



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

**Restricciones Cosmológicas en Axiones de Materia
Oscura Dinámica**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA
CÉSAR MORALES MENA

TUTOR PRINCIPAL
DR. SAÚL NOÉ RAMOS SÁNCHEZ
(INSTITUTO DE FÍSICA)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. EDUARDO PEINADO RODRÍGUEZ
(INSTITUTO DE FÍSICA)
DR. JAIME BESPROSVANY FRIDZON
(INSTITUTO DE FÍSICA)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., OCTUBRE 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a mis padres.

Quiero agradecer a mi tutor, el Dr. Saúl Ramos, por su guía brindada desde el inicio de mis estudios de maestría, así como por su vasta asistencia en el desarrollo de este trabajo.

Al PNPC del CONACYT por la beca, con número de apoyo 750037, proporcionada durante mis estudios de Maestría en Ciencias (Física) en el Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM.

Índice general

Introducción	1
1. Cosmología Estándar y Materia Oscura	6
1.1. Cosmología Estándar	6
1.1.1. Universo en expansión	6
1.1.2. Universo térmico	11
1.2. Materia Oscura	14
1.2.1. Nucleosíntesis del Big Bang	14
1.2.2. Fondo Cósmico de Microondas	15
1.2.3. Partículas elementales	16
1.2.4. Mecanismos térmicos de producción	19
1.2.5. Mecanismos no térmicos de producción	22
2. Axiones y su dinámica	24
2.1. Axión de cromodinámica cuántica	24
2.1.1. Problema de CP fuerte	24
2.2. Dinámica del axiión	27
2.3. Partículas tipo axiión	28
2.4. Axiones como materia oscura	29
2.4.1. Producción de materia oscura por desalineación	30
3. Materia Oscura Dinámica	39

3.1. Dimensiones adicionales	39
3.2. Orbifolds	40
3.2.1. Teoría de grupos	40
3.2.2. Topología	41
3.2.3. Geometría diferencial	42
3.2.4. Orbifold S^1	42
3.2.5. Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2	43
3.3. Campos en orbifolds	43
3.3.1. Campos escalares	44
3.4. Materia oscura dinámica	48
3.4.1. Condiciones iniciales	55
3.4.2. Evolución de los campos escalares	56
3.4.3. Desintegraciones	58
3.4.4. Estados propios de masa	62
3.4.5. Constante de desintegración	64
4. Resultados	66
4.1. Restricción en la masa	66
4.2. Masa sin restricción	73
5. Conclusiones	80
Apéndices	83
A. Unidades	84
A.1. Unidades naturales	84
A.2. Conversión de unidades naturales a sistema internacional	85
B. Integrales escalares	87
C. Oscilador amortiguado	88

D. Evolución temporal de Ω_λ	90
E. Función poligamma	95
Referencias	101

Introducción

El modelo estándar de física de partículas es una teoría cuántica de campos que provee una descripción de las interacciones fundamentales entre partículas elementales. Este modelo involucra una variedad de campos que cuentan con distintas masas, interacciones, cargas ante los distintos grupos de norma del modelo ($SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$), entre otras propiedades dispares. Las cargas que tienen los campos del modelo estándar bajo los distintos grupos de norma se muestran en la Tabla 1. El modelo estándar ha sido sometido a pruebas experimentales a energías de ≈ 1 TeV, demostrando gran precisión [1]. A pesar de la precisión del modelo estándar, este no contiene ninguna partícula que sea un candidato viable de materia oscura. Esta razón expone la necesidad de que el modelo debe ser extendido.

La constitución de la materia oscura, propuesta para explicar el movimiento de las galaxias en el cúmulo Coma [2], ha significado uno de los principales problemas de la física de partículas y de la cosmología. Cuando se toma en consideración el escenario en el cual la materia oscura está compuesta por partículas elementales, existen cualidades que los candidatos deben poseer, los candidatos deben ser

- materia no relativista, debido a que la materia relativista no presenta la capacidad de formar pozos de potencial gravitacional, indispensables para la formación de estructuras a gran escala;
- eléctricamente neutros, debido a que partículas cargadas pueden afectar datos de observacio-

Campo	$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	e_R	ν_R	$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	u_R	d_R	H
$SU(3)$	–	–	–	□	□	□	–
$SU(2)$	□	–	–	□	–	–	□
$U(1)$	$-1/2$	-1	0	$1/6$	$2/3$	$-1/3$	$1/2$

Tabla 1: Cargas de los campos del modelo estándar. □ indica que los campos se transforman bajo la representación fundamental del grupo, – indica que el campo está descargado. L , e y ν son leptones, Q , u y d son cuarks mientras que H es el escalar de Higgs.

nes astrofísicas;

- estables, superando la edad del Universo por varios órdenes de magnitud. La estabilidad es requerida para tener abundancia no nula de materia oscura al tiempo actual.

Algunas partículas propuestas, además de ser potenciales candidatos de materia oscura, son adicionalmente presentadas como soluciones a problemas en física de partículas. Entre las partículas que son soluciones a varios problemas figuran los axiones, propuestos como solución al problema de ajuste fino conocido como *problema de CP fuerte*, y los neutralinos, que son a veces considerados una posible solución al problema de jerarquía. Al presumir que la materia oscura está compuesta por partículas fundamentales y que estas presentan algún tipo de interacción con el modelo estándar, propiedades inherentes de las partículas como tiempo de vida media e interacciones son restringidas por experimentos de altas energías. Aunado a lo anterior, atributos cosmológicos de las partículas como densidad de energía son coartadas por la abundancia de materia oscura considerada por nucleosíntesis del Big Bang y el fondo cósmico de microondas.

Las partículas masivas débilmente interactuantes (WIMPs, por las siglas en inglés de *Weakly Interacting Massive Particles*) se presentan como candidatos de materia oscura fría cuya hipótesis es favorecida teóricamente [3, 4]. Las WIMPs corresponden a una categoría amplia de posibles partículas, las cuales se presentan como reliquias térmicas (término que se le confiere a las partículas producidas de manera térmica). El rango de masas de las WIMPs se encuentra entre pocos GeV y 100 TeV. Las WIMPs han sido ampliamente examinadas debido a que son producidas con la abundancia correcta para materia oscura fría, lo que corresponde al *milagro WIMP* [5]. Este ajuste de la abundancia de reliquia de WIMPs con la abundancia de materia oscura fría observada se debe a la dependencia del promedio térmico del producto de la sección eficaz por la velocidad de las partículas. Al introducir una sección eficaz del orden de la fuerza débil y la velocidad de desacople de los WIMPs en la abundancia, esta da la densidad de reliquia correcta de materia oscura fría [3, 6]. Revisiones de los progresos en la detección de esta familia de partículas se muestran en [7, 8].

Otra partícula propuesta que cumple con los requerimientos de materia oscura es el axión. El axión es un pseudo-bosón de Nambu-Goldstone generado a partir del rompimiento espontáneo de una simetría global $U(1)_{PQ}$, introducido originalmente para resolver el problema de ajuste fino conocido como *problema de CP fuerte*, esta partícula es llamada axión de QCD [9, 10, 11]. Los acoplamientos del axión con campos del modelo estándar dependen del modelo estudiado, entre los cuales destacan acoplamientos con fotones y piones. La masa del axión es un parámetro libre que depende de su constante de desintegración f_{PQ} , parámetro que aparece restringiendo los acoplamientos del axión. Las escalas importantes en la evolución del campo del axión son la escala del rompimiento de la simetría global $U(1)_{PQ}$, v_{PQ} , asociada con el valor esperado de vacío del campo escalar complejo del cual surge el axión, y la escala a la cual el axión adquiere masa Λ_{QCD} [12]. La tasa de desintegración del axión es muy pequeña, debido a que la masa del axión m_a está restringida a los valores $10^{-12} \text{ eV} \lesssim m_a \lesssim 10^{-6} \text{ eV}$ [5], esto por observaciones astrofísicas. Lo anterior implica que el tiempo de vida media del axión es superior al tiempo del Universo, lo

que convierte a esta partícula en un candidato apropiado de materia oscura.

Partículas que presentan acoplamientos con materia bariónica similares al de los axiones y que también son generados a partir del rompimiento espontáneo de una simetría global $U(1)$ son conocidas como partículas tipo axión (ALPs, por las siglas en inglés de *Axion-Like Particles*). Las partículas tipo axión son partículas que surgen en extensiones del modelo estándar, mediante el rompimiento espontáneo de simetrías adicionales $U(1)_i$ globales, $i = 1, 2, \dots, n$. A temperaturas por debajo de la escala del rompimiento de simetría v_i , surgen pseudo-bosones de Nambu-Goldstone como la parte angular de un campo escalar complejo. Las interacciones con el modelo estándar, a través del tensor de esfuerzos con los bosones de norma y con espinores para los fermiones, están suprimidas por la constante de desintegración $f_i \propto v_i$ [13]. Sin embargo, dichos acoplamientos, así como la masa, que dependen de la constante de desintegración, no están restringidos por la escala de QCD. Además, la masa de las ALPs no está relacionada con la masa del axión de QCD y generalmente esta no depende de la temperatura [14]. La introducción de las ALPs permite la liberación de la masa de la partícula de la constante de desintegración, lo que resulta en la modificación de las cotas de las masas. Al permitir que la masa de las partículas sea del orden de GeV, se tiene que la tasa de desintegración es mayor, llegando a tener tiempos de vida media de las ALPs que son menores que la edad del Universo, el tiempo de la superficie de última dispersión y nucleosíntesis del Big Bang, dependiendo del valor que se asigne a la masa de la partícula.

Ante la diversidad de las propiedades que exhiben los campos del modelo estándar, resulta natural suponer que la materia oscura está compuesta por una variedad de partículas con distintas masas y tiempos de vida media. Sin embargo, considerar partículas no estables como materia oscura implica el ajuste de otros parámetros para que no se genere fenomenología de materia oscura distinta a la expuesta inicialmente. Lo anterior implica la adición de parámetros libres a la teoría que depende de la cantidad de campos introducida. Si los parámetros son sujetos a restricciones, el problema se simplifica. Existen investigaciones referentes a materia oscura que no implican partículas estables, las cuales introducen un conjunto de campos escalares con diferentes propiedades, cuyas partículas se asocian con la materia oscura observada [15]. Dichos modelos consideran que el conjunto de campos surge en una teoría efectiva producida mediante la reducción dimensional de una teoría con una dimensión espacial adicional [16]. Además existen modelos que incorporan a los axiones como candidatos de materia oscura [17, 18, 19], de los cuales, las interacciones de los campos axiónicos con campos del modelo estándar juegan un papel importante, ya que de ellos dependen las desintegraciones en partículas del modelo estándar y tiempos de vida media [20]. En el modelo de materia oscura dinámica se trabaja bajo la suposición de que la mayor cantidad de partículas que forman la materia oscura son producidas mediante el mecanismo no térmico de *producción por desalineación*. La consideración de los axiones como materia oscura no relativista se realiza mediante la identificación de la densidad de energía y ecuación de estado asociadas a los campos de los axiones, las cuales tienen el mismo comportamiento que materia no relativista [14]. La identificación anterior es posible debido al comportamiento oscilatorio que presenta el campo del axión bajo condiciones específicas que involucran a la masa del campo, la tasa de expansión del

Universo y la tasa de desintegración del campo [21, 22, 23].

Con lo mencionado anteriormente, surge el cuestionamiento ¿es posible establecer un ensamble de partículas cuya abundancia total, es decir la suma de las abundancias asociadas a cada tipo de partículas, sea capaz de replicar la abundancia de materia oscura observada? A partir de considerar el cuestionamiento anterior, surge el objetivo general de este trabajo, el cual es identificar las condiciones necesarias para que la abundancia de partículas, asociadas a un conjunto de campos, se ajuste a la abundancia actual de materia oscura fría. En el escenario que se considera, se examinan axiones y partículas tipo axión.

A partir del objetivo anterior, son planteados los objetivos particulares de esta tesis. El primer objetivo particular es mostrar las ecuaciones fundamentales del modelo cosmológico estándar y las características de la materia oscura fría. Lo anterior permitirá establecer un criterio para poder sostener que una partícula se comporta como materia oscura. Posteriormente se busca detallar las circunstancias bajo las cuales partículas asociadas a un campo pseudo-escalar se pueden considerar materia oscura fría. Con esto se puede valorar si el uso de campos pseudo-escalares es adecuado para un modelo de materia oscura. Después se busca examinar las propiedades que tiene un conjunto infinito de campos pseudo-escalares, así como advertir las conexiones entre las propiedades de distintos campos. Al establecer las propiedades de los campos, se espera obtener identidades para la suma de las abundancias asociadas a cada campo. Finalmente se tiene como meta establecer una diferenciación entre el uso de axiones de QCD y partículas tipo axión.

El procedimiento que se va a seguir para alcanzar los objetivos mencionados consiste en:

- establecer las características de la materia oscura fría;
- analizar métodos de producción no térmicos;
- identificar las condiciones para que un campo sea considerado materia no relativista;
- calcular la densidad de energía de un campo;
- calcular la tasa de desintegración;
- establecer un conjunto de campos con diferentes masas y tasas de desintegración;
- calcular la densidad de energía del conjunto; e
- identificar el espacio de parámetros para que la densidad de energía del conjunto sea igual o menor a la densidad de energía de materia oscura.

Los resultados esperados son la identificación de los parámetros bajo los cuales la densidad de energía del conjunto de partículas constituye la densidad de energía de materia oscura, o la equivalencia entre abundancias. También se busca determinar las consecuencias de considerar axión de QCD o partículas tipo axión como candidatos de materia oscura.

Organización

En el Capítulo 1 se presenta una revisión de conceptos fundamentales en cosmología necesarios para concebir las diferencias entre las componentes del Universo, así como para discernir el comportamiento de la expansión del Universo bajo la dominación de alguna componente. Se ofrece un panorama general de las observaciones cosmológicas que introducen restricciones sobre las propiedades de materia oscura. También se incluyen los mecanismos de producción de materia oscura, clasificados en mecanismos térmicos y no térmicos.

En el Capítulo 2 se introduce al axión como solución al problema de CP fuerte. Posteriormente se muestra la aparición del campo del axión a partir del rompimiento espontáneo de una simetría global y se ponen de manifiesto las características de las partículas tipo axión. Por último se identifica al campo del axión como materia oscura, producida a partir del mecanismo no térmico *producción por desalineación*, mediante el reconocimiento de la semejanza entre la evolución de la densidad de energía del campo del axión y la densidad de energía de materia no relativista.

En el Capítulo 3 se señala el uso general de dimensiones espaciales adicionales en una teoría. A continuación se exponen conceptos indispensables de teoría de grupos, topología y geometría diferencial para definir un *orbifold*, espacio en el cual se compactifica la dimensión espacial adicional. Se muestra la expansión de los campos escalares propagándose en cinco dimensiones en términos de campos escalares en cuatro dimensiones, lo cual tiene como consecuencia una acción efectiva en cuatro dimensiones con masas jerarquizadas de los campos. Seguidamente se incorpora la estructura que tienen las condiciones iniciales en los campos 4-dimensionales, inicialmente relacionadas con el campo escalar en cinco dimensiones. Se analiza la evolución de los campos escalares cuando se tienen estados propios de momento y cuando se tienen los estados propios de masa, obteniendo valores para la densidad de energía. Se calcula la tasa de desintegración de los campos del axión, suponiendo que solamente interactúan con los fotones en el modelo estándar.

En el Capítulo 4 son mostrados dos escenarios para las expresiones obtenidas en el Capítulo 3 de abundancias individuales y abundancia total de las partículas consideradas como materia oscura. Estos dos escenarios son establecidos utilizando la resolución del problema de CP fuerte como criterio así como la dependencia de la masa de las partículas. Además, se presentan los valores de los parámetros libres de la teoría para que la abundancia de candidatos sea igual a la abundancia de materia oscura fría medida actualmente.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones obtenidas a partir del capítulo de resultados, así como una descripción del trabajo futuro con base en las observaciones realizadas en el capítulo de resultados.

En la sección de Apéndices se presentan apartados dedicados a unidades naturales, integrales escalares, análisis del oscilador amortiguado y gráficos que complementan el capítulo de resultados.

Capítulo 1

Cosmología Estándar y Materia Oscura

El modelo cosmológico Λ CDM, es el más compatible con las observaciones cósmicas. Se fundamenta en el principio cosmológico, el cual establece que el contenido del Universo exhibe una distribución isótropa y homogénea (a escalas mayores a 10^2 Mpc). Dicho modelo supone que el contenido energético se debe a cuatro componentes: radiación, energía del vacío, materia bariónica y materia oscura ‘fría’ (CDM, por las siglas en inglés de *Cold Dark Matter*). Radiación se refiere a las componentes cuya velocidad es relativista (fotones y neutrinos). La energía del vacío, asociada con la constante cosmológica Λ , está relacionada con la expansión del Universo. La clasificación de la materia, oscura y bariónica, se debe a las interacciones que estas presentan. La materia oscura no presenta interacción significativa con radiación. El término fría se debe a que sus velocidades son altamente no relativistas, permitiéndose así la formación de estructuras a niveles apropiados.

Además, el modelo cosmológico propone perturbaciones primigenias en la densidad de energía, que podrían haber establecido las semillas de la estructura observada del Universo. Estas perturbaciones pudieron haber sido magnificadas por el proceso de expansión acelerada en el universo temprano, conocido como *inflación*. En torno a esas perturbaciones magnificadas, la materia oscura fría debió acumularse para detonar la formación de galaxias y estructuras mayores.

1.1. Cosmología Estándar

1.1.1. Universo en expansión

Debido a la distribución energética del Universo, se considera que la geometría del espaciotiempo puede expresarse como $\mathbb{R} \times \Sigma$, donde \mathbb{R} corresponde a la dirección temporal, y Σ es una variedad

de Riemann 3-dimensional [24].

La métrica de un espaciotiempo (1+3)-dimensional, homogéneo e isótropo en sus secciones espaciales es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). El intervalo espaciotemporal

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

se puede escribir, en términos del intervalo en Σ , $d\sigma^2$, en un sistema coordenado preferencial tal que quede de manifiesto las simetrías del Universo, como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (1.2)$$

En la expresión anterior se consideró $c = 1$ ¹. t es el tiempo, (r, θ, ϕ) corresponden a las coordenadas comóviles, es decir, coordenadas cuya etiqueta permanece invariante ante la expansión del Universo. $a(t)$ es llamado *factor de escala*, con la convención de tener un valor unitario evaluado en el tiempo actual denotado por t_0 , i.e. $a_0 \equiv a(t_0) = 1$. El factor de escala describe la dinámica de la separación entre dos observadores, como consecuencia de la expansión del Universo. Por ejemplo, si $a(t)$ se ve incrementado por un factor de 3, la distancia entre observadores se triplica. k es un término referente a la curvatura espacial, en Σ , cuyos valores $+1, 0$ y -1 atañen respectivamente a curvaturas constantes positiva (abierta), nula (Euclídea) y negativa (cerrada).

El factor de escala describe completamente la evolución temporal de un Universo isótropo y homogéneo. Para determinar explícitamente el factor de escala se deben resolver las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales, concentradas en forma tensorial, son

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

siendo $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (1.4)$$

$R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci ($R_{\mu\nu} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$, con $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$ el tensor de Riemann), R el escalar de Ricci ($R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$), Λ la constante cosmológica, G la constante de Newton y $g^{\mu\nu}$ es la métrica.

La materia es incorporada a las ecuaciones de Einstein a través del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, que incluye las distintas componentes del contenido del Universo. Inferido de las simetrías de la métrica FRLW, el tensor de energía-momento debe ser simétrico

$$T^{\mu\nu} \equiv g^{\nu\sigma} T^\mu{}_\sigma = T^{\nu\mu}, \quad (1.5)$$

¹A lo largo de este trabajo se utilizará el sistema de unidades naturales ($c = \hbar = k_B = 1$). La conversión de unidades naturales a sistema internacional (SI) se muestra en el Apéndice A.

y determinado por la condición de que las ecuaciones [25]

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (1.6)$$

deben coincidir con las ecuaciones de movimiento para materia en un espaciotiempo de Minkowski. Aunado a ello, obligado por isotropía, sus componentes espaciales deben ser iguales.

Con las restricciones impuestas sobre $T_{\mu\nu}$, a grandes escalas, la materia puede ser aproximada como un fluido perfecto caracterizado por densidad de energía $\rho = \rho(t)$ y presión $P = P(t)$ con tensor de energía-momento

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P). \quad (1.7)$$

A partir de la expresión anterior para $T^\mu{}_\nu$, la conservación del tensor de energía-momento $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, consecuencia de la generalización de las ecuaciones de movimiento, adquiere la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (3\rho + 3P) = 0, \quad (1.8)$$

donde la derivada covariante ∇_μ se define como

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T^\alpha{}_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T^\mu{}_\alpha, \quad (1.9)$$

y $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel, definidos como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right). \quad (1.10)$$

La tasa de expansión del Universo se define por medio del parámetro de Hubble

$$H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t). \quad (1.11)$$

El factor de escala se determina a través de la expansión del Universo. La expansión del Universo está gobernada por la ecuación de Friedmann, originada a su vez por la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ de las ecuaciones de campo de Einstein. En ausencia de la constante cosmológica, la ecuación de Friedmann presenta la forma

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t). \quad (1.12)$$

El parámetro de Hubble evaluado al tiempo actual se conoce como la constante de Hubble² [26],

$$H_0 \equiv H(t = t_0) = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.13)$$

²Además del valor de la constante de Hubble determinado por *Planck Collaboration* [26], existen diversos métodos para determinar el valor de H_0 . Usando el método de escalera de distancia inversa, (*inverse distance ladder*) se obtiene el valor de $H_0 = 67.8 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [27]. Una combinación de DES Y1 (Dark Energy Survey Year 1) con oscilaciones bariónicas acústicas (BAO) y nucleosíntesis del Big Bang (BBN) establece un valor de $H_0 = 67.4^{+1.1}_{-1.2} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [28].

El tiempo de Hubble, t_H , se define el recíproco del parámetro de Hubble

$$t_H = 1/H(t). \quad (1.14)$$

Usualmente, la constante de Hubble se parametriza por un número adimensional h , definido por

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.15)$$

Las componentes cosmológicas más importantes corresponden a materia, radiación y energía del vacío. Materia consiste en cualquier conjunto de partículas no relativistas sin colisiones con esencialmente presión cero. También se incluyen partículas cuya presión es despreciable en comparación con su densidad de energía, con lo cual se considera que la presión para materia es $P_m = 0$. Radiación abarca la descripción de radiación electromagnética y partículas masivas con velocidades relativistas. Se sabe que el tensor $T_{\mu\nu}$ de electromagnetismo puede ser expresado en términos del tensor de esfuerzo $F^{\mu\nu}$ como [24]

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (1.16)$$

cuya traza es nula, la cual, comparándola con la traza de $T_{\mu\nu}$ en (1.7) se obtiene que $P_r = \rho_r/3$.

Es posible parametrizar la presión del fluido a partir de la densidad de energía del mismo, mediante el uso de la *ecuación de estado*, la cual tiene la forma

$$P = \omega\rho. \quad (1.17)$$

Utilizando los valores de presión asociada a materia y radiación, ω tiene los valores constantes de 0 y 1/3 respectivamente. Para energía del vacío se tiene un tipo de tensor de energía-momento tal que $T^{\mu\nu} \propto g^{\mu\nu}$, cuya parametrización corresponde a $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

Empleando la ley de conservación (1.8), así como la ecuación de estado para materia, radiación y energía del vacío, la evolución de la densidad de energía, para fuentes individuales, en función del factor de escala es

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad \text{materia;} \quad (1.18a)$$

$$\rho_r \propto a^{-4} \quad \text{radiación;} \quad (1.18b)$$

$$\rho_\Lambda = \text{cte.} \quad \text{energía del vacío.} \quad (1.18c)$$

La caracterización de la composición del Universo se lleva a cabo mediante el parámetro cosmológico Ω , llamado parámetro de densidad o *abundancia*, definido como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (1.19)$$

donde generalmente $\Omega_i(t)$ se modifica con el tiempo³. El subíndice i corresponde a las diferentes manifestaciones de la densidad de energía: materia, radiación y energía del vacío y ρ_c es la densidad crítica. A su vez, la densidad crítica ρ_c se define como

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (1.20)$$

cuyo valor al tiempo actual es de [29]

$$\rho_c(t_0) = (1.87834 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3})h^2. \quad (1.21)$$

La abundancia satisface

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1, \quad (1.22)$$

como consecuencia de la ecuación de Friedmann, donde Ω_k es el análogo parámetro de densidad asociado al factor de curvatura, considerando $-3k/a^2(t)8\pi G \equiv \rho_k$ como densidad de energía debido a curvatura.

La expansión del Universo conduce a un corrimiento al rojo (*redshift*) en la longitud de onda de un fotón, es decir, la longitud de onda resulta aumentada por la expansión del Universo. La frecuencia emitida, ω_{em} , de un fotón será observada con una frecuencia menor, ω_{obs} , mientras el Universo se expande, donde se satisface

$$\frac{\omega_{obs}}{\omega_{em}} = \frac{a_{em}}{a_{obs}}, \quad (1.23)$$

donde a_{em} es el factor de escala al tiempo de emisión del fotón y a_{obs} es el factor de escala cuando el fotón es observado. Resulta conveniente introducir el redshift z entre dos eventos, definido a través del cambio en la longitud de onda

$$z_{em} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.24)$$

en la cual λ corresponde a la longitud de onda, los subíndices denotan el valor al cual se emitió y fue observada. Si la observación se realiza al tiempo actual,

$$a_{em} = \frac{1}{1 + z_{em}}. \quad (1.25)$$

Durante intervalos largos en la historia del Universo, la densidad de energía se debe principalmente a la contribución de una sola fuente. Ante ello, es posible realizar una distinción de tres etapas diferentes en la expansión del Universo. Esta distinción se realiza a través de un redshift

³Para el valor de la abundancia evaluada al día de hoy se utiliza la notación: $\Omega_{i,0} \equiv \Omega_i(t = t_0)$.

z_{eq} . Para redshifts comprendidos por $z > z_{eq}$ se tiene la *Era dominada por radiación*, en la cual la densidad de energía debe su principal contribución a materia relativista con ecuación de estado $P = \rho/3$. El tiempo en el cual $z = z_{eq}$, corresponde a la *igualdad radiación-materia*. Para redshifts comprendidos en $z < z_{eq}$, la expansión está determinada principalmente por componentes de presión nula (*Era dominada por materia*). El redshift z_{eq} correspondiente a la igualdad de materia y radiación está dado por [30]

$$1 + z_{eq} = 2.38 \times 10^4 \Omega_{m,0} h^2. \quad (1.26)$$

Los valores de tiempo, factor de escala y temperatura correspondientes a dicha igualdad son respectivamente [30], [12]

$$t_{eq} = 4.14 \times 10^{10} (\Omega_{m,0} h^2)^{-2} \text{ s}, \quad (1.27a)$$

$$a_{eq} \equiv a(t = t_{eq}) = 4.15 \times 10^{-5} (\Omega_{m,0} h^2)^{-1}, \quad (1.27b)$$

$$T_{eq} = 5.5 \Omega_{m,0} h^2 \text{ eV}. \quad (1.27c)$$

Durante la era dominada por radiación y bajo la presunción de un Universo Euclídeo ($k = 0$), las contribuciones a la densidad de energía en la ecuación de Friedmann que no sean debido a radiación se pueden considerar como despreciables. Utilizando la evolución de la densidad de energía en función del factor de escala (1.18b) en la ecuación de Friedmann, se obtiene el comportamiento del factor de escala en función del tiempo

$$a \propto t^{1/2}. \quad (1.28)$$

Para tiempos mayores, $t > t_{eq}$, en los cuales la contribución es mayormente a causa de materia no relativista, la densidad de energía evoluciona como (1.18a) y utilizando la ecuación de Friedmann, la evolución del factor de escala en función del tiempo es

$$a \propto t^{2/3}. \quad (1.29)$$

Una vez advertido el comportamiento del factor de escala, como función del tiempo, es posible expresar el comportamiento de la expansión del Universo en distintas eras, mediante el parámetro de Hubble

$$H(t) = 1/2t \quad \text{era dominada por materia;} \quad (1.30a)$$

$$H(t) = 2/3t \quad \text{era dominada por radiación;} \quad (1.30b)$$

$$H(t) = \text{const.} \quad \text{inflación.} \quad (1.30c)$$

1.1.2. Universo térmico

La descripción de los procesos físicos en un Universo en expansión se simplifican considerablemente si se examina el Universo temprano cuando las partículas están en un estado de equilibrio

local. Lo anterior se refiere a que la materia tiene la máxima entropía posible. Por lo tanto, si en un lapso las partículas presentan dispersión en repetidas ocasiones, su entropía alcanza su máximo valor posible antes de que el Universo exhiba un cambio significativo en su tamaño.

El tiempo que caracteriza la tasa de reacción responsable de instaurar el equilibrio es el tiempo de colisión [25]

$$t_c \simeq \frac{1}{\sigma n v}, \quad (1.31)$$

donde σ es la sección eficaz, n la densidad de número y v la velocidad relativa asociadas a las partículas. Este tiempo de colisión a su vez debe ser comparado con el tiempo cósmico $t_H \sim 1/H$. Si se tiene que

$$t_c \ll t_H, \quad (1.32)$$

el equilibrio local es alcanzado antes de que la tasa de expansión sea relevante.

La densidad de número n , densidad de energía ρ y presión P de un gas, con g grados de libertad internos, son determinadas a partir de la función de distribución $f(x^i(t), p_j(t), t)$ como [30]

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(x^i(t), p_j(t), t); \quad (1.33)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p E(x^i(t), p_j(t)) f(x^i(t), p_j(t), t); \quad (1.34)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E} f(x^i(t), p_j(t), t), \quad (1.35)$$

donde $E(x^i(t), p_j(t))$ es la energía del sistema, \mathbf{p} el momento lineal y los índices denotan las componentes de la posición y momento.

En un ensamble de partículas sin interacción, la función de distribución, f , que caracteriza a n , ρ y P en el espacio fase, se define por

$$dN = f(x^i, p_j, t) dx^3 dp^3, \quad (1.36)$$

donde dN es el número de partículas en un elemento de volumen del espacio fase $dx^3 dp^3$. Debido a que el volumen fase es invariante ante transformaciones de coordenadas, f es un invariante espaciotemporal.

