UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

AXIOMÁTICA FORMAL DEL PROGRAMA NEOWALRASIANO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN ECONOMÍA

PRESENTA

SERGEI ARTURO MARTÍNEZ MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS

DR. MARTÍN CARLOS PUCHET ANYUL

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021

A mis padres, Ishaha y Fernando,
quienes me han dado todo.

Sarian, M. (1957) *Yerevan Flowers* [Óleo sobre lienzo, 96 x 103 cm]. Galeria Tretyakov, Moscow. [en línea] M. Sarian House-Museum.

Agradecimientos

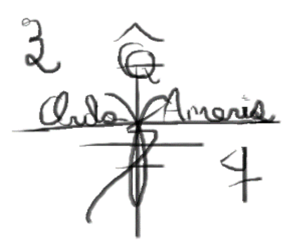
La realización de esta tesis no hubiera sido posible, primeramente, sin el auxilio de mi tutor de tesis, *Dr. Martín Puchet*, con quien estoy en deuda por su genuino interés en la realización de mis objetivos académicos. Asimismo, señalo el apoyo que recibí de mis amigos matemáticos, *Luis Benítez Lluis* e *Ismael Garduño*, quienes me iniciaron en las matemáticas puras, además de proporcionarme apuntes y bibliografía para este texto.

A mis padres, *Ishaha* y *Fernando*. Aunque falten palabras para expresar lo que quiero, ellos saben mi sentir. El hecho de tenerlos a mi lado, y el apoyo incondicional que me brindan, es un gran aliciente para progresar de forma íntegra como persona. No podría sentirme más orgulloso de ellos ya que son excelentes padres y personas. A ti, madre, es este especial agradecimiento puesto que: ¡eres mi orgullo y admiración! >^.^< 𝒜 , ℬ, 𝒦, 𝒜 .

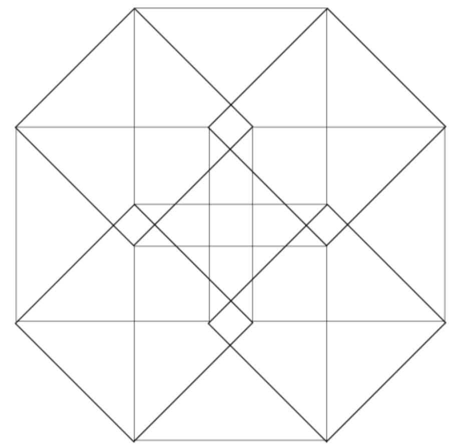
A mis amigos, *Juan Ventura*, *Alejandro Ciriaco*, *Ismael Garduño*, *Adrián Piña* y *Alejandro Bretón*, con los cuales he pasado numerosos y entrañables momentos, su mera compañía es causa de risas y alegrías. Aquí hago mención del prro loko de *Fernando Cuauhtémoc*, una persona plena a la cual le tengo gran cariño por largas pláticas, memes dank, el yeyo, y por hacerme sentir como un hermano.

A mis compañeros de licenciatura, *Daniela Castro*, *Aline Hernández*, *Sebastián Rosas*, *Carlos Tapia*, *Héctor Alonso*, *Alberto González* y *Oliver Sánchez*, quienes siempre fueron solidarios conmigo, al mismo tiempo que su presencia era de gracia. Dentro de este conjunto también se encuentra *Noe Molina*, inigualable amistad de la cual tengo gratos recuerdos ambientados en la vulgaridad, deporte, cumbia y cooperación.

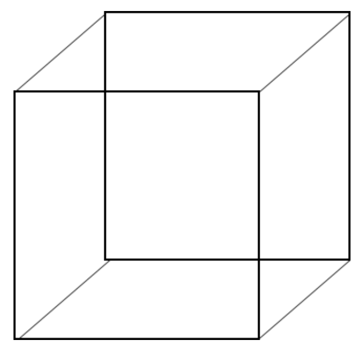
A los H:.H:. de la Logia A.J.E.F. México N° 7, *Alberto Azcona* y *Eduardo Sánchez*, entre otros, cuyas palabras siguen deviniendo en sustanciales reflexiones de la vida. De igual manera, hago mención de *Julio Gómez*, quien ha sido un extraordinario amigo ya que, a pesar de tener diferentes puntos de vista y forma de ser, su solidaridad, humor y la confianza que deposita en mí son aspectos que aprecio considerablemente.



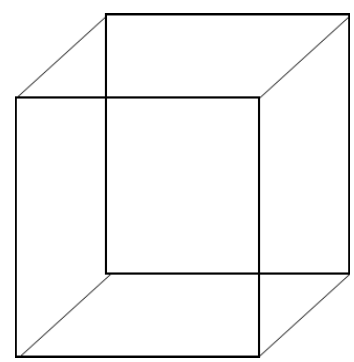
"¡Nada más fácil que imaginarse un cubo de cuatro dimensiones!" Se ve así:



Pero no pienso en eso, pienso en algo como



¡Pero de cuatro dimensiones! –"¿Pero no es lo que te he mostrado como



sólo que de cuatro dimensiones?" –No; ¡no quiero decir eso! -¿Pero qué quiero decir? ¿Cuál es mi imagen? Bien, el cubo de cuatro dimensiones, tal como lo han dibujado, ¡no lo es! Ahora sólo tengo como imagen las palabras y el rechazo de todo aquello que puedes mostrarme.

Nota § 249
Ludwig Wittgenstein, Zettel

En efecto, tú debes tomar lo que está, pero que no se ve, hasta que agrade al artista;
es el agua de nuestro rocío, de la cual se extrae el salitre de los filósofos,
por el cual todas las cosas crecen y se nutren.
Nouvelle Lumière Chymique
Cosmopolite

Introducción

La presente investigación documental analiza la axiomática formal del programa neowalrasiano[1]. La hipótesis central de la investigación es que la justificación metodológica del programa neowalrasiano, emplear la axiomática formal en la teoría económica y que se considere como un método económico[2], es epistemológicamente insatisfactoria, esto debido a que el "contenido económico" del programa es una restrictiva y relativa abstracción de relaciones de elementos económicos únicamente acordes a un modelo sintáctico.

Los objetivos que se persiguen en esta investigación son: i) analizar los fundamentos matemáticos del programa neowalrasiano, esto implica exponer la axiomática de forma categórica y el Programa de Hilbert (formalismo) dado que con lo anterior se puede concebir la posibilidad lógica de un equilibrio general; ii) analizar la filosofía del análisis económico de Debreu para conocer cómo se genera la existencia de un equilibrio general, esto para después corroborar nuestra hipótesis central; iii) diferenciar la filosofía del análisis económico de Walras y Debreu; iv) analizar críticas selectas hacia la axiomática formal del programa neowalrasiano que pudieran devenir en propuestas metodológicas epistemológicamente satisfactorias; v) realizar un análisis concluyente de las criticas seleccionadas y de la justificación del programa neowalrasiano para después plantear sugerencias dentro de esta línea de investigación.

El desarrollo del programa neowalrasiano fue realizado en los años cincuenta cuando se gestaba una revolución intelectual en la ciencia económica. Durante este periodo, el enfoque formalista fue el predilecto puesto que su aplicación alentaba a alcanzar el objetivo de axiomatizar enteramente la teoría económica (Blaug, 2003). Los principales arquitectos de este enfoque fueron

[1] Se entiende por "programa neowalrasiano" a la investigación de las matemáticas aplicadas a la ciencia económica del s.XX, la cual tiene como resultado la demostración de la existencia de un equilibrio general competitivo. Este tiene como base teórica el equilibrio general walrasiano y la utilización del método de la axiomática formal.

[2] Boumans y Davis (2015) hacen una diferenciación precisa entre los conceptos de "metodología de la economía" y "método económico", lo cual resulta útil para los objetivos de la investigación. Para ellos, metodología de la economía esencialmente responde al por qué y al para qué de las explicaciones que generan los economistas, originadas en ciertas bases de la economía. En cambio, método económico responde a cómo las herramientas ó técnicas empleadas en economía sirven para realizar explicaciones o descripciones de fenómenos económicos.

Gérard Debreu, Kenneth Arrow, David Gale, Lionel McKenzie y Hukukane Nikaido[3], quienes buscaron la determinación y existencia del equilibrio general -en su estado final-[4] por medio del proceso matemático que representa la competencia económica, originalmente planteado en 1874 por Léon Walras en su obra *Élements d´economie politique pure*.

La culminación de tal investigación, con el uso de la axiomática formal, se dio al demostrar de manera no-constructiva[5], por el método de demostración indirecta la existencia de un equilibrio general competitivo en el trabajo de McKenzie (1954) y en Arrow y Debreu (1954). Pero, no fue hasta 1959 con el *opus magnum* de Debreu, *Theory of Value*, donde se concretó de manera completa un sistema axiomático formal sobre la teoría de equilibrio general walrasiano. Este texto se considera canónico ya que, comprende la filosofía del análisis económico del programa neowalrasiano siendo los valores matemáticos de rigurosidad, generalidad y simplicidad las bases de ésta, la cual ha sido aceptada en su mayoría por la comunidad académica junto con sus justificaciones metodológicas.

La analogía entre el término "núcleo" y la teoría de equilibrio general para el programa neowalrasiano es válida (Punzo, 1999: 6) puesto que, al eliminar la parte empírica que posee la ciencia económica, en términos de fenómenos observables y las hipótesis que de ellos se derivan, mediante el uso de la axiomática formal se crea una metateoría[6] que sustituye lo anterior por símbolos, reglas lógicas de operación, definiciones y axiomas. Este tipo de análisis económico es predominante en la actualidad, como lo expresa Boland:

> Hoy en día, los modernos departamentos de Economía […] están dominados por la cultura de los departamentos de Matemáticas, que valorizan la sofisticación lógica y el rigor más que la cuestión de *realismo*. Y, por su puesto, varios departamentos de economía incluyen

---

[3] Nikaido (1975: 266-268). También se asevera en el texto que una parte importante del programa fue la contribución de los matemáticos guiados por Karl Menger, en especial John Von Neumann y Abraham Wald, que trabajaron en la existencia de soluciones para el equilibrio en modelos económicos.

[4] Blaug (2003: 296). En el texto se hace una importante aclaración sobre la línea de investigación del equilibrio general neowalrasiano, que con el formalismo matemático hizo a un lado el proceso conceptual de equilibrio general, haciendo que el estado final o su determinación fuera el único objetivo a perseguir.

[5] Decir que la demostración del equilibrio general ha sido realizada de manera no-constructiva significa que hay una carencia de esfuerzo por tratar de expresar cómo éste se produce. En cambio, el resultado solo es una justificación matemática de su existencia.

[6] Como mencionan Rosental e Iudin, metateoría es:

> Teoría cuyo objeto de investigación es otra teoría. La metateoría estudia el sistema de principios y conceptos de la teoría dada; establece los límites de dicha teoría, los procedimientos para introducir nuevos conceptos y para demostrar sus principios, haciendo posible estructurar la teoría en cuestión de manera más racional. (Rosental e Iudin, 1965: 312)

investigadores de esta cultura, que se dedican a la construcción de modelos de equilibrio formales (Boland 2017: 63; traducción propia).

En Boyland y O'Gorman (2018) se manifiesta que críticas de *realismo* en modelos económicos fueron previamente realizadas, exponiendo la que ostentó el programa de matematización de la economía de Walras en el siglo XIX por Henri Poincaré, la cual enfatizaba que en su aplicación se traspasaban los límites epistemológicos de una teoría científica, esto de acuerdo a los principios de este último en su obra *Science and Hyphotesis,* publicada en 1902. El uso de las *hipótesis arbitrarias*[7] de infinito egocentrismo y clarividencia de los agentes económicos del programa, además de la recurrente analogía mecanista[8] de la acción humana, requieren de un aislamiento de la experiencia al tomar conceptos con magnitudes no mesurables y llegar a conclusiones con elementos de la misma índole. Tal motivo propició que Poincaré considerara que esta argumentación teórica fuera carente de interés para la ciencia económica[9].

A la problemática de la falta de contenido empírico en la ciencia económica contemporánea, se le agrega el sesgo ideológico que los defensores del programa neowalrasiano muestran con la resistencia al uso de otros métodos, además de ignorar las controversias internas y externas en él, esto con el fin de mantener su práctica y alcanzar los objetivos teleológicos de su aplicación (Blaug, 1998; Toporowski, 2002; Dow, 2004).

El contraste de las ópticas, por un lado, de la aplicación de la axiomática formal a la teoría económica y su defensa metodológica hecha en los trabajos de investigación de Debreu (1959, 1984, 1986) con, por el otro lado, las críticas realizadas por Clower (1995), Chick (1998) y Krugman (1998), permitieron hacer abstracción de tres puntos esenciales: 1) la axiomática formal puede desempeñar no sólo una función constructiva sino crítica; 2) la no unicidad de la axiomática formal como método científico; y 3) el hecho de que el empleo de la axiomática formal genera una barrera comunicativa.

El contenido de la investigación está ordenado en tres capítulos. El primer capítulo introduce los fundamentos matemáticos del programa, la axiomática formal, donde se hace la distinción

[7] Boyland y O´Gorman (2018: 55) definen hipótesis arbitrarias como "[…] una construcción caprichosa que carece de cimientos en la experiencia o que se aproxima a una situación observable" (traducción propia).

[8] Haciendo uso del diccionario filosófico de Audi (1999: 550) entendemos por "analogía mecanista" a la comparación de conceptos que parten del pensamiento que de todo fenómeno natural se puede explicar según los postulados de la mecánica newtoniana.

[9] Para Poincaré, la economía era una ciencia moral y el empleo de las matemáticas en su estudio debía estar bajo límites epistemológicos puesto que, si se traspasaban estos, no había un proceso científico y se tenían que desechar las hipótesis arbitrarias que ligaban la teoría en elaboración junto con su instrumento matemático de análisis.

conceptual que hay entre axiomática y formalismo, además de exponer los objetivos epistemológicos que pretende alcanzar el enfoque axiomático de David Hilbert. El segundo capítulo expone la filosofía del análisis económico de Debreu, expresado en *Theory of Value*, que se divide en la base teórica del equilibrio general walrasiano, el desarrollo histórico del programa neowalrasiano, la demostración de existencia del equilibrio general competitivo, y las justificaciones metodológicas del programa realizados por este autor en obras posteriores. El tercer capítulo analiza las críticas seleccionadas: se enuncian sus principales premisas, se busca responder cuáles son los límites de la axiomática formal del programa neowalrasiano y se plantea la repercusión que tiene su implementación en la teoría económica. Para finalizar, se hace una síntesis de los argumentos formulados en la investigación junto con recomendaciones.

No es la verdad ni la inteligencia, sino «Padre de ambas».
Aunque nuestros sentidos corporales no pueden percibir esta
eterna esencia de las cosas, pueden comprenderla cuantos
por no ser completamente obstusos quieran comprenderla.
Ante el velo, pág. 21
Helena Petrovna Blavatsky, Isis sin velo

Primer Capítulo. Axiomática y formalismo matemático

El presente capítulo tiene como objetivo explicar los elementos matemáticos y filosóficos del programa neowalrasiano. Para ello se utiliza el enfoque pluralista de la axiomática de Schlimm y el Enfoque Axiomático de Hilbert (1918).

I.1 Sistematizar una parte del conocimiento

La axiomática es una herramienta epistémica y metodológica que permite construir un sistema de conceptos y desarrollar una teoría a partir de un número reducido de proposiciones -axiomas ó postulados-[10] empleando reglas de definición y procedimiento, lo cual genera teoremas, afirmaciones verdaderas que pueden ser demostradas, e.g. la proposición de existencia de un único número natural n que cumple n + n = n, que en este caso es el 0.[11]

Es menester aclarar los elementos que componen a un sistema axiomático, así como las relaciones que hay entre ellos para representar la estructura de la axiomática, por lo que se utilizó como guía el esquema y definiciones que se encuentran en Stigum (1990):

> *I. Términos*
>
> Términos primitivos: conceptos básicos que son entendidos sin una precisa definición, e.g. línea.
>
> Términos definidos: conceptos desarrollados que parten de los términos primitivos, los cuales están adscritos en los axiomas y teoremas, e.g. línea paralela.

---

[10] Stigum (1990: 34) señala que desde Aristóteles hay una distinción entre los principios indemostrables "axioma" y "postulado". El primer término es un principio común para todas las ciencias; en cambio, el segundo término es un principio especial para una ciencia, el cual se pide ("petición") sea tomado como verdad intuitiva.

[11] Rosental e Iudin (1965: 313) comentan que el método axiomático es:

> Uno de los procedimientos de estructuración deductiva de las teorías científicas, con el cual: 1) Se elige cierto conjunto de proposiciones de una determinada teoría y éstas se admiten sin demostración (axiomas); 2) los conceptos en ellas contenidos no son claramente determinados en el marco de la teoría dada; 3) se fijan las reglas de la deducción y las reglas de la definición en la teoría dada, reglas que permiten correspondientemente pasar de unas proposiciones a otras e introducir nuevos términos (conceptos) en la teoría; 4) todas las demás proposiciones de la teoría dada se deducen de (1) sobre la base de (3).

Términos universales: objetos lógicos y matemáticos, e.g. negación matemática (¬).

II. Reglas

Reglas de definición: Proceso de inserción de nuevos conceptos basados en los términos primitivos, definidos y universales, el cual debe ser no-creativo (establecer únicamente relaciones que contengan términos definidos) y dispensable (capacidad de prescindir de la definición para elaborar el sistema axiomático).

Reglas de procedimiento: Proceso para generar teoremas a partir de otras proposiciones, e.g. principios de lógica clásica, como el de no contradicción $\neg (p \wedge \neg p)$.

III. Proposiciones

Axiomas: Premisas elementales establecidas que son incondicionalmente verdaderas, e.g. “el todo es mayor que la parte”.

Teoremas: Aserciones generadas a través de un proceso de demostración, donde se emplean proposiciones aceptadas bajo las reglas de procedimiento establecidas.

Teoremas universales: Aseveraciones que han sido establecidas en otras áreas de investigación y que se emplean para elaborar el sistema en cuestión.

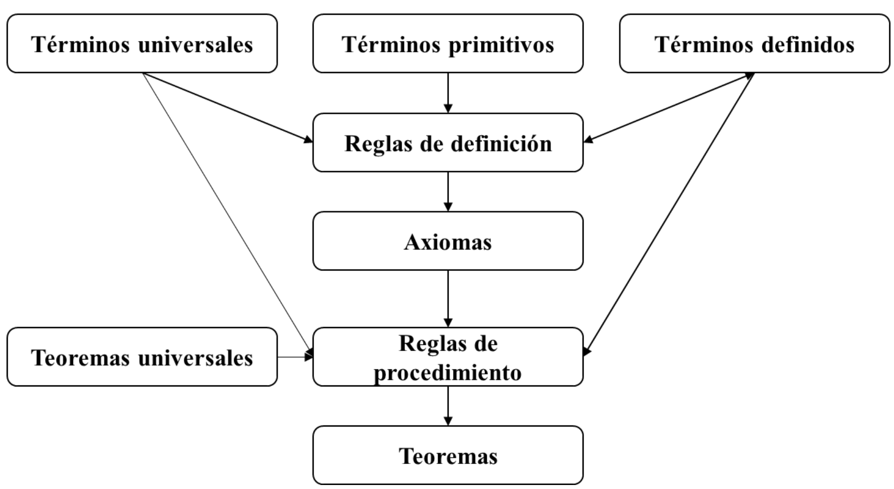


Diagrama 1. El método axiomático. (Stigum 1990: 37)

En cuanto al estudio de la axiomática, en el proceso histórico de la ciencia matemática, el enfoque ortodoxo ha prescrito a la axiomática formal como el método a emplear para el progreso científico; la intención principal de usar este tipo de axiomática es la de *concluir* el desarrollo de una teoría dado que su aplicación proporciona a ésta las propiedades de consistencia, generalidad y simplicidad, lo cual hace que el sistema no sea susceptible de controversias filosóficas (Blanché 2002; Schlimm 2013).

Con tal de dar un análisis diferente del enfoque ortodoxo de la axiomática recurrimos a la categorización dimensional de Schilmm (2013) puesto que, las tres dimensiones que este trabajo le da a la axiomática -presentación, rol y función- permiten vislumbrar que este método puede emplearse en la ciencia de diferentes maneras. Ejemplo de ello es la función teórico-experimental de los axiomas, la cual permite construir o reformular sistemas axiomáticos para encontrar nuevas verdades y resultados al manipular las relaciones y contenidos de estos (Schlimm 2011). Dentro de este estudio, la presentación contempla la forma lingüística y nocional de consecuencia incorporada en los axiomas; el rol considera la visión interna de la língüística del sistema axiomático, donde la distinguen las relaciones gramaticales y connotativas; y la función examina la dependencia que tienen los términos primitivos respecto al sistema axiomático, clasificados en un enfoque normativo o descriptivo (ver Tabla 1°).

Tabla 1. Las tres dimensiones de un sistema axiomático

Presentación		Rol	Función
Lenguaje	Consecuencia	Semántico	Descriptiva
Natural	Implícita		
Simbólico		Sintáctico	Prescriptiva
Formal	Explícita		

Nota: Tabla recuperada de Schlimm (2013: 45; traducción propia)

Así pues, se dan ejemplos y se desarrollan conceptualmente las dimensiones de este análisis categórico, además de remarcar la premisa del texto de Schilmm (2013) que estipula la no-unicidad de la axiomática formal como la presentación a aplicar en la ciencia en general y que propone que la pluralidad de la axiomática lleva a distintos tipos de análisis científicos.

I.1.1 Presentación lingüística

En el proceso histórico de la axiomática, el lenguaje tiene un importante papel al dotar a cada axiomática de diferentes presentaciones según su tipo, lo que puede generar diversos grados de raciocinio lógico y alcance de sus objetivos epistemológicos. El refinamiento intelectual del método axiomático ha propiciado cambios principalmente en la ciencia matemática, el cual ha sido guiado por la búsqueda de un rigor lógico pleno.

I.1.1.1 Lenguaje natural

Para una definición aproximada de lenguaje natural se acude a la aseveración que hace Lema, que describe a este tipo de lenguaje como:

> […] algo automático y omnipresente, algo que no requiere para su ejecución de una planeación o toma de decisión consciente por parte del sujeto, algo que nos acompaña cotidianamente en todas nuestras actividades o reflexiones. (Lema 2001: 258-259)

Siguiendo tal descripción, los axiomas y teoremas en esta presentación contienen términos tanto del mundo sensible como inteligible o, dicho de otra forma, poseen contenido empírico. Debido a esto, cuando se busca comunicar ideas a través de este lenguaje se pueden asociar inconscientemente otros términos, lo que podría implicar para la axiomática la generación de razonamientos falaces ya que los atributos de las expresiones pueden ser diferentes de las definiciones del sistema (Schilmm 2013).

Elementos de Euclides (c. 300 a.c.) es considerado como el primer texto que emplea el método axiomático, esto por contener un razonamiento estructurado que permite elaborar afirmaciones -sobre el *espacio*[12]- a partir del uso de una teoría deductiva -lógica de primer orden- y proposiciones elementales. El propósito de los antiguos griegos con este trabajo era el enunciar la realidad por medio observaciones del mundo exterior expresadas como *nociones comunes*[13] y objetos geométricos -i.e. *punto o línea*-, donde cada uno de estos posee contenido inmediato ó intuitivo, además de ir acompañadas de la petición de asumir estas verdades especulativas sin duda alguna (Duo 1970; Euclides 1944).

A pesar de la concepción de este trabajo como irrefutable e ideal, con el tiempo ésta tambaleó en gran parte por las dudas derivadas de su razonamiento lógico, dentro de las cuales destaca la del quinto postulado euclidiano que dice:

---

[12] Como lo explica García Bacca (1944) en su *Introducción* a *Elementos*, los antiguos griegos tenían una interpretación idealista de las cosas, siendo el *espacio o superficie* el lugar donde los cuerpos y figuras geométricas se hacen visibles, aunque la definición de estos sea inteligible.

[13] Un ejemplo de noción común que se puede encontrar en *Elementos* (1944) *es la de "cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí".*

> […] si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores de dos rectos. (Euclides 1944: 11)

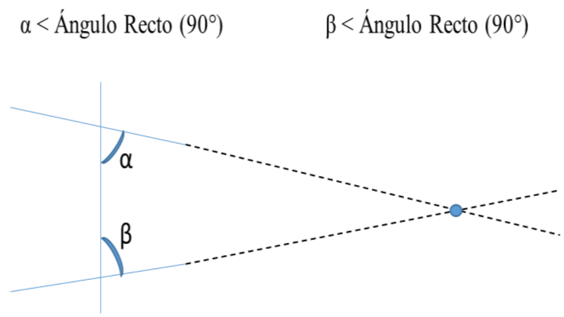


Imagen 1. Representación gráfica del quinto postulado de Euclides

La problemática en torno a este postulado es su contenido intuitivo. El recurso de la *intuición espacial* era para los geómetras griegos un elemento del cual no se dudaba y que disipaba cualquier laguna mental sobre su certeza y comprensión, aun cuando no se podía demostrar. Pero, desde ese momento y en siglos posteriores, parte de la comunidad matemática realizó varios intentos para demostrarlo, llegando en todos los casos a aseveraciones intuitivas implícitas, lo cual impedía alcanzar una rigurosidad lógica plena dentro del sistema euclidiano (Blanché 2002: 17).

