una herramienta útil para el desarrollo del razonamiento.

Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) plantean a los estudiantes de tercer grado de primaria problemas verbales que los llevan a comprender que cuando sumas o restas cantidades equivalentes a ambos lados de una equivalencia, la equivalencia se mantiene; así como, si sumas o restas cantidades diferentes, la equivalencia se rompe. El foco de análisis dentro de esta propuesta es la representación que elaboran los estudiantes al ir comprendiendo y solucionando los diferentes problemas verbales. Este interés se debe a que se considera que la representación proporciona información sobre la comprensión que el estudiante tiene del problema. La propuesta educativa que llevan a cabo Schliemann, Carraher y Brizuela consiste en presentar problemas en los cuales se narra una historia entre dos personas que en un inicio tienen la misma cantidad de algo (la cantidad puede ser explicitada o no), posteriormente, se transforma la relación inicial, añadiendo o quitando una cantidad (dicha cantidad puede ser explicitado o no) (i.e. *Bárbara y Juana tuvieron su fiesta de cumpleaños el mismo día. Bárbara recibió 7 regalos de sus amigos, y Juana también recibió 7 regalos de sus amigos. Cuando cada fiesta había terminado, las niñas pasaron un tiempo con sus respectivas familias y recibieron aún más regalos. Bárbara recibió 6 regalos más de su familia y Juana recibió 3 regalos más de su familia. Al final del día, ¿piensas que Juana recibió la misma cantidad de regalos que Bárbara o piensas que una recibió más regalos que la otra?*). Finalmente, los estudiantes deben decidir si existe o no una equivalencia entre las cantidades mencionadas en la narración y justificar su respuesta. Antes de comenzar con la lectura y solución del problema, los investigadores indican a los estudiantes que pueden utilizar cualquier herramienta y/o representación que consideren necesaria. Los resultados señalan que el 94.4% de las respuestas fueron matemáticamente correctas, con base en este dato, los autores, sostienen que los estudiantes reconocen que operaciones equivalentes sobre cantidades equivalentes producen resultados equivalentes y viceversa. En lo que refiere al tipo de proceso que llevaron a cabo los participantes, los investigadores identificaron dos. El primero proceso se denominó "cálculo", en éste, los estudiantes realizan las transformaciones (operaciones de transformación) para cada uno de los personajes, para finalmente comparar los resultados y decidir si es equivalente o no la cantidad. El segundo proceso se denominó "lógica", en éste los estudiantes comparan las cantidades iniciales, luego las transformaciones y finalmente la situación final, con ello, concluyen dando su respuesta. Esta propuesta educativa, además de promover y analizar el pensamiento relacional, incorpora cantidades determinadas e indeterminadas (Radford, 2011), así como cantidades desconocidas (*incógnitas*).

Con la finalidad de profundizar en el tipo de notación espontánea que los alumnos de tercer grado de primaria realizan al comprender y solucionar problemas que incorporan cantidades indeterminadas (Radford, 2011), Schliemann et al. (2011) presentan seis diferentes problemas con las siguientes características: los primeros cuatro involucran entre sus relaciones una *incógnita* (cantidad desconocida) en un miembro de la ecuación; mientras que los dos últimos problemas presentan entre sus relaciones una *incógnita* y una *variable* (*Rocío y Estephani han salido a juntar manzanas para cocinar unos pasteles. Rocío juntó 7 manzanas rojas y algunas manzanas verdes. Representa la cantidad de manzanas que juntó Rocío. Estephani juntó 2 manzanas rojas, el mismo número de manzanas verdes que Rocío y algunas manzanas amarillas. Representa la cantidad de manzanas que juntó Estephanie. Al final, Rocío tenía el mismo número de manzanas que Estephani. ¿Cuántas manzanas amarillas juntó Estephani? ¿Cómo sabes que ese es el número de manzanas* *amarillas que juntó Estephanie?*). Los resultados que se reportan corresponden a los dos últimos problemas. Los autores señalan que para el quinto problema dos participantes lo solucionaron sin ayuda del investigador, seis estudiantes lo solucionaron después de recibir ayuda sobre cómo manejar las cantidades desconocidas (incógnitas y variables), para lo cual se asignaron valores arbitrarios. Y cuatro estudiantes no solucionan el problema a pesar de recibir ayuda del investigador. En lo que refiere al sexto problema, se reporta que cinco estudiantes encontraron una solución sin ayuda del investigador mediante la sustitución de las cantidades desconocidas (incógnitas y variables) por valores arbitrarios, este procedimiento continuó hasta encontrar por tanteos la equivalencia. Tres estudiantes resolvieron el problema después de recibir ayuda directa del investigador "paso a paso" y finalmente dos niños no lograron resolverlo. Los autores concluyen que ningún estudiante representa espontáneamente las cantidades desconocidas, así mismo, se reporta que existe una necesidad por parte de los estudiantes de saber el valor o asignar un valor determinado para comprender las relaciones implicadas en el problema. Los autores sostienen que los estudiantes de tercer grado de primaria pueden desarrollar notaciones para representar las cantidades (determinadas o indeterminadas), así como las relaciones implicadas en diferentes tipos de problemas.

Este tipo de trabajo enseña a los estudiantes a analizar las relaciones matemáticas implicadas en los diferentes tipos de problemas verbales poniendo especial atención en la modificación que sufre la estructura de equivalencia. La comprensión de la noción de equivalencia es de suma importancia en la comprensión del signo de igualdad.

8.2. Generalizar hacia la idea de función o Pensamiento Funcional

El *Pensamiento Algebraico* (*PA*) es una actividad de generalización matemática en la cual se comprenden diferentes relaciones funcionales. Como ya se ha descrito, el *PA* puede ser promovido de diferente forma, en esta sección se pone el énfasis en el *Pensamiento Funcional* (*PF*). El *PF* incorpora la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diferentes representaciones y herramientas lingüísticas, lo que resulta en un objeto matemático poderoso.

Según Smith (2008), el *Pensamiento Funcional* (*PF*) es una forma de pensamiento que se enfoca en la relación entre dos o más cantidades variables, el cual puede progresar desde relaciones específicas que involucran instancias individuales hasta la generalización de esa relación entre instancias. Esta progresión en la forma de pensamiento nos da diferentes formas de analizar los patrones. Siguiendo a Smith esas formas son:

a) Patrón recursivo: involucra identificar la variación dentro de una secuencia de valores, en este tipo de pensamiento, el cambio se enfoca en una sola variable.
b) Pensamiento covariacional: se basa en analizar cómo dos cantidades varían simultáneamente y mantienen ese cambio (por ejemplo, cuando "*x*" aumenta uno "*y*" aumenta tres).
c) La relación de correspondencia se basa en la identificación una correlación entre variables (por ejemplo, "*y*" es tres por "*x*" más dos).

Blanton y Kaput (2011) en términos generales conceptualizan el *PF* como la incorporación, construcción y generalización de patrones y relaciones utilizando diversas herramientas lingüísticas y de representación.

Con base en lo anterior, se han realizado investigaciones que pretenden analizar la comprensión de realizan los estudiantes de primaria al trabajar con problemas que ponen en juego el PF. Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth y Peled (2003), y Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) consideran que las operaciones aritméticas pueden ser tratadas como funciones. Para ello, realizaron un estudio longitudinal en el cual se promovió la identificación de las relaciones funcionales, así como el uso de letras para representarlas. Schliemann et al. (2003), realizan un estudio en el que participaron setenta estudiantes de segundo grado de primaria. El estudio tuvo una duración de año y medio, con una sesión semanal de noventa minutos cada una. La propuesta educativa consistió en presentar un problema con narración, seguido de un debate sobre su solución. Se pidió a los estudiantes que mediante una representación expresaran sus ideas sobre el problema plateado. Los resultados indican que los participantes aprendieron a ver las operaciones aritméticas como funciones estableciendo una relación entre los elementos del enunciado matemático. Adicionalmente, se comenta que la recta numérica es una herramienta significativa para representar números y operaciones, así como para resolver problemas. Incluso puede servir para introducir la noción de número negativo. Los autores señalan que una herramienta importante en el aprendizaje algebraico es la tabla.

Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006), evaluaron la introducción del concepto de función en contextos aritméticos. Realizaron un estudio longitudinal con una duración de treinta meses. En el estudio participaron sesenta y nueve estudiantes de entre ocho y diez años. Las sesiones fueron semanales con una duración de noventa minutos cada una. La herramienta principal de representación empleada por los investigadores fue la recta numérica, mientras que el contenido algebraico que se trabajó fue variando a lo largo de las sesiones (i.e. funciones, notación algebraica, tablas de funciones, gráficas y ecuaciones). Cada una de las sesiones comenzaron con el análisis de un problema abierto, es decir, el problema no tiene una única respuesta. Una vez presentado el problema, se promovió el intercambio de opiniones entre los niños. Los estudiantes dibujaron y/o escribieron lo que comprendieron del problema. Después de tener las representaciones de los estudiantes, los investigadores introdujeron representaciones matemáticas convencionales. Los resultados indican que los estudiantes pueden hacer representaciones típicas algebraicas derivadas de una situación problema. Adicionalmente, se comenta que los estudiantes pueden integrar conceptos y representaciones algebraicas, por ejemplo, "7-10" fue representado como "-3", ya que cada expresión tiene el mismo significado. Otro ejemplo es la comprensión de la expresión "N – 4", la cual fue entendida como que "N" es el resultado del desplazamiento de cuatro espacios hacia la izquierda en la recta numérica desde el punto "N", independientemente del número que "N" representa.

En la misma línea, Schliemann, Carraher y Brizuela (2011), realizan un estudio exploratorio con la finalidad de comprender y documentar el aprendizaje y la enseñanza de las operaciones aditivas abordabas como funciones en un contexto aritmético *algebraizado*. En el estudio dieciocho estudiantes de tercer grado de primaria participaron en quince lecciones de álgebra temprana con una duración de noventa minutos cada una. Adicional a la enseñanza grupal, los autores realizaron entrevistas. Los temas abordados durante las sesiones fueron: comparaciones aditivas desde un punto de vista algebraico y, suma y multiplicación como funciones. Algunas de las actividades que desarrollaron los estudiantes fueron completar tablas de función donde se les pedía ubicar la regla. Posteriormente, se presentaron problemas de comparación aditiva en tres contextos distintos (edades, dinero y alturas) (i.e. *Andrés es 4 cm más alto que María. María es 6 cm más baja que Lila. Dibuja las alturas de Andrés, María y Lila. Muestra a qué se refieren los números*). Schliemann et al. (2011) mencionan que los estudiantes tienden a buscar instancias específicas en los problemas que carecen de ellas lo que dificulta la abstracción de las relaciones implicadas en los problemas. Esto es, los estudiantes tratan las relaciones con cantidades indeterminadas de los problemas con valores específicos (i. e. las alturas de los personajes). Una vez identificada la dificultad, la estrategia que contribuyó al cambio en el pensamiento de los niños fue el uso de las tablas de función. Los autores sostienen que esa herramienta posibilitó que los estudiantes concibieran la "x" como incógnita, es decir, como un valor particular que no se conoce, sin llegar a transitar a la concepción de la "x" como variable.

Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, y Gardiner (2015), analizan el tránsito entre la concepción de la *literal* como *incógnita* a la concepción como *variable* y su relación con su notación. Los autores realizaron un estudio, el cual forma parte de una investigación mayor que tuvo como propósito general investigar el pensamiento funcional a través de la relación entre variables en contextos físicos. Las ecuaciones tipo que se analizaron fueron: "$y = mx$," y, "$y = x + b$". En el estudio participó una estudiante de seis años de edad a la que le realizaron tres entrevistas con una duración de treinta minutos cada una. Durante las entrevistas, se presentaron tres diferentes tareas de pensamiento funcional ("*¿Cuántos hocicos tienen un número cualquiera de perros?", "¿Cuál es la altura de una persona si lleva un sombrero de 30 cm?" y "Un tren recoge dos vagones en cada parada. ¿Cuántos vagones ha recogido el tren después de un número cualquiera de paradas? ¿Y si contamos la locomotora?*"). Los datos que se reportan se obtuvieron del análisis de episodios de clase en los cuales se habla o se hace referencia a la notación y comprensión de variables. Los resultados que se reportan son: al introducir literales para representar cantidades desconocidas, la participante, en las dos primeras entrevistas, asigna un valor para particularizar la variabilidad de la literal; este valor es asignado atendiendo a la secuencia alfabética que siguen las letras en el abecedario, es decir, la letra "*w*" tiene un valor de 23, la letra "*u*" adquiere el valor de 21, mientras que la letra "*a*" obtienen el valor 1. En la última entrevista, la participante usa la *literal* como objeto matemático, es decir, relaciona la *literal* con lo estipulado en el problema, generando la siguiente regla: "cualquiera que sea el número de paradas que haga el tren, si lo duplicas obtienes el número de vagones que tiene el tren”; creando para esto la ecuación “*R + R = V*”. Con base en los resultados, los investigadores señalan que la presentación tardía del álgebra y de las variables centradas en algoritmos, puede estar contribuyendo a las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes mayores. Finalizan sugiriendo una presentación y vinculación más temprana a conceptos y representaciones algebraicos basados en un enfoque que promuevan la exploración del sentido de las ideas y de las representaciones mismas.

Los resultados de estas investigaciones señalan que los estudiantes de manera espontánea asignan valores particulares y específicos a las relaciones funcionales generales. Se comenta que los niños comienzan haciendo representaciones icónicas, transitando a representaciones que pueden emplear literales, siempre con mediación e instigación del investigador. Finalmente, los autores señalan que una herramienta importante en la comprensión de las relaciones funcionales es el uso de la tabla de proporcionalidad (tablas de función, t-chart).

8.3. Una propuesta integradora

En la misma línea de las investigaciones anteriores, pero con la diferencia de integrar diferentes ejes algebraicos dentro de una misma investigación, así como reportar los datos del total del grupo de estudiantes que participaron, Blanton, Stephens, Knuth, Murphy y Kim (2015) realizaron un estudio que retoma los principios de lo que ellos denominan *Matemática Generalizada* (*MG*). La propuesta educativa *MG* se deriva de los planteamientos y ejes algebraicos propuestos por Kaput (2000, 2008) sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en los primeros años de educación formal (estos aspectos se describieron en las secciones iniciales del escrito). Inspirados en la propuesta de Kaput (2008), Blanton, et al. (2015) después de analizar y desmenuzan los tres ejes algebraicos generan cinco “*grandes ideas*” para la presentación de las tareas y análisis de los datos. Las cinco “*grandes ideas*” son: equivalencia, expresiones y desigualdades; aritmética generalizada; pensamiento funcional; variable y razonamiento proporcional. Los autores sostienen que la distinción que ellos realizan permite un análisis detallado al interior de cada uno de los tres ejes algebraicos propuestos por Kaput (2008).

En el estudio participaron treinta y nueve estudiantes (dos grupos) en el grupo experimental y sesenta y siete estudiantes (cuatro grupos) en el grupo control, todos ellos inscritos en tercer grado de primaria. El estudio tuvo como objetivo brindar oportunidades para desarrollar la comprensión de los conceptos y prácticas algebraicas tales como generalización, representación, justificación y razonamiento, así como, aprender contenido aritmético de forma algebraica. En la investigación, se enfatiza el entendimiento relacional del signo de igualdad, la representación y el razonamiento con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica, así como la descripción de relaciones entre cantidades que pueden ser o no equivalentes y la generalización de relaciones aritméticas considerando las propiedades del número y las operaciones, todo esto para razonar sobre la estructura y no sobre un resultado producto de las operaciones. Finalmente, se trabajó sobre la generalización de relaciones entre cantidades co-variantes empleando diferentes formas de simbolización (lenguaje natural, símbolos, tablas o gráficos), destacando los diferentes roles de la literal (incógnita, variable, función y número generalizado) como herramientas lingüísticas para representar ideas de forma sucinta, considerando, también, el razonamiento proporcional y el razonamiento algebraico sobre cantidades que se relacionan de forma proporcional e invariante.

El diseño del estudio fue pretest- post test con grupo control. La instrucción se desarrolló de forma “sostenida”, es decir, una hora por semana durante todo el ciclo escolar. Una de las investigadoras asumió el papel de maestra. La forma de trabajar la propuesta educativa de *MG* consiste en presentar a los estudiantes un problema algebraico, el problema es leído en el grupo. A través de preguntas y su discusión se indaga sobre las relaciones que los estudiantes identifican y se comparten opiniones. Posteriormente, se pide a los estudiantes que representen la relación establecida, se comentan las representaciones propuestas y lo que significan. Estudiantes y profesor eligen la representación que más se acerque a la representación matemáticamente correcta del problema y, a partir de ella, se analiza el significado de cada elemento de la representación. Los investigadores indagan la comprensión que tienen los estudiantes sobre ciertos elementos matemáticos (i.e. signo de igualdad, incógnita, variable, función) a la vez que construyen el o los conceptos matemáticos que se están trabajando.

Los datos que se reportan se basan en las respuestas escritas, obtenidas en las dos evaluaciones (pre y post). La evaluación constó de once reactivos, de los cuales nueve fueron abiertos, uno cerrado y uno mixto. Los resultados que presenta la investigación indican un incremento tanto en el porcentaje de respuestas correctas, como en el tipo de estrategia empleada en la comprensión y solución de los problemas presentados. Con base en los resultados, los autores señalan que los estudiantes pensaron relacionalmente sobre el signo de igualdad, representaron cantidades desconocidas de manera significativa con notación variable, reconocieron la estructura subyacente de las propiedades fundamentales en las ecuaciones y la usaron para justificar su forma de pensar, así mismo, generalizaron y representaron simbólicamente relaciones funcionales entre cantidades.

9. Modelar como una actividad algebraica

El tercer eje algebraico propuesto y descrito por Kaput (2008) no se ha analizado explícitamente dentro de la literatura que promueve el desarrollo del *Pensamiento Algebraico* (*PA*), sin embargo, al interior de algunas investigaciones se pide a los estudiantes que representen las relaciones implicadas en un determinado problema haciendo uso de elementos matemáticos (letras, números y operadores), en este momento se puede asumir que este proceso es el que Kaput (2008) denomina como modelado de un número o cantidad específica. En otras ocasiones se les pide a los estudiantes que identifiquen un patrón que se puede generalizar a cualquier tipo de relaciones enunciadas o no en el problema que se está trabajando, en este momento, se pone en juego el segundo tipo de modelado descrito por Kaput (2008). Con ya se mencionó, la segmentación que se realizó y presentó de la literatura empírica fue con fines meramente analíticos y de organización de ésta.

10. Breves notas críticas sobre las investigaciones presentadas

La evidencia obtenida en el área reporta información valiosa sobre el desempeño que muestran estudiantes de primaria al comprender diferentes conceptos, tareas y elementos relacionados con el contenido algebraico. Aunque importantes por su originalidad y sobre todo por su potencial para promover el cambio conceptual, existen aspectos importantes que pueden afinarse para incrementar la solidez de las investigaciones y las propuestas psicopedagógicas en la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*).

En primer lugar, se observa que los datos reportados corresponden a grupos pequeño de estudiantes; los cuales son seleccionados con base en el desempeño mostrado durante la enseñanza impartida a nivel grupal. Aunque efectivamente se considera a todo el grupo para brindar la enseñanza en la promoción del *PA*, sólo unos cuantos tienen la opción de expandir su conocimiento matemático. Este punto da pie para referir el segundo aspecto.

Segundo aspecto, ya que se selecciona de manera intencional a un pequeño grupo para formar parte de los resultados reportados en las investigaciones, se deja de lado el desempeño y las diferencias individuales de grupo en el cual se impartió la propuesta de enseñanza. Con excepción de Blanton et al. (2015), ninguna investigación reporta el desempeño de todos los estudiantes que conforman el grupo.

Considerando la muestra de cada investigación, no se presenta de manera desglosada el desempeño que muestran los estudiantes a lo largo de los diferentes contenidos matemáticos – algebraicos – que se trabajan, lo que impide ver qué tareas o contenidos son más accesibles a los estudiantes de primaria, o en qué medida las tareas o ayudas que se presentan por los investigadores durante las propuestas facilitan la comprensión del contenido algebraico.

El tercer aspecto refiere a la metodología empleada en la mayoría de las investigaciones. Esto es, dado que todas las investigaciones se llevan a cabo con base en entrevistas, los datos reportados abren la puerta a cuestionamientos importantes sobre la factibilidad de replicar las investigaciones a todo un grupo de estudiantes, así como a la forma mediante la cual se puede promover el desarrollo del *PA* en la totalidad de los estudiantes, así mismo, es plausible cuestionar sobre el tipo de datos que se considera importante y/o relevante para sostener que hay un desarrollo del *PA* ya que la intervención uno a uno entre el investigador y el estudiante entrevistado puede estar modificando el comportamiento natural de los estudiantes.

El cuarto aspecto refiere a la clasificación y segmentación teórica de los ejes algebraicos. Aunque en la teoría es posible separar el contenido disciplinar, las investigaciones aquí reportadas dejan ver que, aunque se contemple un eje algebraico o una gran idea como foco de su investigación, en la práctica casi todos los ejes algebraicos y las cinco grandes ideas se mezclan, tanto en los diseños e implementaciones de las diferentes propuestas de intervención, así como en los abordajes y representaciones de los niños. Por ejemplo, el signo de igualdad y la noción de *incógnita* están presente en todas las relaciones matemáticas. Este aspecto o no es identificado por los investigadores o nunca se menciona explícitamente.

Finalmente, el quinto aspecto tiene que ver con un elemento importante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del *Pensamiento Algebraico* (*PA*). Dicho elemento es la *representación*. A pesar de que la *representación* es relevante en la caracterización del proceso de enseñanza y aprendizaje, dentro de las investigaciones no se explicita ni qué se entiende por *representación*, ni tampoco si existe una diferencia entre las diferentes representaciones, por lo tanto, no se dice si existen diferencias cualitativas entre ellas o sí todas son asumidas como lo mismo. Con base en lo anterior, las diferentes representaciones elaboradas por los niños son consideradas en las investigaciones como lo mismo en todos los casos.

En consideración al quinto aspecto, en la siguiente sección se presenta un análisis del concepto representación, así como una clasificación cualitativa del mismo, para decantar, en la parte final, y explicitar la noción de *representación* adoptada en el presente trabajo.

11. La representación: constructo esencial en el proceso cognitivo

Antes de iniciar con el análisis de la noción de representación es necesario señalar que la noción de "representación mental" es, en principio, una construcción teórica de la ciencia cognitiva (Stanford Encyclopedia of philosophy). Como constructo, es esencial identificar el origen para con base en ello adoptar una postura teórica.

Piaget (1969) señaló que el esquema es el componente básico de la organización cognitiva el cual permite formar una representación mental del mundo. Con base en los esquemas el individuo asimila y acomoda todas las experiencias - conocimiento – de las cuales participa; en caso de que una experiencia –conocimiento- no se pueda asimilar, se generará un conflicto cognitivo – desequilibrio -, el cual llevará al surgimiento de una nueva forma de representar el mundo, es decir, al surgimiento de un nuevo esquema. Los esquemas y por ende las representaciones mentales son indispensables para comprender y responder ante los diferentes problemas. Desde la postura de Piaget (1952, 1969), hablar del desarrollo de los procesos mentales es hablar del aumento en número y complejidad de los esquemas que ha desarrollado la persona con base en su experiencia. Para Piaget (1969), tanto el esquema como la representación son elementos inseparables y dinámicos los cuales evolucionan en función de las experiencias - del conocimiento.

La representación, según Piaget (1969), es generada por la función semiótica la cual puede evocar objetos o acontecimientos no percibidos en la situación. En este sentido, el sujeto produce imágenes interiores – mentales, las cuales se conocen por medios indirectos (i.e., el dibujo, elección de dibujos, indicadores gestuales y complementarios verbales). Con base en lo anterior, todas las expresiones que realiza el sujeto son muestras del pensamiento y complemento del lenguaje (Piaget e Inhelder, 1977), de aquí que se hable de representación interna y representación externa. La representación interna es la representación mental que realizan los sujetos mediante procesos cognitivos, ésta contiene información adicional proveniente de los conocimientos previos. Mientras que la representación externa, grosso modo, es cualquier tipo de producción material que elabora el sujeto (dibujos, diagramas, esquemas, etc.) la cual permite acceder a la representación interna. Estos supuestos forman el compromiso fundamental de que los estados y procesos mentales deben explicarse en términos de las representaciones externas.

Vergnaud (1990; 2009), en la misma línea que Piaget (1969), señala que la representación permite analizar la organización de una situación para operar en ella, pues a la vez que simula la realidad, la organiza y permite dirigir la acción en el proceso de construcción del conocimiento. En este sentido da continuidad y amplía la noción inicialmente plateada por Piaget al señalar su naturaleza operativa y el hecho de que reflejan entramados de conceptos relacionados con diversas formas de simbolizaciones matemáticas o no matemáticas (Flores, 2002).

Con base en los planteamientos de Piaget, se pueden distinguir dos tipos de representación, a saber, representación interna y *representación externa*. La representación interna es propiamente dicha la representación mental que realizan los sujetos, esta contiene información adicional proveniente de los conocimientos previos. Este último conocimiento no siempre forma parte de las representaciones externas. El conocimiento previo es un recurso importante de información, ya que éste puede compensar, parcialmente, una falta de información externa (Schnotz, 2005). Mientras que la *representación externa*, *grosso* modo, es cualquier tipo de producción material realizada por el sujeto. Por la naturaleza e interés del presente estudio en las secciones que siguen únicamente se retoma y analiza la *representación externa*.

11.1. *Representación externa como herramienta de mediación*

Con base en lo anterior, se puede sostener que la representación externa es cualquier tipo de producción material realizada por el sujeto, ésta permite comprender y responder ante los diferentes problemas. La representación externa permite conocer la representación mental de los sujetos siendo muestras del pensamiento mismo (Piaget, 1969 y Vergnaud, 1990; 2009).

Vygotsky (1991) no habla de representación en el sentido Piagetano. Vygotsky alude al papel sobresaliente de los símbolos y del lenguaje como herramientas del pensamiento (instrumentos sociales). En este sentido, Vygotsky señala que el rol que toman las herramientas del pensamiento (símbolos y lenguaje) lo toman en la funcionalidad que adquieren en la situación. Esto es, cuando un niño usa los instrumentos sociales - convencionales (herramientas del pensamiento) para mediar la actividad de otros y/o su propia actividad para dar solución a un determinado problema, se dice que él ha interiorizado dichos instrumentos sociales lo que lo hace un ser consiente, psicológicamente hablando. Para Vygotsky, el pensamiento no es algo que antecede a la actividad o a la acción, sino que todo lo que los individuos hacen con las herramientas del pensamiento en la solución de problemas es el pensamiento mismo.

Siguiendo a Vygotsky (1991), Bruner (1960), enfatiza la importancia de que los estudiantes utilicen las herramientas (instrumentos sociales – símbolos y lenguaje -) del ámbito del cual se derivan los problemas que se están abordando – herramientas convencionales, ya que este proceder permite un conocimiento por medio de la acción y los medios simbólicos. En el caso específico del ámbito matemático, se espera que los estudiantes gradualmente utilicen los instrumentos sociales producidos y utilizados dentro de ese ámbito (i.e. números, símbolos, etc.). Otro aspecto que Bruner resalta es la jerarquía y estructura del conocimiento dentro de las representaciones externas. Al respecto, él señala que la estructuración del conocimiento, así como de las relaciones entre sus elementos, posibilitan la integración y organización del conocimiento nuevo a las herramientas previas, lo que permite una mayor comprensión del problema. Finalmente, Zhang y Norman (1994) señalan que la naturaleza de la representación externa de un problema afecta la velocidad y precisión de la solución de este, en consecuencia, la dificultad del problema disminuye con el aumento de las representaciones externas en tanto ésta es estable, explícita y fácilmente verificable.

La representación externa en tanto se crea con los símbolos y lenguaje que usa el sujeto – que ha interiorizado – permite estructurar el conocimiento, simplificando el análisis del problema, lo que en última instancia permite la ejecución del individuo para generar una solución. De esta forma, la representación es la herramienta activa de mediación entre el pensamiento del sujeto (símbolos y lenguaje) y la información del problema. Cuando los sujetos miran a través de la representación externa el problema ésta se convierte en un instrumento psicológico del pensamiento, en este sentido, todas las representaciones externas son medios externos directos y transparentes para el pensamiento.

La postura de Vygotsky permite rescatar la importancia de las representaciones externas en tanto están plasman el uso de los símbolos y del lenguaje en el proceso de aprendizaje de una disciplina, es aquí donde se enfatiza la importancia de la representación externa dentro del proceso de solución de problemas. Si la representación externa es la evidencia de la cognición y a su vez ésta plasma los símbolos y el lenguaje que ha interiorizado el sujeto – que usa – el análisis de las representaciones externas que realizan los estudiantes al solucionar diferentes problemas matemáticos es de gran relevancia psicológica en tanto posibilita la identificación de los símbolos y lenguaje que usan los sujetos, así como el tipo de uso que se hace de ellos, para finalmente realizar un comparativo con lo esperado convencionalmente.

Con base en el análisis previo, para el caso específico de este trabajo, se sostiene que la representación externa elaborada por el estudiante es una herramienta dinámica de pensamiento, la cual plasma y organiza la información del problema en función de los símbolos y el lenguaje del individuo, esta organización permite que él pueda actuar sobre la situación. En resumen, la representación es una herramienta mediante la cual el estudiante plasma y organiza los conocimientos que pone en juego, pero al mismo tiempo media el tránsito entre lo que está expresado verbalmente y sus conocimientos matemáticos.

Con base en la noción delimitada de representación, este trabajo presenta una propuesta de análisis de representaciones externas elaboradas al solucionar problemas matemáticos. Cabe recordar que el análisis de las representaciones permite identificar la interiorización de símbolos y del lenguaje – uso - convencional que hasta ahora han realizado los estudiantes.

La propuesta de análisis de las diferentes representaciones externas se centra particularmente en el análisis del uso del signo de igualdad y de literales, de la identificación de las relaciones matemáticas que se establecen entre el signo de igualdad y las literales y en las formas de pensamiento que se pueden derivar de los dos aspectos anteriores. En este sentido, el sistema de análisis se compone de cuatro diferentes categorías las cuales muestran un entrelazado entre los tres elementos antes mencionados, diferenciándose entre sí por la complejidad, es decir, por las funciones que se establecen con los elementos. Las categorías son: “No respuesta”, “Explica la relación con operación”, “Explica la relación sin operación” e “Introduce literal”. Este sistema de análisis de las representaciones externas será retomado y detallado en la sección de análisis de resultados y conclusiones, a partir de la sección 16.2.

12. Justificación y objetivo

El área de investigación que tiene como objetivo general promover el *Pensamiento Algebraico* (*PA*) ha demostrado un efecto positivo sobre la comprensión y desempeño de los estudiantes ante algunos de los ejes algebraicos, así como sobre la comprensión de algunos conceptos algebraicos en la solución de problemas (por ejemplo, literales, signo de igualdad). Estos han sido presentados de forma aislada en cada una de las diferentes investigaciones. De aquí que es plausible suponer que, una secuencia instruccional sustentada en los principios del desarrollo del *PA* que integre más de un eje algebraico influirá en la comprensión y desempeño de problemas algebraicos de diferente complejidad.

Teniendo presente por un lado que el *PA* es la actividad humana que se basa en las diferentes formas de hacer, pensar y decir sobre el artefacto cultural del álgebra (Kaput, 2008) y por el otro que la *representación externa* es una herramienta que permite plasmar los conocimientos matemáticos y a la vez pensar sobre el problema mismo, resulta relevante analizar la comprensión y representación que estudiantes de primaria realizan al solucionar diferentes problemas matemáticos, así como analizar el tránsito que muestran los estudiantes entre las diferentes manifestaciones de la *representación externa* (iconográficas, aritméticas y algebraicas) ya que este tránsito promueve la flexibilidad del pensamiento incorporando diferentes sistemas convencionales y simbólicos a la *representación externa* (Nunes y Bryant, 1997; 2005).

El objetivo de la presente investigación fue evaluar el efecto de una secuencia instruccional denominada propuesta *Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA*) enfocada en los ejes algebraicos *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*) sobre el desempeño y las representaciones externas elaboradas por un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria al comprender y solucionar diferentes problemas matemáticos. Teniendo como objetivos particulares:

- Evaluar el efecto de la *PPEPPA* sobre el porcentaje general de respuestas correctas del grupo de estudiantes.
- Evaluar el efecto de la *PPEPPA* sobre el porcentaje de respuestas correctas del grupo ante los dos ejes algebraicos que conformaron el estudio (*AG* y *PF*).
- Evaluar el efecto de la *PPEPPA* sobre el porcentaje de respuestas correctas del grupo ante los diferentes problemas que conformaron las evaluaciones.
- Analizar las *representaciones externas* elaboradas por el grupo ante los dos diferentes ejes algebraicos trabajados.
- Analizar las representaciones externas elaboradas por los niños que conformaron el grupo ante los problemas que conformaron las evaluaciones.
- Evaluar la transferencia de la *representación externa* y del razonamiento al solucionar problemas matemáticos de diferentes ejes algebraicos.

13. Método

Participantes

Un grupo de tercer grado de primaria (veintisiete estudiantes) de una escuela primaria pública, ubicada en una zona urbana del Estado de México (18 mujeres, M = 8.5). Los estudiantes no contaban con ningún tipo de instrucción explícita en *Álgebra* o *PA*.

Muestra

Intencional no probabilística

Diseño

De A – B -A (pretest - post test).

Variables

Independiente: exposición a una secuencia instruccional denominada propuesta *Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA*) enfocada en dos ejes algebraicos, a saber, *Aritmética Generaliza* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*) (Kaput, 2008; Blanton, et al., 2015).

Dependientes:

a) Porcentaje del promedio de respuestas correctas en los dos diferentes momentos del estudio (pretest y post test).

b) Porcentaje del promedio de respuestas correctas en ambos ejes algebraicos (*AG* y *PF*) en los dos momentos del estudio.

c) *Representación externa* elaborada al solucionar los problemas matemáticos.

d) Uso del signo de igualdad y literales, dentro de la *representación externa* de cada problema matemático.

Instrumentos

- Evaluación de habilidades Algebraicas (EHA). La evaluación se conformó con diez diferentes problemas matemáticas siguiendo un criterio de complejidad ascendente en su presentación. Esto es, se presentan primero los problemas pertenecientes al eje algebraico *AG* y posteriormente los problemas del eje algebraico *PF* (ver tabla 1 y anexo 1). Los primeros cinco problemas evalúan la noción de equivalencia en el signo de igualdad, incluyendo cantidades determinadas, es decir, cantidades específicas y particulares (Radford, 2011). De esos cinco problemas, los últimos cuatro incluyen la noción de incógnita y únicamente el problema tres incorpora el uso explícito de la literal "*x*" para representar una *incógnita* (cantidad desconocida). Los problemas sexto, séptimo y octavo evalúan la noción de equivalencia del signo de igualdad dentro de un contexto de relación funcional, incorporando literales como *incógnitas* y cantidades determinadas (específicas) e indeterminadas (Radford, 2011). Finalmente, el noveno y décimo problema evalúan el *Pensamiento Funcional* (*PF*) sin la equivalencia del signo de igualdad, además de incorporar cantidades determinadas e indeterminadas. Es pertinente señalar que, con excepción de los tres primeros problemas todos se presentaron en un contexto narrativo referido a una situación cotidiana.

Ocho de los diez reactivos que conforman el EHA fueron retomados de la literatura del campo de investigación en la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*)[1], uno fue seleccionado de literatura matemática educativa en álgebra[2] y uno se elaboró para presentar un problema típico de la enseñanza mexicana (ver anexo 1).

La confiabilidad y validez de la evaluación se obtuvo a través de jueceo de expertos, mientras que la longitud se determinó con base en un estudio previo (Medrano y Flores-Macías, 2018) en el cual se analizó el efecto de una secuencia instruccional con una aproximación teórica y metodológica diferente, basada en el modelo de Instrucción de Ampliación de Esquemas sobre el desempeño en la solución y representación de problemas aritméticos de total (Fuchs, Fuchs, Prentice, Hamlett, Finelli y Courey, 2004) y algebraicos (Schliemann, Carraher, Brizuela y Jones, 2011). Las evaluaciones que conformaron dicho estudio presentaron doce problemas aritméticos de total. Los resultados sugieren un efecto diferencial positivo en los estudiantes que conformaron el Grupo Experimental, sin embargo, se nota una ligera

---

[1] Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy, A. y Kim, J. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46 (1), 39-87.
Brizuela, Blanton, Murphy, Newman-Owens & Sawrey (2015). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Studies in Psychology*.
Brizuela & Schliemann (2004). Ten-years-old students solving linea equations. *For the Learning of Mathematics*
Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 37(2)
Molina, M. (2005). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. Recuperado de: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2696956.pdf
Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. *FUNES-EIME*, 27-51.
Schlieman, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). El carácter algebraico de la aritmética. *Paidós*: México.
2 Schmittau, J. (2005). The Development of Algebraic Thinking A Vygotskian Perspective. *ZDM*: 37 (1).

disminución en el efecto en los últimos problemas, lo que sugirió fatiga. Con base en los resultados y en el número de problemas que conformaron las evaluaciones, se decidió que EL EHA estuviera conformado por diez problemas (ver tabla 1).