En ausencia de colisiones entre las partículas, se tiene una conservación de partículas en el volumen fase, resultado de ello, la función de distribución obedece la ecuación de Boltzmann sin colisiones

$$\frac{df(x^i(t), p_j(t), t)}{dt} = 0. \quad (1.37)$$

Si las interacciones entre las partículas son relevantes, la ecuación se ve modificada con la adición de un término de colisiones $C[f]$, el cual caracteriza el modo en que las partículas se mueven de un elemento de espacio fase a otro

$$\frac{df(x^i(t), p_j(t), t)}{dt} = C[f]. \quad (1.38)$$

Para partículas en un estado de máxima entropía posible, la función de distribución adquiere la forma

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E(\mathbf{p})-\mu)/T} \pm 1}, \quad (1.39)$$

en la cual μ corresponde al potencial químico de las especies y E es la relación relativista $E^2(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 + m^2$. Este espectro describe el comportamiento estadístico de un sistema de partículas con espín entero (*distribución de Bose-Einstein*) y espín semientero (*distribución de Fermi-Dirac*). Las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac atañen respectivamente a los signos $-$, $+$ en la función de distribución (1.39).

Al examinar especies con masa m , se tienen dos escenarios factibles. Aquellos en los cuales la contribución a la energía es principalmente debido a la cantidad de movimiento, consecuencia de velocidades relativistas (*límite relativista*). Caso contrario, se tienen aquellos donde la mayor contribución a la energía es debido al término inercial (*límite no relativista*), obteniendo resultados desiguales para n , ρ y P dependiendo de la suposición efectuada. Considerando que $T \gg \mu$, se obtienen los valores para la densidad de número y densidad de energía como se muestran a continuación.

Límite relativista

En el límite relativista, la aproximación que tiene la energía es

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \approx |\mathbf{p}| \gg m. \quad (1.40)$$

Por lo tanto, utilizando (1.33)-(1.34)

$$n_b = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3, \quad n_f = \frac{3}{4} n_b, \quad (1.41a)$$

$$\rho_b = \frac{\pi^2}{30} g T^4, \quad \rho_f = \frac{7}{8} \rho_b, \quad (1.41b)$$

donde los subíndices b , f corresponden respectivamente a bosones y fermiones, $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann. La presión concerniente a las partículas obedeciendo ambas estadísticas se obtiene a partir de la ecuación de estado (1.17) con $\omega = 1/3$, consecuencia del límite relativista (radiación). Mientras que la densidad de entropía s para el caso de partículas relativistas está dada por [3]

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g T^3. \quad (1.42)$$

Límite no relativista

En el límite no relativista, la aproximación de la energía es

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \approx m + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}. \quad (1.43)$$

La correspondencia entre temperatura y el promedio de la energía cinética conlleva a $T \sim \langle |\mathbf{p}|^2 \rangle / 2m$, suponiendo una masa m independiente del tiempo. El factor exponencial de la función de distribución en (1.39) se aproxima como $\exp[E(\mathbf{p})/T] \approx \exp[m/T] \gg 1$. Derivado de lo anterior, para bosones y fermiones la función de distribución tiene el mismo comportamiento, con lo cual

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}, \quad (1.44a)$$

$$\rho = mn, \quad (1.44b)$$

$$P = nT. \quad (1.44c)$$

1.2. Materia Oscura

Las mediciones realizadas a partir de Nucleosíntesis del Big Bang (BBN, por las siglas en inglés de *Big Bang Nucleosynthesis*) y del fondo cósmico de microondas (CMB, por sus siglas en inglés de *Cosmic Microwave Background*) establecen la abundancia asociada a bariones $\Omega_b \ll 1$. Mientras que la abundancia asociada a radiación, dominada por la radiación del CMB, corresponde a un valor de $\Omega_\gamma h^2 = 2.47 \times 10^{-5}$ [31]. La abundancia observada de bariones no es suficiente para cerrar el Universo, es decir, que se satisface (1.22) para cualquier tiempo. Además, la densidad de materia luminosa es $\Omega_{\text{lum}} \simeq 0.0024 h^{-1}$. La implicación que $\Omega_b \gg \Omega_{\text{lum}}$ tiene es que la mayor parte de los bariones son ópticamente oscuros. Aunado a la densidad de bariones, BBN y CMB también proporcionan valores para la abundancia de la totalidad de materia como $\Omega_m = 0.321 \pm 0.018$ [32], mientras que *Planck Collaboration* reporta $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$ [26]. La discrepancia de los valores de abundancia implican que además de que la mayor cantidad de materia es oscura, es no bariónica.

1.2.1. Nucleosíntesis del Big Bang

Durante Nucleosíntesis del Big Bang se llevó a cabo la producción de elementos ligeros (D, ^3He , ^4He , ^7Li , ^7Be). BBN tuvo lugar cuando la temperatura del Universo era de aproximadamente 1 MeV, que corresponde al tiempo $t \sim 1$ s [33]. Datos obtenidos a partir de las abundancias Ω_i pueden ser empleados para imponer restricciones a las desviaciones de los modelos estándares cosmológico y de partículas.

Al inicio de BBN, el plasma cósmico estaba clasificado en: partículas relativistas acopladas, partículas relativistas desacopladas y partículas no relativistas. Las primeras estaban comprendidas

por fotones, electrones y positrones, cuyo equilibrio es por medio de interacciones electromagnéticas $e^+e^- \leftrightarrow \gamma\gamma$. Las partículas relativistas desacopladas consistían en neutrinos. Finalmente dentro de las partículas no relativistas figuraban los bariones. Para los tiempos de los que se ocupa BBN, el establecimiento de la asimetría barión-antibarión se supone instaurada, atribuible a que la ausencia de dicha asimetría acarrearía la aniquilación de bariones (anti-bariones).

La razón de abundancia de bariones a fotones, constante a lo largo de la expansión del Universo por conservación de la densidad de número bariónico, es [34]

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = 5.9 \pm 0.5 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022} \right). \quad (1.45)$$

Ω_b corresponde a la abundancia asociada a bariones. La absorción del espectro de objetos cuasitelares (QSO, por las siglas en inglés de *Quasi Stellar Objects*) por material intergaláctico, a un redshift alto, ha permitido efectuar la medición de la razón deuterio/hidrógeno ($^2\text{H}/\text{H}$). Los valores encontrados para la razón $^2\text{H}/\text{H}$ es de $2.2^{+0.2} \times 10^{-5}$ [35], lo que implica una razón barión/fotón $\eta = 6.8 \pm 0.4 \times 10^{-10}$ [34] lo cual corresponde a una abundancia $\Omega_b h^2 = 0.025 \pm 0.001$ [36]. La relación redshift-distancia para supernovas tipo Ia proporcionan un valor de $\Omega_m = 0.28 \pm 0.01$ [37].

Considerando BBN estándar, la cual se basa solo en el modelo estándar de partículas, el único parámetro libre es la razón de bariones a fotones η . El rango de concordancia para el valor de η basado esencialmente en la razón $^2\text{H}/\text{H}$, llamado η_{10} es [33]

$$5.8 \leq \eta_{10} \leq 6.5, \quad (1.46)$$

lo que provee de mediciones del contenido de bariones en el Universo

$$0.021 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.024. \quad (1.47)$$

Manifiestamente la abundancia de bariones, Ω_b , es considerablemente menor que la abundancia de materia total. Repercusión de lo anterior, las mediciones actuales de elementos ligeros combinadas con cálculos de Nucleosíntesis del Big Bang, restringen la contribución de materia ordinaria, no relativista, a un límite superior de 5% de la densidad crítica. Debido a que la densidad de materia es significativamente mayor, BBN provee evidencia respecto a la composición de la materia, la cual en su mayoría no está constituida por protones y neutrones [30].

1.2.2. Fondo Cósmico de Microondas

La radiación del fondo cósmico de microondas exhibe un comportamiento de radiación de cuerpo negro con temperatura $T \simeq 2.75$ K. Mediciones realizadas por los satélites COBE, WMAP y Planck muestran que existen inhomogeneidades en este espectro del cuerpo negro. Estas inhomogeneidades actuaron como semillas para las actuales estructuras observadas en el Universo. Se presume que las

estructuras a gran escala evolucionaron a partir de inestabilidades gravitacionales, las cuales pueden ser rastreadas hasta pequeñas fluctuaciones primordiales en la densidad de energía en el universo temprano. Inflación, así como la expansión del Universo han alargado estas inhomogeneidades hasta su tamaño observado. Una de las consecuencias que conlleva inflación es que el Universo es casi plano, lo cual implica que el parámetro de densidad Ω_i está cercano a la unidad. La formación de estructuras a gran escala requiere de una cantidad suficiente de materia para que las fluctuaciones primordiales hubiesen podido evolucionar y generar agregación de materia. El CMB provee una medida para parámetros cosmológicos, por medio del espectro de potencias de las anisotropías de su temperatura. La susceptibilidad del CMB a la densidad de materia se advierte en las alturas relativas de los picos acústicos, en los cuales se manifiestan repercusiones ante la modificación de densidad de materia. En particular, el aumento en la fracción de materia bariónica resulta en la adición de inercia al fluido primigenio empero sin añadir presión al plasma, en consecuencia, el módulo de compresibilidad del fluido se ve reducido. Esto aumenta la sobredensidad en el punto medio de las oscilaciones acústicas e impulsa los picos de compresión [38].

Mediciones de las anisotropías del CMB, alturas relativas de los picos acústicos consistentes con BBN, combinadas con información de supernovas Ia y de Hubble Space Telescope (HST) Key Project, seguido de análisis combinado proporcionan valores para la densidad de bariones $\Omega_b h^2 = 0.0212 \pm 0.0014$ [39]. El reconocimiento de la abundancia de materia bariónica, comparada con la razón de abundancia total de materia y densidad crítica expone que la naturaleza de la mayor cantidad de materia en el Universo debe ser dispar a la vinculada con materia ordinaria, la cual se generaliza con el nombre de materia oscura.

La teoría estándar de la formación de estructuras requiere que la materia oscura sea fría, cuya condición debe haberse suscitado previo a la era de dominación de materia. Dicha imposición para la materia oscura surge de la intimación de esta para presentar un agrupamiento eficiente en el universo temprano propiciando la formación de estructuras. Si en su lugar se tuviese materia oscura de índole relativista, ‘caliente’, la formación de estructura no se hubiese manifestado en los niveles apropiados [40].

1.2.3. Partículas elementales

Ante el desconocimiento de la composición de la materia oscura, diversos candidatos han sido propuestos. Entre las propuestas figuran los objetos astrofísicos masivos de halo compacto (MACHOs, de su acrónimo en inglés *Massive Astrophysical Compact Halo Object*), nubes de gas no luminoso y aquellas las cuales consideran que la materia oscura está compuesta por partículas elementales.

Al suponer que la materia oscura está compuesta por partículas, surgen restricciones conducidas por el CMB y formación de estructura. La restricción recae sobre la carga eléctrica que está asociada a la partícula de materia oscura. Si la materia oscura estuviese cargada eléctrica-

mente, esta generaría modificaciones a la razón barión-fotón durante recombinación. El suponer un desacople de la materia oscura con el plasma durante recombinación conlleva a la imposición de cotas superiores sobre la carga eléctrica de materia oscura en unidades de carga del electrón: $3.5 \times 10^{-7}(m_{DM}/1 \text{ GeV})^{0.58}$ para $m_{DM} > 1 \text{ GeV}$, y $4.0 \times 10^{-7}(m_{DM}/1 \text{ GeV})^{0.58}$ para $m_{DM} < 1 \text{ GeV}$. Donde m_{DM} es la masa de la partícula de materia oscura [31].

Las interacciones materia oscura-materia oscura están circunscritas por las observaciones a cúmulos como el cúmulo de galaxias *1E 0657-56*. Las restricciones a las autointeracciones se revelan como cotas superiores a la razón de sección transversal entre masa, estableciendo [41]

$$\sigma_{DM-DM}/m_{DM} < 0.47 \text{ cm}^{-2}\text{g}^{-1}. \quad (1.48)$$

Neutrinos del modelo estándar

Los neutrinos surgen como candidatos a materia oscura debido a que son eléctricamente neutros, y no presentan interacciones fuertes. Son organizados en tres generaciones de leptones de dobletes de $SU(2)_L$ como

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L. \quad (1.49)$$

Aunado a las restringidas interacciones, los neutrinos son estables, lo cual es primordial al presumir que la composición de la materia oscura se debe a una sola especie de partícula. Tasas de desintegración muy elevadas del candidato tendrían como consecuencia modificaciones sobre mediciones realizadas al CMB [15].

Los neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ , sus antipartículas, así como fotones, electrones y positrones pudieron haber sido producidos de manera prolífica en el universo temprano con las reacciones

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^+ + e^- \leftrightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i,$$

donde i corresponde a cada sabor de neutrino, $i = e, \mu, \tau$. Los neutrinos se desacoplaron de la materia cuando la temperatura había caído a aproximadamente 3 MeV. Su densidad de número es

$$n_\nu = 113 \text{ cm}^{-3} \quad (1.50)$$

por cada sabor de neutrino ν . A partir de (1.44b) se conoce la densidad de energía para los neutrinos desacoplados. La densidad de energía sería igual a la densidad crítica actual (1.21) si se cumple que

$$\sum_{e, \mu, \tau} m_\nu = 47 \text{ eV}. \quad (1.51)$$

De lo anterior se puede concluir que si la masa de los neutrinos fuese de pocos eV, estos podrían significar contribuciones importantes a la abundancia de materia oscura. Sin embargo, a partir de oscilaciones bariónicas acústicas, las masas de los neutrinos están restringidas a [26]

$$\sum_{e, \mu, \tau} m_\nu < 12 \text{ eV}. \quad (1.52)$$

Observaciones realizadas por WMAP combinadas con datos de estructura a gran escala [42] también imponen restricciones sobre las masas de los neutrinos a

$$m_\nu < 0.23 \text{ eV}, \quad (1.53)$$

lo que se ve reflejado en su abundancia $\Omega_\nu < 0.0072$, construyendo la contribución de los neutrinos a la materia oscura. Si los neutrinos cuentan como materia oscura, estos no pueden ser la única fuente de materia oscura. Otra restricción se debe a que los neutrinos constituyen materia oscura ‘caliente’ consecuencia de la temperatura de desacople, a la cual los neutrinos son relativistas. Un Universo dominado por neutrinos hubiera inhibido la formación de estructura a gran escala.

Especies adicionales de neutrinos han sido propuestas las cuales tienen diferentes interacciones con el modelo estándar, entre las cuales se consideran neutrinos que carezcan de interacción débil cuya producción es factible en el Universo temprano. También se han propuesto especies cuya interacción es a través de un pequeño grado de mezcla con los neutrinos del modelo estándar, producidos por medio de oscilaciones de las otras especies. Atendiendo a las anteriores extensiones, las especies estériles podrían constituir materia oscura tibia o fría de acuerdo a la temperatura de producción, cuyo rango es amplio.

WIMPs

Ante la insuficiencia de que materia bariónica y neutrinos puedan suponer de la totalidad de materia, se han propuesto escenarios en los que se considera la existencia de partículas masivas que se atienen solamente a la interacción débil⁴. Estas partículas masivas (WIMPs, por las siglas en inglés de *Weakly Interacting Massive Particles*) podrían presentar acoplamiento con el bosón Z, más débiles que los presentados por neutrinos con ese bosón. Se presume que la velocidad que presentan estos candidatos al tiempo del desacople con el baño térmico es no relativista, por lo que constituirían materia oscura fría. Tales partículas son integradas en extensiones supersimétricas del modelo estándar. La supersimetría es una simetría que relaciona los grados de libertad fermiónicos y bosónicos, mapeando campos de espín entero en campos de espín semientero y viceversa.

⁴Considerando solamente las interacciones del modelo estándar de partículas.

Axiones y partículas tipo axión

Los axiones y las partículas tipo axión son candidatos a materia oscura, están asociados a campos escalares y pseudo-escalares muy ligeros. Los acoplamientos que estas partículas presentan con el modelo estándar, genéricamente se da a través de derivadas de los bosones de norma. Debido a que el estudio del presente trabajo se basa en campos asociados a partículas tipo axión, las propiedades de dichas partículas se examinarán con detalle en el capítulo 2.

1.2.4. Mecanismos térmicos de producción

Al atender que los candidatos a materia oscura repliquen la abundancia observada, se deben examinar los mecanismos de producción de las partículas en el Universo temprano. Los mecanismos de producción se pueden clasificar de acuerdo a si los candidatos de materia oscura fueron generados a partir de partículas en equilibrio térmico (*producción térmica*) o no. En el primer caso, el espectro de energía de las partículas resultantes es el mismo que las partículas en equilibrio térmico. Caso opuesto, si el espectro de energía de las partículas producidas no presenta una distribución térmica se tienen mecanismos de *producción no térmica* [3].

Es oportuna la clarificación de terminología utilizada en los mecanismos de producción, por lo que se presenta una breve descripción.

Freeze-out. Proceso de desacoplamiento químico de un baño térmico de alta temperatura y alta densidad. Una especie de partícula se desacopla químicamente cuando la tasa de interacción Γ , para procesos donde el número de partículas de esa especie no se conserva, cae por debajo del parámetro de Hubble H .

Freeze-In. Proceso mediante el cual se acumulan partículas progresivamente, producidas a través de métodos de colisión fuera del equilibrio. La abundancia de partículas producidas por freeze-in a un redshift dado es proporcional al producto de la tasa de producción veces el tiempo de Hubble, definido en (1.14), a dicho redshift.

Las partículas producidas mediante mecanismos térmicos pueden experimentar un desacoplamiento del plasma térmico. El desacople de una especie de partícula, del baño térmico, se produce cuando estas dejan de estar en equilibrio mediante procesos de dispersión con el baño térmico. El criterio para que una especie esté acoplada o desacoplada está dado por (1.32). Debido al equilibrio que se presenta en el baño térmico, conseguido mediante interacciones entre especies, se considera el tiempo de colisión t_c como el tiempo de vida media τ asociado a cada especie. Puesto que la vida media es el recíproco de la tasa de desintegración Γ , equivalentemente el criterio de desacople se puede escribir como

$$\Gamma \gtrsim H \quad \text{acoplada;} \quad (1.54a)$$

$$\Gamma \lesssim H \quad \text{desacoplada.} \quad (1.54b)$$

Ante la anterior categorización, los mecanismos se pueden disponer en consonancia si al momento del desacoplamiento las partículas eran relativistas (*reliquias térmicas calientes*) o no relativistas (*reliquias térmicas frías*).

Para realizar un cálculo aproximado de la abundancia de partículas de materia oscura producidas por mecanismos térmicos, se procede primeramente a calcular la temperatura de desacople. La temperatura de desacople para una especie de partícula satisface

$$H(T_{dec}) \sim \Gamma(T_{dec}). \quad (1.55)$$

Posteriormente se iguala la densidad de número comóvil n_χ al tiempo del desacople y su valor actual. Finalmente se obtiene la aproximación de la abundancia Ω_χ . En lo anterior se presume que la entropía S se conserva para el intervalo de temperaturas $T_{dec} \leq T \leq T_0$, con T_0 la temperatura actual. Se puede calcular la densidad de número a partir de la ecuación de Boltzmann para procesos de aniquilación-creación 2 a 2 en el baño térmico, adoptando la forma

$$\frac{dn}{dt} - 3H(t)n = -\langle\sigma v\rangle (n^2 - n_{eq}^2). \quad (1.56)$$

En la ecuación anterior $\langle\sigma v\rangle$ es el promedio térmico de la sección transversal de aniquilación de pares veces la velocidad relativa, y n_{eq} es la densidad de número en equilibrio.

Reliquias térmicas calientes

Las reliquias térmicas calientes son partículas cuyo desacople se produce cuando estas aún son relativistas. Lo anterior equivale a $T_{dec} > m_\chi$, siendo T_{dec} la temperatura de desacople y m_χ la masa de la partícula de materia oscura. Una vez desacopladas del resto de materia, su densidad de número n_χ evoluciona de acuerdo a (1.41a), lo que equivale a un decremento en proporción inversa al volumen $n_\chi \propto a^{-3}$, consecuencia de la dependencia de la temperatura del factor de escala

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}. \quad (1.57)$$

La densidad de entropía s total de la materia remanente evoluciona con el mismo comportamiento que la densidad de número, por lo que la razón $n/s \equiv Y$, conocida como abundancia comóvil, permanece constante. Debido a que las contribuciones a la energía de las reliquias térmicas son mayormente debido a su cantidad de movimiento, se utiliza la aproximación de límite relativista en 1.1.2 para calcular de abundancia comóvil.

$$Y_\chi = \left. \frac{n_\chi}{s} \right|_{T_{dec}} = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{eff}}{g(T_{dec})}, \quad (1.58)$$

donde g corresponde a los grados de libertad del campo de materia oscura y $g_{eff} = g$ para bosones, $g_{eff} = 3g/4$ para fermiones. La densidad de número y densidad de entropía son respectivamente

(1.41a) y (1.42). Resultado de lo anterior, si se plantea que las reliquias térmicas están asociadas a fermiones con masa m_χ y potencial químico despreciable se tiene una contribución al parámetro cosmológico Ω

$$\Omega_\chi h^2 \simeq \frac{g_\chi}{g_*} \left(\frac{m_\psi}{19 \text{ eV}} \right). \quad (1.59)$$

Aquí g_ψ el número total de grados de libertad de las reliquias térmicas y g_* los grados de libertad efectivos bosónicos y fermiónicos en el desacople para todas las partículas que posteriormente convertirán su energía en fotones.

Reliquias térmicas frías

Las reliquias frías χ se desacoplan a una temperatura T_{dec} menor que su masa m_χ . Por ello, su densidad de número n_χ está exponencialmente suprimido, en comparación con la densidad de número de fotones, de acuerdo con (1.44a). Para conocer la densidad de número se resuelve la ecuación de Boltzmann en (1.56), la cual, escribiendo el parámetro de Hubble en términos del factor de escala, adquiere la forma

$$a^{-3} \frac{dn_\chi a^3}{dt} = \langle \sigma v \rangle \left[(n_\chi^{eq})^2 - (n_\chi)^2 \right]. \quad (1.60)$$

Recordando que la temperatura escala como la inversa del factor de escala y multiplicando la ecuación anterior por T^3 se obtiene

$$\frac{dX}{dt} = T^3 \langle \sigma v \rangle [X_{eq}^2 - X^2], \quad (1.61)$$

donde se utilizaron las definiciones

$$X \equiv n_\chi / T^3, \quad X_{eq} \equiv n_\chi^{eq} / T^3. \quad (1.62)$$

Resulta conveniente introducir la variable

$$x \equiv m_\chi / T, \quad (1.63)$$

la cual para temperaturas mucho mayores a la masa de las partículas $x \ll 1$ y $X_{eq} \simeq X$ y por lo tanto X es constante. Al calcular la derivada temporal de x , considerando que $T \propto a^{-1}(t)$ se tiene

$$\frac{dx}{dt} = H(t)x, \quad (1.64)$$

donde $H(t)$ es el parámetro de Hubble. Utilizando la derivada anterior, la ecuación (1.61) se puede reescribir como

$$\frac{dX}{dx} = \frac{m_\chi^3 \langle \sigma v \rangle}{H x^2} [X_{eq}^2 - X^2]. \quad (1.65)$$

Para tiempos posteriores al desacople, es decir, $x \gg 1$ se tiene que $X \gg X_{eq}$ debido a que las partículas no son capaces de aniquilarse lo suficientemente rápido para mantener el equilibrio. Resolviendo la ecuación (1.65) desde la temperatura de desacople hasta temperaturas mucho menores a la masa de las partículas ($x \rightarrow \infty$) se obtiene

$$\frac{1}{X_\infty} - \frac{1}{X_{dec}} = \frac{\lambda}{x_{dec}}, \quad (1.66)$$

donde $\lambda \equiv m_\chi^3 \langle \sigma v \rangle H^{-1}$. La densidad de número actual, por la definición de X , es $n_{\chi,0} = X_\infty T_1^3$, donde el subíndice 1 denota la temperatura a la cual X adquiere el valor asintótico X_∞ . X al tiempo de desacople X_{dec} es mayor que X_∞ por lo que se puede realizar la aproximación

$$X_\infty \simeq \frac{x_{dec}}{\lambda}. \quad (1.67)$$

La densidad de energía actual asociada a las partículas de materia oscura es [30]

$$\rho_{\chi,0} = m_\chi n_{\chi,0} = m_\chi X_\infty T_0^3 \left(\frac{a(T_1)T_1}{a(T_0)T_0} \right) \simeq \frac{m_\chi X_\infty T_0^3}{30}, \quad (1.68)$$

donde el subíndice 0 denota el tiempo actual. Dividendo la densidad de energía al tiempo actual entre la densidad crítica para obtener la abundancia de partículas se tiene

$$\begin{aligned} \Omega_\chi &= \frac{x_{dec} m_\chi T_0^3}{\lambda 30 \rho_c} \\ &= \frac{H x_{dec} T_0^3}{30 m_\chi^2 \langle \sigma v \rangle \rho_c}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

1.2.5. Mecanismos no térmicos de producción

Desintegración de partículas pesadas inestables

La materia oscura puede ser producida a partir de la desintegración de partículas producidas en el Universo temprano. La materia oscura producida de esta forma constituiría población térmica X_{TH} si la desintegración se produce cuando las partículas madre están en equilibrio. Si la desintegración se da fuera del equilibrio, la población sería no térmica X_{NTH} . En el panorama convencional de inflación, el decaimiento del campo del inflatón permeó el Universo con radiación, generando un plasma en equilibrio térmico. Cuando se estableció una superioridad substancial de la expansión del Universo sobre la tasa de interacción de alguna partícula, esta se desacopló del plasma térmico. Acontecido el desacople, la razón de densidad de número de la partícula desacoplada sobre la densidad de entropía permaneció constante. Si la partícula era inestable, eventualmente presentó desintegraciones a partículas más ligeras, las cuales pueden constituir materia oscura.

La abundancia de partículas producidas por desintegraciones no térmicas está inmediatamente vinculada con la abundancia de la partícula madre. Sean ψ la partícula madre y χ la partícula producto de las desintegraciones, sus abundancias están relacionadas por [3]

$$Y_\chi^{NTP} \Big|_{T=T_D} = \frac{\alpha_\chi}{r_s} \text{BR}(\psi \rightarrow \chi) Y_\psi \Big|_{T=T_D}. \quad (1.70)$$

α_χ es el número de partículas χ producidas por partícula ψ , r_s es la razón de entropía antes y después de la desintegración y $\text{BR}(\psi \rightarrow \chi)$ es la fracción ramificada de la desintegración de partículas Ψ a partículas χ y T_D corresponde a la temperatura de la radiación al tiempo de la desintegración. Presumiendo una desintegración instantánea, la temperatura es

$$T_D = \left(\frac{\pi^2 g_*}{90}\right)^{-1/4} \sqrt{M_P \Gamma_\psi}, \quad (1.71)$$

Γ_ψ es la tasa de desintegración de ψ y g_* son los grados de libertad relativistas y M_P es la masa de Planck. La densidad de número de la partícula de materia oscura n_χ exhibe diferentes comportamientos dependiendo de la dinámica de ψ

Considerando la abundancia de la partícula inicial ψ al tiempo de desintegración Ω_ψ . Y si las partículas de materia oscura χ no presentan interacciones al momento de la desintegración heredan la abundancia de ψ con la forma

$$\Omega_\chi h^2 \simeq \frac{m_\chi}{m_\psi} \Omega_\psi h^2. \quad (1.72)$$

Producción por desalineación

El mecanismo de producción de materia oscura por desalineación se basa en la suposición de que campos escalares (o pseudo escalares) en el Universo temprano poseían un valor inicial arbitrario no nulo. El valor inicial de los campos permaneció fijo, para campos con masa m , hasta escalas de tiempo $t \sim m^{-1}$. Una vez sobrepasado dicho tiempo, los campos intentan minimizar su potencial, oscilando alrededor del mínimo. A partir de las oscilaciones, la densidad de energía del campo se puede identificar como densidad de energía de materia no relativista [14]. Debido a la importancia de este mecanismo de producción de materia oscura, la descripción detallada se realizará en 2.4.1.

Capítulo 2

Axiones y su dinámica

El modelo estándar de la física de partículas (SM, por sus siglas en inglés de *Standard Model*) no contiene componentes que puedan ser consideradas como materia oscura. Ante la limitación del modelo estándar para describir materia oscura, extensiones a este son propuestas para proveer candidatos viables. Una de estas extensiones contempla a partículas llamadas axiones como sugerencia factible. El axión es una partícula pseudo-escalar (espín cero, paridad negativa), originalmente postulada para resolver el problema de violación de la simetría discreta CP en las interacciones fuertes del modelo estándar. El axión se presenta como candidato a materia oscura debido a que se estima que tiene interacciones extremadamente débiles con partículas del modelo estándar. Aunado a lo anterior, es posible la generación de partículas tipo axión mediante métodos de producción no térmicos. Estos axiones no hubiesen estado en equilibrio térmico con el resto del Universo [43], acarreado que constituyeran materia oscura fría.

2.1. Axión de cromodinámica cuántica

2.1.1. Problema de CP fuerte

Las interacciones débiles violan las simetrías discretas de conjugación de carga C , paridad P y la simetría combinada CP . La cromodinámica cuántica (QCD, por su acrónimo en inglés *Quantum Chromodynamics*) es la teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes. Mientras que en QCD surgen términos que violan CP, experimentalmente dicha violación no es observada. Debido a que QCD es una teoría exitosa en el ámbito fenomenológico, se espera una solución ante tal discrepancia.

La densidad lagrangiana de QCD es

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{j=1}^n \left(\bar{q}_j \gamma^\mu i D_\mu q_j - (m_j q_{Lj}^\dagger q_{Rj} + h.c.) \right) + \frac{\theta g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde la suma se realiza sobre los n sabores de los quarks. $G^{a\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos asociado a los gluones y $\tilde{G}^{a\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta}^a$ su dual. El último término en (2.1) (llamado término θ) está vinculado con el llamado *vacío- θ de QCD*. El término θ es una derivada total (llamado término topológico) que no modifica las ecuaciones de movimiento o algún otro aspecto de QCD en el régimen perturbativo. Sin embargo, este término contribuye por medio de efectos no perturbativos que involucran instantones de QCD. Utilizando la anomalía Adler-Bell-Jackiw (o anomalía quiral) [44] es posible mostrar que el término θ debe estar presente si ninguna de las masas de los quarks es nula [45]. Además, con la anomalía quiral es posible exponer que QCD depende de θ a través de la combinación de parámetros [10]

$$\bar{\theta} = \theta - \arg(\det(\mathcal{M})), \quad (2.2)$$

donde \mathcal{M} es la matriz de masas asociada a los quarks. Si $\bar{\theta} \neq 0$, QCD viola la transformación combinada CP. La violación de CP se pone de manifiesto al escribir la contracción de los tensores de esfuerzo $G^{a\mu\nu}$ y $\tilde{G}^{a\mu\nu}$ en términos de campos análogos de electromagnetismo \mathbf{E}^a y \mathbf{B}^a , donde a es el índice de color. La transformación de la contracción de los tensores tiene la forma

$$G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \propto \sum_a \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{B}^a \xrightarrow{T} - \sum_a \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{B}^a, \quad (2.3)$$

donde T denota la transformación de inversión temporal. Lo anterior es debido a que bajo T los campos se transforman como

$$\mathbf{E}^a \xrightarrow{T} \mathbf{E}^a, \quad \mathbf{B}^a \xrightarrow{T} -\mathbf{B}^a. \quad (2.4)$$

Debido a que el modelo estándar es una teoría invariante bajo la transformación combinada CPT [46], la violación de la transformación de inversión temporal T implica la violación de la transformación combinada CP . La ausencia experimental de violación de estas simetrías impone cotas superiores en los valores de $\bar{\theta}$. La mejor medición que restringe el valor de $\bar{\theta}$ es el momento dipolar eléctrico del neutrón, cuyo valor [47]

$$|d_n| < 2.9 \times 10^{-26} e \text{ cm} \quad (2.5)$$

se vincula con $\bar{\theta}$ a través de técnicas de teoría quiral de perturbaciones de la forma [48]

$$d_n \simeq 5 \times 10^{-16} \bar{\theta} e \text{ cm}. \quad (2.6)$$

Aquí e es la carga eléctrica del electrón. De esta forma un valor $\bar{\theta} \sim \mathcal{O}(1)$ está en desacuerdo con las restricciones experimentales, estableciendo que

$$\bar{\theta} < 10^{-10}. \quad (2.7)$$

El problema de la pequeñez de $\bar{\theta}$ implica un problema de ajuste fino y es conocido como *problema de CP fuerte*. Ante el problema de CP fuerte se propusieron distintas alternativas: dinámica no convencional, rompimiento espontáneo de simetría CP y la adición de una simetría quiral. De las propuestas anteriores, solamente se considerará la última, ya que el campo establecido por esta propuesta posee las características de materia oscura fría.

