



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

COLORACIÓN ARCOÍRIS EN DIGRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

GERMÁN SÁNCHEZ URIARTE

TUTORA

DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia; a mis asesores; a mis compañeros de carrera y de vida; a la  
belleza de las matemáticas.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Definición de una gráfica . . . . .	5
1.2. Representación geométrica para gráficas . . . . .	6
1.3. Conexidad . . . . .	8
1.4. Distintas familias de gráficas . . . . .	8
1.5. Coloraciones arcoíris . . . . .	10
<b>2. Digráficas o gráficas dirigidas</b>	<b>15</b>
2.1. Definición de digráfica . . . . .	15
2.2. Representación geométrica . . . . .	16
2.3. Caminos dirigidos . . . . .	17
2.4. Subdigráficas, digráficas generadoras y orejas . . . . .	20
2.5. Conexidad fuerte . . . . .	21
2.6. Conexidad mínimamente fuerte . . . . .	26
<b>3. Coloraciones arcoíris para digráficas</b>	<b>31</b>
3.1. Coloraciones por flechas . . . . .	31
3.2. Digráficas mínimamente fuertes . . . . .	36
3.3. Coloración arcoíris y la propiedad de la trayectoria . . . . .	40
3.4. Coloración arcoíris para digráficas mínimamente fuertes . . . . .	43
<b>4. Coloración arcoíris en digráficas hamiltonianas</b>	<b>51</b>
4.1. Definiciones complementarias . . . . .	51
4.2. Caracterización arcoíris para digráficas hamiltonianas . . . . .	55

<b>5. Coloración arcoíris en torneos</b>	<b>93</b>
5.1. Definiciones . . . . .	93
5.2. Coloración arcoíris en torneos fuertemente conexos . . . . .	94
<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>

# Introducción

La coloración arcoíris en la teoría de gráficas nace de una necesidad tecnológica para poder tener comunicaciones encriptadas, seguras y eficientes. Como se detalla en [1], el Departamento de Seguridad de los Estados Unidos, busca establecer un enlace de comunicación seguro entre distintas agencias gubernamentales, de tal manera que cada vez que se transmite un mensaje a una agencia intermediaria, dicho mensaje debe recibir una encriptación diferente, para garantizar una comunicación privada.

La segunda motivación del concepto de coloración arcoíris, que se detalla en [2] y [3], busca establecer enlaces entre distintos nodos de una red de comunicación. Esta red utiliza distintas frecuencias en un ancho de banda para establecer enlaces intermediarios. Lo que buscamos es minimizar el número de frecuencias que utilizamos para optimizar los recursos de la red.

Estos dos fenómenos tecnológicos se expresan y modelan en la teoría de gráficas de la siguiente manera: las distintas agencias gubernamentales o los nodos de telecomunicación, representan los vértices de una gráfica, y las aristas entre vértices representan el enlace de comunicación entre agencias o entre nodos. Una vez que tenemos una gráfica, les podemos asignar colores a la aristas, los cuales representan contraseñas o encriptaciones distintas, o distintas frecuencias en un ancho de banda. Por lo que, una trayectoria entre distintos vértices, que no repita colores, representa una comunicación segura entre nodos, o una comunicación eficiente en la red de telecomunicaciones. A dichas trayectorias les llamaremos trayectorias arcoíris. El número de coloración arcoíris, sobre el cual versa esta tesis, es la búsqueda matemática del mínimo número de colores que se necesitan, para garantizar la existencia de una trayectoria arcoíris entre cualquier par de vértice de nuestra gráfica.

A partir del 2008, año en el que aparece la primera publicación sobre la teoría

de coloración arcoíris [1], se han escrito numerosos artículos y se han encontrado múltiples aplicaciones a este parámetro. Los esfuerzos de investigación se han centrado principalmente en establecer cotas, en términos del grado mínimo, la conexidad puntual y el radio, entre otros [4]. Se han encontrado cotas para diversas familias de gráficas; por ejemplo, para ciclos, árboles, ruedas y gráficas aleatorias [4]. A su vez, se han definido y estudiado también nuevos parámetros que están ligados o que extienden la definición de coloración arcoíris [3].

En la teoría de digráficas, la definición de coloración arcoíris es mucho más reciente (2014), y se debe a Paul Dorbec, Ingo Schiermeyer, Elżbieta Sidorowicz y Éric Sopena [5]. En esta publicación se utiliza el número de coloración arcoíris, para dar una caracterización de las digráficas mínimamente fuertes, y también se plantean nuevas cotas en la coloración arcoíris para digráficas fuertemente conexas y para torneos.

El objetivo de nuestro trabajo es, en primera instancia, tener un texto con conceptos y definiciones autocontenidas referentes a la teoría de coloración arcoíris en digráficas. Finalmente, se busca dar demostraciones detalladas de los resultados presentados en [5].

El primer capítulo está dedicado a establecer las nociones y definiciones esenciales en la teoría de gráficas, así como de introducir al lector en la teoría de coloración arcoíris en gráficas.

El segundo capítulo se adentra en la teoría de digráficas. Definimos la conexidad y la conexidad fuerte en digráficas, y presentamos una serie de resultados auxiliares sobre digráficas fuertemente conexas y mínimamente fuertes, los cuáles serán de utilidad para poder demostrar los teoremas principales de los siguientes capítulos.

Los capítulos 3, 4 y 5 son el trabajo central de esta tesis. En el tercer capítulo se introduce el concepto de coloración arcoíris en digráficas y el número de coloración arcoíris,  $\vec{rc}(D)$ . Además, se demuestra el siguiente resultado a partir del cual trabajaremos con las cotas del número de coloración arcoíris:

Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexas con  $n$  vértices, entonces:

$$\vec{rc}(D) \leq n.$$

Presentamos la definición de la propiedad de la trayectoria, con la cual podemos reducir a  $n - 1$ , la cota del número de coloración arcoíris para las digráficas mínimamente fuertes que no son ciclos dirigidos.

El cuarto capítulo introduce las definiciones de ciclos hamiltonianos especiales y la propiedad de la cabeza; con estos conceptos se caracterizan a las digráficas hamiltonianas cuyo número de coloración arcoíris es igual a  $n$ .

El quinto capítulo presenta la definición de torneo y se demuestra el siguiente resultado que acota al número de coloración arcoíris de torneos fuertemente conexos de orden mayor o igual a 5:

Si  $T$  es un torneo fuertemente conexo con  $n \geq 5$  vértices, entonces:

$$2 \leq \vec{rc}(T) \leq n - 1.$$





# Capítulo 1

## Preliminares

La teoría de gráficas se gesta inicialmente con el estudio de ciertos fenómenos de la combinatoria, en la que aparecen relaciones binarias entre objetos. Es un área de especialidad del conocimiento matemático relativamente joven comparado con otras ramas, y sin embargo ha generado de manera vertiginosa resultados muy importantes dentro de la teoría y sus respectivas aplicaciones.

Uno de los conceptos centrales en la teoría de gráficas es sin lugar a dudas la conexidad, para la cual hay resultados muy profundos y elegantes; como es el famoso teorema de Menger. La coloración arcoíris por aristas resulta ser un parámetro que necesita de la conexidad y que la restringe, al pedir que entre dos vértices exista una trayectoria que no repita colores; es decir, una trayectoria arcoíris.

Este primer capítulo comienza con una serie de definiciones que nos ayudarán a comprender los teoremas y los resultados expuestos en esta tesis. Empezamos con la definición de gráfica, su representación geométrica, y las definiciones de camino, camino cerrado, trayectoria y ciclo. Definimos la conexidad, la distancia y una trayectoria geodésica. Damos la definición y notación de algunas familias de gráficas. Por último, introducimos el tema central de esta tesis; la coloración arcoíris de las aristas de una gráfica.

### 1.1. Definición de una gráfica

Una gráfica  $G$  consiste de un conjunto de objetos  $V(G)$ , finito y no vacío, y un conjunto  $A(G)$  de parejas no ordenadas de elementos de  $V(G)$ . A los elementos de  $V(G)$  les llamaremos **vértices**, y a los de  $A(G)$  les llamaremos **aristas**.

Observamos que el conjunto de aristas  $A(G)$  puede ser un conjunto vacío.

Para poder referirnos a los vértices de una gráfica podemos utilizar variables como  $u$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$  o  $z$ . Frecuentemente, también utilizaremos una notación indexada, de tal manera que a cada vértice le asociamos una letra y un subíndice; por ejemplo, en una gráfica  $G$  con 6 vértices podemos utilizar la letra  $v$  y agregarle subíndices, de tal manera que nuestro conjunto de vértices queda denotado como:  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ . Esta letra  $v$  se puede considerar como una variable muda y puede ir cambiando de acuerdo al contexto.

En el caso de las aristas, dado que están definidas a partir de parejas no ordenadas de vértices en  $V(G)$ , utilizaremos la notación  $v_m v_n$  para referirnos a la pareja no ordenada  $\{v_m, v_n\}$ . Como ejemplo,  $v_1 v_2$  y  $v_4 v_5$ , se refieren a las parejas no ordenadas  $\{v_1, v_2\}$  y  $\{v_4, v_5\}$  respectivamente.

Tomando en cuenta el mismo conjunto de vértices de la gráfica que acabamos de mencionar, una posibilidad para el conjunto de aristas es el siguiente:

$$A(G) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5, v_5 v_6, v_6 v_1\}.$$

## 1.2. Representación geométrica para gráficas

Para poder representar a una gráfica, utilizamos puntos en un plano, los cuales serán los vértices de nuestra gráfica, y las aristas que existan serán líneas que unen a sus vértices correspondientes. La figura 1.1 es un ejemplo de una representación geométrica de una gráfica, conocida como la gráfica de Petersen, nombrada así en honor al matemático Julius Petersen. Esta gráfica tiene un conjunto con 10 vértices y 15 aristas dado por:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\},$$

$$A(G) = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_1 v_6, v_2 v_3, v_2 v_7, v_3 v_4, v_3 v_8,$$

$$v_4 v_5, v_4 v_9, v_5 v_{10}, v_6 v_8, v_6 v_9, v_7 v_9, v_7 v_{10}, v_8 v_{10}\}.$$

Cabe hacer notar que podemos cambiar la posición de los puntos en el plano de distintas formas, así como la posición de las aristas de una gráfica, de tal manera que la representación geométrica de una gráfica no es única.

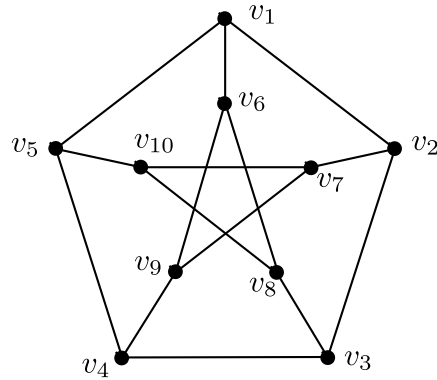


Figura 1.1: Representación geométrica de la gráfica de Petersen

Una vez establecida la notación con etiquetas y subíndices para referirnos a los vértices de una gráfica  $G$ , podemos definir un camino en  $G$ . Un **camino**  $C$  es una sucesión  $C = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  de vértices que cumplen que  $u_i u_{i+1}$  son aristas de  $G$  para  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ . Definimos la **longitud** de un camino  $C$  como el número  $m$ , y la denotamos como  $l(C)$ . Cabe señalar que a veces es útil nombrar a un camino por su vértice inicial y final, en cuyo caso utilizaremos la notación  $u_0 u_m$ -**camino**. Hay que hacer notar que en la definición de camino, sí está permitido repetir vértices y aristas.

En la figura 1.1, tenemos que  $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_9)$  es un camino que no repite vértices, y  $C_2 = (v_6, v_1, v_6, v_8, v_3)$  es un camino que repite el vértice  $v_6$  y la arista  $v_1 v_6$ . Notemos que si no repetimos vértices, necesariamente no repetimos aristas; si no repetimos aristas puede ser que sí se repitan vértices. A un camino sin repetición de vértices le llamaremos **trayectoria**. Por ejemplo, el camino  $C_1$ , es una trayectoria en la gráfica de Petersen.

Un **camino cerrado** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice. Por ejemplo, en la figura 1.1, podemos tomar el camino  $C = (v_6, v_1, v_6, v_8, v_3, v_8, v_6)$ , el cual es un camino cerrado, dado que empezamos y terminamos en el mismo vértice  $v_6$ . Le llamamos **ciclo** a un camino cerrado  $C$ , de longitud al menos 3, que únicamente repite el vértice inicial y final. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 1.1, el camino  $C = (v_6, v_8, v_{10}, v_7, v_9, v_6)$  es un ciclo de longitud 5.

### 1.3. Conexidad

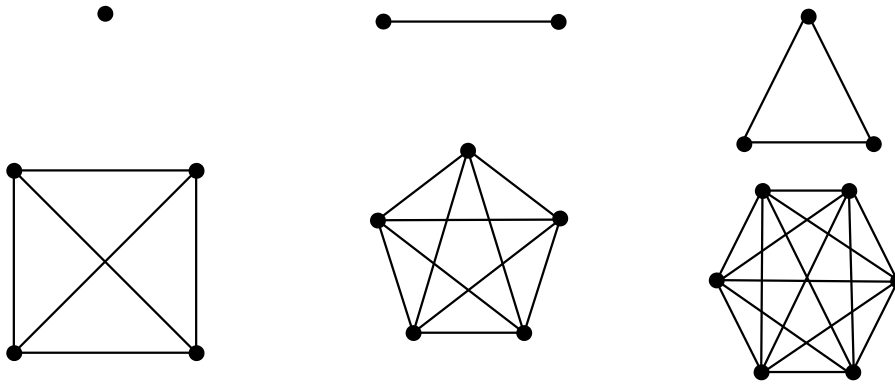
Una vez establecida la noción de trayectoria (o camino), podemos utilizarla para hablar del concepto de conexidad. Una gráfica  $G$  es **conexa** si existe una trayectoria entre cualquier par de vértices. La gráfica de Petersen es conexa dado que como se observa en la figura 1.1, para cualquier par de vértices podemos encontrar una trayectoria entre ellos.

Tomemos ahora una gráfica conexa  $G$  y dos vértices  $u$  y  $v$  dentro de la misma; sabemos que existe al menos una trayectoria entre  $u$  y  $v$ . Ahora bien, dentro del conjunto de todas las posibles  $uv$ -trayectorias, tomamos la de menor longitud. Definimos entonces la **distancia** entre dos vértices  $u$  y  $v$  como el  $\min\{l(C) : C \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$ , y la denotamos por  $d(u, v)$ . Por ejemplo, en la gráfica de Petersen de la figura 1.1, la distancia entre los vértices  $v_5$  y  $v_9$  es 2, dado que la trayectoria de longitud mínima que conecta a estos vértices es  $(v_5, v_4, v_9)$ , pues  $v_5$  y  $v_9$  no son adyacentes.

Una vez definida la distancia entre dos vértices  $u$  y  $v$ , le llamaremos  **$uv$ -geodésica** a cualquier  $uv$ -trayectoria de longitud mínima. Podemos observar, que entre cualquier par de vértices de la gráfica de Petersen, la distancia es siempre menor o igual a 2; es decir, las geodésicas entre cualquier par de vértices son de longitud menor o igual a 2.

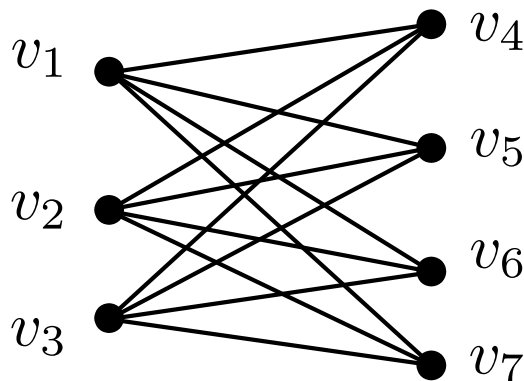
### 1.4. Distintas familias de gráficas

Una gráfica  $G$  con  $n$  vértices es **completa**, si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$ , se tiene que  $uv \in A(G)$ , y la denotamos como  $K_n$ . En la figura 1.2, se muestran las gráficas completas  $K_n$  con  $n \in \{1, \dots, 6\}$ .

Figura 1.2: Gráficas completas  $K_n$ 

En una gráfica  $G$ , un subconjunto  $I$  de  $V(G)$  es **independiente** si  $uv \notin A(G)$ , para cualquier  $\{u, v\} \subset I$ ; es decir, no hay aristas entre cualquier par de vértices de  $I$ . Una gráfica  $G$  es **bipartita**, si podemos dar una partición de  $V(G)$  en dos conjuntos independientes. En la figura 1.3, se muestran una gráfica bipartita con dos conjuntos independientes;  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y  $\{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ .

Consideremos una gráfica bipartita  $G$ , con una partición  $\{X, Y\}$  de  $V(G)$  en conjuntos independientes, con  $n$  y  $m$  vértices respectivamente. Decimos que  $G$  es una gráfica **bipartita completa** si para cada vértice  $x$  en  $X$  y cada  $y$  en  $Y$ , tenemos que  $xy \in A(G)$ . Denotamos a esta gráfica bipartita como  $K_{n,m}$ . En la figura 1.3 se muestra la gráfica bipartita completa  $K_{3,4}$ .

Figura 1.3: Gráfica bipartita completa  $K_{3,4}$

## 1.5. Coloraciones arcoíris

La coloración en gráficas se puede definir sobre el conjunto de vértices  $V(G)$  o sobre el conjunto de aristas  $A(G)$ . En nuestro caso hablaremos de coloraciones de las aristas de una gráfica para poder definir el concepto de coloraciones arcoíris, que es el tema central de este trabajo.

En general, una coloración de las aristas de una gráfica  $G$  es una función  $c : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , tal que a cada arista  $uv \in A(G)$  le asociamos un número natural  $c(uv) = j$ , con  $j \in \{1, \dots, k\}$ . A este número natural le llamaremos el color  $j$ .

Como ejemplos, daremos 3 coloraciones distintas de la gráfica de Petersen. La primera es la coloración constante 1 definida como  $c_1 : A(\text{Petersen}) \rightarrow \{1\}$ , donde  $c_1(v_i v_j) = 1$  para todas las aristas, como se muestra en la figura 1.4.

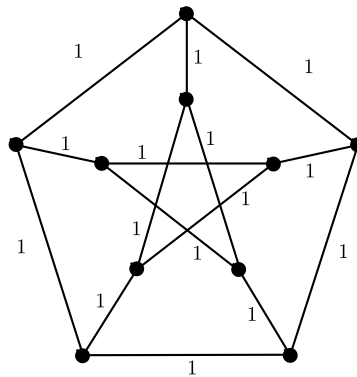


Figura 1.4: Gráfica de Petersen coloreada por aristas con un solo color

La segunda coloración, que se muestra en la figura 1.5, tiene dos colores asignados de la siguiente manera: tomamos los ciclos  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  y  $(v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10})$ , y pintamos sus aristas con el color 1. A las aristas restantes las pintamos de color 2.

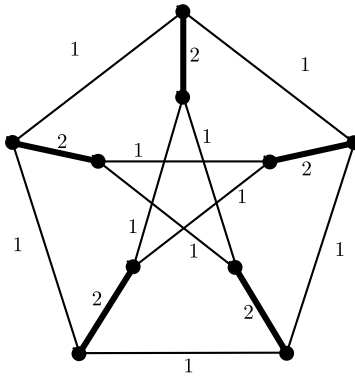


Figura 1.5: Gráfica de Petersen coloreada por aristas con 2 colores distintos

Por último, damos una coloración con 4 colores, como se muestra en la figura 1.6. Esta coloración tiene la propiedad de que cualquier par de vértices están unidos por una trayectoria que no repite colores; como se verifica en [6]. A este tipo de trayectorias les llamamos trayectoria arcoíris, dado que no repiten color entre aristas.

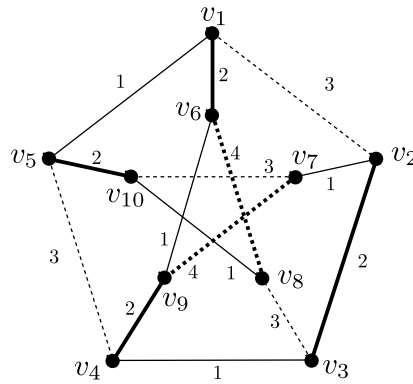


Figura 1.6: Gráfica de Petersen coloreada por aristas con 4 colores

Dada una coloración  $c : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  sobre las aristas de una gráfica, una **trayectoria arcoíris** entre dos vértices  $u$  y  $v$  será una  $uv$ -trayectoria que no repite colores. Es decir, una trayectoria  $(u = u_0, u_1, \dots, u_l = v)$  es arcoíris si se cumple que  $c(u_{i-1}u_i) \neq c(u_{j-1}u_j)$  para  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq l$ .

Para dar un ejemplo de una trayectoria arcoíris, observamos que la trayectoria  $(v_5, v_1, v_6, v_8, v_3)$  en la gráfica de Petersen es una trayectoria arcoíris bajo la



coloración de la figura 1.6.

Sea una coloración  $c : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $G$  podemos encontrar una  $uv$ -trayectoria arcoíris, decimos que la coloración  $c$  es una **coloración arcoíris**. Como ejemplo de coloración arcoíris, en la figura 1.6 todo par de vértices tiene una trayectoria arcoíris bajo esta coloración; la demostración de este resultado está detallada en [6]. Observamos que para cualquier coloración  $c : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  puede existir más de una trayectoria arcoíris entre dos vértices  $u$  y  $v$ .

Llamamos **geodésica arcoíris** a una  $uv$ -geodésica que es una trayectoria arcoíris. Observamos que en una gráfica, una coloración puede ser arcoíris y que no existan geodésicas arcoíris para algún par de vértices; véase la figura 1.7 donde la trayectoria  $(v_2, v_1, v_5, v_4)$  es una  $v_2v_4$ -trayectoria arcoíris, y sin embargo, la geodésica  $(v_2, v_3, v_4)$  no es arcoíris.

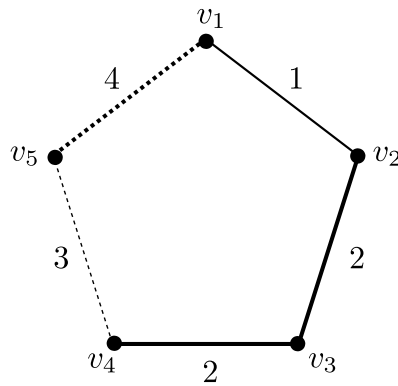


Figura 1.7: Coloración arcoíris donde no existe una  $v_2v_1$ -geodésica arcoíris

Nos interesa encontrar un parámetro que podamos optimizar (maximizar o minimizar) refiriéndonos a coloraciones en aristas en general y trayectorias arcoíris en particular. Vamos a decir que una coloración es **fuerte arcoíris**, si para cada par de vértices  $u$  y  $v$ , existe una  $uv$ -geodésica arcoíris. De las definiciones de coloración arcoíris y fuerte coloración arcoíris, se desprende que las gráficas siempre deben ser conexas.

Ahora sí, podemos definir al parámetro conocido como **número de coloración arcoíris**, como el mínimo número  $k$  de colores, tal que existe una coloración  $c : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que es arcoíris. Al número de coloración arcoíris lo denotamos como  $rc(G)$ , por las siglas en inglés *rainbow colouring*.

De manera similar, podemos definir el **número de coloración arcoíris fuerte**

como el mínimo número  $k$  de colores, tal que existe una coloración  $c : A(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que es fuerte arcoíris. Al número de coloración arcoíris fuerte lo denotamos como  $src(G)$ , por las siglas en inglés *strong rainbow colouring*.

En la figura 1.8, tenemos un ciclo de longitud 5 cuyas aristas han sido coloreadas con 3 colores; observamos que la longitud de cualquier geodésica en este ciclo es menor o igual a 2, y que cualquier par de aristas adyacentes tienen colores distintos. Por lo tanto, tenemos una coloración arcoíris fuerte.

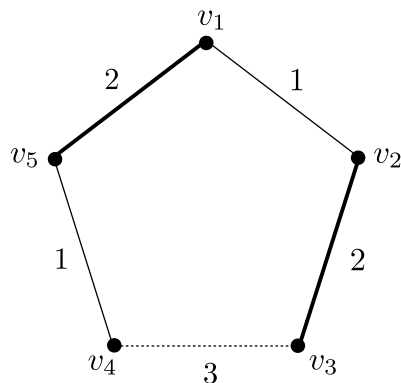


Figura 1.8: Coloración arcoíris fuerte sobre un ciclo de longitud 5

Un ejemplo clásico de coloración arcoíris fuerte lo podemos ver en la figura 1.6, en la que se utilizan 4 colores para colorear las aristas de la gráfica de Petersen. En [6] se demuestra que la coloración de la figura 1.6 es una coloración arcoíris fuerte y que  $src(Petersen) = 4$ .

Como en toda gráfica  $G$  tenemos que una coloración fuerte arcoíris es una coloración arcoíris, pero no necesariamente es la mínima, entonces se cumple que  $rc(G) \leq src(G)$ .



## Capítulo 2

# Digráficas o gráficas dirigidas

En este capítulo damos la definición de una digráfica o gráfica dirigida; a partir de ésta, podemos derivar conceptos análogos a los que hemos dado para gráficas no dirigidas. Asimismo, damos las definiciones de subdigráfica, subdigráfica generadora, oreja y conexidad fuerte, que serán de gran utilidad a lo largo de todo el texto. Por último, se presentan una serie de resultados básicos sobre conexidad y conexidad mínima, que utilizaremos en los capítulos subsecuentes.

### 2.1. Definición de digráfica

Una **digráfica** o **gráfica dirigida**  $D$  consiste de un conjunto de objetos finito y no vacío  $V(D)$ , y un conjunto  $F(D)$  de parejas ordenadas de elementos distintos de  $V(D)$ . A los elementos de  $V(D)$  les llamaremos **vértices**, y a los elementos de  $F(D)$  les llamaremos flechas o arcos.

