UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE PSICOLOGÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

AMBIENTES COMPLEJOS DE APRENDIZAJE: UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA “ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A:

DANIELA MADRIGAL GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
MTRO. JAVIER ALATORRE RICO

REVISORA:
DRA. FRIDA DIAZ BARRIGA ARCEO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Agradecimientos

Antes de finalizar esta etapa, me gustaría agradecer, en las siguientes cuartillas, a todas aquellas personas que permitieron la culminación del presente proyecto. Familia, amigos y colegas, sin su invaluable apoyo y guía, hubiera sido imposible culminar mis objetivos profesionales presentes, así como futuros.

En primer lugar, quiero agradecer a los pilares de mi vida: a mis padres, hermano, y Rodix por darle sentido a este trabajo, y por apoyarme con todos sus recursos: económicos, emocionales, humanos y académicos para desarrollarme profesionalmente pero también personalmente. A la par, quiero agradecer a sus familias Madrigal y González por estar presente en toda esta trayectoria académica.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis mentores académicos; que no solo me enseñaron el ímpetu de investigar problemas educativos, sino también a tener un compromiso por resolverlos, y comprenderlos en colectivo. Por esta y múltiples razones, agradezco a Javier Alatorre y a cada integrante que formó y forma parte del proyecto Aleph y Aleph 5. Me encantaría enlistar a cada uno, pero no quisiera tener el error de olvidar a alguno, ya que el proyecto Aleph se ha conformado por diferentes estudiantes desde hace más de 10 años. En esta misma línea, agradezco al colectivo de docentes de Matemáticas con los que pude colaborar y comprender las prácticas educativas en matemáticas durante los primeros 2 años y medio del proyecto: Ulises Castro, Maricela Lugo, Lety Sánchez, Olivia Palma y Carlos González, así como autoridades de la Escuela Nacional Preparatoria que confiaron en todos los integrantes del proyecto Aleph.

De igual forma, agradezco a David Block, Laura Reséndiz, y Armando Solares, junto con los integrantes de sus seminarios, que con paciencia me permitieron entrar a las cabezas y aportes de diferentes autores dedicados a la educación matemática.

En tercer lugar, a mis grandes colegas y amigos de la Facultad de Psicología: Ex Team Mate y Bellakitas que además de compartir con ellos, psicosueños, psicobailes, psicopláticas y psicoviajes tuve la fortuna de aprender junto con ellos, y ahora, ejercer una ciencia tan humana y necesaria en nuestra actualidad.

Al último, y no por ello menos importante, a mis segundas almas de la vida: Fer, Aby, Monty, Lu, Vale y Mario por su amistad y cobijo infinito en mi vida.

Índice

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

Imaginarnos el siglo XXI sin los avances tecnológicos, médicos, de comunicación, de transportes y de ingeniería resulta imposible para entender el mundo actual. Esto confirma la importancia de las matemáticas en la educación obligatoria, pues no solo posibilita a los estudiantes a comprender la realidad sino también actuar en ella. Dichas demandas, sociales y económicas, han hecho que se actualicen reformas curriculares nacionales (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017; DOF, 2008 y Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática [SUMEM], 2014). No obstante, a pesar de lo cambios, las matemáticas continúan siendo una de las asignaturas menos comprendidas al enseñarse como entes abstractos que no guardan contacto alguno con la realidad (Organisation for Economic Co-operation and Development [OCDE], 2016; Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2012, 2019). Por tanto, esta investigación busca ser una alternativa a la problemática que presenta particularmente la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) en cuanto a los aprendizajes de las Matemáticas (Buzo & Campillo, 2016; Jurado, 2016 y Coordinación de Desarrollo Educativo e Innovación Curricular [CODEIC], 2018), por lo que tiene como objetivo, diseñar Ambientes Complejos de Aprendizaje bajo un modelo constructivista histórico-cultural y de la Actividad propuestos por Vygotsky y Leóntiev, a través de la metodología denominada Investigación Basada en Diseño con enfoque de Co-teaching (Roth y Tabin, 2000 y 2001).

Si bien, durante la investigación no se incluye un análisis detallado de los aprendizajes logrados en la asignatura de Matemáticas V; las expresiones de los estudiantes, relacionadas a la modelización, visualización, argumentación, abstracción y comunicación nos permiten reconocer aquellas condiciones para producir los aprendizajes en el aula. Por lo que se vuelve imperioso reconocer y contribuir, a aquellas dimensiones metodológicas y teóricas de los Ambientes Complejos de Aprendizaje que permitieron construir sujetos capaces de matematizar las prácticas histórico-culturalmente constituidas.

Palabras clave:

Ambientes complejos de aprendizaje, Teoría de la Actividad, Teoría histórico-cultural, matematización, bachillerato universitario, Investigación Basada en Diseño, Co-teaching.

Introducción

A lo largo de la historia de la humanidad, las matemáticas han jugado un rol fundamental en las comunidades, pues han servido para adaptarnos a diversos propósitos de nuestras comunidades. Por poner ejemplo, es necesario retroceder al siglo VII, donde la trigonometría permitió la creación de nuevas rutas comerciales al trazar rutas de navegación en océanos abiertos; actualmente, sus principios siguen siendo ocupados para determinar posiciones de puntos, medidas de distancias o áreas de figuras para que funcionen nuestros Sistema de Posicionamiento Global (o GPS; por sus siglas en inglés, Global Positioning System) GPS.

Dada su relevancia económica, instrumental y, sociocultural y política de las matemáticas, se han suscitado cambios en las políticas y prácticas educativas a nivel nacional, tanto para actualizar el modelo educativo de las matemáticas, así como para incidir en los principales factores que impactan en los procesos de aprendizaje en México. Por ejemplo, el cambio curricular del 2012 en la educación media superior, con la Reforma Integral de Educación Media superior (RIEMS) así como el Grupo de Trabajo para la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (GTMEM) convocado por el Dr. José Narro Robles, este último, con el pedido explícito de analizar las causas del problema y proponer soluciones a los aprendizajes en las matemáticas.

Sin duda, las modificaciones que se han elaborado desde el 2012 con la RIEMS hasta las últimas actualizaciones de los programas de estudios (SEP, 2017) han estado encaminadas a atender las demandas sociales, con respecto al aprendizaje de las matemáticas para el siglo XXI. En el caso particular del bachillerato universitario, el objetivo de enseñanza de las matemáticas se ha modificado de un modelo centrado en contenidos y la algoritmia, por uno en donde el estudiante descubra su capacidad de abstracción, su capacidad para pensar racionalmente y la capacidad que tiene, como ser humano, para crear modelos abstractos que le permitan analizar y entender situaciones del mundo que le rodea (SUMEM, 2014).

Por tanto, la siguiente investigación busca ofrecer una alternativa a la problemática que presenta particularmente la Escuela Nacional Preparatoria (Buzo & Campillo, 2016 y

Jurado, 2016 y CODEIC, 2018) en cuanto a los aprendizajes en Matemáticas. Por lo que el presente estudio, tiene como objetivo, diseñar ambientes complejos de aprendizaje bajo un modelo constructivista histórico-cultural para el aprendizaje en Matemáticas V.

Con intención de lograr el propósito y objetivo planteado se propusieron los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollo de actividades y materiales curriculares para potenciar el aprendizaje en matemáticas.
- Desarrollo profesional de los docentes para potenciar el aprendizaje en matemáticas.
- Desarrollo de líneas de conocimiento sobre la complejidad involucrada en el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas en los estudiantes.

En este sentido, el presente trabajo de investigación desarrollará en los siguientes capítulos las fases metodológicas para diseñar ambientes complejos de aprendizaje en Matemáticas, de modo que se reconozcan los alcances y limitaciones de su implementación para la mejora progresiva de aprendizajes, así como del desarrollo teórico del proyecto Ambientes Complejos de Aprendizaje.

En el capítulo 1, analizo la situación de la enseñanza-aprendizaje en Matemáticas en el bachillerato, y junto con ello los retos en las prácticas educativas en matemáticas.

En el capítulo 2, presento una revisión teórica de varios de los pensadores que han inspirado, directa o indirectamente, la filosofía actual de los estándares de matemáticas en el bachillerato universitario. Sus aportaciones a la educación matemática, así como su concepción sobre la naturaleza de las matemáticas, nos darán los argumentos para entender al aprendizaje de las matemáticas como una actividad humana, que no se limita a su utilidad, sino también por qué se crean y cómo se desarrollan.

Respecto al capítulo 3, describiré a profundidad la metodología que nos permitió desarrollar los ambientes complejos de aprendizaje. Así como el procedimiento para poder implementar nuestra propuesta teórica y metodológica.

En el capítulo 4, presento el análisis curricular que se elaboró junto con los docentes para diseñar una herramienta colectiva que les permitiera entender sus programas.

En el capítulo 5, mostraré la fase de co-diseño genético experimental, que se concretó en la línea de aprendizaje y las secuencias a partir de la investigación especializada y la búsqueda de recursos.

En el capítulo 6, mostraré la co-implementación y el co-análisis retrospectivo que se elaboraba con el colectivo de profesores y las bitácoras para ser reformulada la línea de aprendizaje y las secuencias didácticas. Mientras que en el último capítulo, expongo la concreción instruccional óptima para construir el pensamiento matemático, así como las consideraciones finales para este primer ciclo de intervención.

Capítulo 1. Situación en las Prácticas Educativas de Matemáticas

Imaginarnos la vida sin los avances tecnológicos, médicos, de comunicación, de transportes y de ingeniería resulta imposible para entender el mundo del siglo XXI. Esto confirma la importancia de las matemáticas en las actividades humanas, pues han ayudado a la humanidad a organizar y solucionar problemas de nuestro entorno social y natural. Por ello, las matemáticas resultan ser en la actualidad una ciencia relevante que debe ser enseñada y aprendida formalmente en la educación obligatoria, pues no sólo posibilita a los estudiantes a comprender la realidad sino también actuar en ella.

Sin embargo, las matemáticas suelen ser una de las asignaturas menos comprendidas al enseñarse como entes abstractos que no guardan contacto alguno con la realidad; volviéndose un conocimiento al que sólo unos cuantos pueden acceder (OCDE, 2016; INEE, 2012, 2019) dicho problema y demanda ha desarrollado una gran cantidad de investigación educativa y reformas curriculares para garantizar aprendizajes en la mayoría de los estudiantes, pero ¿qué tan exitosas han sido estas innovaciones para la práctica educativa matemática? y ¿qué retos quedan para la mejora de aprendizajes en matemáticas?

Bajo esta problemática, posiciono los objetivos de la presente investigación en la Escuela Nacional Preparatoria. Para ello, analizaré en el siguiente capítulo la situación de la enseñanza-aprendizaje en Matemáticas, y junto con ello los retos para el bachillerato en las prácticas educativas en matemáticas.

Para hablar de la situación de las prácticas educativas en matemáticas, primero debo explicar qué tipo de matemáticas se requieren para el siglo XXI para así entender el papel de las instituciones educativas frente a las demandas sociopolíticas, económicas e instrumentales. A partir de esto, veré como las evaluaciones PISA, PLANEA, GRADO 12 (OCDE, 2016; INEE, 2012, 2019) y el examen diagnóstico de la UNAM (CODEIC, 2018) nos dan indicadores de que las prácticas educativas en matemáticas no generan los aprendizajes necesarios para este siglo. Ambos antecedentes han sido motivos para nuevas actualizaciones curriculares en el bachillerato nacional (SEP, 2017; DOF, 2008) y el bachillerato universitario (SUMEM, 2014). Finalmente, concluyo este capítulo con los retos que presenta el bachillerato mexicano en las prácticas educativas en matemáticas para posicionar los objetivos del presente trabajo.

1.1. Las Matemáticas en el Proyecto Educativo del Siglo XXI

Las matemáticas han jugado un rol fundamental en la sociedad pues han sido utilizadas para adaptarnos a diversos propósitos de nuestras comunidades. Si retrocedemos al siglo VII la trigonometría permitió la creación de nuevas rutas comerciales al trazar rutas de navegación en océanos abiertos; actualmente, sus principios siguen siendo ocupados para determinar posiciones de puntos, medidas de distancias o áreas de figuras para que funcionen nuestros GPS. Lo que nos permite inferir, que el progreso tecnológico de la civilización humana y el desarrollo de las matemáticas han ido construyéndose a la par e influyéndose la una a la otra.

Es por ello, que las instituciones educativas tienen la responsabilidad social de transmitir uno de los patrimonios más importantes de la humanidad. En el siguiente apartado justificaré por qué son importantes las matemáticas en la educación del siglo XXI; a través de su relevancia instrumental, económica y sociopolítica. De manera que reconozcamos el papel que tiene las matemáticas en las sociedades modernas, y el papel que deberían tener las instituciones educativas frente a ellas.

En un sinfín de actividades humanas las matemáticas siguen ocupándose y desarrollándose, desde la construcción de vivienda, actividades de siembra y tejido, la elaboración de protocolos para el empleo de fármacos o tóxicos, la confección de una conjetura matemática, la matematización de fenómenos biológicos, la toma de decisiones para las inversiones financieras, las operaciones de trueque de los mercados tradicionales, el estudio de la consolidación de suelos, los mecanismos auto regulatorios de temperatura en la industria química, y un sinfín de prácticas de naturaleza diversa (Cantoral, 2016).

Dicha relación entre las matemáticas y las actividades humanas ha tenido un lugar privilegiado en las discusiones de educación matemática, pues si la realidad ha sido “fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber”, se ha planteado reconsiderar a los problemas reales como el comienzo del aprendizaje, más allá del momento de aplicación de lo aprendido (Wernstein y González, 1998, p. 19). Lo que nos obliga a reconceptualizar las matemáticas como un resultado de la acción con nuestro entorno, y no como un ente per se a la acción; pues estás se han desarrollado a partir de una necesidad de desarrollar una verdad general y absoluta que trascienda los casos concretos de cualquier problema del entorno social y/o natural.

Esta nueva mirada de las matemáticas ha permeado a la investigación en educación matemática y a las innovaciones curriculares en las últimas décadas. De modo, que se rescata el carácter instrumental de las matemáticas, y la naturaleza social y cultural de los contenidos matemáticos.

Plantear este modelo de construcción del conocimiento matemático nos obliga a pensar ¿qué matemáticas requieren los estudiantes en el siglo XXI? para que tenga un sentido y pertinencia las matemáticas en nuestro contexto histórico-cultural.

Actualmente las matemáticas siguen siendo un mecanismo crucial de estructuración y dinámica social, un factor que está transformando los mecanismos clásicos de la propiedad y el trabajo. Dentro de esta nueva sociedad, la ciencia y la tecnología se han convertido en elementos vitales para contribuir a los cambios vertiginosos de este siglo.

Lo que ha producido estrechas relaciones entre el saber y el poder, generando amplias implicaciones en las geoestrategias mundiales, en la magnitud del desarrollo científico moderno y las innovaciones tecnológicas a gran escala (Acevedo, 2016). El impacto de la tecnociencia en las economías globales ha hecho que diversas organizaciones como Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) sumen sus esfuerzos para formar a individuos capaces de formular, emplear e interpretar las matemáticas en dicho contexto tecnocientífico.

Lo que ha influido en diversos proyectos curriculares internacionales y nacionales National Governors Association Center for Best Practices (Council of Chief State School O fficers[CCSSM], 2010) y Principles and Standards for School Mathematics (National Coun cil of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Secretaría de Educación Superior [SEP], 2017 y DOF, 2008) para generar un vínculo entre las instituciones educativas y el proyecto económico que tiene el siglo XXI. Es por esto, que los programas curriculares en matemáticas que inicialmente se enfocaban en la algoritmia, ahora estén bajo un modelo de competencias y de solución de problemas (SEP, 2017, DOF, 2008) de manera que la formación de los estudiantes le posibiliten usar las matemáticas para participar en estas demandas de la sociedad.

No obstante, además del impacto económico, la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas comprende elementos de alta complejidad socio cultural y político, pues las matemáticas al ser una construcción humana no son inmunes a las diversas condiciones sociohistóricas y políticas de los países. En medio de una globalización ampliamente recolonizante, así como de la estrecha relación entre el poder y la ciencia debemos ser conscientes de los riesgos actuales, derivados de una tecnociencia, que se aplica en los escenarios de la guerra antes que en la construcción de paz, equidad y desarrollo humano sostenido. Y se aplica en momentos en que la tendencia bélica militar, involucra extensas zonas geográficas del planeta, amenazadas por muchos años, bajo el poder destructivo de un aparato científico y tecnológico militar, que ha demostrado no tener límites ni fronteras, y menos conciencia y principios humanistas (Acevedo, 2016).

Por ello, es de suma importancia replantear el ámbito sociopolítico en la educación matemática, ya que la agencia o participación que se ha buscado dar a los ciudadanos del siglo XXI se conceptualiza como una libertad individual y autonomía individualista y no en términos críticos-éticos. Por lo que se vuelve necesario considerar en la educación matemática una ética comunitaria que enfatice el compromiso, responsabilidad y cuidado (Radford, 2012).

Además, es necesario, que países como el nuestro remarquen la interacción existente entre procesos tecnológicos y contextos socioculturales. La visión de la sociedad frente a los diferentes cambios tecnológicos no puede verse como si se tratara de un agente pasivo, frente a su impacto y socialización, así como en lo referente a su creación, difusión y aplicación. Especialmente en la época actual, se exige una participación pública, comprometida con el impacto de las diferentes y controvertidas realidades sociales como las de América Latina.

Ciencia y tecnología deben ser bienes sociales, y es la misma sociedad la llamada a tener una participación cada vez más activa y comprometida con su desarrollo e impacto generalizado para dejar de ser consumidores de tecnología de los servicios online y la industria digital, para comenzar a ser gestores de ella (Ambrosio como se citó en Lizarzaburu, 2001).

No cabe duda de que en América Latina necesitamos un desarrollo tecnocientífico que fomente el crecimiento y fortalezca la equidad social. Elegir una vía auténtica en la escuela como institución social, resulta hoy tarea prioritaria que compromete a todos, resaltando la participación de la comunidad en las mismas, vinculada a sus beneficios, así como a la posibilidad de garantizar una mejora sostenida de la calidad de vida.

Con estos 3 rubros- instrumental, económico y, sociocultural y político-, los diferentes agentes educativos podemos responder a la pregunta de ¿qué matemáticas son las que se requieren en el proyecto educativo del siglo XXI?, para el desarrollo de una sociedad más democrática y justa que supere el discurso funcionalista y mercantilista de las matemáticas. De esta manera, podremos interpretar y aportar a los marcos curriculares internacionales y nacionales. Como el caso del bachillerato universitario (Escuela Nacional Preparatoria, 1997); que busca la formación de un sujeto cuyo talante crítico se encuentre, contenido en los rasgos propios del tipo de sociedad en que se sitúa: una sociedad democrática construida sobre la base del libre mercado, de la competencia, de la exclusión y la desigualdad.

En los siguientes apartados mostrare una síntesis de los aprendizajes logrados por los estudiantes mexicanos para saber que tanto las instituciones educativas están cumpliendo con su papel en este siglo.

1.2 Los Aprendizajes en Matemáticas

A continuación, se muestra una serie de indicadores sobre las prácticas educativas en las asignaturas de matemáticas en el nivel medio superior, con el fin de señalar los principales retos que tiene este nivel educativo en cuanto a los aprendizajes en matemáticas.

1.2.1 Uso del Conocimiento Matemático a Nivel Internacional

Desde el año 2000, PISA ha evaluado las capacidades de los estudiantes mexicanos de 15 años para resolver problemas en situaciones reales en las áreas de lectura, ciencias y matemáticas. Con la finalidad de conocer, en qué medida los estudiantes al terminar la educación básica pueden interpretar la realidad y resolver problemáticas complejas con el uso del sistema simbólico correspondiente, tanto para beneficio propio como para la sociedad.

Para matemáticas, que es el campo que nos interesa en este trabajo, se espera que el estudiante sea *capaz* de formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos profesionales científicos, sociales y personales. De modo que los estudiantes reconozcan la presencia de las matemáticas en el mundo y puedan emitir juicios y decisiones bien fundamentados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (INEE, 2017).

No obstante, en la última prueba realizada en el 2015, solo el 4% de los estudiantes mexicanos se colocaron en los niveles más altos (niveles 4 a 6), el 40% los niveles intermedios (niveles 2 y 3), y el 57% es decir, más de la mitad, en los niveles inferiores (nivel 1 y Debajo del nivel 1) lo que significa que los estudiantes tienen una dificultad para generalizar el razonamiento matemático y utilizarlo para la solución de problemas más allá del aula, además de que les resulta complicado poner en marcha el pensamiento matemático para la formulación de modelos y solución de problemas complejos.

Asimismo, mientras más de la mitad de los jóvenes mexicanos alcanzan los niveles inferiores, en Singapur sólo representan el 8% de sus alumnos en estos niveles. Lo expresado en esta comparación muestra que mientras la mayoría de los jóvenes de ese país tienen desarrollado un razonamiento que les permite conceptualizar, generalizar y usar información basada en investigaciones, modelar situaciones de problemas complejos, y aplicar sus conocimientos en contextos relativamente no habituales, en México la mayoría de los jóvenes sólo pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren elaborar operaciones aritméticas básicas en problemas donde las instrucciones y la información matemática está explícitamente definida.

Tener a la mayoría de los estudiantes mexicanos por debajo del nivel 2, significa que lo estudiantes tienen baja probabilidad para que los estudiantes puedan seguir cursando niveles educativos posteriores, ya que este nivel es el mínimo necesario para que un joven pueda seguir estudiando en niveles superiores (INEE, 2017). Lo que implica un obstáculo importante para el desarrollo de una sociedad avanzada y una economía competitiva en el mundo globalizado del siglo XXI.

PISA Grado 12 en el Bachillerato

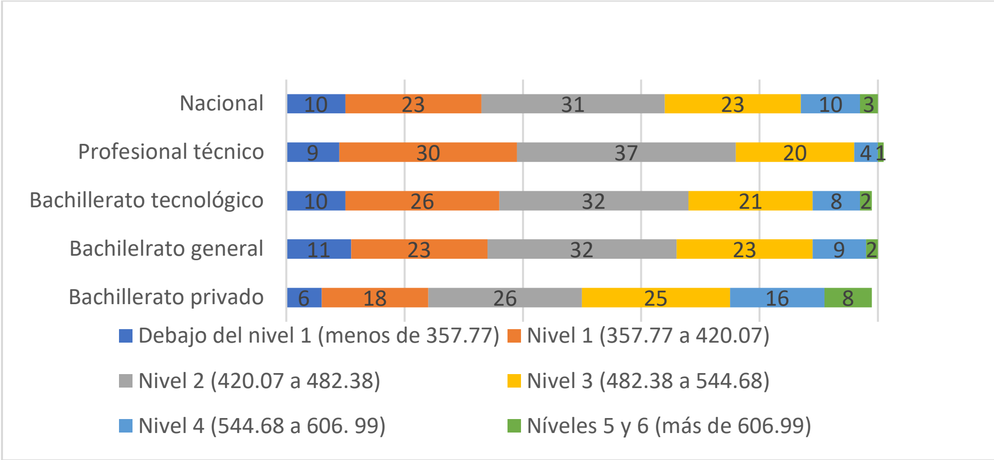
Estos resultados son consistentes en la prueba PISA Grado 12 (INEE, 2012), donde la mayoría de los bachilleratos se colocan en los niveles inferiores a 2, al igual que los estudiantes de 15 años.

Dicha prueba que se aplicó en el 2012 a una muestra de estudiantes que cursaban el último año de la EMS, tenía el objetivo de conocer lo que saben y pueden hacer los estudiantes que han concluido la Educación Media Superior (EMS), así como comparar si los estudiantes que logran concluir este nivel educativo cuentan con mejores competencias en

Matemáticas, Ciencias y Lectura que los estudiantes que apenas ingresan y las diferencias que podrían existir de acuerdo a la modalidad de servicio educativo en la que está inscrito. En cuanto a las diferencia entre modalidades, los resultados de PISA Grado 12 (véase Figura 1) indican una distribución muy similar entre el bachillerato general y el bachillerato tecnológico: en los niveles bajos (1 y debajo del nivel 1) se ubican 34 y 36%, respectivamente; en el nivel 2 ambos obtienen 32%, y en los niveles altos, 11 y 10%, respectivamente. Por otro lado, el profesional técnico concentra al 39% de sus estudiantes en los niveles bajos; sin embargo, destaca que, a diferencia del bachillerato general y el tecnológico, en el nivel 2 logra ubicar a 37% de éstos, es decir, 5% más que estas otras dos modalidades. Por otro lado, en los niveles altos, el profesional técnico tiene 5%. Únicamente en el bachillerato privado la distribución es simétrica, pues 24% de sus estudiantes se ubica en los niveles bajos, y el mismo porcentaje, en los altos (niveles 4 a 6).

Figura 1

Porcentajes de desempeño de Matemáticas, PISA 2012, Grado 12



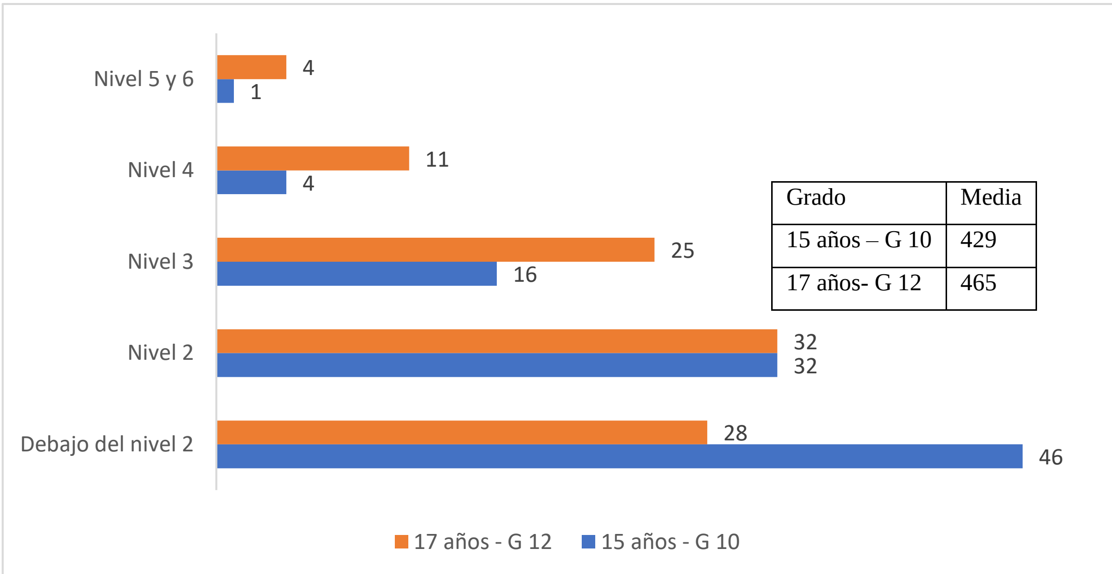
Nota. Adaptado de *Medias y porcentaje de estudiantes por nivel de desempeño en la escala global de Ciencias*, *PISA 2012, Grado 12* (p.21), por INEE, 2012, INEE.

Tales resultados, cuestionan la democratización del conocimiento entre las modalidades que tiene la EMS en México pues existe una brecha notoria entre el bachillerato privado y tecnológico.

Con relación a si los estudiantes que logran concluir este nivel educativo cuentan con mejores competencias que los estudiantes que apenas ingresan (véase Figura 2), se observan ventajas en los niveles extremos para los estudiantes de Grado 12, en el sentido que hay menos estudiantes (28 frente a 46%) en los niveles bajos (debajo del nivel 2), y en los altos (niveles 4 a 6) hay una proporción mayor (15 frente a 5%).

Figura 2

Porcentajes y media de desempeño en matemáticas, PISA 12, GRADO 10 y GRADO 12.



Nota. Adaptado de *Medias y porcentaje de estudiantes por nivel de desempeño en la escala global de Ciencias*, *PISA 2012, Grado 12* (p.20), por INEE, 2012, INEE.

Aunque este análisis indica un avance académico entre ambos grados, no es suficiente el avance en PISA Grado 12, puesto que la media nacional (465) es aún menor a la media de la OCDE que refiere a la población de 15 años (494). Lo que revela todavía un desempeño insuficiente si se contrasta con el ámbito internacional. De ahí que se cuestione la calidad de enseñanza y aprendizajes de esta área en la Educación Media Superior, pues a pesar de que los estudiantes cursen los años que corresponden a este nivel educativo, no es sinónimo o garantía de adquirir aprendizajes (INEE, 2012).

Si bien, algunos autores como Díaz-Barriga (2021) han criticado fuertemente los instrumentos estandarizados de PISA debido a que impulsa la formación homogénea de aprendizaje por encima de la formación de sujetos. Es necesario comprender los bajos resultados de PISA en términos de derechos. En ese sentido, resulta imperante atender la problemática de bajos aprendizajes que no sólo nos evidencia PISA, sino otras pruebas nacionales que a continuación mostraré.

1.2.2 Aprendizajes Clave a Nivel Nacional

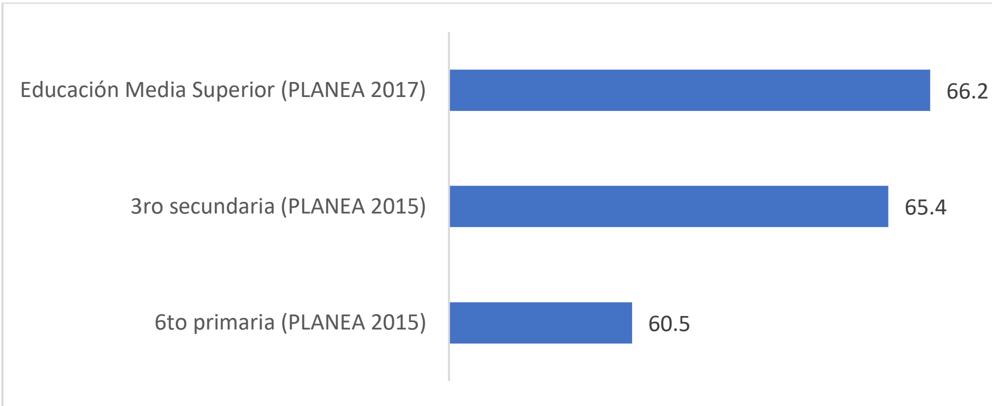
Para conocer los resultados acerca de los aprendizajes clave de matemáticas en la EMS se aplica la evaluación del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) , prueba que sustituyó a ENLACE (Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares) en el 2014, esta prueba aplicada a nivel nacional se encarga de evaluar el conjunto de aprendizajes esenciales en el plan de estudios que permiten la adquisición de nuevos aprendizajes en el campo de formación (Lenguaje y Comunicación y Matemáticas).

Para el caso de las Matemáticas en la EMS, se espera que los estudiantes al término de este nivel dominen los aprendizajes propios de la EMS, así como que tengan la capacidad para emplearlos y transformarlos en herramientas que permitan a los alumnos comprender, interpretar, analizar y dar solución a diferentes problemas de su entorno y de otros campos disciplinares, empleando distintos métodos y procedimientos: aritméticos, algebraicos, gráficos, geométricos, variacionales, estadísticos y probabilísticos (INEE, 2019).

Sin embargo, como vemos en la Figura 3 los niveles inferiores (nivel 1) aumentan a medida que se avanza los niveles escolares, lo que significa que, si los estudiantes no dominan las habilidades básicas de razonamiento matemático, no se puede esperar que dominen competencias de mayor complejidad (MacDonald y Carmichael, 2017).

Figura 3

Bajos niveles en Matemáticas en grados obligatorios



Por lo que resulta coherente que en la última prueba (INEE, 2017) solo 2 de cada 100 estudiantes de la EMS se ubican en el nivel IV, lo que significa que apenas el 2.5 % pueden dominar las reglas para transformar y operar con el lenguaje matemático (por ejemplo, las leyes de los signos); expresan en lenguaje matemático las relaciones que existen entre dos variables de una situación o fenómeno; y determinan algunas de sus características (por ejemplo, deducen la ecuación de la línea recta a partir de su gráfica). Mientras que el 66%, es decir, 6 de cada 10 estudiantes se encuentran en el nivel I; lo que significa que la mayoría de los estudiantes en el nivel medio superior tienen dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen incógnitas o variables (representadas con letras), así como para establecer y analizar relaciones entre dos variables.

En pocas palabras, los aprendizajes al término de la Educación Media Superior en Matemáticas son insuficientes para que los estudiantes mexicanos puedan realizarse plenamente como seres humanos, como profesionistas y como ciudadanos que participen activamente en la construcción de una sociedad moderna, próspera, justa y democrática (INEE, 2019).

1.2.3 Conocimientos de Ingreso a la Licenciatura (UNAM)

La problemática se agudiza cuando llegamos a los conocimientos con los que ingresan a la licenciatura los estudiantes de pase reglamentado. Pues también muestran dificultades en las matemáticas; a pesar de egresar de los bachilleratos universitarios donde se concentran los estudiantes con mayores aciertos en el COMIPEMS. Esta evaluación que se aplica a los estudiantes cuando ingresan a una licenciatura de la UNAM, se compone de 4 pruebas que corresponde a cada una de las áreas de conocimiento en las que están clasificados los programas de licenciatura que ofrece la UNAM: Ciencias físicomatemáticas y de las ingenierías (FMI), Ciencias biológicas, químicas y de la salud (CBQS), Ciencias sociales (CS) y Humanidades y de las artes (HA). Los exámenes incluyen reactivos que evalúan los temas y los aprendizajes esperados comunes al bachillerato y los específicos de las áreas de conocimiento antes mencionadas (Coordinación de Desarrollo Educativo e Innovación Curricular [CODEIC], 2018).

De acuerdo con los resultados del 2018 (véase Figura 4), los estudiantes que ingresan a la licenciatura por concurso de selección al área de Ciencias físico matemáticas y de las ingenierías obtienen en promedio 54.69 por ciento, mientras que los estudiantes que ingresan por pase reglamentado, es decir, los que provienen de bachilleratos universitarios están por debajo de los que ingresaron por examen, con un 45.89 por ciento. Si bien podría explicarse el puntaje con “que los estudiantes que ingresaron por concurso de selección tuvieron que prepararse para un examen”, pone en tela de juicio los 3 años que cursan los estudiantes del bachillerato, pues ingresa con mayor conocimiento matemático los estudiantes que se preparan en 1 año para un examen, que quienes cursan 3 años en la media superior (CODEIC, 2018).

Figura 4

Puntaje de matemáticas para ingresar al área de Ciencias físico-matemáticas y de las ingenierías

Algunos de los aprendizajes que presentan mayor dificultad de acuerdo con un trabajo presentado por Buzo y Campillo en el 2016, son los problemas que se contextúan en situaciones hipotéticas de la vida real, por ejemplo, los modelos representados por un sistema de ecuaciones de primer grado, la resolución de ecuaciones de segundo grado, las razones trigonométricas, y el significado y uso de operaciones básicas con números fraccionarios y decimales. Los temas de dificultad intermedia son el cálculo de áreas, que implica calcular el radio o diámetro de un círculo, y la resolución de problemas con números fraccionarios o decimales, por mencionar algunos de los más relevantes.

El tema más fácil, en donde existe un alto número de aciertos está referido al uso de la recta numérica con números enteros y la identificación de números positivos y negativos.
Estas deficiencias coinciden con los contenidos de las asignaturas más reprobadas del bachillerato universitario en el ciclo 2015-2016 Matemáticas IV (16%) Matemáticas V (12%) y Matemáticas VI (12%). Asimismo, con las asignaturas con altos índices de reprobación en las carreras de área 1, en primer lugar, Cálculo, Física, Algebra, Cómputo y por último Geometría de las generaciones 2009 a 2013 (Buzo & Campillo, 2016 y Jurado, 2016). Por

lo que podemos concluir que el reto educativo de la UNAM se encuentra en los primeros dos años del bachillerato, pues son asignaturas que influyen en las trayectorias de estudiantes universitarios.

Como vimos en esta segunda parte, el dominio de las matemáticas en los egresados de la EMS (INEE 2017 & UNAM, 2018) resultan insuficientes para que puedan continuar con sus estudios superiores, y lo más importante, para que puedan participar como ciudadanos en el siglo XXI. Lo que indica que, por ahora, no sólo no se está cumpliendo el papel medular de la EMS en nuestro país, con la formación integral de estudiantes, si no tampoco con la obligación del Estado de impartir una educación de calidad, que se traduzca en el máximo logro de aprendizaje posible (INEE, 2019).

Con base a los resultados y la relevancia económica, instrumental y, sociocultural y política de las matemáticas en el siglo XXI, se han suscitado cambios en las políticas y prácticas educativas a nivel nacional, tanto para actualizar el modelo educativo de las matemáticas así como para incidir en los principales factores que impactan en los procesos de enseñanza-aprendizaje en México, ejemplos de ello, son el cambio curricular del 2012 en la educación media superior con la Reforma Integral de Educación Media superior (RIEMS) así como el Grupo de Trabajo para la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (GTMEM) convocado por el Dr. José Narro Robles, este último, con el pedido explícito de analizar las causas del problema y proponer soluciones a los aprendizajes en las matemáticas.

Sin duda, las modificaciones que se han elaborado desde el 2008 con la RIEMS hasta las últimas actualizaciones de los programas de estudios (SEP, 2017) han estado encaminadas a los aprendizajes del siglo XXI y a una visión constructivista en las prácticas educativas. Sin embargo, las evaluaciones cuantitativas y cualitativas (INEE 2017; INEE 2019 e INEE, 2018) describen que los aprendizajes logrados por los estudiantes y las prácticas educativas siguen centrándose en contenidos y en una enseñanza tradicional; y por tanto los objetivos que busca la Educación Media Superior siguen sin cumplirse: que es formar ciudadanos libres, que participen activamente en la vida social, económica y política de México.

Dicha problemática -de las prácticas educativas tradicionales en matemáticas-, ha tratado de resolverse desde la reforma de los noventa, con el enfoque de resolución de problemas, como una vía de aprendizaje para desplazar el esquema tradicional. De modo que se reemplazara las prácticas donde el estudiante recibe información de manera unívoca, por una visión donde el proceso de enseñanza-aprendizaje es un proceso que se construye a partir de la triada didáctica.

Mientras que la desarticulación entre la propuesta curricular y las prácticas en el aula se han tratado de resolver con formación a docentes y las últimas modificaciones de la reforma de la educación media superior (SEP, 2017); donde se buscó la creación de foros y consultas para articular de manera coherente los objetivos de la propuesta curricular, las actualizaciones curriculares no han sido, hasta ahora, sinónimo de aprendizaje en la mayoría de los estudiantes.

1.3 Retos en el Bachillerato Universitario

No cabe duda de que la situación de aprendizajes en matemáticas propone varios retos para mejorar las prácticas educativas en el bachillerato. Los puntos que a continuación trataré responden a las problemáticas ya señaladas: la permanencia de la enseñanza tradicional en las prácticas educativas en matemáticas, la desarticulación entre la práctica y las innovaciones educativas, y, por último, la revisión crítica de qué tipo de ciudadano se requiere en el siglo XXI.

a) Para enfrentar el primer problema, las comunidades de investigadores y de docentes debemos contar con un esquema básico que permitan analizar los procesos escolares de enseñanza y aprendizaje. El primer paso para hacerlo es re humanizar las matemáticas para dejar a un lado la visión universal y per se a los humanos, y así comenzar a concebir las matemáticas como una construcción humana, esto permitiría modificar las prácticas tradicionales donde se trata a la enseñanza- aprendizaje de matemáticas como entes platónicos por descubrir a prácticas matemáticas donde la construcción es colectiva y vinculada a la actividades humanas.

   A su vez, esta concepción de las matemáticas, nos permite superar el esquema simplista por un esquema donde la enseñanza-aprendizaje es un proceso de construcción de significados, que ocurre por la interacción entre los elementos del triángulo interactivo: la actividad constructiva del alumno, la acción educativa e instruccional del profesor y los contenidos escolares.

Contar con diferentes niveles y ámbitos en la configuracion de las prácticas educativas matemáticas nos revelaría mucho mejor la complejidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

b) El problema reviste una gran complejidad, porque no sólo implica la creación de un esquema útil para el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas. Las reformas educativas –aun acompañadas de procesos formativos de docentes– han mostrado su limitado y desigual impacto en las prácticas educativas. Se trata, me parece, de examinar las condiciones reales y dinámicas en las que ocurre la construcción de significados y los factores que influyen al sistema educativo. Para que en consecuencia, se produzcan "innovaciones más asimilables". De este modo tal vez se edifiquen puentes transitables entre las innovaciones educativas y quienes debieran ser los principales usuarios: los maestros (Avila, 2016).

c) Por último, es indispensable que la educación matemática aporte elementos tangibles a la formación de los ciudadanos que requiere nuestro país y se posicionen crítica y responsablemente ante los retos de la sociedad del siglo XXI.

   Para lograrlo, se requiere una revisión crítica y permanente del proyecto de sociedad que está formando a los estudiantes, ya que muchas veces el enfoque de competencias se reduce a la formación de sujetos rentables y a un perfil que corresponda a las demandas empresariales.
   Dentro de este ámbito de las matemáticas que va en función de la economía globalizada debemos pensar "¿Cómo lograr que la globalización no duela?" -en países como Latinoamérica- donde existen diversas necesidades culturales y sociales que se extienden a lo largo de los países (Ambrosio como se citó en Lizarzaburu, 2001).

La propuesta que se presentará en este trabajo no buscar ser la única solución; este debe ser visto como una buena idea para comprender e intervenir en el fenómeno a estudiar.
Con este primer capítulo busco mostrar nuestro punto de partida, la cual es una concepción histórico-cultural de la enseñanza y el aprendizaje, donde el trabajo en conjunto de agentes educativos vaya encaminado a la creación de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas, histórico culturalmente constituidas.

Capítulo 2. El Aprendizaje de las Matemáticas dentro de las Actividades Societales

Las matemáticas han jugado un rol fundamental en la sociedad pues han sido utilizadas para adaptarnos a diversos propósitos de nuestras comunidades. En la actualidad, también resultan fundamentales para entender y participar en los avances tecnológicos, médicos, de comunicación, de transportes y de ingeniería del siglo XXI. Esto confirma la importancia de las matemáticas en las actividades humanas, pues han ayudado a la humanidad a organizar y solucionar problemas de nuestro entorno social y natural. Por ello, las matemáticas resultan ser en la actualidad una ciencia relevante que debe ser enseñada y aprendida formalmente en la educación obligatoria, pues no sólo posibilita a los estudiantes a comprender la realidad sino también actuar en ella (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2017).

En ese sentido, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato universitario debe ser que el estudiante descubra su capacidad de abstracción, su capacidad para pensar racionalmente y la capacidad que tiene, como ser humano, para crear modelos abstractos que le permitan analizar y entender situaciones del mundo que le rodea (SUMEM, 2014).

Por lo que las matemáticas en el proyecto educativo actual se conciben como una herramienta cultural, que no se limita al "¿para qué son útiles? Sino también "¿por qué se crean, ¿cómo nacen y cómo se desarrollan?". De tal forma, que se superen las creencias erróneas que aún permanecen en las aulas del país, sobre que el aprendizaje de las matemáticas es sinónimo de procedimientos para realizar cálculos o el seguimiento de reglas fijas para obtener resultados correctos (SUMEM, 2014 y INEE, 2018). A continuación, se presenta una revisión teórica de varios de los pensadores que han inspirado, directa o indirectamente, la filosofía actual de los estándares de matemáticas en el bachillerato universitario. Sus aportaciones a la educación matemática, así como su concepción sobre la naturaleza de las matemáticas, nos darán los argumentos para entender al aprendizaje de las matemáticas como una actividad humana, que no se limita a su utilidad, sino también por qué se crean y cómo se desarrollan.

Bajo el enfoque de las matemáticas como fuente de conocimiento, autores como Hilbert (1862-1943) y Felix Klein (1849-1925) han contribuido a comprender como es que los objetos matemáticos no se abstraen por la simple descripción de características principales, sino por su encadenamiento de operaciones lógicas que se realizan sobre dominios matemáticos preconstruidos en la historia de las matemáticas.

Un ejemplo, son los aportes metodológicos de Hilbert (1862-1943) sobre la axiomatización de los números reales, los cuales han generado implicaciones para el desarrollo del pensamiento matemático formal, al utilizar un método histórico para edificar este concepto. Como resultado de estos trabajos, concluye, que el estudio de las matemáticas no pueda reducirse a la lógica o a un simple cálculo proposicional. Pues más allá de la importante labor que consiste en levantar repertorios de resultados en tratados y publicaciones, la historia de las matemáticas y, en general la historia de las ciencias se enfoca a la comprensión de los procesos de constitución de objetos, teorías y estructuras matemáticas (Arboleda, 2011).

Por lo que la axiomatización o edificación de las matemáticas pueden contener un valor pedagógico para la formalización, al estudiar las representaciones e ideas previas de constitución de los objetos matemáticos (Arboleda, 2011). Con este enfoque, la historia de las matemáticas, contribuyen a la comprensión de lo simple a la definición formal, recreando las diferentes objetivaciones de las actividades matemáticas que construyen a los objetos matemáticos.

Por otra parte, el movimiento liderado por Felix Klein, a comienzos del siglo XX, “Meraner Refor” o “Kleinsche”, generaron una serie de implicaciones en la educación matemática al tener como principal objetivo cerrar las brechas entre la educación obligatoria y los estudios universitarios (Allmendinger, 2019). Como respuesta a la demanda, dicho movimiento, introdujo la noción de función y geometría espacial al centro de la reforma, para reorganizar los contenidos de los programas, y culminar finalmente en el cálculo.

La decisión de optar por un concepto que unificará los diferentes niveles educativos se debió, a que en los cursos de matemáticas se realizaba una presentación abstracta y sistemática del lenguaje matemático, lo que sólo hacia accesible el conocimiento a los estudiantes más avanzados. Por tales razones, Klein adopta una postura progresista que unifique tanto al algebra, geometría analítica y el cálculo con el fin de sortear los obstáculos que podrían enfrentar los estudiantes hasta los estudios universitarios.

> We, who are called the reformers, would put the function concept at the very center of instruction, because, of all the concepts of the mathematics of the past two centuries, this one plays the leading role wherever mathematical thought is used. We would introduce it into instruction as early as possible with constant use of the graphical method, the representation of functional relations in the x y system, which is used today as a matter of course in every practical application of mathematics. Strong development of space perception, above all, will always be a prime consideration. In its upper reaches, however, instruction should press far enough into the elements of infinitesimal calculus for the natural scientist or insurance specialist to get at school the tools which will be indispensable [for him or her]. (Klein 1924/1932, p. 4, como se citó en Kilpatrick, 2019)

De ahí, que el comité encargado de reformar la educación matemática elija al concepto de función y geometría para reorganizar los contenidos matemáticos; pues de todos los conceptos matemáticos de los dos últimos siglos, la función ha jugado un papel principal en donde quiera que se utilice el pensamiento matemático (Kilpatrick, 2019). Además de lo anterior, el comité puso mayor énfasis en las aplicaciones en las matemáticas escolares y el llamado principio de movimiento (Prinzip der Bewegung), refiriéndose a la Neuere Geometrie, ideas que sin duda han fluido al desarrollo actual de herramientas tecnológicas de geometría dinámica.

Los aportes que realizan los dos últimos autores ayudan a resolver problemáticas semejantes a las que se exponen en el capítulo anterior, respecto a la concepción disciplinar de las matemáticas como entes platónicos. Dicha estructura que ha encapsulado y opacado la laboriosa actividad matemática desplegada en su constitución, ha imposibilitad un cambio real en la educación matemática sobre los contenidos.

No obstante, pese a que en los trabajos de estos autores se reconoce que las matemáticas no descansan únicamente en un sistema formal, su objeto de estudio aún continúa sobre el propio sistema matemático y no como herramientas culturales. Lo que puede contradecirse con el enfoque actual del modelo educativo de la ENP. El cual se basa en el enfoque de Freudenthal (1991) y Simon Stevin. Estos segundos autores, no solamente conciben a las matemáticas como los autores anteriores, sino también sitúan la matematización de los estudiantes en actividades reales.