La simetría adicional, propuesta para la resolución del problema de CP fuerte, es una cuasi-simetría¹ quiral global, denotada por $U(1)_{PQ}$, que presenta un rompimiento espontáneo. La introducción de dicha simetría en la teoría promueve el término estático $\bar{\theta}$, responsable de violación de CP, a un campo dinámico. El *axión* es el pseudo-bosón de Nambu-Goldstone² incorporado a partir del rompimiento espontáneo de la simetría adicional.

Si se introduce la simetría $U(1)_{PQ}$, el parámetro $\bar{\theta}$ adquiere la forma [5]

$$\bar{\theta} = \theta - \arg(\det(\mathcal{M})) - \frac{a(x)}{f_a}, \quad (2.8)$$

donde $a(x)$ es el campo del axión, $f_a = v_a/N$ se conoce como constante de desintegración y es el parámetro de orden asociado al rompimiento de la simetría $U(1)_{PQ}$. v_a es el valor esperado del vacío (VEV) que rompe $U(1)_{PQ}$ y N es un número entero que expresa la anomalía de color de $U(1)_{PQ}$. Bajo transformaciones $U(1)_{PQ}$, el axión se transforma como [10]

$$a(x) \rightarrow a(x) + \alpha f_a. \quad (2.9)$$

Para que la densidad lagrangiana del modelo estándar sea invariante ante la nueva simetría $U(1)_{PQ}$, se deben incorporar términos asociados al campo del axión

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a + \mathcal{L}_{int}(\partial^\mu a / f_a, \Psi) + \frac{a}{f_a} \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (2.10)$$

En la expresión anterior \mathcal{L}_{SM} denota la densidad lagrangiana del modelo estándar, Ψ equivale a un campo genérico del modelo estándar y \mathcal{L}_{int} es el término de interacción de campos del modelo estándar con las derivadas del campo del axión. g_s es la constante de acoplamiento de la interacción del campo del axión con los bosones de norma asociados al grupo de norma $SU(3)$. El último

¹El término cuasi-simetría se debe a que se trata de una simetría conservada en la densidad lagrangiana, pero rota explícitamente por efectos no perturbativos [5].

²Como consecuencia de que la simetría $U(1)_{PQ}$ adicional sea una cuasi-simetría, utilizando el teorema de Goldstone, el bosón asociado al rompimiento espontáneo de la simetría global es masivo.

término representa un potencial efectivo para el campo del axión. El mínimo del potencial ocurre cuando $\langle a \rangle = -\bar{\theta} f_a$ [49] lo cual es equivalente a

$$\left\langle \frac{\partial V_{eff}}{\partial a} \right\rangle = -\frac{1}{f_a} \frac{g_s^2}{32\pi^2} \left\langle G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \right\rangle \Big|_{\langle a \rangle = -\bar{\theta} f_a} = 0. \quad (2.11)$$

Al introducir el campo del axión en la densidad lagrangiana de QCD surge un término similar al término θ el cual tiene a la interacción del campo del axión con los bosones de norma de $SU(3)$. El axión, al tener un potencial con mínimo en $-\theta f_a$, conduce a $\bar{\theta} \rightarrow 0$ conforme el campo se acerca al mínimo de su potencial [50]. De esta manera se establece una solución dinámica para el problema de CP fuerte.

2.2. Dinámica del axión

La temperatura crítica a la cual la simetría $U(1)_{PQ}$ tiene el rompimiento espontáneo es $T_{PQ} \sim v_a$, donde v_a es el valor esperado del vacío de un campo escalar complejo $\varphi(x)$. La dinámica del campo $\varphi(x)$ está especificada a través de su densidad lagrangiana, invariante bajo una simetría $U(1)_{PQ}$,

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - V(\varphi^\dagger, \varphi) + \mathcal{L}_{\varphi,int}. \quad (2.12)$$

$\mathcal{L}_{\varphi,int}$ constituye las interacciones de φ con otros campos.

Cuando $T > T_{PQ}$ el potencial tiene un solo mínimo, en $\varphi = 0$. Cuando $T < T_{PQ}$ la configuración $\varphi = 0$ es inestable debido a que es un máximo local, a esta temperatura el potencial adquiere la forma

$$V(\varphi^\dagger, \varphi) = \frac{\lambda}{4} (\varphi^\dagger \varphi - v_a^2)^2, \quad (2.13)$$

teniendo un conjunto de vacíos degenerados que corresponden a un círculo cuyo radio tiende a v_a conforme la temperatura disminuye. Los mínimos pueden ser parametrizados como

$$\langle \varphi(x) \rangle = v_a e^{ia(x)/v_a}, \quad (2.14)$$

donde $a(x)$ es el campo del axión. La parametrización del campo escalar en términos de una parte radial y una parte angular

$$\varphi(x) = h(x) e^{ia(x)/f}, \quad (2.15)$$

permite establecer de manera clara la transformación del campo del axión bajo transformaciones $U(1)$ globales. f es una constante introducida para procurar la adimensionalidad de la fase. La transformación del campo escalar φ ante el grupo $U(1)$ es

$$\varphi \rightarrow e^{ig} \varphi. \quad (2.16)$$

Escribiendo el campo φ en sus componentes radial y angular se tiene la transformación del axión:

$$\varphi \rightarrow e^{ig}\varphi = e^{ig}h(x)e^{ia(x)/f} = h(x)e^{i(a(x)+gf)/f}, \quad (2.17a)$$

$$a(x) \rightarrow a(x) + gf = a(x) + \text{const.} \quad (2.17b)$$

Cuando se produce el rompimiento espontáneo de la simetría y el campo del axión, $a(x)$, aparece como una fase del campo escalar complejo $\varphi(x)$, este no posee masa. La condición de campo no masivo que exhibe el axión es válida en el intervalo de temperatura $T_{PQ} \sim T \gg \Lambda_{QCD}$, donde Λ_{QCD} es la escala a la cual la constante de acoplamiento de QCD se vuelve muy grande, $100 \text{ MeV} \lesssim \Lambda_{QCD} \lesssim 400 \text{ MeV}$. Cuando la temperatura alcanza la escala de QCD, es decir, $T \sim \Lambda_{QCD}$, efectos no perturbativos asociados a los instantones de QCD generan un potencial efectivo para el axión, $V(a)$ [5]. Los efectos no perturbativos rompen la simetría adicional $U(1)_{PQ}$, a un subgrupo discreto $Z(N)$. De lo anterior, se tiene que el potencial del axión es periódico con período $\Delta\phi = 2\pi f_{PQ}$, el cual cualitativamente se puede escribir como [5]

$$V(a) = f_{PQ}^2 m_a^2(t) \left[1 - \cos\left(\frac{a}{f_{PQ}}\right) \right]. \quad (2.18)$$

En la expresión anterior, f_{PQ} es la constante de desintegración y $m_a(t)$ es la masa del axión.

2.3. Partículas tipo axión

Las partículas tipo axión (ALPs, por las siglas en inglés de *Axion Like Particles*) reciben su nombre de sus interacciones con partículas del modelo estándar. Las interacciones que tienen el axión de QCD y las partículas tipo axión con campos fermiónicos del modelo estándar son [12]

$$\mathcal{L}_{int} \ni i \frac{g_{aNN}}{2m_N} \partial_\mu a (\bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 N) + i \frac{g_{aee}}{2m_e} \partial_\mu a (\bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e), \quad (2.19)$$

donde $g_{a\bar{ii}}$, $i = e, N$ son las constantes de acoplamiento para interacciones con electrones y nucleones respectivamente, m_i son las masas del electrón y nucleón. Sin embargo, las interacciones que se utilizarán en este trabajo son las interacciones de ALPs con bosones de norma del modelo estándar de la forma

$$\mathcal{L}_{int} \ni -\frac{1}{4} g \phi F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

donde ϕ es el campo asociado a la ALP y g el acoplamiento adimensional.

El mecanismo de generación de ALPs se puede establecer al igual que para el axión de QCD: cuando una cuasi-simetría tiene rompimiento espontáneo, aparecen como pseudo-bosones de Nambu-Goldstone. Los bosones aparecen en la densidad lagrangiana como fases. Las fases al ser adimensionales, tiene la forma ϕ/f_ϕ , donde ϕ es el pseudo-bosón de Nambu-Goldstone y f_ϕ la escala del

rompimiento espontáneo de la simetría adicional, cuya escala puede ser distinta a la escala de QCD. El potencial asociado a las ALPs puede ser parametrizado de la misma forma que el potencial del axión de QCD

$$V(\phi) = m_\phi^2 f_\phi^2 \left[1 - \cos\left(\frac{\phi}{f_\phi}\right) \right]. \quad (2.21)$$

m_ϕ es la masa de la partícula tipo axión. En general, *las masas de las ALPs no están relacionadas con la masa del axión de QCD*, por lo que pueden presentar independencia temporal, consecuencia de que son independientes de la temperatura.

2.4. Axiones como materia oscura

La acción de un campo escalar real ϕ es

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.22)$$

Donde $V(\phi)$ corresponde al potencial efectivo y g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. Para la partícula tipo axión, la acción (2.22) es válida solo después del rompimiento espontáneo de la simetría adicional, denotada por $U(1)_x$ para referirse a ALPs. Asimismo, la acción se considera válida después de que los efectos no perturbativos han tenido repercusiones. Lo anterior es debido a que previo a los efectos no perturbativos el potencial es nulo y el axión no tiene masa.

El tensor de energía-momento se obtiene mediante la variación de la densidad lagrangiana respecto a la métrica,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi. \quad (2.23)$$

Utilizando la densidad lagrangiana en (2.22) el tensor de energía-momento adquiere la forma

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \delta^\mu{}_\nu \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} - V(\phi) \right]. \quad (2.24)$$

Al restringirse a un Universo isótropo y homogéneo, cuyo elemento de línea, establecido en (1.1), está especificado por la métrica FRLW, el campo escalar es necesariamente homogéneo [23]. Al ser homogéneo, las derivadas espaciales del campo escalar en (2.24) son nulas. El tensor de energía-momento se ve reducido a

$$T^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_0 \delta^0{}_\nu \dot{\phi}^2 - \delta^\mu{}_\nu \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.25)$$

De (1.7), la componente temporal de T^μ_ν , $(\mu, \nu) = (0, 0)$, es igual a la densidad de energía ρ , por lo que

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (2.26)$$

Mientras que la presión P corresponde a la parte espacial, T^i_i y tiene la forma

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.27)$$

A partir de la ley de conservación (1.8) y considerando la densidad de energía y presión asociadas a un campo escalar, se obtiene la ecuación de movimiento para el campo,

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (2.28)$$

$\dot{\phi}$ denota la derivada respecto al tiempo, mientras que $V'(\phi)$ es la derivada respecto al campo. En la ecuación de movimiento para el campo escalar ϕ , no se han considerado las interacciones, debido a que dicho término se considera insignificante. Las interacciones, y desintegraciones, del campo escalar están descritas mediante la amplitud Γ_ϕ . Si las desintegraciones representan una contribución relevante en la evolución del campo ϕ la ecuación de movimiento se ve modificada como

$$\ddot{\phi} + [3H(t) + \Gamma_\phi]\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (2.29)$$

La masa del axión (de QCD) depende de la temperatura, la temperatura depende del tiempo y por lo tanto la masa depende del tiempo. Bajo la presunción que el valor inicial del campo del axión es pequeño, es posible expandir el potencial (2.18), hasta términos de segundo orden, obteniendo

$$\ddot{\phi} + [3H(t) + \Gamma_\phi]\dot{\phi} + m_\phi^2\phi = 0. \quad (2.30)$$

2.4.1. Producción de materia oscura por desalineación

La ecuación de movimiento del campo ϕ en (2.30) es la ecuación de un oscilador amortiguado cuyo factor de amortiguación es $3H(t) + \Gamma_\phi$. A partir del análisis de la ecuación de un oscilador amortiguado, realizada en el Apéndice C, se llega a la condición de oscilación, establecida en (C.4). Se puede establecer la distinción del comportamiento del campo del axión, discerniendo si este presenta oscilaciones. El umbral de oscilación del campo ocurre a un tiempo crítico t_c definido a través de

$$(3H(t_c) + \Gamma_\phi)^2 = 4m_\phi^2(t_c), \quad (2.31)$$

en donde se especifica explícitamente la dependencia temporal de la masa del axión.

Condiciones iniciales

El tiempo al cual se produce el rompimiento espontáneo de la simetría global $U(1)$ que da lugar al axión como parte de la fase de un campo escalar complejo será denotado por t_i . El tiempo al cual los efectos no perturbativos propician la generación de un potencial efectivo para el axión y que a su vez provocan que el axión adquiera una masa será denotado por t_G .

La simetría que posee el axión previo a la generación del término de masa, $\phi \rightarrow \phi + c$, sugiere que el campo del axión ϕ tiene un desplazamiento fijo arbitrario para $t_i \ll t_G$, con un valor esperado del vacío $\langle \phi \rangle$ distinto de cero [15]. Las condiciones iniciales que se consideran son [51]

$$\phi(t_i) = \langle \phi \rangle \equiv \theta_i, \quad (2.32a)$$

$$\dot{\phi}(t_i) = 0 \quad (2.32b)$$

y están bien definidas para $H(t_i) \gg m_\phi$. Aquí, θ_i es el valor inicial del campo y se conoce como *ángulo de desalineación inicial*. El término *desalineación* se refiere a que existe un desplazamiento del campo del axión, es decir, $\theta_i \neq 0$.

La densidad de energía del campo del axión se puede identificar con la densidad de energía de los fluidos cosmológicos. La similitud de la densidad de energía asociada al axión con la de algún fluido está sujeta a (2.31). Para reparar en las similitudes de ρ , es necesario tomar en consideración la evolución de la densidad de energía en función del factor de escala, como se muestra en (1.18a)-(1.18c) y el comportamiento que tiene el parámetro de Hubble en función del tiempo, mostrado en (1.30a), (1.30b). Para evidenciar lo anterior se puede proceder mediante la resolución de la ecuación de movimiento del axión, en (2.30), bajo dos suposiciones:

Suposición 1. *Las desintegraciones del axión son despreciables comparadas con el parámetro de Hubble.* ($\Gamma_\phi \rightarrow 0$ en (2.30)). Lo anterior corresponde a considerar que la tasa de expansión del Universo es el único mecanismo de disipación de energía.

Suposición 2. *La dependencia temporal de la masa m_ϕ se adjudica completamente a la función escalón unitario.* ($m_\phi(t) = m_\phi \Theta(t - t_G)$), donde m_ϕ es el valor asintótico de la masa del axión.

Como consecuencia de las suposiciones anteriores, la condición de oscilación resulta modificada, adquiriendo la forma

$$(3H(t_c))^2 = 4m_\phi^2. \quad (2.33)$$

El campo ϕ , solución a la ecuación (2.30), muestra dos comportamientos dependiendo si se consideran tiempos menores o mayores a t_G (tiempo al cual se establecen los efectos no perturbativos). Ambos comportamientos son mostrados a continuación.

Tiempos anteriores a efectos no perturbativos ($t < t_G$)

Cuando $t < t_G$ el axión no posee masa, por lo que la solución de la ecuación de movimiento es una constante establecida por las condiciones iniciales en (2.32a), el campo es entonces

$$\phi(t < t_G) = \theta_i. \quad (2.34)$$

Este resultado es independiente de considerar que en la ecuación de movimiento el Universo está dominado por radiación ($H(t) = 1/2t$) o por materia $H(t) = 2/3t$. Sin embargo, ya que la energía cinética del campo ϕ es nula, por las condiciones iniciales, y debido a que su masa es nula, la densidad de energía es cero

$$\rho(t < t_G) = 0. \quad (2.35)$$

En la igualdad anterior, se utilizó la expresión para la densidad de energía establecida en (2.26).

Tiempos posteriores a los efectos no perturbativos ($t > t_G$)

La masa del axión experimenta el ‘encendido’ de su masa cuando $T \sim \Lambda_x$, siendo Λ_x la escala a la cual las partículas tipo axión adquieren masa, y esta a su vez es comparable con la tasa de expansión del Universo. Debido a que el parámetro de Hubble (término de amortiguamiento) tiene dependencia temporal, se tienen dos escenarios que responden a la condición (2.33)

$3H(t) > 2m_\phi$. Sistema sobreamortiguado.

$3H(t) < 2m_\phi$. Sistema subamortiguado.

La solución a la ecuación de movimiento (2.29) tiene la forma general

$$\phi(t > t_G) = C_1 t^{\frac{1}{2}(1-3\kappa)} J_{\frac{1}{2}(3\kappa-1)}(m_\phi t) + C_2 t^{\frac{1}{2}(1-3\kappa)} Y_{\frac{1}{2}(3\kappa-1)}(m_\phi t), \quad (2.36)$$

donde κ hace referencia al parámetro de Hubble en distintas eras: $H(t) = \kappa/t$, con $\kappa = 1/2, 2/3$ para eras dominadas por radiación y materia respectivamente. J_ν y Y_ν atañen a las funciones de Bessel de primer y segundo tipo.

La solución, restringida por las condiciones iniciales, y con un valor para la masa $m_\phi = 1/t_G$ se muestra en la Figura (2.1), en la cual $t/t_G = 1$ corresponde al tiempo del establecimiento de la masa. El valor inicial del campo es denotado por θ . El campo ϕ permanece constante en su valor inicial θ hasta un tiempo t_G , al cual se establece una masa $m_\phi \neq 0$, a partir del cual el campo empieza a oscilar. La amplitud de las oscilaciones depende de la consideración de un Universo dominado por radiación o por materia, siendo que esta es mayor cuando se examina la evolución del campo en un Universo dominado por radiación.

La evolución de la densidad de energía, calculada a partir de (2.26), se muestra en la Figura (2.2). La densidad de energía se muestra normalizada con su valor inicial, denotado por $\rho(t_G)$, mientras que la masa de la ALP se planteó como $m_\phi = 1/t_G$.

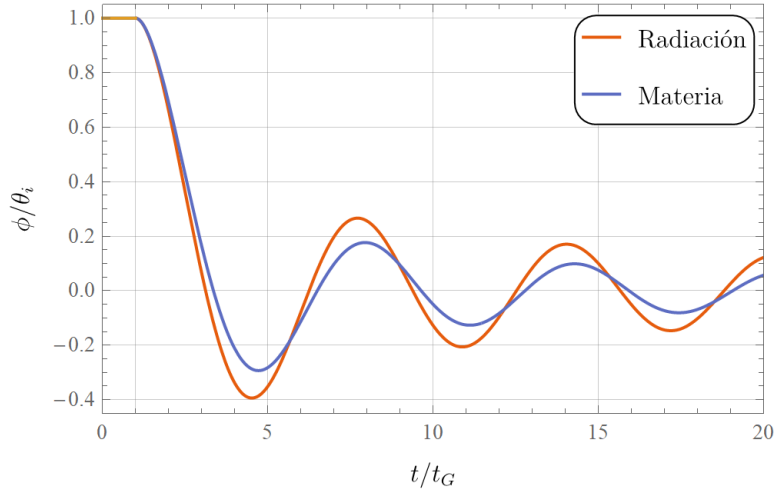


Figura 2.1: Evolución del campo $\phi(t)$, normalizado con su valor inicial $\phi(t_1) \equiv \phi_1$, ($m_\phi = 1/t_1$).

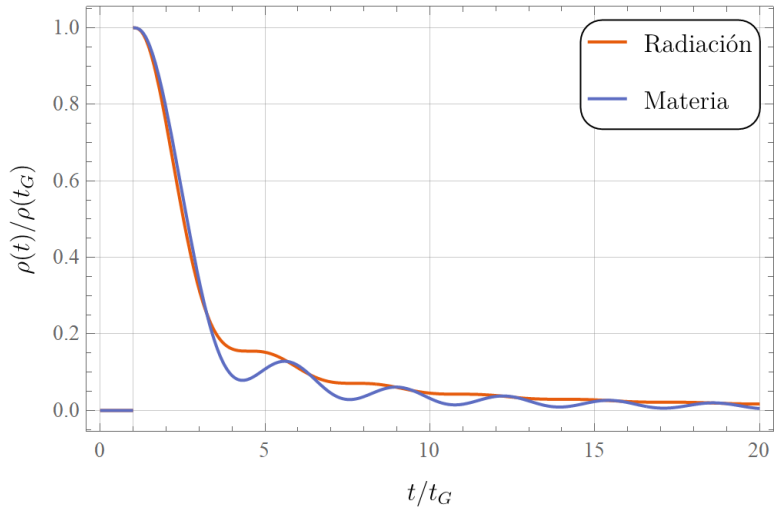


Figura 2.2: Evolución de la densidad de energía de ϕ , $\rho(t)$, normalizado con su valor inicial $\rho(t_1) \equiv \rho_1$, ($m_\phi = 1/t_1$).

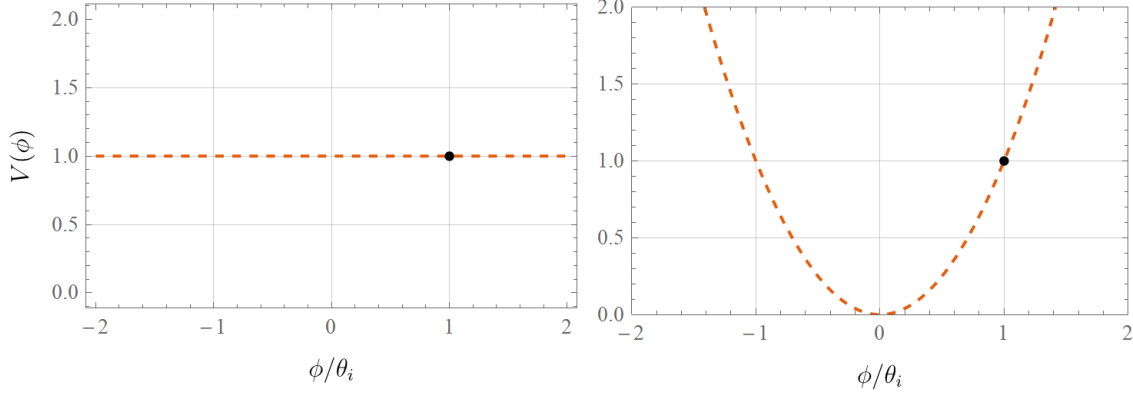


Figura 2.3: Potencial del campo ϕ para diferentes tiempos. Del lado izquierdo se muestra el potencial de ϕ para tiempos menores al establecimiento de efectos no perturbativos. Del lado derecho para tiempos mayores a los efectos no perturbativos.

En escalas de tiempo largas comparadas con el período de oscilación, las oscilaciones del campo escalar se comportan como un fluido perfecto con densidad de energía ρ y presión P [52]

$$\rho \equiv \langle \dot{\phi}^2/2 + V \rangle, \quad (2.37a)$$

$$P \equiv \langle \dot{\phi}^2/2 - V \rangle. \quad (2.37b)$$

Los braquets denotan el promedio temporal.

La frecuencia de oscilación del campo es la frecuencia de vibración amortiguada debido a la inserción de un término de amortiguamiento. En este caso la amortiguación de las oscilaciones del campo del axión es debido a la expansión del Universo. La frecuencia de vibración amortiguada, ω_d , se define como

$$\omega_d \equiv \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n, \quad (2.38)$$

donde la frecuencia natural del sistema es la masa del axión $\omega_n = m_\phi$ y ζ es la relación de amortiguamiento. El tiempo al cual el campo presenta amortiguamiento crítico está establecido en (2.33). La relación de amortiguamiento ζ para el campo es

$$\zeta = \frac{3H(t)}{2m_\phi}. \quad (2.39)$$

Para que las oscilaciones del campo escalar se comporten como fluido perfecto, las escalas de tiempo deben ser

$$\Delta t \gg \frac{1}{\omega_d} = \frac{m_\phi^{-2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3H(t)}{2m_\phi}\right)^2}}. \quad (2.40)$$

Evaluando el parámetro de Hubble en Universos dominados por radiación y materia respectivamente, las condiciones para que las oscilaciones se comporten como fluido perfecto tienen la forma

$$\Delta t \gg 1/8m_\phi \left(3 + 1/m_\phi \sqrt{64 + 9m_\phi^2} \right), \quad (2.41a)$$

$$\Delta t \gg 1/2m_\phi \left(1 + 1/m_\phi \sqrt{4 + m_\phi^2} \right). \quad (2.41b)$$

Una vez establecidas las escalas de tiempo, es posible aproximar los valores de las variables dinámicas $\phi(t)$, $\dot{\phi}(t)$ por sus promedios temporales. Asimismo teniendo la densidad de energía y presión, asociadas al campo escalar, como el promedio de la suma y diferencia de energía cinética y potencial respectivamente, es posible utilizar el *teorema del virial*. Para un potencial de la forma $V(\phi) \propto |\phi|^n$, el teorema del virial establece que [52]

$$\langle \dot{\phi}^2/2 \rangle = (1/2)(1 + \omega)V_0, \quad (2.42a)$$

$$\langle V(\phi) \rangle = (1/2)(1 - \omega)V_0, \quad (2.42b)$$

donde $V_0 \equiv V(\phi_0)$, ϕ_0 es la amplitud del campo y $\omega \equiv P/\rho = (n - 2)/(n + 2)$ es la ecuación de estado. Para el potencial aproximado que se está utilizando se tiene $n = 2$, por lo que resultado del teorema del virial en (2.42a)

$$\langle V(\phi) \rangle = \langle \dot{\phi}^2/2 \rangle. \quad (2.43)$$

Para identificar el comportamiento de la densidad de energía del campo del axión como densidad de energía de diferentes fluidos cosmológicos, se analiza el comportamiento del campo para límites de la razón de expansión del universo y la masa asociada al campo. El escenario donde se tiene un oscilador sobreamortiguado corresponde al límite donde

$$H(t)/m_\phi \gg 1 \quad (2.44)$$

En la solución general de la ecuación de movimiento para el campo, el primer argumento en las funciones de Bessel está fijo mientras que el segundo regula la frecuencia de la función. El parámetro de Hubble se comporta como $H(t) \propto 1/t$ para las eras de dominación de materia y radiación. Resultante de lo anterior, el término regulador de frecuencia es equivalente a $m_\phi t \rightarrow m_\phi/H(t)$ ³. Siguiendo la condición establecida en (2.44), se tiene que la razón $m_\phi/H(t) \ll 1$. Como consecuencia, la solución adquiere un valor aproximadamente constante.

$$\phi(t) \approx \theta_i. \quad (2.45)$$

³En el cambio de t por la inversa del parámetro de Hubble existen constantes de proporcionalidad (1/2 para radiación y 2/3 para materia), sin embargo dada la condición en (2.44), las constantes no representan gran modificación a la sustitución.

La introducción del valor constante θ_i es a partir de las condiciones iniciales. Obtenido el valor del campo, el cálculo de la densidad de energía es mediante (2.26)

$$\rho \approx \frac{1}{2} m_\phi \theta_i^2. \quad (2.46)$$

Recordando la evolución de la densidad de energía del vacío en (1.18c), se tiene que la densidad de energía del campo, cuando se cumple $H(t) \gg m_\phi$, ρ_ϕ se comporta como densidad de energía del vacío.

Para el escenario del oscilador subamortiguado, el límite consiste en

$$H(t)/m_\phi \ll 1. \quad (2.47)$$

En dicho límite se utiliza el teorema del virial. Recordando que la ecuación de movimiento del campo ϕ no es nada más que la ley de conservación, se puede reescribir como

$$\dot{\rho} + 3H(t)\dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.48)$$

Lo anterior resulta de considerar las expresiones para densidad de energía y presión asociadas al campo escalar en la ley de conservación o multiplicar la ecuación de movimiento por $\dot{\phi}$ e identificar la derivada temporal de la densidad de energía. Utilizando el teorema del virial, se tiene que el promedio temporal de la energía cinética es igual al promedio temporal del potencial. En escalas de tiempo suficientemente grandes, la densidad de energía es el promedio temporal de la suma de la energía cinética más el potencial. Consecuencia de lo anterior, es posible realizar la aproximación

$$\rho = \langle \dot{\phi}^2 \rangle, \quad (2.49)$$

con lo que se obtiene una ecuación solo para la densidad de energía

$$\dot{\rho} + 3H(t)\rho = 0. \quad (2.50)$$

Utilizando la definición del parámetro de Hubble, la ecuación anterior tiene solución

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3(t)}, \quad (2.51)$$

identificando la evolución de la densidad de energía de materia. De lo anterior, para tiempos que satisfacen (2.41a), (2.41b), ρ_ϕ se comporta como densidad de energía de materia.

El mecanismo por desalineación procede a partir de las condiciones iniciales, en las cuales el campo tiene un valor inicial no nulo θ . El término θ es el desplazamiento del campo, es una *desalineación*. Previo a la generación de masa, el campo no oscila, por lo cual no existe término de frecuencia en la ecuación de movimiento. La frecuencia natural del sistema se relaciona con el potencial mediante su derivada respecto al campo

$$\omega_n^2 = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (2.52)$$

Si la frecuencia natural hasta un tiempo t_G es nula, se puede identificar como un potencial constante. Una vez que se establece el potencial, y así la masa, se tiene una frecuencia de oscilación diferente de cero. El potencial tiene forma cuadrática en el campo. Establecido el potencial, el campo originalmente desalineado comienza a oscilar alrededor de su mínimo, *realineamiento de vacío*. Las oscilaciones producidas a partir del realineamiento de vacío permiten establecer la identificación de la densidad de energía del campo como densidad de energía debido a materia.