Consideremos a una pareja ordenada de la forma  $(u, v)$ , perteneciente al conjunto de flechas  $F(D)$ ; a la primera coordenada  $u$  le llamamos la **cola** de la flecha, y a la segunda coordenada  $v$ , la **cabeza** de la flecha. Si tanto  $(u, v)$  como  $(v, u)$  pertenecen a  $F(D)$ , entonces decimos que las flechas son **simétricas**. Una flecha  $(u, v)$  es **asimétrica** si  $(v, u)$  no pertenece a  $F(D)$ . Si en una digráfica  $D$ , toda flecha es asimétrica, entonces decimos que  $D$  es **asimétrica**.

Como ejemplo de una digráfica  $D_1$ , consideremos un conjunto de 6 vértices  $V(D_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , y un conjunto de 6 flechas dado por  $F(D_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$ .

## 2.2. Representación geométrica

De manera análoga a la teoría de gráficas, podemos dar una representación geométrica de una digráfica  $D$ , de tal manera que los vértices de  $D$  son puntos en un plano, y las parejas ordenadas  $(u, v)$  en  $F(D)$  se representan al dibujar una flecha que va del punto asociado al vértice  $u$  al punto asociado al vértice  $v$ . Como ejemplo, podemos representar gráficamente la digráfica  $D_1$  de la sección anterior, como se muestra en la figura 2.1.

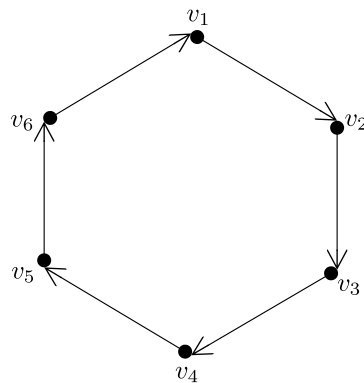


Figura 2.1: Representación geométrica de una digráfica

Una vez establecida la definición de digráfica, podemos hablar de vértices y flechas adyacentes de la siguiente manera: decimos que dos vértices  $u$  y  $v$  pertenecientes a  $V(D)$  son **adyacentes** si  $(u, v)$  o  $(v, u)$  pertenecen al conjunto de flechas  $F(D)$ ; si  $(u, v)$  es una flecha de  $F(D)$  decimos que  $u$  es **adyacente hacia**  $v$  y  $v$  es **adyacente desde**  $u$ .

Dos flechas son **incidentes** si comparten un vértice; es decir, si tenemos las flechas  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$ , estas serán incidentes si se da cualquiera de los siguientes casos:  $u_1 = u_2$ ,  $u_1 = v_2$ ,  $v_1 = u_2$  o  $v_1 = v_2$ .

Dados dos vértices  $u$  y  $v$ ,  $v$  es **exvecino** de  $u$  si la pareja ordenada  $(u, v)$  pertenece al conjunto de flechas  $F(D)$ ; es decir,  $v$  es exvecino de  $u$  si  $v$  es la cabeza de la flecha  $(u, v)$ . Un vértice  $w$  es **invecino** de otro vértice  $u$  si la flecha  $(w, u)$  pertenece al conjunto de flechas  $F(D)$ ; es decir, si  $w$  es la cola de la flecha  $(w, u)$ .

Denotamos a los exvecinos de un vértice  $u$  como  $N_D^+(u) = \{v \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$ ; es decir, los exvecinos de  $u$  son todos aquellos vértices que son adyacentes desde  $u$ . Análogamente, denotamos a los invecinos de un vértice  $u$  como  $N_D^-(u) = \{w \in V(D) : (w, u) \in F(D)\}$ ; es decir, los invecinos de  $u$  son todos aquellos vértices que son adyacentes hacia  $u$ .

En la digráfica de la figura 2.2, observamos que cada uno de los vértices tiene como máximo 2 exvecinos o 2 invecinos. Por ejemplo, el vértice  $v_1$  tiene dos exvecinos  $N_D^+(v_1) = \{v_2, v_6\}$ , y  $v_3$  solamente tiene un exvecino  $N_D^+(v_3) = \{v_4\}$ ; el vértice  $v_8$  tiene un solo invecino  $N_D^-(v_8) = \{v_{10}\}$ , y el vértice  $v_9$  tiene dos invecinos  $N_D^-(v_9) = \{v_4, v_6\}$ .

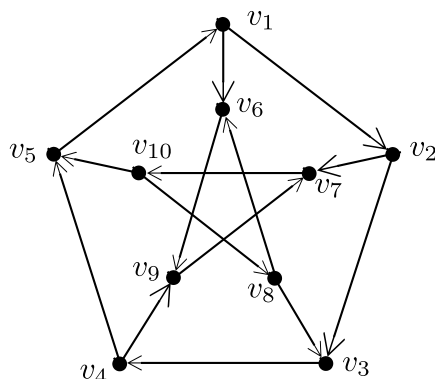


Figura 2.2: Digráfica obtenida de la gráfica de Petersen al intercambiar cada arista por una flecha

Una vez que definimos la noción de invecino y exvecino, podemos hablar del **ingrado** y el **exgrado** de un vértice, como el número total de invecinos o exvecinos de éste, respectivamente. El **ingrado** de un vértice  $v$  se denota como  $\delta_D^-(v) = |N_D^-(v)|$ ; de forma similar el **exgrado** de un vértice  $z$  se denota como  $\delta_D^+(z) = |N_D^+(z)|$ . Definimos al **grado** de un vértice  $v$  como la suma de su ingrado y su exgrado, y lo denotamos como  $\delta_D(v) = \delta_D^-(v) + \delta_D^+(v)$ .

Utilizando nuevamente la digráfica de la figura 2.2 podemos ver que  $\delta_D^-(v_5) = |\{v_4, v_{10}\}| = 2$  y  $\delta_D^+(v_4) = |\{v_5, v_9\}| = 2$ .

## 2.3. Caminos dirigidos

Dada una digráfica  $D$ , una sucesión de vértices  $C = (v_0, \dots, v_m)$  de  $D$  es un **camino dirigido** si las parejas ordenadas  $(v_i, v_{i+1})$  pertenecen al conjunto de flechas  $F(D)$  para todo  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ . La **longitud** del camino dirigido es  $m$ , y lo denotamos por  $l(C)$ . Si queremos hacer más explícita la notación, decimos que  $C$  es un  $v_0 v_m$ -**camino dirigido**, o también podemos utilizar la notación  $(v_0, v_m)$ -**camino dirigido**.

Cuando coinciden el vértice inicial y final de un  $u_0u_n$ -camino dirigido, es decir, que  $u_0 = u_n$ , tenemos un **camino dirigido cerrado**.

Dado  $C$  un  $uv$ -camino dirigido, llamamos a cada vértice de  $V(C) - \{u, v\}$  **vértice interno** de  $C$ . Si consideramos ahora a  $X$  y  $Y$ , dos subconjuntos de  $V(D)$ , llamamos un  $(X, Y)$ -**camino dirigido** a cualquier  $xy$ -camino dirigido con  $x \in X$  y  $y \in Y$ . Sean  $C_1 = (x_1, \dots, x_k)$  y  $C_2 = (x_k, \dots, x_l)$  dos caminos dirigidos, definimos a la **unión** de estos dos caminos dirigidos como  $(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l)$ , y lo denotamos como  $C_1 \cup C_2$ .

Dado un camino dirigido  $C = (v_0, \dots, v_m)$ , cualquier subsucesión de este camino le llamamos un **subcamino dirigido**.

Sean  $C = (x_0, \dots, x_k)$  un camino, y  $x_i$  y  $x_j$  dos de sus vértices con  $i, j \in \{0, \dots, k\}$ ,  $i \leq j$ ; al camino que resulta de tomar la subsucesión de  $C$  empezando por el vértice  $x_i$  y terminando en el vértice  $x_j$ , lo denotamos como  $(x_i, C, x_j)$ . En el caso de tener un camino cerrado, consideramos a los vértices de la subsucesión módulo  $k$ . Observamos que si  $i > j$ , la notación  $(x_i, C, x_j)$  se refiere al siguiente camino  $(x_i, C, x_k) \cup (x_0, C, x_j)$ .

Para dar un ejemplo de un camino dirigido entre los vértices  $v_1$  y  $v_8$  en la digráfica de la figura 2.2, tenemos la siguiente sucesión:  $(v_1, v_2, v_7, v_{10}, v_8)$ , en donde observamos que cada par de vértices consecutivos en la sucesión pertenecen a las flechas  $F(D)$ .

Si  $C = (v_0, \dots, v_m)$  es un camino dirigido que no repite vértices, entonces le llamamos una **trayectoria dirigida**. Si queremos hacer más explícita la notación, podemos decir que  $C$  es una  $v_0v_m$ -**trayectoria dirigida**, o también podemos utilizar la notación  $(v_0, v_m)$ -**trayectoria dirigida**.

Dada una trayectoria dirigida  $T = (v_0, \dots, v_m)$ , cualquier subsucesión de esta trayectoria le llamamos una **subtrayectoria dirigida**.

Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido cerrado, de longitud mayor o igual a dos, que no repite vértices, excepto el vértice inicial y el vértice final.

Dado un ciclo dirigido  $C = (x_0, \dots, x_{k-1}, x_0)$  de longitud  $k \geq 2$ , para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$  decimos que  $x_{i+1}$  es el **sucesor** de  $x_i$ , tomando los índices  $i$  módulo  $k$ . De manera similar, decimos que  $x_{i-1}$  es el **antecesor** de  $x_i$ , nuevamente tomando los índices módulo  $k$ . Observamos también que en el ciclo dirigido  $C$ , cualquier subtrayectoria  $(x_i, C, x_j)$ , con  $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$ , es la única  $x_ix_j$ -trayectoria dirigida en  $C$ .

En la digráfica de la figura 2.2, un ejemplo de una trayectoria dirigida es la sucesión  $(v_4, v_9, v_7, v_{10}, v_8)$  dado que no repite vértices y el par ordenado de vértices consecutivos son flechas de la digráfica. Añadiendo al final de esta misma sucesión los vértices  $v_3$  y  $v_4$  obtenemos la sucesión  $(v_4, v_9, v_7, v_{10}, v_8, v_3, v_4)$ , que es un

ciclo dirigido.

El siguiente teorema relaciona el concepto de camino dirigido y trayectoria dirigida.

**Teorema 2.1.** *Todo  $uv$ -camino dirigido contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida, con  $u \neq v$ .*

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre la longitud del camino dirigido.

Sea  $C$  un  $uv$ -camino dirigido.

**Base:** Si  $C$  es un camino dirigido de longitud 2, dado que  $u \neq v$ , entonces  $C$  es una trayectoria dirigida.

**Hipótesis inductiva:** Supongamos que se cumple que todo  $uv$ -camino dirigido de longitud  $l < k$  contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida.

**Paso inductivo:** Sea  $C_k$  un  $uv$ -camino dirigido de longitud  $k$ . Si  $C_k$  es una trayectoria dirigida, entonces queda demostrado el resultado. Pero, si  $C_k$  no es una trayectoria dirigida, entonces significa que hay al menos dos vértices en la sucesión  $C_k = (u = v_0, \dots, v_k = v)$  que se repiten, digamos  $v_r$  y  $v_s$  con  $r < s$ . Por lo tanto, la sucesión del camino dirigido se puede expresar como  $(v_0, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_s, \dots, v_k)$ . Al quitarle el subcamino dirigido  $(v_r, v_{r+1}, \dots, v_{s-1})$  a  $C_k$ , obtenemos un nuevo  $uv$ -camino dirigido  $C$ , de longitud menor a  $k$ ;  $C = (v_0, v_1, \dots, v_r = v_s, v_{s+1}, \dots, v_k)$ . Por la hipótesis inductiva,  $C$  contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida; como  $C$  está contenido en  $C_k$ , entonces  $C_k$  también contiene una trayectoria dirigida, que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Ahora veremos una relación entre un camino dirigido cerrado y un ciclo dirigido.

**Teorema 2.2.** *Si  $C$  es un camino dirigido cerrado, entonces  $C$  contiene un ciclo dirigido.*

*Demostración.* Por inducción sobre la longitud de  $C$ .

**Base:** Si  $C$  es un camino dirigido cerrado de longitud 2, entonces  $C$  ya es un ciclo dirigido.

**Hipótesis de inducción:** Si  $C'$  es un camino dirigido cerrado de longitud menor que  $k$ , entonces  $C'$  contiene un ciclo dirigido.

**Paso inductivo:** Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud  $k$ . Si  $C$  no repite vértices salvo el vértice inicial y final, entonces  $C$  es un ciclo dirigido. Si  $C$  repite vértices que no sea  $x_0$ , entonces existen  $x_l$  y  $x_m$  en la sucesión de vértices de  $C$ , que se repiten; es decir, que  $x_l = x_m$  con  $l \neq m$  y  $l$  y  $m$



distintos de 0. Así, sin pérdida de generalidad, si suponemos que  $l < m$ , tenemos que  $C = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_m, \dots, x_{k-1}, x_0)$ .

Consideremos a  $C'$  el subcamino dirigido cerrado de  $C$ , definido por  $C' = (x_0, \dots, x_l = x_m, x_{m+1}, \dots, x_{k-1}, x_0)$ , con longitud menor que  $k$ ; entonces por la hipótesis de inducción tenemos que  $C'$  contiene un ciclo dirigido  $\gamma$ , y por lo tanto  $\gamma$  es también un ciclo dirigido contenido en  $C$ .  $\square$

## 2.4. Subdigráficas, digráficas generadoras y orejas

Sean  $D$  y  $H$  dos digráficas, llamamos a  $H$  una **subdigráfica** de  $D$  si se cumple que  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ . Cuando  $V(H) = V(D)$ , decimos que  $H$  es una **subdigráfica generadora** de  $D$ .

Decimos que dos digráficas  $D$  y  $H$  son **iguales** si  $V(D) = V(H)$  y  $F(D) = F(H)$ , lo cual denotaremos como  $D = H$ . Cuando las digráficas  $D$  y  $H$  no son iguales lo denotaremos por  $D \neq H$ .

Dado un subconjunto  $X$  de  $V(D)$ , denotamos por  $D[X]$  a la **subdigráfica inducida** por  $X$ , donde  $V(D[X]) = X$  y las flechas de la subdigráfica  $D[X]$  son  $F(D[X]) = F(D) \cap (X \times X)$ ; es decir, la subdigráfica inducida por  $X$  tiene un subconjunto de vértices de  $D$  y tiene a todas las posibles flechas de  $F(D)$  que inciden sobre los vértices de  $X$ .

Una forma recurrente de formar una subdigráfica a partir de una digráfica  $D$  es a través de ir removiendo vértices o aristas. Utilizamos la notación  $D - v$  para representar a la digráfica que resulta de quitar el vértice  $v$  de  $D$  y todas las flechas de  $D$ , que inciden en  $v$ ; es decir,  $V(D - v) = V(D) - \{v\}$  y  $F(D - v) = F(D) - ((\{v\} \times V(D)) \cup (V(D) \times \{v\}))$ . Asimismo, para quitar una flecha utilizamos la notación  $D - (x, y)$  para hacer referencia a la subdigráfica de  $D$  que resulta de quitar la flecha  $(x, y)$ ; es decir,  $V(D - (x, y)) = V(D)$  y  $A(D - (x, y)) = A(D) - \{(x, y)\}$ .

Definimos una **oreja** en  $D$ , como una  $uv$ -trayectoria dirigida  $T$  tal que  $\delta_D(u) > 2$ ,  $\delta_D(v) > 2$  y el ingrado y exgrado de los vértices internos de  $T$  son iguales a 1 en  $D$ .

En la digráfica  $D$  que se exhibe en la figura 2.3, la trayectoria  $T = (v_5, v_4, v_3, v_2)$  es una oreja de  $D$ , dado que es una trayectoria cuyos vértices internos  $v_4$  y  $v_3$  tienen ingrado y exgrado igual a 1 en  $D$ , y los vértices extremos  $v_5$  y  $v_2$  son de grado 3 en  $D$ . Observamos que una flecha cuyos vértices extremos tienen grado mayor a dos es una oreja; por ejemplo, en 2.3, la flecha  $(v_2, v_5)$  es una oreja.

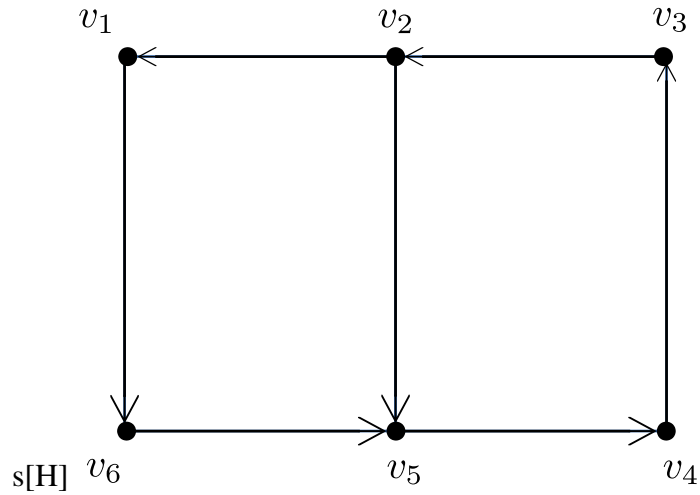


Figura 2.3: Ejemplos de orejas en una digráfica

## 2.5. Conexidad fuerte

Decimos que una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** o simplemente **fuerte**, si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  se tiene que existe un  $uv$ -camino dirigido, o equivalentemente una  $uv$ -trayectoria dirigida, por el teorema 2.1. Notemos que de la definición de conexidad fuerte se desprende que si una digráfica  $D$  es fuerte, entonces para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  existe una  $uv$ -trayectoria dirigida y también existe una  $vu$ -trayectoria dirigida. Observamos también que si una digráfica es fuertemente conexa con al menos dos vértices, necesariamente se tiene que el ingrado y el exgrado de todos sus vértices es al menos 1. En la figura 2.4 podemos observar ejemplos de digráficas fuertemente conexas.

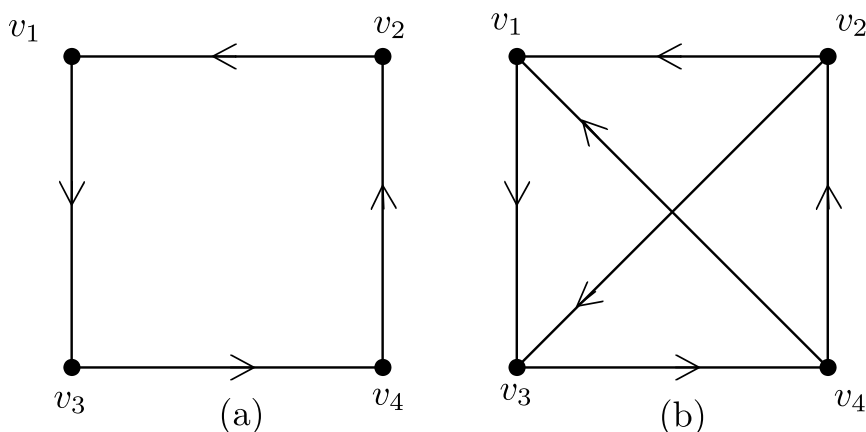


Figura 2.4: Ejemplos de digráficas fuertemente conexas

Sean  $D$  una digráfica fuertemente conexas, y  $u$  y  $v$  dos vértices de  $D$ . La **distancia** entre  $u$  y  $v$ , denotada como  $d(u, v)$ , se define como  $d(u, v) = \text{mín}\{l(C) : C \text{ es un } uv\text{-camino dirigido}\}$ . En la digráfica de la figura 2.5, tenemos que  $d(v_1, v_5) = 4$ ,  $d(v_{10}, v_9) = 3$ ,  $d(v_7, v_5) = 2$  y  $d(v_3, v_4) = 1$ . Cabe señalar que la distancia entre vértices de una digráfica no siempre es simétrica; es decir,  $d(u, v) \neq d(v, u)$ , por ejemplo  $d(v_1, v_2) = 1$  y  $d(v_2, v_1) = 4$ .

Si consideramos un vértice fijo  $v$  en una digráfica  $D$ , diremos que la **excentricidad** de  $v$ , denotada por  $\text{exc}_D(v)$ , está dada por  $\text{exc}_D(v) = \text{máx}\{d(v, x) : x \in V(D)\}$ . Definimos también el **diámetro** de una digráfica  $D$ , denotado como  $\text{diám}(D)$ , como el máximo de la excentricidades de todos sus vértices; y llamamos **vértices antipodales** a un par de vértices cuya distancia es igual al diámetro de  $D$ . Para ejemplificar estos conceptos, la digráfica de la figura 2.5 tiene diámetro 6, y los vértices  $v_6$  y  $v_2$  son un par de vértices antipodales, ya que  $\text{exc}(v_6) = d(v_6, v_2) = 6$ .

En seguida vemos varios resultados sobre propiedades de las digráficas fuertemente conexas.

**Proposición 2.1.** *Si  $D$  es fuertemente conexas con al menos 2 vértices, entonces  $D$  contiene un ciclo dirigido.*

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $D$ ,  $T_1 = (u = x_0, \dots, x_k = v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida, y  $T_2 = (v = y_0, \dots, y_k = u)$  una  $vu$ -trayectoria dirigida; sabemos que  $T_1$  y  $T_2$  existen dado que  $D$  es fuertemente conexas.  $T_1 \cup T_2$  es un camino dirigido cerrado y por el teorema 2.2 contiene un ciclo dirigido.  $\square$

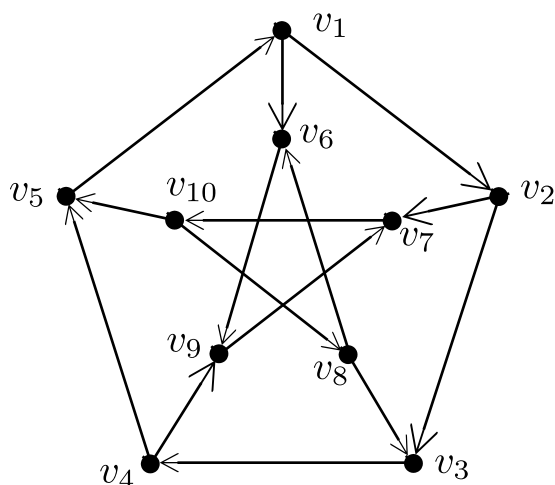


Figura 2.5: Excentricidad y vértices antipodales

**Teorema 2.3.**  *$D$  es una digráfica fuertemente conexa si y sólo si existe un camino dirigido cerrado  $C$  que contiene a todos los vértices de  $D$ .*

*Demostración.* ( $\implies$ )

Supongamos que  $D$  es una digráfica fuertemente conexa. Si  $D$  solamente tiene un vértice, entonces la digráfica cumple por vacuidad que tiene un camino dirigido cerrado que pasa por todos sus vértices.

Supongamos entonces que  $D$  tiene al menos dos vértices  $u$  y  $v$ .

Sean  $T_{uv}$  una  $uv$ -trayectoria dirigida y  $T_{vu}$  una  $vu$ -trayectoria dirigida, que sabemos que existen porque  $D$  es fuertemente conexa. Al considerar la unión de estas trayectorias, tenemos que  $T_{uv} \cup T_{vu}$  es un camino dirigido cerrado.

**Caso 1:** Si  $T_{uv} \cup T_{vu}$  contiene a todos los vértices de  $D$ , entonces tenemos lo que queremos demostrar.

**Caso 2:** Si  $T_{uv} \cup T_{vu}$  no contiene a todos los vértices de  $D$ , entonces tomamos un vértice  $w$  en  $V(D) - V(T_{uv} \cup T_{vu})$  y dado que  $D$  es fuertemente conexa, entonces existen una  $T_{uw}$  trayectoria dirigida y una  $T_{wu}$  trayectoria dirigida. Por tanto, tenemos que la unión  $T_1 = T_{uv} \cup T_{vu} \cup T_{uw} \cup T_{wu}$  es un camino dirigido cerrado que contiene a  $u$ ,  $v$  y a  $w$ .

Recursivamente vamos construyendo los caminos dirigidos cerrados  $T_i$  y, dado que  $D$  tiene un número finito de vértices, entonces para alguna  $j \in \mathbb{N}$  se tiene que  $T_j$  es un camino dirigido cerrado que contiene a todos los vértices de  $D$ , que es lo que se quería demostrar.

( $\impliedby$ )

Para demostrar la implicación converso, consideremos a  $C = (x_0, x_1, \dots, x_0)$  un camino dirigido cerrado que contiene a todos los vértices de  $D$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $D$ . Demostraremos que existe un  $uv$ -camino dirigido y un  $vu$ -camino dirigido en  $D$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $u = x_i$  y  $v = x_j$ , con  $i < j$ . Por lo tanto, la sucesión  $C' = (u = x_i, \dots, x_j = v)$  es un  $uv$ -camino dirigido y  $(v, C, x_0) \cup (x_0, C, u)$  es un  $(v, u)$ -camino dirigido. Por lo que,  $D$  es fuertemente conexa.  $\square$

**Corolario 2.3.1.** *Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa con al menos 2 vértices, entonces para cada vértice  $v$  en  $D$  existe un ciclo dirigido  $\gamma$  que lo contiene.*

*Demostración.* Sea  $v$  un vértice en  $D$ , por demostrar que existe un ciclo  $\gamma$  en  $D$  que contiene a  $v$ .

Dado que  $D$  es un digráfica fuertemente conexa con al menos dos vértices, por el teorema 2.3 podemos garantizar la existencia de un camino dirigido cerrado  $C$  que pasa por todos los vértices. Más aún, podemos también suponer, sin pérdida de generalidad, que  $C$  empieza y termina en el vértice  $v$ .

Haremos la demostración por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado  $C$ .

**Base:** Si  $l(C) = 2$ , entonces, dado que  $D$  tiene al menos dos vértices,  $C$  es un ciclo dirigido que contiene a  $v$ , que es lo que queríamos demostrar.

**Hipótesis de inducción:** Todo camino dirigido cerrado  $C'$  de longitud  $l(C') < k$ , con  $v \in V(C')$ , contiene a un ciclo dirigido  $\gamma'$  tal que  $v \in V(\gamma')$ .

**Paso inductivo:** Sea  $C$  un camino dirigido cerrado de longitud  $k$ , con  $v \in V(C)$ . Supongamos nuevamente, sin pérdida de generalidad, que  $C$  empieza y termina en el vértice  $v$ ; es decir  $C = (v = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0 = v)$ .