No fue hasta finales del siglo XIX cuando diferentes matemáticos decidieron tomar otro camino, estos utilizaron la demostración indirecta de *reductio ad absurdum*[14] para el quinto postulado, lo cual los llevó a la premisa de que éste es independiente a los demás postulados y que se podía omitir en el sistema, propiciando un cambio en la geometría, que pasa de ser una ciencia que responde a la realidad a una que busca ser lógicamente consistente[15] (Contreras 2007: 115).

[14] Este método lógico de demostración matemática asume que el quinto postulado euclidiano es resultado de los demás, para después concluir que el quinto postulado no es demostrable por estos, lo cual lleva a una contradicción y concluir en que la premisa con la que se inició es falsa.

[15] A este tipo de geometría se le denomina como geometría no euclidiana, esto por no contemplar dentro de su sistema axiomático al quinto postulado, lo que permite la transformación de líneas rectas a curvas en otros espacios matemáticos.

Para ejemplificar de otra manera los problemas que se pueden generar al emplear el lenguaje natural dentro de un sistema axiomático analizaremos una de las demostraciones contenidas en el *opus magnum* del filósofo Baruch Spinoza[16], *Ethica more geometrico demonstrata*[17], que dice:

> Parte Primera: De Dios
>
> Definición I. Por causa de sí entiendo aquello cuya esencia implica la existencia o, lo que es lo mismo, aquello cuya naturaleza sólo puede concebirse como existente.
>
> Definición IV. Por atributo entiendo aquello que el entendimiento percibe de una substancia como constitutivo de la esencia misma.
>
> Definición VI. Por Dios entiendo un ser absolutamente finito, esto es, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita.
>
> Definición VIII. Por eternidad entiendo la existencia misma, en cuanto se la concibe como siguiéndose necesariamente de la sola definición de una cosa eterna.
>
> Proposición VII. A la naturaleza de una substancia pertenece el existir.
>
> Proposición XI. Dios, o sea, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita, existe necesariamente.
>
> ---
>
> Proposición XIX. Dios es eterno, o sea, todos los atributos de Dios son eternos.
>
> Demostración: En efecto, Dios (por la Definición VI) es una substancia, que (por la proposición XI) existe necesariamente, esto es (por la Definición VIII), a cuya naturaleza pertenece el existir, o lo que es lo mismo, de cuya definición se sigue que existe, y así (por la Definición VIII) es eterno. Además, por atributos de Dios debe entenderse aquello que (por la Definición IV) expresa la esencia de la substancia divina, esto es, aquello que pertenece a la substancia: eso mismo es lo que digo que deben implicar los atributos. Ahora bien: la eternidad pertenece a la naturaleza de la substancia

[16] Spinoza (1980). Esta obra fue publicada primeramente en 1677, pero utilizamos esta versión en español.

[17] En este texto, Spinoza pretende esbozar un sistema axiomático para la Ética por medio del modelo deductivo que es planteado en *Elementos*. En el título del trabajo se encuentran las palabras del latín *"more geométrico"* que se traduce al español como *"al modo geométrico"*, que alude a la geometría euclidiana.

> (como se demostró en la Proposición VII). Por consiguiente, cada atributo debe implicar la eternidad, y por tanto todos son eternos. Q.E.D.[18]

Como se puede apreciar, en esta demostración están contenidas las definiciones y proposiciones necesarias para establecer que la Proposición XIX es una verdad lógica. Sin embargo, al recurrir a la Definición I, y siendo que todos los elementos de un sistema axiomático están conectados entre sí, encontramos una contradicción con la Definición VI, esto porque ambas atribuyen al concepto de Dios propiedades opuestas. La falla lógica es la siguiente: en la primera definición se enuncia a Dios como una causa de sí mismo, algo indeterminado al igual que sus atributos y, en la sexta, se estipula que Dios y sus atributos son determinados e infinitos (Peña 1980: 22-23).

I.1.1.2 Lenguaje simbólico

Para comprender de una manera simple el concepto de lenguaje simbólico recurrimos a Lara, que comenta lo siguiente:

> Todas las teorías de la semántica de las lenguas ordinarias giran en torno al dictum agustiniano acerca del signo: "aliquid stat pro aliquo"[19]. Es decir, la expresión verbal se considera una especie de sustituta de los objetos de los que habla; el signo, cualquiera que sea su definición teórica, está en vez de otra cosa, que es la que vale para el entendimiento o la comprensión de la verdad. (Lara 2001: 49)

Según se ha citado, la interdependencia de las palabras con los símbolos nos permite expresar ideas en nuevos términos. Al emplear este tipo de lenguaje en un sistema axiomático, se provee únicamente a los elementos de éste de las características que tienen los símbolos o signos, que es la acotación y precisión de ideas, esto sin vaciar su contenido al que sustituyen. De tal manera, su implementación proporciona una mejor detección de razonamientos lógicos falaces al usar términos no relacionados con el contenido de las premisas (Schlimm 2013).

Un ejemplo particular de este tipo de lenguaje se encuentra en el texto *Arithmetices principia nova methodo exposita* por Giuseppe Peano. En éste se expresan símbolos que sustituyen términos

[18] La abreviación *Q.E.D.* proviene de la expresión del latín "*Quod erat demonstrandum"* que se traduce al español como *"lo que se quería demostrar"*, la cual es utilizada en la ciencia matemática.
[19] Esta expresión proviene del latín y se traduce al español como: *"algo que representa otra cosa"* (Stone 2009: 11; traducción propia).

matemáticos y lógicos que parten del lenguaje natural, es un sistema axiomático que demuestra las proposiciones elementales de la Aritmética, específicamente de los números naturales bajo una lógica implícita de primer orden (ver Imagen 2). Siendo que a primera vista no sea evidente el significado de esta simbolización, ofreceremos una interpretación individual de los símbolos (ver Tabla 2) y después daremos una interpretación general de los axiomas.

$$1 \varepsilon N.$$
$$a \varepsilon N . \supset . a + 1 \varepsilon N.$$
$$a,\ b \varepsilon N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$$
$$a \varepsilon N . \supset . a + 1 - = 1.$$
$$k \varepsilon K \therefore 1 \varepsilon k \therefore x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x x + 1 \varepsilon k :: \supset . N \supset k.$$

Giuseppe Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Turin: Bocca, 1889.

Imagen 2. Los axiomas de la Aritmética de Peano. (Kaye 1991: 42)

Tabla 2. Simbología para la interpretación de los axiomas de la Aritmética de Peano

Símbolos	Interpretación individual
Entidades	
1, a , b, N, K k, x “ ” + 1	elementos dados conjuntos dados elementos cualesquiera Sucesor del elemento “ ”
Relación entre entidades	
= ─ =	“ ” es igual a “ ” “ ” no es igual a “ ”
Relación entre entidades y conjuntos	
ϵ	elemento “ ” pertenece al conjunto “ ”
Relación entre proposiciones	
Ɔ	si “ ”, entonces “ ” o, “ ” implica que “ ”
Separación de entidades y proposiciones	
“.” , “,” , “:”, “∴”	Signos gramaticales

Nota: Elaboración propia a partir de los axiomas de la Aritmética de Peano

Axioma 1.- **1 ϵ N** *[1 pertenece al conjunto N]*[20]

Axioma 2.- **a ϵ N. Ɔ. a + 1 ϵ N** *[Si* a *pertenece al conjunto N, entonces el número* a*+1, sucesor de* a*, también pertenece a N]*

Axioma 3.- **a, b ϵ N. Ɔ: a = b. =. a + 1 = b +1** *[Si* a *y b pertenecen a N, entonces se cumple que* a *y b son iguales si y sólo si los sucesores de* a *y b son iguales]*

[20] Es posible que el lector ya este familiarizado con el sistema axiomático de la Aritmética de Peano y que considere que el cero es el primer número natural y no el uno. Sin embargo, a través de Kaye (1991), estamos únicamente considerando la simbología que Peano estipuló en su trabajo de 1889.

Axioma 4.- **a ϵ N. Ɔ. a + 1 ─ = 1** *[Si* a *pertenece al conjunto N, entonces el sucesor no puede ser igual a 1]*

Axioma 5.- **k ϵ K.'.1 ϵ K.'. x ϵ K: Ɔ$_x$ x + 1 ϵ K:: Ɔ. N** *[k pertenece a K, 1 pertenece a K, si x pertenece a K, que implica que el sucesor de x pertenece a K, entonces x y el sucesor de x pertenecen al conjunto N, lo cual nos dice que k está relacionada a N]*[21]

I.1.1.3 Lenguaje formal

Con la intención de proporcionar una conceptualización del lenguaje formal, usaremos la definición de Salguero:

> Un lenguaje formal […] está compuesto por símbolos que, en un principio, no están interpretados, es decir: símbolos que carecen paradójicamente, de un significado concreto. Estos símbolos se combinan entre sí para obtener expresiones complejas del lenguaje según ciertas reglas que han de ser expuestas con claridad y rigor, no habiendo excepciones en las mismas. Finalmente, es posible interpretar (es decir: dar un significado) a cada una de las expresiones, simples o complejas, del lenguaje formal en función del contexto en el que vaya a ser utilizado y la finalidad para la que se requiera. (Salguero 2001: 57)

En virtud de lo anteriormente señalado, en este lenguaje los axiomas son despojados -aparentemente- de todo contenido empírico para convertirse en argumentos complejos a partir de un vocabulario y procedimiento lógico definido para deducir teoremas estrictamente bajo el rigor lógico. Aquí, "3" podría representar cualquier otra cosa excepto lo que comúnmente entendemos por ese símbolo, de igual forma pasa con todas las expresiones y signos por lo que se necesita de una definición de estos, sus combinaciones y su teoría deductiva desde un inicio, ya que solamente de ellos se generarán los teoremas.

Siguiendo a Curry (1951), expondremos la diferencia estructural que hay entre los sistemas axiomáticos antecedentes a los formales, los cuales son denominados por éste como *sistemas primitivos*, y un sistema axiomático formal (ver Imagen 3). Cabe antes destacar que, la denominación de *primitivo* deriva del hecho de que la lógica clásica posee de forma implícita un lenguaje formal para la generación de teoremas, ésta permite omitir el tener que afirmar o negar el contenido de una premisa y así sólo tener que sustituir premisas cualesquiera en una expresión con conectivos lógicos dados, donde, para los primeros sistemas axiomáticos, después se verificaba el teorema con la

[21] Expresado de otra forma: dado un subconjunto propio de N que satisface el Axioma 2 (sucesor de un elemento en N) y el Axioma 1 (existencia de un primer elemento), entonces es posible decir que hay una correspondencia biunívoca de cada elemento de N con uno de su parte.

intuición (García Bacca 1944; Blanché 2002). Ejemplo de este tipo de lenguaje se encuentra en las proposiciones de *Elementos*, las cuales utilizan algunos términos como: *todo*, *si… entonces*, *ó*; que en siglos posteriores fueron expresados de forma simbólica $\forall$, $\Rightarrow$, $\vee$, respectivamente.

Sistema axiomático primitivo	*Sistema axiomático formal*
I. Términos A. Términos primitivos B. Reglas de definición II. Proposiciones elementales III. Teoremas elementales A. Axiomas B. Reglas de procedimiento	I. Ideas primitivas A. Términos primitivos B. Reglas de definición C. Predicados II. Proposiciones elementales A. Axiomas B. Reglas de procedimiento

Imagen 3. Comparación estructural entre un sistema axiomático primitivo y uno formal, planteados en Curry (1951).

Como se puede apreciar, existe un cambio en cuanto a lo que se considera como una proposición elemental ó, dicho de otra manera, los axiomas ya no se rigen por la intuición, sino que son argumentos meramente lógicos con diferentes combinaciones sin contenido, que tienen términos y relaciones definidas. Buscando la formalización de toda expresión lingüística se toma de forma sintáctica a los predicados como una clase categórica especial de tipos de representación, la cual está previamente definida simbólicamente y enumerada, esto con el propósito de relacionar argumentos cualesquiera; muestra de ello, podemos simbolizar expresiones como: "- es una variable", "- pertenece a …", "- es igual a -", "- es un argumento" (Curry 1951: 41).

A fin de proporcionar un arquetipo de un sistema axiomático formal haremos uso de la lógica de primer orden en Stigum (1990) y Enderton (2001), para después generar un teorema y su demostración:

I. Ideas primitivas

I. A. Términos primitivos

Partimos de la definición de una serie de conjuntos de símbolos, *S*, para *constante, relacionales, funcionales, variables, conectivos lógicos, cuantificadores, auxiliares, operadores relacionales* y *operadores funcionales*, que denominaremos respectivamente como *C, R, F, V, CL, K, A, Or y Of.*

Notación A.1.1 Nuestro vocabulario no-lógico está compuesto por los conjuntos *C*, *R*, *F* y *V*. El conjunto C = {1}, $R = \{R_i\}$ para cada $i \in N$, $F = \{f_i\}$ para cada $i \in N$, y $V = \{x_i, z_i\}$ para cada $i \in N$.

Notación A.1.2 Nuestro vocabulario lógico está compuesto por los conjuntos *CL, K, A, Or* y *Of*. *CL* = {¬, ⇒, ∨, ∧}, *K* = {∀, ∃}, *A* = {), (}[22], *Or* = {N, =} y *Of* = {+, ×, s}.

Definición A.1.3 De manera general, uniendo el vocabulario lógico y no lógico se define el alfabeto del lenguaje formal, que llamaremos *Lap.* Con ello, establecemos que *Lap* = {*C* ∪ *R* ∪ *F* ∪ *V* ∪ *CL* ∪ *K* ∪ *A* ∪ *Or* ∪ *Of* }.

Definición A.1.4 Establecemos que *TLap* enuncia al conjunto de términos del alfabeto *Lap* de las siguientes formas:

1. Toda variable del conjunto *V* es un término.

2. La constante 1 es un término.

3. Si $t_1, \ldots t_i$ para cada $i \in N$ son términos, y si f_i es una función simbólica, entonces $f\,(t_1, \ldots t_i)$ para cada $i \in N$ es un término.

Si t_1 y t_2 son términos cualesquiera, entonces $t_1 + t_2$ es un término.

Si t_1 y t_2 son términos cualesquiera, entonces $t_1 \times t_2$ es un término.

Si *t* es un término cualquiera, entonces s (*t*) es un término.

I.B. Reglas de definición

A partir de términos del nuestro lenguaje *Lap*, procedemos a enunciar la regla de definición:

Definición B.1.1 Si $t_1, \ldots t_i$ son términos, y si R_i es una relación simbólica, entonces $R\,(t_1, \ldots t_i)$ para cada $i \in N$ es una *fórmula bien formada* (*fbf).* A cada una de ellas se le denomina como *fórmula atómica*.

I.C. Predicados

Una vez que tenemos nuestras fórmulas atómicas *bien formadas* (*bf*), procedemos a estipular nuestros predicados para *conectivos lógicos, cuantificadores y operadores relacionales*, esto con el uso de

[22] Los paréntesis son signos auxiliares que nos permiten tanto mostrar el inicio y fin de una premisa, por ejemplo, ((α ⇒ β) ⇒ (α ⇒ δ)), así como establecer que un término está ligado a un símbolo funcional o relacional, como lo son s (t) y N (t), respectivamente.

metavariables α, β y φ, donde las dos primeras son para *fbf* cualesquiera y la última para una variable cualquiera.

Notación I.C.1.1 Para cada *fbf*, decimos que cualquier variable ocurre libremente en *fbf*.

I.C.2 Conectivos lógicos

I.C.2.1 Si α está *bf*, entonces $\neg\ \alpha$ está *bf*.

I.C.2.2 Si α y β están *bf*, entonces $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \vee \beta$, y $\alpha \wedge \beta$ están *bf*.

I.C.3 Cuantificadores

I.C.3.1 Si α está *bf* y φ es una variable individual, entonces $(\forall\varphi)\ \alpha$, $(\exists\varphi)\ \alpha$ están *bf*.

I.C.4 Operadores relacionales

I.C.4.1 Si α y β están *bf*, entonces $\alpha = \beta$, y $N(\alpha)$ están *bf*.

II. Proposiciones elementales

II. A. Axiomas

Expondremos el esquema axiomático de nuestro sistema, donde se tiene que aclarar que son meramente valores verdaderos de un lenguaje sintáctico.

Axioma 1. $N(1)$

Axioma 2. $\forall x\ (N(x) \Rightarrow N(s(x)))$

Axioma 3. $\forall x\ \forall z\ ((N(x) \wedge N(z) \wedge s(x) = s(z)) \Rightarrow x = z)$

Axioma 4. $\neg\ \exists x\ (N(x) \wedge 1 = s(x))$

Axioma 5. $(\alpha(1) \wedge \forall x\ (\alpha(x) \Rightarrow \alpha(s(x)))) \Rightarrow \forall x\ \alpha(x)$

II.B. Reglas de procedimiento

Exponemos de forma explícita nuestras reglas de inferencia y procedimiento, esto con el uso de metavariables α, β, δ, γ, φ, λ donde las cuatro primeras son para *fbf* cualquiera y las últimas dos para variables cualesquiera:

II.B.1 Inferencia

II.B.1.1 *(Modus Ponens)* Si α y β están *bf*, entonces $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$

II.B.1.2 *(Modus Tollens)* Si α y β están *bf*, entonces $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg \beta) \Rightarrow \alpha$

II.B.1.3 *(Silogismo hipotético)* Si α, β y δ están *bf*, entonces $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \delta)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta)$

II.B.1.4 *(Silogismo disyuntivo)* Si α y β están *bf*, entonces $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg \alpha) \Rightarrow \beta$

II.B.1.5 *(Silogismo constructivo)* Si α, β, δ y γ están *bf*, entonces $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\delta \Rightarrow \gamma) \wedge (\alpha \vee \delta)) \Rightarrow (\beta \vee \gamma)$

II.B.1.6 *(Reducción al absurdo)* Si α y β están *bf*, entonces $(\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \neg \beta)) \Rightarrow \neg \alpha$

II.B.1.7 *(Doble negación)* Si α está *bf*, entonces $(\neg (\neg \alpha)) \Rightarrow \alpha$

II.B.2 Procedimiento

II.B.2.1 Si φ es un término cualquiera, entonces $\varphi = \varphi$

II.B.2.2 Si φ y λ son términos cualesquiera y, α y β son *fbf*, entonces $\varphi = \lambda \Rightarrow (\alpha (\varphi) \Rightarrow \beta (\lambda))$

II.B.2.3 Si $\varphi + 1$, entonces $\varphi + 1 = s (\varphi)$

II.B.2.4 Si $\varphi + s (\lambda)$, entonces $\varphi + s (\lambda) = s (\varphi + \lambda)$

II.B.2.5 Si $\varphi \times 1$, entonces $\varphi \times 1 = \varphi$

II.B.2.6 Si $\varphi \times s (\lambda)$, entonces $\varphi \times s (\lambda) = (\varphi + \lambda) + \varphi$

Proposición I. $\forall x (\neg (x = s (x)))$

Demostración

1. $\neg \exists x ((N (x) \wedge 1 = s (x))) \Rightarrow (\neg (x = s (x))$
2. Por el axioma 4, asumimos que $(\neg (z = s (z)))$
3. $\forall z \forall x ((N (z) \wedge N (x) \wedge s (z) = s (x)) \Rightarrow z = x)) \Rightarrow \forall x ((s (z) = s (s (x)) \Rightarrow (z = s (x))$
4. Por el axioma 3, $\forall z ((s (z) = s (s (z))) \Rightarrow (z = s (z))$
5. Por el punto 2., $(\neg (s (z) = s (s (z)))$
6. $\forall z (\neg (s (z) = s (s (z))) \Rightarrow (\neg (z = s (z)))$
7. Generalizando, $\forall x (\neg (s (x) = s (s (x))) \Rightarrow (\neg (x = s (x)))$
8. Por Axioma 5, $\forall x ((\neg (1 = s (x))) \wedge \forall x ((\neg (x = s (x))) \Rightarrow (\neg (s (x) = s (s (x))))) \Rightarrow \forall x (\neg (x = s (x))))$
9. $\forall x (\neg (x = s (x)))$ *Q.E.D.*

Habiendo completado este breve sistema formal, decimos que esta presentación lingüística es una metateoría aplicada, la cual fue pensada para la Aritmética de Peano, aun cuando puede representar otra teoría, ya que ésta puede expandirse a toda progresión aritmética que esté bien definida, como puede ser el caso de los números impares, lo que requeriría hacer explícito entre otras cosas el operador funcional "2" en 2 (x) + 1 o, incluso, se puede aplicar a otros campos como es el caso de espacios vectoriales (Blanché, 2002: 42). Cabe señalar que, dentro de la formación de esta presentación axiomática se necesita de un lenguaje que exprese ideas y defina un lenguaje en particular, lo cual se denota como *metalenguaje*.

I.1.2 Nociones de consecuencia

Desde los albores del método axiomático con el texto de *Elementos*, el razonamiento lógico era de vital importancia, las fórmulas lógicas que crearon los estoicos les confirió la libertad de tener únicamente que afirmar enunciados concretos y así sólo pasar a tener que afirmar enunciados hipotéticos indeterminados con relaciones determinadas (García Bacca 1994: xxix), siendo el *modus ponens*[23] una de las primeras reglas de inferencia lógica, la cual busca que la verdad de las premisas pase a la conclusión (ver Imagen 4).

Premisa 1	$P \Rightarrow Q$	Si la tasa de interés sube, entonces el nivel de inflación baja.
Premisa 2	P	La tasa de interés sube.
Conclusión	Q	El nivel de inflación baja.

Imagen 4. Ejemplo de la regla de inferencia *Modus Ponens*

Esta noción de consecuencia implícita perduró por largo tiempo, aun dentro de la axiomática simbólica, ya que los signos sólo sustituyen los enunciados de las reglas de inferencia mas no su formulación y definición.

No es hasta que en el Programa de Hilbert que, en busca de un sistema axiomático formalizado, se formula la lógica a emplear de manera explícita. Ejemplo de esta metodología se encuentra en las reglas de procedimiento del sistema axiomático formal previamente elaborado, donde se emplea una noción implícita de consecuencia a símbolos con el propósito de elaborar una formulación explícita:

[23] Esta expresión proviene del latín y se traduce al español como: *"modo de razonamiento que afirma al afirmar"* (Stone 2009: 82; traducción propia)

II.B.1.1 Si α y β están *bf*, entonces $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$

Noción implícita → Noción explícita

Si… entonces… → $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$

Tras esta ilustración, decimos que la lógica formulada es recursiva, que necesariamente se auxilia de la intuición lógica y del lenguaje natural para concretarse dentro de la formalización de un sistema axiomático, y cuyo estudio se denomina *metalógica*. Además de mencionar la tenue diferenciación entre simbolismo y formalismo, es menester subrayar que "[…] la axiomatización y formalización se han confundido con frecuencia, ya que se pueden encontrar críticas dirigidas a la formalización que se nivelan contra la axiomatización en general" (Schlimm 2013: 48).

I.1.3 Rol semántico y sintáctico

En pro de establecer una clara y breve introducción a esta dimensión de la axiomática, comenzaremos por definir el concepto de *semántica*, por lo cual citamos a Blackburn, que dice lo siguiente:

> […] el estudio del significado de las palabras y la relación de los signos con los objetos a los que se aplican los signos. En los estudios formales, se proporciona una semántica para un lenguaje formal cuando se especifica una interpretación o modelo. Sin embargo, un lenguaje natural viene ya interpretado, y el problema semántico no es el de la especificación, sino de entender la relación entre los términos de varias categorías (nombres, descripciones, predicados, adverbios...) y sus significados. (Blackburn 2005: 334; traducción propia)

Por lo anteriormente mencionado, en el rol semántico, al presentar un sistema axiomático con un lenguaje natural se busca la compresión de los términos contenidos en los axiomas con sus significados, un estudio que sale de nuestra investigación, pero que puede ejemplificarse con la pregunta: ¿cómo se relaciona el término "línea" con una sucesión continua de puntos? Análogamente con una presentación simbólica, se podría expresar con la pregunta: ¿cómo se relaciona "ϵ" con el concepto de pertenencia?

En cuanto a la búsqueda de una interpretación de un sistema axiomático con una presentación formal, ésta se puede contemplar a través del análisis de las categorías que posee, siendo el proceso dividido en etapas del sistema axiomático formal anteriormente elaborado un claro ejemplo de ello. De forma algorítmica, en este sistema: 1) se estipula y define a los elementos de nuestro universo discursivo, 2) se asignan los elementos, funciones individuales y predicados individuales en el universo de constantes, variables, funciones y predicados del vocabulario no-lógico, y 3) se asignan valores verdaderos[24] a las *formulas bien formadas* (*fbf)* de acuerdo a la interpretación de nuestro vocabulario no-lógico.

En este último punto, cuando utilizamos conectivos lógicos como la negación, la forma de interpretar esta formulación se da como sigue: si α está *bf*, entonces $\neg \alpha$ es verdadera o falsa respecto a la verdad o falsedad de α.[25] Debido a esto, y como lo comenta Stigum (1990: 48): "[…] nuestra interpretación le ha conferido significado a los elementos del vocabulario lógico. De tal manera, hemos tenido éxito en interpretar los términos primitivos de los axiomas de nuestro lenguaje" (traducción propia).

Habiendo enunciado brevemente el rol semántico dentro de la axiomática de diferentes presentaciones lingüísticas, ahora procedemos a hacer lo mismo con el rol sintáctico, el cual inicia con la definición que Blackburn ofrece de sintaxis:

> […] la forma en que sus expresiones se pueden juntar para formar oraciones. Un estudio sintáctico es aquel que no se refiere al significado de la oración, sino a los aspectos puramente formales de la combinación de palabras en un idioma. Al estudiar los lenguajes formales la noción de una fórmula bien formada es puramente sintáctica, como es la de la demostración, ya que cada una se define sin tener en cuenta la interpretación que se pretende que las frases del lenguaje tengan (Blackburn 2005: 359; traducción propia).