Para la discusión de la solución general, (2.36) para la ecuación de movimiento del campo ϕ , se trabajó bajo la suposición que el Universo estaba dominado ya sea por radiación o por materia. Sin embargo, existe el escenario en el cual el Universo está dominado por el campo ϕ , en el cual el parámetro de Hubble introducido en (2.36) está determinado por la ecuación de Friedmann. Incluyendo los términos de desintegración, la ecuación tiene la forma

$$\ddot{\phi} + \left(3\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right)} + \Gamma_\phi \right) \dot{\phi} + m^2\phi = 0, \quad (2.53)$$

cuya solución no es analítica. Al resolver la ecuación numéricamente, las oscilaciones del campo ϕ están delimitadas por término proporcional a t^{-1} .

Hasta ahora no se habían considerado las desintegraciones de las partículas, codificadas en Γ_ϕ y se había supuesto que la masa del campo no tenía dependencia temporal o en su caso la dependencia temporal estaba completamente en la función escalón. Ahora bien, una vez que se comprobó el comportamiento de oscilación que presenta el campo bajo determinadas condiciones que la masa y la tasa de expansión del Universo deben satisfacer, se permite introducir una masa dependiente del tiempo e interacciones.

Para la incorporación de la dependencia temporal de la masa y de las interacciones, se trabaja con la ecuación para densidad de energía sabiendo que puede utilizar el teorema del virial cuando se tienen oscilaciones. Con las modificaciones planteadas, la derivada temporal de la densidad de energía incluye términos adicionales:

$$\dot{\rho} = \ddot{\phi}\dot{\phi} + m^2\dot{\phi}\phi + \phi^2\dot{m}m. \quad (2.54)$$

La ecuación para la densidad de energía es

$$\dot{\rho} + \left(3H + \Gamma_\phi - \frac{\dot{m}}{m} \right) \rho = 0, \quad (2.55)$$

donde el teorema del virial fue utilizado para establecer la ecuación. Utilizando la definición del parámetro de Hubble, la solución tiene la forma

$$\rho_\phi(t) = \rho_\phi(t_0) \frac{m(t)}{m(t_0)} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 e^{-\Gamma(t-t_0)}, \quad (2.56)$$

donde t_0 es un tiempo de referencia relacionado con las condiciones iniciales. La densidad de energía de una partícula producida a través del mecanismo por desalineación presenta una supresión exponencial dependiente de la tasa de desintegración. Al ser el tiempo de vida media τ el recíproco de la tasa de desintegración Γ , se establece que la densidad de energía de partículas con menor tiempo de vida media es menor que aquellas que son más estables.

La identificación del campo del axi3n como materia no relativista se realiza a través de la densidad de energía del campo. Cuando la masa del campo es mayor al parámetro de Hubble es posible utilizar el teorema del virial aproximando el valor del campo por el promedio de sus oscilaciones. Si se considera que la masa del campo tiene un comportamiento asintótico, la densidad de energía evoluciona como $\rho \propto a^{-3}$ cuando la masa alcanza este valor, donde a es el factor de escala. El comportamiento anterior de la densidad de energía corresponde a densidad de materia no relativista. Si la masa no presenta un comportamiento asintótico, la identificación de la densidad de energía del campo como densidad de materia no relativista se realiza a través de la ecuación de estado, definida en (1.17). Cuando se consideran escalas de tiempo largas con el periodo de oscilación, la ecuación de estado se puede escribir en términos del promedio de la densidad de energía y presión como

$$\omega = \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle}. \quad (2.57)$$

Utilizando la definición del promedio de la presión, como se muestra en (2.37b), se tiene que

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle \dot{\phi}^2/2 - V(\phi) \rangle \\ &= \langle \dot{\phi}^2/2 \rangle - \langle V(\phi) \rangle. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Además, debido a que se está utilizando la aproximación del potencial periódico (2.18) hasta términos $\mathcal{O}(\phi^2)$, el teorema del virial establece que el promedio del término cinético es igual al promedio del término del potencial como se muestra en (2.43). La consecuencia de la consideración anterior es que

$$\langle P \rangle = 0, \quad (2.59)$$

por lo que la ecuación de estado, para cualquier valor de la densidad distinta de cero, es

$$\omega = 0, \quad (2.60)$$

identificando así que el campo se comporta como materia no relativista para cualquier dependencia temporal de la masa.

La parte fundamental para la identificación de partículas tipo axi3n como materia oscura no relativista radica en las oscilaciones del campo y las escalas de tiempo consideradas con respecto al periodo de oscilación, lo cual nos permiten utilizar el teorema del virial, el cual, específicamente para un potencial $V(\phi) \propto \phi^2$ establece la igualdad de los promedios de los términos cinético y potencial, teniendo como consecuencia una ecuación de estado con $\omega = 0$.

Capítulo 3

Materia Oscura Dinámica

Como es establecido en la sección 1.2, las observaciones que atañen a CMB y BBN imponen restricciones sobre la materia oscura. Una de ellas corresponde a la abundancia que esta representa del total de materia. Al establecer la suposición de que la materia oscura corresponde a una sola especie de partícula, se imponen limitaciones sobre sus interacciones. Considerando una partícula de materia oscura con masa m_χ y desintegraciones codificadas en el parámetro de desintegración Γ_χ . Materia oscura dinámica analizada en [15], pretende instaurar una dependencia temporal no trivial sobre la abundancia de materia oscura Ω_{DM} . Lo anterior es reflejo de la modificación temporal que presente la densidad de energía de materia oscura ρ_{DM} . La dependencia temporal sobre la densidad de energía puede ser introducida al incorporar varias partículas, todas ellas que satisfagan las restricciones genéricas a materia oscura. La aportación a este escenario yace en la variación de las propiedades de las partículas propuestas como lo son su masa y desintegración. Conociendo que existen limitaciones impuestas por CMB y BBN sobre las desintegraciones de las partículas, se debe establecer una limitación sobre la abundancia de partículas cuyas desintegraciones sean muy altas. Si se dedica la atención a partículas tipo axión (ALPs) cuya única distinción entre ellas sea su masa, se debe procurar que las más masivas posean abundancias menores.

3.1. Dimensiones adicionales

Es posible establecer una teoría con dimensiones espaciales adicionales. Las dimensiones adicionales deben permanecer ocultas tal que se mantengan ignoradas por experimentos de bajas energías. La idea de Kaluza-Klein es que mediante la *compactificación* de las dimensiones extra, estas permanezcan ocultas [53]. La compactificación se realiza a escalas lo suficientemente pequeñas tal que la resolución de observadores en 4 dimensiones no permita la identificación de estructura de las dimensiones adicionales [54]. Al espacio extendido se le denomina *bulto*. Los campos del modelo estándar se suponen confinados a una frontera 4-dimensional llamada *brana*.

Supóngase un espaciotiempo de Minkowski D -dimensional, con $D > 4$. El intervalo ds^2 , bajo la adición de coordenadas espaciales tiene la forma

$$ds^2 = \sum_{M,N=0}^{D-1} \eta_{MN} dx^M dx^N. \quad (3.1)$$

El espaciotiempo D -dimensional se separa en un espaciotiempo no compacto \mathcal{M}_4 , mientras que las coordenadas adicionales forman un espacio compacto \mathcal{K}^{D-4} , con una escala de compactificación denotada por M_c . La escala de la compactificación M_c es equivalente a $1/R$, donde R es la escala de longitud asociada al espacio compacto. La separación del espaciotiempo D -dimensional se considera

$$\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{K}^{D-4}. \quad (3.2)$$

\mathcal{M}_4 corresponde al espaciotiempo de Minkowski 4-dimensional. A escalas de distancia mucho mayores que R , lo que equivale a experimentos de energías mucho menores que M_c , las dimensiones adicionales no serían detectables.

3.2. Orbifolds

Un orbifold se obtiene a partir de una variedad mediante la identificación de puntos bajo un grupo de simetría discreto. Para definir un orbifold de manera correcta se deben introducir definiciones de teoría de grupos, topología y geometría diferencial, los cuales se presentan a continuación.

3.2.1. Teoría de grupos

Definición 3.2.1. Un conjunto G se dice que forma un grupo si existe una operación, denotada por \cdot ; llamada multiplicación de grupo que asocia cualquier par ordenado de elementos $a, b \in G$ con un producto bien definido $a \cdot b$ que también es un elemento en G , tal que las siguientes condiciones se satisfacen

1. La operación \cdot es asociativa, i.e. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo $a, b, c \in G$;
2. entre los elementos de G , existe un elemento e , llamado elemento identidad, que tiene la propiedad de que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$;
3. para cada $g \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$, llamado inverso de a que tiene la propiedad de que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Definición 3.2.2. Un subconjunto H de un grupo G que forma un grupo bajo la misma ley de multiplicación que G se dice que es un subgrupo de G . Si H es un subgrupo de G y $a \in G$, entonces $H' = \{aha^{-1}; h \in H\}$ también forma un subgrupo de G . Se dice que H' es un *subgrupo conjugado* de H .

Definición 3.2.3. Un *subgrupo invariante* H de G es uno el cual es idéntico a todos sus subgrupos conjugados.

Definición 3.2.4. Sea $H = \{h_1, h_2, \dots\}$ un subgrupo de G y sea p un elemento de G , que no está en H , entonces el conjunto de elementos $pH = \{ph_1, ph_2, \dots\}$ es llamado *coset izquierdo*. De manera similar Hp es un coset derecho.

Teorema 3.2.1. Si H es un subgrupo invariante de G , el conjunto de cosets dotado con la ley de multiplicación $pH \cdot qH = (pq)H$ forma un grupo, llamado *grupo cociente* de G . El grupo cociente se denota como G/H .

3.2.2. Topología

Definición 3.2.5. Una *topología* en un conjunto X es una colección \mathcal{T} de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades

1. \emptyset y X están en \mathcal{T} ;
2. la unión de elementos de cualquier subcolección de \mathcal{T} está en \mathcal{T} ;
3. la intersección de elementos de cualquier subcolección finita de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Un conjunto para el cual una topología \mathcal{T} ha sido especificada es llamado *espacio topológico*. Un espacio topológico con la propiedad de que dos puntos distintos siempre puede ser rodeados por conjuntos abiertos disjuntos se llama *espacio de Hausdorff*.

Sean X y Y espacios topológicos; sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y su inversa

$$f^{-1} : Y \rightarrow X \tag{3.3}$$

son continuas, f es llamado *homeomorfismo*.

Definición 3.2.6. Un grupo topológico G es un grupo y un espacio de Hausdorff, las dos estructuras siendo compatibles en el sentido de que la multiplicación de grupo $\cdot : G \times G \rightarrow G$ y la función $i : G \rightarrow G$ que mapea cada elemento del grupo a su inverso, son continuas.

La *acción* de un grupo topológico G en un espacio X es un mapeo continuo $G \times X \rightarrow X$, denotada por $(g, x) \mapsto gx$, tal que $g(hx) = (gh)x$ y que $1x = x$, para $g, h \in G$ y $x \in X$. Para $x \in X$, el *subgrupo de isotropía* G_x de x se define como $G_x = \{g \in G | gx = x\}$. La acción se dice *libre* si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$, donde e denota el elemento identidad de G . El conjunto $G(x) = \{gx \in X | g \in G\}$ es la *órbita* de x bajo G .

3.2.3. Geometría diferencial

Definición 3.2.7. M es una variedad diferenciable n -dimensional si se satisface que

1. M es un espacio topológico;
2. M está provisto de una familia de parejas $\{(U_i, \varphi_i)\}$;
3. $\{U_i\}$ es una familia de conjuntos abiertos que cubre a M , esto es, $\cup_i U_i = M$; φ_i es un homeomorfismo de U_i a un conjunto abierto U'_i en \mathbb{R}^n
4. dados U_i y U_j tales que $U_i \cap U_j = \emptyset$, el mapeo $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ a $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es infinitamente diferenciable.

La pareja (U_i, φ_i) se llama *sistema coordenado*, mientras que a la familia $\{(U_i, \varphi_i)\}$ se le denomina *atlas*.

Una vez establecidos las definiciones anteriores, es posible proceder a identificar los orbifolds. Sean M una variedad y G un grupo discreto que actúa sobre M . Se puede definir el espacio cociente $\Gamma \equiv M/G$. El espacio cociente Γ se conoce como *orbifold*. Un punto en el espacio cociente corresponde a una órbita de puntos en M que consiste en un punto y todas sus imágenes bajo la acción del grupo G . Si la acción no es libre, el orbifold posee singularidades. En los puntos singulares el orbifold no es una variedad en general. Los puntos fijos son puntos que están relacionados con ellos mismos por la identificación, es decir, son invariantes bajo la acción del grupo G .

Al establecer la identificación de puntos, es posible instaurar el *dominio fundamental*. El dominio fundamental es un subconjunto del espacio en el cual se satisface que

1. no hay identificación de dos puntos dentro del dominio fundamental, y
2. cualquier punto en el espacio está en el dominio fundamental o está identificado con un punto en el dominio fundamental.

3.2.4. Orbifold S^1

El orbifold más sencillo es un toro unidimensional. El toro unidimensional es un círculo $T^1 = S^1$, obtenido a partir de la identificación de la coordenada y en el eje real \mathbb{R} de la forma

$$y \sim y + 2\pi R. \quad (3.4)$$

R es el radio del círculo. Escrito como espacio cociente, el toro se expresa como

$$T^1 = \mathbb{R}^1 / \mathcal{G}. \quad (3.5)$$

\mathcal{G} es un grupo cuyo conjunto, denotado por G , está dado por $G = \{2\pi Rn | n \in \mathbb{Z}\}$. Las coordenadas que difieren por cantidades enteras de $2\pi R$ son consideradas la misma. La identificación se establece de manera gráfica en la Figura 3.1, donde los puntos señalados por las flechas son considerados el mismo debido a la identificación. El dominio fundamental de S^1 , denotado por L , es la circunferencia del círculo: $L = [0, 2\pi R)$. Es evidente que la acción del grupo \mathcal{G} sobre \mathbb{R}^1 es libre por lo que el orbifold S^1 no posee puntos fijos.

3.2.5. Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2

El ejemplo más simple de un orbifold no trivial es el intervalo S^1/\mathbb{Z}_2 , donde S^1 tiene radio R . La identificación asociada a S^1 implica que

$$y \sim y + 2\pi R, \quad (3.6)$$

donde $y \in \mathbb{R}^1$. La acción del grupo \mathbb{Z}_2 se considera como la reflexión con respecto al origen. La identificación resultante, sobre la coordenada circular y , es decir $y \in S^1$, es

$$y \sim -y. \quad (3.7)$$

La identificación anterior convierte al orbifold S^1 en el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 . Lo anterior se refiere a que la construcción del orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 se realiza a partir de la identificación de puntos opuestos, en S^1 , respecto a un eje vertical en S^1 como se muestra en la Figura 3.2.

Los puntos fijos del orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 son $y = 0$ y $y = \pi R$, lo que es equivalente a tener un intervalo finito $[0, \pi R]$.

3.3. Campos en orbifolds

Al comenzar una teoría de dimensión mayor a cuatro se debe obtener una acción efectiva 4-dimensional. La idea es que si la dimensión adicional es lo suficientemente pequeña, los experimentos realizados no puedan demostrar la estructura de estas dimensiones [54]. En el caso de cinco



Figura 3.1: Orbifold S^1 , obtenido mediante la identificación de puntos: $y \sim y + 2\pi R$, $y \in \mathbb{R}$. La acción de \mathcal{G} está definida por una traslación de cantidades enteras de $2\pi R$.

dimensiones, para asegurar que la dimensión extra sea inobservable, Kaluza introdujo la suposición de que existe un sistema coordenado en el espacio 5-dimensional tal que la métrica, g_{MN} , con $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$, es independiente de la dimensión extra x^4 [55]

$$\partial_4 g_{MN} = 0. \quad (3.8)$$

∂_4 es la derivada con respecto a la coordenada espacial x^4 .

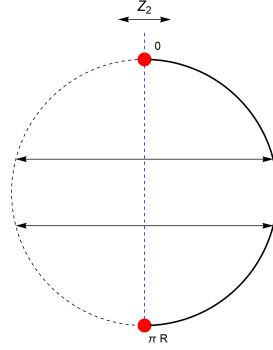


Figura 3.2: Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 . La acción de \mathbb{Z}_2 está definida por una reflexión respecto al origen: $y \sim -y$. Los puntos fijos están denotados por puntos rojos: 0 y πR .

3.3.1. Campos escalares

El caso más simple de un campo en cinco dimensiones es un campo escalar libre sin masa en un espaciotiempo de Minkowski 5-dimensional. La acción que describe un campo escalar complejo sin masa Φ en cinco dimensiones es

$$S_{5d,\Phi} = \int d^5x \frac{1}{2} \partial^M \Phi^* \partial_M \Phi. \quad (3.9)$$

Los índices latinos en mayúscula se utilizan para denotar las cinco dimensiones, $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$. Los índices griegos se utilizarán para denotar el espaciotiempo 4-dimensional, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. La coordenada adicional x^4 será definida como y , $x^4 \equiv y$. Con el establecimiento de la coordenada adicional y , las coordenadas tienen la estructura $x^M = (x^\mu, y)^T$. En la acción 5-dimensional se utiliza la métrica $\eta_{MN} = \text{diag}(+, -, -, -, -)$.

El campo Φ satisface la ecuación de Klein-Gordon 5-dimensional

$$\square_M \Phi(x^M) = 0, \quad (3.10)$$

donde \square_M corresponde al equivalente operador d'Alembertiano en 5 dimensiones

$$\square_M \equiv \partial_\mu^2 - \partial_y^2. \quad (3.11)$$

Con la separación de las coordenadas del espaciotiempo de Minkowski y la coordenada del espacio compacto, la acción adquiere la forma

$$S = \int d^4x \int dy \partial^\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - \partial_y \Phi^* \partial_y \Phi. \quad (3.12)$$

Campos en espaciotiempo $\mathcal{M}_4 \times S^1$

Se considera que el espaciotiempo 5-dimensional está dado por $\mathcal{M}_4 \times S^1$, donde \mathcal{M}_4 corresponde al espaciotiempo de Minkowski y S^1 es un círculo. Cualquier variable dinámica definida en $\mathcal{M}_4 \times S^1$ puede ser expandida en términos de un conjunto de funciones en \mathcal{M}_4 y funciones en S^1 . El campo escalar Φ se puede descomponer en una serie compleja de Fourier, definida en un intervalo $(y, y + 2\pi R)$, con círculo de radio R , dada por

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x^\mu) f_n(y). \quad (3.13)$$

Las funciones complejas $\phi_n(x^\mu)$ son identificadas como campos escalares en 4 dimensiones. Las eigenfunciones $f_n(y)$ forman una base completa y ortonormal. Las funciones complejas $f_n(y)$ son eigenfunciones del operador ∂_y^2 , con eigenvalores denotados por m_n^2 , de la forma [55]

$$\partial_y^2 f_n(y) = -m_n^2 f_n(y). \quad (3.14)$$

El conjunto de funciones complejas $f_n(y)$ es ortonormal en el intervalo $(y, y + 2\pi R)$, es decir, que satisfacen

$$\int_y^{y+2\pi R} dy f_n^*(y) f_{n'}(y) = \delta_{n,n'}. \quad (3.15)$$

El primer factor dentro del integrando es complejo conjugado, por lo tanto, se admite la adición de fases.

Introduciendo la expansión del campo Φ en la acción 5-dimensional se tiene

$$S = \int d^4x \int_y^{y+2\pi R} dy \frac{1}{2} \left(\sum_{n,n'=0}^{\infty} \partial^\mu \phi_n^*(x^\mu) \partial_\mu \phi_{n'}(x^\mu) f_n^*(y) f_{n'}(y) - \sum_{n,n'=0}^{\infty} \phi_n^*(x^\mu) \phi_{n'}(x^\mu) \partial_y f_n^*(y) \partial_y f_{n'}(y) \right). \quad (3.16)$$

Al integrar por partes el segundo término, este adquiere la forma

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n,n'}^{\infty} \phi_n^*(x^\mu) \phi_{n'}(x^\mu) \left(\partial_y f_n^*(y) f_{n'}(y) \Big|_y^{y+2\pi R} - \int_y^{y+2\pi R} dy f_{n'}(y) \partial_y^2 f_n^*(y) \right). \quad (3.17)$$

Al imponer condiciones de frontera sobre las funciones complejas $f_n(y)$ se puede reducir la acción en (3.16). La condición es establecida por la identificación de puntos, instaurando ciclicidad en las coordenadas del círculo, implicando que se debe satisfacer [56]

$$\left. \partial_y f_n^*(y) f_{n'}(y) \right|_y^{y+2\pi R} = 0. \quad (3.18)$$

Estableciendo las condiciones sobre las funciones $f_n(y)$, la acción se ve reducida a

$$S_{4d,\phi} = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \partial^\mu \phi_n^*(x^\mu) \partial_\mu \phi_n(x^\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} m_n^2 \phi_n^*(x^\mu) \phi_n(x^\mu). \quad (3.19)$$

La acción 5-dimensional de un campo escalar complejo se convierte en una acción 4-dimensional. La acción resultante corresponde a la suma infinita de campos escalares independientes $\phi_n(x^\mu)$, 4-dimensionales. El eigenvalor m_n^2 del operador ∂_y^2 aplicado sobre las funciones complejas $f_n(y)$ es identificado como la masa vinculada al campo ϕ_n .

La identificación de la coordenada adicional, $y \sim y + 2\pi R$, conlleva a

$$\Phi(x^\mu, y) = \Phi(x^\mu, y + 2\pi R). \quad (3.20)$$

La función exponencial compleja satisface la condición anterior impuesta sobre la coordenada adicional, por lo tanto la expansión del campo Φ se puede escribir como

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x^\mu) e^{iny/R}. \quad (3.21)$$

Para establecer una normalización, se introducen coeficientes r_n en la expansión anterior.

Sustituyendo la descomposición en modos de Fourier del campo Φ en la acción 5-dimensional se tiene

$$S_{4d,\phi} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi_0^*(x^\mu) \partial_\mu \phi_0(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\partial^\mu \phi_n^*(x^\mu) \partial_\mu \phi_n(x^\mu) - \frac{n^2}{R^2} \phi_n^* \phi_n \right) \right]. \quad (3.22)$$

De la acción anterior se obtiene solo un campo escalar complejo sin masa, conocido como *modo cero*, ϕ_0 . También se obtiene un número infinito de campos escalares complejos cuyas masas son proporcionales a la escala de compactificación M_c y satisfacen

$$m_n^2 = \frac{n^2}{R^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

La obtención de una teoría 4-dimensional a partir de dimensiones espaciales adicionales al espaciotiempo de Minkowski \mathcal{M}_4 implica que la acción obtenida, 4-dimensional, es una acción

efectiva. La acción efectiva debe ser considerada con una escala de corte de energía Λ . La escala de corte Λ debe ser mayor a la escala de compactificación M_c [54]. A escalas de energía $E \ll M_c$ solamente el modo cero es relevante, resultando en una teoría 4-dimensional de un campo escalar sin masa. Para energías $E \gtrsim M_c$, todos los campos son relevantes.

En la acción de un campo escalar masivo 5-dimensional cuya dinámica es descrita por la acción

$$S_{5d,\Phi} = \int d^5x \frac{1}{2} (\partial^M \Phi^* \partial_M \Phi - M^2 \Phi^* \Phi), \quad (3.24)$$

la introducción del término de masa M modifica las masas de los campos en la expansión de Fourier. La modificación de las masas asociadas a los campos ϕ_n tiene la forma

$$m_n^2 = \frac{n^2}{R^2} + M^2, \quad (3.25)$$

de modo que en la acción 4-dimensional, $S_{4d,\phi}$, todos los campos escalares son masivos.

La densidad lagrangiana en (3.9) posee simetría bajo la transformación $y \rightarrow y + 2\pi R$, no obstante, el campo no tiene que ser invariante bajo la misma transformación.

Campos en espaciotiempo $\mathcal{M}_4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$

Compactando la dimensión adicional en un orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 . El grupo \mathbb{Z}_2 genera la acción sobre la coordenada adicional

$$y \rightarrow -y. \quad (3.26)$$

Con la acción del grupo \mathbb{Z}_2 se establece la identificación $y \sim -y$, imponiendo la condición de frontera

$$\Phi(x^\mu, -y) = \eta \Phi(x^\mu, y). \quad (3.27)$$

η tiene valores ± 1 por consistencia de \mathbb{Z}_2 , con $\eta^2 = 1$. La elección del valor de η involucra modificaciones en las funciones base de la expansión del campo Φ . Para el caso donde $\eta = 1$, la base ortonormal de funciones complejas $f_n(y)$ es [57]

$$f_0(y) = 1, \quad f_n(y) = \sqrt{2} \cos \frac{ny}{R}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Consecuentemente la expansión del campo Φ tiene la forma

$$\Phi(x^M) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x^\mu) \cos \frac{ny}{R}. \quad (3.29)$$

A diferencia de la expansión establecida para una dimensión espacial compactada en S^1 , (3.21), para el caso de la compactificación en S^1/\mathbb{Z}_2 solo se tiene la mitad de la torre infinita de campos.

De manera alternativa, cuando se utiliza $\eta = -1$ la expansión tiene la forma

$$\Phi(x^M) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x^\mu) \operatorname{sen} \frac{ny}{R}. \quad (3.30)$$

3.4. Materia oscura dinámica

Para el modelo de materia oscura dinámica el campo que se presume como constituyente de materia oscura es un campo axiónico propagándose en un espaciotiempo 5-dimensional. La dimensión adicional al espaciotiempo de Minkowski \mathcal{M}_4 se supone compactificada en un orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 . La descomposición de los campos escalares 5-dimensionales tiene la forma establecida en (3.29). Además, el modelo estándar se presume que se propaga en una hipersuperficie con $y = 0$, donde y denota la coordenada adicional como se establece en la sección 3.3.1.

Al igual que en el caso 4-dimensional se considera la adición de una simetría global denotada por $U(1)_\chi$. Cuando se produce el rompimiento espontáneo de la simetría $U(1)_\chi$ a una temperatura crítica establecida como T_χ , el campo escalar complejo Φ , que se transforma bajo la simetría global como

$$\Phi \rightarrow e^{i\Lambda} \Phi, \quad (3.31)$$

adquiere un valor esperado de vacío diferente de cero, denotado por v_a . El valor esperado de vacío es del mismo orden que la temperatura crítica: $v_a \sim T_\chi$. Los vacíos degenerados establecidos por el rompimiento de la simetría se pueden parametrizar de la siguiente forma

$$\langle \Phi(x^M) \rangle = v_a e^{ia(x^M)/v_a}. \quad (3.32)$$

En la parametrización anterior, a es el campo del axiÓN 5-dimensional. El campo a es real y tiene condiciones iniciales arbitrarias.

El término cinético del campo escalar Φ es el establecido en (3.9) y al realizar la parametrización a través del campo a se tiene la siguiente igualdad

$$S_k = \int d^5 \partial^M \Phi^* \partial_M \Phi = \int d^5 \partial^M a \partial_M a. \quad (3.33)$$

El escenario de que los campos que se propaguen en el ‘bulto’ implica que son necesariamente singletes frente a los grupos de norma del modelo estándar [15]. Los campos del modelo estándar se suponen propagándose en una brana en $y = 0$. Resultado de lo anterior es que los campos propagándose en $y \neq 0$ tienen interacciones suprimidas con las partículas del modelo estándar, convirtiéndolas en candidatos a materia oscura.

La densidad lagrangiana que agrega el campo del axión a tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_{int} \quad (3.34)$$

donde \mathcal{L}_{SM} corresponde a la densidad lagrangiana del modelo estándar y \mathcal{L}_k es el término cinético como se establece en (3.33). En la densidad lagrangiana que incluye al campo a , \mathcal{L}_{int} corresponde a las interacciones que tiene el campo del axión con campos del modelo estándar. La densidad lagrangiana efectiva que atañe a las interacciones se puede escribir de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{int} = i \frac{g_{aNN}}{2m_N} \partial_\mu a (\bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 N) + i \frac{g_{aee}}{2m_e} \partial_\mu a (\bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e) + g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.35)$$

En el término anterior de interacción N y e corresponden respectivamente a los campos de nucleones y electrones con m_N y m_e sus respectivas masas. \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y magnético. Las constantes de acoplamiento de las interacciones están identificadas con g_{aNN} , g_{aee} y $g_{a\gamma\gamma}$.

En la discusión subsecuente solamente se tomará en consideración la interacción del campo a con los campos eléctrico y magnético. La interacción se puede escribir en términos de una divergencia, la cual tiene la forma

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (3.36)$$

$F_{\mu\nu}$ es el tensor esfuerzo electromagnético

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.37)$$

y $\tilde{F}^{\mu\nu}$ es su dual

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (3.38)$$

A_μ es el campo del fotón. El término de interacción anterior surge a través de la anomalía electromagnética de la simetría adicional $U(1)_\chi$. La interacción entre el campo del axión el campo del fotón permite la desintegración del campo a en dos fotones.