Si  $C$  no repite vértices, salvo el primero y el último, entonces  $C$  es el ciclo dirigido buscado.

Supongamos que en  $C$  existen dos vértices iguales  $x_i$  y  $x_j$ , con  $i < j$ . Entonces la sucesión de vértices en  $C$  se puede escribir como  $C = (v = x_0, \dots, x_i, \dots, x_j = x_i, \dots, x_0 = v)$ . El camino dirigido cerrado  $C'$  dado por  $C' = (v = x_0, C, x_i) \cup (x_i = x_j, C, v)$  es un camino dirigido cerrado de longitud  $l(C') < k$ , con  $v \in V(C')$ . Por la hipótesis de inducción, tenemos que  $C'$  contiene un ciclo dirigido  $\gamma'$  con  $v \in V(\gamma')$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Teorema 2.4.** *Sea  $D$  una digráfica sin vértices aislados.  $D$  es una digráfica fuerte si y sólo si existe  $C$  un camino dirigido cerrado que pasa por todas las flechas de  $D$ .*

*Demostración.* (  $\implies$  )

Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa. Por el teorema 2.3 existe un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D$ . De todos estos posibles caminos dirigidos cerrados que pasan por todos los vértices, consideramos un camino dirigido cerrado  $C = (x_0, \dots, x_r)$  que pase por la mayor cantidad de flechas en  $D$ .

Afirmamos que  $F(C) = F(D)$ .

Como  $F(C) \subseteq F(D)$ , resta solamente probar que  $F(D) \subseteq F(C)$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe una flecha  $(u, v)$  en  $F(D)$  tal que  $(u, v) \notin F(C)$ .

Como  $C$  pasa por todos los vértices, entonces, sin pérdida de generalidad, se tiene que  $u = x_i$  y  $v = x_j$ , con  $\{x_i, x_j\} \subset V(C)$ ,  $i < j$ . También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $C$  empieza y termina en  $u$ .

Construimos un camino dirigido cerrado  $C'$  dado por:

$$C' = C \cup (u, v) \cup (v, C, u).$$

Observamos que  $F(C') = F(C) \cup \{(u, v)\}$ , lo cual contradice que  $C$  es un camino dirigido cerrado que pasa por la mayor cantidad de flechas de  $D$ .

Por lo tanto, tenemos que el camino dirigido cerrado  $C$  pasa por todas las flechas de  $D$ .

(  $\impliedby$  )

Para el regreso de este teorema, si tenemos  $C$  un camino dirigido cerrado que pasa por todas las flechas de  $D$  entonces, como  $D$  no tiene vértices aislados, necesariamente  $C$  pasa también por todos los vértices de  $D$ . Por lo tanto, por el teorema 2.3,  $D$  es fuertemente conexa.  $\square$

**Teorema 2.5.** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $n \geq 2$  vértices. Para toda partición  $\{U_1, V_1\}$  de  $V(D)$  se tiene que al menos existen dos flechas  $f_1$  y  $f_2$  tales que la cola de  $f_1$  y la cabeza de  $f_2$  están en  $U_1$  y la cola de  $f_2$  y la cabeza de  $f_1$  están en  $V_1$ .*

*Demostración.* Sean  $\{U_1, V_1\}$  una partición de  $V(D)$ ,  $u \in U_1$  y  $v \in V_1$ .

Como  $D$  es fuertemente conexa, entonces existe  $T$  una  $uv$ -trayectoria dirigida en  $D$ . Sea  $v_1$  el primer vértice de  $T$  tal que  $v_1 \in V_1$ ; sabemos que este vértice existe ya que al menos  $v \in V(T)$  y  $v \in V_1$ . Tomemos a  $u_1$  el antecesor de  $v_1$  bajo la

trayectoria dirigida  $T$ ; sabemos que este vértice existe ya que al menos  $u \in V(T)$  y  $u \notin V_1$ . Por la elección de  $v_1$ , tenemos que la flecha  $(u_1, v_1)$  cumple que la cola  $u_1$  está en  $U_1$  y la cabeza  $v_1$  está en  $V_1$ , como se muestra en la figura 2.6.

La demostración de que existe al menos una flecha  $e$  tal que la cola de  $e$  está en  $V_1$  y la cabeza de  $e$  está en  $U_1$  es completamente análoga.  $\square$

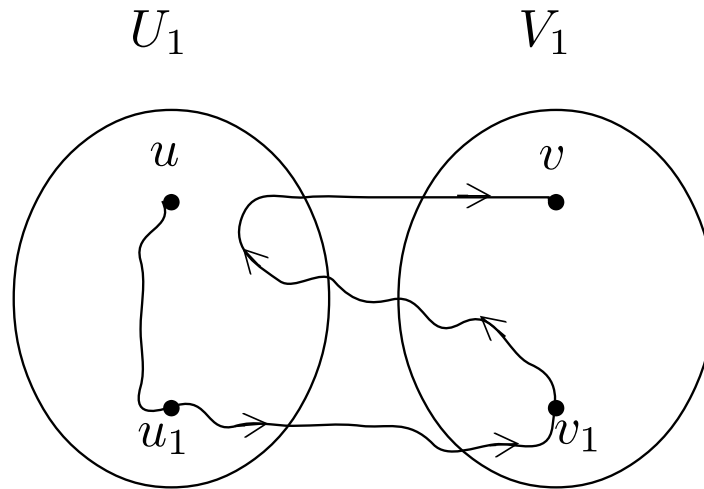


Figura 2.6: Partición de una digráfica fuertemente conexa

## 2.6. Conexidad mínimamente fuerte

En esta sección damos una definición relacionada con la minimalidad de la propiedad de ser una digráfica fuertemente conexa. La idea surge de quitarle una flecha a una digráfica fuertemente conexa, y verificar si la digráfica resultante pierde la propiedad de ser fuerte.

Decimos que una digráfica  $D$  es **mínimamente fuerte**; si  $D$  es fuertemente conexa y al quitar cualquier flecha  $(x, y)$  de  $D$ , la subdigráfica  $D - (x, y)$  ya no es fuertemente conexa.

Un ejemplo de una digráfica mínimamente fuerte lo tenemos en la digráfica (a) de la figura 2.7; observamos que al ser un ciclo es fuertemente conexa (teorema 2.3), y al quitar cualquier flecha, por ejemplo la flecha  $(v_1, v_2)$ , tenemos que no existe una  $v_1 v_2$ -trayectoria dirigida.

Un ejemplo de una digráfica que es fuertemente conexa, pero que no es mínimamente fuerte, es la digráfica (b) de la figura 2.7; observamos que tiene un ca-

mino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices,  $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ . Al quitar la flecha  $(v_1, v_3)$ , el camino dirigido cerrado  $C$  pasa por todos los vértices de la digráfica resultante; por el teorema 2.3 es fuertemente conexa. Por lo tanto, la digráfica (b) no es mínimamente fuerte.

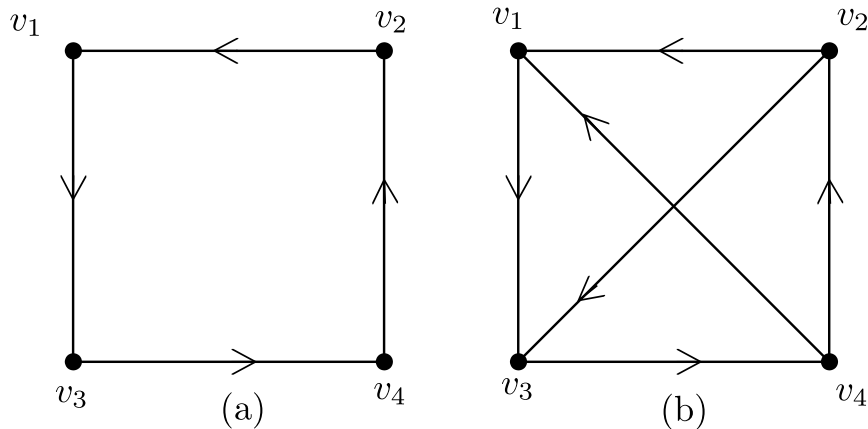


Figura 2.7: Ejemplos de una digráfica mínimamente fuerte y no mínimamente fuerte

Otro ejemplo de una digráfica mínimamente fuerte lo tenemos en la digráfica  $D$  de la figura 2.8. Como el camino dirigido cerrado  $C = (v_3, v_2, v_1, v_3, v_8, v_7, v_9, v_8, v_4, v_6, v_5, v_4, v_3)$  pasa por todos los vértices de  $D$ , entonces por el teorema 2.3,  $D$  es una digráfica fuertemente conexa. Ahora bien, observamos que la única  $v_3v_8$ -trayectoria dirigida es la flecha  $(v_3, v_8)$ , y por lo tanto, al quitar esta flecha, la digráfica  $D - (v_3, v_8)$  no es fuertemente conexa (análogamente para las flechas  $(v_8, v_4)$  y  $(v_4, v_3)$ ).

Para todas las demás flechas de la digráfica, al quitar alguna de ellas, la digráfica resultante tiene un vértice de ingrado 0 o un vértice de exgrado 0, lo cual significa que la digráfica resultante no es fuertemente conexa. Por ejemplo, si quitamos la flecha  $(v_7, v_9)$ , entonces tenemos que el exgrado de  $v_7$  es 0 en  $D - (v_7, v_9)$ , lo cual significa que esta digráfica no es fuertemente conexa. Así, podemos concluir, que  $D$  es mínimamente fuerte.



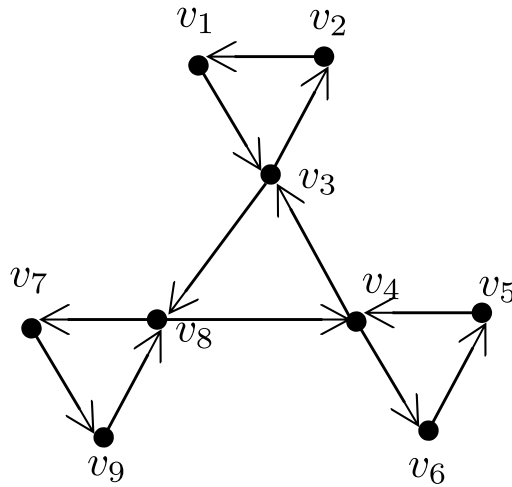


Figura 2.8: Digráfica mínimamente fuerte

Para finalizar este capítulo, presentamos varios resultados sobre propiedades de las digráficas mínimamente fuertes.

**Proposición 2.2.** *Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa, entonces  $D$  contiene una subdigráfica generadora  $D'$  mínimamente fuerte.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa. Procederemos por inducción sobre el número de flechas  $m$  de  $D$ .

**Base:** Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa con 2 flechas, entonces  $D$  es una subdigráfica generadora que es mínimamente fuerte, ya que es un ciclo.

Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa con 3 flechas, entonces  $D$  es una subdigráfica generadora que es mínimamente fuerte, ya que es un ciclo de longitud 3.

**Hipótesis de inducción:** Toda digráfica fuertemente conexa, con menos de  $m$  flechas, contiene una subdigráfica generadora que es mínimamente fuerte.

**Paso inductivo:** Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $m$  flechas. Tenemos dos casos:

**Caso 1:**  $D$  es una digráfica mínimamente fuerte.

En este caso  $D$  es la subdigráfica generadora buscada.

**Caso 2:**  $D$  no es una digráfica mínimamente fuerte.

Entonces existe una flecha  $(u, v)$  en  $D$  tal que  $D - (u, v)$  es fuertemente conexa. Por hipótesis de inducción, se tiene que  $D - (u, v)$  contiene una subdigráfica generadora mínimamente fuerte, digamos  $D'$ . Por lo tanto,  $D'$  también es una subdigráfica generadora mínimamente fuerte de  $D$ .  $\square$

**Proposición 2.3.** *Sea  $D$  una digráfica mínimamente fuerte. Si  $H$  es una subdigráfica fuertemente conexas de  $D$ , entonces  $H$  es mínimamente fuerte.*

*Demostración.* Sean  $D$  un digráfica mínimamente fuerte, y  $H$  una subdigráfica fuertemente conexas de  $D$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $H$  no es mínimamente fuerte. Entonces, existe una flecha  $(u, v)$  en  $H$  tal que  $H - (u, v)$  es fuertemente conexas.

Por demostrar, que  $D - (u, v)$  es fuertemente conexas.

Sean  $x$  y  $y$  dos vértices en  $D - (u, v)$ ; vamos a ver que existe un  $xy$ -camino dirigido.

Como  $D$  es fuertemente conexas, entonces existe una  $xy$ -trayectoria en  $D$ , digamos  $T$ . Consideramos dos casos:

**Caso 1:**  $(u, v) \notin F(T)$ .

En este caso  $T$  es una  $(x, y)$ -trayectoria en  $D - (u, v)$ .

**Caso 2:**  $(u, v) \in F(T)$ .

En este caso tenemos que la trayectoria  $T$  se escribe como  $T = (x, \dots, u, v, \dots, y)$ . Como  $H - (u, v)$  es fuertemente conexas, entonces existe una  $uv$ -trayectoria en  $H - (u, v)$ , digamos  $S$ . Por lo que, el camino dirigido  $T'$  dado por  $T' = (x, T, u) \cup (u, S, v) \cup (v, T, y)$  es un  $xy$ -camino dirigido en  $D - (u, v)$ , como se muestra en la figura 2.9.

Por lo tanto,  $D - (u, v)$  es fuertemente conexas; lo cual contradice que  $D$  es mínimamente fuerte.

Concluimos que  $H$  es mínimamente fuerte.

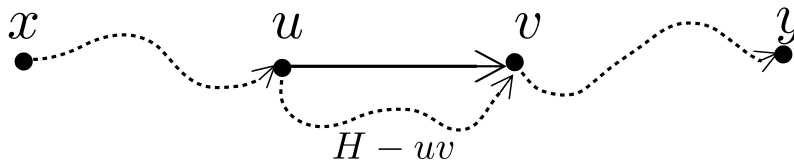


Figura 2.9:  $xy$ -trayectoria en  $D - (u, v)$

□

**Lema 2.6.** *Sea  $D$  una digráfica mínimamente fuerte. Si  $C$  es un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D$ , entonces  $C$  también pasa por todas las flechas de  $D$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica mínimamente fuerte, y  $C$  un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D$ ; sabemos que dicho camino existe por el teorema 2.3.

Por demostrar que  $C$  pasa por todas las flechas de  $D$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe una flecha  $(u, v)$  de  $D$  que no pertenece a  $F(C)$ .

Observamos que en la digráfica  $D - (u, v)$ ,  $C$  también es un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices, como se muestra en la figura 2.10, y por lo tanto,  $D - (u, v)$  es fuertemente conexas. Esto contradice que  $D$  es mínimamente fuerte.

Podemos concluir que  $C$  pasa por todas las flechas de  $D$ , que es lo que queríamos demostrar.

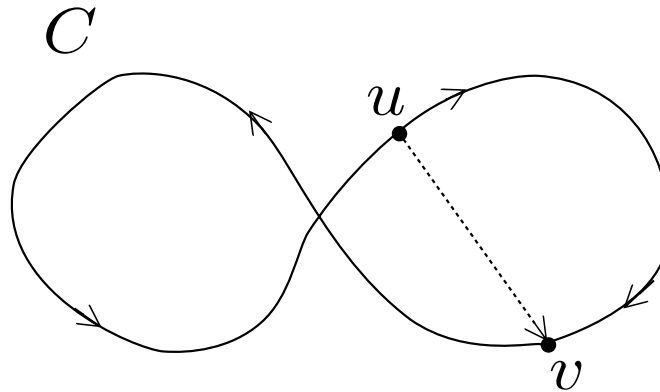


Figura 2.10:  $D - (u, v)$  fuertemente conexas

□

# Capítulo 3

## Coloraciones arcoíris para digráficas

En este capítulo damos la definición de coloración arcoíris para digráficas, que es el tema central de este trabajo. El objetivo de este capítulo se centra en presentar una serie de resultados sobre coloración arcoíris en digráficas que son fuertemente conexas o mínimamente fuertes.

En la primera sección, definimos la coloración arcoíris para digráficas, así como su número de coloración arcoíris. Damos una serie de cotas sobre la coloración arcoíris relacionadas con el diámetro y el tamaño de una digráfica. Para digráficas asimétricas de orden  $n$ , probamos que el número de coloración arcoíris está acotado por  $n$ .

En la segunda y tercera sección damos una serie de resultados cuyo objetivo es acotar con  $n - 1$  el número de coloración arcoíris para digráficas fuertemente conexas, con ciertas propiedades.

En la cuarta sección, demostramos que las digráficas mínimamente fuertes de orden  $n$ , que no son ciclos dirigidos, también cumplen que su número de coloración arcoíris está acotado por  $n - 1$ .

### 3.1. Coloraciones por flechas

Sean  $D$  una digráfica, y  $\{1, \dots, k\}$  un conjunto de número naturales que representan  $k$  colores; decimos que una función  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , es una **coloración** de las flechas de  $D$ . Si queremos especificar el número de colores, podemos decir que  $\varphi$  es una  **$k$ -coloración** de las flechas de  $D$ .

Dadas  $D$  una digráfica fuertemente conexa y una coloración  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de  $D$ , una trayectoria  $T = (x_0, \dots, x_r)$  es una **trayecto-**

**ria arcoíris** si sucede que  $\varphi((x_i, x_{i+1})) \neq \varphi((x_j, x_{j+1}))$  para  $i \neq j$ , con  $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, r-1\}$ , es decir; una trayectoria dirigida es arcoíris, si los colores de las flechas no se repiten. Decimos que una coloración  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  es una **coloración arcoíris**, si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  de  $D$ , podemos encontrar una  $uv$ -trayectoria arcoíris; para especificar el número de colores decimos también que  $\varphi$  es una  **$k$ -coloración arcoíris**. Finalmente, llamamos **número de coloración arcoíris** al mínimo de las  $k$  tales que  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  es una  $k$ -coloración arcoíris, y lo denotamos como  $\bar{rc}(D)$ , por sus siglas en inglés; *rainbow colouring*.

Como ejemplos de coloraciones arcoíris, en la figura 3.1 tenemos dos ciclos dirigidos de longitud 3 y 4, respectivamente. Las flechas de estos ciclos dirigidos han sido coloreadas todas con colores distintos, y por lo tanto, cualquier trayectoria entre cualquier par de vértices es una trayectoria arcoíris.

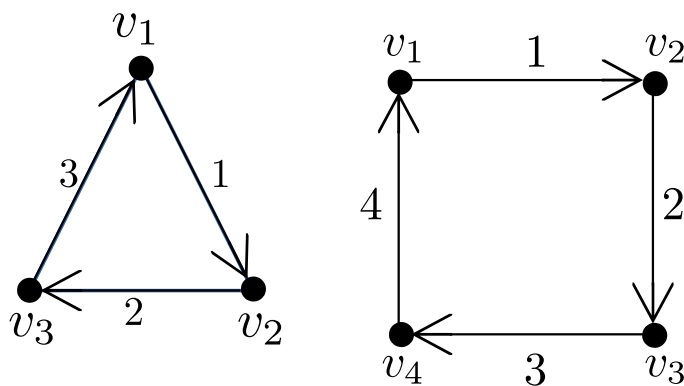


Figura 3.1: Ejemplos de coloración arcoíris en digráficas

A continuación veremos algunos resultados sobre el número de coloración arcoíris.

**Teorema 3.1.** *Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa, entonces:*

$$\text{diám}(D) \leq \bar{rc}(D) \leq |F(D)|.$$

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $D$ , tales que su distancia sea igual al diámetro de  $D$ ; es decir,  $d(u, v) = \text{diám}(D)$ . Consideremos una coloración arcoíris  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, \bar{rc}(D)\}$ ; es decir,  $\varphi$  utiliza  $\bar{rc}(D)$  colores.

Sea  $T$  una  $uv$ -trayectoria arcoíris bajo  $\varphi$ . Se sigue que la longitud de  $T$  necesariamente es mayor o igual a la distancia de  $u$  hacia  $v$ , que a su vez coincide con el diámetro de  $D$ , así tenemos que:

$$\text{diám}(D) = d(u, v) \leq l(T). \quad (3.1)$$

Por otro lado, dado que  $T$  es una trayectoria arcoíris inducida por  $\varphi$ , sabemos que  $T$  ocupa a lo más  $\vec{rc}(D)$  colores, por lo tanto:

$$l(T) \leq \vec{rc}(D). \quad (3.2)$$

Por transitividad entre 3.1 y 3.2 obtenemos que:

$$\text{diám}(D) \leq \vec{rc}(D). \quad (3.3)$$

Para demostrar la otra desigualdad, que indica que  $\vec{rc}(D) \leq |F(D)|$ , tomamos una coloración arcoíris  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, |F(D)|\}$ , en la que a cada flecha le asignamos un color diferente; con esta coloración, cualquier trayectoria que tomemos es una trayectoria arcoíris, y por lo tanto el número de coloración arcoíris es menor o igual a  $|F(D)|$ .  $\square$

**Proposición 3.1.** *Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa con  $n$  vértices, entonces:*

$$\vec{rc}(D) \leq n.$$

*Demostración.* Consideremos la coloración  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  tal que  $\varphi(v_i, v_j) = j$ ; es decir, a todas las flechas cuya cabeza es  $v_j$ , las coloreamos con el color  $j$ .

Por lo tanto, cualquier trayectoria  $T = (v_0, \dots, v_k)$  es una trayectoria arcoíris, ya que por definición de  $\varphi$ :

$$i + 1 = \varphi(v_i, v_{i+1}) \neq \varphi(v_j, v_{j+1}) = j + 1$$

para  $i \neq j$ .  $\square$

**Proposición 3.2.** *Sea  $D$  una digráfica asimétrica y mínimamente fuerte con  $n$  vértices. Si  $D$  es un ciclo dirigido entonces  $\vec{rc}(D) = n$ .*

*Demostración.* Sea  $D = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo dirigido con  $n$  vértices. Tomemos una coloración arcoíris mínima para las flechas  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, \vec{rc}(D)\}$ .

Sabemos que en un ciclo dirigido, para cualesquiera dos vértices  $x$  y  $y$ , existe una única  $(x, y)$ -trayectoria dirigida, lo que implica que  $T = (x_0, \dots, x_{n-1})$  es la única  $(x_0, x_{n-1})$ -trayectoria dirigida en  $D$ . Por lo tanto, como  $\varphi$  es una coloración arcoíris y  $T$  es única, entonces  $T$  es una trayectoria

dirigida arcoíris de longitud  $n - 1$ ; es decir, todas las flechas de  $T$  tienen un color distinto.

Observamos que la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$  tiene un color distinto al color de todas las flechas en  $T$ , de lo contrario si  $\varphi((x_{n-1}, x_0)) = \varphi((x_j, x_{j+1}))$  para alguna  $j$  en  $\{1, \dots, n - 1\}$ ; entonces la trayectoria dirigida  $T' = (x_{n-1}, x_0) \cup (x_0, T, x_{j+1})$ , no sería una trayectoria dirigida arcoíris, lo cual no es posible, ya que  $T'$  es la única  $(x_{n-1}, x_{j+1})$ - trayectoria dirigida en  $D$  y  $\varphi$  es una coloración arcoíris.

Por lo tanto, la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$  tiene un color distinto al color de todas las flechas en  $T$ . Así,  $n \leq \vec{rc}(D)$ , lo que implica que  $\vec{rc}(D) = n$ , por la proposición 3.1.

□

**Proposición 3.3.** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa. Si  $H$  es una subdigráfica generadora y fuerte de  $D$ , entonces:*

$$\vec{rc}(D) \leq \vec{rc}(H).$$

*Demostración.* Sea  $\varphi : F(H) \rightarrow \{1, \dots, \vec{rc}(H)\}$  una coloración arcoíris en  $H$ . Dado que  $H$  es una subdigráfica de  $D$ , podemos extender el dominio de la coloración  $\varphi$  para obtener una coloración  $\psi$  en  $D$ , de la siguiente manera:

$$\psi(u, v) = \begin{cases} \varphi(u, v) & \text{si } (u, v) \in F(H) \\ 1 & \text{si } (u, v) \notin F(H) \end{cases}$$

Con esta nueva coloración  $\psi$ , se tiene claramente que toda trayectoria arcoíris inducida por  $\varphi$  es también una trayectoria arcoíris en  $\psi$  por definición. Asimismo, dado que  $\psi$  es una posible coloración arcoíris en  $D$  (no necesariamente una coloración arcoíris mínima), entonces  $\vec{rc}(H)$  es una cota superior de  $\vec{rc}(D)$ ; es decir que  $\vec{rc}(D) \leq \vec{rc}(H)$ . □

Para ejemplificar las proposiciones anteriores, observamos que la digráfica  $D$  de la figura 3.2, tiene una 2-coloración arcoíris. Utilizando el teorema 3.1, dado que el  $diám(D) = 2$ , entonces se tiene que  $\vec{rc}(D) = 2$ . Por otro lado, vemos que la subdigráfica  $H$  de la figura 3.2, es un ciclo dirigido de longitud 4, y es una subdigráfica generadora de  $D$ , que tiene número de coloración arcoíris  $\vec{rc}(H) = 4$ .

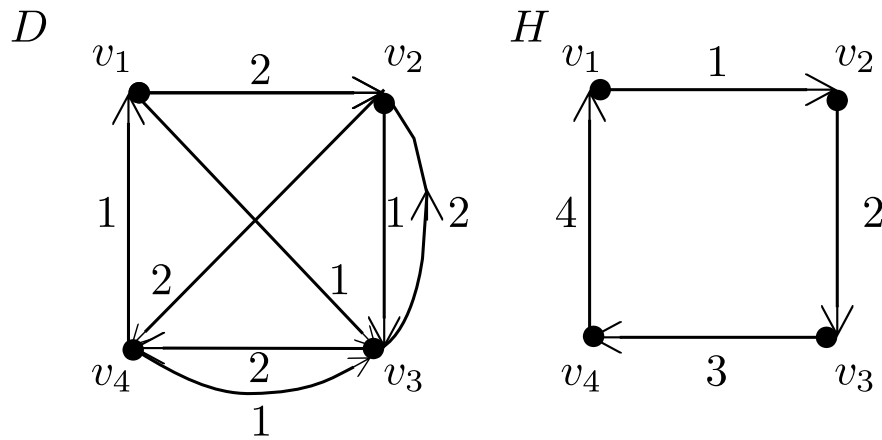


Figura 3.2:  $\vec{rc}(D) \leq \vec{rc}(H)$



## 3.2. Digráficas mínimamente fuertes

En esta sección se demuestran un lema y un corolario que relacionan la coloración arcoíris con las digráficas mínimamente fuertes; estos resultados se utilizarán en las siguientes secciones.