Siguiendo esta definición, encontramos de nueva cuenta la dificultad de exponer ampliamente un tema perpendicular al objetivo de la investigación, pero para efectos prácticos, en el rol sintáctico, al presentar un sistema axiomático con un lenguaje natural se busca formular oraciones, las cuales posean significado, que puede ejemplificarse con la pregunta: ¿están correctamente formadas las oraciones *"figura es lo comprendido por un límite o por varios"*[26] y "por comprendido un límite o

---

[24] Dentro de este paso se encuentra un tema complejo, el cual es la concepción semántica de la verdad. Es por ello que meramente citaremos su esencia, ubicada en Stigum (1990: 48): "Una frase declarativa es verdadera si y sólo si las denotaciones de los nombres en la oración satisfacen las relaciones que se basan en ellos por la oración" (traducción propia).

[25] Análogamente se realiza lo propio con los otros conectivos lógicos que se empleen, donde el recurso de las tablas de verdad ayuda a comprender mejor esta interpretación.

[26] Este enunciado es una de las definiciones de *Elementos* (Definición D.I.13) encontradas en Euclides (1944).

es varios lo figura”?[27] En tanto para una presentación simbólica, se podría expresar con la pregunta: ¿es “**1 ϵ N**” una combinación correctamente formada dentro de la axiomática de la Aritmética de Peano de 1889?[28]

Para una presentación formal de un sistema axiomático, se analizan las combinaciones de los símbolos y las nociones de consecuencia que poseen, lo cual también se denomina *sintaxis lógica*. Ésta tiene el objetivo de determinar si las reglas de formación son *efectivas* en un número finito de procedimientos, dicho de otra forma, Stigum señala que es:

> […] el establecimiento de varias propiedades sintácticas de los axiomas de un lenguaje simbólico. Por ejemplo, la sintaxis lógica de nuestro lenguaje objetivo nos mostrará que nuestros axiomas son consistentes e incompletos...
>
> Un conjunto de axiomas es consistente si dos aseveraciones contradictorias no pueden ser derivadas de estos. Un conjunto de axiomas es completo si no existe una fórmula bien definida que no sea un teorema y que pueda ser adoptada como un axioma adicional sin hacer inconsistente el conjunto resultante (Stigum 1990: 47; traducción propia).

Probablemente haya pasado por la cabeza del lector si estas dos disciplinas lingüísticas son excluyentes por los distintos análisis que ofrecen, la respuesta es negativa. Esto se debe a que el análisis empleado depende de los objetivos de quién los use, donde comúnmente se utilizan de manera simultánea. Resulta importante mencionar que existen particularidades: en conjuntos de axiomas muy acotados se considera tomar un rol semántico, mientras que en conjuntos más complejos se considera un rol sintáctico (Schlimm 2013: 49).

I.1.4 Función descriptiva y prescriptiva

En esta dimensión únicamente se pretende enunciar si un tema en cuestión está descrito o definido por los principios que se estipulan dentro del sistema axiomático. Para ello se tiene que diferenciar si los términos primitivos tienen una interpretación ajena o propia al sistema axiomático en cuestión.

Por un lado, se considera que es una función descriptiva si asume que los términos primitivos poseen un significado independiente al sistema, esto podría representarse con *Elementos* dado que, al

[27] Para dar una respuesta a esta pregunta no se requiere de un detallado análisis ya que, intuitivamente podemos ver que esta oración resulta incomprensible.

[28] La réplica a esta pregunta es afirmativa dado que, si hubiéramos puesto otra combinación como por ejemplo “ϵ 1 N”, aun teniendo los mismos símbolos, no encajaría dentro de éste particular sistema axiomático.

hacer uso de términos como *línea o punto*, el sistema contempla las propiedades que se relacionan con estos términos, lo cual pondría en tela de juicio los teoremas a los que se llegue siguiendo dichas propiedades. Por el otro lado, se considera que se realiza una función prescriptiva si los términos primitivos son dependientes de las relaciones expresadas por los axiomas, lo que propiciaría que sólo se juzgue al sistema por su consistencia lógica (Schlimm 2013: 50).

A pesar de lo acotada que es ésta última definición, Schlimm (2013) expone de manera clara cómo es que la función prescriptiva hace a un sistema axiomático de este tipo un método teórico de gran alcance científico:

> Considerado de esta manera, un sistema de axiomas generalmente no puede determinar una sola interpretación para sus términos, sino sólo la estructura de las relaciones que se mantienen entre ellos; entendidos de esta manera, los sistemas axiomáticos también se denominan relacionales, estructurales, algebraicos o abstractos. En otras palabras, este sistema de axiomas no define un sólo modelo, sino una clase de modelos. Este estado de cosas también se ha expresado diciendo que los axiomas determinan un predicado que es satisfecho por sus modelos (Schlimm 2013: 51; traducción propia).

I.2 Hilbert: *Axiomatisches Denken*

En la historia y filosofía de las Matemáticas, la corriente de pensamiento formalista, que tiene como exponentes a David Hilbert y Paul Bernays[29], se comprende por medio de Linnebo (2017: 39) como: "la visión de que las Matemáticas no necesitan de nociones semánticas o, al menos, de ninguna que no pueda reducirse de forma sintáctica" (traducción propia).

Esta escuela de pensamiento surge a comienzos del siglo XX con el Programa de Hilbert, que pretendió establecer los fundamentos y el Quehacer de la ciencia matemática, en un momento donde las Matemáticas se encontraban en una crisis intelectual por las paradojas de la Teoría de Conjuntos de Cantor con los *números transfinitos*[30], éstas a consecuencia de la discusión de la comunidad

[29] Dentro de la escuela *formalista*, Bernays no es justamente representado como uno de los pilares de ésta, ya que su rol principal fue el de esclarecer los puntos filosóficos del Programa de Hilbert (Mancosu, 1998: 175), pero es gracias a él que tenemos una lectura más digerible de los objetivos y del proceso intelectual del Programa.

[30] Un número transfinito se expresa como el tamaño de una colección infinita de elementos, donde cabe resaltar que existen diferentes tamaños de infinitos, aun cuando todas las colecciones son infinitas (Recalde 2004: 61).

matemática en la búsqueda de un convenio en el uso de demostraciones de carácter existencial no-constructivo (De Lorenzo, 2003; Mancosu, 1998). [31]

Para los propósitos de este subcapítulo, que pretende presentar lo más claramente posible el aspecto filosófico-matemático del programa neowalrasiano y algunos de sus objetivos epistemológicos, tomaremos como punto de partida al texto realizado por Hilbert en 1918, *Axiomatisches Denken*[32], el cual está íntimamente vinculado con el Programa de Hilbert. Esta propuesta es adoptada del excelente trabajo de Weintraub (2002) puesto que, en éste se limita el tema de estudio concerniente a la transferencia metodológica de la axiomatización formal a la ciencia económica.[33]

Dentro de *Axiomatisches Denken*, se encuentran tres párrafos que dilucidan de forma concreta lo que Hilbert considera como ejes de investigación para una revolución científica, los cuales desarrollará en años posteriores con su Programa de investigación:

> […] si queremos restaurar la reputación de las matemáticas como el ejemplo de la ciencia más rigurosa no basta simplemente con evitar las contradicciones existentes. El principal requisito de la Teoría de los axiomas debe ir más lejos, a saber, para demostrar que dentro de todos los campos del conocimiento las contradicciones basadas en el sistema subyacente de los axiomas son absolutamente imposibles.
>
> De acuerdo con este requisito he demostrado la coherencia de los axiomas establecidos en el *Grundlagen der Geometric*[34] al demostrar que cualquier contradicción en las consecuencias de los axiomas geométricos debe necesariamente aparecer en la aritmética del sistema de números

[31] El hecho de aseverar que el Programa de Hilbert es *formalista* es una concepción equívoca dado que, como explica Detlefsen: "Es la profundamente motivada abstracción radical del significado que, con toda probabilidad, es responsable de uno de los peores conceptos erróneos del formalismo de Hilbert; a saber, que según se dice las Matemáticas son ´un juego´ empleando símbolos*"* (Detlefsen 1993: 299; traducción propia).

Sin embargo, la confusión en gran medida se debe a que el Programa de Hilbert hace uso de la formalización, como se puede constatar en Hilbert: "Todo lo que hasta ahora se compone de las matemáticas ahora debe ser estrictamente formalizado, de modo que las matemáticas propias, o matemáticas en el sentido estricto, se conviertan en un inventario de fórmulas demostrables" (Hilbert 1922 traducido primeramente del alemán al inglés en Ewald 2007: 1131).

A partir de esta aclaración, se debe entender que el formalismo sólo es parte del Programa dado que, al formalizar los elementos de una teoría, las nociones de consecuencia y las demostraciones, se puede proceder deductivamente a la exhibición de la consistencia lógica de una teoría, lo cual es su principal objetivo.

[32] La traducción del alemán al español es *"Pensamiento Axiomático"*.

[33] En Weintraub (2002) se expone que existen varias narrativas históricas erróneas o parciales que tratan de explicar los albores de la conjunción de la ciencia economía con la axiomática formal, lo cual se debe a la omisión analítica de los objetivos epistemológicos que posee el Programa de Hilbert.

[34] El *opus magnum* de Hilbert fue su texto *Grundlagen der Geometric* (Fundamentos de Geometría), elaborado en 1899. En éste se expone, con un mayor nivel de generalidad, un sistema axiomático con principios geométricos (Mancosu 1998: 150).

> reales también (Hilbert 1918, traducido del alemán al inglés en Ewald 2007: 1112; traducción propia).

> En conclusión, quisiera resumir en algunas frases mi concepción general de la esencia del método axiomático. Yo creo que: cualquier cosa que pueda ser objeto del pensamiento científico se vuelve dependiente del método axiomático, y por lo tanto indirectamente de las matemáticas, tan pronto como esté madura para la formación de una teoría. Al avanzar hacia capas de axiomas cada vez más profundos en el sentido explicado anteriormente, también ganamos ideas cada vez más profundas sobre la esencia del pensamiento científico en sí, y nos volvemos cada vez más conscientes de la unidad de nuestro conocimiento. En el signo del método axiomático, las matemáticas se convocan a un papel principal en la ciencia (Hilbert 1918, traducido del alemán al inglés en Ewald 2007: 1115; traducción propia).

De esta manera, en Weintraub (2002) se hace una aclaración de suma importancia, que es la distinción de los planteamientos que persigue Hilbert, los cuales son respectivamente nombrados como: Programa finitista para los fundamentos de la Aritmética (PFFA) y Enfoque Axiomático (EA).

I.2.1 Programa finitista para los fundamentos de la Aritmética

Para el desarrollo de este planteamiento Hilbert elabora una serie de trabajos, los cuales comienzan en 1922 con *Neubegründung der Mathematik*[35] y terminan en 1931 con *Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie*[36]. En la narrativa histórica-analítica de Mancosu (1998) [37] se esclarece que en dicho desarrollo Hilbert trabaja en tres puntos para llegar a su cometido: 1) formalismo, 2) finitismo y 3) el estado filosófico de la intuición *a priori*, base del finitismo.

El primer punto se manifiesta en Hilbert (1922) al constatar que los enfoques que utilizan los matemáticos *Gottlob Frege* y *Richard Dedekind*[38] para fundamentar a las Matemáticas desde la Aritmética son erróneos; realizar operaciones abstractas sin una formación lógica conceptual y poseer

[35] La traducción del alemán al español es *"Nueva fundamentación de las Matemáticas"*.

[36] La traducción del alemán al español es *"La fundamentación de la Teoría de Números Elementales"*.

[37] Para la concepción del PFFA y el EA se recurre a este texto elaborado por Mancosu dado que en éste se presenta de manera simple y detallada los aspectos del importantes del Programa de Hilbert.

[38] Frege y Dedekind son conocidos en el ámbito matemático por sus numerosas aportaciones a la lógica matemática y al álgebra, respectivamente.

un realismo extremo en los conceptos, respectivamente. Es por esta razón que Hilbert (1922: 1121) toma el lenguaje formal como medio para alcanzar una consistencia lógica precisa: “los objetos de la teoría de números son para mí -en contraste directo con Frege y Dedekind- los propios signos, cuya forma puede ser generalmente y precisamente reconocidos por nosotros” (traducido primeramente del alemán al inglés en Ewald 2007).

El segundo punto lleva a Hilbert en 1923 con *Die logischen Grundlagen der Mathematik*[39] a realizar un complejo trabajo analítico para resolver la problemática de la aplicación de la lógica clásica con conjuntos infinitos que, como se mencionó anteriormente, era en ese entonces paradójico. Para ello Hilbert toma la asunción de poder llevar la formulación lógica transfinita a una finita con el empleo de *axiomas transfinitos*[40], donde el concepto de *elementos ideales*, explicado en el siguiente punto, adquiere un rol relevante para este objetivo (Mancosu 1998: 158).

El tercer punto requirió que el PFFA justificara el papel que tienen los *elementos ideales*[41], en este caso los *números transfinitos* en la existencia matemática, la cual para Hilbert es relativa de acuerdo al sistema que se esté analizando (Mancosu 1998: 159), por ejemplo, cuando se hace uso de los números complejos, que son una extensión de los números reales. Esta interpretación es refinada en Bernays (1922b) con el recurso de la filosofía kantiana, específicamente con el concepto del conocimiento *a priori kantiano*, donde se concluye que estos elementos contribuyen meramente como instrumentos teóricos-constructivos en una realidad lingüística (Ibíd.: 160).

Para el célebre filósofo alemán, *Immanuel Kant*, los hechos y objetos no están esperando a ser experimentados dentro de una objetiva existencia del espacio-tiempo, sino que nosotros experimentamos hechos y objetos bajo una idealización de éste, una construcción mental propia cuyas propiedades son de alguna forma conocidas (Brown, 2008: 69). Es por esto que, en el tema del infinito, el conocimiento *a priori* -o intuitivo- concibe esta idealización bajo una perspectiva finita a

---

[39] La traducción del alemán al español es “La fundamentación de la Teoría de Números Elementales”.

[40] Para entender el debatido axioma transfinito de Hilbert, que es $A(\tau A(x)) \Rightarrow A(x)$, citamos el ejemplo que da Mancosu (1998: 61) sobre este axioma: “Sea que $A(x)$ signifique “ser corruptible”. Entonces $\tau A(x)$ es un hombre con una integridad moral que, si se volviera corruptible, entonces todos los hombres serían corruptibles” (traducción propia).

[41] Un elemento ideal se relaciona a la ciencia matemática, donde se debe entender como una construcción que permita desarrollar o explorar una teoría.

nuestro entender ya que, si no fuera así, sería imposible concebir estos de manera concreta; en este sentido, el finitismo en Hilbert alega por un infinito *potencial* en vez de uno *actual*.[42]

Es a través de estos tres puntos que el Programa de Hilbert se solidifica para pretender establecer una fundamentación de las Matemáticas desde la perspectiva de la consistencia lógica. Sin embargo, estos grandes avances pierden toda esperanza de trascender cuando en 1930 el matemático y filósofo *Kurt Gödel* expone su texto *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*[43] en una magna conferencia de la *Sociedad para la filosofía empírica*[44], donde se muestra de manera rigurosa y precisa (*teorema de incompletitud*) que cualquier intento por sistematizar a la Aritmética culminará en un intento fallido debido a que no se pueden establecer todas las verdades matemáticas dentro de un aparato deductivo demostrativo (Ibíd.: 76). De este modo, el Programa finitista para los fundamentos de la Aritmética resulta ser imposible de realizar.

I.2.2 Enfoque axiomático

Un posible comienzo del Enfoque Axiomático en Hilbert se encuentra, según Corry (1997), al comentarse que *Heinrich Hertz*, conocido físico en el área de estudio del electromagnetismo del siglo XIX, influyó profundamente en Hilbert. Éste primero aseveraba que establecer principios fundamentales en las teorías de la Física podría ser relevante para la ciencia, donde se debe subrayar que las tempranas investigaciones efectuadas por Hilbert eran multidisciplinarias, enfocadas a las Matemáticas y a la Física (Weintraub 1998: 1843).

No es hasta que en 1889 con el *opus magnum* de Hilbert, *Grundlagen der Geometric*, que se lleva a cabo el primer cambio metodológico dentro de la concepción de la axiomática, al separar la matemática y la lógica del espacio-intuitivo (Bernays, 1922a: 192). El motivo primordial de este esfuerzo lo expresa Mancosu de manera detallada:

> De acuerdo a Hilbert, la axiomatización de la Geometría debe ser completa y simple como sea posible. El significado de completitud […] es que desde los axiomas nosotros podamos derivar los teoremas que corresponden al conjunto de verdades geométricas aceptadas en las

[42] Brown (2008: 69) hace un comentario muy útil acerca de cómo los elementos ideales están desde un primer momento inmersos en las Matemáticas: "La geometría está asociada con nuestras intuiciones del espacio, y la aritmética con nuestras intuiciones de tiempo – los números son sucesivos como una secuencia de eventos en el tiempo" (traducción propia).

[43] La traducción del alemán al español es "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados".

[44] Esta sociedad posteriormente se conocerá como el *Círculo de Berlín*, donde se exponían los avances de científicos y filosóficos de la región.

> matemáticas ordinarias. El requisito de simplicidad incluye, entre otras cosas, reducir los axiomas a un número finito y mostrar la independencia de los axiomas. Un requisito más de la axiomática es que también la demostración de consistencia de los axiomas, esto es, mostrar que estos no llevan a la contradicción. Esta tarea era irrelevante para la axiomática antigua, ya que los axiomas se asumían debido a la evidencia y la verdad, lo cual era suficiente para garantizar la consistencia (Mancosu, 1998: 151; traducción propia).

Este enfoque en Hilbert se hizo explícito como un modo científico de pensar en *Axiomatisches Denken*, lo cual permitió gran parte del avance del PFFA. Aun después del declive del PFFA, la visión de Hilbert por axiomatizar cualquier pensamiento científico queda en pie ya que, al establecer principios de una teoría científica de manera formalizada sólo se propicia que el conocimiento sea organizado y posea certeza en su devenir (Weintraub, 2002: 94).

Paralelamente al PFFA se encuentra el EA en los primeros trabajos científicos realizados por *John von Neumann*, concernientes a la Mecánica Cuántica y Teoría de Juegos, ambos de 1928. La razón por la cual estos dos personajes están estrechamente relacionados es porque el artículo de Mecánica Cuántica que realizó *von Neumann* fue supervisado por Hilbert, donde la reducción de las teorías científicas a teoremas fundamentales fue un punto clave (Mancosu 1998: 154). Mencionamos lo anterior dado que *von Neumann* es un importante personaje dentro de la fundamentación del programa neowalrasiano. Una de sus más importantes contribuciones a la economía matemática se dio en 1937 con el texto *Über ein Okonomishes Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunksatzes*[45] puesto que, éste texto es la piedra angular de las modernas demostraciones en modelos de equilibrio general por el uso de programación lineal, sistemas duales de desigualdades, y la teoría de punto fijo de Brouwer (Weintraub, 2002: 95).

El quehacer matemático que Hilbert manifestó como *Axiomatisches Denken* fue influyente en muchos personajes, pero sin duda alguna fue el grupo matemático *Nicholas Bourbaki*, integrado por numerosos matemáticos franceses, los que continuaron empleando este pensamiento de manera rigurosa, por no decirlo de otra manera, de forma pura. Su intención era estructurar toda una teoría matemática a partir de la axiomática formal que fuera ajena a todo razonamiento intuitivo, donde se lograron grandes avances en diversos campos como Álgebra, Topología y Teoría de Conjuntos (Ibíd.: 106-107). El grupo bourbakiano, que es una extensión de la escuela formalista de Hilbert, es un importante actor dentro de la fundamentación del programa neowalrasiano ya que uno de sus

[45] La traducción del alemán al español es "Sobre ciertas ecuaciones de la economía y una generalización del teorema de punto fijo de Brouwer"

estudiantes, *Gérard Debreu*, fue quien transmitió los principios filosóficos de esta corriente a las matemáticas aplicadas en Economía.

Si bien con el *teorema de incompletitud* de Gödel quedó explícito que no se puede fundamentar el conocimiento basándose en la Lógica o en las Matemáticas, la perspectiva de elaborar un sistema axiomático formal que después tenga interpretaciones económicas no incumple con dicha aseveración ya que, como menciona Punzo (1991: 5), "de la propia versión especial de Hilbert del enfoque axiomático, el equilibrio general moderno deriva la noción de economía como el análisis de los sistemas formales en lugar de las representaciones sintéticas de las economías reales" (traducción propia). Entendiéndose de otra forma, ahora la consistencia y la verdad se manifiestan de manera distinta, donde la primera sólo asegura a la segunda verificando que un modelo de la teoría económica sea consistente (Weintraub, 2002: 98).

[…] Esto es lo que mis sentidos han aprendido solos:
que las cosas no tienen significación, sino existencia.
El que las cosas son el único sentido oculto de las cosas.
El guardador de rebaños, XXXIX, vss. 1 - 17
Fernando Pessoa, Poemas de Alberto Caeiro

Segundo Capítulo. Filosofía del análisis económico de Debreu

El presente capítulo tiene como objetivo ofrecer una breve introducción a la filosofía del análisis económico de Debreu en *Theory of Value* desde su aspecto histórico y metodológico. Se describe el proceso de la demostración matemática de la existencia de un equilibrio general competitivo (EGC), el núcleo del programa, y se analiza el texto con las propiedades axiomáticas de consistencia, generalidad y simplicidad, justificadas en diversos trabajos de Debreu sobre su análisis económico.

II.1 Equilibrio general walrasiano

Antes de comenzar con el breve recuento histórico del EGC en el texto *Theory of Value*, es necesario explicar las bases de la teoría del equilibrio general walrasiano (EGW), las cuales se encuentran en el trabajo que realizó Léon Walras en 1874, *Élements d´economie politique pure*[46]. Por esta razón realizaremos un resumen que dilucide las partes que componen un sistema de equilibrio general[47]. Se recurre aquí a gran parte de la explicación que ofrecen Ekelund y Hébert (2005: 457-464)[48] de dicho tema. Ésta se presenta de la siguiente manera:

[46] Si bien Walras es el padre de la teoría del equilibrio general, la obra de *Augustin Cournot* de 1838, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, influyó notablemente en su desarrollo intelectual. En este texto se encuentra de manera primitiva la línea de investigación del equilibrio general, la cual enuncia que en la realidad hay un sistema económico cuyas partes (bienes económicos), en función de la ley de demanda y condiciones de producción, están conectadas entre sí. Sin embargo, tal premisa no se ahonda puesto que, para Cournot, el tener que contemplar un sistema económico de tal magnitud sobrepasa el análisis matemático y sus métodos.

Aún con tal justificación, Walras emprende un camino diferente y del cual Friedman comenta que:

> [Walras] Vació el problema de Cournot de su contenido empírico y produjo una solución "completa y rigurosa" "en principio", sin pretensiones de que pudiera ser utilizada directamente en cálculos numéricos. Su problema es el problema de la forma, no del contenido: de mostrar una imagen idealizada del sistema económico, no de construir un motor para analizar problemas concretos (Friedman 1955: 904; traducción propia).

[47] Es menester aclarar que existen varios aspectos y componentes ligados a los siguientes apartados, los cuales no se contemplan dentro de esta generalidad por simplicidad.

[48] Para la síntesis de la teoría walrasiana en Ekelund y Hébert (2005) los autores comentan que su presentación es una simplificación y reducción de la "tediosa" presentación matemática que hizo Walras en *Élements*.

I. Utilidad y rareté.

Utilidad es el nivel de las satisfacciones que el individuo recibe por el consumo de cestas alternativas. Con ello, el conjunto de gustos o preferencias relativas a las diversas colecciones posibles de bienes y servicios se denomina como *función de utilidad*, expresada como:

$$u = u(q_1, q_2, \ldots q_n) \qquad (1)$$

En esta ecuación, u alude al nivel de la utilidad total alcanzada por el individuo, donde u(·) es la notación funcional para las relaciones entre bienes y servicios consumidos por el individuo para alcanzar su nivel de utilidad. Las variables $q1, \ldots, qn$ representan las cantidades de bienes y servicios que el individuo consume por unidad de tiempo.

Rareté[49] es el término empleado por Walras para expresar la variación en la utilidad total de un individuo como consecuencia de consumir una unidad más (o menos) de cualquier bien o, dicho de otra manera, *utilidad marginal*. La idea principal de lo anterior es describir el comportamiento de intensidad de una necesidad ya satisfecha, que se expresa como una función decreciente de la cantidad consumida. No obstante, por convención, la utilidad marginal es positiva, conociéndose como *insaciabilidad de las necesidades* y se escribe como:

$$\frac{\Delta u}{\Delta q} > 0 \qquad (2)$$

II. Dotación de bienes

Antes de establecer este punto esencial del equilibrio general se debe advertir que la simplificación del mundo donde se efectúa es irreal[50]. Para fines prácticos de su exposición (sólo para la teoría del intercambio y consumo de Walras) se toma por dado los subsecuentes factores: inexistencia de aspectos relativos a la producción de bienes, la cual es sustituida por la asunción de una fuente ilimitada de bienes que elimina el

[49] La traducción del francés al español es "escasez".