Debido a que los campos del modelo estándar se suponen restringidos a una hipersuperficie restringida a $y = 0$, el término de interacción debe también estar restringido a $y = 0$, por lo que se incluye la función delta de Dirac para asegurar la limitación espacial de la interacción. Incluyendo los términos cinético y de interacción, la acción para el campo del axión a tiene la siguiente forma

$$S_{5d,a} = \int d^4x \int dy \left(\frac{1}{2} \partial^M a \partial_M a + \delta(y) \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right). \quad (3.39)$$

A altas temperaturas el axión no tiene masa efectiva. Cuando la temperatura del Universo es $T \sim \Lambda$, donde Λ es la escala de confinamiento, efectos no perturbativos generan un potencial para el axión

$$V(a) = m_a^2 f_a^2 \left(1 - \cos \left(\frac{a}{f_a} \right) \right). \quad (3.40)$$

f_a es la constante de desintegración del axi3n y m_a es la masa del axi3n. Los efectos que producen el potencial no nulo del campo del axi3n se suponen restringidos a la masa del modelo est3andar por lo que la acci3n cuando $T \sim \Lambda$ es

$$S_{5d,a} = \int d^4x \int dy \left(\frac{1}{2} \partial^M a \partial_M a + \delta(y) \left[\frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - m_a^2 f_a^2 \left(1 - \cos\left(\frac{a}{f_a}\right) \right) \right] \right). \quad (3.41)$$

La expansi3n en modos de Fourier del campo escalar real a para una compactificaci3n en el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 tiene la forma establecida en (3.29):

$$a(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} r_n a_n(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right). \quad (3.42)$$

Los campos a_n son campos escalares reales 4-dimensionales y R es el radio de compactificaci3n. Los factores de normalizaci3n se expresan como

$$r_n = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0; \\ \sqrt{2} & \text{para } n > 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Al introducir la expansi3n en series complejas de Fourier del campo 5-dimensional se obtiene una acci3n efectiva en cuatro dimensiones. El t3rmino asociado a la derivada con respecto a las coordenadas del espaciotiempo de Minkowski 4-dimensional \mathcal{M}_4 es

$$\begin{aligned} \int d^4x \int dy \left(\frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a \right) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int dy \sum_{n,n'} r_n r_{n'} \partial^\mu a_n \partial_\mu a_{n'} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \cos\left(\frac{n'y}{R}\right) \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} r_n r_{n'} \partial^\mu a_n \partial_\mu a_n. \end{aligned} \quad (3.44)$$

La componente que se refiere a la derivada con respecto a la coordenada y de la dimensi3n adicional es

$$\begin{aligned} \int d^4x \int dy \left(-\frac{1}{2} \partial_y a \partial_y a \right) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int dy \sum_{n,n'} r_n r_{n'} a_n a_{n'} \frac{nn'}{R^2} \text{sen}\left(\frac{ny}{R}\right) \text{sen}\left(\frac{n'y}{R}\right) \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sum_{n,n'=0}^{\infty} r_n r_{n'} a_n a_{n'} \left(\frac{nn'}{R^2} \right) \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En las equivalencias anteriores, las 3ltimas igualdades son debido a que las funciones $\cos(nx)$ y $\cos(n'x)$, con $n', n \in \mathbb{Z}$, son ortogonales, as3 como tambi3n lo son $\text{sen}(nx)$ y $\text{sen}(n'x)$. El t3rmino asociado al potencial inducido por efectos no perturbativos, restringido a $y = 0$, considerado en la vecindad de su m3nimo se puede aproximar a un t3rmino cuadr3tico de la siguiente forma

$$\int d^4x \int dy \left(-\frac{1}{2} \delta(y) m_a^2 a_n^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int dy \delta(y) m_a^2 \sum_{n,n'} r_n r_{n'} a_n a_{n'} \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \cos\left(\frac{n'y}{R}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \int d^4x m_a^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} r_n r_{n'} a_n a_{n'}. \quad (3.46)$$

Escribiendo los factores de normalización, la acción 4-dimensional resultante es

$$S_{4d,a_n} = \int d^4x \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \partial^\mu a_n(x^\mu) \partial_\mu a_n(x^\mu) - \sum_{n,n'=0}^{\infty} \mathcal{M}_{nn'}^2 a_n(x^\mu) a_{n'}(x^\mu) + \frac{g_{a_n \gamma \gamma}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} r_n a_n F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \quad (3.47)$$

identificando a $\mathcal{M}_{nn'}^2$ como la matriz de masa asociada a los campos ϕ_n de la expansión de Kaluza-Klein. La matriz de masa está dada por

$$\mathcal{M}_{nn'}^2 = \frac{nn'}{R^2} \delta_{nn'} + r_n r_{n'} m_a^2. \quad (3.48)$$

La no diagonalidad de la matriz \mathcal{M}^2 se debe al término $\delta(y)$ que restringe la interacción del campo 5-dimensional a con los campos del modelo estándar, establecidos en $y = 0$, ya que la función delta de Dirac satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(y-x) = f(x). \quad (3.49)$$

Utilizando el desconocimiento de la escala que puede tener la masa de brana m^2 en comparación con el radio de la dimensión compactada se pueden establecer dos escenarios límite. El primer límite es establecido cuando

$$\frac{nn'}{R^2} \gg r_n r_{n'} m_a^2, \quad (3.50)$$

el cual equivalentemente corresponde a

$$\frac{1}{R^2 m_a^2} \gg 1. \quad (3.51)$$

La desigualdad anterior permite aproximar la matriz de masa como

$$\mathcal{M}_{nn'}^2 \approx \frac{nn'}{R^2} \delta_{nn'}. \quad (3.52)$$

Las consecuencias que presenta establecer la anterior condición es que la matriz de masa \mathcal{M}^2 es esencialmente diagonal. El caso contrario es establecido cuando se cumple

$$\frac{nn'}{R^2} \ll r_n r_{n'} m_a^2, \quad (3.53)$$

que equivale a

$$\frac{1}{R^2 m_a^2} \ll 1, \quad (3.54)$$

donde la mayor contribución a la matriz de masa es debido a componentes fuera de la diagonal:

$$\mathcal{M}_{nn'}^2 \approx r_n r_{n'} m_a^2. \quad (3.55)$$

Las implicaciones que tiene la diagonalidad (o no diagonalidad) de la matriz de masa son las mezclas que presentan los campos a_n . La ecuación de movimiento para el campo a_n , establecido en la expansión del campo a mostrado en (3.42), tiene la forma de la ecuación de movimiento para un campo escalar, como aparece en (2.53). La diferencia radica en el término de masa, el cual, al involucrar una suma infinita de campos, incorpora los elementos de la matriz de masa \mathcal{M}^2 . La ecuación de movimiento para el n -ésimo campo, a_n , es

$$\ddot{a}_n + (3H(t) + \Gamma_n) \dot{a}_n + \frac{\partial V}{\partial a_n}. \quad (3.56)$$

De la acción efectiva 4-dimensional (3.47) el potencial para el campo a_n es

$$V(a_n) = \sum_{n,n'=0}^{\infty} \mathcal{M}_{nm}^2 a_n a_{n'}. \quad (3.57)$$

sustituyendo el potencial anterior en la ecuación de movimiento para ϕ_n , esta adquiere la forma

$$\ddot{a}_n + (3H(t) + \Gamma_n) \dot{a}_n + \sum_{n'=0}^{\infty} \mathcal{M}_{nn'}^2 a_{n'}. \quad (3.58)$$

En la ecuación anterior, Γ_n corresponde a las desintegraciones del n -ésimo campo. Como es evidente de la ecuación de movimiento, cuando la matriz de masa es esencialmente no diagonal, la solución para ϕ_n implica todos los campos incluidos en la suma infinita. Una vez advertida la mezcla de los campos de la torre de Kaluza-Klein, resulta conveniente realizar un cambio de base, de estados de momento a estados de masa, a partir de la acción (3.47). Escribiendo el término de masa en forma vectorial se cumple que

$$\mathbf{a}^\dagger \mathcal{M}^2 \mathbf{a} = \mathbf{a}^\dagger U^\dagger U \mathcal{M}^2 U^\dagger U \mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger D^2 \hat{\mathbf{a}}, \quad (3.59)$$

donde la matriz U es unitaria y diagonaliza a \mathcal{M}^2 . La matriz diagonal D^2 está dada por

$$D^2 = U \mathcal{M}^2 U^\dagger \quad (3.60)$$

Los nuevos estados $\hat{\mathbf{a}}$ son estados de masa, que en términos de componentes son

$$\hat{a}_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\lambda n} a_n. \quad (3.61)$$

La matriz U se calcula a partir de los valores propios de la matriz \mathcal{M}^2 , λ , los cuales satisfacen la ecuación característica polinomial

$$\det(\mathcal{M}^2 - \lambda \mathbb{1}_{n \times n}) = 0, \quad (3.62)$$

la cual adquiere la forma [18]

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{R^2} - \lambda^2 \right) \right] \left[\lambda^2 - m_a^2 + \lambda^2 m_a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\frac{n^2}{R^2} - \lambda^2} \right] = 0. \quad (3.63)$$

El segundo término de la ecuación anterior es igual a cero. Dividiendo el segundo término entre m^2 y realizando la suma infinita, la ecuación que satisfacen los eigenvalores λ es

$$\frac{\lambda^2}{m_a^2} - 1 + 1 - \pi R \lambda \cot(\pi R \lambda) = 0. \quad (3.64)$$

Al dividir la ecuación anterior entre λ y multiplicar por R , esta adquiere la forma

$$\lambda R = \pi(m_a R)^2 \cot(\pi R \lambda). \quad (3.65)$$

Las soluciones a la ecuación anterior para λ son las intersecciones de λR con $\pi(m_a R)^2 \cot(\pi R \lambda)$ como se muestra en la figura 3.3. Se tienen diferentes comportamientos dependiendo del valor de

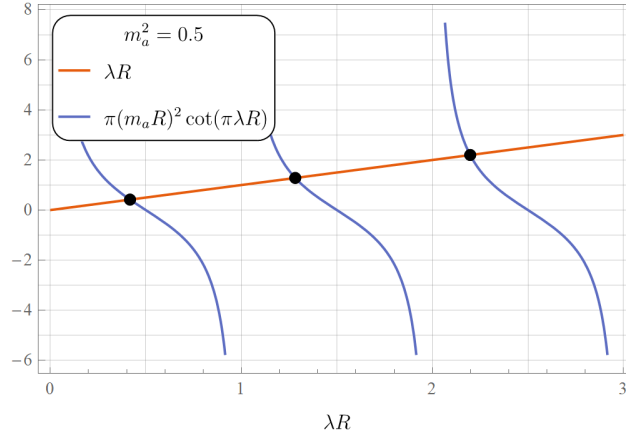


Figura 3.3: Soluciones de la ecuación (3.65), que corresponden a las intersecciones de las funciones λR y $\pi(m_a R)^2 \cot(\pi R \lambda)$, que corresponden a los puntos negros. La figura se muestra para un valor de $(m_a R)^2 = 0.5$.

la masa m_a . Cuando $m_a \rightarrow 0$ se tiene el comportamiento de la Figura 3.4, en el cual las soluciones son $\lambda R \approx n$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, es decir $\lambda \approx n/R$.

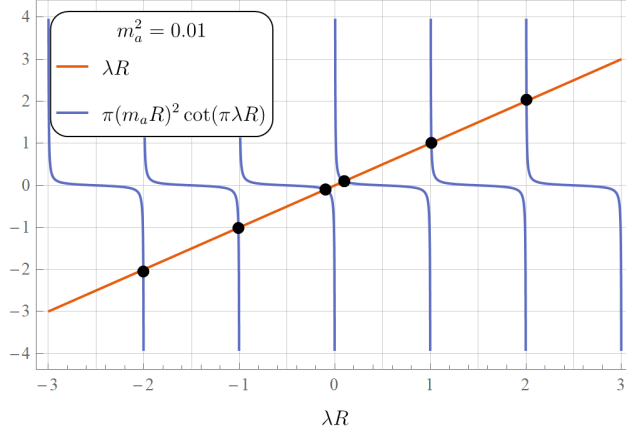


Figura 3.4: Soluciones de la ecuación (3.65) para $m_a \rightarrow 0$. La figura se muestra para un valor de $m_a R = 0.1$.

Para el caso contrario, cuando $m_a \rightarrow \infty$ se tiene el comportamiento de la Figura 3.5, cuyas soluciones son $\lambda R \approx 2n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$, que corresponden a $\lambda \approx 2n + 1/2R$. Debido a que se buscan valores propios positivos, ya que están asociados a las masas de los axiones, en función del producto $m_a R$, se tienen los siguientes valores:

$$\lambda_n \approx \frac{n}{R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{cuando } m_a R \ll 1, \quad (3.66a)$$

$$\lambda_n \approx \frac{2n + 1}{2R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{cuando } m_a R \gg 1. \quad (3.66b)$$

La matriz unitaria U que diagonaliza la matriz de masa \mathcal{M}^2 tiene componentes [17]

$$U_{\lambda k} \equiv \left(\frac{r_k \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - k^2 y^2} \right) A_\lambda, \quad (3.67)$$

donde se introdujeron las siguientes definiciones

$$A_\lambda \equiv \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\lambda}} \left(\tilde{\lambda}^2 + 1 + \pi^2 / y^2 \right)^{-1}, \quad (3.68)$$

así como

$$y \equiv \frac{1}{m_a R}, \quad \tilde{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{m_a}. \quad (3.69)$$

Los eigenvalores normalizados $\tilde{\lambda}$ satisfacen la siguiente identidad

$$\sum_{\lambda} \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 = 1. \quad (3.70)$$

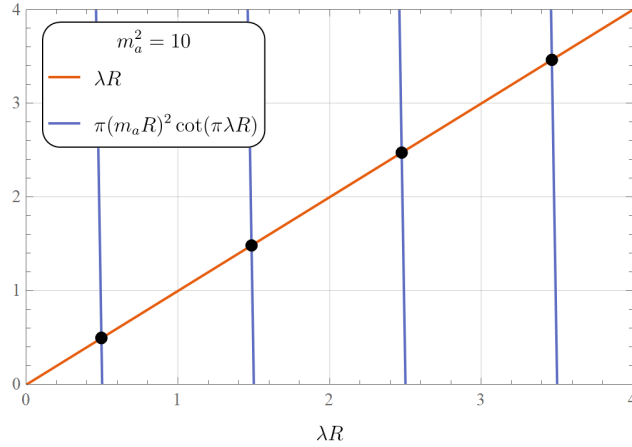


Figura 3.5: Soluciones de la ecuación (3.65), que corresponden a las intersecciones de las funciones λR y $\pi(m_a R)^2 \cot(\pi \lambda R)$, que corresponden a los puntos negros. La figura se muestra para un valor de $m_a R = 10$.

3.4.1. Condiciones iniciales

Al igual que el mecanismo de producción por desalineación 4-dimensional, se deben establecer las condiciones iniciales del campo para que a partir de estas se produzcan oscilaciones. En cuatro dimensiones, el valor inicial del campo escalar ϕ está asociado con el valor esperado de vacío (VEV) del campo de la forma (2.32a). Para 5 dimensiones el valor esperado está asociado con el campo a de la forma

$$\langle a \rangle = \theta f_a^{3/2}, \quad (3.71)$$

donde θ es un parámetro adimensional cuyo valor es arbitrario y $f_a^{3/2}$ es una constante que tiene las mismas unidades del campo: [distancia^{-3/2}]¹ o equivalentemente [masa^{3/2}]² f_a tiene unidades de masa. La expansión en modos de Fourier, (3.42), del campo a ocasiona que solamente un modo de la expansión tenga un valor esperado no nulo:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \langle 0|a|0 \rangle = \langle 0| \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} r_n a_n(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) |0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \langle 0|a_0(x^\mu)|0 \rangle + \langle 0| \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} r_n a_n(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) |0 \rangle \end{aligned}$$

¹Debido a que la acción es adimensional y el elemento de integración d^5x tiene unidades de [distancia⁵], el término $\partial^M \Phi^* \partial_M \Phi$ debe tener unidades de [distancia⁻⁵]. Las derivadas ∂_M tienen unidades de [distancia⁻¹], por lo tanto el campo Φ tiene unidades de [distancia^{-3/2}].

²Recordando que en unidades naturales ($\hbar = c = 1$), utilizando la longitud de onda de Compton: $\lambda_C = \hbar/mc$, la distancia tiene unidades de [masa⁻¹].

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \langle 0|a_0(x^\mu)|0\rangle = \theta f_a^{3/2}. \quad (3.72)$$

Los valores esperados de vacío para los campos 4-dimensionales a_n son

$$\langle a_0 \rangle = \sqrt{2\pi R} \theta f_a^{3/2}, \quad \langle a_n \rangle = 0, \text{ para } n > 0. \quad (3.73)$$

Lo anterior también se puede entender a partir de los potenciales para cada modo. En el caso más sencillo, estableciendo $m_a^2 = 0$, en la acción (3.47) el potencial asociado a cada modo es

$$V(a_n) = \frac{1}{2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{nn'}{R^2} a_n a_{n'} \delta_{n,n'}. \quad (3.74)$$

De donde se observa que el campo a_0 tiene un potencial constante, en tanto que para a_n , con $n > 0$, se tiene un potencial cuadrático. Si el VEV de cada campo busca minimizar el potencial, para ϕ_n , con $n > 0$, el valor correspondiente es cero, al tiempo que no hay VEV para a_0 que minimice el potencial puesto que no tiene potencial. Estableciendo el cambio de base de estados de momento a_n a estados de masa \hat{a}_λ es necesario prevenir el valor esperado de vacío de los estados de masa definidos en (4.1). A partir del valor esperado no nulo del modo cero y suponiendo que los estados de momento son una base completa: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\rangle\langle a_n| = \mathbb{1}$ y que $a_n|0\rangle = |a_n\rangle$, $\hat{a}_\lambda|0\rangle = |\hat{a}_\lambda\rangle$, el valor esperado de vacío asociado a los campos \hat{a}_λ es

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_\lambda \rangle &= \langle 0|\hat{a}_\lambda|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0|a_n\rangle\langle a_n|\hat{a}_\lambda|0\rangle = \langle 0|a_0\rangle\langle a_0|\hat{a}_\lambda|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle 0|a_n\rangle\langle a_n|\hat{a}_\lambda|0\rangle \\ &= \langle a_0\rangle\langle a_0|\hat{a}_\lambda\rangle = \sqrt{2\pi R} \theta f_a^{3/2} \langle a_0|\hat{a}_\lambda\rangle. \end{aligned} \quad (3.75)$$

El término de masa m_a^2 se puede suponer con dependencia temporal. Si se realiza la suposición de que para tiempos tempranos m_a^2 posee un valor cercano a cero y aumenta conforme evoluciona en el tiempo, la no diagonalidad de la matriz de masa \mathcal{M}^2 tiene una dependencia temporal. La matriz \mathcal{M}^2 es inicialmente diagonal hasta un tiempo denominado t_G en el cual la masa m_a y la inversa del radio de compactificación $1/R$ son comparables. Consecuencia de establecer la no diagonalidad de la matriz de masa, t_G es el tiempo al cual se establecen los eigenestados de masa \hat{a}_λ . Los valores esperados de vacío de los campos \hat{a}_λ , (3.75), corresponden a las condiciones iniciales a las que está sujeta la ecuación de movimiento de los campos \hat{a}_λ . Mientras que se considera que los campos parten del reposo, las condiciones iniciales establecidas para \hat{a}_λ son

$$\hat{a}_\lambda(t_G) = \langle \hat{a}_\lambda \rangle, \quad \dot{\hat{a}}_\lambda(t_G) = 0. \quad (3.76)$$

3.4.2. Evolución de los campos escalares

Una vez establecidos los eigenestados de masa, \hat{a}_λ , la ecuación de movimiento se ve modifica de la siguiente manera

$$\ddot{\hat{a}}_\lambda + (3H(t) + \Gamma_\lambda)\dot{\hat{a}}_\lambda + \lambda^2\hat{a}_\lambda = 0. \quad (3.77)$$

Los eigenvalores de la matriz de masa \mathcal{M}^2 son λ . A partir de la ecuación de oscilador amortiguado del campo \hat{a}_λ se establece el tiempo de oscilación t_λ , el cual equivale al tiempo crítico definido en (2.31). El tiempo al cual se establecen eigenestados de masa \hat{a}_λ diferentes a eigenestados de momento a_n se denota por t_G . En $t = t_G$ se tienen valores esperados de vacío, asociados a eigenestados de masa, diferentes de cero. Resultante de que todos los campos \hat{a}_λ poseen masa, al tiempo del establecimiento de valor esperado de vacío de \hat{a}_λ , los estados de mayor término de masa, λ^2 , presentan oscilaciones ‘instantáneas’ en $t = t_G$, debido a que λ^2 puede ser mayor que el término de amortiguación: $\lambda^2 \gg 3H(t) + \Gamma_\lambda$. Las oscilaciones del campo \hat{a}_λ están sujetas a las condiciones iniciales establecidas en (3.76). Para los campos cuyo valor de λ^2 es menor que el término de amortiguación, se tiene un tiempo al cual comienzan las oscilaciones t_λ mayor a t_G . La condición para que el comportamiento del campo sea oscilatorio es

$$(3H(t_\lambda) + \Gamma_\lambda)^2 = 4\lambda^2. \quad (3.78)$$

Escribiendo el parámetro de Hubble para un Universo dominado por radiación y materia respectivamente, el tiempo de oscilación es

$$\frac{3}{2t_\lambda} + \Gamma_\lambda = 2\lambda \quad \text{radiación}, \quad (3.79a)$$

$$\frac{2}{t_\lambda} + \Gamma_\lambda = 2\lambda \quad \text{materia}. \quad (3.79b)$$

De lo anterior se pueden establecer agrupaciones en los campos \hat{a}_λ con respecto a si su tiempo al cual empiezan las oscilaciones es igual o mayor a t_G , de acuerdo a la condición que satisface su término de masa asociado:

$$(3H(t_G) + \Gamma_\lambda)^2 \leq 4\lambda^2 \quad t_\lambda = t_G, \quad (3.80a)$$

$$(3H(t_G) + \Gamma_\lambda)^2 > 4\lambda^2 \quad t_\lambda = \kappa/2\lambda - \Gamma_\lambda. \quad (3.80b)$$

El factor κ tiene valores de 3/2, 2 cuando el parámetro de Hubble es 1/2, 2/3, lo que corresponde a Universo dominado por radiación y materia respectivamente. Una vez superado el tiempo de oscilación, $t > t_\lambda$, asociado al campo \hat{a}_λ , la densidad de energía del campo es solución de la ecuación

$$\dot{\rho}_\lambda + (3H(t) + \Gamma_\lambda) \rho_\lambda = 0, \quad (3.81)$$

cuyo valor está sometido a las condiciones iniciales de \hat{a}_λ . Utilizando las condiciones iniciales y la expresión de la densidad de energía derivada de la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ del tensor de energía momento, el valor de la densidad de energía en $t = t_G$ es

$$\rho(t_G) = \frac{1}{2} \lambda^2 \langle \hat{a}_\lambda \rangle^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\sqrt{2\pi R \theta} f_a^{3/2} \langle a_0 | \hat{a}_\lambda \rangle \right)^2. \quad (3.82)$$

La solución a la ecuación de la densidad de energía (3.81) es

$$\rho(t) = \rho(t_G) \left(\frac{a(t_G)}{a(t)} \right)^3 e^{-\Gamma_\lambda(t-t_G)}. \quad (3.83)$$

La solución anterior se puede expresar con la dependencia temporal explícita del factor de escala dependiendo si se considera Universo dominado por radiación o materia. El tiempo de la igualdad de radiación y materia será denotado por t_{IRM} . La densidad de energía es

$$\rho_\lambda(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 \left(\sqrt{2\pi R\theta} f_a^{3/2} \langle a_0 | \hat{a}_\lambda \rangle \right)^2 e^{-\Gamma_\lambda(t-t_G)} \times \begin{cases} (t_G/t)^{3/2} & \text{para } t_\lambda \leq t \leq t_{IRM}, \\ t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} / t^2 & \text{para } t_{IRM} \leq t. \end{cases} \quad (3.84)$$

Para calcular la abundancia de cada campo \hat{a}_λ se requiere la densidad crítica, establecida como $\rho_{crit} = 3H^2 M_p^2$. Las abundancias tienen un valor de

$$\Omega_\lambda(t) = \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda\theta f_\lambda A_\lambda}{M_p} \right)^2 e^{-\Gamma_\lambda(t-t_G)} \times \begin{cases} 4t_G^{3/2} t^{1/2} & \text{para } t_\lambda \leq t \leq t_{IRM}, \\ 9t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} / 4 & \text{para } t_{IRM} \leq t. \end{cases} \quad (3.85)$$

En la expresión anterior se ha establecido la constante de desintegración 4-dimensional $f_\lambda \equiv \sqrt{2\pi R} f_a^{3/2}$ y la proyección de los estados propios de masa sobre el estado propio de momento con $k = 0$ es

$$\langle a_0 | \hat{a}_\lambda \rangle = A_\lambda. \quad (3.86)$$

Al establecer una ecuación para la abundancia para el λ -ésimo campo \hat{a}_λ , se tiene que la abundancia depende de la tasa de cambio de la densidad crítica:

$$\dot{\Omega}_\lambda + \left(3H(t) + \Gamma_\lambda - \frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\rho}_{crit}}{\rho_{crit}} \right) \Omega_\lambda = 0. \quad (3.87)$$

3.4.3. Desintegraciones

El cálculo de la desintegración se realizará para un de axión a_λ con masa m_a .

La desintegración de axiones en un par de fotones está dada por el término de interacción de la densidad lagrangiana en (3.36) cuyo diagrama de Feynman es

El elemento diferencial de la tasa de desintegración del axión se puede escribir como

$$d\Gamma = \frac{s}{2E_a} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}. \quad (3.88)$$

E_a es la energía del estado inicial, en este caso es la energía del axión. \mathcal{M} corresponde a la parte no trivial de la matriz de dispersión:

$$\langle f | S - \mathbb{1} | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_i - \sum p_f \right) \mathcal{M}, \quad (3.89)$$

$\mathcal{M} \equiv \langle f | \mathcal{M} | i \rangle$ y se conoce como el elemento de matriz invariante, con $|i\rangle$ y $|f\rangle$ respectivamente los estados inicial y final de la desintegración. s es un factor que corrige el doble conteo cuando se

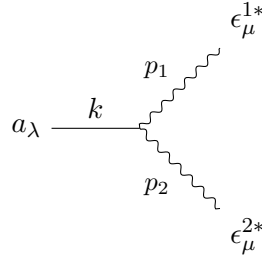


Figura 3.6: Diagrama de Feynman para la desintegración del axión a un par de fotones.

tienen partículas idénticas en el estado final: por cada n partículas de una especie, s es un factor de $1/n!$. Por ejemplo si se tiene la desintegración de una partícula $a \rightarrow b + b + c + d + d + d + d$, s corresponde a un factor de $1/2! \times 1/1! \times 1/4!$. El elemento $d\Pi_{LIPS}$ es llamado *espacio fase invariante de Lorentz* (LIPS, por las siglas en inglés de *Lorentz-invariant phase space*) y está definido por

$$d\Pi_{LIPS} \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p_i - \sum p_f \right) \times \prod_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_j}}. \quad (3.90)$$

La suma sobre j , atañe a los j estados finales de la desintegración. En la función delta $\sum p_i - \sum p_f$ se refiere a la conservación de momento.

El campo del fotón es

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_{i=1}^2 \left(\epsilon_\mu^i(p) a_{p,i} e^{-ipx} + \epsilon_\mu^{i*}(p) a_{p,i}^\dagger e^{ipx} \right), \quad (3.91)$$

donde $\epsilon_\mu^i(p)$ son los vectores de polarización. Los operadores $a_{p,i}$ y $a_{p,i}^\dagger$ son respectivamente operadores de aniquilación y creación. Los operadores de creación tienen índices de polarización. Los estados asintóticos tienen etiquetas de momento y polarización:

$$a_{p,j}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} |p, e^j\rangle, \quad (3.92)$$

lo que implica que

$$\langle 0 | A_\mu(x) | p, e^j \rangle = \epsilon_\mu^j e^{-ipx}, \quad (3.93a)$$

$$\langle p, e^j | A_\mu(x) | 0 \rangle = \epsilon_\mu^{j*} e^{ipx}. \quad (3.93b)$$

En el término de interacción entre el axión y fotones se tienen derivadas del campo A_μ . La forma de la interacción en términos del campo A_μ es

$$\mathcal{L}_{int} \supset \frac{g_{a\lambda\gamma\gamma}}{4} a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha), \quad (3.94)$$

de manera que se tienen cuatro productos que involucran derivadas de la forma

$$\frac{g_{a\lambda\gamma\gamma}}{4} a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta). \quad (3.95)$$

La derivada del campo $A_\mu(x)$ es

$$\partial_\nu A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_{i=1}^2 \left(\epsilon_\mu^i(p) a_{p,i}(-ip_\nu) e^{-ipx} + \epsilon_\mu^{i*}(p) a_{p,i}^\dagger(ip_\nu) e^{ipx} \right). \quad (3.96)$$

Debido a que la interacción involucra derivadas del campo $A_\mu(x)$, los elementos en (3.93) acarrean un factor extra de $\pm ip_\nu$, de manera que en los diagramas de Feynman las líneas externas de fotones corresponden a i veces el vector de polarización por el cuadrimomento de la forma:

$$\text{~~~~~}\circ = -ip_\nu \epsilon_\mu(p) \quad \text{entrante} \quad (3.97a)$$

$$\circ \text{~~~~~} = ip_\nu \epsilon_\mu^*(p) \quad \text{saliente}. \quad (3.97b)$$

Cada vértice en el diagrama de Feynman corresponde a i veces $g_{a\lambda\gamma\gamma} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} / 4$. El elemento de matriz invariante es

$$i\mathcal{M} = \frac{ig_{a\lambda\gamma\gamma}}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(ip_1^\mu \epsilon_\nu^{1*} ip_2^\alpha \epsilon_\beta^{2*} - ip_1^\mu \epsilon_\nu^{1*} ip_2^\beta \epsilon_\alpha^{2*} - ip_1^\nu \epsilon_\mu^{1*} ip_2^\alpha \epsilon_\beta^{2*} + ip_1^\nu \epsilon_\mu^{1*} ip_2^\beta \epsilon_\alpha^{2*} \right) \quad (3.98)$$

Cuando dos índices del símbolo de Levi-Civita son intercambiados, iguales o no, el símbolo cambia de signo:

$$\epsilon_{\dots j \dots m} = -\epsilon_{\dots m \dots j}. \quad (3.99)$$

Rearreglando el elemento de matriz invariante, este adquiere la configuración

$$i\mathcal{M} = \frac{ig_{a\lambda\gamma\gamma}}{4} \left(\epsilon^{\nu\beta\mu\alpha} \epsilon_\nu^{1*} \epsilon_\beta^{2*} p_1^\mu p_2^\alpha + \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} \epsilon_\nu^{1*} \epsilon_\alpha^{2*} p_1^\mu p_2^\beta + \epsilon^{\mu\beta\nu\alpha} \epsilon_\mu^{1*} \epsilon_\beta^{2*} p_1^\nu p_2^\alpha + \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \epsilon_\mu^{1*} \epsilon_\alpha^{2*} p_1^\nu p_2^\beta \right). \quad (3.100)$$

Renombrando índices, el elemento de matriz invariante es

$$i\mathcal{M} = ig_{a\lambda\gamma\gamma} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\mu^{1*} \epsilon_\nu^{2*} p_1^\alpha p_2^\beta. \quad (3.101)$$

Por la identidad de Ward, la suma sobre las polarizaciones del fotón del producto de los vectores de polarización se puede reemplazar por la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\sum_{\text{pols. } i} \epsilon_\mu^{i*} \epsilon_\nu^i \rightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (3.102)$$

El producto de símbolos de Levi-Civita con n índices está dado por

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \cdots & \delta_{i_1 j_n} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \cdots & \delta_{i_2 j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \delta_{i_n j_2} & \cdots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix}. \quad (3.103)$$

La suma sobre las polarizaciones del cuadrado del valor absoluto del elemento de matriz invariante es

$$\sum_{pols. i} |\mathcal{M}|^2 = g_{a\lambda\gamma\gamma}^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\mu^{1*} \epsilon_\nu^{2*} p_1^\alpha p_2^\beta \times \epsilon^{\rho\sigma\eta\delta} \epsilon_\rho^1 \epsilon_\sigma^2 p_1^\eta p_2^\delta. \quad (3.104)$$

$$\sum_{pols. i} |\mathcal{M}|^2 = g_{a\lambda\gamma\gamma}^2 |\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\mu^{1*} \epsilon_\nu^{2*} p_1^\alpha p_2^\beta|^2 = 2g_{a\lambda\gamma\gamma}^2 (p_1 \cdot p_2)^2 \quad (3.105)$$

La relación de dispersión relativista es

$$E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2, \quad (3.106)$$

donde \mathbf{p} es el momento lineal. Utilizando el sistema de referencia en el cual el axi3n est3a en reposo la energ3a del axi3n E_a es igual a la masa del axi3n, denotada por m_a . Debido a que la desintegraci3n que tiene el axi3n es en dos fotones, el factor s que aparece en (3.88) corresponde a $1/2$. La tasa de desintegraci3n en el sistema de referencia donde el axi3n est3a en reposo es

$$d\Gamma = \frac{1}{4m_a} 2g_{a\lambda\gamma\gamma}^2 (p_1 \cdot p_2)^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2}. \quad (3.107)$$

E_1 y E_2 corresponden a la energ3a de los fotones, la cual debido a la relaci3n de dispersi3n son $E_i = |\mathbf{p}_i|$, $i = 1, 2$. La conservaci3n de energ3a y momento: $\delta^{(4)}(k - p_1 - p_2)$ puede ser expresada en t3rminos de componentes espaciales y temporales:

$$\delta^{(4)}(k - p_1 - p_2) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \delta(m_a - E_1 - E_2), \quad (3.108)$$

recordando que en este sistema de referencia $\mathbf{k} = 0$. Al realizar la integral sobre $d^3 p_1$, por la funci3n delta de Dirac, se tiene a la igualdad

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|, \quad (3.109)$$

que a su vez implica la igualdad de las energ3as de los fotones:

$$E_1 = E_2 \equiv E. \quad (3.110)$$

Asimismo, el producto $p_1 \cdot p_2$ se ve reducido

$$(p_1 \cdot p_2)^2 = (p_1^0 p_2^0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 = (E^2 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2)^2 = (2E^2)^2 = 4E^4. \quad (3.111)$$

Al introducir el término anterior en elemento diferencial de la tasa de desintegración, esta se ve reducida como

$$d\Gamma = \frac{g_{a\lambda\gamma\gamma}^2}{8\pi^2 m_a} \frac{E^4}{E^2} d^3 p_2 \delta(m_a - 2E). \quad (3.112)$$

Manipulando la medida $d^3 p_2$ para expresar la tasa de desintegración, como se muestra en el Apéndice B, en términos de la magnitud de \mathbf{p}_2 , se tiene la siguiente expresión

$$d^3 p_2 = dp_2 |p_2|^2 \sin \theta d\theta d\phi = dE E^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3.113)$$

La última igualdad en la ecuación anterior se debe a la relación de dispersión relativista. Al realizar la integral sobre la medida anterior se obtiene el valor de la tasa de desintegración del campo del axión de masa m_a :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{g_{a\lambda\gamma\gamma}^2}{8\pi^2 m_a} 4\pi \frac{m_a^4}{32} \Theta(2E - m_a) \\ &= \frac{g_{a\lambda\gamma\gamma}^2 m_a^3}{64\pi}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Θ es la función *Heaviside theta*.