**Lema 3.2.** *Sea  $D$  una digráfica mínimamente fuerte. Si  $D$  no es un ciclo dirigido, entonces existe  $H$  una subdigráfica fuerte de  $D$  y un vértice  $x$  en  $V(D) - V(H)$  tal que  $N_D^-(x) = \{y\}$ , para algún vértice  $y$  en  $V(H)$ ; es decir, el vértice  $x$  solamente tiene un invecino, y este invecino está en  $H$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica mínimamente fuerte que no es un ciclo.

Construiremos una sucesión de subdigráficas de  $D$ ,  $H_i$ , tal que cumplen las siguientes propiedades:

- (1) para todo  $i \geq 0$ ,  $H_i$  es fuerte,
- (2) para todo  $i \geq 1$ ,  $H_{i-1}$  es una subdigráfica propia de  $H_i$ ,
- (3) para todo  $i \geq 0$ ,  $V(D) - V(H_i) \neq \emptyset$ ,

hasta encontrar una subdigráfica  $H_k$  en esta sucesión, tal que existe un vértice  $x_k$  en  $V(D) - V(H_k)$  y  $N_D^-(x_k) = \{y_k\}$ , para  $y_k$  en  $V(H_k)$ .

**Paso 0:** Construcción de  $H_0$ .

Como  $D$  es fuerte, entonces por el corolario 2.1, tenemos que  $D$  contiene un ciclo dirigido al que llamaremos  $C$ .

Nombramos a  $H_0 = C$ . Claramente,  $H_0$  es fuerte por ser un ciclo; más aún, como  $D$  es mínimamente fuerte, entonces por la proposición 2.3,  $H_0$  es una subdigráfica mínimamente fuerte. Dado que  $D$  no es un ciclo, entonces  $C$  es un ciclo inducido en  $D$  y existe al menos un vértice fuera de  $H_0$ ; es decir,  $V(D) - V(H_0) \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $H_0$  cumple las propiedades (1) y (3).

Preguntamos si existe un vértice  $x_0$  en  $V(D) - V(H_0)$ , tal que  $N_D^-(x_0) = \{y_0\}$ , para algún vértice  $y_0$  en  $V(H_0)$ . En caso afirmativo,  $H_0$  es la subdigráfica deseada y  $x_0$  el vértice buscado.

De lo contrario, tenemos que para cualquier  $x$  en  $V(D) - V(H_0)$  tal que  $N_D^-(x) \cap V(H_0) \neq \emptyset$ , se cumple que  $\delta_D^-(x) \geq 2$ . En este caso elegimos a  $x_1$  en  $V(D) - V(H_0)$  tal que  $N_D^-(x_1) \cap V(H_0) \neq \emptyset$  y  $\delta_D^-(x_1) \geq 2$ . El vértice  $x_1$  existe porque  $D$  es fuertemente conexa.

**Paso 1:** Construcción de la subdigráfica  $H_1$ , a partir de  $H_0$  y  $x_1$ .

Como  $D$  es fuertemente conexa, existe  $T_1$  una  $(\{x_1\}, V(H_0))$ -trayectoria de longitud mínima. Llamemos a  $y_1$  al último vértice de  $T_1$ . Observamos que  $y_1$  es el único vértice en  $T_1$  que pertenece a  $H_0$ , por la minimalidad de  $T_1$ .

Como  $N_D^-(x_1) \cap V(H_0) \neq \emptyset$ , entonces existe  $x'_1$  un vértice en  $H_0$  que es invecino de  $x_1$ ; esto es equivalente a decir que existe la flecha  $(x'_1, x_1)$ .

Construimos a  $H_1$  de la siguiente manera (ver la figura. 3.3):

$$V(H_1) = V(H_0) \cup \{x_1\} \cup V(T_1), \text{ y}$$

$$F(H_1) = F(H_0) \cup \{(x'_1, x_1)\} \cup F(T_1).$$

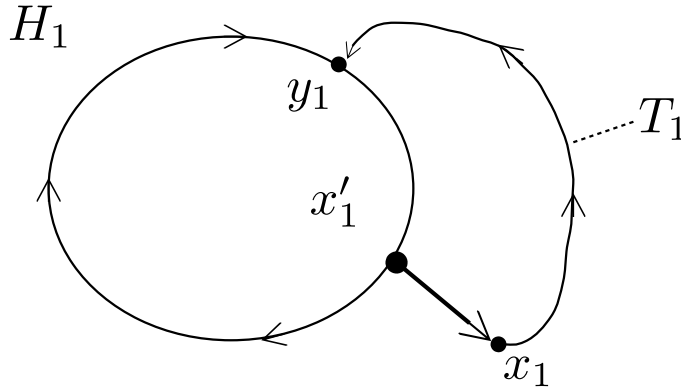


Figura 3.3: Subdigráfica  $H_1$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el ciclo dirigido  $C = H_0$  empieza y termina en el vértice  $x'_1$ . Observamos que el camino dirigido cerrado  $H_0 \cup (x'_1, x_1) \cup T_1 \cup (y_1, H_0, x'_1)$ , pasa por todos los vértices de  $H_1$ . Por el teorema 2.3,  $H_1$  es fuerte; por lo tanto,  $H_1$  satisface la condición (1). Más aún,  $H_1$  es mínimamente fuerte, por la proposición 2.3.

Dado que  $H_1$  es mínimamente fuerte, el lema 2.6 garantiza que el camino dirigido cerrado  $H_0 \cup (x'_1, x_1) \cup T_1 \cup (y_1, C, x'_1)$ , pasa por todas las flechas de  $H_1$ ; es decir,  $H_1$  es una subdigráfica inducida  $D[V(H_1)]$ . Por lo tanto,  $V(D) - V(H_1) \neq \emptyset$ , ya que estamos suponiendo que  $\delta_D^-(x_1) \geq 2$ ; esto significa que  $H_1$  cumple la propiedad (3).

Por construcción,  $H_0$  es una subdigráfica propia de  $H_1$ ; por lo tanto,  $H_1$  satisface la condición (2).



es decir,  $H_2$  es una subdigráfica inducida  $D[V(H_2)]$ . Por lo tanto,  $V(D) - V(H_2) \neq \emptyset$  ya que estamos suponiendo que  $\delta_D^-(x_2) \geq 2$ ; esto significa que  $H_2$  cumple la propiedad (3).

Por construcción, también tenemos que  $H_1$  es una subdigráfica propia de  $H_2$ ; por lo tanto  $H_2$  satisface la condición (2).

Preguntamos, nuevamente, si existe  $x_3$  en  $V(D) - V(H_2)$  tal que  $N_D^-(x_3) = \{y_3\}$ , para algún vértice  $y_3$  en  $V(H_2)$ . En caso afirmativo,  $H_2$  sería la digráfica deseada y  $x_3$  sería el vértice buscado.

De lo contrario, tenemos que para cualquier  $x$  en  $V(D) - V(H_2)$  tal que  $N_D^-(x) \cap V(H_2) \neq \emptyset$ , se cumple que  $\delta_D^-(x) \geq 2$ . En este caso elegimos a  $x_3$  en  $V(D) - V(H_2)$  tal que  $N_D^-(x_3) \cap V(H_2) \neq \emptyset$  y  $\delta_D^-(x_3) \geq 2$ . El vértice  $x_3$  existe porque  $D$  es fuertemente conexa.

Siguiendo con este procedimiento, observamos que en cada iteración  $j$ , estamos tomando al menos un vértice  $x_j$  que no está en la subdigráfica  $H_{j-1}$ ; es decir, nuestra sucesión de digráficas es una sucesión creciente. Ahora bien, ya que la digráfica  $D$  es finita, en particular el conjunto de vértices  $V(D)$  también es un conjunto finito; de tal manera que en alguna de las iteraciones, digamos la iteración  $k$ , encontramos la subdigráfica  $H_k$  deseada y el vértice  $x_{k+1}$  buscado. □

Como consecuencia del lema 3.2 tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 3.2.1.** *Sea  $D$  una digráfica mínimamente fuerte. Si  $D$  no es un ciclo dirigido, entonces existe  $C$  un ciclo dirigido en  $D$  y un vértice  $x$  en  $V(D) - V(C)$  tal que  $N_D^-(x) = \{y\}$  para algún vértice  $y$  en  $C$ .*

*Demostración.* Dado que estamos suponiendo que  $D$  es mínimamente fuerte, y  $D$  no es un ciclo dirigido, entonces estamos bajo las hipótesis del lema 3.2.

Sean  $H$  la subdigráfica fuertemente conexa que nos garantiza el lema 3.2, y  $x$  en  $V(D) - V(H)$  tal que  $N_D^-(x) = \{y\}$ , para alguna  $y$  en  $H$ . Al utilizar el corolario 2.3.1, éste nos garantiza la existencia de un ciclo  $C$  que empiece y termine con el vértice  $y$ . Observamos que  $C$  es mínimamente fuerte, por ser un ciclo, y que el vértice  $y \in V(C)$  cumple que  $N_D^-(x) = \{y\}$ , que es lo que queríamos demostrar. □

### 3.3. Coloración arcoíris y la propiedad de la trayectoria

En esta sección enunciamos la definición de la propiedad de la trayectoria; ésta nos será de gran utilidad para reducir las cotas de la coloración arcoíris en las digráficas fuertemente conexas y mínimamente fuerte.

Sean  $D$  una digráfica, y  $(x',x)$ ,  $(y',y)$  dos flechas de  $D$ , no necesariamente distintas. Diremos que el par de flechas  $\{(x',x), (y',y)\}$  tienen la **propiedad de la trayectoria** si existe una  $(x',y)$ -trayectoria dirigida que no contiene a la flecha  $(x',x)$ , y también existe una  $(y',x)$ -trayectoria dirigida que no contiene a la flecha  $(y',y)$ , como se muestra en la figura 3.5 .

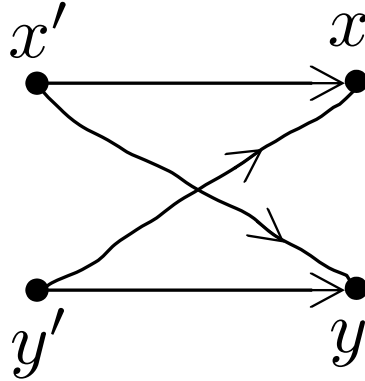


Figura 3.5: Las flechas  $(x',x)$  y  $(y',y)$  tienen la propiedad de la trayectoria.

**Teorema 3.3.** Sean  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $n$  vértices, y  $(x',x)$  y  $(y',y)$  dos flechas de  $D$  con  $x \neq y$ , tales que  $\delta_D^-(x) = \delta_D^-(y) = 1$ . Si el par de flechas  $\{(x',x), (y',y)\}$  tiene la propiedad de la trayectoria, entonces  $\bar{rc}(D) \leq n - 1$ .

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $n$  vértices, y  $(x',x)$  y  $(y',y)$  dos flechas que tienen la propiedad de la trayectoria, con  $\delta_D^-(x) = \delta_D^-(y) = 1$ . Consideremos  $T_1$  una  $(x',y)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x',x)$ , y  $T_2$  una  $(y',x)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(y',y)$ .

Dado que por hipótesis  $\delta_D^-(x) = \delta_D^-(y) = 1$ , entonces necesariamente la flecha  $(y',y)$  pertenece a la trayectoria dirigida  $T_1$ , y la flecha  $(x',x)$  pertenece a la trayectoria dirigida  $T_2$ , como se muestra en la figura 3.6.

Consideremos la función  $c : V(D) \rightarrow \{1, \dots, n - 1\}$  dada por:

$$c(x) = c(y) = 1,$$

### 3.3. COLORACIÓN ARCOÍRIS Y LA PROPIEDAD DE LA TRAYECTORIA 41

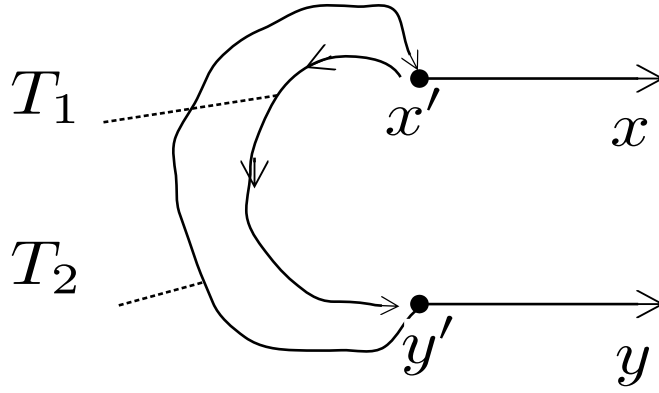


Figura 3.6: Trayectorias  $T_1$  y  $T_2$

$$c(v) \neq 1, \text{ para todo } v \in V(D) - \{x, y\}, \text{ y}$$

$$c(u) \neq c(v), \text{ para todo } u \text{ y } v \text{ en } V(D) - \{x, y\}.$$

A partir de esta función, construimos una coloración por flechas  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$  dada por:

$$\varphi((u, v)) = c(v) \text{ para toda flecha } (u, v),$$

es decir, la coloración  $\varphi$  colorea a todas las flechas con el color de la cabeza de la flecha, y repite el color 1 para las flechas  $(x', x)$  y  $(y', y)$ .

**Afirmación:**  $\varphi$  es una coloración arcoíris de las flechas de  $D$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $D$  y  $T$  una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida, con  $T = (u = w_0, \dots, w_k = v)$ . Por demostrar que existe una  $(u, v)$ -trayectoria arcoíris.

**Caso 1:**  $(x', x)$  y  $(y', y)$  no pertenecen a  $F(T)$ .

Por demostrar que  $T$  es una trayectoria arcoíris.

En este caso observamos que  $x$  y  $y$  no pertenecen a  $V(T) - \{w_0\}$ , dado que  $\delta_D^-(x) = 1 = \delta_D^-(y)$ .

Como  $x$  y  $y$  no pertenecen a  $V(T) - \{w_0\}$ , tenemos que por definición  $c(w) \neq c(z)$  para todo  $w$  y  $z$  en  $V(T) - \{w_0\}$ , y además  $c(w) \neq 1$  para todo  $w$  en  $V(T) - \{w_0\}$ . En el caso en el que  $w_0$  sea  $x$  o  $y$  tendremos que  $c(w_0) = 1$  y por lo tanto, podemos garantizar que  $c(w) \neq c(z)$  para todo  $w$  y  $z$  en  $V(T)$ . En el caso en el que  $w_0$  no es  $x$  o  $y$  tenemos por definición de  $c$  que también  $c(w) \neq c(z)$ , para todo  $w$  y  $z$  en  $V(T)$ .

Por lo tanto, bajo la coloración  $\varphi$ , tenemos que la trayectoria dirigida  $T$  es una trayectoria arcoíris ya que:

$$\varphi((u, v)) = c(v) \neq c(z) = \varphi((w, z))$$

para todo par de flechas distintas  $(u, v)$  y  $(w, z)$  en  $F(T)$ . Más aún,  $c((u, v)) \neq 1$  para toda  $(u, v)$  en  $F(T)$ .

**Caso 2:**  $(x', x) \in F(T)$  y  $(y', y) \notin F(T)$ .

Por demostrar que  $T$  es una trayectoria arcoíris.

Supongamos  $(w_i, w_{i+1}) = (x', x)$  para algún  $i$  en  $\{0, \dots, k-1\}$ .

Observamos que bajo la coloración  $\varphi$  la flecha  $(x', x)$  tiene el color  $\varphi(x', x) = c(x) = 1$  y dado que por hipótesis la flecha  $(y', y)$  no pertenece a  $F(T)$ , entonces no hay repetición del color 1 en  $F(T)$ . Por lo tanto, podemos garantizar que  $c(w) \neq c(z)$  para todo  $w$  y  $z$  en  $V(T)$ . Esto implica que la trayectoria  $T$  es arcoíris, dado que para cualquier par de flechas distintas se tiene que:

$$c(w_{j+1}) = \varphi(w_j, w_{j+1}) \neq \varphi(w_i, w_{i+1}) = c(w_{i+1}) \text{ para } i \neq j.$$

**Caso 3:**  $(y', y) \in F(T)$  y  $(x', x) \notin F(T)$ .

Por demostrar que  $T$  es una trayectoria arcoíris.

Este caso se resuelve de forma análoga al caso 2, intercambiando los vértices  $x'$  y  $x$  por  $y'$  y  $y$ , respectivamente.

**Caso 4:**  $(x', x) \in F(T)$  y  $(y', y) \in F(T)$ .

Construiremos una  $(u, v)$ -trayectoria arcoíris.

En este caso, asumimos sin pérdida de generalidad que  $(x', x)$  aparece antes que  $(y', y)$  en la sucesión de vértices de la trayectoria.

Dado que tanto  $x$  como  $y$  pertenecen a  $T$ , entonces tenemos la repetición del color  $\varphi(x', x) = \varphi(y', y) = 1$ .

Utilizando la trayectoria  $T_1$ , consideremos al camino dirigido dado por la unión de las siguientes trayectorias:

$$(u, T, x') \cup T_1 \cup (y, T, v).$$

Por el teorema 2.1, podemos extraer una trayectoria de este camino dirigido. Sabemos que la flecha  $(x', x)$  no pertenece a esta nueva trayectoria, entonces estamos en el caso 2 de esta demostración, y por lo tanto, tenemos una trayectoria arcoíris, ver la figura 3.7.

De todos los casos anteriores podemos concluir que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Observamos que en el teorema anterior, la propiedad de la trayectoria nos permite reducir a  $n - 1$  la cota superior de una coloración arcoíris; dado que con

### 3.4. COLORACIÓN ARCOÍRIS PARA DIGRÁFICAS MÍNIMAMENTE FUERTES 43

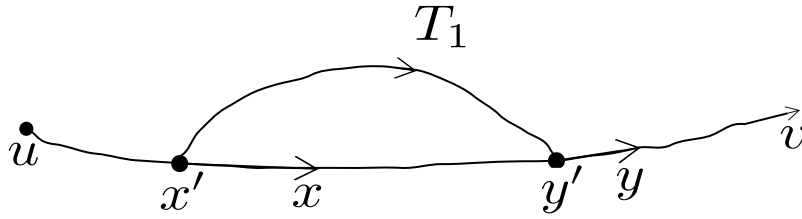


Figura 3.7:  $(u, v)$  camino dirigido cerrado dado por  $(u, T, x') \cup T_1 \cup (y, T, v)$

esta propiedad podemos repetir los colores de los vértices que son la cabeza de las flechas que tienen la propiedad de la trayectoria.

**Corolario 3.3.1.** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $n$  vértices. Si existe un vértice  $z$  en  $D$  tal que  $z$  tiene al menos dos exvecinos diferentes  $x$  y  $y$ , con  $\delta_D^-(x) = \delta_D^-(y) = 1$ , entonces  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Para probar este corolario basta con renombrar el vértice  $z$  por un lado como  $x'$ , obteniendo la flecha  $(x', x)$ , y por otro lado renombrar a  $z$  como  $y'$ , obteniendo la flecha  $(y', y)$ .

Notemos que  $(x', x)$  y  $(y', y)$  tienen la propiedad de la trayectoria dado que ambas son trayectorias dirigidas de una sola flecha y las flechas son distintas; es decir,  $(z = x', y)$  es una  $(x', y)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x', x)$  y también  $(z = y', x)$  es una  $(y', x)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(y', y)$ .

Por lo tanto, estamos bajo las hipótesis del teorema 3.3, y concluimos que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .

□

## 3.4. Coloración arcoíris para digráficas mínimamente fuertes

El siguiente teorema presenta el resultado principal de este capítulo, en el que podemos reducir a  $n - 1$ , la cota del número de coloración arcoíris para las digráficas mínimamente fuertes que no son ciclos dirigidos.

**Teorema 3.4.** *Sea  $D$  una digráfica asimétrica y mínimamente fuerte con  $n$  vértices. Si  $D$  no es un ciclo, entonces  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica asimétrica y mínimamente fuerte con  $n$  vértices, que no es un ciclo. Por el corolario 3.2.1, tenemos que existen un ciclo diri-



gido  $C$  y un vértice  $x$  en  $V(D) - V(C)$ , tal que  $N_D^-(x) = \{y\}$  para algún vértice  $y$  en  $V(C)$ . Llamemos  $z$  al sucesor del vértice  $y$  en  $C$ .

Vamos a construir una sucesión de pares de subdigráficas  $(D_i, Q_i)$ , con  $i \geq 1$ , tales que:

- (1) para todo  $i \geq 1$ ,  $D_i$  es una subdigráfica fuertemente conexa de  $D$ ;
- (2) para todo  $i \geq 1$ ,  $Q_i$  es una oreja en  $D_i$ ;
- (3) para todo  $i \geq 2$ ,  $D_{i-1}$  es una subdigráfica propia de  $D_i$ , donde  $D_i = D_{i-1} \cup Q_i$ ;
- (4) para toda  $i \geq 1$ , existe una  $(y, z_i)$ -trayectoria que no contiene a la flecha  $(y, x)$ , y existe una  $(y_i, x)$ -trayectoria que no contiene a la flecha  $(y_i, z_i)$ , donde  $(y_i, z_i)$  es la primer flecha de la oreja  $Q_i$ ; es decir, las flechas  $(y, x)$  y  $(y_i, z_i)$  cumplen la propiedad de la trayectoria;

hasta llegar, en estas iteraciones, a un paso  $k$  en el que encontramos un vértice  $z_k$ , tal que  $\delta_D^-(z_k) = 1$ ; por lo que las flechas  $(y, x)$  y  $(y_k, z_k)$  tienen la propiedad de la trayectoria, y podemos aplicar el teorema 3.3, concluyendo que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .

**Paso 1:** Construcción del par  $(D_1, Q_1)$ .

Sean  $T_1$  una  $(x, C)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima, y  $t$  el último vértice de  $T_1$ , como se muestra en la figura 3.8. Observemos que  $t$  es el único vértice de  $T_1$  que pertenece a  $V(C)$ . Observamos también que  $y \neq t$  dado que estamos suponiendo que  $D$  es antisimétrica.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el ciclo dirigido  $C$  empieza y termina en el vértice  $y$ .

Llamamos  $Q_1$  a la trayectoria dirigida  $Q_1 = (y, C, t)$ .

Nombramos como  $D_1$ , a la subdigráfica de  $D$  dada por:

$$V(D_1) = V(C) \cup V(T_1) \text{ y,}$$

$$F(D_1) = F(C) \cup \{(y, x)\} \cup F(T_1).$$

Por demostrar que el par  $(D_1, Q_1)$  satisface las condiciones (1)-(4).

**Propiedad (1) para  $(D_1, Q_1)$ :**  $D_1$  es una subdigráfica fuertemente conexa de  $D$ .

Para probar la conexidad fuerte de  $D_1$ , exhibimos a  $C_1$ , un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D_1$  como sigue:

$$C_1 = C \cup (y, x) \cup T_1 \cup (t, C, y),$$

### 3.4. COLORACIÓN ARCOÍRIS PARA DIGRÁFICAS MÍNIMAMENTE FUERTES 45

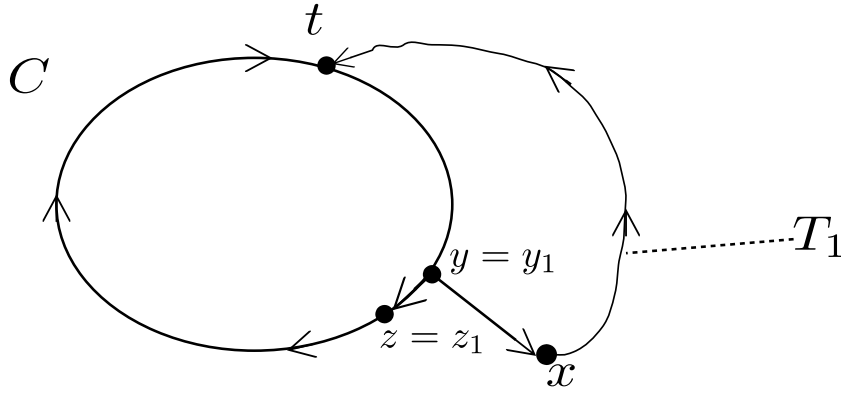


Figura 3.8: Subdigráfica  $D_1$ , que resulta de unir al ciclo  $C$  con la flecha  $(y,x)$  y la trayectoria  $T_1$ .

por el teorema 2.3,  $D_1$  es fuertemente conexa. Más aún, por la proposición 2.3,  $D_1$  es mínimamente fuerte, y por el lema 2.6,  $D_1$  es una subdigráfica inducida de  $D$ .

**Propiedad (2) para  $(D_1, Q_1)$ :**  $Q_1$  es una oreja en  $D_1$ .

Dado que  $C$  es un ciclo dirigido en  $D_1$ , entonces todos los vértices de  $V(C) - \{y, t\}$  tienen grado 2 en  $D_1$ ; En el caso de los vértices extremos  $y$  y  $t$  mostramos que  $\delta_{D_1}(y) > 2$ , y  $\delta_{D_1}(t) > 2$ .

Para el vértice  $y$ , basta con mencionar al antecesor y al sucesor de  $y$  en  $C$ ; y adicionalmente la flecha  $(y,x)$  nos garantiza que  $\delta_{D_1}(y) > 2$ , como se aprecia en la figura 3.8.

Asimismo, el vértice  $t$  tiene antecesor y sucesor en  $C$ , y también tiene un invecino que proviene de  $T_1$ , garantizando que  $\delta_{D_1}(t) > 2$ .

Por lo tanto,  $Q_1$  es una oreja en  $D_1$ .

