



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis de redes mediante caminantes aleatorios y
entropía de la información

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

María Erandi Flores Romero

DIRECTOR:

Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Flores

Romero

María Erandi

761 782 1038

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

412049811

2. Datos del tutor

Dr

Ricardo Atahualpa

Solórzano

Kraemer

3. Datos del sinodal 1

Dra

Rosario

Paredes

Gutiérrez

4. Datos del sinodal 2

Dr

Carlos

Gershenson

García

5. Datos del sinodal 3

M en C.

Ernesto Alejandro

Vázquez

Navarro

6. Datos del sinodal 4

Dr

Irving Omar

Morales

Agiss

7. Datos del trabajo escrito

Análisis de redes mediante caminantes aleatorios y entropía de la información

64 p.

2021

Reconocimientos

Me siento muy afortunada por haber contado con el apoyo de tantas personas para concluir este proyecto que en muchos momentos quise abandonar.

A mi querida familia, gracias por todo el amor y cariño que siempre recibo de ustedes, en gran parte, es lo que me mantiene estable y feliz, les adoro. Ilya gracias por el interés sobre este trabajo, por darme ánimos siempre y por ser tan amorosa conmigo. Jesús gracias por mantenerte cerca, por motivarme e incluso por presionarme para terminar esta tesis. Mateo gracias por el cariño, por creer en mi y por todo lo que me has enseñado. Olmo, gracias por todo el amor que me mostraste durante este proyecto, gracias por tu calma y tus abrazos, gracias por consentirme tanto, por las pláticas, por la paciencia.

A todas las personas que revisaron este trabajo, a quienes me explicaron conceptos y resolvieron mis dudas: gracias. Un especial agradecimiento a Atahualpa, quien no permitió que abandonara este trabajo a pesar de lo mucho que quise hacerlo. En serio aprecio lo que hiciste. A Ernesto, gracias por tus comentarios y el interés en este trabajo. A Irving y Liliana gracias por proponerme este tema de tesis. A Rosario y Carlos, gracias por su disposición y sus comentarios.

A quienes me acompañaron a lo largo de la carrera, gracias por los buenos momentos, por las risas y por todas las veces que me ayudaron a entender temas complicados. Karina, Dalia, Miguel, Daris, Chino, Rita, Ilya, Luis, Clemen, les quiero. A las amistades de otros entornos que también me apoyaron y se interesaron por que terminara este proceso, Mariana, Wil, Chio, Dani gracias, gracias por todo su apoyo.

Finalmente, gracias a CONACYT por el apoyo brindado para realizar el proyecto CB-2016-287673: *Correlación entre la conectividad topológica del entramado urbano y las zonas que se identifican como comunidad en el imaginario urbano.*

Resumen

El siguiente trabajo propone una forma indirecta para dividir la ciudad de acuerdo a la conectividad de su red vial. El método consiste en construir un grafo con la información de la red vial, detectar comunidades en el grafo y posteriormente reinterpretar dichas comunidades en la red vial de la ciudad. Su funcionamiento se basa en reducciones de la entropía asociada a la trayectoria de un caminante aleatorio, el cual simula el flujo que genera la topología de la red.

Dicho método se aplicó en redes simples simulando vialidades ficticias así como en tres sistemas viales de ciudades mexicanas con distintas magnitudes: Aguascalientes, Monterrey y la Ciudad de México.

De acuerdo con los resultados, la metodología propuesta permite caracterizar la conectividad mediante la entropía. Funciona para detectar divisiones dentro de ciudades a distintos niveles de especificidad siempre y cuando la disposición de la calles sea lo suficientemente heterogénea para que la entropía asociada a ellas sea distinta.

Al analizar las características de las comunidades que detecta el algoritmo se encontró que para las comunidades pequeñas la entropía crece como el logaritmo del número de nodos y para las comunidades con más de 100 calles aproximadamente, la entropía está acotada por un máximo independiente del número de nodos.

Por otra parte, la entropía tasada por el número de aristas con respecto al número de nodos sigue una ley de potencias, donde las comunidades grandes pueden decaer más rápidamente.

Índice general

1. Análisis de las redes viales en ciudades	1
1.1. ¿Qué son las ciudades?	1
1.2. ¿Las ciudades son sistemas complejos?	4
1.3. ¿Las redes viales se autorregulan?	5
1.4. ¿Por qué es importante estudiar las vialidades?	6
1.5. Hipótesis	6
2. Gráficas para representar redes viales	9
2.1. Introducción a la teoría de gráficas	9
2.1.1. Definiciones	10
2.1.2. Clasificación de gráficas	13
2.1.3. ¿Gráfica, grafo o red?	15
2.2. Gráficas de intersección para representar la red vial	15
2.2.1. Ejemplos para redes simples	16
3. Modelado del flujo en las vialidades	19
3.1. ¿Qué es un caminante aleatorio?	19
3.2. Caminantes aleatorios en gráficas	21
3.3. El flujo vial como la trayectoria del caminante	22
4. Detección de comunidades en la red vial	25
4.1. Introducción a la entropía: energía, calor y trabajo	25
4.1.1. Termodinámica	26
4.1.2. Física estadística	28
4.2. Entropía	29
4.3. Entropía de la información	30
4.4. Entropía aplicada a la detección de comunidades	32
5. Discusión y resultados	35
5.1. Redes ficticias	35
5.1.1. Las comunidades de las redes ficticias	38
5.1.2. ¿Qué podemos decir de estas comunidades?	41
5.2. Ciudades	42

ÍNDICE GENERAL

5.2.1. Las comunidades de Aguascalientes	43
5.2.2. Las comunidades de Monterrey	44
5.2.3. Las comunidades de la Ciudad de México	50
5.2.4. Entropía asociada a las comunidades	56
6. Conclusión	59

Capítulo 1

Análisis de las redes viales en ciudades

Este capítulo delimita el campo de estudio y la hipótesis del trabajo. Particularmente se centra en la relación entre la infraestructura y la evolución de una ciudad desde la perspectiva de los sistemas complejos.

Para ello inicia dando un breve contexto sobre las ciudades, sus procesos y dinámicas. Posteriormente profundiza sobre las redes viales y termina exponiendo su estrecha relación con el desarrollo de las urbes.

1.1. ¿Qué son las ciudades?

Las urbes son estructuras físicas y organizativas que modifican la relación de sus habitantes con el entorno. Aunque no existe un consenso en la definición, en general se consideran como ciudades a los asentamientos e infraestructura que permiten una alta densidad poblacional, donde incrementan las relaciones sociales, se crea una sociedad y predominan las actividades económicas secundarias y terciarias. En este trabajo se inicia utilizando esta definición general, la cual se se ampliará de acuerdo a los conceptos que se introduzcan en capítulos posteriores.

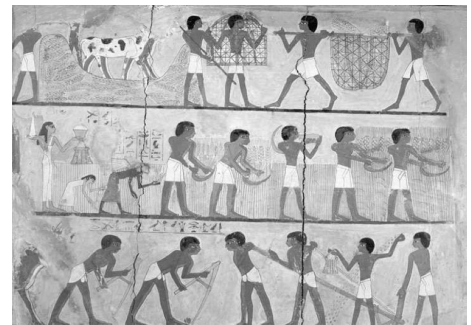


Figura 1.1: Pintura de las actividades agrícolas en el antiguo Egipto

Algunos autores consideran que las primeras manifestaciones de la vida gregaria y la cooperación para el beneficio en conjunto surgen en el neolítico con la vida en las cavernas [1], sin embargo, los primeros asentamientos considerados como ciudades -Eridú, Uruk y Lagash- surgieron alrededor del 3500 a.C. en Mesopotamia, cuando la práctica

1. ANÁLISIS DE LAS REDES VIALES EN CIUDADES

de la agricultura y la domesticación de animales permitió tener excedentes alimentarios; la capacidad de satisfacer las necesidades de más habitantes propició una organización social con actividades no directamente relacionadas a la supervivencia [2].

Para el 800 a.C existían ciudades en varias de las civilizaciones antiguas: Tebas y Menfis del antiguo Egipto; Harappa y Mohenjo-Daro de la cultura del valle del Indo; Anyang y Zhengzhou de la dinastía Shang en China; San Lorenzo y La Venta de los Olmecas en Mesoamérica [1, 3]. Todas ellas se asentaron en valles cerca de cuerpos de agua y desarrollaron una organización espacial similar: en las afueras los artesanos y obreros, en el centro el gobernante-sacerdote junto con una élite atendida por su séquito [2].

Las viviendas se agrupaban de distintas formas: algunas civilizaciones se dividían en bloques [4, 5, 6], otras tenían una estructura espacial céntrica con suburbios y otras mas se organizaban de acuerdo a formas simbólicas para su filosofía y creencias religiosas [6, 1].

Con el crecimiento de las ciudades inicia el cuestionamiento sobre cómo organizarlas. Alrededor del 400 a.C en China se escribió uno de los primeros registros escritos de planeación urbana, **el libro de los artesanos** (*Kao Gong Ji*) que describe cómo construir la ciudad capital: en el centro de una superficie cuadrada amurallada de 20.25 km^2 se construye el palacio imperial, en cada lado de la muralla se colocan tres entradas y a través de cada entrada pasan tres calles paralelas, de modo que se forma una retícula con nueve calles horizontales y nueve calles verticales agrupadas en tercias, como se muestra en la figura 1.2 [7, 8].

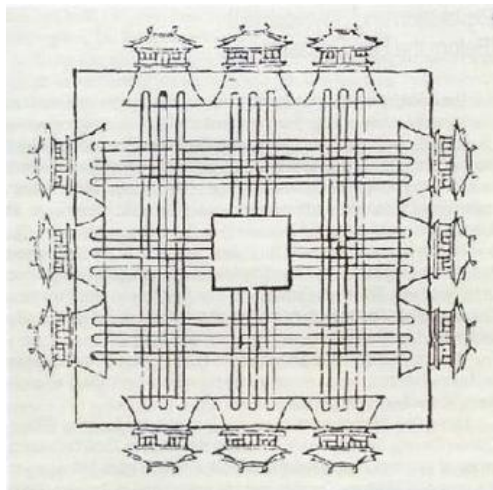


Figura 1.2: Esquema de la ciudad-capital tradicional china de acuerdo al *Kao Gong Ji*

Por su parte, en el 479 a.C Hipodamo propone el primer ordenamiento urbano. Con el fin de reconstruir la ciudad de Mileto, ordena las viviendas, edificaciones y plazas (llamadas ágoras) en una retícula formada por calles rectas. La mayor parte de las ciu-

dades construidas en la Grecia Helenística alrededor del 300 a.C se basaron en dicho esquema, conocido como **plano hipodámico** [9, 10].

Basados en el modelo de Hipodamo, los romanos organizaron sus ciudades en una cuadrícula con dos calles principales que se intersectan en el centro: *Cardo* de norte a sur y *Decumunnus* de este a oeste [1].

El desarrollo urbano de Roma tuvo gran influencia en muchas de las ciudades de Europa occidental. Se caracterizó por grandes obras como el sistema de abastecimiento de agua y alcantarillado, sin embargo tuvo graves deficiencias en cuanto a movilidad por sus calles angostas y poco aptas para los vehículos con ruedas. Para subsanar dichos problemas se crearon los *ediles* -los primeros funcionarios públicos encargados de la organización urbana- que tenían entre sus obligaciones vigilar el correcto alineamiento de los nuevos inmuebles para evitar obstrucciones en la circulación. Adicionalmente en el 118 d.C. se estableció como medida complementaria el horario en que podían entrar a la ciudad los vehículos de tamaño y carga máxima [11].

Por su parte, los altépetl o señoríos de Mesoamérica se organizaron en bloques, en particular las ciudades de Teotihuacán y Tenochtitlán se caracterizaron por dos grandes calzadas perpendiculares entre sí que regían el flujo en la ciudad y dividían a los bloques de viviendas que conformaban la ciudad en cuatro secciones [12].

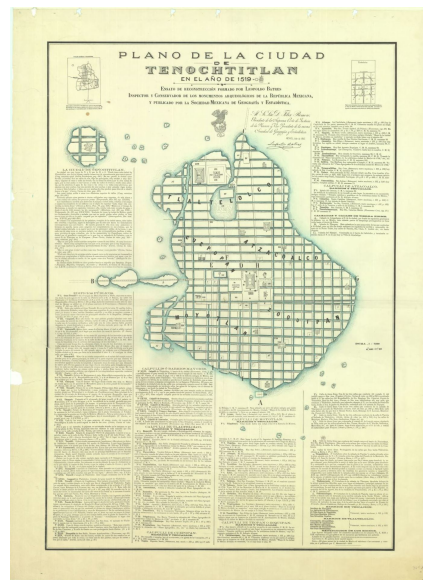


Figura 1.3: Mapa de Tenochtitlán

Las ciudades del medievo se caracterizaron por estructuras más orgánicas, se posicionaron en lugares áridos y montañosos para dejar las tierras fértiles para la agricultura. En

1. ANÁLISIS DE LAS REDES VIALES EN CIUDADES

consecuencia presentan una forma irregular con redes de pequeños caminos alrededor de los cuales se construyen edificaciones. Dichas ciudades se dividen de acuerdo a los oficios de sus habitantes en distritos, que a su vez se dividen en barrios con infraestructura propia (iglesia, mercado, pozo, etc) [11].

Después del medievo surgen las ciudades comerciales, cuya traza procuró una mejor circulación, se caracterizaron por la existencia de una gran avenida con residencias de clase alta a su alrededor e implementaron aspectos del ordenamiento urbano que se mantienen hasta ahora, como las banquetas, la numeración de las casas y el nombramiento de las calles [1].

Gracias a las nuevas tecnologías como la máquina de vapor y posteriormente la electricidad, las ciudades en la revolución industrial no dependieron de fuentes naturales de energía y pudieron posicionarse con más libertad en el territorio. Éstas se caracterizaron por una distribución desordenada de fábricas, viviendas para obreros y vías de ferrocarril [13].

Aunque las condiciones de vida para la mayoría de la población en 1800 eran bastante precarias, en ese tiempo se crearon nuevas ciudades y aumentó la población urbana. Para solucionar el aumento en las distancias entre las residencias y los lugares de trabajo de los obreros se desarrolló el ómnibus y posteriormente el tranvía, los primeros transportes públicos [11].

Las ciudades que tenemos en la actualidad son resultado del proceso evolutivo que atraviesan las sociedades, reflejo de su historia y cultura [2]. Por ello los enfoques más recientes sugieren estudiar a las urbes desde los sistemas complejos con una perspectiva interdisciplinaria que permita utilizar las herramientas, ideas y conceptos desarrollados en diferentes áreas del conocimiento [14].

1.2. ¿Las ciudades son sistemas complejos?

De acuerdo con la física un sistema está en equilibrio cuando alguno de sus flujos tiende a cero, las ciudades son sistemas fuera de equilibrio, ya requieren de un flujo constante de recursos y energía para mantener su estructura [15]. Adicionalmente tienen procesos interdependientes ocurriendo en distintas escalas temporales y espaciales. Por ejemplo, en el transcurso del día dinámicas como el desplazamiento de los individuos, la emisión de contaminantes y el tráfico ocurren simultáneamente y a su vez, están fuertemente relacionadas a dinámicas con periodicidades más amplias como la gentrificación, la organización espacial de la ciudad, la creación de infraestructura o la conectividad con otras ciudades.

Las ciudades son el resultado de interacciones colectivas entre dos componentes: una

estructura espacial (conformada por los aspectos físicos de la ciudad como edificios, calles, casas, etc.) que forma una red de centros conectados entre sí; y la actividad humana que genera movimiento a través de las ocupaciones sociales y económicas [16, 17].

Las interacciones entre los elementos de la ciudad crean, modifican y mantienen las urbes. Uno de los modelos que ha estudiado estas relaciones es el de Fujita-Ogawa, el cual determina la distancia máxima entre las zonas residenciales para trabajadores y las zonas comerciales donde se encuentran las empresas con base en el salario, los gastos de transporte y manutención [18]. De acuerdo con sus resultados cuando los costos o distancias de transporte superan los beneficios, la ciudad puede desarrollar otros centros de actividad comercial [18].

De modo que las transformaciones que sufre una ciudad -como la transición de monocéntrica a policéntrica- están estrechamente relacionadas con las dinámicas de sus elementos. Las ciudades pueden estudiarse como sistemas complejos.

1.3. ¿Las redes viales se autorregulan?

Los procesos comunes a todas las ciudades y el comportamiento colectivo de sus componentes permite caracterizar estadísticamente a las ciudades [14]. Las vialidades son uno de los elementos principales en la formación de las ciudades.

Un sistema es autorregulatorio (o autoorganizado) cuando los elementos que lo componen crean procesos que generan -y por lo tanto regulan- la creación de nuevos elementos.

En el sistema vial ocurre un proceso de este tipo: las calles -elementos del sistema- son construidas de acuerdo a las necesidades de los habitantes de las ciudades, sin embargo estas generan y regulan la expansión de la ciudad; que a su vez genera nuevas necesidades y con ello la construcción de nuevas calles. De modo que las estructuras de las redes viales en las ciudades son el resultado de un proceso autorregulatorio.

En las ciudades de Estados Unidos existe una clara correlación entre los medios de transporte disponibles para el grueso de la población y la evolución de la estructura urbana. Las estructuras monocéntricas predominaron cuando el transporte era principalmente a pie, posteriormente los tranvías y el metro generaron suburbios más alejados del centro de la ciudad, donde las viviendas tenían un menor costo y en épocas más recientes los automóviles, accesibles para la clase media, promovieron el crecimiento de áreas residenciales a bajo costo entre las líneas de metro y tranvía, a las que sólo se puede llegar en coche [19].

En el caso de China, la creación de carreteras radiales desde el centro de la ciudad así como anillos ha promovido la descentralización de las ciudades, mientras que la creación de vías ferroviarias ha favorecido el comercio y la industria, de modo que la infraestructura impacta la forma de las zonas urbanas de manera larga y duradera [20].

De acuerdo a los dos ejemplos anteriores, la forma de las ciudades es en gran medida determinada por sus redes de transporte. Por ello, para comprender la evolución de una ciudad así como sus dinámicas es necesario estudiar la estructura de sus vialidades.

1.4. ¿Por qué es importante estudiar las vialidades?

De acuerdo con la tendencia hacia la urbanización en el mundo, se prevee que el crecimiento acelerado de las zonas urbanas continúe, siendo los países en vías de desarrollo los que tendrán mayor urbanización, algunas de las consecuencias que se espera que ocurran son grandes migraciones de zonas rurales a ciudades, aumento en la demanda de recursos y agudización de problemas relacionados con la densidad poblacional como el estrés hídrico, la disparidad económica y la contaminación [21, 22]. Por ejemplo, en México 76.5 millones de personas migraron a ciudades en el periodo entre 1950 y 2010, y de acuerdo la encuesta intercensal más reciente sólo el 20.4 % de los mexicanos viven en zonas rurales [23]. Estudiar las dinámicas de las zonas urbanas permite diseñar estrategias efectivas contra las problemáticas de los asentamientos urbanos en los próximos años [24].

En particular, la movilidad es uno de los aspectos que condiciona la sostenibilidad de las grandes ciudades, porque las emisiones de gases de efecto invernadero aumenta con el tráfico y la sobredemanda de las vialidades. Detectar patrones en la estructura de las vialidades podría ayudar a proponer nuevas rutas para el transporte público, encontrar áreas donde se necesite infraestructura o bien minimizar las rutas de distribución de recursos. También puede ser útil para determinar la localización óptima de hospitales o escuelas basada en su accesibilidad y área de cobertura, identificar las áreas que deberían priorizarse en los planes de urbanización o incluso contribuir a la predicción sobre como evolucionará la ciudad.