3.4.4. Estados propios de masa

Cuando se satisface la condición $1/R^2 m_a^2 \ll 1$, es decir, cuando la matriz de masa presenta mayor contribución por los elementos fuera de la diagonal, se produce la mezcla de los campos a_n en las ecuaciones de movimiento. Para desacoplar las ecuaciones de movimiento se realiza un cambio de base como se establece en (4.1), a estos campos se les llama estados propios de masa. Al establecer el cambio de base se producen modificaciones a la densidad lagrangiana en (3.47). La matriz U que diagonaliza a la matriz de masa \mathcal{M}^2 es independiente de las coordenadas espaciotemporales x^μ lo que implica que

$$\partial^\mu a_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} U_{n\lambda}^\dagger \partial^\mu \hat{a}_\lambda. \quad (3.115)$$

El término cinético de la densidad lagrangiana que involucra al campo del axión, en función de estados propios de masa, es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial^\mu a_n \partial_\mu a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} U_{n\lambda}^\dagger \partial^\mu \hat{a}_\lambda \sum_{\lambda'=0}^{\infty} U_{n\lambda'} \partial^\mu \hat{a}_{\lambda'}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^{\infty} \partial^{\mu} \hat{a}_{\lambda} \partial_{\mu} \hat{a}_{\lambda'} U_{n\lambda}^{\dagger} U_{n\lambda'}^{\dagger} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^{\infty} \partial^{\mu} \hat{a}_{\lambda} \partial_{\mu} \hat{a}_{\lambda'} U_{\lambda n} U_{n\lambda'}^{\dagger} \\
&= \sum_{\lambda, \lambda'=0}^{\infty} \partial^{\mu} \hat{a}_{\lambda} \partial_{\mu} \hat{a}_{\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \partial^{\mu} \hat{a}_{\lambda} \partial_{\mu} \hat{a}_{\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

En la igualdad anterior se tomó en consideración que la matriz U es unitaria

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = \mathbb{1}, \tag{3.117}$$

que en términos de componentes se lee

$$\sum_n U_{\lambda n} U_{n\lambda'}^{\dagger} = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.118}$$

Para escribir el término de interacción entre el campo del axión y los fotones se presume que los estados de masa son una base completa, es decir $\sum_{\lambda=0}^{\infty} |\hat{a}_{\lambda}\rangle \langle \hat{a}_{\lambda}| = \mathbb{1}$. Introduciendo la relación anterior en el término de interacción, este es

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} r_n |\hat{a}_{\lambda}\rangle \langle \hat{a}_{\lambda}| a_n. \tag{3.119}$$

Al escribir los campos \hat{a}_{λ} como una combinación de los campos a_n como se establece en la definición de \hat{a}_{λ} en (4.1), así como considerando la normalización $\langle a_n | a_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$, la interacción es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda} \sum_{n, n'=0}^{\infty} \frac{r_n r_{n'} \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - n'^2/m_a^2 R^2} \delta_{nn'} |\hat{a}_{\lambda}\rangle F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \\
&= \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda} \pi \tilde{\lambda} m_a R \cot(\pi \tilde{\lambda} m_a R) |\hat{a}_{\lambda}\rangle F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \\
&= \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{\lambda}^2 A_{\lambda} |\hat{a}_{\lambda}\rangle F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

En la igualdad anterior se utilizó la igualdad que satisfacen los eigenvalores $\tilde{\lambda}$, establecida en (3.64), recordando que $\tilde{\lambda} = \lambda/m_a$. También se utilizó la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - n^2 y^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi \lambda \cot\left(\frac{\pi \lambda}{y}\right)}{2y}. \tag{3.121}$$

Escribiendo explícitamente el término de interacción este tiene la forma

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}m_a}{\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{m_a} + \pi^2 m_a^2 R^2 \right]^{-1/2} |\hat{a}_\lambda\rangle F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (3.122)$$

Comparando los términos de interacción cuando se cumplen $1/m_a R \gg 1$ y $1/m_a R \ll 1$ se observa que

$$\frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} r_n a_n F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow \frac{g_{eff}}{4} \hat{a}_\lambda F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (3.123)$$

donde

$$g_{eff} \equiv g_{a\gamma\gamma} \frac{\sqrt{2}m_a}{\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{m_a} + \pi^2 m_a^2 R^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.124)$$

Con el acoplamiento efectivo g_{eff} para los estados de masa, la tasa de desintegración en (3.114) se ve modificada, adquiriendo la forma

$$\Gamma_\lambda = \frac{g_{eff}^2 \lambda^3}{64\pi}. \quad (3.125)$$

3.4.5. Constante de desintegración

La constante de acoplamiento entre el axión y los fotones depende la constante de desintegración de la forma [12, 58]

$$g_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha_{em} N}{2\pi f_a} \left[\frac{E}{N} - 1.95 \right], \quad (3.126)$$

donde α_{em} es la constante de estructura fina $\alpha_{em} \approx 1/137$, N es un número entero distinto de cero, asociado con la anomalía de color y E es un tercio de un número entero asociado con la anomalía electromagnética.

La constante de desintegración tiene el siguiente rango de valores [51]

$$10^9 \text{ GeV} \lesssim f_a \lesssim 10^{17} \text{ GeV}. \quad (3.127)$$

El límite inferior de la constante de desintegración surge de enfriamiento de supernovas, mientras que el límite superior viene de superradiancia de agujeros negros.

La masa del axión depende de dos escalas de energía, una de ellas es la escala a la cual los efectos no perturbativos producen un potencial efectivo para el axión, Λ , mientras que la segunda

escala está asociada con el valor esperado del vacío del campo escalar complejo a partir del cual el axión surge como una fase, f_a . La masa depende de estas dos escalas de la forma

$$m_a \propto \frac{\Lambda}{f_a}. \quad (3.128)$$

Para el caso del axión de QCD, las escalas anteriores son la escala de confinamiento de QCD, Λ_{QCD} y la constante de desintegración, dada por el intervalo en (3.127), con lo cual la masa del axión se puede expresar como [5]

$$m_a \simeq 0.67 \text{ eV} \left(\frac{10^7 \text{ GeV}}{f_a} \right). \quad (3.129)$$

Utilizando el intervalo establecido para la constante de desintegración, el intervalo para la masa del axión de QCD es

$$6.2 \times 10^{-11} \text{ eV} \lesssim m_a \lesssim 6.2 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (3.130)$$

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se realiza la discusión de los resultados obtenidos en el Capítulo 3. En el capítulo anterior a se refiere al campo del axi3n en cinco dimensiones, introducido en (3.39). La expansión en serie de Fourier del campo a se da en términos de campos escalares 4-dimensionales a_n . En la acción efectiva 4-dimensional (3.47) se identifica la matriz de masa como \mathcal{M}^2 . Cuando la matriz \mathcal{M}^2 es no diagonal se realiza un cambio de base a eigenestados de masa \hat{a}_λ a partir de los eigenestados de momento a_n y de los eigenvalores de \mathcal{M}^2 , denotados por λ . Los eigenvalores λ corresponden a las masas de los campos \hat{a}_λ .

4.1. Restricción en la masa

En esta primera sección se supone que la dependencia de la masa λ de la constante de desintegración f_λ es a través de la relación [12, 13]

$$\lambda = 0.67 \text{ eV} \left(\frac{10^7 \text{ GeV}}{f_\lambda} \right). \quad (4.1)$$

Es importante recordar que solamente existe una constante de desintegración para todos los campos y está asociada al valor esperado de vacío de a . Asimismo, se supone que la dependencia de la masa de a de la constante de desintegración f_a tiene la forma

$$m_a = C f_a^{-1}, \quad (4.2)$$

donde C es una constante que tiene unidades de energía al cuadrado y la relación entre las constantes de desintegración es

$$f_\lambda = \sqrt{2\pi R} f_a^{3/2}. \quad (4.3)$$

Los valores de ángulo de desalineación utilizados en esta primera sección se presumen con la cota establecida en (2.7).

Debido a que los campos \hat{a}_λ están identificados con axiones en cuatro dimensiones, se tienen restricciones sobre la constante de desintegración f_λ [59]

$$10^9 \text{ GeV} \leq f_\lambda \leq 10^{12} \text{ GeV}, \quad (4.4)$$

que a su vez involucran restricciones en los valores de la masa a través de la relación (4.1), tal que el intervalo de masa es

$$6.7 \times 10^{-15} \text{ GeV} \leq \lambda \leq 6.7 \times 10^{-12} \text{ GeV}. \quad (4.5)$$

El tiempo de vida media, τ , de los axiones para tiempos anteriores a los efectos no perturbativos está dado por el inverso de la tasa de desintegración en (3.114), con la sustitución de $m_a \rightarrow \lambda$, esto último debido a que los cálculos son similares. La tasa de desintegración que se muestra en (3.114) es válida para calcular el tiempo de vida media cuando la matriz de masa \mathcal{M}^2 es diagonal, lo que implica que no hace falta realizar un cambio de base debido a que los estados de momento a_n son iguales a los estados de masa \hat{a}_λ . Sin embargo, cuando la matriz de masa es diagonal, por las condiciones iniciales de los campos (3.73) la densidad de energía es nula para todos los campos n . Lo anterior implica la necesidad de realizar el cambio de base a eigenestados de masa \hat{a}_λ .

Cuando las componentes fuera de la diagonal representan una contribución significativa en la matriz de masa y se requiere realizar un cambio de base, los acoplamientos de los campos de axiones con campos de fotones se ven modificados mediante

$$g_{a\gamma\gamma} \rightarrow g_{eff}, \quad (4.6)$$

donde g_{eff} está definida en (3.124). El tiempo de vida media para los estados de masa \hat{a}_λ , que corresponde a la inversa de la tasa de desintegración en (3.125), se muestra en 4.1 en representación logarítmica para distintas constantes de desintegración f_λ . Las modificaciones en el comportamiento de la vida media de los campos \hat{a}_λ se advierten como cambios en la pendiente los cuales se deben a cambios en la potencia predominante en la función $\tau(\lambda)$. Lo anterior es resultado de la dependencia que tiene g_{eff} de λ .

Cuando se tienen los estados de masa, el tiempo de vida media de las partículas asociadas a los campos \hat{a}_λ es menor al tiempo actual cuando $\lambda \sim \mathcal{O}(1)$ GeV, considerando un valor de constante de desintegración de 10^9 GeV, es decir $\tau(\lambda) \sim t_{BBN}$ para $\lambda \sim \mathcal{O}(1)$ GeV y $f_\lambda = 10^9$ GeV. No obstante, las partículas comprendidas en el intervalo de masa en (4.5) son estables, siendo que el tiempo de vida media excede entre 28 y 68 órdenes de magnitud la vida del Universo. Del intervalo de masas establecido en (4.5), se observa que no se presentan desintegraciones en el intervalo comprendido por $1 \text{ s} \leq t \leq 4.3 \times 10^{17} \text{ s}$ que corresponde a tiempos entre nucleosíntesis del Big Bang y el tiempo actual.

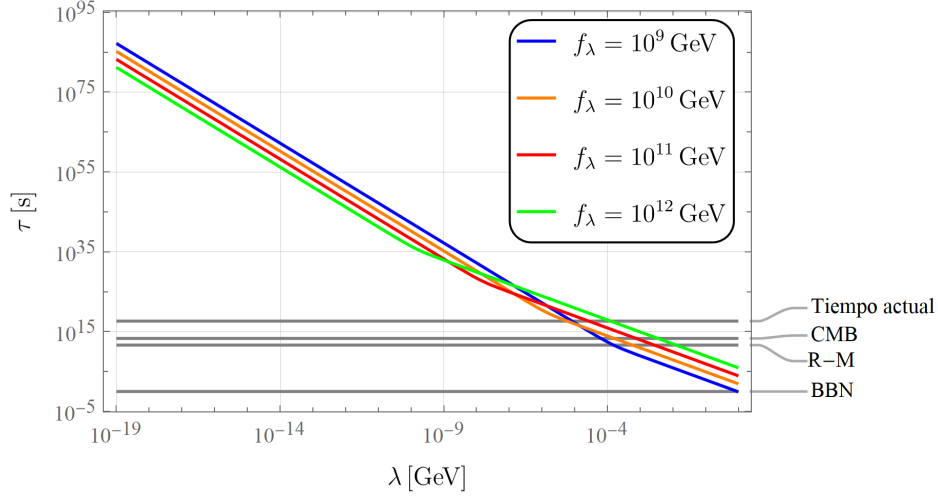


Figura 4.1: Tiempo de vida media de los axiones, tomando en consideración el acoplamiento del campo del axión con campos de fotones correspondiente a la tasa de desintegración $\Gamma = g_{eff}\lambda^3/64\pi^2$.

La abundancia total de los campos \hat{a}_λ es la suma sobre las abundancias individuales de cada campo escalar \hat{a}_λ :

$$\Omega_{tot} = \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}. \quad (4.7)$$

Utilizando la expresión para la abundancia de un campo escalar (3.85), la abundancia total para tiempos mayores a la igualdad de materia y radiación es

$$\Omega_{tot} = \sum_{\lambda} \frac{3}{8} \left(\frac{\tilde{\lambda} m_a \theta f_{\lambda} A_{\lambda}}{M_p} \right)^2 e^{-\Gamma_{\lambda}(t-t_G)} t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2}. \quad (4.8)$$

En la expresión anterior λ corresponde a los eigenvalores de la matriz de masa \mathcal{M}^2 , $\tilde{\lambda}$ es un valor adimensional dado por $\tilde{\lambda} \equiv \lambda/m_a$, θ es el ángulo inicial de desalineación relacionado con las condiciones iniciales de los campos \hat{a}_λ y es un valor adimensional, f_λ es la constante de desintegración definida en (4.3), A_λ es la proyección de eigenestados de masa en eigenestados de momento, definida en (3.68). M_p es la masa de Planck, t_G es el tiempo al cual se establece la no diagonalidad de la matriz de masa debido a efectos no perturbativos y t_{IRM} es el tiempo al cual el Universo presentaba una dominación por materia no relativista y radiación.

La abundancia individual asociada a un campo \hat{a}_λ como función del tiempo se muestra en la Figura 4.2, en escala logarítmica, para una constante de desintegración $f_\lambda = 10^{12}\text{GeV}$, un ángulo de desalineación $\theta = 9 \times 10^{-10}$, y un radio de compactificación de $R = 200 \text{ GeV}^{-1} = 4 \times 10^{-14} \text{ m}$, donde el tiempo de igualdad de radiación y materia es considerado $t_{IRM} = 10^{11} \text{ s}$ y el tiempo al cual

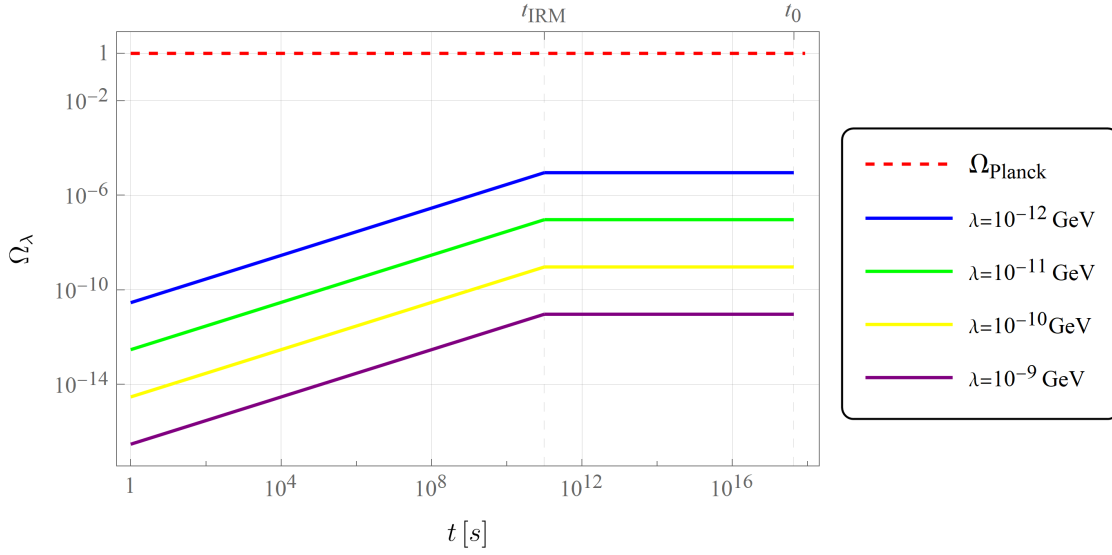


Figura 4.2: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de masa λ y valor fijo de constante de desintegración. Se utilizaron los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV.

tienen lugar los efectos no perturbativos es $t_G = 10^{-5}$ s. En la figura se muestran las abundancias individuales para diferentes valores de eigenvalores de masa, los cuales están dentro del intervalo permitido por la constante de desintegración y la relación de masa establecida en (4.1). La figura permite establecer que la abundancia es mayor para menores valores de λ . El comportamiento que tienen los eigenvalores λ , dependiendo si el producto $m_a R$ es mucho mayor o mucho menor a uno, es mostrado en (3.66a) y (3.66b) y establece que $\lambda \propto n$, con $n \in \mathbb{Z}$. El comportamiento de λ determina que cuanto mayor es n , menor es su contribución a la abundancia total, esto es, cuanto más se escala en la torre de Kaluza-Klein, menor es la contribución de los campos a la abundancia total.

La abundancia individual Ω_λ para cada estado de masa, que se muestra en la figura 4.2, exhibe el mismo comportamiento para diferentes valores de λ conforme la masa del campo a va aumentando. Este comportamiento se ve como

$$\Omega_\lambda(\lambda = 10^{-12}\text{GeV}) = \Omega_\lambda(\lambda = 10^{-11}\text{GeV}), \quad \text{para } m_a = 10^{-10} \text{ GeV} \quad (4.9a)$$

$$\Omega_\lambda(\lambda = 10^{-12}\text{GeV}) = \Omega_\lambda(\lambda = 10^{-11}\text{GeV}) = \Omega_\lambda(\lambda = 10^{-10}\text{GeV}), \quad \text{para } m_a = 10^{-9} \text{ GeV} \quad (4.9b)$$

El comportamiento anterior se exhibe en las Figuras D.2, D.3 de los apéndices. El comportamiento de la abundancia individual Ω_λ , con valores fijos de θ , f_λ y R , es el mismo para cualquier valor de masa en el intervalo (4.5) con $m_a \geq 10^{-9}$ GeV. Además, a partir de los valores fijos de los parámetros θ , f_λ y R , se puede establecer un valor máximo para el valor de m_a . Sin embargo,

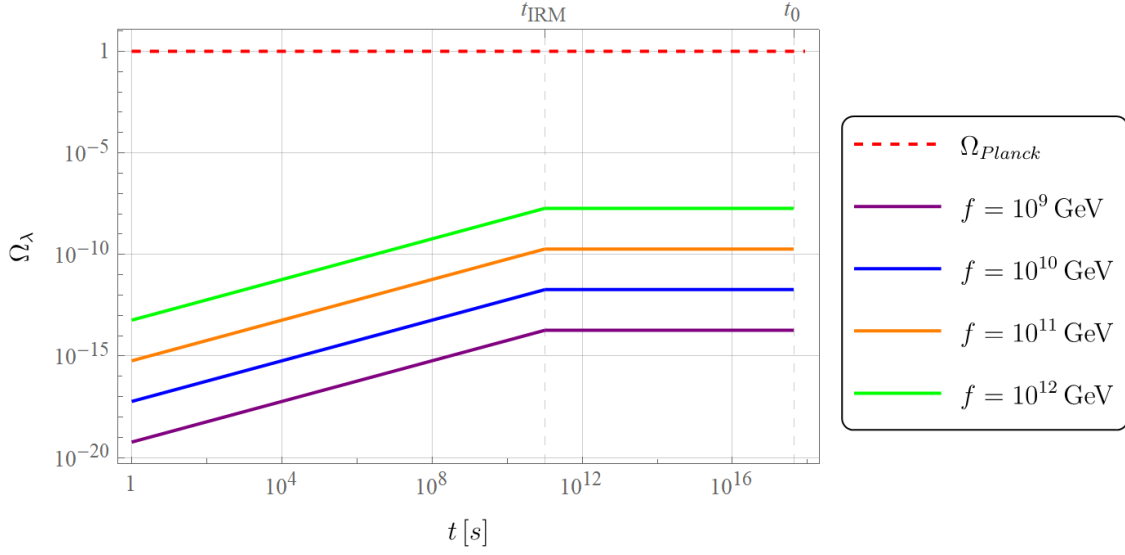


Figura 4.3: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de constante de desintegración f_λ y valor fijo de masa. Se utilizaron los valores de $\lambda = 10^{-12}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV.

cuando se alcanza el límite sobre m_a significa que $\Omega_\lambda = \Omega_{DM}$, se recupera el escenario tradicional donde solamente se tiene un campo que contribuye a la totalidad de materia oscura.

En la Figura 4.3 se exhibe la abundancia individual asociada a cada campo \hat{a}_λ en escala logarítmica para un valor fijo de $\lambda = 10^{-12}$ GeV y para diferentes valores de constante de desintegración dentro del rango establecido en (4.4). Se observa que para valores mayores de la constante de desintegración, la abundancia de cada campo \hat{a}_λ es mayor, como es de esperarse partiendo de la expresión para la abundancia Ω_λ .

En la Figura 4.4 se muestra la abundancia Ω_λ para distintos valores de la masa del campo del axión a , la cual aparece como variable independiente en la proyección de estados de masa en estados de momento A_λ , siendo que para valores más grandes de m_a , la abundancia es mayor. En la Figura D.4 del Apéndice D se muestra un límite para los valores de m_a , con $m_a = 5 \times 10^{-11}$ GeV. Este límite en los posibles valores de m_a es específicamente para los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\lambda = 10^{-14}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV, si se modifica alguno de estos valores, el valor máximo de m_a resulta modificado.

Expandiendo en serie de Taylor el factor exponencial de la abundancia total, cuya tasa de desintegración está establecida en (3.114), esta adquiere la forma

$$\Omega_{tot} = \sum_\lambda \frac{3}{8} \left(\frac{\tilde{\lambda} m_a \theta f_\lambda A_\lambda}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} \left(1 - \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 \tilde{\lambda}^3 m_a^3 (\tilde{\lambda} A_\lambda)^2}{64\pi} (t - t_G) + \mathcal{O}(\Gamma_\lambda^2) \right)$$

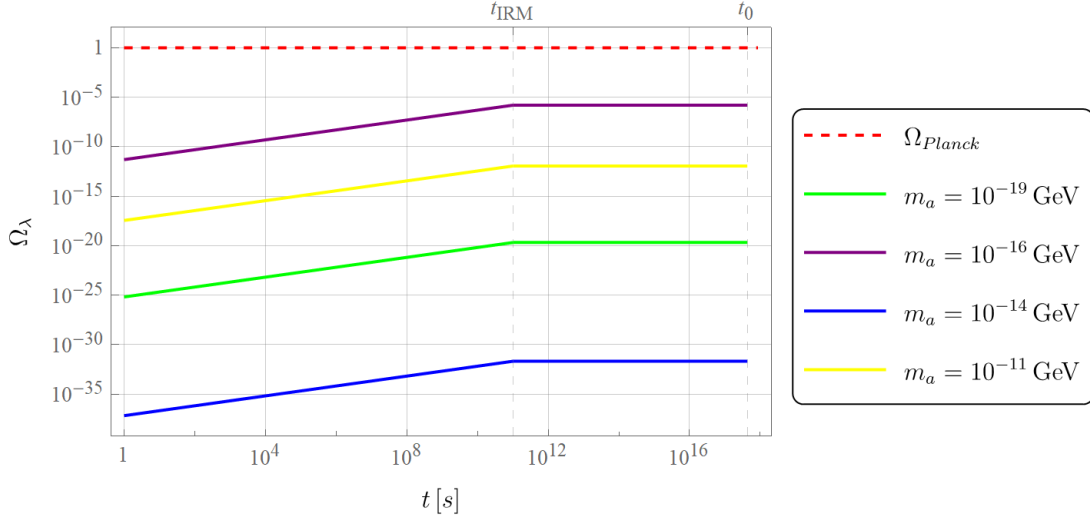


Figura 4.4: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de m_a y valores fijos de masa λ y constante de desintegración f_λ . Se utilizaron los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\lambda = 10^{-14}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV.

$$= \frac{3}{8} \left(\frac{\theta f_\lambda m_a}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} \sum_\lambda \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 - \frac{3}{512\pi} \left(\frac{\theta f_\lambda g_{a\gamma\gamma}}{M_p} \right)^2 m_a^5 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} (t - t_G) \sum_\lambda \tilde{\lambda}^9 A_\lambda^6 + \mathcal{O}(\Gamma_\lambda^2). \quad (4.10)$$

Si se considera solamente el primer término en la expansión de Taylor, es decir, que se consideran despreciables las desintegraciones, y empleando la relación que satisfacen $\tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2$ en (3.70) la abundancia total está dada por

$$\Omega_{tot} \approx \frac{3}{8} \left(\frac{\theta f_\lambda m_a}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2}. \quad (4.11)$$

En la Figura 4.5 se muestra el valor de la masa m_a para distintos valores de ángulo de desalineación y constante de desintegración cuando se satisface $\Omega_{tot} = \Omega_{DM}$. En la Figura 4.6 se muestran los valores del ángulo de desalineación θ y constante de desintegración f_λ bajo los cuales se satisface que $\Omega_{tot} = \Omega_{DM}$ con valor fijo de m_a . Los valores permitidos para el ángulo de desalineación, en el intervalo posible de constantes de desintegración, son $\theta \sim \mathcal{O}(1)$ cuando $m_a = 10^{-11}$ GeV. De la expresión para la abundancia total en (4.11), se tiene que los valores negativos para θ también son permitidos. Es importante recalcar que los valores de θ y f_λ que se muestran en la figura son válidos considerando que las desintegraciones de los axiones son despreciables.

A primer orden, suponiendo despreciables las desintegraciones del axión a un par de fotones, la abundancia total de los axiones es dependiente de la masa m_a , producida por efectos no perturba-

tivos, del axi3n en cinco dimensiones y dependiente de la constante de desintegraci3n adem3s del valor inicial del campo θ .

La abundancia asociada a cada campo \hat{a}_λ es funci3n de la constante de desintegraci3n f_λ . Para valores fijos de f_λ las abundancias individuales no representan una contribuci3n significativa para la abundancia total de materia oscura observada, debido a que las abundancias se encuentran en rangos de $10^{-22} < \Omega_\lambda < 10^{-5}$. Sin embargo, la suma infinita sobre todos los campos \hat{a}_λ es la que permite que la abundancia total sea $\Omega_{tot} = \sum_\lambda \Omega_\lambda \sim \mathcal{O}(1)$, espec3ficamente a trav3s de la relaci3n

$$\sum_\lambda \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 = 1. \quad (4.12)$$

La evoluci3n temporal de las abundancias asociadas a cada campo \hat{a}_λ es trivial posterior al tiempo de igualdad de radiaci3n y materia debido a que la 3nica dependencia temporal que las abundancias presentan superado este tiempo est3 en la funci3n exponencial, que debido a la tasa de desintegraci3n $\Gamma \propto 10^{-50} s$ es $e^{-\Gamma_\lambda(t-t_G)} \approx 1$.