**Propiedad (3) para  $(D_1, Q_1)$ :** Como estamos construyendo el primer par  $(D_1, Q_1)$ , no es necesario que cumpla con la condición 3.

**Propiedad (4) para  $(D_1, Q_1)$ :**  $D_1$  cumple la condición 4.

Mostraremos que las flechas  $(y_1, z_1)$  y  $(y, x)$  cumplen la propiedad de la trayectoria.

Observamos que si tomamos  $z = z_1$  y  $y = y_1$ , entonces la flecha  $(y, z_1)$  es una  $(y, z_1)$ -trayectoria que no contiene a  $(y, x)$ , y también tenemos que la flecha  $(y_1, x)$  es una  $(y_1, x)$ -trayectoria que no contiene a  $(y_1, z_1)$ ; es decir, las flechas  $(y, x)$  y  $(y_1, z_1)$  cumplen la propiedad de la trayectoria. Por lo tanto, el par  $(D_1, Q_1)$  cumple con la condición 4.

Ahora bien, si  $\delta_D^-(z_1) = 1$ , entonces estamos en condiciones de aplicar el teorema 3.3 y concluir que  $\bar{rc}(D) \leq n - 1$ .

De lo contrario, tenemos que  $\delta_D^-(z_1) \geq 2$ , y pasamos a la segunda iteración, construyendo el siguiente par  $(D_2, Q_2)$ .

**Paso 2:** Construcción del par  $(D_2, Q_2)$ .

Sea  $v_1$  un invecino de  $z_1$ , distinto de  $y = y_1$ , el cual existe ya que  $\delta_D^-(z_1) \geq 2$ . Observamos que  $v_1 \notin V(D_1)$ , ya que  $D_1$  es una subdigráfica inducida de  $D$ .

Sea  $T_2$  una  $(D_1, v_1)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima. Llamemos a sus primeros dos vértices  $y_2$  y  $z_2$  respectivamente, como se muestra en la figura 3.9. Observamos que  $y_2 \neq z_1$  por la hipótesis de antisimetría.

Nombramos como  $D_2$  a la subdigráfica dirigida dada por:

$$V(D_2) = V(D_1) \cup V(T_2),$$

o

$$F(D_2) = F(D_1) \cup F(T_2) \cup \{(v_1, z)\}.$$

Antes de definir a  $Q_2$ , vamos a demostrar que  $y_2 \in V(Q_1)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $y_2 \notin V(Q_1)$ . Tenemos dos casos:

**Caso 1:**  $y_2 \in V(C) - V(Q_1)$ .

En este caso podemos exhibir a  $T'_2$  una  $(y, z_1)$ -trayectoria que no pasa por la flecha  $(y, z_1)$ , de la siguiente manera:

$$T'_2 = (y, x) \cup T_1 \cup (t, C, y_2) \cup T_2 \cup (v_1, z_1).$$

Por lo tanto, en  $C_2$ , cada que encontremos a la flecha  $(y, z_1)$ , ésta se puede sustituir por la trayectoria dirigida  $T'_2$ . Así, obtenemos un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D_2$  y que no contiene a la flecha  $(y, z_1)$ ; lo que implica que  $D_2 - (y, z_1)$  es una digráfica fuertemente conexa. Esto contradice la minimalidad de  $D_2$ .

**Caso 2:**  $y_2 \in V(T_1)$ .

En este caso podemos también exhibir a  $T''_2$  una  $(y, z_1)$ -trayectoria que no pasa por la flecha  $(y, z_1)$  como sigue:

$$T''_2 = (y, T_1, y_2) \cup T_2 \cup (v_1, z_1)$$

De esta manera, nuevamente en  $C_2$ , cada que encontremos a la flecha  $(y, z_1)$  esta se puede sustituir por la trayectoria dirigida  $T''_2$ . Así, obtenemos un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D_2$  y que no contiene a la flecha

### 3.4. COLORACIÓN ARCOÍRIS PARA DIGRÁFICAS MÍNIMAMENTE FUERTES 47

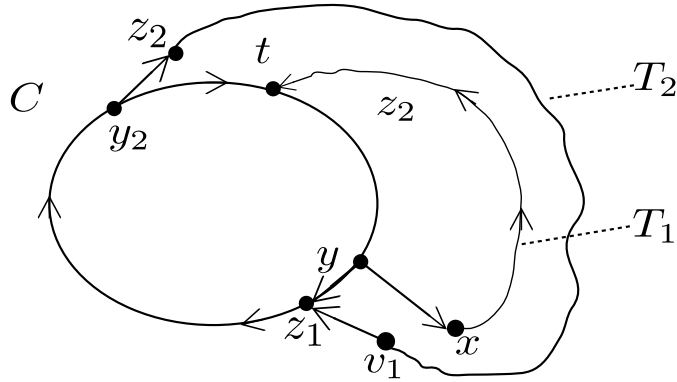


Figura 3.9: Subdigráfica  $D_2$

$(y, z_1)$ ; lo que implica que  $D_2 - (y, z_1)$  es una digráfica fuertemente conexa. Esto contradice la minimalidad de  $D_2$ .

Por lo tanto,  $y_2 \in V(Q_1)$ .

Sea  $Q_2$  la trayectoria dirigida  $T_2 \cup (v_1, z_1)$ .

Por demostrar que el par  $(D_2, Q_2)$  satisface las condiciones (1)-(4).

**Propiedad (1) para  $(D_2, Q_2)$ :**  $D_2$  es una subdigráfica fuertemente conexa de  $D$ .

Como  $D_1$  es fuertemente conexa, tomamos a  $C_1$  el camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D_1$ ; sin pérdida de generalidad, supongamos que  $C_1$  empieza y termina en  $y_2$ .

Para probar la conexidad fuerte de  $D_2$ , exhibimos a  $C_2$ , un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $D_2$ , como sigue:

$$C_2 = C_1 \cup T_2 \cup (v_1, z) \cup (z, C_1, y_2),$$

por el teorema 2.3,  $D_2$  es fuertemente conexa. Más aún, por la proposición 2.3,  $D_2$  es mínimamente fuerte, y por el lema 2.6,  $D_2$  es una subdigráfica inducida de  $D$ .

**Propiedad (2) para  $(D_2, Q_2)$ :**  $Q_2$  es una oreja en  $D_2$ .

Por construcción sabemos que los vértices de  $T_2 - \{y_2, z_1\}$  tienen grado 2 en  $D_2$ . Asimismo, el vértice  $y_2$  tiene grado igual a 3 en  $D_2$ , ya que tiene un invecino y exvecino en  $C$  y otro exvecino en  $T_2$ . De igual manera, el vértice  $z_1$  tiene un invecino y exvecino en  $C$  y también tiene un invecino en  $T_2$ . Por lo tanto,  $\delta_{D_2}(y_2) = d_{D_2}(z) > 2$ ; es decir,  $Q_2$  es una oreja en  $D_2$ .

**Propiedad (3) para  $(D_2, Q_2)$ :**  $D_1$  es una subdigráfica propia de  $D_2$ .

Por construcción, sabemos que  $D_2 = D_1 \cup Q_2$ ; además  $v_1 \notin V(D_1)$ , y por lo tanto,  $D_1$  es una subdigráfica propia de  $D_2$ .

**Propiedad (4) para  $(D_2, Q_2)$ :**  $D_2$  cumple la condición 4.

Demostraremos que las flechas  $(y_2, z_2)$  y  $(y, x)$  cumplen la propiedad de la trayectoria.

Exhibimos la trayectoria dirigida dada por:

$$(y, Q_1, y_2) \cup (y_2, z_2).$$

Esta trayectoria, que se puede apreciar en la figura 3.9, no pasa por el vértice  $x$ , ya que por construcción  $x \in D_1$ ,  $x \notin V(Q_1)$  y  $z_2 \notin V(D_1)$ .

A su vez, exhibimos la trayectoria dirigida dada por:

$$(y_2, C, y) \cup (y, x).$$

Por lo tanto, podemos concluir que las flechas  $(y_2, z_2)$  y  $(y, x)$  cumplen la propiedad de la trayectoria.

Ahora bien, si  $\delta_D^-(z_2) = 1$ , entonces podemos aplicar el teorema 3.3 y concluir que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ . De lo contrario, tenemos que  $\delta_D^-(z_2) \geq 2$ , y podemos continuar con este procedimiento para construir el siguiente par.

Como la digráfica  $D$  tiene un número finito de vértices y en cada iteración estamos tomando al menos un nuevo vértice, entonces siguiendo este proceso, eventualmente construimos un par  $(D_k, Q_k)$  tal que  $\delta_D^-(z_k) = 1$ , y las flechas  $(y, x)$  y  $(y_k, z_k)$  cumplen la propiedad de la trayectoria.

Por lo tanto, por el teorema 3.3, concluimos que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ . □

Para cerrar esta sección, exponemos dos corolarios del teorema 3.4 que utilizan la noción de digráfica hamiltoniana. Decimos que  $D$  es una digráfica **hamiltoniana** si tiene un ciclo dirigido  $C$  que pasa por todos los vértices de  $D$ .

### 3.4. COLORACIÓN ARCOÍRIS PARA DIGRÁFICAS MÍNIMAMENTE FUERTES 49

**Corolario 3.4.1.** *Sea  $D$  una digráfica asimétrica con  $n$  vértices. Si  $D$  contiene una subdigráfica generadora  $D'$  que es fuertemente conexa y  $D'$  no es hamiltoniana, entonces  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica asimétrica con  $n$  vértices y  $D'$  una subdigráfica generadora de  $D$  fuertemente conexa, que no es hamiltoniana.

Ahora bien, como  $D'$  es fuertemente conexa, entonces por la proposición 2.2 existe una subdigráfica generadora  $D''$  de  $D'$  mínimamente fuerte. Por lo que,  $D''$  es una subdigráfica generadora de  $D$  mínimamente fuerte.

Dado que  $D'$  no es hamiltoniana, entonces  $D''$  tampoco lo es, y en consecuencia  $D''$  no es un ciclo. Observamos que, como  $D$  es una digráfica asimétrica, entonces  $D'$  y  $D''$  son subdigráficas asimétricas. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 3.4 a la subdigráfica  $D''$ , obteniendo que  $\vec{rc}(D'') \leq n - 1$ .

Finalmente, por la proposición 3.3 tenemos que:

$$\vec{rc}(D) \leq \vec{rc}(D'') \leq n - 1,$$

que es lo que se quería demostrar.  $\square$

**Corolario 3.4.2.** *Sea  $D$  una digráfica asimétrica y fuertemente conexa con  $n$  vértices. Si  $D$  no es hamiltoniana, entonces  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Dado que, por hipótesis  $D$  no es hamiltoniana, entonces ninguna subdigráfica de  $D$  es hamiltoniana.

Observamos que  $D$  una subdigráfica asimétrica y generadora de  $D$ , que no es hamiltoniana; por lo tanto, por el corolario anterior 3.4.1, resulta que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .  $\square$

Recordando la proposición 3.1 tenemos que si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa, entonces  $\vec{rc}(D) \leq n$ . Más aún, al considerar la contrapositiva del teorema 3.4, los autores en [5] establecieron una caracterización de las digráficas asimétricas tales que  $\vec{rc}(D) = n$ . La demostración que se presenta a continuación, es una demostración propia de dicho resultado.

**Corolario 3.4.3.** *Sea  $D$  una digráfica asimétrica y mínimamente fuerte con  $n$  vértices.  $D$  es un ciclo dirigido si y sólo si  $\vec{rc}(D) = n$ .*

*Demostración.* La demostración de la condición suficiente, que  $D$  sea un ciclo dirigido, está dada por la proposición 3.2.

Recíprocamente, la contrapositiva del teorema 3.4 nos dice que, para cualquier digráfica  $H$  mínimamente fuerte con  $n$  vértices, si  $n - 1 < \vec{rc}(H)$ , entonces  $H$  es un ciclo dirigido. Por hipótesis tenemos que  $\vec{rc}(D) = n$ , lo cual implica que  $n - 1 < \vec{rc}(D)$ , por lo tanto,  $D$  es un ciclo dirigido.

□

# Capítulo 4

## Coloración arcoíris en digráficas hamiltonianas

En este capítulo se presenta una caracterización de las digráficas hamiltonianas asimétricas cuyo número de coloración arcoíris es igual a su orden. Para ello, definimos en la primera sección las nociones de: cuerdas, ciclos hamiltonianos especiales, la propiedad de la cabeza y de par fuerte. En la segunda sección, se presenta la demostración detallada de la caracterización antes mencionada, que debido a su extensión, se prueba a través de una serie de lemas auxiliares. En este capítulo trabajaremos únicamente con digráficas asimétricas.

### 4.1. Definiciones complementarias

Las siguientes definiciones están directamente relacionadas con el teorema más importante de este capítulo. Dado que estamos buscando una caracterización de las digráficas fuertemente conexas con número de coloración arcoíris  $\vec{rc}(D) = n$ , podemos notar que la contrapositiva del corolario 3.4.2 nos garantiza que  $D$  es una digráfica hamiltoniana.

Sea  $C = (x_0, \dots, x_{k-1}, x_0)$  un ciclo dirigido. Una **cuerda en  $C$**  es una flecha  $f$  que no pertenece a  $F(C)$ , pero cuya cola y cabeza de  $f$  pertenecen a  $C$ . Observamos que en las digráficas asimétricas, no es posible tener cuerdas de la forma  $(x_i, x_{i-1})$ , tomando los subíndices módulo  $k$ .

Ahora bien, consideremos dos cuerdas de  $C$ ,  $(x_k, x_l)$  y  $(x_r, x_s)$ , y supongamos sin pérdida de generalidad, que el ciclo dirigido  $C$ , empieza y termina en el vértice  $x_l$ . Decimos que las cuerdas  $(x_k, x_l)$  y  $(x_r, x_s)$  son **cuerdas opuestas en  $C$** , si



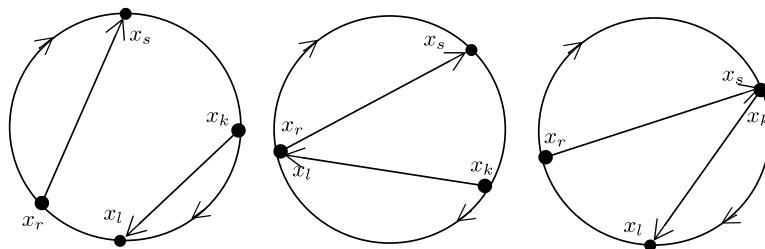


Figura 4.1:  $(x_r, x_s)$  y  $(x_k, x_l)$  son cuerdas opuestas en  $C$ .

tanto los vértices  $x_r$  y  $x_s$  pertenecen a la trayectoria dirigida  $(x_l, C, x_k)$ , así como  $(x_s, C, x_l) \cup (x_l, C, x_r)$  es una trayectoria dirigida, y los vértices  $x_k$  y  $x_l$  pertenecen a ésta, como se muestra en la figura 4.1.

Decimos que un ciclo hamiltoniano  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  es un **ciclo hamiltoniano especial** si existen un par de flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_j, x_{j+1})$ , no necesariamente distintas, que tienen la propiedad de la trayectoria; recordemos que la propiedad de la trayectoria nos dice que para el par de flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_j, x_{j+1})$ , existe  $T_1$  una  $(x_i, x_{j+1})$ -trayectoria dirigida que no contiene a la flecha  $(x_i, x_{i+1})$ , y existe también  $T_2$  una  $(x_j, x_{i+1})$ -trayectoria dirigida que no contiene a la flecha  $(x_j, x_{j+1})$ .

Observamos que dado que  $C$  es un ciclo hamiltoniano, entonces cualquier flecha que pertenece a  $F(T_1)$  o  $F(T_2)$ , es necesariamente una cuerda en  $C$  o pertenece a las flechas de  $C$ ; observamos también que si las trayectorias  $T_1$  y  $T_2$  tienen al menos una flecha, entonces tienen al menos una cuerda en  $C$ .

Derivado de la definición de un ciclo hamiltoniano especial, vamos a considerar 3 casos diferentes, dependiendo del orden en el que aparezcan los vértices de las flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_j, x_{j+1})$ , que cumplen la propiedad de la trayectoria.

- (A) Cuando  $x_i = x_j$ ; este caso corresponde a tener una sola flecha que cumple la propiedad de la trayectoria. En la figura 4.2 (A) se sugiere una posible  $x_i x_{i+1}$ -trayectoria, al recorrer la cuerda azul, el ciclo dirigido  $C$  y la cuerda verde; esta trayectoria no pasa por la flecha  $(x_i, x_{i+1})$ .
- (B) Cuando  $x_{i+1} = x_j$ ; este caso corresponde a tener dos flechas consecutivas que cumplen la propiedad de la trayectoria. En la figura 4.2 (B) se sugiere una posible  $x_i x_{j+1}$ -trayectoria, al recorrer la cuerda azul, el ciclo dirigido  $C$  y la cuerda verde; esta trayectoria no pasa por la flecha  $(x_i, x_{i+1})$ . Además la  $x_j x_{i+1}$ -trayectoria dirigida, que no pasa por la flecha  $(x_j, x_{j+1})$ , es la trayectoria  $(x_j)$  que solamente tiene un vértice.

(C) Cuando todos los vértices son distintos; este caso corresponde a tener dos flechas disjuntas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_j, x_{j+1})$ , que cumplen la propiedad de la trayectoria. En la figura 4.2 (C) se sugiere una  $x_i x_{j+1}$ -trayectoria, al recorrer la cuerda azul y el ciclo dirigido  $C$ ; esta posible trayectoria no pasa por la flecha  $(x_i, x_{i+1})$ . También, se muestra una posible  $x_j x_{i+1}$ -trayectoria, al recorrer la cuerda verde; esta trayectoria dirigida no pasa por la flecha  $(x_j, x_{j+1})$ .

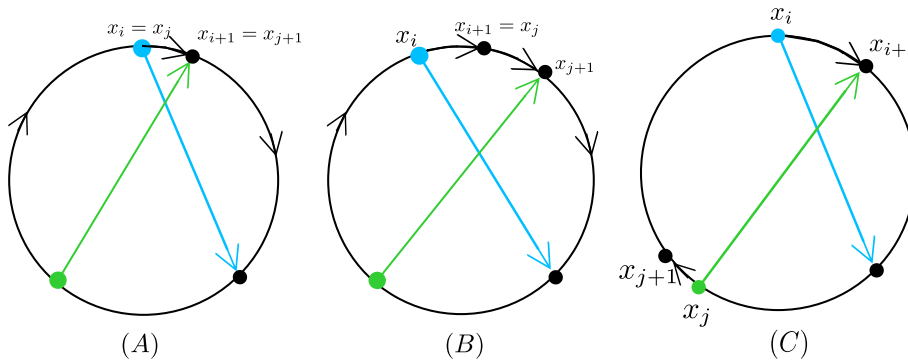


Figura 4.2: Tres distintos casos para ciclos hamiltonianas especiales

Sea  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo dirigido en una digráfica  $D$ . Decimos que un vértice  $x_i$  de  $C$  tiene la **propiedad de la cabeza con respecto a  $C$** , si para toda cuerda en  $C$ , al ir recorriendo la trayectoria dirigida  $(x_i, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1})$ , siempre nos encontramos con la cabeza de cada cuerda, antes que la cola; ver la figura 4.3. Observamos que si  $C$  no tiene cuerdas, entonces cualquier vértice cumple la propiedad de la cabeza por vacuidad.

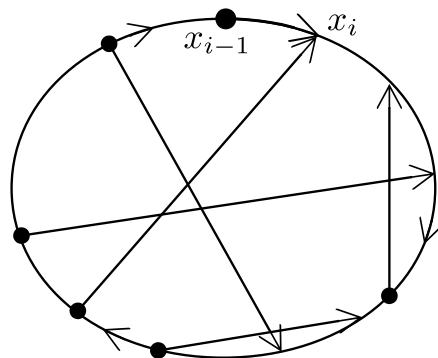


Figura 4.3: El vértice  $x_i$  tiene la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$

Sean  $D$  una digráfica y  $C = (x_0, \dots, x_{k-1}, x_0)$  un ciclo dirigido en  $D$ . Dados dos vértices distintos  $x_i$  y  $x_j$  en  $V(C)$  con  $i < j$ , decimos que el par  $\{x_i, x_j\}$  es un **par fuerte de  $C$  en  $D$**  si las digráficas inducidas  $D[V(x_i, C, x_{j-1})]$  y  $D[V(x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1})]$  son fuertemente conexas. En la figura 4.4 se muestra un ejemplo de un par de vértices que son un par fuerte de un ciclo  $C$  dentro de una digráfica  $D$ .

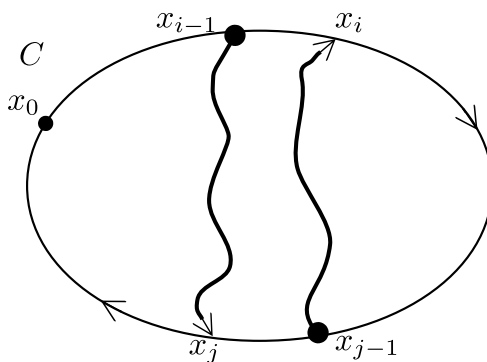


Figura 4.4: El par de vértices  $\{x_i, x_j\}$  es un par fuerte de  $C$  en  $D$ .

**Lema 4.1.** Sean  $D$  una digráfica y  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo dirigido en  $D$ . Si un par de vértices  $\{x_i, x_j\}$  de  $C$  es un par fuerte de  $C$  en  $D$ , entonces el par de flechas  $\{(x_{i-1}, x_i), (x_{j-1}, x_j)\}$  tiene la propiedad de la trayectoria.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $i < j$ . Por demostrar que existe una  $(x_{i-1}, x_j)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{i-1}, x_i)$  y que también existe una  $(x_{j-1}, x_i)$ -trayectoria que no pasa por la flecha  $(x_{i-1}, x_i)$ .

Consideremos primero a la subdigráfica inducida  $D_1 = D[V(x_i, C, x_{j-1})]$ . Por definición de par fuerte sabemos que  $D_1$  es fuertemente conexas, y como  $i < j$ , sabemos que  $x_j$  no pertenece a  $D_1$ . Se sigue que existe una  $(x_{j-1}, x_i)$ -trayectoria dirigida en  $D_1$ , que no pasa por la flecha  $(x_{j-1}, x_j)$ .

De igual manera, consideremos a la subdigráfica inducida  $D_2 = D[V(x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1})]$ . Por definición de par fuerte sabemos que  $D_2$  es fuertemente conexas, y como  $i < j$ , sabemos que  $x_i$  no pertenece a  $D_2$ . Se sigue que existe una  $(x_{i-1}, x_j)$ -trayectoria dirigida en  $D_2$  que no pasa por la flecha  $(x_{i-1}, x_i)$ .

Esto demuestra que el par  $\{(x_{i-1}, x_i), (x_{j-1}, x_j)\}$  cumple la propiedad de la trayectoria. □

## 4.2. Caracterización arcoíris para digráficas hamiltonianas

En esta sección, enunciamos y probamos el teorema principal de este capítulo, que caracteriza, con base en las definiciones enunciadas en la sección anterior, a las digráficas fuertemente conexas cuyo número de coloración arcoíris es igual a su orden.

**Teorema 4.2.** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $n$  vértices. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1)  $\vec{rc}(D) = n$ .
- (2)  $D$  es una digráfica hamiltoniana, pero no tiene ciclos hamiltonianos especiales.
- (3)  $D$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y dos vértices  $x_i$  y  $x_j$  tales que tienen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ , pero el par  $\{x_i, x_j\}$  no es un par fuerte de  $C$  en  $D$ .

Este resultado se demuestra a través de una serie de lemas. Para probar que (1)  $\implies$  (2) demostramos la contrapositiva de esta implicación. Dicha demostración se divide en dos lemas: el lema 4.3 demuestra que si  $D$  tiene un ciclo dirigido hamiltoniano especial del tipo (A), entonces el número de coloración arcoíris de  $D$  es a lo más  $n - 1$ ; el lema 4.4 prueba que si  $D$  tiene un ciclo dirigido hamiltoniano especial del tipo B ó C, entonces también el número de coloración arcoíris de  $D$  es a lo más  $n - 1$ . El lema 4.5 demuestra que (2)  $\implies$  (3) y finalmente, el lema 4.6 prueba que (3)  $\implies$  (1).

**Lema 4.3.** *Sea  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices. Si  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial del tipo (A) contenido en  $D$ , entonces  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices y  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo dirigido hamiltoniano especial del tipo (A). Sin pérdida de generalidad, etiquetamos los vértices del ciclo dirigido  $C$  de tal manera que la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$  cumple la propiedad de la trayectoria; es decir, que existe una  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ . Así, tomamos a  $T$ , una  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ , y que además tiene el mínimo número de cuerdas en  $C$ .

Construyamos ahora, una subdigráfica  $H$  generadora de  $D$ , formada por la trayectoria dirigida  $(x_0, C, x_{n-1})$  y la trayectoria dirigida  $T$ , como sigue:

$$V(H) = V(D), \text{ y}$$

$$F(H) = (F(C) - \{(x_{n-1}, x_0)\}) \cup F(T).$$

**Afirmación 1:**  $H$  es fuertemente conexa.

Por construcción, tenemos que  $T$  es una  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria dirigida. Por lo tanto,  $(x_0, C, x_{n-1}) \cup (x_{n-1}, T, x_0)$  es un camino dirigido cerrado que contiene a todos los vértices de  $H$ ; por el teorema 2.3,  $H$  es fuertemente conexa.

**Afirmación 2:**  $F(T) - F(C) \neq \emptyset$ ; es decir, existe al menos una cuerda en  $F(T)$ .

Por construcción,  $H$  es fuertemente conexa y no contiene a la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ . Observamos que  $\delta_H^+(x_{n-1}) \geq 1$ , y por lo tanto, existe otro vértice  $x_k$  tal que la flecha  $(x_{n-1}, x_k)$  pertenece a  $F(H)$ , con  $k \neq 0$  y  $k \neq n-2$ ; esto significa que  $(x_{n-1}, x_k)$  es una cuerda en  $C$ .