1.5. Hipótesis

Este trabajo busca proponer un método para determinar como se divide una ciudad de acuerdo a su conectividad. La propuesta es identificar subestructuras de la red vial mediante el análisis del flujo inherente a la estructura de las calles.

Los trabajos previos en el área han analizado la estructura creada por la dinámica

de la ciudad desde la perspectiva del *movimiento social*, se han usado los viajes dentro del metro de Londres para encontrar los centros de actividad en la ciudad [25], la red de llamadas telefónicas para encontrar la partición de Gran Bretaña de acuerdo a un método de optimización modular [26], trayectorias de vehículos rastreados con GPS para encontrar clusters de movilidad [27] y la información de las tarjetas de pago del transporte público en Singapur para encontrar regiones dentro de la ciudad [28].

Sin embargo el movimiento dentro de la ciudad también está relacionado con la complejidad topológica y geométrica de sus calles [29, 30], por ello, para complementar el estudio de la estructuras en la ciudad se analizan las dinámicas creadas por la infraestructura misma.

Capítulo 2

Gráficas para representar redes viales

Para estudiar sistemas complejos es necesario conocer las interacciones entre sus elementos. La teoría de gráficas trabaja con objetos que permiten enfocarse en las interacciones de un sistema.[31].

En este trabajo el uso de gráficas facilita la identificación de los patrones creados por las vialidades de una ciudad. Por ello este capítulo inicia con una pequeña introducción a la teoría de gráficas, posteriormente describe el tipo de gráficas que se utilizarán para analizar ciudades y finalmente, concluye con una pequeña sección que muestra cómo son las gráficas asociadas a pequeños conjuntos de calles, lo cual ayudará al lector a identificar los grafos asociados con las redes ficticias que se presentarán en el capítulo de Discusión y resultados.

2.1. Introducción a la teoría de gráficas

La teoría de gráficas inició en el siglo XVIII con la solución de un problema de conectividad entre ciudades. Desde entonces su desarrollo ha estado estrechamente relacionado con sus aplicaciones; por ejemplo en ciencias sociales se han usado para detectar organizaciones criminales [32], en economía para comparar el estatus económico con las relaciones sociales [33], mientras que en medicina y biología el análisis de gráficas ha permitido describir ciertos procesos relacionados con la estructura del cerebro humano [34].

En este trabajo, la teoría de gráficas es utilizada para analizar redes viales de ciudades, a continuación se introducen los conceptos básicos que se utilizarán en esta investigación.

2.1.1. Definiciones

El objeto de estudio de la teoría de gráficas -una **gráfica** G - se define mediante sus vértices y aristas. Por ello su definición formal es mediante la pareja ordenada (V, E) , cuyos elementos son: el conjunto finito y no vacío de vértices o nodos $V(G)$ y el conjunto de aristas o conexiones $E(G) \subseteq V \times V$, cuyos elementos son subconjuntos de dos vértices (no necesariamente distintos).

Cuando las conexiones entre vértices tienen dirección, los elementos del conjunto de aristas son parejas ordenadas denominadas *arcos* o *flechas*. Las gráficas con arcos son llamadas *dirigidas* para diferenciarlas de las gráficas con aristas. En este trabajo sólo se utilizarán gráficas.

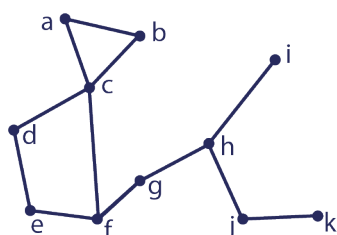


Figura 2.1: Representación de \mathcal{G}

La figura 2.1 muestra una de las representaciones del grafo \mathcal{G} , la información que constituye al grafo está descrita por los siguientes conjuntos:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{h, j\}, \{j, k\}\}.$$

De acuerdo con su definición, lo único que determina a una gráfica son los vértices y aristas; mientras se preserven las conexiones entre vértices las posiciones de los vértices y aristas no son fijas, lo cual implica que una gráfica puede tener distintas representaciones visuales. Por ejemplo la gráfica \mathcal{G} admite cualquiera de las siguientes representaciones:

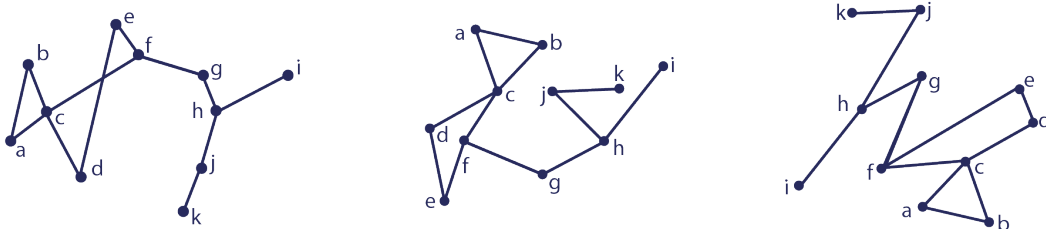


Figura 2.2: Tres representaciones visuales distintas de la gráfica \mathcal{G} .

Gran parte de la información en una gráfica está codificada en sus conexiones, por ello para hacer referencia a los elementos que forman dicha conexión se usa el concepto de

adyacencia: dos aristas $\{v, u\}, \{u, z\}$ son adyacentes si comparten un vértice y correspondientemente si existe una arista $\{v, u\} \in E$ uniendo dos nodos $u, v \in V$, éstos son adyacentes.

El **grado** de un vértice v cuantifica el número de vértices a los que dicho nodo es adyacente o bien cuantas aristas tienen a v como uno de sus extremos. El conjunto de vértices adyacentes a un nodo es conocido como la **vecindad** del nodo.

Las sucesiones de vértices adyacentes dentro de una gráfica son llamadas **caminos**. Un camino \mathcal{K} que inicia en el vértice v_0 y termina con el vértice v_N se representa con una sucesión de la forma $S(v_0, v_N) = (v_i)_{i=0}^N$, donde cada iteración de la sucesión se puede describir mediante la función:

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{K} \\ n \longmapsto (v_i)_{i=0}^n.$$

De modo que $f(j)$, la j -ésima iteración del camino \mathcal{K} , es la subsucesión desde el vértice en la posición inicial v_0 al vértice en la j -ésima posición:

$$f(j) = (v_0, \dots, v_j) = (v_i)_{i=0}^j.$$

Nótese que en las gráficas simples, entre cualesquiera dos vértices de un camino existe una única arista, por lo tanto el número de aristas en un camino es igual al número de vértices en la sucesión menos uno (o bien, al número de elementos menos uno).

Los caminos que inician y terminan en el mismo nodo sin repetir vértices durante su trayectoria se denominan **ciclos**.

Una gráfica donde entre cualesquiera dos vértices existe un camino se denomina **conexa**. Cuando dos o más vértices no tienen ningún camino que los una, la gráfica se denomina **disconexa**. A los subconjuntos de vértices conexos que constituyen una gráfica desconexa se les denomina **componentes conexos**.

La **longitud** de un camino \mathcal{K} : $l(\mathcal{K})$, está definida como el número de aristas en la sucesión que define al camino $S(v_0, v_n) = (v_i)_{i=0}^n$. De modo que un camino descrito por una serie con n elementos tiene una longitud de $n - 1$ aristas:

$$l(\mathcal{K}) = l((v_i)_{i=0}^n) = n - 1.$$

El concepto de longitud permite dotar de una métrica a las gráficas, es decir, se puede hablar de **distancia** entre vértices $d(u, v)$, definida como la longitud del camino mínimo entre dichos vértices:

$$d(u, v) = \min\{l(S(u, v))\}.$$

2. GRÁFICAS PARA REPRESENTAR REDES VIALES

Cuando los vértices u y v pertenecen a distintas componentes conexas no tienen un camino que los una, en tales casos la distancia se define como infinita.

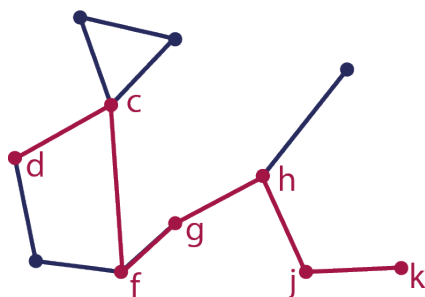


Figura 2.3: Camino \mathcal{C} de longitud 6.

Como ejemplo, en la figura 2.3 se resalta el camino \mathcal{T} definido por la sucesión:

$$S(d, k) = (d, c, f, g, h, j, k),$$

éste corresponde con uno de los caminos de longitud mínima entre los vértices d y k (lo cual significa que para este caso la distancia entre vértices coincide con la longitud del camino \mathcal{T}):

$$d(d, k) = \min\{l(S(d, k))\} = l(\mathcal{T}) = 6.$$

Note que la distancia representa número de aristas y no tiene unidades.

Ahora bien, para evaluar que tan similares o diferentes son las gráficas se tiene el concepto de isomorfismo. Dos gráficas (G y H) son **isomorfas** cuando existe una biyección entre los vértices de las gráficas $f : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve todas las adyacencias:

$$\forall \{x, y\} \in E(G) : \{f(x), f(y)\} \in E(H). \quad (2.1)$$

Por ejemplo, las representaciones en la figura 2.2 son isomorfas.

Por último, las medidas de centralidad permiten cuantificar diversas características de los nodos. Por ejemplo, la **centralidad de grado** indica el número de aristas incidentes a un nodo i :

$$C_{\text{grado}}(i) = \text{grado}(i).$$

O bien para las gráficas conexas el **coeficiente de cercanía** es el promedio de las

distancias de un nodo i con los demás nodos:

$$C_{\text{cercanía}}(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1(j \neq i)}^n d(i, v).$$

Mientras que el **coeficiente de intermediación** (también para gráficas conexas) cuantifica el número de caminos de longitud mínima, entre cualesquiera dos nodos, que pasan por el nodo i mediante la siguiente ecuación:

$$C_{\text{inter}}(i) = \sum_{j,k \in V} \frac{|\{S(j, k) : l(S(j, k)) = d(j, k) \wedge i \in S(j, k)\}|}{|\{S(j, k) : l(S(j, k)) = d(j, k)\}|}.$$

Si el lector desea conocer más sobre la teoría de gráficas o profundizar en las definiciones que se expusieron en la sección puede consultar los siguientes libros: [31, 35, 36].

2.1.2. Clasificación de gráficas

Las gráficas se pueden clasificar de muchas maneras, una de ellas es cuando comparten una de sus propiedades topológicas, como el grado de sus vértices, la longitud de sus caminos o la partición de su conjunto de vértices. Para terminar de introducir la terminología, a continuación se describen algunos conjuntos en los que se agrupan las gráficas:

Las **gráficas periódicas** son aquellas donde hay simetrías traslacionales con periodos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, es decir, si x_i representa la posición del vértice (o arista) i de la red, entonces $x_i + \Delta_j$ también representa la posición de un vértice (o arista) de la red. En la figura 2.4 se muestra la gráfica correspondiente a parte de una red infinita con dos periodos: $\Delta_1 = (1, 0)$ en la dirección horizontal y $\Delta_2 = (0, 1)$ en la dirección vertical.

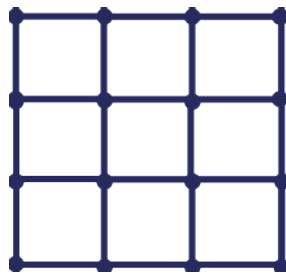


Figura 2.4: Parte de una gráfica 4-regular infinita

Las **gráficas bipartitas** son aquellas cuyo conjunto de vértices V , se puede dividir en dos subconjuntos A y B sin elementos en común, de modo que cada arista incide en un vértice del conjunto A y un vértice del conjunto B . Este concepto se puede generalizar

a **gráficas n-partitas** cuando el conjunto V se divide en n subconjuntos que cumplen no tener aristas entre nodos del mismo subconjunto.

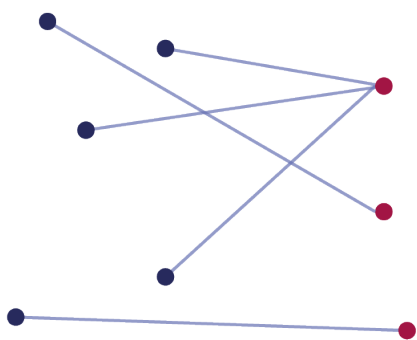


Figura 2.5: La gráfica de la figura es bipartita porque los vértices rojos (conjunto A) sólo forman aristas con los vértices azules (conjunto B)

Las **gráficas completas** son aquellas en las que cada vértice está conectado con todos los demás vértices de la gráfica. Generalmente a este tipo de gráficas se denota como K_n , donde el subíndice n indica la cantidad de nodos en la gráfica. Por ejemplo si una gráfica tripartita es completa esta se puede escribir como $K_{n,m,s}$, donde n , m y s son las respectivas cardinalidades de los subconjuntos que conforman el conjunto $V(K_{n,m,s})$.

Las **gráficas de estrella** son un caso particular de las gráficas bipartitas completas: uno de los subconjuntos sólo tiene un vértice; el otro tiene tantos vértices como *picos* tenga la estrella. De modo que si tiene m picos, la gráfica de estrella es: $K_{1,m}$.

Las **gráficas de árbol** son aquellas donde ningún camino repite vértices, es decir, no tienen ciclos y existen dos o más aristas -llamadas hojas- con una única adyacencia. En particular, para este tipo de gráficas el camino entre cualesquiera dos nodos es único. Un ejemplo de este tipo de redes es la red de Bethe, una gráfica de árbol infinita que inicia como una gráfica de estrella $K_{1,z}$ y mediante un proceso iterativo en el que se añaden $z - 1$ aristas en los extremos de las hojas con vértices de grado uno se hace tender a infinito. En la figura 2.6 se muestran los primeros 4 pasos de la construcción de una red de Bethe con $z = 3$.

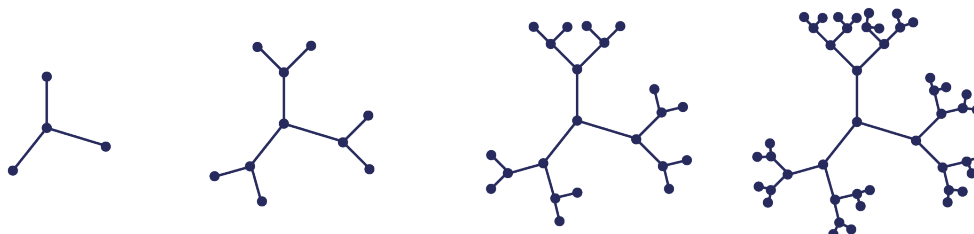


Figura 2.6: Las primeras cuatro iteraciones para construir una red de Bethe con $z = 3$.

2.1.3. ¿Gráfica, grafo o red?

En los artículos de investigación y divulgación es una práctica común utilizar las palabras *gráfica*, *grafo* y *red* indistintamente. En este trabajo las palabras *gráfica* y *grafo* serán utilizadas como sinónimos para referir al objeto matemático definido por la pareja ordenada de vértices y aristas, mientras que se reserva la palabra *red* para hacer referencia a objetos físicos como las vialidades en una ciudad, en particular usaremos el concepto *red vial*.

Es importante mencionar que dentro del área de las matemáticas la representación visual que permite conocer el comportamiento de una función también es denominada *gráfica*, sin embargo, para evitar confusiones esta acepción no será utilizada en este trabajo.

2.2. Gráficas de intersección para representar la red vial

Para que efectivamente podamos analizar redes viales mediante gráficas es necesario definir que elementos de la red vial representarán los vértices y cuáles los enlaces.

Anteriormente se han definido gráficas donde los segmentos de calle son los enlaces y los extremos de dichos segmentos son los vértices ¹. Sin embargo esas representaciones tienen dos problemas: 1) dividen una sola calle en muchos segmentos y 2) los nodos representan tanto una intersección entre calles como el fin de una calle o como el punto en que una calle cambia de dirección formando un ángulo [37]. Lo cual repercute en la búsqueda de estructuras porque dificulta el análisis de la dinámica de las vialidades y simplifica a cuadrículas regulares la mayoría de las redes viales [37].

Para resolver estos problemas, en este trabajo se usará la **gráfica de intersección** de las calles en la red vial. En ella cada nodo representa una calle completa y las aristas entre nodos indican que existe una intersección entre sus respectivas calles, es decir, las descripciones de ambas calles comparten un par de coordenadas. De modo que el conjunto de vértices $V(G)$ tiene como elementos a las calles de la ciudad y el conjunto de aristas $E(G)$ tiene la información de las intersecciones entre calles de toda la red vial. En algunos artículos a este tipo de representación se le llama *gráfica dual*² de la red vial.

Para comparar apropiadamente ambas representaciones, en la figura 2.7 se muestra una red vial y dos gráficas mostrando la misma información de la red en formas distintas:

¹En la literatura estas gráficas se conocen como *gráficas simples*.

²Cabe mencionar que en este caso, la palabra dual no indica que la gráfica sea dual a la red vial en el sentido matemático.

2. GRÁFICAS PARA REPRESENTAR REDES VIALES

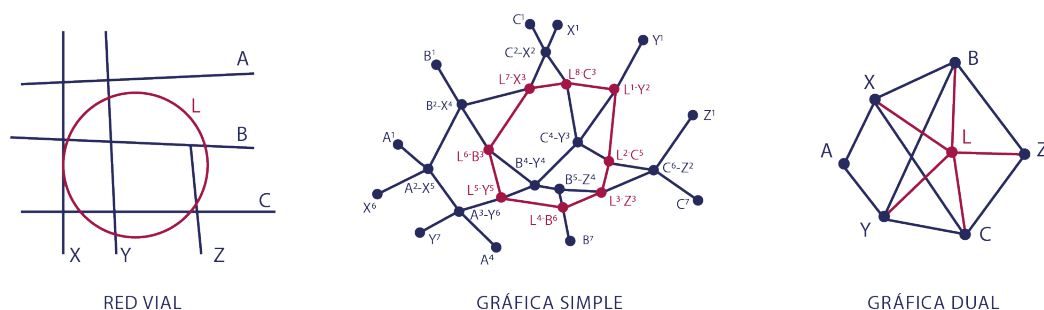


Figura 2.7: Red vial original (izquierda) y dos posibles gráficas asociadas a ella: gráfica simple (centro) y gráfica dual (derecha).

Una de las ventajas de la representación dual es que se enfoca en las calles y preserva la continuidad que existe en la red vial, lo cual facilita la búsqueda de calles importantes en la dinámica de la red. Por ejemplo, en la gráfica dual (imagen en el extremo derecho de la figura 2.7) basta ver el número de aristas incidentes al nodo L , para saber que en la red vial original el circuito L es uno de los elementos más importantes, ya que tiene conexiones con la mayoría de las calles. Mientras que en la gráfica simple no queda del todo claro la preponderancia del conjunto de aristas $\{L^1Y^2, L^2C^5, L^3Z^3, L^4B^6, L^5Y^5, L^6B^3, L^7X^3 \text{ y } L^8C^3\}$ que se asocia con el circuito L de la red original.

2.2.1. Ejemplos para redes simples

Dado que se utilizarán las gráficas de intersección para representar las redes viales de una ciudad, en esta sección se muestran las gráficas de intersección (también llamadas duales) para arreglos muy simples de calles.