[50] Resulta interesante que los autores en su texto expresan que la descripción de este mundo irreal podría ser símil a un relato bíblico dado que la fuente de la cual provienen todos los bienes y su distribución pareciera ser obra de una divinidad. Ahora, diferenciar entre un relato bíblico y el equilibrio general sólo queda en sus objetivos epistemológicos.

concepto de costes; la fuente ilimitada de bienes asigna un número igual de bienes a cada persona dentro del mundo contemplado de forma periódica; los bienes otorgados tienen una corta vida.

Un aspecto relevante de este mundo irreal es la idealización de un bien denominado por Walras como *numérarie*, el cual tiene la propiedad de que todos los precios de los demás bienes se pueden expresar con respecto a éste. Ésta es una analogía con una unidad monetaria que se simboliza como *" P_i "*, expresión del valor de un bien " q" o de una colección de bienes " q^e".

De tal forma, el valor de los bienes que posee una persona en este mundo se denota como "Y", que es la suma de todas las colecciones de bienes multiplicadas por el precio del bien correspondiente:

$$Y = P_1 q^e_1 + P_2 q^e_2 + \dots + P_n q^e_n = \sum_{i=1}^{n} P_i q^e_i \qquad (3)$$

Considerando que las personas de este mundo tienen el incentivo de intercambiar los bienes que poseen, dado que tienen distintas preferencias, se establecerán relaciones de intercambio y de precios donde cada uno buscará alcanzar maximizar su utilidad, de acuerdo a su colección de bienes óptimos y periódicos " q^*". Pero esta canasta restringe al individuo a las dotaciones periódicas que tiene, que se denomina como *restricción presupuestal*, haciendo que el gasto "G" que realice para obtener la canasta óptima esté limitado al valor de sus dotaciones iniciales del periodo en el que se encuentre.

La acción de demandar bienes presupone que el individuo está también ofreciendo bienes de igual valor, aunque no tengan la misma utilidad. Así pues, lo anteriormente mencionado se representa como:

$$G = P_1 q^*_1 + P_2 q^*_2 + \dots + P_n q^*_n = \sum_{i=1}^{n} P_i q^*_i \qquad (4)$$

$$G = Y, \textit{ implica: } \sum_{i=1}^{n} P_i q^e_i = \sum_{i=1}^{n} P_i q^*_i \qquad (5)$$

III. Condiciones para la maximización de la utilidad

Para que un individuo maximice su utilidad, la valoración de cada uno de sus bienes, en términos del *numérarie "ṡ"*, tiene que ser igual a la valoración de mercado "*mu*" de dicho bien. Esta condición entonces se escribe como:

$$\frac{mu1}{mu\dot{s}} = P_1 , \frac{mu2}{mu\dot{s}} = P_2 , \ldots, \frac{mun}{mu\dot{s}} = P_n \qquad (6)$$

Es el mercado quien garantiza que esta condición se cumpla para los $n - 1$ precios de los n bienes expresados en el n – *ésimo* bien que está en términos del *numérarie*.

IV. Ley de Walras

La ley que estipuló Walras es una simplificación de las interrelaciones básicas en el comportamiento económico de los individuos donde, de forma resumida, los gustos de un individuo y su restricción presupuestal, los excesos de demanda y oferta de todos los bienes deben ser igual a cero. Aquí, el individuo puede tomar tres roles: demandante, oferente o, satisfecho.

Con la intención de describir dicho proceso iniciamos con la fórmula que expresa una demanda de un bien k:

$$q^*_k = h_k (P_{ki} , Y) \qquad (7)$$

Esta nos dice que h_k es una expresión desconocida que depende de la función de utilidad del individuo y de su restricción presupuestaria. Si decimos que un individuo tiene un *exceso de demanda* " *ED* " (ver Imagen 5), se expresa en una primera instancia como:

$$ED_k = (q^*_k - q^e_k) \qquad (8)$$

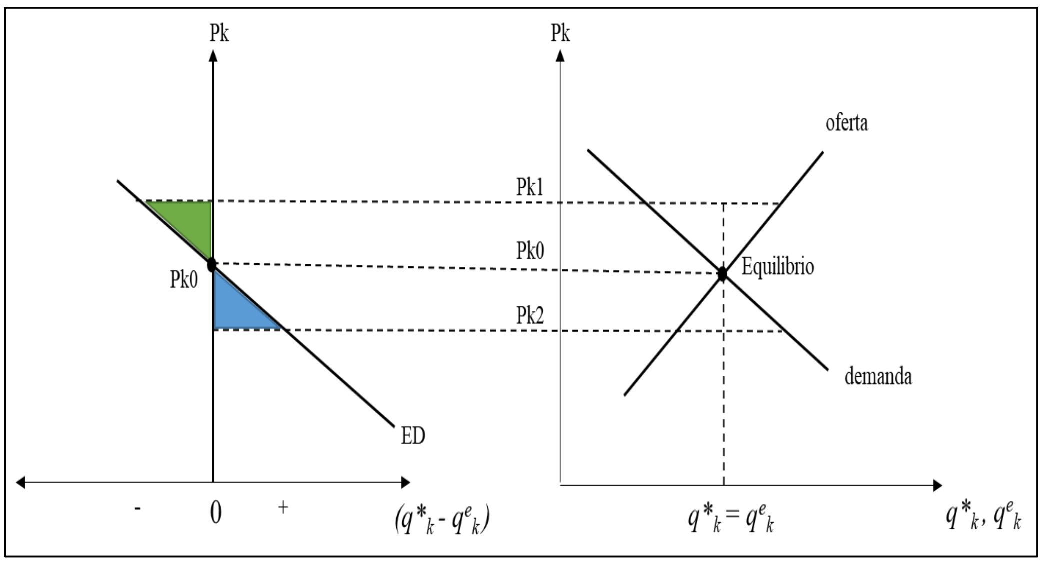


Imagen 5. Representación gráfica del sistema walrasiano de la colección de un bien k de un individuo bajo las fuerzas invisibles de mercado.

Cuando hay un *exceso de demanda negativo*, esto significaría que el individuo está más que satisfecho con su colección de bienes k que en un inicio le fue otorgada, y que además desea consumir menos bienes de este mismo tipo en el mercado, $q*_k < q^e{}_k$. Es por ello que, el individuo (oferente) establecerá un precio de salida " P_{k1}" para este bien, el cual será mayor al precio de equilibrio " P_{k0} ", cuando el individuo está satisfecho $q*_k = q^e{}_k$, esto para que en el intercambio con otros individuos obtenga su colección óptima y maximice su utilidad. De forma simultánea a esta decisión se generará un exceso de oferta en el mercado de este bien, donde el precio irá reduciéndose hasta su precio de equilibrio " P_{k0} ".

Caso contrario se dará cuando $q*_k > q^e{}_k$ que, en otras palabras, es un *exceso de demanda positivo*, en el cual el individuo está insatisfecho con su colección de bienes k que en un inicio le fue otorgada, y que ahora desea consumir más bienes de este mismo tipo en el mercado. Así, el individuo (demandante) establecerá un precio de entrada " P_{k2} " para este bien, el cual será menor al precio de equilibrio " P_{k0} " cuando el individuo está satisfecho $q*_k = q^e{}_k$, esto para que en el intercambio con otros obtenga su colección óptima y maximice su utilidad. Al mismo tiempo a esta decisión, ante un exceso de demanda positivo se elevarán los precios hasta su precio de equilibrio " P_{k0} ".

Lo anterior se puede generalizar todavía más al analizar las colecciones de todos los bienes " i " que poseen todos los individuos:

$$ED_i = H_i\,(P_i\,, Y,\, q^e{}_i\,) \qquad (9)$$

En esta expresión H_i es la relación funcional entre la demanda de la colección de bienes de todos los individuos ED_i con el precio P_i y las dotaciones iniciales del bien $Y,\, q^e{}_i$. Como consecuencia podemos decir que el exceso de demanda de cualquier bien depende de la suma de excesos de demanda de los demás bienes, lo cual se expresaría como:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\, ED_i = \sum_{i=1}^{n} P_i\,(q*_i - q^e{}_i\,) \qquad (10)$$

En este sentido, podemos reescribir la restricción presupuestal:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\,(q*_i - q^e{}_i\,) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, q*_i - \sum_{i=1}^{n} P_i\, q^e{}_i = 0 \qquad (11)$$

También, habría que mencionar que la suma de los valores de los excesos de demanda para todos los bienes *excepto uno* debe ser igual al valor del exceso de demanda del otro bien restante:

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_i(q*_i - q^e{}_i) = - P_n(q*_n - q^e{}_n) \qquad (12)$$

Ahora bien, habiendo terminado de enunciar los conceptos básicos del EGW pasamos a comentar su trasfondo filosófico apoyándonos de Boyland y O'Gorman (2018), así será más fácil diferenciarlo del EGC de *Theory of Value*.

La teoría económica que planteó Walras en *Élements* tenía como propósito persuadir a la comunidad intelectual de su época de contemplar a esta disciplina como una ciencia matemática aplicada, la cual tenía un gran porvenir y cuyo éxito sería semejante al de la física matemática (Boyland y O'Gorman, 2018: 68)[51]. El programa walrasiano dejó como principal conjetura investigar las circunstancias en las cuales la coherencia económica es posible, siendo así la respuesta de la posible existencia del equilibrio indispensable para que sea tomada como una condición mínima, esto con el fin de evitar la consideración del caos económico (Bryant, 2010: 4-5).

Son tres puntos centrales los que engloban a la teoría económica de *Élements*: 1) innovación metodológica, 2) principios científicos diferentes a las leyes experimentales de la Física y, 3) una síntesis filosófica para su metodología.

El aspecto esencial de *Élements* es la mensurabilidad de la satisfacción dado que de ella se desprenden los anteriores puntos mencionados. Una vez que Walras afirmaba que el concepto de utilidad y *rareté* eran cardinalmente mesurables[52], partiendo de las nociones mecanicistas que enunciaban que los fenómenos naturales se pueden explicar con postulados de la mecánica newtoniana, la utilidad marginal de la masa de un individuo podía matemáticamente denotarse como una función decreciente de la cantidad consumida de un bien. Para establecer las condiciones y comportamiento de estos conceptos, junto al de maximización de utilidad, Walras utilizó una metodología distinta a la que se venía empleando, el cálculo diferencial, como se muestra en la ecuación (2).

Siendo que a comienzos del s.XX los académicos de la *Académie des sciences morales et politiques* de Paris eran renuentes a la matematización de la teoría económica por ser considerada una ciencia moral, además de las críticas de su concepto de utilidad y *rareté*, Walras contactó a

[51] En la historia económica, Walras se considera como uno de los pilares de nuestra ciencia, pero sus aportaciones no fueron en primera instancia reconocidos como tal, sino que se consideraban como ignorantes aseveraciones, aun ya habiendo publicado *Élements*.

[52] De acuerdo a Boyland y O'Gorman (2018), con el concepto de magnitud cardinal se puede saber cuántas veces una unidad x es mayor o menor a otra; en cuanto al concepto de magnitud ordinal, esto se refiere a una unidad no medible, como la satisfacción. Con esto se muestra que Walras transgredía la definición de ambos conceptos para su conveniencia.

través de correspondencia al físico y matemático más importante de Europa en ese momento, *Henri Poincaré*, enviándole una copia de *Élements* para obtener una opinión sobre los principios económicos estipulados de su texto, esto con la esperanza de que él apoyara el programa de matematización de la teoría económica (Ibíd.: 47).

Poincaré, un hombre de mente abierta que veía a la intuición como un aspecto indispensable de las matemáticas aplicadas, en una primera instancia le hizo saber que el programa que pretendía edificar era viable y con mucho trabajo por delante, claro, siempre y cuando no se traspasaran ciertos límites epistemológicos, los cuales no detalló de forma precisa, pero que se pueden rastrear en sus trabajos sobre metodología.

Posteriormente, en otras correspondencias, Poincaré sugirió a Walras que repensara sus planteamientos, ya que siendo que los comportamientos de los agentes económicos en *Élements* (infinito egocentrismo y clarividencia) eran hipótesis arbitrarias y subjetivas, las conclusiones serían de la misma índole y, por lo tanto, carentes de interés para la ciencia económica al traspasar límites epistemológicos. Esta aseveración era basada en la obra que Poincaré realizó en 1902, *Science and Hyphotesis*, donde el concepto de hipótesis arbitraria se puede definir como una creencia que es pobremente cimentada en la experiencia o en fenómenos observables, pero que con los años es reivindicada (Ibíd.: 55).

Dentro de las sugerencias de Poincaré también hubo reservas respecto al concepto de utilidad dado que, aun teniendo una justificación mecanicista, éste la consideraba como engañosa. Esto se puede entender de mejor manera con la explicación de Boyland y O'Gorman:

> La mensurabilidad de la masa es cardinal, mientras que la mensurabilidad de la satisfacción -donde la satisfacción está ligada por Poincaré a las preferencias individuales- es ordinal. Satisfacción, entonces entendida en términos de preferencias, puede ser definida por cualquier función que aumenta monótamente, que en principio abre las puertas a Walras para explotar el cálculo diferencial (Boyland y O'Gorman 2018: 53; traducción propia).

A pesar de la argumentación de Poincaré para no concebir a la *rareté* como una magnitud cardinal, Walras siguió utilizando este concepto como uno e, incluso, con permiso del primero anexó parte de su correspondencia en su obra de 1909 titulada *Économique et mécanique* con la intención de comunicar su programa de investigación a la comunidad matemática (Ibíd.: 53).

Tanto en *Élements* como en *Économique et mécanique* Walras justifica la metodología de su programa de investigación. En estos, Boyland y O'Gorman (2018) identifican cuatro "cables" que explican la postura filosófica de Walras respecto a la física matemática -mecanicista-, de la cual se proyecta la economía matemática de su programa de investigación:

1) El realismo platónico es mencionado en *Élements*, precisamente en la Lección 2 titulada *Distinción entre ciencia, arte y ética*. Aquí, Walras menciona que hay que priorizar a los universales, aquellos conceptos que trascienden la corporeidad:

> Una verdad que hace tiempo dejó claro la filosofía platónica es que la ciencia no estudia los cuerpos, sino [los hechos de los cuales los cuerpos son manifestaciones][53]. Los cuerpos son temporales; los hechos perduran. Los hechos, sus relaciones y sus leyes son objeto de todo estudio científico. Además, las ciencias pueden diferir debido a su materia, o los hechos que estudian (Walras 2014: 15; traducción propia).

2) El realismo científico esencialista que está íntimamente relacionado al realismo platónico se vislumbra al analizar cómo es que concebimos la noción de una figura geométrica, e.g. el concepto que tenemos de un triángulo equilátero que, si bien tratamos de replicarlo por sus características en la realidad, esta replica sólo será una aproximación de la universalidad del concepto mismo. Para el caso de la teoría económica, Walras dice lo siguiente:

> Para seguir este mismo método, la teoría económica debe pedir prestado de la experiencia los tipos reales de intercambio, oferta, demanda, mercado, capital, ingresos, servicios productivos, productos, etc. A partir de estos tipos reales, la teoría económica debe abstraer los tipos ideales desindicándolos, y llevar a cabo su razonamiento sobre estos últimos, no volviendo a la realidad hasta que se complete la ciencia, y con vistas a aplicaciones prácticas. Así tendremos, en un mercado ideal, precios ideales que estarán en una relación rigurosa con la demanda y la oferta ideales (Walras 2014: 28; traducción propia).

3) El método deductivo, *"more geometrico"*[54], es empleado por Walras debido a la influencia de los avances logrados por René Descartes en el s. XVII. Los dos recursos filosóficos anteriormente mencionados conducían directamente a las inferencias deductivas de la teoría económica de Walras,

[53] En Walras (2014), la parte entre corchetes es "but the facts of which bodies are the theater", pero se decidió cambiarla dado que una traducción directa resultaría complicada de entender.

[54] Boyland y O'Gorman (2018) comentan en su texto, y con justa razón, que *Élements* es una referencia al deductivismo de la geometría euclidiana, donde Walras buscaba una rigurosidad plena en su teoría económica.

proporcionándoles así en su proceso una fundamentación sólida a estas verdades universales platónicas. (Boyland y O'Gorman, 2018: 62).

4) El último componente de la justificación filosófica de Walras para su metodología es el realismo científico causal, el cual daba a su teoría económica la capacidad de replicar lo que se hace con la física matemática: buscar dónde aplicar los teoremas que parten de los principios estipulados, mas no confirmarlos en el mundo real. Complementando esta idea, Boyland y O'Gorman comentan:

> […] el realismo causal de Walras, los principios del física matemática, enunciada como ecuaciones diferenciales, son casuales, i.e. identifican correctamente las masas y las fuerzas como factores casuales *ontológicamente* fundamentales que operan en el mundo físico real. Del mismo modo, los principios de la economía matemática son ecuaciones diferenciales casuales, que identifican correctamente la utilidad y la *rareté* como las causas fundamentales de la oferta y la demanda y, por lo tanto, la fuente fundamental de valor (Boyland y O'Gorman 2018: 63; traducción propia).

Es por medio de estas justificaciones que el programa walrasiano garantizó su futuro. La exploración a una nueva forma de pensar llevó a Walras a enfrentarse al pensamiento empírico dominante de aquel entonces. El debate que tuvo Walras con Poincaré propició que refinara sus justificaciones metodológicas, aunque la postura de este último era igual de sólida puesto que articulaba una metodología que permitía contemplar nuevas propuestas, pero que en su base filosófica cumpliera con coordinar los principios de una teoría con la experimentación u observación de fenómenos concernientes, esto sin traspasar límites epistemológicos.

II.2 Breve recuento histórico del equilibrio general competitivo de *Theory of Value*

Para la narrativa histórica del equilibro general en el texto *Theory of Value,* escrito por Gérard Debreu en 1959 y el cual "sigue siendo la axiomatización de referencia del modelo de equilibrio general walrasiano" (Weintraub, 2002: 114), pasamos a enunciar los trabajos de investigación y los personajes que fueron sustanciales para la nueva metodología -axiomática formal- aplicada en el equilibrio general walrasiano.

El texto precursor para la aplicación de la axiomática formal al equilibrio general -programa neowalrasiano- es el de *Gustav Cassel,* hecho en 1918 y titulado como *Theoretische Sozialökonomie*[55]

[55] La traducción del alemán al español es "*Teoría de la Economía Social"*

(Weintraub, 1979: 19). En éste se simplifica considerablemente el tedioso procedimiento matemático efectuado por Walras en *Élements*, además de enfatizar que:

> el problema de los precios es esencialmente un problema único que se extiende a lo largo de toda la economía de intercambio y [este hecho] da al proceso de precios una consistencia intrínseca que sólo puede ser expresada por un sistema de ecuaciones simultáneas (Cassel 1932: 148 citado en Weintraub 1979: 19; traducción propia).

Dicha obra, de acuerdo a Weintraub (1979), tenía como propósito esclarecer el análisis del equilibrio general en cuatro puntos: 1) proporcionar modelos de sistemas económicos de propiedad privada en los que se identifique la interdependencia de la producción y consumo de los agentes económicos; 2) explicar las elecciones que los agentes económicos hacen independientemente; 3) identificar el rol del sistema de precios mediante el análisis de los posibles conflictos de decisiones de los agentes económicos; y 4) evaluar la solidez de construcciones que resuelvan los anteriores puntos.

Además, en ésta, el modelo de equilibrio general se expuso de forma clara, aunque no de manera rigurosa. Con el tiempo, y por su valiosa aportación, el modelo económico terminaría por denominarse como *Walras-Cassel*, el cual trajo consigo un mayor número de discusiones sobre el tema, donde destacaron los análisis llevados a cabo por los economistas *Karl Menger* y *Abraham Wald* en la tercera década del s. XX. Pero es Wald quien con métodos matemáticos más avanzados, mas no rigurosos, en su trabajo de 1936 *Über einige Gleichungssysteme der Mathematische Ökonomie*[56], demuestra por primera vez la existencia de la solución del sistema de equilibrio general (Ibíd.: 21), guiado por los puntos que estableció Cassel como línea de investigación[57].

A la par de esta obra, *John von Neumann*, reconocido matemático que efectuó significativas contribuciones a diversas disciplinas académicas[58], publicó en 1937 *Über ein Okonomishes Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunksatzes*[59], trabajo que desarrollaba rigurosamente la existencia de soluciones de un sistema de equilibrio general para una

[56] La traducción del alemán al español es "Acerca de algunos sistemas de ecuaciones en la economía matemática"

[57] Parece ser que en los artículos previos de 1933 – 1935 se encuentra la prueba, el ensayo de 1936 es un resumen de estos resultados, esto se puede ver en Arrow y Hahn (1991: 9).

[58] Este intelectual tuvo un gran alcance en materia económica, influyó en varios economistas, entre ellos *John Nash*, quien es un pionero en Teoría de Juegos.

[59] La traducción del alemán al español es "Sobre ciertas ecuaciones de la economía y una generalización del teorema de punto fijo de Brouwer"

economía con factores de crecimiento de la producción y retornos tecnológicos constantes de *n* bienes y *m* procesos (Ibíd.: 22), donde el empleo de la técnica de demostración de punto fijo de Brouwer fue esencial para lograr su cometido[60]. Es necesario mencionar que en este trabajo no se desarrolla la teoría walrasiana, sino que es un trabajo independiente sobre un sistema económico específico, cuya metodología futuramente sería pilar para esta teoría.

Pese a los grandes adelantos en la teoría de equilibrio general que fueron mencionados, estas obras se esparcieron años después de su publicación a la comunidad intelectual internacional ya que, en ese momento era difícil traducir un texto escrito en alemán al inglés por los conflictos bélicos que acontecían en Europa con la Segunda Guerra Mundial (Ibíd.: 23).

Otros avances significativos de la teoría llegaron casi una década después, en los cuarenta, primeramente, con las investigaciones que realizaron los economistas *John Hicks* y *Paul Samuelson* sobre la distinción entre *estabilidad* y *equilibrio*, esto con miras de trazar teorías económicas dinámicas que permitieran el análisis estático comparativo; con dicho objetivo, la teoría de Walras fue provista de teoremas que no tenían una interpretación económica, como el Jacobiano de la función de exceso de demanda, pero que explicaban las condiciones necesarias y suficientes para que hubiera estabilidad del equilibrio general (Ibíd.: 23-24). Seguidamente, con la investigación de *John Nash* sobre el equilibrio para juegos de n-personas, que estuvo influenciada por la obra *Theory of Games and Economic Behavior* hecha por *John von Neumann* y *Oskar Morgenstern*, fue posible en un futuro modelar el comportamiento estratégico dentro del equilibrio general walrasiano puesto que al describir éste como un discurso en el cual jugadores artificiales escogen precios y otros utilidades marginales del ingreso se puede llegar a un punto de equilibrio (Weintraub, 2002: 191).

Una vez habiendo mencionado a los precursores del programa neowalrasiano y sus contribuciones procedemos a articular los hechos que conjugan la estricta realización de éste, lo cual nos hace establecer un punto de partida que, en este caso, es la Conferencia de junio de 1949 que tenía como título *Activity Analysis of Production and Allocation*[61], y que fuera iniciativa del director de investigación y econometrista de la *Cowles Commission*[62] de aquel momento, *Tjalling Koopmans*.

[60] Como menciona Weintraub: “el uso de argumentos de punto fijo presagiaba una literatura de veinte años por nacer; la comprensión de la interacción entre las herramientas y el razonamiento marcó la pauta para los análisis posteriores” (Weintraub, 1979: 22).

[61] La traducción del inglés al español es “Análisis de actividad de la producción y asignación”

[62] La *Cowles Commission for Research in Economics* fue fundada en 1932 por Alfred Cowles; su propósito era estudiar la relación que guardan las Matemáticas con la Economía, pero con la llegada de Koopmans como director en 1948 se tuvo un cambio de enfoque, el cual despolitizaba la teoría económica y dejaba a un lado el análisis empírico de problemas teóricos (Düppe y Weintraub, 2014: 77-81).

La realización de esta conferencia tenía como fin presentar trabajos de teoría económica, bajo la nueva perspectiva de la Cowles Commission, los cuales tuvieran innovadoras técnicas matemáticas, i.e. Teoría de Juegos, Programación Lineal, Teoría de Punto Fijo y Conjuntos Convexos (Düppe y Weintraub, 2014: 98). Dentro de los exponentes se tenían importantes figuras de la ciencia económica[63], pero serían tres personas allegadas a la Cowles Commission *Gérard Debreu*, *Kenneth Arrow* y *Lionel McKenzie* quienes con el acervo legado por esta conferencia emprenderían el siguiente paso para aplicar el rigor matemático y la axiomatización como fundamentos de la teoría económica walrasiana, donde se puede decir que las herramientas matemáticas expuestas en esta conferencia son, usando una analogía, un conjunto de piezas de un rompecabezas que sólo necesitaban ser puestas en su lugar para completar una imagen.