**Afirmación 3:**  $H$  es mínimamente fuerte.

Para demostrar la afirmación 3, consideremos las siguientes afirmaciones:

**Afirmación 3.1:** Si  $(x_r, x_s)$  es una flecha en  $F(T) - F(C)$ , entonces  $H - (x_r, x_s)$  no contiene ninguna  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria dirigida.

Observamos que si  $(x_r, x_s) \in F(T) - F(C)$ , entonces  $(x_r, x_s)$  es una cuerda de  $C$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe una  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria en  $H - (x_r, x_s)$ . Esta trayectoria dirigida tiene una cuerda menos que  $T$ , lo que contradice la elección de  $T$ .

**Afirmación 3.2:** Si  $(x_i, x_j) \in F(T)$  es una cuerda de  $C$ , entonces  $i > j$ .

Sea  $(x_i, x_j)$  una flecha de  $F(T) - F(C)$ , la cual es una cuerda de  $C$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $i < j$ . Observamos que la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$  no pertenece a la trayectoria dirigida  $(x_i, C, x_j)$ . Por lo tanto, la cuerda  $(x_i, x_j)$  se puede sustituir en  $T$  por la trayectoria dirigida  $(x_i, C, x_j)$ , lo cual nos da un  $(x_{n-1}, x_0)$ -camino dirigido que tiene una cuerda menos, que a su vez contiene una  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria dirigida, con al menos una cuerda menos que  $T$ . Esto contradice nuevamente la elección de  $T$ . Así, tenemos que  $i > j$ .

**Afirmación 3.3:**  $(x_0, C, x_{n-1})$  es la única  $(x_0, x_{n-1})$ -trayectoria dirigida contenida en  $H$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $T'$ , una  $(x_0, x_{n-1})$ -trayectoria dirigida en  $H$  distinta de  $(x_0, C, x_{n-1})$ . Por lo tanto, existe una flecha  $(x_k, x_l)$  en  $F(T')$  que no pertenece a  $(x_0, C, x_{n-1})$ ; es decir,  $(x_k, x_l)$  es una cuerda de  $C$ .

Sea  $(x_\alpha, x_\beta)$  la primer flecha de  $T'$  que no pertenece a  $(x_0, C, x_{n-1})$ . Si  $x_\alpha = x_0$ , entonces  $0 = \alpha < \beta$ , contradiciendo la afirmación 3.2.

Supongamos que  $x_\alpha \neq x_0$ . Por la elección de  $(x_\alpha, x_\beta)$  se tiene que todas las flechas de la trayectoria dirigida  $(x_0, T', x_\alpha)$  están contenidas en  $(x_0, C, x_{n-1})$ ; es decir,  $(x_0, T', x_\alpha) = (x_0, C, x_\alpha)$ . Como  $T'$  es una trayectoria dirigida, entonces  $x_\beta \notin V((x_0, T', x_\alpha))$ , lo que implica que  $x_\beta \in V((x_{\alpha+1}, C, x_{n-1}))$ ; se deduce que  $\alpha < \beta$ , contradiciendo la afirmación 3.2.

Para demostrar que  $H$  es una subdigráfica mínimamente fuerte, consideremos a  $f$  una flecha de  $H$ ; probaremos que  $H - f$  no es fuertemente conexa.

Si  $f \in F(T) - F(C)$ , entonces, por la afirmación 3.1, sabemos que  $H - f$  no es fuertemente conexa. Asimismo, si  $f \in F(C)$ , entonces, por la afirmación 3.3, se tiene que  $H - f$  no es fuertemente conexa. Con esto concluimos que  $H$  es mínimamente fuerte.

Como  $H$  no es un ciclo, entonces, por el teorema 3.4, tenemos que  $\vec{rc}(H) \leq n - 1$ . Finalmente, dado que  $H$  es una subdigráfica fuertemente conexa y generadora de  $D$ , podemos aplicar la proposición 3.3 y afirmar que  $\vec{rc}(D) \leq \vec{rc}(H) \neq n - 1$ , que es lo que queríamos demostrar.

□

**Lema 4.4.** *Sea  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices. Si  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial del tipo (B) ó (C) contenido en  $D$ , entonces  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Sea  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano especial del tipo (B) o (C) contenido en  $D$ . Sin pérdida de generalidad, etiquetamos a los vértices de  $C$  de tal manera que las flechas que cumplen la propiedad de la trayectoria sean  $(x_{n-1}, x_0)$  y  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$  para alguna  $j_0$  en  $\{0, \dots, n - 2\}$ .

Dado que  $C$  es un ciclo especial del tipo (B) o (C), entonces podemos tomar a  $T_1$  una  $(x_{n-1}, x_{j_0+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ , y  $T_2$  una  $(x_{j_0}, x_0)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$ .

Observamos que si la trayectoria dirigida  $T_1$  pasa por  $x_0$ , entonces la subtrayectoria dirigida  $(x_{n-1}, T_1, x_0)$  es una  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ . Por lo tanto,  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial del tipo (A). De manera similar, si la trayectoria dirigida  $T_2$  pasa por  $x_{j_0+1}$ , entonces la subtrayectoria dirigida  $(x_{j_0}, T_2, x_{j_0+1})$  es una  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$ . Por lo tanto,  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial del tipo (A). En ambos casos, podemos aplicar el lema 4.3 obteniendo que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ .

Así, supongamos que  $x_0 \notin V(T_1)$  y que  $x_{j_0+1} \notin V(T_2)$ . Más aún, supongamos que  $D$  no contiene ciclos hamiltonianos especiales del tipo (A). Por lo tanto, no existen  $(x_{n-1}, x_0)$ -trayectorias dirigidas que no pasan por la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ , y de igual manera no existen  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$ -trayectorias dirigidas que no pasan por la flecha  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$ .

Consideremos la coloración  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, n - 1\}$  dada por:

$$\varphi(x_k, x_l) = \begin{cases} l & \text{para } 0 \leq k \leq n - 1 \text{ y } 1 \leq l \leq n - 1 \\ j_0 + 1 & \text{para } 0 \leq k \leq n - 1 \text{ y } l = 0, \end{cases}$$

es decir, la coloración  $\varphi$  pinta de color  $l$  a todos las flechas que son adyacentes hacia  $x_l$  (con  $x_l$  distinto de  $x_0$ ), y pinta de color  $j_0 + 1$  a todas las flechas que son adyacentes hacia  $x_0$ .

**Afirmación 1:** La trayectoria dirigida  $T = (x_0, C, x_{n-1})$  es una trayectoria arcoiris bajo  $\varphi$ .

Sean  $(x_\alpha, x_\beta)$  y  $(x_\gamma, x_\delta)$  dos flechas distintas en  $T$ . Probaremos que  $\varphi(x_\alpha, x_\beta) \neq \varphi(x_\gamma, x_\delta)$ . Como  $x_0 \notin \{x_\beta, x_\delta\}$ , por ser  $x_0$  el vértice inicial de la tra-

yectoria dirigida  $T$ , entonces bajo la coloración  $\varphi$  tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi(x_\alpha, x_\beta) &= \beta, \\ \varphi(x_\gamma, x_\delta) &= \delta.\end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\beta \neq \delta$ , entonces  $\varphi(x_\alpha, x_\beta) \neq \varphi(x_\gamma, x_\delta)$ . Por lo tanto,  $T$  es una trayectoria dirigida arcoíris bajo  $\varphi$ .

**Afirmación 2:**  $\varphi$  es una coloración arcoíris de  $D$ .

Sean  $x_r$  y  $x_s$  dos vértices en  $D$ . Por demostrar que existe una  $(x_r, x_s)$ -trayectoria dirigida arcoíris.

**Caso 1:**  $r < s$ .

En este caso, consideramos la trayectoria dirigida  $(x_r, C, x_s)$  que es una subtrayectoria dirigida de  $T = (x_0, C, x_{n-1})$ , y por lo tanto, es una trayectoria arcoíris bajo  $\varphi$ .

**Caso 2:**  $r > s$ .

Consideramos 3 subcasos, con respecto al índice  $j_0 + 1$ .

**Caso 2.1:**  $r \geq j_0 + 1 > s$ .

Tomemos la trayectoria dirigida  $(x_r, C, x_{n-1}) \cup (x_{n-1}, x_0) \cup (x_0, C, x_s)$ , como se muestra en la figura 4.5. Observamos que el vértice  $x_{j_0+1}$  solamente puede ser vértice inicial de dicha trayectoria dirigida. Utilizando el caso 1, tenemos que las subtrayectorias dirigidas  $(x_r, C, x_{n-1})$  y  $(x_0, C, x_s)$  de  $T$  son subtrayectorias dirigidas arcoíris, las cuales son ajenas por colores, ya que  $T$  es arcoíris. Además, la coloración de la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$  bajo  $\varphi$  es  $j_0 + 1$ , y por la observación al inicio de este párrafo, el color  $j_0 + 1$  no se repite. Por lo tanto, la trayectoria dirigida  $(x_r, C, x_{n-1}) \cup (x_{n-1}, x_0) \cup (x_0, C, x_s)$  es arcoíris.

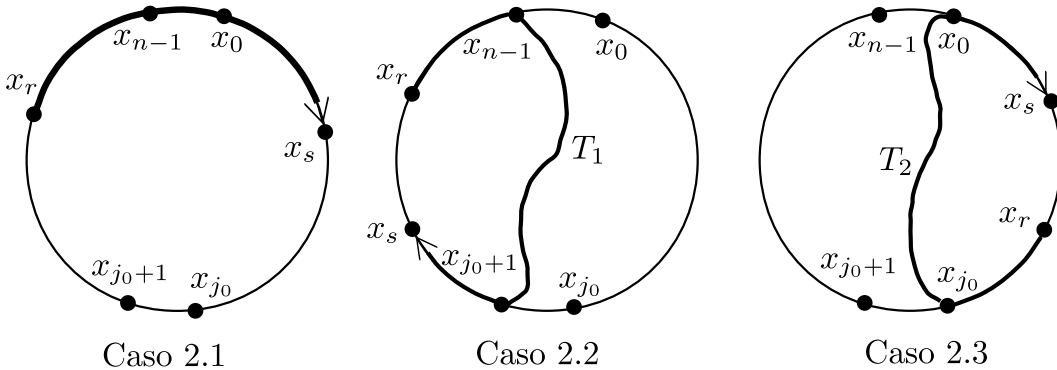


Figura 4.5: Caso 2 cuando  $r > s$



**Caso 2.2:**  $r > s \geq j_0 + 1$ .

En este caso consideremos al camino dirigido  $(x_r, C, x_{n-1}) \cup T_1 \cup (x_{j_0+1}, C, x_s)$ . Note que  $x_0$  no pertenece a  $(x_r, C, x_{n-1})$  porque  $r > j_0 + 1 > 0$ ,  $x_0$  no pertenece a  $T_1$  por la suposición sobre  $T_1$ , y  $x_0$  no pertenece a  $(x_{j_0+1}, C, x_s)$  dado que  $j_0 + 1 > 0$ . Ahora bien, utilizando el teorema 2.1 podemos extraer una  $(x_r, x_s)$ -trayectoria dirigida  $T_\alpha$  que sabemos que no contiene a  $x_0$  como vértice interno. Por lo tanto, bajo la coloración  $\varphi$ , todas las flechas de  $T_\alpha$  tienen un color distinto, ya que las únicas flechas que repiten color son aquellas que son adyacentes hacia  $x_0$  y la flecha  $(x_{j_0}, x_{j_0+1})$ .

**Caso 2.3**  $j_0 + 1 > r > s$ .

En este caso consideremos al camino dirigido  $(x_r, C, x_j) \cup T_2 \cup (x_0, C, x_s)$ . Note que  $x_{j_0+1}$  no pertenece a  $(x_r, C, x_j)$  porque  $r < j < j_0 + 1$ , notamos también que  $x_{j_0+1}$  no pertenece a  $T_2$  por suposición sobre  $T_2$ , y finalmente  $x_{j_0+1}$  no pertenece a  $(x_0, C, x_s)$  dado que  $s < r < j_0 + 1$ . Ahora bien, utilizando el teorema 2.1 podemos extraer una  $(x_r, x_s)$  trayectoria dirigida  $T_\beta$  que sabemos que no contiene al vértice  $x_{j_0+1}$  como vértice interno. Por lo tanto, bajo la coloración  $\varphi$ , todas las flechas de  $T_\beta$  tienen un color distinto, ya que las únicas flechas que repiten color son aquellas que son adyacentes hacia  $x_{j_0+1}$  y la flecha  $(x_{n-1}, x_0)$ .

Esto agota todos los casos posibles, y nos permite concluir que  $\varphi$  es una coloración arcoiris de  $F(D)$  con  $n - 1$  colores, y por tanto también podemos concluir que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ . □

**Lema 4.5.** *Sea  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices. Si  $D$  no tiene ciclos dirigidos hamiltonianos especiales, entonces, para todo ciclo dirigido hamiltoniano  $C$ , existen dos vértices  $x_i$  y  $x_j$  tales que  $x_i$  y  $x_j$  cumplen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ , y el par  $\{x_i, x_j\}$  no es un par fuerte de  $C$  en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices que no contiene ciclos dirigidos hamiltonianos especiales. Sea  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo dirigido hamiltoniano en  $D$ .

Si tenemos que  $F(C) = F(D)$ , entonces  $D$  es un ciclo dirigido que no tiene cuerdas. Por lo tanto, por vacuidad, todos los vértices de  $C$  cumplen la propiedad de la cabeza, y además, todo par de vértices no forma un par fuerte de  $C$  en  $D$ , que es lo que se quería demostrar.

Supongamos que  $F(D) - F(C) \neq \emptyset$ , es decir, que existe al menos una cuerda en  $C$ .

**Afirmación 1:**  $C$  no tiene ningún par fuerte.

Supongamos por el contrario que existen un par de vértices  $\{x_\alpha, x_\beta\}$  que forman un par fuerte de  $C$  en  $D$ . Por el lema 4.1 tenemos que las flechas  $(x_{\alpha-1}, x_\alpha)$  y  $(x_{\beta-1}, x_\beta)$  tienen la propiedad de la trayectoria, lo que implica que  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial, lo cual contradice la hipótesis.

**Afirmación 2:**  $C$  no tiene cuerdas opuestas.

Supongamos por el contrario que  $C$  tiene un par de cuerdas opuestas  $(x_k, x_l)$  y  $(x_r, x_s)$ . Recordemos que dos cuerdas  $(x_k, x_l)$  y  $(x_r, x_s)$  son cuerdas opuestas en  $C$ , si tanto los vértices  $x_r$  y  $x_s$  pertenecen a la trayectoria dirigida  $(x_l, C, x_k)$ , así como  $(x_s, C, x_l) \cup (x_l, C, x_r)$  es una trayectoria dirigida, y los vértices  $x_k$  y  $x_l$  pertenecen a ésta.

Observamos que las flechas  $(x_k, x_{k+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria, ya que  $(x_k, x_l) \cup (x_l, C, x_{r+1})$  es una  $(x_k, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_k, x_{k+1})$ ; similarmente tenemos que  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{k+1})$  es una  $(x_r, x_{k+1})$ -trayectoria dirigida que no contiene a la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ , como se muestra en la figura 4.6. Por lo que,  $C$  es un ciclo dirigido hamiltoniano especial de  $D$ , lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, concluimos que en  $C$  no hay cuerdas opuestas.

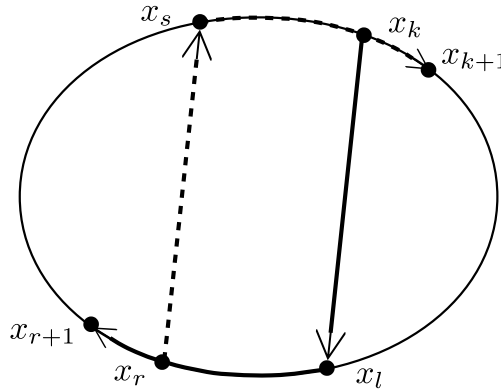


Figura 4.6:  $(x_k, x_l)$  y  $(x_r, x_s)$  son cuerdas opuestas en  $C$

Falta demostrar que  $C$  tiene al menos dos vértices que tienen la propiedad de la cabeza. Primero probamos que existe al menos un vértice que tiene la propiedad de la cabeza y subsecuentemente demostramos que  $C$  tiene al menos dos vértices que tienen la propiedad de la cabeza.

**Afirmación 3:**  $D$  tiene al menos un vértice que tiene la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ .

La demostración se realizará por contradicción, y consiste en ir encontrando cuerdas en el ciclo  $C$ , hasta llegar a una cuerda  $(x_{lp}, x_{up})$ , tal que genera que tengamos dos flechas que tienen la propiedad de la trayectoria; esto significa que tenemos un ciclo hamiltoniano especial, lo cual contradice la hipótesis.

Consideremos una cuerda  $(x_i, x_j)$  en  $C$  tal que la longitud de  $(x_i, C, x_j)$  sea mínima. Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $x_i = x_0$ . Sabemos que existe dicha cuerda dado que  $F(D) - F(C) \neq \emptyset$ .

Como ningún vértice tiene la propiedad de la cabeza,  $x_j$  no tiene la propiedad de la cabeza. Por lo tanto, existe una cuerda  $(x_k, x_l)$ , tal que en la trayectoria dirigida  $(x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{j-1})$ ,  $x_k$  aparece antes que  $x_l$ .

**Afirmación 3.1:** Para toda cuerda  $(x_k, x_l)$  que evita que  $x_j$  tenga la propiedad de la cabeza, se tiene que  $x_k \in V((x_j, C, x_{n-1}))$  y  $x_l \in V((x_0, C, x_{j-1}))$ ; ver la figura 4.7

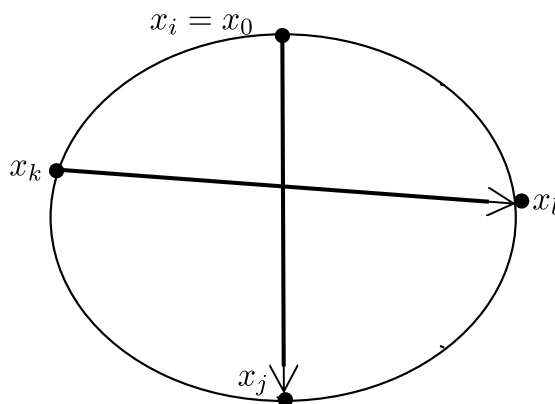


Figura 4.7: Afirmación 3.1

Demostremos primero que  $x_k \in V((x_j, C, x_{n-1}))$ . Supongamos por el contrario, que  $x_k \in V((x_0, C, x_{j-1}))$ ; consecuentemente tenemos que la cabeza  $x_l$  también está en la trayectoria dirigida  $(x_0, C, x_{j-1})$ . Lo cual significa, que tanto  $x_k$  como  $x_l$  pertenecen a la trayectoria dirigida  $(x_0, C, x_{j-1})$ , y por lo tanto, la longitud de  $(x_k, C, x_l)$  es menor que la longitud de  $(x_0, C, x_{j-1})$ . Esto contradice la elección de la cuerda  $(x_i, x_j)$ , ver la figura 4.8. Por lo tanto, tenemos que la cola  $x_k$  debe pertenecer al segmento  $(x_j, C, x_{n-1})$ .

Demostremos ahora que  $x_l \in V((x_0, C, x_{j-1}))$ . Supongamos por el contrario que,  $x_l \in V((x_j, C, x_{n-1}))$ . Afirmamos que las cuerdas  $(x_0, x_j)$  y  $(x_k, x_l)$  son cuer-

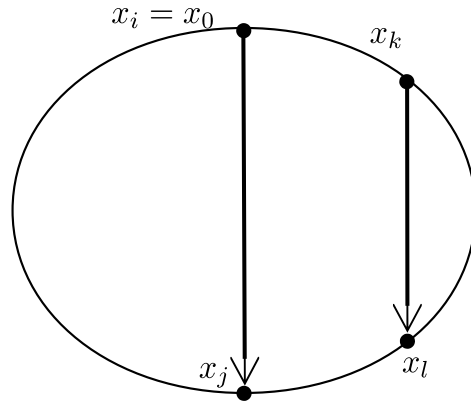


Figura 4.8: Afirmación 3.1

das opuestas en  $C$ .

Por lo demostrado anteriormente y como  $x_l \in V((x_j, C, x_{n-1}))$ , tenemos que tanto  $x_k$  como  $x_l$  pertenecen a la trayectoria dirigida  $(x_j, C, x_0)$ ; de igual manera, tenemos que los vértices  $x_0$  y  $x_j$  pertenecen a la trayectoria dirigida  $(x_l, C, x_0) \cup (x_0, C, x_k)$ , lo cual significa que  $(x_k, x_l)$  y  $(x_0, x_j)$  son cuerdas opuestas, como se muestra en la figura 4.9. Esto contradice la afirmación 2. Por lo que,  $x_l \in V((x_0, C, x_{j-1}))$ .

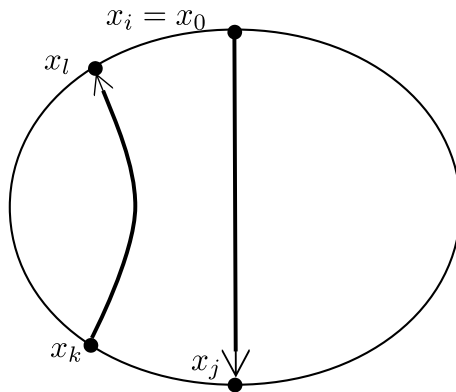


Figura 4.9:  $(x_0, x_j)$  y  $(x_k, x_l)$  son cuerdas opuestas en  $C$ .

Por lo tanto, tenemos que para cualquier cuerda  $(x_k, x_l)$  que evita que  $x_j$  tenga la propiedad de la cabeza, se debe de cumplir que  $x_k \in V((x_j, C, x_{n-1}))$  y  $x_l \in V((x_0, C, x_{j-1}))$ .

Sea  $(x_r, x_s)$  una cuerda que evita que  $x_j$  tenga la propiedad de la cabeza, tal que  $s = \text{mín}\{l : (x_k, x_l) \text{ evita que } x_j \text{ tenga la propiedad de la cabeza}\}$ .

Observamos que si  $x_s = x_1$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  cumplen la propiedad de la trayectoria, dado que  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $x_0 x_{r+1}$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ , y  $(x_r, x_s = x_1)$  es una  $x_r x_s$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ . Por lo que, tenemos que  $C$  es un ciclo dirigido hamiltoniano especial, lo cual contradice nuestra hipótesis; ver la figura 4.10. Por lo tanto, supongamos que  $(x_s \neq x_1)$ .

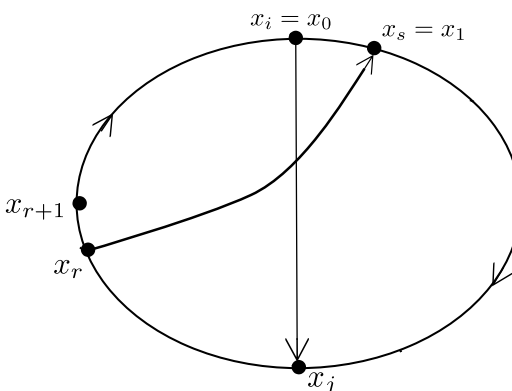


Figura 4.10:  $x_s = x_1$

Dado que ningún vértice tiene la propiedad de la cabeza, en particular, el vértice  $x_s$ , por lo tanto, existe una cuerda  $(x_{t_0}, x_{u_0})$  tal que en la trayectoria dirigida  $(x_s, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{s-1})$  nos encontramos primero a la cola  $x_{t_0}$  antes que la cabeza  $x_{u_0}$ .

La idea de las siguientes afirmaciones es como sigue: bajo la suposición de que no existe ningún vértice que tenga la propiedad de la cabeza, iremos encontrando una sucesión de cuerdas  $(x_{t_0}, x_{u_0}), \dots, (x_{t_p}, x_{u_p})$  tales que evitan que los vértices  $x_s, x_{u_0}, \dots, x_{u_{p-1}}$  tengan la propiedad de la cabeza, respectivamente, y tendremos tres posibilidades en cada iteración dependiendo de la ubicación del vértice  $x_{u_\alpha}$  en el ciclo  $C$ , con  $\alpha \in \{0, \dots, p\}$ , de la siguiente manera:

- (1) Si  $x_{u_\alpha} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ , entonces las flechas  $(x_{t_\alpha}, x_{t_\alpha+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;

- (2) Si  $x_{u_\alpha} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- (3) Si  $x_{u_\alpha} \in V((x_1, C, x_{u_{\alpha-1}}))$ , entonces  $x_{i_\alpha} \in V((x_{u_{\alpha-1}}, C, x_{u_{\alpha-2}}))$ , y podemos encontrar una cuerda  $(x_{i_{\alpha+1}}, x_{u_{\alpha+1}})$ , tal que evita que  $x_{u_\alpha}$  tenga la propiedad de la cabeza.

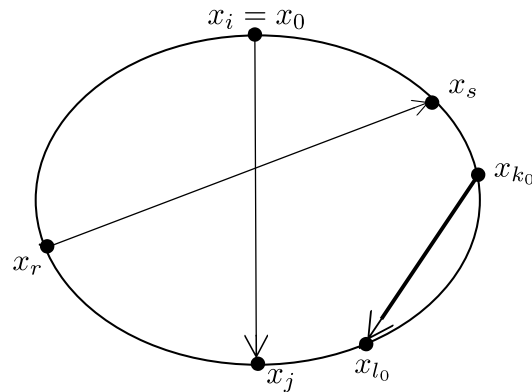
Volvemos a considerar estos tres casos para el vértice  $x_{u_{\alpha+1}}$ .

Hasta llegar, con estas iteraciones, a un paso  $p$  en el que se cumple la condición (1) o (2), o agotamos todos los vértices del segmento  $(x_1, C, x_s)$ , hasta obtener que  $x_{u_p} = x_1$ ; en cuyo caso, las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria. Estas afirmaciones nos llevan a concluir que, bajo la suposición de no tener ningún vértice que tenga la propiedad de la cabeza, siempre podemos encontrar dos flechas que tienen la propiedad de la trayectoria, lo cual implica que tenemos un ciclo hamiltoniano especial, contradiciendo nuestra hipótesis general.