La gráfica dual para calles ordenadas en retículas es una gráfica bipartita, porque en este acomodo las intersecciones sólo ocurren cuando las calles son perpendiculares entre sí, de modo que el conjunto de vértices se divide de acuerdo a si las calles son paralelas o perpendiculares.

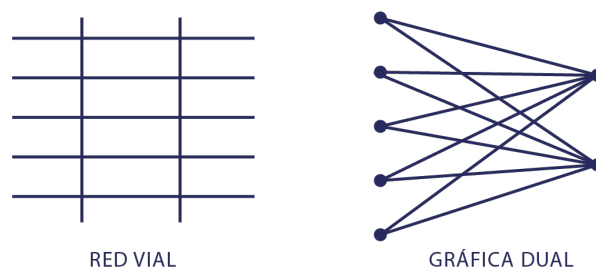


Figura 2.8: Retícula de calles y su gráfica dual: una gráfica bipartita

Por su parte, el acomodo de avenidas principales intersectadas por calles secundarias como en la figura 2.9 tiene como gráfica dual una gráfica de árbol, porque en la red no existen circuitos:

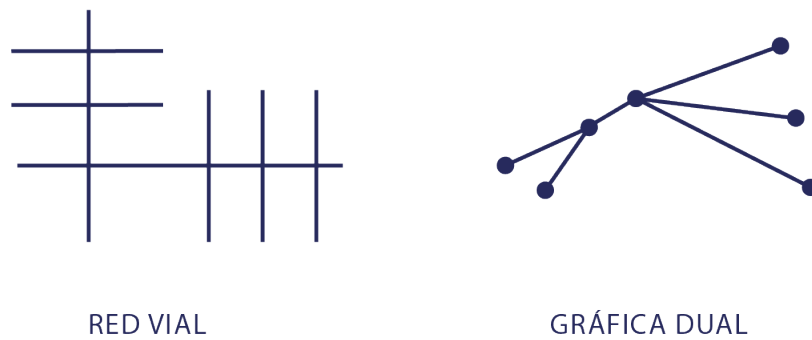


Figura 2.9: Red con avenidas principales y su gráfica dual: una gráfica de árbol

En el caso de un ordenamiento de calles en forma de red de Bethe, la gráfica dual tiene la siguiente forma:

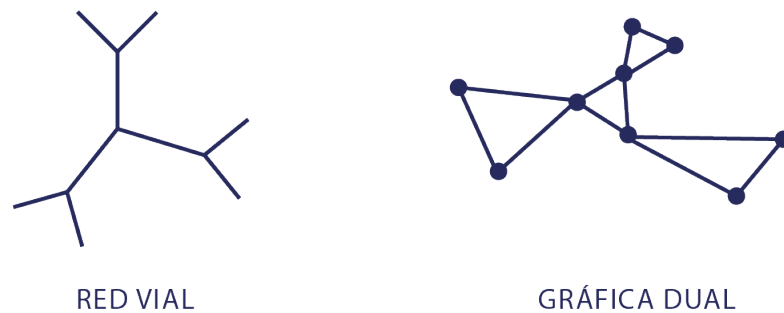


Figura 2.10: Red vial de Bethe y su gráfica dual

Con esto concluye la introducción de los conceptos de teoría de gráficas relevantes para este trabajo. En el siguiente capítulo se describe el tipo de gráficas que se utilizarán para analizar ciudades: las gráficas de intersección de vialidades.

Capítulo 3

Modelado del flujo en las vialidades

En un sistema complejo las interacciones no sólo afectan a los dos elementos vinculados directamente; sino que se transmiten de acuerdo a la red de conexiones entre elementos. El análisis de gráficas permite estudiar la trayectoria que siguen los flujos y con ello las dinámicas particulares de un sistema.

Dado que el flujo en una gráfica es resultado de la topología, analizar la trayectoria que sigue permite inferir información indirecta sobre la organización del sistema. En este trabajo la trayectoria de un caminante aleatorio dentro de una gráfica permite modelar el flujo de la red vial. Dicho flujo permite detectar comunidades en gráficas y con ello inferir indirectamente la estructura de las redes viales.

Este capítulo tiene como objetivos introducir el concepto de caminante aleatorio y explicar la manera en que estos modelan flujos dentro de las redes viales.

3.1. ¿Qué es un caminante aleatorio?

En 1905 Karl Pearson publicó un problema en el que utilizó por primera vez el termino **caminante aleatorio** para referirse a “un hombre que empieza en el punto O y camina l yardas en línea recta; [...] gira un ángulo cualquiera y camina otras l yardas en una segunda línea recta. Él repite este proceso n veces”. El problema pedía la probabilidad de que después de n pasos el caminante aleatorio estuviera a una distancia $r \pm \delta r$ de su punto de partida [38].

Los caminantes aleatorios son útiles para modelar procesos como la trayectoria de una partícula en movimiento browniano [39], la difusión intensificada [40] o el movimiento de microorganismos [41].

Retomando la descripción del caminante aleatorio, las posiciones más probables del caminante son cercanas a su origen. Dado que el caminante cambia de dirección alea-

3. MODELADO DEL FLUJO EN LAS VIALIDADES

toriamente, conforme aumenta la distancia r existen menos combinaciones de pasos capaces de separarse tal magnitud de su origen. Para deducir apropiadamente la probabilidad $P(|x_f| = r)$ de que la posición final del caminante x_f esté a una distancia r de su origen x_i , empezaremos con un caso simplificado del problema, en el que el caminante se mueve sobre una línea recta y sólo puede ir hacia adelante ($s_i = l$) o hacia atrás ($s_i = -l$).

La trayectoria del caminante aleatorio se puede describir mediante una sucesión S de n pasos, de modo que la posición del caminante después de n pasos corresponde a la suma de todos los elementos de la sucesión S :

$$x_f = \sum_{i=1}^n s_i \quad \text{con } s_i \in \{-l, +l\}. \quad (3.1)$$

Si la dirección de cada paso es independiente de las anteriores y el caminante elige imparcialmente cualquiera de las direcciones, la probabilidad de que dé un paso hacia adelante o atrás es la misma: $p(s_i = l) = p(s_i = -l) = 1/2$. La denominaremos p_s .

Respectivamente la probabilidad de que el caminante esté a una distancia r equivale a pedir que de los n pasos en la trayectoria del caminante existan $q = r/l$ pasos más hacia adelante.

Cada paso es una variable aleatoria que tiene dos posibles resultados, por lo tanto se puede modelar como un experimento de Bernoulli con probabilidad $p_s = 1/2$, mientras que el conjunto de posibles trayectorias que puede tomar el caminante aleatorio para llegar a una distancia r es equivalente a pedir que después de n pasos (n experimentos de Bernoulli) existan $q = r/l$ pasos extra hacia adelante que hacia atrás, dicho proceso se modela con una distribución binomial $B(n, p_s)$, cuya función de probabilidad es:

$$f(q) = \binom{n}{q} p_s^q (1 - p_s)^{n-q}, \quad (3.2)$$

al evaluar las variables para la secuencia de n pasos, la probabilidad de que el caminante esté a una distancia r es:

$$P(|x_f| = r) = f(q) = \frac{n!}{(q!(n-q)!)} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.3)$$

A pesar de que la variable x_f tiene una distribución binomial, cuando la probabilidad de los pasos es similar en ambas direcciones ($p_s \sim 0.5$) y el valor de n es suficientemente grande, ésta se puede aproximar con una distribución gaussiana centrada en x_i y con varianza $\sqrt{n}/2$:

$$P(|x_f| = r) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \exp^{-(q-x_i)^2/2n}. \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 generalizada a dos dimensiones y con posición inicial en el origen

$(\frac{2r}{n} \exp^{-(r)^2/n})$ es la respuesta que dio Rayleigh al problema de Pearson. Esta caracteriza la probabilidad de que el caminante esté a cierta distancia.

Ahora que se conoce qué es un caminante aleatorio, es necesario explicar cómo se mueve en las gráficas, la siguiente sección lo describe.

3.2. Caminantes aleatorios en gráficas

Cuando el caminante está restringido a moverse en una gráfica, éste se posiciona en los nodos y se mueve por los enlaces, de forma que las direcciones entre las que puede elegir aleatoriamente corresponden con los enlaces incidentes al nodo en que se posicionó. Todas las trayectorias del caminante son secuencias de vértices adyacentes, es decir, caminos en la gráfica.

Por ejemplo, si un caminante aleatorio inicia su trayectoria en el nodo h de la gráfica \mathcal{G} (presentada en la figura 2.1 del capítulo anterior), el vértice de su siguiente paso v_1 lo elegirá aleatoriamente entre los nodos adyacentes a su posición, que en este caso es la vecindad de h :

$$v_1 \in V(h) = \{g, j, i\}.$$

Si a todos los enlaces incidentes al vértice donde se posiciona el caminante se les asigna la misma probabilidad de ser elegidos por el caminante, después de suficientes iteraciones (pasos) dicha trayectoria empieza a presentar patrones en la frecuencia y la secuencia de los nodos que visita.

Por ejemplo, una vez que el camino del caminante aleatorio es suficientemente grande, la frecuencia con la que visita cada nodo es proporcional a su grado. Como ejemplo, en la figura 3.2 se presenta la frecuencia de visita de los vértices en la gráfica \mathcal{G} . El diagrama de frecuencias muestra claramente que los nodos c , f y h con grados 4, 3 y 3 respectivamente fueron los más visitados. De modo que las trayectorias suficientemente grandes contienen información de la red.

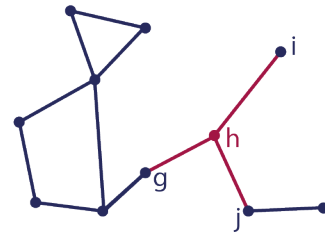


Figura 3.1: Nodos a los se puede mover un caminante posicionado en el vértice h de \mathcal{G} .

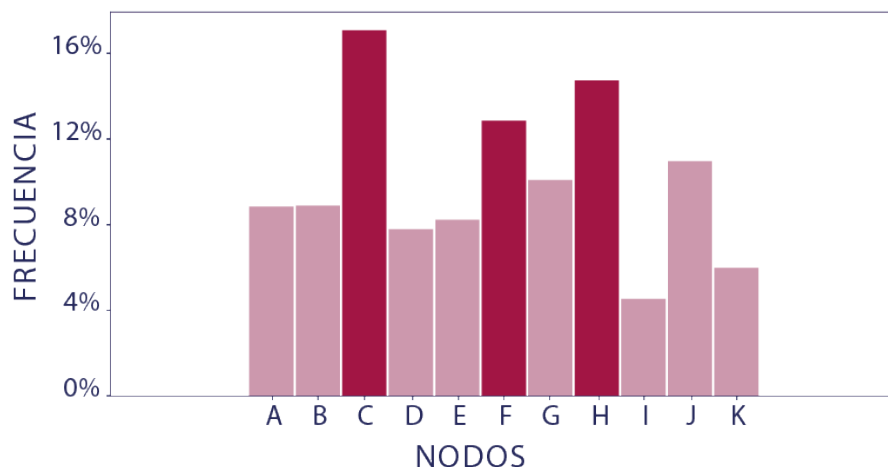


Figura 3.2: Frecuencia con la que es visitado cada nodo en la trayectoria de 2500 pasos de un caminante restringido al grafo \mathcal{G} .

3.3. El flujo vial como la trayectoria del caminante

Los caminos dentro de una gráfica asociada a la vialidades representan rutas reales¹ en la ciudad, de modo que la cantidad de caminos en la gráfica para llegar a un vértice está relacionada con la accesibilidad en la red vial para llegar a la calle asociada al vértice. Entre menos opciones de caminos existan para llegar, más restricciones existen en las secuencias de nodos que puede seguir el caminante aleatorio.

Consecuentemente, entre más opciones, menos restricciones. Por ello se espera que una ciudad bien conectada sea aquella con menos restricciones en los caminos que puede seguir un caminante aleatorio dentro de la gráfica.

Por ejemplo, por la configuración y las conexiones que hay en la gráfica \mathcal{G} , siempre que el caminante se encuentra posicionado en el nodo k está forzado a que su siguiente paso sea al nodo j -su única opción-; del mismo modo, todos los caminos que pasan por el nodo i continúan forzosamente hacia el nodo h . De forma que en cualquier camino \mathcal{K} en \mathcal{G} con las suficientes iteraciones existirán secuencias de la forma (j, k, j) y (h, i, h) , es decir:

$$\mathcal{K} = (\dots, j, k, j, \dots, h, i, h, \dots, h, i, h, \dots)$$

¹Es importante mencionar que no se tienen datos sobre el sentido de las calles, por lo tanto se asume que todas las calles pueden ser circuladas en ambos sentidos. Es probable que algunos de los caminos en la gráfica no sean rutas transitables en vehículo.

El grado de cada nodo y la forma en que esta conectado dentro del grafo determina la secuencia de nodos que aparecen en el camino del caminante y con ello indirectamente se puede determinar la estructura de la gráfica, pues la trayectoria del caminante es consecuencia de la topología de la gráfica.

Por lo tanto, de los patrones en la trayectoria del caminante aleatorio se obtiene de manera indirecta información sobre la estructura de red vial, en particular de las comunidades en que se divide una red de calles.

En el siguiente capítulo se explica la forma en que se eligen las comunidades más adecuadas con respecto a la estructura de los flujos que ha generado el caminante aleatorio.

Detección de comunidades en la red vial

En un sentido amplio la entropía permite cuantificar el número de restricciones en un sistema y por la generalidad de sus resultados el concepto se utiliza en diversas áreas de estudio. Desde la física, los cambios en la entropía de un sistema se pueden asociar con cambios en la presión, temperatura o tensión, por ser propiedades que restringen los grados de libertad de las partículas en un sistema. Desde la lingüística, la entropía de cada idioma se relaciona con características como la sintaxis y la gramática que restringen la forma en que se puede transmitir información. Mientras que desde la informática, la estructura de los datos (o bien, su grado de desorganización, su entropía) determina que tanto se pueden comprimir.

En este trabajo la entropía se utiliza para determinar las comunidades en que se divide una gráfica de acuerdo con la estructura de la trayectoria que siguen sus flujos. Para contextualizar adecuadamente se introducen algunos conceptos de termodinámica y física estadística, posteriormente se da la definición de entropía desde la física y el concepto general de entropía de la información. Por último se explica con detalle el funcionamiento de *Infomap*, el algoritmo que utiliza la entropía de la información para detectar comunidades en gráficas.

4.1. Introducción a la entropía: energía, calor y trabajo

Las transformaciones de la energía relacionadas con el calor y el trabajo se pueden describir equivalentemente desde dos teorías:

Termodinámica en este caso se hace una descripción macroscópica de las características del sistema, las transformaciones son el resultado de las interacciones entre el sistema y su entorno.

Física estadística en este caso se hace una descripción probabilística del sistema, las transformaciones son resultado del comportamiento en conjunto de las partículas

que conforman al sistema.

4.1.1. Termodinámica

La termodinámica tiene como objeto de estudio las transformaciones de la energía relacionadas con el calor y el trabajo en los **sistemas macroscópicos**, es decir conjuntos de más de 10^{23} partículas.

Para estudiar las transformaciones desde la termodinámica es necesario distinguir a los sistemas de acuerdo a sus fronteras, ya que éstas son las que determinan el tipo de interacciones con el entorno; en general los fenómenos que experimentamos a diario son de **sistemas abiertos**, cuyas fronteras permiten la transferencia de energía y materia, sin embargo resultan particularmente útiles los **sistemas cerrados** que sólo permiten el intercambio de energía, estos a su vez se subdividen de acuerdo al tipo de energía que intercambian: los **sistemas adiabáticos** sólo permiten el intercambio de energía mecánica e impiden la transferencia de energía térmica e inversamente los **sistemas diatérmicos** sólo permiten la transferencia de energía térmica e impiden la transferencia de energía mecánica.

La caracterización del estado de un sistema es mediante un conjunto de **variables termodinámicas o de estado** que representan atributos globales como la temperatura, el volumen o la presión. Las variables son medidas cuando el sistema está en equilibrio ¹ y se agrupan en dos categorías: aquellas proporcionales al tamaño o masa del sistema, como la longitud, el volumen, la polarización, la magnetización o el número de partículas, son llamadas **variables extensivas**, mientras que las variables independientes de las dimensiones y la masa, como la tensión, la presión, la temperatura, el campo eléctrico, el campo magnético o el potencial químico son **variables intensivas** [42].

El macroestado de un sistema es descrito por un conjunto de variables termodinámicas $\{A, B, C, D, \dots\}$ y la relación entre dichas variables es establecida por una **ecuación de estado**, la cual describe alguno de los parámetros dependientes B_i con base en los parámetros independientes $\{A_j\}_{j=1}^n$:

$$B_i = B_i(A_1, A_2, \dots, A_n). \quad (4.1)$$

Un ejemplo sería la ecuación que describe la presión de un gas ideal P con respecto a el número de partículas N , su volumen V y temperatura T :

$$P(T, V, N) = k_B \frac{NT}{V}. \quad (4.2)$$

¹Esto significa que no hay flujos atravesando el sistema y las variables permanecen constantes por un tiempo significativo.

Otro ejemplo, es la ecuación que propone el modelo de Guth-James para una liga, donde indica que la tensión F de un elástico depende por la constante de Boltzmann k_B , de la longitud L y la temperatura T :

$$F(L, T) = k_B T \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right), \quad (4.3)$$

esta expresión es la ecuación de estado de una liga porque describe a la tensión como un parámetro dependiente de dos parámetros independientes, la longitud y la temperatura [42, 43, 44].

La manera en que se relacionan las ecuaciones de estado es descrita por las leyes de la termodinámica:

- La **ley cero** establece la transitividad del equilibrio térmico y con ello, permite crear igualdades entre las ecuaciones que describen el estado de sistemas que han alcanzado el equilibrio después de haber intercambiado materia, energía o ambas.
- La **primera ley** describe las formas en que se puede modificar la energía interna de un sistema y establece que los sistemas aislados conservan la energía; a partir de ella se deriva que el calor y el trabajo son formas equivalentes de transferencia energía y por lo tanto pueden producir cambios de la misma magnitud en la energía interna ΔU ; ya sea mediante trabajo adiabático W_a o intercambios de calor en sistemas diatérmicos Q_d :

$$W_a = \Delta U = Q_d. \quad (4.4)$$

- La **segunda ley** establece la dirección en la que se transfiere el calor así como el hecho de que los procesos termodinámicos reales no pueden tener una eficiencia del 100 %. En consecuencia la transferencia de trabajo, calor o ambos requiere que parte de la energía se disipe, dicha energía es cuantificada mediante la variable llamada entropía S .
- Por último la **tercera ley** establece cómo se comportan los sistemas termodinámicos cuando su temperatura se acerca al cero absoluto (-273 °C), un límite teórico que ningún cuerpo puede alcanzar. Una de las consecuencias de esta ley es que la energía disipada por los sistemas (la entropía) disminuye conforme disminuyen su temperatura.

La descripción fenomenológica que ofrece la termodinámica consiste en describir las variaciones de las variables macroscópicas en el sistema, cómo afectan a la ecuación de

estado y su evolución de acuerdo a las leyes de la termodinámica.

Si se desea profundizar más sobre termodinámica puede consultar [42, 45, 46].