Más adelante se retomarán sus aportaciones de cada autor para proponer un marco conceptual original para la Escuela Nacional Preparatoria que unifique tanto el sistema simbólico y la actividad real para el aprendizaje de las matemáticas.

Simon Stevin (XVI-XVII), inclinó su trabajo hacia una tendencia empírica. Es decir, la naturaleza de las matemáticas la sustenta en la actividad misma, en lugar de entes platónicos que se rigen por un lenguaje formal. Debido a sus grandes preocupaciones por lograr símbolos y formas prácticas de operar, para hacer sencillo el cálculo, el matemático holandés conceptualizó al número a través de las operaciones de contar y medir: "El número expresa la cantidad de cada cosa […] Las operaciones aritméticas, como relaciones y transformaciones de números, expresan las acciones y transformaciones que se hacen con las cosas (en tanto cuantificables)" (Waldegg, 1996, p. 13).

En este sentido, son las acciones que se realizan sobre las cantidades las que dan sustento a las operaciones aritméticas y éstas, a su vez, las que constituyen la esencia del número; de la misma manera que las acciones de medir, comparar, partir, transformar, etc. son las que dan sentido a la cantidad.

La manera en que Stevin argumentó y justificó los números dio luz para algunas sugerencias didácticas: los números decimales y sus operaciones, el sistema métrico decimal y el sistema monetario (Grupo SM, 2018). De ahí el enfoque que actualmente se promueve en el primer año de Matemáticas en la ENP (Escuela Nacional Preparatoria, 2016 y Alvarado, Sánchez y Lugo, 2019), el cual se profundizará en el capítulo 4.

A continuación, veremos los aportes de Freudenthal, que han permitido conceptualizar el enfoque actual de las ENP en el aprendizaje de las matemáticas para que los estudiantes puedan hacer uso de las matemáticas en los diferentes contextos de su vida diaria, y, además, se desarrolle una sociedad más democrática y justa que supere el discurso funcionalista y mercantilista de las matemáticas.

De acuerdo al matemático holandés Freudenthal (1991), la enseñanza de las matemáticas tradicional se había centrado, en el producto de las matemáticas en lugar del quehacer matemático, por lo que Freudenthal caracteriza esto como una inversión anti didáctica, al priorizar el resultado, en lugar de la actividad misma:

> [Mathematics as a human activity] is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach. (Freudenthal, 1971, p. 413-414 como se citó en Gravemeijer y Terwel, 2000, p. 781)

Conforme a Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) el enfoque de las matemáticas realista se rige por 6 principios fundamentales:

- El primero, que los estudiantes tienen una participación en el momento de hacer matemáticas o matematizar.
- El segundo, el principio de realidad, el cual se define de dos maneras: la capacidad de los estudiantes de aplicar las matemáticas en la resolución de problemas de la "vida real". Así como, las matemáticas mismas, las cuales deben problematizar situaciones que sean significativas para los estudiantes.
- El tercer principio, del (EMR) es el relacionado al nivel, donde se menciona que los estudiantes operan en diferentes niveles de comprensión, y que van desde soluciones informales relacionadas al contexto, hasta un nivel conceptual y de estrategias. Esta esquematización progresiva conecta el mundo real con el mundo abstracto, a través del desarrollo de modelos matemáticos.
- El cuarto principio, es el entrelazamiento entre los conceptos principales. Las principales disciplinas de las matemáticas (álgebra, geometría o aritmética) se integran y no se consideran como un plan de estudios separado o asilado, todas son necesarias para que el estudiante pueda resolver el problema.
- Por último, los dos últimos principios hacen referencia a que las matemáticas se significan en un plano social, en lugar de un plano individual. De ahí la importancia de la docente, en cuanto al seguimiento de aprendizajes, así como el de los estudiantes para compartir sus estrategias y mejorarlas entre sus compañeros.

A partir de estos principios han surgido una serie de propuestas instruccionales para este nivel educativo, algunos de ellos que citan Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers (2014) son:

De Lange (1987) quien diseñó un nuevo enfoque para enseñar matrices y cálculo. Más adelante se desarrollaron otras propuestas donde se integró la tecnología, como: Drijvers (2003) para la comprensión de conceptos matemáticos y operaciones; y de manera similar, Bakker (2004) y Doorman (2005) que incorporaron softwares dinámicos para la enseñanza de la estadística y el cálculo diferencial.

De igual forma, los principios antes descritos, han impactado al desarrollo de propuestas de evaluación, pues, de acuerdo con este enfoque, la evaluación resulta imprescindible para observar y dar seguimiento a los procesos de aprendizajes. Pues la matematización hace hincapié en la actividad individual para resolver problemas, más que en los resultados. En este sentido, la observación como herramienta de evaluación en el EMR, no sólo nos permitirá evaluar la adquisición de habilidades de los estudiantes, también nos ofrecerá una imagen integra de la actividad matemática del estudiante.

Esto cobra especial relevancia bajo el enfoque de EMR, ya que de acuerdo con Freudenthal en Van den Heuvel-Panhuizen (1996), el proceso de aprendizaje ocurre de manera discontinua, y, por tanto, se vuelve necesario observar los saltos que dan los estudiantes entre los niveles de comprensión. De ahí la importancia que tiene la observación a la hora de evaluar sobre el testeo de “objetivos” de resultados de aprendizajes.

A partir de estas bases, se han desarrollado alternativas para las pruebas existentes, entre ellas, las “lecciones de prueba”, las cuales tienen una característica bilateral: como lección en la que se administra una prueba y, simultáneamente, una situación de prueba en la que se da una lección. Algunos de estos trabajos están citados en Van den Heuvel-Panhuizen (1996): “the Column Arithmetic test-lesson” (Ter Heege y Treffers, 1979); “the Winter Supplies test-lesson” (Ter Heege, 1978; Dekker, Ter HeegE y Treffers, 1982); “the Kingdom of Eight test-lesson" (De Jong, 1977; Treffers, 1978, 1987).

Por último, otro de los aportes que da el EMR es la democratización de las matemáticas. Pues al tomar como punto de partida a la actividad matemática para la abstracción matemática, el conocimiento se vuelve accesible tanto para los que cursarán estudios superiores en las matemáticas, como para la mayoría de los estudiantes que hará uso de esta herramienta cultural para resolver problemas de la vida cotidiana.

Lo que resulta imprescindible frente a los diferentes cambios tecnológicos, pues los países de América Latina nos hemos quedado como agentes pasivos, frente a la socialización y aplicación de la tecnología, por lo que la educación matemática también debe orientarse a una participación pública, comprometida con el impacto de las diferentes y controvertidas realidades sociales como las de América Latina.

Sin duda, las matemáticas no nacieron plenamente formadas. Fueron haciéndose gracias a los esfuerzos acumulativos de muchas personas que procedían de muchas culturas y hablaban diferentes lenguas. Reconocer su origen o naturaleza histórica del sistema matemático que se sigue utilizando hoy, y que data de hace más de 4000 años, nos hace considerar al mundo real como fuente de conocimiento (Stewart, 2012). Sin embargo, como señala Freudenthal (1991) en Gravemeijer y Terwel (2000), el punto crítico está en lo que entendemos como "realidad" y él da la siguiente aclaración: "yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario" (p.17). La realidad es entendida como una mezcla de interpretación y experiencia sensible, lo que implica que la matemática misma también puede formar parte de la realidad de una persona.

Realidad y lo que cuenta como sentido común para una persona no son cosas estáticas, sino que crecen y son afectadas por los procesos individuales de aprendizaje. Así es también como debe ser entendida la declaración de Freudenthal (1991) "la matemática comienza en y permanece con la realidad" (p.18). Por lo que desde la visión de Freudenthal, la "realidad" es construida desde la vista del actor.

Si bien, Freudenthal distingue como fuente de conocimiento a la interpretación, también considera a la experiencia sensible, tal cual lo hace Simon Stevin. No obstante, desde la postura de aprendizaje constructivista que tiene el bachillerato universitario, la experiencia sensible corresponde a un paradigma empirista, donde no se reconoce al sujeto en este proceso de aprendizaje, por lo que será necesario conservar únicamente la fuente interpretativa, la cual se terminará por resignificar con las actividades societales (Leóntiev 1975- 1981, como se citó en Wertsch, 1988).

Entonces, partiendo de la idea que las Matemáticas son una actividad humana que se ha construido a través de un colectivo de personas y que históricamente ha desarrollado teorías, conceptos y herramientas para que las comunidades resuelvan problemáticas del mundo real y, aunado a que los estándares del bachillerato universitario resaltan el desarrollo del pensamiento abstracto dentro de actividades reales, resulta elocuente que la escuela recree las condiciones de la actividad humana para el desarrollo de capacidades complejas.

Por tanto, como menciona Cárdenas (2020) y Werstch (1988) recurrir a la noción de actividad societal resulta adecuado para crear las condiciones materiales en las que surgen las capacidades matemáticas, o puesto en términos más generales, para comprender la influencia que tiene la sociedad y la cultura sobre el desarrollo de capacidades superiores. Es importante distinguir que, por actividad societal, nos referimos a aquellas actividades institucionalizadas por las matemáticas, en contraste con la actividad humana general. Por ejemplo: las actividades profesionales o científicas (la meteorología o el clima, la ecología, la medicina, las ciencias espaciales, la genética, las mediciones y el propio mundo de las matemáticas), sociales (demografía, estadísticas nacionales, políticas públicas, publicidad) y personales (salud personal, finanzas, alimentos y deportes).

2.1. La Actividad Societal como Origen del Conocimiento Matemático y Unidad de Análisis

La actividad, socialmente construida, tiene un propósito particular con un fin último que se convierte en el motivo del individuo que la realiza, cuenta con una estructura propia que permite se encadenen una serie de acciones significadas con un sentido particular. Dicha actividad específica del ser humano ha sido construida por él mismo y cuenta con una lógica interna particular, la cual siempre descansa en un sistema simbólico y un motivo (Wertsch, 1988 y Cárdenas 2020); se conforma por un sistema de relaciones sociales, y su forma está determinada por sus formas y medios de interacción social y material (Wertsch, 1988). La actividad societal no se determina por el espacio físico en que se desenvuelven los seres humanos, sino más bien es una interpretación o creación sociocultural impuesta por los individuos que participan en dicho contexto y los signos propios de la actividad. Dicha interpretación es la que se construye en el individuo al momento de participar en una actividad significada particular.

Debido a estas características de la actividad, es que, a muchos investigadores, incluyendo el Proyecto Aleph 5[1], que es de donde se inserta este trabajo, les ha interesado el marco conceptual de la actividad para comprender la naturaleza del pensamiento complejo, y superar el dualismo cartesiano. Pues el pensamiento resulta una función de la actividad objetiva externa, el mundo de cosas que se produce y se reproduce mediante su actividad (Spinoza en Wertsch, 1988).

Además, el marco conceptual de la actividad nos permite comprender las diferentes relaciones que ocurren dentro de las prácticas educativas, al ser un modelo holístico que por su forma está determinada por la interacciones sociales y materiales.

Dicho lo anterior, es que esta investigación utiliza el supuesto de la actividad societal para diseñar situaciones de aprendizaje complejas, que hagan uso de la mediación simbólica, mediación colectiva y la mediación del motivo; como se hace en aquellas actividades institucionalizadas de las Matemáticas, para así desarrollar capacidades de abstracción y modelización en los estudiantes, y en consecuencia se puedan cumplir los aprendizajes de la curricula nacional.

Bajo este supuesto de la forma de la actividad societal y su relación con el pensamiento complejo, es que hago una síntesis de investigación empírica que evidencia lo expuesto anteriormente.

El primer trabajo es de Guerrero, Mena y Morales (2017) que buscaban identificar cómo surgen diferentes tipos de conocimiento cuando un individuo se enfrenta a una tarea de modelado y cómo influye el material auxiliar para hacer una metáfora de la situación real. En su estudio plantearon a estudiantes una situación donde el objetivo era encontrar una

[1] Con el objetivo de fomentar la investigación educativa en la Escuela Nacional Preparatoria, durante el ciclo escolar 2017-2018 se desarrolló el siguiente proyecto de carácter institucional: el proyecto “Aleph 5” cuyo objetivo es, el desarrollo y aplicación de materiales didácticos acordes con los planteamientos y el modelo educativo planteado en los programas actualizados de cuarto y quinto grado. Este proyecto se tornó de carácter institucional a partir de la segunda mitad del año. Se trata de un trabajo en el que participan académicos de la Facultad de Psicología, estudiantes de la licenciatura en el área de Psicología Educativa, y profesores de diferentes Colegios académicos de la ENP (Valle y Jurado, 2018).

expresión para predecir el comportamiento de corrosión de un material en el flujo de la corriente de Humboldt. Dicho estudio conducía a los estudiantes al estudio de funciones decrecientes. Durante el proceso de modelización se propuso el uso de materiales auxiliares (anillos metálicos) para activar la visualización y / o representación de los procesos de degradación implicados. Los resultados del estudio muestran cómo es posible promover procesos de abstracción y matematización con el apoyo del material auxiliar que favorezca la simplificación e interpretación del problema real. Un trabajo similar es el de Gravemeijer and Doorman (1999), quienes discuten el rol de los problemas contextualizados para apoyar el proceso formal de las matemáticas en estudiantes de cálculo. Con el fin de responder como es que los estudiantes brincan de un nivel informal de las matemáticas a uno formal del cálculo; ambos autores concluyen sobre el papel de las funciones discretas y sus gráficos como intermediario entre los problemas de contexto que deben resolverse y el cálculo formal que se desarrolla.

En este sentido, incluir representaciones en diferentes niveles de abstracción, es decir, una representación concreta y abstracta, permiten vincular la situación real y las matemáticas formales, que se están trabajando. Lo que permite a los estudiantes modelizar o matematizar la situación real.

Por otro lado, los resultados del estudio exploratorio de Maxine Pfannkuch (2011) en un estudio llevado a cabo en estudiantes de 14 años, quería investigar ¿qué roles desempeñan el contexto de datos y los contextos de aprendizaje previo para el desarrollo de Estadística Inferencial? para dar respuesta a ello, se condujo un análisis donde se rastreó el aprendizaje antes, durante y después de la introducción de los conceptos de variabilidad muestral. Los resultados sugieren que el "contexto" tiene un papel central para el desarrollo. Por lo tanto, estos hallazgos parecen sugerir que tanto el contexto de datos como los contextos de experiencia de aprendizaje deben tenerse en cuenta para desarrollar el razonamiento de los estudiantes a partir de los datos. El contexto de datos desde una perspectiva de resolución de problemas estadísticos es el contexto de la situación del mundo real de donde surgió el problema, y está indisolublemente ligado a resolver el problema o aprender más sobre la situación real; a continuación, presentamos otros resultados favorables en investigaciones donde se hizo uso de situaciones contextualizadas.

Herceg y Dejana (2020) en su trabajo evaluaron ejercicios de teoría numérica que se basan en experimentos de ingeniería eléctrica, en entornos como: Arduino Uno R3, GeoGebra, Mathematica, C++ y C#, con el objetivo de motivar a estudiantes universitarios en la solución de problemas. Los resultados muestran diferencias significativas entre el grupo control y experimental. El mejor dominio de los temas de aprendizaje y la mayor motivación se hallaba en el grupo experimental que hizo uso de tecnologías y datos reales. Por último, el trabajo de Fatade, Mogari y Arigbabu (2013) también evidenció el efecto de incluir metodologías del aprendizaje basado en problemas (ABP) en los logros de los estudiantes de 15 a 18 años. Por lo que se plantearon las siguientes preguntas:

¿Habrá alguna diferencia significativa en el rendimiento posterior a la prueba en las puntuaciones de TMT (prueba elaborada por el maestro) entre estudiantes expuestos al PBL (aprendizaje basado en problemas) y aquellos expuestos a la MT (enseñanza tradicional)? ¿Habrá alguna diferencia significativa entre los puntajes de logro posteriores a la prueba en la RDT (prueba elaborada por el investigador) entre los estudiantes expuestos al PBL (aprendizaje basado en problemas) y los expuestos a la MT (enseñanza tradicional)?

Los resultados mostraron que hubo diferencias estadísticamente significativas en las puntuaciones medias de rendimiento post-prueba en TMT y las puntuaciones medias de rendimiento post prueba en RDT entre los estudiantes expuestos al PBL y los expuestos a la TM, todos a favor del grupo PBL. Sobre la base de los resultados, el estudio recomendó que el PBL debiera adoptarse como una estrategia de instrucción alternativa a la MT para mejorar el aprendizaje significativo en las aulas de Matemáticas adicionales y se deberían hacer esfuerzos para integrar la filosofía del PBL en el plan de estudios de los profesores en formación de las instituciones de Nigeria.

Considerando lo anterior, podemos respaldar con la investigación empírica, nuestra premisa de que es en las de Actividades societales donde se desarrolla el pensamiento matemático complejo. En esta síntesis, se mostraron las diferencias que se producen en el aprendizaje cuando se aprenden las matemáticas en un contexto real, lo que permite a los estudiantes lograr resolver problemas en situaciones del mundo real y además tener mayor dominio sobre las propias matemáticas. De igual forma, vimos como la investigación educativa reconoce el papel que juegan otras dimensiones que conforman a las actividades, como el uso de herramientas tecnológicas y materiales externos, que permiten la interpretación de las situaciones reales en cuestión.

De esta forma, también los diferentes elementos que conforman a la Actividad tienen un papel importante que influyen en el desarrollo del pensamiento matemático, pues de acuerdo también a (Leóntiev 1975- 1981, como se citó en Wertsch, 1988), las formas particulares de la Actividad están determinadas por las formas y medios de interacción social y material. Ahora bien, ya que se pone de manifiesto que la Actividad se conforma y se lleva a cabo por el uso de herramientas, es importante reconocer la influencia de estos elementos en el aprendizaje de las matemáticas, así como de otros elementos que influyen en el desarrollo del pensamiento matemático dentro de las actividades societales; algunos de ellos serán los relacionados a la mediación docente y los espacios de construcción colectiva.
Con base a estas premisas de la actividad (Leóntiev 1975- 1981, como se citó en Wertsch, 1988) y a las evidencias que han sustentado nuestra premisa de cómo se promueve el pensamiento matemático, en los siguientes apartados desarrollaré sobre las dimensiones anteriormente mencionadas, así como el marco conceptual en el que se posiciona dicho proyecto.

2.2. El Uso de Medios Semióticos en la Ejecución de Acciones Matemáticas

Desde el enfoque propuesto por Radford, la relevancia de usar medios semióticos, en la ejecución de acciones matemáticas, radica en que el conocimiento matemático no es una entidad terminada que pueda observarse y transmitirse de manera directa; sino que las matemáticas son un proceso de posibilidades; es decir, "sólo se convierte en objeto de pensamiento e interpretación a través de problemas específicos, actividades de planteamiento y resolución de problemas" (Radford 2015b, p. 136 , como se citó en Salinas-Hernández y Miranda, 2018).

En este sentido, los signos y artefactos de la actividad no son independientes de la actividad, al contrario, forman parte de la actividad misma, pues configuran, organizan y reorganizan la Actividad, así como el pensamiento de los estudiantes. Dicha postura, introduce los medios semióticos como parte de la unidad de la Actividad, en este enfoque, los estudiantes se vuelven consciente del significado de los objetos matemáticos por medio de su actividad (en la que se incluye el uso de artefactos y signos) (Radford, 2015, como se citó en Salinas-Hernández y Miranda, 2018). A continuación, mostraré diversas evidencias que se han generado en investigación, en educación matemática, en tornos a la relación del uso de medios semióticos para el aprendizaje.

El primero de ellos, es de Salinas-Hernández y Miranda (2018) que bajo el enfoque propuesto por Radford; analizan los procesos de interpretación de estudiantes de 12 ° grado en entornos enriquecidos por software, el cual, administra video en tiempo real y reproduce fotograma a fotograma la representación de un experimento de movimiento de una pelota de tenis en caída libre, a través de un plano inclinado.

A través de su estudio buscan responder: ¿Cómo se relaciona el conocimiento -de los estudiantes- de las gráficas cartesianas computacionales con el conocimiento -de los estudiantes- sobre las características del movimiento real? y ¿Cómo se desarrolla la actividad -de los estudiantes- en un entorno enriquecido de software de gráficos?

Ambos concluyeron que el uso del software dinámico proporcionó a los estudiantes algunos procesos de interpretación para que pudieran comprender el experimento de la pelota de tenis. El hecho de que el software hiciera algunos cálculos (por ejemplo, trazar las tablas de funciones) provocó que la actividad de los estudiantes se reorganizará de otra manera. A los estudiantes les bastaba observar y manipular el software para comprender el significado de los gráficos cartesianos. Durante esta actividad, también se mostró la relevancia de la guía docente para hacer uso de la tecnología y alcanzar las metas pedagógicas.

Otros trabajos son los relacionados a Flores y Almonacid (2020) que analiza el espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de carreras de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver una tarea de modelización. A partir de la manipulación de los artefactos de deslizador y cuadricula de GeoGebra, el estudiante logra conjeturar y validar que el valor que está variando en el problema real es el área, y que este último lo hace en función de la medida de la longitud del segmento AB. Estas acciones son evidencia de la activación de la génesis semiótica e instrumental, por lo que la actividad de modelización plantea evidencia sobre la génesis semiótica e instrumental y la posible activación del plano semiótico-instrumental de los estudiantes al desarrollar la actividad.

Ambas evidencias, nos hablan de la relación dialéctica que va teniendo la actividad y la interpretación de los estudiantes a lo largo de las acciones matemáticas. En ambos casos, el significado de los objetos matemáticos nunca fue el mismo durante todo el desarrollo de la actividad, a medida que los estudiantes actuaban sobre él, el estudiante reflexionaba de manera continua el signo hasta transformar la Actividad, los medios semióticos y él mismo.

2.3. La Interacción Social entre Pares dentro de las Actividades Matemáticas

La semiosis o creación de significados, que se revisó en el apartado anterior, ocurre siempre en procesos colectivos (Radford, 2018). En este sentido, la actividad integra a los estudiantes y al interlocutor. Pero al mismo tiempo, la actividad es producida por las acciones de los estudiantes y del interlocutor. Esta es la razón por la que debemos atender a los participantes sin dejar de asistir a la actividad en la que se encuentran inmersos, y recíprocamente, no podemos atender a la actividad sin atender a los participantes que producen la actividad. Para ejemplificar lo anterior, se sintetizan una serie de evidencias empíricas para comprender como las acciones de los estudiantes, no resultan de una construcción individual, sino del colectivo.

El primero de ellos, es el trabajo de Tinungki (2015) que examinó la comprensión del concepto de probabilidad, mediante el uso del modelo de aprendizaje cooperativo de TAI. Como muestran los resultados de dicho estudio, la capacidad de comunicación matemática en los estudiantes tiene una correlación significativa con el tipo de aprendizaje cooperativo TAI; dicho modelo consistía en conformar equipos heterogéneos con diferentes niveles de aprendizaje, los cuales debían resolver un problema a través de diferentes etapas que implicarán diversos espacios de discusión y negociación de significados. Al finalizar la intervención se encontró una relación significativa entre la comunicación matemática y el aprendizaje cooperativo de los estudiantes. Estos resultados se debieron a que en las clases donde se usó el aprendizaje cooperativo, los estudiantes se ayudaban entre sí, para discutir, argumentar y agudizar el conocimiento que tenían hasta ese momento para superar la brecha en el entendimiento entre estudiantes.

Un segundo estudio, realizado por Swidan y Prusak (2018) buscaron comprender el rol que tienen los ambientes colaborativos en línea, para la conceptualización de cuadriláteros. Concepto con el que muestran dificultades un buen número de estudiantes, y que a largo plazo puede repercutir en el desarrollo del pensamiento geométrico.

La actividad de indagación se diseñó en 3 partes. En cada una de ellas se invitaba a los alumnos a participar en una situación de resolución de problemas, y a explorar la estructura matemática con el artefacto tecnológico del entorno virtual. Cada una de las tres tareas, contenía las siguientes fases: (a) encontrar individualmente una solución y escribirla en la sala de chat; (b) trabajar en díadas o tríadas en la sala del entorno virtual para tratar de llegar a un consenso sobre la solución; (c) y comprobar las conjeturas a través del software predeterminado. En los casos en los que se extrajo una conjetura incorrecta, se pedía a los estudiantes que plantearan una nueva conjetura y que la volvieran a verificar con las herramientas de GD; (d) para probar y sacar conclusiones.

Los resultados del análisis dieron luz sobre la naturaleza de las interacciones sociales entre los estudiantes y el artefacto tecnológico que ocurrieron durante el proceso de objetivación de los cuadriláteros. En el caso particular de las interacciones por pares, cada estudiante consideró las acciones y afirmaciones de sus pares en dos sentidos: dialógica y dialéctica. Fue dialógica cuando cada estudiante articulaba su discurso y colaboraba junto con sus otros compañeros para emerger una nueva idea, y fue dialéctica, cuando los estudiantes retaban las ideas de sus otros compañeros.
También se extrajeron ideas para rediseñar las tareas de aprendizaje, así como generación de futuras líneas de investigación.

En síntesis, todo lo que los estudiantes dicen y hacen en general, parte de una construcción colectiva. Esto es así porque su discurso está diseñado para otros, usa un lenguaje que aprendió de otros, y que, en su discurso, regresa al otro. Todo lo que digan los estudiantes, por lo tanto, es un reflejo de la cultura, un espejo de sociedad, un microcosmos de esta (Zeyer y Roth como se citó en Swidan y Prusak, 2018).

Esto coincide con las conclusiones de Moretti y Radford como se citó en Swidan y Prusak (2018) que precisan sobre la naturaleza cultural de la subjetividad, así como del proceso de conocer de los humanos. Los cuales, resultaban de la interacción entre la filogenia (el desarrollo evolutivo de un grupo cultural) y la ontogenia (el desarrollo de la vida de los individuos) en la actividad humana. Lo que nos habla del carácter dialéctico de la Actividad y sus participantes, pues en este proceso se construye tanto el sujeto como el conocimiento.

2.4. La Interacción Social del Interlocutor Experto dentro de las Actividades Matemáticas

Como ya se describió en el apartado anterior, la actividad societal se construye por las acciones de los estudiantes, como por las del docente. En el caso particular del docente, su rol es el de crear de manera intencionada los espacios de significación colectiva que permita a los estudiantes actuar con el sistema simbólico, a medida que avanza su aprendizaje y autonomía dentro de la actividad.

Lo anterior queda revelado en la investigación realizada por Dunphy y Dunphy (2003) que aplicó modelos educativos de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y enfoques para el desempeño asistido para promover la adquisición de habilidades quirúrgicas, y así proporcionar un marco para mejorar potencialmente la educación quirúrgica. Al finalizar la intervención, la ZDP y los enfoques para el desempeño asistido, los resultados proporcionaron un valioso marco para la planificación y evaluación de programas de educación quirúrgica; pues ambos modelos educativos permitieron examinar los procesos para construir habilidades quirúrgicas, así como comprender y mejorar los enfoques de la enseñanza, y los procesos asociados a la autonomía de los estudiantes en la actividad.
Esta segunda forma de interacción que se presenta en el contexto escolar; tiene el propósito de crear de manera intencionada los mecanismos de aprendizaje de la actividad, al conocer de manera previa la actividad significada. Por lo que el papel del docente será el de construir las posibilidades de conocimiento a través de los medios semióticos y los espacios de construcción colectiva.

Otro ejemplo situado en el aprendizaje de las matemáticas es el de Teneal (2017), en este estudio, se llevó a cabo un experimento de enseñanza en el que estudiantes de nivel postsecundaria tomaron un curso de introducción a la estadística que se diseñó a través de una metodología de enseñanza para andamiar la argumentación estadística, por lo que a medida que aumentaba la complejidad del contenido, también lo hacia el diseño del material educativo. Posterior a ello, se realizó un análisis cualitativo para determinar cómo cambiaron sus argumentos estadísticos en el transcurso de un semestre.

La argumentación estadística se conceptualizó, en esta disertación, como un proceso de justificación de una afirmación que utiliza evidencia basada en datos, conceptos estadísticos y razonamiento. Sus criterios constaron de tres factores: vinculación al contexto, articulación de resultados y realización de inferencias.

Los resultados mostraron una mejora en los aspectos individuales de la articulación de los resultados: centro, difusión, distribución y prueba de hipótesis. También fueron capaces de incorporar contenido estadístico cada vez más avanzado mientras mantenían o mejoraban su discusión sobre el contenido previamente incluido. La inferencia estadística de los estudiantes también mejoró con el tiempo, particularmente cuando se agregaron pruebas de hipótesis al análisis de datos; esto no es sorprendente ya que la prueba de hipótesis es inherentemente inferencial.

Con base a estas evidencias, y a diferencia de otros marcos teóricos (Chevallard, 1997) donde se concibe de manera integrada las acciones del docente sobre el saber disciplinar, así como sus concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje; pensamos que ese saber y saber hacer tienen que estar vinculados con las situaciones de uso de la disciplina a enseñar, como por ejemplo, la actividad matemática, pues de acuerdo con el enfoque que el docente conciba de la praxis, dependerá el tipo de entorno de aprendizaje que construya el docente para significar la Actividad a los estudiantes (Castro, 2019; Teneal, 2017 y Dunphy & Dunphy, 2003).

Dentro de las acciones del docente, también consideramos a aquellas intervenciones educativas que suceden durante la planeación de ambientes de aprendizaje, la implementación de las situaciones didácticas en aula, y la evaluación del logro del aprendizaje, es decir, la práctica que gira alrededor de las dimensiones de planeación, acciones en aula y evaluación, todas ellas en un proceso cíclico en constante interacción. Tanto al inicio y final del ciclo escolar, como durante el transcurso de este, con el principal objetivo de incidir sobre la construcción de aprendizajes de los alumnos (Castro, 2019).

Por tanto, percibimos al docente como un participante de la Actividad (Leóntiev 1975-1981 como se citó en Wertsch 1988) que interactúa como experto entre la interpretación del colectivo de estudiantes y el sistema simbólico que se enseñará, a su vez, este integra las dimensiones de planeación, acciones en el aula y evaluación a su intervención como acciones educativas que se llevan a cabo en un proceso constante y cíclico (Castro, 2019), las cuales responden a un saber y un saber hacer (Chevallard, 1997) considerando la actividad donde toma sentido la disciplina a enseñar; y además, pensamos al docente como un profesional reflexivo (Schön, 1992) que analiza su práctica y la de sus pares <praxis compartida> dentro de una comunidad de investigación (Roth y Tobin, 2001).

Después de esta revisión bibliográfica, iré posicionando el marco conceptual y metodológico donde se enmarca la presente investigación, si bien esto se profundizará en el siguiente capítulo, es importante conocer los antecedentes que construyen nuestra unidad de análisis:

2.5. Proyecto Aleph: Ambientes Complejos de Aprendizaje

El proyecto *Ambientes Complejos de Aprendizaje* ha sido construido y desarrollado dese hace más de 10 años por el maestro Javier Alatorre Rico, quien ha dirigido y conformado diversos equipos de trabajo integrados por psicólogos educativos en formación, que se inscribieron en las asignaturas de formación teórico práctica en escenarios reales, así como mediante su participación en otras asignaturas teóricas donde se apropian del marco conceptual sociocultural que sustenta el proyecto, dicho proyecto, además de tener como meta mejorar la calidad educativa, también representa un espacio de formación profesional en la Facultad de Psicología de la UNAM.

Bajo el marco conceptual de la actividad societal y el paradigma sociocultural (Vygotsky, 1997), surge el proyecto Aleph en 2005 para impactar en la realidad educativa, y mejorar la calidad educativa de estudiantes en etapa preescolar. Bajo esta justificación, los orígenes de este proyecto tenían como objetivo general, desarrollar las capacidades científicas, matemáticas y comunicativas en niños de preescolar, a través de la construcción de ambientes de aprendizaje que promovieran dichas capacidades.

Además de los ambientes de aprendizaje que se implementaban para desarrollar el razonamiento de los niños, el proyecto integraba sesiones de asesoría para las docentes, así como talleres con los padres de familia para generar alrededor de los niños una comunidad educativa interesada en construir ciudadanos capaces de entender y transformar la realidad social a través de su conocimiento. El programa mostró cambios significativos en aprendizajes en los tres campos de conocimiento, así como una implementación exitosa del Programa de Educación Preescolar (PEP) en las aulas. Posteriormente el proyecto amplió sus objetivos en 2018, al bachillerato universitario: Escuela Nacional Preparatoria. Cuyo objetivo es desarrollar y aplicar materiales didácticos acordes con los planteamientos y el modelo educativo planteado en los programas actualizados de cuarto y quinto grado. Actualmente el proyecto institucional se conforma por académicos de la Facultad de Psicología, estudiantes de la licenciatura en el área de Psicología Educativa, y profesores de diferentes Colegios académicos de la ENP.

Con el fin de cumplir con el objetivo inicial del proyecto Ambientes Complejos de Aprendizaje se parte de la idea de, que el problema de los aprendizajes debe abordarse desde una visión holística que integre los diferentes aspectos que se ponen en juego dentro del salón de clase. Visto desde la perspectiva histórico-cultural (Vygotsky, 1997) y de la Actividad (Leóntiev 1975- 1981 como se citó en Wertsch 1988) los aspectos que se ponen en juego dentro del aula son: los medios semióticos de los diferentes campos disciplinares; la Actividad real; y la construcción social de conocimiento, que incluye al docente como interlocutor experto que conoce la Actividad, y, la interacción entre pares, en donde la influencia de otros resulta fundamental para el desarrollo de capacidades. Todos estos elementos en su conjunto se relacionan y dan como resultado, procesos de aprendizaje dentro del aula.

Dado que las situaciones de aprendizaje dentro de la escuela representan una totalidad organizada, en la cual los elementos, anteriormente mencionados, no son separables y por tanto no pueden ser estudiados de forma aislada (García, 2011) es necesario estudiar el contexto de forma holística. Por tanto, para comprender el origen y progreso de capacidades de orden superior, se toma a la situación de aprendizaje como un sistema, una totalidad en la cual cada uno de sus componentes (medios semióticos, construcción social de conocimiento y el interlocutor) se encuentran unidos y cumplen una función específica.

Por las razones anteriormente expuestas, es que el proyecto toma el nombre de *Ambientes Complejos de Aprendizaje*, pues se crean las condiciones materiales necesarias alrededor de actividades societales, que contemplan diferentes dimensiones en determinación mutua, para el desarrollo de capacidades complejas de pensamiento.

A continuación, se muestran los resultados más significativos de las psicólogas que han formado parte del proyecto Ambientes Complejos de Aprendizaje, pues sus hallazgos impactaron también en el desarrollo de la presente investigación en la Escuela Nacional Preparatoria.

En los diferentes trabajos realizados, las investigaciones cuentan con un diseño cuasi experimental, para demostrar los cambios en las capacidades de los niños que estuvieron bajo la intervención de ambiente complejos de aprendizaje; así como para comprender los mecanismos de construcción del conocimiento.

Es importante puntualizar que, dentro de estos estudios, se ha contado con trabajos con grupos de comparación (García, 2010 y Pesina Rivera, 2019), con el objetivo de demostrar que nuestra intervención, a pesar de trabajar con una población que se sitúa en un nivel socioeconómico bajo, es posible que logren los aprendizajes propuestos por el currículum, en comparación con Centros de Desarrollo Infantil con mejores condiciones materiales o grupos de población similares. Dichos datos nos ayudan a concluir que la condición económica y social no tendría por qué representar una desventaja en la adquisición de habilidades por lo que, la escuela debería ser un espacio que garantice adquirir las competencias y los conocimientos necesarios. De modo que aseguremos un espacio educativo equitativo, y además aseguremos el derecho a una calidad educativa para todos los estudiantes.

Otro trabajo que concluye sobre que las condiciones del pensamiento matemático se encuentran en el ambiente diseñado, es el trabajo de Santiago (2019), que tenía el objetivo de comprender e indagar los procesos que participan en la construcción del razonamiento geométrico dentro de ambientes complejos de aprendizaje. De manera general, se observa que el cambio fue progresivo y consistente en los tres grados de preescolar, ya que todos cambiaron de manera significativa. Es importante señalar que aunque se consideraron las competencias específicas PEP, 2011, los niños lograron desarrollar otras capacidades correspondientes a los niveles educativos posteriores, como: observación y abstracción de propiedades geométricas; la capacidad de elaboración e interpretación de representaciones abstractas con diferente perspectiva; la capacidad de comunicación de forma oral o gráfica haciendo uso del lenguaje geométrico; la capacidad de argumentación y justificación de la toma de sus decisiones: y deducciones lógicas. Sin duda, el logro de estos aprendizajes, al término del preescolar, corresponde al diseño de los ambientes de aprendizaje durante los 3 años, por lo que ahora es necesario indagar de manera puntual sobre aquellos trabajos del proyecto que buscaron comprender los mecanismos que influyen en el aprendizaje de los estudiantes.

Por un lado, se encuentra el trabajo de disertación de Pesina (2019), que buscaba analizar y comprender el uso de medios semióticos dentro de actividades científicas complejas y su relación con el desarrollo del pensamiento científico de niños prescolares, a través de un estudio de caso longitudinal mixto de integración completa. En su estudio se encontró que la implementación de actividades societales dentro del aula potencializa el pensamiento científico del niño a diferencia de las aulas donde se implementó. También, que los medios semióticos permiten la abstracción del pensamiento del niño y que van adquiriendo significado para él conforme va participando en estas actividades que los promueven; de esta forma, el niño se apropia de los medios semióticos, los usa, los explica y, llega a ser capaz de producir sus propias herramientas; iniciando con representaciones de acciones concretas y finalizando con representaciones de los fenómenos científicos.

Otro de los grandes elementos que se ha estudiado por la relación que tiene con el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, es lo relacionado a la práctica docente, dicho análisis se sitúa en el trabajo de Castro (2019), el cual, buscó comprender la práctica docente, que se realizaba a nivel preescolar en entornos socioculturales de aprendizaje, y que promovían el desarrollo del razonamiento numérico. Los resultados obtenidos muestran, por un lado, que el logro en el desarrollo de razonamiento matemático de los preescolares resulta de la práctica articulada de las tres docentes del preescolar, ya que, en un primer momento, guían a los niños en la identificación de algunos elementos del sistema matemático, y posteriormente, los conducen hacia el uso de este para interpretar, argumentar y solucionar problemas bajo distintos contextos que surgen en las actividades socialmente reconocidas. Por otro lado, como resultado del análisis cualitativo, se obtuvo el Modelo General de la práctica docente en entornos socioculturales de aprendizaje, el cual expresa la comprensión conseguida sobre las acciones de las maestras como una práctica intencionada, compleja y flexible que logra el desarrollo de competencias numéricas, a partir de vincular las metas particulares de cada grado en objetivos comunes. Como consecuencia de ello, permite la conformación de una comunidad de práctica que comparte un sistema de intervención similar, en el que existe articulación entre las dimensiones de planeación, evaluación e implementación en aula, y sus acciones se encuentran orientadas por la estructura de la actividad matemática donde promueven la construcción colectiva del conocimiento.

Asimismo, a partir de los resultados obtenidos se derivaron tres implicaciones; la primera, el desarrollo de mecanismos que contribuyan a la formación docente a través de la caracterización de las prácticas; la segunda, al estudio de la práctica docente como un colectivo; y en tercer lugar a la intervención de un sistema similar de práctica como el hallado en este estudio, pero en otros niveles educativos.

Entre los trabajos más recientes se encuentra el de Cárdenas (2020), el cual estudia nuestra unidad de análisis principal, que integra el resto de las dimensiones ya mencionadas. Su estudio tenía como objetivo, analizar y comprender el desarrollo de la capacidad de los niños en preescolar para realizar actividades científicas, tomando como unidad de análisis un proyecto de hidroponía Biología. Los resultados del componente cuantitativo ilustran que los niños al participar en actividades societales logran cambios significativos con respecto a sus capacidades científicas a lo largo de su instancia en el preescolar. Por su parte, los hallazgos del componente cualitativo muestran que cuando los niños forman parte de la actividad científica y reconocen las acciones por la que está conformada, así como las herramientas requeridas para cumplir con la meta que se les demande, es como conforman su capacidad científica. De esta forma la autora evidencia el proceso mediante el cual los preescolares van significando la actividad de hidroponía al comprender los procesos biológicos que subyacen en dicho contexto. En rasgos más generales, Cárdenas (2020) afirma que las capacidades científicas se originan en las prácticas sociales a través de la significación de la Actividad y toma de conciencia de las prácticas culturales que forman parte.

Dicho lo anterior, podemos concluir que la actividad es la que contiene todos los elementos necesarios que promueven el desarrollo de capacidades de orden superior pero el niño al ser inexperto en las actividades sociales auténticas requiere de la interlocución de un experto (la docente). La docente tendrá que articular y hacer funcionar en conjunto los elementos que forman parte de la actividad (medios semióticos y la construcción colectiva) para organizar las condiciones de aprendizaje, así como planificar, implementar y evaluar las posibilidades de aprendizaje a lo largo del ciclo escolar. Por tanto, con base en estos estudios, la siguiente investigación también se coloca dentro del marco del proyecto Ambientes Complejos de Aprendizaje, para indagar en los procesos y mecanismos de construcción de conocimientos. Además, de insertarse en los objetivos de dicho proyecto, el trabajo que a continuación presentaré tiene como propósito ser una alternativa a la problemática que presenta el bachillerato en cuanto a los aprendizajes en Matemáticas.

Una vez enmarcado el contexto del trabajo, es importante definir el objetivo de la siguiente investigación frente a dichos antecedentes; el cual es diseñar ambientes complejos de aprendizaje bajo un modelo constructivista histórico-cultural para el aprendizaje en Matemáticas V.

Con intención de lograr el propósito y objetivo planteado se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollo de actividades y materiales curriculares para potenciar el aprendizaje en matemáticas.
- Desarrollo profesional de los docentes para potenciar el aprendizaje en matemáticas.
- Desarrollo de líneas de conocimiento sobre la complejidad involucrada en el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas en los estudiantes.

En el siguiente capítulo describiré la propuesta del marco metodológico para lograr el objetivo general y específico de la presente investigación.

Capítulo 3. Marco metodológico

Como ya se describió con anterioridad, las prácticas educativas conforman un sistema complejo e interrelacionado; por lo que para comprenderlo se requiere un marco conceptual coherente con su naturaleza. De ahí, la importancia de definir nuestra unidad de análisis, así como el marco teórico con el que se analizará nuestro sistema dada su naturaleza.

3.1 Unidad de Análisis: Actividad de Aprendizaje

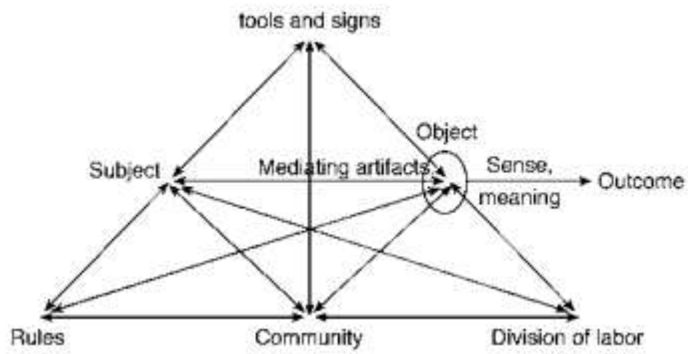
A continuación, precisaré 2 aspectos importantes de nuestra unidad de análisis. El primero, relacionado a la estructura de la actividad Engeström (2011). Y el segundo, relacionado a la configuración de la actividad como una unidad compleja y significada colectivamente, Ambas características, son fundamentales situar la actividad societal dentro de las aulas (Leóntiev en Werstch, 1985 y Roth y Jornet, 2017).

3.1.1 Estructura de la actividad de aprendizaje

La Teoría de la Actividad se inicia desde 1920-1930 con Vygotsky, su principal aportación fue el modelo tríadico entre Sujeto-Herramienta-Objeto y el concepto de mediación. No obstante, su modelo gráfico, al igual que el de Leóntiev, tenía limitaciones respecto a la actividad colectiva, pese a que este último autor, ya reconocía las acciones colectivas e individuales a través de su famoso ejemplo de “caza colectiva primitiva”. Frente a esta crítica, Engeström (1987) expande el triángulo triádico para incluir las acciones colectivas e individuales (Figura 5).

Figura 5

Estructura del sistema de actividad



Nota. Adaptado de “The structure of a human activity system” (p. 135), por Y. Engeström, 2001, *Journal of Education and Work*, 14 (1).

Si bien, se han generado nuevos modelos conceptuales a partir de la segunda generación para comprender múltiples perspectivas y redes de actividades interactivas; para los objetivos y fines de este trabajo únicamente utilizaremos la estructura de la segunda generación. Ya que, este modelo gráfico nos permite contener en la parte superior el modelo de Vygotsky, así como las complejas relaciones entre el sujeto y su comunidad.

No obstante, es necesario distinguir que, en esta investigación, la actividad de aprendizaje no únicamente se determina por el espacio físico en que se desenvuelven los seres humanos, sino más bien en su interpretación o creación sociocultural construida junto con los individuos que participan en dicho contexto, y los signos propios de la actividad. Dicha interpretación es la que se construye en el individuo al momento de participar en una actividad significada particular.

A continuación, distinguiremos estos últimos aspectos de nuestra unidad de análisis para poder comprender la configuración de las actividades de aprendizaje dentro de las aulas.

3.1.2 Configuración de la actividad de aprendizaje

Debido a que nuestra visión en el proyecto también contempla procesos dinámicos dentro de la estructura de la actividad. Requerimos profundizar en 2 condiciones esenciales de nuestra unidad: material (Roth y Jornet, 2017 y Leóntiev como se citó en Werstch, 1985), compleja y dinámica (García, 2011, p.74).

Si queremos analizar la unidad de desarrollo de los estudiantes no debemos considerar ningún elemento como pre existente o puntos de encuentro entre un mundo externo e interno. Pues esto nos podría hacer caer en enfoques atomizadores de variables y enfoques dualistas (Roth y Jornet, 2017). Lo que en definitiva es incompatible con la teoría de Vygotsky, la cual buscaba superar los enfoques tradicionales en la psicología. Bajo esta problemática, es que el Proyecto Aleph conceptualiza a cada elemento de la actividad como artefactos culturales, reglas y división del trabajo como parte integral de la unidad y no como unidades divisibles del todo. No obstante, al integrar cada elemento en una sola unidad, requerimos explicar cómo es que estos elementos se determinan mutuamente sin necesidad de mediar el mundo externo e interno.

a) Dicho esto, la actividad societal o de aprendizaje, debe partir de un plano **material** (Leóntiev como se citó en Werstch, 1985)**,** donde cada uno de los objetos son parte del lenguaje y tienen su raíz ahí. El lenguaje y el significado están indisolublemente atados a la producción material de la vida social. En ese sentido, el lenguaje ya no es ni tiene que ser teorizado como un mediador o algo independiente.

Por otra parte, las relaciones del colectivo en la actividad, que es la parte inferior del esquema de actividad (Figura 5), también deben comprenderse como materialmente sensible. Ejemplo: Si introducimos en una actividad de aprendizaje en matemáticas lápiz y papel en lugar de GeoGebra nos dará una dinámica completamente diferente entre las acciones colectivas, así como aprendizajes en los estudiantes. Dicho este ejemplo, es que la relación de la actividad (Figura 5) no debe entenderse en 3 términos, signo que media al colectivo y al individuo; sino una intersubjetividad donde las personas se convierten en parte de un solo social y material (Roth y Jornet, 2017).

La posibilidad de analizar la actividad societal desde un plano material, nos permite enfocarnos en los cambios micro genéticos de los estudiantes y no en los mediadores.

Como revise hasta ahora, el elemento esencial de la actividad societal es la intersubjetividad social y material. Donde interactúa el interlocutor experto de la actividad, que, en este caso, lo desempeña la docente al ser quien planea, implementa y evalúa las condiciones de aprendizaje dentro de los ambientes de aprendizaje; y además, guía las acciones de los estudiantes a través de los siguientes elementos: b) los medios semióticos, los cuales abarcan el uso de herramientas y objetivaciones de los sistemas disciplinares, y nos permiten interpretar la realidad a través de sus diferentes representaciones dinámicas. c) Y, por último, la interacción entre pares, la cual también es guiada por la docente para construir los significados de manera colectiva.