Problema Mate Ideas Algebraicas	Ecuación Aritmética (EA) 1	Ecuación Aritmética con Incógnita (EAcI) 2	Ecuación Aritmética con *x* (EAcX) 3	Desigualdad 4	Aritmético combinación (AC) 5	Relación Funcional Incógnita y Variable (RFcIV) 6	Relación Funcional Incógnita y Variable (RFcIV) 7	Problema Funcional con Incógnita (PFcI) 8	Problema Funcional (PF) 9	Problema Funcional con 3 variables (PFc3) 10
Noción de equivalencia del signo de igualdad	x	x	x	x	x	X	x	x		
Cantidad determinada	x	x	x	x	x		x	x	x	
Noción de incógnita		x	x	x	x		x	x		
Uso explícito de literales			x							
Noción de desigualdad				x						
Cantidad indeterminada						x	x	x	x	x
Noción de variable						x	x		x	x
Pensamiento relacional	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Pensamiento funcional						x	x	x	x	x

Tabla 1. Orden y características de los problemas matemáticos presentados en la Evaluación de Habilidades Algebraicas (EHA).

- Dos cuadernillos de trabajo; uno para trabajar problemas de cada eje algebraico (*AG* y *PF*). A continuación, se describe casa uno.

El cuadernillo *AG* (ver anexo 2) se conformó con cuatro problemas retomados de la literatura especializada en la promoción del *PA*[3] y uno de elaboración

[3]Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy, A. y Kim, J. (2015). The Development of Children’s Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46 (1), 39-87.
Carraher, Schliemann & Brizuela (2001). Can Young Students Operate on Unknowns? *Learning and Individual Differences*.
Molina, M. (2005). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. Recuperado de: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2696956.pdf
Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. *FUNES-EIME*, 27-51.

propia. Los problemas estuvieron enfocados en la promoción de la comprensión de la noción de equivalencia del signo de igualdad y en la comprensión de problemas de combinación cuya solución puede implicar el empleo de una ecuación con incógnitas y cantidades determinadas, específicas (Radford, 2011).

El cuadernillo *PF* (ver anexo 3) se conformó con cuatro problemas retomados de la literatura en promoción del *PF*4.y uno de elaboración propia. Los problemas se plantean tanto con cantidades determinadas como con indeterminadas (Radford, 2011) y se enfocaron en la comprensión de la noción de incógnita y variable, así como su simbolización mediante el uso de literales que adoptan uno u otro rol, dependiendo de las relaciones implicadas en el problema. El problema de elaboración propia presenta un arreglo metodológico e instruccional fenoménico, el cual permite que los estudiantes manipulen y observen la relación funcional entre diferentes cantidades de agua. Los otros cuatro problemas se presentaron únicamente en un contexto narrativo.

Schlieman, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). El carácter algebraico de la aritmética. *Paidós*: México.
[4] Brizuela, Blanton, Murphy, Newman-Owens & Sawrey (2015). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Studies in Psychology*.
Brizuela & Schliemann (2004). Ten-years-old students solving linea equations. *For the Learning of Mathematics*
Carraher, Martinez, & Schliemann (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM* Mathematics Education

Escenario

Las sesiones se llevaron a cabo en el salón de clases del grupo. El salón cuenta con bancas dobles, un escritorio, una silla, un pintarrón, iluminación tanto natural como artificial y ventilación natural. Las sesiones tuvieron una duración de sesenta minutos aproximadamente y se impartieron los lunes, miércoles y viernes.

Procedimiento

Acercamiento a la escuela

Antes de iniciar con el desarrollo y aplicación de todo el estudio, se acudió a la escuela primaria pública "Amado Nervo" a platicar con la directora sobre la posibilidad de realizar el estudio con los estudiantes que tiene a su cargo. Se comentó que el estudio es de matemáticas, particularmente sobre la promoción del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria. Se propuso trabajar con los estudiantes de tercer grado, tres días a la semana una hora cada día. Se acordó hacer una presentación sobre el trabajo realizado una vez analizado los datos, así como agradecer la disponibilidad y acceso de la escuela en cualquier publicación y/o escrito que se derive de dicho trabajo. La directora de la escuela accedió y autorizó que el estudio se realizara con los estudiantes de tercer grado.

Tanto los niños como los padres de familia fueron informados del trabajo a través de una reunión en la que se enfatizó que la investigación no tendría costo alguno ni paras los padres de familia ni para la escuela. Adicional, se señaló que la participación de su hijo era completamente voluntaria y que ésta no afectaría las calificaciones de ninguna materia ni las relaciones de su hijo dentro de la escuela. Todos los padres de familia y estudiantes dieron su consentimiento.

El procedimiento experimental constó de tres condiciones: a) *Pretest*, b) Secuencia instruccional denominada *Propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico*

(*PPEPPA*) y, c) *Post test*. El procedimiento completo se llevó a cabo en tres meses aproximadamente. Las sesiones se llevaron a cabo los lunes, miércoles y viernes con una duración de sesenta minutos aproximadamente.

El Pretest y el Post test fueron idénticos en los dos momentos ya que se implementó En ambos momentos el EHA. A continuación, se describe cada condición.

Pretest

Al día siguiente de la junta informativa con los padres de familia y los estudiantes, se aplicó, en la primera sesión la EHA (pretest) a todo el grupo de tercer grado. Al inicio de la sesión se dieron las siguientes instrucciones:

"Hola chicos! Como ya saben en los próximos días estaremos trabajando cosas de matemáticas juntos. Recuerden que es muy importante que hagan su mayor esfuerzo al trabajar, pero si algo no lo saben pueden preguntar. Recuerden que todos estamos aquí para aprender. El día de hoy, resolverán unos ejercicios, estos ejercicios los deben resolver de forma individual. Si no pueden responder algún ejercicio lo pueden dejar y avanzar al que sigue, al final, si aún hay tiempo, pueden regresar al ejercicio que se saltaron. En esta ocasión nuestro límite de tiempo son sesenta minutos, es decir, una hora. Si concluye el tiempo límite y aún no han terminado todos los ejercicios no pasa nada, así entreguen sus hojas. Recuerden que para mí es muy importante poder conocer el trabajo de cada uno de ustedes, por eso les pido de favor que no vean el trabajo de sus compañeros. ¿Tienen alguna duda?"

Al termino de los sesenta minutos se pidió a todo el grupo que entregaran su evaluación estuviera o no concluida.

Implementación de la Secuencia Instruccional denominada propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico

En la sesión siguiente a la aplicación del *Pretest* se inició con la secuencia instruccional denominada propuesta *Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA*), ésta consistió en trabajar con los estudiantes uno a uno los diez diferentes problemas matemáticos que conforman los dos cuadernillos de trabajo. Cada lección se conformó en promedio por dos sesiones. Cada lección estuvo conformada por un problema matemático abierto enfocado a una temática particular (ver tabla 2). El contenido de toda la *PPEPPA* se diseñó y dividió considerando los conocimientos y prácticas que se describen para los dos ejes algebraicos de interés (*AG* y *PF*) (Blanton et al, 2015 y Kaput, 2008). De esta forma, cada lección se diferenció por el contenido, así como por los conceptos que se desarrollaron. Como ya se mencionó en la sección de instrumentos, de los diez problemas que conforman los cuadernillos, siete fueron retomados de la literatura especializada en la promoción del *PA*[5], uno fue seleccionado de literatura matemática educativa en álgebra[6] y dos fueron de elaboración propia; uno presenta una situación aritmética de combinación (cuadernillo *AG*) y el otro presenta un arreglo metodológico e instruccional fenoménico (cuadernillo *PF*), el cual permite que los estudiantes manipulen y observen la relación funcional entre diferentes cantidades de agua.

De manera general, la secuencia se llevó a cabo de la siguiente manera. Los diez problemas fueron analizados uno a uno, para ello se pedía a alguno de los estudiantes que lo leyera en voz alta, posteriormente, se preguntó a todo el grupo sobre la información que presenta el problema y sobre los elementos, así como por el tipo de relación que se establece entre ellos (i.e. ¿qué dice el problema?,

---

[5] Brizuela, Blanton, Murphy, Newman-Owens & Sawrey (2015). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Studies in Psychology*.
Brizuela & Schliemann (2004). Ten-years-old students solving linea equations. *For the Learning of Mathematics*
Carraher, Martinez, & Schliemann (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM* Mathematics Education
6 Schmittau, J. (2005). The Development of Algebraic Thinking A Vygotskian Perspective. *ZDM*: 37 (1).

¿de qué habla?, ¿de quién habla el problema?, ¿qué nos pide que hagamos?, ¿qué nos está preguntando?), los estudiantes uno a uno respondieron cada una de las preguntas que se hicieron. Una vez que se había comprendido la información del problema, los estudiantes, en sus cuadernillos, resolvieron de forma individual los problemas. Las instrucciones escritas que se presentaron al inicio de cada problema fueron: "Resuelve los siguientes ejercicios. Realiza los dibujos, anotaciones y operaciones que necesites". Las diferentes respuestas que los estudiantes dieron fueron las diversas representaciones externas, simbólicas y no-simbólicas que se retoman en la medida análisis cualitativo de las REs.

Una vez que los niños solucionaron los problemas de manera individual, pasaron al frente para presentar y compartir con el resto del grupo tanto su representación externa (RE) como su proceso de solución. Después de poner en el pintarrón las diferentes REs, de manera grupal se identificaron los elementos que formaban parte de cada RE, así como la relación que se estableció entre ellos, para ello se pidió, primero, que cada estudiante explicará su RE al grupo, posteriormente, se realizaron preguntas sobre el análisis de las REs (i.e. ¿en qué se parecen los trabajos de sus compañeros?, ¿en qué son diferentes?). Las REs que realizaron los niños en sus cuadernillos de trabajo a lo largo de las sesiones que conformaron el *PPEPA* fueron retomadas y evaluadas con los parámetros descritos en la variable "análisis cuantitativo de los niveles de pensamiento simbólico". Se inició con ecuaciones aritméticas y se transitó hasta relaciones de *Pensamiento Funcional*. De manera individual se evaluaron los cuadernillos de cada uno de los estudiantes considerando el desempeño y la producción de REs. Tanto de manera verbal como escrita se cuestionó en todo momento sobre el entendimiento del problema, de sus elementos, de las relaciones que se establecen entre los elementos y sobre la *representación externa* que realizaron los estudiantes.

Problema Mate Características	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Noción de equivalencia del signo de igualdad	x	x	x	x	x	x	x			
Cantidad determinada	x	x	x	x	x		x	x	x	
Noción de incógnita	x	x	x		x		x			
Uso explícito de literales	x									
Noción de desigualdad			x	x	x					
Cantidad indeterminada		x	x	x	x	x	x	x	x	x
Noción de variable				x	x	x	x	x	x	x
Pensamiento relacional	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Pensamiento funcional						x	x	x	x	x

Tabla 2. Orden y características de los problemas matemáticos abordados en la secuencia instruccional denominada *propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*).

En las líneas que siguen se presenta el procedimiento que se siguió sesión a sesión durante la *PPEPPA*. La descripción de las sesiones se agrupa considerando los dos ejes algebraicos de interés (AG y PF). Al inicio de cada eje y con la finalidad de sintetizar los focos de interés de cada problema se presenta una tabla con el problema y los principales supuestos instruccionales adoptados para el desarrollo de ese problema. En este sentido, la tabla 3 muestra los supuestos adoptados para el desarrollo del eje algebraico *Aritmética Generalizada* (*AG*), mientras que la tabla 4 muestra los supuestos adoptados para el eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*). Cabe aclarar que los supuestos adoptados no necesariamente serán los significados usados por los estudiantes, ya que cada uno de ellos los usará en función de su conocimiento.

Problemas AG	Supuestos
¿Qué valor falta en la ecuación para que mantenga el equilibrio y sea verdadera? 5 + 6 = 7 + ___	Noción de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades determinadas. Aceptar como valida una expresión que muestra operaciones a ambos lados del signo de igualdad.
¿Qué valor de X mantendría la equivalencia de la ecuación y la harían verdadera? X = 5 + 4	Noción de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades determinadas. Aceptar como valida una expresión que muestra la operaciones a lado derecho del signo de igualdad. Aceptar que una operación y expresión matemática puede contener literales.
Miguel tiene 24 galletas. Su primo Mario tiene 28 galletas. ¿Cómo puedes representar la relación entre el número de galletas que tienen cada uno?	Evaluar el concepto de desigualdad, así como su representación al trabajar con cantidades determinadas. Evaluar el concepto de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades determinadas.
Pablo tiene cierta cantidad de chocolates de cereza y 18 chocolates de almendra. Juntos son 34 chocolates. ¿Di cuántos chocolates son de cereza?	Noción de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades determinadas. Noción y significación de incógnita con la literal "x". Evaluar la comprensión de la incógnita en un lugar distinto al total.
María y Juan tienen cada uno una alcancía. El domingo, los dos tenían la misma cantidad en sus alcancías. El lunes, su abuela los visita y les da $3 a cada uno de ellos. El martes, van juntos a la tienda. María gasta $3 en unas gomitas y Juan gasta $5 en unas papas con chile. El miércoles, Juan dobla la ropa de toda su familia y gana $4. María lava los trastes y gana $4. Los dos ponen su dinero en la alcancía. El jueves, María abre su alcancía y descubre que ella tiene $9. ¿Cuánto dinero tiene Juan? ¿Cuánto dinero tenían al principio?	Noción de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades determinadas e indeterminadas. Comparar transformaciones de cantidades indeterminadas en diferentes momentos de la narración. Evaluar el concepto de equivalencia del signo de igualdad. Localizar incógnitas producto de diferentes transformaciones.
A Carlos y a Renata les encantan las galletas. Cada uno de ellos tenía una charola con la misma cantidad de galletas. Carlos puso todas sus galletas en una canasta. Renata puso sus galletas repartidas en dos canastas. Entonces, una nueva charola de galletas salió del horno. Carlos y Renata tomaron la misma cantidad de galletas cada uno, pero esta vez ambos guardaron sus galletas nuevas en una bolsa de papel para que se mantuvieran frescas para comerlas más tarde. La hermana pequeña de Carlos entró en la cocina y dijo que ella quería unas galletas. Carlos le dio su canasta y Renata le dio una de sus dos canastas de galletas. Ahora, ¿piensas que, después de que compartieron sus galletas, Carlos tiene el mismo número de galletas que Renata? ¿Piensas que uno de ellos tiene más galletas que el otro?	Noción de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades indeterminadas. Comparar transformaciones de cantidades indeterminadas en diferentes momentos de la narración. Evaluar el concepto de equivalencia del signo de igualdad. Comprender la noción de variable y representarla. Valorar qué personaje de la narración tiene mayor magnitud.
Rocío y Luz han salido a juntar manzanas para cocinar unos pasteles. Rocío juntó 7 manzanas rojas y algunas manzanas verdes. Luz juntó 2 manzanas rojas, el mismo número de manzanas verdes que Rocío y algunas manzanas amarillas. Al final, Rocío tenía el mismo número de manzanas que Luz. ¿Cuántas manzanas amarillas juntó Luz?	Noción de equivalencia del signo de igualdad al trabajar con cantidades determinadas e indeterminadas. Comparar transformaciones de cantidades determinadas e indeterminadas en diferentes momentos de la narración. Evaluar el concepto de equivalencia del signo de igualdad. Comprender la noción de incógnita y variable. Localizar el Valor de la incógnita.

Tabla 3. Problemas y principales supuestos trabajados durante la secuencia instruccional *propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*), correspondientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada* (*AG*) (cuadernillo 1).

Como ya se mencionó, la secuencia instruccional *PPEPPA* comenzó con el eje algebraico *Aritmética Generalizada* (*AG*). Dentro de la primera lección se trabajó la noción de igualdad como equivalencia y no equivalencia cuando se modifican los elementos de los miembros que lo acompañan, esto en el contexto de ecuaciones aritméticas (i.e. 8 + 3 = 11; 13 + 11 = 12 + 12; 5 + 6 = 7 + __; x = 5 + 4). De ahí se transitó a la noción de incógnita, en una primera instancia, ésta se denotó con un espacio vacío señalado con una pequeña línea horizontal, posteriormente, se introdujo la literal "*x*" para denotarla. Todas las oraciones matemáticas presentaron cantidades determinadas (Radford, 2011). Finalmente, se trabajó con la representación de las relaciones implicadas en los diferentes problemas mediante una ecuación (ver anexo 2).

Durante la segunda lección se trabajó con la noción de incógnita e igualdad como equivalencia en el contexto de un problema aritmético de total. Este problema fue uno de los problemas elaborados exprofeso para la investigación. La razón de introducirlo radica en que este tipo de problema se presenta con alta frecuencia en las prácticas educativas mexicanas. Con la intención de complejizar las relaciones implicadas en el problema e identificar la transferencia de los conocimientos hasta ahora trabajados, en la situación se presentó la incógnita en el primer sumando ($x + 18 = 34$). La situación presentó cantidades determinadas (ver anexo 2).

En la tercera lección se continuó trabajando con la noción de incógnita y del signo de igualdad como equivalencia, así como con la conformación de ecuaciones para representar las relaciones implicadas en el problema. Este problema introduce, además de cantidades determinadas, por primera vez cantidades indeterminadas (Radford, 2011), así como, una secuencia no lineal entre la información del problema. Otra característica de este problema es que presenta dos incógnitas relacionadas, es decir, para decir cuál es el valor de la segunda incógnita que establece la relación de equivalencia entre los dos miembros de la ecuación, se debe identificar el valor de la primera incógnita, con base en este se establece la relación y con ello se puede deducir el valor de la segunda incógnita y establecer la relación de equivalencia (ver anexo 2).

En la cuarta y quinta lección se continuó trabajando con la noción de equivalencia del signo de igualdad y con la noción de incógnita, el cambio radicó en que en estos problemas se agrega la noción de variable en el contexto de problemas narrativos con cantidades determinadas e indeterminadas. Al igual que el problema previo, estos problemas estipulan una relación de igualdad entre las cantidades de los dos personajes.

Una vez trabajado y promovido la significación de los conceptos pertenecientes al eje algebraico *AG*, a partir de la sexta lección se comenzó con la promoción del *Pensamiento Funcional* (*PF*). La tabla 4 sintetiza los principales supuestos instruccionales adoptados y desarrollados para cada problema. La tabla sintetiza los cinco problemas que conformaron el eje algebraico, así como sus supuestos instruccionales.

Problemas PF	Supuestos	Función
¿Qué pasa con el agua del vaso "A" cuando la pasamos al vaso "B"? ¿Qué pasa con el agua del vaso "B" cuando le ponemos el agua del vaso "A"? Completa la tabla con la información que hace falta ¿Observas algún patrón en la información de la gráfica? Descríbelo. Ubica las cantidades de agua de cada contenedor en la siguiente gráfica.	Observar una relación funcional entre ganar y perder agua contenida en dos recipientes. Observar que la acción que se realice sobre la cantidad de agua contenida en recipiente afecta la cantidad de agua del otro recipiente. Comprender la relación funcional de ganancia y perdida. Comprender que la suma de las partes no puede exceder la cantidad original. Representar con lenguaje matemático la relación entre la cantidad de agua que tienen los recipientes.	$X + y = 10$
¿Cuántas colas hay en dos perros? ¿Cuántas colas hay en 5 perros? ¿Cuántas colas habrá en 10 perros? ¿Cuántas colas habrá en cualquier número de perros? ¿Cuántos ojos hay en dos perros? ¿Cuántos ojos hay en 5 perros? ¿En 10 perros cuántos ojos habrá? ¿En cualquier número de perros cuántos ojos habrá?	Identificar la relación que existe entre dos variables cotidianas. Identificar la relación funcional que existe entre dos variables cotidianas (un perro y el número de ojos que tiene). Identificar un patrón en los casos presentados. Generar una regla que se aplique a todos los casos. Representar con lenguaje matemático las relaciones identificadas.	$y = x$ $y = 2x$
Un tren recoge dos vagones en cada parada. ¿Cuántos vagones ha recogido el tren después de un número cualquiera de paradas? ¿Y si contamos la locomotora, cuántos vagones ha recogido el tren después de un número cualquiera de estaciones?	Identificar la relación que existe entre dos variables cotidianas. Identificar la relación funcional que existe entre dos variables cotidianas (paradas y vagones). Identificar un patrón en los casos presentados. Identificar la constante. Identificar cómo se afecta la relación funcional con la incorporación de una constante. Generar una regla que se aplique a todos los casos. Representar con lenguaje matemático las relaciones identificadas.	$y = 2x$ $y = 2x + 1$
Bernardo va a tener su fiesta de cumpleaños y quiere asegurarse de que todos sus amigos se pueden sentar. Él tiene mesas cuadradas. En una mesa cuadrada se pueden sentar 4 personas; si une otra mesa cuadrada a la primera se pueden sentar 6 personas. ¿Cuántas personas se pueden sentar en 3 mesas? ¿Cuántas personas se pueden sentar en 4 mesas? ¿Cuántas personas se pueden sentar en 5 mesas? ¿Observas algún patrón? Encuentra una regla que describa la relación entre el número de mesas y el número de personas que se pueden sentar en las mesas y descríbela Describe la relación empleando variables. ¿Qué representan las variables?	Identificar la relación que existe entre dos variables. Identificar la relación funcional que existe entre dos variables (mesas y personas que se pueden sentar). Identificar un patrón en los casos presentados. Identificar la constante. Identificar cómo se afecta la relación funcional con la incorporación de una constante. Generar una regla que se aplique a todos los casos. Representar con lenguaje matemático las relaciones identificadas.	$y = 2x + 2$
Miguel y Rubén tienen cada uno un poco de dinero. Miguel tiene $8 en la mano y el resto de su dinero está en su cartera. Rubén tiene exactamente tres veces más dinero que el que tiene Miguel en su cartera. ¿Cuánto dinero podría haber en la cartera de Miguel? ¿Quién tiene más dinero? Representa la relación que identificaste y explícala	Identificar la relación que existe entre dos variables. Identificar la relación funcional que existe entre dos variables en un contexto cotidiano. Identificar la relación que existe entre dos funciones. Identificar en qué punto esas dos variables mantienen una equivalencia. Identificar qué función tiene mayor magnitud. Representar con lenguaje matemático las relaciones identificadas.	$y = 8 + x$ $y = 3x$

Tabla 4. Problemas y principales supuestos trabajados durante la secuencia instruccional denominada *propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*), correspondientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (PF).

La sexta lección estuvo conformada por un problema matemático que permitió que los estudiantes pasaran de una experiencia vivencial – fenoménica – de la relación funcional entre cantidades de agua a una representación de las relaciones mediante dos diferentes representaciones algebraicas, a saber, gráfica y ecuación. La experiencia consistió en manipular, observar y registrar la relación funcional entre la cantidad de diez centímetros lineales de agua contenida en dos recipientes. Mediante la realización de preguntas se llevó al grupo a la reflexión de la relación funcional entre la ganancia y la pérdida de la cantidad de agua. Esto permitió evaluar la transferencia de conocimientos de una representación aritmética a dos representaciones algebraicas. Una en el cuadrante positivo del plano cartesiano y en una ecuación ($x + y = 10$) (ver anexo 2).

Del séptimo al décimo problema se continuó promoviendo el desarrollo del *Pensamiento Funcional* (*PF*) con problemas que involucran funciones lineales. La diferencia entre las funciones trabajadas en cada sesión fue el tipo de función presentada en cada uno de los problemas narrativos.

La séptima lección presentó las funciones "*y = x*" y "*y = 2x* ". La octava lección presentó una función del tipo "*y = 2x*", complejizándose al incorporar una constante "*y = 2x + 1*". La novena lección presentó la función "*y =2x + 2*", mientras que la décima y última lección presentó las siguientes dos funciones: "*y = 8+ x*" y "*y =3x*", complejizando la relación al preguntar en qué momento estas dos funciones establecen una equivalencia.

Al igual que las lecciones anteriores, los estudiantes comentaron y representaron gráficamente cada situación matemática presentada. Posteriormente compartieron sus representaciones en el pintarrón a todos los compañeros. De manera grupal, se comentó sobre los elementos del problema que se plasmaban en cada una de las representaciones externas, así como la relación que se estableció entre ellos. Cabe mencionar que se cuestionó a los estudiantes sobre las diferencias entre los elementos y relaciones plasmados en cada una de las diferentes representaciones presentadas, así como su significado y el procedimiento empleado para responder la pregunta planteada en cada problema. Los problemas englobados en este eje algebraico permitieron la incorporación de más de una literal, así como la construcción de la noción de *variable*.

Post test

En la sesión siguiente al término de la *PPEPPA* se aplicó nuevamente la EHA en el post test a todo el grupo. Las instrucciones que se dieron fueron:

"¡Hola, chicos, buenos días! El día de hoy terminaremos nuestro trabajo en matemáticas juntos. Les voy a entregar unos ejercicios, por favor, léelos y resuélvelos de forma individual. Recuerda que para mí es muy importante conocer el trabajo de cada uno de ustedes, así como sus avances, por eso te pido que no veas el trabajo de tus compañeros. Este trabajo tiene sesenta minutos como límite de

tiempo. Al concluir ese tiempo te pediré que me entregues tus hojas, si terminas antes, levanta la mano para que pase a tu lugar por tu trabajo."

Al igual que en el pretest, el tiempo máximo para responder la *EHA* fue de sesenta minutos. Al transcurrir el tiempo se pidió a todos los estudiantes del grupo que entregarán su evaluación.

14. Selección de datos

Los datos que se seleccionaron para análisis fueron el desempeño correcto y la producción de REs. En función de ello se definieron las siguientes medidas.

14.1. Medidas

- *Desempeño al solucionar problemas matemáticos*

Esta medida evaluó la habilidad de solucionar matemáticamente los diez problemas presentados en las dos diferentes mediciones del estudio (pretest y post test). Se otorgó un punto a cada problema solucionado matemáticamente correcto. Para los análisis grupales se consideró el porcentaje del promedio de respuestas correctas obtenido. Para los análisis individuales se consideró el promedio individual de aciertos obtenido por cada estudiante.

- *Análisis cuantitativo de los niveles de pensamiento funcional simbólico: Taxonomía de análisis de las representaciones externas*

Esta medida evaluó las representaciones externas (REs) elaboradas por el grupo de estudiantes ante cada problema presentado en las dos mediciones del estudio (pretest y post test) (momentos). El puntaje que se dio a cada una de ellas se delimitó en función de los tres elementos focos de interés (uso de la igualdad, uso de literales e identificación de las relaciones matemáticas que se establecen entre la igualdad y las literales), ya que se considera que el uso de dichos aspectos permite analizar el pensamiento funcional simbólico. De esta forma, las REs se categorizaron como "no respuesta", "explica la relación con operación", "explica la relación sin operación", e "introduce literal"; y se puntuaron con 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

- *Análisis cualitativo de las representaciones externas: Taxonomía de análisis*

Esta medida evaluó las representaciones externas (REs) elaboradas por los veintisiete estudiantes ante cada problema presentado tanto en las dos mediciones del estudio (pretest y post test) como en la *PPEPPA*. El análisis se centra en el uso de los tres elementos focos de interés (uso de la igualdad, uso de literales e identificación de las relaciones matemáticas que se establecen entre la igualdad y las literales), así como en su evolución y tránsito por las cuatro categorías de análisis que conforman la taxonomía de análisis de REs.

15. Análisis de datos

Con los puntajes del desempeño obtenidos por el grupo en las dos mediciones, así como con la ponderación dada a las REs del grupo con base en la taxonomía de análisis de las REs, se realizó un análisis de varianza 2 x 2, incluyendo los factores momento (pretest – post test) y dominio (*AG* y *PF*). En dicho análisis el interés se centra en averiguar si existen diferencias en las variables con el paso del tiempo. Este análisis permite identificar tres efectos de interés. El efecto individual de cada uno de los factores, así como el efecto conjunto de la interacción de los dos factores eliminando la variación residual debida a las diferencias entre los sujetos.

Para realizar las comparaciones entre el desempeño del grupo ante cada uno de los diez problemas que conformaron la *EHA* aplicada en el pretest y en el post test se corrió el análisis Mc Nemar, el cual indica si el desempeño del grupo es mayor o menor a lo esperado aleatoriamente.

El análisis cualitativo de las REs elaboradas por los veintisiete estudiantes se analizó considerando la elaboración individual de REs con base en los tres elementos considerados en el pensamiento funcional simbólico (uso de la igualdad, uso de literales e identificación de las relaciones matemáticas que se establecen entre la igualdad y las literales).

16. Resultados

La presente investigación reporta el trabajo que se realizó con un grupo de tercer grado de primaria (veintisiete estudiantes) de una escuela pública del Estado de México. Tanto los resultados cuantitativos como cualitativos se presentan en función del diseño planteado (A – B - A), así como de los objetivos de la investigación. Primero se presentan los resultados cuantitativos y después los cualitativos, asimismo, primero se muestra el análisis grupal y después el análisis del desempeño individual de los veintisiete estudiantes del grupo. La última sección de los resultados presenta el análisis cualitativo que se realizó a las REs que elaboraron los estudiantes al trabajar con los diez problemas matemáticos presentados en las dos evaluaciones (pretest y post test) en función de la taxonomía de análisis generada *ex professo* para la presente investigación.

16.1.Desempeño grupal global

Sobre el desempeño general del grupo ante las dos mediciones (*pretest* y *post test*), la figura 1 muestra el promedio del porcentaje de respuestas correctas obtenido por el grupo. Se observa que el promedio del porcentaje de respuestas correctas general que obtuvo el grupo tiene una ganancia positiva de 25.9 puntos del *pretest* y *post test* (de 21.85 y 47.7 respectivamente).

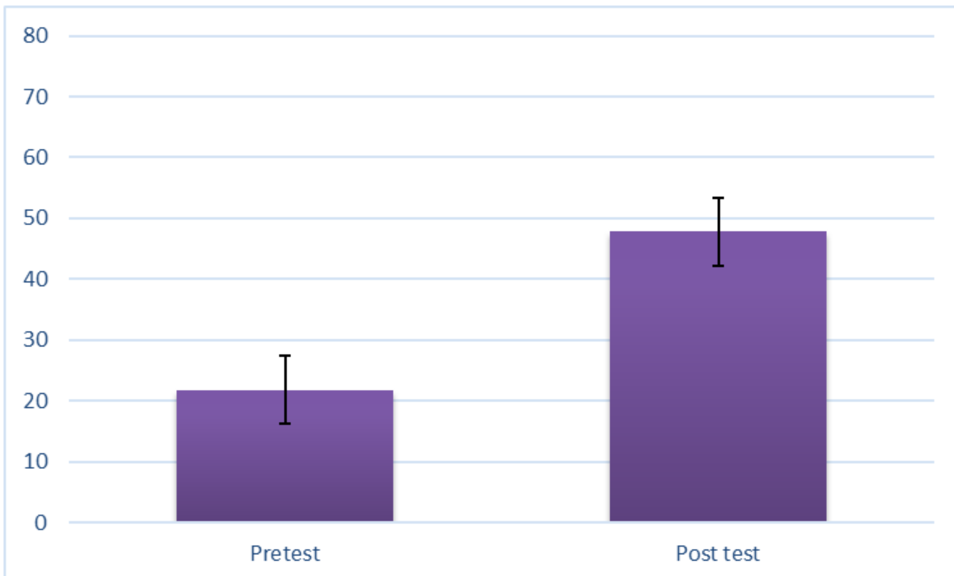


Figura 1. Promedio del porcentaje de respuestas correctas obtenido por el grupo en las dos medidas del estudio (pretest y post test).

16.1.1. Desempeño grupal por eje algebraico

Como ya se mencionó, tanto las dos evaluaciones como la secuencia instruccional denominada *propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA)* se conformaron con la finalidad de evaluar y promover el desarrollo de los conceptos y conocimientos asociados a dos ejes algebraicos descritos y propuestos por Kaput (2008) A*ritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional (PF)*), en este sentido, la figura 2 muestra el promedio del porcentaje de respuestas correcta obtenido por el grupo en las dos medidas del estudio (momentos) en función de los dos ejes algebraicos trabajados. Los datos se describen en función del eje algebraico y del momento de la medición, teniendo como variable dependiente el promedio del porcentaje de respuestas correctas del grupo. En este sentido, se observa una ganancia positiva de 30.3 puntos entre el *pretest* y el *post test* en el eje algebraico *AG* (36.2 y 66.6 respectivamente). Para el eje algebraico *PF* se observa una ganancia positiva de 21.4 puntos entre el pretest y el post test (7.4 y 28.8 respectivamente). Considerando los promedios generales se observa que el grupo tiene un mejor desempeño ante el eje algebraico *AG* que ante el eje *PF*. Sin embargo, si se analizan los promedios de respuestas correctas obtenidos al interior de cada eje algebraico se observa que el promedio de respuestas correctas ante el eje algebraico *PF,* se triplicó del *pretest* al *post test*.

Con la finalidad de identificar si las diferencias previamente descritas son estadísticamente significativas se realizó un análisis de varianza (ANOVA) 2 x 2 con los factores momento (pretest / post test) y dominio (*AG* / *PF*). El efecto principal del factor dominio indicó que los estudiantes obtuvieron un mejor desempeño en los problemas de *AG* que en los de *PF* [F (1, 26) = 86.667, $p < .001$, η^2 = .30]. También se observaron efectos significativos del factor momento [F (1, 26) = 58.602, $p < .001\eta^2$, = .18]. No se encontraron efectos de la interacción momento x dominio [F (1, 26) = 1.81, ns]. Estos resultados se ilustran en la Figura 2.

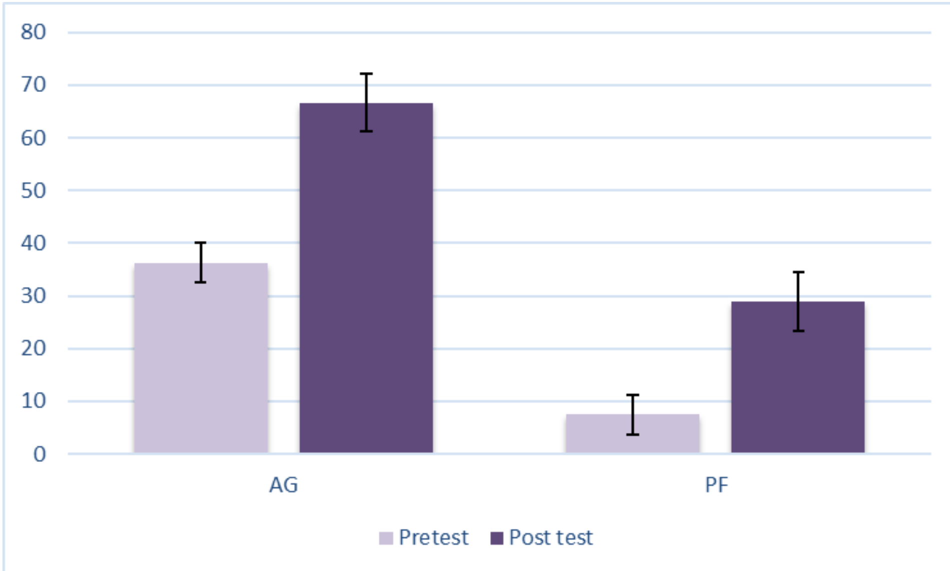


Figura 2. Promedio del porcentaje de respuestas correctas obtenido por el grupo en los dos diferentes momentos del estudio. Los datos se presentan en función de los ejes algebraicos trabajados en la investigación y el momento de evaluación.

16.1.2. Desempeño por tipo de problema

Como ya se describió en el método, la *EHA* estuvo conformado por dos ejes algebraicos, Cada eje algebraico se conformó con cinco diferentes problemas matemáticos. La diferencia entre los cinco problemas que conforman cada eje algebraico radica en los conocimientos que el estudiante necesita poner en juego para resolverlos, siendo esto el criterio de complejidad ascendente que se decidió seguir en la conformación y presentación de la *EHA* (ver tabla 1). En este sentido, la figura 3 muestra el porcentaje de respuestas correctas obtenido por el grupo ante los diez problemas que conformaron la *EHA*. Es pertinente recordar que los primeros cinco problemas corresponden al eje algebraico *AG*, mientras que los últimos cinco corresponden al eje algebraico *PF*. La figura 3 muestra que con excepción del problema "*Pensamiento funcional con Incógnita y Variable*" el porcentaje de respuestas correctas aumento del *pretest* al *post test*. Se observa que la mayor ganancia positiva entre el *pretest* y el *post test*, el grupo la obtuvo ante los problemas denominados "*Ecuación Aritmética con literal*"

(*EAcX*) y *Relación Funcional*, ambos con 48.1 puntos porcentuales. Estos dos problemas son seguidos, en lo que a ganancia positiva refiere, por el denominado "*Ecuación Aritmética con Incógnita*" (EAcI) con una ganancia de 33.3 puntos porcentuales. En oposición a esto, el problema que tuvo la menor ganancia positiva entre el *pretest* y el *post test* fue el denominado "*Pensamiento Funcional*", el cual tuvo una ganancia de 11.1 puntos porcentuales.

Para identificar el nivel de significancia de las diferencias entre el *pretest* y el *post test*, en lo que al porcentaje de respuestas correctas ante cada tipo de problema refiere, se aplicó la prueba *McNemar* de muestras relacionadas; encontrando diferencias estadísticamente significativas en los siguientes problemas: "*Ecuación Aritmética*" (*EA*) [.039; $p < .05$]; "*Ecuación Aritmética con Incógnita*" (*EAcI*) [.022; $p < .05$]; "*Ecuación Aritmética con literal*" (*EAcX*) [.001; $p < .05$]; "*Aritmético de Combinación*" (*AC*) [.016; $p < .05$]; "*Relación Funcional*" (*RF*) [.002; $p < .05$]; "*Pensamiento Funcional con incógnita*" (*PFcI*) [.016; $p < .05$] y "*Pensamiento Funcional con 3 variables*" (*PFc3*) [.031; $p < .05$].