4.1.2. Física estadística

La dinámica de las partículas que constituyen a los sistemas termodinámicos se puede describir por completo mediante las teorías de mecánica clásica y cuántica, lo cual implica que se podría dar una descripción detallada de cualquier sistema. Sin embargo es complicado trabajar un conjunto de $\sim 10^{23}$ ecuaciones asociado a las partículas del sistema. Como solución la física estadística propone estudiar el sistema desde la teoría de probabilidad como un conjunto de microestados [44].

Las variables termodinámicas de un sistema se pueden asociar con estadísticos del conjunto de partículas. Por ejemplo, retomando el sistema conformado por un elástico (descrito por la ecuación de estado 4.3), la tensión es una variable macroscópica del sistema, y es igual a la fuerza promedio que perciben las partículas del elástico.

Los conjuntos de partículas utilizados para describir procesos desde la física estadística dependen de las variables macroscópicas constantes en el sistema:

El **ensamble microcanónico** permite describir sistemas aislados de acuerdo a su energía interna E y las coordenadas generalizadas \mathbf{x} . En dicho conjunto la evolución de los microestados μ está determinada por su hamiltoniano $\mathcal{H}(\mu) = E$, de modo que la energía interna es la única restricción del sistema. Cada microestado es un evento independiente y la distribución de probabilidad del ensamble se define mediante la siguiente ecuación:

$$p_{(E,\mathbf{x})}(\mu) = \frac{1}{\Omega(E, \mathbf{x})} \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{H}(\mu) = E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (4.5)$$

El **ensamble canónico** permite trabajar con sistemas donde la temperatura T es una de sus variables macroscópicas. La distribución de probabilidad del ensamble μ está dada por la ecuación:

$$p_{(T,\mathbf{x})}(\mu) = \frac{e^{-\mathcal{H}(\mu)/k_B T}}{\sum_{\{\mu\}} e^{-\mathcal{H}(\mu)/k_B T}}, \quad (4.6)$$

donde k_B refiere a la constante de Boltzmann.

El **ensamble gran canónico** es aquel que describe los estados macroscópicos con base en la temperatura T , el potencial químico u y sus respectivas coordenadas generalizadas \mathbf{x} . Su distribución de probabilidad es:

$$p_{(T,u,\mathbf{x})}(\mu) = \frac{e^{(uN(\mu)-\mathcal{H}(\mu))/k_B T}}{\sum_{\mu} e^{(uN(\mu)-\mathcal{H}(\mu))/k_B T}}, \quad (4.7)$$

donde $N(\mu)$ es el número de partículas como función de los microestados del sistema.

Los ensambles también siguen leyes de la termodinámica,

- La **ley zero** determina las condiciones de equilibrio entre dos ensambles que intercambian energía, por ejemplo si dos ensambles microcanónicos interactúan la energía total del sistema es igual a la suma de sus energías internas:

$$P_{(E_1+E_2, \mathbf{x})}(\mu_1 + \mu_2) = \frac{1}{\Omega(E_1 + E_2, x)}. \quad (4.8)$$

- La **primera ley** determina las formas en que se puede modificar la energía interna de un sistema: mediante intercambios de calor y trabajo. De modo que los cambios en la energía interna de un ensamble son de la forma:

$$dE = TdS + \mathbf{J}d\mathbf{x}. \quad (4.9)$$

- La **segunda ley** indica que el calor, como forma de energía, fluye de los cuerpos calientes a los cuerpos fríos.
- Para algunos casos la **tercera ley**, sobre el comportamiento de los sistemas a temperaturas bajas, refiere a las restricciones en los estados degenerados de un sistema cuántico a bajas temperaturas, sin embargo en sistemas como los vidrios esto no es aplicable.

De modo que la física estadística estudia a los sistemas manteniendo las leyes de la termodinámica, pero mediante distribuciones de probabilidad cuyos estadísticos coinciden con algunas de las variables macroscópicas del sistema.

Si se desea profundizar más sobre la física estadística puede consultar [44, 47].

4.2. Entropía

En un proceso real el sistema cede de manera espontánea parte de la energía y el calor que se le suministró. Esto ocurre porque los cambios en la energía interna del sistema crean perturbaciones que conllevan a que las partículas busquen un nuevo estado de equilibrio, para ello disipan energía mediante transferencias de masa, calor, carga o ímpetu. La **entropía** -transformación según su etimología griega- describe la energía disipada [44, 42].

Clausius propuso cuantificar la entropía S mediante el cambio en el calor dQ con respecto a la temperatura T del sistema:

$$S = \frac{dQ}{T} \quad (4.10)$$

y para los procesos irreversibles:

$$S \geq \frac{dQ}{T}. \quad (4.11)$$

Mientras que la entropía asociada a un ensamble microcanónico esta dada por:

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (4.12)$$

y respectivamente, la entropía asociada a cada partícula es:

$$\frac{S}{N} = \frac{k_B \ln g_N}{N}, \quad (4.13)$$

donde g_N se refiere a los estados degenerados.

La evolución natural de los sistemas macroscópicos y de los ensambles de partículas es hacia estados de equilibrio e implica un aumento en la entropía. De hecho, todos los procesos implican cambios en la entropía, como lo indica la segunda ley.

Por ejemplo, cuando se ejerce un diferencial de trabajo $dW = \mathbf{J}\delta\mathbf{x}$ en el sistema, la energía interna cambia a $E + \mathbf{J}\delta\mathbf{x}$ y respectivamente la entropía se modifica:

$$\begin{aligned} \delta S(E, \mathbf{x}) &= S(E + \mathbf{J}\delta\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - S(E, \mathbf{x}) \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial E} \mathbf{J} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

El grado de *orden* en un sistema es reflejo de sus grados de libertad. entre menos variables en la ecuación de estado sean constantes más entropía existe, porque la falta de restricciones permite que el sistema inicie procesos irreversibles donde se genera energía no compensada. Los incrementos en la entropía implican menos restricciones en la ecuación de estado así como en los microestados [42].

4.3. Entropía de la información

En 1948 Claude Elwood Shannon publicó *Una teoría matemática de la comunicación*, donde propone una forma de medir la estructura estadística de un mensaje, para ello analiza el proceso para transmitir un mensaje y cuantifica la información que dicho mensaje lleva.

La teoría de Shannon distingue entre tres tipos de canales para transmitir información: discretos, continuos y mixtos. Los canales discretos permiten la transmisión de información codificada mediante símbolos, como cualquier mensaje de texto. Por su parte los canales continuos sirven para transmitir señales análogas en las que puede haber variaciones infinitesimales, las antenas de radio transmiten este tipo de señales.

Mientras que los mixtos son una combinación de señales discretas y continuas.

La cantidad de información I que puede transmitir un sistema discreto depende del número de señales n de duración t que puede emitir la fuente:

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{t}, \quad (4.15)$$

de modo que la capacidad de la fuente es la primer cota para transmitir cualquier mensaje.

Dicha cota puede ser inferior en la medida que el mensaje esté estructurado. La frecuencia con al que aparecen los símbolos en un mensaje indica que existe una estructura en las secuencias de símbolos que conforman los mensajes.

Al momento de transmitir un mensaje se puede aprovechar la estructura en que se organiza su información para codificarlo, lo cual puede disminuir la cantidad de símbolos transmitidos por el canal y en consecuencia aumentar la capacidad de transmitir información.

La elección de cada símbolo en la construcción del mensaje depende de los símbolos elegidos previamente. Por ello la transmisión del mensaje se puede modelar mediante un proceso estocástico.

Consideremos un alfabeto de m distintos símbolos, cualquier mensaje de N caracteres transmitido por medio de dicho alfabeto será un conjunto discreto de elementos $\{x_i\}$ con frecuencias de aparición $\{p_i\}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. La probabilidad de ocurrencia de cada símbolo x_i en el mensaje de N caracteres es $p_i N$ y correspondientemente la probabilidad de ocurrencia de todo el mensaje es el producto de las probabilidades independientes para cada símbolo en el mensaje:

$$p = p_1^{p_1 N} p_2^{p_2 N} \dots p_r^{p_r N}. \quad (4.16)$$

En dicho mensaje cada símbolo tiene una probabilidad de $1/m$ de ser elegido, por lo tanto la cota máxima de información que puede contener el mensaje es $m \log_2 N$ (que corresponde al caso en que todos los símbolos del mensaje son aleatorios). Mientras que la cota mínima de información en el mensaje esta determinada por las probabilidades de aparición de cada símbolo:

$$H = \log(p) = \log(p_1^{p_1 N} p_2^{p_2 N} \dots p_r^{p_r N}) = N \sum_{i=1}^r p_i \log(p_i), \quad (4.17)$$

esta expresión cuantifica la información contenida en un mensaje, es decir, la **entropía de la información**. Cuando la base del logaritmo es 2, la entropía de la información

expresa la cantidad de símbolos por bit que hay en un mensaje.

Las probabilidades con las que aparece cada símbolo son los patrones en la estructura del mensaje que permiten comprimirlo. Esto significa que la definición de la entropía asociada a un conjunto de símbolos cuantifica tanto la cantidad de información como la estructura del conjunto. De modo que la ecuación 4.17 también determina la cota mínima de compresión de un mensaje.

Este trabajo utiliza un algoritmo llamado *Infomap* que basa su funcionamiento en comprimir información (la trayectoria de un caminante aleatorio) para detectar comunidades. La siguiente sección describe con detalle el proceso que sigue el algoritmo.

4.4. Entropía aplicada a la detección de comunidades

Infomap es un algoritmo propuesto en 2008 por Martin Rosvall y Carl Bergstrom. Se eligió para este trabajo porque detecta comunidades con base en los patrones que generan los flujos de una gráfica asociada a la red vial. Los patrones que forman las aristas de las gráficas describen parte de las dinámicas de movilidad en la ciudad. Además de ser un método fácil de implementar y cuyo rendimiento -en gráficas artificiales que simulan redes reales- se mantiene similar incluso con gráficas pesadas o dirigidas [48, 49, 50].

La operación de Infomap está basada en la dualidad entre comprimir datos y detectar patrones importantes o estructuras en esos datos. Por ello, para detectar comunidades necesita comprimir la descripción de los flujos en el grafo [49].

El algoritmo modela a un caminante aleatorio infinito, que en cada paso tiene una probabilidad $\tau = 0.15$ de transportarse a cualquier otro nodo de la gráfica. Posteriormente busca comprimir la información sobre la secuencia de nodos que sigue el caminante aleatorio. Para ello describe la trayectoria mediante una secuencia de claves separadas por espacios vacíos, cada clave representa un vértice o comunidad y se asigna con base en la frecuencia de visita del caminante aleatorio mediante el código de Huffman¹, lo cual implica que las claves cortas son asignadas a elementos muy visitados; y las largas a elementos poco visitados [48].

La mayor compresión de la trayectoria del caminante se obtiene al reutilizar claves cortas, sin embargo ello requiere que se distingan los nodos con claves iguales de alguna forma. El algoritmo propone que los vértices se dividan en subconjuntos -comunidades- y que cada una de estas comunidades reutilice las claves. Para distinguir a que nodo esta asociada cada clave, en la descripción de la trayectoria se incluyen dos claves entre

¹Un algoritmo usado en la compresión de datos para asignar claves de longitud variable a distintos elementos.

cada secuencia de nodos de la misma comunidad las cuales indican donde inicia y donde termina la descripción de vértices de cada comunidad.

La división del conjunto de vértices, propuesta por Infomap, se evalúa con el método **map equation**, que calcula el promedio de bits para describir uno de los pasos de la trayectoria infinita del caminante aleatorio. Dicho valor depende de dos cantidades: el promedio de bits asociado al movimiento entre comunidades y el promedio asociado al movimiento dentro de cada comunidad.

Para una gráfica de n nodos, dividida en m comunidades, el movimiento entre comunidades depende de la entropía del movimiento entre módulos:

$$H(Q) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{q_i}{\sum_{j=1}^m q_j} \log \left(\frac{q_i}{\sum_{j=1}^m q_j} \right) \right], \quad (4.18)$$

pesada por la suma de las probabilidades para salir de cualquier comunidad:

$$q = \sum_{i=1}^m q_i, \quad (4.19)$$

donde q_i corresponde a la probabilidad de que el caminante salga de la comunidad i .

Mientras que el movimiento dentro de las comunidades depende de la entropía del movimiento dentro de cada comunidad i :

$$H(P_i) = \frac{q_i}{q_i + \sum_{\beta \in i} p_\beta} \log \left(\frac{q_i}{q_i + \sum_{\beta \in i} p_\beta} \right) + \sum_{\alpha \in i} \left[\frac{p_\alpha}{q_i + \sum_{\beta \in i} p_\beta} \log \left(\frac{p_\alpha}{q_i + \sum_{\beta \in i} p_\beta} \right) \right], \quad (4.20)$$

pesada por la probabilidad p_α de que el caminante visite cualquiera de los nodos en la comunidad i o salga de ella q_i :

$$p_i = q_i + \sum_{\alpha \in i} p_\alpha. \quad (4.21)$$

De modo que el método para evaluar las mejoras en la compresión de la información por medio de particiones en la gráfica se describe por:

$$L(M) = qH(Q) + p_iH(P_i) \quad (4.22)$$

y mide el promedio de bits para describir un paso de la trayectoria infinita de un caminante aleatorio en una gráfica dividida de acuerdo a la partición M [48, 51].

Para implementar la detección de comunidades, Infomap evalúa la mejor partición del conjunto de vértices mediante el método map equation. Primero inicia calculando las frecuencias de visita de todos los nodos en la red y se asigna una comunidad a cada vértice, esto sería la primer partición de la red propuesta por Infomap M_0 . Se calcula la

longitud promedio de los pasos en la descripción de la trayectoria y con ello se establece la cota máxima para dicha longitud, que corresponde al caso en que cada nodo es una comunidad: $L(M_0)$. Para generar la siguiente partición M_1 se unen repetidamente el par de comunidades que genere la mayor disminución en la descripción de la trayectoria, y el proceso se repite con todos los pares de comunidades, hasta que las uniones de comunidades no logran disminuir el valor $L(M_1)$. Las siguientes particiones M_2, M_3, \dots se proponen a partir de disminuciones en la descripción de la trayectoria de una nueva gráfica que considera como nodos a las comunidades que se obtuvieron en la partición previa. El algoritmo finaliza cuando todos los nodos pertenecen a una sola comunidad o cualquier unión de comunidades aumente la longitud promedio de la descripción de los pasos del caminante [52, 48].

Cabe mencionar que el algoritmo describe un proceso estocástico, por ello las particiones pueden diferir cada vez que se ejecuta *Infomap*, con el fin de disminuir las probabilidades de mostrar una partición correspondiente a un mínimo local, el algoritmo cuenta con un parámetro que indica las repeticiones que se llevarán a cabo al detectar comunidades [48].

Así que la detección de comunidades esta basada en la capacidad de comprimir la descripción de los flujos en una gráfica, es gracias al concepto de entropía de la información que es posible comparar las distintas particiones del conjunto de nodos y determinar cuál es la que más se aproxima a la estructura generada por los flujos en la gráfica.

Recordando la última sección del capítulo anterior, la cantidad de restricciones en la trayectoria del caminante aleatorio mide la facilidad para moverse dentro de la red y por lo tanto también mide la cantidad de información que aportan los pasos de un caminante aleatorio: cuando hay muchas maneras de desplazarse, la cantidad de información (la entropía) que aporta cada paso es baja porque puedes llegar a cualquier lugar de muchas formas, es decir se repite la misma clave.

Discusión y resultados

El método propuesto para identificar la división creada por la topología de las calles se compone de tres etapas: construcción de las gráficas con la información de las redes viales, búsqueda de comunidades en la gráfica mediante el algoritmo *Infomap* y finalmente la interpretación de las subestructuras en la red vial original.

El algoritmo divide al conjunto de nodos en distintos niveles jerárquicos; donde la unión de comunidades de los niveles inferiores conforman las comunidades de los niveles superiores. Por ejemplo, las comunidades del nivel 5 son uniones de las comunidades en el nivel 4 y éstas a su vez son uniones de las comunidades en el nivel 3. Algunas comunidades pueden dividirse en más niveles que el resto de las comunidades en la gráfica, por ello en ocasiones el primer nivel se conforma de pocas comunidades que no agrupan todas las calles de la red.

Para probar el método se hicieron pruebas con redes ficticias y posteriormente para las redes viales de tres ciudades en México. A continuación se presentan los resultados.

5.1. Redes ficticias

Se construyeron seis redes ficticias que simulan distintas ciudades o secciones de ellas:

- *Cuadrada*, compuesta de 50 calles horizontales y 50 verticales a manera de cuadrícula.
- *CuadradaDiag*, es la red cuadrada con dos calles extra, perpendiculares entre sí y que atraviesan diagonalmente la cuadrícula.
- *Monocalle* simula las calles en los conjuntos habitacionales, con una avenida principal intersectada por 99 calles secundarias paralelas entre sí.

5. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

- *Multicalle*, simula cuatro avenidas principales intersectadas por 24 calles secundarias.
- *Bethe*, en este acomodo las calles forman una red de Bethe ($z = 3$) con 100 vértices después de 4 iteraciones.
- *LibreEscala*, la organización de las calles en esta red es la más similar a como se organizan las calles en una ciudad, donde un número reducido de calles (las vías primarias) conectan con las calles colectoras y éstas a su vez conectan con la gran mayoría de calles en la ciudad (calles locales secundarias).
- *AleatoriaRadios*, se generó posicionando aleatoriamente las calles sobre una superficie cuadrada.

En la figura 5.1 se muestra una representación visual de las gráficas asociadas a cada una de las redes ficticias.

Las gráficas asociadas a las redes Cuadrada y CuadradaDiag son las estructuras con mayor densidad de aristas; en la red Cuadrada cada nodo tiene grado 50 y en la red CuadradaDiag tienen grado 52 salvo los nodos correspondientes a las diagonales de grado 101. Son redes homogéneas y altamente conectadas. Desde el punto de vista del caminante aleatorio la alta conectividad implica que para cada paso de su trayectoria tiene muchas opciones, y respectivamente existen muchos caminos para llegar al mismo punto.

Por otra parte, las gráficas asociadas a las redes Monocalle y Multicalle son árboles, lo cual significa que no tienen ciclos y por lo tanto existen menos maneras para desplazarse. De hecho entre cualesquiera dos calles existe un único camino.

Tanto en la red de Bethe como en la red LibreEscala existe una clara jerarquía en el acomodo de las calles; los caminos que se pueden seguir en estas redes utilizan las calles con distintas frecuencias. Las limitaciones en las formas en que se puede transitar la red generan patrones. Particularmente la red de Bethe es una gráfica de árbol y por lo tanto su estructura impone una única forma de desplazarse entre cualesquiera dos nodos.

Por último, en la red AleatoriaRadios no existe una jerarquía definida, como en la red Cuadrada el caminante aleatorio tiene muchas opciones en cada paso, sin embargo no todos los nodos sean igual de accesibles.