En un comienzo estos personajes emprendieron proyectos distintos, pero los tres enfocados a la existencia del equilibrio general competitivo y teniendo como base a von Neumann (1937), texto que les fue de gran ayuda e introducido por Koopmans con sus trabajos de investigación sobre matemáticas aplicadas (Ibíd.: 116). Para poner en contexto cómo es que estos intelectuales se embarcan en la línea de investigación que puso en acción dicha conferencia, siguiendo a Düppe y Weintraub (2014), procedemos a dar una breve biografía de cada uno de ellos:

> ***Gérard Debreu*** nació en el año de 1921 en la ciudad de Calais, Francia. Su infancia fue difícil, esto a consecuencia de la muerte de su hermana y madre, junto al suicidio de su padre, lo cual llevó a sus familiares cercanos a meterlo a un internado por el estigma de ser un hijo de un suicida. Dentro de los colegios a los que asistió Debreu la competencia era un aspecto importante, el cual lo motivó a sobresalir en el ámbito académico para obtener reconocimiento y confort. En el año de 1941 fue admitido a estudiar Ciencias en la privilegiada *École Normale Supérieure* de Paris, pero a causa de la Segunda Guerra Mundial, en 1943, se vio forzado a realizar trabajos forzados para los nazis y tomar clases en el *École* escapándose de estas labores. Durante sus estudios superiores tuvo como profesor a *Henri Cartan*, miembro fundador del grupo matemático "Nicholas Bourbaki", del cual adquirió el particular enfoque de las Matemáticas que expresa a éstas de forma axiomática y sin justificaciones filosóficas. Terminando sus estudios, Debreu tomó la decisión de aplicar sus conocimientos en Economía ya que habiendo leído la obra *À la Recherché d'une Discipline Economique* de 1943 escrita por el

[63] En Düppe y Weintraub (2014: 100) se pueden encontrar todos los participantes e invitados, pero sólo por mencionar algunos de los exponentes tenemos a: Albert Tucker, Harold Kuhn, David Gale, Oskar Morgenstern, Paul Samuelson y George Dantzig.

economista *Maurice Allais*, la cual tiene modelos matemáticos al estilo bourbakiano, pensó que su enfoque matemático podría ser puesto en uso. Más adelante, en el año 1949, después de haber trabajado como docente e investigador en el *Centre national de la recherche scientifique*, y estando interesado en el equilibrio general walrasiano y los avances realizados en Teoría de Juegos, eligió optar por la beca Rockefeller para estudiar en Estados Unidos, donde fue bien recibido por colegas bourbakianos que estaban en el departamento de matemáticas, principalmente de la Universidad de Chicago. En este mismo año Debreu realizó una visita a la Cowles Commission con el director de investigación Koopmans quien, con su nuevo enfoque para la teoría económica y notando similitud con Debreu en cuanto al enfoque de las matemáticas aplicadas, le ofreció una vacante como investigador para el año siguiente, 1950.

Kenneth Arrow nació en el año de 1921 en la ciudad de Nueva York, Estados Unidos. Proveniente de una familia judía con escolaridad, que pasó estragos por la Gran Depresión, a una temprana edad se interesó por el conocimiento, donde a los quince años aplicó para estudiar con beca en la Universidad de Columbia; esta postulación se le negaría ya que en la oficina de entrevistas de esta universidad había antisemitas. Pese a este tropiezo, Arrow fue aceptado para estudiar la licenciatura de Matemáticas en el *City College of New York*, en el cual encontró su pasión por la rigurosidad matemática. En el año 1940 se graduó con reconocimientos por su excelente desempeño académico, pero siendo que la situación económica era difícil para su familia y que además no había buenos empleos, tomó la decisión estudiar un posgrado de Estadística en la Universidad de Columbia, en el cual tuvo como tutores a los economistas *Harold Hotelling* y *Abraham Wald*. Con este par de tutores es que se adentró a temas de economía desde una perspectiva matemática, y fue en el año 1941 que terminó su maestría con una tesis de procesos estocásticos. Debido a este nuevo interés, Arrow consiguió certificaciones en economía matemática e historia económica, siendo el texto de 1939 por *John Hicks*, *Value and Capital*, una parte esencial para su consolidación intelectual dado que con este vio a la Economía de forma sistémica. Al poco tiempo, en ese mismo año fue que Arrow paró sus estudios, esto debido a la Segunda Guerra Mundial, donde pudo aplicar sus conocimientos en el cuerpo meteorológico del ejército de los Estados Unidos. Una vez terminada la guerra Arrow volvió a Nueva York y obtuvo empleo como instructor en materia económica y de asistente en estadística, pero al poco tiempo recibió una propuesta de trabajo de Koopmans, por recomendación de sus tutores, para que se uniese a la Cowles Commission. No fue hasta el año 1947 que Arrow tomó el trabajo de investigador en la Cowles Commission bajo la suposición de que al estar en una comunidad de investigación podría obtener herramientas para su disertación doctoral, la cual estaba pendiente y bajo palabra de cumplir en tiempo por la beca que le fue otorgada. Ante la presión que tenía y con el uso de sus capacidades intelectuales logró estructurar en 1948 una idea que sería una de las mayores aportaciones a la ciencia económica, la agrupación coherente de preferencias a través de la agregación de preferencias individuales. En el año de 1949, Arrow dejó su puesto en la Cowles Commission para irse a trabajar como profesor asistente en la Universidad de Stanford, aunque nunca dejando de estar comunicado con la comunidad económico-matemática de dicha institución.

Lionel McKenzie nació en el año de 1919 en la ciudad de Georgia, Estados Unidos. Desde niño le fue inculcado el estudio, con lo cual quedó interesado en la Física. Cuando estaba cursando estudios superiores, McKenzie se interesó en los números y en la economía cuando leyó *La Riqueza de las Naciones* de *Adam Smith*. Debido a la Gran Depresión vio con gran interés los problemas económicos que acontecían por lo cual decidió transferirse a la Universidad de Duke para tomar cursos de Economía. Al terminar sus estudios de licenciatura en 1939, sus planes se vieron afectados por la Segunda Guerra Mundial, y en vez de irse a Reino Unido a estudiar otros cursos, y gracias a recomendaciones por su buen desempeño escolar, ingresó a la Universidad de Princeton. En su nueva casa de estudios McKenzie tuvo como profesor a *Oskar Morgenstern*, quien en su curso enseño críticamente el trabajo de *John Hicks*, *Value and Capital*, el cual analizaba un equilibrio competitivo. A raíz de la comunicación que tenía Morgenstern con *John von Neumann* es que conoció los trabajos de estos junto a los de *Abraham Wald*, pero cuando iba a comenzar su investigación doctoral en 1942 fue llamado a cumplir su servicio militar, el cual terminaría en 1945. Terminando la guerra buscó un trabajo, obteniendo en 1946 el puesto de instructor en el *Massachusetts Institute of Technology* y donde encontró a *Paul Samuelson*, quien en un curso le enseñó teoría económica. Después de un breve tiempo, McKenzie decidió volver a retomar sus estudios, teniendo como objetivo ir a la Universidad de Oxford, donde tuvo a Hicks como su supervisor doctoral. Pasando dos años en Oxford trató de conseguir un buen trabajo en Estados Unidos a causa de no haber pasado su examinación doctoral, arribando así en 1948 a Duke como profesor asistente. Durante los primeros años después de haber regresado, y con el pesar de haber fracasado en su objetivo doctoral, McKenzie comenzó a reestructurar lo que había hecho allá, encontrándose con trabajos de Koopmans, lo cual lo alentó a visitarlo en la Cowles Commission. Con el ímpetu de progresar en su trabajo como profesor solicitó estudiar Econometría en la Universidad de Chicago en 1950, donde al ser aceptado pudo tomar clases con Koopmans, además de asistir a las reuniones de la Cowles Commission.

En 1949, cuando Arrow trabajaba en la Universidad de Stanford como profesor asistente emprendió una investigación sobre la existencia del equilibrio en una economía competitiva bajo las condiciones eficiencia paretiana; para la culminación de esta investigación en 1951, y presentándola como reporte técnico a la Cowles Commission, recurrió a trabajos de programación lineal hechos por Koopmans y al equilibrio de juegos para n-personas de Nash (Ibíd.: 137).

En cuanto a McKenzie, quien en esos momentos asistía a clases de Koopmans en la Universidad de Chicago, realizó una investigación sobre el modelo de intercambio internacional de *Frank Graham*, que sería el preámbulo para un trabajo más sofisticado que demostraría la existencia de equilibrio de una economía competitiva (Ibíd.: 142). Una vez más, cambiando de aires, para 1951 McKenzie dejó sus estudios en Chicago y regresó a la Universidad de Duke para ostentar un puesto remunerado. Como Koopmans le hizo llegar sugerencias al trabajo de investigación que había dejado pendiente, se vio motivado a continuar con la misma, llegando así a consultar los artículos de von Neumann (1937) y Wald (1936) por su cuenta, y finalizar su escrito con el título *On Equilibrium and Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems* (Ibíd.: 144).

En 1952, al poco tiempo de que Debreu leyera el reporte de Arrow como encargo de Koopmans por su interés en temas de equilibrio general derivados de las lecturas que tuvo en Cowles Commission[64] contactó a Arrow con el fin de hacerle comentarios, donde expresó que había un error en su metodología, junto a la crítica de teorizar su modelo bajo el esquema de juegos de Nash (Ibíd.: 145). En días subsecuentes Arrow y Debreu intercambiaron correspondencia para enviarse materiales de apoyo, opiniones y correcciones a los trabajos que cada uno iba realizando; no pasó mucho tiempo para que Arrow le propusiera a Debreu trabajar conjuntamente en esta investigación, donde Debreu,

[64] Dentro de estas lecturas estaban Wald (1936), que fue traducido en 1951, que hizo uso del teorema de punto fijo de Kakutani junto a la cita del trabajo von Neumann (1937) (Düppe y Weintraub, 2014: 139).

además de aceptar, dejó en claro que su aportación matemática sería diferente a los intereses de Arrow para publicar dicha investigación a una audiencia de economistas (Ibíd.: 149).

Dentro de las principales discusiones que tuvieron Arrow y Debreu en una primera instancia respecto a un modelo que explicase la existencia de equilibrio en una economía competitiva se mencionaron los siguientes puntos:

1) El pronunciamiento de Debreu que decía que las dotaciones iniciales necesitaban ser estrictamente positivas era para Arrow erróneo ya que, si se asume la existencia de variables laborales se estaría diciendo que un individuo trabajará aún si no tiene otra fuente de ingresos (Ibíd.: 148-149). Con tal sugerencia, Arrow buscaba darle sentido económico al modelo que elaboraban, mientras que Debreu utilizaba estos supuestos solamente para evaluarlo matemáticamente.

2) El axioma de Debreu sobre la generalización de la concepción de la saturación de bienes públicos, que a un precio nulo serían infinitamente demandados, le pareció a Arrow problemático en el modelo por la misma razón del punto anterior (Ibíd.: 150). Un problema técnico que genera el hecho de que a un precio nulo la demanda de ese bien sea infinita es la incompatibilidad con el supuesto de continuidad de la función exceso de demanda, pues si esta función es continua en un conjunto compacto (el simplex de precios) debe estar acotada, lo cual no ocurre si uno de los precios es cero (Arrow y Hahn, 1991: 21).

3) La utilización del teorema de punto fijo de Kakutani, el cual Debreu visualizó en los textos de la Cowles Commission, fue aceptado con renuncia por Arrow dado que la generalidad de su modelo podría resultar en uno menos pedagógico y menos verificable empíricamente (Düppe y Weintraub, 2014: 151).

A finales del año de 1952, Debreu y McKenzie presentaron los avances de sus escritos en la *Econometric Society* de Chicago, donde ambos se percataron que tenían una metodología similar para resolver un mismo problema (Ibíd.: 153). De forma general, como dicen Düppe y Weintraub:

> Tanto los artículos de Arrow-Debreu como los de McKenzie establecieron la existencia de un equilibrio competitivo para modelos de equilibrio general adecuados, ambos documentos se basaron en la tradición de Wald, y ambos documentos emplearon argumentos de punto fijo (Düppe y Weintraub 2014: 98; traducción propia).

Después de este acontecimiento, McKenzie envió su escrito a revisión para que se publicase en *Econometrica*, esto con el objetivo de tener la primera acreditación de este tipo de trabajo, pero, a consecuencia de haberse enfrentado con un par de dictaminadores irresponsables, uno de los cuales era *John Nash*, y después de cambiarlos, su escrito tardó en ser aceptado hasta abril de 1954 (Ibíd.: 168). En el caso de Arrow y Debreu, estos intercambiaron ideas para culminar y mandar su trabajo escrito a revisión para su eventual publicación en *Econometrica*, la cual ocurrió cuatro meses después que el de McKenzie; para esta última presentación determinaron las referencias bibliográficas que utilizarían, explicaron los propósitos de su texto -desde un enfoque normativo- y asignaron una terminología adecuada para los conceptos empleados, e.g. "exceso de demanda" en vez de "demanda neta" (Ibíd.: 160-163).

Ulteriormente a la publicación de ambos escritos, fue Debreu quien se adentró más en esta línea de investigación puesto que no estaba del todo satisfecho con la demostración de existencia de equilibrio que realizó con Arrow (Ibíd.: 170). A la par de la publicación del escrito de Debreu con el título *Market Equilibrium* en 1956, otros matemáticos, *David Gale* y *Hukukane Nikaido*, estaban escribiendo sobre el mismo tema de forma similar, lo cual devendría en una generalización de la investigación como *lemma de Debreu-Gale-Nikaido* (Ibíd.: 173).

Continuando con el programa de investigación neowalrasiano y estando en la Universidad de Yale como profesor asociado, Debreu escribió a su criterio y con recomendaciones de sus amigos matemáticos bourbakianos de la Universidad de Chicago el texto *Theory of Value* en 1959 (Ibíd.: 173). *Theory of Value* llevaría a Debreu a ganar el Premio Nobel de Economía en 1983 por sus aportaciones a la Teoría del Equilibrio General, pero este texto no representaba un nuevo avance del programa de investigación (Ibíd.: 175), sino que era una presentación matemática rigurosa de Arrow y Debreu (1954) y una reimpresión de Debreu (1956), donde hizo explícito el uso del teorema de punto fijo de Kakutani (Ibíd.: 152), además de remover conceptos que hicieran referencia al equilibrio de Nash (Ibíd.: 147).

Las críticas a *Theory of Value* no se hicieron esperar, la perspectiva de Debreu de despojar a la teoría económica de contenido empírico fue el punto central de la discusión, resaltando la siguiente observación: "la Economía no es Matemáticas. El rigor es una condición necesaria pero no suficiente para una valiosa contribución a la teoría económica" (Shubik, 1961: 133 citado en Düppe y Weintraub 2014: 177; traducción propia)

A pesar de las críticas de su texto, Debreu hace una sólida defensa de su trabajo, esto desde la perspectiva normativa en la cual el modelo de equilibrio general se generaba o, dicho de otra manera, con sus propias palabras del prefacio del texto:

> La Teoría del Valor se trata aquí con las normas de rigor de la escuela formalista contemporánea de matemáticas. El esfuerzo hacia el rigor sustituye resultados y razonamientos que no eran correctos por los que lo son, pero ofrece también otras ventajas. […] La fidelidad al rigor dicta la forma axiomática del análisis donde la teoría, en sentido estricto, está lógicamente totalmente desconectada de sus interpretaciones (Debreu, 1959: x)

Con lo anterior, Debreu estipulaba que su modelo teórico estaba bajo un estricto discurso formal fuera de cualquier interpretación ajena al que se defina en el mismo. De tal forma, una crítica exterior a su modelo por falta de realismo no sería tan importante como una crítica hacia el interior de su sistema y aparato deductivo.

Una contribución de Debreu es que con los trabajos que realizó formó la escuela económica neowalrasiana, lo cual permitió que la comunidad matemática pudiera entrar y teorizar en esta ciencia sin haberse formado en ella[65] (Düppe y Weintraub, 2014: 180), algo que se sigue manteniendo hasta la fecha como lo comenta Boland:

> Hoy en día, los modernos departamentos de Economía […] están dominados por la cultura de los departamentos de Matemáticas, que valorizan la sofisticación lógica y el rigor más que la cuestión de *realismo*. Y, por su puesto, varios departamentos de Economía incluyen investigadores de esta cultura, que se dedican a la construcción de modelos de equilibrio formales (Boland 2017: 63; traducción propia).

Siendo que la ciencia económica es reconocida como una secuencia de modelos (Weintraub 1979: 1) que utilizan desarrollos y herramientas de modelos predecesores, podemos catalogar al programa neowalrasiano como un punto crucial de esta secuencia. Es a partir de este programa que la teoría neoclásica cambió su análisis -el cual hoy en día es estándar-, las herramientas matemáticas en éste permitieron reformular los fundamentos de conceptos microeconómicos –beneficios, decisiones de agentes económicos, etc.-, los cuales son compatibles con modelos más complejos como los macroeconómicos por estar construidos desde una misma metateoría. El alcance de la axiomatización formal en la teoría económica, principalmente en el equilibrio general, es expresado en Weintraub:

> Para un teórico de microeconomía, entonces, un estudio de las micro fundamentaciones de la macroeconomía es coexistente con el análisis del equilibrio general. Especificaciones más

[65] Como se comenta en Düppe y Weintraub (2014) hay un importante cúmulo de economistas-matemáticos que partieron de la escuela neowalrasiana, los cuales fueron estudiantes de Debreu y que actualmente son reconocidos por sus trabajos económicos, e.g. *Andreu Mas-Colell* y *Hal Varian*.

fructíferas y detalladas de un esquema desagregado de inter-agentes lleva naturalmente a proposiciones macroeconómicas. Para extender esos teoremas hay que replicar la estructura revelada en un análisis macroeconómico más agregado y menos riguroso, con esa proposición macroeconómica podría decirse que ha sido provista de fundamentación lógica (Weintraub 1979: 10; traducción propia).

II.3 Demostración de la existencia del equilibrio general competitivo

Con el objetivo de presentar al lector el núcleo del programa neowalrasiano, en este apartado demostraremos la existencia del EGC para una economía de propiedad privada con los principios establecidos en *Theory of Value*.

Es menester mencionar que para tal objetivo utilizaremos, primeramente, la explicación completa del modelo Arrow-Debreu-McKenzie realizada por Weintraub (1979) y, seguidamente, el desarrollo matemático de la demostración de la existencia del EGC de este modelo hecho por Levin (2006). Lo anterior por un lado aminora considerablemente la rigurosidad matemática que se encuentra en el texto canónico, pero por el otro lado permite que se presente de forma práctica y analítica, donde ampliamente se sugiere antes consultar la obra canónica con tal de ver el sistema axiomático completo.

Antes de comenzar, también es imprescindible ofrecer al lector las definiciones de los conceptos matemáticos que se utilizan en dicho modelo y demostración, por lo cual recurrimos a Clapham y Nicholson (2009) por su impecable glosario matemático:

- Conjunto: Una colección bien definida de objetos o elementos.
- Elemento: Objeto de un conjunto.
- Conjunto convexo: Un conjunto es convexo si el segmento de recta que une dos puntos dentro de éste se encuentra completamente dentro del mismo.
- Espacio euclidiano: La línea numérica R, el plano R^2 y el espacio en 3 dimensiones R^3 se pueden generalizar como un espacio n-dimensional R^n con coordenadas (x_1, x_2, ..., x_n) en las que las operaciones de adición y multiplicación por un escalar se han extendido de la manera obvia. Aunque R^n es difícil de visualizar cuando $n > 3$, proporciona un marco muy potente para el análisis multivariable.
- Espacio topológico: Un conjunto de X dotado de un conjunto asociado T de todos sus subconjuntos que contiene al conjunto vacío y al mismo conjunto X, y que se cierra bajo unión e intersección finita de elementos de T. Los miembros de T son los conjuntos abiertos de X. Cualquier conjunto de puntos que componen una figura geométrica y que satisfacen estas restricciones es un espacio topológico, el cual está determinado por las propiedades de sus conjuntos abiertos.

- Conjunto acotado: Un conjunto se considera acotado cuando todos los objetos o elementos de éste están a una distancia finita de cualquier punto dado.
- Conjunto compacto: Un subconjunto S de un espacio topológico X es compacto si para cada colección de conjuntos abiertos de S existe una colección de subconjuntos finita de S.
- Conjunto cerrado: Es el complemento de un conjunto abierto dentro de un espacio métrico.
- Subconjunto: El conjunto A es un subconjunto del conjunto B, simbolizado ($A \subset B$), si cada elemento de A es un elemento de B.
- Vector: Un segmento de recta dirigido que tiene magnitud.
- Quasi-orden: Es una relación binaria, el símbolo ≤ se puede utilizar como dispositivo notacional para la relación. Sin embargo, debido a que no son necesariamente asimétricos, es posible que no se aplique parte de la intuición ordinaria asociada al símbolo ≤. En otras palabras, cuando $c \leq b$, se puede decir que "b" cubre a "c", que "c" precede "b", o que "b" se reduce a "c". Ocasionalmente, se utiliza la notación $\lesssim$ en lugar de ≤.
- Sucesión: Un listado infinito de números reales$\{a_k\}$que tiene la forma a_1, a_2, a_3, …, donde cada uno de ellos se le llama términos de la sucesión.
- Límite de una sucesión: Se dice que la sucesión a_1, a_2, a_3, ..., tiene el límite l si, dado cualquier número positivo ε (por pequeño que sea), hay un número N (que depende de ε) de tal manera que, para todos los $n > N$, a_n yace entre $l - \varepsilon$ y $l + \varepsilon$.
- Función: Una función f de S a T, donde S y T no son conjuntos vacíos, es una regla que asocia a cada elemento de S (dominio) un elemento único de T (rango); esto es sinónimo de mapeo.
- Máximo: Asumamos que f sea una función real y D un subconjunto de su dominio. Si hay un punto c en D tal que $f(c) \geq f(x)$ para todas las x en D, entonces f(c) es el valor máximo de f en D.
- (arg máx): Es el valor de x en el que se alcanza el máximo de una función.
- Optimización: El proceso de encontrar la mejor solución posible a un problema. En matemáticas, esto a menudo consiste en maximizar o minimizar el valor de una determinada función, tal vez sujeto a ciertas restricciones.
- Simplex (simbolizado como $\triangle$): La figura geométrica más simple en una dimensión dada, por lo que el segmento de recta, el triángulo y el tetraedro son los simplex en una, dos y tres dimensiones, respectivamente.
- Correspondencia: Una correspondencia f: $X \rightarrow Y$ asocia cada x perteneciente a X con un subconjunto $f(x)$ de Y. Dos consideraciones a tomar en cuenta: 1) una correspondencia $f(x)$ puede ser vacía y, 2) una correspondencia puede ser considerada como función si $f(x)$ consiste en un elemento para cada x que pertenece a X.
- Correspondencia convexa: Sea f: $A \rightarrow B$ una correspondencia. f es convexa si y sólo si para cualquier x y y que pertenecen a A y cualquier $0 < \lambda < 1$ se tiene que $f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$. La convexidad de una función continua en un dominio compacto en R^n garantiza la existencia de un mínimo y la unicidad de éste.
- Correspondencia hemicontinua superior: Sean X, Y dos espacios topológicos y f: $X \rightarrow Y$ una correspondencia. Decimos que f es hemicontinua superior en x si $f(x)$ no es vacía y si, para cada

sucesión $\{x_n\}$ que tiende a x y toda sucesión $\{y_n\}$ tal que y_n pertenece a $f(x)$ para toda n, entonces existe una sucesión de $\{y_n\}$ cuyo punto límite y esté en $f(x)$.

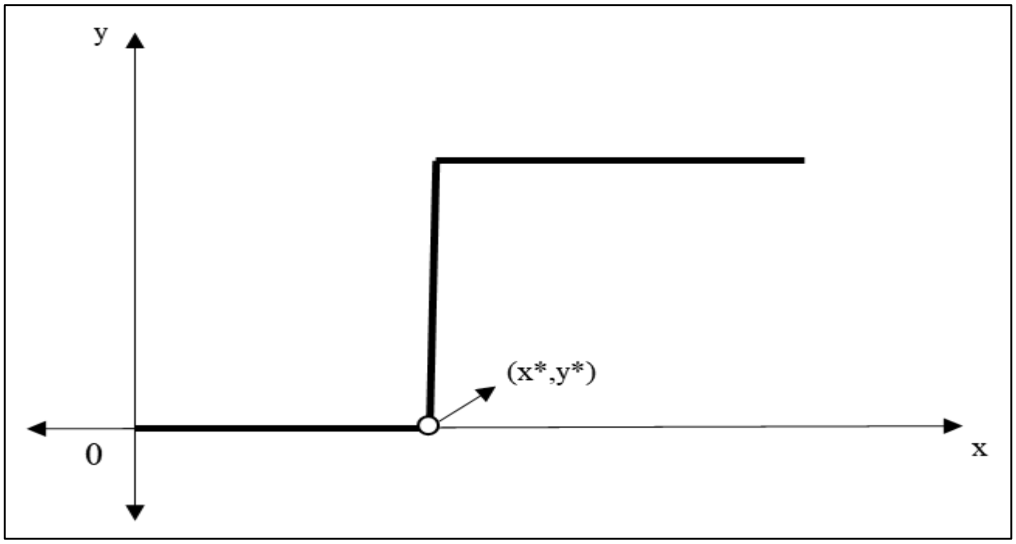


Imagen 6. Representación gráfica de una correspondencia hemicontinua superior. Si tenemos una correspondencia f: X → Y, la sucesión $\{x_n\}$ que converge a x* por la izquierda, y los valores y_n que pertenecen a $f(x_n)$, que para este caso sería $y_n = 0$ para toda x_n, podemos ver que la sucesión $\{y_n\}$ se aproxima a y* = 0 tal que y* = 0 pertenece a la correspondencia de x*. Por lo tanto, y* pertenece a f (x*) en el punto (x*, y*).

- Punto fijo: Asumiendo que S es el conjunto de puntos en el plano, una transformación del plano es una correspondencia uno a uno de S a S. Las transformaciones más importantes del plano son las transformaciones lineales, que son aquellas que, en términos de coordenadas cartesianas, pueden ser representadas por ecuaciones lineales. Si para algún s* de S tenemos que s* = T(s*), entonces llamamos a s* punto fijo de T.