Otro dato importante que muestra la figura 3 es que el problema siete, denominado *"Problema Relación con una incógnita y Variable*" (*PRcIyV*) en ninguna de las dos evaluaciones el grupo lo solucionó correctamente. Este dato indica que, aunque aparentemente la secuencia se construyó atendiendo un criterio de complejidad ascendente, este problema resultó ser más complejo para los estudiantes que conformaron el grupo que tres problemas subsecuentes. En la sección de análisis de los resultados se argumentan algunas razones por las cuales se pudo haber mostrado este desempeño.

Fig. 3: Porcentaje de respuestas correctas obtenido por el grupo ante los diez problemas que conformaron la Evaluación de Habilidades Algebraicas (*EHA*).

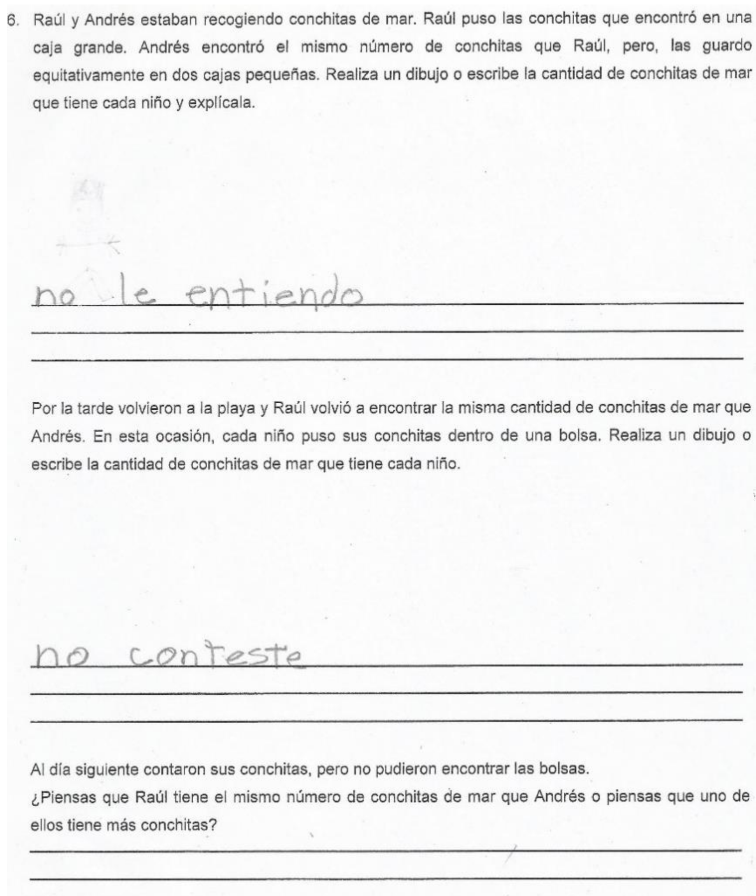
Nota: EA = Ecuación Aritmética, EAcI = Ecuación Aritmética con Incógnita, EAcX = Ecuación Aritmética con literal, AC = Aritmético de Combinación, RF = Relación Funcional, PFcIyV = Problema Funcional con Incógnita y Variable, PFcI = Problema Funcional con Incógnita, PF = Problema Funcional, PFc3 = Problema Funcional con 3 variables.

16.2. Transición de la representación externa en la solución de problemas: taxonomía de análisis

Como ya se describió, el presente trabajo sostiene que la *representación externa* (RE) es una herramienta dinámica elaborada por los estudiantes que permite tanto plasmar sus conocimientos matemáticos como estructurarlos, de esta forma media la comprensión del problema y por ende la acción que se lleva a cabo. En tanto la representación plasma los símbolos y el lenguaje interiorizado por los estudiantes, resulta relevante analizar el tránsito entre las diferentes formas de *representación externa*, así como de los razonamientos que se pueden inferir de estas. Dicho esto, esta sección se enfoca en el análisis de las representaciones externas (REs) que realizó el grupo de estudiantes de tercer grado. Los datos muestran tanto el tipo de RE que realizó el grupo y sus respectivos razonamientos, así como la transición y sofisticación de las REs en función de la interiorización – uso - de símbolos y lenguaje matemáticos a lo largo de los tres momentos del estudio.

El análisis de las REs se realizó con base en el sistema elaborado *ex professo*. Dicho sistema de análisis se compone de cuatro diferentes categorías ("*No respuesta*", "*Explica la relación con operación*", "*Explica la relación sin operación*" e "*Introduce literal*"). Como ya se mencionó en la sección "Representación externa como herramienta de mediación" la diferencia entre las categorías radica en los siguientes tres aspectos: uso del *signo de igualdad*, el uso de *literales* y la identificación de las relaciones matemáticas que se establecen entre el signo de igualdad y las literales. Teniendo en mente estos tres aspectos, en las líneas que siguen se describen las cuatro categorías de análisis construidas.

La primera categoría "*No respuesta*", incorpora todas las representaciones externas (REs) que indican que el problema no se puede realizar, que el estudiante no sabe qué hacer o que simplemente se deja en blanco. Estas REs o la ausencia de ellas indican que los estudiantes no logran identificar las relaciones expresadas en el problema. En estos casos, no es posible acceder al uso – interiorización - que el niño da al signo de igualdad o a las literales. Algunos razonamientos que se puede desprender de esta categoría de análisis es que los niños presentan un obstáculo cognitivo (Palarea y Socas, 1994) producto de su enseñanza aritmética o bien, una carencia o limitación de conocimientos lo que impide la comprensión de las relaciones implicadas en los problemas y por ende el uso de símbolos y de lenguaje matemático, hecho que impide actuar sobre el problema. En resumen, en esta categoría el niño no realiza ningún intento por solucionar el problema (ver figura 4 para identificar un ejemplo).



6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

no le entiendo

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

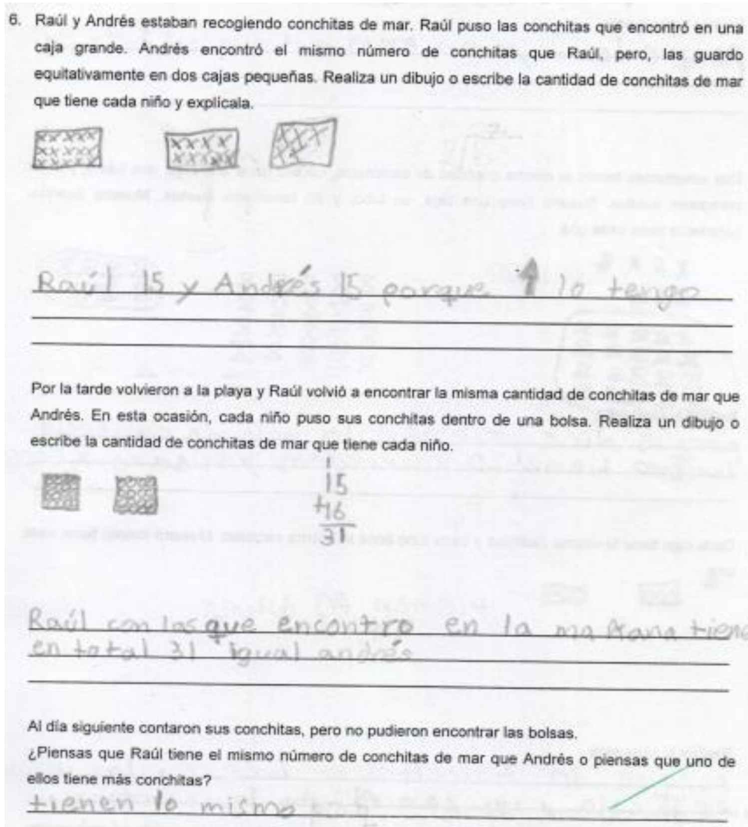
no conteste

Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas.
¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?

Fig. 4: Ejemplo de la categoría de análisis "Explica la relación con operación"

La categoría "*Explica la relación con operación*", pone el énfasis en la operatividad de las relaciones implicadas en el problema mediante el uso de cualquier tipo de operación matemática. El signo de igualdad se usa en relación con las operaciones matemáticas y las cantidades determinadas (Radford, 2011), en este sentido es comprendido como un operador. La bidireccionalidad de las relaciones en expresiones matemáticas aún no es interiorizada. En estas representaciones externas los niños emplean dibujos que representan las cantidades enunciadas en el problema o sus relaciones. El dibujo puede ser la base del razonamiento para explicar la relación y obtener un resultado numérico o puede ser el medio para identificar una operación aritmética determinada (i.e. +, -). Los niños que elaboran este tipo de representaciones sólo usan cantidades determinadas, en este sentido, cuando el problema no las presenta, ellos transforman las relaciones, aunque difieran de este, para estipularlas. Es decir, la operación que se realiza puede corresponder a una interpretación correcta de las relaciones implicadas en el problema o no. En estas representaciones las literales no están presentes.

La figura 5 es un ejemplo de este tipo de categoría. Se observa que la representación externa está conformada por dibujos, números y operaciones (suma). Dentro de los elementos que la componen están los números 15, 16 y 31, el algoritmo de la suma y unos dibujos de los elementos mencionados en la narración del problema (distribución de las conchitas), el signo de igualdad no se usa dentro de la representación y no se incorporan literales. Con base en la representación, el razonamiento que se puede inferir es que el niño convierte las cantidades indeterminadas mencionadas en el problema en determinadas, asignando para ello un valor específico arbitrario a cada una de ellas. Con el uso de cantidades determinadas, el niño modifica las relaciones originales enunciadas en el problema, modificación que le permite actuar sobre este. Este aspecto ilustra el uso de símbolos y del lenguaje matemático que realizan los estudiantes dentro de las representaciones, una vez que el estudiante utiliza los símbolos matemáticos puede darles sentido a las relaciones del problema, actuar y obtener una respuesta.



6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

Raúl 15 y Andrés 15 porque lo tengo

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

15
+16
31

Raúl con las que encontro en la mañana tiene en total 31 igual andrés

Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas.
¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?

tienen lo mismo

Fig. 5: Ejemplo de la categoría de análisis “Explica la relación con operación”

La tercera categoría “*Explica la relación sin operación*”, pone el énfasis en la comprensión y manejo de las relaciones implicadas en el problema con base en el mero análisis de estas. El signo de igualdad se usa como una relación de equivalencia en tanto el estudiante trabaja tanto con cantidades indeterminadas como indeterminadas (Radford, 2011), es decir, el signo de igualdad es el elemento matemático que permite que el estudiante establezca una equidad entre ambos miembros de la expresión matemática, asimismo, este uso permite concebir la bidireccionalidad de la expresión matemática. En estas representaciones los niños emplean bosquejos para representar los objetos o situaciones de las que se hablan en el problema sin necesariamente hacer evidente las relaciones enunciadas en el problema. A partir de los bosquejos los niños explican sus razonamientos para solucionar el problema, llegando a establecer relaciones aritméticas sin emplear los algoritmos. En estas representaciones los niños operan con cantidades indeterminadas aludiendo que los objetos referidos en el problema pueden tener cualquier valor siempre y cuando se respete la relación expresada en el problema. En este sentido el bosquejo evidencia esta restricción. Aunque los niños no usan literales para señalar una incógnita o variable dentro de sus bosquejos, los razonamientos alrededor de ellos evidencian un acercamiento a dichos conceptos.

La figura 6 es un ejemplo de esta categoría de análisis. Se observa una *representación externa* en la que el estudiante mediante el uso de dibujos bosqueja las relaciones enunciadas en el problema. Se puede apreciar que el estudiante prescinde de la necesidad de usar cantidades concretas, lo que le permite usar las cantidades indeterminadas enunciadas en el problema, con esto él basa su análisis y solución en las relaciones mismas del problema. No se explicita el uso del signo de igualdad dentro de la representación ni tampoco se hace uso de literales.

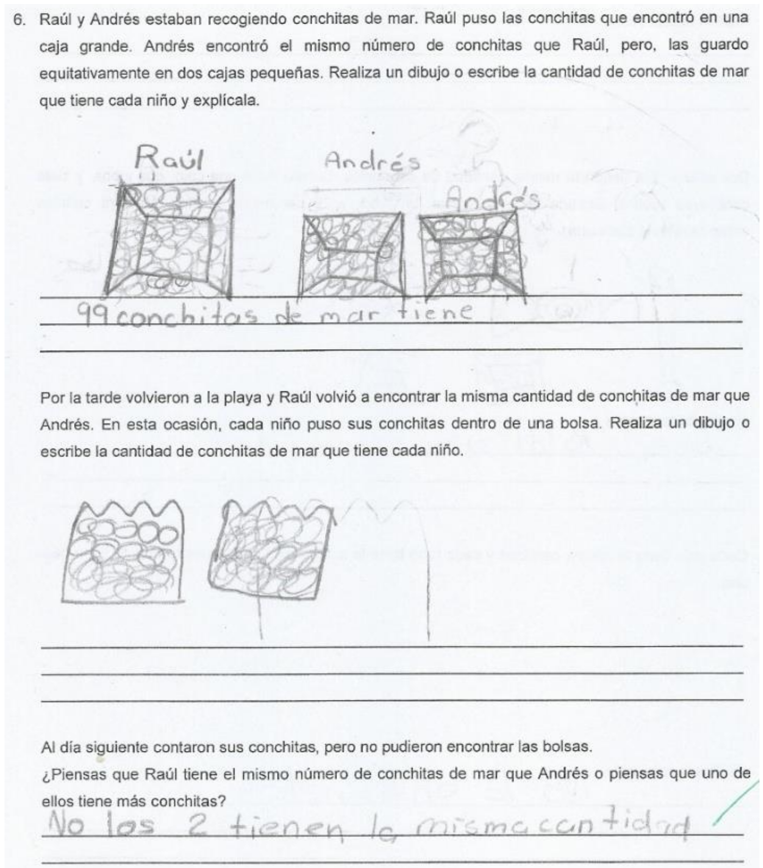
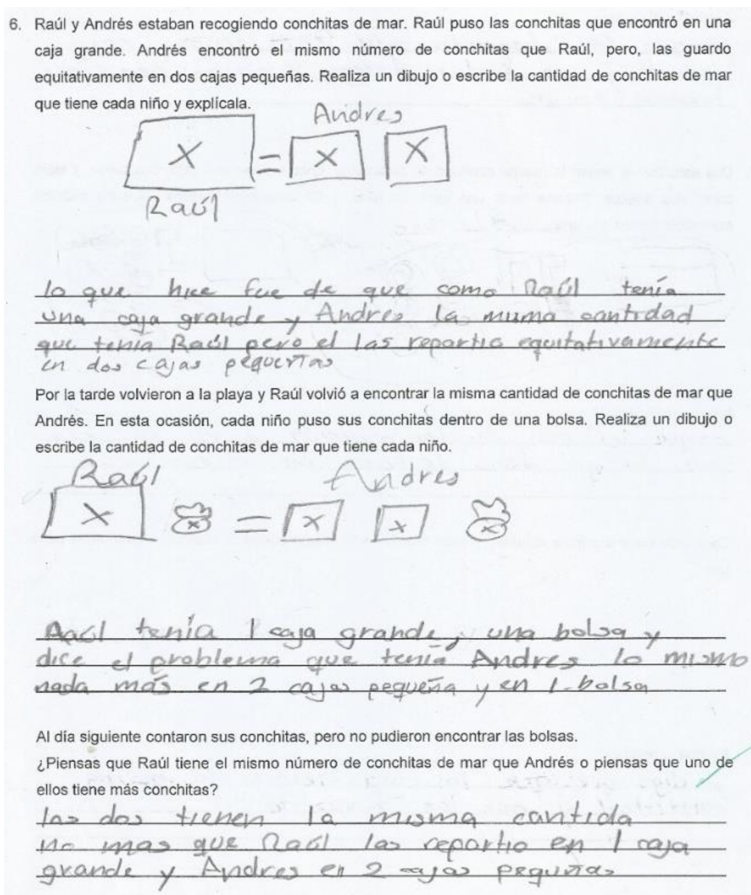


Fig. 6: Ejemplo de la categoría de análisis "Explica la relación sin operación"

La cuarta categoría de análisis se denominó "*Introduce literal*". Esta categoría enfatiza la incorporación de literales en la representación externa. El signo de igualdad es usado como una relación de equivalencia entre ambos miembros de la ecuación, la bidireccionalidad de las expresiones matemáticas es aceptada, pero, además, se emplean literales para explicar las relaciones del problema y estas pueden aludir tanto a una incógnita como a una variable. En estas representaciones los niños emplean bosquejos para representar los objetos o situaciones de las que se hablan en el problema haciendo evidentes las relaciones enunciadas, en cierta forma, los niños esquematizan una ecuación formal. En esta categoría se trabaja tanto con cantidades determinadas como indeterminadas.

La figura 7 es un ejemplo de las representaciones externas englobadas en esta categoría de análisis. La figura muestra cómo el estudiante, mediante su representación esquematizó las relaciones enunciadas en el problema incorporando la letra *"x"* y el signo de igualdad. Con base en el esquema, el estudiante establece la relación de equivalencia entre las relaciones basando el análisis en las magnitudes de los elementos que se refieren en la narración del problema.



6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

Andres

X = X X

Raúl

lo que hice fue de que como Raúl tenía una caja grande y Andres la misma cantidad que tenía Raúl pero el las repartio equitativamente en dos cajas pequeñas

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

Raúl Andres

X x = X x x

Raúl tenía 1 caja grande, una bolsa y dice el problema que tenía Andres lo mismo nada más en 2 cajas pequeña y en 1 bolsa

Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas.
¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?

las dos tienen la misma cantida no mas que Raúl las repartio en 1 caja grande y Andres en 2 cajas pequeñas

Fig. 7: Ejemplo de la categoría de análisis "Introduce literal"

Las cuatro categorías de análisis muestran una evolución de la *representación externa*. La evolución se describe en términos de los símbolos y el lenguaje matemático explicitado en cada una de ellas, en particular nos enfocamos en el uso del *signo de igualdad*, de las *literales*, de la identificación de las relaciones y de los razonamientos que se pueden inferir de ellas. De esta forma, la primera categoría de análisis engloba los cimientos que requiere la subsecuente categoría. Para que el estudiante realice representaciones externas que contienen los elementos descritos en la cuarta categoría de análisis ("*Introduce literal*") y, por ende, se puedan inferir los razonamientos correspondientes a ésta, él debe identificar los elementos críticos del problema, así como su relación, aspectos esenciales de la segunda categoría de análisis. También debe usar el *signo de igualdad* como una equivalencia entre los dos miembros de la expresión matemática – ecuación- (aspecto esencial de la tercera categoría de análisis), y, finalmente, debe usar literales para señalar tanto una *incógnita* como una *variable*, esto en función del rol que adopten dichas literales en las relaciones enunciadas en el problema (aspecto crítico de la cuarta categoría de análisis).

En este sentido, mediante su *representación externa*, el estudiante integra dos lenguajes formales, uno, el lenguaje ordinario, con el cual se narra y presenta un problema, y otro, el lenguaje matemático, para el cual usa símbolos y elementos pertenecientes y específicos al dominio matemático. La *representación externa*, permite al estudiante realizar una traducción, una sustitución y/o condensación de elementos y relaciones presentados de forma verbal (en lenguaje ordinario) a un enunciado matemático (ecuación), sintetizando con ello, las relaciones lógicas implicadas en el problema planteado. Al tiempo que el estudiante realiza su *representación externa*, su traducción de los elementos, ésta le permite pensar sobre su comprensión de las relaciones (representación interna), lo que le puede llevar a modificar tanto su comprensión como la representación, este proceso dinámico y activo, puede permitir, en algunos casos, la generalización de las relaciones enunciadas en el problema.

16.2.1. Transición de la representación externa en la solución del problema: análisis cuantitativo grupal

Una vez presentada la descripción del sistema de análisis de las representaciones externas (REs), en las líneas que siguen se presentan los resultados correspondientes al grupo en relación con el tipo de *RE* que elaboró, así como la evolución de esta en los dos momentos de medición del estudio. Primero se muestra el porcentaje de frecuencia obtenido por el grupo ante cada una de las categorías en función del momento y el eje algebraico. Posterior a eso, se presenta un análisis cuantitativo que se realizó consideran las REs que realizó el grupo.

Sobre el porcentaje de frecuencia obtenido por el grupo ante cada una de las categorías de análisis de las REs, la figura 8 concentra los datos del grupo en función de los dos diferentes momentos de medición de la investigación (*pretest* y *post test*), así como del eje algebraico evaluado (*AG* y *PF*). De esta forma, la figura se divide en dos partes (inferior y superior) cada una referente a un momento – medida - del estudio, *pretest* y *post test*, respectivamente. Cada una de esas dos partes cuenta con dos barras. Una barra corresponde al porcentaje de frecuencia obtenido por el grupo ante cada categoría de análisis de las REs en el eje algebraico *AG* y la otra corresponde al porcentaje de frecuencia obtenido ante el eje PF. Cada uno de los colores corresponde a una de las cuatro categorías de análisis que componen la taxonomía. En este sentido, la categoría de análisis "*No respuesta*" se señalizó con el color lila claro, la categoría "*Explica la relación con operación*" se señalizó con el color morado claro, la categoría "*Explica la relación sin operación*" se señalizó con el color morado, mientras que la última categoría denominada "*Introduce literal*" se señalizó con el color púrpura oscuro.

De manera general, en la figura 8 se observa una diversificación de colores. La diversificación de colores indica, por un lado, la frecuencia de ocurrencia de las categorías de análisis y por otro lado permite observar el surgimiento de una nueva categoría de análisis de las REs en el post test (aparece la categoría “introduce literal”). De manera particular, en la figura, en el momento post test se observa que la categoría “*Introduce literal*”, señalizada con el color púrpura oscuro, muestra un mayor porcentaje de frecuencia ante el eje algebraico *PF*. Mientras que la categoría que involucra la realización de operaciones aritméticas, en el mismo momento, “*Explica la relación con operación*”, muestra una mayor frecuencia ante el eje algebraico *AG*.

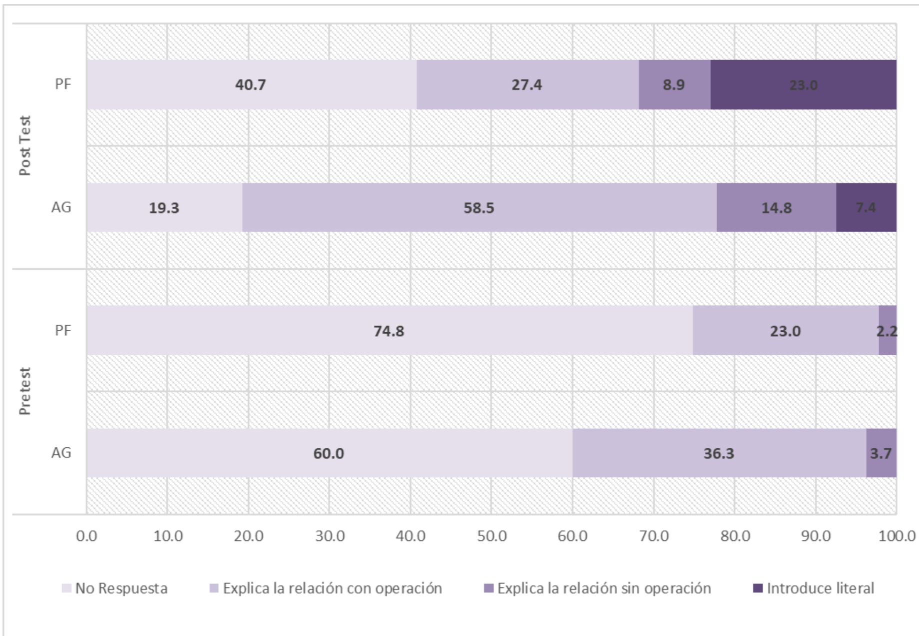


Fig. 8: Porcentaje de frecuencia obtenido por el grupo ante cada categoría de análisis de las representaciones externas (REs). Los datos se presentan en función de las dos mediciones y el eje algebraico.

El análisis cuantitativo que se realizó con base en las REs que elaboró el grupo está en función de las cuatro categorías que conforman la taxonomía de análisis de las REs y los dos momentos de medición del estudio. El análisis cuantitativo se realiza atendiendo la necesidad de generar mayor variabilidad entre los puntajes que obtuvieron los estudiantes al resolver los problemas de las dos evaluaciones. Con base en lo anterior, se utilizó un puntaje ponderado para distinguir entre la sofisticación de las REs. Es decir, se calificó de diferente manera cada RE elaborada por los estudiantes que conformaron el grupo. En función de la categoría de análisis en la cual se agrupó dicha RE se otorgó un puntaje. De esta forma para la categoría "no respuesta" se asignó un 0; a la categoría "explica la relación con operación" se le otorgó un 1; la categoría "explica la relación sin operación" se puntuó con 2; y a la categoría "introduce literal" se le asignó un 3.

La ponderación de las categorías de análisis que componen la taxonomía se realizó de la siguiente forma. Se sacó el porcentaje obtenido para cada categoría de análisis ante cada eje algebraico (*AG* o *PF*); dicho porcentaje se multiplicó por la ponderación – peso - dada a la categoría (el peso de la categoría "*No respuesta*" fue cero, el peso de la categoría "*Explica la relación con operación*" fue uno, el peso para la categoría "*Explica la relación sin operación*" fue dos y el peso para la categoría "*Introduce literales*" fue tres); finalmente, el producto obtenido fue dividido entre el máximo posible obtenible (300). Por ejemplo, si un estudiante realizó para cuatro de los cinco problemas que conformaron el eje algebraico *AG* una representación englobada en la categoría "*No respuesta*" el procedimiento para obtener su puntaje ponderado sería el siguiente: se dividiría cuatro entre cinco y el resultado se multiplicaría por cien, lo que resulta en un 80%. Ese 80 sería multiplicado por el peso de la categoría, en este caso, cero, finalmente se dividiría entre el máximo posible obtenible, el cual es, tres cientos, resultando en cero. Por el contrario, si un estudiante realizó cuatro REs que se englobaron en la categoría de análisis "*Explica la relación sin operación*" obtendríamos el mismo porcentaje (80%), pero éste se multiplicaría por dos, dando como producto 160, finalmente, ese producto se dividiría entre tres cientos que es el posible obtenible máximo, resultando .53 como el puntaje ponderado. El procedimiento descrito para diferenciar las REs elaboradas por los estudiantes nos permite generar tanto variabilidad en la medida como sensibilidad para cada una de las categorías de análisis respetando la frecuencia original de éstas. Con base en dicha ponderación se buscó que el análisis fuera sensible al cambio entre la evolución de cada una de las cuatro categorías de análisis.

Los puntajes ponderados obtenidos fueron evaluados con un análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA) 2 x 2, incluyendo los factores momento (Pre/Post) y dominio (AG/PF). Se encontraron efectos principales de los factores factor momento [F(1, 26) = 60.025, p < .001, η^2 = .28] y dominio [F(1, 26) = 5.521, p < .05, η^2 = .02]. Estos efectos estuvieron moderados por la interacción significativa momento x dominio [F(1, 26) = 19.799, p < .001, η^2 = .09]. El análisis post-hoc con corrección Bonferroni de los efectos del factor momento dentro de cada nivel del factor dominio indicó que no hubo cambios del pre al post en el dominio *AG* (t = 2.30, ns), mientras que en el dominio *PF*, el desempeño en el post fue más alto que en el pre (t = 8.62, pbonf < .001. Estos resultados se ilustran en la figura 9.

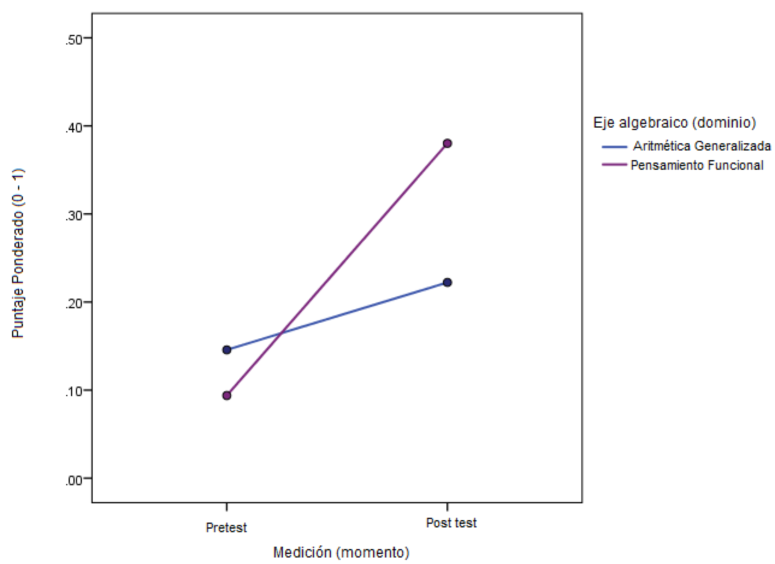


Fig. 9: Desempeño en la elaboración de representaciones externas (REs) ponderado en función de la taxonomía de análisis de las representaciones externas mostrado por el grupo ante los problemas pertenecientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada* y *Pensamiento Funcional* durante las dos mediciones del estudio.

Es importante recordar que este análisis cuantitativo reporta el desempeño mostrado por el grupo en función del tipo de representación externa que realizaron y la ponderación que se asignó a cada una de ellas. En este sentido, el puntaje mayor obtenido ante el eje algebraico *PF* sugiere que el grupo realizó un mayor número de REs que se englobaron en alguna de las dos últimas categorías de la taxonomía de análisis ("*Explica la relación sin operación*" e "*Introduce literal*"). Mientras que el menor desempeño engloba representaciones externas correspondientes a las categorías "*No respuesta*" y "*Explica la relación con operación*".

16.3.Desempeño individual

En esta sección se presentan los datos individuales de los veintisiete estudiantes de tercer grado de primaria que conformaron el grupo. A diferencia de los resultados presentados en las secciones anteriores, esta sección incluye como parte del análisis la *PPEPPA* en tanto se quiere mostrar y comparar el desarrollo individual de los participantes a lo largo de todo el estudio.

La figura 10, 11, 12 y 13 muestran el registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por los veintisiete estudiantes, que conformaron el grupo, en los tres diferentes momentos del estudio (*pretest*, *PPEPPA* y *post test*). Las primeras tres figuras (10, 11 y 12) muestran el desempeño de siete estudiantes, mientras que la figura 13 muestra el desempeño de los últimos seis estudiantes del grupo. En este sentido, el eje de las abscisas muestra los diecisiete problemas correspondientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada* (*AG*), aglutinados por los tres momentos del estudio. Los primeros cinco corresponden al *pretest* (*EHA*), los siguientes siete problemas corresponden a la *PPEPPA* y los últimos cinco corresponden al *post test* (*EHA*). En el eje de las ordenadas se muestran únicamente los aciertos de cada estudiante. Considerando los ejes descritos, las figuras muestran los aciertos obtenidos por cada uno de los estudiantes ante los diecisiete problemas del eje.

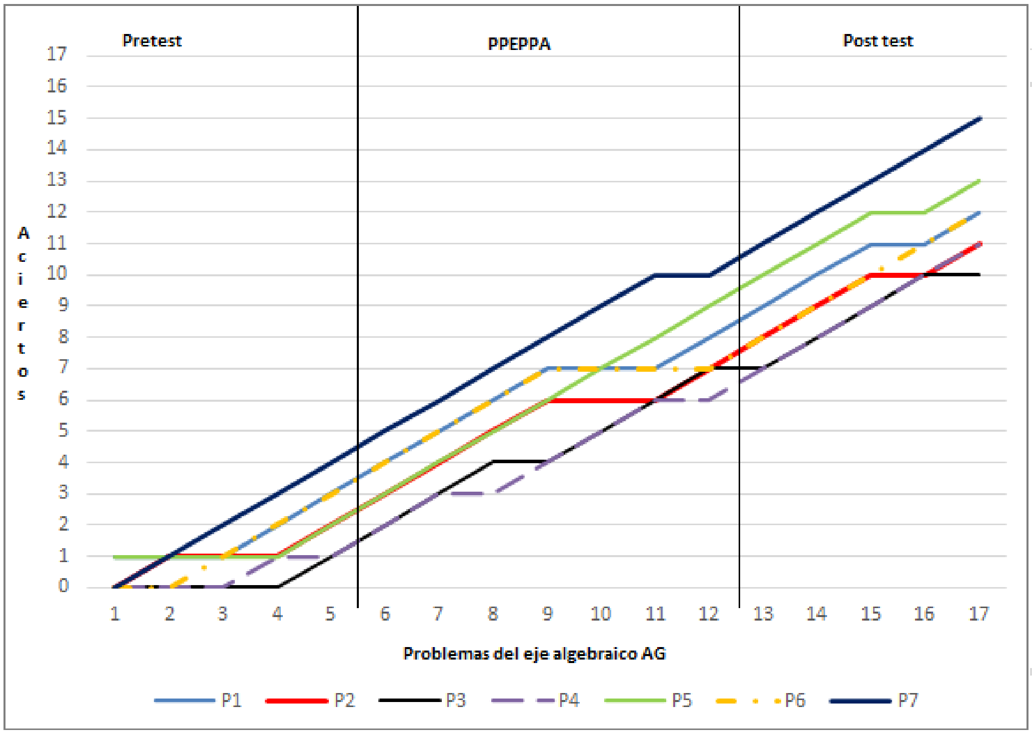


Fig. 10: Registro acumulativo del desempeño correcto de los primeros siete estudiantes del grupo ante los 17 problemas pertenecientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada*.

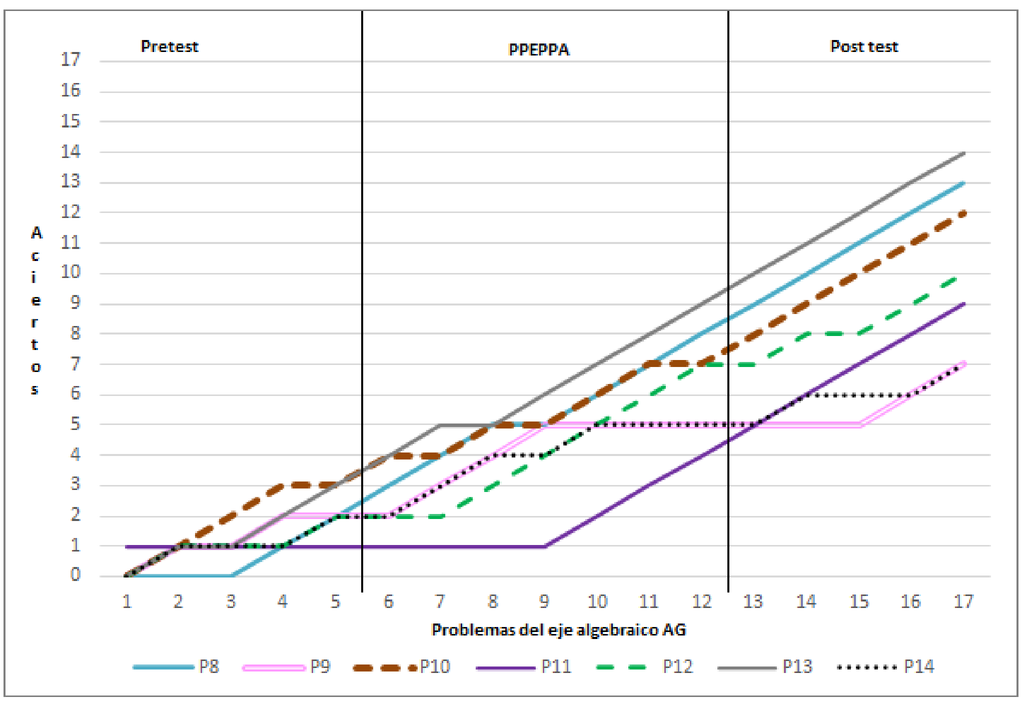


Fig. 11: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por siete estudiantes del grupo ante los 17 problemas pertenecientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada*.

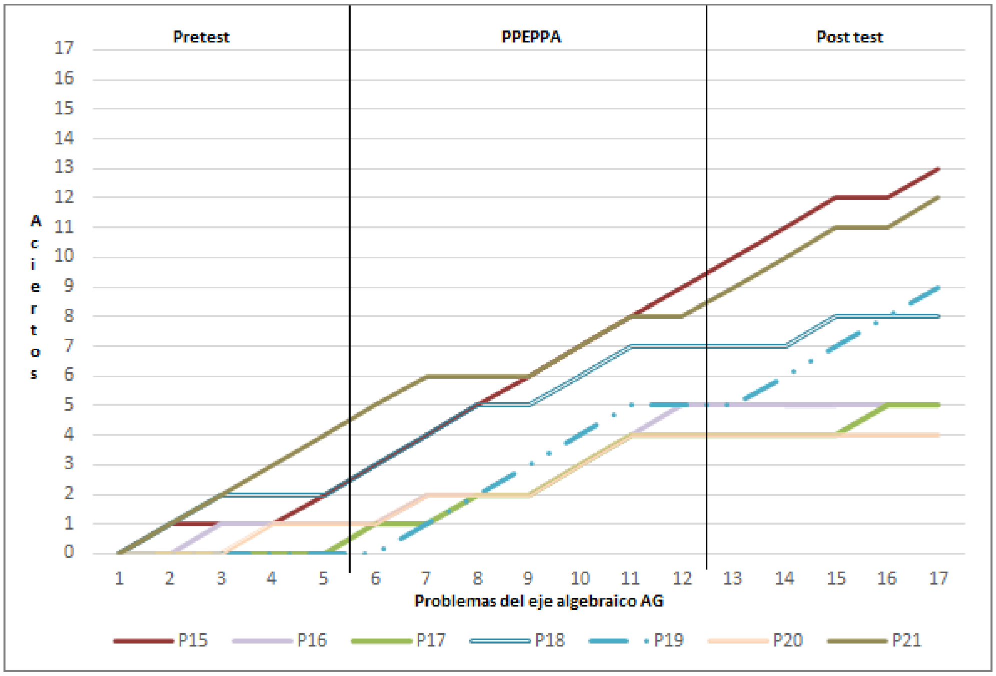


Fig. 12: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por siete estudiantes del grupo ante los 17 problemas pertenecientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada*.