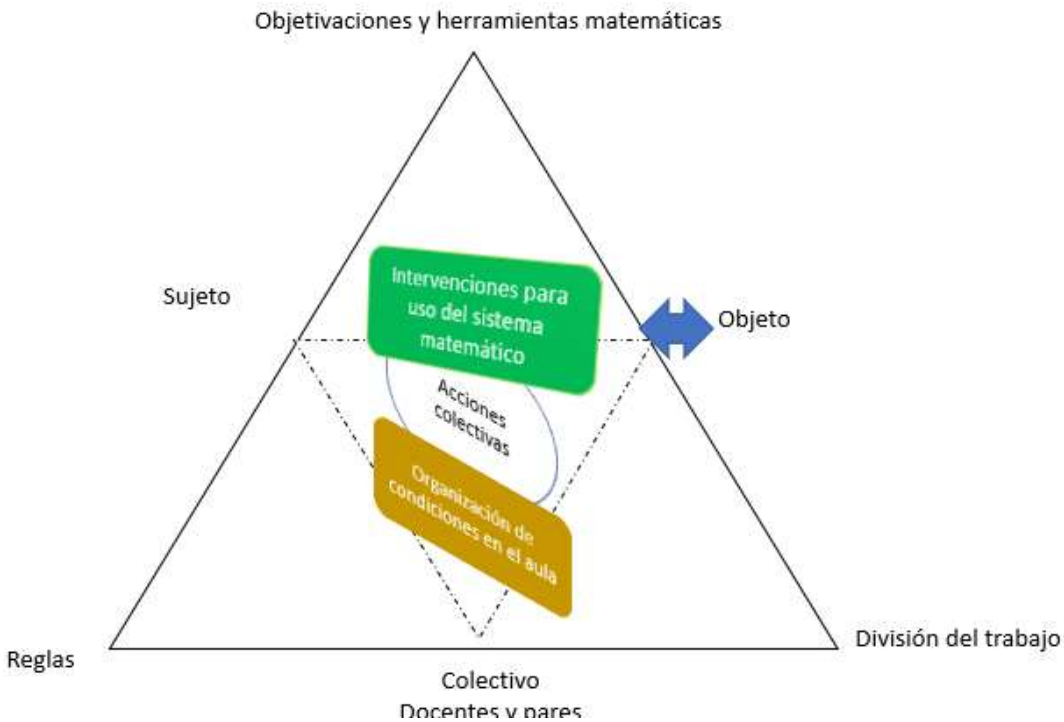
b) Todos estos elementos en su conjunto se relacionan y dan como resultado, procesos de aprendizaje dentro del aula. Dada estas características, es que el proyecto adquiere el carácter de **complejo** porque, el ambiente de aprendizaje representa una totalidad organizada en la cual los elementos no son separables y por tanto no pueden ser estudiados de forma aislada (García, 2011) es decir, para poder entender cómo es que se originan las capacidades de pensamiento especializadas, es necesario estudiar el contexto de forma holística a partir del cual surgen (Cárdenas, 2020).

De esta forma, el carácter de complejo del proyecto está dado “por las interrelaciones entre los componentes, cuyas funciones dentro del sistema no son independientes. El conjunto de sus relaciones constituye la estructura, que da al sistema la forma de organización que la hace funcionar como una totalidad” (García, 2011, p.74).

Entonces, para comprender el origen y progreso de capacidades de orden superior, se toma a la situación de aprendizaje como un sistema, una totalidad en la cual cada uno de sus componentes se encuentran interrelacionados a partir de la actividad de aprendizaje. Esta unidad a su vez se replica a lo largo del año y durante los 3 años. Conformando el Ambiente Complejo de Aprendizaje.

Figura 6

Actividades de aprendizaje como unidad de análisis



3.2. La Investigación Basada en Diseño como Perspectiva Metodológica para el Diseño de Ambientes Complejos de Aprendizaje

A partir del recorrido teórico y empírico que hemos realizado en los capítulos pasados, se concluye que los procesos de enseñanza-aprendizaje son un sistema complejo con múltiples variables interdependientes por lo que para su intervención y análisis se necesita de un diseño metodológico congruente con la complejidad del fenómeno que buscamos abordar (Téllez, 2019).

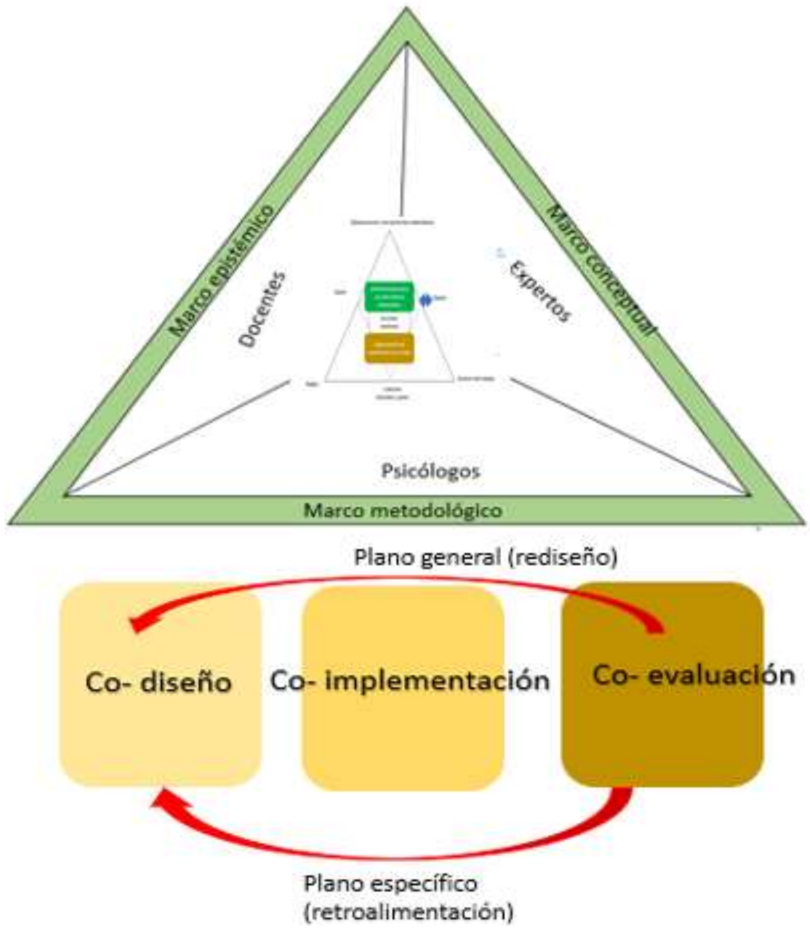
Históricamente la investigación basada en diseño -en la investigación educativa- ha buscado responder a los entornos de alta complejidad que se desarrollan en los contextos escolares. De allí la relevancia que tienen los estudios de diseño para esta investigación, ya que nos permiten comprender procesos de aprendizaje y enseñanza de manera holística y sistemática y no como elementos o efectos sumativos.

Otra de las ventajas que nos ofrece la IBD frente a la problemática que buscamos atender, es cerrar la brecha entre las innovaciones educativas como la RIEMS, Modelo Educativo 2016 o las actualizaciones del bachillerato universitario, y su implementación. Al ofrecer a la comunidad interesada en la educación (investigador y docente) una estructura colaborativa para incidir en la práctica educativa; sin límites de estructuras técnicas, y vincular así la teoría y la práctica de manera interdependiente.

Esta articulación interdisciplinaria es posible ya que se trabaja bajo un mismo marco epistémico, metodológico y conceptual (García, 2011), lo que permite una dinámica entre los investigadores y docentes para las diferentes fases metodológicas que constituyen la IBD (co-diseño, co-implementación y co-evaluación) (véase Figura 7) (Siry & Zawatski, 2011).

Figura 7

Metodología colaborativa en Investigación Basada en Diseño



Partir de los mismos marcos permite una mejor articulación por parte de los diferentes expertos y una interpretación de la evolución del sistema, como una totalidad organizada. Por lo que resulta conveniente para esta investigación al tratar de comprender contextos de aprendizaje que se conceptualizan como sistemas dinámicos en interacción.

A continuación, puntualizaré los marcos que articulan las aportaciones de los diferentes expertos para comprender los marco que nos permitirán comprender el objeto de estudio en su totalidad:

El primero de ellos es: el marco epistémico. El cual nos ofrece una postura crítica frente a las “verdades absolutas”, es decir, pone al descubierto las raíces ideológicas del “conocimiento objetivo” de la realidad, este marco orientara el tipo de preguntas que cada investigador va a traducir en términos de su propia disciplina.

Este primer marco resulta fundamental para los estudios interdisciplinarios del sistema educativo, pues para que ocurra una articulación entre las disciplinas se debe comenzar en el mismo punto de partida de la investigación, a través de un marco epistémico común. Sin ello no es posible lograr un estudio sistémico que conduzca a un diagnóstico integrado y a una formulación compartida de soluciones (García, 2011). En este caso sería la naturaleza histórica del conocimiento y, por tanto, la construcción de significados en el aula. Dicha perspectiva, corresponde a la hermenéutica, la cual nos permite hacer una descripción e interpretación de los significados del comportamiento e interacciones de un grupo (Cárcamo, 2005; Pérez, 2011, como se citó en Cárdenas, 2020).

El segundo marco es el conceptual, el cual retoma al paradigma histórico-cultural, así como a las teorías de la actividad de Leóntiev y Engeström, las cuales se han señalado como marcos conceptuales potenciales para el aprendizaje, ya que abarcan el sistema como un todo, lo que nos permite analizar e implementar situaciones en las prácticas educativas, y también rompen con el dualismo de la psicología en la educación. Dicho marco se profundizó en el subtítulo anterior.

Y por último la elección de la IBD, que corresponde al marco metodológico, el cual seguiré desarrollando a lo largo de este capítulo.

Como mencioné en párrafos anteriores, un proyecto bajo la perspectiva de Investigación Basada en Diseño (IBD) se desarrolla en un proceso cíclico de diseño- implementación- evaluación- rediseño, con el propósito de llegar a una teorización que permita al investigador realizar mejoras en el diseño y permita estudiar a fondo los procesos de enseñanza- aprendizaje que se desencadenan dentro de la intervención que se ha empleado. En este caso, los 2 años en los que se llevó a cabo la intervención.

Bajo esta metodología cíclica, se consideraron dos niveles para poder co-diseñar, co-implementar y co-evaluar las actividades de aprendizaje para matemáticas; el primer plano, es el general, el cual se realiza de manera anual con los resultados que se obtienen al término del ciclo escolar y el plano específico, el cual ocurre de manera cotidiana y día a día con la retroalimentación y observación de clase. Dichos planos se profundizarán en el apartado de procedimiento, pues fue la guía para estructurar el trabajo y organizar las actividades del colectivo de investigadores.

A continuación, se caracterizarán las fases del proyecto dentro del ciclo de investigación basado en diseño, con el fin de contextualizar los siguientes capítulos donde se abordará la investigación e intervención del presente estudio.

Por último, es importante mencionar que la metodología propuesta para el presente trabajo se apegó a un método genético experimental del pensamiento humano (Vygotsky, 1997 y Cobb y Gravemeijer como se citó en Godino, 2013). Ya que, para poder estudiar los procesos psicológicos humanos que se producían y cambiaban con el diseño de las situaciones didácticas, debió seguirse un análisis que permitiera estudiar los orígenes de estos procesos y las transiciones que los conducen hasta su forma final.
Del mismo modo, se ocupó un método experimental para formular una hipótesis de los recursos y medios que nos permitieran construir los cambios significativos en el pensamiento del estudiante.

Por lo que se decidió trabajar en conjunto con la IBD, pues ésta nos permite formar artificialmente los cambios cualitativos que influyen en los procesos del pensamiento matemático.

3.3 Contextualización y Caracterización de los Participantes

La intervención se llevó a cabo en la Escuela Nacional Preparatoria, donde actualmente asisten a sus nueve planteles cerca de 48,000 alumnos y 2,400 profesores. Es una de las principales instituciones de educación media superior en México y nace como un proyecto de la educación pública en 1867. Desde sus orígenes busca responder satisfactoriamente a los retos y demandas de la sociedad en su conjunto (Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria UNAM [DGENP], 2021).

Actualmente, el bachillerato brinda a sus alumnos una educación de calidad que les permita incorporarse con éxito a los estudios superiores y una formación integral que les permita aprovechar las oportunidades y enfrentar los retos del mundo actual. También es parte inherente de la misión de la ENP, realizar investigación educativa para desarrollar y aplicar nuevos métodos y técnicas avanzadas que eleven la calidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (DGENP, 2021).

Frente a dichas demandas, el Proyecto Aleph 5 busca ofrecer una alternativa pedagógica a la Dirección General y a la Coordinación del Colegio de Matemáticas de la ENP.

Inicialmente, el proyecto buscaba incorporar en diferentes fases a los docentes de la Escuela Nacional Preparatoria con el fin de garantizar resultados, en cada grupo con el que se trabajara. Por ello, se comenzó con un grupo pequeño de 2 docentes del Plantel 5, y posteriormente, por medio de la Coordinación del Colegio de Matemáticas se invitó a participar a 3 docentes más. Una vez que aceptaban su participación, se incorporaban a los talleres y sesiones semanales que impartía el Proyecto Aleph 5.

Esta primera fase donde se conformó el primer colectivo, busca conocer las mejores prácticas para el aprendizaje, de modo, que, en los siguientes años, dicho grupo incorpore a otros docentes de los diferentes planteles, a partir de los resultados obtenidos.

La población con la que se llevó a cabo esta primera fase, fue cuatro profesores que forman parte de la planta docente de la Escuela Nacional Preparatoria.
Estos profesores ejercen en el campo disciplinar de Matemáticas y son de tiempo completo. Los cuatro cuentan con estudios de Posgrado, tres de ellos en Matemática Educativa (CINVESTAV) y una en la MADEMS donde le faltó obtener el grado de maestra; llevan más de 20 años de experiencia en el aula y sólo uno lleva menos de 10 años. Las maestras con mayor experiencia tienen formación como matemáticas y el último es actuario.
Sólo una de ellas pertenece al plantel No 5. José Vasconcelos, ubicado en Calz. del Hueso sn, Coapa, Equipamiento Preparatoria Nº 5, Tlalpan, 14300 Ciudad de México, CDMX y los demás imparten la asignatura de Matemáticas V en el plantel No. 8 Miguel Schwultz, ubicado en Av. Lomas de Plateros &, Francisco de P.Miranda S/N, Álvaro Obregón, 01600 Ciudad de México, CDMX.

El colectivo de docentes con los que se piensa llevar la primera fase tiene a cargo grupos de quinto año, tres son del turno matutino y el cuarto del turno vespertino. El total de alumnos con los que se llevó a cabo la intervención es de 150 estudiantes.

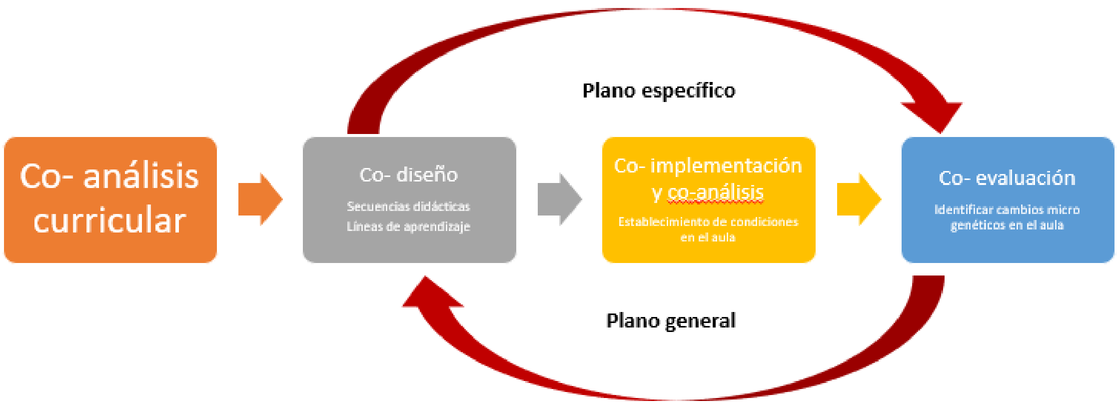
3.4. Procedimiento y estructura de trabajo para el co-diseño, co-implementación y co-análisis en el plano específico y el plano general.

Bajo el marco de comunidades de práctica (Wenger, 2001) se construyó el colectivo de docentes de Matemáticas con el que se llevó a cabo la intervención. Con el propósito de articular los objetivos de aprendizaje, perspectivas de aprendizaje y didáctica hacia un mismo perfil de egreso; así como el de analizar sus propias acciones y la de sus pares dentro de un espacio de reflexión compartido (Schön, 1992).

A continuación, describiré la estructura de trabajo que se llevó a cabo en los 2 últimos años entre dicha comunidad y psicólogos. A la par examinaré secuencialmente cada una de las fases en el orden que se propone en mi diseño de investigación (véase Figura 8).

Figura 8

Procedimiento y estructura de trabajo 2018-2 a 2020-1



Nota. En el esquema se integran todas las fases correspondientes a la IBD, no obstante, no se logró llevar a cabo la coevaluación por los paros estudiantiles y la pandemia de Covid-19. Adaptado de Modelo general de la práctica docente en entornos socioculturales de aprendizaje (p. 100), por M. Castro, 2019, UNAM.

La intervención comenzó con un análisis curricular, con la finalidad de comprender los objetivos e intenciones de aprendizaje que se encontraban dentro del currículo. En este primer ciclo aún no se estructuraba la metodología co-teaching; sin embargo, trabajábamos bajo un mismo marco teórico y metodológico. Durante este primer ciclo escolar, se implementó Matemáticas IV *2018-2-2019-1,* y con base a lo diseñado y analizado se comenzó con la propuesta de Matemáticas V para el ciclo escolar *2019-2-2020-1.*
En este segundo ciclo, se llevó a cabo la revisión crítica de los materiales curriculares y de la investigación empírica, con el fin de construir un marco empírico colectivo en el que intercambiáramos con los docentes la teoría y la práctica para el co-diseño de las S.D de Matemáticas V y el rediseño de Matemáticas IV.

Posteriormente, se llevó a cabo la fase de implementación, donde inicialmente se pensó implementar 7 secuencias didácticas correspondientes a Matemáticas V, no obstante, por la pandemia de Covid-19 únicamente se implementaron y observaron 3 secuencias didácticas: Incendios Forestales, Sembrando Vida y Cocinas Solares, correspondientes al eje de Geometría-Trigonometría. Mediante técnicas de observación en el aula se recolectaban datos de lo que ocurría en cada sesión del aula, esto con ayuda de instrumentos como filmaciones y bitácoras.

Durante esta fase, se incluían espacios de reflexión que se construían con los docentes iban dirigidos sobre su práctica en marcha, lo que permitía problematizarla e indagarla, investigarla para ampliar la perspectiva de la propia acción, ponerla a prueba, y evaluarla en el curso de su recorrido con el fin de establecer condiciones en el aula a través de (Siry y Zawatsky, 2011; Castro, 2019):

- Organización de condiciones
- Construcción colectiva
- Intervenciones para uso del sistema simbólico

Por último, se analizaron las secuencias y sus intenciones didácticas para rediseñarlas. En ésta última fase se hizo uso de los datos de la bitácora, evidencia de estudiantes y observaciones de aula para analizar el diseño de las secuencias didácticas y los cambios cualitativos producidos en el pensamiento, de tal forma que se propusieran mejoras en la planeación general y la presentación de un rediseño a la propuesta inicial.

Es importante mencionar, que no se llevó a cabo la fase de evaluación, como lo indica la IBD, debido a los paros estudiantiles y la pandemia de Covid-19; por lo que únicamente analizamos las evidencias de los estudiantes, bitácoras y observaciones de aula.

Estas grandes fases que ocurrían en un plano general, también se llevaban a cabo en un plan específico, para establecer la condiciones en el aula de manera cotidiana. Sólo que, en lugar de tomar decisiones en el plano general, se realizaron en el plano especifico, para planear día con día ajustes a las secuencias didácticas próximas.

Este plano se llevó a cabo a través de discusiones colectivas- entre la comunidad de docentes y los psicólogos- los cuales fueron fundamentales para proveer un espacio que revelara las diferentes perspectivas, experiencias y opiniones para la implementación. Dentro de estos espacios de reflexión nuestro rol no se basaba en entregar teoría a los docentes, sino construir la teoría junto con ellos y de manera colectiva; nosotros cumplíamos un rol de tutores en la praxis junto con profesores que habían iniciado desde el primer mes de intervención.

Dicha estructura permitió explorar y generar hipótesis de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la práctica, y brindo apoyo para reconstruir eventos de clase juntos para crear colectivamente significados compartidos.

El presente trabajo de investigación desarrollará en los siguientes capítulos las fases metodológicas para diseñar ambientes complejos de aprendizaje en la asignatura de Matemáticas V, de modo que se reconozcan los alcances y limitaciones de su implementación para la mejora progresiva de aprendizajes y de desarrollo teórico de educación matemática.
En el capítulo 4, se presentará el análisis curricular que se elaboró junto con los docentes para diseñar una herramienta colectiva que les permitiera entender sus programas.
En el capítulo 5, mostraré la fase de co-diseño genético experimental, que se concretó en la línea de aprendizaje y las secuencias a partir de la investigación especializada y la búsqueda de recursos; así como por los resultados del primer año de intervención donde se aplicaron 8 secuencias didácticas.
En el capítulo 6, mostraré la co-implementación y el co-análisis retrospectivo que se elaboraba con el colectivo de profesores y las bitácoras para ser reformulada la línea de aprendizaje y las secuencias didácticas. Mientras que en el último capítulo, se mostrarán las condiciones de aprendizaje óptimas que permiten construir el pensamiento matemático y las consideraciones finales para este ciclo de intervención.

Capítulo 4. Co- análisis curricular

El capítulo que a continuación presentaré antecede a todo el ciclo metodológico descrito, ya que a partir del análisis curricular se pudieron dirigir el resto de las actividades como: planeación, diseño, análisis y evaluación de los recursos y ambientes necesarios para que se llevara a cabo los procesos de aprendizaje.

El análisis curricular que a continuación mostraré es el resultado de la reflexión e investigación que se realizó con la comunidad de docentes y psicólogos; con el objetivo de comprender de manera global y critica el currículo de la ENP y el campo de Matemáticas. La discusión se concretó en la propuesta y diseño de una herramienta tecnológica, donde se encontrará toda la comunidad educativa (profesores, alumnos y padres de familia) para entender dicha totalidad del mapa curricular (Arteaga, 2005) así como para tomar futuras decisiones educativas.

Por medio de una representación externa tecnológica (Martí, 2003) y un proceso constructivo, se buscará acercar a la comunidad a dicho espacio para que comprenda su currículo y comparta sus experiencias educativas. Dicha solución busca responder a una parte de la problemática expuesta en el primer capítulo y el bajo impacto de las actualizaciones curriculares en las prácticas educativas del bachillerato; así como la poca participación de la comunidad educativa en la evaluación y diseño curricular (INEE, 2012, 2017; OCDE 2019 y Díaz Barriga, 2015).

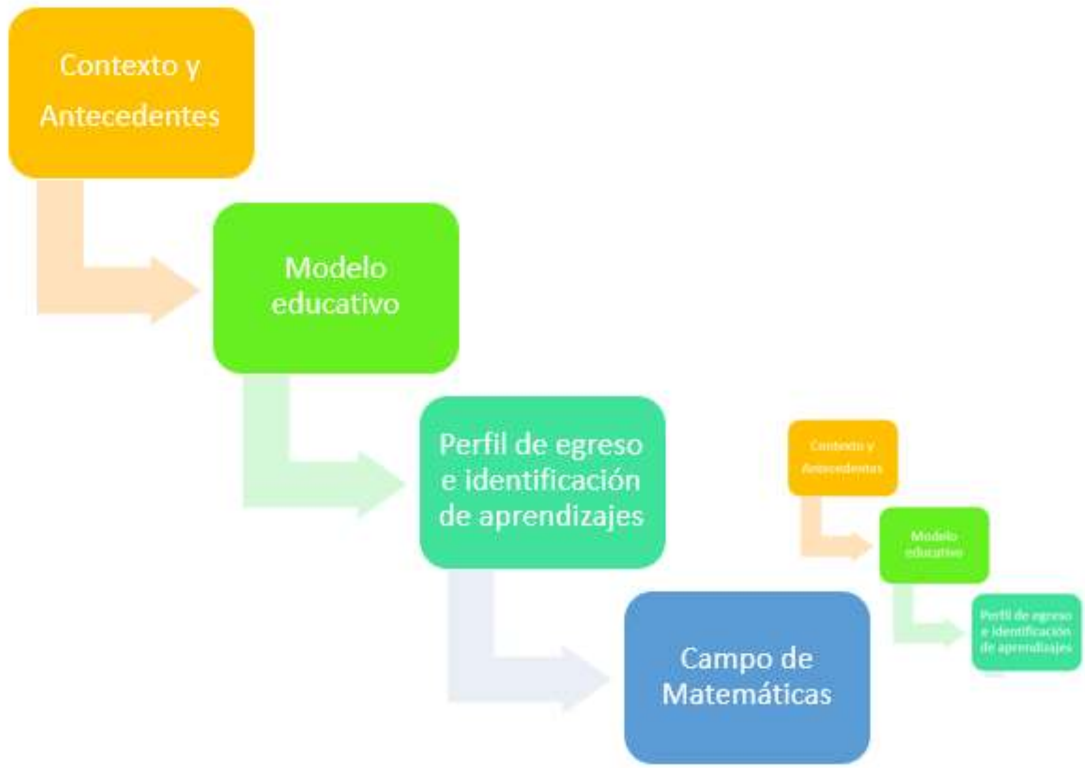
Este capítulo se organizará en dos partes, la primera mostrará el análisis curricular y en un segundo apartado la descripción del diseño de la herramienta tecnológica.

4.1 Proceso de co-análisis curricular

Para realizar el análisis curricular, se llevó a cabo un proceso amplio que incluía el análisis de las necesidades sociales, culturales y económicas, así como de los supuestos y prácticas pedagógicas y didácticas que subyacen al plan de la Escuela Nacional Preparatoria. Para ello, se hizo una documentación e investigación del proceso que se ha llevado a cabo en los últimos años del Plan de Estudios de la Escuela Nacional Preparatoria para comprender el modelo educativo y los aprendizajes del plan de estudios y del campo de Matemáticas.

Figura 9

Proceso de Análisis curricular



El análisis que se expone aquí, siguió los pasos anteriormente mencionados. Además, con el fin de superar la valoración de la coherencia entre propósitos y contenidos, y sobreponer el proceso de reconstrucción y apreciación de la actividad escolar en su conjunto. El análisis se llevó a cabo en colectivo para detectar las áreas de oportunidad y llevar un análisis y mejora continua al plan de estudios (Figueroa, 1997).

4.1.1 Hallazgos del análisis del contexto y antecedentes

Cuando hablamos de los orígenes de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) también aludimos a la historia de México, pues sus bases se dan con el establecimiento y objetivos de la República y la Institución de la nueva Constitución de 1857. Dicho proyecto educativo se basó en la corriente positivista de Augusto Comte, el cual pretendía un sistema educativo estructurado en todos los niveles y que ofreciera las bases para resolver los problemas que el país enfrentaba, mediante la educación y la formación de nuevos ciudadanos. Tal discurso se volvió una condición necesaria para lograr el orden y la estabilidad en México, sobre todo por el panorama tan crítico que se vivió desde el estallido de la guerra de Independencia (DGENP, 2020).

No obstante, el Plan de Estudios (PE) que dio origen a la ENP ha ido en constante transformación hasta llegar al PE (1996), plan que actualmente rige a los nueve planteles de la institución. En este último plan se reestructura el programa del 64 basado en conocimientos enciclopedistas, por una formación integral que vaya en concordancia con el desarrollo de las nuevas tecnologías y la globalización. En este último no sólo se reconstruye el PE 1996 para una formación ciudadana, sino también para el ingreso a los estudios superiores.

Recientemente la Escuela Nacional Preparatoria ha vivido un proceso de actualización curricular en el nivel bachillerato, caracterizado por el replanteamiento de los contenidos, la selección de enfoques metodológicos propios de cada disciplina, el aprendizaje significativo a partir del análisis de problemas en contextos reales, y el énfasis en ubicar al estudiante en el centro del proceso educativo. Con el fin de dar respuesta a los desafíos de la sociedad del conocimiento.

A continuación, mostraré los principales hallazgos del análisis del modelo educativo con el que trabaja actualmente la ENP para la formación de los ciudadanos que se requieren hoy en día.

4.1.2 Hallazgos del modelo educativo

Ante las demandas del siglo XXI y un escenario social como la inseguridad, la violencia de género, los problemas de salud pública, el narcotráfico, la Escuela Nacional Preparatoria ha vivido un proceso de actualización curricular centrado en que los estudiantes logren convertir la información en conocimiento útil, que a través de la ciencia puedan comprender los fenómenos de su entorno, que utilicen herramientas diversas para resolver problemas reales y que puedan tomar decisiones (Valle, 2018).

Ante tal desafío, la actualización del Plan de Estudios 1996 de la Escuela Nacional Preparatoria ha pretendido brindar una formación integral a los estudiantes: para proporcionar elementos cognoscitivos, metodológicos y afectivos que, en síntesis, le permitan a los estudiantes profundizar de manera progresiva en la comprensión de su medio natural y social, desarrollar su personalidad, definir su participación crítica y constructiva en la sociedad en que se desenvuelve. Del mismo modo, busca introducir a los estudiantes en el análisis de las problemáticas que constituyen el objeto de estudio de las diferentes disciplinas científicas y tecnológicas, siempre en la perspectiva de la formación profesional universitaria. (p.27) (UNAM, 1996).

En otras palabras, la Escuela Nacional Preparatoria busca formar jóvenes con capacidades analíticas y de comprensión, que favorezcan su desempeño como futuros profesionistas y también como ciudadanos (Valle, 2018).

Pero ¿qué metodología propone la ENP para llegar al cumplimiento de este perfil?
Si bien no es explícito en el Plan de Estudios de 1996 el modelo de aprendizaje- enseñanza, podríamos decir que se trata de un modelo constructivista, ya que el PE se sustenta en la construcción progresiva del conocimiento, para transitar de una estructuración lineal de contenidos a una funcional, ligada a la problematización y la modelación.

Por lo que consideran esencial:
a. La enseñanza, centrada en el alumno y en su actividad.
b. El aprendizaje sistemático, explícito y práctico de formas de trabajo intelectual generales y específicas de cada disciplina que promuevan la construcción del conocimiento por parte del alumno, a través del desarrollo de competencias para la identificación, el planteamiento, la resolución de problemas y la interpretación de resultados; así como la indagación, la organización de información, su interpretación y aplicación en la solución de problemas.
c. La construcción progresiva del conocimiento a través de una organización de contenidos que integre las nociones básicas indispensables de cada área de conocimiento, los problemas fundamentales que se abordarán (de carácter epistemológico o aquellos que la disciplina contribuye a resolver) y las estrategias que permitan darles sentido y significación.
d. El diseño de actividades que desarrollen el dominio progresivo de los lenguajes básicos para el autoaprendizaje y el progreso intelectual del alumno, y promuevan en el aula que promueva la reflexión y la síntesis, colectiva e individual.

e. La concepción de los contenidos como medios para desarrollar competencias, habilidades, actitudes y conocimientos que favorezcan la autonomía en el aprendizaje y privilegien lo formativo sobre lo informativo. En tal sentido, la selección de dichos contenidos responde a un criterio epistemológico: vincular el conocimiento a problemas específicos de estudio en cada disciplina, que permitan al alumno ir construyendo un aprendizaje coherente y significativo de la materia en cuestión.
f. La organización curricular en áreas de formación, que haga compatibles e integrales, de manera progresiva, las acciones que alumnos y maestros emprenden para construir el conocimiento.
g. La identificación y definición de los ejes conceptuales y metodológicos en torno a los cuales se articule el conocimiento, y que permitan identificar los cortes y nexos que marcan o establecen los puntos de continuidad y complejidad o profundización que distinguen una etapa de formación del bachillerato de otra.
h. La evaluación, basada en la construcción progresiva de productos de aprendizaje que permitan la más alta integración posible de los fenómenos en estudio, de las nociones básicas y de su relación con una problemática, teórica o práctica, que dé al alumno una autoconcepción como agente de su propio aprendizaje por la significatividad de lo aprendido.

4.1.3 Hallazgos del perfil de egreso y aprendizajes esperado

Al finalizar los 3 años de la Escuela Nacional Preparatoria se espera que el alumno egresado de la Escuela Nacional Preparatoria (UNAM, 1996):

- Posea conocimientos, lenguajes, métodos y técnicas básicas inherentes a las materias en estudio, así como reglas básicas de investigación, imprescindibles en la educación superior.
- Reconozca los valores y comportamiento de su contexto socio-histórico.
- Desarrolle su capacidad de interacción y diálogo.
- Tenga una formación social y humanística (económicas, social, política y jurídica)
- Sea capaz de construir saberes.
- Desarrollé una cultura científica.

- Desarrollé una educación ambiental.
- Traduzca su cultura en prácticas cotidianas.
- Desarrolle intereses profesionales y evaluará alternativas hacia la autodeterminación.
- Desarrolle una autovaloración cultural y personal.
- Fomente su iniciativa, su creatividad y su participación en el proceso social.
- Desarrolle valores de legalidad, respeto, tolerancia, lealtad, solidaridad, patriotismo y conciencia de Estado

Sin duda, la Escuela Nacional Preparatoria no sólo busca la preparación del estudiante en la perspectiva de seguir una carrera profesional sino, de manera muy especial, a la preparación para la vida, implícita en tal perfil y en toda estructura y organización curricular de la Escuela Nacional Preparatoria (p.61 y 62), la cual revisaré en el siguiente apartado.

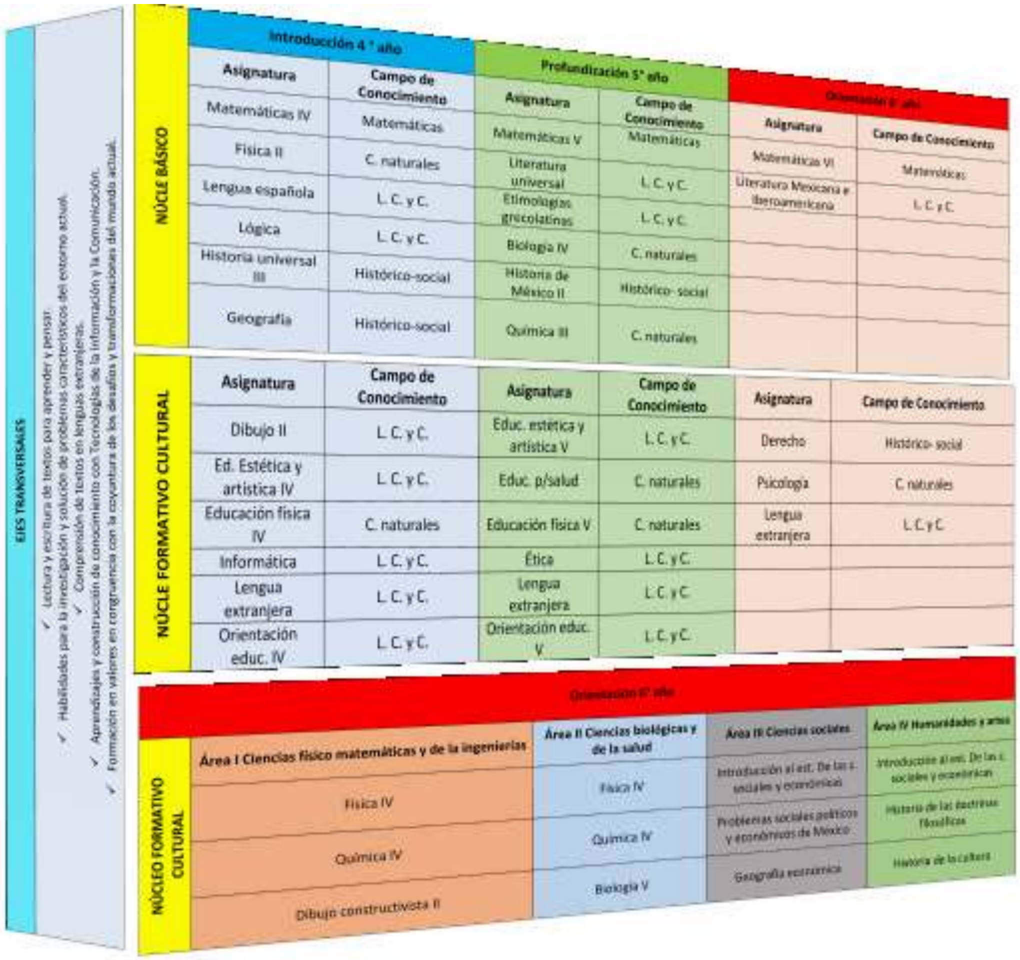
Organización curricular

Para comprender las trayectorias de aprendizaje que se proponen en el currículo se realizó un análisis de la estructura curricular, la cual contempla las siguientes dimensiones:

- Núcleos
- Etapas de formación
- Campos de conocimientos
- Ejes transversales
- Líneas de orientación curricular

Figura 10

Modelo tridimensional del currículo de la ENP



Para comenzar a capturar la realidad de una manera global fue necesario contar con una estructura que viera el conocimiento globalmente (Arteaga, 2005). De tal forma que condujera a los docentes a la comprensión de la noción de currículo como la integración concreta de las prácticas que se llevarán a cabo en el aula.

A través de estas dimensiones y estructura buscamos que dejen de observarse de forma plana los núcleos, campos de conocimiento, etapas de formación y núcleos del currículo de la ENP.

De tal manera, que al pensar en cualquiera de los niveles que componen el modelo, de inmediato se incluyan a todos aquellos que lo constituyen, sobre todo porque la distribución tridimensional obliga a cada uno de los elementos a moverse en el plano horizontal, en el plano vertical y en un plano de profundidad hacia todos los puntos cardinales.

A continuación, iniciaré con la dimensión de líneas de orientación curricular que atraviesan y unifican las demás dimensiones.

Líneas de orientación curricular

Las líneas de orientación curricular se relacionan con las etapas y campos de conocimiento con el propósito de *construir, de manera progresiva, los diversos aspectos del perfil de egreso*. En el modelo aparecen en un recuadro azul (Figura 9):

- ***Competencias*** que deben construirse en el proceso de enseñanza-aprendizaje con eficiencia y eficacia progresivas a lo largo de los 3 años:(p.38)
    - Análisis (pensamiento divergente-sintético).
    - Comunicación (indagación, lectura, expresión, redacción).
    - Creatividad.
    - Autonomía e individuación.
- ***Dimensiones relacionales***, que vinculan todas las acciones del aprendizaje con la graduación de complejidad que corresponda a cada etapa de formación y nivel de maduración cognoscitiva de los estudiantes.
    - Ciencia y medio ambiente.
    - Cultura y sociedad.
    - Tecnología e Informática.

No obstante, con la actualización, las líneas orientadoras desaparecen como una dimensión y aparecen en los nuevos objetivos de aprendizaje de los programas. Lo único que aparece de manera transversal para el mapa curricular son los siguientes ejes:

- Lectura y escritura de textos para aprender y pensar.
- Habilidades para la investigación y la solución de problemas.
- Comprensión de textos en lenguas extranjeras.
- Aprendizajes y construcción de conocimiento con TIC.

- Formación en valores universitarios y humanos (perseverancia, integridad académica, compromiso, afán por el saber, responsabilidad, laicidad, libertad de expresión y honestidad).

Campos de conocimiento

Los campos de conocimiento que servirán para articular las asignaturas son cuatro: Matemáticas, Ciencias Naturales, Histórico- Social y *Lenguaje, comunicación y cultura*. En cada uno se identifica una asignatura eje, que funge como guía para establecer la coherencia y congruencia interna del campo, y definir contenidos antecedentes y consecuentes para lograr la formación en cada campo: (p.38 y 39).

Para el campo de Matemáticas, que es el que me interesa particularmente, se presenta como una herramienta de representación lógica, simbólica, numérica, algebraica y espacial o gráfica, así como un recurso para la solución de problemas de la ciencia y del entorno. El estudio del Álgebra, la Geometría, y el Cálculo pretenden fortalecer el razonamiento lógico y la inducción, las capacidades de análisis, síntesis e inferencia, abstracción y generalización. La Estadística y la Probabilidad pretenden atender la organización de información y su representación descriptiva, y extender el aprendizaje del alumno hacia criterios no determinísticos. (UNAM, 1996, p.36)

Más adelante presentaré un análisis curricular del campo de Matemáticas y su interacción con las diferentes dimensiones del currículo.

Etapas formativas

La formación en cada campo da lugar a tres etapas claramente diferenciadas: de introducción a los conocimientos del campo de conocimiento, de profundización y propedéutica, que implica una especialización o una profundización puntual que oriente al alumno hacia su vocación y le proporcione más elementos para su éxito.

I. ***Etapa de introducción al campo de conocimiento (4º año)***

   En esta etapa introductoria se establecen las bases cognoscitivas sobre las que habrá de construirse el perfil de egreso, principalmente por cuanto a los lenguajes básicos del aprendizaje: español, matemáticas, lengua extranjera e informática. Esto es, las competencias para *la comunicación y la organización* *de información y el análisis (pensamiento convergente*) se obtendrán en dicha etapa en un grado fundamental o básico. (UNAM, 1996, p. 31 y 40)

II. Etapa de profundización (5º año)

Esta es la etapa de preparación para el ingreso al grado propedéutico. Las competencias en las que se hace énfasis son *el análisis (pensamiento divergente) y la autonomía e individuación.*

III. Etapa de orientación propedéutica (6º año)

Esta es la etapa propedéutica del bachillerato en la Escuela Nacional Preparatoria. Significa una especialización o profundización puntual para orientar al alumno hacia su vocación, y proporcionarle más elementos para su éxito. Se espera que en esta etapa se perfeccione el perfil de egreso del bachillerato en su conjunto (UNAM, 1996, p.31, 42 y 70).

Núcleos del currículo

Cada uno de los campos de conocimiento divide sus contenidos en tres núcleos:

a. ***Núcleo básico.*** Constituido por los conocimientos generales que inducen al alumno a pensar y ser autónomo, a enfrentar problemas de conocimiento y práctica con éxito.

b. ***Núcleo formativo-cultural.*** Que proporciona al alumno información útil y una cultura general que favorezca su formación.

c. ***Núcleo propedéutico.*** Complementa a los núcleos anteriores, atendiendo las necesidades formativas y cognoscitivas de la educación superior. Se articula en cuatro grupos de asignaturas, acordes con la organización de carreras universitarias de los Consejos Académicos de Área.

Como se vio en el análisis, inicialmente, las líneas curriculares tenían el propósito de orientar las otras dimensiones del mapa curricular: núcleos y etapas formativas, con la finalidad que todas las dimensiones estén dirigidas a construir al estudiante de bachillerato que se espera al término de la ENP. No obstante, a partir del análisis realizado con el modelo tridimensional concluí que con su desaparición y modificación de los objetivos de aprendizaje de los programas se pierde la congruencia y coherencia curricular con el perfil de egreso. Debido a que únicamente se modificaron los objetivos de los programas, pero no el perfil de egreso. Por lo que actualmente la Escuela Nacional Preparatoria tiene un nuevo reto al pensar sobre el nuevo perfil del bachillerato universitario; el cual debe pensarse desde el devenir económico, sociopolítico, simbólico y cultural mexicano actual; así como desde el papel histórico que ha tenido esta institución en la educación media superior.

Pues como hemos visto a lo largo de la historia de la ENP, la institución ha respondido a las diferentes demandas de la época, y ante ello, obliga a su comunidad a tener una postura crítica y sistemática en el espacio curricular pues además de responder a un proyecto de sociedad es importante considerar que muchas decisiones curriculares no han sido inmunes a las políticas dictadas por los gobiernos en turno (Velázquez, 2004).

Con esto concluimos que actualmente la ENP debe seguirse pensando como un instrumento importante que le de acceso a los educandos a la Cultura Nacional y Universal, a través de una formación integral (científica y humanística) que les permita a sus estudiantes participar como ciudadanos con responsabilidad social y que además permita introducirse a los estudios superiores (Bracho y Miranda 2012).

La actualización de los nuevos programas representa ya un avance al enfatizar un modelo centrado en el estudiante y los objetivos de aprendizaje necesarios para participar en el México y mundo contemporáneo. Pues se privilegia el uso de estrategias didácticas que posibiliten a los estudiantes asumir un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje y el docente, se resignifica como un agente fundamental en la intervención educativa, ya que son los verdaderos gestores de la puesta en marcha de este currículo. Pues son los encargados de propiciar las condiciones para que cada estudiante aprenda y desarrolle las competencias que le permita participar con éxito en ambientes de educación superior y ejercer una ciudadanía responsable y participativa. Del mismo modo, la evaluación está relacionada a procesos como la planeación y mejora de aprendizajes en cada uno de los campos formativos de la Escuela Nacional Preparatoria.

No obstante, pese a la relevante mejora del plan de estudios del bachillerato universitario, aún no se cuenta con mucha información disponible sobre el currículo oculto en las aulas, así como de los cursos encaminados a los docentes para la apropiación curricular. Sólo en el trabajo de Alvarado, Sánchez y Lugo (2019) destacan algunos comentarios realizados en los Seminarios de Análisis de la Enseñanza (SADE) por docentes de las asignaturas de Matemáticas. Así como testimonios de los profesores que trabajaron junto con nosotros en la exploración y análisis del currículo.

Extracto 1. Reflexión de docente de matemáticas respecto al currículo puesto en práctica.

1. **Profeso 3**: por eso los exámenes extraordinarios fueron un fracaso, un fracaso porque el profesor no enseño en las habilidades y ese es el gran detalle. O sea, si el maestro no vio ese programa con ese objetivo que está marcado, evidentemente el chico salió rebotado […]entonces para que quieres eso que es el documento oficial […] y entonces da lo que tú quieras.

Nota: Extracto de audio tomado de una sesión de formación docente, realizada en el Plantel No. 5 "José Vasconcelos" (agosto del 2018).

Dicho lo anterior, es que una de las tareas principales del proyecto Aleph 5 es apoyar a los académicos para apropiarse de las premisas y de los contenidos de los programas para desarrollar e implementar situaciones didácticas que promuevan los objetivos de aprendizajes establecidos.

Otra área de oportunidad es lo relacionado a la totalidad curricular, ya que nos obliga a superar la lógica de las disciplinas y cursos independientes –heredadas por la filosofía positivista- por un énfasis en los procesos de aprendizaje. Problemática que sigue arrastrando el PE (1996) de acuerdo con un análisis diagnóstico (Jurado, 2013). Y preocupación. Esto, además de permitirnos llevar la totalidad curricular en el aula, favorece al bachillerato para cerrar las brechas entre las innovaciones educativas y la práctica.

Bajo esta problemática es que el proyecto Aleph 5, también busca contribuir al bachillerato universitario por medio de los ambientes complejos de aprendizaje. Pues la categoría de análisis nos permite visualizar las diferentes oportunidades de aprendizaje a lo largo del ciclo escolar, así como las secuencias didácticas donde se pueden poner en juego los procesos de aprendizaje.

Extracto 2. Reflexión de docente de matemáticas con relación a la totalidad curricular.

---

1 **Profesor 3:** entonces cuando él diga, ya ya sé que quieren, que pretenden… si sería más sencillo el convencimiento de decir se van a integrar, es que ya vi que la secuencia esta me sirve…los beneficios que me brinda, que puedo ir de la unidad 1 a la 3 y no va pasar absolutamente nada porque esa es la angustia del profesorado porque como quieres que yo vea esto, si no he visto esto ¿no? no lo puedo hacer.