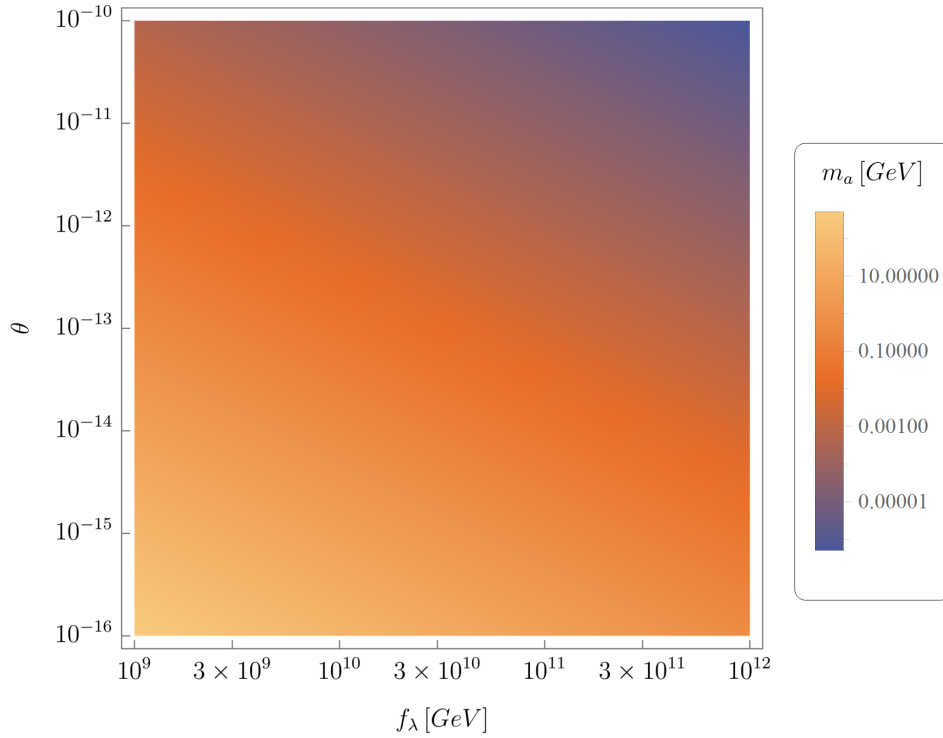


Figura 4.5: Masa m_a en funci3n de la constante de desintegraci3n f_λ y del 3ngulo de desalineaci3n θ .

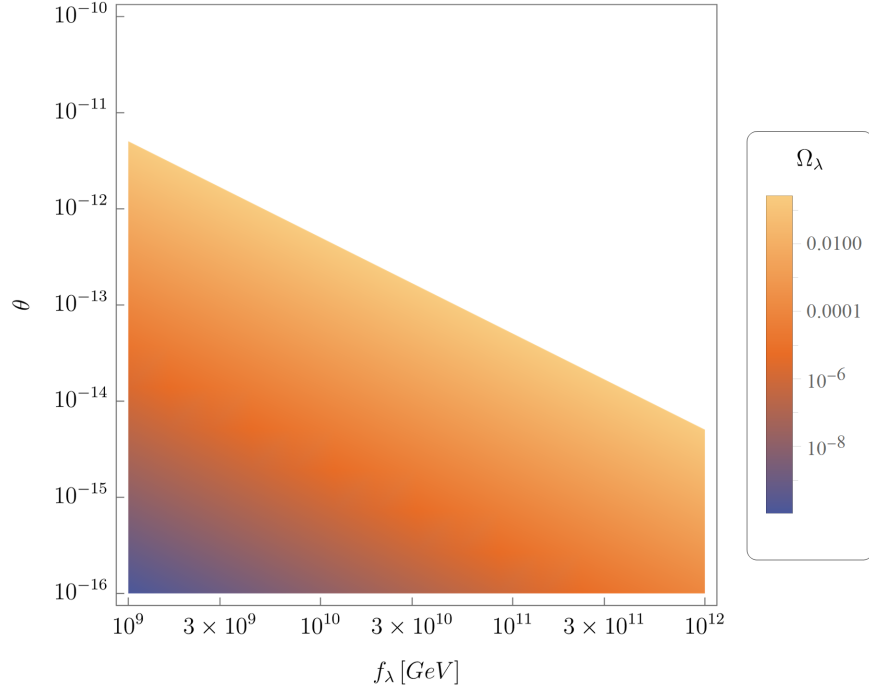


Figura 4.6: Valores del ángulo de desalineación θ para que la abundancia total Ω_{tot} sea igual a la abundancia de materia oscura $\Omega_{DM} = 0.264$ para una constante de desintegración f_λ en el intervalo $10^9 \text{ GeV} \lesssim f_\lambda \lesssim 10^{12} \text{ GeV}$. Se asignó un valor de $m_a = 10^{-19} \text{ GeV}$.

4.2. Masa sin restricción

Al considerar que la masa λ no depende de la constante de desintegración de la forma (4.1), los valores permitidos para λ no corresponden al intervalo (4.5). La restricción en el intervalo (4.5) se satisface solo para los axiones de QCD. Si se admiten valores de λ de pocos GeV, es decir $\lambda \sim \mathcal{O}(1) \text{ GeV}$, en consecuencia, el tiempo de vida media de los axiones es mucho menor al tiempo actual del Universo $\tau(\lambda \sim \mathcal{O}(1) \text{ GeV}) \sim \mathcal{O}(1) \text{ s}$, como se muestra en la Figura 4.1. Como consecuencia de lo anterior, la abundancia no puede ser aproximada de la forma establecida en (4.11), debido a que las desintegraciones no son despreciables, con esta modificación la abundancia total es

$$\Omega_{tot} = \frac{3}{8} \left(\frac{\theta f_\lambda m_a}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} - \frac{3}{512\pi} \left(\frac{\theta f_\lambda g_{a\gamma\gamma}}{M_p} \right)^2 m_a^5 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} (t - t_G) \sum_\lambda \tilde{\lambda}^9 A_\lambda^6. \quad (4.13)$$

Quitar la restricción en los valores de la masa implica que se considera que esta evoluciona como

$$\lambda \sim \frac{\Lambda_\lambda^2}{f_\lambda}, \quad (4.14)$$

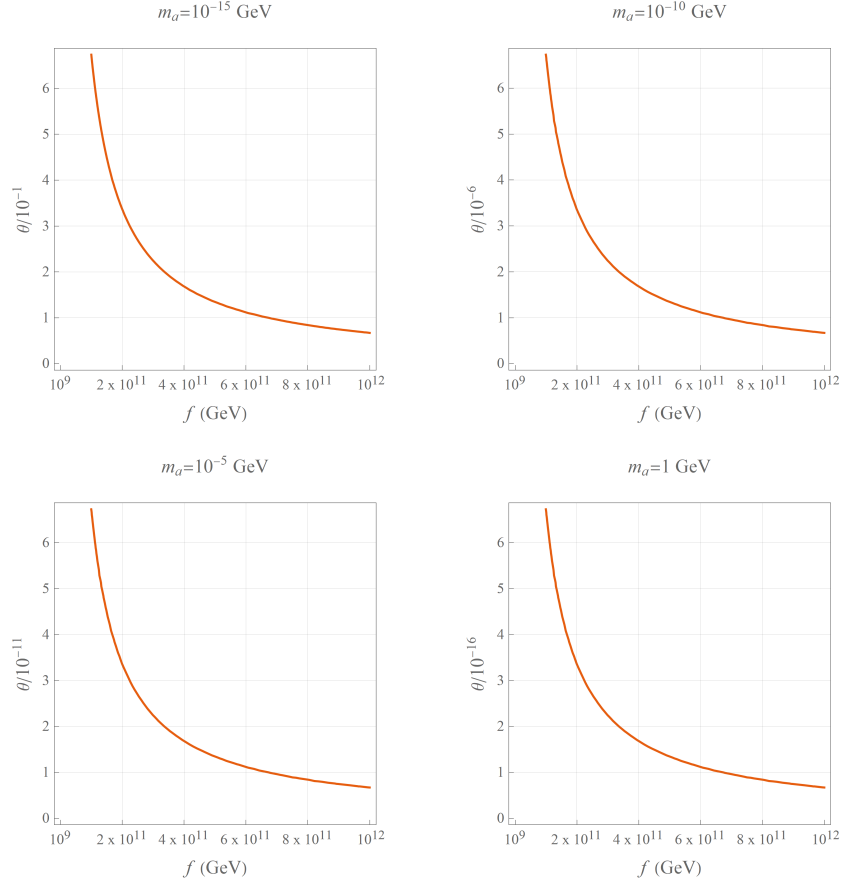


Figura 4.7: Valores del ángulo de desalineación θ para que la abundancia total Ω_{tot} sea igual a la abundancia de materia oscura $\Omega_{DM} = 0.264$ para una constante de desintegración f_λ en el intervalo $10^9 \text{ GeV} \lesssim f_\lambda \lesssim 10^{12} \text{ GeV}$. Se asignó un valor de $m_a = 10^{-19} \text{ GeV}$.

donde Λ_λ es una escala de energía diferente a la escala de QCD, $\Lambda_{QCD} \approx 150 \text{ MeV}$. La introducción de una escala diferente a la escala de QCD implica que se pueden considerar campos con masas que no están restringidas al intervalo que se muestra en (4.5).

Debido a que m_a es un término de masa asociado al campo en cinco dimensiones a , no es imprescindible que se satisfaga la relación entre masa y constante de desintegración como se muestra en (4.2). Sin embargo si se considera dicha relación, el primer término la abundancia total de materia oscura depende del ángulo de desalineación θ , del radio de compactificación R y de la constante de desintegración f_λ de la siguiente manera

$$\frac{3}{8} \left(\frac{\theta C f_\lambda^{1/3} (2\pi R)^{1/3}}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2}. \quad (4.15)$$

En [60] se establece un estimado del radio de compactificación de una dimensión adicional donde el espaciotiempo es considerado una variedad $\mathcal{M} \times S^1$, a partir del efecto Casimir. El radio de compactificación tiene una cota superior

$$R \lesssim 120 \text{ nm}, \quad (4.16)$$

que corresponden a una escala de energía

$$M_c \gtrsim 1.64 \times 10^{-9} \text{ GeV}. \quad (4.17)$$

M_c corresponde al inverso del radio de compactificación.

En la Figura 4.7 se muestran los valores del ángulo de desalineación para que la abundancia total de axiones Ω_{tot} sea igual a la abundancia de materia oscura actual $\Omega_{DM} = 0.264$ para el rango de constantes de desintegración mostrado en (4.4). La figura se muestra para distintos valores de la masa m_a que corresponde a la masa del campo 5-dimensional m_a . Al no tener un valor para C en la relación de m_a y f_a , se toman en consideración un rango para la m_a de

$$10^{-19} \text{ GeV} \lesssim m_a \lesssim 1 \text{ GeV}. \quad (4.18)$$

Del intervalo anterior y de la Figura 4.7 se observa que $\theta \sim \mathcal{O}(1)$ para $m_a = 10^{-15} \text{ GeV}$ y $\theta \sim \mathcal{O}(10^{-11})$ para $m_a = 10^{-5} \text{ GeV}$. El parámetro θ está relacionado con las condiciones iniciales de los campos y equivale al desplazamiento que tiene el campo de su posición de equilibrio. Si se tiene en cuenta la resolución del problema de CP fuerte, el valor del parámetro θ debe ser cercano a cero por lo que dicho problema puede imponer restricciones al valor de m_a .

En la expresión (4.13) la suma sobre λ se puede expresar como una función de m_a y R , con ello la abundancia total es

$$\Omega_{tot} = \frac{3}{8} \left(\frac{\theta f_\lambda m_a}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} - \frac{3}{512\pi} \left(\frac{\theta f_\lambda g_{a\gamma\gamma}}{M_p} \right)^2 m_a^5 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} (t - t_G) f(m_a, R). \quad (4.19)$$

El comportamiento de la función $f(m_a, R)$ se muestra en la Figura 4.8. La función $f(m_a R)$ está dada por

$$f(m_a R) = -\frac{-3 [\psi^{(1)}(1-z) + \psi^{(1)}(1+z)] + \psi^{(2)}(1-z) + \psi^{(2)}(1+z)}{2y^3 z}, \quad (4.20)$$

donde

$$z \equiv \frac{\sqrt{-\pi^2 - y^2}}{y^2}, \quad y \equiv 1/m_a R, \quad (4.21)$$

y $\psi^{(m)}(x)$ es la función poligamma de orden m , definida en el Apéndice E.

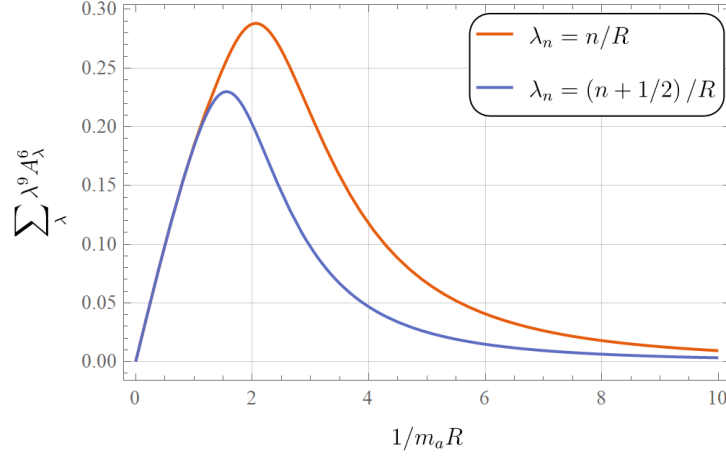


Figura 4.8: Suma infinita del producto de los eigenvalores λ por A_λ con potencia 9 y 6 respectivamente. A_λ está definida en (3.68).

En las Figuras 4.9 y 4.10 se muestran los valores de la abundancia total que depende de la tasa de desintegración, es decir, el segundo término del lado derecho de (4.19), a la cual se le identifica como $\Omega_{tot}(\Gamma_\lambda)$. En la primera figura se observa la independencia de $\Omega_{tot}(\Gamma_\lambda)$ de la constante de desintegración f_λ . Lo anterior es debido a que la constante de acoplamiento $g_{a\gamma\gamma}$ es inversa en la constante de desintegración, como se muestra en (3.126). Para valores fijos de m_a y R que atañen respectivamente a la masa del axión 5-dimensional y el radio de compactificación, $\Omega_{tot}(\Gamma)$ solamente depende del ángulo de desalineación θ . En la Figura 4.10 se muestran los valores de $\Omega_{tot}(\Gamma)$ como función de θ y del producto de m_a y R , en escala logarítmica.

La abundancia total de materia oscura se establecerá como

$$\Omega_{tot} = \Omega_{tot,1}(f_\lambda, \theta, m_a) - \Omega_{tot}(\Gamma_\lambda), \quad (4.22)$$

donde

$$\Omega_{tot,1}(f_\lambda, \theta, m_a) \equiv \frac{3}{8} \left(\frac{\theta f_\lambda m_a}{M_p} \right)^2 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2}, \quad (4.23a)$$

$$\Omega_{tot}(\Gamma_\lambda) \equiv \frac{3}{512\pi} \left(\frac{\theta f_\lambda g_{a\gamma\gamma}}{M_p} \right)^2 m_a^5 t_G^{3/2} t_{IRM}^{1/2} (t - t_G) f(m_a, R). \quad (4.23b)$$

Cuando se considera solamente $\Omega_{tot,1}$, que equivale a suponer despreciables las desintegraciones, se debe satisfacer

$$\Omega_{tot,1} = \Omega_{DM} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{c_1}{f_\lambda}, \quad (4.24)$$

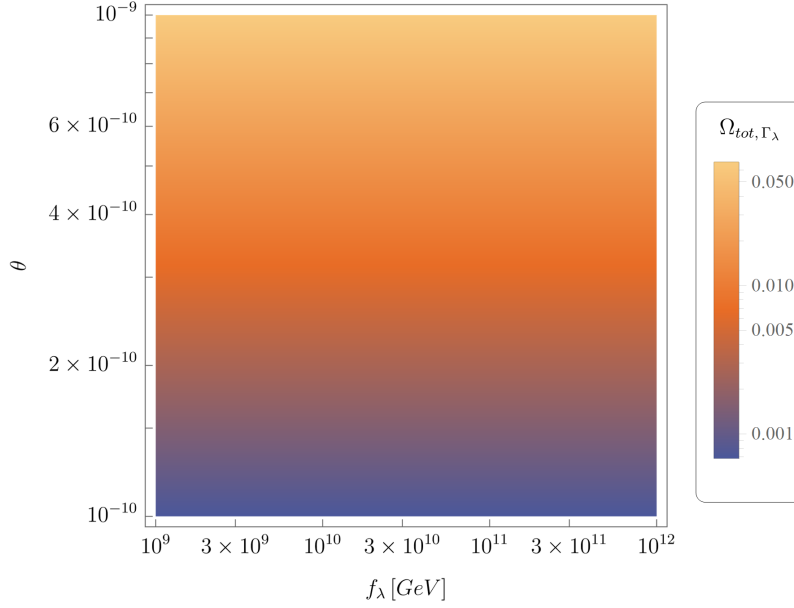


Figura 4.9: Valor de la abundancia total Ω_{tot} que corresponde a la dependencia en la tasa de desintegración Γ_λ para distintos valores de ángulo de desalineación θ y constante de desintegración f_λ .

para el intervalo de constantes de desintegración en (4.4), donde c_1 es una constante. Si se toman en cuenta las tasas de desintegración, se debe satisfacer

$$\Omega_{tot,1} - \Omega_{tot}(\Gamma_\lambda) = \Omega_{DM} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_3 + c_4 f_\lambda}}, \quad (4.25)$$

siendo c_i , $i = 1, 2, 3, 4$ constantes fijadas por los valores de m_a y R , observando la dependencia del ángulo de desalineación de la constante de desintegración.

En la Figura 4.11 se muestra la abundancia total de materia oscura Ω_{tot} , la cual se estableció como $\Omega_{tot,1} - \Omega_{tot}(\Gamma_\lambda)$, como función de m_a y valor fijo de $f_\lambda = 10^9$ GeV. Los valores de m_a se restringen cuando se exige que la abundancia total replique la abundancia actual de materia oscura. La restricción se debe a que el valor del ángulo de desalineación θ debe ser real. Además, si se establece que el radio de compactificación sea

$$R = \frac{1}{2m_a}, \quad (4.26)$$

se determina una cota superior para el valor de la masa del campo del axi3n 5-dimensional. Los valores para m_a son

$$m_a < 172 \text{ GeV}. \quad (4.27)$$

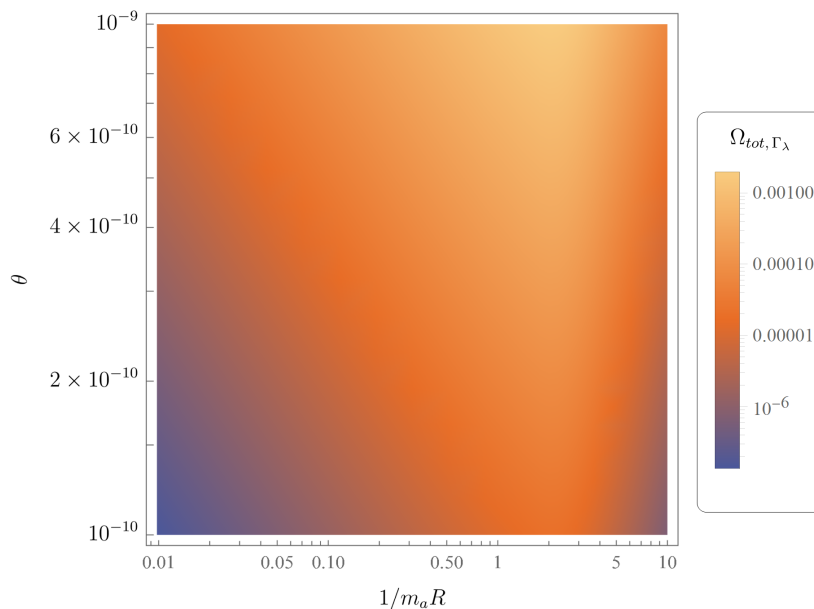


Figura 4.10: Valor de la abundancia total Ω_{tot} que corresponde a la dependencia en la tasa de desintegración Γ_λ para distintos valores de ángulo de desalineación θ y del producto de $m_a R$.

En la Figura 4.12 se muestra el comportamiento de $\Omega_{tot}(\Gamma_\lambda)$ en función del valor de m_a para distintos valores de constante de desintegración f_λ , en escala Lineal-Log. En la figura es posible observar la razón por la cual se requiere un mayor valor de m_a para advertir una contribución significativa de $\Omega_{tot}(\Gamma_\lambda)$ para mayores valores de f_λ .

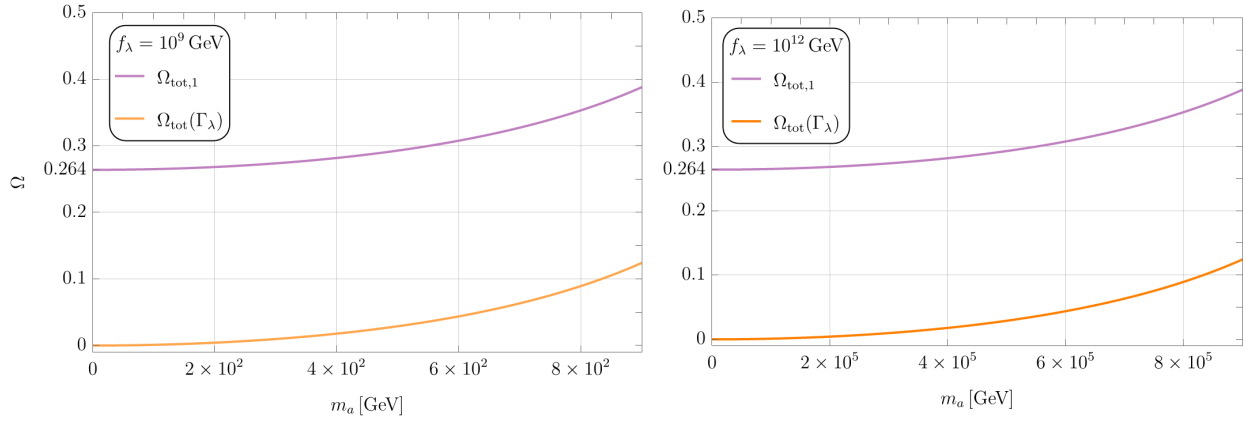


Figura 4.11: Valores para $\Omega_{tot,1}$ y $\Omega(\Gamma_\lambda)$ como función de m_a . La diferencia de ambas contribuciones corresponde a la abundancia de materia oscura fría actual $\Omega_{DM} = 0.264$. Los valores de las abundancias $\Omega_{tot,1}$ y $\Omega(\Gamma_\lambda)$ se muestran para diferentes valores de constante de desintegración 10^9 y 10^{12} GeV.

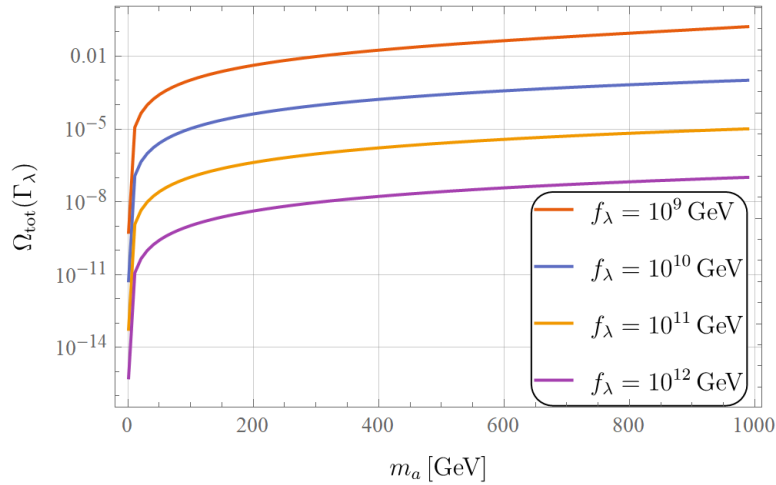


Figura 4.12: Valores para $\Omega(\Gamma_\lambda)$ como función de m_a , para diferentes valores de constante de desintegración f_λ .

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se efectuó el análisis de la viabilidad que tiene un campo pseudo-escalar, propagándose en cinco dimensiones, para reproducir la abundancia de materia oscura observada. Primero se llevó a cabo una comprobación del comportamiento de un campo pseudo-escalar, propagándose en cuatro dimensiones, como materia oscura no relativista. Para esta comprobación se empleó el mecanismo no térmico de producción por desalineación. Partiendo de este mecanismo de producción, se establecieron las condiciones necesarias para que las partículas asociadas a los campos sean consideradas como materia no relativista. Estas condiciones dependen de la razón de la masa del campo entre la suma del parámetro de Hubble y de la tasa de desintegración del campo, así como del periodo de oscilación del campo.

Una vez comprobado el comportamiento de materia no relativista que presentan las partículas, se procedió a establecer un conjunto de campos pseudo-escalares con masas y tasas de desintegración jerarquizadas. La jerarquización de las propiedades de los campos se obtuvo a partir de la compactificación, en un orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , de una teoría para un campo pseudo-escalar propagándose en cinco dimensiones. Para la teoría 5-dimensional se supuso un campo tipo axiónico cuyos acoplamientos con el modelo estándar son a través del tensor de esfuerzos electromagnético $F^{\mu\nu}$ y su dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$. A partir de la teoría efectiva, 4-dimensional, se analizaron dos escenarios. El primer escenario corresponde a que los términos de masa, que pueden expresarse como una matriz de masa, conducen a una matriz no diagonal. El segundo escenario es cuando la matriz de masa es no diagonal. Cuando la matriz de masa es diagonal, utilizando las condiciones iniciales de los campos se llega a una densidad de energía nula, por lo que solamente se toma en consideración el caso cuando la matriz de masa es no diagonal. A los campos 4-dimensionales se les llama estados de masa. Después se encontró una expresión para la densidad de energía (3.84), y consecuentemente para la abundancia, para cada uno de los estados de masa. La abundancia de los campos es función de las condiciones iniciales de los campos, de la constante de desintegración y de las masas de los campos 4-dimensionales y del campo 5-dimensional. La constante de desintegración es un

parámetro inherente cuando se considera una teoría con axiones, la masa del axión así como sus acoplamientos son función de este parámetro. Por último se muestra una expresión para la suma de las abundancias individuales, es decir, para la abundancia total.

Se estableció una expresión para la abundancia total bajo dos escenarios, el primero considerando que los tiempos de vida media de las partículas exceden la edad del Universo y el caso contrario, cuando el tiempo de vida media es menor a la edad del Universo. En el primer caso, la abundancia total solamente es función de las condiciones iniciales del campo, de la constante de desintegración f_λ y del valor de la masa del campo 5-dimensional; la dependencia de las masas λ desaparece. La no dependencia de λ en la abundancia total se debe a la identidad que la suma infinita de este valor satisface. Además se hace una distinción en los resultados obtenidos cuando se consideran axiones de QCD o ALPs, siendo que los axiones de QCD presentan restricción en la masa y en los valores del ángulo de desalineación. Las restricciones que tienen los axiones de QCD no se presentan con las ALPs, lo que permite considerar un rango de masas más amplio. Lo anterior permite examinar el escenario donde las desintegraciones de las partículas son relevantes para la abundancia total de materia oscura.

Con lo expuesto en este trabajo se puede concluir que es posible que las partículas asociadas a un conjunto de campos pseudo-escalares repliquen la abundancia actual de materia oscura fría. La capacidad de que este conjunto se ajuste a la abundancia observada se debe principalmente a dos características. La primera característica es la convergencia de la suma infinita de los eigenvalores de la matriz de masa \mathcal{M}^2 , identidad mostrada en (3.70), y la segunda es el ajuste de tres parámetros libres: m_a , f_λ y θ . La suma infinita es inherente a la teoría debido a la compactificación de una dimensión espacial y su inserción ocurre únicamente debido a los efectos no perturbativos introducidos en la acción. Por otra parte, dos de los tres parámetros libres están relacionados con axiones 4-dimensionales, el parámetro θ y la constante de desintegración f_λ . De estos dos parámetros, la constante de desintegración está restringida por observaciones astrofísicas, como se muestra en (4.4). El parámetro θ puede o no estar restringido dependiendo de si se busca resolver el problema de CP fuerte. Si se considera la resolución del problema de CP fuerte, el parámetro θ tiene cotas superiores mostradas en (2.7). El parámetro restante, m_a , concerniente a la masa del campo en cinco dimensiones, al estar relacionado con f_λ y θ como se muestra en la Figura 4.5, también presenta restricción en sus posibles valores si θ se ve restringido, esto es, exigiendo la resolución del problema de CP fuerte. Además, si se fija el radio de compactificación al valor que se muestra en (4.26) se obtiene una cota superior sobre m_a , teniendo que debe ser menor a un valor e 172 GeV. Además, la abundancia total de materia oscura fría, considerada como la suma de todos los campos \hat{a}_λ es independiente del valor de la masa λ de cada campo.

Se deduce que exigir la resolución de CP fuerte es la forma más simple de abordar materia oscura dinámica debido a que introduce cotas sobre dos parámetros libres. Además, en este caso se tiene una expresión más simple para la abundancia, esto es debido a que las tasas de desintegración son consideradas como despreciables. Sin embargo, esta restricción implica que las tasas de desintegración son mucho mayores a la vida del Universo, lo que equivale a tener una teoría

de campos estables cuya única diferencia es su masa. Por lo tanto, el problema de CP fuerte restringe los posibles valores de parámetros libres, pero limita la riqueza del conjunto de partículas. Además, el ajuste de los parámetros θ , m_a y R puede llevar a escenarios donde un solo campo es responsable por el contenido total de materia oscura, recuperando el escenario tradicional de una partícula estable, como se muestra en la Figura D.1. Sin embargo, como se mencionó, se busca considerar partículas inestables, por lo que el rango de masas establecido por la escala de QCD debe ser desestimado para el escenario de materia oscura dinámica.

Para poder considerar materia oscura dinámica como se establece en [15], donde las tasas de desintegración juegan un papel importante, se deben considerar campos con mayor masa para que sus tiempos de vida media sean cercanos o menores al tiempo actual del Universo como se muestra en la Figura 4.1. La no restricción que tienen las ALPs en cuanto a masa y ángulo de desalineación permite que el escenario de materia oscura dinámica se vea enriquecido cuando se consideran este tipo de partículas en lugar del axión de QCD. Esta consideración implica que se deben examinar partículas cuya masa tiene la forma (4.14), donde se consideran escalas diferentes a la escala de QCD. Sin embargo, la consideración anterior implica que se pierden las cotas para los parámetros θ y m_a , teniendo un mayor rango de valores para dichos parámetros que se necesitan ajustar para que se replique la abundancia de materia oscura. Aún más importante, en la abundancia total se tiene una suma infinita mostrada en (4.13), debido al término de la tasa de desintegración, la cual debe ser convergente para que la teoría sea viable.

Por otra parte, aunque se consideren las desintegraciones en la expresión de abundancia de materia oscura, si $\Omega_{tot,1} \gg \Omega_{tot}(\Gamma_\lambda)$, definidas en (4.23a) y (4.23b) se tiene el mismo comportamiento que si se hubiese considerado partículas estables.