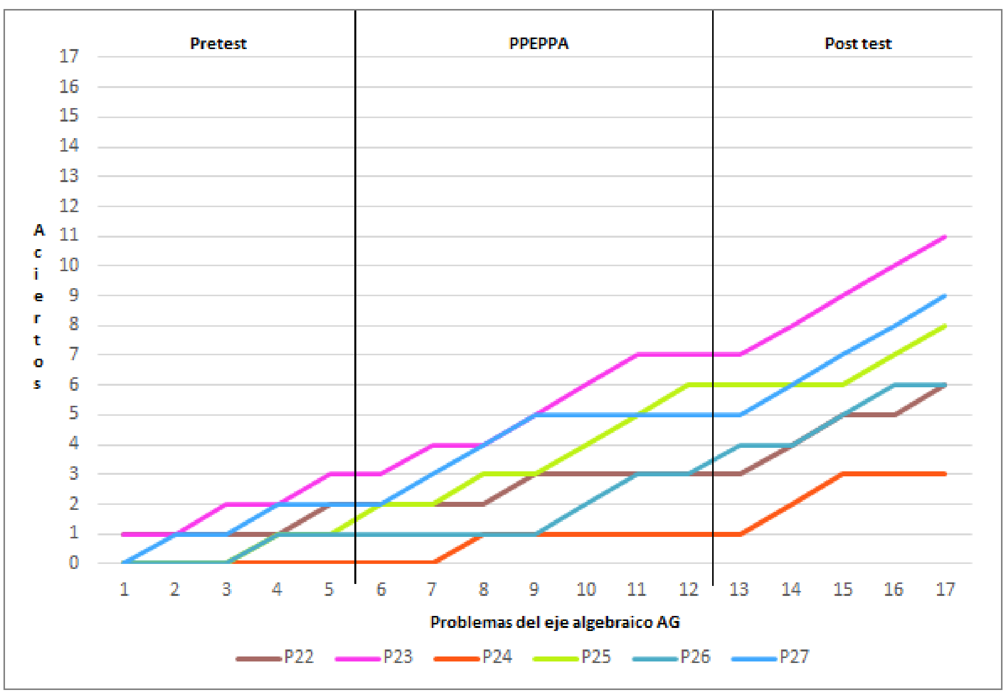


Fig. 13: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por los últimos seis estudiantes del grupo ante los 17 problemas pertenecientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada*.

Este tipo de registro permite destacar la diagonal ascendente que se dibuja gracias al desempeño correcto en la mayoría de los estudiantes. Dicha diagonal se acentúa durante la *PPEPPA*, manteniéndose e incrementando, en algunos casos, durante el *post test*. Otro aspecto que se observa en este tipo de registro es que ninguna de las líneas se mantiene completamente horizontal a lo largo del estudio. En síntesis, el dato fundamental de las cuatro figuras es el cambio en la tendencia de las líneas que representan el desempeño correcto de cada uno de los estudiantes.

Referente al desempeño específico de los estudiantes dentro del eje algebraico AG, se destaca el caso del estudiante "P7" señalizado con el color azul marino en la figura 10. Él muestra el mejor desempeño del grupo ante los diecisiete problemas que conformaron el eje solucionando correctamente quince de ellos. El caso contrario lo muestra el estudiante "P24" señalizado con el color naranja en la figura 13. Él solucionó correctamente tres de los diecisiete problemas del eje.

Con relación al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*), las figuras 14, 15, 16 y 17 muestran el desempeño correcto de los veintisiete estudiantes del grupo ante los veinte problemas que conformaron dicho eje. Cinco problemas se presentaron en el *pretest* (*EHA*), diez en la *PPEPPA* y cinco en el *post test* (*EHA*). Al igual que las cuatro figuras anteriores, el eje de las abscisas muestra los veinte problemas correspondientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*), aglutinados por los tres momentos del estudio. Las primeras tres figuras (14, 15 y 16) muestran el desempeño de siete estudiantes, mientras que la figura 17 muestra el desempeño de los últimos seis estudiantes del grupo.

Estas cuatro figuras (14, 15, 16 y 17) muestran una menor inclinación de la diagonal en las líneas que se dibujan con el desempeño correcto de los estudiantes. En términos generales las figuras permiten apreciar dos principales cambios en la tendencia que se dibuja con las líneas que representan el desempeño de cada participante. La primera tendencia positiva se observa en el tránsito del *pretest* a la *PPEPPA* en la mayoría de las líneas. La segunda tendencia positiva no es tan pronunciada como la primera; pero sí se distingue en el tránsito entre la *PPEPPA* y el *post test*. Durante el *pretest* se observan las líneas aplanadas, dicha horizontalidad – aplanado - se debe a la falta de respuestas correctas ante los problemas.

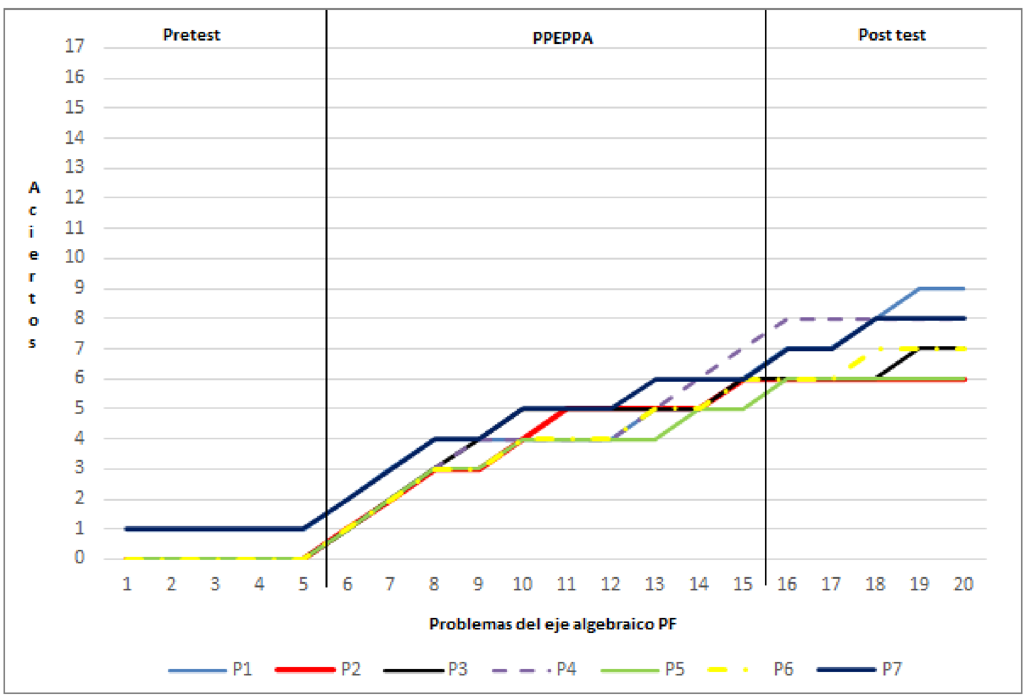


Fig. 14: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por los siete primeros estudiantes ante los veinte problemas pertenecientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional*.

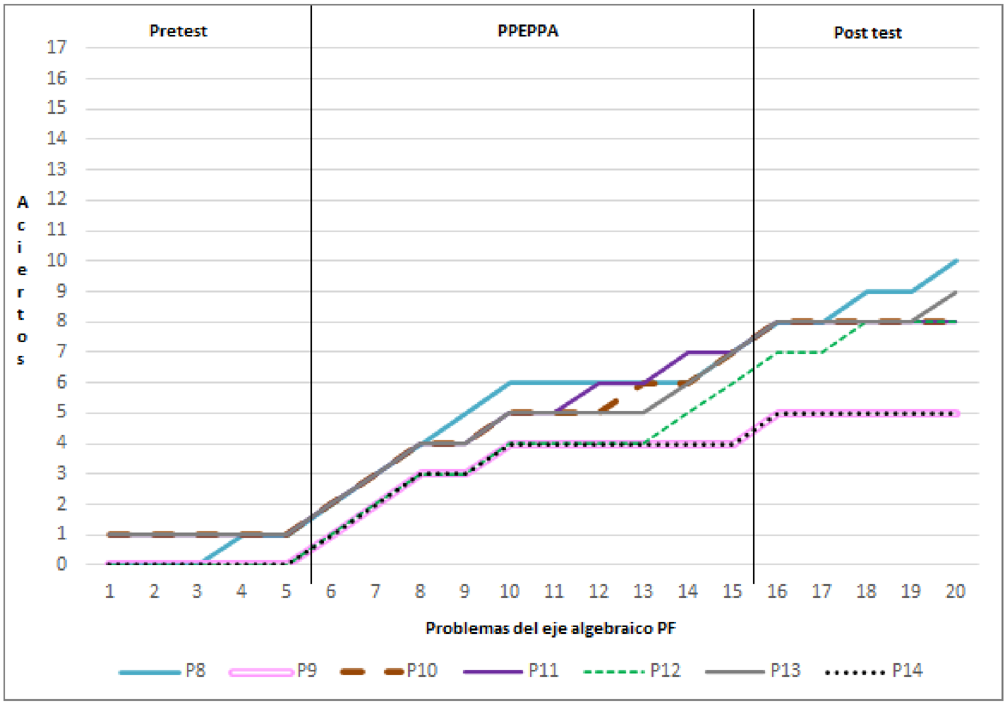


Fig. 15: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por siete estudiantes del grupo ante los veinte problemas pertenecientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional*.

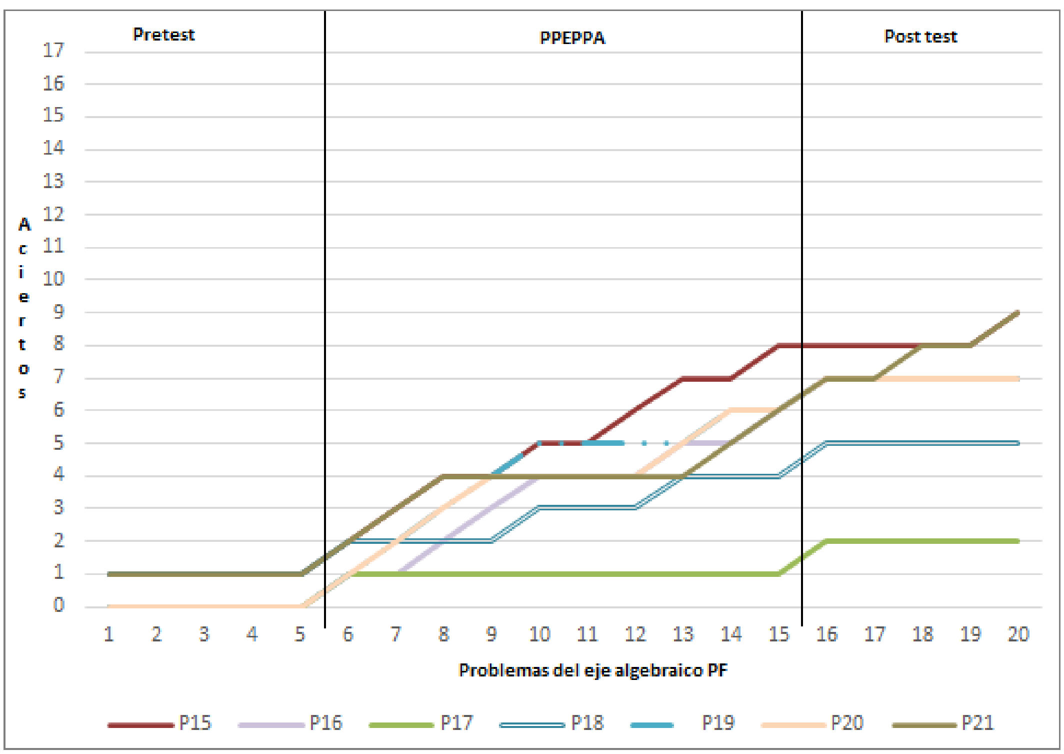


Fig. 16: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por siete estudiantes del grupo ante los veinte problemas pertenecientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional*.

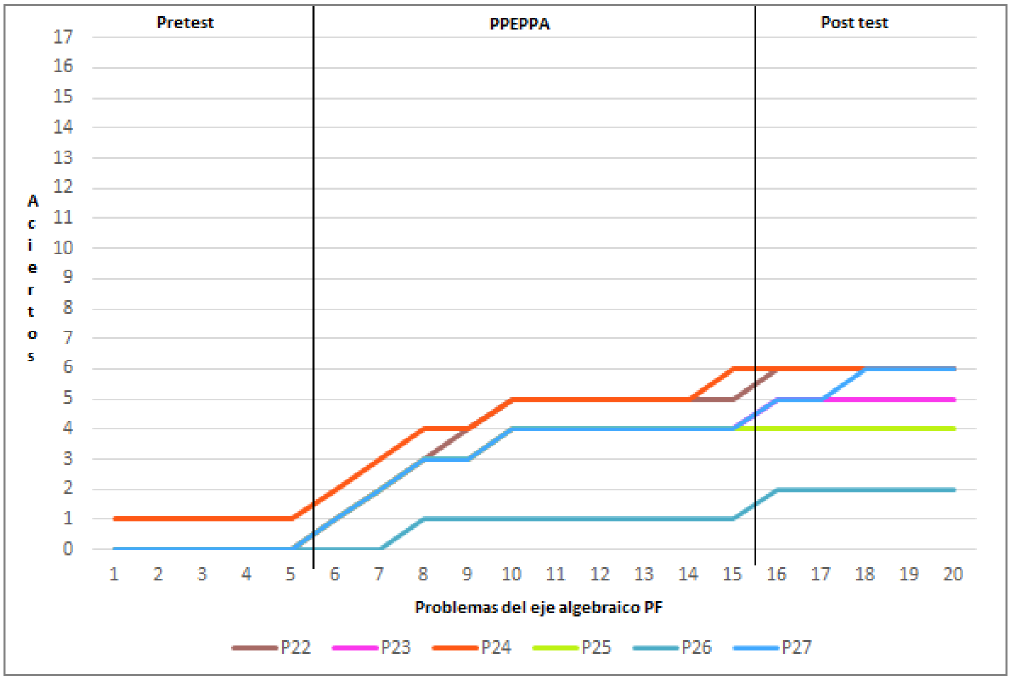


Fig. 17: Registro acumulativo del desempeño correcto mostrado por los últimos seis estudiantes del grupo ante los veinte problemas pertenecientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional*.

Sobre el desempeño individual ante el eje algebraico *PF*, se aprecia que el participante "P8", señalizado con el color azul turquesa (ver figura 15), obtuvo el mejor desempeño del grupo ante el eje algebraico *PF*. Él resolvió diez problemas correctamente. El caso contrario lo muestran los participantes "P17" y "P26", señalizado con el verde militar y azul, respectivamente (ver figura 16 y 17). Ellos solucionan correctamente dos problemas cada uno; uno durante la *PPEPPA* y el otro durante el *post test*.

16.3.1. <u>Transición individual de la representación externa en la solución de problemas</u>

En línea con los datos de la sección anterior, la figura 18 muestra una gráfica de calor que indica las variaciones en el tipo de representación externa elaborada por cada uno los estudiantes. Las columnas señalan los tres momentos (pretest, *PPEPPA* y post test), dentro de cada momento se ubican los dos ejes algebraicos, *Aritmética Generalizada (AG) y Pensamiento Funcional (PF*). Las columnas indican los 37 problemas divididos por momentos, mientras que las filas corresponden a los veintisiete participantes del grupo. Los cuatro colores señalan a una de las cuatro categorías de la taxonomía de análisis de las *REs* (descritas con anterioridad en la sección "Transición de la representación externa en la solución del problema: taxonomía de análisis"). La categoría "No respuesta" se señalizó con el color lila e indica que los estudiantes no comprendieron las relaciones implicadas en el problema. La categoría "Explica la relación con operación" se señalizó con el color morado claro y se refiere a los razonamientos que involucran el uso de cualquier operación aritmética. La categoría "Explica la relación sin operación" se señalizó con el color morado, considera todas las representaciones que dejan ver un razonamiento a partir del análisis de las relaciones implicadas en el problema. La categoría "Introduce literal" se señalizó con el color magenta y considera los razonamientos que hacen uso explícito de cualquier literal para el análisis y representación de las relaciones implicadas en el problema. Adicional, con el color azul se señala la ausencia del participante en la sesión en la que se trabajó un problema, este color sólo aparece en la *PPEPPA* ya que es cuando se registraron ausencias de los estudiantes.

En la figura 18 se aprecia cómo los estudiantes transformaron sus REs y por ende sus razonamientos a lo largo del estudio, ninguno mantiene el mismo tipo de representación. En algunos problemas se presenta la categoría "introduce la literal" pero esto no es constante para un mismo participante. Es importante destacar que durante la *PPEPPA* y el post test los colores se diversificaron, observando en mayor medida la categoría “comprende las relaciones sin operación” e “introduce literal” (color morado y magenta respectivamente). El patrón de colores observado durante el pretest es diferente al observado en la *PPEPPA* y en el post test. En el primer momento predominan las categorías “no respuesta” y “explica la relación con operación”, mientras que en los momentos subsecuentes predominan las categorías “explica la relación sin operación” e “introduce la literal”.

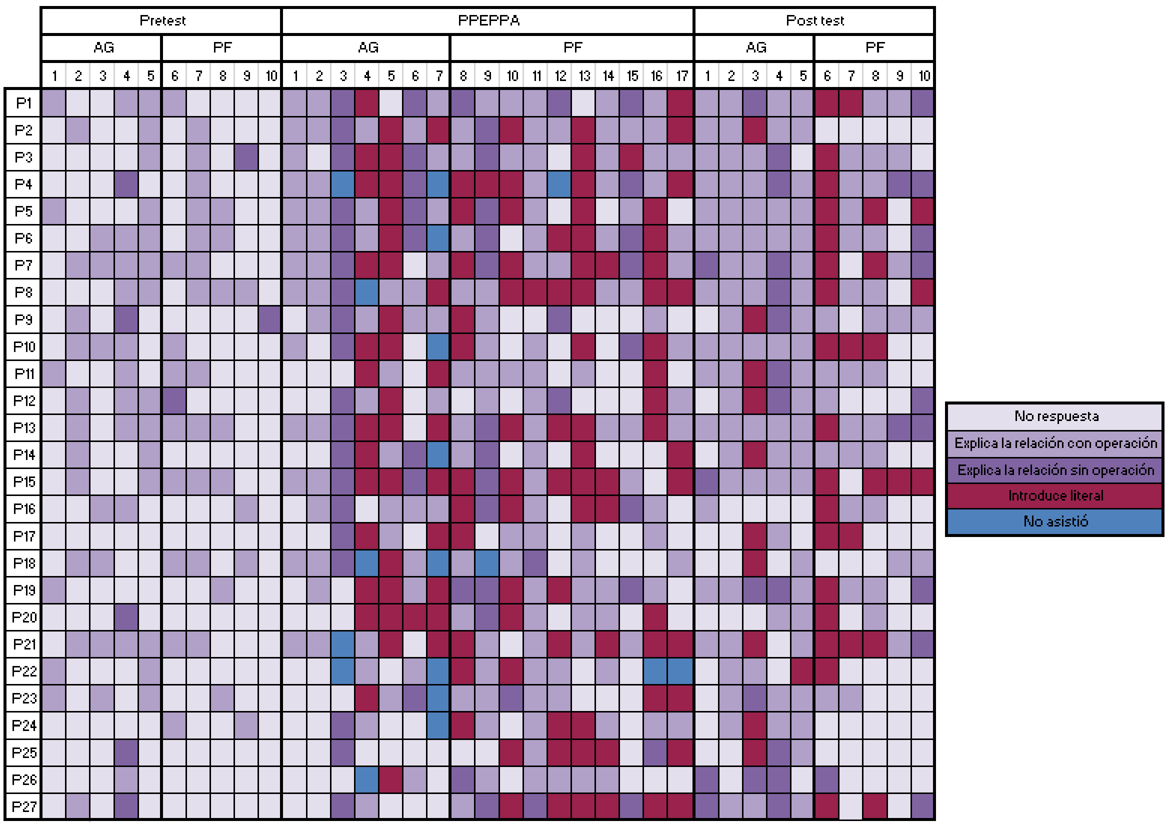


Fig. 18. Gráfica de color de las representaciones externas elaboradas por los veintisiete estudiantes al solucionar los problemas de los tres diferentes momentos del estudio. Los datos se presentan en función del tipo de categoría, eje algebraico y momento.

Nota: AG = Aritmética Generaliza; PF = Pensamiento Funcional.

Cabe mencionar que la categoría "*Introduce literal*" aparece en mayor medida ante el eje algebraico *PF* durante y después de la *PPEPPA*, mientras que la categoría "*Explica la relación con operación*" aparece en mayor medida ante el eje algebraico *AG*. Otro aspecto por resaltar es que ningún estudiante mantiene la misma RE a lo largo del estudio, se observa que los estudiantes modifican sus representaciones conforme cambian las relaciones implicadas en los problemas de los tres diferentes momentos, con una mayor tendencia del uso de literales ante el eje algebraico *PF*.

16.3.2. Análisis cualitativo de las representaciones externas en función de la taxonomía de análisis

El análisis que se presenta en esta sección se realizó atendiendo a la taxonomía de análisis que se creó *ex professo* explicado y retomado en las dos partes de análisis previas (análisis grupal y análisis individual). Específicamente, en esta sección se presenta el análisis cualitativo que se realizó de las representaciones externas (REs) elaboradas en la solución de los problemas que conformaron la *EHA* en los dos momentos de aplicación (pretest y post test). En este sentido, el análisis se centra en el uso del *signo de igualdad*, el uso de *literales* y en la identificación de las relaciones matemáticas que se establecen entre el signo de igualdad y las literales. Como ya se mencionó, todos los razonamientos que se derivan de las REs se infirieron en función de las relaciones y explicaciones presentadas en las diferentes REs.

Con la finalidad de sintetizar los principales resultados del análisis cualitativo de las REs realizadas ante los diez problemas de la *EHA*, al inicio de cada eje algebraico se presenta una tabla con los cinco problemas correspondientes a dicho eje y los principales efectos encontrados en función de la taxonomía de análisis de las REs.

La tabla 5 contiene los cinco problemas correspondientes al eje algebraico *AG* que se presentaron en el *EHA*. En la primera columna se presentan uno a uno los cinco problemas, mientras que en la segunda columna se describen los principales efectos obtenidos problema a problema en función de las cuatro categorías de análisis que componen la taxonomía.

Problemas	Principales resultados
Ecuación Aritmética (EA) Decide si la oración numérica es verdadera o falsa. 57 + 22 = 58 + 21 Explica tu respuesta.	“No respuesta” de 21 estudiantes que señalaron, en el pretest, que esta situación es errónea; únicamente diez estudiantes en el post test mantienen el mismo razonamiento. “Explica la relación con operación”, pasa de seis estudiantes en el pretest a trece en el post test. “Explica la relación sin operación”, cuatro estudiantes muestran este tipo de razonamiento en el post test. Este tipo de razonamiento refiere al establecimiento de una relación de equivalencia mediante un análisis relacional del enunciado matemático. “Introduce literal”, no aparece en ninguna de las dos evaluaciones.
Ecuación Aritmética con Incógnita (EAcI) ¿Qué número puedes poner en el espacio en blanco para hacer que la oración numérica sea verdadera? 10 = ___ + 4	“No respuesta” 16 estudiantes mostraron este tipo de razonamiento en la Evaluación inicial, disminuyendo a seis estudiantes en la Evaluación final. “Explica la relación con operación”, aceptan la situación presentada y establecen una relación de equivalencia mediante una operación matemática. Pasa de once estudiantes en la Evaluación inicial a 21 en la Evaluación final. Tanto la categoría “Explica la relación sin operación” e “Introduce literal”, no se muestran en ninguna de las dos evaluaciones
Ecuación Aritmética con Literal (EAcX) Encuentra el valor de X que hace que la siguiente oración numérica sea verdadera. X = 3 + 6	“No respuesta” de 20 estudiantes que no comprenden las relaciones implicadas en el problema en el pretest, sólo dos presentan el mismo razonamiento en el post test. “Explica la relación con operación” aceptan la incorporación de la x como miembro de la expresión. Incrementa la frecuencia de ocurrencia de siete estudiantes en el pretest a once en el post test. “Explica la relación sin operación” únicamente cuatro estudiantes muestran este tipo de representación externa durante el post test. “Introduce literal” diez estudiantes realizaron una representación que incorpora la literal “x” durante el post test.
Desigualdad Había siete libros en un librero. Nueve niños entraron a la biblioteca y cada uno tomó un libro. ¿Cuántos libros se encuentran ahora en el librero?	“No respuesta” de once estudiantes que realizaron una representación que se englobó en esta categoría durante el pretest, sólo cuatro estudiantes la mantienen durante el post test. “Explica la relación con operación” la frecuencia de ocurrencia pasó de once en el pretest a doce en el post test. “Explica la relación sin operación” cinco estudiantes realizaron representaciones externas englobadas en esta categoría en el pretest, mientras que once en el post test. “Introduce literal” ningún estudiante realizó representaciones externas incluyendo literales en ninguna de las dos evaluaciones.
Aritmético de Combinación (AC) A Luis le gustan los insectos, por ello en un frasco metió algunos grillos y 15 arañas. En total tiene 33 insectos dentro del frasco. ¿Cuántos grillos metió Luis en el frasco?	“No respuesta” de trece estudiantes que realizaron una representación externa engloba en esta categoría durante el pretest sólo cuatro la mantienen en el post test. “Explica la relación con operación” Incrementan las representaciones externas englobas en esta categoría de análisis pasando de catorce en el pretest a 22 en el post test. “Explica la relación sin operación” Ningún estudiante realiza una representación externa englobada en esta categoría de análisis en ninguno de las evaluaciones. “Introduce literal” Sólo un estudiante realiza durante el post test una representación externa que se engloba en esta categoría de análisis.

Tabla 5. Problemas correspondientes al eje algebraico *Aritmética Generalizada* (*AG*) presentados en la Evaluación de Habilidades Algebraicas (*EHA)*, así como los principales efectos obtenidos en función de la taxonomía de análisis de las representaciones externas (REs).

El primer problema que se presentó fue el denominado “*Ecuación Aritmética”* (*EA*) y consistió en el siguiente enunciado matemático:

Decide si la oración numérica es verdadera o falsa. 57 + 22 = 58 + 21 Explica tu respuesta.

Con base en el análisis de las relaciones entre los dos miembros del enunciado, los estudiantes debían decidir si el enunciado matemático es verdadero o falso en tanto mantiene una equivalencia. El significado que el niño otorgue al *signo de igualdad* es esencial, de este modo, si el estudiante concibió que el *signo de igualdad* es un operador, su respuesta estará centrada en encontrar y ubicar del lado derecho de este signo un número, el cual será el resultado de sumar el 57 más 22. Por el contrario, si el estudiante consideró el *signo de igualdad* como equivalencia, intentará identificar las similitudes y diferencias entre ambos miembros del enunciado matemático, para con ello decidir si son lo mismo o no. Por la relación que se establece en el enunciado matemático no se permite la incorporación de literales.

A continuación, se presentan las principales diferencias identificadas entre las representaciones externas elaboradas por los estudiantes y los tipos de razonamiento que se pueden inferir. Las categorías se muestran siguiendo el orden presentado en el sistema de categorías de análisis de la representación externa. Es decir, se presentan las representaciones externas que incorporan un menor número de elementos, así como relaciones incipientes o iniciales de dichos elementos, avanzando a la identificación de relaciones más complejas, las cuales pueden o no incluir la realización de alguna operación básica; basando su análisis en la identificación de las propiedades de los elementos que se relacionan.

En lo que refiere a la categoría "No respuesta", de 21 estudiantes que señalaron en el *pretest* que esta situación es errónea porque la suma de dos números no puede dar como resultado otra suma indicando por ejemplo que "*no es posible tener otra suma como resultado de una suma*", sólo diez estudiantes durante el *post test* mantienen el mismo razonamiento. El análisis que se puede desprender de esta representación es que los niños conceptúan el *signo de igualdad* como un operador. Esta comprensión implica una visión rudimentaria del *signo de igualdad*, ya que ellos únicamente aceptan que la operación de sumar se plantea del lado izquierdo de la igualdad y su resultado debe estar del lado derecho, es decir, el *signo de igualdad* indica que hay que realizar la operación que se presenta del lado izquierdo para poner el resultado obtenido del lado derecho.

La segunda categoría de análisis se denominó "Explica la relación con operación". Seis estudiantes, en el *pretest*, muestran este tipo de razonamiento, mientras que en el *post test* se incrementó a trece estudiantes. El razonamiento que se puede desprender de este tipo de *representación externa* es que los estudiantes establecen una relación de equivalencia entre ambos miembros del enunciado matemático mediante la realización de las operaciones matemáticas indicadas. En este tipo de representación los estudiantes realizan las operaciones indicadas para establecer una relación de equivalencia como definitoria del *signo de igualdad*; comprendiendo que los dos miembros de la ecuación matemática deben valer lo mismo. Para poder decidir si hay o no lo mismo en ambos miembros, los niños recurren a un procedimiento meramente aritmético, ya que en este momento todavía no pueden basar su razonamiento en el análisis de los valores numéricos y sus relaciones que componen cada miembro del enunciado matemático. Estas representaciones no incorporan literales.

La tercera categoría de análisis de las representaciones externas denominada "Explica la relación sin operación" fue mostrado únicamente por cuatro estudiantes durante el *post test*. El razonamiento que se puede desprender de este tipo de *representación externa* refiere al establecimiento de una relación de equivalencia mediante el análisis relacional del enunciado matemático, es decir, los niños identifican semejanzas y diferencias entre los valores y operaciones que se presentan en los miembros de la expresión matemática para con base en ellos determinar la igualdad. Estas representaciones no incorporan literales.

Por ejemplo, en 57 + 22 = 58 + 21 *K* dijo *"nos da el mismo resultado porque antes era 57+22 y luego 58+21 lo que pasa es que al 57 le agregaron 1 y se convirtió en 58 y el 22 le quitaron 1 y se convirtió 21"*

La última categoría de análisis se denomina "Introduce literales" no fue mostrada en el desempeño de los estudiantes en ninguna de las dos evaluaciones porque las características mismas del enunciado matemático no permiten este tipo de representación.

El segundo problema se denominó "*Ecuación Aritmética con Incógnita"* (*EAcI*) y presentó a los estudiantes el siguiente enunciado matemático:

¿Qué número puedes poner en el espacio en blanco para hacer que la oración numérica sea verdadera? 10 = ___ + 4.

Con base en la información que presenta el problema, los estudiantes deben identificar que hace falta un número, y que ese número debe mantener la equivalencia en el enunciado matemático. El miembro de lado izquierdo es un solo número, mientras que el miembro del lado derecho es una suma, un operador. Este tipo de arreglos no son frecuentes en la experiencia de los niños, por lo que, de inicio, el estudiante debe aceptar que este tipo de situaciones matemáticas son posibles de abordar. Nuevamente, el concepto clave es la noción de <u>equivalencia</u> que se vincula al *signo de igualdad*. Si el niño lo concibe como un operador, estará enfocado en encontrar un número, al cual le sumará 4 para obtener 10 como respuesta. Otro tipo de abordaje estaría enfocado en identificar, mediante un análisis de la relación establecida, la equivalencia y con ello el número que la mantiene.

En lo que respecta a la categoría “No respuesta”, 16 estudiantes mostraron este tipo de razonamiento en el *pretest*, disminuyendo a seis estudiantes en el *post test*. El abordaje que se puede inferir que realizaron los estudiantes en esta categoría es que ellos no establecen una relación de equivalencia, ya que de inicio no consideran que sea posible trabajar con este tipo de situaciones. En este tipo de análisis, además de no permitir un abordaje matemático, deja ver la visión que tienen los estudiantes en la cual únicamente se acepta como posible una situación que presente del lado izquierdo del *signo de igualdad* las operaciones a realizar, para ubicar de lado derecho el número que es la única respuesta. Como en el problema planteado esta característica no se cumple, los niños no la aceptan indicando que*: “no es verdadera porque está al revés”* (*Ka*) o que *“No se puede realizar”* (*R*).

Los razonamientos que se infieren de los estudiantes que realizaron una representación externa englobada en la categoría “Explica la relación con operación” es que aceptan la situación presentada y establecen una relación de equivalencia mediante una operación matemática. Ya sea que a 10 le resten 4 para encontrar el valor con una sustracción o que a 4 le agregan unidades hasta llegar al 10 mediante la adición. En este tipo de análisis, los niños establecen la equivalencia vinculándola al *signo de igualdad* como operador y operan a partir del análisis de la relación entre ambos miembros de la igualdad. Este tipo de representación externa incrementó su frecuencia de once estudiantes en el *pretest* a 21 en el *post test*.

Tanto la categoría “Explica la relación sin operación” e “Introduce literales”, no se muestran en ninguna de las representaciones externas elaboradas en las dos evaluaciones, aunque las relaciones implicadas en el problema sí permiten establecer ese tipo de representaciones y relaciones.

El tercer problema que se presentó fue "*Ecuación Aritmética con Literal" (EAcX)*. Éste presentó a los niños la siguiente situación:

Encuentra el valor de X que hace que la siguiente oración numérica sea verdadera.

X = 3 + 6.

El primer desafío que presentó es la introducción en el enunciado matemático de una letra que ocupa el lugar de un número desconocido y específico, el cual mantiene la equivalencia. El segundo desafío es aceptar que la operación a realizar se encuentra del lado derecho del signo de igualdad.

Los razonamientos mostrados por los estudiantes y englobados en la categoría "No respuesta" pasan de veinte, en el *pretest* a dos en el *post test*. Se infieren dos principales limitantes; por un lado, hay una nula comprensión de las relaciones presentadas e implicadas en el problema y por el otro hay un conocimiento limitado para significar la literal "*x*" en el ámbito matemático. En este último caso, los estudiantes vinculan la *x* al concepto de multiplicación, en consecuencia, los estudiantes que significan la *literal* "*x*" como multiplicación, multiplican el número 6 por el número 3 (6 x 3) diciendo que 18 es el resultado de la ecuación presentada "*x = 3 + 6*". Por ejemplo, *O* dice *"es que 3 + 6 no da una respuesta y 6 x 3 es igual a 18 y eso sí nos da un resultado"* y *S*, señala *"porque 3 x 6 = 18"*. En estos casos la noción de incógnita asociada a la literal está ausente, lo que hace que los estudiantes recurran únicamente a su conocimiento previo sobre la "*x*", el cual la concibe como una multiplicación. Es evidente que para los estudiantes el planteamiento, en el *pretest* es un sin sentido al cual tratan de darle sentido haciendo uso de los conocimientos que hasta ahora tienen. Con base en esto, los estudiantes dejan de ver el signo de adición (+) que hay entre el número 3 y el 6 (3 **+** 6) y trasladan la literal (x), la cual se encuentra separada de los números por el *signo de igualdad*, a la relación entre el 3 y el 6, transformando la situación aditiva "*x* = 3 + 6", presentada originalmente, a una multiplicativa "3 x 6 = 18".

En lo que refiere a la categoría "*Explica la relación con operación*" los estudiantes comprenden y aceptan tanto el orden de los elementos de cada miembro como la organización misma de la ecuación. Posterior a eso, realizan la operación de adición establecida, encontrando que 9 es el valor que mantiene la equivalencia entre ambos miembros. Este tipo de análisis del problema es un avance en la concepción de enunciados matemáticos, ya que los estudiantes logran establecer una relación entre elementos numéricos, símbolos y letras, dando a estas últimas el significado de incógnita o número perdido, significado distinto al aritmético y mostrado por los estudiantes en la categoría "*No respuesta*".

Dentro de esta categoría de análisis, el *signo de igualdad* es concebido como operador, ya que dentro de sus argumentos no se refieren a una relación de equivalencia o igualdad de cantidad entre los miembros de la ecuación. Al respecto *L* dice *"porque 3 + 6 = 9 y aquí dice x = la cantidad"*, por su parte *V,* indica, *"pues no hay otro número porque 3 + 6 = 9 por eso"*

Esta categoría tiene un incremento en la frecuencia, pasando de siete estudiantes en el *pretest* a once en el *post test*.

En el *post test* únicamente cuatro estudiantes muestran una representación externa que se engloban en la categoría de análisis "*Explica la relación sin operación*". Con base en las representaciones se puede inferir que los estudiantes sustentan su razonamiento en el concepto de equivalencia entre los elementos presentados en el enunciado matemático, además de atender a las operaciones que se deben realizar con dichos elementos. Al respecto, *Á* dice*, "porque primero sumé 6 + 3 y me dio nueve y recordé que siempre tiene que haber la misma cantidad del lado izquierdo que del lado derecho"* mientras que *Ka* menciona *"porque 3 + 6 = 9, porque 8 + 1 = 9."*

Durante el *post test*, diez estudiantes realizaron representaciones externas que incorporaron la literal "x" ("*Introduce literales*"), estos son los primeros intentos que realizan los estudiantes que conformaron el grupo por introducir elementos que se trabajaron durante la secuencia instruccional denominada *propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*).