Nota: Extracto de audio tomado de una sesión de formación docente, realizada en el Plantel No. 5 "José Vasconcelos" (octubre del 2018). El profesor nos hablaba sobre la importancia de construir secuencias didácticas pensando en aprendizajes y no en contenidos de las unidades, y como esto nos podría ayudar a integrar a otros profesores que se resistieron a la actualización curricular. Además, es necesario comentar que dicho docente, inicialmente estaba en desacuerdo con la actualización en la ENP.

4.2 Abordaje de las matemáticas en el nivel medio superior: Matematización

Como ya se mencionó en el primer capítulo la educación matemática debe centrarse ahora en la posibilidad del sujeto para resolver problemas, pues la sociedad tecnológica y globalizada ya no demanda la acumulación de conocimientos (fórmulas, símbolos, gráficos, etcétera), sino un sujeto que sea capaz de poder utilizarlos en la resolución de situaciones problemáticas, transfiriendo y resignificando lo aprendido. De manera que el conocimiento matemático adquiera sentido, para el sujeto, en función de los problemas que le permita resolver. Sólo en la medida en que el estudiante resuelva problemas reales que involucren el conocimiento matemático podrá reconocer el sentido y la utilidad de estos, como ha ocurrido en la historia de las matemáticas. (Escuela Nacional Preparatoria, 2016 & Wernstein y González, 1998).

Además del reconocimiento instrumental y social que tiene actualmente las matemáticas para la educación, los resultados en aprendizajes que tienen países como Singapur PISA (La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2016), dirige el interés de las diferentes instituciones educativas en el desarrollo de competencias de modelado.

Del mismo modo, hay evidencia de que la modelización matemática -enfoque bajo el cual trabaja Singapur- facilita el aprendizaje en matemáticas y promueve una actitud participativa y crítica en la sociedad (TvUnADM, 2018) por ello se ha hecho una apuesta a la modelización matemática tanto en los estándares internacionales Common Core State Standards for Mathematics *(National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers,* 2010) y Principles and Standards for School Mathematics *(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]*, 2000) como en los nacionales (DOF, 2008 y SEP, 2016).

Bajo este contexto, mi propósito es explicar el abordaje de las matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria y sus relaciones con las propuestas nacionales e internacionales. El cual se ha actualizado con la creación del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM) en 2012 -anteriormente GMTM- para mejorar los aprendizajes en Matemáticas y producir investigación en la educación matemática.

4.2.1 Hallazgos del Campo de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria

La actual concepción de educación matemática en la Escuela Nacional Preparatoria busca aportar elementos tangibles a la formación de ciudadanos que requiere nuestro país, informados, con interés por comprender su entorno natural y social, comprometidos en la solución de los grandes problemas de su momento, que sepan usar los recursos tecnológicos de su época de manera racional, para analizar situaciones, evaluar posibilidades y posicionarse crítica y responsablemente ante los retos de la sociedad del siglo XXI.

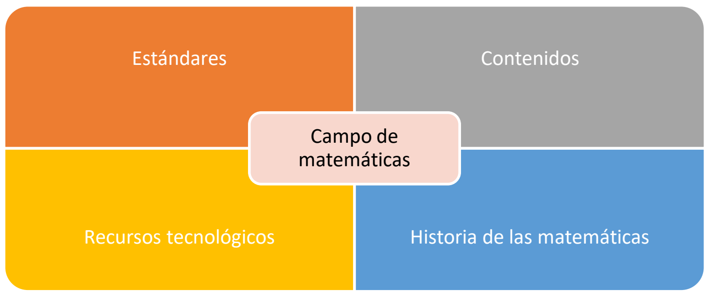
Por tal motivo, el actual enfoque que se plasma en el campo de Matemáticas debe proporcionar una visión culturalmente significativa de las matemáticas a los estudiantes, para lograr que se interesen en ellas y se apropien del pensamiento matemático como una herramienta útil y una parte integral de su cultura como ser humano; por tal motivo elijen al EMR como el modelo actual de matemáticas en la ENP. (SUMEM, 2014; Alvarado, Sánchez y Lugo, 2019)

La enseñanza de las matemáticas en el bachillerato de la UNAM también debe lograr que el estudiante desarrolle su capacidad de abstracción, su capacidad para pensar racionalmente y la capacidad que tiene, como ser humano, para crear modelos abstractos que le permitan analizar y entender situaciones del mundo que le rodea.

Para lograr el perfil de egreso antes mencionado, es importante comprender el plan curricular de matemáticas en 4 dimensiones, que son las que incluirán a los aprendizajes:

Figura 11

Dimensiones del campo de matemáticas



Estándares de matemáticas: matematización

Si bien no es explícita esta dimensión en los programas de Matemáticas, el análisis que llevé a cabo permitió construir estándares que conformaran un <todo coherente> del campo de matemáticas. A continuación, explicaré el proceso que se llevó a cabo y el resultado o conclusiones de esta dimensión.

Por último, es importante mencionar, que para la elaboración de los estándares de aprendizaje se requirieron cimientos teóricos y sociales; entre ellos un estado del conocimiento y la experiencia nacional e internacional en la materia, así como la consulta a actores relevantes.

La primer parte consistió en la revisión y comparación de experiencias nacionales e internacionales. A partir de estas encontramos que gran parte de los estándares internacionales, como el CCTSSM, y los estándares nacionales, como el MCC, contaban con una articulación de sus objetivos de aprendizaje en los diferentes niveles educativos. Por ejemplo, en el MCC el pensamiento matemático que busca concretarse al finalizar la educación obligatoria se desarrolla gradualmente desde la Educación Básica (EB) hasta la Educación Media Superior (EMS) (Tabla 1) mediante el enfoque de resolución de problemas, por lo que este enfoque se vuelve “tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio.” (SEP, 2017)

Tabla 1

Desarrollo del pensamiento matemático en los diferentes niveles educativos

	Preescolar:	Primaria:	Secundaria	Educación Media Superior
Pensamiento matemático	Cuenta al menos hasta 20. Razona para solucionar problemas de cantidad, para construir estructuras con figuras y cuerpos geométricos, y organizar información de formas sencillas (por ejemplo, en tablas).	Comprende los fundamentos y procedimientos para resolver problemas matemáticos y para aplicarlos en diferentes contextos. Tiene una actitud favorable hacia las matemáticas.	Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático.	Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos.

Después de identificar esta característica en los estándares, y encontrar en trabajos como los de Castro (2019) y Téllez (2019) las ventajas sobre el aprendizaje al articular los aprendizajes, decidí identificar los estándares que se trabajan durante los 3 años en la Escuela Nacional Preparatoria, independiente del contexto disciplinar matemático (Tabla 2).

Tabla 2.

Análisis comparativo de la curricula internacional y nacional. (Escuela Nacional Preparatoria, Common Core State Standards for Mathematics, Ontario, Singapur y Aprendizajes clave)

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
Definición de resolución de problemas	A partir de los planteamientos de matemáticas realistas (Freudenthal, 1971); se han situado a las matemáticas como un producto de la sociedad y devenir histórico. Por lo que la educación matemática se ha dirigido a una perspectiva donde se apunte hacia el conocimiento matemático reflexivo y aplicado de conceptos y		La resolución de problemas es una parte integral del currículo de Ontario, pues se considera un proceso esencial a través del cual los estudiantes pueden alcanzar los objetivos de aprendizajes en Matemáticas.	Los problemas pueden provenir de contextos cotidianos o situaciones laborales futuras, en otras áreas de estudio, o dentro de las matemáticas mismas. Incluyen tareas sencillas y rutinarias que requieren selección y aplicación de los conceptos y habilidades apropiados, así como tareas complejas y no rutinarias que requieren conocimientos más profundos, razonamiento lógico y pensamiento creativo. General estrategias de resolución de	El campo de matemáticas lo conceptualiza como problemas con significado. El cambio fundamental que se propone consiste en enfatizar el valor de uso del conocimiento matemático por parte del estudiante, esto significa, colocar a las prácticas sobre el objeto formal. En ese sentido, fortalece el sentido de "lo propiamente matemático" en diversas situaciones de aprendizaje: se pretende una enseñanza más activa, realista y crítica que derive en	Como el currículo de Ontario y Singapur, la Escuela Nacional Preparatoria pone al centro la resolución de problemas para integrar todas sus asignaturas, no obstante, a diferencia de las demás, la Escuela Nacional Preparatoria tiene un enfoque humanista y crítico de las matemáticas.

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
	herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria. Lo que permite conectar la educación matemática con los procesos formativos para una sociedad democrática.			problemas, p. ej. Los 4 pasos de Polya para la resolución de problemas y el uso de heurísticas son importante para ayudar a abordar tareas no rutinarias de manera sistemática y eficaz.	aprendizajes más significativos en la vida del estudiante.	
Procesos	Simplificación				Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales	La simplificación forma parte del ciclo de modelización, por eso repito la competencia del MCC en "simplificación" ya que el proceso de "modelización" lo incluye.

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
	Construcción de modelos	Model with mathematics.		Applications and modelling	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales	
	Empleo de material y herramientas de apoyo	Use appropriate tools strategically.	.			Dicha competencia tiene un papel importante al ser la tecnología un eje transversal de la Escuela Nacional Preparatoria.

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
	Interpretación del problema				Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales	La interpretación forma parte del ciclo de modelización, por eso repito la competencia del MCC y Singapur ya que lo incluye.
	Solución del problema	Make sense of problems and persevere in solving them.			Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques	Es importante aclarar si la <solución de problemas> se refiere a la visión de Brosseau o como parte del ciclo de modelización.

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
	Comunicación	Construct viable arguments and critique the reasoning of others.		Reasoning, communication and connections Thinking skills and heuristics	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Investigar que procesos implican la comunicación y argumentación para saber si se debe tratar como separado o en conjunto.

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
Razonamiento matemático	• Generalizar y abstraer • Visualizar • Representar y analizar algebraicamente las formas geométricas • Covariación • Análisis de datos • Variación	Reason abstractly and quantitatively. Attend to precision. Look for and make use of structure. Look for and express regularity in repeated reasoning.		Numerical calculation Algebraic manipulation Spatial visualisation Data analysis Measurement Use of mathematical tools Estimation	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean Elige un enfoque determinístico o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia Interpreta tablas, graficas, mapas, diagramas y textos con símbolos	Semejanzas en las habilidades de los diferentes pensamientos matemáticos; pensamiento algebraico, geométrico, covariación, estadístico y variacional.

	ENP	CCSM	Ontario	Singapur	Aprendizajes clave	Observaciones
					matemáticos y científicos.	

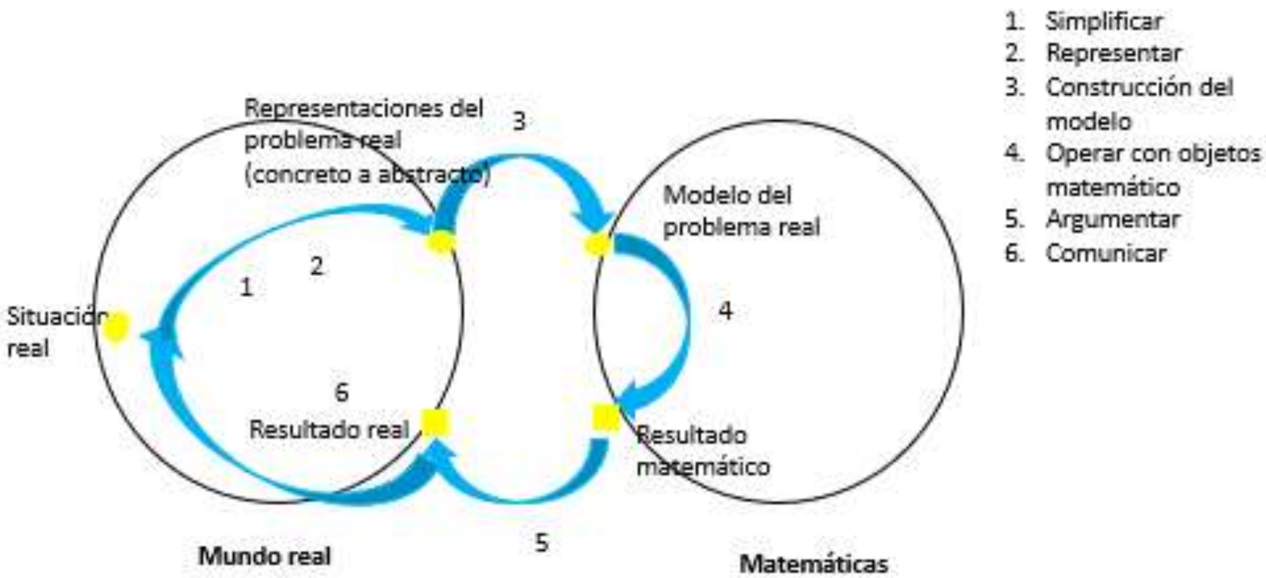
Como se observa en la Tabla 2, el plan de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria se estructura a partir de la resolución de problemas y matematización matemática (Freudenthal, 1971) muy parecido al currículo de Singapur (The Ministry of Education of Singapore [MOE], 2012) y Ontario (Ministry of Education, 2007) donde la resolución de problemas es el cimiento teórico que articula al resto de las dimensiones, sin embargo, la perspectiva que maneja la Escuela Nacional Preparatoria se dirige al enfoque realista y crítico por la misión y compromiso social que tiene la institución pública.

Mediante este proceso de matematizar, los estudiantes obtienen un modelo matemático que representa una solución a la situación real planteada. Por tal motivo, diversos autores como Búa et.al (2016) retoman a la modelización como parte de la actividad matemática que un alumno debe aprender a desarrollar para alcanzar el fin último de una modelización (un modelo matemático) pero también como la forma adecuada de introducir conceptos o nociones o como una vía de que los conceptos y nociones emerjan de las necesidades que implica la generación del modelo matemático

Durante esta actividad matemática se ponen en juego diversas habilidades que se describen en la imagen superior de la (véase Figura 12) y en donde se pone en juego las habilidades matemáticas de comunicación, operar con los objetos matemáticos, construcción de modelos, simplificación, y uso de herramientas tecnológicas.

Figura 12

Ciclo de matematización en la Escuela Nacional Preparatoria.



Nota. Adaptado de "Mathematical modelling: Can it be thought or learned?" (p.46). por W. Blum y F. Borromeo, 2009, *Journal of Mathematical Modelling and Application,* 1(1). "Rubric Development Study for the Assesment of Modelling Skills" por A. Tekin y E. Bukova, 2018, *The Mathematics Educator*, 27 (2).

Simplificación: En esta habilidad, el estudiante simplifica el problema, determina las variables necesarias/ innecesarias y hace suposiciones realistas a la situación. Asimismo, reflexiona sobre el proceso de simplificación de su problema (Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018 y OCDE, 2006).

Representación: Esta relacionado a los diferentes niveles progresivos de representación que nos permiten vincular con el modelo abstracto. A través de la simplificación, construcción, estructuración y reorganización de la realidad se va transformando las representaciones y también el estudiante. Lo que más tarde le permitirá acceder al modelo abstracto (Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018 y OCDE, 2006).

Construcción de modelos: Implica estructurar el campo o la situación para la que se va a construir un modelo; traducir la realidad a estructuras matemáticas en unos contextos que pueden ser complejos o diferir bastante de aquellos con los que están familiarizados los alumnos; efectuar interpretaciones cruzadas en ambos sentidos entre los modelos, teoremas y algoritmos y la realidad. Asimismo, implica reflexionar por medio de análisis, plantear críticas y abordar comunicaciones más complejas sobre el modelo, teorema y algoritmo y la construcción de cada uno de ellos (Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018 y OCDE, 2006).

Operar con algoritmos, modelos y teoremas matemáticos: Comporta hacer uso de objetos matemáticos que superen la mera reproducción de problemas estándar, puros o aplicados en forma cerrada, o que ya hayan sido practicados, por procedimientos más originales que conlleven establecer nexos entre diferentes áreas matemáticas y entre distintos modos de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras, imágenes). Asimismo, implica reflexionar sobre estrategias y soluciones (Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018 y OCDE, 2006).

Argumentación: Implica llevar a cabo razonamientos matemáticos sencillos, entre los que se incluye la distinción entre las pruebas, el proceso de aprobación y otras formas de argumentación y razonamiento de mayor amplitud; seguir, evaluar y elaborar diversos tipos de cadenas de argumentación matemática; y utilizar la heurística (por ejemplo, «¿Qué puede o no puede suceder, o ser el caso, y por qué?», «¿Qué es lo que sé y qué es lo que quiero obtener?», «¿Qué propiedades son esenciales? », «¿Cómo se relacionan los objetos?») (Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018 y OCDE, 2006).

Comunicación: Comporta comprender y saber expresar de forma oral y escrita cuestiones matemáticas que abarquen desde la reproducción de nombres y propiedades básicas de objetos familiares, o la explicación de cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera), hasta la explicación de cuestiones que comporten relaciones complejas, incluidas las relaciones lógicas. Implica asimismo comprender los asertos escritos y orales de terceros sobre esas mismas cuestiones (Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018 y OCDE, 2006).

Una vez que analizamos los diferentes componentes del campo de Matemáticas, el equipo creó una herramienta para que organizar todas las asignaturas y visualizar la totalidad en el campo de matemáticas (véase Figura 13).

Figura 13

Herramienta para visualizar la totalidad en el campo de matemáticas

Matemáticas IV					Matemáticas V					Matemáticas VI (Área 1 y 2)				Matemáticas VI (Área 3)				Matemática (Área 4)	
Objetivos generales de aprendizaje: *Pensamiento y razonamiento*; *Argumentación*; *Comunicación*; *Construcción de modelos*; *Planteamiento y solución de problemas*; Utilización del lenguaje formal matemático*; Empleo de material y herramientas de apoyo																			
U1 **Los números reales para contar, comparar y medir**	U2 **Expresiones algebraicas para describir y generalizar**	U3 **Ecuaciones de primer y segundo grado para modelar condiciones específicas en una función**	U4 **Sistemas de ecuaciones para modelar condiciones simultáneas**	U5 **Inecuaciones para modelar restricciones**	U1 **Pensamiento geométrico para visualizar y argumentar**	U2 **Álgebra para analizar los objetos geométricos**	U3 **Funciones para modelar la relación entre variables**	U4 **Estadística para interpretar grandes cantidades de datos**	U5 **Tema optativo**	U1 **Conceptos esenciales de las funciones**	U2 **Límites de una función para analizar su comportamiento**	U3 **La derivada de una función para modelar el cambio**	U4 **La integral de una función para medir**	U1 **Introducción a modelos socio-económicos a través de progresiones y series**	U2 **Introducción a las matemáticas financieras**	U3 **Matrices y su vínculo con modelos económicos-administrativos**	U4 **Aplicación de la derivada para el análisis de optimización**	U1 **Matemáticas en el arte**	U2 **Ideas numéric**
1.1 Conjunto de los números reales y sus subconjuntos [illegible]	2.1 Expresiones algebraicas para describir y [illegible]	3.1 Concepto intuitivo de función [illegible]	4.1 Ecuación lineal en dos variables 4.2 Idea intuitiva de [illegible]	5.1 Inecuaciones de primer grado con una variable [illegible]	1.1. Los elementos geométricos [illegible]	2.1. Conceptos básicos de la geometría cartesiana [illegible]	3.1. Concepto de función real de variable real 3.2. Variables [illegible]	4.1 Población y muestra a) Variables en el contexto de fenómenos [illegible]		1.1. Conceptos fundamentales que determinan a una función: [illegible]	2.1. Idea intuitiva de límite 2.2. Teoremas de límites: a. Suma, [illegible]	3.1. Introducción al concepto de derivada a partir [illegible]	4.1. Notación sigma para representar una suma y [illegible]	1.1 Definición de sucesión y [illegible]	2.1 Interés simple y sus elementos 2.2 Interés [illegible]	3.1 Matriz: definición, tamaño y elemento [illegible]	4.1 Interpretación geométrica de la derivada [illegible]	1.1 Razón, proporción y escala: a) Semejanza b) [illegible]	2.1 La noción de número e[illegible] diversas [illegible]

A continuación, explicaré la segunda dimensión que conforma el campo de matemáticas, los sistemas simbólicos con los que actuará el estudiante a lo largo de los 3 años.

Contenido de las matemáticas

La segunda dimensión, corresponde a los campos de conocimiento de las matemáticas, y son aquellos que le dan contexto al desarrollo de los procesos de resolución de problemas: son la aritmética, el álgebra, la geometría, el estudio de las funciones y la estadística (véase Figura 14).
Cada uno aportará un sistema simbólico con el cual modelar la realidad, además de promover pensamientos particulares.

A continuación, se enlistan aquellos procesos que resultan de interactuar con cada uno de los sistemas o contenidos (Escuela Nacional Preparatoria, 2016, 2017 y 2017):

Para cuarto año, el énfasis estará en el **pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico**, del primero implica la comprensión de los números reales y complejos, su representación y los procesos de aproximación. El segundo, implica el entendimiento de los procesos de generalización y de razonamiento simbólico.
Para quinto año el **pensamiento geométrico** ofrece la posibilidad de realizar procesos de visualización (para la exploración de una situación compleja o una apreciación en su conjunto, o bien como medio de comprensión de un problema), así como el **pensamiento analítico** para la construcción de modelos (a través del uso de diversas herramientas, entre ellas las simbólicas gráficas y las simbólicas algebraicas), de razonamiento (al plantear conjeturas), de generalización y de argumentación (al presentar una prueba o demostración), transitando además entre la representación matemática y el lenguaje natural.
En sexto año el **pensamiento variacional** promoverá procesos de observación de un fenómeno para identificar lo que cambia y lo que permanece constante, así como los patrones que se repiten; procesos de abstracción para proponer modelos simbólicos (verbales, gráficos, algebraicos, tabulares), que reproduzcan la situación a partir de la interacción entre las variables; y procesos de análisis para probar, contrastar resultados, y analizar el efecto de la modificación de las condiciones originales.

A lo largo de los tres años el **pensamiento estadístico** permitirá el desarrollo de las capacidades para procesar, interpretar, evaluar y comunicar críticamente la información proveniente de diversos contextos en gráficos, tablas o afirmaciones

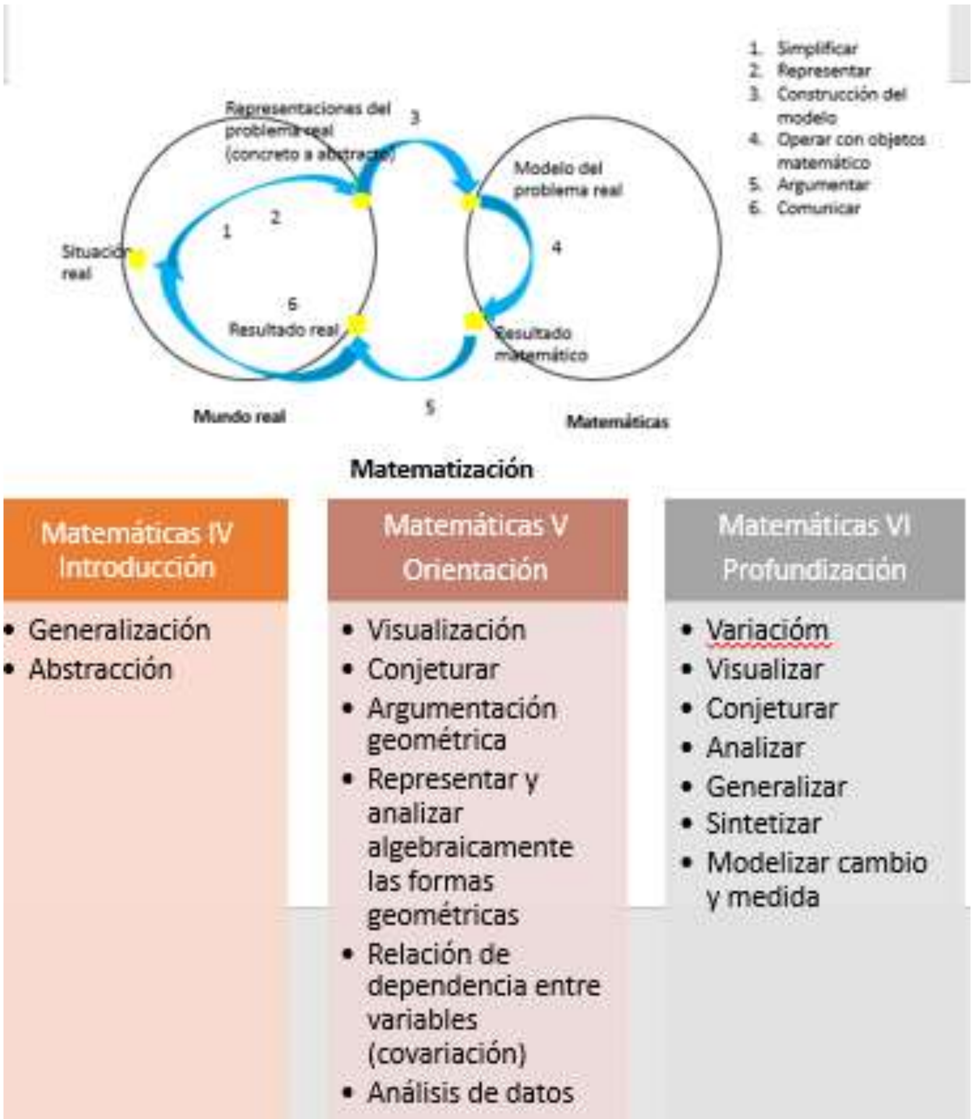
A lo largo de los 3 ciclos escolares (introducción (Matemáticas IV), orientación (Matemáticas V) y propedéutico (Matemáticas VI)) el estudiante modelizará su realidad con los sistemas matemáticos anteriormente descritos.

La Figura 13, ilustra los objetivos transversales de los 3 años, correspondientes a la dimensión de matematización, así como los contenidos previstos para cada asignatura, los cuales corresponden al campo disciplinar de origen.

Después de hacer una revisión a la modelización o matematización, así como los contenidos disciplinares que organizan los objetivos de aprendizaje de las asignaturas del campo de matemáticas (Matemáticas IV, Matemáticas V, Matemáticas VI). Es pertinente mencionar los otros componentes que conforman la descripción general del campo de matemáticas, que ayudarán a conformar al sujeto de bachillerato, y son: tecnologías y actitudes y valores.

Figura 14

Procesos abstractos de cada disciplina



Tecnologías

Actualmente la tecnología es una herramienta mediacional en el currículo de la ENP, al ocuparse como herramientas para visualizar, experimentar y manipular diferentes representaciones, estáticas o dinámicas, de un objeto matemático (aritméticas, algebraicas, geométricas, tabulares) para formular y validar sus hipótesis (SUMEM, 2014).

Por lo que también es una de las dimensiones que atraviesan el campo de matemáticas, ya que es un aprendizaje que le ayudará al estudiante como medio de construcción entre lo conocido y lo nuevo, así como extensor y amplificador de la mente. En el caso de Matemáticas, ofrece diferentes ventajas para enseñarlas y aprenderlas (Salinas-Hernández y Miranda, 2018). Algunas de ellas son:

- Ofrece representaciones
- Facilita la organización y análisis de datos
- Permite que se hagan cálculos de manera eficiente

En el documento "Consideraciones "se señalan algunas tecnologías específicas de este nivel que facilitan el desarrollo matemático (como los Sistemas de Álgebra Computarizada), la manipulación de objetos matemáticos (como el software de Matemática Dinámica) y las que facilitan la comunicación y el manejo de datos.
En los programas de matemáticas también se hace referencia a otras habilidades digitales que corresponden a los ejes transversales de la ENP, y estás se relacionan a la búsqueda confiable y verídica de la información y colaboración en redes digitales.
Sin duda, el debate sobre la necesidad de la tecnología quedó atrás, ahora debe discutirse sobre las ventajas que ofrece su utilización y la mejor manera de sacarles provecho en la práctica educativa.

Historia de las Matemáticas (actitudes y valores)

La incorporación de elementos históricos a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática, es otra de las dimensiones que forman a este campo, pues permite visualizar la íntima e innegable relación que existe entre esta disciplina científica y la dinámica sociocultural humana.

Al incorporarse elementos de la Historia de la Matemática en los procesos de enseñanza aprendizaje se pueden obtener algunos beneficios educativos. Algunos de los cuales son: promueve un cambio de actitud y de creencias hacia la Matemática, ayuda a explicar y superar obstáculos epistemológicos, incentiva la reflexión y una actitud crítica en el estudiante, es un recurso integrador de la Matemática con otras disciplinas, es un elemento en la formación de educadores de la Matemática, aumenta el interés y la motivación de los alumnos hacia la Matemática (Chaves & Salazar, 2004).

Por ello, la integración de la historia de las matemáticas en las actualizaciones curriculares busca promover la cultura matemática, así como aquellas actitudes y valores relacionadas con el comportamiento escolar: la disposición y el interés por aprender, el compromiso por cumplir con obligaciones académicas durante todo el ciclo escolar completo (SUMEM, 2016) y aquellos que son observables dentro y fuera del salón de clase: como la disposición que tenemos para relacionarnos unos con otros; no dañar, no ofender o no maltratar a los demás, actuar con honestidad, cuidar el medio ambiente y los recursos naturales, decidir con autonomía y responsabilidad.

La promoción del análisis y la reflexión, el interés por saber y aplicar los conocimientos para resolver problemas son otras actitudes que se promueven desde la disciplina de Matemáticas al perfil de egreso de la ENP.

Organización curricular

Las asignaturas que forman parte del campo de Matemáticas pertenecen al núcleo formativo básico. Ya que son conocimientos generales que inducen al alumno a pensar y ser autónomo, así como a enfrentar problemas de conocimiento y práctica con éxito. Este campo está conformado por 7 asignaturas distribuidas en los 3 años formativos: Introducción, Profundización y Orientación (Escuela Nacional Preparatoria, 2016, 2017 y 2017).

1400 Matemáticas IV (2016) Núcleo básico 4° de etapa introductoria

El propósito de la asignatura Matemáticas IV e s que los estudiantes desarrollen sus capacidades de abstracción, generalización, comunicación matemática y razonamiento lógico mediante el análisis y la resolución de problemas contextualizados a partir de la construcción de modelos aritméticos, algebraicos y geométricos.

1500 Matemáticas V (2017) Núcleo básico 5° de etapa orientación

El propósito que orienta el programa de Matemáticas V es impulsar la realización de procesos como la visualización, la abstracción, la generalización, el análisis, la síntesis y la argumentación, a través del estudio de problemas que promuevan el planteamiento y análisis de modelos geométricos, analíticos y estadísticos.

1600 Matemáticas VI Áreas I y II Núcleo Básico 6° de etapa profundización

El propósito de la asignatura Matemáticas VI, Áreas I y II es que los alumnos apliquen los conceptos básicos del Cálculo (diferencial e integral) para estudiar y modelar el movimiento, el cambio y la medida, mediante el análisis de procesos infinitos. Este último curso de Matemáticas del bachillerato introduce a los estudiantes, de manera gradual, a los conceptos de derivada e integral así como a los problemas que históricamente dieron lugar al desarrollo del Cálculo.

1619 Matemáticas VI área III Núcleo Básico 6° de etapa profundización

El propósito de la asignatura de Matemáticas VI para Área III es que el alumno desarrolle un pensamiento matemático que le permita analizar, plantear, resolver y explicar problemas socioeconómicos mediante la observación, experimentación y aplicación de modelos matemáticos que contribuyan a tomar decisiones razonadas

1620 Matemáticas VI área IV Núcleo Básico 6° de etapa profundización

La materia de Matemáticas VI para el Área VI y IV aportará elementos para el desarrollo de habilidades de abstracción y comunicación simbólica que resultan esenciales a los estudiantes en cualquiera de las carreras para las que se preparen al elegir esta área propedéutica.

1710 Temas Selectos de Matemáticas Optativas (optativa)

El propósito central de Temas Selectos de Matemáticas es fortalecer un pensamiento analítico apoyado en la realización de procedimientos algorítmicos y fomentar la creatividad en la solución de problemas para desarrollar un espíritu crítico, fundamental en la toma de decisiones.

1712 Estadística y Probabilidad Optativas (optativa)

El propósito de la asignatura Estadística y Probabilidad es que los estudiantes consoliden sus conocimientos sobre estadística descriptiva e inicien el tránsito hacia el pensamiento estocástico. Este tránsito requiere una base sólida sobre el concepto de probabilidad, que en la actualidad es un elemento fundamental para describir fenómenos naturales y sociales que abarcan las cuatro áreas del conocimiento, y que ha promovido el desarrollo de disciplinas.

Una vez que se mostró el modelo educativo de matemáticas, surgieron las preguntas sobre los principios didácticos que les permitirían cumplir los objetivos actuales de los programas:

Extracto 1. Reflexión de docente de matemáticas respecto al currículo puesto en práctica.

1. **Profesor 3**: Pues primero, aunque nos cueste trabajo, el contexto. Porque si, si es muy importante el contexto […] a mí me cuesta mucho trabajo, en el mundo cotidiano, en el científico, en el… ¿cómo lo voy a bajar?

Nota: Extracto de audio tomado de una sesión de formación docente, realizada en el Plantel No. 5 “José Vasconcelos” (agosto del 2018).

Dicha preocupación del docente nos habla también de lo importante de acompañar a los docentes durante el proceso de apropiación curricular, pues si bien reconocen la importancia de este nuevo modelo, no saben las estrategias o principios para lograr los aprendizajes.

Otra problemática señalada por docentes, es la resistencia al cambio de una enseñanza basada únicamente en modelos, teorema y algoritmos abstractos, por una que incluya tanto a la abstracción como la solución de problemas reales. Como señalan algunos docentes de matemáticas en el trabajo de Alvarado, Sánchez y Lugo (2019) durante un SADE:

> “estos contenidos conceptuales están enfocados para una carrera de diseño de arte, pero no para el área humanística, que le serviría algo más orientado al cálculo tradicional”, “la intención educativa es clara, aunque considero que se está bajando de manera grave el nivel de abstracción de los jóvenes de esta área”, “me parece que han trivializado el programa de la materia, pudiendo hacer una vinculación con temas de cálculo como sucesiones, la derivada y aplicaciones” (p.6).

De igual forma, esta problemática se señalaba por una de las docentes con las que llevamos a cabo el análisis curricular. No obstante, a diferencia de los comentarios de los otros docentes de SADE, esta docente ya había pasado sesiones de formación docente con el Proyecto Aleph 5.

Extracto 4. Reflexión de docente de matemáticas respecto a la enseñanza tradicional.

1. **Profesora 1**: hemos estado tan embebidos tantos años…en… los temas, tienes que cubrir este tema y este otro tema, entonces no importa si le das contexto o no…tú tienes que acabar de cubrir el programa de no sé cuántos temas… sin contexto o con problemitas fáciles con problemitas baratos, así les decimos nosotros, y sin trascendencia.

Nota: Extracto de audio tomado de una sesión de formación docente, realizada en el Plantel No. 5 “José Vasconcelos” (agosto del 2018).

Como describe Alvarado, Sánchez y Lugo (2019), la concepción sobre el aprendizaje de las matemáticas de los profesores sigue siendo una concepción tradicional pese al gran esfuerzo que se llevó a cabo para la actualización curricular. Por tal razón, es que es necesario recuperar las voces de los docentes, para una mejor aceptación de la actualización curricular, así como para la mejora continua, de este, a partir de lo que ocurre en sus aulas.

Debido a que en el programa de Matemáticas no aparece de manera explícita los principios didácticos con los que se hizo la propuesta de programas. Investigué los principios relacionados a las matemáticas realistas de Freudenthal, y sinteticé junto con lo que se describe en el documento del SUMEM, los principios didácticos del campo de Matemáticas:

- Las matemáticas son parte fundamental de la cultura y en consecuencia permean toda actividad humana (SUMEM, 2014). Al reconocer a las matemáticas como resultado de un sistema histórico y cultural, nos permite conceptualizar a las actividades como las principales promotoras y mediadoras entre saberes y conocimientos. Tener una perspectiva histórica de las matemáticas, también nos permite superar una idea estática del conocimiento matemático por una concepción del conocimiento como posibilidad.

Reconocer a la actividad como origen y medio para producir conocimiento matemático, nos hace retomar los principios de Freudenthal Van den Heuvel-Panhuizenn& Drijvers (s.f.) que se exponen en el capítulo 2.

- El primero, que los estudiantes tienen una participación en el momento de hacer matemáticas o matematizar.
- El segundo, el principio de realidad, el cual se define de dos maneras: la capacidad de los estudiantes de aplicar las matemáticas en la resolución de problemas de la "vida real". En segundo lugar, las matemáticas mismas, las cuales deben problematizar situaciones que sean significativas para los estudiantes.
- El tercer principio, del (EMR) es el relacionado al nivel, donde se menciona que los estudiantes operan en diferentes niveles de comprensión, y que van desde soluciones informales relacionadas al contexto, hasta un nivel conceptual y de estrategias. Esta esquematización progresiva conecta el mundo real con el mundo abstracto, a través del desarrollo de modelos matemáticos.
- El cuarto principio, es el entrelazamiento entre los conceptos principales. Las principales disciplinas de las matemáticas (álgebra, geometría o aritmética) se integran y no se consideran como un plan de estudios separado o asilado, todas son necesarias para que el estudiante pueda resolver el problema.
- Por último, los dos últimos principios significan a las matemáticas como una actividad social, en lugar de una actividad individual. De ahí la importancia del principio de, interactividad, que permite a los estudiantes compartir sus estrategias y mejorarlas entre sus compañeros; así como de la guía docente, el cual Implica un papel proactivo, en cuanto al seguimiento en los aprendizajes.

Una vez realizado el análisis y síntesis de los programas que componen el campo de Matemáticas, así como la identificación gradual de los procesos de aprendizaje; se planeó el diseño de una herramienta tecnológica que organizara, mediara y creara conocimiento para las prácticas educativas en la Escuela Nacional Preparatoria. De tal manera que nos permita discutir y modificar - junto con los actores curriculares – los programas en función de lo que ocurre en sus aulas. Por último, es importante señalar que estos principios se ajustaron de a través de la evidencia que se generó durante los últimos 2 años. La cual presentaré en el último capítulo.

En el siguiente apartado hablaré sobre el desarrollo y diseño de esta herramienta tecnológica.

4.3 Diseño Descriptivo de la Herramienta Semiótica para los Actores Curriculares

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, la ruptura entre el currículo formal y el currículo real sigue siendo una problemática vigente en el bachillerato. Las políticas y procesos facilitadores para la aplicación curricular han resultado obsoletos y no siempre se logra un proceso de implementación adecuado. En consecuencia, las instituciones educativas continúan situando la solución en el plano del desarrollo modélico idealizado, en lugar de planear procesos para la implementación de la propuesta curricular (Díaz Barriga, et al., 2015).

Sin embargo, algunas de las soluciones que se han generado desde hace más de medio siglo es la noción de currículo participativo. Schwab (1970) en Díaz Barriga et al. (2015) es uno de los autores que plantea las bases de la participación de los actores curriculares (profesores, especialistas en las materias o disciplinas, estudiantes, expertos curriculares y aquellos que representan a la sociedad o comunidad) en la deliberación y toma de decisiones respecto al currículo. Para este autor, si no se considera la participación de estos actores en las innovaciones curriculares, se podría producir un "punto ciego" que termine por debilitar el proyecto educativo e imposibilitar su traslado a la realidad del aula.

Por tales razones es que el desarrollo de este sitio web va dirigido a los actores curriculares, de modo que puedan acceder, participar y tomar decisiones para la implementación y mejora curricular. Esto a través de una herramienta tecnológica que tenga como características:

- Almacenar, organizar y trasmitir información a la amplia comunidad educativa de la Escuela Nacional Preparatoria.
- Superar la herramienta informativa a una herramienta que produce conocimiento
- Mediar las prácticas en el aula con la propuesta curricular

A lo largo del capítulo, describiré las características de la herramienta semiótica y los procesos psicológicos que subyacen en su diseño para utilizarse como un dispositivo mediador y organizador de información. También se hablará de los futuros trabajos para lograr una coordinación de la herramienta con la práctica docente en términos de la TA (Leóntiev, 1972, 1975 y 1981 como se citó en Werstch 1988).

La llegada del internet ha modificado los formatos y mecanismos semióticos utilizados para la difusión de conocimiento, lo que ha dado paso a nuevas formas de comunicación como la narrativa interactiva con participación del lector: el hipermedia

Estas nuevas formas de comunicación, mejor conocidas como web o HTML, se presentan ahora en la praxis escolar como un potente repositorio en el que se conjugan signos y códigos (imagen, texto, video, animación, audio y audio-video) lo que permite la integración y condensación de unidades de significado (Berná y Fernández, 2011). Además, el sistema de HTML no funciona solo como un almacén de contenidos, la web posee un carácter informativo y de transmisión a un gran número de personas. Es por eso que escogemos dicho soporte tecnológico, para dar almacenamiento, organización y cobertura a toda la comunidad educativa de la ENP.

Para la construcción de nuestra página web decidimos usar Wix, ya que nos permitía crear nuestro sitio web de forma fácil e intuitiva, así como la posibilidad de editar e incorporar materiales multimedia como vídeos, animaciones, texto, audio e imagen dentro de una misma web. Esta combinación y coordinación de la multimedia me permite brindar a los diferentes actores curriculares una aproximación más diversificada a los contenidos informativos de los programas; lo que produce una semiosis ilimitada donde la producción de significación es continua.

Algunos de los recursos y materiales multimedia que se diseñarán en la página se muestran en la siguiente tabla, los cuales dividimos de acuerdo con la clasificación de Barbera y Rochera en Coll y Monereo (2008):

Tabla 3

Materiales multimedia en la página WIX.

Tipo de material	Población dirigida y ejemplos
Material reproductivo- informativo: Es un conjunto de informaciones organizada y secuenciada sobre una temática específica	Docentes: conferencias grabadas, acervos de investigación especializada, libros, memorias de congreso; entrevistas, tutoriales, repositorios, infografías, descargables (office y pdf) y HTML. Alumnas y alumnos: tutoriales, infografías, repositorios, guías, descargables (office y pdf), productos y evidencias, rúbricas y HTML.

	Padres: infografías, descargables (office y pdf) y vídeos
Material productivo- informativo: Se trata de un tipo de material que combina momentos o fases de información sobre una temática específica, que debe ser leída y trabajada con el actor curricular, con momentos y fases de aplicación abierta. Es decir, no hay una retroalimentación.	Docentes: Cursos offline y video quizz
Material productivo- participativo *Son materiales que ofrecen a los estudiantes espacios abiertos de práctica autónoma y que están estructurados de manera que les permiten acceder a un contenido flexible y adaptable, de acuerdo a sus aprendizajes.* Es decir, hay una retroalimentación.	Docentes: Actividades formativas, foros, blog, webinarios, sesiones masivas.

Todos estos recursos y materiales están compuestos por diferentes códigos lingüísticos, muchos de ellos se mezclan, por lo que será necesario crear unidades de significado a través de los diferentes códigos que generan cada uno de estos materiales.

Sin embargo, la cantidad de información que opera en la web conforman un mar de signos en el que prácticamente cualquier elemento influye para comunicar. Los signos son la base del pensamiento humano y de la comunicación, por ello saber interpretarlos y crearlos adecuadamente permite que seamos capaces de desenvolvernos adecuadamente en las actividades humanas (Berná y Fernández, 2011).

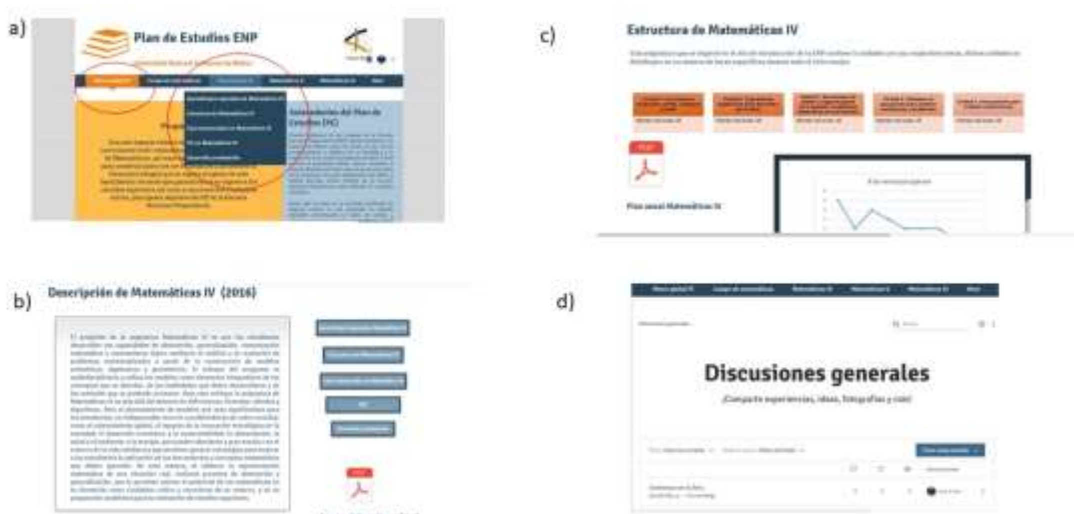
Por lo que, cada recurso o representación tiene una organización espacial y temporal para el aprendizaje, para producir un diseño de experiencia entre el sujeto y la herramienta. Esta coordinación y combinación de recursos sigue los niveles de organización que presenta

Rodriguez como se citó en Coll & Monereo (2008) para facilitar aprendizajes (véase Figura 15):

a) Segmentando los contenidos por níveles de integración (es decir, se descompone el contenido global del curso de Matemáticas V en otros más pequeños como puedan ser una lección, una secuencia didáctica o un recurso didáctico)
b) Componiendo espacialmente los distintos contendios en el interior de la pantalla, es decir construyendo unidades de significación (menú de contenidos).
c) Estructurando el acceso temporal a los contenidos, es decir, las formas y límites para acceder a la información ya digitalizada y organizada en pantalla. (plan anual docente-investigador, presentación de programa profesor-estudiante).
d) Posibilitando determinadas formas de interacción entre el estudiante, los contenidos y el profesor, generando una dinámica propia del proceso.

Figura 15

Organización y estructura de página



Es importante mencionar que cada recurso y contenido multimedia está destinado a las necesidades de cada actor curricular, de modo que puedan atribuirle mayor significado a la información.

4.3.1 Alcances y prospectivas de la herramienta semiótica

La naturaleza de las TIC como recursos educativos es sumamente compleja dado que son portadoras de símbolos multimodales, vehículos para la comunicación e interacción social y artefactos investidos con significaciones culturales positivas y negativas (Lizarazo y Andión, 2013), por lo que pueden concebirse como soluciones o problemas, como apoyos o como obstáculos para la enseñanza y el aprendizaje. Al ser las TIC un resultado cultural, la tecnología no puede existir sin representaciones. Todo dispositivo técnico está culturalmente impregnado, significado, apreciado y evaluado. La cultura no solo designa objetos, también les da un estatus en el mundo de las cosas: los describe, da una versión y una valoración de lo que son, define su importancia y pertinencia (Lizarazo y Andión, 2013). Según Lizarazo y Andión (2013) todo objeto técnico es un signo de tres valencias: 1) el mundo histórico y cultural que lo hace posible, 2) su uso y 3) el estatus social del grupo quien lo usa.