**Afirmación 3.2:** Para toda cuerda  $(x_{k_0}, x_{l_0})$  que evita que  $x_s$  tenga la propiedad de la cabeza, tenemos tres casos:

- Caso 1 Si  $x_{l_0} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ , entonces las flechas  $(x_{k_0}, x_{k_0+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- Caso 2 Si  $x_{l_0} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- Caso 3 Si  $x_{l_0} \in V((x_1, C, x_{s-1}))$ , entonces  $x_{k_0} \in V((x_s, x_{j-1}))$ , y podemos encontrar una cuerda que evita que  $x_{l_0}$  tenga la propiedad de la cabeza.

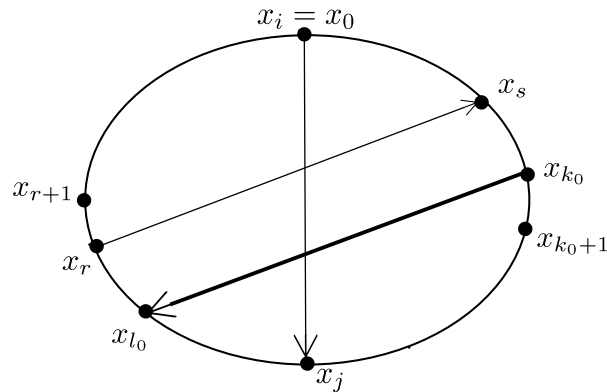
Primero observamos que éstos son los únicos tres casos, ya que el vértice  $x_{l_0}$  no puede estar en  $V((x_s, C, x_j))$ , porque contradice la elección de la cuerda  $(x_0, x_j)$ , como se muestra en la figura 4.11.

Figura 4.11:  $x_{l_0} \in V((x_s, C, x_j))$ 

**Caso 1:**  $x_{l_0} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ .

Por demostrar que las flechas  $(x_{k_0}, x_{k_0+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria.

En efecto, la trayectoria dirigida  $(x_{k_0}, x_{l_0}) \cup (x_{l_0}, C, x_{r+1})$  es una  $(x_{k_0}, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{k_0}, x_{k_0+1})$ . También tenemos que la trayectoria dirigida  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{k_0+1})$  es una  $(x_r, x_{k_0+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ ; ver la figura 4.12. Esto es una contradicción a la hipótesis de que  $C$  no tiene ciclos especiales.

Figura 4.12: Caso 1 para  $x_{l_0}$ 

**Caso 2:**  $x_{l_0} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ .

Por demostrar que las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria.

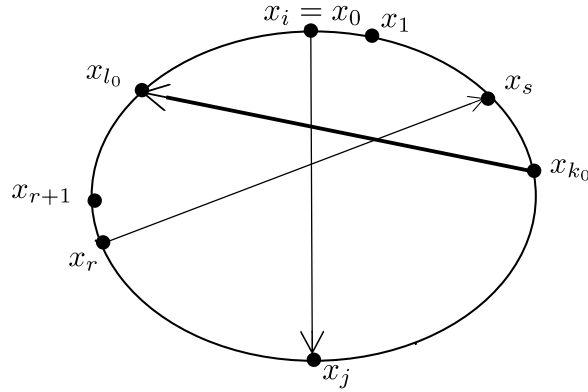


Figura 4.13: Caso 2 para  $x_{l_0}$

Notemos primero que, en este caso,  $x_{k_0} \notin V(x_r, C, x_0)$  ya que de lo contrario, la flecha  $(x_0, x_j)$  y  $(x_{k_0}, x_{l_0})$  serían cuerdas opuestas en  $C$ . Esto contradice a la afirmación 2 de este lema.

En efecto, las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria, ya que  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $(x_0, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ ; asimismo, tenemos que el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{k_0}) \cup (x_{k_0}, x_{l_0}) \cup (x_{l_0}, C, x_1)$  contiene una  $(x_r, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ , ver la figura 4.13. Esto contradice nuevamente el hecho de que el ciclo dirigido  $C$  no es un ciclo hamiltoniano especial.

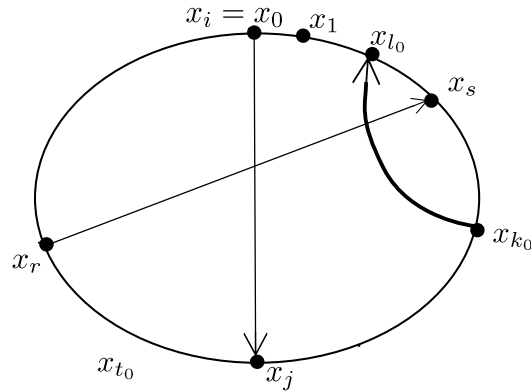
**Caso 3:**  $x_{l_0} \in V((x_1, C, x_{s-1}))$ .

Por demostrar que  $x_{k_0} \in V((x_s, x_{j-1}))$ , y que existe una cuerda  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  que evita que  $x_{l_0}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Primero veamos que  $x_{k_0} \in V((x_s, x_{j-1}))$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que el vértice  $x_{k_0}$  pertenece a  $V((x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{s-1}))$ . Entonces, la cuerda  $(x_{k_0}, x_{l_0})$  también evita que el vértice  $x_j$  tenga la propiedad de la cabeza; esto contradice la elección de la flecha  $(x_r, x_s)$ , ya que el índice  $s$  es mínimo con respecto a la propiedad de evitar que  $x_j$  tenga la propiedad de la cabeza, como se muestra en la figura 4.14. Por lo tanto, concluimos que  $x_{k_0} \in V((x_1, C, x_{s-1}))$ .



Figura 4.14: Caso 3 para  $x_{l_0}$ 

Como estamos suponiendo que ningún vértice tiene la propiedad de la cabeza, en particular se cumple para  $x_{l_0}$ . Por lo tanto, existe al menos una cuerda que evita que  $x_{l_0}$  tenga la propiedad de la cabeza. Con esto concluimos la afirmación 3.2.

Tomemos una cuerda  $(x_{l_0}, x_{u_0})$  que evita que  $x_s$  tenga la propiedad de la cabeza, con  $u_0 = \text{mín}\{\beta : x_\beta \in V((x_1, C, x_{s-1}))\}$ , y  $(x_\alpha, x_\beta)$  evita que  $x_s$  tenga la propiedad de la cabeza}.

Observamos que si  $x_{u_0} = x_1$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  cumplen la propiedad de la trayectoria, dado que  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $x_0 x_{r+1}$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ , y  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{l_0}) \cup (x_{l_0}, x_{u_0} = x_1)$  es una  $x_r x_1$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ . Por lo que, tenemos que  $C$  es un ciclo dirigido hamiltoniano especial, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, supongamos que  $x_{u_0} \neq x_1$ ; ver la figura 4.15.

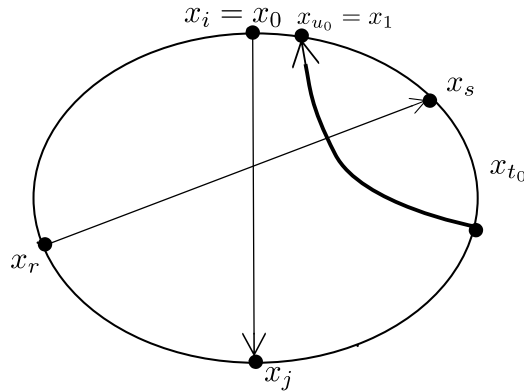


Figura 4.15:  $x_{u_0} = x_1$

**Afirmación 3.3:** Para toda cuerda  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  que evita que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza, tenemos tres casos:

- Caso 1 Si  $x_{l_1} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ , entonces las flechas  $(x_{k_1}, x_{k_1+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- Caso 2 Si  $x_{l_1} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- Caso 3 Si  $x_{l_1} \in V((x_1, C, x_{u_0-1}))$ , entonces  $x_{k_1} \in V((x_{u_0}, C, x_{s-1}))$ , y podemos encontrar una cuerda que evita que  $x_{l_1}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Primero observamos que éstos son los únicos tres casos, ya que el vértice  $x_{l_1}$  no puede estar en  $V((x_{u_0}, C, x_j))$  porque contradice la elección de la cuerda  $(x_0, x_j)$ , como se muestra en la figura 4.16.

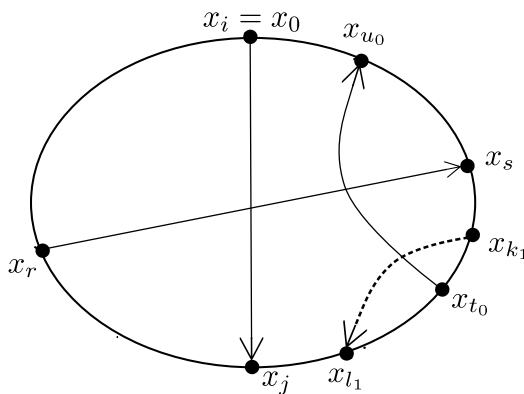


Figura 4.16:  $x_{l_1} \notin V((x_{u_0}, C, x_j))$

**Caso 1:**  $x_{l_1} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ .

Por demostrar que las flechas  $(x_{k_1}, x_{k_1+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria.

En efecto, la trayectoria dirigida  $(x_{k_1}, x_{l_1}) \cup (x_{l_1}, C, x_{r+1})$  es una  $(x_{k_1}, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{k_1}, x_{k_1+1})$ . También tenemos que el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{k_0}) \cup (x_{k_0}, x_{l_0}) \cup (x_{l_0}, C, x_{k_1+1})$  es un  $(x_r, x_{k_1+1})$ -camino dirigido que no contiene a la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ , por lo tanto, contiene una  $(x_r, x_{k_1+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_r, x_{r+1})$ ; ver la figura 4.17. Esto es una contradicción a la hipótesis de que  $C$  no tiene ciclos especiales.

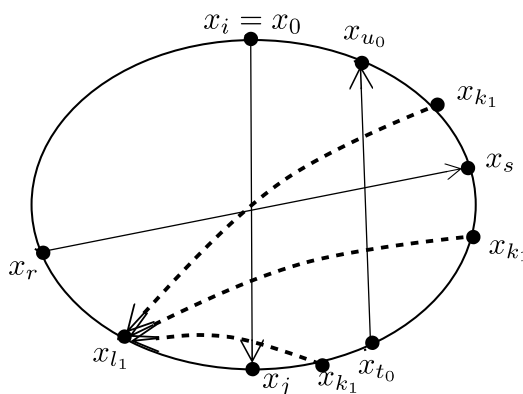


Figura 4.17: Caso 1 para  $x_{l_1}$

**Caso 2:**  $x_{l_1} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ .

Por demostrar que las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria.

Notemos primero que, en este caso,  $x_{k_1} \notin V(x_j, C, x_0)$  ya que de lo contrario, las flechas  $(x_0, x_j)$  y  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  serían cuerdas opuestas en  $C$ . Esto contradice a la afirmación 2 de este lema.

En efecto, las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria, ya que  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $(x_0, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ ; asimismo, tenemos que el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{k_1}) \cup (x_{k_1}, x_{l_1}) \cup (x_{l_1}, C, x_1)$  contiene una  $(x_r, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ , ver la figura 4.18. Esto contradice nuevamente el hecho de que el ciclo dirigido  $C$  no es un ciclo hamiltoniano especial.

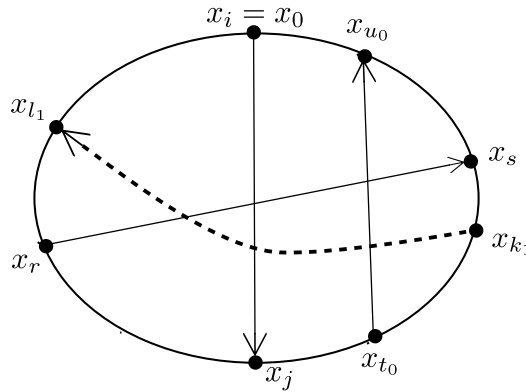


Figura 4.18: Caso 2 para  $x_{l_1}$

**Caso 3:**  $x_{l_1} \in V((x_1, C, x_{u_0-1}))$ .

Por demostrar que  $x_{k_1} \in V((x_{u_0}, C, x_{s-1}))$  y que existe una cuerda  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  que evita que  $x_{l_1}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Primero veamos que  $x_{k_1} \in V((x_{u_0}, C, x_{s-1}))$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $x_{k_1} \in V((x_s, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{s-1}))$ . Notemos que la cuerda  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  también evita que el vértice  $x_s$  tenga la propiedad de la cabeza. Además, los índices cumplen que  $l_1 < u_0 < s$ , contradiciendo la elección de la flecha  $(x_{t_0}, x_{u_0})$ , ya que el índice  $u_0$  es mínimo respecto a la propiedad de evitar que  $x_s$  tenga la propiedad de la cabeza, como se muestra en la figura 4.19. Por lo tanto, concluimos que  $x_{k_1} \in V((x_{u_0}, C, x_{s-1}))$ .

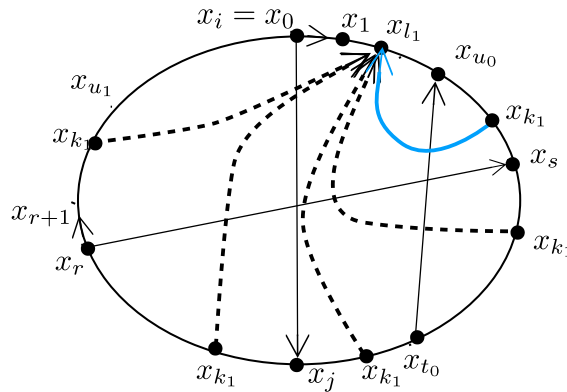


Figura 4.19: La flecha azul es el caso 3 para  $x_{l_1}$ ; las flechas punteadas nos llevan a una contradicción.

Por último, notemos que como ningún vértice tiene la propiedad de la cabeza,

en particular se cumple para  $x_{l_1}$ ; es decir, existe al menos una cuerda que evita que  $x_{l_1}$  tenga la propiedad de la cabeza. Con esto concluimos la afirmación 3.3.

Sea  $(x_{t_1}, x_{u_1})$  una cuerda que evita que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza, tal que  $u_1 = \text{mín}\{\beta : x_\beta \in V((x_1, C, x_{u_0-1}))\}$ , y  $(x_\alpha, x_\beta)$  evita que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza}.

Observamos que si  $x_{u_1} = x_1$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  cumplen la propiedad de la trayectoria, dado que  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $x_0x_{r+1}$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ , y  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1} = x_1)$  es un  $x_rx_1$ -camino dirigido que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ , que contiene una  $x_rx_1$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ . Por lo que, tenemos que  $C$  es un ciclo dirigido hamiltoniano especial, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, podemos suponer que  $x_{u_1} \neq x_1$ ; ver la figura 4.20.

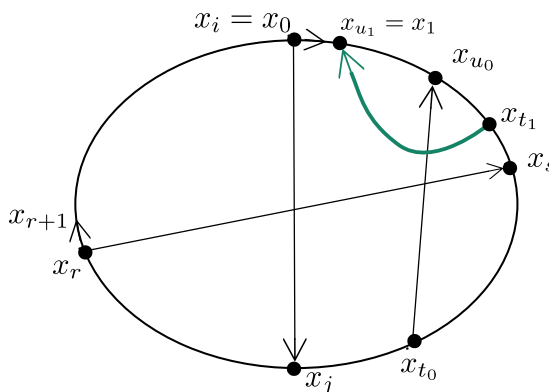


Figura 4.20:  $x_{u_1} = x_1$

**Afirmación 3.4:** Para toda cuerda  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  que evita que  $x_{u_1}$  tenga la propiedad de la cabeza, tenemos tres casos:

- Caso 1 Si  $x_{l_2} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ , entonces las flechas  $(x_{k_2}, x_{k_2+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- Caso 2 Si  $x_{l_2} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ , entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria;
- Caso 3 Si  $x_{l_2} \in V((x_1, C, x_{u_1-1}))$ , entonces  $x_{k_2} \in V((x_{u_0}, C, x_{u_1-1}))$ , y podemos encontrar una cuerda que evita que  $x_{l_2}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Primero observamos que estos son los únicos tres casos, ya que el vértice  $x_{l_2}$  no puede estar en  $V((u_1, C, x_j))$  porque contradice la elección de la cuerda  $(x_0, x_j)$ , como se muestra en la figura 4.21.

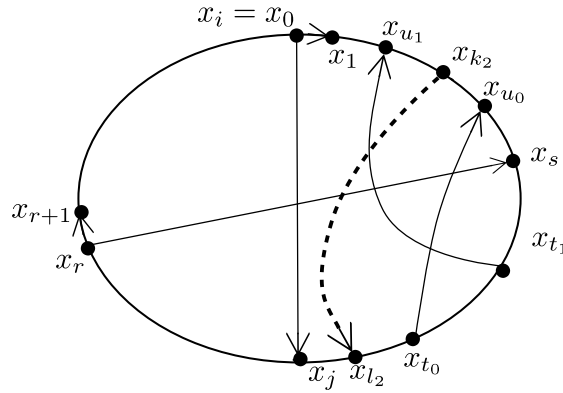
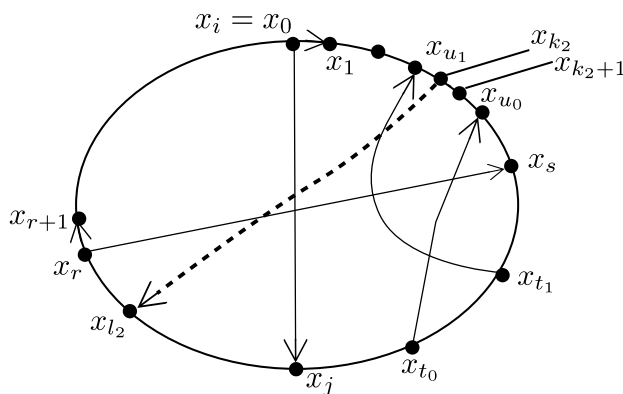


Figura 4.21:  $x_{l_2} \notin V((u_1, C, x_j))$

**Caso 1:**  $x_{l_2} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ .

Por demostrar que las flechas  $(x_{k_2}, x_{k_2+1})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria.

Consideremos a la trayectoria dirigida  $(x_{k_2}, x_{l_2}) \cup (x_{l_2}, C, x_{r+1})$ , la cual es una  $(x_{k_2}, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_{k_2}, x_{k_2+1})$ ; asimismo, consideremos el  $x_r, x_{k_2+1}$ -camino dirigido dado por  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup (x_{u_1}, C, x_{k_2+1})$ , que contiene una  $(x_r, x_{k_2+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_r, x_{r+1})$ ; ver la figura 4.23. Esto es una contradicción a la hipótesis de que  $C$  no tiene ciclos especiales.

Figura 4.22: Caso 1 para  $x_{l_2}$ 

**Caso 2:**  $x_{l_2} \in V(x_{r+1}, C, x_0)$ .

Por demostrar que las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria.

Notemos primero en este caso que  $x_{k_2} \notin V((x_j, C, x_0))$ , ya que de lo contrario las flechas  $(x_0, x_j)$  y  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  serían cuerdas opuestas en  $C$ . Esto contradice la afirmación 2 de este lema.

En efecto, las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria, ya que  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $(x_0, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_0, x_1)$ ; asimismo, tenemos que el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup (x_{u_1}, C, x_{k_2}) \cup (x_{k_2}, x_{l_2}) \cup (x_{l_2}, C, x_1)$  contiene una  $(x_r, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_r, x_{r+1})$ , ver la figura 4.23. Esto contradice nuevamente el hecho de que el ciclo dirigido  $C$  no es un ciclo hamiltoniano especial.

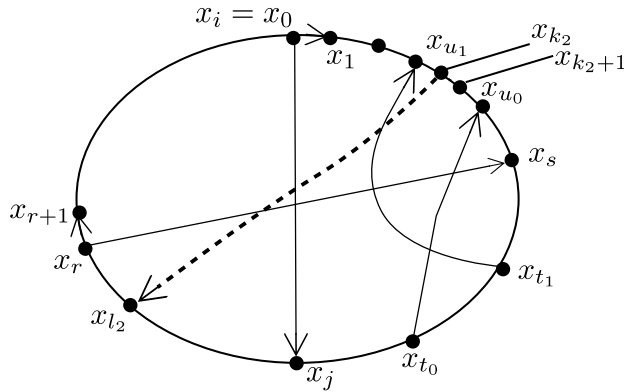


Figura 4.23: Caso 2 para  $x_{l_2}$

**Caso 3:**  $x_{l_2} \in V((x_1, C, x_{u_1-1}))$ .

Primero veamos que  $x_{k_2} \in V((x_{u_1}, C, x_{u_0-1}))$ . Procediendo por contradicción, supongamos que  $x_{k_2} \in V((x_{u_0}, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{u_1-1}))$ . Notemos que la cuerda  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  también evita que el vértice  $x_{u_1}$  tenga la propiedad de la cabeza. Además, los índices cumplen que  $l_2 < u_1 < u_0 < s$ , contradiciendo la elección de la flecha  $(x_{l_1}, x_{u_1})$ , ya que el índice  $u_1$  es mínimo respecto a la propiedad de evitar que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza, como se muestra en la figura 4.24. Por lo tanto, concluimos que  $x_{k_2} \in V((x_{u_1}, C, x_{u_0-1}))$ .

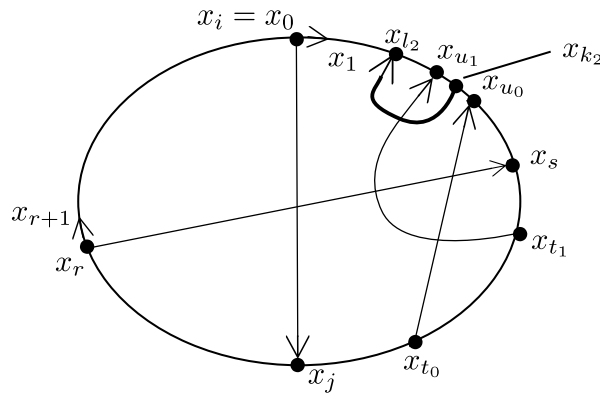
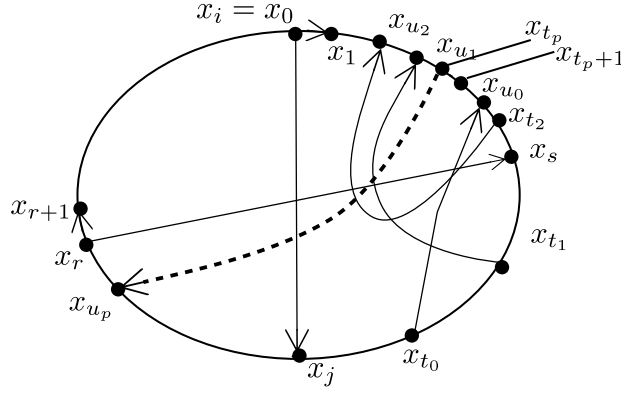


Figura 4.24: Caso 3 para  $x_{l_2}$

Por último, notemos que como ningún vértice tiene la propiedad de la cabeza, en particular se cumple para  $x_{l_2}$ ; es decir, existe al menos una cuerda que evita que  $x_{l_2}$  tenga la propiedad de la cabeza. Con esto concluimos la afirmación 3.4.



Figura 4.25: Caso 1 para  $x_{u_p}$ 

Tomemos a  $u_2 = \text{mín}\{\beta : x_\beta \in V((x_1, C, x_{u_1-1}))\}$ , y  $(x_\alpha, x_\beta)$  evita que  $x_{u_1}$  tenga la propiedad de la cabeza}.

Sabemos, por suposición, que  $x_{u_2}$  no tiene la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ . Como la digráfica  $D$  tiene un número finito de vértices en  $(x_1, C, x_s)$ , entonces, al continuar iterando este proceso, eventualmente terminamos en una iteración  $p$ , en la que nos encontramos con alguno de los siguientes casos:

**Caso 1:** Si  $x_{u_p} \in V((x_{j+1}, C, x_r))$ , entonces  $(x_{t_p}, x_{u_p}) \cup (x_{u_p}, C, x_{r+1})$ , es una  $(x_{t_p}, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_{t_p}, x_{t_{p+1}})$ ; asimismo, el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup (x_{u_1}, C, x_{t_2}) \cup (x_{t_2}, x_{u_2}) \cup \dots \cup (x_{u_{p-1}}, C, x_{t_{p+1}})$  contiene una  $(x_r, x_{t_{p+1}})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_r, x_{r+1})$ . En consecuencia, las flechas  $(x_{t_p}, x_{t_{p+1}})$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria, como se muestra en la figura 4.25.

**Caso 2:** Si  $x_{u_p} \in V((x_{r+1}, C, x_0))$ , entonces  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $(x_0, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_0, x_1)$ ; asimismo, tenemos que el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup (x_{u_1}, C, x_{t_2}) \cup (x_{t_2}, x_{u_2}) \cup \dots \cup (x_{u_{p-1}}, C, x_{t_p}) \cup (x_{t_p}, x_{u_p}) \cup (x_{u_p}, C, x_1)$  contiene una  $(x_r, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_r, x_{r+1})$ . En consecuencia, las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  tienen la propiedad de la trayectoria, como se muestra en la figura 4.26.