El cuarto problema presentado en las evaluaciones se denominó "*Desigualdad*". Esta situación se presentó a los niños con una doble finalidad. Por un lado, se utilizó para indagar sobre el abordaje que muestran niños de tercer grado de primaria de una situación "ilógica", dado que viola el principio de correspondencia biunívoca entre los elementos. Por otro lado, pretendió, una vez que se establece la noción de igualdad, evaluar el abordaje ante una situación que no cumple dicho criterio, es decir, analizar como los estudiantes abordan una situación que plantea una desigualdad entre los elementos implicados en ella. El problema presentado fue:

Había siete libros en un librero. Nueve niños entraron a la biblioteca y cada uno tomó un libro. ¿Cuántos libros se encuentran ahora en el librero?

La situación que se plantea es matemáticamente incorrecta, pero se presentó a los niños con una doble finalidad. Por un lado, para indagar sobre el abordaje que muestran los niños de una situación que viola el principio de correspondencia biunívoca entre los elementos por lo que se puede identificar como imposible o incorrecta. Por otro lado, analizar si los estudiantes establecían alguna forma de igualdad para atender una situación que plantea una desigualdad. Es decir, puede ocurrir que los niños problematicen de una manera distinta el problema, identificando relaciones que sí son viables. De esta manera, pueden establecer que no hay una equivalencia entre el número de libros y el número de niños, aludiendo a una falta en el número de libros, o argumentando que algunos niños se quedan sin libro.

con base en este análisis del problema se presentan los datos correspondientes a las diferentes categorías de análisis de las representaciones externas (REs).

Once niños, en el *pretest* dejaron ver en sus representaciones externas un razonamiento que se englobó en la categoría "*No respuesta*". Durante el post test sólo cuatro estudiantes se mantienen en esta categoría. En esta categoría de análisis los niños indican que el problema es irresoluble. La figura 19 es un ejemplo de este tipo de *representación externa* elaborada por uno de los veintisiete estudiantes que conformaron el grupo. Con base en la representación se observa que el estudiante trata de identificar la cantidad faltante, para ello, mediante el uso del algoritmo de la sustracción indica que no se puede restar un número mayor a uno menor por lo que el problema es irresoluble.

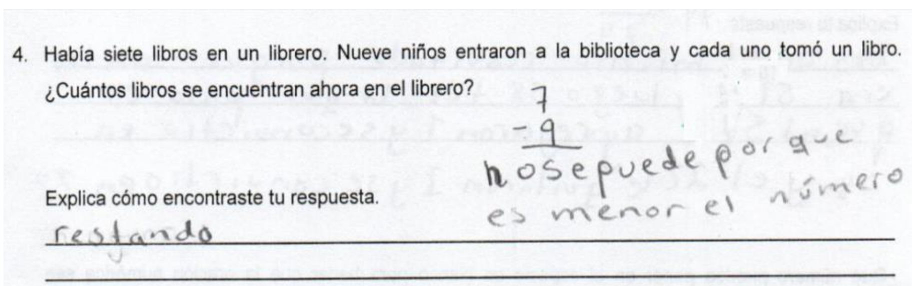

4. Había siete libros en un librero. Nueve niños entraron a la biblioteca y cada uno tomó un libro.
¿Cuántos libros se encuentran ahora en el librero?
7
−9
nosepuede porque es menor el número
Explica cómo encontraste tu respuesta.
restando

Fig.19 Ejemplo de la representación externa realizada por un estudiante la cual se englobó en la categoría de análisis "No respuesta" mostrada ante el problema denominado "Desigualdad".

Las siguientes representaciones externas, elaboradas por los estudiantes, que se englobaron en las tres categorías de análisis restantes junto con los razonamientos que se pueden inferir de ellas implican que los estudiantes replantean el problema, ya sea mediante una operación aritmética o mediante un abordaje diferente.

En relación con la categoría "*Explica la relación con operación*" los estudiantes indicaron que quedan cero libros en el estante, sin considerar que dos niños se quedan sin libro o que faltan dos libros para que cada niño tenga un libro (ver figura 20). El *signo de igualdad* es asociado al concepto de operador y se indica que "no" se puede realizar como tal la operación. Los estudiantes emplean el concepto de diferencia para establecer la relación entre ambos conjuntos, así como la sustracción para identificar el valor faltante.

La figura 20 es un ejemplo que muestra dos diferentes representaciones externas elaboradas por dos diferentes estudiantes. De dichas representaciones externas se puede inferir que los estudiantes pudieron decidir el número de libros que hacen falta o el número de niños que se quedan sin libro. Las representaciones muestran el algoritmo de la sustracción en concordancia con las relaciones implicadas en el problema, es decir, los niños mantienen la relación planteada en la narración (7 – 9), mientras que la tercera representación externa muestra únicamente la relación biunívoca entre los libros y los niños. Las dos diferentes representaciones externas señalan que cero libros se encuentran en el librero. Esta categoría pasa de once estudiantes que realizaron este tipo de representación externa en el *pretest* a doce en el *post test*.

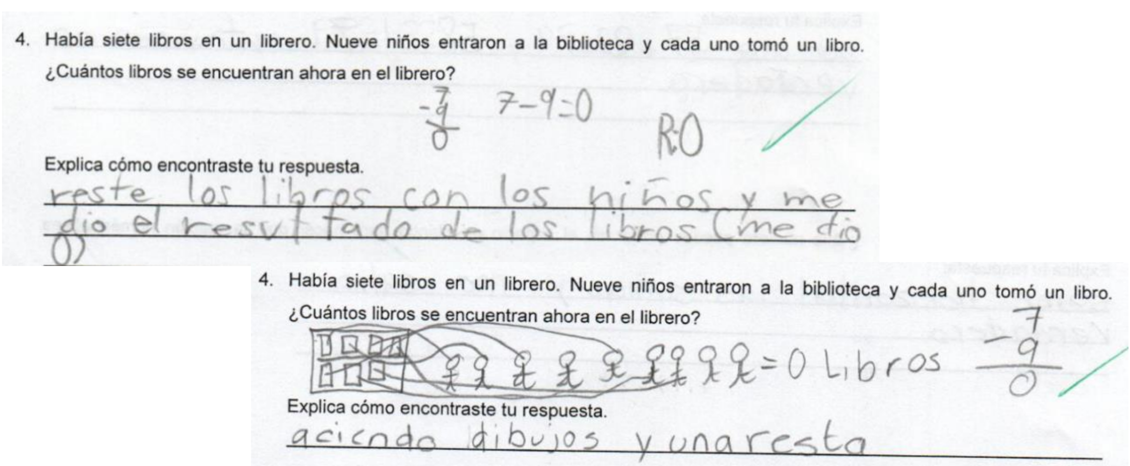


Fig.20 Ejemplos de representaciones externas que realizaron los estudiantes al comprender el problema desigualdad.

Las REs que se englobaron en la categoría "*Explica la relación sin operación*", incrementó su frecuencia de ocurrencia de cinco estudiantes en el *pretest* a once en el *post test*. Los razonamientos que se infieren de esta categoría es que los estudiantes realizan una comparación sin realizar ninguna operación aritmética. La figura 21 es un ejemplo de este tipo de *representación externa*. Este tipo de representación señala que dos niños se quedan sin libro o que hacen falta dos libros. El *signo de igualdad* dentro de este tipo de representación no aparece de forma formal, sin embargo, los estudiantes comprenden que no hay una igualdad entre el número de libros y el número de niños.

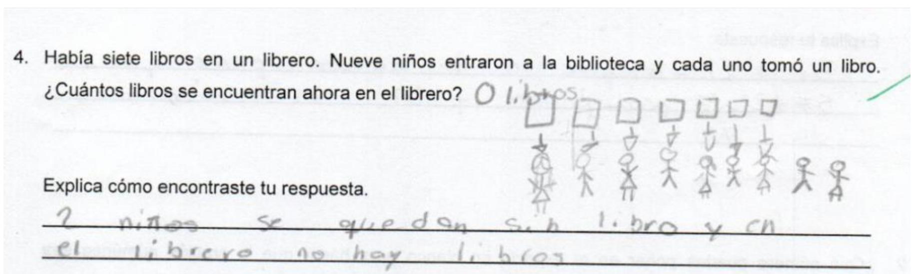


Fig.21 Ejemplo de representación externa que se realizó al comprender el problema "Desigualdad" y se englobó en la categoría "Explica la relación sin operación".

Las diferentes representaciones externas que realizaron los estudiantes no introducen ninguna literal, por lo que la categoría "*Introduce literales*" no se muestra en ninguna de las dos evaluaciones.

Las diferentes REs que los estudiantes elaboraron al comprender y solucionar el problema "Desigualdad" dejan ver que, aunque, el problema es lógicamente imposible, los estudiantes realizaron un intento por asimilarlo mediante sus conocimientos matemáticos.

El quinto problema presentado a los niños se denominó problema "*Aritmético de Combinación*" (*AC*) y fue:

A Luis le gustan los insectos, por ello en un frasco metió algunos grillos y 15 arañas. En total tiene 33 insectos dentro del frasco. ¿Cuántos grillos metió Luis en el frasco?

Este es un problema de combinación aritmética en el cual se deben juntar dos conjuntos elementales para obtener un conjunto total (Vergnau, 1999), la incógnita que forma parte de las relaciones del problema se puede ubicar en cualquiera de los conjuntos (elementales o total). Este problema se incluyó porque forma parte de los problemas prototipo con los que se trabaja dentro de las aulas escolares en México. Dicho problema se denominó "*Problema Aritmético de Combinación*" (*PA*). Con la intención de cambiar la típica estructura que presenta este problema la incógnita se ubicó en uno de los conjuntos elementales ($x + 15 = 33$). Esta situación demanda que los niños comprendan que el conjunto total es la unión de los dos conjuntos elementales, por lo que es necesario descomponerlo para ubicar sus dos componentes, esto implica que el estudiante debe establecer la relación inversa recíproca entre la suma y la resta. Es decir, si al juntar los dos conjuntos elementales se obtienen el conjunto total, al quitar uno de los conjuntos elementales a dicho conjunto obtenemos el otro conjunto elemental. Otro procedimiento sería agregar unidades desde el conjunto elemental conocido hasta llegar al conjunto total, contando las unidades agregadas para determinar el valor del conjunto elemental desconocido.

Dentro de los razonamientos que se pueden inferir de la categoría "*No respuesta*" se encuentran todos aquellos que no establecen ninguna relación entre las relaciones implicadas en el problema. Ya sea que en su *representación externa* mencionen que no se entiende el problema o que sumen el conjunto total (33) con el conjunto elemental (15), dando como respuesta una cantidad superior a la establecida en las relaciones implicadas en el problema inicial. Derivado del último tipo de representación externa se puede deducir que los estudiantes aún no comprenden que el conjunto total se compone de las partes, por ende, no hay una distinción entre las partes y el todo, sumando de forma indistinta toda la información numérica presentada. La frecuencia de ocurrencia de esta categoría de análisis disminuyó del *pretest* al *post test*, la cual pasa de pasa de trece estudiantes que hicieron representaciones externas de este tipo a cuatro.

La segunda categoría de análisis se denominó "*Explica la relación con operación*". Con base en las representaciones que se agruparon en esta categoría se infiere que los estudiantes al identificar que hace falta un conjunto elemental recurren a la adición mediante aproximaciones sucesivas, tanteo, hasta obtener el número que sumado al conjunto elemental dado conforma el conjunto total implicado en las relaciones del problema. La figura 22 es un ejemplo de *representación externa* englobada en esta categoría de análisis. La representación muestra diferentes sumas, de las cuales se infiere que el niño sumó el valor del conjunto elemental dado (15) a diferentes valores aproximados hasta localizar el segundo conjunto elemental (18) que junto al primero dan el conjunto total estipulado en las relaciones del problema. Esta categoría de análisis pasa de catorce incidencias en el *pretest* a veintidós en el *post test*.

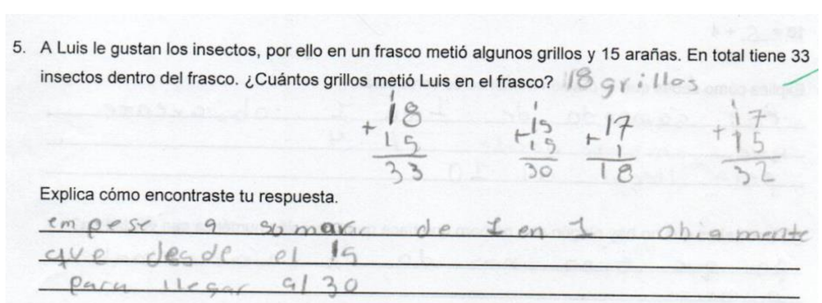


Fig.22 Ejemplo de representación externa que muestra un abordaje por aproximación sucesivas ante el problema Aritmético de Combinación englobada en la categoría de análisis Explica la relación con operación.

Otro ejemplo de *representación externa* englobada en esta categoría es la figura 23 muestra la relación inversa recíproca entre la suma y la resta. De esta representación se puede inferir que el estudiante además de comprender que en el problema hace falta calcular el valor de un conjunto elemental, se comprende que a partir de establecer el inverso recíproco entre suma y resta se puede descomponer el conjunto total y obtener el conjunto elemental desconocido. Este abordaje es más complejo que el anterior (figura 22) por la naturaleza de los conocimientos implicados (adición, sustracción, relación recíproca, parte, todo, equivalencia), sin embargo, ambos hacen uso de operaciones matemáticas básicas.

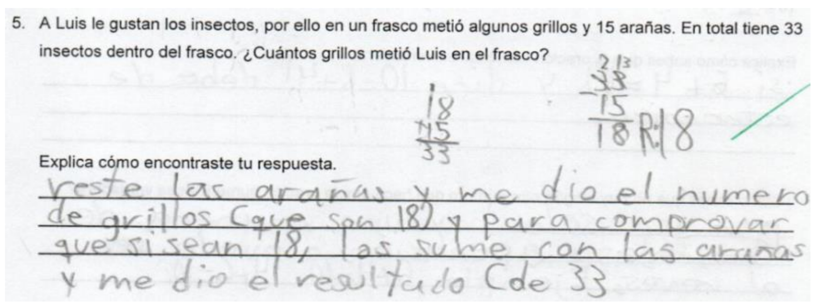
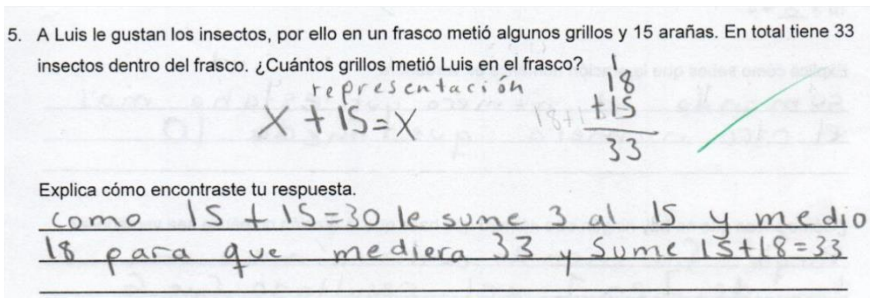


Fig.23 Ejemplo de representación externa que muestra la relación recíproca entre suma y resta elaborada ante el problema Aritmético de Combinación englobada en la categoría Explica la relación con operación.

Ninguna representación externa por los estudiantes ante este problema fue englobada en la categoría "*Explica la relación sin operación*" en ninguna de las dos evaluaciones.

La cuarta categoría denominada "*Introduce literales*" se mostró únicamente en un estudiante durante el *post test*. El niño, dentro de su *representación externa* incluye la literal "*x"* para representar las incógnitas y establecer una relación entre todos los elementos presentados en la narración del problema (ver figura 24). Si bien el empleo de literales dentro de su representación no es del todo acertado, el razonamiento que se deriva de ella muestra el uso de literales como herramientas de análisis y pensamiento, ya que el emplea la *x* para denotar tanto el conjunto elemental desconocido como el conjunto total mencionada en la narración del problema, a pesar de esta confusión, el niño deja ver en su explicación una clara comprensión de las relaciones implicadas y un claro uso de literales para representar las relaciones implicadas en el problema.


5. A Luis le gustan los insectos, por ello en un frasco metió algunos grillos y 15 arañas. En total tiene 33 insectos dentro del frasco. ¿Cuántos grillos metió Luis en el frasco?

representación

X + 15 = X

18
+15
33

Explica cómo encontraste tu respuesta.

como 15 + 15 = 30 le sume 3 al 15 y medio 18 para que mediera 33 y sume 15+18=33

Fig.24 Representación externa elaborada ante el problema Aritmético de Combinación que incorpora literales para señalizar las incógnitas, la cual se englobó en la categoría de análisis “introduce literales”.

A continuación, se presenta el análisis de las representaciones externas y los razonamientos que se pueden inferir de ellas al solucionar los problemas correspondientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*). La tabla 6 muestra de manera esquemática los problemas correspondientes al eje *PF* presentados en las dos evaluaciones, así como, sus principales resultados.

Problema	Principales resultados
"Problema Relación sin cantidades" (PR) Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardó equitativamente en dos cajas pequeñas. Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas. ¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?	"No respuesta" de diecisiete representaciones externas que se agruparon en esta categoría en el pretest sólo cuatro se presentan en el post test. "Explica la relación con operación" Nueve estudiantes realizan una representación externa englobada en esta categoría y cinco la mantienen en el post test "Explica la relación sin operación" Dos estudiantes realizaron una representación externa de este tipo, uno en el pretest y otro en el post test. "Introduce literal" Diecisiete estudiantes elaboraron una representación externa durante el post test.
"Problema Relación con Incógnita" (PRcI) Dos estudiantes tienen la misma cantidad de caramelos. Lucero tiene una caja, dos tubos, y siete caramelos sueltos. Susana tiene una caja, un tubo, y 20 caramelos sueltos. Cada caja tiene la misma cantidad y cada tubo tiene la misma cantidad. ¿Puedes averiguar cuántos dulces tiene cada tubo? ¿Qué pasa con cada caja?	"No respuesta" se englobaron quince representaciones externas durante el pretest y doce en el post test. "Explica la relación con operación" Decrece su frecuencia de ocurrencia de doce representaciones externas en el pretest a once en el post test. "Explica la relación sin operación" Ninguna representación externa se englobo en esta categoría de análisis en ninguna de las dos evaluaciones. "Introduce literal" Cuatro representaciones externas elaboradas en el post test se englobaron en esta categoría de análisis.
"Problema Funcional con Incógnita" (PFcI) María y Luis el día de muertos salieron a pedir dulces. En la primera casa, María recibió una bolsa de caramelos sabor uva. En la segunda casa, recibió 3 veces más caramelos sabor uva que en la primera casa. Luego se encontró con Luis. Luis había recibido en total 20 caramelos sabor uva. Entonces María contó sus caramelos y se dio cuenta que tenía el mismo número de caramelos sabor uva que Luis. ¿Cuántos caramelos sabor uva recibió María en la primera casa?	"No respuesta" Disminuye su frecuencia de ocurrencia pasando de veinte representaciones externas en el pretest a nueve en el post test. "Explica la relación con operación" Incrementa su frecuencia de ocurrencia de siete incidencias en el pretest a doce en el post test. "Explica la relación sin operación" Ninguna representación externa se englobo en esta categoría de análisis en ninguna de las dos evaluaciones. "Introduce literal" Se englobaron seis representaciones externas realizadas durante el post test.
"Problema Funcional" (PF) ¿Cuál es la altura de una persona si lleva un sombrero de 30 cm? Representa la relación.	"No respuesta" Pasa de veintidós representaciones externas elaboradas en el pretest a dieciocho en el post test. "Explica la relación con operación" Pasa de cuatro representaciones externas en el pretest a seis representaciones en el post test. "Explica la relación sin operación" Pasa de una representación externa en el pretest a dos en el post test. "Introduce literal" Engloba una sola representación externa elaborad en el post test.
"Problema Funcional con tres variables" (PFc3) Tomás es 4 centímetros más alto que María. María es 6 centímetros más baja que Lesli. Dibuja la altura de Tomás, la de María y la de Lesli. Explica a qué se refieren los números 4 y 6 y Representa y explica la relación entre las alturas.	"No respuesta" 26 estudiantes realizaron una representación externa englobada en esta categoría durante el pretest, sólo trece la mantienen en el post test. "Explica la relación con operación" Dos estudiantes durante el post test realizaron una representación externa que se englobó en esta categoría de análisis. "Explica la relación sin operación" Incrementa su frecuencia de ocurrencia pasando de una representación externa en el pretest a nueve en el post test. "Introduce literal" tres estudiantes durante el post test realizaron una representación externa que se englobó en esta categoría de análisis.

Tabla 6. Problemas correspondientes al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*) presentados en ambas evaluaciones, así como, sus principales efectos.

El sexto problema presentado en las dos evaluaciones es el primero problema correspondiente al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*). Dicho problema se denominó "*Problema Relación sin cantidades"* (*PR*) porque implica dar seguimiento a la relación entre dos conjuntos sin magnitud definida los cuales se van modificando de forma independiente. La situación presentada fue:

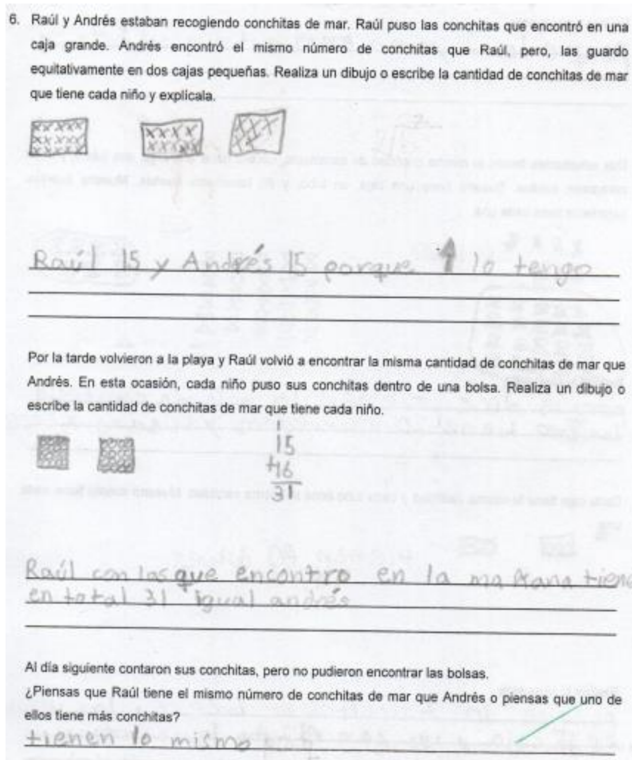
Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardó *equitativamente en dos cajas pequeñas. Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas. ¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?*

Este problema demanda que los niños relacionen los cambios que sufren los conjuntos de cada personaje del problema, comparando a lo largo de la narración la magnitud de éstos. Una característica distinta de las relaciones que se presentan en este problema es que no hay valores numéricos específicos para ninguno de los conjuntos a comparar. Con base en estas características los estudiantes deben comprender las relaciones no numéricas para finalmente decidir si se mantiene o no la equivalencia entre los conjuntos de cada uno de los personajes, es decir, los niños deben decidir si la cantidad de los dos personajes del problema es igual o no.

Los estudiantes que aceptan el problema tal cual se presenta, no dan al signo de igual el significado de operador, lo significan como una relación de equivalencia en la cual se analizan la relación entre las modificaciones de cada conjunto para decidir si son iguales o no. Otro abordaje sería el particularizar las relaciones generales implicadas en la narración del problema, es decir, el estudiante asigna valores arbitrarios a los conjuntos comparados (conchas de cada personaje) para operarlas y establecer una relación de equivalencia, en este abordaje el signo de igualdad es concebido como un operador el cual permite transformar las relaciones para establecer la comparación entre las magnitudes.

La categoría de análisis "*No respuesta*" tuvo diecisiete representaciones externas englobadas en esta categoría durante el pretest, disminuyendo a cuatro representaciones en el post test. Con base en las representaciones, se puede inferir que los niños no establecen ninguna relación entre los elementos del problema, ya sea por la falta de valores numéricos concretos o por el número de relaciones implicadas en el problema. Estas situaciones llevan a los niños a decir que la situación "*no se puede resolver*" o que "*no se entiende*". Este abordaje deja ver que estos niños no tienen conocimientos para comprender cambios en los conjuntos comparados que carecen de valores específicos.

La categoría "*Explica la relación con operación*" tuvo nueve representaciones externas durante el *pretest* y cinco durante el *post test*. Los razonamientos que se pueden derivar de estas representaciones son que los estudiantes no pueden trabajar con cantidades indefinidas, por el contrario, los niños necesitaron saber con qué cantidad están trabajando, por ello asignan un valor específico con el cual operan en función de las relaciones descritas en la narración. Dichos valores originales se van modificando conforme se transforman en función de los cambios que se mencionan. Una vez realizadas todas las transformaciones, los estudiantes establecen las comparaciones finales entre los conjuntos de cada uno de los personajes del problema, para concluir si se mantiene la equivalencia o no. Es importante resaltar que estas representaciones externas no presentan explícitamente el signo de igualdad, ya que los niños emplean el algoritmo de la sustracción, con este se asume que la línea inferior que separa los sumandos del total toma el papel del signo de igualdad. A pesar de esta forma de analizar la información, los niños sí establecieron una comparación de equivalencia entre los conjuntos totales que asignaron a cada uno de los personajes del problema, este aspecto es el que les permite decidir si hay o no equivalencia al final de la narración. Un ejemplo de este tipo de proceder lo tenemos con la participante *M*, ella dice: *"Los dos tienen el mismo número de conchitas, porque sumé las cajas y las bolsas"*. La figura 25 es un ejemplo del tipo de representaciones externas que se englobaron en este tipo de categoría, de las cuales se desprende el análisis descrito.


6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

Raúl 15 y Andrés 15 porque lo tengo

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

15
+16
31

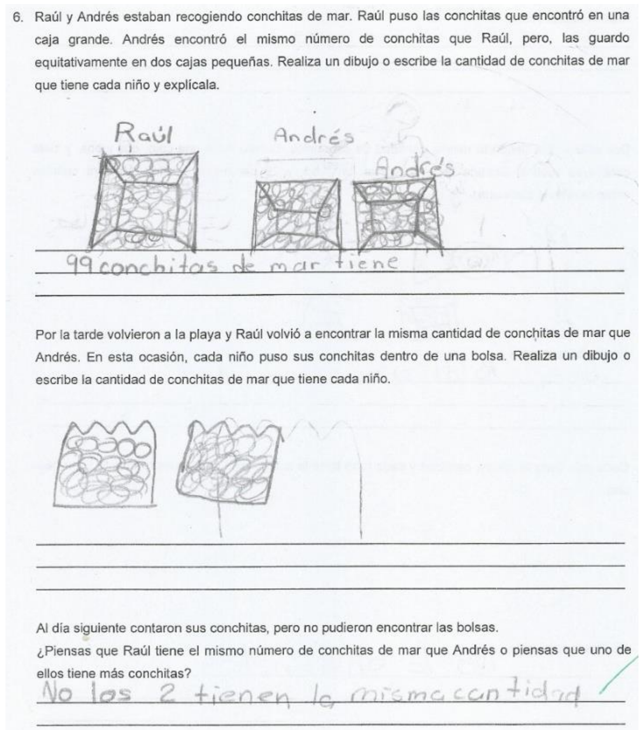
Raúl con las que encontro en la mañana tiene en total 31 igual andrés

Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas.
¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?

tienen lo mismo

Fig.25 Ejemplo de representación externa elaborada ante el problema relación sin cantidades la cual muestra la asignación de valores específicos para operar con ellos.

La categoría "*Explica la relación sin operación*" fue conformada por una *representación externa* en cada una de las dos evaluaciones. A diferencia de la categoría previa, derivado de este tipo de representación el razonamiento que se percibe es que los estudiantes dejan de operar con cantidades concretas para comprender las relaciones generales implicadas y presentadas en el problema. En este abordaje, el niño centra su atención en el análisis de la naturaleza de las relaciones, así como en los cambios que sufren a lo largo del problema, con base en ese análisis se realiza la comparación de equivalencia entre los conjuntos finales (ver figura 26).


6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

Raúl Andrés Andrés

99 conchitas de mar tiene

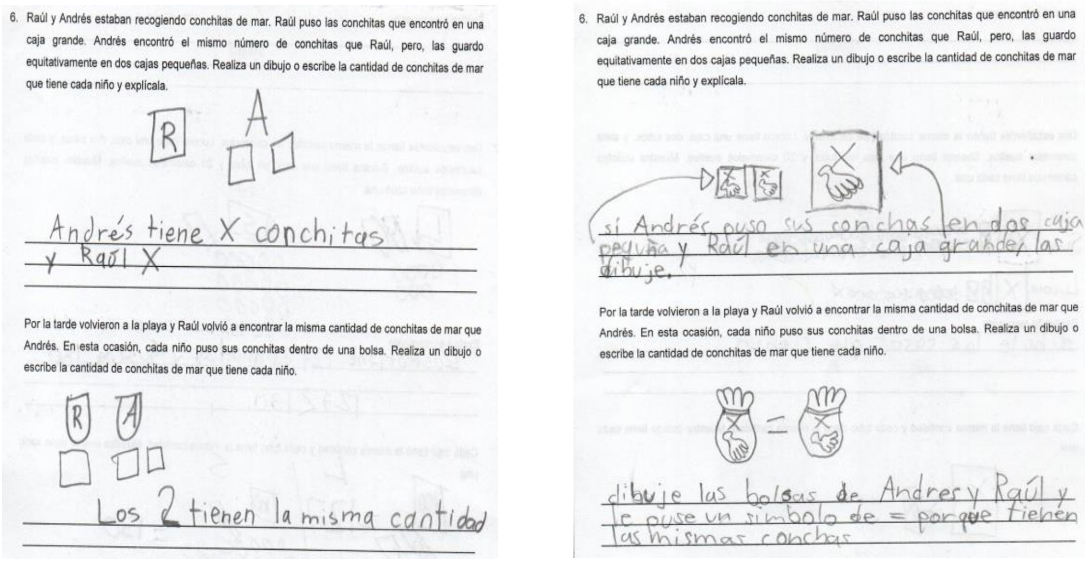
Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas.
¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas?

No los 2 tienen la misma cantidad

Fig.26 Ejemplo de representación externa realizadas ante el problema relación sin cantidades englobada en la categoría explica la relación sin operación,

La última categoría denominada "*Introduce literales*", se conformó con representaciones externas que se presentaron únicamente en el *post test* con una frecuencia de diecisiete representaciones. Al igual que los razonamientos anteriores, estos niños dejan de necesitar cantidades concretas para comprender y analizar el problema basando su análisis en la relación de las magnitudes y sus transformaciones agregando a esto el uso de literales para señalizar las cantidades inespecíficas. En este sentido, la figura 27 muestra algunas de las representaciones en las que se incluyen letras para simbolizar las cantidades indefinidas de conchitas que tienen los personajes del problema, así como la comparación entre ellas. En este contexto, el empleo de dibujos es importante porque a través de estos se representa la magnitud y la relación que se establece entre los elementos comparados.



6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

R A

Andrés tiene X conchitas y Raúl X

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

R A

Los 2 tienen la misma cantidad

6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

X

si Andrés puso sus conchas en dos caja pequña y Raúl en una caja grande las dibuje.

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

dibuje las bolsas de Andres y Raúl y le puse un simbolo de = porque tienen las mismas conchas

Fig.27 Ejemplos de representaciones externas realizadas ante el problema relación sin cantidades que incluyen literales englobadas en la categoría introduce literales.

Se aprecia en los siguientes ejemplos de razonamientos que acompañaron a la categoría "Introduce literales" que un apoyo para razonar es seguir lo que ocurre en la narración o bien, analizar la relación entre el tamaño de las magnitudes:

> *Á, "pienso que es la misma cantidad porque los dos perdieron sus bolsas"*
>
> *S, "Los dos tienen la misma cantidad nomás que Raúl las repartió en una caja grande y Andrés en dos cajas pequeñas, porque no importa que Raúl tenga 1 caja grande y que Andrés tenga 2 cajas pequeñas, tienen lo mismo"*

El séptimo problema se denominó "*Problema Relación con Incógnita*" (*PRcI*), también trata de la conservación de las relaciones de equivalencia, pero entre las relaciones implicadas se incluyen cantidades determinadas, indeterminadas, la noción de variable y de incógnita. Dicha situación fue:

Dos estudiantes tienen la misma cantidad de caramelos. Lucero tiene una caja, dos tubos, y siete caramelos sueltos. Susana tiene una caja, un tubo, y 20 caramelos sueltos. Cada caja tiene la misma cantidad y cada tubo tiene la misma cantidad. ¿Puedes averiguar cuántos dulces tiene cada tubo? ¿Qué pasa con cada caja?

Para que los niños puedan analizar las relaciones implicadas en este problema necesitan considerar diferentes conceptos matemáticos, dentro de los cuales destacan la noción de incógnita, variable y equivalencia, además de incorporar cantidades determinadas e indeterminadas. Con base en esos conceptos, el estudiante debe identificar las relaciones implicadas en el problema y coordinarlas para establecer finalmente la equivalencia entre los conjuntos (cantidad de caramelos que tiene cada personaje), encontrando el valor de la *incógnita* que establece y mantiene la equivalencia.

A pesar de haber considerado que este problema es menos complejo que los subsecuentes, este problema representó un gran desafío para los estudiantes y ninguno localizó la incógnita (número de dulces que contiene el tubo y la caja). No obstante, es interesante el análisis de las representaciones externas mostradas por los estudiantes al intentar comprender las relaciones implicadas en el problema.

En relación con la primera categoría de análisis denominada "*No respuesta*" quince estudiantes en el *pretest* y doce estudiantes en el *post test* realizaron una representación externa que se englobó en este tipo de categoría de análisis. De estas representaciones se derivan los razonamientos que indican que el problema no se puede realizar ya que hace falta información.

La segunda categoría se denominó "*Explica la relación con operación*" las representaciones externas que conformaron esta categoría pasaron de doce en el *pretest* a once en el *post test*. Estas representaciones dejan ver que los valores específicos asignados a las cantidades indeterminadas son empleados en la manipulación de las relaciones. Al obtener un resultado para cada personaje del problema, los niños compararon los valores. A pesar de que este tipo de abordaje se acerca a un abordaje matemático correcto, los estudiantes pierden de vista la relación de equivalencia entre las cantidades de dulces que tienen los dos personajes del problema. Al perder de vista este aspecto o al no poder coordinar todo el conjunto de conceptos y relaciones, los niños designan un valor erróneo a la cantidad de dulces que tiene cada tubo. Cabe señalar que la caja se omite porque ambas niñas del problema tienen una.

Dentro de estas representaciones externas, específicamente dentro de las realizadas en el *post test* un estudiante deja ver la identificación de la relación de cantidad entre los elementos que tienen los personajes de la historia, es decir, el estudiante identifica las relaciones idénticas entre los personajes del problema, de esta forma llegó a la conclusión que Lucero tiene más caramelos y Susana más tubos, al respecto "C" señala: *"Dibujé los datos que tenía en el problema. Lucero tiene más caramelos y Susana más tubos"*. La limitante que se encuentra dentro de este abordaje radica en la asignación de cantidades determinadas a las cantidades indeterminadas, con esto *C* transforma las relaciones implicadas en el problema, además de perder de vista la equivalencia que existe entre los conjuntos de cada uno de los personajes independientemente de los elementos que los componen. La figura 28 muestra la *representación externa* realizada por "C" y analizada previamente.

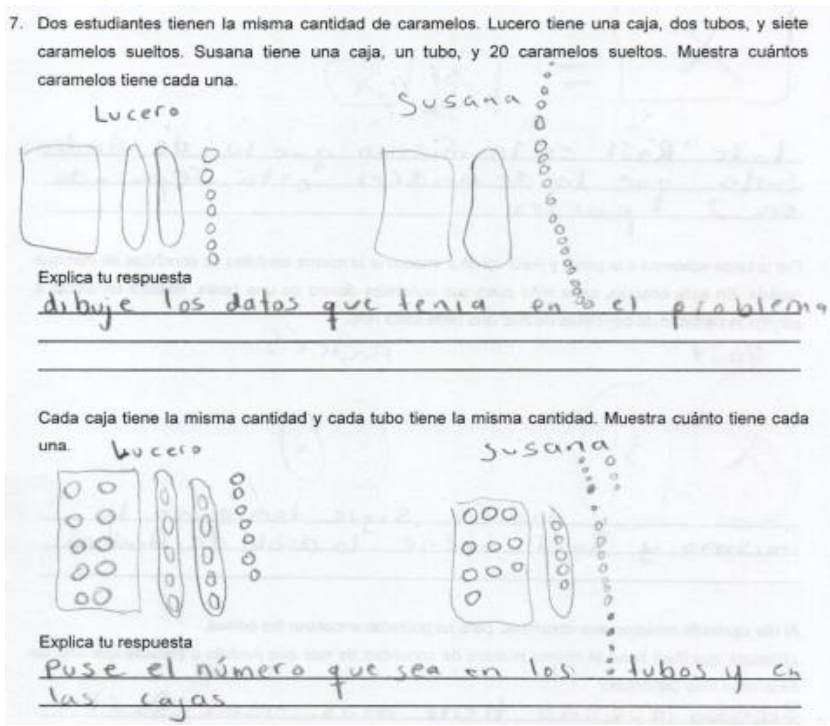


Fig.28 Representación externa que identifica la relación de magnitud entre los elementos de los personajes del problema relación con incógnita y variable.

Dentro de la categoría "*Explica la relación sin operación*" no se englobó ninguna de las representaciones externas realizadas por los estudiantes en las dos evaluaciones.