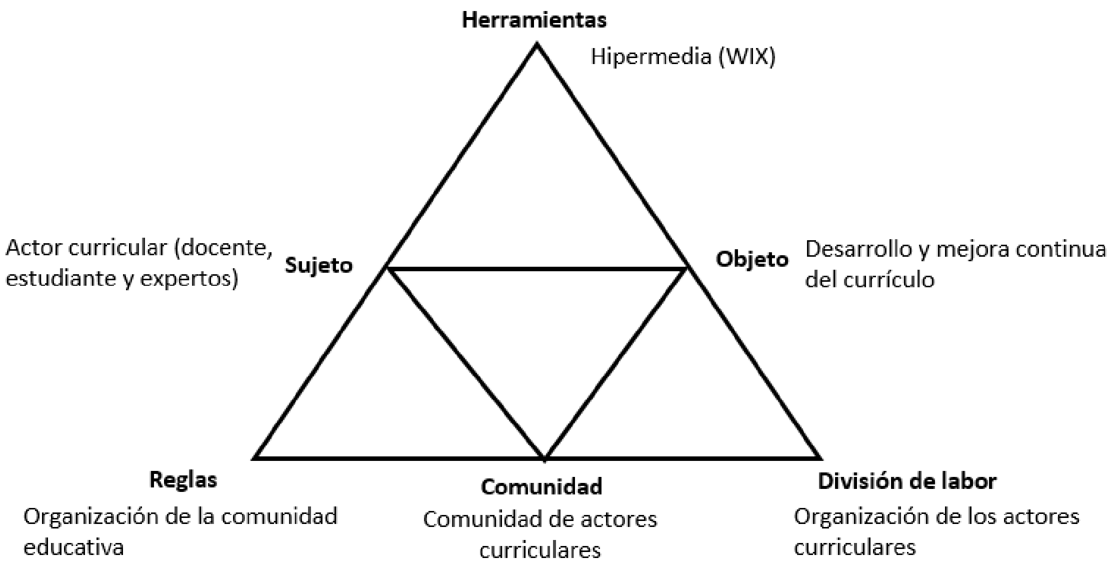
De estos planteamientos surgen preguntas clave para conocer los alcances de la herramienta semiótica que hemos propuesto: ¿Cuál es el estatus y el papel que queremos de la página en la ENP 5? y ¿Qué representaciones y usos queremos generar en los actores educativos con esta herramienta semiótica? Pues las representaciones culturales que se tengan sobre la página repercutirán de manera determinante en la disposición del uso de las mismas.

En primer lugar, es importante aclarar que la propuesta de la herramienta tecnológica en este trabajo no es un fin "en sí mismo" educativo, este apartado de la propuesta busca mostrar la sistematización y el análisis semiótico de nuestra herramienta tecnológica, así como explicar el diseño de aprendizaje previamente construido en ella, ya que al ser portadora de símbolos multimodales, debe contar con una sintaxis apropiada para generar una red compleja que pueda transfigurarse en conocimiento (Berná & Fernández, 2011).

La propuesta planteada tampoco busca descontextualizar a la herramienta tecnológica de la actividad, pues para su apropiación y generación de significados se requiere ser interdependiente con los otros elementos de la actividad (práctica docente, aula o casa). De acuerdo con el marco conceptual de la Actividad, los usos efectivos de las tecnologías resultan de las acciones e interacciones del sujeto y una comunidad a su objeto. Si partimos que las nuevas tecnologías constituyen un medio semiótico novedoso que puede transformar el proceso de conocimiento en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje en particular (véase Figura 15).

Figura 16

Teoría de la Actividad de Engeström para la apropiación de la herramienta WIX



Nota. Adaptado de "The structure of a human activity system" (p. 135), por Y. Engeström, 2001, *Journal of Education and Work*, 14 (1).

Esto quiere decir, hacer presentación y uso de dicha herramienta en las actividades formativas para que los agentes educativos se vayan apropiando de ella; algunos de los momentos que distingue Pesina (2019) para este proceso son:

1. Uso de la herramienta sin significado
2. Uso de las herramientas entendiendo algunas características
3. Uso de la herramienta entendiendo su función y algunas de las características
4. Mediación simbólica: uso, conceptualización y explicación de la herramienta
5. Mediación simbólica hacia lo posible: uso y creación de herramientas

Si bien, ella sistematiza estos pasos cualitativos para estudiantes, puede generalizarse para otras situaciones, como es el caso de la página. Otra de las tareas a futuro es buscar y diseñar una mayor integración de los distintos signos y códigos disponibles, con objeto de multiplicar las posibilidades de comunicación en este proceso de negociación de significados.

Capítulo 5. Co-diseño del proyecto de aprendizaje para el ciclo 2019-2-2020-1

Después del análisis de la situación de aprendizajes y la interpretación de los objetivos de aprendizaje en Matemáticas. En el siguiente capítulo mostraré el co-diseño que se llevó a cabo para el proyecto de aprendizaje de Matemáticas V. Esta fase se desarrolló en un taller especializado para los docentes, donde se incluyó la construcción de un marco de investigación especializada y de recursos, el análisis de los objetivos de aprendizaje, el análisis de la primera implementación del ciclo metodológico que abarcó del 2018-2-2019-1.

Las situaciones didácticas que diseñamos recreaban situaciones matemáticas reales, como: la construcción de sistemas agroforestales, la estadística como herramienta metodológica, la optimización de material o la geomática para incendios forestales. Estas situaciones didácticas contemplaban aspectos como el uso del lenguaje geométrico, trigonométrico, variacional y estadístico adecuado para la situación; el uso de medios de representación como los esquemas para representar un fenómeno matemático, y herramientas tecnológicas como Excel; así como la mediación docente la cual se ajustaba al nivel de desarrollo en el que se encuentra el estudiante, y la interacción entre pares.

En este capítulo mostraré la propuesta de proyecto de aprendizaje de Matemáticas V y el proceso para llevarlo a cabo. El siguiente esquema lo elabore con la finalidad de ilustrar el co-diseño que se llevó a cabo en el ciclo 2019-2-2020-1, de modo que sirva como guía a las lectoras y los lectores del capítulo.

5.1 Proceso de Co-diseño

5.1.1 Primera implementación del ciclo metodológico 2018-2-2019-1

Para poder llegar a la fase de co-diseño de este ciclo escolar, iniciaré mostrando el análisis de la primera implementación metodológica que va de 2018-2-2019-1, donde se planteó como meta pedagógica: la exploración de la ENP, así como el diseño e implementación de la asignatura de Matemáticas IV. Este análisis se realizó con la profesora que implementó dicha asignatura en el ciclo que fue de 2018-2-2019-1, por lo que el proceso no formó parte de las sesiones del taller especializado con todo el colectivo. Sin embargo, los resultados de este primer análisis resultaron esenciales para el co-rediseño de este curso y el proyecto de Matemáticas V. Por lo que resulta importante mencionarlo para acotar las implicaciones al co-rediseño.

a) Se debe contar con una comunidad de docentes de Matemáticas durante todo el ciclo metodológico y otro agente educativo que promueva la reflexión en estas fases, como sucedió con el colectivo de docentes en el campo de Lenguaje, el cual mostró un gran impacto en el diseño e implementación de las secuencias didácticas, esto, debido a que los profesores tenían espacios colectivos de análisis sobre sus propias acciones y la de sus pares para la implementación y las decisiones instruccionales. Del mismo modo, la docente que conformó durante este ciclo el campo de Matemáticas señalaba lo mucho que le ayudaba, para llevar a cabo las secuencias didácticas, el observar las clases de otro profesor de matemáticas que participaba en el inicio del proyecto.
b) La importancia de las representaciones externas para la construcción colectiva del conocimiento matemático, pues como se mostró en varias de las clases del ciclo 2018-2-2019-1, las representaciones icónicas fungieron como mediadoras del conocimiento al conducir a los estudiantes a los significados más abstractos. Otra de las cosas que favorecía el uso de estas representaciones era la construcción de conocimiento con una gran parte de los estudiantes, dado que los grupos eran muy numerosos.
c) La concepción sobre la “actividad matemática” influye en cómo conciben los docentes la enseñanza-aprendizaje de la asignatura. Esto ya se ha reportado en otros trabajos como los de Lensing y Straehler- Pohl (2018) donde el experto matemático pierde la referencia directa de los números y variables con la práctica social, lo que produce una concepción universalista y separada de la actividad humana, y por tanto, una enseñanza basada en los resultados matemáticos y no en la modelización. Lo que nos hace considerar el valor del marco epistémico en el trabajo interdisciplinario.
d) La importancia de un trabajo articulado y colectivo de los docentes para ajustar progresivamente sus acciones a los aprendizajes que van desarrollando en los estudiantes cada año, ya que al estructurarse el campo de matemáticas por asignaturas disciplinares no permite ver la relación que hay entre ellas. Pues de acuerdo a Castro (2019) tener un sistema consistente y compartido a lo largo de los 3 años, permite un mayor alcance a los objetivos de aprendizaje.

También durante este ciclo metodológico se construyeron 8 secuencias didácticas para la asignatura de Matemáticas IV y un instrumento de evaluación cuantitativa y cualitativa. En el siguiente cuadro muestro el número de secuencias didácticas aplicadas y las unidades de aprendizaje que cubrían.

Tabla 4

Secuencias aplicadas en el ciclo escolar 2018-2-2019-1

Mate IV	Unidades de aprendizaje
Chécate, mídete y muévete*	Unidad 1
Plan de viaje	Unidad 1 y 2
Pizzas	Unidad 1
Ejercicio y calorías quemadas*	Unidad 1
Perfección en el arte*	Unidad 1
Construyendo para ISCDF*	Unidad 3 y 4 (IV) Unidad 2 (VI)
Fábrica de empaques *	Unidad 3
Campaña de recaudación de fondos	Unidad 3

Nota. En el lado izquierdo de la tabla 1 podemos observar el nombre de las secuencias didácticas realizadas a lo largo del ciclo escolar, mientras que en el lado derecho se muestran las unidades de aprendizaje que se veían en cada una de ellas y que contribuyeron al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

A partir del uso de la rúbrica, la observación de clases y el co-análisis con la docente, se rediseñaron las secuencias didácticas que proveían las mejores condiciones para que los estudiantes realizaran todo el ciclo de modelización. Entre ellas están: Chécate, mídete y muévete, Ejercicios y calorías quemadas, Perfección en el arte, Construyendo para ISCDF y Fábrica de empaques.

Una vez que hicimos este análisis junto con la docente de Matemáticas IV, consideramos todos los puntos planteados con anterioridad para el re-diseño del ciclo 2019-2-2020-1. En el cual, además de re-diseñar Matemáticas IV, formamos junto con la DGENP y el Colegio de Matemáticas el colectivo de docentes de matemáticas para el co-diseño, co-implementación y co-análisis de la asignatura de Matemáticas V. Mi trabajo de tesis se sitúa particularmente en la asignatura de Matemáticas V y en el segundo ciclo 2019-2-2020-1 de implementación.

5.1.2 El co-diseño en el "Taller especializado en el diseño de entornos complejos de aprendizaje en el nivel medio superior"

Para continuar con el siguiente ciclo metodológico 2019-2-2020-1 y la primera fase que corresponde al co-diseño del proyecto de aprendizaje de Matemáticas V, se construyó el primer taller interanual: "Taller especializado en el diseño de entornos complejos de aprendizaje en el nivel medio superior", el cual iba dirigido a los 4 docentes de nuestro colectivo. Dicho taller se llevó a cabo de mayo a julio del 2019 y tenía como objetivo el diseño de entornos complejos de aprendizaje para Matemáticas V bajo los supuestos teóricos y metodológicos del proyecto de investigación.

Figura 17

Taller especializado para el co-diseño de ambientes complejos de aprendizaje

El propósito de estructurar esta primera fase como un taller, fue para superar el carácter mecánico y de imposición de los cursos y talleres de secuencias didácticas; donde los docentes son externos al diseño instruccional. Lo que produce una nula incidencia en la práctica docente y en la toma de decisiones instruccionales por parte de los docentes (Juuti el al., 2016).

El seminario- taller presencial tuvo una duración de 21 horas, distribuidas en 9 sesiones con una duración de 4 horas cada una, los martes y jueves (véase Figura.18). En la primera sesión se habló sobre la situación de aprendizajes en el bachillerato de la UNAM y los objetivos del proyecto Aleph 5 en el ciclo escolar 2019-2-2020-1 frente a dicho contexto. En la segunda sesión se reflexionó sobre la "matematización" en los programas de matemáticas de la ENP; así como las actividades matemáticas como fuente de conocimiento para construir el marco de recursos e investigación especializada que nos permitieron diseñar las secuencias didácticas. A partir de la tercera sesión, reflexionamos sobre los mecanismos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas para el diseño de las diferentes modalidades de secuencias didácticas, así como la evaluación cuantitativa y cualitativa.

En el siguiente apartado mostraré el proyecto de aprendizaje resultante de este co-diseño.

5.2. Proyecto de aprendizaje de Matemáticas V para el ciclo escolar 2019-2-2020-1

Bajo nuestros sustentos teóricos, el proyecto de aprendizaje es el plan anual que pone en juego los estándares y aprendizajes anuales del campo de Matemáticas; y que se construye a través de la construcción de situaciones didácticas basadas en actividades reales. Dicho proyecto tiene la finalidad de ser una guía para el colectivo de diseñadores (psicólogos y docentes) para planear, implementar y evaluar de manera constante, coherente y articulada los procesos de enseñanza-aprendizaje (Castro, 2019).

Esta guía de aprendizaje tuvo varios fines en las distintas etapas del IBD; a nivel específico (para ajustar la práctica docente, y el aprendizaje de los estudiantes día con día) y general (para el análisis retrospectivo anual, que es la que nos permitirá tener una mejor versión del diseño que presentare).

El proyecto de aprendizaje que a continuación mostrare fue el resultado de los procesos que articulamos en el taller entre la práctica de los docentes con las dimensiones teóricas y de investigación especializada. Entre las dimensiones que consideramos fueron: los objetivos de aprendizaje de la asignatura de Matemáticas V, los aprendizajes antecedentes y subsecuentes, las dificultades reportadas por los docentes, el diálogo con las comunidades de investigación; así como los hallazgos que se han reportado en el Proyecto Aleph respecto a la construcción de conocimiento matemático (Pesina, 2019; Abasolo, 2019; Castro, 2019; Téllez, 2019, Cárdenas, 2020).

Para comprender las intenciones didácticas de nuestro proyecto de aprendizaje es importante tener claro los objetivos de aprendizaje que se promueven en la asignatura de Matemáticas V, así como su papel en el mapa curricular con Matemáticas IV y Matemáticas

VI para comprender las intenciones didácticas que diseñamos en las SD para cumplir los objetivos de aprendizaje.

Como ya había mencionado en el análisis curricular, Matemáticas V está articulado con las otras asignaturas a través de los procesos integradores que ofrece la modelación matemática; lo cual ilustramos en la columna de lado derecho de la (Figura 18). No obstante, el papel que tiene ésta asignatura a diferencia de las demás es permitir que los estudiantes desarrollen procesos de visualización de representaciones geométricas para conjeturar, analizar y desarrollar un lenguaje para comunicar sus resultados; conocer nuevas herramientas para describir los objetos matemáticos vinculando su representación algebraica con la representación geométrica; reconocer la relación de dependencia entre variables involucradas en fenómenos naturales o sociales; y obtener y procesar información por experimentación o consultando diversos medios -como recursos tecnológicos digitales - e interpretar los resultados obtenidos para realizar pronósticos, tomar decisiones o asumir posturas personales que les permita argumentar (Escuela Nacional Preparatoria, 2017).

En la parte inferior de la figura 18 donde esquematice el proyecto de Matemáticas V, se encuentran los campos de las matemáticas que dan contexto al desarrollo de los procesos de modelización y de razonamiento, los cuales están vinculados con tres actividades matemáticas esenciales: medir, comparar y contar.

- Pensamiento geométrico para visualizar y argumentar
- Álgebra para analizar los objetos geométricos
- Funciones para modelar la relación entre variables
- Estadística para interpretar grandes cantidades de datos

A lo largo del curso, los aprendizajes generales y específicos, de los campos anteriormente descritos, se graduaron a partir de indicadores basados en los resultados del Proyecto Aleph (Santiago, 2019 y Castro, 2019). De modo que no partiéramos los aprendizajes por unidades, y tengamos la posibilidad de complejizar los procesos de aprendizaje en diferentes momentos del ciclo escolar. Algunos de estos indicadores son:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.

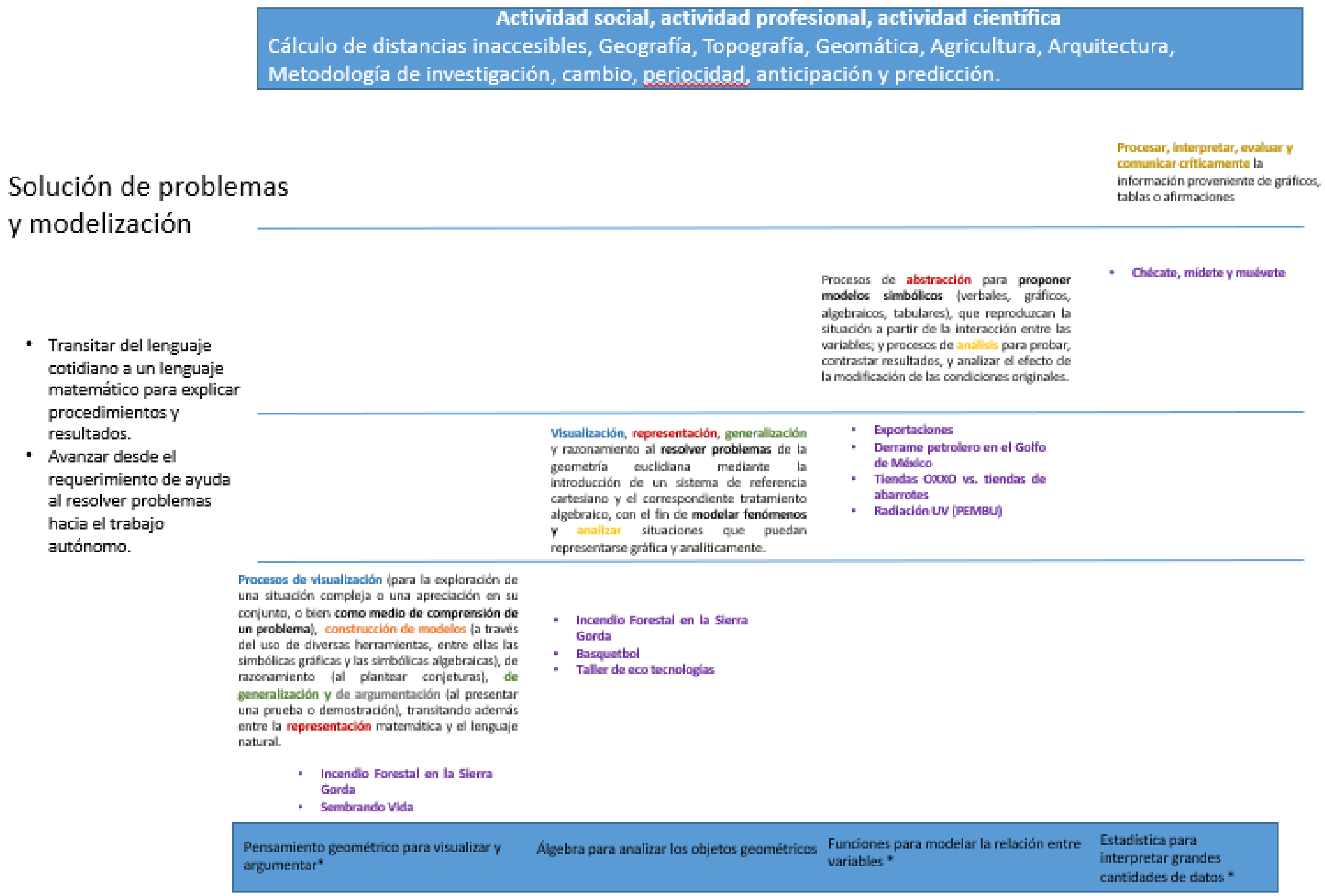
Sin duda, la semiótica ha cobrado gran importancia en las últimas décadas para explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje (Anderson et al., 2003; Sáenz-Ludlow y Presmeg 2006; Radford 2013; Radford et al., 2008, 2011; Sáenz-Ludlow y Kadunz 2016 como se citó en Presmeg et al., 2016). El énfasis en los signos se debe a la relevancia que tienen en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como representaciones del conocimiento y como mediadores. Al reconocer su naturaleza y características, es que en las secuencias didácticas se busca mediar y representar los signos convencionales (lenguaje matemático) con el objeto de que refiere, esto puede ser de manera icónica, índice o la abstracción directa del objeto (Peirce, 1992 como se citó en Presmeg et al., 2016). De modo que poco a poco vaya adquiriendo vida el signo que se presenta, hasta que el estudiante pueda hacer uso del lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.

- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia la participación de las actividades societales

De acuerdo a nuestra unidad de análisis, el aprendizaje es una actividad humana que está socialmente arraigada y materializada en las herramientas e interacciones sociales. Por tanto, el pensamiento será resultado de las acciones del sujeto en dicha actividad. A esto, hace referencia esta premisa, la cual busca mediar la participación de los estudiantes en las actividades societales. Dichas ayudas buscan incidir en la relación sujeto-objeto, como: las herramientas, el colectivo o comunidad.

Figura 18

Línea de aprendizaje de Matemáticas V

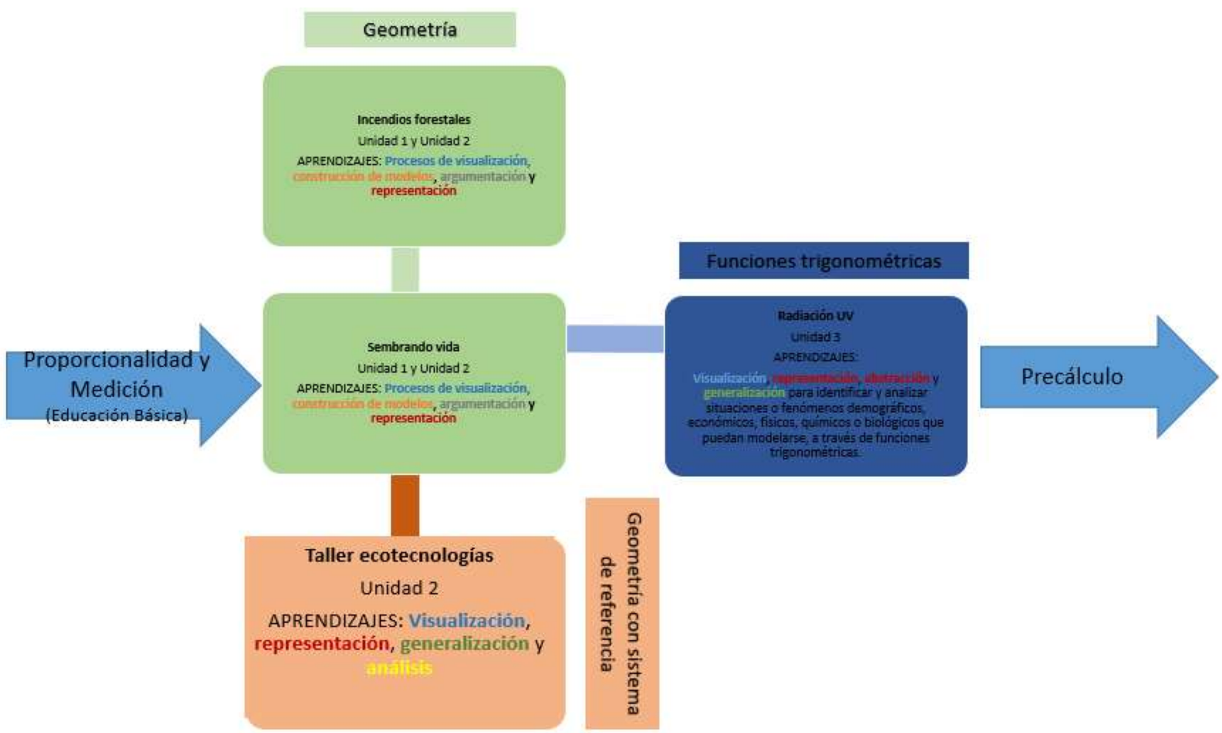


Como vemos en la Figura 19 existe una articulación entre las diferentes secuencias didácticas, a través de los procesos de modelación y de razonamiento matemático. De igual manera, las situaciones didácticas se articulaban porque permitían saltos epistemológicos entre los sistemas o eran la base para desarrollar otros procesos.

A continuación, haremos una explicación minuciosa de los bloques que diseñamos para promover el progresivo logro de aprendizajes y las intenciones didácticas detrás del diseño de estos bloques de aprendizaje. Solo es importante mencionar que a partir de este ciclo escolar se añadieron otras modalidades de secuencias didácticas, las cuales incluían: proyectos, talleres, estudios de caso y juegos.

Figura 19

Bloque donde convergen Geometría, Geometría Analítica, Trigonometría y Funciones trigonométricas



El primer bloque de secuencias tuvo como objetivo promover procesos del pensamiento geométrico como la visualización, la argumentación y representación (véase Figura 19). Para el diseño de las secuencias didácticas retomamos las principales prácticas sociales donde surgen estas formas de pensar: la medición de longitudes, áreas y volúmenes, o el trazo de linderos en la tierra. Comenzar con el polo empírico nos permitía llegar hasta la constitución de la disciplina científica con los griegos, la cual abandona los referentes físicos originales y comienzan a crearse objetos teóricos “puros” (por ejemplo, los dodecágonos cóncavos) y relaciones teóricas “puras” (por ejemplo, la suma de ángulos interiores de una figura, etc.). (Camargo y Acosta, 2012).

Esta relación en la historia humana entre el mundo empírico y el mundo teórico, se tomaron en cuenta para el diseño de las secuencias diseñadas: Incendios Forestales en la Sierra Gorda de Querétaro y “Sembrando vida”[2], las cuales están basadas en la medición de longitudes, áreas y volúmenes, y el trazo de linderos en la tierra para que el estudiante pudiera desarrollar habilidades relacionadas a visualización y a los procesos de conjetura y prueba. En ambas secuencias se promueve que los estudiantes demuestren sus descubrimientos a través de las ideas matemáticas de la geometría.

Esta idea de crear espacios reales dentro de la escuela también ha sido desarrollada y compartida en investigaciones anteriores realizadas en el marco del proyecto Entornos Complejos de Aprendizaje. Para el caso de este primer bloque también hacemos uso de los trabajos de Davis y Hersh 1998; Lakatos 1976 y Po¨lya 1945 como se citó en Mariotti el.al, 2018 donde han demostrado el impacto que tiene descubrir nuevos conocimientos en escenario auténticos y no la simple exploración de conjeturas geometrías, como normalmente se ha basado la enseñanza de la geometría. De acuerdo con los autores, esto se explica por una interacción dinámica entre hipótesis, razonamiento y justificación en una prueba formal.

La primera secuencia es un estudio de caso, donde los estudiantes propondrán vías de acceso en la Sierra Gorda (Querétaro) ante los incendios suscitados en el 2019 entre San Juan y Landa de Matamoros. Para darle solución, el estudiante primero deberá hacer uso de los elementos geométricos básicos para determinar la vía más corta entre ambos lugares, así como hacer uso de las propiedades del triángulo, el círculo y la congruencia de triángulos para determinar otras vías de acceso en la Sierra Gorda. Para esta primera secuencia, adaptamos a nuestro marco teórico ideas del proyecto de Círculo Matemático, el cual surgió en la Unión Soviética, y posteriormente se desarrolló con éxito en Europa de Este, Estados Unidos y ahora, en México (Círculos Matemáticos del Instituto de Matemáticas, 2020; Neve & Rosales, 2017)

En la segunda secuencia didáctica, los estudiantes realizarán una propuesta de sistema productivo agroforestal al Programa Sembrando Vida, donde solicitarán los materiales, árboles manzanos y hortalizas que requieren para elaborarlo. El terreno con el que construirán su sistema

[2] Sembrando vida es un programa de comunidades sustentables que busca atender dos problemáticas, la pobreza rural y la degradación ambiental.

será un terreno en forma de polígono no regular, en donde se usarán conceptos de geometría euclidiana y de trigonometría (leyes de senos y cosenos).
Posteriormente se realiza un salto epistemológico entre geometría euclidiana y analítica con la secuencia de Basquetbol y Cocinas solares, en el primero se estudia el movimiento de un balón de básquet, y en el segundo, se construye una ecotecnología a partir de una parábola. Este salto conceptual lo retomamos de la historia de las matemáticas, con el desarrollo de la mecánica y los descubrimientos de Newton sobre el movimiento de los planteas. Dichos avances permitieron que interactuaran los problemas tradicionales de la geometría euclidiana, y el desarrollo del álgebra y del cálculo (Piaget y García, 2004). Convirtiendo la noción de "transformación" en el concepto que nos permite hacer un puente epistemológico entre ambos sistemas el geométrico euclidiano y el analítico (Piaget y García, 2004).

La segunda articulación de este primer bloque: es la interconexión entre identidades trigonométricas con las funciones trigonométricas. Esta articulación va de la situación de "Sembrando Vida", con las situaciones dirigidas a identificar el tipo de comportamiento de un fenómeno (su periodicidad, razón de cambio, crecimiento o decrecimiento, tendencia asintótica, entre otras) como Radiación UV. La vinculación entre las razones trigonométricas que se usan en la secuencia de Sembrando Vida con las funciones trigonométricas de Radiación UV, ha sido reportada en los trabajos de La Didáctica de la Trigonometría o Trigonometría Educativa, donde se menciona que, para comprender el aprendizaje de las funciones, es importante comprender los cimientos de las razones trigonométricas (Montiel, s.f.).

Como vemos, este bloque retoma algunos de los aprendizajes sobre el espacio físico y nuestra ubicación relativa en el espacio, objetivos que fueron tratados en la Educación Básica de la mano con las magnitudes y su medición, así como de la secuencia Incendios Forestales. Para ese nivel el énfasis estuvo puesto en longitudes y áreas con fuerte contenido geométrico, algebraico y numérico. En el bachillerato de la ENP esto se extiende a las propiedades más generales como la congruencia o la semejanza para ser articuladas con nociones transversales como proporcionalidad, que se ve en Matemáticas IV y Matemáticas VI. Se incorpora también la "angularidad" y el estudio de propiedades y principios generales como los criterios de congruencia y semejanza de triángulo.

Figura 20

Pensamiento estocástico

Otro bloque de este proyecto de aprendizaje es el que pertenece al pensamiento estocástico (Figura 20), el cual promueve el desarrollo de las capacidades para procesar, interpretar, evaluar y comunicar críticamente la información proveniente de diversos contextos en gráficos, tablas o afirmaciones. La actividad elegida para este bloque busca que los estudiantes hagan uso de la estadística como herramienta metodológica, de tal modo que los estudiantes se conviertan en exploradores de datos activos que pueden planificar, adquirir, administrar, analizar e inferir de los datos respecto a los índices de masa corporal (IMC) en su plantel. Ser capaz de proporcionar buenos argumentos basados en evidencia y de manera crítica evaluar reclamos basados en datos; son habilidades importantes para el ciudadano actual, por lo tanto, aprendizajes que todos los estudiantes deben aprender como parte de su educación formal.

Para el diseño de este proyecto ocupamos algunos diseños y resultados reportados en los trabajos de Osana, Leath, & Thompson, 2004; Hudson, 2010 como se citó en Teneal, 2017 al mostrar que los estudiantes mejoraban en su capacidad para basar sus argumentos en datos, en lugar de los personales.

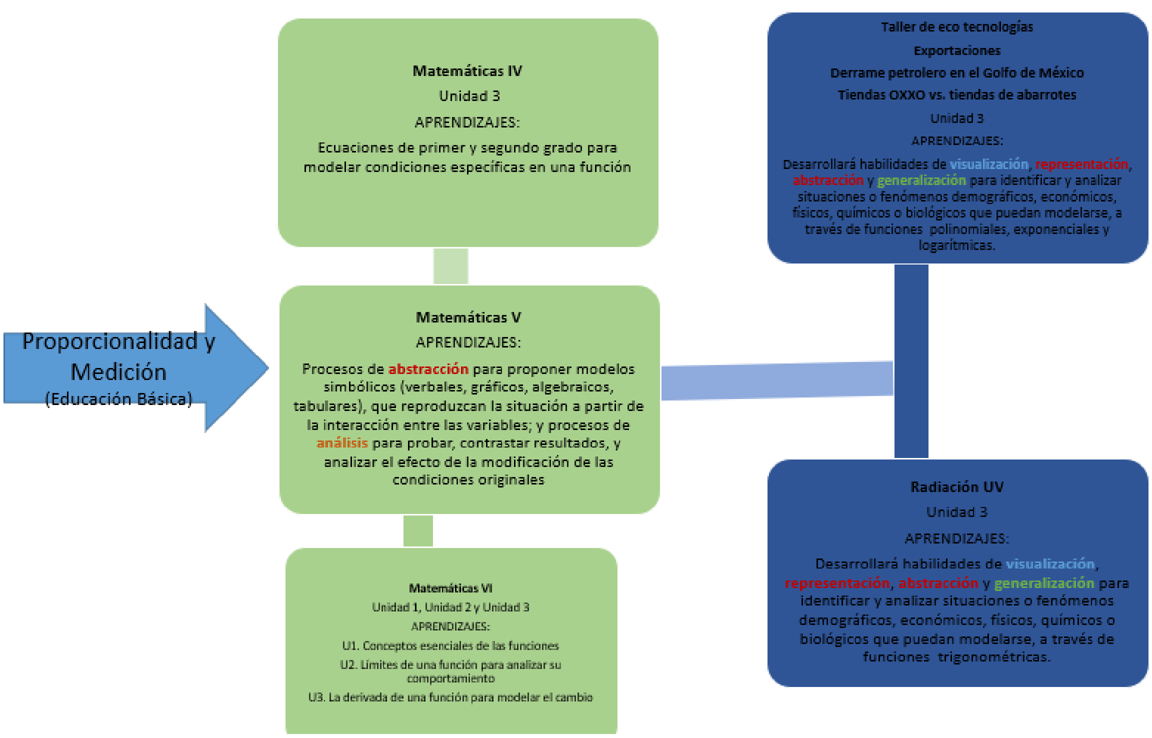
Como consecuencia, retomamos diferentes partes de sus diseños instruccionales y el resultado del proyecto fue el siguiente: en la primera parte los estudiantes debían debatir y mostrar sus argumentos con base a la evidencia provista en periódicos y páginas web donde se mostraban datos y gráficas sobre el IMC en México. Posteriormente debían formular una pregunta de investigación que requería una respuesta argumentada por datos descriptivos, para obtenerla debían elaborar un análisis de datos que diera resultados a su pregunta de investigación.

Durante todo este proyecto de investigación, los estudiantes aprendían los conceptos mediante el uso de cada frecuencia en su proyecto de investigación y además con preguntas orientadoras por parte del profesor.

Esta situación se interconectaba de manera transversal con la estadística descriptiva que se ve en Matemáticas IV; ambas asignaturas tienen como propósito aplicar los métodos recomendados para presentar la información —en general, de forma gráfica— fácilmente comprensible y sin interpretaciones erróneas. Y solo para quienes deseen cursar la materia optativa de Estadística y Probabilidad tienen oportunidad de ver la estadística inferencial, la cual depende de forma muy importante de modelos probabilísticos.

Figura 21

La función como eje articulador



Por último, uno de los ejes que articulan a la asignatura de Matemáticas V con Matemáticas IV y Matemáticas VI son las funciones (Figura 21). El lenguaje gráfico es un eje transversal en el curso y a lo largo de los tres años, debido a que el tratamiento visual (que ofrecen las funciones) permiten el tránsito entre los distintos contextos de la función: algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal (Farfán, s.f.; Farfán & Romero, 2016; Klein en Weigand et al., 2019).

Como se señala en Díaz, 2013 la representación gráfica es un buen punto de partida para la instrucción. Pues al enfocarse en los aspectos cualitativos de los gráficos, los estudiantes pueden describir situaciones reales bastante complejas sin el uso de símbolos que después puedan construirse a través del análisis de gráficos.

Por dichas razones, la función está presente desde el primer año con la proporcionalidad, es decir el uso de correspondencias, y posteriormente como una fórmula, lo que significa la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. Para que al finalizar se pueda acceder al pensamiento y lenguaje variacional de la última asignatura, en la cual se precisa del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del estudiante.

En el caso de la asignatura de Matemáticas V; el gráfico funciona como una representación de cómo las cantidades cambian juntas. Por ello, las secuencias didácticas correspondientes a este bloque, consideran para su diseño los siguientes elementos: a) La representación de las cantidades a lo largo de los ejes b) la representación simultánea de estas magnitudes con una correspondencia y c) finalmente anticipar el seguimiento del punto de correspondencia para realizar un seguimiento de cómo los atributos de las dos cantidades cambian simultáneamente (Frank, 2017).

Poner en juego las estructuras mencionadas, nos permite cumplir con los objetivos relacionados al pensamiento variacional. Los cuales se orientan a desarrollar estructuras de pensamiento que permitan identificar, analizar e interpretar, de manera natural, situaciones relacionadas con el cambio y, a su vez, modelarlos y transformarlos en otros más simples.

Algunas de las secuencias didácticas trabajadas se basaron en prácticas sociales donde se pusiera en juego el cambio, la predicción y la anticipación. Pues de acuerdo con la historia de las matemáticas y sus repercusiones en la enseñanza (Díaz, 2013) la participación del estudiante en este tipo de prácticas promueve un interés por explicar los cambios, así como, en encontrar regularidades entre los cambios. Lo que le permite decir no sólo qué cambia, sino también cómo cambia.

Algunos ejemplos son la secuencia de Exportaciones y Tiendas OXXO vs. Tiendas de abarrotes. Para la primera secuencia, que es un proyecto, los estudiantes analizaran cómo ha variado el número de toneladas de jitomate y aguacate que se exportan a Estados Unidos en los últimos 20 años, además realizarán una predicción de lo que ocurrirá en los siguientes años.

Como se ha visto, la organización del programa de Matemáticas V cuenta con una continuidad histórica, lo que funciona como un dispositivo heurístico para la organización de las secuencias en el plan anual y la selección de las actividades donde se practican o practicaron históricamente las matemáticas.

Dicho marco histórico, del programa, nos permitió encontrar situaciones problema de las cuales se pudiera generalizar situaciones de abordaje, y encontrar situaciones que pudieran evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización. En resumen, cada situación en la que se aplicaron los temas matemáticos, fueron investigados para estimar su conveniencia como puntos de impacto del proceso de matematización progresiva.

Bajo esta adaptación y trasformación didáctica de las actividades humanas se diseñó un total de 13 secuencias didácticas en Matemáticas IV y Matemáticas V. Cada secuencia estaba basada en actividades auténticas, para que permitiera a los estudiantes acercarse al mundo cultural históricamente construido y, por tanto, abriera una ventana de posibilidad para que conocieran y participaran con su comunidad, y más aún, desarrollaran la capacidad de solucionar problemas, de construir modelos matemáticos, y de razonar lógicamente usando como medio los sistemas simbólicos de las matemáticas.

Siguiendo el esquema de actividad, adaptamos y transformamos las dimensiones de las actividades societales a las situaciones didácticas.

Como ya se describió desde el capítulo pasado, toda actividad societal se realiza con otras personas, se comparte con ellos y se distribuyen roles para actuar. La interacción, comunicación y colaboración con los miembros expertos de la comunidad permiten a los demás compartir el conocimiento a los nuevos miembros y la participación dentro de la actividad. Es desde esta dimensión donde la interacción entre compañeros y en especial la interacción con la docente cobra relevancia para permitir que surjan interacciones entre compañeros dentro del aula, pues el docente conoce previamente la actividad, y ante eso pueden anticipar los roles y la organización del aula. Por ello, se agrega dentro del diseño de las secuencias didáctica una organización social previa que permita el intercambio de significados.

Al ser la docente la responsable de significar por completo la actividad de manera intencionada y gradual; sus acciones se estructuran a lo largo de la secuencia didáctica, de tal forma que le permita mediar la actividad con el conocimiento matemático a aprender.

Esta contingencia y congruencia de acciones por parte del docente se plasman en la secuencia a través de diferentes acciones como: modelar, retroalimentar, realizar cuestionamientos para evaluar, profundizar, recapitular e inducir respuestas; así como estructurar cognitivamente.

Es importante mencionar que la actividad docente no termina ahí, puesto que también se vale de herramientas y recursos semióticos que se enlistan como materiales en las secuencias didácticas. Al contar con diferentes recursos permite introducir y cumplir con acciones específicas de la actividad. Cada diagrama o representación permite entender el objeto matemático, funcionando las representaciones icónicas como los vehículos para los signos simbólicos.

Enmarcar las posibilidades del pensamiento de los estudiantes a partir de estas dimensiones nos permitió planear los aprendizajes de los estudiantes a lo largo del ciclo escolar a través de las secuencias didácticas. Es importante mencionar que estas ideas en el diseño no fueron prescriptivas, ya que durante la implementación se confrontaron las teorías de enseñanza-aprendizaje con la práctica y se fueron ajustando para una mejora en los procesos de enseñanza-aprendizaje. El siguiente capítulo tratará sobre la implementación de nuestro co-diseño y la planeación específica que se realizaba con los docentes durante el ciclo escolar. (Drijvers 2003 en Juuti et al., 2016).

Capítulo 6. Co- implementación y co-análisis

Posterior a la fase de diseño, llevamos a cabo la implementación de nuestro diseño de aprendizaje. Por ello, en el siguiente capítulo describiré los diferentes niveles que condujeron la implementación, así como una descripción de lo que se produjo en los entornos de aprendizaje.

6.1. Proceso de co-implementación y co-análisis

Para poder implementar las secuencias didácticas; las acciones del docente como de los psicólogos, estaban orientados a organizar, intervenir y analizar las condiciones de las actividades en 2 planos (generales y específico). En el plano general, se buscaba utilizar los resultados obtenidos del instrumento de evaluación inicial y final, para aplicar ajustes en el diseño del plan anual o de las mismas situaciones didácticas que habían desarrollado los aprendizajes. Mientras que, para el plano específico, de manera cotidiana, las docentes y psicólogos analizábamos de manera conjunta los procesos de aprendizaje y las actividades mediante la observación y retroalimentación, para organizar e intervenir las acciones en los entornos de aprendizaje.

No obstante, debido a los factores contextuales e institucionales, únicamente reportaré los datos que corresponden al plano específico. Los datos recolectados durante este periodo se obtuvieron a partir de grabaciones en el aula y bitácoras.

En el caso de las bitácoras, además de fungir como herramienta para recolectar datos, tuvieron la función de analizar la práctica en contraste con la teoría; de tal forma que nos permitiera cerrar las brechas entre la implementación y la teoría.

A continuación, mostraré algunos ejemplos que ilustren esta etapa metodológica. Para ello, haré uso de las diferentes dimensiones que se han utilizado en los diversos trabajos desarrollado en el proyecto Aleph (Cárdenas, 2020 y Castro, 2019).

6.2. Plano específico

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, este primer nivel se llevó a cabo junto con los docenes al finalizar las observaciones de sus aulas. El propósito de este nivel era identificar las oportunidades de aprendizaje, así como la anticipación de condiciones en los entornos de aprendizaje.

En estas reuniones se reflexionaban sobre los procesos de construcción de aprendizaje-a partir de lo observado en sus clases o productos de los estudiantes-, y, además, se realizaban los ajustes necesarios en las acciones que se realizaban dentro del aula. Por ello, en estos espacios, además de reflexionar sobre la misma práctica de los docentes, se buscaba generar conocimiento sobre los mismos procesos de enseñanza-aprendizaje que se echaban a andar.

Es importante retomar de los capítulos anteriores, los mecanismos y planteamientos relacionados al proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas, pues son concepciones que construyen nuestra unidad de análisis <Ambientes Complejos de Aprendizaje>.

Las principales condiciones que se atendieron con los docentes, en este nivel, fueron las categorías del trabajo de Castro (2019).

6.2.1 Organización de condiciones en el aula

Es decir, todas las condiciones distales que organizaba la docente para poder llevar a cabo las acciones colectivas en el aula, y las cuales eran posibles realizar ya que la docente conocía previamente la actividad.

La primera de ellas relacionada a la organización del espacio y de los equipos, la explicare con un ejemplo donde la docente organiza a la comunidad de estudiantes en equipos heterogéneos con la finalidad de que todos los estudiantes participaran en la actividad y la discusión se pusiera en un plano colectivo.

En el siguiente ejemplo, podemos ver como la maestra antes de dar inicio a la actividad hace una distribución heterogénea en los equipos, es decir, conforma los equipos con integrantes de diferentes niveles de aprendizaje, esto surge a partir del caso de una estudiante que no participaba en las actividades del aula. Después de esa primera observación, se recomendó a la docente organizar a su grupo en equipos heterogéneos para introducir a toda la comunidad de estudiantes en la actividad. La mediación entre pares, además de permitirnos introducir a la mayoría de los estudiantes a la actividad, nos permitió el desarrollo de capacidades de comunicación matemática. De acuerdo con Tinungki (2015), la capacidad de comunicación matemática tiene una correlación significativa con el trabajo colectivo, pues se requiere discutir entre todos para resolver la problemática, lo que obligaba a superar la brecha entre los estudiantes y potenciar el conocimiento que tienen en el momento actual.

Como era el caso de la estudiante, donde se incluyó en un grupo heterogéneo y junto con sus compañeros, logaron resolver la submeta de la secuencia Sembrando Vida. Si bien se notaba una brecha importante entre la estudiante y los demás compañeros, a la estudiante se le asignó un rol donde iba colocando los pasos que consideraron para resolver la actividad. Logrando una participación por parte de la estudiante en la actividad. (véase Figura 22. Apoyo entre pares).

Mas adelante profundizare en este espacio colectivo y la puesta en común por parte de los estudiantes, donde se construyen y socializan los significados, procedimientos e hipótesis de la comunidad a través de las relaciones estudiante-estudiante y estudiante-docente.

Figura 22

Apoyo entre pares

Además de reorganizar los equipos, se acomodaron los espacios del aula de la siguiente manera para que la docente pudiera pasar entre los equipos y ajustara los elementos del entorno a lo que requerían para matematizar el problema (véase Figura 23. Organización grupal con interlocutora experta).

Figura 23

Organización grupal con interlocutora experta

6.2.2. Acciones para la construcción colectiva de conocimiento

Este segundo nivel, corresponde al espacio de construcción conjunta que se conforma a través de la mediación de los otros y el uso o construcción de materializaciones de la cultura y conocimiento. Como señala Radford & Roth como se citó en Salinas-Hernández y Salinas (2018) este espacio colectivo no solo se refiere a una noción espacial donde la interacción ocurre, representa también el lugar en el que la comunidad y el docente piensan y actúan todos juntos en la búsqueda de un objetivo común.

A continuación, describiremos varios ejemplos donde el uso de las objetivaciones del lenguaje matemático influyó para alcanzar los aprendizajes y conocimientos matemáticos colectivos. Posteriormente, hablaré sobre la mediación de los pares como el espacio donde se van negociando los diferentes significados.

- Objetivaciones y herramientas matemáticas

En el taller “Sembrando Vida” los estudiantes realizaron una propuesta de sistema productivo agroforestal, para ello, usaron los números reales y sus operaciones, incluyendo a los radicales para modelar situaciones de área, y la distribución de árboles y hortalizas.

Para resolver una de la submetas de la situación didáctica, las objetivaciones matemáticas jugaron un papel importante de mediación semiótica para los estudiantes, el primer ejemplo es sobre una maqueta (véase Figura 26), la cual permitió a los estudiantes distribuir en el área de su terreno hortalizas y árboles manzanos para su propuesta agroforestal. Si bien, la elaboración de la maqueta estaba planeada para que la hicieran durante la situación de aprendizaje, la docente hizo uso de una de las maquetas ya elaboradas en otro de sus grupos para apoyar a una pareja que se le dificultaba.

Extracto 5. La importancia de los medios semióticos.

1. **Profesora1:** “Hay dos chicos que me dijeron que gracias a que empezaron a hacer la maqueta comprendieron la distribución, fíjate, o sea que habría que re pensar un poquito, pero como dices, ponerles la representación icónica en medio de la secuencia para que ellos empiecen a entender un poco más a los chicos que les cueste trabajo [...] “también me comentaron al término de la sesión que gracias a que la empezamos a hacer nos dimos cuenta de que estábamos haciendo mal los cálculos”

Nota: Extracto de audio tomado de una sesión de formación docente, realizada en el Plantel No. 5 “José Vasconcelos” (agosto del 2018).