Establecemos que existe un número finito de m consumidores, n productores y l bienes (económicos). Definimos: $X_i \subset R^l$ es el conjunto de consumo para el i-ésimo consumidor, siendo uno de sus elementos x_i un l vector; $Y_j \subset R^l$ es el conjunto de producción para el j-ésimo productor, siendo uno de sus elementos y_j un l vector; $w \in R^l$ es un punto l vector, que representa el total de recursos dados en la economía. Cada vector de l componentes entonces representa una "canasta" de bienes. Cuando se representan las canastas de bienes como puntos dentro de un l espacio euclidiano se tiene como implicación que los bienes pueden ser divisibles, homogéneos, al igual que el espacio donde se conceptualizan.

Una economía E está dada por los siguientes componentes:

1) Un conjunto no vacío $X_i \subset R^l$ donde la relación $\succsim_i$ para $i = 1, 2, \ldots$ n está dada en X_i. El símbolo $\succsim_i$ representa el concepto de cuasi-orden completo para cada individuo que

se expresa en términos comunes como "para un individuo *i*, la canasta *x* es tan deseable como la canasta *y*". Este símbolo relacional tiene las siguientes propiedades: *completitud* significa que cualquier par de canastas *x* y *y* pueden ser comparadas por cualquier individuo; *transitividad* establece que, si *x* es tan deseable como *y*, y si *y* es tan deseable como *z*, entonces *x* es tan deseable como *z*; *reflexividad* implica que *x* es tan deseable como x misma; *continuidad* consiste en que, si *x* es tan deseable como *y*, y *z* es una canasta casi idéntica a *x*, entonces *z* es tan deseable como *y*.

2) Un conjunto no vacío $Y_j \subset R^l$.

3) Un punto $w \in R^l$.

El *estado* de una economía *E* se representa como una conjugación de los vectores de consumo y producción $(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$ donde cada x_i y y_j son *l* vectores. Sumando estas expresiones se obtiene su forma agregada:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = x \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = y$$

"El exceso de demanda" de la economía es z = x – y – w. Con ello, el *equilibrio de competitivo* de *E* es un *estado* de *E* donde $z = 0$. Al tomar los supuestos mencionados decimos que los bienes son numéricamente finitos y completamente divisibles. Los consumidores tienen estructuras de preferencias sensibles, y los recursos son dados para la economía en cuestión. Un estado de equilibrio para la economía es uno en el que las demandas netas acaban con los recursos disponibles.

Para la concepción de una economía de propiedad privada ε se agrega la asunción de que los consumidores son poseedores de los recursos, además de que reciben las ganancias de la producción. Entonces, sea w_i los recursos que posee el consumidor *i* para cada $w_i \in R^l$, y θ_{ij} la parte de las ganancias de la firma *j* que es propiedad del consumidor *i*, donde $\theta_{ij} \geq 0$ y la suma de θ_{ij} para cada productor *j* es igual a 1.

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = w \qquad \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$$

El modelo básico de Arrow-Debreu-McKenzie es aquel de una economía de propiedad privada ε que está dada por:

1) Una economía $((X_i, \succsim_i), Y_j, w)$, donde i y j son sucesiones que representan al i-ésimo consumidor y al j-ésimo productor que van desde uno a infinito.

2) Para cada i, un punto $w_i \in R^l$ que cumpla con la asunción de que los consumidores poseen los recursos.

3) Para cada par (i, j), un número real no negativo θ_{ij} que cumpla que para cada firma j los consumidores son propietarios en una proporción θ.

El *equilibrio de mercado* de ε tiene (m+n+1)-ples $((x^*_i), (y^*_j), p^*)$ puntos en R^l, donde cada punto es un vector que cumple:

1) x^*_i es un máximo en $\{x_i \in X_i : (p^*)(x_i) \leq (p^*)(w) + \sum_{j=1}^{n}(\theta_{ij})\ (p^*)\ (y_j)\}$ respecto a $\succsim_i$ para cada i y j; para cada individuo i, x^*_i es la canasta que, entre todas las canastas de consumo asequibles, es la más deseable.

2) El beneficio es definido como la suma de todos los ingresos menos la suma de todos los desembolsos. y^*_j maximiza el beneficio relativo a p^* en Y_j para cada j cuando el primero alcanza en la función un máximo.

3) De tal manera, $x^* - y^* = w^*$.

Un equilibrio puede ser pensado como un conjunto de precios no negativos, uno para cada uno de los *l* bienes donde, si cada uno de los consumidores y productores individualmente optimiza al tomar esos precios como dados, la oferta y demanda del mercado resultante se balanceará y producirá precios de mercado idénticos a aquellos que fueron tomados como dados. La existencia del equilibrio es equivalente a la posibilidad lógica de decisiones reconciliables.

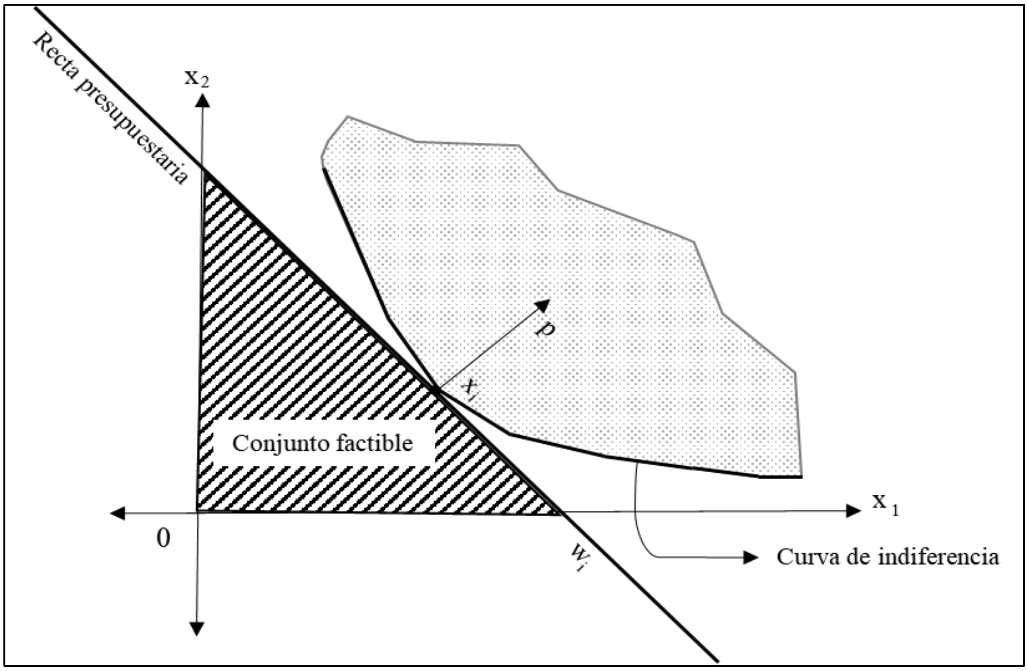


Imagen 7. Representación gráfica de una canasta óptima dada la tangencia de la recta presupuestaria (w) de un individuo *i* y el conjunto de otros bien de la economía, el vector de precios saliente del óptimo encontrado se considera como tal dado que maximiza la elección del consumidor.

Para la heurística de la demostración de existencia del equilibrio de mercado se parte con un vector de precios *p* no negativo; con estos precios cada consumidor y productor optimizarán. Las cantidades de mercado resultantes generarán un exceso de demanda u oferta en cada uno de los *l* mercados. Si hay un exceso de demanda en el mercado *l*, incrementará el *l*-ésimo componente de *p*; si se obtiene un exceso de oferta, se reducirá ese *l*-ésimo componente de *p*. Debido a lo anterior, se obtiene un nuevo vector de precios *p´*, y así sucesivamente se repite el mismo procedimiento hasta que los mercados se vacíen simultáneamente.

Los vectores de precios que se toman en la heurística referida están dentro de la figura geométrica denominada simplex, que es el conjunto convexo de puntos en el espacio *l* de bienes en la economía que se obtiene por medio de la normalización, la cual consiste en generar un valor unitario con la suma de cada precio sobre la suma total de los precios. De tal manera, procedemos a definir a ψ como la correspondencia de exceso de demanda que va de del conjunto de vectores precios, el ortante no negativo Ω de *l* dimensiones que se convierte en el simplex en ese conjunto a el multi-conjunto de excesos de demanda de los bienes.

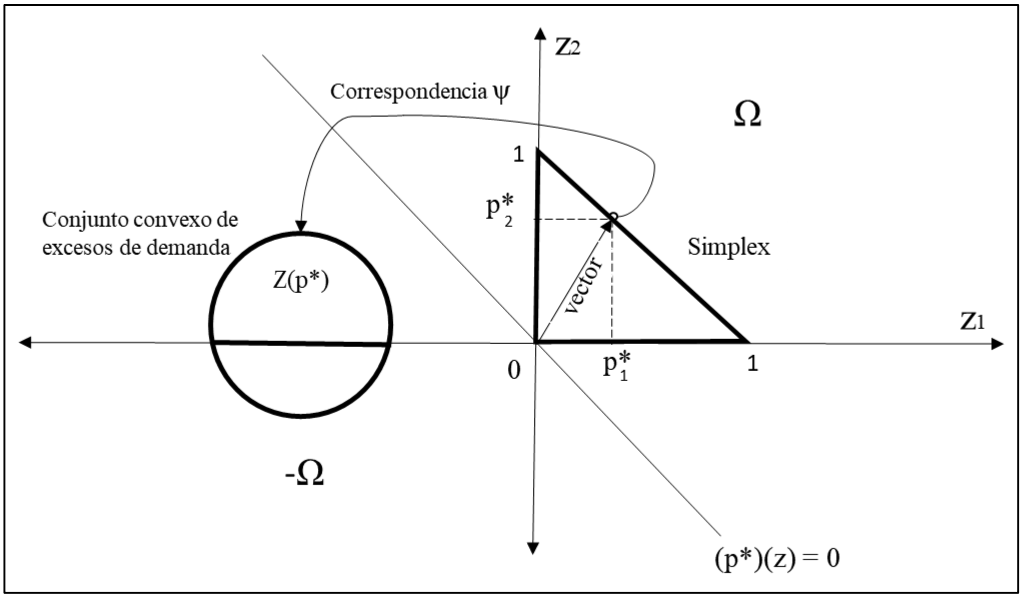


Imagen 8. Representación gráfica de la correspondencia ψ en dos dimensiones, la cual asocia un elemento del simplex de precios con un conjunto convexo de los excesos de demanda que se encuentra en el ortante negativo Ω.

El problema formal proviene de establecer un punto fijo para la correspondencia de exceso de demanda ψ. La existencia de puntos fijos de mapeos requiere de información concerniente al propio mapeo, i.e. los diversos conjuntos que juegan un papel en la construcción de la correspondencia. De esta forma, las pruebas de existencia de equilibrio para economías de propiedad privada involucran tener varías restricciones en los conjuntos de consumo y producción.

Para Debreu, la demostración de existencia del equilibrio necesariamente requiere que las expresiones matemáticas no oscurezcan las ideas principales, las cuales se reducen al siguiente teorema: *La economía de propiedad privada* $\varepsilon = ((X_i, \succsim_i), Y_j, w_i, \theta_{ij})$ *tiene un equilibrio si, para cada* $i = 1, 2, \ldots, m$,

(a) X_i es un conjunto cerrado, convexo, y tiene un límite inferior. El límite de una sucesión de canastas de consumo factibles es a su vez una canasta factible. Combinaciones convexas de canastas factibles son factibles y hay una “peor” canasta.

(b) No hay saciedad de consumo en X_i. Para cualquier canasta de consumo factible hay otra canasta que contiene más “cosas” que generan más satisfacción.

(c) Para cualquier x'_i en X_i, se tienen los conjuntos $\{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x'_i\}$ y $\{x_i \in X_i : x'_i \precsim_i x_i\}$. Si para un individuo *i* hay una sucesión de canastas factibles donde al menos todas son tan deseables que la canasta x^1, entonces el límite de esta sucesión es también una canasta factible tan deseable como x^1.

(d) Si x^1_i y x^2_i son dos puntos en X_i y $t \in (0,1)$, entonces $x^2_i \succsim_i x^1_i$ implica que $t\, x^2_i + (1 - t)\, x^1_i \succsim_i x^1_i$. Si para un individuo *i se* considera que x^2 es tan deseable como x^1, entonces cualquier combinación convexa de x^2 y x^1 debe también ser considerada tan deseable como x^1.

(e) Hay un x^0_i en X_i tal que $x^0_i < w_i$ para toda *i* y para toda $h = 1, 2, \ldots, n$. Para cualquier individuo *i* y cualquier bien *h*, hay algún consumo factible del bien *h* que es menor que la dotación del bien *h* de una persona *i*.

(f) $0 \in Y_j$. Cualquier productor siempre tendrá la oportunidad de no usar bienes para producir nada.

(g) Y es un conjunto cerrado y convexo. El límite de la sucesión de producciones factibles es también una producción factible que no está sujeta a retornos crecientes.

(h) $Y \cap (-Y)$ es el conjunto vacío. La producción es irreversible.

(i) $Y \cap \Omega \subset \{0\}$. La libre producción es imposible ya que, se requiere de productos para generar productos.

Ahora bien, para dar comienzo a la demostración por pasos de la existencia del EGC, realizada por Levin (2006), se tiene que hacer explícito que ésta es diferente a la que se presenta en *Theory of Value* por su procedimiento. Ambas poseen los mismos elementos teóricos y hacen uso del mismo teorema de punto fijo de Kakutani, por lo cual decimos que en Levin (2006) se maneja una demostración *à la* Debreu.

Primero comenzamos por enunciar el *Teorema de* Kakutani, que se tomara como dado:

Teorema 1 (Kakutani). *Supongamos que A en R^n es convexo, cerrado y acotado, y que f: $A \rightarrow A$ es una correspondencia convexa y no vacía para toda $x \in A$ que a su vez es hemicontinua superior. Entonces existe un* $x \in$ A tal que $x \in f(x)$.

Paso 1 (Normalización de precios). La siguiente normalización de los precios relativos genera el simplex de precios △ que, dado el conjunto de vectores de precios, se define como:

$$\triangle = \{p \in R^l{}_+ : \frac{p_1}{\sum_{l=1} p_l} + \quad \ldots \quad + \frac{p_l}{\sum_{l=1} p_l} = 1\}$$

Paso 2 (Demanda agregada). Para definir las demandas marshallianas individuales como correspondencias hemicontinuas superiores ψ^i en el simplex de precios se define un conjunto compacto T que toma en cuenta el supuesto (e), esto para representar la restricción presupuestaria dada por las dotaciones del individuo *i* dentro del espacio *l*.

$$T = \{x \in R^l{}_+ : x \leq \sum w_i\}$$

Para cada individuo *i* perteneciente al conjunto *I* de la economía hay una correspondencia $\psi^i(p)$, tal que se busca el valor de un elemento *p* del simplex de precios en el cual el valor de la correspondencia es el de la máxima utilidad de *i*. Este elemento *p* se asocia con una canasta x_i del conjunto compacto definido por la recta presupuestaria de *i*, lo cual se expresa como un par ordenado *(p, x)*. $B^i(p)$ es la correspondencia entre el simplex y el conjunto compacto dado por la restricción presupuestaria ambos referidos al espacio euclidiano de dimensión *l*.

$$\psi^i(p) = arg \max_{c \in Bi(p) \cap T} u_i(\mathrm{c})$$

La correspondencia $\psi^i(p)$ en la que *p* maximiza la utilidad de *i* es hemicontinua superior para cada *i* y debido a que si $u^i(c)$ es cóncava, ψ^i es convexa. La importancia de asumir el punto (e), $w^i > x^i_0$, es crucial aquí dado que, si $w^i_h = 0$ para algún bien *h*, entonces la correspondencia no sería continua cuando $p_h = 0$.

La correspondencia de demanda agregada

$$\Psi^D(p) = \sum \psi^i(p) = \{ x: \exists\, x_1 \in \psi^1, \ldots, x_1 \in \psi^I \mid x = \sum x_i \}$$

es tal que $\Psi^D: \triangle \rightarrow T$ es una correspondencia hemicontinua superior en los precios por lo que sabemos de $\psi^1, \ldots, \psi^I$.

Paso 3 (Subastador de precios). Se introduce al subastador de precios, el cual tiene una correspondencia definida $\Psi^S: \triangle \rightarrow T$ como

$$\Psi^S(x) = arg \max_{p \in \triangle} \; p\,(x - w)$$

Este proceso de tanteo de precios se pone en práctica mediante $\Psi^S(x)$, que es una correspondencia convexa y hemicontinua superior en los precios.

En $\Psi^S(x)$, donde x y w representan los agregados de las canastas de bienes y las dotaciones, respectivamente, el subastador busca un nuevo elemento p del simplex de precios para el cual el valor de la correspondencia sea un máximo respecto al exceso agregado de demanda; dicho de distinta manera, tantea hasta que este valor sea igual a 0. Lo anterior se logra ya que, cuando el subastador escoge un elemento p se le asocia un elemento x del conjunto compacto de la restricción presupuestaria, lo que permite observar si hay un exceso de demanda positivo o negativo en el mercado. Se dice que el subastador dejará de escoger precios hasta que haya un par ordenado óptimo (p^*, x^*) que provoque que el agregado de exceso de demanda sea nulo, lo cual también podría denominarse como el vaciado de mercado.

Paso 4 (Punto fijo). Se define la correspondencia $\Psi: \triangle \times T \rightarrow \triangle \times T$ como

$$\Psi(p, x) = (\Psi^D(p), \Psi^S(x))$$

que es el producto cartesiano de las correspondencias hemicontinuas superiores y no vacías que tiene las mismas propiedades que sus factores. Se aplica el *teorema de Kakutani* que establece la existencia de un punto fijo: $(p^*, x^*) \in \Psi(p^*, x^*)$.

Paso 5 (Equilibrio walrasiano). (p^*, x^*) es un equilibrio walrasiano, en otras palabras, p^* es un equilibrio walrasiano cuando se asocia con las demandas individuales $x_1^*, \ldots, x_I^*$ que en el agregado hacen x^*.

$x^* \in \Psi^{D}(p)$, entonces existe $x_1^*, \ldots, x_I^*$ que suman x^* y tienen la propiedad de que cada $x_i^* \in arg \max_{c \in Bi(p*) \cap T} u_i(c)$. La optimización de cada individuo verifica que $x_i^* \in arg \max_{c \in Bi(p*)} u_i(c)$, con lo cual $p^* \in \Psi^{P}(x^*)$ de manera que

$$0 \geq p^*(x^* - w) \geq p\,(x^* - w) \text{ para cualquier } p \in \triangle.$$

Esta desigualdad implica que $x^* - w \leq 0$, así que $x_i^* \in arg \max_{c \in Bi(p)} u_i(c)$ porque si hubiera una $c \in B_i(p)$ con $u_i(c) > u_i(x_i^*)$ y $t > 0$, donde $tc + (1 - t)\, x_i^* \in B_i(p) \cap T$, y por concavidad de u_i, entonces $u_i(tc + (1 - t)\, x_i^*) > u_i(x_i^*)$, lo que sería una contradicción.[66]

Para mostrar el vaciado de mercado, i.e. $x^* = w$, se hace lo siguiente, por la Ley de Walras, tenemos que $(p^*)(x^*) = (p^*)(w)$. De esta forma, si $x_l^* - w_l < 0$ para algún bien l, debemos tener que $p_l^* = 0$ para alcanzar el óptimo del subastador de precios. *Q.E.D*

Una vez habiendo demostrado la existencia del EGC *à la* Debreu es que podemos hacer un análisis comparativo entre los planteamientos de Walras y Debreu. La línea de investigación de Walras, explicada por Ekelund y Hébert (2005), muestra que con el uso del concepto de *rareté* se abren las puertas al cálculo diferencial, lo cual permite que en un mundo irrealista donde se asignan recursos de forma uniforme, además de ser ilimitados, los agentes de ese mercado buscan intercambiar estos, bajo su restricción presupuestaría de dotaciones iniciales, hasta estar satisfechos con su dotación por medio del intercambio de un bien que se expresa en todos los demás dentro del mercado. A esto se le añade el hecho de que las demandas individuales pueden agregarse y que las elecciones de cada agente económico conducirán a un equilibrio dentro del mercado. Cada uno al maximizar su utilidad que está en función de su dotación reajusta el mercado, esto hasta que todos ellos estén satisfechos con su dotación.

En cuanto al planteamiento de Debreu, aunque éste toma parte de la teoría walrasiana, la forma en que satisface la coherencia económica dentro de un mercado competitivo es muy diferente. La demostración por pasos de la existencia del EGC resume propiedades abstractas de conceptos económicos que encajan en la estructura sintáctica del modelo. En esta estructura se comienza definiendo un conjunto de vectores de precios y otro de demandas marshallianas que sean convexos, no vacíos y acotados. Por practicidad estos conjuntos se transforman en otros más reducidos, el de

[66] Aunque se exprese verbalmente, esta es una demostración indirecta por *reductio ad absurdum*. En la siguiente sección se explicará cómo es su procedimiento.

precios se convierte en un simplex cuando se normalizan, y el de las demandas marshallianas individuales se compacta al poner una restricción presupuestaria dependiente de sus dotaciones. Después se definen las correspondencias que asocian un elemento del simplex con una asignación que satisfaga la restricción presupuestaría, esto para poder encontrar un valor máximo tanto en la utilidad de cada individuo como en la demanda agregada del conjunto de individuos. Se define otra correspondencia entre el simplex y la región factible determinada por la restricción presupuestaria para encontrar el valor máximo del exceso de demanda agregada, donde un individuo escogerá precios hasta que el valor de esta correspondencia tenga un valor igual a cero. La correspondencia definida para el exceso de demanda agregada tiene un punto fijo óptimo, i.e. un par ordenado de un elemento del simplex y una asignación factible que se define como un equilibrio walrasiano dado que maximiza ambas correspondencias. Por lo anterior decimos que el par ordenado óptimo existe puesto que, otro no podría cumplir con la condición de maximizar la correspondencia de la demanda agregada y el exceso de demanda agregada, entonces existe un equilibrio general competitivo dentro de la economía idealizada.

Las descripciones de los dos planteamientos, el de Walras y el de Debreu, deja ver que el EGC *à la* Debreu es una construcción sumamente restrictiva y complicada, que es concebida en un mundo meramente matemático. Si bien a este último planteamiento se le puede dar una interpretación económica, es claro también que dicha interpretación tendrá carencias explicativas considerables, no tanto por el empleo de herramientas matemáticas de alto grado de dificultad, sino por la transformación a conveniencia de las propiedades que tienen los conceptos económicos abstraídos.

II.4 *Visión local* de la axiomatización formal de la teoría económica

En Debreu (1986) se reconoce que los grandes avances de la Teoría del Equilibrio General provienen de un proceso histórico concerniente a la matematización de la teoría económica, el cual se divide en dos partes, “visión local” y “visión global”.

Comenzando con la *visión local*, Debreu afirma que ésta hace referencia al proceso de matematización de la teoría económica caracterizada por “accidentes históricos” donde se conjugan diversas disciplinas y personajes (Debreu, 1986: 1259-1265), esto puede recapitularse con las secciones previas de la presente investigación, las cuales hacen un recuento histórico del programa neowalrasiano. En el caso de la *visión global*, Debreu estipula que ésta es concerniente a cómo los conceptos matemáticos que se emplearon en el programa neowalrasiano encajan perfectamente con el “contenido económico” (Debreu, 1986: 1262).

Exponiendo primeramente la *visión local*, ésta se resume en la fase final del proceso histórico de matematización de la teoría económica con el programa neowalrasiano puesto que, son los valores de la escuela formalista los que guían la forma de hacer teoría. Éstos son: rigurosidad, generalidad y simplicidad. Estos parten del desarrollo filosófico de las Matemáticas del Programa de Hilbert en el s.XX ya que la presentación formal de los sistemas axiomáticos permitía hacer a un lado las verdades de los argumentos que recurren a la intuición y, con ello, se pasa a priorizar la veracidad de una estructura lógica mediante la técnica de la demostración. También, son provenientes de la escuela formalista de Bourbaki, la cual continuaba empleando el pensamiento hilbertiano, donde se buscaba encontrar una pureza tal en el razonamiento matemático que edificara toda una serie de conocimientos ajenos a la intuición.

Desde que Debreu se introdujo en la Economía, la exhaustiva búsqueda de rigurosidad siempre estuvo presente.[67] Los trabajos de análisis económico que estaban bajo la filosofía en la que él estaba familiarizado, e.g. von Neumann (1937), le permitieron continuar en ese camino y así fundamentar el programa neowalrasiano. En resumen, el rigor matemático que emplea Debreu es un valor que "dicta la forma axiomática del análisis, donde la teoría, en sentido estricto, está lógicamente totalmente desconectada de sus interpretaciones" (Debreu, 1959: x), el cual es "un atributo de una teoría que es una herramienta de pensamiento eficaz" (Debreu, 1984: 275; traducción propia).

El valor de generalidad en Debreu se puede apreciar de dos formas. Primero, con el empleo de símbolos sin contenido en el sistema axiomático formal de sus trabajos sobre la Teoría del Equilibrio General, junto al uso de cuantificadores lógicos, e.g "para todo -" ($\forall$) o "no existe -" ($\neg \exists$). Este primer punto se puede comprender, por una parte, con la justificación de Hilbert para usar este valor en su PFFA:

> los objetos de la teoría de números son para mí los signos en sí, cuya forma puede ser generalmente y ciertamente reconocida por nosotros independientemente del espacio y el tiempo, de las condiciones especiales de la producción del signo, y de diferencias insignificantes en el producto terminado (Hilbert 1922, traducido del alemán al inglés en Ewald 2007: 1121; traducción propia).