La cuarta y última categoría denominada "*Introduce literales*" englobó cuatro representaciones externas realizadas en el *post test*. La figura 29 muestra la representación elaborada por uno de estos cuatro niños. La *representación externa* muestra la identificación de elementos clave para encontrar el valor de la incógnita (número de dulces dentro del tubo) que se solicita y mantiene la equivalencia de los conjuntos de los personajes, adicionalmente, muestra la eliminación de los elementos semejantes entre los dos personajes del problema, tanto en tipo como en cantidad; de esta forma tacha la caja, los siete dulces y un tubo de cada uno de los personajes dejando únicamente los elementos diferentes entre los personajes. A pesar de dicha identificación, el estudiante no logra coordinar dicha relación junto con elementos que quedaron, para con base es eso decir el número de caramelos que hay dentro de un tubo.

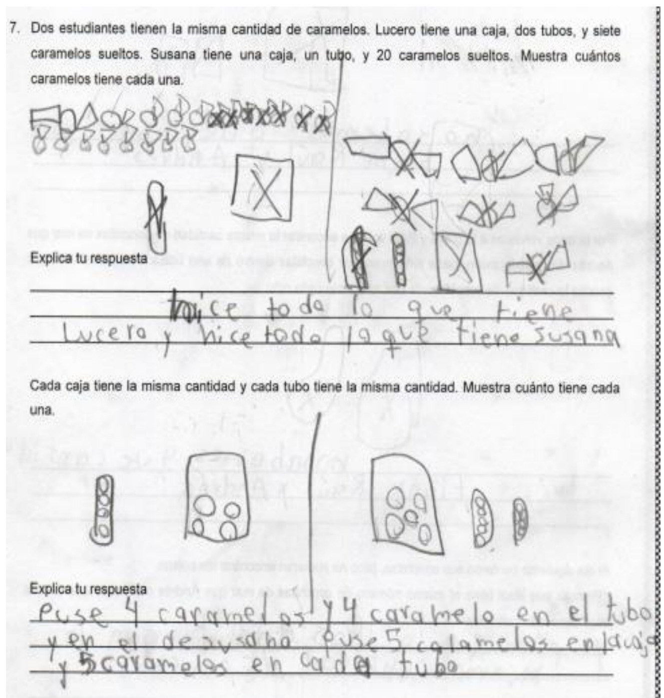


Fig.29 Representación externa que elimina los elementos compartidos por los dos personajes del problema relación con incógnita y variable elaborada durante el post test.

Los últimos tres problemas matemáticos que se presentaron en las dos evaluaciones ponen en juego el *Pensamiento Funcional* (*PF*) en diferentes contextos. La diferencia entre cada uno de los problemas radica en el tipo de función que se explicita dentro de las relaciones implicadas en el problema. En este sentido se inició con una función del tipo $y = 3x$, se continuó con la función del tipo $y = x + 30$ y se finalizó con la función $y = x - 4; y = z - 6$.

El octavo problema matemático que se presentó se denominó "*Problema Funcional con Incógnita*" (*PFcI*) y fue:

María y Luis el día de muertos salieron a pedir dulces. En la primera casa, María recibió una bolsa de caramelos sabor uva. En la segunda casa, recibió 3 veces más caramelos sabor uva que en la primera casa. Luego se encontró con Luis. Luis había recibido en total 20 caramelos sabor uva. Entonces María contó sus caramelos y se dio cuenta que tenía el mismo número de caramelos sabor uva que Luis. ¿Cuántos caramelos sabor uva recibió María en la primera casa?

Este problema matemático demanda que los estudiantes establezcan una relación multiplicativa 1 a 3 entre la cantidad de dulces desconocida que María recibe en la primera casa y la cantidad desconocida multiplicada tres veces por la cantidad recibida inicialmente. Una vez comprendida esa relación, los estudiantes, deben coordinar dicha relación con la cantidad total de dulces que recibió Luis. Finalmente, el estudiante debe establecer la relación de equivalencia entre la cantidad de dulces que recibió María junto con su relación multiplicativa con la cantidad total de dulces que recibió Luis (20). Esta situación es más compleja que las presentadas anteriormente tanto por la operación matemática implicada en las relaciones del problema como por la coordinación de las diferentes relaciones enunciadas, las cuales implican la comprensión y el manejo de cantidades indeterminadas.

De las veintisiete representaciones externas veinte de ellas se englobaron en la categoría "*No respuesta*" durante el *pretest* y nueve durante el *post test*. Dentro de los razonamientos que se pueden inferir de las distintas representaciones externas se encuentran que la situación no se puede realizar, principalmente por una falta de comprensión del problema.

Las representaciones externas y los razonamientos que se pueden derivar de las representaciones externa que se englobaron en la categoría "Explica la relación con operación" involucran el uso de cualquier tipo de operación aritmética para relacionar los elementos descritos en el problema. Estas representaciones dejan ver que, aunque la situación presenta cantidades indeterminadas, así como relaciones entre ellas los niños no necesariamente atienden las relaciones tal cual se presentan, por el contrario, la figura 30 muestra como parte de la representación externa una operación aritmética. En la figura se aprecia que el niño estableció que en la primera casa a María le dieron 10 caramelos, en consecuencia, realiza una suma repetida de esa cantidad (3 veces diez) señalando que eso es igual a 3 por 10. Al seguir trabajando, el estudiante identifica que María tiene la misma cantidad de caramelos que los que Luis recibió al final (20), aspecto que lo lleva a replantear su razonamiento e indicar que en la primera casa María recibió 5 caramelos. Este abordaje es un claro ejemplo del uso de representaciones externas como herramientas de análisis, mediante la cual se afecta tanto el pensamiento como la representación misma.

Con base en la representación se puede decir que el signo de igualdad es concebido como el establecimiento de una equivalencia. Este se sostiene con base en las diferentes relaciones que se plasman dentro de la representación externa, esto es, al decir que 10 + 10 + 10 es igual a 3 x 10, se deja de lado la operatividad de los elementos, pasando de dicha relación a una relación que trasciende la presencia de una operación y un único valor o cantidad como resultado, esto permite comprender la relación de equidad entre las diferentes representaciones elaboradas.

Al respecto, K, indica "…en la primera casa 5 dulces y en la segunda 15 = 5 x 3. 15 + 5 = 20".

Esta categoría de análisis incrementó su frecuencia de ocurrencia de siete incidencias en el pretest a doce en el post test.

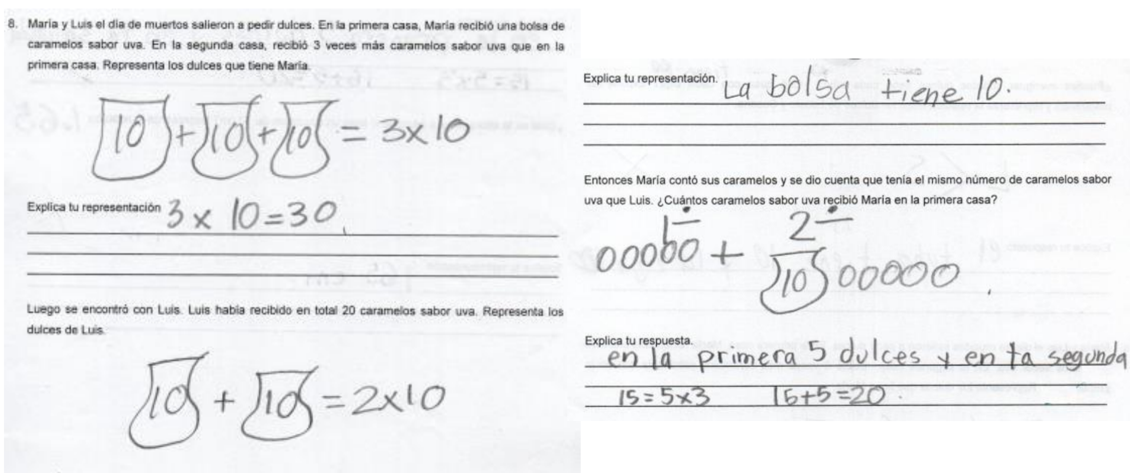
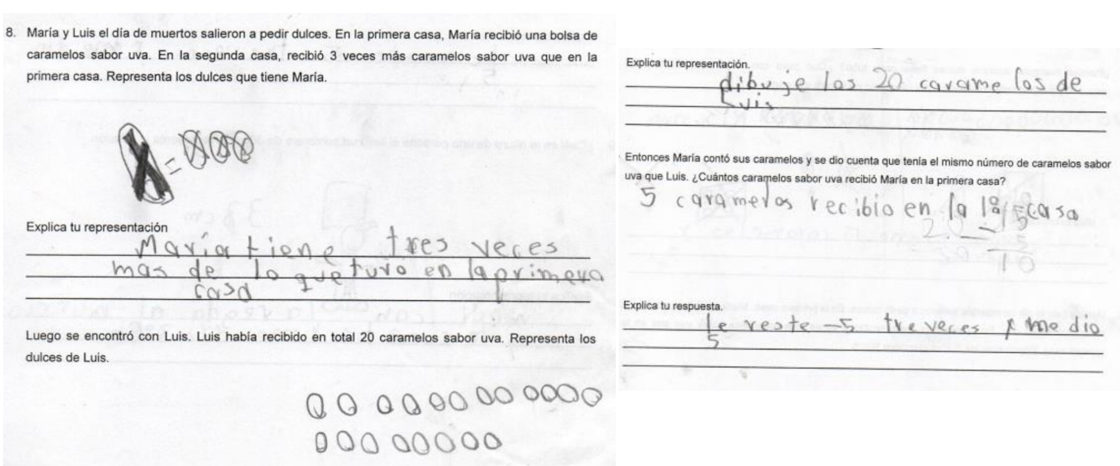


Fig.30 Ejemplo de representación externa que presenta diferentes operaciones aritméticas englobada en la categoría de análisis explica la relación con operación elaborada ante el problema pensamiento funcional con incógnita.

La categoría "Explica la relación sin operación" no contó con ninguna representación externa en ninguna de las dos evaluaciones presentadas.

La última categoría de análisis "Introduce literales" únicamente contó con seis representaciones externas durante el post test. Las representaciones englobadas en esta categoría dejan ver la incorpora de la literal "x" como herramienta de análisis y señalización de las diferentes cantidades desconocidas que obtiene María en la primera casa, así como, las relaciones subsecuentes que se mencionan en la narración del problema (tres veces más). En este sentido, la figura 31 es un ejemplo de este tipo de representaciones. La figura deja ver la relación que establece el niño entre la literal "x" y la narración del problema, para ello diferencia entre el tamaño y el color de cada una de ellas, así como el uso de otros elementos icónicos cuando se menciona la cantidad que recibió Luis. Con base en estas dos representaciones externas, se infiere que el niño identifica el valor de la incógnita solicitada el cual es 5 (un número que al sumarle el producto de multiplicarlo por tres resulte 20).

El uso que se infiere que se asigna al signo de igualdad es un uso relacional, ya que en ningún momento la representación externa muestra una relación entre cantidades determinadas con las cuales se realice cualquier tipo de operación. Por el contrario, la representación y el razonamiento derivado de ella dejan ver que el signo se concibe como una relación de equivalencia entre los diferentes elementos de la expresión.


8. María y Luis el día de muertos salieron a pedir dulces. En la primera casa, María recibió una bolsa de caramelos sabor uva. En la segunda casa, recibió 3 veces más caramelos sabor uva que en la primera casa. Representa los dulces que tiene María.

Explica tu representación

María tiene tres veces mas de lo que tuvo en la primera casa

Luego se encontró con Luis. Luis había recibido en total 20 caramelos sabor uva. Representa los dulces de Luis.

Explica tu representación.

dibuje los 20 caramelos de Luis

Entonces María contó sus caramelos y se dio cuenta que tenía el mismo número de caramelos sabor uva que Luis. ¿Cuántos caramelos sabor uva recibió María en la primera casa?

5 caramelos recibio en la 1ª casa

Explica tu respuesta.

le reste 5 tre veces y me dio 5

Fig.31 Ejemplo de representación externa que incluye literales de la cual se infiere una comprensión del signo de igualdad como equivalencia elaborada ante el problema pensamiento funcional con incógnita englobada en la categoría introduce literal.

Cabe mencionar que a pesar de que el niño comprende las diferentes relaciones implicadas en el problema, así como su coordinación y, además, incorporar literales para denotar las cantidades indeterminadas y concebir la noción de equivalencia del signo de igualdad, no se muestra ninguna manipulación de la expresión con literales, explicando solamente un proceso sustractivo y repetitivo del conjunto total dado para Luis.

Al respecto *Á* dice; *"5 caramelos recibió en la primera casa, le resté menos cinco tres veces y me dio 5"*

El noveno problema presentado en las dos evaluaciones se denominó *"Problema Funcional"* (*PF*) y fue el siguiente:

¿Cuál es la altura de una persona si lleva un sombrero de 30 cm? Representa la relación.

Este problema es la primera situación que presenta una relación abierta a los estudiantes, es decir, las relaciones implicadas en el problema presentan la posibilidad de trabajar con un sinfín de posibles cantidades – relaciones - dentro de la misma situación. Este problema plantea la relación entre cualquier estatura posible de una persona con los 30 centímetros que mide un sombrero que lleva puesto. Este problema plasma dentro de las relaciones implicadas la relación funcional $y = x + 30$, a través de esta relación se espera que los estudiantes relacionen cualquier estatura de una persona posible con una medida constante, la del sombrero. El problema demanda a los niños dejar de pensar en medidas específicas y determinadas para comprender que puede ser cualquier medida, promoviendo con ello la comprensión de cantidades variables indeterminadas y con ello la noción de *variable*. Este tipo de problemas permite, por su naturaleza misma, establecer una relación generalizable a todos los casos posibles, a todas las estaturas posibles, aspecto diferente a los problemas anteriores del eje *AG* los cuales dentro de las relaciones implicadas cancela la generalización de ellas. Teniendo esto presente, un posible abordaje sería concebir un sinfín de posibles alturas para posteriormente relacionarlas con la constante, es decir, con la altura del sombrero (30). Esta situación incita a que los niños trabajen con cantidades, con medidas indeterminadas en relación, siempre, con la medida determinada del sombrero estipulada en la narración del problema. Otro posible abordaje del problema sería que el estudiante concibiera un conjunto limitado posible de alturas relacionadas siempre en adición a la constante, a los 30 centímetros de altura del sombrero. La limitante de este abordaje es la concepción limitada dentro de los valores que puede tener la variable. Estos dos abordajes además de aceptar trabajar con cantidades y relaciones no determinadas dejarían ver los procedimientos y razonamientos que tienen los niños al trabajar con variables en la solución de problemas.

Un último abordaje sería particularizar las relaciones indeterminadas presentadas en el problema. Esto es, si el niño elige una estatura determinada para relacionarla con la altura del sombrero (30), dejaría de lado la noción de *variable* que permite una relación entre cualquier estatura posible, centrando su comprensión en una única posibilidad como respuesta correcta. Este abordaje automáticamente anula la posibilidad de generalizar tanto la *representación externa*, como los razonamientos derivados de ella.

A continuación, se presentan las representaciones externas y los razonamientos inferidos de ellas en función de las cuatro categorías de análisis creadas para el presente estudio.

La primera categoría denominada "*No respuesta*" decremento su frecuencia de ocurrencia pasando de veintidós representaciones externas en el pretest a dieciocho en el post test. A algunos ejemplos de estas representaciones son:

M, "No podemos presentar la relación sin la cantidad de cuánto mide la persona";

A, "depende de cuánto mida la persona".

Estos ejemplos dejan ver que los niños que realizaron este tipo de representaciones son necesarias las especificaciones de las alturas que tiene la persona, aspecto que cierra y concretiza la relación funcional mostrando la nula comprensión del concepto de *variable.*

Las REs que se englobaron en la categoría denominada "*Explica la relación con operación*" fueron cuatro en el *pretest* y seis en el *post test* permiten apreciar que los estudiantes necesitaron asignar un valor determinado a la altura de la persona, con base en el valor dado, los niños pudieron decir la altura final que tiene la persona al usar el sombrero. Dentro de las representaciones se permite apreciar que la altura designada para la persona no guarda ninguna relación real con la altura posible que puede tener una persona en la vida real (ver figura 32), a pesar de este aspecto, la relación que establecieron entre las relaciones implicadas en el problema es correcta.

La figura 32 muestra dos representaciones externas realizadas por dos estudiantes ante este problema. En ellas se muestra cómo los niños particularizan la medida de la persona (tres centímetros y nueve centímetros respectivamente). En un caso el niño explica que mide con la regla la altura de la "persona" - muñeco que dibuja como parte de su *representación externa*, mientras que el otro niño supone que la persona mide nueve centímetros, ambos suman a su medida original (altura) la medida dada para la altura del sombrero (constante). Este tipo de representaciones externas y sus razonamientos derivados de ellas cancelan la posibilidad de concebir y generalizar la situación a cualquier estatura posible que puede tener una persona. Estos aspectos permiten sostener que aún no se logra establecer una relación abierta y coordinar la noción de cantidad indeterminada, variable y constante. Al respecto explica *Á, "Medí con la regla el muñeco y le sumé más 3 y me dio 33cm". Ar,* menciona, *"Pienso que yo mido 9 cm y con un sombrero de 30 cm mido 39 cm".*

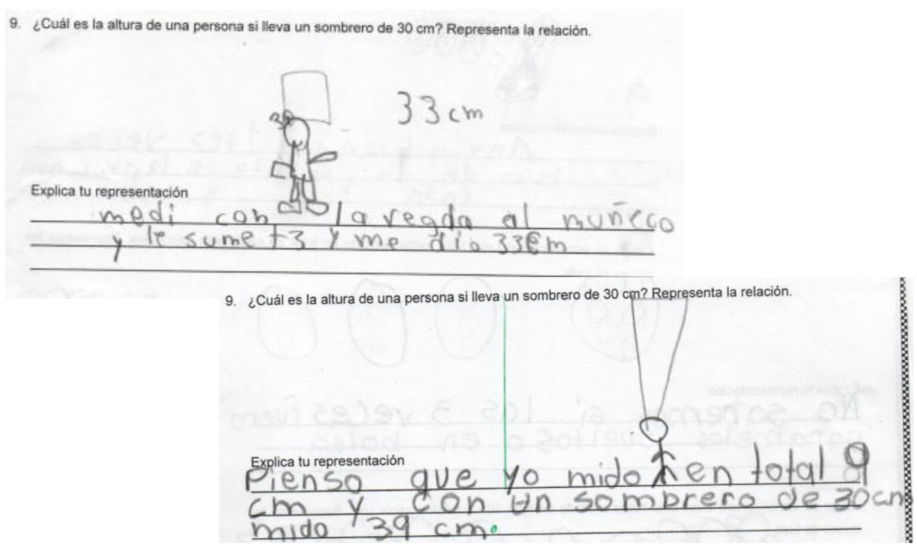


Fig.32 Ejemplos de representaciones externas realizadas ante el problema funcional en el post test que muestran la asignación de una medida a la altura del personaje del problema englobadas en la categoría de análisis explica la relación con operación.

Un aspecto importante por resaltar de estas representaciones es que los niños recurren a los elementos iconográficos. Los elementos iconográficos son importantes para dar sentido a las relaciones implicadas en el problema y para poder plasmar tanto las relaciones implicadas como los conocimientos matemáticos.

La siguiente categoría de análisis es "*Explica la relación sin operación*". Dentro de esta categoría de análisis se encuentran englobadas las representaciones externas y los razonamientos derivados de ellas que muestran que los niños establecen una relación no aritmética entre las relaciones implicadas en el problema sin llegar a indicar la altura específica que tendría la persona al usar el sombrero. Esta categoría pasa de una incidencia en el *pretest* a dos en el *post test*. La figura 33 muestra un ejemplo de este tipo de representaciones. En ella se observa que el niño dibuja una "persona" con un sombrero puesto, explicando que la persona estaría más alta al usar el sombrero, esta representación y su explicación por sencilla que parezca deja de lado la necesidad de conocer una altura específica, estableciendo una relación lógica entre la altura antes y después de usar el sombrero. Unos ejemplos de las explicaciones que proporcionaron los estudiantes son:

D, "Estaría más alto"

Sh; "uno de ello es más alto porque tiene el sombrero"

Este tipo de representación externa, así como sus razonamientos derivados pueden ser la comprensión incipiente de las relaciones funcionales que se establecen en este tipo de problemas, lo que permite poner énfasis en la promoción del pensamiento lógico de los estudiantes.

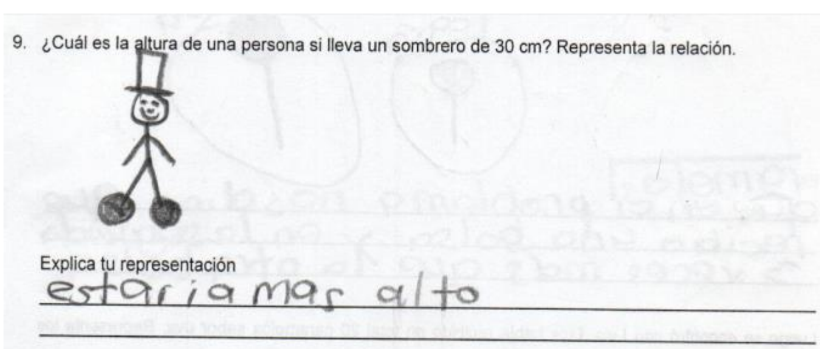


Fig.33 Ejemplo de representación externa que establece una relación sin operación aritmética entre las relaciones implicadas en el problema realizada ante el problema funcional englobada en la categoría de análisis explica la relación sin operación.

La última categoría de análisis que se denominó "*Introduce literales*", ésta engloba la única *representación externa* que se mostró en el *post test*. Los razonamientos que se infieren de ella que los estudiantes incorporan la literal "*x*" para denotar la estatura desconocida de la persona, en función de ella establece la relación aditiva con la altura dada del problema. Esta representación deja ver que este estudiante incorporó y retomó las literales como herramientas de análisis en una situación completamente diferente a las hasta ahora trabajadas lo que demuestra cierta transferencia de los aprendido en la *PPEPPA*.

La representación que se muestra en la figura 34, muestra el uso de la literal "*x*" para denotar la altura de la persona, dicha altura se estípula que es en centímetros. Adicional a ello, se muestra la adición de los treinta centímetros de altura correspondientes al sombrero a la altura de la persona (literal x); estos dos elementos se relacionan con el signo de equivalencia y con una nueva cantidad desconocida denotada nuevamente, por la literal "*x*". Gracias a la explicación que el niño brinda de su representación externa, se puede afirmar que, en su razonamiento, la altura de la persona será mayor con el sombrero que sin usar el sombrero. Al respecto *C* indica*, "no sabemos cuánto mide, pero sí sabemos cuánto más medirá"*.

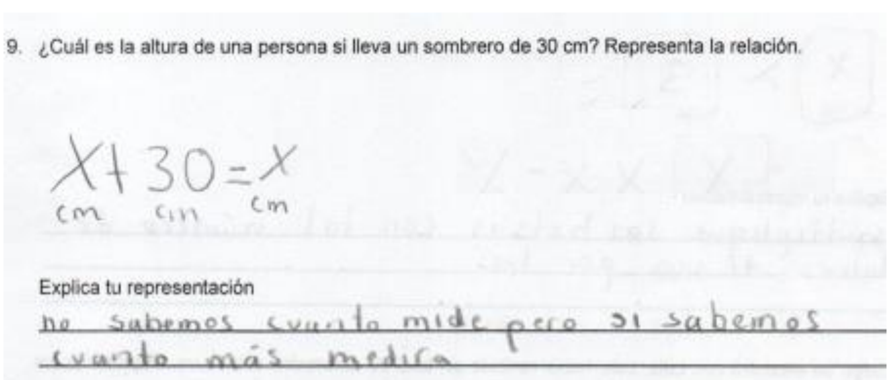


Fig.34 Representación externa elaborada ante el problema funcional que incluye literales. Dicha representación se englobó en la categoría introduce literales.

El quinto problema correspondiente al eje algebraico *Pensamiento Funcional* (*PF*) y, décimo dentro de la organización de las dos evaluaciones presentado a los estudiantes del grupo, se denominó "*Problema Funcional con tres variables*" (*PFc3*) y fue:

Tomás es 4 centímetros más alto que María. María es 6 centímetros más baja que Lesli. Dibuja la altura de Tomás, la de María y la de Lesli. Explica a qué se refieren los números 4 y 6 y Representa y explica la relación entre las alturas.

Este problema matemático demanda que los niños establezcan la diferencia entre dos pares de alturas de los personajes del problema. La noción de variable se pone en juego en el momento de no especificar las alturas de los personajes, es decir, el problema únicamente menciona la diferencia que hay entre la altura dos personajes, sin embargo, no dice la medida específica de las alturas. Con base en lo anterior, la parte medular del problema es comprender que los valores que se presentan no son las estaturas de los personajes del problema, sino justamente la diferencia que existe entre ellas. Después de comprender este hecho, el niño debe decir cuál de los tres personajes es más alto. Este problema, al que otros ya presentados, explicita una situación en la cual no se pide una respuesta numérica particular.

Teniendo en cuenta lo anterior, un posible abordaje de la situación sería que los niños conciban la diferencia entre las estaturas, como las estaturas reales de los personajes. Esto llevaría, en primer lugar, a particularizar y concretar la situación, anulando con ello la posibilidad de un análisis que pueda ser generalizable, independientemente de la estatura que tengan los personajes del problema, en función de esta asignación se realizarían las comparaciones entre las supuestas alturas que tienen. Otro posible abordaje sería que los niños asignaran valores arbitrarios y diferentes a los estipulados en la narración del problema a las estaturas de los personajes del problema (incógnitas), con base en el valor asignado y en la diferencia que se menciona que existe entre las estaturas los estudiantes pueden decidir quién de los personajes es el más alto. A pesar de que este abordaje particulariza la situación abierta implicada en la situación problema al asignar valores específicos a las alturas inespecíficas, este abordaje es más sofisticado que el anterior en tanto el niño entiende que los valores dados son la diferencia entre las estaturas y no las estaturas mismas de los personajes del problema.

Un tercer abordaje sería que los niños comprendan y trabajen con las estaturas desconocidas (variables) y con la diferencia estipulada entre éstas. Este abordaje permitiría que la representación externa que se realice de las relaciones implicadas sea generalizada a un sinfín de posibles valores de las alturas, haciendo con esto posible la generalización.

Al igual que en los otros problemas, la primera categoría de análisis de las representaciones externas fue "*No respuesta*". Esta categoría de análisis tuvo una incidencia de veintiséis representaciones externas en el *pretest* y trece en el *post test*. Al igual que los problemas previos, esta categoría engloba todas las representaciones y razonamientos que indican que no se puede resolver el problema o simplemente se dejan en blanco las preguntas del problema.

La segunda categoría de análisis es "*Explica la relación con operación*". Esta categoría engloba todas las representaciones externas que muestran la realización de alguna operación aritmética. Los razonamientos que se pueden inferir de este tipo de representación es que los niños se centran exclusivamente en la relación entre los números presentados en la situación, sin considerar que aluden a la diferencia entre las estaturas de los personajes del problema, en este sentido el signo de igualdad se concibe como un operador ya que separa los operadores de su resultado. La figura 35 es un ejemplo de las representaciones externas englobadas en esta categoría de análisis. La representación muestra el dibujo de tres niños de diferente tamaño con la leyenda el seis es más alto que el cuatro. De esta representación se infiere que los niños toman las cantidades de las diferencias que existen entre las cantidades como la información relevante para realizar la comparación entre las magnitudes, perdiendo de vista que dichas cantidades son la diferencia que existen entre las alturas de los personajes del problema. Al respecto *E* señala, *"fui haciendo del más grande al más pequeño. Tomás es más bajo que María y María es más baja que Lesli"*.

Esta categoría de análisis cuenta con dos representaciones externas elaboradas durante el *post test*.

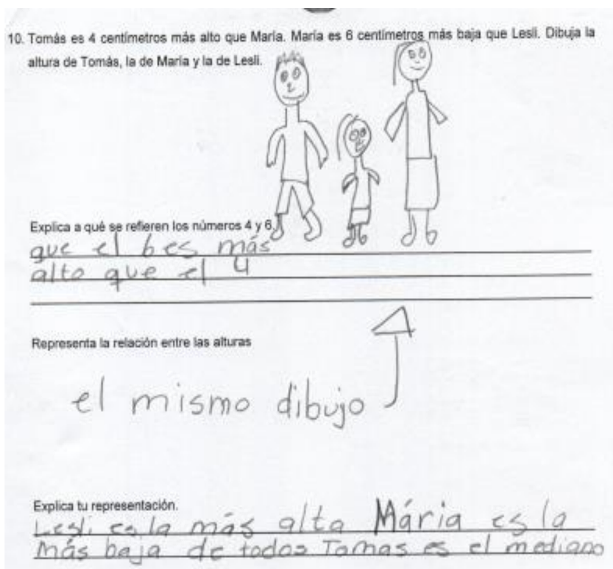


Fig.35 Ejemplo de representación externa englobada en la categoría de análisis explica la relación con operación elaborada ante el problema funcional con tres variables.

Las REs que se engloban en la categoría denominada "*Explica la relación sin operación*" muestran que los estudiantes lograron establecer una relación entre las alturas de los tres personajes sin necesidad de asignar una estatura determinada o sin retomar como altura la diferencia que existe entre ellas. Para ello, los niños consideraron los datos numéricos como el punto de referencia para decidir qué personaje es el más alto. Este tipo de representaciones permite deducir que los niños pueden dejar de operar con cantidades específicas, para comprender relaciones de comparación entre magnitudes no determinadas, en este sentido, la figura 36 muestra dos diferentes representaciones externas en las cuales se indica que *Lesli* es la más alta de los tres personajes del problema planteado y María la más pequeña (ver la representación que está a la izquierda de la figura), así como un abordaje lógico (ver representación que está a la derecha de la figura).

Es preciso mencionar que la estatura de *Lesli* únicamente puede ser obtenida al relacionar todas las diferencias entre las estaturas de los personajes del problema. Los niños, al poder mencionar que *Lesli* es la más alta de los tres personajes, muestran evidencia de un *pensamiento funcional* en el cual se relacionan dos variables. Al respecto *L* explica, los números 4 y 6 refieren *"a los centímetros más alto"*.

Esta categoría de análisis incrementa su frecuencia de ocurrencia de una representación externa en el *pretest* a nueve en el *post test*.

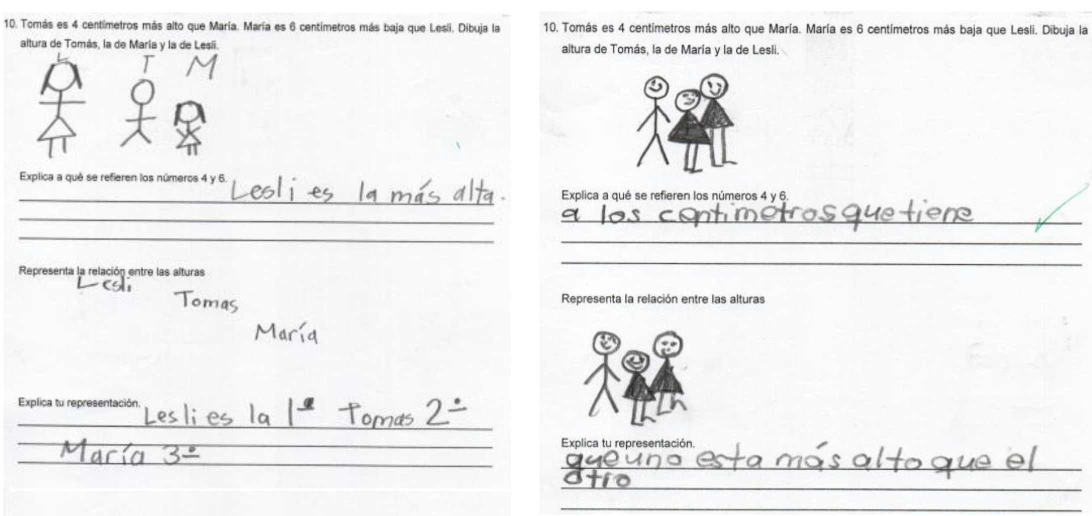
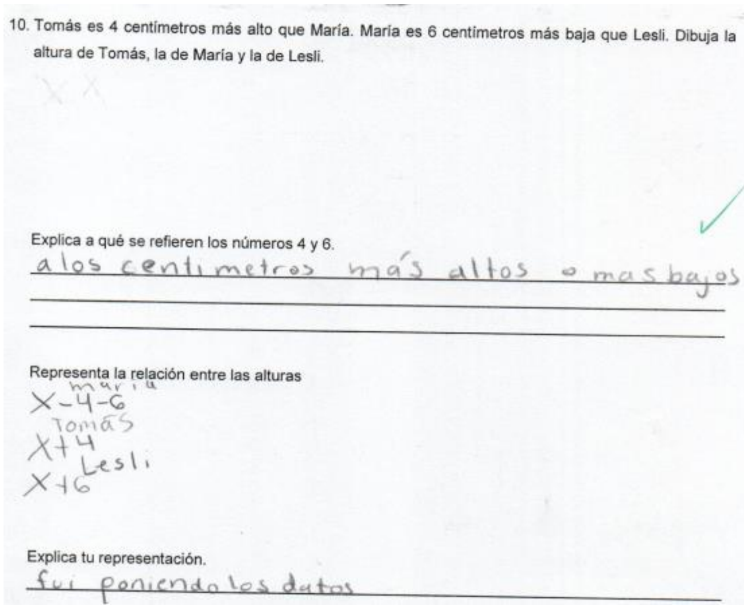


Fig.36 Ejemplo de representaciones externas de las cuales se infiere un razonamiento basado en las relaciones implicadas en el problema funcional con tres variables englobadas en la categoría explica la relación sin operación.

La categoría "*Introduce literales*" englobó tres representaciones externas que se elaboraron durante el *post test*. Este tipo de representaciones y los razonamientos que se pueden derivar de ellas se encuentra que estos estudiantes integran literales para denotar la estatura desconocida de los personajes del problema planteado. La incorporación de literales dentro de la *representación externa* es un cambio cualitativo importante en la comprensión de las relaciones implicadas en el problema, así como de las herramientas de análisis y representación de estas. Las literales relacionadas congruentemente con las relaciones implicadas en el problema muestran un desarrollo psicológico significativo en la incorporación, representación y comprensión tanto de problemas que incluyen variables como de la concepción y representación de las variables mismas.

En este sentido, la figura 37 muestra una de las representaciones externas englobadas en la categoría de análisis "*Introduce literales*". La figura muestra que la niña escribe el nombre de los tres personajes del problema matemático, la altura desconocida denotada con la literal "x" y los centímetros más o menos que establecen la diferencia entre las alturas indeterminadas de los tres personajes. Este tipo de representación, además de relacionar letras con signos y números, muestra que la estudiante deja de necesitar trabajas con operaciones cerradas, conformadas por los dos miembros de la ecuación, para comprender y trabajar con operaciones suspendidas las cuales no requieren de la estipulación de un resultado como parte de ellas (Rojano, comunicación personal 14 de marzo de 2019) (i.e. $8 + x = 32$; $x - 4 - 6 = 45$). La representación de las relaciones que se muestra en la figura coordina la relación inversa recíproca entre la suma y la resta, siendo correcta para generalizar tanto las relaciones como la misma representación externa a cualquier altura posible que tengan los personajes del problema.



10. Tomás es 4 centímetros más alto que María. María es 6 centímetros más baja que Lesli. Dibuja la altura de Tomás, la de María y la de Lesli.

Explica a qué se refieren los números 4 y 6.

a los centimetros más altos o mas bajos

Representa la relación entre las alturas

María
X-4-6
Tomás
X+4
Lesli
X+6

Explica tu representación.

fui poniendo los datos

Fig.37 Representación externa elaborada ante el problema pensamiento funcional con tres variables elaborada durante el post test, la cual muestra la relación de literales con signos y números, la cual permite inferir el trabajo con operaciones suspendidas, así como, la generalización de la representación.

16.4. *Síntesis de los resultados*

A continuación, se sintetizan los principales resultados obtenidos de la presente investigación. Se presentan, primero, los resultados estadísticamente significativos y se continúa con los resultados cualitativos.

16.4.1. Resultados estadísticamente significativos:

a) Existen diferencias estadísticamente significativas entre los dos diferentes momentos del estudio (*Pretest* y *Post test*) en lo que al desempeño general de los estudiantes refiere, lo que sugiere un efecto positivo de la *PPEPPA* sobre el desempeño correcto del grupo de tercer grado de primaria.

b) Existen diferencias estadísticamente significativas entre el desempeño correcto que muestra el grupo de tercer grado de primaria en los dos diferentes momentos del estudio (*Pretest* y *Post test*) en lo que refiere a los dos ejes algebraicos trabajados, a saber, A*ritmética Generalizada* (*AG*) y P*ensamiento Funcional* (*PF*), lo que sugiere un efecto positivo de la *PPEPPA*.

c) Existen diferencias estadísticamente significativas en el desempeño correcto mostrado por los estudiantes que conformaron el grupo ante problemas matemáticos de diferente eje algebraica y complejidad.

d) La mayor ganancia obtenida durante el *post test* se obtuvo ante los problemas que se denominó "*Ecuación Aritmética con Literal*" (*EAcX*) y "*Relación Funcional*" (*RF*), ambos con 48.1 por ciento de ganancia.

e) La menor ganancia obtenida durante el *post test* se obtuvo ante el problema matemático que se denominó "*Problema Funcional*" (*PF*) (11.11 por ciento de ganancia).

f) Existen diferencias estadísticamente significativas entre el tipo de *representación externa* (REs) que realizaron los estudiantes considerando los dos diferentes momentos del estudio y los dos ejes algebraicos (dominios).

g) La elaboración de representaciones externas (REs) favorece el desempeño correcto de los estudiantes que conformaron el grupo de tercer grado de primaria.