Figura 24

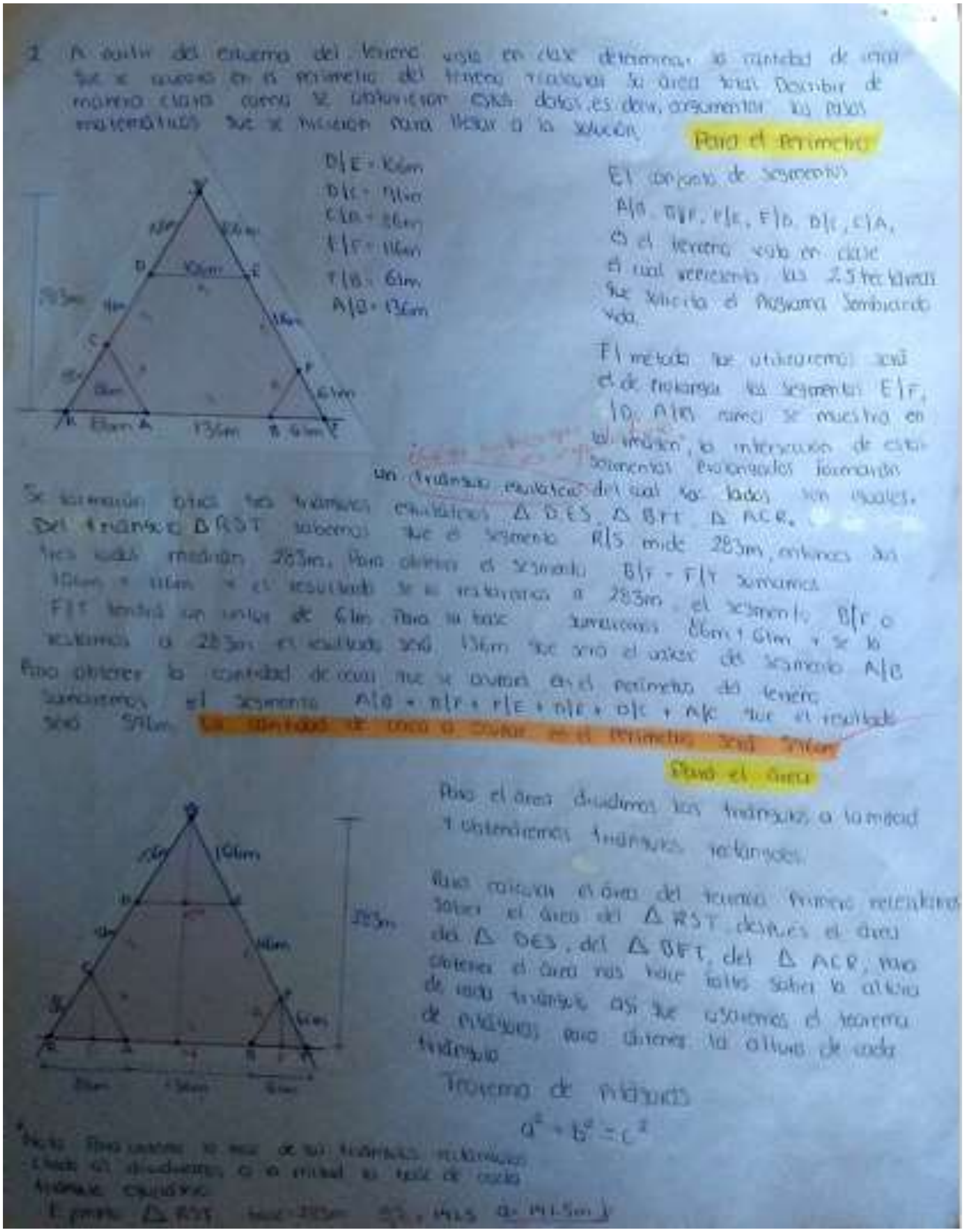
Maqueta de Sembrando Vida

Esto ocurre, debido a que la representación que se tenía sobre el lenguaje matemático, en este caso el Teorema de Pitágoras, estaba vinculado hacia el mismo significado pese a tener otra apariencia diferente a la inicial. Por ello, resulta esencial, que la triada de Peirce (ícono, índice y símbolo) aparezcan de manera interdependiente a lo largo de la enseñanza de las matemáticas para lograr de una mejor manera procesos formales del lenguaje matemático, así como para lograr una relación con el mundo real (Sáenz-Ludlow y Kadunz, 2016).

Otro ejemplo, fue el papel de GeoGebra como herramienta de representación simbólica. Pues para el caso de las secuencias de Sembrando Vida para Matemáticas V e Incendios Forestales, el software dinámico permitió para la primera secuencia elaborar su construcción geométrica para obtener la cantidad de cerca para su terreno y el área total con la que trabajarían para la distribución de árboles y hortalizas; lo que les permitió la resolución y validación de ambos problemas. Cabe destacar que el problema se basó en un reactivo de las Olimpiadas de Matemáticas donde debían hacer una transformación geométrica de un terreno hexagonal para obtener el perímetro del terreno por medio de la ley de senos y coseno, así como el Teorema de Pitágoras, para obtener el área del terreno para sembrar árboles y hortalizas. Por tanto, a través de las diferentes posibilidades colocadas dentro de la secuencia y el aula, logramos que los estudiantes lograran analizar y resolver un problema que requería una mayor demanda para visualizar y argumentar conjeturas (véase Figura 25).

Figura 25

GeoGebra en Sembrando Vida



Nota. Tomado de Castro, U. (2019).

Esto mismos resultados han sido demostrados por otros autores como Sáenz-Ludlow y Kadunz (2016) en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría, donde la triada de Peirce´s nos ayuda a comprender la importancia de vincular las diferentes representaciones para promover los procesos de visualización, argumentación y solución de problemas, como vemos en la secuencia de Sembrando Vida.

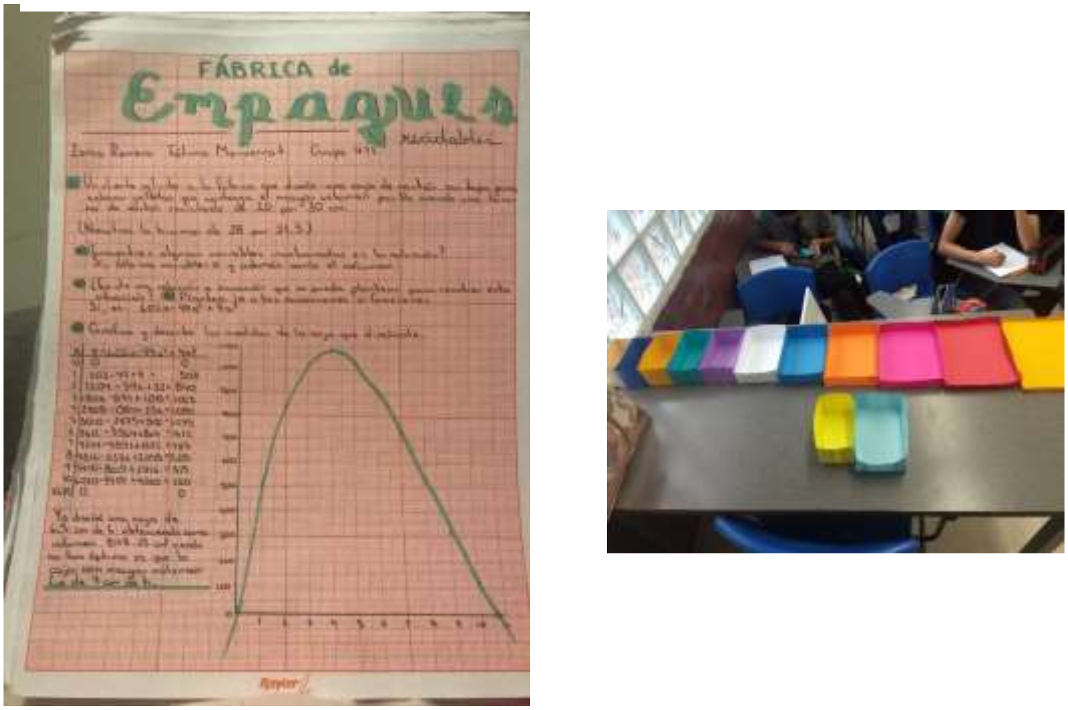
El segundo ejemplo está relacionado a la segunda secuencia, Incendios Forestales, la cual, a través del software dinámico permitió trasladar la problemática de la recta a diferentes representaciones, como segmento de una recta en geometría y la recta en un sistema de referencia.

Como se vio en el segundo ejemplo, los medios semióticos además de permitirnos el tránsito de problemas basados en situaciones reales a abstractos nos permitieron también el desarrollo de procesos de visualización y argumentación, como se vio en aquellos grupos donde se implementó el uso del software GeoGebra. Esta conclusión se tuvo al comparar los resultados del grupo donde no se consideró el uso de dicha herramienta, pues a los estudiantes se les dificultó llegar a procesos de visualización y argumentación.

De acuerdo con Flores (2018) contar con una representación jerárquica, permite a los estudiantes validar sus construcciones, elaborar conjeturas e inferencias relacionadas con las propiedades de la matemática. La construcción del conocimiento matemático con el uso de software facilita la visualización de propiedades de diferentes objetos matemáticos que no se pueden descubrir con otros recursos.

Figura 26

Representaciones concretas en Empaques Nestlé



Nota. Tomado de Castro, U. (2019).

Un tercer ejemplo, fueron unas cajas de arroz para encontrar el empaque óptimo de una industria de embalajes. La construcción concreta de las cajas junto con la representación gráfica, permitieron a los estudiantes representar las diversas áreas y volúmenes de las cajas, para hallar la caja más hermética. Esto lo validaban mientras iban llenando con tazas de arroz sus cajas para corroborar la cantidad de producto que cabía en ellas, esto mismo expresaban los estudiantes con la interlocutora.

Como vimos en los diferentes ejemplos, dichas objetivaciones y representaciones del lenguaje funcionaron como retroalimentación del estudiante, ya que este tenía 'control' de las construcciones que hacía, y a su vez podía llevar a cabo estrategias para resolver y ajustar su solución al problema.
Estos fueron algunos de los ejemplos que fueron importantes durante este periodo, y que condujeron a diferentes consecuencias para la fase de rediseño. Pues como vimos en estos casos, contar con dicha distribución de signos en la actividad social permitió al estudiante

comprender y producir mensajes matemáticos a partir de la interacción con estos en la realidad.

Si bien, ya ha sido reportado este hallazgo en otros autores (Mills, 2019 y Salinas-Hernández y Miranda, 2018), también han resaltado que la simple presentación de estas representaciones no garantiza aprendizaje, estos deben estar mediados y orientados por parte del docente o un par más avanzado. Esta otra dimensión será abordada a continuación, para comprender como interactuaban en conjunto con el colectivo para la construcción del conocimiento matemático.

- Apoyo entre pares

Como ya se mencionó en el apartado anterior, el uso y adquisición de significado de estos sistemas depende en buena manera de las relaciones que se produzcan con estos signos (Grupo de Investigación en Semiótica UNL, 2020), bajo esta premisa también se capturan los casos donde la mediación entre pares junto con las dimensiones anteriormente descritas, permite a los estudiantes resolver problemas, justificarlos, así como comunicar sus ideas matemáticas.

El primer ejemplo es de la secuencia Construyendo para ISCDF que tenía el objetivo de diseñar un edificio habitacional y la optimización de una cisterna a través de modelos algebraicos que involucraran operaciones con expresiones algebraicas y aritméticas; también analizaban sus representaciones para darle solución a la problemática y a los criterios que interpone el Instituto para la Seguridad de las Construcciones en el Distrito Federal (ISCDF). Por medio de esta actividad, los estudiantes hacían uso de Sketch up/ The Geometer´s Sketchpad para modelar su edificio y cisterna en 3D.

La organización social que se tenía a lo largo de la secuencia, eran 2 momentos, uno en plenaria y otro en equipos. El primero ocurría al inicio, cierre y a la hora de compartir resultados; y el segunda era a la hora resolver el problema en equipos.

El primer ejemplo corresponde a un equipo que pasó a explicar la distribución de su departamento, de acuerdo con las especificaciones, así como las ventanas en el edificio habitacional que estaban construyendo.

Extracto 6. La organización cooperativa y colaborativa para confrontar ideas

1. **Alumno 1:** Ahora mide 2.2 metros cada piso…y cada edificio va medir 90…bueno cada departamento mide 90 m2, este es el cubo de ventilación, el cubo de escalera y el pasillo…
2. **Profesora 2:** Muy bien, el edificio puede tener pasillo
3. **Alumno 1:** Las ventanas tienen 1.1 x 2.2 m
4. **Profesora 2:** 1.1…ya hicieron la distribución de ventanas, muy bien. Ok, van a ser ventanales alargados. ¿Cómo hicieron ese cálculo?
5. **Alumno 1:** En base a las especificaciones que usted nos dio… (se pausa y otro de sus compañeros de su equipo alza la mano).
6. **Alumno 2:** En base a lo que usted nos dijo que debía medir la fachada 120m, no quedaba ese edificio, entonces se hizo este y quedaba en total 20m por 14m por tanto 280 m.

Nota: Extracto de vídeo tomado de la situación “Construyendo para ISCDF” realizada en Matemáticas IV (octubre del 2019).

Como vemos en este ejemplo, el alumno 2 corrige a su compañero y completa la explicación de la distribución de ventanas que realizó su compañero. En un primer momento, el alumno 1 valida frente a los demás sus resultados y frente a una nueva necesidad, otro estudiante interviene en el discurso a la hora que la docente cuestiona uno de los resultados. Ambos alumnos van negociando significados junto con la docente. Alumno 1, le permite a su par introducirse en su discurso de su compañero y continuar con la comunicación de sus resultados a la docente y el grupo.

El segundo ejemplo corresponde a un ejemplo de la secuencia de Sembrando Vida (Matemáticas V) donde un equipo comunicaba sus resultados en plenaria, y la docente se apoyó del colectivo para trasladar su escritura de un lenguaje natural a matemático en el pizarrón.

Extracto 7. La organización cooperativa y colaborativa para emerger ideas

1. **Profesora 2:** ¿Cómo podemos escribir área del hexágono sin escribir “área del hexágono”
2. **Alumno:** (escribe en el pizarrón) A 
3. **Profesora 2:** Sí…dibujito. Si, exacto quieren el área del hexágono. A es igual… ¿de qué dijeron?
4. **Alumna del equipo:** Bueno…es que lo que estábamos tratando de explicar es que primero sacamos el área total del triángulo.
5. **Profesora 2:** Okey, entonces es igual al área del triángulo... “A  =“ ¿qué triángulo?
6. **Alumna:** A B C
7. **Profesora 2:** Una vez que tienen el área del triángulo grandote A B C ¿qué van a hacer?

8. **Alumna del equipo:** Pasamos el área de este triángulo y lo que hicimos fue sumar el área de los 3 triángulos y dejar el área del hexágono
9. **Profesora 2:** Okey de acuerdo con eso ¿qué tenían qué hacer después? O sea el área del triangulo es igual del área del triángulo ABC, menos…
10. **Alumno:** el área
11. **Profesora 2:** ¿el área de qué? A ver muchachos los demás, ayuden a sus compañeras como tienen que escribir.
12. **Equipo:** (Comienza a escribir la fórmula)
13. **Profesora 2:** A ver así está bien ¿en dónde le falta paréntesis? Aquí dice su compañera que hace falta un paréntesis. ¿estamos de acuerdo?
14. **Todos:** Sí
15. **Profesora 2:** Pues sí, era lo que decía Daniela.

Nota: Extracto de vídeo tomado de la situación “Sembrando vida” realizada en Matemáticas IV (septiembre del 2019).

A diferencia del primero ejemplo, donde un par va negociando los significados matemáticos; en este ejemplo, el proceso de significación lo dirige la maestra, y también hace uso de las participaciones de los demás para conducir a los estudiantes a los procesos de generalización y de argumentación (al presentar una prueba o demostración), transitando entre la representación matemática y el lenguaje natural.

Es de suma importancia rescatar este otro momento de interacción, pues se llevaba a cabo una vez que solucionaba el problema dentro de los equipos, por lo que en esta segunda negociación no sólo permitió a los estudiantes compartir estrategias de solución a través de la comunicación oral, sino descontextualizar el conocimiento de la actividad societal y cosificar el lenguaje matemático. Esto fue posible gracias a la ampliación de significados que va realizando la interlocutora de los signos con los que operara el estudiante, es decir, solicitarle al estudiante que en lugar de escribir “área del hexágono” el estudiante los indique con signos matemáticos:

“A $\blacktriangle$ =”. Así como la función del paréntesis para indicar una operación matemática, la multiplicación.

A continuación, veremos otra de las dimensiones que conforman los entornos de aprendizaje, estas intervenciones realizadas por parte del docente se llevaban a cabo de manera más proximal a los estudiantes, dichos apoyos promovían, junto con las otras dimensiones anteriormente descritas, el uso del sistema matemático en las secuencias didácticas.

6.2.3. Intervenciones para uso del sistema en actividades

El siguiente ejemplo corresponde a una sesión de la secuencia: Sembrando vida para Matemáticas V donde debían obtener el área de un terreno en forma de polígono no regular con conceptos de geometría euclidiana y de trigonometría (leyes de senos y cosenos). En esta sesión se buscaba que los estudiantes plantearan, exploraran y validaran conjeturas.

En este caso, las diversas intervenciones de la docente permitieron que los estudiantes de un equipo resolvieran el problema y plantearan la ley de senos y cosenos, así como el Teorema de Pitágoras como solución a la meta principal. Cabe resaltar que los estudiantes que lo conformaban no podían resolverlo solos, por lo que requirieron varios apoyos de la docente, desde la simplificación del problema hasta la exploración de la figura para elegir la solución sobre cómo obtener el área.

Extracto 8. Construcción colectiva con ayudas de interlocutor experto

1. **Profesora 2:** (Se acerca a un equipo) ¿Ya? ¿Qué ya tienen?
2. **Todos:** Triángulos…
3. **Profesora 2:** Triángulos…en este caso ¿qué triángulos son?
4. **Alumna 1:** queríamos sacar el área del triángulo que hicimos al principio y después quitar el área de cada triangulo que pusimos
5. **Profesora 2:** ¿Sí? ¿Creen que con eso les de?
6. **Alumna 1:** Mmmm sí, yo creo que sí
7. **Alumna 2:** Sí
8. **Profesora 2:** ¿Qué necesitan para calcular el área? ¿Cuál es el área de un triángulo?
9. **Alumna 2:** Aaah la altura y la base
10. **Profesora 2:** ¿Qué otra cosa conoce?
11. **Alumno 1:** ¿del triángulo?
12. **Profesora 2:** Ajá, del triángulo ¿qué cosa conocen?
13. **Alumna 1**: que es equilátero
14. **Profesora 2:** que es equilátero ¿qué más? Para sacar la altura ¿qué les haría falta? (6) ¿o ya tienen todo? ¿ya saben cuánto valen los segmentos? ¿Qué son entonces?
15. **Alumna 1:** Pues solo sabemos sus lados
16. **Profesora:** sus lados, y ese lado podría representar ¿qué cosa de su área?

17. **Alumna 1:** la altura
18. **Profesora 2:** ¿la altura? ¿Cuál es la fórmula para sacar el área de in triangulo?
19. **Alumna 1:** base por altura sobre 2
20. **Profesora 2:** base por altura sobre 2, exactamente. Entonces ¿Qué tienen del triángulo?
21. **Alumna 1:** la base
22. **Profesora 2:** ¿qué les hace falta?
23. **Alumna 1:** la altura
24. **Profesora 2:** ¿Podrían determinarla? (5) ¿Como la podrían determinar? (10) ¿qué significa tener la altura en un triángulo? (le solicita a la alumna 1 que trace su altura) ¿Qué es la altura? ¿esta línea es cualquiera? ¿qué cosa tiene que cumplir la altura?
25. **Alumno 1:** Tiene que partir en 2 al triangulo
26. **Profesora:** ¿Tiene que partir en 2 al triángulo? ¿siempre?
27. **Alumna 1:** Pero no precisamente en esta figura
28. **Alumno 1:** pero estamos hablando de un equilátero
29. **Profesora:** Pero como estamos hablando de un triángulo equilátero sólo en ese caso. ¿Okey, cuanto mide la base?
30. **Alumna 1:** 280
31. **Profesora:** ¿Y entonces como le hacen para calcular la altura? ¿Qué podrían hacer para calcular la altura? (señala la figura de ALUMNA 1) (10) Este vale 283 (señala la figura de ALUMNA 1) ¿Cuánto vale esto?
32. **Alumna 1:** 283
33. **Profesora:** ¿Cuánto vale esto? (señala la figura de ALUMNA 1)
34. **Alumna 1:** 283

35. **Profesora:** A ver escríbanlo…okey ¿qué podrían utilizar ahí para determinar la altura?A ver analicen…Pablo (7) Tienes un triángulo equilátero, nos hace falta el valor de la altura ¿cómo le pueden hacer para determinar el valor de la altura?
36. **Alumno 2:** lo que tiene que hacer es dividir este triangulo y este de aquí, a la mitad.
37. **Profesora:** Aaah sí pero primero se van por el más grande y ya después se van sobre los chiquitos, porque el procedimiento sería prácticamente el mismo. Pero ¿cómo le hacen para calcular la altura?
38. **Alumno 2:** Sacando los 90 grados, podríamos sacar lo de adentro (señala la altura en el triángulo)

39. **Profesora:** podría ser una forma… ¿qué ángulo hay aquí? ¿Qué ángulo forma la altura con la base?
40. **Alumno 2:** 90
41. **Profesora: ¿**cuánto?
42. **Alumno 2:** 90 grados
43. **Profesora:** Ajá, uno de 90 acá y el otro de 90 acá ¿Y entonces qué tipo de triángulo tienen?
44. **Alumno 2**: triángulos-rectángulos
45. **Profesora:** 2 rectángulo y entonces ¿con eso ya podrían calcular el valor de la altura?
46. **Alumna 1 y Alumno 2:** Sí
47. **Profesora:** ¿Qué utilizan? (4) razones trigonométricas ¿o?
48. **Alumno 2**: Teorema de Pitágoras

Nota: Extracto de vídeo tomado de la situación "Sembrando vida" realizada en Matemáticas IV (septiembre del 2019).

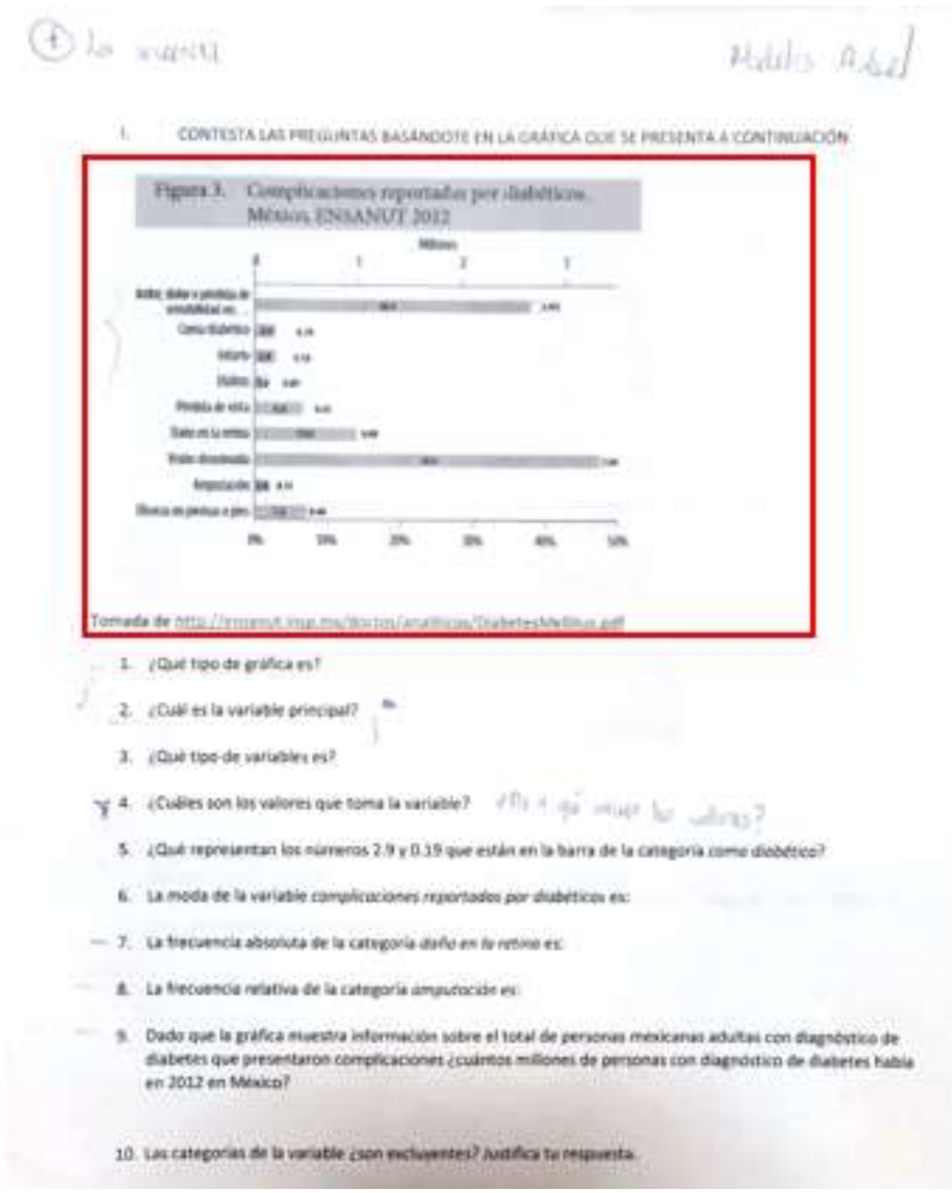
Como se ilustra en el diálogo de la interlocutora con los estudiantes, el andamiaje que realiza la docente es constante y se va adecuando a las necesidades de los estudiantes. La primer ayuda que llevó a cabo la docente fue un cuestionamiento sobre los datos que requieren para obtener el área, con qué datos contaban y cuales otros necesitaban. Posteriormente al ver que los estudiantes no podían reconocer los elementos que requerían, modeló junto con ellos los elementos de su figura y les pidió que trazaran los elementos con los que cuentan, que es la base del triángulo equilátero. Cuando ve que los estudiantes no pueden calcular la altura, reestructura el problema con ayuda de uno de los integrantes del equipo, el cual se encontraba en niveles más altos que los demás integrantes del equipo. En este caso, el estudiante termina por explorar la figura y reconoce que es un triángulo-rectángulo, por lo que elige el Teorema de Pitágoras para poder obtener la altura y posteriormente obtener el área.

A diferencia de las otras ayudas que hemos mencionado a lo largo del capítulo. En este ejemplo, la docente hace uso de varias de las dimensiones anteriormente mencionadas para dirigir la solución del problema: la organización previa de condiciones en el equipo, así como las acciones colectivas para construir significados: el uso de representaciones y la construcción de equipos heterogéneos. Cada una de estas ayudas, aparecen en función de lo que requieren los estudiantes; lo que resulta en una mediación flexible y ajustada.

Una segunda intervención que favoreció que los estudiantes visualizaran representaciones geométricas para conjeturar, analizar y comunicar sus resultados fue la inclusión de reportes matemáticos o guías escritas que orientaran las acciones del estudiante tanto en procesos conceptuales (véase Figura 27 y 28) como procedimentales (véase Figura 29).

Figura 27

Registro para la secuencia Chécate, mídete y muévete



1. CONTESTA LAS PREGUNTAS BASÁNDOTE EN LA GRÁFICA QUE SE PRESENTA A CONTINUACIÓN

Figura 3. Complicaciones reportadas por diabéticos. México, ENSANUT 2012

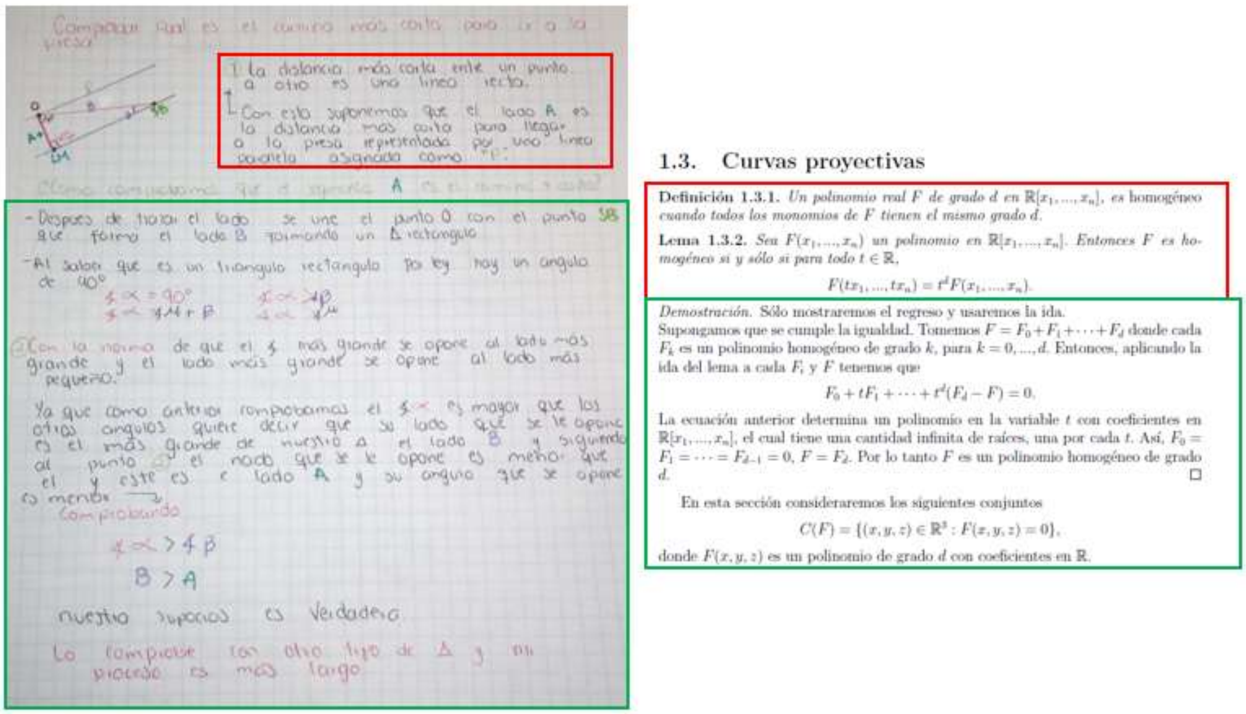
Tomada de http://ensanut.insp.mx/doctos/analiticos/DiabetesMellitus.pdf

1. ¿Qué tipo de gráfica es?
2. ¿Cuál es la variable principal?
3. ¿Qué tipo de variables es?
4. ¿Cuáles son los valores que toma la variable?
5. ¿Qué representan los números 2.9 y 0.19 que están en la barra de la categoría *como diabético*?
6. La moda de la variable *complicaciones reportados por diabéticos* es:
7. La frecuencia absoluta de la categoría *daño en la retina* es:
8. La frecuencia relativa de la categoría *amputación* es:
9. Dado que la gráfica muestra información sobre el total de personas mexicanas adultas con diagnóstico de diabetes que presentaron complicaciones ¿cuántos millones de personas con diagnóstico de diabetes había en 2012 en México?
10. Las categorías de la variable ¿son excluyentes? Justifica tu respuesta.

Nota. Tomado de Sánchez, L. (2019).

Figura 28

Registro para la secuencia de Incendios Forestales



Nota. Tomado de Lugo, M. (2019).

Cuando referimos a andamiaje, no únicamente abarcamos la simple incorporación de reportes matemáticos, pues en el registro para geometría se incluían motores cognitivos que dirigían al estudiante a conjeturar y validar su hipótesis (véase Figura 28).

Como vemos en el ejemplo de las Figuras 27 y 28 en los registros se incluyen una serie de motores cognitivos que inducen al estudiante a pensar sobre algunos conceptos, así como la promoción de procesos de modelización, resolución de problemas o del razonamiento particular que se busca desarrollar. En el caso de la Figura 29 el motor “¿Qué tipo de gráfica es?” se busca que el estudiante identifique la representación gráfica que se utiliza para representar las complicaciones reportadas por diabéticos, mientras que la segunda parte, el estudiante debe elegir el tipo se representación más adecuada. De modo que la elección de representación gráfica ayude a adquirir significado al concepto en su uso. Lo mismo ocurre con la Figura 30, donde la pregunta “comprueba tu hipótesis” conducen a procesos de validación y argumentación geométrica.

El papel de las preguntas conceptuales dentro de los registros nos permite atender varias de las observaciones realizadas por parte de los docentes a lo largo del curso. Las cuales consistían en incorporar los aspectos conceptuales en los entornos complejos de aprendizaje, en este punto fue importante distinguir entre la repetición de algoritmos y aquellas preguntas o problemas de razonamiento lógico que pueden conducir a discusiones sobre el mismo lenguaje matemático. De modo que podamos integrar no solo preguntas relacionadas a modelizar o resolver problemas, sino unificarla con el lenguaje matemático a utilizar.

La incorporación de estos registros, con estructura mediadora en las diferentes secuencias favoreció la apropiación del lenguaje y la promoción de la comunicación matemática, como vimos en las figuras de las secuencias de Incendios Forestales, Chécate, mídete y muévete y Construyendo para ISCDF (Figura 27, Figura 28, Figura 29). Los ejemplos de la Figura 27 y Figura 30 al tener una estructura comunicativa semejante como los del mundo real promovían habilidades que les permitían interpretar y comunicarse con la realidad, como son los soportes para comunicar datos estadísticos (folletos informativos o notas periodísticas) así como soportes para validar una conjetura matemática (tesis de licenciatura).

Dentro de los mismos registros, hay otras preguntas o instrucciones que guían al estudiante a resolver el problema, como es el díptico de Chécate, mídete o muévete; pues las secuencias solían ser muy largas y se requerían calendarizar y organizar a los docentes para comprender la submetas de la secuencia didáctica (véase Figura 29).

Figura 29

Díptico para la secuencia Chécate, mídete y muévete

Grupo de alimentos	Sub-grupos	Aporte nutrimental promedio				
		Equiva.	Energía (Kcal)	Proteína (g)	Lípidos (g)	H. de C. (g)
Verduras						
Frutas						
Cereales y Tubérculos	a. S/grasa					
	b. C/grasa					
Leguminosas						
Alimentos de Origen animal	a. Muy bajo aporte de grasa					
	b. Bajo aporte de grasa					
	c. Moderado aporte de grasa					
	d. Alto aporte de grasa					
Leche	Descremada					
	Semidescre					
	Entera					
	Con azúcar					
Aceites y Grasas	S/proteínas					
	C/proteínas					
Azúcares	S/grasas					
	c/grasas					

DATOS PERSONALES

NOMBRE______________________________ **EDAD** _______________ **GÉNERO** ________________________ **FECHA DE NACIMIENTO**____________ **ESTADO CIVIL** ____________
ESCOLARIDAD____________________ **OCUPACIÓN** ____________

TALLA ________________

PESO REAL __________________ **PESO IDEAL** __________________

Peso Ideal según la fórmula de Devine
Varón = 50 kg. + 0.91 [altura (cm) - 152.4]
Mujer = 45.5 kg. + 0.91 [altura (cm) - 152.4]

CIRCUNFERENCIA DE LA MUÑECA________________ **(cm)**

$$r = \frac{\text{Estatura (cm)}}{\text{C. muñeca (cm)}} \qquad \text{Complexión} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

COMPLEXIÓN	Pequeña	Mediana	Grande
Masculino	r> 10.4	9.6 – 10.4	r< 9.6
Femenino	r> 11.0	10.1 – 11.0	r< 10.1

IMC Kg/m² = PESO/TALLA² **IMC =** __________________ **Kg/m²**

Categoría IMC

Riesgo Bajo peso < 18.5
Normal 18.5 - 24.9
Bajo Sobrepeso 25.0 - 29.9 Moderado
Obesidad ≥ 30.0

Nota. Tomada de Palma, O (2019).

Como se vio a lo largo de este capítulo, varias de las observaciones que se sistematizaron durante este periodo, fueron ajustes de los docentes a la hora de implementar las secuencias didácticas, estos ajustes fueron desde los datos matemáticos, hasta las relacionadas a los mecanismos que promueven el pensamiento matemático. Estas observaciones eran compartidas con el resto del colectivo con el fin de lograr los aprendizajes en las sesiones o secuencias subsecuentes en todos los grupos.

A continuación, comparto una tabla de una de las docentes después de una sesión para sintetizar los mecanismos que debía tener presente a la hora de promover aprendizajes en el aula.

Figura 30

Esquema elaborado por docente para desarrollar habilidades complejas del pensamiento

PROCESO PARA DESARROLLAR HABILIDADES COMPLEJAS DE PENSAMIENTO

SIMPLIFICAR	REPRESENTAR	PROCESO TEORICO	OBJETIVOS DE APRENDIZAJE ¿Qué parte de la secuencia me permite desarrollarlos?		
			INTERPRETAR	VALIDAR	COMUNICAR
Determinar variables necesarias, innecesarias. Hacer suposiciones Buscar las primeras relaciones entre las variables	Usar graficas Dibujos Abstracto $a^2 + b^2 = c^2$ icónico Concreto	Axiomas Propiedades Modelización Traducir la realidad a estructuras matemáticas usando diferentes representaciones a) Ecuaciones b) Graficas c) Diagramas d) cuadros sinópticos	Interpretar correctamente la solución en un contexto de la vida real.	Seguir, evaluar y elaborar diversos tipos de cadenas de argumentación matemáticas (heurísticas)	Saber expresar de forma oral y escrita resultados matemáticos. Describir relaciones y propiedades complejas

Mediación docente	Ejemplificar y dar contraejemplos
	Retroalimentar
	Cuestionar
	Estructurar o reestructurar cognitivamente

Nota. Tomada de Palma, O (2019).

Dicha tabla resume algunas de las acciones docentes ya documentadas en el marco teórico, así como aquellas probadas durante este periodo, estas se organizan en función de cada habilidad que contiene el proceso de modelización. La docente, inicialmente la había construido para hacer un uso consciente y flexible de los elementos colocados en las secuencias didácticas, pues nos comentaba que tenía algunas dificultades para identificar los objetivos de aprendizaje en el aula, y, por tanto, también para promoverlos.

Contar con estos espacios de reflexión sobre la práctica de nuestro colectivo docente-psicólogos, nos permitió construir nuestras propias categorías o definiciones de lo que sucedía en el aula respecto a los mecanismos para producir pensamiento matemático. Esto nos ofreció la posibilidad de unificar al colectivo de docentes-psicólogas al sintetizar experiencias y tener una responsabilidad compartida. Estos resultados con los docentes daban especial relevancia a los espacios de reflexión y conceptualización para la co-implementación y co-análisis, de modo que podamos pensar también en un co-rediseño dialogado con la práctica y evidencia.

Por último, es necesario mencionar que debido a factores sociales y a la pandemia del covid-19 que comenzó en marzo del 2020, fue difícil continuar con la implementación de las situaciones didácticas. Por lo que en el siguiente capítulo señalaré los elementos que aplican tanto para el bloque de Geometría como a las otras secuencias del plan anual.

Capítulo 7. Co- rediseño

Una vez realizado el análisis de lo que se implementó en el ciclo escolar pasado, tomaremos decisiones en el co-rediseño para incorporar o utilizar aquello que produjo aprendizajes. Es importante mencionar, que los datos que se consideraron fueron los de naturaleza cualitativa, pues no se pudo finalizar el ciclo escolar para aplicar la prueba sumativa y obtener datos cuantitativos para evaluar el impacto de nuestros ambientes de aprendizaje. Es por ello, que con base a los datos obtenidos en las observaciones en el aula y en los productos de los estudiantes se propondrá un nuevo rediseño para mejorar los aprendizajes y el proceso de mediación de los docentes.

El rediseño, además de proveernos elementos teóricos sobre lo que debemos indagar de la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, también nos brindó información sobre lo que sí o no funcionó de nuestro primer diseño. Lo que nos permitió ajustar y tomar decisiones con base a las necesidades y contexto de las aulas de matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria. Por tanto, en este capítulo mostrare la reformulación de la línea de aprendizaje y el rediseño de las secuencias didácticas para su implementación en el siguiente ciclo escolar.

7.1. Proceso de co-rediseño

La reconstrucción de la teoría y la línea de aprendizaje será elaborada a partir del análisis de los datos recabados. A diferencia del taller que se llevó a cabo para el diseño del ciclo escolar pasado, debido a los cambios e incertidumbre que había sobre la pandemia y el tránsito de la educación presencial a la educación a distancia es que no se sistematizo un taller para realizar de manera colaborativa el co-rediseño. Por lo que comenzamos a adelantar la propuesta del re-diseño a partir de la evidencia sistematizada analizada en el plano específico con los docentes. Si bien, está no es la propuesta final que se llevó a cabo para la modalidad virtual, los ajustes implementados para la nueva propuesta de las secuencias didácticas y para el proyecto de aprendizaje buscan contribuir a una mejor versión del diseño inicial.

A continuación, explicaré el re-diseño de las secuencias didácticas, que de manera general se dirigen a las relaciones de significación colectiva como: las acciones para la construcción colectiva de conocimiento y las intervenciones para uso del sistema matemático, y que impacta al rediseño de las secuencias didácticas de Matemáticas V así como a Matemáticas IV.

Como vimos en el capítulo anterior, los resultados con GeoGebra, las preguntas relacionadas a los conceptos principales, así como las objetivaciones y representaciones utilizadas; nos hablan sobre la necesidad de un análisis previo sobre el lenguaje matemático. De tal forma, que permita una mejor comprensión, matematización y uso del lenguaje matemático en los estudiantes, además del apoyo que les permita modelizar situaciones reales. Unificar el lenguaje y los procesos matemáticos, nos permitirá construir relaciones entre ellas, y no tratarlas como entes del pensamiento diferentes.

Sin duda, la génesis histórica que se llevó a cabo de las diferentes unidades nos permitió definir la ruta de aprendizaje, así como una relación conceptual entre las grandes ideas matemáticas y los conocimientos de las unidades subsecuentes, este acierto nos hizo concluir sobre la importancia de retomar la historia de las matemáticas para la construcción coherente de las líneas de aprendizajes de las otras asignaturas de Matemáticas. Sobre este acierto profundizaré más adelante.

No obstante, la última implementación y análisis del ciclo escolar que estoy sistematizando (2018-2-2019-1) nos hace pensar también sobre la necesidad de incorporar en el diseño un mapeo conceptual sobre el mismo lenguaje de las matemáticas involucradas en nuestras secuencias didácticas. De tal forma que impactemos en el pensamiento matemático de los estudiantes; a través de las tecnologías educativas que resulten del diseño previo de mapeos conceptuales; así como de los registros matemáticos; elementos que explicaré a continuación y que se incorporan para las acciones de construcción colectiva de conocimiento y las intervenciones para uso del sistema en actividades. La segunda parte de este capítulo abordará las consecuencias que se considerarán para el proyecto de aprendizaje en contraste con la propuesta inicial.

7.2. Mediación semiótica en las acciones para la construcción colectiva de conocimiento y las intervenciones para uso del sistema en actividades.

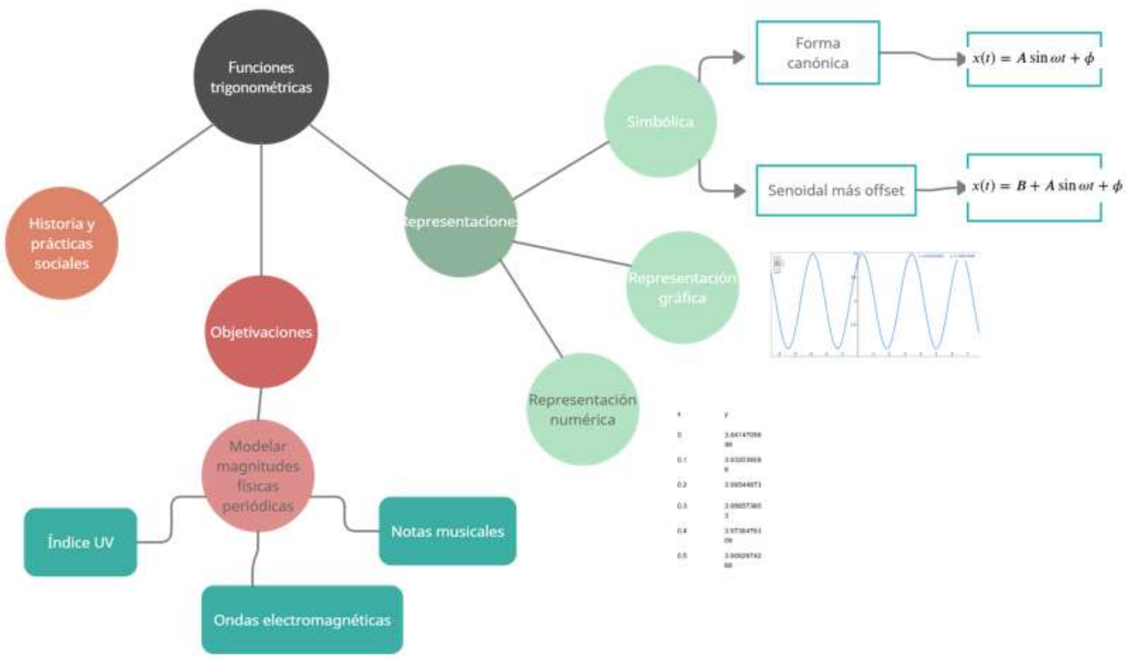
En primer lugar, abordaré lo relacionado a la mediación semiótica para la promoción del razonamiento lógico-matemático; esto a través de GeoGebra, las preguntas relacionadas a los conceptos principales, así como las objetivaciones y las representaciones con diferentes niveles de abstracción que permiten la construcción de significados en el colectivo (Figura 31).

7.2.1. Mapeo de medios semióticos para elaborar representaciones y objetivaciones: modelización y conceptualización

Para ello, plantearé un ejemplo sobre este “mapeo conceptual”, el cual consiste en una red de representaciones del lenguaje que se utilizarán para el diseño de las próximas secuencias. Este es el caso de “Radiación UV”, la cual recupera las diferentes transformaciones de la función senoidal[3] con el fin de ampliar los sentidos y comprender la representación simbólica más abstracta.

Figura 31

Mapeo de medios semióticos



Este ejemplo de mapeo de medios semióticos nos permite hacer una ampliación del recorte conceptual de la función senoidal Puig (1997). Los diferentes estratos que componen nuestro mapeo son:

- Sistema conceptual (representaciones): Este primer estrato se refiere a la diversidad de representaciones con las que se puede presentar el mismo concepto, como es el caso de la

[3] Función senoidal: son transformaciones de la función seno- porque cambian periódicamente con el tiempo. Ejemplo de ellos son los movimientos ondulatorios o las señales electromagnéticas (Coordinación de Universidad Abierta, Innovación Educativa y Educación a Distancia [CUAIIED], 2017).

representación simbólica, gráfica y numérica. Así como los diferentes niveles de abstracción progresiva que resultan de los distintos momentos del proceso de abstracción, relacionados entre sí por las correspondencias que este concepto ha establecido, como lo vimos en la maqueta de "Sembrando Vida" para resolver la distribución de las hortalizas con el Teorema de Pitágoras[4]; para el caso de la secuencia de Radiación UV será el espectro electromagnético, pues este debe caracterizarse por corresponder con la realidad.

- Objetivaciones: Este segundo estrato se distingue del primero, pues en este segundo los objetos son materializaciones del conocimiento matemático (Salinas-Hernández y Salinas, 2018). Este estrato resulta de suma importancia cuando queremos situar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la cultura, pues nuestro entorno se encuentra objetado y significado por las ideas matemáticas que nos han precedido. Por ejemplo: índice UV, notas musicales y ondas electromagnéticas.
- Historia o prácticas sociales: El tercer estrato se realizó al inicio de este ciclo escolar.

Este análisis se concretizará en los diferentes recursos a utilizar en la secuencia, en el caso de la de Radiación UV, se utilizará el índice de radiación UV para cuando los estudiantes deban validar sus conclusiones con la realidad, y al inicio, para contextualizar a los estudiantes sobre el índice que permite medir la intensidad de radiación UV que llega a la superficie de la Tierra; conocer estos datos orientará a los estudiantes a detectar las horas para evitar sobreexposiciones al sol y evitar lesiones en la piel.