Finalmente, con base en lo expuesto en este trabajo, como trabajo futuro se plantea la introducción de un conjunto de campos pseudo-escalares, que a diferencia del escenario planteado en este trabajo sus masas no están jerarquizadas debido al mecanismo de Kaluza-Klein. El conjunto de campos se introducen a través de un potencial tipo (2.21). En este escenario, para n campos pseudo-escalares se tienen $2n$ constantes de desintegración y n escalas de efectos no perturbativos. Este escenario muestra claras diferencias de la presente tesis, en la cual se tiene una sola constante de desintegración y una escala de efectos no perturbativos. Las constantes de desintegración no presentan restricciones salvo que se exijan simetrías. Además, si se supone que las escalas de los efectos no perturbativos son muy diferentes una de otra, se puede procurar que el potencial de uno de estos campos sea plano. La planitud del potencial de uno de estos campos podría conducir a un periodo de inflación. Por otra parte, el resto de los campos podría tener un comportamiento de materia oscura no relativista. Esto puede implicar un panorama en el cual inflación y materia oscura fría son explicadas por el mismo conjunto de campos pseudo-escalares.

Apéndices

Apéndice A

Unidades

En este trabajo se utilizan unidades de escalas astronómicas, entre las cuales destaca el pársec. El pársec se define como la distancia a la cual 1 UA (Unidad Astronómica) subtende a un segundo de arco. Un megapársec está dado por

$$1 \text{ Mpc} \approx 3.086 \times 10^{22} \text{ m} \approx 3.26 \times 10^6 \text{ años luz.}$$

A.1. Unidades naturales

A lo largo de este trabajo se utilizan unidades en sistema natural (UN). En el sistema de unidades naturales se establece que la velocidad de la luz c , la constante de Planck reducida \hbar y la constante de Boltzmann k_B , cuyo valor en el sistema internacional (SI) es

$$\begin{aligned} c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}; \\ \hbar &= 1.054571817 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}; \\ k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}, \end{aligned}$$

son igual a la unidad

$$c = \hbar = k_B = 1.$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene que la masa de Planck $M_P = 2.18 \times 10^8 \text{ kg}$ (SI) y la constante de gravitación universal $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (SI) se relacionan de la siguiente forma

$$M_{Pl}^2 = G^{-1}.$$

Por la relación de dispersión relativista y la longitud de onda de Compton λ_C , dadas por

$$E^2 = m^2c^4 + |\mathbf{p}|^2c^2;$$

$$\lambda_C = \hbar/mc$$

respectivamente, el uso de unidades naturales implica que la masa y la energía tienen las mismas unidades así como la distancia tiene unidades de inverso de masa. Por lo tanto la distancia tiene unidades de inverso de energía

$$[E] = [m] = [d]^{-1}.$$

A.2. Conversión de unidades naturales a sistema internacional

Cualquier variable con unidades del sistema internacional de la forma $\text{kg}^\alpha \text{m}^\beta \text{s}^\gamma$ se puede expresar como

$$E^{\alpha-\beta-\gamma} \text{kg}^\alpha \text{m}^\beta \text{s}^\gamma,$$

donde E tiene unidades de energía, comúnmente se utilizan GeV,

$$1 \text{ GeV} = 1.6022 \times 10^{-10} \text{ J}.$$

Establecer las unidades naturales se obtiene la variable en términos de $\text{GeV}^{\alpha-\beta-\gamma}$. Las unidades en el sistema internacional pueden ser recuperadas al utilizar el factor de conversión $\hbar^{\beta+\gamma} c^{\beta-2\alpha}$. Por ejemplo, en el sistema internacional el momento tiene unidades de $\text{kg}^1 \text{m}^1 \text{s}^{-1}$, de donde se identifican los exponentes $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, por lo que en unidades naturales el momento tiene unidades de GeV^1 y el factor de conversión es c^{-1} .

$$1 \text{ GeV} = \frac{1.6022 \times 10^{-10} \text{ J}}{2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 5.344 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Variable	SI	UN	Factor de conversión	UN	→	SI
masa	kg	E	c^{-2}	1 GeV	→	$1.7827 \times 10^{-27} \text{ kg}$
distancia	m	E^{-1}	$\hbar c$	1 GeV ⁻¹	→	$1.9733 \times 10^{-16} \text{ m}$
tiempo	s	E^{-1}	\hbar	1 GeV ⁻¹	→	$6.5823 \times 10^{-25} \text{ s}$
energía	$\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$	E	1	1 GeV	→	$1.6022 \times 10^{-10} \text{ J}$
temperatura	K	E	k_B^{-1}	1 GeV	→	$1.16 \times 10^{13} \text{ K}$

Tabla A.1: Unidades naturales. El factor de conversión es $\hbar^{\beta+\gamma} c^{\beta-2\alpha}$.

Para realizar la conversión con unidades de temperatura se utiliza la constante de Boltzmann

$$1.3806 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1} (1 \text{K}) \left(\frac{1 \text{GeV}}{1.6022 \times 10^{-10} \text{J}} \right) = 8.61 \times 10^{-14} \text{GeV} = 1 \text{K}.$$

La última igualdad es debido a que se establece $k_B = 1$. Para convertir de unidades naturales a sistema internacional se multiplica por el factor de conversión, caso contrario, para convertir de sistema internacional a unidades naturales se divide por el factor de conversión. Las variables cuyas unidades en SI son $kg^\alpha m^\beta s^\gamma$ tiene unidades de $E^{\alpha-\beta-\gamma}$ en el sistema de unidades naturales. Los factores de conversión y las unidades en el sistema de unidades naturales para diferentes variables son mostradas en la Tabla A.1

Apéndice B

Integrales escalares

La evaluación de una integral d -dimensional se ve simplificada al disminuir la dimensión de esta. La integral d -dimensional satisface la siguiente igualdad

$$\int d^d k = \int d\Omega_d \int k^{d-1} dk, \quad (\text{B.1})$$

donde $d\Omega_d$ denota el ángulo sólido diferencial de la esfera unitaria d -dimensional y está dado por

$$d\Omega_d = \text{sen}^{d-2}(\phi_{d-1}) \text{sen}^{d-3}(\phi_{d-2}) \cdots \text{sen}(\phi_2) d\phi_1 \cdots d\phi_{d-1}, \quad (\text{B.2})$$

con $0 \leq \phi_1 \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi_i \leq \pi$ para $i \geq 1$. Por ejemplo, para $d = 3$, el diferencial de ángulo sólido es

$$d\Omega_3 = d\phi_1 d\phi_2 \text{sen } \phi_2. \quad (\text{B.3})$$

Apéndice C

Oscilador amortiguado

La ecuación de movimiento del campo (2.30) es la ecuación de un oscilador amortiguado, identificando $3H(t) + \Gamma_\phi$ como el término de amortiguación. Para un oscilador amortiguado se tiene la ecuación general

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde las constantes c y m atañen respectivamente a la constante de amortiguamiento y masa del sistema, mientras que k se define a través de la frecuencia natural del sistema ω_n como $\omega_n \equiv \sqrt{k/m}$. Mediante la suposición de la solución de la forma $x(t) = Ce^{st}$, donde C y s son constantes indeterminadas, se consigue la ecuación característica

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Las raíces a la ecuación anterior son

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \quad (\text{C.3})$$

de donde se advierten diferentes comportamientos de la solución conforme condición del radical. El amortiguamiento crítico c_c se define como el valor de la constante de amortiguamiento c con la cual el radical en (C.3) se vuelve cero:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}. \quad (\text{C.4})$$

Resulta conveniente introducir la relación de amortiguamiento ζ definida como $\zeta \equiv c/c_c$. Ante la anterior definición, son destacados tres comportamientos del sistema amortiguado.

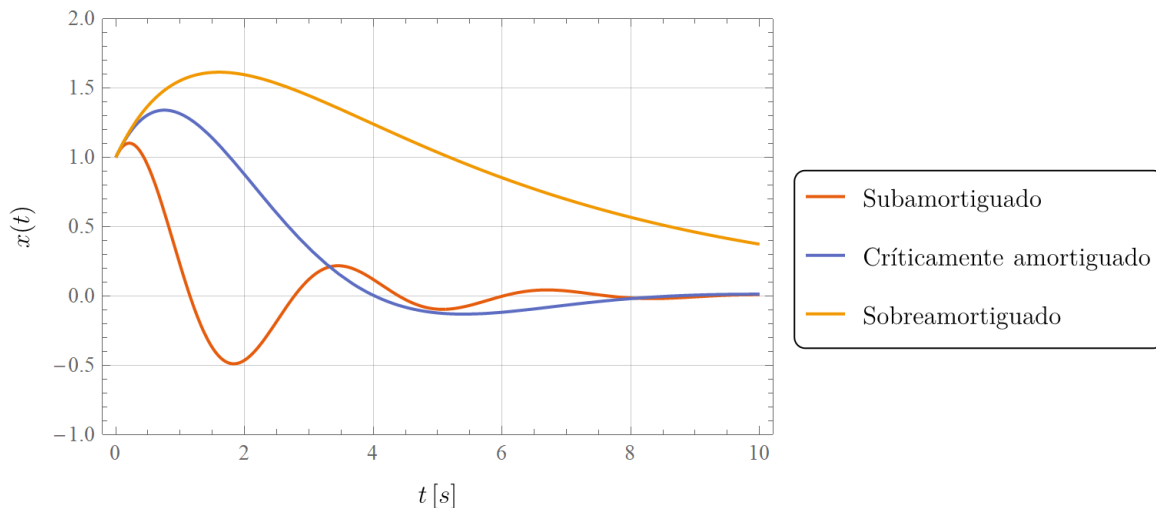


Figura C.1: Comportamiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado de un oscilador que corresponde respectivamente a valores de la relación de amortiguamiento $\zeta = 1/4, 1, 4$.

Caso 1. *Sistema subamortiguado* $\zeta < 1$ ($c_c/2m < \sqrt{k/m}$)

La solución general es

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}.$$

Caso 2. *Sistema críticamente amortiguado* $\zeta = 1$ ($c_c/2m = \sqrt{k/m}$)

La solución general es

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}.$$

Caso 3. *Sistema sobreamortiguado* $\zeta > 1$ ($c_c/2m > \sqrt{k/m}$)

La solución general es

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}.$$

Donde C_1 y C_2 son especificadas mediante las condiciones iniciales. El comportamiento de los tres escenarios de amortiguación se muestra esquemática y cualitativamente en la Figura C.1.

Apéndice D

Evolución temporal de Ω_λ

En este apartado se muestran figuras que exhiben el comportamiento de la abundancia individual Ω_λ para diferentes valores de m_a que no son incluidos en el capítulo de resultados.

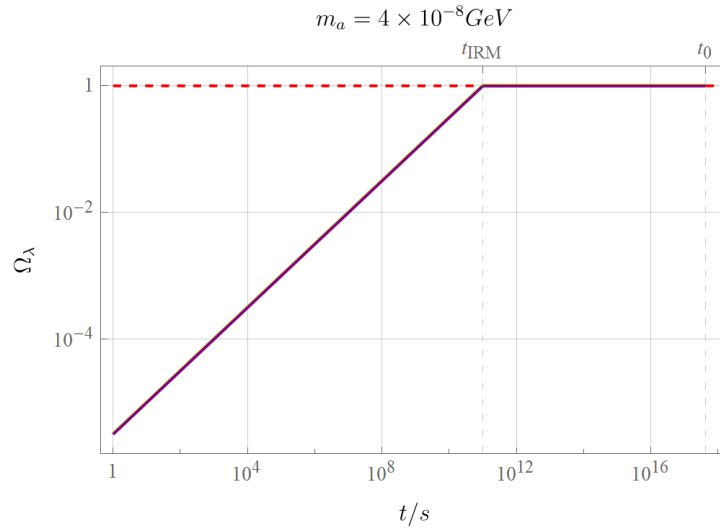


Figura D.1: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de masa λ y valor fijo de constante de desintegración. Se utilizaron los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV. La figura se muestra para un valor de $m_a = 4 \times 10^{-8}$ GeV.

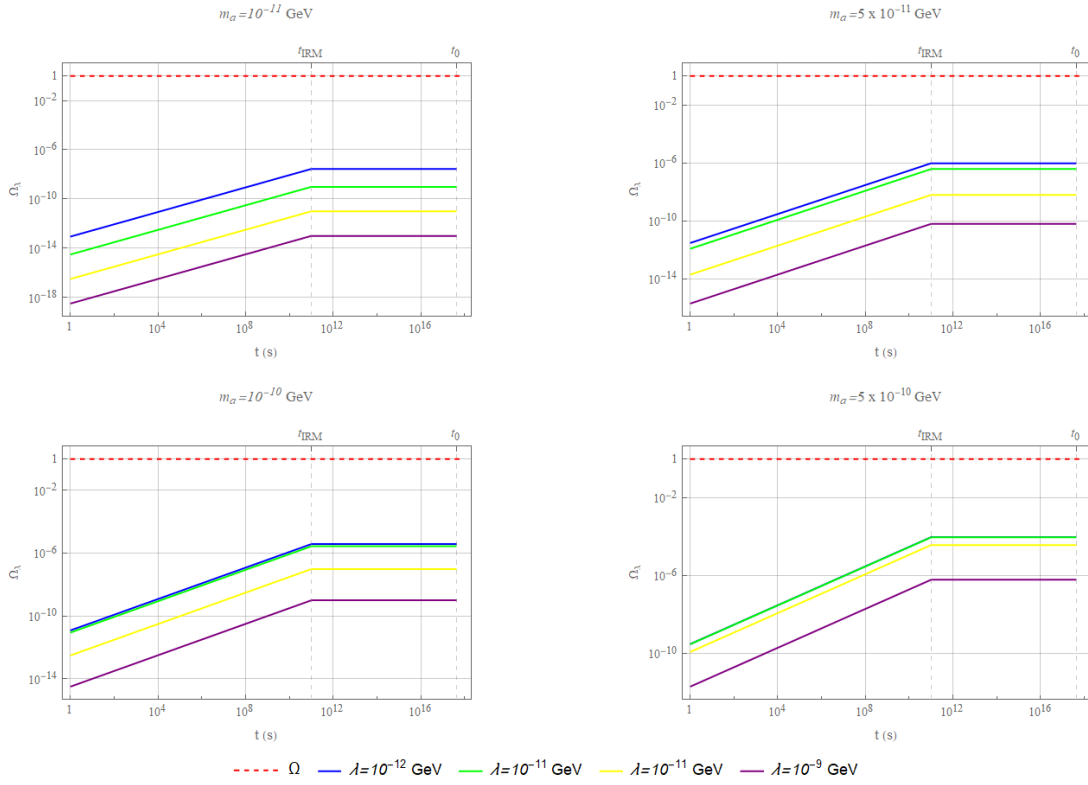


Figura D.2: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de masa λ y valor fijo de constante de desintegración. Se utilizaron los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV. Las figuras se muestran para distintos valores de m_α .

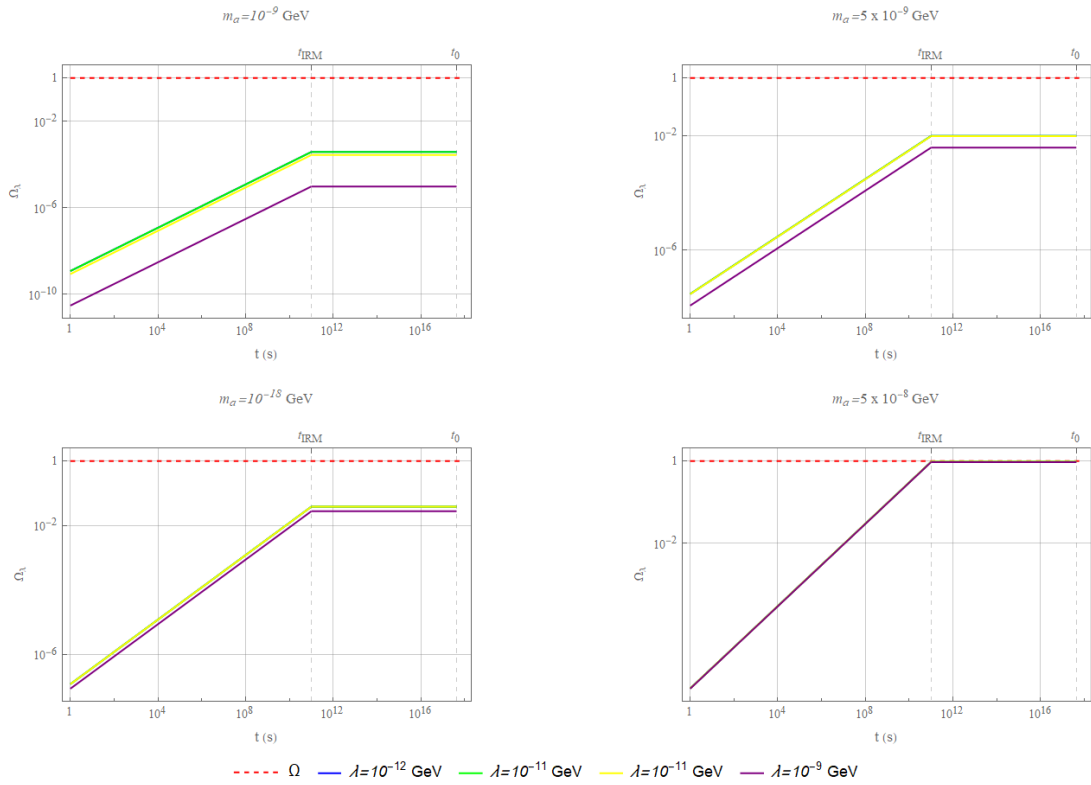


Figura D.3: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de masa λ y valor fijo de constante de desintegración. Se utilizaron los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV. Las figuras se muestran para distintos valores de m_a .

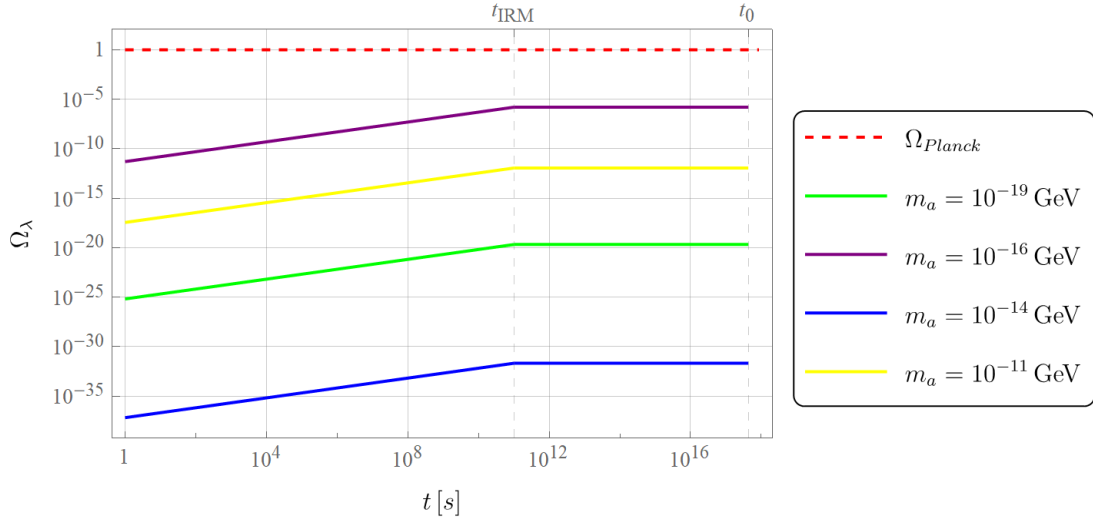


Figura D.4: Abundancia individual Ω_λ , asociada al campo \hat{a}_λ , establecida en la expresión (3.85) para distintos valores de m_a y valores fijos de masa λ y constante de desintegración f_λ . Se utilizaron los valores de $f_\lambda = 10^{12}$ GeV, $\lambda = 10^{-14}$ GeV, $\theta = 9 \times 10^{-10}$, $t_G = 10^{-5}$ s, $t_{IRM} = 10^{11}$ s y $1/R = 5 \times 10^{-3}$ GeV.

Apéndice E

Función poligamma

La función poligamma de orden m $\psi^{(m)}(x)$ se define como la m -ésima derivada de la función digamma $\psi(x)$ y la $(m + 1)$ -ésima derivada del logaritmo de la función gamma $\Gamma(x)$

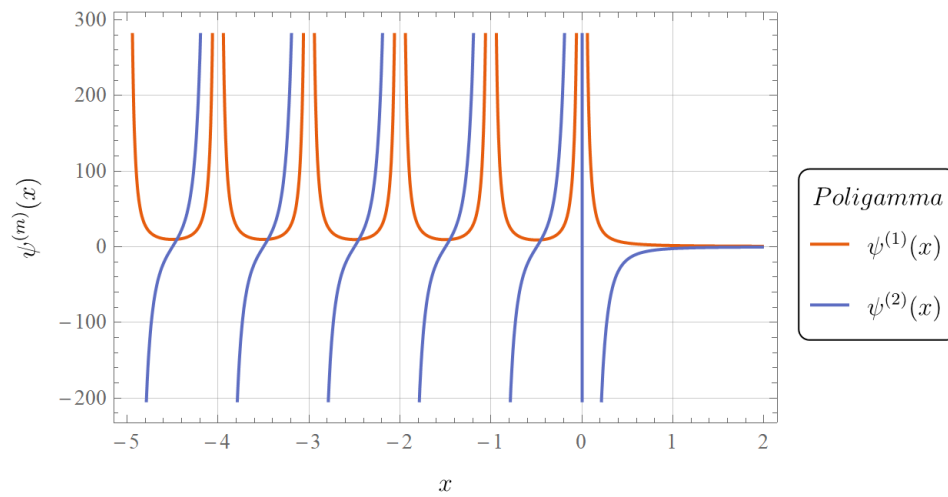
$$\psi^{(m)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \psi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \log \Gamma(x), \quad (\text{E.1})$$

donde la función digamma es

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx}. \quad (\text{E.2})$$

La función poligamma tiene la siguiente representación en serie

$$\psi^m(x) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{m+1}}. \quad (\text{E.3})$$

Figura E.1: Función poligamma de orden $m = 1$ y $m = 2$.

Referencias

- [1] Katherine Garrett and Gintaras Duda. Dark matter: A primer. *Advances in Astronomy*, 2011, 2011.
- [2] Fritz Zwicky. The redshift of extragalactic nebulae. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.
- [3] Howard Baer, Ki-Young Choi, Jihn E Kim, and Leszek Roszkowski. Dark matter production in the early universe: beyond the thermal wimp paradigm. *Physics Reports*, 555:1–60, 2015.
- [4] Gerard Jungman, Marc Kamionkowski, and Kim Griest. Supersymmetric dark matter. *Physics Reports*, 267(5-6):195–373, 1996.
- [5] Gianfranco Bertone. *Particle dark matter: observations, models and searches*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] Donald H Perkins. *Particle astrophysics*. Number 10. Oxford University Press, 2009.
- [7] David G Cerdeno and Anne M Green. Direct detection of wimps. *arXiv preprint arXiv:1002.1912*, 2010.
- [8] Marc Schumann. Direct detection of wimp dark matter: concepts and status. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46(10):103003, 2019.
- [9] Roberto D Peccei and Helen R Quinn. Cp conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review Letters*, 38(25):1440, 1977.
- [10] Roberto D Peccei. The strong cp problem and axions. In *Axions*, pages 3–17. Springer, 2008.
- [11] Steven Weinberg. A new light boson? *Physical Review Letters*, 40(4):223, 1978.
- [12] Edward W Kolb and Michael S Turner. The early universe. *Nature*, 294(5841):521–526, 1981.
- [13] Andreas Ringwald. Axions and axion-like particles. *arXiv preprint arXiv:1407.0546*, 2014.

- [14] Paola Arias, Davide Cadamuro, Mark Goodsell, Joerg Jaeckel, Javier Redondo, and Andreas Ringwald. Wispy cold dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(06):013, 2012.
- [15] Keith R. Dienes and Brooks Thomas. Dynamical dark matter: I. theoretical overview. 2011.
- [16] Keith R Dienes, Emilian Dudas, and Tony Gherghetta. Light neutrinos without heavy mass scales: A higher-dimensional seesaw mechanism. *Nuclear Physics B*, 557(1-2):25–59, 1999.
- [17] Keith R Dienes and Brooks Thomas. Dynamical dark matter. ii. an explicit model. *Physical Review D*, 85(8):083524, 2012.
- [18] Keith R Dienes, Emilian Dudas, and Tony Gherghetta. Invisible axions and large-radius compactifications. *Physical Review D*, 62(10):105023, 2000.
- [19] Keith R Dienes, Jeff Kost, and Brooks Thomas. Kaluza-klein towers in the early universe: Phase transitions, relic abundances, and applications to axion cosmology. *Physical Review D*, 95(12):123539, 2017.
- [20] Keith R Dienes and Brooks Thomas. Phenomenological constraints on axion models of dynamical dark matter. *Physical Review D*, 86(5):055013, 2012.
- [21] Michael S Turner. Cosmic and local mass density of “invisible” axions. *Physical Review D*, 33(4):889, 1986.
- [22] John Preskill, Mark B Wise, and Frank Wilczek. Cosmology of the invisible axion. *Physics Letters B*, 120(1-3):127–132, 1983.
- [23] Michael S Turner. Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe. *Physical Review D*, 28(6):1243, 1983.
- [24] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [25] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [26] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [27] Eric Macaulay, RC Nichol, D Bacon, D Brout, TM Davis, B Zhang, B A Bassett, D Scolnic, A Möller, CB D’Andrea, et al. First cosmological results using type ia supernovae from the dark energy survey: measurement of the hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(2):2184–2196, 2019.

- [28] TMC Abbott, FB Abdalla, J Annis, K Bechtol, J Blazek, BA Benson, RA Bernstein, GM Bernstein, E Bertin, D Brooks, et al. Dark energy survey year 1 results: a precise h_0 estimate from des y1, bao, and d/h data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 480(3):3879–3888, 2018.
- [29] Kevin Cahill. Flat space, dark energy, and the cosmic microwave background. *European Journal of Physics*, 41(3):035603, 2020.
- [30] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern cosmology*. Academic Press, 2020.
- [31] Samuel D McDermott, Hai-Bo Yu, and Kathryn M Zurek. Turning off the lights: how dark is dark matter? *Physical Review D*, 83(6):063509, 2011.
- [32] Particle Data Group et al. Review of particle physics. *Journal of Physics G: Nuclear and particle physics*, 33(1):001, 2006.
- [33] Brian D Fields, Paolo Molaro, and Subir Sarkar. Big-bang nucleosynthesis. *arXiv preprint arXiv:1412.1408*, 2014.
- [34] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford university press, 2008.
- [35] David Kirkman, David Tytler, Nao Suzuki, John M O’Meara, and Dan Lubin. The cosmological baryon density from the deuterium-to-hydrogen ratio in qso absorption systems: D/h toward q1243+ 3047. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 149(1):1, 2003.
- [36] Max Pettini and David V Bowen. A new measurement of the primordial abundance of deuterium: Towards convergence with the baryon density from the cmb? *arXiv preprint astro-ph/0104474*, 2001.
- [37] MC March, R Trotta, P Berkes, GD Starkman, and PM Vaudrevange. Improved constraints on cosmological parameters from type ia supernova data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418(4):2308–2329, 2011.
- [38] Jorge Mastache. Una revisión a la teoría básica del cmb (a review of the basic theory of cmb), 2014.
- [39] Antony Lewis and Sarah Bridle. Cosmological parameters from cmb and other data: A monte carlo approach. *Physical Review D*, 66(10):103511, 2002.
- [40] Marco Taoso, Gianfranco Bertone, and Antonio Masiero. Dark matter candidates: A ten-point test. 2007.
- [41] Scott W Randall, Maxim Markevitch, Douglas Clowe, Anthony H Gonzalez, and Marusa Brađač. Constraints on the self-interaction cross section of dark matter from numerical simulations of the merging galaxy cluster 1e 0657–56. *The Astrophysical Journal*, 679(2):1173, 2008.

- [42] D Larson, J Dunkley, G Hinshaw, Eiichiro Komatsu, MR Nolta, CL Bennett, B Gold, M Halpern, RS Hill, N Jarosik, et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap*) observations: power spectra and wmap-derived parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):16, 2011.
- [43] Leanne D Duffy and Karl Van Bibber. Axions as dark matter particles. *New Journal of Physics*, 11(10):105008, 2009.
- [44] Stephen L Adler. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. *Physical Review*, 177(5):2426, 1969.
- [45] Ikaros I Bigi and A Ichiro Sanda. Cp violation, 2001.
- [46] John F Donoghue, Eugene Golowich, and Barry R Holstein. *Dynamics of the standard model*, volume 35. Cambridge university press, 2014.
- [47] CA Baker, DD Doyle, P Geltenbort, K Green, MGD Van der Grinten, PG Harris, P Iaydjiev, SN Ivanov, DJR May, JM Pendlebury, et al. Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron. *Physical Review Letters*, 97(13):131801, 2006.
- [48] Stefano Profumo. *An introduction to particle dark matter*. World Scientific Publishing Company, 2017.
- [49] Markus Kuster, Georg Raffelt, and Berta Beltrán. *Axions: Theory, cosmology, and experimental searches*, volume 741. Springer, 2007.
- [50] Cumrun Vafa and Edward Witten. Parity conservation in quantum chromodynamics. *Physical Review Letters*, 53(6):535, 1984.
- [51] David JE Marsh. Axion cosmology. *Physics Reports*, 643:1–79, 2016.
- [52] Matthew C Johnson and Marc Kamionkowski. Dynamical and gravitational instability of an oscillating-field dark energy and dark matter. *Physical Review D*, 78(6):063010, 2008.
- [53] Michael J Duff. Kaluza-klein theory in perspective. In *Proc. of the Symposium: The Oskar Klein Centenary*, World Scientific, Singapore, pages 22–35. World Scientific, 1994.
- [54] Tao Han, Joseph D Lykken, and Ren-Jie Zhang. Kaluza-klein states from large extra dimensions. *Physical Review D*, 59(10):105006, 1999.
- [55] Milutin Blagojevic. *Gravitation and gauge symmetries*. CRC Press, 2001.
- [56] James Martin Overduin and Paul S Wesson. Kaluza-klein gravity. *Physics reports*, 283(5-6):303–378, 1997.

-
- [57] Kang-Sin Choi and Jihn E Kim. *Quarks and leptons from orbifolded superstring*, volume 696. Springer, 2006.
- [58] Mark Srednicki. Axion couplings to matter:(i). cp-conserving parts. *Nuclear Physics B*, 260(3-4):689–700, 1985.
- [59] Peter Svrcek and Edward Witten. Axions in string theory. *Journal of High Energy Physics*, 2006(06):051, 2006.
- [60] F Pascoal, LFA Oliveira, FSS Rosa, and C Farina. Estimate for the size of the compactification radius of a one extra dimension universe. *Brazilian Journal of Physics*, 38(4):581–586, 2008.