16.4.2. Principales resultados cualitativos

a) El problema matemático denominado "*Problema Funcional con Incógnita y Variable*" (*PFcIyV*) no fue comprendido por ninguno de los participantes en ninguna de las dos evaluaciones.

b) Las representaciones externas que conciben los elementos matemáticos de manera más amplia, así como las que incluyen literales se realizaron en el *post test*, con mayor frecuencia ante los problemas que involucran relaciones funcionales.

c) De la mayoría de las representaciones externas elaboradas en el *post test* se derivan razonamientos que infieren una comprensión relacional de los elementos implicados en los problemas.

d) En la mayoría de las representaciones externas elaboradas en el *post test* se infieren razonamientos de una comprensión del *signo de igualdad* como equivalencia.

e) Durante el post test, la mayoría de las representaciones externas elaboradas ante problemas que involucran cantidades indeterminadas incorporaron literales para señalar el o los elementos desconocidos.

f) El uso de números y operaciones numéricas decrementó paulatinamente en la medida en la que incrementó la complejidad funcional de las relaciones implicadas en los problemas. Mientras que para los primeros problemas correspondientes al eje algebraico *AG* la estrategia de contar u operar con cantidades determinadas es significativo y funcional para la comprensión y solución del problema, sin embargo, en los problemas del eje *PF* el efecto de dicha estrategia se desvanece llegando a ser completamente disfuncional.

g) Aunque los estudiantes emplearon dentro de sus representaciones externas elementos de lenguaje algebraico, tales como literales, el signo de igualdad como equivalencia, etc., la manipulación que se hace de dicha representación es puramente aritmética.

h) Aunque los niños emplean dentro de algunas de sus representaciones externas la literal "*x*" más de una vez, dentro de sus explicaciones se puede inferir que, aunque se señalice con la misma literal sí distinguen entre la noción de incógnita y variable.

i) Sólo una *representación externa* elaborada ante el "*problema funcional con tres variables*" (*PFc3*) durante el *post test* puede ser generalizable a cualquier caso posible.

17. Análisis de resultados

Los resultados hasta aquí descritos permiten sostener un efecto diferencial positivo de la secuencia instruccional denominada *Propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*) sobre el desempeño de los estudiantes mostrado al solucionar y representar problemas matemáticos de diferente complejidad matemática.

Los resultados permiten sostener que los niños tienen diferentes formas de relacionar los elementos implicados en las relaciones de los problemas. Esas relaciones se pueden clasificar con base en diferentes criterios, en la presente investigación se clasificaron atendiendo el tipo de representación externa, sus elementos y los razonamientos que se pueden derivar de ellas elaboradas por los niños al solucionar diferentes problemas, poniendo el énfasis en la noción del signo de igualdad y, en el uso y noción de literales.

Los datos permiten sostener que el efecto mostrado en la literatura empírica del área, en lo que refiere al beneficio que obtienen un pequeño grupo de estudiantes después de ser expuestos a una propuesta de promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*), se mantiene al considerar el grupo en su totalidad como unidad de análisis y al incorporar dos ejes algebraicos dentro de la propuesta instruccional, a saber, *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*).

En relación con la elaboración de representaciones externas y su uso como herramientas psicológicas (Vygotsky, 1991), así como el análisis en el proceso de promoción del desarrollo de esquemas (Ausubel, Novak y Hanesian, 1976; Piaget, 1969; Piaget y Cook, 1952), los resultados permiten sostener que la representación externa es una herramienta de análisis fundamental para el proceso de significación de las relaciones implicadas en los problemas, dicha herramienta permite, por un lado, que los niños plasmen su comprensión de las relaciones, pero por el otro, que piensen en las relaciones mismas, de esta forma, es una herramienta dinámica en constante modificación, aspecto que posibilita la promoción del desarrollo de los diferentes esquemas de pensamiento.

Se observó que los estudiantes realizaron diferentes REs, dentro de las cuales se pueden mencionar de manera general las descriptivas y las representativas (Schnotz, 2005), dentro de ellas se diferencian las iconográficas, las aritméticas, las algebraicas y las que mezclan elementos de las anteriores. La elaboración de diferentes representaciones - herramientas culturales - como lo señala Davydov (1966; 1995) y Freudenthal (1962; 1974), permite a los estudiantes la posibilidad de comprender y solucionar problemas de diferente y mayor desafío cognoscitivo, promoviendo con ello la flexibilidad en el pensamiento del niño.

Dentro de las estrategias de solución que emplearon los veintisiete estudiantes que conformaron el grupo se infiere, con base en las REs, que el cálculo de las cantidades determinadas, dadas dentro de las relaciones implicadas en el problema o asignadas por los niños, es una estrategia importante inicial para tomar conciencia de las relaciones implicadas y de la estructura del problema matemático. Conforme el estudiante se va enfrentando a situaciones similares o más complejas el uso de esta estrategia se va desvaneciendo. En este sentido, parece que la manipulación concreta de las relaciones es fundamental para la comprensión de relaciones con cantidades indeterminas y la generalización de éstas.

El aumento en el porcentaje de respuestas correctas (desempeño) del *pretest* al *post test* permite sostener que el grupo transitó de la categoría de análisis "*No respuesta*" a una de las otras tres categorías restantes, lo que implica no sólo una evolución en el conocimiento de los estudiantes, sino la compresión e incorporación de herramientas de análisis y representación como parte de su repertorio.

Sobre la incorporación de los dos ejes algebraicos (*AG* y *PF*) los resultados muestran que el grupo de estudiantes de tercer grado de primaria, cuentan con un espectro más amplio de conocimientos y herramientas que les permiten comprender las relaciones implicadas en problemas de diferente complejidad matemática. Gracias a la secuencia instruccional *PPEPPA*, los estudiantes significan e incorporan nuevos conocimientos y herramientas de análisis y representación, lo que favorece su desempeño durante la *PPEPPA* y en el *post test*.

Sobre la comprensión del *signo de igualdad*, los resultados sugieren que éste se concibe como operador con mayor frecuencia y facilidad cuando las relaciones implicadas en el problema son numéricas y específicas, este efecto se diluye poco a poco cuando las relaciones implicadas en el problema se establecen con cantidades inespecíficas, esto guarda relación con el tipo de *representación externa* y estrategia que emplean los estudiantes al comprender y solucionar los problemas que conformaron ambos ejes algebraicos trabajados (*AG* y *PF*).

Finalmente, en lo que refiere a la transferencia de representaciones, con base en los resultados, se puede sostener que los estudiantes no transfieren como tal la representación externa elaborada al comprender un determinado problema, lo que ellos trasfirieron fueron los conocimientos y las herramientas que forman parte de las diferentes representaciones externas. Esto posibilita la comprensión de relaciones cada vez más complejas, las cuales se fueron enunciando a lo largo de los problemas.

18. *Discusión*

El presente trabajo partió del supuesto que la exposición a una secuencia instruccional denominada *Propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico (PPEPPA*) que incluya más de un eje algebraico de los propuestos por Kaput (2008), influye en la comprensión, desempeño y representación de problemas matemáticos de diferente complejidad. Para evaluar empíricamente tal supuesto se planteó un estudio cuyo objetivo general fue, evaluar el efecto de una secuencia instruccional denominada propuesta *Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*) enfocada en los ejes algebraicos *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*) sobre el desempeño y las representaciones externas de un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria al comprender y solucionar diferentes problemas matemáticos. Teniendo como objetivos particulares:

- Evaluar el efecto de la *PPEPPA* sobre el porcentaje general de respuestas correctas del grupo de estudiantes.
- Evaluar el efecto de la *PPEPPA* sobre el porcentaje de respuestas correctas del grupo ante los dos ejes algebraicos que conformaron el estudio (*AG* y *PF*).
- Evaluar el efecto de la *PPEPPA* sobre el porcentaje de respuestas correctas del grupo ante los diferentes problemas que conformaron las evaluaciones.
- Analizar las *representaciones externas* (REs) elaboradas por el grupo ante los dos diferentes ejes algebraicos trabajados.
- Analizar las representaciones externas (REs) elaboradas por los niños que conformaron el grupo ante los problemas que conformaron las evaluaciones.

- Evaluar la transferencia de la *representación externa* y del razonamiento al solucionar problemas matemáticos de diferentes ejes algebraicos.

Los resultados generales sugieren que la exposición a la secuencia instruccional denominada *Propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*) afecta diferencialmente el desempeño del grupo en tareas matemáticas de diferente complejidad. Asimismo, se observó un efecto diferencial en el desempeño del grupo entre el eje algebraico *AG* y *PF,* efecto esperado por la naturaleza de las relaciones implicadas en cada uno de ellos.

La literatura de en promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*), con excepción de la investigación realizada por Blanton, et al. (2015), suele reportar estudios que tratan de forma independiente y aislada los tres ejes algebraicos propuestos por Kaput (2000; 20008), por lo que en el presente trabajo puso a prueba una secuencia instruccional que incorporó de manera explícita los ejes algebraicos *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*). Asimismo, la literatura reporta el mejor desempeño que obtuvieron algunos de los niños, lo que conlleva la ruptura del grupo total del cual forman parte, para subsanar esta limitante, el presente estudio consideró como unidad de análisis la totalidad del grupo (veintisiete estudiantes) de tercer grado de primaria, creyendo que es posible la escolarización del *PA*. Finalmente, la misma literatura, con la excepción de Blanton, et al. (2015) la cual reporta únicamente datos cuantitativos, realiza análisis meramente cualitativo con base en esto, este trabajo hace uso de los dos tipos de análisis de datos (cuantitativo y cualitativo) con la intención de brindar una comprensión y explicación más completa de trabajo que realizan los estudiantes de tercer grado al solucionar problemas matemáticos de diferente complejidad. Teniendo estas tres características presentes, en las secciones que siguen se discuten los hallazgos más relevantes de la investigación junto con algunos datos reportados en el área.

18.1.Desempeño del grupo ante el eje aritmética generalizada (AG)

El nivel de entrada mostrado ante el eje algebraico *AG* fue alto durante el *pretest*. El desempeño del grupo mejoró durante los siguientes dos momentos de la investigación. El desempeño inicial que mostró el grupo ante este eje algebraico se puede atribuir a la familiaridad de las relaciones implicadas en los problemas con las actividades cotidianas que se realizan dentro de las clases de matemáticas escolares, así como a la facilidad de operar y asignar cantidades determinadas a las relaciones implicadas. De aquí que la mayoría de las representaciones externas que muestran los niños que conformaron el grupo están englobadas en la categoría de análisis "*Explica la relación con operación*". Al respecto, Molina (2005, 2009) señala que los niños necesitan operar cantidades para comprender las relaciones carentes de especificación de cantidad o magnitud, esto es, los niños necesitan construir un referente concreto respecto de la relación con la que se está trabajando, para posteriormente tomar dicho referente como base en la construcción y evolución del conocimiento al comprender relaciones sin referentes numéricos concretos.

El trabajo que realizó el grupo con el segundo problema denominado "*Ecuación Aritmética con Incógnita*" (10 = __ + 4), en ninguna de las dos evaluaciones mostró una representación externa que presentara los elementos necesarios para ser agrupada en la categoría de análisis "*Explica la relación sin operación*", este dato se puede explicar atendiendo a las características mismas del problema, ya que la relación que se presenta guarda mayor relación con el algoritmo de la suma convencional, aspecto que dificulta que los niños dejen de realizar el cálculo para encontrar el valor de la incógnita solicitada. Este tipo de problemas y/o el tipo de enseñanza que se reproduce dentro de las aulas pueden ser un fuerte obstáculo en la promoción del PA o un aliado más, todo depende de la forma en la cual se trabaje con el problema.

El porcentaje de respuestas correctas que obtuvo el grupo ante el problema matemático "*Ecuación Aritmética con incógnita" (EAcI)* es mayor que el obtenido para el problema "*Ecuación Aritmética" (EA)*, segundo y primer problema respectivamente. Este dato no era esperado en tanto matemáticamente hablando la situación *EAcI* demanda conocimientos más complejos, ya que el niño que lo resuelve con una resta debe operar a partir de la relación inversa entre suma y resta y si lo resuelve con adición debe calcular el número faltante y darse cuenta de que sólo hay un número que establece y mantiene la equivalencia, mientras que en el problema *EA* el niño sólo necesita operar con el concepto de adición y de equivalencia de los miembros sin la necesidad de localizar un número que establezca y mantenga la equivalencia entre los miembros (*incógnita*). Es plausible que esto se debe a que en el problema *EA* predomina la idea estereotipada y errónea de que sólo se debe presentar una operación por resolver y un resultado, mientras que el formato del problema *EAcI* se apega más a la idea anterior, siendo con ello familiar, para el estudiante, la estructura; este aspecto puede estar diluyendo la complejidad matemática del problema.

El desempeño mostrado ante el problema "*Desigualdad"* se atribuye a tres diferentes aspectos. Primero, el problema matemático presenta una relación ilógica en términos de la vida diaria, aspecto que, en primera instancia, pudo llevar a los niños del grupo a rechazar la situación planteada en el problema. Segundo, los niños del grupo aceptaron como válida la situación narrada en el problema, pero deciden expresarla – modificarla - en términos posibles en la vida diaria, en este sentido, reconocen que para ser viable la relación entre los dos conjuntos (libros y niños) necesita haber correspondencia biunívoca, por lo que modifican las relaciones iniciales del problema razonando de manera inversa la situación (en lugar de siete libros y nueve niños, hay nueve libros y siete niños), razonamiento que los lleva a restar el número más pequeño al más grande. Este abordaje del problema ya ha sido descrito y presentado por Davydov (2000) y Schmittau (2005) los cuales sostienen que los niños tienden a modificar las relaciones implicadas en el problema con la intención de generar consonancia cognitiva con sus conocimientos. Otra forma de abordar el problema para establecer una relación matemática correcta es no modificar las relaciones enunciadas y calcular el faltante. En este abordaje los niños centran su atención en el número de libros que hacen falta (dos) o en el número de niños que se quedan sin libro (dos), de esta forma establecen la correspondencia a partir de la diferencia entre los dos conjuntos. Abordaje que, según Gallardo (2002) puede ser relacionado con una noción incipiente de número negativo; al respecto ella indica que, aunque no existe una representación formal del número negativo, cognitivamente hablando, la aceptación de la situación (a un número de menor valor se le resta uno de mayor), es un primer acercamiento a las situaciones matemáticas que lo ponen en juego.

Problemas como el denominado "*Desigualdad*" que demandan el uso y comprensión de relaciones que se pueden llegar a considerar como la incorporación incipiente de números negativos, es una propuesta diferente a la presentada por Carraher, Brizuela y Earnest (2001), en la cual se trabaja con los números negativos dentro de la recta numérica. Entendiéndolos como la cantidad de saltos o desplazamientos de un número o posición en la recta hacía la izquierda. La incorporación de problemas como el utilizado en la presente investigación permiten identificar y analizar las representaciones externas y los razonamientos derivados de ellas brindando con ello un mejor acercamiento a la comprensión de los estudiantes sobre la noción de número negativo.

En el caso del problema aritmético de combinación, la dificultad y diferenciación con los problemas típicos empleados en la enseñanza de la escuela primaria, se encuentra en el lugar que ocupa la incógnita, ya que ésta se ubica en el primer sumando (x+15 = 33), a diferencia de ubicarla en el total, como usualmente se presenta (18 + 15 = x), este aspecto hace más complicada la comprensión de las relaciones (Vergnaud, 2009), este efecto se disminuyó con la incorporación de representaciones externas como herramienta de análisis de las relaciones implicadas en el problema.

18.2.Desempeño de los participantes en el eje algebraico pensamiento funcional (PF)

El *PF* es considerado por algunos autores como la vía efectiva en la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) debido a su gran poder unificador de las matemáticas (Schwartz 1990) siendo éste la única vía para relacionar el contenido matemático en todos los niveles educativos (Kieran 2004, 2011). Sin embargo, considerar el *PF* como la única vía en la promoción del *PA* deja de lado toda la riqueza y los beneficios mostrados en el desempeño del grupo ante el eje algebraico *AG*. Aquí toma gran relevancia la distinción hecha por Kaput (2000; 2008) sobre el álgebra y el pensamiento algebraico, así como la propuesta de los ejes algebraicos (Kaput, 2008) y las grandes ideas (Blanton et al., 2015), por ello es por lo que se decidió trabajar con ambos ejes algebraicos.

El *Pensamiento Funcional* (*PF*) desarrolla la concepción de relaciones matemáticas y permite construir la transferencia y generalización de representaciones externas y razonamientos a diferentes problemas, ya que permite analizar y generalizar la identificación de patrones y de relaciones, identificar y analizar relaciones funcionales utilizando diversas herramientas lingüísticas, así como diferentes formas de representación en las que se explicita la comprensión (Blanton y Kaput, 2011), de aquí la importancia que ha tomado este eje algebraico.

Los desempeños mostrados por el grupo ante el eje algebraico *PF* al inicio de la investigación no superaron el 10%, sin embargo, a lo largo de los otros dos momentos que conformaron el estudio se observa como este desempeño mejora y se mantiene. Este desempeño general se puede atribuir a que los conceptos, relaciones y las tareas mismas englobadas dentro del eje *PF* no guardan ninguna relación con las tareas típicas y los conceptos que se presentan en la educación primaria, pero sí con la educación posterior. De aquí se deriva una de las principales razones de incorporar este tipo de actividades desde los primeros grados de enseñanza formal.

Dentro de las estrategias de solución que emplearon los veintisiete estudiantes que conformaron el grupo se infiere, con base en las representaciones externas, que el uso de cantidades determinadas y del cálculo de las mismas facilitó en primera instancia la comprensión de las relaciones implicadas en los problemas que se englobaron en el eje *PF*, sin embargo, las relaciones mismas facilitaron que el grupo fuera prescindiendo de dicha estrategia llegando a incorporar literales dentro de sus representaciones externas. La comprensión de las relaciones implicadas en este tipo de problemas es un salto cualitativo importante en el desarrollo psicológico y matemático de los niños (tómese como ejemplo la distinción entre incógnita y variable).

En lo que refiere específicamente al desempeño que se obtuvo ante el séptimo problema matemático denominado "*Problema Funcional con Incógnita y Variable*" (*PFcIyV*), es preciso mencionar que el problema presentó una gran demanda cognitiva para los estudiantes. Esto pudo deberse al gran número de relaciones que incluye (caramelos en cajas, caramelos en tubos y caramelos sueltos, sin olvidar la equivalencia entre el número de caramelos que tienen ambas protagonistas del problema, más la incógnita del número de caramelos dentro del tubo) enmarcadas todas en una relación de equivalencia entre los dos personajes del problema (Lucero y Susana tienen la misma cantidad de dulces). Aunque esta situación se consideró como una opción viable para incorporarla dentro de las evaluaciones, los datos sugieren que el análisis y comprensión del problema merecen mayor atención e intercambio de representaciones e ideas, por esto se considera y recomienda el abordaje de este problema dentro de una secuencia instruccional, de esta forma se podrá conversar sobre las concepciones, identificarán obstáculos y se trabajarán en ellos. Asimismo, se analizarán las diferentes relaciones que lo conforman y se compartirán todas las representaciones externas analizando ventajas y generalidades sobre una y otra.

Es importante recalcar el papel funcional de las representaciones externas en la comprensión de las relaciones implicadas en los diferentes problemas funcional, éstas son una herramienta psicológica clave para su comprensión, en la sección "El papel de las representaciones externas en el análisis y comprensión de las situaciones matemáticas" se aborda más esta idea.

Con excepción de una sola representación, las representaciones externas que realizan los niños del grupo no llegan a la generalización de las relaciones funcionales implicadas en los cinco diferentes problemas matemáticos que se englobaron en el eje algebraico *PF*, a pesar de esto, el trabajo que mostraron los estudiantes es de suma importancia ya que identifican los aspectos importantes dentro de toda la narración y relacionarlos con los conocimientos que tienen, centrando en una amplia gama de representaciones su análisis en las diferentes relaciones implicadas y presentadas en los diferentes problemas.

Con base en los resultados se puede sostener que los niños que conformaron el grupo del presente estudio realizaron representaciones externas razonando sobre relaciones entre cantidades que covarían de diferente manera, describiendo con palabras la relación identificada, llegando a incluir dentro de sus representaciones algún sistema de convención matemático (i.e. aritmético, algebraico).

18.3.Sobre la concepción de igualdad

Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria suele promover que los niños identifiquen el *signo de igualdad* como un operador, es decir, como la señal que indica realizar las operaciones ubicadas a la izquierda del signo, para poner el resultado del lado derecho de este. Esta comprensión del signo de igualdad dificulta aceptar, incorporar y matematizar una amplia gama de problemas matemáticos importantes y potenciadores del razonamiento matemático en el aprendizaje matemático escolar (i.e. 57 + 22 = 58 + 21, 10 = ___ + 4, X = 3 + 6). Los datos presentados permiten sostener que, con un diseño instruccional enfocado en la promoción de la comprensión amplia y profunda del *signo de igualdad*, los niños, desde el inicio de su educación formal, pueden exponerse a una educación con comprensión de los conceptos, relaciones y procedimientos, la cual marque una relación directa y explicita entre las diferentes áreas temáticas de las matemáticas (i.e. aritmética y álgebra). Esta forma de ver el proceso de enseñan y aprendizaje de las matemáticas rompe el paradigma reduccionista dominante en la educación matemática que se lleva a cabo en la educación primaria en México, el cual se basa en rutinas y repeticiones mecanizadas de procesos.

En los problemas matemáticos que conformaron el eje algebraico *AG* se favoreció la exploración del *signo de igualdad* como la representación de una relación equivalente entre dos expresiones (i.e. 57 + 22 = 58 + 21), así como la interpretación bidireccional de la igualdad y de las diferentes expresiones (i.e. $x = 3 + 6$), esto es, las diferentes expresiones matemáticas tienen la ventaje de leerse de izquierda a derecha como de derecha a izquierda (bidireccionalidad), especto que no se trabaja ni explicita en la educación matemática. La bidireccionalidad en matemáticas permite trabajar con expresiones que presentan operaciones del lado derecho del *signo de igualdad*, con expresiones que muestran operaciones en ambos lados del *signo de igualdad* o con expresiones que carecen de elementos en alguno o los dos miembros que la componen. Al respecto, Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) señalan que los niños que no han entendido la relación de equivalencia del *signo de igualdad* rechazan el tipo de expresiones antes mencionadas.

El abordaje que realizaron los estudiantes al problema matemático denominado *Desigualdad*, da evidencia del salto cualitativo en la comprensión que desarrollaron los participantes después de ser expuestos a la secuencia instruccional *PPEPPA*; al comprender que una parte de la resta, en este caso el sustraendo, es mayor que el minuendo (hay siete libros y nueve niños toman un libro cada uno) y referir dicha comprensión como la falta de dos libros o como que dos niños se quedan sin libro, se evidencia la comprensión de la igualdad como un símbolo que establece un tipo de relación distinto al operacional. Este hecho se sustenta en representaciones externas elaborados por algunos de los niños que conformaron el grupo del estudio y en los razonamientos que se derivan de ellas.

18.4.Respecto al uso y concepción de literales

La comprensión y uso de literales es un aspecto fundamental en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Esta práctica se debe a que el álgebra se centra en la solución de ecuaciones y en la capacidad para describir relaciones de manera sintética y general, haciendo uso progresivo de las reglas y principios que rigen la formación y el tratamiento de los diferentes sistemas de símbolos (Kaput, 2008). La exposición, incorporación y uso de literales, desde los primeros años de educación formal, como herramientas de análisis y representación es un aspecto importante en la promoción del *PA*.

La presente investigación arroja evidencia sobre la comprensión y el uso de literales al abordar problemas matemáticos derivados de los ejes algebraicos *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*), cada problema con diferente nivel de complejidad. Con base en los resultados se pueden sostener dos consistencias. Primera, la secuencia instruccional *PPEPPA* favoreció, en algunos estudiantes, la comprensión y uso efectivo de la *literal* "*x*" en diferentes situaciones matemáticas dejando pendiente la identificación de las características individuales que presentan esos niños. Segunda, la comprensión de la *literal* evolucionó conforme evolucionó la comprensión de las relaciones implicadas en los diferentes problemas, es decir, cuando las relaciones implicadas establecen una relación con incógnitas, los niños emplean la literal "*x"* para denotar la *incógnita* y su relación con los otros elementos que conforman el problema, esto dentro de su representación externa. En los casos en los cuales las relaciones implicadas en el problema establecen una relación con variables, los niños emplean la misma literal "*x"* para denotar que en este caso es una variable relacionándose con los otros elementos implicados en el problema. Esta misma diferenciación se mantiene cuando las relaciones implicadas en los problemas juntan incógnitas y variable, ya que los estudiantes emplean la misma literal "*x"* para denotarlas dejando ver que, a pesar de usar la misma herramienta diferencian unas de las otras. Esta "confusión" o "error", matemáticamente hablando, puede ser el resultado de presentar y trabajar de manera explícita durante la *PPEPPA* con dicha literal.

La confusión o error matemático de usar la misma literal para denotar diferentes elementos matemáticos dentro de las representaciones externas (incógnitas y literales) se debe al aspecto sintáctico del álgebra, esto es, si se siguen las reglas de uso y manipulación de las expresiones matemáticas la sustitución de esta literal tiene que ser un único valor; de esta forma la misma literal representa el mismo objeto dentro de la expresión matemática. Sin embargo, desde el punto de vista del desarrollo psicológico, el abordaje que realizaron los niños muestra una clara evolución en la comprensión de los dos conceptos matemáticos en cuestión, así como de las relaciones que los acompañan. Este dato pone el foco en el desarrollo de secuencias instruccionales que incorporen diferentes literales como herramientas de análisis y representación.

Es interesante observar cómo algunos estudiantes tratan de hacer clara la diferenciación del significado de la "*X*" dentro de sus representaciones externas (REs). La figura 38 muestra algunas REs elaboradas en el análisis de problemas pertenecientes al eje algebraico *PF* que incorporan más de dos incógnitas o variables dentro de sus relaciones. Dentro de las REs los estudiantes utilizaron la literal "*X*" para denotar cada uno de los elementos desconocidos, sin embargo, manifestaron la necesidad de diferenciarla mediante la incorporación de otra literal, de esta forma cada "*X*" que formó parte de dicahs REs presentaron un sufijo que la diferenció de las demás. El sufijo fue designado por los estudiantes con base en el nombre de los objetos que enunciaba dicho elemento del problema (letra inicial de cada objeto). En este sentido, la figura 38 muestra tres diferentes REs, cada una delimitada por un color diferente. Al respecto los niños comentaron: "*resulta confuso trabajar con la misma letra, parece la familia de las equis*".

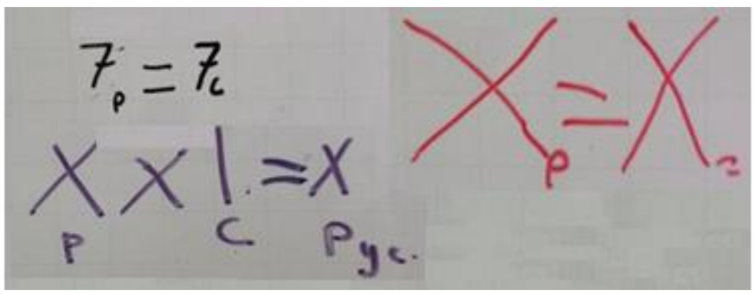


Fig.38: Ejemplos de representaciones externas obtenidas durante la *PPEPPA* que muestran el uso de la literal x diferenciado por sufijos.

La elaboración de este tipo de REs, así como la necesidad de diferenciar el uso de la literal "X" junto como los razonamientos que las acompañan no ha sido reportado por la literatura del área enfocada en la promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*), en este sentido, este tipo de problemas puede ser la clave y/o base para la promoción "natural" de la comprensión y uso de diferentes literales en el abordaje de problemas que implican más de una incógnita o variable como parte de sus relaciones implicadas.

18.5. *Sobre la identificación de las relaciones implicadas en los problemas*

La literatura del área enfocada en la promoción del *PA* tiene una línea que se enfoca en la promoción del *Pensamiento Relacional* (*PR*), de ella se puede decir que el *PR* refiere al reconocimiento y uso de relaciones entre los elementos de expresiones numéricas, no numéricas, algebraicas y de propiedades fundamentales de las operaciones (Molina, 2011). El *PR* promueve la comprensión de las expresiones como totalidades, para posteriormente analizarlas identificando relaciones, para finalmente construir una estrategia de solución genérica. Este tipo de pensamiento se torna relevante, si se consideran los tres siguientes aspectos. Primero, el *PR* está inmerso en los cuatro ejes algebraicos propuestos por Kaput (2000, 2008) y en las cinco grandes ideas propuestas por Blanton et al. (2015). Segundo, el *PR* permite explorar la estructura de las expresiones aritméticas y algebraicas (Molina, 2009). Tercero, el *PR* permite ampliar el concepto de enseñanza matemática actual, el cual suele centrarse en usar algoritmos sin analizar las relaciones implicadas en los problemas.

Independientemente de la separación o no del *PR* como único centro de interés, si las actividades aritméticas estuvieran desarrolladas teniendo en mente el *PR* se promovería un cambio fundamental de la comprensión y concepción aritmética de los estudiantes (procedimental, centrada en el cálculo con número específicos sin el análisis de las relaciones), transitando a un entendimiento de relaciones entre los elementos que estipulan en el problema. El entendimiento y uso del *PR* contribuye a la identificación de relaciones y favorece el aprendizaje significativo de la matemática y la adquisición de una base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al., 2003; Molina, 2009).

El uso del lenguaje matemático horizontal, empleado en las investigaciones englobadas en el *PF*, así como en la *PPEPPA*, junto con el análisis relacional de los elementos implicados en los problemas y la promoción de la comprensión de equivalencia del signo de igualdad y de las diferentes representaciones externas, parecen ser el "puente" entre los conceptos fundamentales del eje algebraico *Aritmética Generalizada* (*AG*) (i.e. el trabajo con cantidades determinadas) y los que se requieren para comprender las relaciones implicadas en los problemas que involucran el *Pensamiento Funcional* (*PF*) (i.e. trabajo con cantidades indeterminadas). Este supuesto se basa en que la diferencia principal entre ambos ejes radica en la incorporación de cantidades determinadas o indeterminadas, así como en la incorporación de la noción de incógnitas o variables.

Al respecto Mason (1999) señala que brindar a los estudiantes de educación básica la oportunidad de tener una historia en detectar y expresar patrones y generalidades los dotará de habilidades para expresar, manipular y desarrollar generalidades. En este sentido, promover una historia previa positiva, de éxitos enmarcada en la comprensión de las relaciones, el estudiante tendrá una mejor autoeficacia percibida (Bandura, 1995) y por ende un mejor desempeño al trabajar con el álgebra en los niveles educativos siguientes.

18.6.El papel de las representaciones externas en el análisis y comprensión de los problemas

El papel de la *representación externa* en el proceso de comprensión y solución de problemas es de suma importancia ya que muestra el uso que hacen los estudiantes de diferentes instrumentos – herramientas – sociales en su proceso de mediación (Vygotsky, 1980, 2009). El uso de dichos instrumentos (*símbolos* y herramientas) para dar solución a los diferentes problemas es la muestra de la de la interiorización de esos instrumentos sociales, siguiendo a Vygotsky este es en sí mismo un acto de pensamiento como proceso psicológico superior. Con base en esto y manteniendo la postura teórica adoptada, el presente trabajo sostiene que la *representación externa* es una herramienta elaborada por los estudiantes, la cual permite plasmar los conocimientos matemáticos, mediar la comprensión de las relaciones implicadas y al mismo tiempo mediar la acción que el niño lleva a cabo en el proceso de comprensión y solución del problema. Este proceso es dinámico y activo, ya que conforme el niño plasma la relación haciendo uso de sus conocimientos va pensando en el problema mismo, lo que a su vez modifica dicha representación, tomando con el ello el papel de mutua afectación.

Conforme los niños van comprendiendo e incorporando diferentes sistemas de representación y comprensión simbólicos, se reducen la necesidad de manipular objetos reales, lo que posibilita el uso de cantidades indeterminadas como parte de las representaciones externas, lo que les permite construir esquemas que expresan las acciones matemáticas en las que participan (Schmittau, 2005, Vergnaud, 2009).

Los resultados permiten sostener que, el trabajo que se realizó durante la *PPEPPA* permitió que el grupo utilizara herramientas (instrumentos sociales) correspondientes a diferentes áreas matemáticas (i.e. aritmética y álgebra), lo que posibilitó un conocimiento por medio de la acción de los medios simbólicos mismos (Bruner, 1960), esto se evidencia en las diferentes representaciones externas que realizaron los estudiantes, las cuales muestran la incorporación de diferentes elementos matemáticos (i.e. lenguaje numérico, iconográfico, aritmético, algebraico, entre otros).

Se observó que varios niños comprendieron las relaciones implicadas en los diferentes problemas matemáticos que se presentaron a lo largo del estudio, así como las relaciones generales implicadas en cada eje algebraico abordado. Sin embargo, no todos los niños lograron construir una representación algebraica, es decir, no todos los niños incorporaron literales a sus representaciones externas ni dejaron ver una comprensión de las variables. Con los datos que arrojó esta investigación se puede sostener que los niños que conformaron el grupo realizaron una amplia gama de representaciones externas, las cuales se encuentran las icónicas representativas, las aritméticas descriptivas y algunas que agregaron letras a las dos anteriores mezclando con ellos elementos de diferente tipo. Estas representaciones aportan evidencia empírica sobre el uso de la representación externa como herramientas psicológicas de análisis y comprensión de las relaciones implicadas en los diferentes problemas. Sin embargo, es preciso señalar que la mera incorporación de literales a las diferentes representaciones externas no implica, necesariamente, que los niños comprenden el concepto de variable, variación o covariación, así como, el no usar literales tampoco implica en sí mismo la falta de comprensión de dichos conceptos matemáticos.

Las diferentes representaciones externas que realizaron los estudiantes al comprender y solucionar los problemas permiten sostener que hay una diferencia entre comprender las relaciones implicadas en los problemas matemáticos y saber expresarlas de forma algebraica. La traducción de las relaciones implicadas del contexto narrativo a una expresión matemática demanda un cierto dominio de diferentes símbolos y conceptos; una vez realizada la traducción, ésta sintetiza y abstrae las relaciones, pudiendo llegar a expresar una generalización de las relaciones implicadas en el problema. Este último aspecto es el que permitiría poder analizar de una forma distinta la comprensión de los conceptos de variable, variación y covariación esenciales en el dominio algebraico. En resumen, aunque un niño pueda identificar y verbalizar la relación o relaciones de manera algebraica, no implica que plasmará eso en una representación externa ni mucho menos que comprenda los conceptos matemáticos antes mencionados, siendo este aspecto el máximo reto que sigue presentando esta área de investigación.

Este último punto pone de manifiesto lo señalado por Mason, Graham, Pimm y Gover (1988) referente a que el álgebra está presente en las diferentes comprensiones y representaciones externas que se elaboran. Todas estas diferentes representaciones naturales o intuitivas (i.e. iconográficas o aritméticas) tienen un papel importante en el desarrollo del lenguaje matemático inclusivo ya que, con base en los resultados, parecen que son los cimientos en los cuales se basa el aprendizaje y comprensión algebraica, en este sentido, es importante aceptar y validar las diferentes representaciones externas que elaboran los estudiantes ya que parecen que son el puente entre ambas áreas matemáticas.

En esta investigación arroja evidencia que permite sostener que identificar, comprender y representar externamente relaciones funcionales, son acciones muy diferentes a la formalización matemática de las mismas, ya que el último punto demanda el conocimiento de los criterios convencionales matemáticos (aspecto sintáctico). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe valor del desempeño de los niños en el tránsito por las diferentes representaciones externas, así como en el tránsito de los diferentes dominios matemáticos.

La literatura del área no cuenta con investigaciones enfocadas en el análisis de las representaciones externas que realizan los estudiantes al comprender y solucionar diferentes problemas matemáticos, por lo que los resultados obtenidos en el presente estudio representan un esfuerzo sistemático por analizar las diferentes representaciones externas que realizó un grupo de tercer grado e identificar los conocimientos que se derivan de ellas al trabajar con problemas matemáticos de diferente complejidad. Asimismo, el sistema de análisis de dichas representaciones que se presentó y desarrolló en esta investigación representa un acercamiento psicológico al proceso de desarrollo de la comprensión y uso de diferentes conceptos y elementos de dominios matemáticos diferentes.

Para finalizar esta sección a continuación se mencionan algunos beneficios que presentan las representaciones externas para los docentes. La representación externa que elaboran los estudiantes al trabajar con problemas permite identificar y analizar los conceptos, conocimientos y herramientas que usan, de las cuales se pueden derivar ciertas interpretaciones, por ejemplo, errores y limitaciones. Dichas interpretaciones pueden ser retomadas por los docentes con la intención de generar estrategias diferenciales de apoyo y soporte para cada estudiante.

18.7.Tareas pendientes

Con base en los hallazgos obtenidos de la presente investigación, el procedimiento empleado y las limitaciones metodológicas señaladas, a continuación, se presenta una serie de posibles tareas pendientes por realizar en el área de investigación.

En primer lugar, considerando el efecto positivo observado de la secuencia instruccional denominada *Propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*), valdría la pena evaluar el efecto de incorporar, formalmente, los tres ejes algebraicos, cuidando el análisis de los datos al interior de cada eje algebraico, así como su interacción y la posible transferencia al interior de éstos (intra eje) y entre ellos (entre ejes).