En el caso del estrato, de las representaciones simultáneas, hablaremos en el siguiente apartado, sobre la necesidad de incorporar softwares dinámicos para dar un tratamiento gráfico a los conceptos más abstractos. A continuación, hablaré sobre los momentos en las secuencias didácticas donde se incorporarán estas herramientas, en la siguiente sección, lo ejemplifico con GeoGebra, para el desarrollo del pensamiento geométrico, algebraico, variacional y covariacional.

7.2.2 Herramientas para conceptualizar: GeoGebra

Como vimos en el capítulo anterior, contar de manera simultánea con diferentes niveles de abstracción en nuestras representaciones nos permitió el logro de procesos formales del lenguaje

[4] Teorema de Pitágoras: Es una preposición que demuestra que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los lados que forman el ángulo recto).

matemático, así como el vínculo con el mundo real. Al ser GeoGebra una de las herramientas que nos ofrecían la posibilidad de integrar de manera simultánea representaciones manipulables, este apartado se ilustrará con esta herramienta tecnológica en específico.

Dentro de la implementación se reconoció la importancia de diseñar momentos previos para presentar la herramienta. Por lo que a continuación, enlistaré los diferentes momentos que se deberán considerar para convertir dicho artefacto en un instrumento para pensar.

La primera, es maximizar el uso de GeoGebra, incorporando en las secuencias didácticas momentos para la apropiación de dicha herramienta matemática. De modo que el estudiante pueda hacer con ayuda de la mediación, un uso autónomo de la herramienta, y, además, pueda validar o retroalimentar su trabajo en equipo o individual.

La importancia de diseñar dentro de la secuencia didáctica la apropiación de las herramientas tecnológicas, es para superar la visión que la simple incorporación de la tecnología puede tener un valor en el aprendizaje. Por ello, retomaremos los trabajos de Pesina (2019) y Artigue (2004) para convertir dichos artefactos en mediadores entre los estudiantes y la abstracción matemática, así como la conceptualización misma. Pues como señala Artigue (2004) las representaciones semióticas no están para representar ni comunicar una conceptualización ya presente, sino que son constitutivas de la conceptualización.

Como ya he mencionado en el capítulo 3, algunos de los momentos que distingue Pesina para este proceso (2019) son:

1. Uso de la herramienta sin significado
2. Uso de las herramientas entendiendo algunas características
3. Uso de la herramienta entendiendo su función y algunas de las características
4. Mediación simbólica: uso, conceptualización y explicación de la herramienta
5. Mediación simbólica hacia lo posible: uso y creación de herramientas

Estos cambios cualitativos deben colocarse en diferentes momentos de los entornos para producirlos, lo ideal sería que esta apropiación de la herramienta comenzará desde Matemáticas IV y continuara de manera progresiva en las siguientes asignaturas hasta que la conceptualización permita al estudiante pensar en lo posible, como el estudio de procesos infinitos. Distribuir el uso de dicha herramienta a lo largo de los 3 años se justifica por el tratamiento gráfico que deben tener los programas de Matemáticas.

Si bien debe ser gradual esta apropiación a lo largo de los años, una de las principales limitaciones, es que los procesos de inscripción de la Escuela Nacional Preparatoria no permiten que los estudiantes puedan mantenerse en un mismo grupo durante los 3 años de bachillerato.

El primer momento, son los espacios de construcción colectiva que se construyen en el aula donde interviene la mediación docente y la de los pares, con la finalidad de comprender en un primer momento las características y funciones de la herramienta tecnológica. Mientras que los dos últimos pasos deberán ser moderados por la docente mientras los usa en la actividad real o situación didáctica, de tal forma que poco a poco el estudiante haga uso de esta de manera autónoma.

7.2.3. Registros matemáticos para la alfabetización matemática (comunicación)

En los grupos donde comenzaron a incorporarse los registros matemáticos se observó que estructurar la comunicación oral o escrita nos permitía darle la lógica propia de la disciplina. En síntesis, una lógica que responde, al desarrollo del tipo de pensamiento y a la metodología de indagación que los subyace. Como el ejemplo de los registros sobre análisis y argumentación geométrica con un apartado del lema y su demostración de la hipótesis geométrica.
Contar con dichos recursos estructurados en las secuencias didácticas, nos permite mediar la inserción de nuevos miembros a la comunidad (Velásquez y Marinkovich, 2016). Pues al acercarle a los estudiantes textos institucionalizados por la comunidad experta, permite que los estudiantes piensen y hagan matemáticas del mundo real, y por tanto podamos cubrir los aprendizajes esperados, y cumplir con el papel del bachillerato universitario para los estudios superiores.

Tabla 5

La comunicación matemática al egreso del bachillerato y licenciatura, UNAM

Perfil de egreso Licenciatura en Matemática	Matemáticas IV	Matemáticas V	Matemáticas VI (Área I y II)
El egresado de esta licenciatura será capaz de expresar en términos matemáticos problemas provenientes de otras profesiones, a fin de aplicar la	Los estudiantes desarrollen sus capacidades de abstracción, generalización, comunicación matemática y razonamiento lógico mediante el análisis y	Los estudiantes visualicen representaciones geométricas para conjeturar, analizar y desarrollar un lenguaje para comunicar sus resultados; conozcan	Los alumnos apliquen los conceptos básicos del Cálculo (diferencial e integral) para estudiar y modelar el movimiento, el cambio y la medida,

Perfil de egreso Licenciatura en Matemática	Matemáticas IV	Matemáticas V	Matemáticas VI (Área I y II)
herramienta matemática aprendida a lo largo de la carrera en la resolución del problema original. El **análisis y síntesis proporcionados** por la carrera le permitirán, al igual que a cualquier científico, organizar claramente sus ideas para **exponerlas oralmente y por escrito.**	la resolución de problemas contextualizados a partir de la construcción de modelos aritméticos, algebraicos y geométricos.	nuevas herramientas para describir los objetos matemáticos vinculando su representación algebraica con la representación geométrica.	mediante el análisis de procesos infinitos.

Si queremos comprender el proceso de los estudiantes, no sólo requerimos saber si en sus reportes los estudiantes llegan a la respuesta correcta, si no el pensamiento de los estudiantes u para resolver el problema, es en ese ciclo donde se encuentran los diferentes procesos del pensamiento matemático, así como la abstracción progresiva que va logrando de la apropiación del sistema matemático. Con este propósito, se busca integrar dichos reportes al finalizar cada sesión, para valorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes; así como la promoción continua de la comunicación oral y escrita de las matemáticas.

A raíz de los aportes que generaron dichos productos al diseño de las secuencias didácticas, y a la planeación sobre la mediación docente. Es que también debemos proponer metodologías que nos permitan indagar en los productos de los estudiantes. Pues los textos matemáticos representan una heterogeneidad en sus símbolos, figuras y textos.

7.2.4 La estructura del discurso entre estudiante-estudiante y estudiante-interlocutor

Como se señala en la sección anterior, es importante que estos reportes cuenten con una estructura lógica o un aparato reflexivo que conduzca la comunicación de los estudiantes. En este sentido, también es importante valorar, la estructura discursiva que se construye con el colectivo de los estudiantes, no sólo para guiar el modelamiento, sino para indagar sobre las ideas o conceptos matemáticos que les permita ampliar el concepto a otros contextos y profundizar en él.

En diferentes ejemplos, observamos desde resaltar ideas que permitían conectar a ideas matemáticas más complejas, así como el centrarse en el discurso de los estudiantes a partir de sus contribuciones. Para estructurar el discurso de los estudiantes en el plano colectivo, es necesario construir las acciones entre los estudiantes, así como entre el estudiante-docente en la actividad, a través de preguntas conceptuales o ayudas; para ello, es necesario elaborar en conjunto con los profesores motores o guías que podrían conectar a ideas más complejas, así como aquellas que permitan resignificar las contribuciones de los estudiantes en el colectivo o en los equipos.

7.3. Líneas de aprendizaje en el currículo del campo de matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria

A continuación, se mostrará la última propuesta de la línea de aprendizaje; la cual, resultó de la confrontación de la propuesta inicial, con lo que se implementó en las aulas de nuestros docentes. A partir de ese diálogo y reflexión con la práctica, se realiza la siguiente propuesta para el rediseño de la línea de aprendizaje. No obstante, por las limitaciones contextuales, anteriormente mencionadas, únicamente mostraré lo relacionado al bloque donde converge Geometría con Geometría Analítica y Trigonometría, que fue hasta donde se pudo observar por parte del colectivo.

La propuesta que a continuación se presenta, integra tanto las evidencias de las aulas, así como algunas herramientas instruccionales, basadas en investigación educativa, y otras propuestas en el colectivo de docentes.

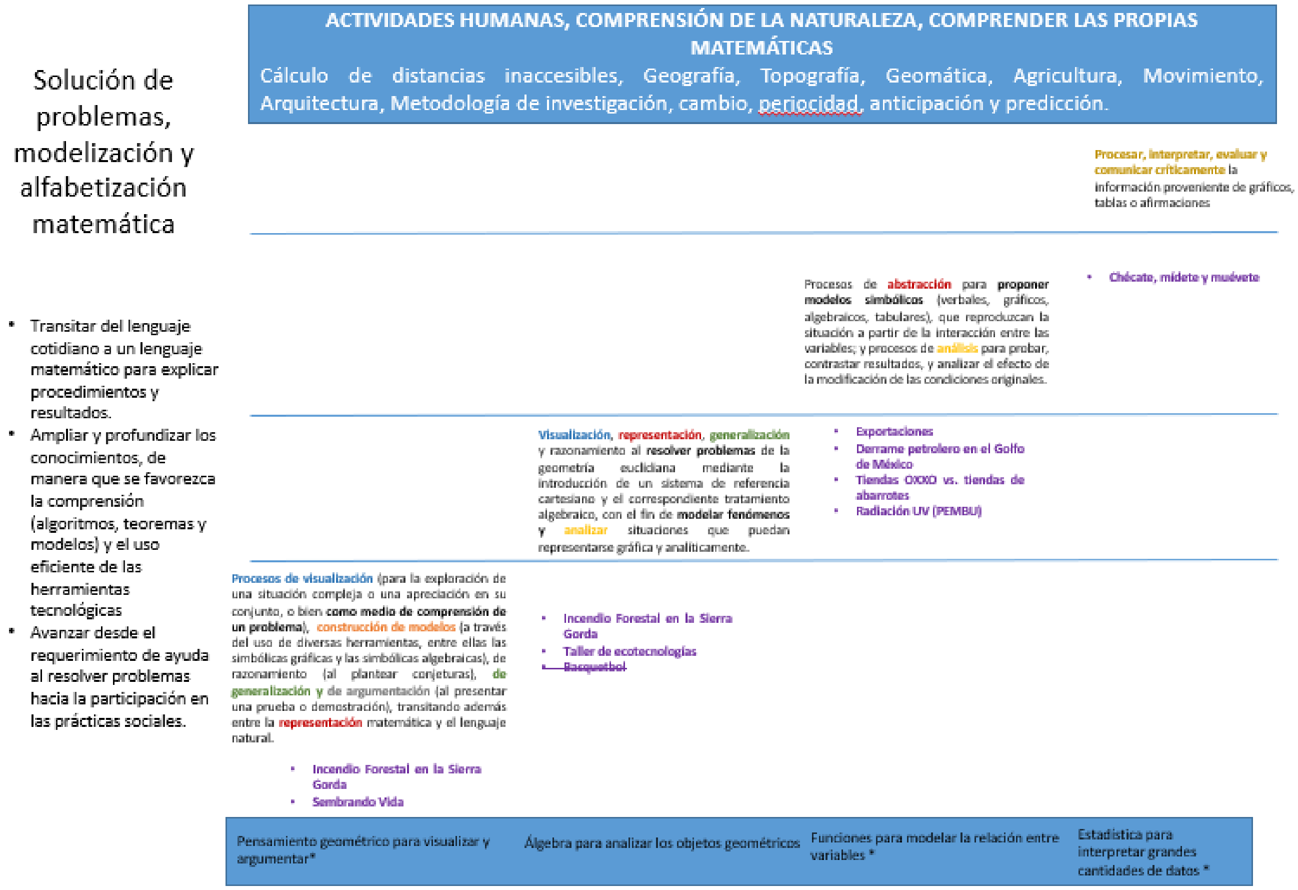
El cambio más grande es relacionado a la dimensión que se incorpora en la línea de aprendizaje, para poder graduar los aprendizajes a lo largo del curso. Por consiguiente, el rediseño que mostraremos de las secuencias didácticas busca responder a esta gradualidad; y al mismo tiempo construir relaciones entre el lenguaje y las acciones matemáticas; para que no se traten como entes del pensamiento diferentes.

La dimensión de la que hacemos referencia ha sido descrita en la curricula internacional como “connecting” (Ministry of Education, 2007 y NCTM 2009), y podríamos caracterizarla bajo nuestro contexto, como:

“Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión (algoritmos, teoremas y modelos) y el uso eficiente de las herramientas tecnológicas”

Figura 32

Línea de aprendizaje Matemáticas V para el co-rediseño



En resumen, es la posibilidad de los estudiantes para conectar los conceptos de las matemáticas de diferentes ramos de las matemáticas; así como la aplicación de estos conceptos matemáticos en diferentes contextos. Esto, además de profundizar la comprensión conceptual, también permite que los estudiantes utilicen las matemáticas como un estudio de relaciones, y no simplemente, como una serie de conceptos aislados. Es importante distinguir esta dimensión con la algoritmización o la enseñanza centrada en contenidos, pues es diferente que el estudiante aplique reglas mnemotécnicas para factorizar, a que el estudiante pueda explicar la simplificación de los polinomios y sepa de donde viene. En este sentido es importante identificar lo procedimental de la comprensión matemática.

La dimensión que se incorpora para graduar los aprendizajes es necesaria, para que el estudiante pueda elegir la herramienta matemática necesaria para solucionar el problema y aplicarlo al mundo real que le demanda la situación. Dimensión que se incorpora en esta segunda exploración con base a lo observado en las secuencias didácticas, pues como señalaron los docentes, se requiere que a lo largo del ciclo escolar también exista una mayor profundidad en algunos conocimientos.

No obstante, se vuelve un reto la progresión de dicha dimensión a lo largo del ciclo escolar, ya que se requiere de más tiempo para todos los temas que deben abordarse. Por lo que es necesario llevar una serie de acciones, en diferentes niveles, entre ellas:

- Nivel didáctico curricular

Hilar conceptos que influyan en la comprensión de otras ideas matemáticas, así como crear las trayectorias de aprendizaje que se presentaron al inicio de este trabajo. No obstante, estas deben articularse durante los 3 años que se cursa la asignatura de Matemáticas para tener más oportunidades de profundizar sobre un concepto. En la asignatura de Matemáticas V, fue más claro porque el programa se desarrolla a través de una génesis histórica, lo que nos permitió identificar e intervenir a lo largo del ciclo los saltos y relaciones epistemológicas, entre la Unidad 1 y Unidad 2. O la Unidad 1 con la Unidad 3.

- Nivel del aula

Investigar, actuar y pensar docente

Conforme a las necesidades que reportaron los docentes respecto a la dimensión conceptual, es preciso compartir la dimensión que se incorpora en el proyecto de aprendizaje, así como la caracterización de ella y los medios del entorno para poder llevarlo a cabo en el aula, que son los que describimos en la parte inicial del documento. Con el fin, de no traslapar la idea tradicional de "algoritmización" con lo que se caracterizó como comprensión matemática.

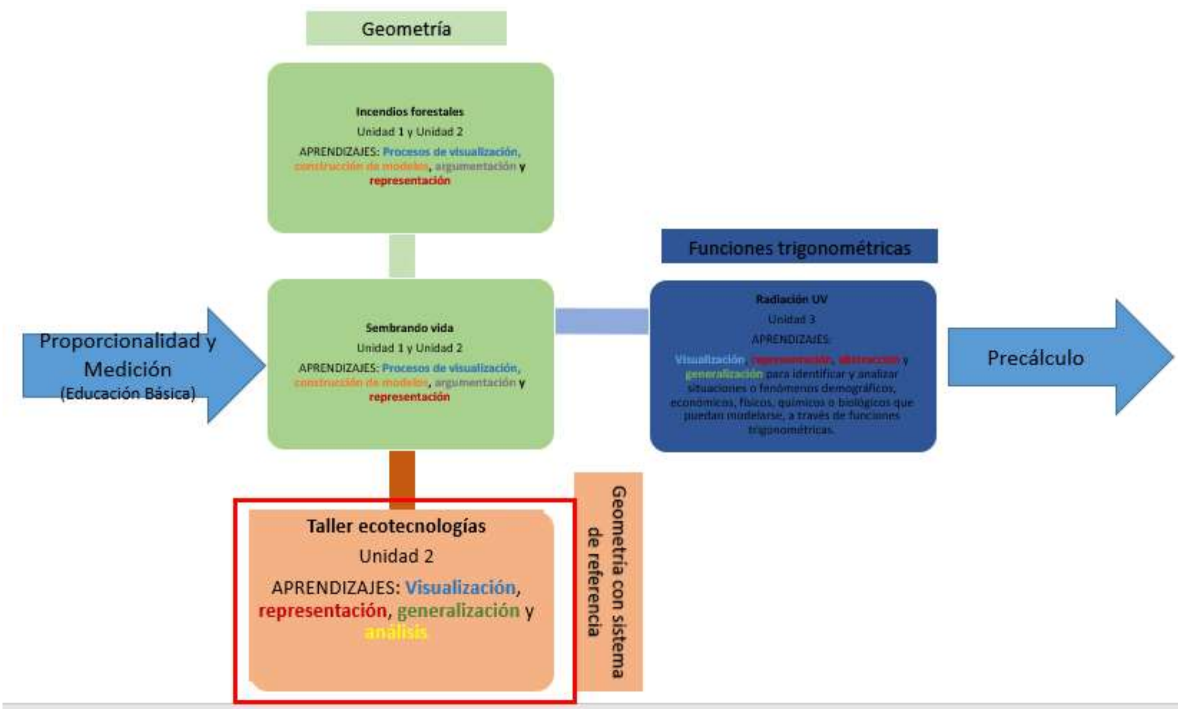
Este proceso formativo se conducirá a través de la práctica de los docentes en el aula, y en las fases de investigación del proyecto: diseño, implementación y evaluación de modo que podamos influir en su pensamiento y acción docente.

Líneas de aprendizaje

En cuanto al bloque donde converge Geometría con Geometría Analítica y Trigonometría; es importante destacar el acierto de diseñar las secuencias didácticas con base a las actividades matemáticas que originaron conceptos matemáticos; pues esto permitió la promoción de procesos como: visualización, conjetura, generalización y argumentación. Por lo que coinciden nuestras observaciones con los resultados de Davis y Hersh 1998; Lakatos 1976 y Polya 1945 en Mariotti et al., 2018 los cuales han demostrado el impacto de escenario auténticos para la construcción de conocimientos, por la interacción dinámica entre hipótesis, razonamiento y justificación en una prueba formal.

Figura 33

Bloque de pensamiento geométrico, geométrico con sistema de referencia y trigonométrico



Los resultados de ambos coinciden con las conclusiones de (Cárdenas, 2020) sobre la importancia del origen histórico de la Geometría en el mundo físico. Por lo que el diseño de secuencias, basadas en el mundo cultural-históricamente construido, no sólo abre una ventana de posibilidad para que los estudiantes conozcan y participen en su comunidad, sino, desarrollen procesos como la visualización, la argumentación y representación.

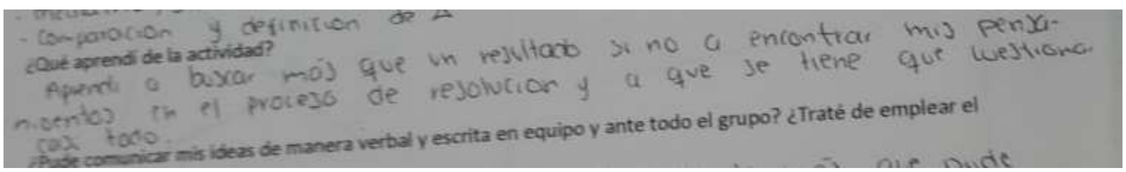
Para este bloque de secuencias se incorporará el uso de la herramienta GeoGebra, para promover procesos como la visualización y representación, pero también fungirá como mediador semiótico, para una mejor comprensión de las ideas matemáticas, y para el tránsito de un

lenguaje natural al formal. Como ya se describió desde el capítulo pasado, dichas herramientas son constitutivas de la conceptualización, y, además, permiten homogeneizar los niveles de comprensión matemática en los grupos heterogéneos (Jelatu et al., 2018).
Para el caso específico de Incendios Forestales, se agregarán una serie de motores que promuevan la resolución de este problema con las herramientas conceptuales entre la Unidad 1 y Unidad 2. Pues como vimos en la implementación, el uso de Geo Gebra, permitió resolver el problema con dos tipos de sistemas matemáticas, como: el uso de la geometría euclidiana y el uso de la geometría con un sistema de referencia.

Además, se utilizarán los registros para promover procesos relacionados a la argumentación y comunicación, pues en el grupo donde se implementó, una de las estudiantes expresó lo siguiente:

Figura 34

Testimonio de estudiante


- Comparación y definición de A
¿Qué aprendí de la actividad?
Aprendí a buscar más que un resultado si no a encontrar mis pensamientos en el proceso de resolución y a que se tiene que cuestionar todo.
¿Pude comunicar mis ideas de manera verbal y escrita en equipo y ante todo el grupo? ¿Traté de emplear el

Como se ve en esta expresión, la estudiante habla sobre la capacidad para elaborar argumentos que justifiquen las conjeturas matemáticas. Esta expresión de la estudiante nos hace coincidir con la literatura reportada en el estudio de Herbst et al. (2010), donde mencionan que, con el andamiaje adecuado, en situaciones de aprendizaje de geometría, los estudiantes pueden ser capaces de conjeturar y validar sus resultados.

A lo largo de esta primera secuencia, también se incorporarán algunos complementos matemáticos, como el uso de papiroflexia, para el desarrollo de la visualización y del razonamiento geométrico en las pruebas de los triángulos. Esto, además de tener evidencia en trabajos de investigación (Arici y Aslan-Tutak, 2015), también se observó en el grupo de estudiantes donde se trabajó con papiroflexia y al final tenían mejor conceptualización. Dicha área de oportunidad se profundizará y sistematizará con la docente, para saber cómo incorporar dicho complemento matemático a la secuencia didáctica, sin separarlo por completo de la actividad real.

Otra tecnología que se incorporará en el re-diseño de nuestras secuencias, son los ejemplos correctos e incorrectos que hayan resuelto los estudiantes Booth, et al., (2013), los cuales se estructuraran a través del discurso entre el docente- estudiantes para mejorar la comprensión conceptual.
En nuestro caso, los ejemplos correctos e incorrectos serán aquellos que se aborden en las actividades reales, por lo que esperamos que estos, no solamente ayuden a la compresión conceptual, sino al proceso de modelizar.

La segunda secuencia didáctica, donde los estudiantes realizaron una propuesta de sistema productivo agroforestal al Programa Sembrando Vida, se incluirán los motores cognitivos que incluyó una de las docentes para conectar con funciones trigonométricas, las cuales se verían en Contaminación Lumínica y Radiación UV, situaciones dirigidas a identificar el tipo de comportamiento de un fenómeno (con base en características como su periodicidad, razón de cambio, crecimiento o decrecimiento, tendencia asintótica, entre otras). La conexión que ocurrió entre estas unidades, durante la implementación, nos permite validar la trayectoria genética entre las identidades y las funciones trigonométricas.

Si bien no se implementaron las secuencias didácticas relacionadas a funciones trigonométricas, será necesario evaluar que tanto la actividad de Radiación o Contaminación lumínica permite ese salto entre unidades. Pues de caso contrario, se tendrá que diseñar una secuencia donde el estudiante resuelva una problemática relacionada al movimiento, pues es la práctica histórica que dio origen a las funciones trigonométricas (Montiel, s.f.).

Posteriormente se realizará un salto epistemológico con la secuencia de Basquetbol, donde se estudia el movimiento de un balón de básquet. Este salto conceptual lo retomamos de la historia de las matemáticas, con el desarrollo de la mecánica y los descubrimientos de Newton sobre el movimiento de los planetas. Dichos avances permitieron que interactuaran los problemas tradicionales de la geometría euclidiana, y el desarrollo del álgebra y del cálculo (Piaget y García, 2004). Convirtiendo la noción de “transformación” en el concepto que nos permite hacer un puente epistemológico entre ambos sistemas el geométrico euclidiano y el analítico (Piaget y García, 2004).

Este cambio, que se produce de manera progresiva entre la secuencia de Basquetbol y Cocinas solares, se vuelve necesario para que los estudiantes concluyan este primer bloque de aprendizajes, y posteriormente se introduzca al bloque relacionado a funciones.
Debido a que en ambas secuencias se analizan los lugares geométricos de la parábola, resulta repetitivo para los objetivos de aprendizaje que se deben ver en la Unidad 2 “Algebra para analizar los objetos geométricos”, por lo que se propone sustituir la secuencia de Basquetbol o Cocinas Solares por una secuencia donde se estudie el espacio, movimiento y velocidad con un tratamiento más analítico y donde se aborde también la recta.

Esto por dos razones, la primera por la genética histórica de esta herramienta matemática, la cual ya se explicó con anterioridad, y la segunda, por los trabajos de Salinas-Hernández y Miranda (2018) sobre la comprensión del movimiento. Si bien, nuestro fin último no es sobre la Física, las situaciones problemáticas que ofrece el movimiento rectilíneo uniforme nos permiten significar los conceptos relacionados a la recta.

De igual manera, es importante resaltar la importancia de conectar esta línea de aprendizaje no sólo de manera horizontal, sino también de manera vertical para conocer las oportunidades a lo largo de los 3 años. Debido a que nosotros hicimos una línea de aprendizaje por asignatura y no por los 3 años, se limitó nuestra comprensión sobre las posibilidades de aprendizajes en años antecedentes y subsecuentes. Por tal razón, señalo en esta línea de aprendizaje, a Matemáticas IV y Matemáticas VI para que en futuros trabajos de revise con mayor precisión la transversalidad vertical.

La posibilidad de enriquecer el diseño de los entornos de aprendizaje y la formación de los docentes no hubiera sido posible sin la naturaleza cíclica de la metodología colaborativa; la cual nos permite un diálogo constante entre la práctica con la investigación educativa y el marco curricular. Lo que nos permite una implementación congruente para los docentes, al hacerlos participes de este proceso, y al considerar el contexto de las aulas y la propuesta curricular.

Pese a que en este re-diseño se consideraron implicaciones sobre el lenguaje matemático, principalmente materiales para la enseñanza-aprendizaje y la alfabetización matemática; es importante que en las futuras implementaciones no se pierdan de vista, las otras aristas de nuestros entornos. Pues la simple integración de los elementos descritos a lo largo del capítulo no garantiza incidir en la dimensión relacionada a la ampliación y profundización de conceptos, así como en el tránsito de lenguaje natural a abstracto.

Por último, es importante resaltar la importancia de promover la comunicación oral y escrita de los estudiantes que decidan cursar los estudios superiores en el área de fisicomatemático e ingenierías. Pues los textos matemáticos generalmente son abstractos, complejos y densos de símbolos heterogéneos, por lo que la comunicación de los estudiantes a lo largo del tiempo debe ser más disciplinaria y en constante relación con los diferentes tipos de textos matemáticos y las normas interpretativas de las diferentes disciplinas matemáticas, para explorar, conectar y cuestionar ideas que van más allá de lo dado en los contextos de vida.

Capítulo 8. Conclusiones y consideraciones

Dentro de esta nueva sociedad, las matemáticas se han convertido en elementos vitales para contribuir a los cambios vertiginosos de este siglo. El impacto de la tecnociencia en la sociedad ha hecho que los proyectos curriculares internacionales y nacionales sumen sus esfuerzos para formar a individuos capaces de formular, emplear e interpretar las matemáticas en dicho contexto. No obstante, los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales muestran que existe un bajo rendimiento en los estudiantes mexicanos respecto al campo de matemáticas (INEE, 2018; OCDE, 2016). Dichos resultados evidencian una problemática nacional respecto al aprendizaje en matemáticas.

A partir del contexto anterior, dentro del proyecto Ambientes Complejos de Aprendizaje, se ha efectuado esta investigación que intenta ofrecer una propuesta sobre cómo promover el pensamiento matemático en el bachillerato, particularmente en la Escuela Nacional Preparatoria. Derivado de ello, se brinda una respuesta operativa a los programas actualizados de Matemáticas de la ENP y algunas consideraciones para el aula sobre el aprendizaje en matemáticas. La presente investigación representa un esfuerzo por tratar de comprender como es que se desarrolla el pensamiento matemático en actividades matemáticas y de esta forma, poseer herramientas teóricas que permitan crear condiciones de aprendizaje que promuevan el desarrollo de ciudadanos capaces de resolver y comprender fenómenos naturales y sociales, que les permita encarar los problemas de la sociedad de nuestro tiempo y ofrecer soluciones a las diversas realidades de América Latina.

Las conclusiones y consideraciones correspondientes a la implementación 2018-2-2019-1 y 2019-2 -2020-1, de los ambientes complejos de aprendizaje en matemáticas, tendrán implicaciones en niveles macro y micro:

- Macro:

a) Totalidad del mapa curricular en la Escuela Nacional Preparatoria y en el campo de Matemáticas.

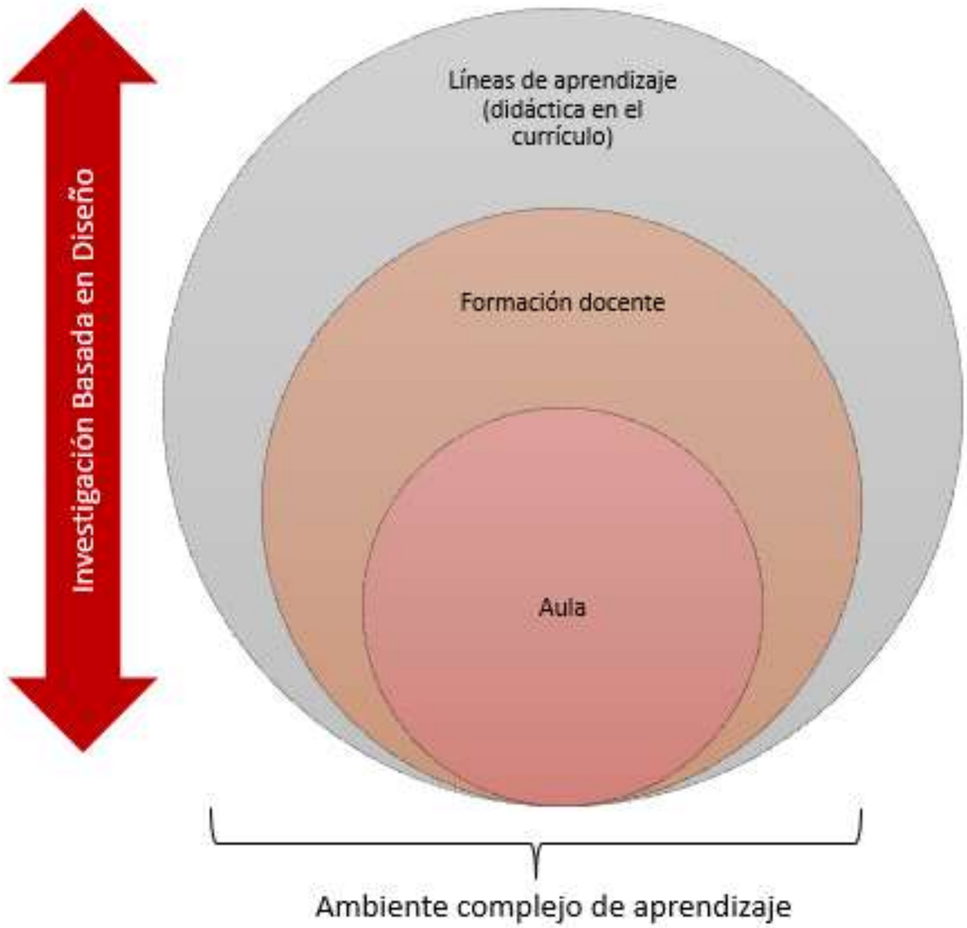
b) Formación docentes en matemáticas a través de la IBD colaborativa

- Micro:

a) Aula para la promoción de aprendizaje en matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria a través del desarrollo de material curricular

Figura 35

Ambiente complejo de aprendizajes en niveles macro y micro



Es importante resaltar que las implicaciones descritas aquí continúen para futuras intervenciones e investigaciones de manera sistemática y no de manera parcial. Pues el Ambiente complejo de Aprendizaje se conforma no sólo por una sola secuencia, sino también por el cúmulo de secuencias organizadas y diseñadas de manera intencionada a lo largo del curso escolar y los 3 años. Es por ello, que los Ambientes Complejos de Aprendizaje tienen implicaciones en diferentes niveles y ámbitos en la configuración de las prácticas educativas matemáticas. Esto además de revelarnos la complejidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje; sin duda nos permitirá una mejor intervención.

8.1. Micro nivel de Ambientes Complejos de Aprendizaje: el aula para la promoción de Aprendizaje en Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria

Antes de comenzar las conclusiones relacionadas a este nivel; es necesario precisar lo siguiente. Si bien, durante la investigación no se incluyó un análisis detallado de los aprendizajes logrados por los alumnos; el co-análisis de las situaciones que se presentaron y, sobre todo, las expresiones del pensamiento matemático, por parte de los estudiantes, nos permitieron reconocer aquellas condiciones para producir los aprendizajes relacionados a la modelización, visualización, argumentación y abstracción. Por lo que se vuelve preciso reconocer, aquellas relaciones que permitieron ese potencial.

A continuación, se desglosan algunas herramientas teóricas que han sido de utilidad para promover el pensamiento matemático en el nivel de aulas, así como algunas consideraciones que se deberán tener cuenta para el diseño de ambientes complejos de aprendizaje en matemáticas.

8.1.1. Actividades Societales para la problematización de Conceptos y Promoción del Pensamiento Matemático en Ambientes Complejos de Aprendizaje

Partiendo de los hallazgos que se han generado en el proyecto Ambientes Complejos de Aprendizaje a lo largo del tiempo (Pesina, 2019; Abasolo, 2019; Castro, 2019; Téllez, 2019, Cárdenas, 2020) cuando se crean las condiciones de Actividad para los estudiantes, existen cambios en su capacidad científica, matemática y lectura. Por lo que algunas de las expresiones del pensamiento matemático, sistematizadas aquí, resultan congruentes con las investigaciones

anteriores, y a su vez, abre algunas interrogantes al tratarse de otra práctica educativa dentro del sistema educativo mexicano.
Tomando como marco la perspectiva histórico-cultural (Vygotsky, 1997) y de la Actividad (Leóntiev 1975- 1981 en Wertsch 1988) en el desarrollo del pensamiento matemático y el marco de Educación Matemática Realista (EMR), que actualmente tiene la Escuela Nacional Preparatoria, sobre las matemáticas; el elemento sustancial de los ambientes de aprendizaje se encuentra en el reconocimiento de la actividad societal como el medio para el desarrollo del pensamiento, sin embargo, dicho reconocimiento está en visualizar la totalidad, es decir, todos los elementos que se ponen en juego dentro de la actividad matemática, el cual funge como un espacio colectivo de interpretaciones (García, 2006 como se citó en Cárdenas 2020).

Para poder aclarar la aseveración anterior, desglosaré en los siguientes incisos lo correspondiente a los elementos que deben integrarse dentro de la actividad societal.

De acuerdo a Cárdenas (2020), el desarrollo de los estudiantes se encuentra estrechamente ligado a las prácticas culturales a las que pertenece y a la forma en cómo se van significado dichas prácticas. Con base en su conclusión emana la importancia que tiene el formar parte de actividades matemáticas y la participación dentro de ellas. Por lo que resulta imperioso que la actividad matemática sea compleja y dentro de ella se usen diversos elementos de mediación porque, la forma en cómo se encuentre constituida la actividad será la capacidad que logre desarrollar el estudiante.

Por otra parte, debe considerarse que la conformación de la actividad para el estudiante no se da de forma automática, pues esto implica un desarrollo dinámico que inicia con la familiarización de los elementos que constituyen la actividad matemática (como las herramientas y las acciones), hasta la ejecución de acciones que trascienden el plano material y concreto (Cárdenas, 2020). Dicha aseveración, sin duda coincide con las observaciones de los docentes de la ENP, donde nos mencionaban que los estudiantes lograban efectuar acciones relacionadas a la modelización, pero aún ligadas a aspectos concretos de la Actividad como el simplificar, representar, comunicar o argumentar pero que hacían falta acciones más abstractas que se ejecutaran en un plano simbólico. Pues es imprescindible para este nivel educativo.

En consecuencia, para los siguientes ciclos de diseño, debemos incorporar en la Actividad mayor andamiaje para que los estudiantes lleguen a este plano abstracto y sus acciones sean más complejas dentro de la actividad matemática; como vimos en los diferentes ejemplos del capítulo anterior. Pues este nivel permitirá que los estudiantes utilicen el lenguaje matemático para comunicarse y, además, conecten ideas matemáticas o apliquen su conocimiento en diferentes contextos, totalmente diferentes al que iniciaron.

Por tanto, en los siguientes co-rediseños, aludiremos a tres aspectos en el nivel abstracto; el primero, utilizar únicamente el lenguaje matemático para la matematización, el segundo aspecto, la generalización de algoritmos, teoremas o modelos y el último, la comprensión de ideas matemáticas. Por tanto, si bien es cierto que se ha hecho alusión a la importancia que tiene la Actividad como el medio indispensable y la condición material para promover el pensamiento matemático, es factible que las acciones se vuelvan abstractas para trascender del plano material de la Actividad. La forma en como sucederá este proceso de abstracción, en los estudiantes, se dará principalmente por la construcción colectiva docente ya que, es ella quien demanda realizar acciones más complejas, impone retos, utiliza herramientas dinámicas (GeoGebra) y ejecuta preguntas con la intención de generar procesos más abstractos.

> A través de esta progresión en la actividad se le irán aclarando al estudiante las ideas de modelo, teorema y algoritmo. Entenderá lo que es una demostración racional y lógica, aprenderá a construirla y a analizar y criticar demostraciones propuestas por otras personas. Deberá aprender que los resultados obtenidos por razonamiento lógico en un modelo, los teoremas, se aplican al modelo abstracto, pero que la realidad puede comportarse de manera diferente y, por tanto, los teoremas, a pesar de ser conocimiento indudable acerca del modelo abstracto, son sólo conocimiento tentativo con respecto a la realidad. Pero también aprenderá a crear algoritmos, no solo a aplicarlos, y a aprovechar la computación cuando le convenga. El estudiante debe adquirir la capacidad de describir con precisión un algoritmo, comprender la secuencia de pasos que llevan a un resultado buscado. Debe entender que cada uno de los pasos de un algoritmo o procedimiento debe estar bien definido y libre de ambigüedades. Debe saber explicar por qué el algoritmo produce el resultado buscado y debe saber analizarlo desde el punto de vista de su factibilidad y eficiencia. También debe ser capaz de descubrir errores, si los hay, en la aplicación de un algoritmo. Quizás la mejor manera de llegar a dominar todo esto sea aprendiendo a programar sus algoritmos en una computadora (Abreu y Bracho, et. al, p.11, 2016).

Para poder llevar a cabo lo anterior, es importante considerar una serie de acciones que se proponen en el rediseño, tanto a nivel didáctico-curricular y a nivel del aula. Con el fin, de no traslapar la idea tradicional de “algoritmización” con lo que se caracterizó como comprensión matemática. Ya que, en otros cursos dirigidos por la Escuela Nacional Preparatoria sobre los programas de estudio, los profesores de la ENP seguían mostrando una notable angustia por los contenidos; y en muchos casos, su concepción sigue apegada a una visión tradicional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Alvarado, Sánchez y Lugo, 2019). Lo que podría ser un obstáculo para poder implementar el nuevo modelo educativo de Matemáticas en la ENP.

Por otra parte, es importante distinguir, que, de acuerdo con la implementación, la inserción dentro del sistema de actividad matemático no es una garantía en los procesos de aprendizajes, pues estos no ocurren de manera automática, existen tres aspectos importantes que también deben tomarse en cuenta, uno es relacionado al uso de medios semióticos y el segundo es relacionado al colectivo, ambos planeados y orquestados por la docente. El tercero está relacionado a la unidad indivisible de la actividad, pues cada una de estas partes deben estar implicadas unas a las otras, no deben entenderse como entidades externas de la realidad que se meten en el individuo. La actividad societal debe entenderse a través de todos sus elementos y al revés. Por tanto, a continuación, se hablará sobre los aspectos importantes de cada uno de estos elementos que promueven en conjunto el desarrollo de capacidades matemáticas.

8.1.2. Intervenciones para uso del Sistema en Actividades y Organización de Condiciones en el aula

La Interacción Social del *Interlocutor Experto* dentro de las Actividades Matemáticas.

De acuerdo con (Radford, 2018), la semiosis o creación de significados ocurre siempre en procesos colectivos. En este sentido, la actividad integra a los estudiantes y al interlocutor experto. Pero al mismo tiempo, la actividad es producida por las acciones de los estudiantes y del interlocutor esperto. Esta es la razón por la que debemos atender a los participantes sin dejar de asistir a la actividad en la que se encuentran inmersos, y recíprocamente, no podemos atender a la actividad sin atender a los participantes que producen la actividad.

De acuerdo con lo anterior, y los hallazgos en esta implementación, el papel del *interlocutor experto*, dentro de las actividades consiste crear de manera intencionada los espacios de significación colectiva que permita a los estudiantes actuar con el sistema simbólico, tanto en el plano general como específico.

Este actor hará uso de los diferentes elementos del aula para conducir los aprendizajes de manera progresiva y contingente en los estudiantes; y a su vez, permitirles el tránsito del lenguaje natural a matemático. Su asistencia siempre está presente y nunca disminuye, su guía cambiaba en función del nivel de los estudiantes.

Otro rasgo imprescindible del docente en este nivel educativo es que además de planear, implementar y evaluar de manera continua las propuestas curriculares en un plano específico; los docentes pasan de ser agentes que únicamente implementan, a ser un colectivo de docentes que investigan los procesos de aprendizaje, a través de la práctica, para co-diseñar, co-implementar, co-analizar y co-evaluar en un plano general. Más adelante se profundizará sobre su papel como investigadores del Proyecto Aleph 5.

Mientras tanto, continuare con las diferentes maquinaras que deberán ser guiadas por los docentes en el nivel de aula:

8.1.3. Acciones para la Construcción Colectiva de Conocimiento

La Interacción Social entre Pares dentro de las Actividades Matemáticas.

Otro espacio de significación dentro de las Actividades humanas (incluyendo las matemáticas), son la construcción que se da entre los pares, considerando esta característica de la Actividad, es que las Actividades matemáticas dentro del marco del proyecto siempre incitaban a la colaboración y cooperatividad entre pares Swidan y Prusak (2018). Además, partiendo que las capacidades matemáticas de los estudiantes no ocurren de manera homogénea, el papel de la socialización del conocimiento tiene un papel importante dentro de la actividad, para que los estudiantes más avanzados, funjan como mediadores con aquellos estudiantes novatos, para que sus compañeros también puedan participar y significar dentro de la actividad.

Dicho espacio de construcción colectiva en el aula debe organizarse por la docente de manera previa para promover las interacciones entre los estudiantes; así como de forma contingente en el tiempo para estructurar el discurso matemático de dicho espacio. *Este discurso colectivo debe orientar a los estudiantes en sus diferentes acciones con el sistema matemático, así como para transitar* de un lenguaje natural a matemático.

De tal forma, que la docente construya el conocimiento de forma colectiva integrando las propuestas que los niños van formulando ante una problemática que incumbe a todos los involucrados en la actividad, al hilar las interpretaciones de cada uno y las propuestas que se generan a partir de las antes mencionadas, resignificándolas en una sola idea o propuesta que obtiene como resultado final la solución a la problemática construida por todos (Castro, 2019).

El Uso de Medios Semióticos en la Ejecución de Acciones Matemáticas.

Por otro lado, los medios semióticos, se han heredado como producto histórico y cultural y su uso dentro de la Actividad resulta fundamental (Rogoff, 1997), porque son las herramientas que nos permiten realizar acciones, pues “se piensa con y a través de los artefactos culturales” (Radford, 2006, p.107). En investigaciones pasadas del proyecto Aleph, los medios semióticos se encontraban enraizadas a la actividad matemática, por lo que su uso siempre debía estar en contexto para que los estudiantes aprendieran a usarlo y fueran capaces de significarlos, comprender su sentido y de esta forma, emplearlos para transformar el mundo del cual forman parte.

No obstante, durante la implementación de entornos de aprendizaje en la ENP, las objetivaciones matemáticas o las representaciones concretas no fueron los únicos medios para lograr aprendizajes. Si bien estas nos permitían conectar el mundo real y matemático para que los estudiantes modelizaran; los medios de representación matemática (gráfica, geométrica, algebraica, tabular o numérica) también jugaban un papel importante para lograr procesos en los estudiantes de abstracción, visualización, así como una comprensión matemática.

Estas segundas representaciones, fueron dadas a través de la incorporación de herramientas tecnológicas, como: GeoGebra, pues nos permitía mostrar una serie de representaciones matemáticas dinámicas y simultáneas.

Reconociendo el papel de dichas herramientas dinámicas para los procesos de aprendizaje, se vuelve necesario incorporar un andamiaje en las secuencias para que los estudiantes utilicen dichos artefactos, de manera gradual a lo largo de los 3 años de bachillerato (Pesina, 2019); sin embargo, una de las principales limitaciones, es que los procesos de inscripción dentro de la ENP no permiten que los estudiantes puedan mantenerse en un mismo grupo durante los 3 años de bachillerato.

Un último elemento que se incorporará a las secuencias didácticas, bajo esta dimensión, son los registros o portadores de textos matemáticos, los cuales deberán contener una estructura lógica de la disciplina, para promover de manera continua la comunicación oral y escrita de las matemáticas. A la par, se deberán integrar metodologías o técnicas que nos permitan indagar en los productos de los estudiantes y darles seguimiento a sus procesos de aprendizaje.

Cuando los estudiantes indaguen en este plano abstracto con los textos, es recomendable explicar sobre el significado y reglas de los diferentes segmentos de lenguaje natural, algebraico, figuras geométricas y otros diagramas, etc. que se encuentran en los textos matemáticos; dado que en los textos matemáticos se representa una heterogeneidad en sus símbolos, y estos no están regulados por separado en los textos matemáticos por las reglas propias de cada uno de esos lenguajes. De modo tal, que al término de los ciclos escolares los estudiantes puedan escribir y leer matemáticamente.

Sin duda, estas son algunas de las herramientas teóricas más importantes de los ambientes complejos de aprendizaje para desarrollar acciones relacionadas a la matematización en los estudiantes.

La conceptualización de estos elementos en conjunto, además de aportar a acciones concretas en el diseño instruccional, formación docente y currículo, sin duda aportan al conocimiento sobre cómo se promueve el pensamiento matemático bajo un marco histórico-cultural, pues más que enfocarnos en relacionar variables de los ambientes complejos de aprendizaje con el pensamiento, el presente trabajo trato de comprender la configuración material del espacio que está potenciando el desarrollo en los estudiantes.

Esta comprensión se fue desarrollando a lo largo de los 2 años que comenzó el proyecto en la ENP. De ahí la relevancia de exponer los diferentes resultados que se obtuvieron en cada fase metodológica para llegar a la última conceptualización que actualmente se tiene sobre el pensamiento Matemático en la ENP. Pues a lo largo de este tiempo la metodología de Investigación Basada en Diseño, nos permitió seguir las líneas entrelazadas que comprenden las diferentes dimensiones del pensamiento matemático en la ENP. Uno piensa con algo (contenido), uno piensa para algo (habilidades) y uno piensa sobre algo (actividad societal).