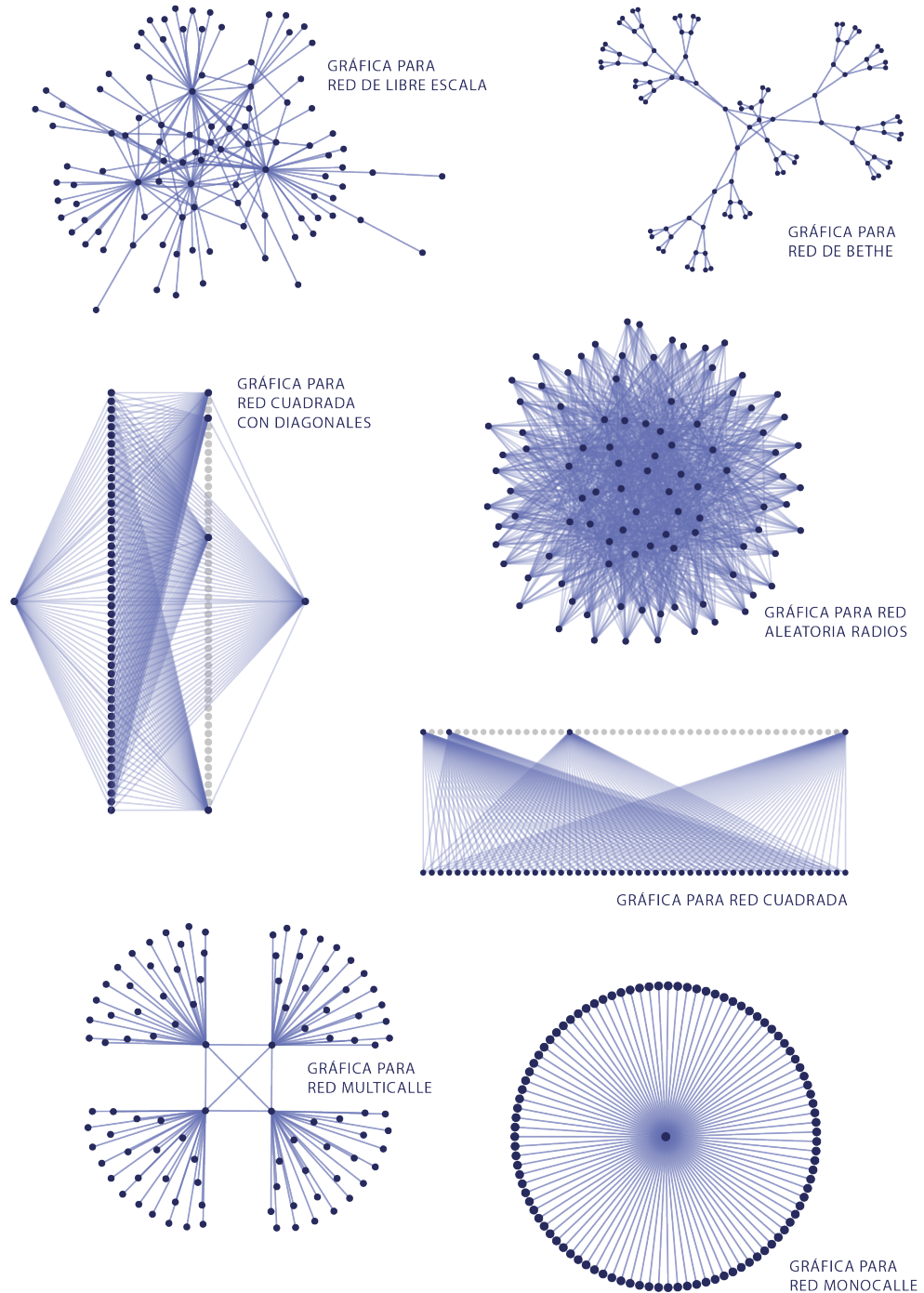


Figura 5.1: Grafos asociados a las redes ficticias. En el caso de las gráficas de las redes Cuadrada y CuadradaDiag se ocultaron los enlaces de los nodos grises con el fin de simplificar la representación visual, la gráfica Cuadrada es bipartita completa $K_{50,50}$ y la CuadradaDiag es tetrapartita completa $K_{1,50,50,1}$.

5.1.1. Las comunidades de las redes ficticias

Las comunidades de las redes ficticias fueron determinadas de acuerdo a las reducciones en la longitud promedio para describir cualquier paso del caminante aleatorio. Para facilitar la distinción de comunidades en las siguientes figuras se utilizan distintos colores, sin embargo aparte de la distinción entre comunidades el color no está asociado a ninguna característica o centralidad de las redes.

En el caso de las redes Cuadrada y CuadradaDiag el algoritmo de Infomap considera a todo el conjunto de vialidades como una sola comunidad porque cualquier calle es igual de accesible (salvo las dos calles diagonales que tienen el doble de conexiones porque intersectan a todas las calles de la cuadrícula), esto es reflejo de su homogeneidad y alta conectividad entre elementos.

De modo que en redes tan homogéneas como Cuadrada y CuadradaDiag, sólo hay una comunidad que agrupa todas las calles, como se puede ver en la siguiente figura:

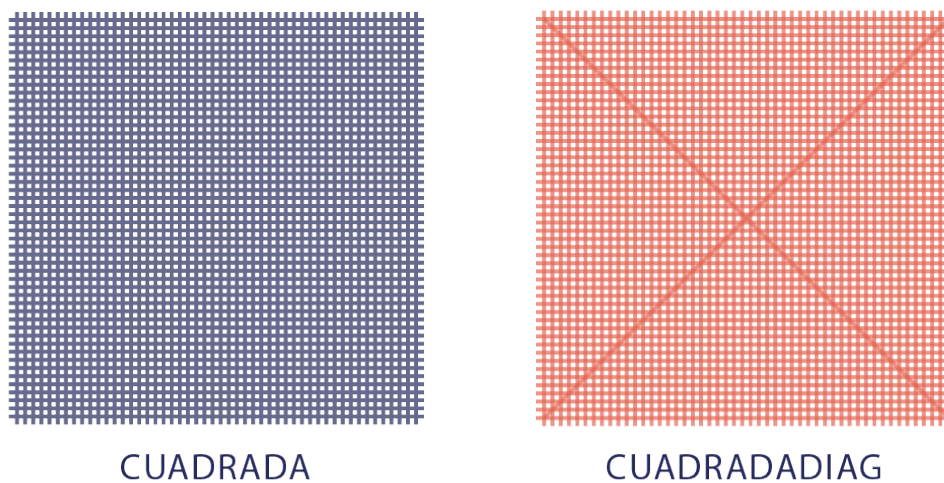


Figura 5.2: La única comunidad de las redes Cuadrada y CuadradaDiag.

En la red Monocalle existe una única avenida principal que conecta a todas las calles, esto crea una dinámica particular; todos los caminos de longitud mínima dentro de la red son sucesiones de dos (cuando el camino es entre la avenida principal y alguna otra calle) o tres vértices (cuando el camino es entre dos calles). Esto significa que no hay una mejor comprensión para la trayectoria del caminante, no hay zonas en las que el caminante tarde más en desplazarse o zonas bien interconectadas, toda la red es una única comunidad.

En el caso de la red Multicalle las comunidades preservan la división entre las distintas avenidas principales de la red, lo cual es consistente con el hecho de que cada conjunto de calles con su avenida principal es una comunidad, como se muestra a continuación:

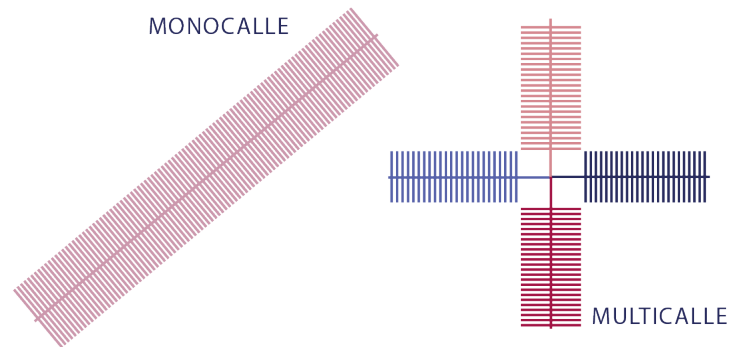


Figura 5.3: Comunidades de las redes Monocalle y Multicalle

Por su parte, la división de red de Bethe es la primera que cuenta con varios niveles. Al ser un árbol los nodos más externos en la red son los que tienen las mayores distancias mínimas, ya que suelen existir pocos caminos para dichos vértices, lo cual se ve reflejado en las comunidades del nivel 1.

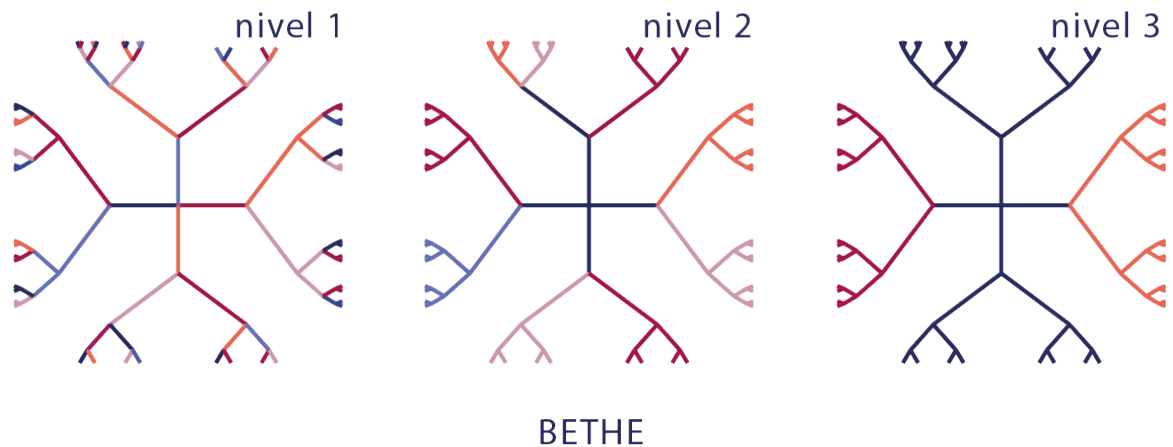


Figura 5.4: Comunidades en la red de Bethe.

Como imagen de la red de libre escala, se presenta su gráfica donde los nodos (que representan las calles de la red vial) fueron coloreados de acuerdo a la comunidad a la que pertenecen y su tamaño corresponde a su grado.

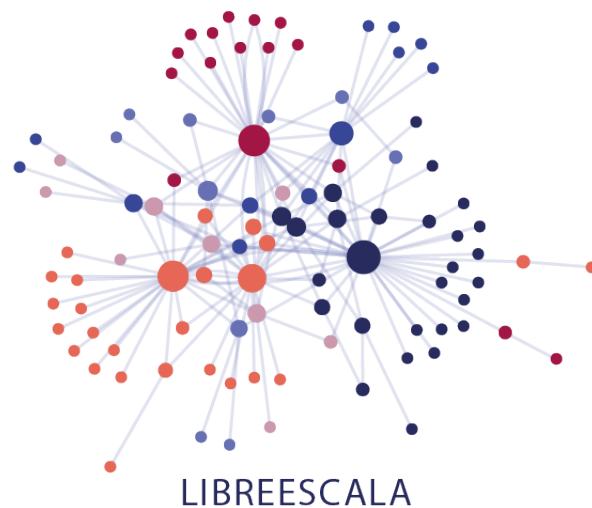


Figura 5.5: Comunidades en la gráfica de LibreEscala.

Como se puede ver en la figura 5.5, las comunidades coinciden con las vecindades de los nodos de grado más alto en la red.

Por último, la división de la red Aleatoria-Radios creó dos comunidades en un único nivel.

La comunidad más grande de la red Aleatoria-Radio es muy similar a la red Cuadrada, desde la perspectiva del caminante aleatorio, la gran cantidad de intersecciones creadas por la aleatoriedad en el posicionamiento de las calles propició un gran número de intersecciones lo cual favoreció la conectividad entre las calles, es posible moverse entre las calles con facilidad. Por el contrario, aunque la comunidad pequeña también es producto de aleatoriedad, la posición de las calles en esta comunidad creó pocos caminos, limitando la forma de conectarse entre las calles.

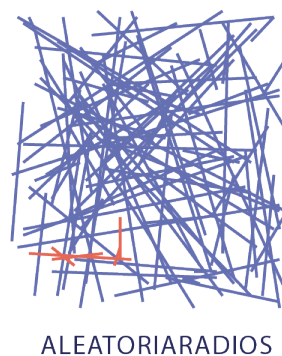


Figura 5.6: Comunidades de la red AleatoriaRadios

5.1.2. ¿Qué podemos decir de estas comunidades?

Se espera que las comunidades de calles con menos restricciones en la trayectoria del caminante coincidan con aquellas que tienen la mayor entropía, como se puede ver en la figura 5.7, las redes Cuadrada, CuadradaDiag así como la comunidad que agrupa casi todas las calles de la red AleatoriaRadios son las que ofrecen más opciones de camino y por lo tanto menos formas de *comprimir* la información de la trayectoria del caminante.

Por su parte la jerarquía de las redes de Bethe o de LibreEscala restringe la forma en que se puede mover un caminante y en consecuencia crea patrones en la trayectoria del caminante que permiten comprimir la información, por ello estos son los casos con menor entropía.

Por ejemplo, en la gráfica de LibreEscala (fig. 5.5) la única conexión de los nodos rojos (en la esquina superior izquierda de la figura) con el resto de la red es el nodo rojo de mayor grado, por lo tanto cualquier camino que llegue a dichos nodos exteriores forzosamente debe de pasar por el nodo principal de dicha comunidad, una posible compresión para esa comunidad es otorgarle el nombre con menor cantidad de caracteres al nodo de mayor grado porque sabemos que siempre aparecerá en los caminos de esta comunidad. Un caso similar ocurre en la red de Bethe, para acceder a las calles más externas es necesario pasar previamente por las calles principales de las que surgen estas calles externas.

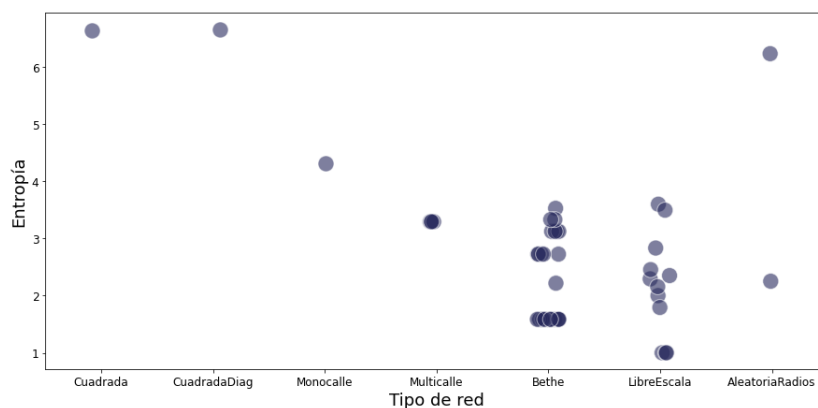


Figura 5.7: Entropía asociada a la trayectoria del caminante por comunidad

Considerar sólo la entropía asociada a una red puede llevar a clasificar incorrectamente las comunidades; es importante tener una comparación en la que no influya el número de aristas de cada comunidad para analizar las restricciones que impone la estructura de la red (la entropía) con base en las opciones que tiene el caminante aleatorio (el número de aristas). Por ello en la figura 5.8 se muestra la entropía por arista asociada a cada comunidad.

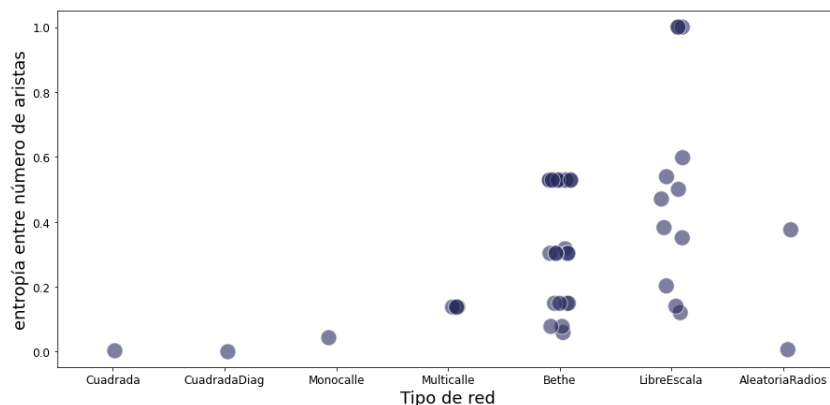


Figura 5.8: Entropía asociada a la trayectoria del caminante entre el número de aristas por comunidad.

Las redes Cuadrada y CuadradaDiag tienen la entropía asociada a las aristas más baja de todas las redes ficticias. Lo cual indica que la elección de calles intermedias no aporta información sobre el destino final del caminante; podría dirigirse a cualquier calle porque todas son igualmente accesibles desde cualquier punto.

Por otra parte la elección de calles en la red de LibreEscala aporta más información; las calles a las que se puede llegar más fácilmente el caminante aleatorio disminuyen conforme el caminante avanza en la red, por ello en esta red la entropía por aristas es mayor.

5.2. Ciudades

Para construir las gráficas asociadas a la red vial de las ciudades se utilizó la información vectorizada de las redes viales de Aguascalientes, Monterrey y la Ciudad de México generada en 2010 por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía en México.

En dicho conjunto de datos, cada calle es un conjunto de pares de coordenadas y se asumió que cuando dos calles distintas tienen par de coordenadas en común significa que dichas calles se intersectan entre sí. De modo que los vértices se determinaron de acuerdo a los conjuntos de coordenadas y las aristas corresponden a las coincidencias de coordenadas entre calles.

5.2.1. Las comunidades de Aguascalientes

La red vial de Aguascalientes se compone de 8 306 calles y 36 714 intersecciones en una superficie de 1 169 km^2 . Entre su infraestructura destacan dos circuitos viales concéntricos y un tercero más exterior que conecta las afueras del este de la ciudad. En general es una ciudad con bloques de calles ordenadas en cuadrículas, sin embargo las calles entre grupos de bloques distintos no siempre coinciden entre sí.

Dicha red tiene comunidades en dos niveles de agregación. Las comunidades del segundo nivel agrupan en promedio 23.9 calles y como se puede ver en los diagramas de cajas de la figura 5.9 la distribución del número de calles agrupadas en las comunidades del segundo nivel es centrada, con una mediana de 18 calles por comunidad, sólo tres comunidades tienen cien o más elementos. Destaca el hecho de que hay menos comunidades en el primer nivel, esto ocurre porque no todas las comunidades del segundo nivel permiten una mayor división, estas comunidades se comportan como la comunidad de la red Cuadrada. De forma que la distribución de calles por comunidad en el primer nivel está sesgada hacia los valores bajos, gran parte de las comunidades tienen una única calle y la mediana por comunidad es 6.6.

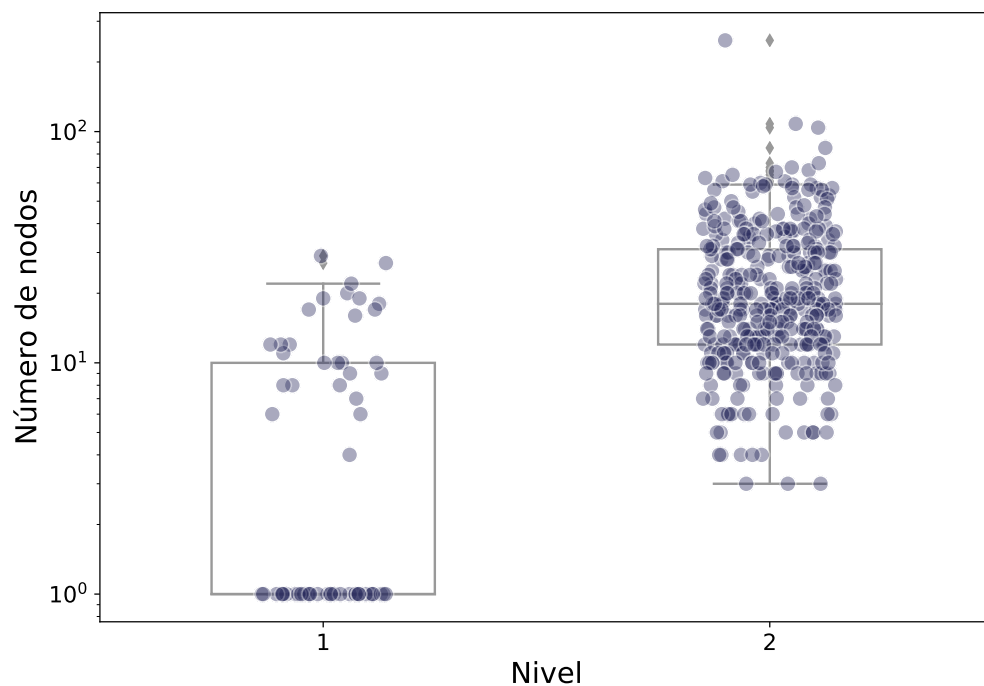


Figura 5.9: Número de calles por comunidad en cada nivel de división en la red vial de Aguascalientes.