Considerando la interacción entre la *representación externa* y la comprensión de los diferentes problemas matemáticos, resulta relevante evaluar el efecto de Secuencias Instruccionales que promuevan la comprensión de problemas matemáticos que consideren la introducción explícita de elementos formales y convencionales, retomando el aspecto sintáctico del álgebra, evaluando los efectos diferencias con otras propuestas instruccionales, señalando las ventajas, los obstáculos o diferencias este las secuencias instruccionales que permiten un abordaje "natural", intuitivo y espontáneo sobre uno convencional.

En adición al punto anterior y con base en los resultados obtenidos, se identifica la necesidad de evaluar el desempeño que muestran los niños al trabajar con problemas que dificultan o incluso impiden un abordaje numérico, es decir que impiden realizar operaciones aritméticas con las relaciones del problema, esto con la intención de poder identificar los recursos en los cuales se apoyan los estudiantes cuando el conocimiento numérico es prácticamente inoperable. Así como, la identificación de las ventajas y desventajas, tanto a nivel cognitivo como disciplinar, que presenta el desarrollo e implementación de este tipo de propuestas instruccionales.

Otro aspecto que se hace necesario indagar es el referente a las características individuales de los niños, esto es, hasta ahora sabemos que los niños pueden comprender de diferente manera problemas que establecen relaciones algebraicas y funcionales; sabemos que las representaciones externas tienen un papel importante dentro del proceso de comprensión, siendo un instrumento activo de pensamiento; también sabemos que las representaciones externas se modifican y complejizan en función de las relaciones que explicitan los problemas, asimismo, sabes que no se transfieren las representaciones entre los problemas, sino los elementos y herramientas de análisis que las componen. Sin embargo, no tenemos información sobre las características que presentan los estudiantes que realizan uno u otro tipo de representación, ni sobre los conocimientos de otros dominios que se ponen en juego al comprender este tipo de problemas. La exploración de estos y otros aspectos permitirá tener una mejor comprensión del proceso de aprendizaje del álgebra.

La promoción del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) abre una línea de investigación de gran riqueza, debido a la variedad de cuestiones que aún faltan por explorar, algunas de ellas ya se mencionaron a lo largo de esta sección, además de esas se mencionan las siguientes: integración del *álgebra* en el currículo de educación primaria, la influencia de este cambio curricular en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, seguimiento del desarrollo de los estudiantes a lo largo de diferentes años e incluso niveles educativos (i.e. primaria y secundaria, kínder y primaria, etc.), formación de docentes de educación primaria, así como el análisis cruzado entre la formación del docente en la promoción del *PA* y el desempeño que muestran sus estudiantes. Estos son sólo algunas de las áreas que aún están pendientes de análisis, por lo anterior hay un potencial de esta área de investigación.

18.8.Implicaciones teóricas

El presente trabajo parte de una propuesta de investigación educativa sobre la promoción del *PA* (Kaput, 2000; 2008; Blanton et al., 2015) y del papel funcional que juega la *representación externa* (Piaget; Paiget y Cook, 1952; Vygotsky, 1991). El área de investigación en la promoción del *PA* se caracteriza por considerar que el álgebra debe ser un aprendizaje transversal en todos los niveles educativos, ya que aumentar la comprensión de los conceptos algebraicos, aumenta la probabilidad de éxito en el estudio de las matemáticas avanzadas y en el desarrollo profundo del pensamiento algebraico.

Dentro de la propuesta realizada por Kaput (2000; 2008) se encuentran los ejes algebraicos de construcción de generalizaciones de la aritmética y el razonamiento cuantitativo, generalizar hacia la idea de función y el modelado como una actividad algebraica y dentro de las grandes ideas propuestas por Blanton et al. (2015) se encuentra la *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*). Es justamente, en estos temas algebraicos, en los que se circunscribe el presente trabajo. Al respecto, la presente investigación es un esfuerzo por ampliar y relacionar los resultados reportados en el área, por ello se relacionaron de manera intencional dos diferentes ejes algebraicos dentro de la misma secuencia instruccional, fortaleciendo con ello el cuerpo empírico. Dicho esfuerzo responde a lo señalado por Blanton et al. (2015), referente a la segmentación del cuerpo empírico que presenta el área de investigación en la promoción del *PA*, teniendo este aspecto en mente, se decidió realizar un estudio que arroje evidencia empírica para robustecer el área de investigación.

El presente trabajo rompe con la "tradición" del área en promoción del pensamiento algebraico en lo que refiere al análisis cualitativo del desempeño que tienen algunos estudiantes seleccionados de forma intencional por los investigadores; en este sentido, la *PPEPPA* aquí presentada es una forma mediante la cual se puede escolarizar la promoción del *PA* considerando como unidad de análisis todo el grupo de estudiantes. Adicionalmente, retoma dentro de su metodología los dos principales enfoques de la investigación, a saber, cualitativo y cuantitativo con la finalidad de tener una mejor comprensión del desempeño de los estudiantes. La *PPEPPA* es un esfuerzo que integra dos ejes algebraicos propuestos por Kaput (2008), así como un intento por llevar a todo el grupo de estudiantes a explicitar mediante su representación externa, los conceptos y símbolos con los que piensan en cada uno de los problemas. Los análisis presentados complementan la información obtenida permitiendo generar un mejor acercamiento al proceso de desarrollo del *PA*. Con esto se trató de subsanar una limitante reportada en Blanton et al. (2015) referente a la naturaleza del análisis de sus datos cuantitativos, ya que dicho análisis no capturó cómo los estudiantes piensan sobre los conceptos tratados en la propuesta. En este sentido, se trató de evidenciar el desarrollo del *Pensamiento Algebraico* (*PA*) a partir de las representaciones externas de los estudiantes.

Por otra parte, el presente trabajo aporta evidencia empírica sobre la riqueza de integrar problemas derivados de diferentes ejes algebraicos. Al respecto Mason, Graham, Pimm y Gowar (1988), Kaput (2000, 2008) y Blanton et al. (2015) señalan que la promoción del *Pensamiento Algebraico (PA)* se puede promover a través de diferentes formas, rutas, ejes o grandes ideas, el aspecto que importa y que es el común denominador entre todos estos autores es el objetivo de integrar el álgebra con la aritmética desde los primeros niveles de educación formal. Concebir como único eje o eje prototipo para la promoción del *PA* el *Pensamiento Funcional* (*PF*) reduciría la riqueza del *PA*. Pensar en el *PF* como el único eje algebraico que promueve el *Pensamiento Algebraico* (*PA*) es igual a decir que el álgebra únicamente consiste en la manipulación de ecuaciones (Lins y Kaput, 2004).

La integración de diferentes ejes algebraicos permite desarrollar una base sólida en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dar tiempo para el desarrollo prolongado y progresivo de los diferentes modos de pensamiento y la comprensión profunda de las relaciones matemáticas implicadas en los problemas.

La clasificación de las representaciones externas, así como el sistema de análisis de las mismas, que se presentó y desarrollo en esta investigación es un esfuerzo identificar el rol que tienen sobre el proceso de construcción del conocimiento, así como por diferenciarlas psicológicamente hablando, es decir, en términos de los conocimientos, relaciones y procesos que ponen en juego los estudiantes mientras las plasman.

18.9.Implicaciones educativas

Una de las metas de toda investigación, aunque pocas veces se haga explícita, es que la investigación sea importante, o más propiamente, exportable a condiciones y contextos que trasciendan la situación concreta en la que se origina la investigación. Dado el objeto de estudio del presente trabajo – promoción del pensamiento algebraico -, el ámbito, en el que, de manera directa e inmediata, se pueden exportar sus hallazgos, es el ámbito educativo. En este ámbito, parece haber un acuerdo respecto a la relevancia del buen desempeño en el ámbito matemático en educación básica para aumentar la probabilidad de éxito de los estudiantes en el estudio de las matemáticas avanzadas. Dado lo anterior, se han realizado innumerables esfuerzos, desde diversas disciplinas (i.e. educación matemática, didáctica de la matemática, pedagogía, sociología, lingüística, psicología), por analizar y comprender los procesos implicados en el aprendizaje de las matemáticas, así como, en el desarrollo de estrategias que promuevan una mejor comprensión y un mejor aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, es pertinente hacer la siguiente pregunta, ¿qué se debe hacer para mejorar la comprensión matemática de los estudiantes? La respuesta, aunque a primera vista parezca evasiva, es: depende. Si lo que se requiere es que el niño identifique la información numérica sin detenerse a pensar si es relevante o no y realice operaciones con ella, lo recomendable es continuar con la enseñanza matemática que actualmente se lleva a cabo dentro de las aulas. Por otra parte, si lo que se espera es que el niño ubique las relaciones implicadas en el problema, que las relacione congruentemente con base en lo implicado, que realice una representación externa que le facilite la comprensión y solución empleando diferentes sistemas convencionales lo recomendable es que el niño sea expuesto a una enseñanza similar a la aquí reportada.

La secuencia instruccional denominada *Propuesta Psico-Educativa en Promoción del Pensamiento Algebraico* (*PPEPPA*) que se llevó a cabo en esta investigación integra, intencionalmente, prácticas algebraicas a través de diferentes dominios conceptuales que son importantes para la promoción del *PA*. La integración de dichas prácticas algebraicas construye conexiones matemáticas de diferente tipo, tanto en contenido como en complejidad. Esta secuencia instruccional puede ser retomada y/o modificada por los docentes y puesta en marcha dentro de su salón de clases, ya que los datos muestran que es accesible a diferentes niveles de pensamiento.

En lo que refiere específicamente al tipo de problemas matemáticos que conforman los dos ejes algebraicos trabajados *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional (PF*), se debe tener presente que las situaciones matemáticas correspondientes al eje algebraico *AG* guardan mayor relación con las tareas prototípicas de la enseñanza en la primaria. Lo que cambia es el enfoque, el análisis y representación que se realiza del problema y con ello la comprensión de las relaciones implicadas en los problemas. A diferencia de lo que pasa con las situaciones del eje algebraico *AG*, los problemas que se engloban en el eje algebraico *PF* requiere formas de razonamientos distintas, tanto para el profesor como para los estudiantes. Con base en lo anterior, se puede sostener que, aunque el eje algebraico *AG* es más fácil de incluir dentro de las prácticas educativas diarias, se recomienda tener siempre presente qué formas de pensamiento o conocimientos son más accesibles a los estudiantes y de qué manera me sirven para promover el desarrollo del *PA* en los estudiantes.

Los datos dejan ver que a pesar de que la *PPEPPA* no fue diseñada en comprender y analizar, de manera explícita, situaciones aritméticas de combinación de forma algebraica, hay un impacto positivo en la comprensión y solución de este tipo de problemas. Este dato permite suponer que resulta más conveniente, en cuanto a aprendizaje, comprensión y transferencia de conocimiento refiere, implementar estrategias de enseñanza basadas en la promoción del *PA* que prevén un impacto longitudinal en el proceso de enseñanza y aprendizaje que, que enfocar la enseñanza en la sola comprensión de relaciones aritméticas, las cuales son funcionales para un reducido grupo de problemas.

El análisis grupal de los problemas que se incluyeron en la *PPEPPA*, así como la puesta en común de todas las representaciones junto con las diferentes herramientas de mediación permitieron potenciar la actividad psicológica de todos los niños que participaron en el estudio. En este sentido, Vygotsky (1999) señaló que la zona de desarrollo próximo es un concepto que refiere al conocimiento y habilidades que aún no han sido desarrolladas de forma autónoma, pero que pueden ser aprendidas con la mediación de otros. Desde esta perspectiva teórica, se torna relevante el aspecto social ya que en tanto se habla y discute sobre el tema a aprender, se obliga al estudiante a expandir sus estructuras cognoscitivas. La necesidad de comunicar sus ideas genera una articulación con mayor claridad, lo cual puede llevar a nuevas conexiones y por ende al desarrollo psicológico, en este sentido, tanto las representaciones elaboradas como el análisis de los problemas, tanto en diadas como de manera grupal, contribuyeron al desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas. Los estudiantes mostraron un cambio conceptual en la comprensión de diferentes situaciones tanto matemáticas como cotidianas. Con base en los resultados y en lo señalado por Vygotsky (1980; 2009) se puede sostener que los procesos cognitivos no se reducen a la actividad intra-sujeto, sino que ésta se potencia gracias a la interacción con otros elementos.

El desempeño mostrado por el grupo de estudiantes, así como sus diferentes abordajes son razones suficientes para seguir diseñando y aplicando secuencias instruccionales que promuevan el desarrollo del pensamiento crítico y analítico de todo el grupo de estudiantes de educación primaria. Esta investigación muestra que la escolarización del *PA* es igualmente posible que el trabajo con grupos pequeños de estudiantes.

18.10. Consideraciones finales

Las representaciones externas que realizaron los estudiantes fueron una herramienta de mediación entre el lenguaje natural y la notación simbólica, así como entre la comprensión y solución de las relaciones implicadas en los problemas, de aquí que sean de suma importancia en el proceso de comprensión y promoción del pensamiento (Vygotsky, 1980; 2009).

La elaboración de diferentes representaciones externas, para la promoción del *PA* promueve la flexibilidad de pensamiento en los estudiantes, lo que en última instancia solidifica los conocimientos matemáticos permitiendo su transferencia., ya que implica empelar diferentes sistemas simbólicos, así como herramientas de análisis en la identificación de patrones y relaciones matemáticas.

Aunque aparentemente parece que los conocimientos, razonamientos y prácticas de ambos ejes algebraicos son independientes, es importante trabajar de forma integrada los diferentes ejes algebraicos propuestos por Kaput, ya que algunos conceptos y estrategias de solución pueden ser transferidos entre los ejes algebraicos. Es importante buscar estrategias que permitan trabajar el *PF* dentro del eje *AG*. En este sentido, tal vez es factible analizar el desempeño de los estudiantes que participaron en una secuencia instruccional que empezó con una enseñanza en el eje *PF*, para posteriormente pasar a trabajar en el eje *AG*.

El desarrollo de las habilidades y conocimientos aquí descritas, además de favorecer el desempeño dentro de las aulas educativas, es fundamental para brindar a los niños desde el inicio de su educación la posibilidad de optar por carreras que permitan un desarrollo tanto intelectual como económico. Además, de que desarrollan el intelecto humano, permitiendo comprender fenómenos tanto naturales como económicos, brindando estructura en su pensamiento.

19. Referencias

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *80*, 7–24.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México, D. F.: Trillas.

Bandura, A. (Ed.). (1995). Self-efficacy in changing societies. Cambridge university press.

Bernal, C. I. (2005). La evaluación del aprendizaje escolar: una propuesta desde la psicología interconductual. Acta Comportamentalia: Revista Latina de Análisis de Comportamiento, 13(2), 181-197.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route Into algebra in the elementary grades. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5–23). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., & Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation [Una alumna de primer grado explora las variables y su notación]. *Estudios de Psicología*, *36*(1), 138–165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34–63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 33–40. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/40248456

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*, Harvard, Univ. Press, Cambridge, Mass.

Bryant, P., & Nunes, T. (2016). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. Psychology Press.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2001). The reification of additive differences in early algebra. En H. Chick, K. Stacey, & V. Jonker (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 162–170). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Reston, VA: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (Ed.), *Proceedings of the Twenty–Second*

Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Tucson, Arizona: ERIC Clearinghouse.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, *37*(2), 87–115. https://doi.org/10.2307/30034843

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not algebra early. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.) (pp. 235–272). New York - London: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, *5*(1), 27–37. https://doi.org/10.2753/RES1060-9393050127

Davydov, V. V. (1991). *Soviet Studies in Mathematics Education: Volume 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. (J. Confrey, V. V. Davydov, J. Kilpatrick, & J. Teller, Eds.). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. https://doi.org/10.2307/1176235

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, (5), 23–34.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/40247950

Flores Macías, R. del C. (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación*. Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores Macías, R. del C., & Castellanos Cruz, R. (2011). Una propuesta de enseñanza para favorecer la transición de la aritmética al álgebra en alumnos de secundaria. *Didac*, (56–57), 43–49.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Barcelona (obra original publicada en 1997): Paidós.

Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(3), 189–200.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Hamlett, C. L., Finelli, R., & Courey, S. J. (2004). Enhancing mathematical problem solving among third-grade students with schema-based instruction. *Journal of Educational Psychology*, *96*(4), 635–647. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.635

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA* (Vol. 1, pp. 47–65). Center for Research and Development Group, University of Hawai'i.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, & V. Jonker (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 258–264). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(2), 171–192. https://doi.org/10.1023/A:1016210906658

Gallardo, A., & Pinzón, M. (2000). Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. *Educación Matemática*, *12*(02), 81–96.

González, F. E., & Diez, M. M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. *Revista Complutense de Educación*, *13*(1), 281–302.

INEE. (2010). México en PISA 2009. México, D. F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE. (2013a). El aprendizaje en sexto de primaria en México: Informe sobre los resultados del EXCALE 06 (2009) Español, matemáticas, ciencias naturales y educación cívica. México, D. F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

INEE. (2013b). Panorama Educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional 2012 Educación Básica y Media Superior. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/bie_wr/mapa_indica/2009/PanoramaEducativoDeMexico/RE/RE02/2009_RE02__.pdf

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Haria, P., Leh, J., Adams, A., & Kaduvettoor, A. (2007). A comparison of single and multiple strategy instruction on third-grade students' mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology 99*(1), 115.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25–26). National Research Council, National Academy Press Washington, DC.

Kaput, J. J. (2000). Teaching and learning a new algebra with understanding. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York - London: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C., & Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *7*(3). Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51268/93013

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of mathematics education*. Springer Netherlands.

Lins, R., & Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study. New ICMI Study Series, vol 8* (pp. 45–70). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_4

Llanos, L. (2011). Enseñanza del álgebra y resolución de problemas. *Revista de la Universidad Interamericana de Puerto Rico*, *36*(6), 1–11.

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista Ema*, *4*(3), 232–246.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mateos Muñoz, A. (1990). Etimologías grecolatinas del español. *Editorial Esfinge. SA De CV*.

Medrano, A., & Flores–Macías, R. del C. (2018). Álgebra temprana como herramienta de análisis y comprensión de problemas aritméticos en primaria. *Cultura, Educación y Sociedad*, *9*(1), 9–26.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores, & M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 53–70). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *3*(3), 135–156.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, & J. P. da Ponte (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática* (pp. 27–51). Póvoa do Varzim: EIEM 2011.

Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The International Journal of Learning*, *12*(5), 265.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, T., & Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño* (6a ed.). México, D. F.: Siglo XXI.

OECD. (2013). PISA 2012 results: What students know and can do - Student performance in mathematics, reading and science (Volume I). OECD Publishing.

Palarea Medina, M. M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (40), 3–28.

Palarea Medina, M. M., & Socas Robayna, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (16)*, 91–98.

Piaget J. (1969) *Psicología y Pedagogía*. Barcelona: Ariel.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño* (Vol. 369). Ediciones Morata.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' Non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303–322). London and New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Runes, D. (1981). *Diccionario de filosofía*. España: Grijalbo.

Schliemann, A. D., Carraher, D., & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 145–152). Utrecht, The Netherlands: Utrecht Freudenthal Institute.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in Elementary School. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA* (Vol. 4, pp. 127–134). Center for Research and Development Group, University of Hawai'i.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. New Jersey: Lawrence Erlbaum. Recuperado de http://books.google.com.mx/books?id=AISWxMO9LKMC

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Paidós.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., & Jones, W. (1998). *Solving algebra problems before algebra instruction*. ERIC Clearinghouse.

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. *ZDM Mathematics Education*, *37*(1), 16–22. https://doi.org/10.1007/BF02655893

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. En *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 49–69). Cambridge: Cambridge University Press.

Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública (2017). Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. México: SEP.

Skemp, R. R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. New York.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*,*18*(2), 149–167.

The Stanford Encyclopedia of Philosophy. (2012). Edward N. Zalta (ed), URL https://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/davidson/

UNESCO. (2013). Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE). Análisis Curricular. Santiago: OREALC/UNESCO.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. Trillas.

Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, la matemática y la realidad: Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria*. México, D. F.: Trillas.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1999). Pensamiento y lenguaje. En *Obras Escogidas, Tomo 2* (pp. 9–348). Madrid: Visor.

Zhang, D., & Xin, Y. P. (2012). A follow-up meta-analysis for word-problem-solving interventions for students with mathematics difficulties. *The Journal of Educational Research*, *105*(5), 303–318.

Anexo 1 Evaluación

Nombre completo: ___________________________________ *Fecha:* ___________

Hola, por favor resuelve los siguientes ejercicios. Anota, dibuja y haz las operaciones que quieras.

1. Decide si la oración numérica es verdadera o falsa.

57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso

Explica tu respuesta: ____

____

2. ¿Qué número puedes poner en el espacio en blanco para hacer que la oración numérica sea verdadera?

10 = ___ + 4

Explica cómo sabes que la oración numérica es verdadera. __________________________

____

¿Cómo sabes que no hay ningún otro número que hace que la oración numérica sea verdadera?

____

____

3. Encuentra el valor de X que hace que la siguiente oración numérica sea verdadera.

$X = 3 + 6$ X = ___

Explica cómo sabes que el valor de X hace que la oración numérica sea verdadera.

____

____

¿Cómo sabes que no hay ningún otro valor que haga que la oración numérica sea verdadera?

____

____

4. Había siete libros en un librero. Nueve niños entraron a la biblioteca y cada uno tomó un libro. ¿Cuántos libros se encuentran ahora en el librero? ________________

Explica cómo encontraste tu respuesta.

____

____

5. A Luis le gustan los insectos, por ello en un frasco metió algunos grillos y 15 arañas. En total tiene 33 insectos dentro del frasco. ¿Cuántos grillos metió Luis en el frasco? _________

Explica cómo encontraste tu respuesta. _______________________________________

____

6. Raúl y Andrés estaban recogiendo conchitas de mar. Raúl puso las conchitas que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de conchitas que Raúl, pero, las guardo equitativamente en dos cajas pequeñas. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño y explícala.

____

____

____

Por la tarde volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de conchitas de mar que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso sus conchitas dentro de una bolsa. Realiza un dibujo o escribe la cantidad de conchitas de mar que tiene cada niño.

____

____

____

Al día siguiente contaron sus conchitas, pero no pudieron encontrar las bolsas.

¿Piensas que Raúl tiene el mismo número de conchitas de mar que Andrés o piensas que uno de ellos tiene más conchitas? ____

Explica tu respuesta.

____

____

____

7. Dos estudiantes tienen la misma cantidad de caramelos. Lucero tiene una caja, dos tubos, y siete caramelos sueltos. Susana tiene una caja, un tubo, y 20 caramelos sueltos. Muestra cuántos caramelos tiene cada una.

Explica tu respuesta

____

____

Cada caja tiene la misma cantidad y cada tubo tiene la misma cantidad. Muestra cuánto tiene cada una.

Explica tu respuesta, ____

____

¿Puedes averiguar cuántos dulces tiene cada tubo? ______________________________

¿Qué pasa con cada caja? ____

Explica tus respuestas y representa la relación entre los dulces de Lucero y Susana.

Explica tu respuesta.

____

____

____

8. María y Luis el día de muertos salieron a pedir dulces. En la primera casa, María recibió una bolsa de caramelos sabor uva. En la segunda casa, recibió 3 veces más caramelos sabor uva que en la primera casa. Representa los dulces que tiene María.

Explica tu representación ____

____

____

Luego se encontró con Luis. Luis había recibido en total 20 caramelos sabor uva. Representa los dulces de Luis.

Explica tu representación. ____

____

____

Entonces María contó sus caramelos y se dio cuenta que tenía el mismo número de caramelos sabor uva que Luis. ¿Cuántos caramelos sabor uva recibió María en la primera casa? _____________

Explica tu respuesta. ____

____

____

9. ¿Cuál es la altura de una persona si lleva un sombrero de 30 cm? Representa la relación.

Explica tu representación ____

____

____

10.Tomás es 4 centímetros más alto que María. María es 6 centímetros más baja que Lesli. Dibuja la altura de Tomás, la de María y la de Lesli.

Explica a qué se refieren los números 4 y 6. _____________________________________

____

____

Representa la relación entre las alturas

Explica tu representación. ____

____

____

Anexo 2 Cuadernillo de trabajo para el eje algebraico AG

Nombre: _________________________

Escuela: _________________________

Grado: ___________________________

Grupo: ___________________________

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Realiza los dibujos, anotaciones y operaciones que necesites.

1. ¿Qué valor falta en la ecuación para que mantenga el equilibrio y sea verdadera?

$$5 + 6 = 7 + \_\_\_;$$

¿Cómo sabes que es ese valor y no otro? _____________________________________

____

____

2. ¿Qué valor de *X* mantendría la equivalencia de la ecuación y la haríán verdadera?

$$X = 5 + 4;$$

X= ___

¿Cómo sabes que es ese valor y no otro? ______________________________________

____

3. Miguel tiene 24 galletas. Su primo Mario tiene 28 galletas.

¿Cómo puedes representar la relación entre el número de galletas que tienen cada uno?

Explica tu representación: ____

____

____

Instrucciones: Lee el siguiente problema y resuélvelo

1. Pablo tiene cierta cantidad de chocolates de cereza y 18 chocolates de almendra. Juntos son 34 chocolates. ¿Di cuántos chocolates son de cereza? ________

Explica lo que hiciste.

____

____

____

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios.

1. María y Juan tienen cada uno una alcancía. El domingo, los dos tenían la misma cantidad en sus alcancías.

Dibuja o representa la cantidad de María y Juan.

2. El lunes, su abuela los visita y les da $3 a cada uno de ellos.

Dibuja o representa la cantidad de María y Juan.

3. El martes, van juntos a la tienda. María gasta $3 en unas gomitas y Juan gasta $5 en unas papas con chile.

Dibuja o representa la cantidad de María y Juan.

4. El miércoles, Juan dobla la ropa de toda su familia y gana $4. María lava los trastes y gana $4. Los dos ponen su dinero en la alcancía.

Dibuja la cantidad de María y Juan.

5. El jueves, María abre su alcancía y descubre que ella tiene $9.

¿Cuánto dinero tiene Juan? ______________________________

Explica cómo sabes que esa cantidad de dinero tiene Juan.

____

____

____

¿Cuánto dinero tenían al principio? __________________________________

Explica cómo sabes que esa cantidad tenía Juan. _________________________________

____

____

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios.

1. A Carlos y a Renata les encantan las galletas. Cada uno de ellos tenía una charola con la misma cantidad de galletas. Carlos puso todas sus galletas en una canasta. Renata puso sus galletas repartidas en dos canastas.

Dibuja o representa la cantidad de galletas que tiene cada uno.

Explica tu representación. ____

____

____

2. Entonces, una nueva charola de galletas salió del horno. Carlos y Renata tomaron la misma cantidad de galletas cada uno, pero esta vez ambos guardaron sus galletas nuevas en una bolsa de papel para que se mantuvieran frescas para comerlas más tarde.

Dibuja o representa la cantidad de galletas que tiene Carlos y Renata.

Explica tu representación. ____

____

____

3. La hermana pequeña de Carlos entró en la cocina y dijo que ella quería unas galletas. Carlos le dio su canasta y Renata le dio una de sus dos canastas de galletas.

Ahora, ¿piensas que, después de que compartieron sus galletas, Carlos tiene el mismo número de galletas que Renata? _______________________________

¿Piensas que uno de ellos tiene más galletas que el otro? _________________________

Explica tu respuesta. ____

____

____

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Rocío y Luz han salido a juntar manzanas para cocinar unos pasteles. Rocío juntó 7 manzanas rojas y algunas manzanas verdes.

Representa la cantidad de manzanas que juntó Rocío.

2. Luz juntó 2 manzanas rojas, el mismo número de manzanas verdes que Rocío y algunas manzanas amarillas.

Representa la cantidad de manzanas que juntó Luz.

3. Al final, Rocío tenía el mismo número de manzanas que Luz.

¿Cuántas manzanas amarillas juntó Luz? ______________________________________

¿Cómo sabes que ese es el número de manzanas amarillas que juntó Luz? _____________

____

Anexo 3 Cuadernillo de trabajo para el eje algebraico PF

Nombre: ____________________________

Escuela: ____________________________

Grado: ______________________________

Grupo: ______________________________

Instrucciones: Observa el agua y contesta los siguientes ejercicios.

1. ¿Qué pasa con el agua del vaso "A" cuando la pasamos al vaso "B"?

____

____

____

¿Qué pasa con el agua del vaso "B" cuando le ponemos el agua del vaso "A"?

____

____

____

Completa la tabla con la información que hace falta:

A	B
10	
9	1
	2
6	4
4	
3	7
1	
	10

¿Observas algún patrón en la información de la gráfica? ______________

Descríbelo: ____

____

____

Ubica las cantidades de agua de cada contenedor en la siguiente gráfica.

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios.

2. ¿Cuántas colas hay en dos perros? ______________________________

Representa la relación entre los perros y las colas

Explícala: ____

____

____

¿Cuántas colas hay en 5 perros? ______________________

Representa la relación entre los perros y las colas

Explícala:

____

____

____

¿Cuántas colas habrá en 10 perros? ______________________

Representa la relación entre los perros y las colas

Explícala:

____

____

____

¿Cuántas colas habrá en cualquier número de perros? _________________

Representa la relación entre las colas y los perros

Explícala: ____

____

____

¿Cuántos ojos hay en dos perros? ____________________

Representa la relación entre los perros y los ojos

Explícala: ____

____

____

¿Cuántos ojos hay en 5 perros? _____________________

Representa la relación entre los perros y los ojos

Explícala: ____

____

____

¿En 10 perros cuántos ojos habrá? ______________________

Representa la relación entre los perros y los ojos

Explícala: ____

____

____

¿En cualquier número de perros cuántos ojos habrá? _________________

Representa la relación entre cualquier número de perros y los ojos

Explícala: ____

____

____

3. Un tren recoge dos vagones en cada parada.

Representa o dibuja la relación entre los vagones y las paradas

¿Cuántos vagones ha recogido el tren después de un número cualquiera de paradas?

____

Representa la relación que identificaste

Explícala: ____

____

____

¿Y si contamos la locomotora, cuántos vagones ha recogido el tren después de un número cualquiera de estaciones?

____

Representa la relación que identificaste y explícala.

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios.

4. Bernardo va a tener su fiesta de cumpleaños y quiere asegurarse de que todos sus amigos se pueden sentar. Él tiene mesas cuadradas. En una mesa cuadrada se pueden sentar 4 personas; si une otra mesa cuadrada a la primera se pueden sentar 6 personas.

Dibuja o representa las dos mesas con las seis personas sentadas.

¿Cuántas personas se pueden sentar en 3 mesas? ___________________

Dibuja o representa las tres mesas con las personas sentadas.

¿Cuántas personas se pueden sentar en 4 mesas? ___________________

Dibuja o representa las cuatro mesas con las personas sentadas.

¿Cuántas personas se pueden sentar en 5 mesas? ___________________

Dibuja o representa las cinco mesas con las personas sentadas.

¿Observas algún patrón? ______________

Descríbelo: ____

____

____

Encuentra una regla que describa la relación entre el número de mesas y el número de personas que se pueden sentar en las mesas y descríbela

____

____

____

Describe la relación empleando variables

¿Qué representan las variables?

____

____

____

Instrucciones: Realiza los siguientes ejercicios.

5. Miguel y Rubén tienen cada uno un poco de dinero. Miguel tiene $8 en la mano y el resto de su dinero está en su cartera. Rubén tiene exactamente tres veces más dinero que el que tiene Miguel en su cartera.

Representa el dinero que tiene cada uno

¿Cuánto dinero podría haber en la cartera de Miguel? ___________________________

¿Quién tiene más dinero? ____

Representa la relación que identificaste y explícala.

Explícala: ____

____

____

	F	gl	Sig. (bilateral)
Dominio	86.667	1	< .00
Etapa	58.602	1	< .00
Etapa*Dominio	1.809	1	> .05

Tabla I. Análisis de varianza (ANOVA) 2 x 2 realizado con el desempeño correcto mostrado por el grupo de tercer grado. Predictores: a) Dominio: *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*) y b) Momento: pretest y Post test.

	F	gl	Sig. (bilateral)
Dominio	5.521	1	< .00
Etapa	60.025	1	< .00
Etapa*Dominio	19.799	1	< .00

Tabla II. Análisis de varianza (ANOVA) 2 x 2 realizado con la ponderación dada a las representaciones externas elaboradas por el grupo de tercer grado. Predictores: a) Dominio: *Aritmética Generalizada* (*AG*) y *Pensamiento Funcional* (*PF*) y b) Momento: Pretest y Post test).

Tabla III Datos obtenidos del grupo con base en los cuales se realizaron los análisis de desempeño.

ID	Pre1	Pre2	Pre3	Pre4	Pre5	Pre6	Pre7	Pre8	Pre9	Pre10	PPEPPA 1	PPEPPA 2	PPEPPA 3	PPEPPA 4	PPEPPA 5	PPEPPA 6	PPEPPA 7	PPEPPA 8	PPEPPA 9	PPEPPA 10	PPEPPA 11	PPEPPA 12	PPEPPA 13	PPEPPA 14	PPEPPA 15	PPEPPA 16	PPEPPA 17	Post1	Post2	Post3	Post4	Post5	Post6	Post7	Post8	Post9	Post 10
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	-	1	1	1	-	0	1	1	1	-	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
6	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	-	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
8	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
10	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	-	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
12	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
13	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
14	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	-	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
15	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
18	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	-	1	1	-	0	-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
21	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	-	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
22	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-	1	0	0	-	1	1	1	1	1	0	0	0	-	-	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
23	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	-	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
26	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
27	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0

Tabla IV Frecuencia de representaciones externas obtenida del grupo con base en los cuales se realizaron los análisis.

ID	Pre-Cat1	Pre-Cat2	Pre-Cat3	Pre-Cat4	PrePF-Cat1	PrePF-Cat2	PrePF-Cat3	PrePF-Cat4	PPEPPA-Cat1	PPEPPA-Cat2	PPEPPA-Cat3	PPEPPA-Cat4	Faltas	PPEPPAPF-Cat1	PPEPPAPF-Cat2	PPEPPAPF-Cat3	PPEPPAPF-Cat4	Faltas	Post-Cat1	Post-Cat2	Post-Cat3	Post-Cat4	PostPF-Cat1	PostPF-Cat2	PostPF-Cat3	PostPF-Cat4
1	2	3	0	0	4	1	0	0	1	3	2	1	0	1	5	3	1	0	0	4	1	0	0	2	1	2
2	3	2	0	0	4	1	0	0	0	4	1	2	0	0	6	1	3	0	0	4	0	1	5	0	0	0
3	4	1	0	0	3	1	1	0	1	2	2	2	0	1	6	1	2	0	1	3	1	0	1	3	0	1
4	4	0	1	0	4	1	0	0	0	2	1	2	2	0	3	1	5	1	0	4	1	0	0	2	2	1
5	3	2	0	0	3	2	0	0	0	4	2	1	0	3	2	1	4	0	0	5	0	0	1	1	0	3
6	2	3	0	0	3	2	0	0	0	3	2	1	1	1	4	2	3	0	0	5	0	0	1	2	1	1
7	1	4	0	0	3	2	0	0	1	3	1	2	0	0	3	2	5	0	0	3	2	0	1	1	1	2
8	3	2	0	0	3	2	0	0	0	4	1	1	1	0	4	0	6	0	0	4	1	0	1	2	0	2
9	3	1	1	0	4	0	1	0	1	4	1	1	0	6	2	1	1	0	1	2	1	1	1	4	0	0
10	2	3	0	0	4	1	0	0	2	1	1	2	1	3	3	1	3	0	0	5	0	0	2	0	0	3
11	3	2	0	0	3	2	0	0	4	1	0	2	0	4	5	0	1	0	0	3	1	1	2	3	0	0
12	2	3	0	0	4	0	1	0	3	2	1	1	0	5	3	1	1	0	1	2	1	1	3	1	1	0
13	2	3	0	0	2	3	0	0	1	2	1	3	0	0	5	1	4	0	0	5	0	0	0	2	2	1
14	3	2	0	0	5	0	0	0	2	1	2	1	1	5	2	1	2	0	1	3	0	1	2	3	0	0
15	3	2	0	0	2	3	0	0	0	2	2	3	0	1	2	1	6	0	0	3	2	0	1	0	0	4
16	3	2	0	0	4	1	0	0	2	4	1	0	0	2	2	2	4	0	4	1	0	0	2	2	0	1
17	5	0	0	0	5	0	0	0	3	1	1	2	0	5	4	0	1	0	3	1	0	1	3	0	0	2
18	3	2	0	0	2	3	0	0	0	3	1	1	2	4	4	1	0	2	3	1	0	1	2	3	0	0
19	4	1	0	0	4	1	0	0	2	2	0	3	0	1	4	3	2	0	0	3	2	0	1	2	1	1
20	4	0	1	0	5	0	0	0	3	0	0	4	0	3	4	1	2	0	3	2	0	0	3	1	0	1
21	1	4	0	0	3	2	0	0	1	3	0	2	1	1	4	0	5	0	1	3	0	1	0	1	1	3
22	3	2	0	0	5	0	0	0	3	2	0	0	2	2	4	0	2	2	2	3	0	0	4	0	0	1
23	2	3	0	0	4	1	0	0	3	1	1	1	0	3	4	1	2	1	1	3	1	0	3	2	0	0
24	5	0	0	0	3	2	0	0	4	1	1	0	1	2	5	0	3	0	1	3	0	1	5	0	0	0
25	4	0	1	0	5	0	0	0	6	0	1	0	0	3	1	1	5	0	2	1	1	1	5	0	0	0
26	4	1	0	0	5	0	0	0	4	1	0	1	1	4	5	1	0	0	2	0	3	0	4	0	1	0
27	3	1	1	0	5	0	0	0	5	1	1	0	0	0	1	3	6	0	0	3	2	0	2	0	1	2