El segundo punto es respecto al recurso dimensional en las que se realizan las conjeturas matemáticas del análisis económico, esto con el uso de herramientas topológicas y un modelo económico de *l*

[67] Para la explicación del rigor matemático en Debreu hay que volver al *Primer Capítulo* ya que ahí se expresa de manera histórica y metodológica cómo la axiomática ha ido cambiando para buscar una mayor rigurosidad, así como el papel que tiene el lenguaje formal en el Programa de Hilbert para alcanzarla.

dimensiones con conjuntos de infinitos elementos. Esta generalización provee un amplio alcance que, como dice Debreu, "hace que sea aplicable a una amplia clase de problemas" (Debreu, 1984: 275). Sin embargo, Boyland y O'Gorman señalan un punto preocupante y concerniente al nivel de generalidad que Debreu maneja:

> En particular, el sistema de números reales es un conjunto infinito actual.[68] Este es el concepto del sistema de números reales utilizado por Debreu en su *Theory of Value*. Por lo tanto, el dominio matemático en el que Debreu demuestra la existencia del equilibrio es un dominio infinito actual. […] Al probar la existencia del equilibrio, presumiblemente el economista teórico se preocupa por la posibilidad de equilibrio existente en alguna organización socioeconómica que sea realizable en algún horizonte temporal finito, por grande que sea. ¡Después de todo, una infinidad real de años o días está mucho más allá de decir billones y billones de años o días! (Boyland y O'Gorman 2018: 89; traducción propia).

En cuanto al valor de simplicidad, este es perceptible en la forma en la que Debreu demuestra la existencia del equilibrio general competitivo, donde tiene claramente en mente que:

> La búsqueda de la simplicidad es la motivación, la ejecución y las consecuencias. Una de sus expresiones es la búsqueda del vínculo más directo entre los supuestos y las conclusiones de un teorema. Fuertemente motivado por el atractivo estético, esta búsqueda es responsable de pruebas más transparentes en las que los defectos lógicos no pueden permanecer ocultos, y que se comunican más fácilmente. En casos extremos, la prueba de una propuesta económica se vuelve tan simple que puede prescindir de símbolos matemáticos. El primer teorema principal de la economía del bienestar, según el cual un equilibrio en relación con un sistema de precios es un Pareto óptimo, es tal caso (Debreu, 1986: 1267; traducción propia).

Para demostrar la existencia del equilibrio competitivo, Debreu recurre tanto el cuantificador lógico de existencia como al método demostrativo de *reductio ad absurdum*, este último por considerarse como un procedimiento más simple. A este tipo de demostración se le denomina como no-constructivo dado que no se nos da información sobre cómo acceder u obtener, en un número finito

[68] El infinito actual (enunciado por primera vez por George Cantor) es el dominio con cardinalidad infinita que busca saber si un infinito con todos sus elementos puede existir. El infinito potencial (fundamentado por David Hilbert) trata a los infinitos actuales como objetos matemáticos.

de pasos, la existencia del objeto demostrado; cosa contraria es el método de demostración directa[69] (Boyland y O'Gorman 2018: 93).

Dicha simpleza se manifiesta expresamente en el *Paso 5 (Equilibrio walrasiano)* de la anterior sección ya que *à la* Debreu: 1) suponemos que la relación $p^* \in \Psi^{P}(x^*)$ que está dada por $x_i^* \in arg \max_{c \in Bi(p)} u_i(c)$ no existe; 2) si hubiera una $c \in B_i(p)$ con $u_i(c) > u_i(x_i^*)$ y $t > 0$, que terminara por desarrollarse como $u_i(tc + (1 - t)\, x_i^*) > u_i(x_i^*)$, llegaríamos a una contradicción; 3) utilizamos el principio del medio excluido ($P \wedge \neg P$) que estipula que o P es verdad o P es falso; 4) siendo que habíamos llegado a una contradicción al decir que la relación $p^* \in \Psi^{P}(x^*)$ que está dada por $x_i^* \in arg \max_{c \in Bi(p)} u_i(c)$ no existe, entonces esta premisa es falsa; 5) de acuerdo al principio del medio excluido, entonces la relación $p^* \in \Psi^{P}(x^*)$ que está dada por $x_i^* \in arg \max_{c \in Bi(p)} u_i(c)$ existe.

A pesar de los resultados que se obtienen con el valor de la simplicidad en el ámbito matemático, Boyland y O'Gorman hacen una interesante pregunta en torno a la demostración de existencia de equilibrio que desarrolló Debreu:

> Dado que el dominio de la demostración es un infinito real de Cantor, el cual incluye una infinidad de infinidades, y dado que la demostración de existencia es no-constructiva y que no se puede transformar en un proceso o procedimiento que se lleve a cabo en un número finito de pasos (por grande que sea ese número finito), ¿cómo se puede dar a esa entidad una interpretación en un dominio finito? (Boyland y O'Gorman 2018: 93; traducción propia).

II.5 *Visión global* de la axiomatización formal de la teoría económica

Referente a la *visión global*, que es la conjugación de las matemáticas empleadas del programa neowalrasiano con el "contenido económico", citamos el ejemplo de Debreu sobre cómo encaja el concepto topológico de punto fijo con conceptos económicos:

> Un estado de un sistema social se describe enumerando una acción para cada uno de sus agentes. Teniendo en cuenta tal estado, cada agente reacciona seleccionando la acción que es óptima para él dadas las acciones de todos los demás. Enumerar esas reacciones produce un nuevo estado, y por lo tanto se define una transformación del conjunto de estados del sistema social en sí mismo. Un estado del sistema es un equilibrio si, y sólo si, es un punto fijo de esa transformación. En términos más generales, si las reacciones óptimas de los agentes a un estado determinado no se determinan de forma única, se lleva a asociar un conjunto de nuevos estados, en lugar de un solo

[69] Un ejemplo claro de demostración directa es la *fórmula general*, donde únicamente hay que sustituir las variables por los números y conocer el resultado, esto para después verificar con los teoremas establecidos para los números reales.

> estado, con cada estado del sistema. Por lo tanto, se define una transformación punto a punto del conjunto de estados del sistema social en sí mismo; y un estado del sistema es un equilibrio si, y sólo si, es un punto fijo de esa transformación. En este punto de vista, los teóricos de punto fijo tuvieron un prominente papel en la Teoría de Juegos y en la Teoría del Equilibrio General después de la nota de una página de John Nash de 1950 (Debreu, 1986: 1262; traducción propia).

Cuando decimos "contenido económico" se tiene que entender que Debreu no está haciendo referencia al mundo real, sólo es una estructura relativa a las propiedades de los elementos que conforman una economía. Dicho de mejor manera, "este contenido económico es una combinación sofisticada de numerosos supuestos declarados explícitamente y características muy generales de una economía derivada de un proceso de abstracción empírica de la observación de los agentes económicos y sus acciones y reacciones" (Boyland y O'Gorman 2018: 95; traducción propia).

Para que Debreu pudiera entrelazar las matemáticas de su escuela formalista con el "contenido económico" en sus trabajos del programa neowalrasiano tuvo primero que elaborar una estructura sintáctica, un sistema axiomático formal, para después abstraer las propiedades de los elementos de una economía que tengan relación a la estructura sintáctica establecida y, por último, las propiedades de estos elementos que son acordes al sistema son modificadas al idealizarlas como suposiciones (Ibíd.: 96). Es por ello que decimos que la *visión local* y la *visión global* son mutuamente complementarias dado que, los valores matemáticos que Debreu persigue necesitan de una abstracción acorde a la presentación sintáctica del sistema axiomático formal en cuestión, donde el mero hecho de abstraer propiedades de elementos económicos le da sentido a nombrar al resultado de este procedimiento como "contenido económico".

Es a través de *Theory of Value* y *Élements* que podemos hacer un análisis comparativo entre los programas de investigación de los autores correspondientes. Partiendo de lo ya expuesto en las anteriores secciones es claro que estos dos trabajos distan de ser similares en su metodología y retórica: *Élements* tenía el propósito de convencer a la comunidad intelectual de ver a la teoría económica como una ciencia aplicada de las matemáticas con el cálculo diferencial, esto justificado por el realismo platónico de los universales, mientras que *Theory of Value* reconfiguraba la línea de investigación que Walras desarrolló, pero con una metodología diferente que establecía los valores de rigurosidad, generalidad y simplicidad como los principios de la teoría económica para así dejar a un lado cualquier contenido intuitivo.

Es con *Theory of Value* que la axiomática formal triunfó en la teoría económica ya que se "solucionó" la principal conjetura del programa walrasiano, la cual es encontrar las circunstancias en las cuales la coherencia económica es posible. Dicha “solución” es responder si el equilibrio existe, pero se tiene que aclarar que no fue del modo en que Walras planteó su modelo económico, sino que la “solución” del programa neowalrasiano está dentro de un sistema axiomático con “contenido económico”. No se plantea la existencia del equilibrio en un sistema de ecuaciones con mismo número de variables e incógnitas como lo haría Walras, ahora es dentro de una estructura sintáctica que guarde relaciones abstractas de elementos económicos que, con herramientas topológicas, se respete la consistencia del modelo propuesto junto a los valores filosóficos-matemáticos del Programa de Hilbert.

EL CLÉRIGO – Yo llamo a las cosas por su nombre; pero para vos si estos nombres os resultan injuriosos. ¡Cómo vos que habéis salido de la Iglesia, que procuráis ayudar a la impiedad a minar en su base su edificio eterno, tenéis el loco orgullo de creer que vacila bajo los golpes de vuestros semejantes y, para colmo de ultraje, extendéis para sostenerla vuestra mano sacrílega!

¡No teméis la suerte de Oza, a quien Dios castigó mortalmente porque, con una intención mejor que la vuestra y con manos quizás más puras quiso sostener el arca santa!

ÉLIPHAS LEVI – Os detengo aquí, Señor; citáis la Biblia sin comprenderla y preferiría, en vuestro lugar, comprenderla sin citarla. La muerte de Oza, de la cual me habláis, se asemeja un poco al fin trágico de los cuarenta y dos niños devorados por los osos por haberse reído del profeta Eliseo que era calvo. Felizmente, dice Voltaire al respecto, no hay osos en Palestina.

EL CLÉRIGO – ¿Entonces la Biblia es un tejido de embustes y os burláis de ella como Voltaire?

ÉLIPHAS LEVI – La Biblia es un libro hierático, es decir, sagrado; está escrita en estilo sacerdotal, mezclado con historias y alegorías.

EL CLÉRIGO – Solamente la iglesia tiene el derecho de interpretar la Biblia. ¿Creéis en su infalibilidad?

ÉLIPHAS LEVI – Soy de la Iglesia y no he dicho, ni escrito, nada que sea contrario a sus enseñanzas.

Primer diálogo
Éliphas Levi, El Libro de los Sabios

Tercer Capítulo. Crítica a la aplicación de la axiomática formal en la teoría económica

El presente capítulo tiene como objetivo exponer críticas selectas al programa neowalrasiano que, de acuerdo al autor, son desafiantes. Clower (1995) permite analizar si es que en la ciencia económica el método de la axiomática formal puede tomar un rol crítico y no sólo constructivo. Chick (1998) permite analizar si la ciencia económica debe regirse únicamente por el método de la axiomática formal. Krugman (1998) al defender la axiomática formal, implícitamente deja ver que este método en la ciencia económica genera una barrera comunicativa.

III.1 Clower: Axiomática formal con función crítica

Clower comienza su crítica al hacer explícito que la axiomática formal en las Matemáticas ha sido un método tanto útil como seguro para formar conocimiento, donde se señala que este conocimiento se genera en un mundo matemático o abstracto, el cual denomina como “Mundo-M”, y cuya contraparte sería el mundo real denominado como “Mundo-R”. Estos elogios terminan cuando Clower estipula que “todas las teorías del Mundo-M están equivocadas porque ninguna describe exactamente el Mundo-R, pero algunas teorías del Mundo-M están equivocadas de maneras más interesantes que otras” (Clower, 1995: 309; traducción propia).

Es debido a este pronunciamiento que Clower busca responder la pregunta: ¿deberían ser tomados en serio los modelos del Mundo-M por los economistas? (Ibíd.: 309). Para ello hace referencia el mito de Pigmalión que, resumidamente, es la historia de este escultor de la antigua Grecia que al no encontrar a la mujer de sus sueños decide hacer esculturas de cómo él piensa que sería esta mujer hasta que un día en una de sus esculturas encuentra la perfección y termina perdidamente enamorado, esto enternece a la diosa Afrodita por lo cual opta por darle vida a la escultura para que éste sea feliz. Con el simbolismo de este mito Clower habla de la tendencia de los teóricos en Economía por confundir el mundo abstracto y el mundo real con conceptos ambiguos, e.g. *mercado, precio* o *equilibrio.*

A pesar de dicha confusión Clower sostiene que estos conceptos tienen un valioso papel para generar conocimiento dado que, cuando se conjugan "hipótesis empíricas casuales y razonamientos formales"[70] se llega a paradojas (Ibíd.: 310). Lo anterior se puede comprender precisamente con las palabras de Clower que dicen lo siguiente:

> Si un modelo formal provocativo contiene una anomalía, es poco probable que permanezca disfrazada por mucho tiempo, y una vez encontrada se convertirá en una paradoja científica. En algún momento, un rigor más estricto dirigido a resolver la paradoja puede dirigir la atención a las debilidades previamente pasadas por alto en el modelo subyacente, lo que puede sugerir nuevas vías de acercamiento a los problemas familiares. Tal debe ser nuestra esperanza porque es evidente que ninguna ciencia empírica ha sido generada por el pensamiento axiomático. […] Así que a menos que se pueda hacer que la axiomática desempeñe un papel crítico, que contraste con uno constructivo, es probable que sea tan poco útil para un científico empírico como una sierra rota para un carpintero. Sospecho que la mayoría de los economistas consideran las paradojas como debilidades de nuestra disciplina, pero debido a que las paradojas científicas surgen sólo de teorías que no están del todo desprovistas de contenido empírico, lo que hay que lamentar en la economía contemporánea no es la abundancia, sino la escasez de paradojas (Clower, 1995: 310; traducción propia)

Una vez que se enuncia la hipótesis central del texto: el método de la axiomática formal puede ser empleado como un instrumento crítico y no solamente constructivo, Clower procede a realizar un ejercicio comparativo entre los conceptos que se encuentran en *Theory of Value* como: *unidad imaginaria* (*uff*) en vez de *precio* (*p*), *limbo* en vez de *locación* y, *olvido* en vez de *temporalidad*, esto para probar que la idealización de conceptos ambiguos sin contenido empírico de este texto sufre el mismo destino que el mito de Pigmalión.

[70] Esto hace alusión al programa walrasiano con los conceptos de *utilidad* y *rareté.*

El resultado de este ejercicio confirma el hecho de que el texto de Debreu trabaja en un Mundo-M, donde se presentan numerosas anomalías puesto que, al tratar de darles sentido económico después de su idealización cuando se busca relacionarlos con la realidad:

> […] Hay excesos de demanda, pero no hay transacciones; hay un sistema de precios, pero no hay mercados; hay agentes y acciones, pero no hay eventos observables; hay participaciones en la producción, pero la producción no ocurre (Clower, 1995: 312; traducción propia).

A partir de la observación de estas anomalías es que Clower elabora otro ejercicio práctico para justificar su hipótesis central. Aquí él intenta darle sentido a uno de los axiomas que están en *Theory of Value:*

> El sistema de precios es la l-upla $p = (p_1, \ldots, p_h, \ldots, p_l)$; puede claramente representarse por un punto en R^l. El valor de una acción relativa a al sistema de precios p es $\sum_{h=1}^{l} p_h a_h$, es decir, el producto interior $p \cdot a$. (Debreu, 1959: 43).

Para esto, Clower inicia por definir y establecer los siguientes conceptos y supuestos:

1) El concepto de *precio* (p) es sustituido por *unidad imaginaria* (*uff*), el cual se expresa como un coeficiente de ponderación medido en u unidades. El producto interno lo denomina como *uffge*, que es puramente ficcionario y no hace referencia al producto interno "monetario".

2) Agentes económicos con acciones activas y pasivas en eventos económicos. Las acciones son por parte de los productores A^P: $\{y_1, \ldots, y_q\}$ y hogares A^H: $\{x_1, \ldots, x_q\}$, lo cual de manera agregada suma el conjunto de todas las acciones A: $\{y_1, \ldots, y_q, x_1, \ldots, x_q\}$.

3) La i-ésima acción en el conjunto de acciones de la producción se denota como y_i. La acción y_i pertenece al espacio R^l que a su vez pertenece a la producción neta del i-ésimo productor.

4) La i-ésima acción de consumo en el conjunto de acciones de los hogares se denota como x_i. La acción x_i pertenece al espacio R^l que a su vez pertenece a la demanda del i-ésimo consumidor.

5) La decisión que toman los agentes es simbolizada por T. Sólo se toma una decisión para una única unidad, no hay agentes independientes.

6) Se asume que cada elemento de A^H: $\{x_1, \ldots, x_q\}$ está asociado con el vector de dotaciones $w_i = w_{ij}$, el cual es un supuesto *a priori* de una fuente desconocida de suministros.

7) Definimos nuestro concepto de exceso de demanda con la ecuación $z_i = x_i - y_i - w_i$.

Con ello, la nueva expresión del axioma *EI* que Clower propone se define como:

> *EI*: Dado Y_i y el vector de u, se escoge y_i que maximice el producto interior $u \cdot y_i$. (Clower, 1995: 314; traducción propia).

En busca de darle sentido económico, Clower comenta que el vector *uff* debería ser tomado como arbitrario, i.e. dejar de verlo como un mecanismo que guía a los productores descentralizados a tomar decisiones. Con esta propuesta nuestro autor se encuentra en una paradoja, que con la anterior premisa sería definir funciones de oferta sin sentido económico. A fin de resolver esta paradoja Clower comenta lo siguiente:

> Afortunadamente, la paradoja se resuelve fácilmente mediante un análisis más profundo. Por hipótesis, T lleva a cabo un experimento de pensamiento para seleccionar y_i. Se puede ir hipotéticamente más allá al decir que la elección no debe hacerse arbitrariamente, sino que el experimento de pensamiento es proceder como si T fuera un "productor" guiado por un pensamiento coherente (Clower, 1995: 315; traducción propia).

De acuerdo a esta nueva premisa, Clower introduce su siguiente axioma *EII*:

> EII: Si y_i satisface EI, y si u^* define un estado de acciones mutuamente consistentes, $\sum x_i - \sum y_i - \sum w_i = 0$, entonces $y_i = y_i^*$; de otra manera $y_i = 0$ (Clower, 1995: 315; traducción propia).

Con este último axioma Clower menciona que "el vector *uff* puede tratarse coherentemente como *T* tipos de cambio reales de producción respecto a los insumos: i.e. *u* sirve como un 'sistema de precios' sustituto… [así] obtenemos una motivación dentro de la teoría formal para la maximización de la insuficiencia" (Clower, 1995: 315; traducción propia).

Esta ambigua concepción de tipos de cambio reales, que es la transición del Mundo-R al Mundo-M, provoca que Clower dé una definición acorde al sentido económico. Por ello introduce una nueva definición que une los supuestos anteriores, la función continua de utilidad $V_i(x_i)$, para configurar dos axiomas que unifiquen a los consumidores y productores en una misma teoría:

> I. Axioma de Selección: Para cualquier vector *uffage* en u, dado $V_i(x_i)$ en X_i y y_i en Y_i, T selecciona x_i y y_i que satisfagan $u \cdot z_i \leq 0$ y que maximice V_i.
>
> II. Axioma de *la fantasía del mendigo*[71]: Si x_i y y_i satisfacen el axioma I, y si u_i* define un estado de cero exceso de demanda, $\sum z_i^* = 0$, entonces $x_i = x_i^*$ y $y_i = y_i^*$; de otra manera $x_i = y_i = 0$. (Clower, 1995: 316; traducción propia).

A través de este abstracto ejercicio es que Clower justifica su hipótesis central, mostrándonos que al estar en dos "mundos" se puede tomar lo mejor de ambos para teorizar, esto sin dejar de lado el método de la axiomática formal.

Por último, dentro de las conclusiones Clower, este menciona que el modelo de equilibrio general de Arrow-Debreu[-McKenzie][72] es lógicamente impecable, pero su falta de contenido empírico y el acto de ignorar las anomalías, i.e. incoherencia con la realidad -como se mostró en su ejercicio-, es considerablemente perjudicial para la ciencia económica (Ibíd.: 317). Como nota, la cual se considera útil para la investigación, Clower deja la siguiente encomienda: "espero que aquellos que prefieren modelos conceptualmente coherentes con el Mundo-R se unan a mí en la búsqueda de mejores maneras de avanzar en la ciencia económica" (Clower, 1995: 318; traducción propia).

III.2 Chick: Algunos aspectos científicos a considerar para un sistema complejo

El texto de Chick inicia al comentar que el método de la axiomática formal es una herramienta "poderosa", la cual es defendida por una gran parte de la comunidad de economistas, pero dos de los principales contras de este método es que no es neutral ni totalmente adecuado al aplicarlo (Chick, 1998: 1859). En esta argumentación es que se hacen explícitas las hipótesis centrales del texto, que

---

[71] Clower pone este nombre a su axioma para dar a entender cuál es el incentivo que tendrían los agentes económicos para permanecer en un estado de equilibrio. La idea de este proverbio es que, "si desear pudiera hacer que las cosas sucedan, entonces incluso los mendigos tendrían todo lo que quisieran."

[72] Añadimos a McKenzie ya que, junto a Arrow y Debreu, como se hizo explícito en el recuento histórico, tienen el crédito de haber demostrado la existencia del equilibrio general competitivo.

son: 1) por la complejidad de la Economía, esta ciencia no puede ser comprendida enteramente con un sólo método y, 2) la teoría económica debe restringir el uso de la axiomática formal en áreas apropiadas para el método.

Chick enuncia que el método axiomático presenta grandes controversias. El alcance de este método traza una base metodológica para toda la ciencia, que no necesariamente recae en la presentación formal, donde la axiomática deja a un lado toda abstracción directa de la realidad, lo cual deviene en trabajar únicamente en una estructura sintética, como es el caso de Debreu y su *Theory of Value*. Chick, guiándose por Stigum (1990), añade además que la axiomática puede tomar un enfoque menos riguroso, i.e. *à la* Euclides.

En busca de un pensamiento menos riguroso, característica del programa neowalrasiano, es que Chick busca analizar los principios de un "razonamiento ordinario" que permitan analizar un tema desde diferentes perspectivas (Chick, 1998: 1862). Para lo anterior Chick comienza por examinar el principio científico de la *precisión* que, dicho en otras palabras, es generalizar el conocimiento para revelar verdades generales. Este principio, como ella comenta, se hace más general en el análisis económico cuando el sistema es más complejo, lo cual nos diría que no se tiene información completa del problema en cuestión, además de decir que:

> Los métodos formales son admirados precisamente porque eliminan cualquier vaguedad e imprecisión, pero estos sólo los eliminan en la teoría; la teoría nunca podrá eliminar la vaguedad inherente de los datos o de los objetos de estudio (Chick, 1998: 1864; traducción propia).

Después de este análisis, Chick continúa para hacer lo propio con el aspecto de la no neutralidad de las herramientas matemáticas que se emplean en la teoría económica, donde se enfatiza que los supuestos económicos son elegidos por conveniencia respecto al modelo matemático en cuestión y no por su relevancia explicativa del fenómeno. Para ejemplificar este punto, Chick se apoya de Vercelli (1991 y 1992), para decir lo siguiente:

> […] este "equilibrio" es meramente el único conjunto de valores que, para cada conjunto de ecuaciones es coherente. Entonces no hay sorpresa de encontrar que el equilibrio es el único estado en el cual los economistas se adhieren como método de conocimiento: el desequilibrio es incoherente porque produce un sinsentido de las ecuaciones. Si solamente el equilibrio es admitido, no sólo hay una pérdida drástica de relevancia, la noción de *causa* es removida de la teorización económica (Chick, 1998: 1866; traducción propia).

Por último, Chick examina una de las características de los modelos convencionales, la cual es ser un sistema cerrado. Aquí, el aparato deductivo con el cual se rigen estos sistemas permite desarrollar una estructura predecible, donde cabe resaltar que los elementos de los cuales éstos están compuestos son abstracciones idealizadas. Es por ello que Chick estipula que este benéfico alcance científico podría ser direccionado hacia áreas que no comprometan un sistema complejo, i.e. establecer una relación micro y macro. Los resultados de esta propuesta abren las puertas a la creatividad y al recurso histórico, donde posiblemente salgan a relucir irregularidades e inconsistencias, pero las cuales son inherentes a la teoría económica con contenido empírico.

Como conclusión, Chick hace una relevante aseveración acerca del propósito de su análisis y, también, una tarea para los economistas:

> […] los opuestos de la precisión, el rigor y la demostración son la imprecisión, la afabilidad y el error; la perspectiva de lidiar inteligentemente con conceptos o datos que son intrínsecamente imprecisos, categorías con límites borrosos o significados que no son fijos, y construir argumentos convincentes, pero no impermeables, no es mucho mejor.
>
> […] el rol del formalismo [axiomática formal] es ser lo más preciso y riguroso posible, existen otros modos de análisis complementarios que son válidos y valiosos. El formalismo [axiomática formal] está bien, pero debe conocer su lugar. Los economistas deben debatir más allá de las fronteras de ese lugar (Chick, 1998: 1868; traducción propia).