Es fácil desplazarse dentro de Aguascalientes, en promedio tiene 4.4 intersecciones por calle, es la gráfica con mayor densidad de conexiones. Esto se ve reflejado en las comunidades del segundo nivel de agrupación, que separan a la ciudad en pequeños bloques donde el desplazamiento interno es igual de accesible para cualquier elemento de la comunidad. Las divisiones que aparecen en el primer nivel de agrupación son bastante pequeñas, lo cual refleja que las divisiones dentro de los bloques del segundo nivel son óptimas y la siguiente división posible para gran parte de las comunidades es separar cada una de las calles como comunidades de un solo elemento.

5.2.2. Las comunidades de Monterrey

La ciudad de Monterrey tiene 13 880 calles con 30 407 intersecciones en una superficie de 894 km^2 . Esta es la ciudad más chica en terminos de superficie y por su ubicación entre varias montañas, tiene una forma alargada que restringe la conectividad entre las zonas más externas de la ciudad. También es importante notar que la ciudad tiene una división natural: el río Catarina.

La red vial genera comunidades en seis niveles. El último nivel divide a la ciudad en cinco comunidades, cada una agrupando 2776.0 calles en promedio, mientras que las comunidades del quinto nivel agrupan 365.2 calles en promedio. Conforme disminuyen los niveles, las comunidades agrupan menos calles: 36.2, 13.0, 6.9 y 6.3 respectivamente para los niveles cuatro, tres, dos y uno. En general la distribución del número de calles agrupadas por comunidad es sesgada hacia los valores bajos, mientras que hay más dispersión en el número de calles agrupadas para las grandes comunidades.

A continuación se presentan, en orden descendente, cuatro mapas correspondientes a los niveles 6, 5, 4 y 3 de la partición obtenida mediante el algoritmo de Infomap. El mapa muestra el contorno del municipio de Monterrey así como sus delegaciones.



Figura 5.10: Comunidades de la red vial de Aguascalientes

5. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

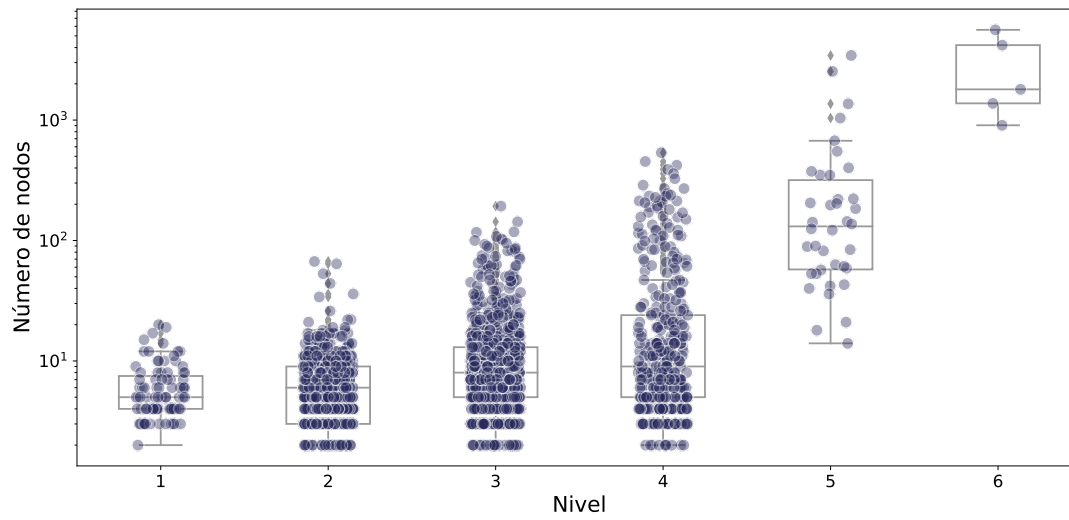


Figura 5.11: Comparación entre el número de calles que agrupan las comunidades de cada nivel. Cada diagrama de caja muestra la distribución del número de calles en las comunidades de cada uno de los niveles de la partición de la red vial de Monterrey.

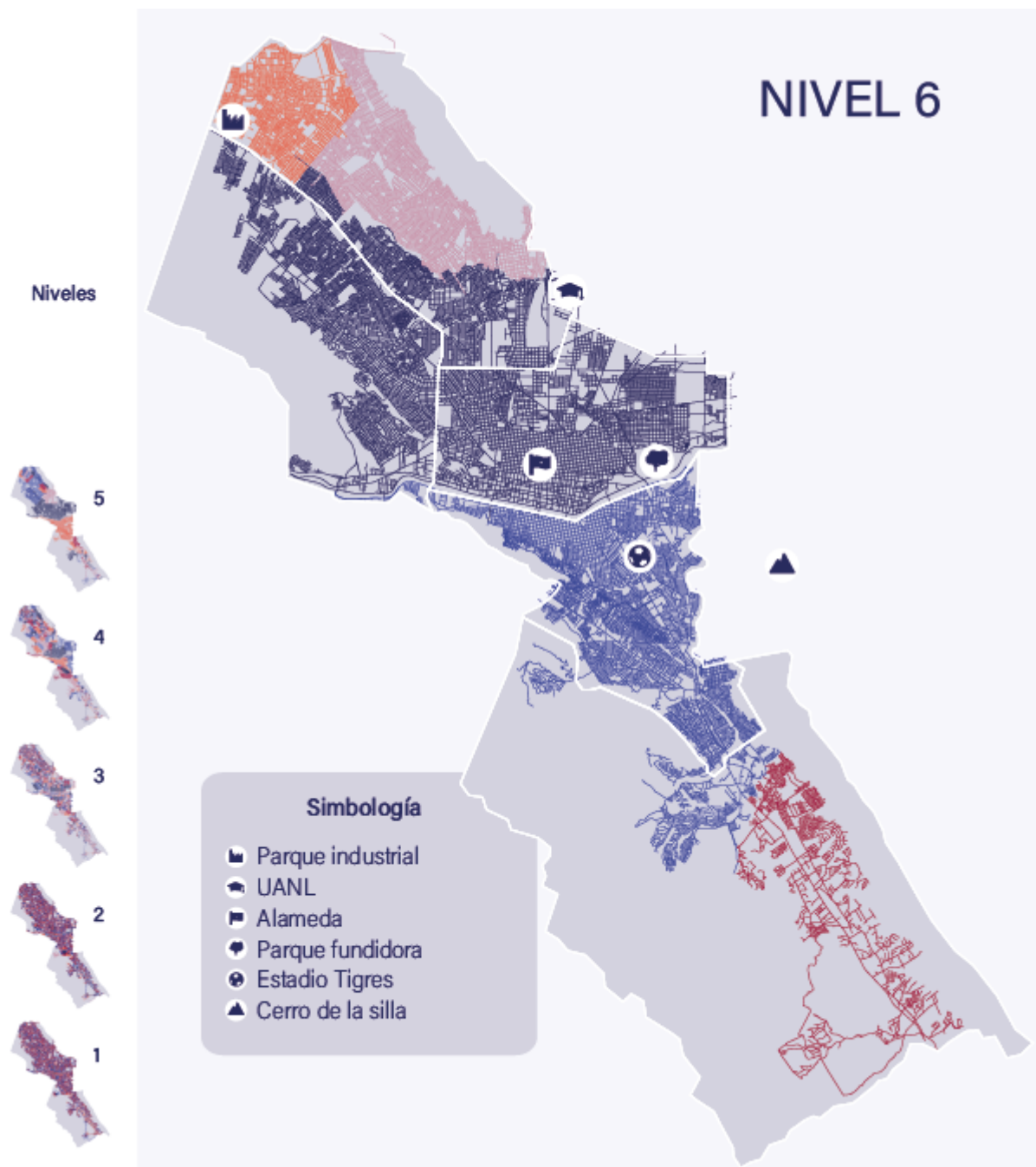


Figura 5.12: Comunidades del sexto nivel de la división de las vialidades de Monterrey.

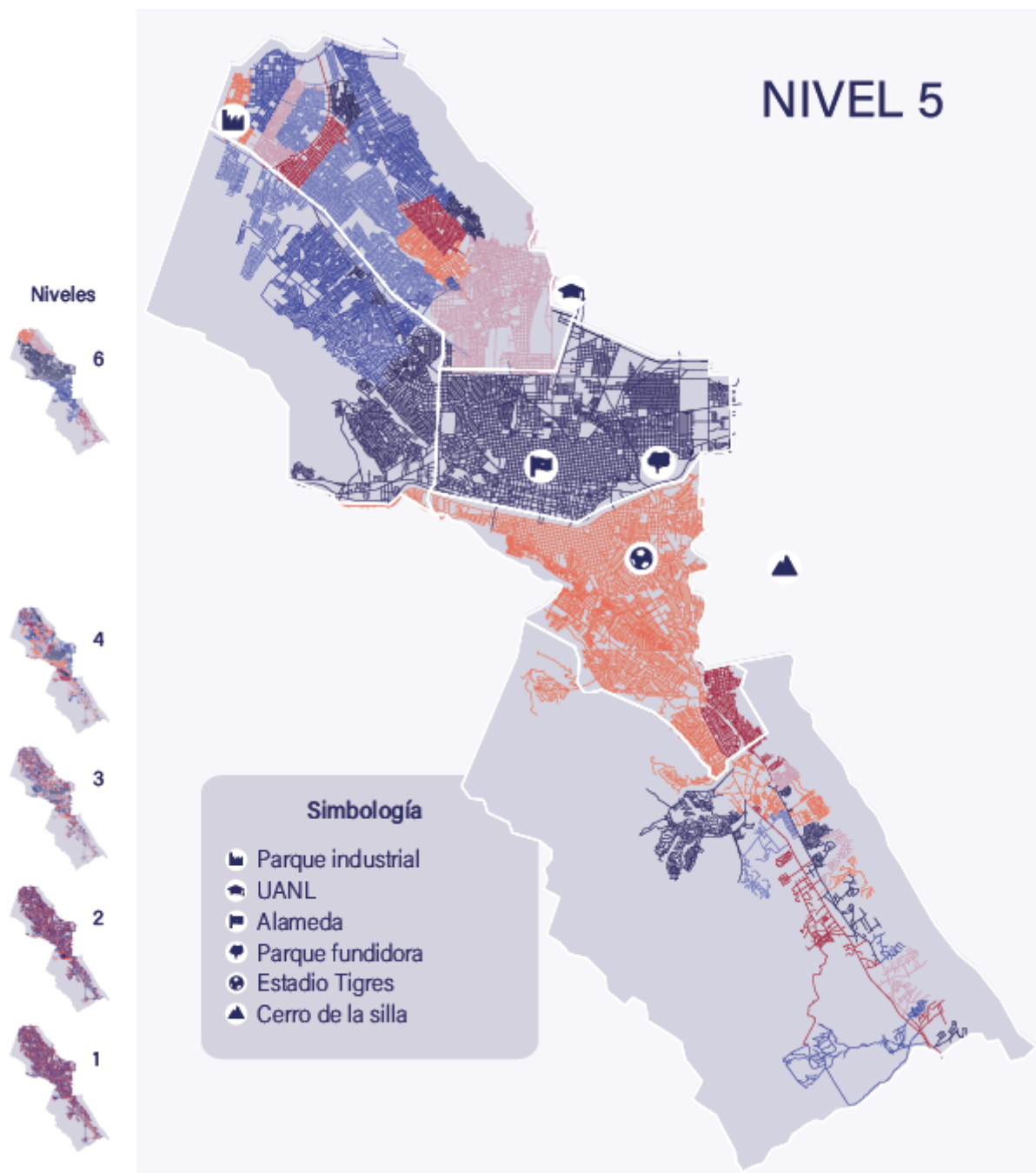


Figura 5.13: Comunidades del quinto nivel de la división de las vialidades de Monterrey.

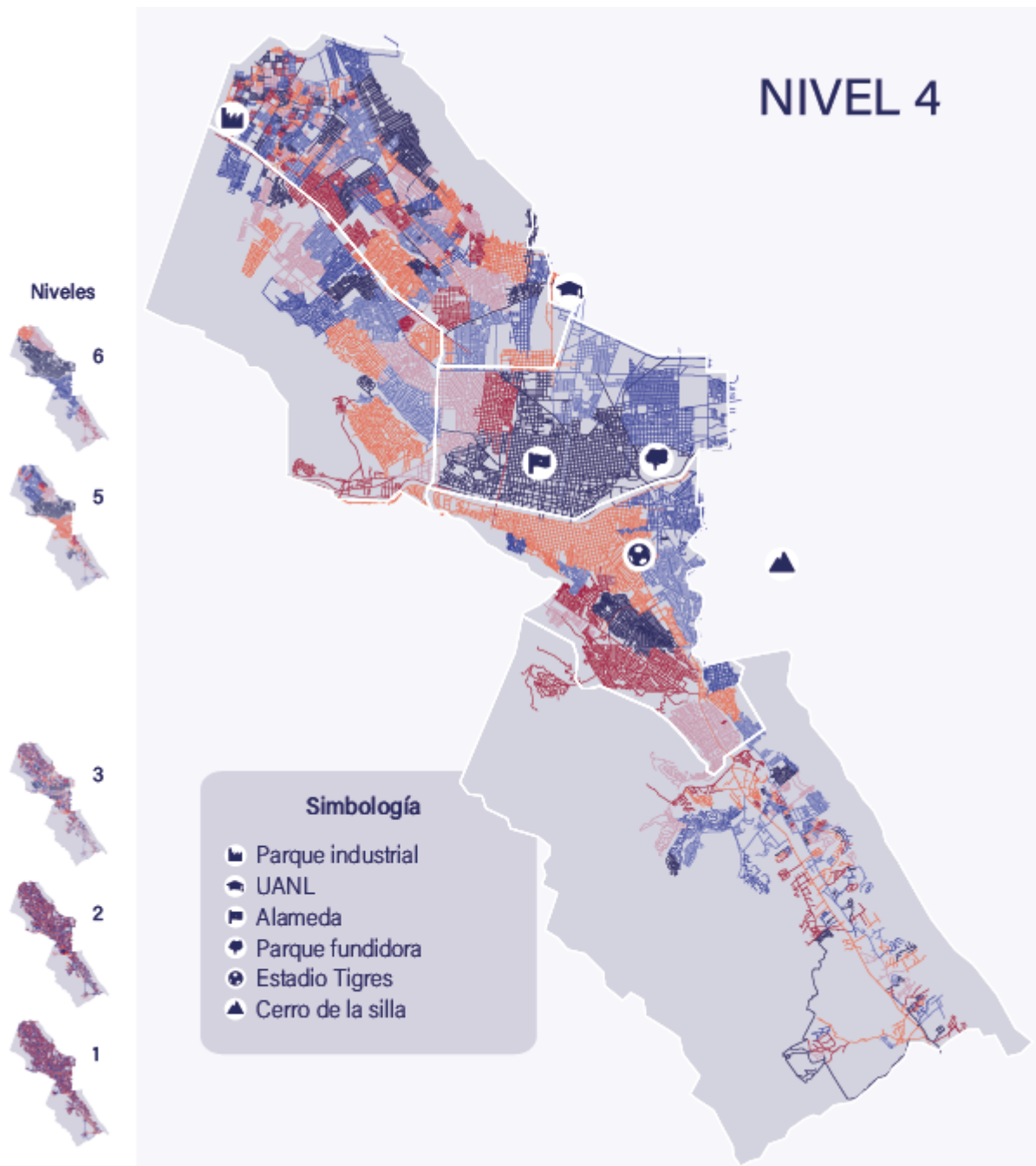


Figura 5.14: Comunidades del cuarto nivel de la división de las vialidades de Monterrey.

El sexto y último nivel de la gráfica de Monterrey divide a la red vial en cinco comunidades de áreas similares, éstas coinciden en cierta medida con las delegaciones en que se divide la ciudad, sin embargo es el único nivel (y ciudad) donde esto ocurre.

5. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

En el quinto nivel de la partición toda la región Sur de Monterrey, correspondiente a la delegación Huajuco, se fragmentó en pequeñas comunidades, cada una agrupando pocas calles, como también se había visto en el diagrama de la figura 5.11. La partición de la zona es una consecuencia del uso de suelo, la mayoría son áreas residenciales con callejones y cerradas, sólo unas cuantas calles secundarias conectan entre zonas residenciales. Las únicas dos calles primarias son la Carretera Nacional y la Avenida de la Luz (que en ciertos tramos se llama Antiguo Camino a Villa de Santiago y en otros Camino Real).

Dentro de las divisiones del cuarto nivel que determinó el algoritmo, algunas comunidades coinciden con colonias, tal es el caso de: Croc, Barrio San Luís, Barrio San Carlos y Barrio de la Industria.

Del sexto al cuarto nivel las comunidades más cercanas al río Catarina mantienen parte de las calles que agrupan, las cuales coinciden con áreas de la ciudad bien reticuladas donde todas las calles internas son igual de accesibles en términos de conectividad.

También es notorio que conforme la división de las comunidades es más específica, las comunidades más grandes son las más céntricas en la ciudad, lo cual podría indicar que en las periferias de la ciudad de Monterrey las vialidades son más orgánicas y con menos conectividad.

Las comunidades agrupan calles que tienen una alta conectividad entre sí, lo cual implica que el desplazamiento entre calles de la misma comunidad es sencillo, y salir de la comunidad es más difícil. Como ejemplo consideremos el caso de las comunidades del primer nivel arriba y abajo del río Catarina; ambas se componen de una gran red que facilita el desplazamiento entre cualesquiera dos puntos, sin embargo, a pesar de ser tan similares y cercanas se consideran como zonas separadas porque el río, como frontera natural, limita las calles que se intersectan entre ambas retículas. Con menos grados de libertad la entropía asociada a los caminantes aleatorios en la gráfica aumenta.

5.2.3. Las comunidades de la Ciudad de México

La red vial de la Ciudad de México tiene 82 737 calles creando 170 367 intersecciones, aunque esta ciudad es la que tiene la mayor cantidad de calles, es a su vez la que tiene menos densidad de intersecciones por calle: 2.1 intersecciones en promedio por calle. Cubre una superficie es de 1 485 km^2 y al pertenecer a una ciudad policéntrica es heterogénea; hay zonas muy ordenadas y cuadrículadas, secciones viejas de calles angostas, nuevas zonas con vialidades amplias y también muchas calles de formas orgánicas que se adaptan al relieve de la ciudad.