Por tanto, las capacidades del pensamiento complejo también implican el contenido para poder desarrollarse. Como señalaba Vygotsky en Roth (2017) la conciencia es el lenguaje que se desarrolla entre personas, y es en las convenciones colectivas, materializaciones del lenguaje y acciones con signos que el humano se construye.

Además de aportar al conocimiento sobre cómo se promueve el pensamiento matemático en un nivel micro, el presente trabajo presenta implicaciones a nivel curricular y en la formación de docentes. Lo cual es posible por la metodología cíclica, pues nos ayuda a entender las relaciones entre la teoría educativa, el artefacto diseñado y la práctica.

Esto nos permite resolver una de las problemáticas señaladas desde el capítulo 1, respecto a que las innovaciones educativas no se aprovechan suficientemente porque sus diseños pocas veces se les da un seguimiento y, consecuentemente, no se alcanza a producir conocimiento útil para orientar prácticas futuras (Design-Based Research Collective, 2003).

Por tal razón, a continuación, precisaré sobre aquellas implicaciones que impactan en el currículo, así como la formación de los docentes para implementar y analizar los entornos de aprendizaje. Ámbitos necesarios para configurar la práctica educativa de la ENP.

8.2. Macro nivel: Ambientes Complejos de aprendizaje en la didáctica de las matemáticas y la Formación Docente.

8.2.1. La Totalidad Curricular como Área de Oportunidad en los Programas de Matemáticas e Integración de la Práctica Docente.

Como se ha descrito a lo largo de este proyecto de investigación, el objetivo de enseñanza de las matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria es orientar a que el estudiante descubra su capacidad de abstracción, su capacidad para pensar racionalmente y la capacidad que tiene, como ser humano, para crear modelos abstractos que le permitan analizar y entender situaciones del mundo que le rodea.

La necesidad de integrar la visión de aprendizaje en matemáticas, propia de la Escuela Nacional Preparatoria, resultó imperioso desde que comenzó el proyecto Aleph 5 en la ENP, pues hasta ahora no existe un documento que integre y articule el campo de Matemáticas en la ENP; los únicos documentos donde actualmente se exponen los estándares para el bachillerato universitario es el del SUMEM (2014), el cual agrupa los estándares en tres partes que corresponden vagamente a los tres años de la ENP, así como el trabajo de Alvarado, Sánchez y Lugo (2019), donde se describe el modelo educativo de Matemáticas que orienta los programas actuales.

En este sentido, una de las principales aportaciones al currículo, a partir del trabajo del Proyecto Aleph5, es ofrecer una visión integral del campo de Matemáticas en la ENP; así como conectar y articular los aprendizajes al logro del perfil de egreso de la ENP. De modo, que permita una mayor integración y progresión de la práctica docente a lo largo de los 3 años del bachillerato. Pues de acuerdo con Castro (2019) y Téllez (2019) las ventajas de articular los aprendizajes favorecen una práctica coherente e integrada en la comunidad docente; para el logro exitoso del perfil de egreso.

Frente a dicho escenario y después de los 2 años de trabajo, hablaré sobre el enfoque particular de matemáticas en la ENP, así como la transversalidad horizontal y vertical que se propone en este campo, para integrar la práctica docente a lo largo de los 3 años del bachillerato (Matemáticas IV, Matemáticas V y Matemáticas VI-Área I y II); y de este modo formar a estudiantes capaces de matematizar la realidad.

8.2.2. La Matematización como Perfil de Egreso en Matemáticas de la ENP: Alcances y Limitaciones.

De acuerdo con el documento de Estándares para el bachillerato universitario, las matemáticas deben presentarse a los estudiantes como una visión integradora. Donde las áreas clásicas, interactúan y se apoyan entre ellas para resolver un problema. Respondiendo a ello, es que esquematizamos las siguientes dimensiones que integran el modelo educativo del campo de Matemáticas y tener un perfil definido de los programas de Matemáticas.

A pesar de las actualizaciones programáticas de los últimos años, el perfil de egreso de la Escuela Nacional Preparatoria sigue manteniéndose intacto desde 1996. Por lo que se tuvo dificultades al querer articular los planes de estudios de matemáticas y comprender la totalidad del campo. Pues al vincular los programas actualizados y los organizadores curriculares, con el perfil de egreso de la ENP, estos no correspondían.

A partir de esta problemática y la evidencia de los 2 años de trabajo en la Escuela Nacional Preparatoria, vemos la necesidad de articular el perfil de egreso a los núcleos, campo de conocimiento de matemáticas, etapas de formación y ejes transversales actualizados. De tal manera, que al pensar en cualquiera de los niveles que componen el plan de estudios, de inmediato se incluyan a todos aquellos que lo constituyen.

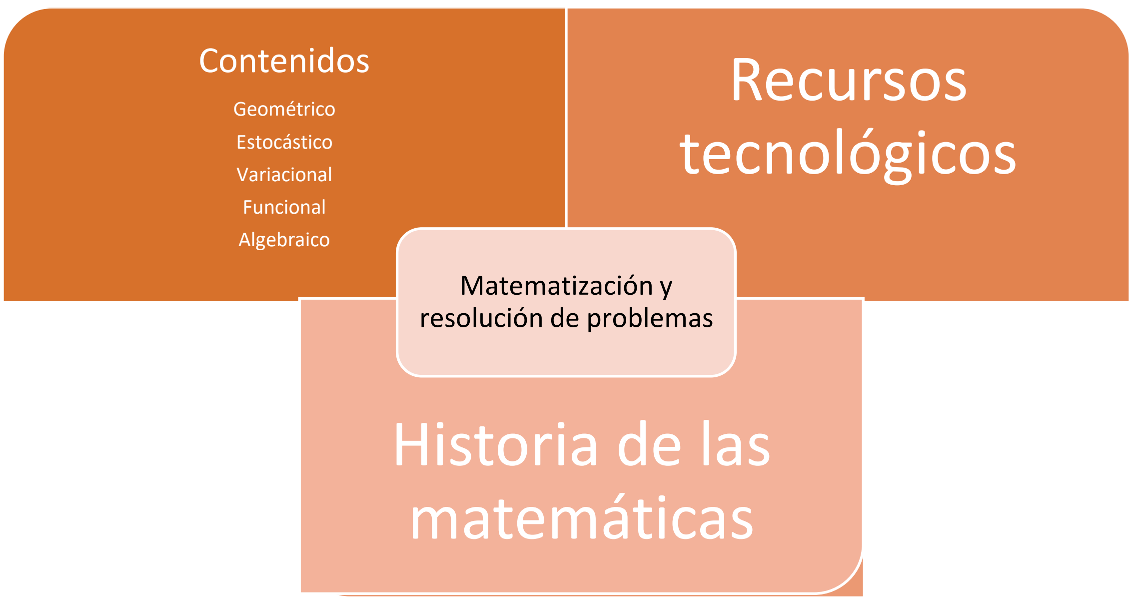
Con base a las tendencias nacionales e internacionales, así como por el papel histórico y social que tiene la Escuela Nacional Preparatoria en el país; se propone la siguiente integración en el campo de Matemáticas.

El enfoque que actualmente tiene la ENP en Matemáticas, busca formar ciudadanos informados, con interés por comprender su entorno natural y social, comprometidos con la solución de grandes problemas de su época para analizar situaciones, evaluar posibilidades, hacer uso de la tecnología y posicionarse crítica y responsablemente ante los retos de la sociedad del siglo XXI.

Para el logro de ello, el campo se conforma a través de las siguientes dimensiones:

Figura 36

Campo de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria



La matematización y la resolución de problemas se encuentran en medio, porque es a través de esta metodología que se articulan el resto de las dimensiones. Dicha metodología se basa en el Enfoque de Matemáticas Realistas (EMR) el cual presenta a las matemáticas como un proceso y resultado de las actividades matemáticos. A través de los contenidos se irán especializando algunos procesos de la matematización, por lo que es necesario que en futuras investigaciones se investigue sobre cómo cambia la actividad de matematizar con las diferentes disciplinas.

Partir de este enfoque resulta imprescindible tanto para los estudiantes que cursaran estudios superiores en matemáticas o algunas ingenieras, así como para la mayoría de los estudiantes que utilizarán las matemáticas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana; pues dicho proceso de matematización, incluye tanto el plano concreto como abstracto de las matemáticas; lo que nos permite integrar las grandes ideas matemáticas para matematizar el mundo, y un plano donde interactúan las diferentes representaciones que ofrecen las matemáticas.

Por lo tanto, familiarizar a los estudiantes con un enfoque matemático y a su vez situarlo dentro de tipo de problemáticas, merece tener la máxima prioridad en la educación matemática.
Pues también nos permite continuar con el papel histórico que ha tenido la ENP en el país, ya que la institución tiene la responsabilidad de formar a universitarios bajo un espíritu crítico y autónomo, con herramientas que les permita tomar decisiones como ciudadanos responsables, así como comprender problemáticas en los estudios superiores como la degradación ambiental, los riesgos y desastres naturales, los desafíos demográficos, la violencia de género, la desigualdad creciente y el narcotráfico.

Por lo que es fundamental devolver el carácter humano a la universidad y poner al servicio del pueblo la cultura y el saber. Para ello, es necesario reconocer el componente crítico en los campos de las “ciencias duras”, como las matemáticas. A través del diseño de Ambientes Complejos de Aprendizaje que construyan sujetos capaces de trascender su conocimiento y que se posicionen como ciudadanos en términos críticos- éticos que enfatice el compromiso, responsabilidad y cuidado de los otros. Especialmente en la época actual, que se exige una participación pública, comprometida con el impacto de las diferentes y controvertidas realidades sociales como las de América Latina.
En estas mismas acciones académicas, resaltamos la importancia de identificar el campo de humanidades en el currículo de la ENP para conjugar la misión social y cultural de la universidad con los avances tecnológicos, y así, hacer presente el lema, por nuestra raza hablará el espíritu.

8.2.3. Líneas de Aprendizaje para la Transversalidad Horizontal y Vertical

Respecto a la segunda problemática de articulación de las asignaturas, se propuso inicialmente un modelo tridimensional, que nos permitiera movernos en el plano horizontal y en el plano vertical. No obstante, a partir de ese ejercicio, tuvimos algunas limitaciones para graduar los aprendizajes ya que los programas aún se organizaban en contenidos. Por lo que a continuación, describimos algunas áreas de oportunidad-con base a lo observado- para articular las asignaturas de Matemáticas de manera teórica y práctica en un plano vertical y horizontal.

Con relación a la transversalidad vertical, concluimos que las etapas formativas aún corresponden a las asignaturas actuales de la Escuela Nacional Preparatoria, pues Matemáticas IV se encarga de dar las bases a las líneas de pensamiento algebraico (expresiones algebraicas y funciones), variacional y los números reales para contar medir y comparar. Así como una introducción de conceptos para el pensamiento estocástico.

De este año, el único pensamiento que no comienza en esta etapa formativa es Geometría euclidiana, correspondiente a la Unidad 1 de Matemáticas V. Por lo que concluimos, que la actualización de los programas aún arrastra la lógica disciplinar con las que se organizaban las asignaturas, y no pone en frente a los procesos de matematización.

Como respuesta a ello, se diseñaron secuencias para Matemáticas IV que introdujeran conceptos geométricos, de tal forma que se prioriza la etapa formativa y el modelo educativo en matemáticas: matematización y solución de problemas.

Continuando con Matemáticas V, varias de sus unidades funcionan como orientación propedéutica para Matemáticas VI de área 1 y 2; principalmente aquellas relacionadas al pensamiento variacional y funcional. A diferencia de las otras asignaturas que se encuentran en la etapa de formación propedéutica (Matemáticas de área 3 y área 4), cumplen con especializar en la formación, pero no es tan claro en sus programas como se articulan con Matemáticas IV y Matemáticas V. Por lo que quedará pendiente cuando se lleve a cabo el diseño y análisis de las asignaturas mencionadas para reconstruir y apreciar los programa con la actividad escolar en su conjunto.

Conjugar de manera explícita los aprendizajes junto con las etapas formativas de la ENP se vuelve un área de oportunidad en el currículo para integrar el plan de estudios y por tanto la práctica de los docentes. Ya que actualmente, los documentos disponibles siguen sujetos a la dimensión de contenidos y no a las actividades o problemáticas matemáticas.

En este sentido, es importante que la transversalidad vertical ponga al centro a la matematización, para que el estudiante elija la herramienta matemática adecuada frente a cualquier contexto o problemática, ya que en el mundo real las actividades matemáticas no

aparecen fragmentadas en disciplinas. En consecuencia, creemos que esto puede ayudar a superar la lógica positivista de la Escuela Nacional Preparatoria.
De igual forma, es importante señalar, que, bajo este modelo educativo, los procesos relacionados a la abstracción y el razonamiento lógico año con año se complejizarán. Al poderlos trabajar durante los 3 años del bachillerato.

Por otro lado, es importante retomar los hallazgos que se tuvieron sobre la gradualidad horizontal de las asignaturas. Dicha gradualidad, se construyeron a partir de las líneas de aprendizaje, las cuales consideraron la historicidad del programa de Matemáticas V, los aprendizajes antecedentes y consecutivos; así como la metodología de enseñanza-aprendizaje que está detrás de los programas. El propósito para construir estos proyectos era para identificar las diferentes oportunidades de aprendizaje a lo largo del curso, y, además, para planear en el plano especifico y general las condiciones que promuevan el pensamiento matemático de manera intencionada.

Conforme al análisis realizado en estos 2 años, se caracterizaron las siguientes 4 dimensiones que permitieron la graduación de los aprendizajes a lo largo del ciclo escolar.

Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas en diferentes contextos.

Es importante mencionar, que dicha propuesta surge a partir de nuestra unidad de análisis y conclusiones sobre cómo se construye el conocimiento. Por lo que la gradualidad que actualmente se propone, no se encuentra sujetada a los estadios o niveles cognitivos del pensamiento, sino a la relación del estudiante con el entorno y el sistema matemático. En este sentido, la capacidad del estudiante dependerá de las condiciones construidas por la docente en el plano específico y general.

En el caso particular de Matemáticas V, nos percatamos del poco tiempo que se tiene para alcanzar la apropiación del lenguaje de manera homogénea en el grupo, así como para la comprensión profunda de las matemáticas que se ven en Matemáticas V. Si bien, esto tuvo implicaciones en el diseño de las secuencias, con el diseño de material educativo que permitiera el tránsito del lenguaje natural a abstracto (ej. GeoGebra u objetivaciones) la construcción colectiva y la inserción de registros con la estructura argumentativa disciplinar; debe reconsiderarse en el programa la cantidad de disciplinas que se ven en ese año, pues no da tiempo de lograr un pensamiento matemático abstracto de cada una de ella; o bien, definir el nivel de formalización que se espera de cada disciplina de Matemáticas V.

A continuación, hablaré sobre una herramienta tecnológica donde se concretizará la comprensión de los programas de Matemáticas, así como los avances que se van teniendo con el proyecto de Ambientes Complejos de Aprendizaje. De tal forma que no sólo se explique “qué matemáticas se enseñan en la ENP” sino el “como enseñar matemáticas en la ENP”. Dicha herramienta, además de permitirnos desarrollar el currículo en los planteles de la ENP, se convertirá en una herramienta para la mejora continua.

8.2.4. Página como Herramienta para la Mejora Continua Curricular

Para finalizar, es importante hablar del papel de la página WIX en el desarrollo curricular y su utilidad para conformar una comunidad en la Escuela Nacional Preparatoria. Así como algunas consideraciones para la apropiación y generación de significados de dicha herramienta tecnológica.

Como ya se mencionó en capítulos anteriores, la página WIX busca responder al bajo impacto de las actualizaciones curriculares en las prácticas educativas del bachillerato y a la poca participación de la comunidad educativa en la evaluación y diseño curricular (Díaz Barriga, 2010). Por lo que la construcción de nuestra página web integro una serie de multimedia que permita brindar a los actores curriculares una aproximación más diversificada a los contenidos informativos de los programas.

Además de informar, este espacio busca que en los siguientes años la comunidad educativa de la Escuela Nacional Preparatoria se apropie de esta herramienta para comprender su currículo y compartir experiencias educativas a través de tecnologías asociadas a la comunicación y la colaboración virtual. Para ello, se deberá trabajar con la página WIX durante las sesiones formativas que se tengan con los docentes para que comience a cobrar significado y sentido la herramienta.

Para los siguientes años, se espera que en los procesos de formación docente se incorpore dicha herramienta para que la comunidad docente haga uso del sitio web para comprender los programas, y además cuente con los resultados que se proporcionan desde el Proyecto Aleph 5, para poder implementar en sus aulas los entornos de aprendizaje.

En síntesis, el diseño de esta herramienta busca integrar y actualizar continuamente los resultados hallados dentro del proyecto Aleph.

Otra de las tareas a futuro, es buscar y diseñar una mayor integración de los distintos signos y códigos disponibles, con el objetivo de multiplicar las posibilidades de comunicación en este proceso de negociación de significados para que los docentes se conviertan en interlocutores y no únicamente agentes pasivos de información.

8.2.5. Formación Docente a través de la IBD Colaborativa

Como ya se ha mencionado, la falta de logro de aprendizajes en matemáticas reviste una gran complejidad, porque no sólo implica la creación de una herramienta-teórica prescriptiva. Para que se produzca una innovación asimilable, es preciso examinar las condiciones reales y dinámicas en las que ocurre la construcción de significados y los factores que influyen al sistema educativo. Para que, en consecuencia, se edifiquen puentes transitables entre las innovaciones y las prácticas educativas en nuestras aulas.

Uno de los principales actores que permitirán un tránsito entre las innovaciones y las prácticas educativas son la planta docente. Por lo que la formación de estos agentes ha resultado una herramienta indispensable para mejorar las prácticas educativas en diferentes instituciones. No obstante, de acuerdo con una evaluación estadounidense, se concluyó que la mayoría de los programas efectivos no son “talleres de una sola vez”: son sostenidos, intensos e integrado en el plan de estudios (Darling-Hammond et al., 2009 en Popova et.al, 2019).

En este sentido, resulta pertinente articular la práctica docente a través del co-diseño, co-implementación y co-análisis tanto en el plano específico como general para que la formación sea sostenida durante todo el ciclo escolar. Lo que permitirá garantizar, al final, un mayor logro de aprendizajes. A su vez, esta formación deberá ser integral, de ahí la relevancia de articular las asignaturas para que se conozcan las diferentes oportunidades de aprendizaje a lo largo de los 3 años, y podamos garantizar el logro del perfil de egreso a través de una práctica consistente.

Además de recibir una retroalimentación constante y guiarlos para reflexionar sobre su práctica, también es necesario que se reconozcan como investigadores de los procesos de aprendizaje para que se apropien de las innovaciones educativas y además tengan una mayor agencia en los diseños de innovaciones educativas, así como em la creación de investigación auténtica. Es por ello, que su participación debe insertarse dentro de las fases metodológicas y bajo el marco teórico de los Entornos de Aprendizaje; tanto para una implementación más exitosa, como para el desarrollo de investigación educativa- pertinente a las prácticas de alta complejidad.

Si bien, ya habíamos conceptualizado desde capítulos anteriores sobre la metodología de diseño colaborativa, y los espacios de reflexión que se llevarían a cabo. Aún quedan retos para consolidar nuestro colectivo de investigadores-docentes en Matemáticas. Uno de ellos, relacionado a los “obstáculos ideológicos” Freire (2010), los cuales han sido construidos, a lo largo de la historia de las instituciones educativas, y han resultado en ser un factor que imposibilita una agencia activa por parte de los docentes. Pues los espacios de formación docente se han caracterizado por ser guías prescritas o paquetes, que sólo deben ayudarles a implementar innovaciones o herramientas educativas. Lo que ocasiona que no impacten en su práctica docente y su autonomía se limite.

Lo que inferimos, trae como consecuencia, que los proyectos intensos y sostenidos a lo largo del ciclo escolar, como es el de Entornos Complejos de Aprendizaje, resulte “poco práctico” frente a muchas otras demandas administrativas. Además, es importante resaltar, que este proyecto no da incentivos institucionales, lo que también puede llevar a que los profesores prefieran aquellas actividades que si los tienen.

Otra de las implicaciones que se tendrá para unir la práctica de nuestro colectivo docente, es aumentar aquellos espacios colectivos; para co-diseñar. Pues es en esta fase donde se construyen y comparten todas las posibilidades de aprendizaje. En este sentido, resulta imperioso, diseñar en colectivo la trayectoria hipotética que irá teniendo el estudiante a lo largo de la secuencia para organizar en lo posible las condiciones y acciones simbólicas de la Actividad.

En síntesis, este trabajo que se inserta en los primeros años de investigación en la Escuela Nacional Preparatoria aún no evalúa el impacto de la intervención; no obstante, los 2 años de la intervención donde el proceso metodológico fue cíclico, nos permitió validar en 2 ocasiones los elementos teóricos que crean las condiciones de aprendizaje en los Ambiente Complejos de Aprendizaje.

A partir de estas observaciones, esta tesis evidencia la necesidad de incorporar en los siguientes ciclos de diseño un mayor andamiaje de medios semióticos en las actividades para alcanzar y profundizar en un plano abstracto, y que, además, las acciones de los estudiantes se despeguen del plano material de la actividad societal matemática. Pues una vez que los estudiantes transiten de un lenguaje natural a un lenguaje matemático para matematizar, es necesario que los estudiantes conecten o profundicen en ideas matemáticas para aplicar su conocimiento en diferentes contextos, totalmente diferentes al que iniciaron.

Por tanto, en los siguientes co-rediseños, aludiremos a dos aspectos más para profundizar en este plano, una vez que lleguemos a él; la generalización de algoritmos, teoremas o modelos y el segundo, la comprensión y conexión de ideas matemáticas. Si bien es cierto que se ha hecho alusión a la importancia que tiene la Actividad como el medio indispensable y la condición material para promover el pensamiento matemático, es factible que las acciones en el último año se vuelvan abstractas para trascender del plano material de la Actividad.

De igual forma, el enfoque de Co-teaching que se introdujo a mitad del segundo ciclo metodológico, nos permitió validar los supuestos teóricos y los elementos de la investigación educativa. Lo que abre la posibilidad de trabajar desde un marco metodológico interdisciplinario y de la complejidad, pero también, una mejor comprensión e impacto en las prácticas educativas.

Sin duda, estos primeros hallazgos y consideraciones se vuelven herramientas para seguir operando y mejorando la práctica educativa en la Escuela Nacional Preparatoria tanto a un nivel curricular como en el aula misma. La posibilidad de impactar en ambos niveles no hubiera sido posible por la categoría de Ambientes Complejos de Aprendizaje, así como por la metodología de Investigación Basada en Diseño, las cuales nos permitieron organizar las interacciones de los elementos aún no sistematizados de las prácticas auténticas de la ENP.
Por tanto, los primeros hallazgos de los Ambientes Complejos de Aprendizaje en la Escuela Nacional Preparatoria ofrecen en un primer momento, las bases para construir una vía auténtica de investigación e implementación en la ENP; y a su vez, desarrollar las capacidades matemáticas que permitan a los alumnos participar en las diferentes y controvertidas realidades sociales como las de América Latina.

Referencias

Abreu, J. y Bracho, J. (2016). *Una propuesta para mejorar la educación matemática* [Archivo PDF]. http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/UnaPropuesta.pdf

Abreu, J., Apodaca, N., Bracho, J., Fautsch, E., Guevara, M., Hernandez, D., Hernández, M., Marmolejo, E., Miranda, A y Rajsbaum, S. (2016). *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM.* [Diapositiva PowerPoint]. http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/Estandares-Presentacion.pdf

Acevedo, E. (2016). *Innovación tecnológica, economía y sociedad: una reflexión necesaria para CTS*. Recuperado el 28 de abril de 2019 de http://otrasvoceseneducacion.org/archivos/108209

Allmendinger, H. (2019) Examples of Klein's Practice *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint: Volume I*. In: Weigand HG., McCallum W., Menghini M., Neubrand M., Schubring G. (eds) The Legacy of Felix Klein. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_14

Alvarado, C., Sanchez, L., Lugo, M. (2019, 5-10 de mayo). *Actualización de los programas de estudio de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: retos y horizontes.* XV CIAEM-IACME, Medellín, Colombia. https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1035/161

Arıcı, S., Aslan-Tutak, F. (2015). THE EFFECT OF ORIGAMI-BASED INSTRUCTION ON SPATIAL VISUALIZATION, GEOMETRY ACHIEVEMENT, AND GEOMETRIC REASONING. *International Journal of Science and Mathematic Education*, 13, 179–200. https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1007/s10763-013-9487-8.

Arboleda, L. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática, En Recalde, L. y G. Arbelaez (Eds.), Los Números reales como objeto matemático, Cali, Programa editorial Universidad del Valle, pp. 19-38.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?. *Educación Matemática*, 16(3),5-28. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40516302.

Arteaga, M. (2005). Modelo tridimensional de transversalidad. *Investigación y Postgrado*, *20*(2), 241-274. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872005000200009&lng=es&tlng=es.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2017). *ACARA-Curriculum.* https://www.acara.edu.au/curriculum

Avila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28(3),31-59. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40548562002

Bakker, A. y van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. *Approaches to Qualitative Research in Mathematics*, 429–466. 10.1007 / 978-94-017-9181-6_16

Bater, J & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Mathematics teacher education*, 13, 7–26. DOI 10.1007/s10857-009-9121-4

Bell, C & Pape, S. (2012). Scaffolding students' opportunities to learn mathematics through social interactions. *Mathematics Education Research Group of Australasia.* 24, 423–445. DOI 10.1007/s13394-012-0048-1

Berná, C. y Fernández, C. (Septiembre, 2011). *Semiótica del e-learning: El universe signolético de Moodle.* Actas del II Congreso Internacional Sociedad Digital (Vol.1), Madrid, España. https://books.google.com.mx/books?id=wSiVAwAAQBAJ&lpg=PT187&dq=semiotica%20y%20la%20hipermedia&lr&hl=es&pg=PT187#v=onepage&q=semiotica%20y%20la%20hipermedia&f=false

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be thought or learned? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

Booth, J; Lange, K; Koedinger, K; Newton, K. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction*, 25, 24-34.

Bracho, T., y Miranda, F. (2012). La educación media superior: situación actual y reforma educativa. En M. A. Martínez E., (Eds.). *La educación media superior en México. Balance y perspectivas*. Fondo de Cultura Económica-Secretaría de Educación Pública.

Bracho, J; Abreu León, J; Barot, M; Espejel, R; Marquina, M; Martínez, M; Morán, J; Núñez, M; Rajsbum, S; Bribieca, E; Galaivz, J; Solsona, F. (2010). *Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales. Matemáticas, Física y Computación.* (1a ed., Vol. 5). Universidad Nacional Autónoma de México.

Búa, J., Fernández, B., y Salinas Portugal, J. (2016). Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(2), 135-164. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1921

Buzo, E y Campillo, M. (septiembre, 2016). “Vinculación Bachillerato-Licenciatura: Visión desde la Coordinación de Desarrollo Educativo e Innovación Curricular”. El pensamiento matemático, una oportunidad de diálogo entre el Bachillerato y la Licenciatura. Simposio llevado a cabo en la conferencia de SUMEM, Facultad de Estudios Superiores Aragón.

Camacho-Ríos, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales: Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista iberoamericana de educación superior*, 2(3), 152-171. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-28722011000100008&lng=es&tlng=es

Camargo, L., y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32). https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865.

Cantoral, R. (2013). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. SEP. http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_del_pensamiento_y_leng_v_smc_baja.pdf

Cantoral, R. (2016). Presentación. Educación alternativa: matemáticas y práctica social. *Perfiles Educativos*, 38 (Número especial), 7-18. https://www.redalyc.org/pdf/132/13250921002.pdf

Cárdenas Lugo, L. (2020). Análisis del desarrollo de la capacidad de realizar actividades científicas: un proyecto de biología en preescolar. [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM. http://132.248.9.195/ptd2020/septiembre/0803282/Index.html

Castro Ávila, M. (2019). Comprensión de la práctica docente en el campo de pensamiento matemático en preescolar desde una perspectiva sociocultural. [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM. http://132.248.9.195/ptd2019/abril/0787908/Index.html

Chaves, E. & Salazar, J. (2004). La historia de la matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza aprendizaje: una experiencia en secundaria. *Uniciencia*, 20 (1), Marco internacional.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Aique.

Círculos matemáticos del Instituto de Matemáticas. (2 de Enero de 2020). ¿Qué es un círculo matemático?. http://www.circulosmatematicos.matem.unam.mx/

Coordinación de Desarrollo Educativo e Innovación Curricular. (2018). Resultados diagnósticos de conocimiento. UNAM

Coll, C. & Monereo, C. (2008). Psicología de la educación virtual. Morata.

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2020). Repensar la evaluación para la mejora educativa. Resultados de México en PISA 2018; https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/pisa-final.pdf

Coordinación de Universidad Abierta, Innovación Educativa y Educación a Distancia. (20 de julio de 2021). *Función senoidal, amplitud y longitud de onda.* http://uapas1.bunam.unam.mx/matematicas/funcion_senoidal_amplitud/#:~:text=La%20funci%C3%B3n%20seno%2C%20f(x,intervalo%20de%20longitud%202%CF%80

Design-Based Research Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5–8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria UNAM. (2021). *Acerca de la ENP*. Recuperado el 12 de noviembre del 2019 de http://dgenp.unam.mx/acercaenp/index.html

Díaz-Barriga Arceo, Frida (2010). Los profesores ante las innovaciones curriculares. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, I (1),37-57. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2991/299128587005

Díaz-Barriga, A. (2021). Andares curriculares en América Latina. *Revista Enfoques Educacionales*, 17(2), 1-14. doi:10.5354/0717-3229.2020.60634

Díaz Barriga, F., Soto, F., Díaz, A. (2015). Actores del currículo: Los estudiantes universitarios reflexionan sobre su trayecto curricular a través de relatos digitales personales. http://hdl.handle.net/20.500.12579/4494

Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, 13-25. http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

DOF. (2008). Acuerdo 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad. D*iario Oficial de la Federación*. [Modificaciones 17 de octubre de 2008.]

Dunphy, B y Dunphy, S. (2003). Assisted Performance and the Zone of Proximal Development (ZPD); a Potential Framework for Providing Surgical Education. *Australian Journal of Educational & Developmental Psychology,*3, 48 -58.

Escuela Nacional Preparatoria. (1997). Plan de estudios 1996. UNAM.

Escuela Nacional Preparatoria. (2016). Plan de estudios: Matemáticas IV 1996. UNAM.

Escuela Nacional Preparatoria. (2017). Plan de estudios: Matemáticas V 1996. UNAM.

Escuela Nacional Preparatoria. (2017). Plan de estudios 1996: Matemáticas VI. UNAM.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 10.1080/13639080020028747

Engeström, Y. (1987). Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research. Helsinki: Orienta Konsultit.

Fang, Z., & Chapman, S. (2020). Disciplinary literacy in mathematics: One mathematician's reading practices. *The Journal of Mathematical Behavior*10.1080/13639080020028747, 59, 100799. doi:10.1016/j.jmathb.2020.100799

Farfán, R. (s.f). *LENGUAJE GRÁFICO DE FUNCIONES. ELEMENTOS DE PRECÁLCULO* [Archivo PDF]. https://www.cecytejalisco.mx/documentos/academicos/vol1rfarfan.pdf

Farfán, R & Romero, F. (2016). El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente. *Perfiles educativos,* 38(spe), 116-139. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982016000500116&lng=es&tlng=es

Faten Khalloufi-Mouha & Hikma Smida. (2012). Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact, *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 16:2, 207-224, DOI: 10.1080/10288457.2012.10740740

Fatade, A., Mogari, D. y Arigbabu, A. (2013). Effect of Problem-Based Learning on Senior Secondary School Students' Achievements in Further Mathematics*. Acta Didactica Napocensia*, 6(3), 27-44.

Figueroa, M. (1997). *Evaluación curricular: Una propuesta*. [ponencia]. Memorias del II Encuentro de Unidades de Planeación. México.

Flores, J. (2018). Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. *ICME-13 Monographs*, 217–233. doi:10.1007/978-3-319-70287-2_12

Flores, J. & Almonacid, A. (2020). Espacio de trabajo matemático: una tarea de modelización sobre función cuadrática. *Transformación*, *16*(2), 256-274.

Frank, K. (2017). Examining the Development of Students' Covariational Reasoning in the Context of Graphing. [Tesis de doctorado, Universidad Estatal de Arizona]. ProQuest. https://www.proquest.com/docview/1949775615

Freire, P. (2010). Cartas a quien pretende enseñar. Siglo XXI.

Freudenthal, H. (1991) Revisiting mathematics education. China lectures. Kluwer, Dordrecht

García, I. (2010). *Promoción del razonamiento matemático en niños preescolares de un centro de desarrollo infantil en la delegación Iztacalco: una perspectiva situada.* [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM- Universidad Nacional Autónoma de México http://132.248.9.195/ppt2002/0720297/Index.html

Gagatsis A., Nardi E. (2016). Developmental, Sociocultural, Semiotic, and Affect Approaches to the Study of Concepts and Conceptual Development. In: Gutiérrez Á., Leder G.C., Boero P. (eds) The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_6

García, R. (2011). Interdisciplinariedad y sistemas complejos. *Revista Latinoamericana de Metodología de las Ciencias Sociales*, 1, 1. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.4828/pr.4828.pdf

Godino J. , Batanero C., Contreras A., Estepa A. Lacasta E., Wilhelmi M. (2013) Didactic engineering as design-based research in mathematics education. CERME 8, Turquía.

González, G., Barba, J., Rodríguez, H. (2015). La importancia del aprendizaje reflexivo en el Prácticum de Magisterio: una revisión de la literatura. *Revista de docencia universitaria*, 13 (3), 147-170.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32(6), 777–796.* doi:10.1080/00220270050167170

Grupo de Investigación en Semiótica UNL. (2020). *Semiótica General 2021 Umberto Eco* [video]. YouTube. https://youtu.be/-y5ahy-cFE0

Grupo SM. (2018). Simon Stevin 1548-1620. Recuperado el 2 de abril del 2021 de https://centroderecursos.educarchile.cl/handle/20.500.12246/54483

Guerrero, C., Mena, J., y Morales, A. (2017). Fostering Transit between Real World and Mathematical World: Some Phases on the Modelling Cycle. *International Journal of Science and Mathematics Education*. doi:10.1007/s10763-017-9856-9

Herbst, P., González, G., Hsu, H y Chen, C, Weiss, M y Hamlin, M. (2010). Instructional situations and students' opportunities to reason in the high school geometry class. Manuscript. Universidad de Michigan.

Herrera, A, Soto, J y Parra, P. (2020). El Campus virtual de la FES Zaragoza-UNAM: Innovación en la organización. *Revista Colombiana De Computación*, *21*(1), 35-45. https://doi.org/10.29375/25392115.3897

Herceg, Đ. & Dejana, H. (2020). Arduino and Numerical Mathematics. *Informatics in Education*, 19 (2), 239-256. https://doi.org/10.15388/infedu.2020.12.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2012). Desempeño de estudiantes PISA grado 12. INEE, https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2018/12/P1D313.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2017). Informe de resultados PLANEA 2015. El aprendizaje de los alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemática. INEE, https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D246.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2017). México en PISA 2015. INEE, https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D316.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2018). La implementación del Marco Curricular Común en los planteles de la educación media superior. INEE, https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/06/P1D248.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2019). Informe de resultados PLANEA EMS 2017. El aprendizaje de los alumnos de educación media superior en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas. INEE, http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF

Jensen, J. (2017). TEACHERS' USE OF REASONING-BASED QUESTIONS IN PROCEDURAL AND CONCEPTUAL LESSONS. [Tesis de doctorado, The University of Iowa Iowa City]. Semantic Scholar. https://iro.uiowa.edu/esploro/outputs/doctoral/Teachers-use-of-reasoning-based-questions-in/9983776725802771#file-0

Jelatu, S., Sariyasa, & Ardana, I. M. (2018). Effect of GeoGebra-Aided REACT Strategy on Understanding of Geometry Concepts. *International Journal of Instruction*, 11(4), 325-336.

Jurado, S. E. (2016). INFORME DE ACTIVIDADES 2015-2016. UNAM, https://www.planeacion.unam.mx/informes/PDF/ENP-2015-2016.pdf

Jurado, S.E. (2013). Diagnóstico del Plan de Estudios 1996 de la ENP. Recuperado del sitio de internet de Proyecto de Modificación Curricular http://proyectomc.dgenp.unam.mx/

Juuti, K., Lavonen, J., y Meisalo, V. (2016). Pragmatic Design-Based Research – Designing as a Shared Activity of Teachers and Researches. En D. Psillos, & P. Kariotoglou (Eds.), *Iterative Design of Teaching-Learning Sequences: Introducing the Science of Materials in European Schools* (pp. 35-46). Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7808-5_3

Lizarazo, D. y Andión, M. (2013). *Símbolos digitales. Representaciones de las TIC en la comunidad escolar*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Kilpatrick J. (2019). A Double Discontinuity and a Triple Approach: Felix Klein's Perspective on Mathematics Teacher Education. En: Weigand HG., McCallum W., Menghini M., Neubrand M., Schubring G. (Eds) The Legacy of Felix Klein. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_15

Kinach, B. (2018). Progressive Visualization Tasks and Semiotic Chaining for Mathematics Teacher Preparation: Towards a Conceptual Framework. En: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (Eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Lensing, F., & Straehler-Pohl, H. (2018). Towards an Ethics of Mathematical Application. ICME-13 Monographs, 35–51. doi:10.1007/978-3-319-72610-6_3

Leyva, Y., y Guerra, M. (Coords.) (2019). Práctica docente en educación básica y media superior. Análisis de autorreportes de la Evaluación del Desempeño 2015. INEE. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/08/P1C158.pdf

Linares, J. (2010). Matemáticas. En J. Labastida y R. Ruíz. (Eds.), Enciclopedia de conocimientos fundamentales: UNAM-Siglo XXI (pp. 91-116). Ciudad de México, México: Siglo veintiuno editores.

Lizarzaburu, A. (2001). Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina: experiencias y desafíos. Ediciones Morata.

Mariotti, M.A., Durand-Guerrier, V., &; Stylianides, G.J. (2018). Argumentation and proof. En Dreyfus, T., Artigue, M., Potari, D., Prediger, S., Ruthven, K. (Eds.). *Developing Research in Mathematics Education.* London: Routledge, https://doi.org/10.4324/9781315113562

MacDonald, A. y Carmichael, C. (2017). Early mathematical competencies and later achievement: insights from the Longitudinal Study of Australian Children. *Mathematics Education Research Journal*, 30(4), 429-444. Doi: 10.1007/s13394-017-0230-6

Ministry of Education. (2007). The Ontario Curriculum Grades 11 and 12: Mathematics. Recuperado el 3 de octubre del 2019 de https://www.ontario.ca/page/ministry-education

Mills, J. (2019). Making multiplication meaningful: Teaching for conceptual understanding. *Teachers and Curriculum,* 19(1), 17-25.

Mochón, S & Bonifacio, T. (Noviembre, 2007). *La variación y su razón de cambio: un estudio con alumnos de secundaria* [ponencia]. Memorias del IX Congreso Mexicano de Investigación Educativa, Yucatán, México.

Montiel, G. (s.f.) DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO [Archivo PDF]. https://www.cecytejalisco.mx/documentos/academicos/vol2gmontiel.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Neve, C. y Rosales, L. (2017). Por la senda de los círculos. Papirhos.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2006). PISA 2006 MARCO DE LA EVALUACIÓN: Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. https://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2017). Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias. Versión preliminar. Paris: OECD.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2016). PISA 2015 results: Excellence and Equity in Education (Vol. I). Paris: OECD.

Penuel W.R. (2019) Co-design as Infrastructuring with Attention to Power: Building Collective Capacity for Equitable Teaching and Learning Through Design-Based Implementation Research. En: Pieters J., Voogt J., Pareja Roblin N. (Eds) Collaborative Curriculum Design for Sustainable Innovation and Teacher Learning. Springer.

Pesina, B.M. (2019). *Uso de medios semióticos en el desarrollo del pensamiento científico en preescolar*. [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM. http://132.248.9.195/ptd2019/junio/0790049/Index.html

Pfannkuch, M. (2011). The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 27–46. doi:10.1080/10986065.2011.538302

Piaget, J y García, R. (2004). Psicogénesis e historia de la ciencia. Siglo XXI.

Popova, A., Evans, D., Breeding, M., Arancibia, V. (2019). Teacher Professional Development around the World: The Gap between Evidence and Practice. Center for Global Development https://www.cgdev.org/publication/teacher-professional-development-around-world-gap-between-evidence-and-practice

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.-M., & Kadunz, G. (2016). Semiotics in mathematics education. ICME-13 topical survey. Springer Open.

Puig, L. (1997). Semiótica y Matemáticas *[Archivo PDF].* http://cuaed.unam.mx/math_media/anexos/articulos/semiotica_matematicas.pdf

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation*. Educational Studies in Mathematics*, 80(1–2), 101–118.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (núm.Esp.), 103-129. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2161545

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.

Radford, L. (2018). *Semiosis and Subjectification: The Classroom Constitution of Mathematical Subjects. ICME-13 Monographs, 21–35.* doi:10.1007/978-3-319-70287-2_2

Rinaudo, M., y Donolo, D. (2012). Estudio de Diseño. Una perspectiva prometedora en la investigación educativa. *Revista de Educación a Distancia*, 1-29.

Rinaudo, M.C. y Donolo, D. (2010). Estudios de diseño. Una perspectiva promisoria en la investigación educativa. RED - *Revista de Educación a Distancia*, 22, http://www.um.es/ead/red/22

Rivera, K. (2012). *Estudio del desarrollo de las competencias científicas en niños preescolares: una perspectiva sociocultural*. [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM. http://132.248.9.195/ptd2013/Presenciales/0691397/Index.html

Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En J. Wertsch; P. Del Río. y A. Álvarez, La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas. Fundación Infancia y Aprendizaje.

Roth, W., Lawless, D., y Tobin, K. (2000). {Coteaching | Cogenerative Dialoguing} as Praxis of Dialectic Method. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research, 1*(3). doi:http://dx.doi.org/10.17169/fqs-1.3.1054

Roth, W.-M., y Tobin, K. (2001). *Learning to teach science as practice. Teaching and Teacher Education, 17(6), 741–762.* doi:10.1016/s0742-051x(01)00027-0

Roth, W.-M., y Lee, Y.-J. (2007). *“Vygotsky’s Neglected Legacy”: Cultural-Historical Activity Theory. Review of Educational Research, 77(2), 186–232.* doi:10.3102/0034654306298273

Roth, W.-M., Lee, Y.-J., Ling, P.-H. (2009) A tool for changing the world: possibilities of cultural-historical activity theory to reinvigorate science education, *Studies in Science Education*, 45:2, 131-167, DOI: 10.1080/03057260903142269

Roth, W. M. (2015). Becoming aware: Towards a post-constructivist theory of learning. Learning: Research and Practice, 1(1), 38–50.

Roth, WM., Jornet, A. (2017). Theorizing with/out “Mediators”. *Integrative Psychological and Behavioral Science.* 53, 323–343, https://doi.org/10.1007/s12124-016-9376-0

Sáenz-Ludlow, A. y Kadunz, G. (2016). La construcción del conocimiento visto como una actividad semiótica. La semiótica como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, 1–21. doi: 10.1007 / 978-94-6300-337-7_1

Salinas-Hernandez, U y Miranda, I. (2018). Relating Computational Cartesian Graphs to a Real Motion: An Analysis of High School Students' Activity. En Signs of Signification (Cap 4).

Salinas-Hernández, U., y Salinas, J. (2018). Enseñanza aprendizaje desde una aproximación de mediación semiótica. La teoría de la objetivación*. EutopíA,* 11(28), 100-104. http://www.revistas.unam.mx/index.php/eutopia/article/view/65996/57914

Santiago Abasolo, J. (2019). *Estudio del desarrollo sobre el uso de la geometría como parte de la matematización en educación preescolar*. [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM. http://132.248.9.195/ptd2019/junio/0790304/Index.html

Schön, D.A, (1992). La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones. Paidós.

Secretaría de Educación Pública. (2017). Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior. Ciudad de México.

Secretaría de Educación Pública. (2017). Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Ciudad de México.

Secretaría de Educación Pública. (s.f.). Acompañamiento docente en matemáticas. http://matematicas.cosdac.sems.gob.mx/matematicas/ consultado el 2 de mayo de 2020.

Siry, C. y Zawatski, E. (2011). “Working with” as a methodological stance: collaborating with students in teaching, writing, and research. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 24(3), 343–361. doi:10.1080/09518398.2010.539581

Stewart, I. (2012). Historia De Las Matemáticas En Los Últimos 10000 Años. Crítica.

SUMEM. (2014). Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM. [En línea]. México: Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM

SUMEM. (2019). Resultados de la encuesta sobre “Percepciones y actitudes de los alumnos del bachillerato frente a las matemáticas”. [En línea]. México: Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM.

Swidan O., Prusak N. (2018) Objectifying the Inclusion Relationship of Quadrilaterals in a Synchronic-Interactive and Collaborative Computer Supported Environment. En Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (Eds.) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_18

Tekin-Dede, A., y Bukova-Güzel, E. (2018). A Rubric Development Study for the Assessment of Modeling Skills. The Mathematics Educator, 27.

Téllez, I.A. (2019). *Análisis de la práctica docente en la alfabetización inicial dentro de entornos complejos de aprendizaje: una perspectiva sociocultural.* [tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. TESIUNAM. TESIUNAM. http://132.248.9.195/ptd2019/abril/0788159/Index.html

Teneal, P. (2017). THE HEURISTICS OF STATISTICAL ARGUMENTATION: SCAFFOLDING AT THE POSTSECONDARY LEVEL. [tesis de doctorado, Universidad del Norte de Carolina]. ProQuest. https://www.proquest.com/docview/1889541074

Tinungki, G. (2015). The Role of Cooperative Learning Type Team Assisted Individualization to Improve the Students’ Mathematics Communication Ability in the Subject of Probability Theory. *Journal of Education and Practice. 6 (32).*

TvUnADM. (2018, 19 de diciembre). *Entrevista Dr. Armando Solares Rojas* [video]. YouTube. https://youtu.be/ky6M9r2ohek

The Ministry of Education of Singapore (MOE). (2020). Secondary mathematics syllabuses. Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

UNAM. (1983). Matemáticas (plan 1983). México: UNAM

Valle, M. (2018). Plan de Trabajo para la Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria. 2018-2022. http://www.juntadegobierno.unam.mx/files_web/2018/ENP/valle/Valle%20%20Martinez%20Maria%20Dolores%20plan%20de%20trabajo.pdf

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Eds), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Springer

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and Realistic Mathematics Education. Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen M., Drijvers P. (2020) Realistic Mathematics Education. En: Lerman S. (Eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Velázquez, Ma. (2004). Sobre las políticas y contenidos del bachillerato universitario. *Perfiles educativos*, *26*(104), 79-92. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982004000300005&lng=es&tlng=es.

Velásquez, M y Marinkovich, J. (2016). HACIA UN MODELO EXPLICATIVO DEL PROCESO DE ALFABETIZACIÓN EN ESCRITURA ACADÉMICA EN LAS LICENCIATURAS EN HISTORIA Y BIOLOGÍA, 54 (2), 113-136.

Villa, L. (2010). La Educación Media Superior: Su construcción social México independiente hasta nuestros días. En A. Aurnat y S. Giorguli (Eds.), *Los grandes problemas de* México (1ª ed., Vol. 7, pp. 271-311). El Colegio de México. https://2010.colmex.mx/16tomos/VII.pdf

Vygotsky, L. (1997). Obras escogidas L. S. Vygotski, vol. 2. Visor.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de Número, *Educación Matemática*, 8 (2), 5-17.

Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., & Schubring, G. (Eds.). (2019). The Legacy of Felix Klein. ICME-13 Monographs. doi:10.1007/978-3-319-99386-7

Wernstein, E., y González, A. (1998). ¿Cómo enseñar matemáticas en el jardín? Número, Medida y Espacio. Ediciones Colihue.

Wertsch, J. (1988). Vigotski y la formación social de la mente. Paidós.