III.3 Krugman: Discurso económico

En este trabajo Krugman se manifiesta a favor de la aplicación de la axiomática formal en la ciencia económica. Su texto está dividido en tres puntos donde hace comentarios a las débiles críticas al empleo de este método en la Economía. Siendo que nos interesa únicamente el tercer punto, el cual en un momento enunciaremos, se puede hacer un resumen de los restantes con el propósito de que el lector conozca de qué va el material.

El primer punto gira en torno a la crítica de que hay un uso excesivo de la axiomática formal en ciencia económica, la cual genera modelos económicos irrelevantes. Krugman hace lo suyo al exponer que varias líneas de investigación de los últimos Premio Nobel de Economía tienen enfoques empíricos que buscan responder problemas de la realidad y que no están únicamente centrados en mercados competitivos perfectos, i.e. Teoría de Equilibrio General. Krugman reconoce que hay modelos económicos irrelevantes, pero estos dependen del economista y sus habilidades, mas no de la teoría que utilice.

El segundo punto versa sobre la crítica que hacen los no-economistas -como periodistas- de una argumentación formal en la ciencia económica para establecer políticas económicas de la globalización. Aquí, Krugman comenta que los críticos no analizan los modelos formales de manera detallada y caen en falacias, además resalta el hecho de que en las mismas posturas económicas de los críticos hay teoría bajo un enfoque formal, que no tienen el mismo trato que su opuesto; con ello se dice que es más una crítica al contenido económico del modelo que al método de éste.

Si bien el tercer punto no es una crítica para Krugman, ésta se puede analizar como tal, esto se explicará en la conclusión de la presente investigación; este punto analiza la aserción de *Alfred Marshall* sobre cómo se elabora una idea económica y, además, cómo comunicarla:

> (1) Usa las matemáticas como un lenguaje taquigráfico, en vez de un motor de investigación. (2) Mantente con éste hasta que hayas terminado. (3) Tradúcelo al inglés. (4) Ahora ilústralo con ejemplos que son importantes en la vida real. (5) Deshazte de las matemáticas. (6) Si no tienes éxito en (4), deshazte de (3). (Marshall citado en Sills y Merton 1991: 151, que a su vez es citado en Krugman 1998: 1833; traducción propia).

A través de esta cita se entiende que, por un lado, Marshall persuade a los economistas a verificar con las matemáticas el contenido empírico del modelo. Sin embargo, para esta parte Krugman establece que varios temas económicos distan de ser meramente un producto de la intuición, sino que a través de los modelos formales se llegan a descubrir relaciones útiles entre los conceptos de la teoría, los cuales a veces están regidos bajo suposiciones restrictivas.

Por el otro lado, Krugman está de acuerdo con la idea de Marshall de comunicar las ideas obtenidas de las investigaciones económicas, pero no de la misma forma para los dos posibles tipos de audiencia, i.e. lenguaje formal para la comunidad intelectual y lenguaje natural para el público en general. Lo anterior es justificado por Krugman al decir que el lenguaje formal para la comunidad intelectual es importante ya que, tanto los estudiantes como los colegas economistas, comprenderán la estructura de la idea expuesta, mientras que con el lenguaje natural se buscará informar y persuadir al público de la idea económica en cuestión.

Siendo que Krugman añade nuevos puntos sobre la cita de Marshall, ahora éste nos ofrece una nueva versión de ésta:

> (1) Averigüe lo que piensa acerca de un problema, trabajando de un lado a otro entre la intuición verbal, la evidencia y todo lo que necesita. (2) Mantente con éste hasta que hayas terminado. (3) Publicar la intuición, las matemáticas y las pruebas -las tres- en una revista de economía. (4) También tratar de encontrar una manera de expresar la idea sin el aparato formal. (5) Si puedes, publica aquello donde pueda hacer para el mundo algo bueno (Krugman 1998: 1836; traducción propia).

Por último, Krugman a modo de conclusión comenta que el método de la axiomática formal tiene un papel importante, y que las críticas planteadas en su texto son inexistentes o débiles hacia su aplicación. Es en el tercer punto que Krugman ve necesario hacer una aclaración para resaltar la utilidad del método y su transmisión como conocimiento.

El "problema de la 'realidad'" en el sentido de la cuestión si es "ante los ojos" un mundo exterior y de si se puede probar, se revela un problema imposible, no porque conduzca a consecuencias que son otras tantas insolubles aporías, sino porque el ente mismo que es tema de este problema repele, por decirlo así, el planteamientode semejante cuestión. No hay que demostrar qué es ni cómo es "ante los ojos" un "mundo exterior", sino que hay que mostrar por qué el "ser ahí" tiene en cuanto "ser en el mundo" la tendencia a empezar sepultando "gnoseológicamente" el "mundo exterior" en la nada, para luego probarlo.

La cura, ser del "ser ahí", pág. 227
Martin Heidegger, El ser y el tiempo

Conclusiones y recomendaciones

Desde una perspectiva histórica y metodológica, la presente investigación mostró que los principios filosóficos de la ciencia se desarrollaron ampliamente con el método axiomático. La presentación formal de la axiomática devino en la aportación metodológica más importante en la ciencia ya que, con su aplicación, se logran eliminar ambigüedades provenientes del conocimiento empírico, además de ordenar el conocimiento resultante de su aparato hipotético-deductivo.

La axiomática formal dista de ser un método perfecto. Uno de los objetivos del Programa de Hilbert, la idea de establecer todas las verdades de una teoría en un sistema consistente fue desechada por el *teorema de incompletitud* de Gödel, aunque esto no significó desechar el enfoque axiomático puesto que, éste ayuda a estructurar parte de una teoría de manera consistente siguiendo los valores de consistencia, generalidad y simplicidad.

El programa neowalrasiano es una convergencia histórica accidental que comprende la línea de investigación que dejó Walras con su obra *Élements*, los avances matemáticos alcanzados por la axiomática formal en la geometría no-euclidiana y la corriente de Hilbert a través de Nicholas Bourbaki. Si bien el programa abarca varios aspectos, fueron los valores del Programa de Hilbert los que predominaron en la fundamentación de la teoría económica, donde la abstracción económica y filosófica que realizó Walras fue reconfigurada a conveniencia del modelo formal de una economía competitiva para establecer que existe coherencia económica por medio de la demostración la existencia de un equilibrio general competitivo.

La justificación metodológica del programa neowalrasiano se expresa explícitamente en Debreu (1959, 1984 y 1986). En la presente investigación, el análisis de esta justificación general resalta su punto más débil: el traspaso del "contenido económico" a una concepción meramente económica, i.e. lo que Debreu considera que es económico realmente es una restrictiva y relativa abstracción de relaciones de elementos económicos que únicamente es acorde con la estructura sintáctica del modelo.

Este punto débil de la justificación de la aplicación de la axiomática formal a la ciencia económica implica que se genere confusión en la comunidad económica dado que, es fácil pasar del mundo matemático al mundo real y viceversa, de acuerdo a su conveniencia explicativa. Cuando se empleen modelos formales se debería anunciar desde un comienzo los costes epistemológicos de su uso, lo cual es la imposibilidad de realizar un análisis complejo donde en vez se realiza un análisis de un sistema cerrado con implicaciones incoherentes respecto a la realidad. También se deberían explicar los paréntesis de lo que Debreu denomina como "contenido económico", esto para advertir a quienes usan este método que no confundir los slogans que Düppe y Weintraub (2014) le dan al cambio paradigmático de la matematización de la economía con la Cowles Commission: "Ciencia es Medición" pasó a ser "Teoría y Medida" (Düppe y Weintraub 2014: 62; traducción propia).

La crítica que se hace en Clower (1995) resulta valiosa al estipular que el objetivo principal de la axiomática formal, el de estructurar y construir una teoría, podría también tener un rol crítico para mejorar la forma en que teorizamos. Mediante su ejercicio práctico logra configurar formalmente una premisa más convincente que la que se define en *Theory of Value* sobre la racionalidad de los agentes; sin embargo, a nuestro parecer, el hecho de utilizar conceptos complejos como elementos en un sistema formal conducirá indudablemente a un caos que, aun buscando incorporar más contenido empírico y explorar la reconfiguración de las relaciones de estos elementos, terminará por ser impráctico. Reformulando esta propuesta, por un lado, la exploración de un sistema formal con una lógica paraconsistente[73] que sustituya a la lógica proposicional sería un ejercicio interesante dado que, elementos de la misma índole estarían bajo un discurso lógico que reconoce su propiedad. Por el otro lado, con la exploración de elementos y relaciones con contenido empírico en un área más reducida podría ser interesante analizar cuáles son los límites explicativos de combinaciones de un cierto número de proposiciones con contenido empírico.

[73] Citando a Carnielli y Conoglio:

> La paraconsistencia es el estudio de sistemas lógicos en los que la presencia de una contradicción no implica trivialidad, es decir, sistemas lógicos con una negación no excluyente [o no sujeta al principio del tercero excluido]: de tal manera que un par de proposiciones A y ¬A no (siempre) trivializan el sistema (Carnielli y Conoglio, 2016: viii; traducción propia).
>
> Las lógicas paraconsistentes son capaces de lidiar con escenarios contradictorios, evitando la trivialidad mediante el rechazo del Principio de Exclusión, en el sentido de que estas teorías no se trivializan en presencia de (al menos algunas) frases contradictorias. Diferente de la lógica tradicional, en las lógicas paraconsistentes la trivialidad no está necesariamente relacionada con la contradicción… (Carnielli y Conoglio, 2016: ix; traducción propia).

En Chick (1998) se presenta una perspectiva opuesta a la que se profesa con el uso de la axiomática formal. Establecer principios científicos que no sean consistencia, generalidad y simplicidad es desafiante más que nada porque es una convención, pero esto no aminora la explicación que ella realiza al decir que la Economía, como el sistema complejo que es, podría capturar parte del contenido empírico no desechando el método sino enfocándolo a un área que no afecte a una posible explicación coherente y general de la realidad. A nuestro parecer, esta explicación invita a los economistas a pensar con "verdades evidentes", después realizar varios modelos que no sean perjudiciales a una explicación coherente y, por último, unirlos dejando que las contradicciones sean explicadas con principios retóricos. Sería interesante conocer qué limites enfrentará este tipo de conciliación de modelos formales micro específicos y una retórica macro.

Para el caso de Krugman (1998), quien redefine el discurso económico de Marshall, implícitamente deja ver que el método de la axiomática formal se ha convertido en una barrera comunicativa. La explicación de las teorías que emplean este método muestra complejos discursos que intentan darle sentido a las herramientas matemáticas, así también para las propiedades de los elementos económicos que se consideran en el sistema. Krugman al añadir el punto (4) revela una carencia en el discurso económico contemporáneo, los economistas que se preocupan por presentar su teoría a un público en general "puede ser contado con los dedos de una mano" (Krugman 1998: 1836; traducción propia). Si bien Krugman después justifica que los modelos que emplean este método son exclusivos para personas concernientes al tema, lo que podríamos argumentar es que los conceptos de la teoría y sus resultados no son neutrales, por lo cual, estos deberían ser reformulados en un lenguaje natural para informar al público general de sus implicaciones.

Para concluir esta investigación decimos que la teoría económica walrasiana junto al uso del método de la axiomática formal ha aportado una invaluable estructura para el conocimiento dentro de esta ciencia. A pesar de los puntos débiles que presenta la justificación metodológica del programa neowalrasiano, es imposible e impensable deshacer todo lo ya hecho, sería comenzar desde cero al tratar de buscar principios y relaciones de los elementos económicos. La forma en la que se perjudica la ciencia económica es cuando los economistas malinterpretan "el universo del discurso" para su conveniencia y, cuando se deja de ser crítico con el programa neowalrasiano, aun teniendo en mente las "evidentes" carencias explicativas de éste.

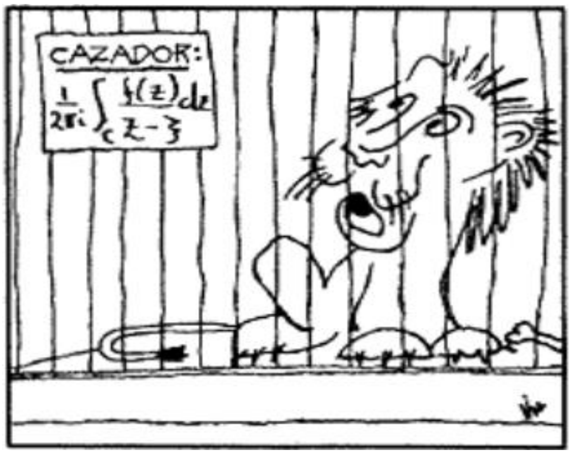


Imagen 9. Como atrapar a un león (I). Recuperada de Barrington (1983)

Para dar una idea general y divertida del problema analizado, en el cuál se tenga la pregunta "¿es epistemológicamente satisfactorio utilizar la axiomática formal como método económico?", procedemos a citar a Barrington (1983), quien busca explicar de manera simple de qué va cada método matemático en la solución de un problema hipotético: atrapar un león en el desierto del Sahara. En este caso sólo nos incumbe el enfoque axiomático de Hilbert, en el que se dice lo siguiente:

> 1. Método de Hilbert
>
> Coloquemos una jaula cerrada en el desierto. Y utilicemos el siguiente método axiomático:
>
> i) El conjunto de leones es no vacío.
>
> ii) Existe un león en el desierto, entonces existe un león en una jaula.
>
> Teorema 1. Existe un león en la jaula.

Si es que alguno de los lectores se encuentra interesado en este problema que enfrenta la ciencia económica y busca encontrar un mejor método que el de la axiomática formal debe tener en cuenta el siguiente párrafo:

> Será menester de un grado mayor de intimidad de la vida, de recogimiento vital, para que pueda surgir otro tipo de ciencia tal que no sólo se libere de tener que afirmar y negar la verdad y falsedad, -teniendo, como todo, que afirmar las *mismas* verdades cuando se "ponga a afirmar", y negar las *mismas* falsedades cuando se "ponga" a negar-, sino que de ella misma construir de diversas maneras los mismos objetos: pueda hacer geometrías, y no tenga que hacer una sola y misma geometría, como le sucedió al estoico, a pesar de la liberación de su vida frente a afirmación o negación (García Bacca, 1944: XXXI-XXXII).

Referencias

Audi, R. (1999) *The Cambridge dictionary of philosophy*, 2da edición, Cambridge University Press.

Barrington, J. (1983) *Como atrapar un león (I).* Ciencias, No. 003. Recuperado de <https://repositorio.unam.mx/contenidos/28401>

Blackburn, S. (2005) *The Oxford Dictionary of Philosophy*, 2da edición, Oxford University Press.

Boland, L. (2017) *Equilibrium models in economics: purposes and critical limitations*. Oxford University Press.

Boyland, T. y O´Gorman, P. (2018) *Philosophy of mathematics and economics: image, context and perspective*. Routledge INEM advances in economic methodology, Nueva York.

Brown, J.R. (2008) *Philosophy of mathematics: a contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. 2da edición, Routledge: Taylor & Francis Group.

Carnielli, W. y Conoglio, M. (2016) *Paraconsistence Logic: Consistency, Contradiction and Negation*. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, vol. 40. Springer International Publishing.

Chick, V. (1998) *On knowing one´s place: The role of formalism in economics*. The Economic Journal, 108 (November), pp.1859 – 1869.

Clapham, C. y Nicholson, J. (2009) *The concise Oxford Dictionary of Mathematics*, 4ta Edición, Oxford University Press.

Clower, R. (1995) *Axiomatics in Economics*. Southern Economic Journal, Vol. 62, No. 2 (Oct., 1995), pp. 307-319.

Debreu, G. (1959) *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press. New Haven y Londres.

Debreu, G. (1984) *Theory in the Mathematical Mode*. The American Economic Review, Vol. 74, No. 3 (Jun., 1984), pp. 267-278

Debreu, G. (1986) *Theoretic Models: Mathematical Form and Economic Content*. Econometrica, Vol. 54, No. 6 (Nov., 1986), pp.1259-1270

Detlefsen, M. (1993) *Hilbert's Formalism, in Hilbert.* Revenue Internationale de Philosophie 47, pp. 285-304.

Düppe, T. y Weintraub, E.R. (2014) *Finding equilibrium: Arrow, Debreu, McKenzie and the problem of scientific credit*. Princeton University Press, Estados Unidos.

Ekelund, R. y Hébert, R. (2005) *Historia de la teoría económica y de su método*. 3ra edición, McGraw-Hill Interamericana, México.

Euclides (1944) *Elementos de geometría* (precedidos de Los fundamentos de la geometría, de David Hilbert). Traducción, introducción y notas por el Dr. Juan David García Bacca, México: UNAM.

Friedman, M. (1955) *Leon Walras and His Economic System*. The American Economic Review Vol. 45, No. 5 (Dec., 1955), pp. 900-909

García Bacca, J. (1944) *Introducción* en Euclides (1944) Elementos de geometría (precedidos de Los fundamentos de la geometría, de David Hilbert). México: UNAM, pp. VIII – XCII.

Hilbert, D. (1918) *Axiomatisches Denken*. Mathematische Annalen, 78, 405-15. (Reimpreso en Hilbert 1932-5, Vol. 3, pp. 146-56, traducido del alemán por William Ewald en Ewald, W. (2005) From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics, Vol.2. Oxford University Press, Vol. 2, pp. 1105-1115.)

Hilbert, D. (1922) *Nuebegrundug der Mathematik*. Erste Mitteilung, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitat 1, pp. 157-177. (Reimpreso en Hilbert 1935, pp. 157-177, traducido del alemán por William Ewald en Ewald, W. (2005) From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics, Vol.2. Oxford University Press, Vol. 2, pp. 1115-1134)

Kaye, R. (1991) *Models of Peano Arithmetic*. Oxford Logic Guides, Claredon Press, Oxford, Estados Unidos.

Krugman, P. (1998) *Two cheers for formalism*. The Economic Journal, 108 (November), pp.1829–1836.

Lara, L. (2001) *Ensayos de teoría semántica: lenguaje natural y lenguajes científicos*, Centro de Estudios Lingüísticos y Literarios, El Colegio de México, México.

Lema, J. (2001) *El lenguaje natural*. UAM Iztapalapa, Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, enero – junio. Número 50. pp. 257 – 270.

Levin, J. (2006) *General Equilibrium*. Teaching and Lecture Notes, Stanford Education Web page, visto el 19 de abril 2021, <https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20202/General%20Equilibrium.pdf>

Linnebo, O. (2017) *Philosophy of mathematics*. Princeton University Press.

Mancosu, P. (1998) *Hilbert and Bernays on Metamathematics* en Mancosu, P. (1998) From Brouwer to Hilbert: the debate on the foundations of mathematics in the 1920´s. Part III, Chap. 10. Oxford University Press. Pp. 149-188.

Punzo, L. (1991) *The school of mathematical formalism and the Viennese Circle of mathematical economists.* History Economic Society, Journal of the History of Economic Thought, 13, Spring 1991.

Rosental, M. y Iudin, P. (1965) *Diccionario filosófico*. Traducido por Augusto Vidal, Montevideo, Uruguay. Trabajo original publicado en 1961.

Salguero, F. (2001) *Teoría General de los Signos y del Significado en Nepomuceno* en Quesada & Salguero (eds.) 2001. Información: Tratamiento y Representación. Servicio de Publicaciones, Universidad de Sevilla. Capítulo 3: 41–58.

Schlimm, D. (2013) *Axioms in Mathematical Practice*. Philosophia Mathematica (III) 21 (2013), pp.37–92.

Spinoza, B. (1980) *Ética demostrada según el orden geométrico*. Introducción, traducción y notas de Vidal Peña. Editora Nacional Madrid. Ediciones Orbis, S.A.

Stigum, B. (1990) *Toward a formal science of economics: the axiomatic method in economics and econometrics*. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts.

Stone, J. (2009) *Latin for the illiterati: A Modern Phrase Book for an Ancient Language*. 2da edición, Routledge: Taylor & Francis Group, Nueva York.

Shubik, M. (1961) *Review of The Theory of Value*. Canadian Journal of Economics and Political Science 27 (1): 133.

Walras, L. (2014) *Elements of theoretical Economics or the theory of Social Wealth*. 4ta edición, traducido y editado por Donald Walker and Jan Van Daal, Cambridge University Press, Reino Unido.

Weintraub, E. R. (1979) *Microfoundations: The compatibility of microeconomics and macroeconomics.* Cambridge surveys of economic literature, Cambridge Press, Reino Unido.

Weintraub, E. R. (2002) *How economics became a mathematical science*. Duke University Press. Science and Cultural Theory, Durham y Londres.

Bibliografía

Arrow, K. y Debreu, G. (1954) *Existence of an equilibrium for a competitive economy*. Econometrica, Vol. 22, No. 3 (Jul., 1954), pp. 265-290

Arrow, K. y Hahn, F. H. (1991) *General competitive analysis*, 6ta edición, Advanced Textbooks in Economics, Vol. 12, (eds.) Bliss, C.J. y Intriligator M.D., North-Holland, Elsevier Science Publishers.

Bernays, P. (1922a) *Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik*. Die Naturwissenschaften, 10, 93 – 99, traducido del alemán por Paolo Mancosu en Mancosu, P. (1998) From Brouwer to Hilbert: the debate on the foundations of mathematics in the 1920´s. Part III, Chap. 11. Oxford University Press, pp. 189-197.

Bernays, P. (1922b) *Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung 31, 10-19, traducido del alemán por Paolo Mancosu en Mancosu, P. (1998) From Brouwer to Hilbert: the debate on the foundations of mathematics in the 1920´s. Part III, Chap. 13. Oxford University Press.1, pp. 215-222.

Blanché, R. (2002) *La Axiomática*. Fondo de Cultura Económica, México, D.F.

Blaug, M. (1998) *The Problems with Formalism*. Challenge, Vol. 41, No. 3 (May-June 1998), pp. 35-45. Published by M.E. Sharpe, Inc.

Blaug, M. (2003) *The Formalist Revolution of the 1950´s* en Davis, J., Samuels, W. and Biddle, J. (eds.) A companion to the history of economic thought. Blackwell Publishing. Pp. 395 – 410.

Boumans, M. (2015) *How economists model the world into numbers*. 2da edición, Routledge: Taylor & Francis Group

Bryant, W. (2010) *General Equilibrium: Theory and Evidence*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur.

Cassel, G. (1932) *Theory of the Social Economy*. New York: Harcourt Brace, rev. ed.

Curry, H. (1951) *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. North-Holland Publishing Company Amsterdam, Países Bajos.

Corry, L. (1997) *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)*. Communicated by J. Norton. Archive for History of Exact Sciences, pp. 83-198. Springer-Verlag.

Contreras, F. (2007) *La axiomática*. Horizonte de la Ciencia 7 (12), pp. 111-121.

De Lorenzo, J. (2003) *Del Hacer Matemático y sus Filosofías*. Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, vol. 26, pp. 903-917

Dow, S. (1998) *Controversy, Formalism in economics*. The Economic Journal, 108 (November), pp.1826 – 1828.

Dow, S. (2004) *Reorienting Economics: Some epistemological issues*. Journal of Economic Methodology, 11:3, pp.307-312

Duo, A. (1970) *Fundamentos de la matemática*. Barcelona, España: Editorial Labor S.A

Enderton, H. (2001) *A Mathematical Introduction to Logic*. 2da edición, Harcourt Academic Press, Estados Unidos.

McKenzie, L. (1954) *On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems*. Econometrica, Vol. 22, No. 2 (Apr., 1954), pp. 147-161

Nikaido, H. (1975) *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*. Traducido por Kazuo Sato. North Holland Publishing Company. Países Bajos.

Peña, V. (1980) *Introducción* en Spinoza, B. (1980) Ética demostrada según el orden geométrico. Editora Nacional Madrid. Ediciones Orbis, S.A, pp. 4-28.

Punzo, L. (1999) *Clower on Axiomatics* en P. Howitt, E. de Antoni and A. Leijonhufvud (eds), Money, Markets and Method. Essays in honour of Robert W. Clower, E. Elgar, 1999.

Recalde, L. (2004) *La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XII, núm. 1, junio, pp. 51-72

Schlimm, D. (2011) *On the creative role of axiomatics*. The discovery of lattices by Schröder, Dedekind, Birkhoff, and others, Synthese 183, pp.47–68.

Toporowski, J. (2002) *Mathematics as natural law: An epistemological critique of formalism in economics* en Arestis, P., Desai, M & Dow, S. (2002) Essays in Honour of Victoria Chick: Methodology, microeconomics, and Keynes. Vol. 2. pp. 84 – 94

Vercelli, A. (1991) *Methodological Foundations of Macroeconomics: Keynes and Lucas*. Cambridge University Press.

Vercelli, A. (1992) *Causality in economic analysis* en (A. Vercelli, editor) Macroeconomics: A survey of Research Strategies. Oxford University Press, pp. 393-421.

von Neumann, J. (1937) *Über ein Okonomishes Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunksatzes* en Menger, K. [ed.] Ergebnisse eines Mathematischen Killoquiums, 8, 1935-1936, Vienna, traducido por G. Morton como “A Model of General Equilibrium”, Review of Economic Studies, 13, 1945-1946, pp. 1-9.

Wald, A. (1936) *Über einige Gleichungssysteme der Mathematische Ökonomie*, Zeitschrift fur Nationalökonomie, 7, 1936, pp. 637-70, traducido como “On Some Systems of Equations in Mathematical Economics, Econometrica, 19, Oct. 1951, pp. 368-403.