La red vial cuenta con un circuito interior y un anillo periférico que permiten cir-

cular por la ciudad, sin embargo los límites de la misma se extienden muy por fuera del anillo *periférico*. Adicionalmente tiene varias vialidades que permiten desplazarse de norte a sur, como Insurgentes y Tlalpan

Para introducir la división que se hizo de la red vial de la Ciudad de México, se comparan los niveles en cuanto al número de calles que agrupan sus comunidades:

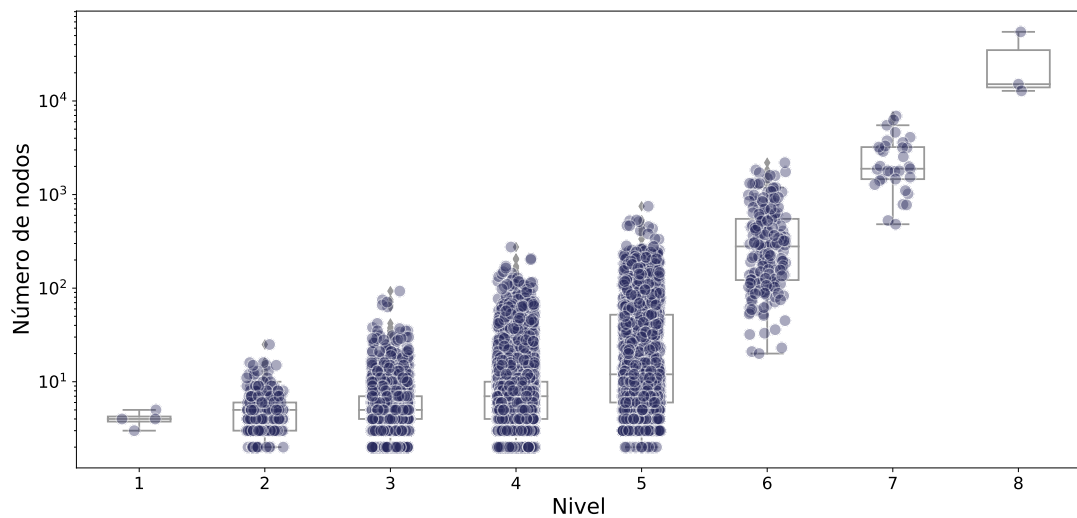


Figura 5.15: Comparación entre el número de calles que agrupan las comunidades de cada nivel. Cada diagrama de caja muestra la distribución del número de calles en las comunidades para cada uno de los niveles de la partición de la red vial de la Ciudad de México.

El octavo nivel se compone de tres comunidades, agrupando un promedio de 27 579 calles, el séptimo nivel agrupa 2 507 calles en promedio y el sexto nivel 411 calles, el quinto 39 y los niveles inferiores agrupan en promedio 9, 6, 5 y 4 respectivamente. Dada la poca variación en tamaño y la especificidad de las comunidades para los niveles inferiores, en las siguientes figuras sólo se presentan los mapas correspondientes a los niveles 8, 7, 6, y 5 de la partición dada por el algoritmo.

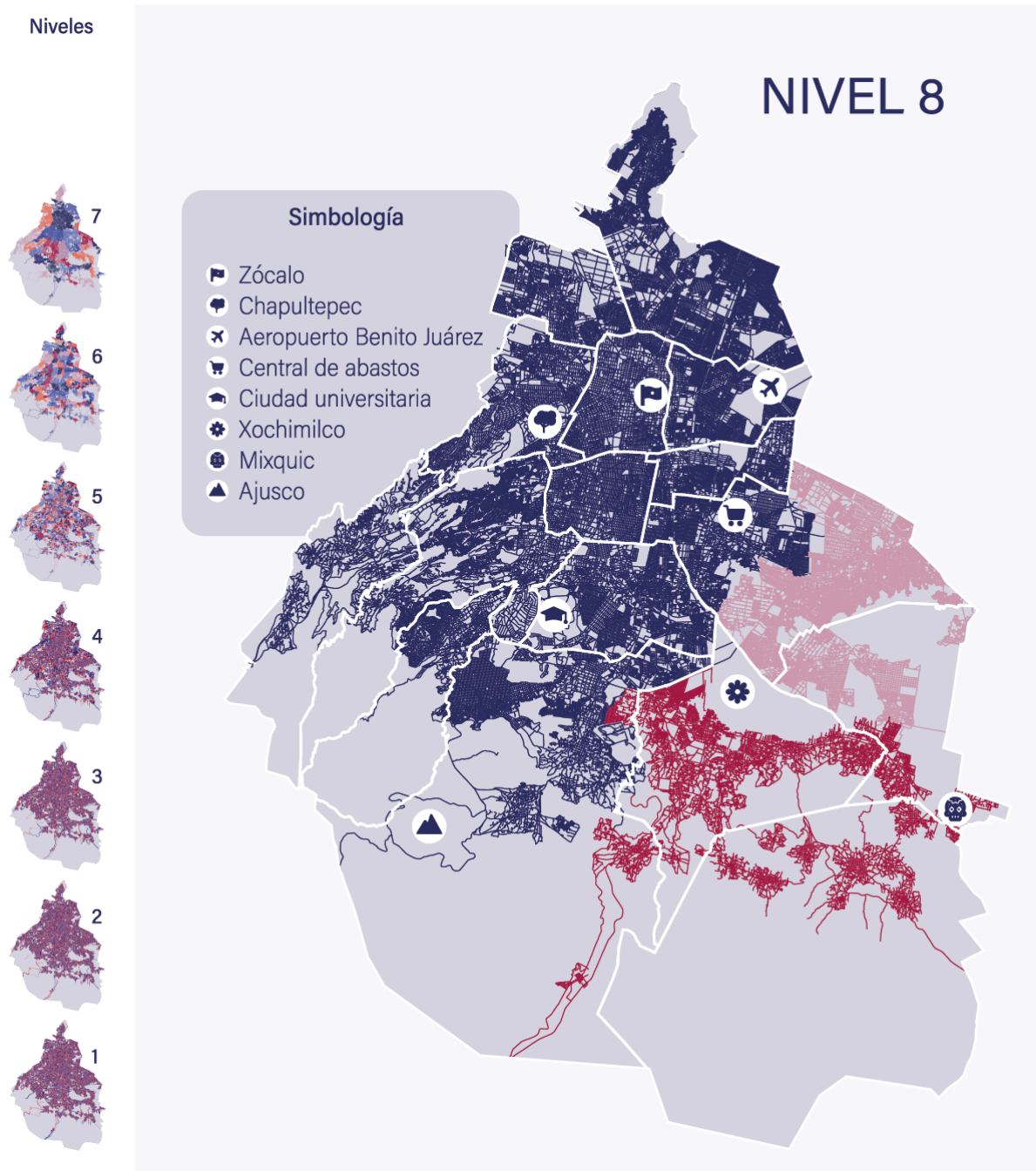


Figura 5.16: Comunidades del nivel 8 de la red vial de la Ciudad de México

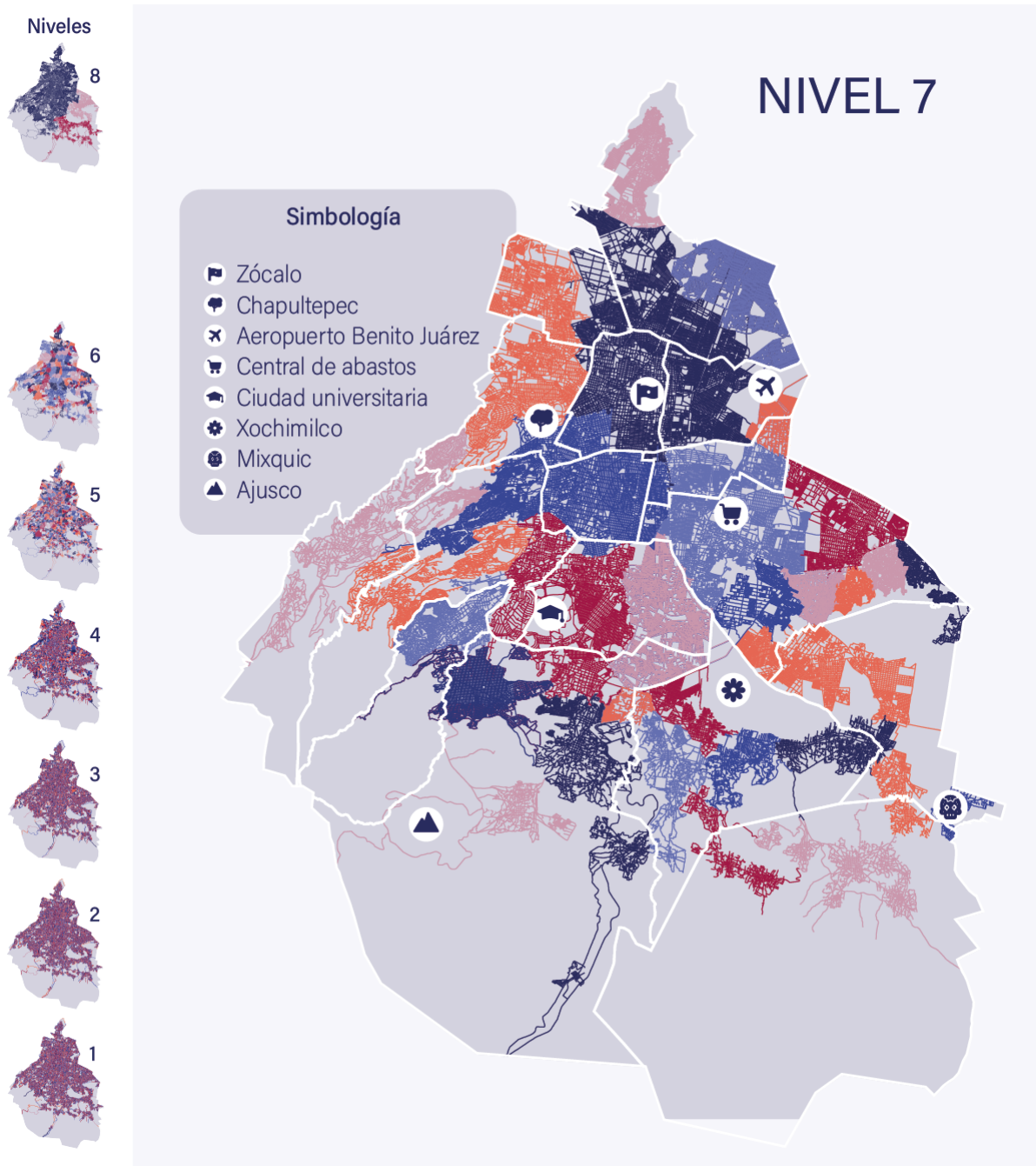


Figura 5.17: Comunidades del nivel 7 de la red vial de la Ciudad de México

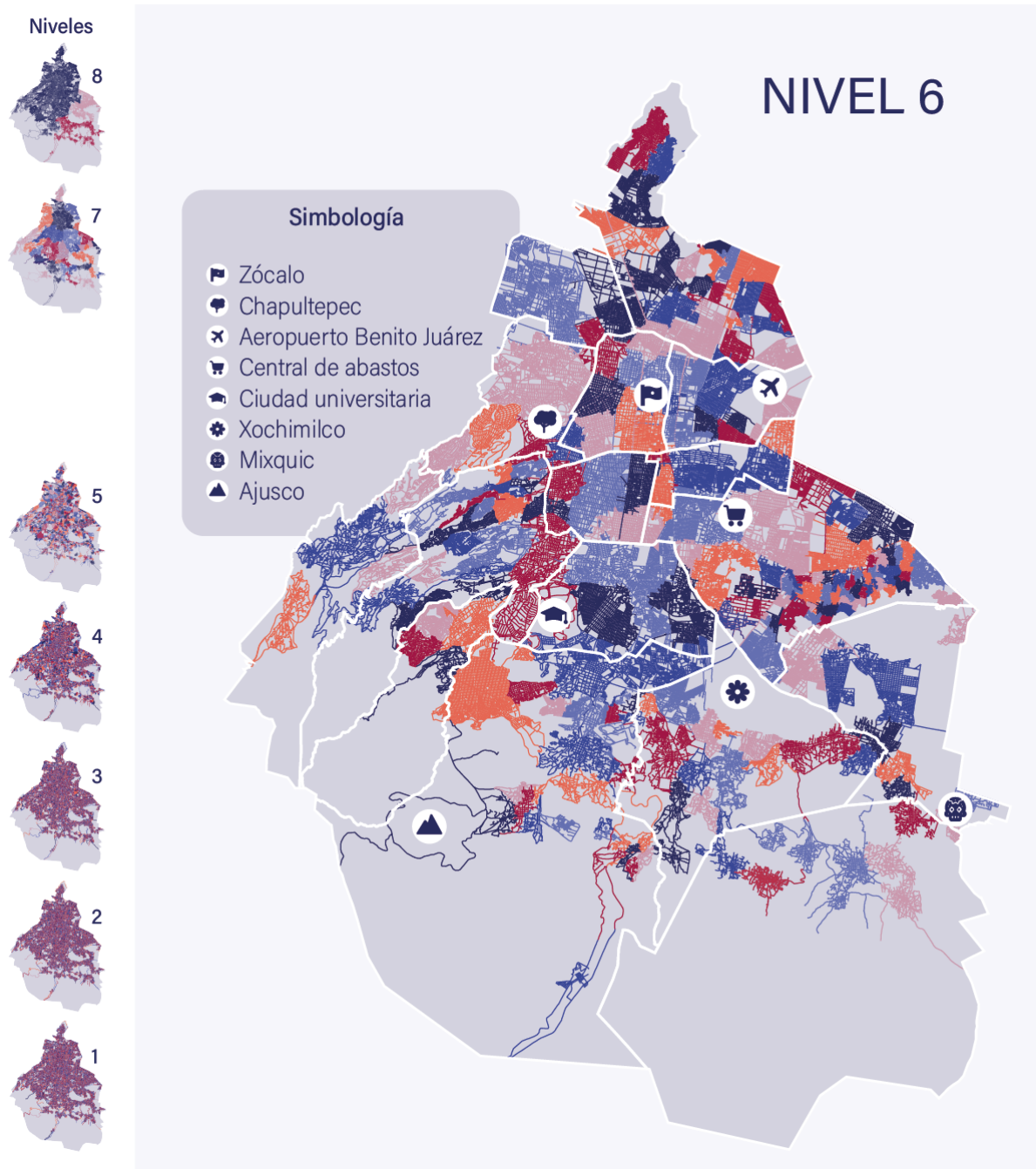


Figura 5.18: Comunidades del nivel 6 de la red vial de la Ciudad de México

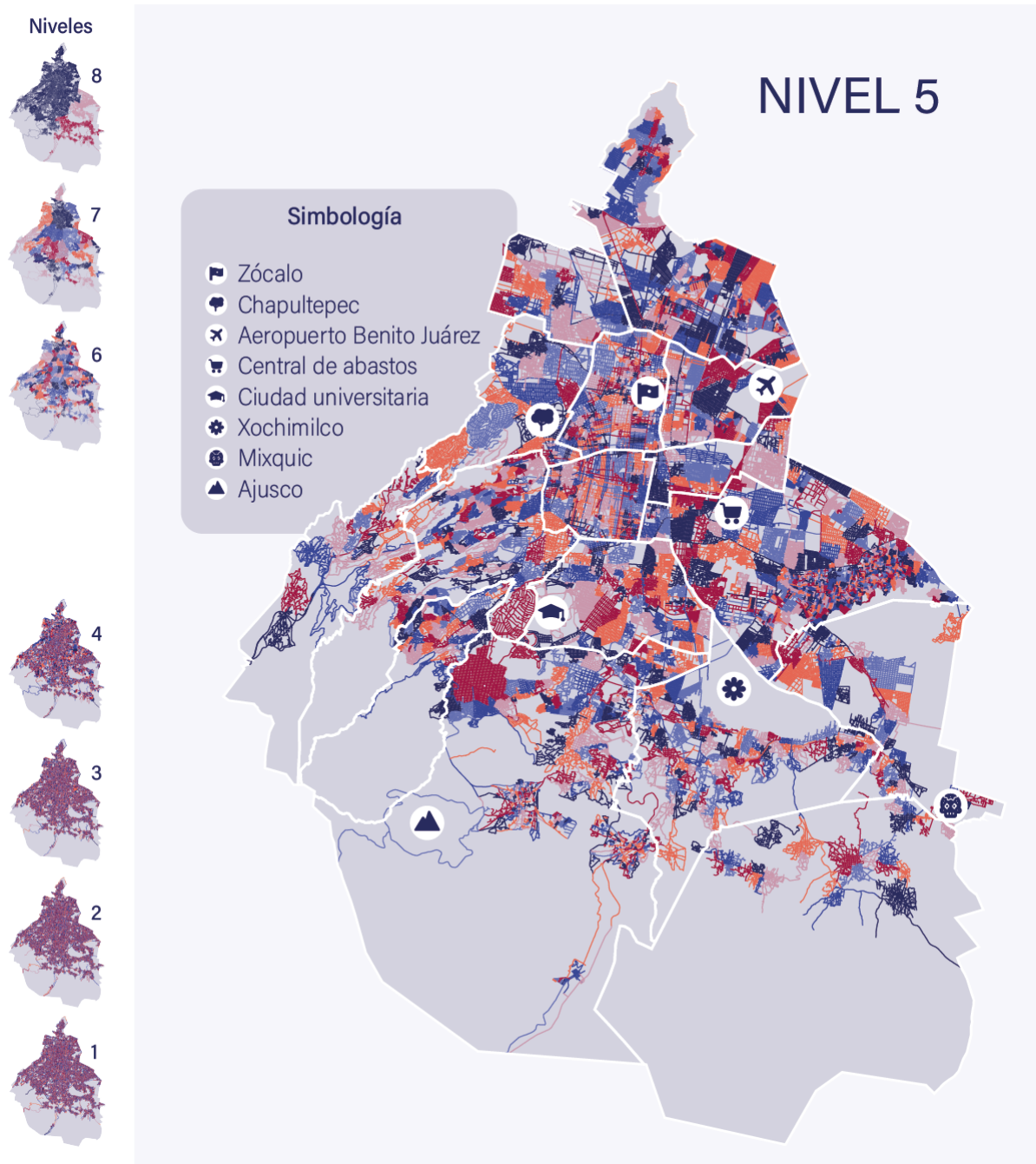


Figura 5.19: Comunidades del nivel 5 de la red vial de la Ciudad de México

5. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

El octavo nivel de la ciudad de México consiste en una comunidad cubriendo más de la mitad de la ciudad y otras dos regiones pequeñas: Iztapalapa y Xochimilco lo cual podría ser reflejo de que desde tiempos antiguos éstas eran comunidades separadas de Tenochtitlán. La estructura de la ciudad sigue preservando esa división; por ello el centro y el poniente de la ciudad tienen buena conectividad entre sí, mientras que Xochimilco y las periferias de Iztapalapa tienen sus dinámicas separadas. De hecho, parte del anillo periférico es lo que divide estas regiones del resto de la ciudad; la división preserva algunas de las fronteras de la ciudad.

El séptimo nivel crea una partición de la Ciudad de México mucho más homogénea, en particular destacan las comunidades en el sureste de la periferia de la ciudad, que coinciden con pequeños pueblos como San Miguel Topilejo y Parres el Guarda en la delegación de Tlalpan (cercanos a la frontera con Morelos); San Andrés Mixquic y San Nicolás Tetelco de Tláhuac (que colindan con el Estado de México). La detección de estas comunidades muestra que la orografía de la sierra de Ajusco-Chichinauhtzin (en las delegaciones de Tlalpan, Xochimilco y Milpa Alta) impone restricciones para la construcción de calles y por ende la forma de moverse de los habitantes, entre pueblos existen pocas calles y dentro del pueblo hay muchos caminos. Por ello cada pueblo es una comunidad independiente.

La división de la red vial en el sexto nivel coincide con algunas colonias como: Doctores, Obrera, Algarín, Viaducto Piedad, Moderna, Prado Churubusco y Cualhuacán. Mientras que en el quinto nivel las divisiones son dentro de las colonias.

En todos los niveles la división en comunidades constituye una partición de la ciudad con base en su conectividad. Las calles dentro de la comunidad se conectan mejor entre sí que con las calles de otras comunidades.

5.2.4. Entropía asociada a las comunidades

La entropía de un sistema es el logaritmo del número de configuraciones, en este caso el número de configuraciones máximo está asociado al número de calles n (nodos), por lo tanto la entropía máxima se puede describir como $S(n) \sim \log(n)$.

En la figura 5.20 se muestra la entropía de las comunidades como función del número de nodos y la entropía máxima $S(n)$. De acuerdo al diagrama de dispersión las comunidades con más de 100 nodos (calles) se aproximan a un valor constante de entropía. Esto se puede interpretar como el número máximo de configuraciones desordenadas de calles antes de que se imponga un orden, probablemente por la intersección entre poblados o la intervención por planeación urbana.

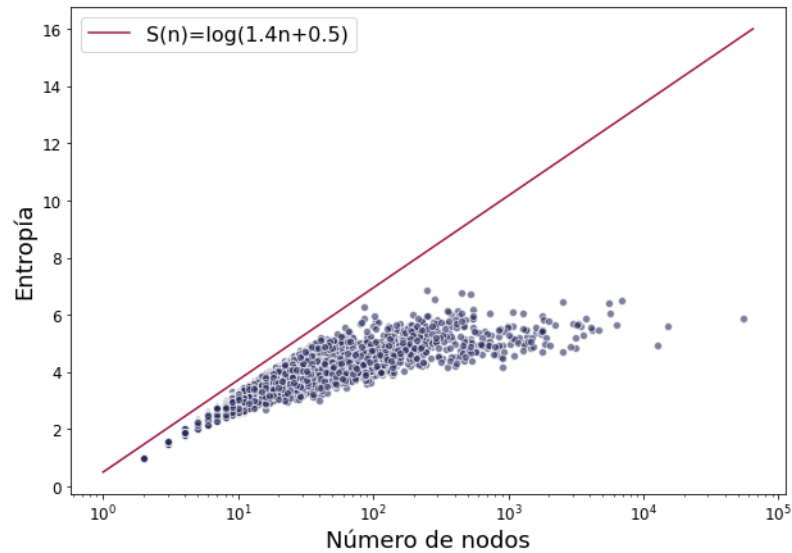


Figura 5.20: Entropía máxima S y entropía por comunidad respecto al número de nodos.

Aunque esta cantidad es útil, para comparar distintas comunidades es necesario utilizar una variable intensiva: la entropía entre el número de aristas. Sin embargo antes se muestra la relación entre aristas y nodos. En la figura 5.21 se muestra el número de nodos n y el número de aristas internas a (que unen nodos dentro de la comunidad). El diagrama de dispersión muestra que dichas variables se mantienen bajo una relación exponencial de la forma $a(n) = e^{1.2n-0.8}$.

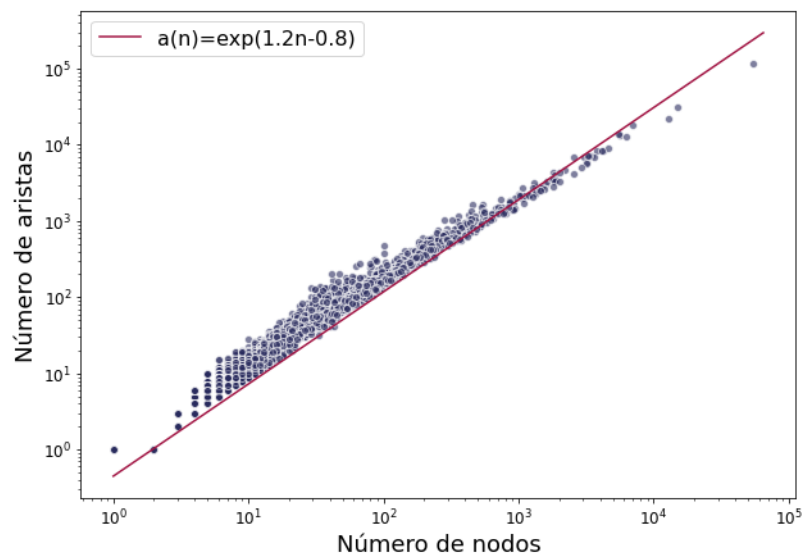


Figura 5.21: Aristas con respecto al número de nodos por comunidad.

5. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Para que la entropía no sea una variable dependiente de la cantidad de elementos en la red vial, en el siguiente diagrama de dispersión se muestra la entropía entre el número de aristas con respecto al número de nodos por comunidad, es decir la entropía tasada por el número de aristas (número de esquinas). En dicho caso la entropía máxima es de la forma $s(n) = S(n)/a(n) = \log(1.4n + 0.5)/\exp(1.2n - 0.8) \approx \exp(-1.2n + 0.8)$.

Como en realidad la entropía calculada tendía a una constante, el ajuste de la entropía máxima pesada por número de aristas que se obtuvo fue $s(n) = \exp(-n + 1.2)$ (ver figura 5.22), que es muy cercano a lo que se calculó analíticamente.

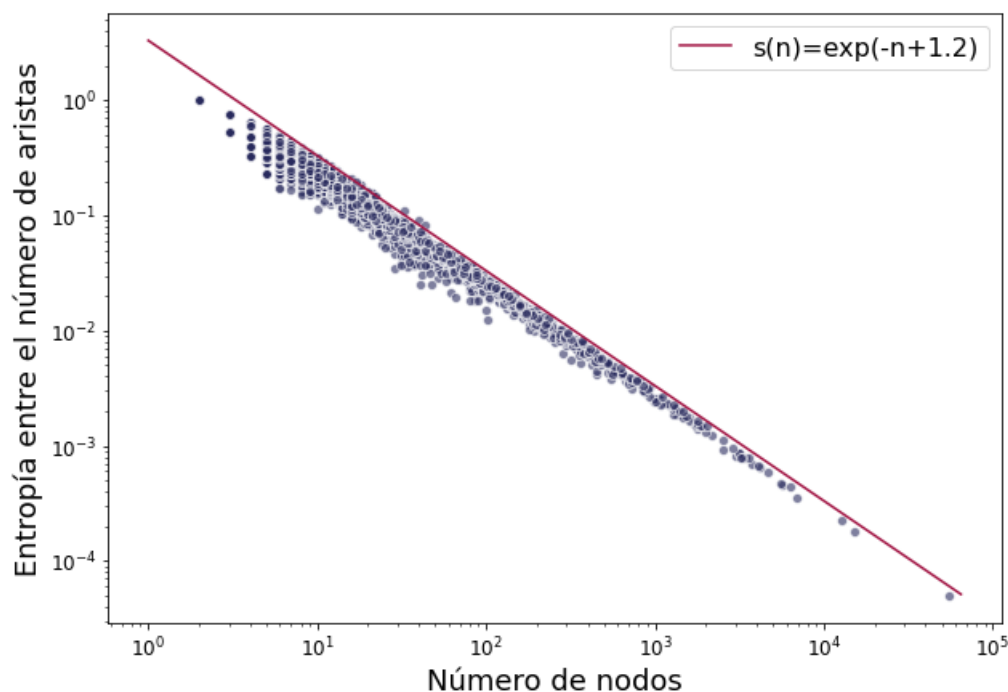


Figura 5.22: Entropía de las calles respecto al número e nodos en las comunidades de las ciudades

Recordando la figura 5.8, vemos que estructuras regulares como en las redes ficticias Cuadrada, CuadradaDiag, Monocalle y Multicalle, tienen una entropía por arista muy baja. Esto explica la figura 5.20, pues al crecer las comunidades tiende a imponerse un orden a la estructura de calles con el fin de mejorar la vialidad. De la figura 5.22 vemos que aunque la mayoría de las comunidades tienen una entropía cercana a la máxima, no todas llegan a dicho valor. Podemos entonces interpretar esta entropía por arista como una medida del orden en la estructura de calles y a su vez eso significa que entre menor entropía haya, mejor será la conectividad entre diferentes puntos.

Capítulo 6

Conclusión

Este trabajo propone un método para identificar las divisiones de una ciudad creadas por la topología de sus calles, el cual consiste en construir una gráfica con la información de la red vial, detectar comunidades en la gráfica y por último reinterpretar las comunidades en la red vial original.

La entropía desde el punto de vista físico -entendida como una medida del orden o desorden de un sistema- es congruente con la entropía medida en este trabajo: mayor entropía significa mayor desorden en las calles y menos opciones para desplazarse. Por lo tanto la forma de caracterizar la conectividad es mediante la entropía.

Cuando las comunidades son lo suficientemente grandes, la entropía asociada a ellas está acotada por un valor máximo independiente del número de nodos. Mientras que para comunidades pequeñas, la entropía crece como el logaritmo del número de nodos. La transición entre ambos regímenes sucede en comunidades de aproximadamente 100 calles. Una posible explicación es que la intersección entre poblados y la planeación urbana impone una estructura en la red vial. Esto quizás sea resultado de la autoorganización del sistema, sin embargo son necesarios otros trabajos desde el punto de vista social y de diseño o de sistemas complejos donde se explore con detenimiento este aspecto.

El número de aristas (calles) esta relacionada exponencialmente con el número de nodos (intersecciones), por ello la entropía tasada por el número de aristas se comporta de manera exponencial. Cabe mencionar que para comunidades ordenadas puede decaer más rápidamente.

La metodología propuesta funciona para ciudades de distintos tamaños siempre y cuando la disposición de la calles sea lo suficientemente heterogénea para que la entropía asociada a ellas sea distinta. El método deja de ser útil en ciudades muy ordenas como Aguascalientes que fue planificada desde su fundación y donde todas las calles tienen gran accesibilidad, lo cual hace que la entropía asociada a sus calles sea bastante ho-

6. CONCLUSIÓN

mogénea, y por ende toda la ciudad es clasificada como una gran comunidad.

Por ultimo, la división inferida por la conectividad de las calles preserva las fronteras físicas, lo cual tiene sentido porque dichas fronteras afectan directamente la forma en la cual se pueden desplazar los habitantes dentro de la red vial. El caso más claro es en la ciudad de Monterrey donde el río Catarina divide la ciudad, y por lo tanto separa las comunidades. Otro ejemplo se encuentra en la ciudad de México donde existen muchas comunidades pequeñas debido a la orografía rugosa.

Bibliografía

- [1] L. Mumford, *La ciudad en la historia*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Infinito, 1966. 1, 2, 3, 4
- [2] G. Sjoberg, “Origen y evolución de las ciudades,” in *Antología de sociología urbana* (M. Bassols, R. Donoso, A. Massolo, and A. Méndez, eds.), ch. I. La ciudad y su historia, pp. 11–27, México: UNAM, 1988. 2, 4
- [3] A. Cyphers, “Surgimiento y decadencia de san lorenzo, veracruz. del ojochi al nacaste,” *Arqueología Mexicana*, vol. 87, p. 56, 2007. 2
- [4] M. Pant and S. Funo, “The grid and modular measures in the town planning of mohenjodaro and kathmandu valley,” *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, vol. 4, no. 1, 2005. 2
- [5] M. B. Naveed, “Harappa: an overview of harappan architecture town planning.” <https://www.ancient.eu/article/695/harappa-an-overview-of-harappan-architecture--town/>. Visitado: 01-2021. 2
- [6] J. McIntosh, *The ancient Indus Valley*. California, Estados Unidos: ABC-CLIO, 2008. 2
- [7] Z. Tan, “Chinese expression of the urban landscape,” *Planum. The journal of Urbanism*, vol. 2, no. 27, 2013. 2
- [8] C. Chen, M. Sampson, Y. Tang, C. T. Y. Wong, and L. Yip, “Ancient city planning theory.” <https://beijingusp100.weebly.com/planning-theory.html>. Visitado: 01-2021. 2
- [9] E. Cassin, J. Bottéro, J. Vercoutter, R. Labat, H. de Meulenaere Werner Caskel, O. Eissfeldt, M. Finley, P. H. H. ten Cate, and F. K. Kienitz, *Historia Universal Siglo XXI: Los imperios del antiguo oriente*, vol. 4. España, Madrid: Siglo XXI, 1971. 3
- [10] P. Grimal, *Historia Universal Siglo XXI: El Helenismo y el auge de Roma*, vol. 6. España, Madrid: Siglo XXI, 1972. 3

BIBLIOGRAFÍA

- [11] J. L. Lezama, *Teoría Social, espacio y ciudad*. México: El Colegio de México, 2007. 3, 4
- [12] J. Lockhart, *Los nahuas después de la conquista*. Distrito Federal, México: Fondo de Cultura Económica, 1999. 3
- [13] L. Mumford, *La cité à travers l'histoire*. París, Francia: Seuil, 1964. 4
- [14] M. Barthélemy, *The structure and dynamics of cities: urban data analysis and theoretical modeling*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2016. 4, 5
- [15] R. N. Adams, *La red de la expansión humana*. Ciudad de México, México: Ediciones de la casa chata, 3 ed., 1978. 4
- [16] B. Hillier, *Space is the machine*. Londres, Reino Unido: University of Cambridge, 1996. 5
- [17] B. Hillier, "The genetic code for cities - is it simpler than we think?, keynote paper for the conference complexity theories of cities have come of age," (Países Bajos), 2009. 5
- [18] M. Fujita and H. Ogawa, "Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations.," *Regional Science and Urban Economics*, vol. 12, no. 2, p. 161, 1982. 5
- [19] Anas, Alex, Arnott, Richard, and K. A. Small, "Urban spatial structure," *Journal of Economic Literature*, 1998. 5
- [20] N. Baum-Snow, L. Brandt, J. V. Henderson, M. A. Turner, and Q. Zhang, "Roads, railroads, and decentralization of chinese cities," *The Review of Economics and Statistics*, vol. 99, no. 3, 2017. 6
- [21] S. K. C., S. Dhakal, A. Bigio, H. Blanco, G. C. Delgado, D. Dewar, L. Huang, A. Inaba, A. Kansal, S. Lwasa, J. E. McMahon, D. B. Muller, J. Murakam, H. Nagendra, and A. Ramaswami. 2014. 6
- [22] Y. Zheng, L. Capra, O. Wolfson, and H. Yang, "Urban computing: Concepts, methodologies, and applications," *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, vol. 5, no. 3, 2014. 6
- [23] I. N. de Estadística y Geografía, *Censo de población y vivienda (2010) Perfil sociodemográfico: Estados Unidos Mexicanos [Population and housing census (2010) Sociodemographic Profile: United Mexican States]*. 2010. 6
- [24] H. Ritchie and M. Roser, "Urbanization," 2018. 6

- [25] C. Roth, S. M. Kang, M. Batty, and M. Barthelemy, “Structure of urban movements: Polycentric activity and entangled hierarchical flows,” *PLoS ONE*, vol. 6, no. 1, 2011. 7
- [26] C. Ratti, S. Sobolevsky, F. Calabrese, C. Andris, J. Reades, M. Martino, R. Claxton, and S. H. Strogatz, “Redrawing the map of great britain from a network of human interactions,” *PLoS ONE*, vol. 5, no. 12, 2010. 7
- [27] S. Rinzivillo, S. Mainardi, F. Pezzoni, M. Coscia, D. Pedreschi, and F. Giannotti, “Discovering the geographical borders of human movility,” *Kunstl Intell*, vol. 26, pp. 253–260, 2012. 7
- [28] C. Zhong, S. Müller, X. Huang, M. Batty, and G. Schmitt, “Detecting the dynamics of urban structure through spatial network analysis,” *International Journal of Geographical Information Science*, 2014. 7
- [29] B. Hillier and S. Iida, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3693. Berlín, Alemania: Springer, 2005. 7
- [30] L. Sosa, *Diseño basado en sistemas complejos*. Monterrey, México: Labýrinthos editores, 2017. 7
- [31] A.-L. Barabási, *Network science*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2016. 9, 13
- [32] E. Ferrara, P. De Meo, S. Catanese, and G. Fiumara, “Detecting criminal organizations in mobile phone networks,” *Expert Systems with Applications*, vol. 41, 2014. 9
- [33] S. Luo, F. Morone, C. Sarraute, M. Travizano, and H. Makse, “Inferring personal economic status from social network location,” *Nature Communications*, 2016. 9
- [34] J. Reijneveld, S. Ponten, H. Berendse, and C. Stam, “The application of graph theoretical analysis to complex networks in the brain,” *Clinical Neurophysiology*, vol. 118, 2007. 9
- [35] G. Chartrand and P. Zhang, *A First Course in Graph Theory*. Nueva York, Estados Unidos: Dover Publications, 2012. 13
- [36] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*. Nueva York, Estados Unidos: Elsevier, 1982. 13
- [37] S. Marshall, “Line structure representation for road network analysis,” *The Journal of Transport and Land Use*, vol. 9, no. 1, pp. 29–64, 2016. 15
- [38] K. Pearson, “The problem of the random walk,” *Nature*, 1905. 19
- [39] J. Klafter, M. F. Shlesinger, and G. Zumofen, “Beyond brownian motion,” *Physics today*, 1996. 19

BIBLIOGRAFÍA

- [40] M. Shlesinger, B. J. West, and J. Klafter, “Levy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 11, 1987. 19
- [41] G. H. Weiss, “Random walks and their applications,” *American Scientist*, vol. 71, no. 1, p. 65–71, 1983. 19
- [42] I. Santamaría, *Termodinámica moderna*. México: Trillas, 2014. 26, 27, 28, 29, 30
- [43] H. M. James and E. Guth, “Theory of the elastic properties of rubber,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 11, no. 10, p. 455–481, 1943. 27
- [44] M. Kardar, *Statistical Physics of Particles*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2007. 27, 28, 29
- [45] L. García-Colín, *De la maquina de vapor al cero absoluto*. México: Fondo de cultura económica, 1997. 28
- [46] E. Fermi, *Thermodynamics*. Nueva York, Estados Unidos: Dover Publications, 1956. 28
- [47] R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics*. Massachusetts, Estados Unidos: Elsevier, 3 ed., 1996. 29
- [48] M. Rosvall and C. Bergstrom, “Maps of random walks on complex networks reveal community structure,” *PNAS*, vol. 105, no. 4, p. 1118–1123, 2008. 32, 33, 34
- [49] M. Rosvall and C. Bergstrom, “Multilevel compression of random walks on networks reveal hierarchical organization in large integrated systems,” *PLoS ONE*, vol. 6, no. 4, 2011. 32
- [50] A. Lancichinetti and S. Fortunato, “Community detection algorithms: A comparative analysis,” *Physical Review E*, vol. 80, no. 5, 2009. 32
- [51] M. Rosvall, D. Axelsson, and C. Bergstrom, “The map equation,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 178, 2009. 33
- [52] D. Edler and M. Rosvall, “Source code for multilevel community detection with infomap,” 2018. 34