**Caso 3:** Si  $x_{u_p} = x_1$ , entonces  $x_{t_p} \in V((x_{u_{p-1}}, C, x_{u_{p-2}}))$ , ya que si suponemos que  $x_{t_p} \in V((x_{u_{p+1}}, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{u_1-1}))$ , la cuerda  $(x_{t_p}, x_{u_p})$  también evita que el vértice  $x_{u_{p-1}}$  tenga la propiedad de la cabeza. Además, los índices cumplen que  $u_p < u_{p-1} < \dots < u_1 < u_0 < s$ , contradiciendo la elección de la flecha  $(x_{t_{p-1}}, x_{u_{p-1}})$ , dado que el índice  $u_{p-1}$  es mínimo respecto a la propiedad de evitar

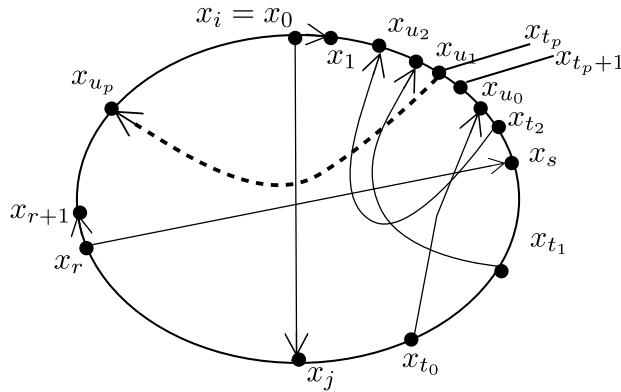


Figura 4.26: Caso 2 para  $x_{u_p}$

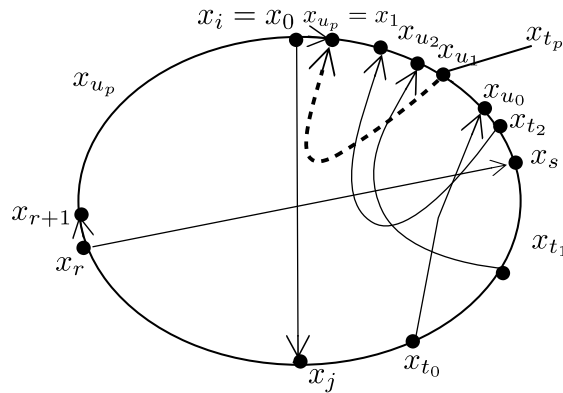


Figura 4.27: Caso 3 para  $x_{u_p}$

que  $x_{u_{p-2}}$  tenga la propiedad de la cabeza, como se muestra en la figura 4.27. Por lo tanto,  $x_{t_p} \in V((x_{u_{p-2}}, C, x_{u_{p-1}}))$ .

Más aún,  $(x_0, x_j) \cup (x_j, C, x_{r+1})$  es una  $(x_0, x_{r+1})$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_0, x_1)$ ; asimismo, el camino dirigido  $(x_r, x_s) \cup (x_s, C, x_{t_0}) \cup (x_{t_0}, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup \dots \cup (x_{u_{p-1}}, C, x_{t_p}) \cup (x_{t_p}, x_{u_p} = x_1)$  contiene una  $(x_r, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por  $(x_r, x_{r+1})$ . En consecuencia, tenemos que las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_r, x_{r+1})$  cumplen la propiedad de la trayectoria, como se muestra en la figura 4.27.

Además, observamos que estos son los únicos 3 casos ya que el vértice  $x_{u_p}$  no pertenece a  $V((x_{u_{p-1}}, C, x_j))$  puesto que contradice la elección de la cuerda  $(x_0, x_j)$ .

Por el análisis anterior, vemos que siempre podemos encontrar un par de fle-

chas con la propiedad de la trayectoria; es decir,  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, en  $C$  debe de existir al menos un vértice que tenga la propiedad de la cabeza.

Vamos a demostrar que existen al menos dos vértices en  $D$  que tienen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ .

**Afirmación 4:**  $C$  tiene al menos dos vértices que cumplen la propiedad de la cabeza.

Vamos a proceder por contradicción, suponiendo que existe un único vértice que cumple la propiedad de la cabeza. Sin pérdida de generalidad, etiquetamos a los vértices de  $C$ , de tal manera que  $x_1$  es el único vértice que cumple la propiedad de la cabeza en  $C$ ; es decir que, al recorrer la trayectoria dirigida  $(x_1, C, x_0)$  siempre nos encontramos primero con la cabeza de cualquier cuerda de  $C$ .

La demostración consiste en ir encontrando cuerdas en el ciclo  $C$ , hasta poder dar una  $x_0x_1$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ ; esto significa que tendremos un ciclo dirigido hamiltoniano especial tipo (A), lo cual contradice la hipótesis.

En las siguientes afirmaciones demostramos propiedades que cumplen las cuerdas que evitan que los vértices  $x_2$  y  $x_0$  tengan la propiedad de la cabeza.

**Afirmación 4.1:** Para toda cuerda  $(x_r, x_s)$  que evita que  $x_2$  tenga la propiedad de la cabeza, se tiene que  $x_s = x_1$ .

Como  $x_2$  no tiene la propiedad de la cabeza, entonces existe una cuerda  $(x_r, x_s)$ , tal que en la trayectoria dirigida  $(x_2, C, x_0) \cup (x_0, x_1)$  aparece primero el vértice  $x_r$  antes que el vértice  $x_s$ , como se muestra en la figura 4.28.

Supongamos por el contrario que  $x_s \neq x_1$ ; entonces el vértice  $x_s$  pertenece a  $V((x_2, C, x_{n-1}) \cup \{x_0\})$ . Como  $x_r$  aparece primero que  $x_s$ , entonces la flecha  $(x_r, x_s)$  también evita que  $x_1$  cumpla la propiedad de la cabeza, lo cual es una contradicción; ver la figura 4.28. Por lo tanto,  $x_s = x_1$ .

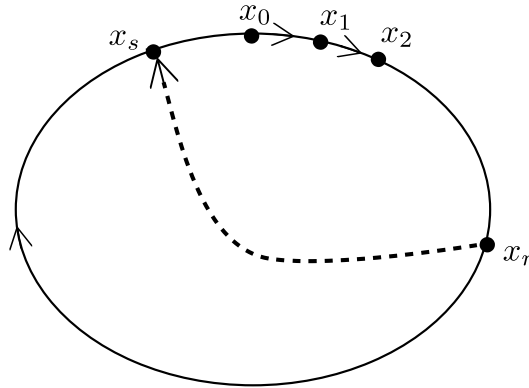


Figura 4.28: Afirmación 4.1

**Afirmación 4.2:** Para toda cuerda  $(x_{t_0}, x_{u_0})$  que evita que  $x_0$  tenga la propiedad de la cabeza, se tiene que  $x_{t_0} = x_0$ .

Supongamos por el contrario que  $x_{t_0} \neq x_0$ . Como la cuerda  $(x_{t_0}, x_{u_0})$  evita que  $x_0$  tenga la propiedad de la cabeza, entonces el vértice  $x_{t_0}$  aparece antes que  $x_{u_0}$  en la trayectoria dirigida  $(x_1, C, x_{n-1})$ . Esto implica que la cuerda  $(x_{t_0}, x_{u_0})$  también evita que  $x_1$  tenga la propiedad de la cabeza, lo cual es una contradicción; ver la figura 4.29. Por lo tanto,  $x_{t_0} = x_0$ .

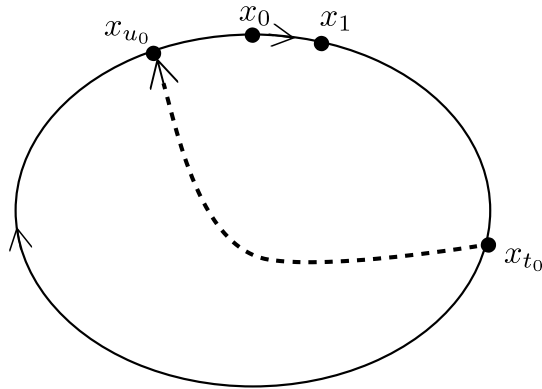


Figura 4.29: Afirmación 4.2

De las dos afirmaciones anteriores, vamos a tomar dos cuerdas  $(x_r, x_s = x_1)$  y  $(x_0 = x_{t_0}, x_{u_0})$ , que evitan que  $x_2$  y  $x_0$  tengan la propiedad de la trayectoria, respectivamente.

La idea de las siguientes afirmaciones es como sigue: bajo la suposición de que solamente el vértice  $x_1$  tiene la propiedad de la cabeza, iremos encontrando una serie de cuerdas  $(x_i, x_{u_i})$ , con  $i \in \{0, \dots, p\}$ , tales que evitan que los vértices  $x_0, x_{u_0}, x_{u_1}, \dots, x_{u_{p-1}}$  tengan la propiedad de la cabeza, y tendremos dos posibilidades en cada iteración dependiendo de la ubicación del vértice  $x_{u_i}$  en el ciclo  $C$ , de la siguientes manera:

**Caso 1:** Si  $x_{u_i} \in V((x_1, C, x_r))$ , entonces la flecha  $(x_0, x_1)$  cumple la propiedad de la trayectoria.

**Caso 2:** Si  $x_{u_i} \in V((x_{r+1}, C, x_{n-1}))$ , entonces existe una cuerda que evita que  $x_{u_i}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Al iterar y encontrar la serie de cuerdas  $(x_i, x_{u_i})$ , llegaremos a un paso  $p$  en el que necesariamente se cumple el primer caso.

Estas afirmaciones nos llevarán a concluir que, bajo la suposición de tener únicamente un vértice que tiene la propiedad de la cabeza, podemos encontrar una  $(x_0, x_1)$ -trayectoria que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ . Lo anterior implica que  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial del tipo (A), una contradicción.

**Afirmación 4.3:** Para toda cuerda  $(x_{i_0} = x_0, x_{u_0})$  que evita que  $x_0$  tenga la propiedad de la cabeza, se tienen dos casos, dependiendo de la ubicación de  $x_{u_0}$  en el ciclo  $C$ :

**Caso 1:** Si  $x_{u_0} \in V((x_1, C, x_r))$ , entonces la flecha  $(x_0, x_1)$  cumple la propiedad de la trayectoria.

**Caso 2:** Si  $x_{u_0} \in V((x_{r+1}, C, x_{n-1}))$ , entonces existe una cuerda que evita que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza.

**Caso 1:**  $x_{u_0} \in V((x_1, C, x_r))$ .

Por demostrar que la flecha  $(x_0, x_1)$  tiene la propiedad de la trayectoria. En este caso, tenemos que la trayectoria  $(x_0, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_r) \cup (x_r, x_1)$  es una  $(x_0, x_1)$ -trayectoria que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ . Por lo tanto, la flecha  $(x_0, x_1)$  tiene la propiedad de la trayectoria; es decir,  $C$  es un ciclo hamiltoniano del tipo (A), lo cual contradice nuestra hipótesis; ver la figura 4.30

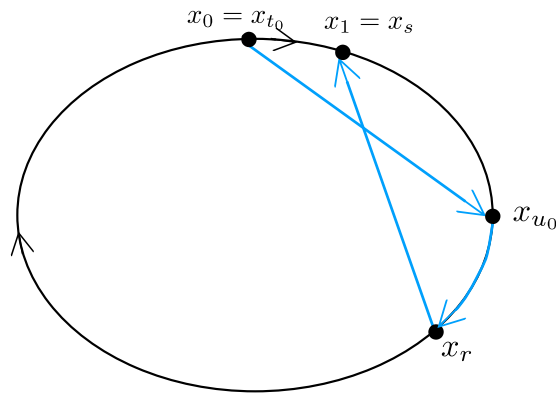


Figura 4.30: Caso 1 para  $x_{u_0}$

**Caso 2:**  $x_{u_0} \in V((x_{r+1}, C, x_{n-1}))$ .

Dado que estamos suponiendo que únicamente el vértice  $x_1$  tiene la propiedad de la cabeza, entonces existe al menos una cuerda que evita que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza; ver la figura 4.31.

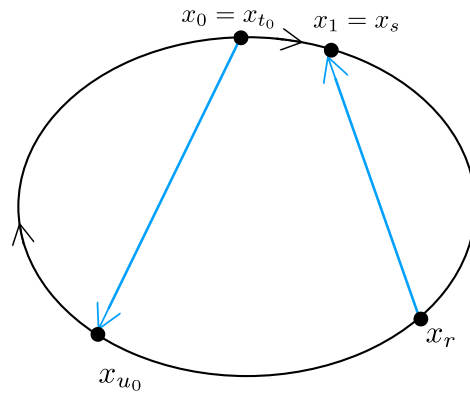


Figura 4.31: Caso 2 para  $x_{u_0}$

Con esto concluimos la afirmación 4.3.

Vamos a continuar iterando, tomando en cuenta la ubicación de las cabezas de las cuerdas que evitan que el vértice  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza.

**Afirmación 4.4:** Para toda flecha  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  que evita que  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza, tenemos que  $x_{k_1} \in V((x_{u_0}, C, x_0))$  y se tienen dos casos dependiendo de la ubicación del vértice  $x_{l_1}$  en el ciclo  $C$ :

**Caso 1:** Si  $x_{l_1} \in V((x_1, C, x_r))$ , entonces la flecha  $(x_0, x_1)$  tiene la propiedad de la trayectoria.

**Caso 2:** Si  $x_{l_1} \in V((x_{r+1}, C, x_{u_0-1}))$ , entonces existe una cuerda que evita que  $x_{l_1}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Primero, observamos que estos son los únicos casos, ya que si  $x_{l_1} \in V((x_{u_0+1}, C, x_0))$ , tenemos que tanto  $x_{k_1}$  como  $x_{l_1}$  pertenecen a  $V((x_{u_0}, C, x_0))$ , y como  $x_{k_1}$  aparece primero que  $x_{l_1}$ , entonces la flecha  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  también evita que  $x_1$  tenga la propiedad de la cabeza, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

También observamos que  $x_{k_1} \in V((x_{u_0}, C, x_0))$ , ya que por el contrario, si  $x_{k_1} \in V((x_1, C, x_{u_0-1}))$ , entonces la flecha  $(x_{k_1}, x_{l_1})$  evita que  $x_1$  tenga la propiedad de la cabeza, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

**Caso 1:**  $x_{l_1} \in V((x_1, C, x_r))$ .

En este caso, la trayectoria dirigida:

$$(x_0, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{k_1}) \cup (x_{k_1}, x_{l_1}) \cup (x_{l_1}, C, x_r) \cup (x_r, x_1)$$

es una  $(x_0, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ , como se muestra en la figura 4.32. Por lo tanto,  $C$  es un ciclo hamiltoniano especial del tipo (A), lo cual contradice nuestras hipótesis.

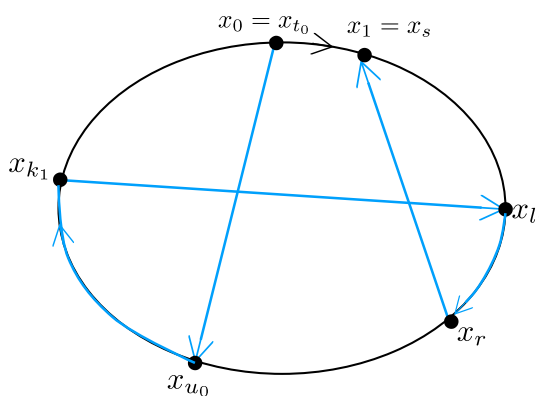


Figura 4.32: Caso 1 para  $x_{l_1}$

**Caso 2:**  $x_{l_1} \in V((x_{r+1}, C, x_{u_0-1}))$ .

Dado que  $x_1$  es el único vértice que tiene la propiedad de la cabeza, entonces existe al menos una cuerda que evita que  $x_{l_1}$  tenga la propiedad de la cabeza; ver la figura 4.33.

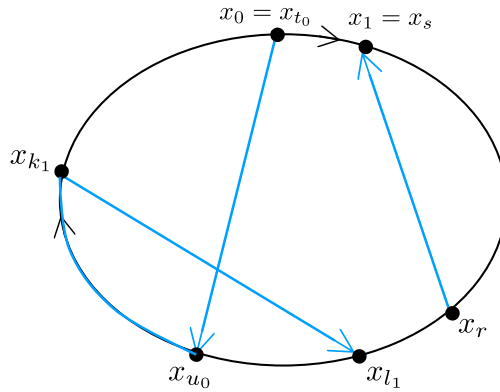


Figura 4.33: Caso 2 para  $x_{l_1}$

Con esto concluimos la afirmación 4.4.

Tomemos a la flecha  $(x_{t_1}, x_{u_1})$  tal que:

$$u_1 = \text{mín}\{j : (x_k, x_j) \text{ evita que } x_{u_0} \text{ tenga la propiedad de la cabeza}\}.$$

Por los dos casos anteriores, asumimos que  $x_{u_1} \in V((x_{r+1}, C, x_{u_0-1}))$ .

Por hipótesis el vértice  $x_{u_1}$  no tiene la propiedad de la cabeza. Por lo tanto, existe al menos una flecha que evita que tenga esta propiedad. Vamos a continuar iterando, tomando en cuenta la ubicación de las cabezas de las cuerdas que evitan que el vértice  $x_{u_1}$  tenga la propiedad de la cabeza.

**Afirmación 4.5:** Para toda flecha  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  que evita que  $x_{u_1}$  tenga la propiedad de la cabeza, tenemos que  $x_{k_2} \in V((x_{u_1}, C, x_{u_0}))$  y se tienen los siguientes dos casos para  $x_{l_2}$ :

**Caso 1:** Si  $x_{l_2} \in V((x_1, C, x_r))$ , entonces la flecha  $(x_0, x_1)$  tiene la propiedad de la trayectoria.

**Caso 2:** Si  $x_{l_2} \in V((x_{r+1}, C, x_{l_1-1}))$ , entonces existe una cuerda que evita que  $x_{l_2}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Primero veamos que  $x_{k_2} \in V((x_{u_1}, C, x_{u_0}))$ .



Supongamos por el contrario que  $x_{k_2} \in V((x_1, C, x_{u_1-1})) \cup V((x_{u_0}, x_0))$ . En el primer caso, tenemos que la flecha  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  evita que  $x_1$  tenga la propiedad de la cabeza, lo cual contradice nuestra suposición inicial; ver la figura 4.34.

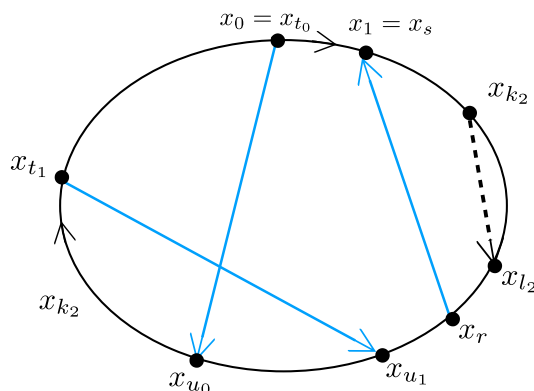


Figura 4.34:  $x_{k_2} \in V((x_1, C, x_{u_1-1}))$

En el segundo caso tenemos que si  $x_{k_2} \in V((x_{u_0}, x_0))$ , entonces la cabeza  $x_{l_2}$  puede estar en  $V((x_{u_0}, C, x_0) \cup (x_1, C, x_{u_1-1}))$ .

Si  $x_{l_2} \in V((x_{u_0+1}, C, x_0))$ , tenemos que tanto  $x_{k_2}$  como  $x_{l_2}$  pertenecen a  $V((x_{u_0}, C, x_0))$ , y como  $x_{k_2}$  aparece primero que  $x_{l_2}$ , entonces la flecha  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  también evita que  $x_1$  tenga la propiedad de la cabeza, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Si  $x_{l_2} \in V((x_1, C, x_{u_1-1}))$ , entonces la cuerda  $(x_{k_2}, x_{l_2})$  también evita que el vértice  $x_{u_0}$  tenga la propiedad de la cabeza, y contradice la elección de la flecha  $(x_{t_1}, x_{u_1})$ ; ver la figura 4.35.

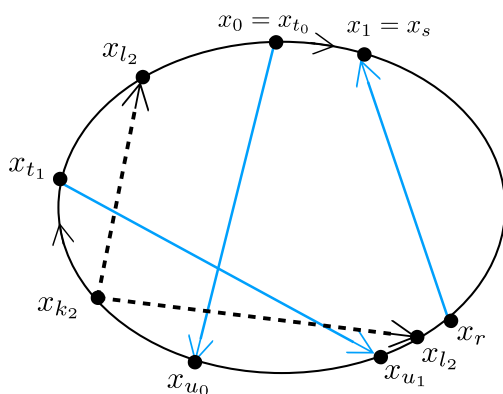


Figura 4.35:  $x_{k_2} \in V((x_{u_0}, x_0))$

**Caso 1:**  $x_{l_2} \in V((x_1, C, x_r))$ .

En este caso, el camino dirigido:

$$(x_0, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup (x_{u_1}, C, x_{k_2}) \cup (x_{k_2}, x_{l_2}) \cup (x_{l_2}, C, x_r) \cup (x_r, x_1)$$

es un  $(x_0, x_1)$ -camino dirigido que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ ; lo cual, por el teorema 2.1, implica que este  $(x_0, x_1)$ -camino dirigido contiene una  $(x_0, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ , como se muestra en la figura 4.36. Por lo tanto,  $C$  sería un ciclo hamiltoniano especial del tipo (A), lo cual contradice nuestras hipótesis.

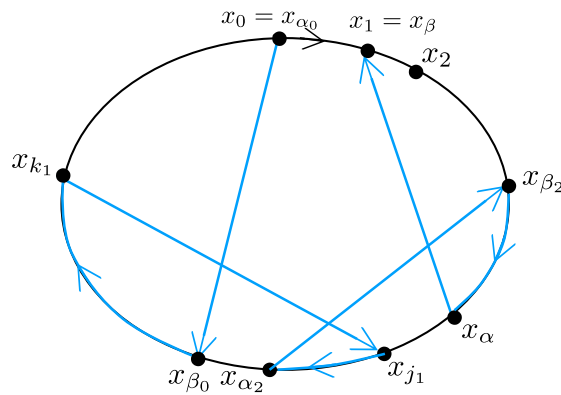


Figura 4.36: Caso 1 para  $x_{l_2}$

**Caso 2:**  $x_{l_2} \in V((x_{r+1}, C, x_{u_1-1}))$ .

Dado que estamos suponiendo que únicamente el vértice  $x_1$  tiene la propiedad de la cabeza, entonces existe al menos una cuerda que evita que  $x_{l_2}$  tenga la propiedad de la cabeza.

Con esto concluimos la afirmación 4.5.

Tomemos a la flecha  $(x_{l_2}, x_{u_2})$  tal que:

$$u_2 = \text{mín}\{j : (x_k, x_j) \text{ evita que } x_{u_1} \text{ tenga la propiedad de la cabeza}\}.$$

Por los dos casos anteriores, asumimos que  $x_{u_2} \in V((x_{r+1}, C, x_{u_1-1}))$ . Vamos a seguir iterando, tomando en cuenta la ubicación de las cabezas de las cuerdas que evitan que el vértice  $x_{u_2}$  tenga la propiedad de la cabeza.

De esta manera, al iterar este proceso, iremos encontrando cuerdas

$$(x_{t_0}, x_{u_0}), (x_{t_1}, x_{u_1}), \dots, (x_{t_m}, x_{u_m}),$$

que evitan que los vértices  $x_0, x_{u_0}, x_{u_1}, \dots, x_{u_{m-1}}$  tengan la propiedad de la cabeza, respectivamente, cuyos índices cumplen que  $u_i < u_{i-1}$ , con  $1 \leq i \leq m$ .

Como tenemos un número finito de vértices en  $(x_r, C, x_{u_0})$ , al iterar este proceso, eventualmente llegamos a una iteración  $p$  en la que encontramos una cuerda  $(x_{t_p}, x_{u_p})$  tal que necesariamente  $x_{u_p}$  cumple el caso 1; es decir, la flecha  $(x_0, x_1)$  cumple la propiedad de la trayectoria, utilizando el siguiente camino dirigido:

$$(x_0, x_{u_0}) \cup (x_{u_0}, C, x_{t_1}) \cup (x_{t_1}, x_{u_1}) \cup (x_{u_1}, C, x_{t_2}) \cup (x_{t_2}, x_{u_2}) \cup \dots \\ \cup (x_{u_{p-1}}, C, x_{t_p}) \cup (x_{t_p}, x_{u_p}) \cup (x_{u_p}, C, x_r) \cup (x_r, x_1).$$

Por el teorema 2.1 podemos extraer una  $(x_0, x_1)$ -trayectoria dirigida que no pasa por la flecha  $(x_0, x_1)$ . Esto contradice el hecho de que  $D$  no tiene ciclos hamiltonianos especiales. Por lo tanto, podemos concluir que en  $D$  existen al menos dos vértices que tienen la propiedad de la cabeza, que es lo que queríamos demostrar.

Recopilando las afirmaciones de este lema, tenemos que por la afirmación 4, existen al menos dos vértices que cumplen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ . Asimismo, por la afirmación 1,  $D$  no tiene ningún par fuerte de  $C$  en  $D$ . Por

lo tanto, existen dos vértices  $x_i$  y  $x_j$  tales que  $x_i$  y  $x_j$  cumplen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ , y el par  $\{x_i, x_j\}$  no es un par fuerte de  $C$  en  $D$ .

Esto concluye la demostración de este lema. □

**Lema 4.6.** *Sean  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices y  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo dirigido hamiltoniano en  $D$ . Si  $D$  contiene un par de vértices distintos  $\{x_i, x_j\}$  que tienen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$  y que no forman un par fuerte de  $C$  en  $D$ , entonces  $\vec{rc}(D) = n$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica hamiltoniana con  $n$  vértices,  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo hamiltoniano en  $D$ , y  $\{x_i, x_j\}$  un par de vértices distintos que tienen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$  y que no forman un par fuerte de  $C$  en  $D$ . Dado que  $D$  es fuertemente conexa y asimétrica, entonces por la proposición 3.1 tenemos que  $\vec{rc}(D) \leq n$ . Por demostrar que  $\vec{rc}(D) = n$ .

Vamos a proceder por contradicción suponiendo que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ . Sea  $\varphi : F(D) \rightarrow \{1, \dots, n - 1\}$  una  $(n - 1)$ -coloración arcoíris de las flechas de  $D$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $i < j$ , para los vértices  $x_i$  y  $x_j$ .

Las siguientes afirmaciones nos llevarán a concluir que bajo la suposición de que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$ , entonces el par  $\{x_i, x_j\}$  es un par fuerte de  $C$  en  $D$ , lo cual contradice nuestra hipótesis del teorema.

Vamos a denotar como  $T_i$  y  $T_j$  a las siguientes trayectorias dirigidas:

$$T_i = (x_i, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1}),$$

$$T_j = (x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{j-1}).$$

**Observación 1:** No existen cuerdas de  $C$  que tengan su cola en  $(x_i, C, x_{j-1})$  y que tengan la cabeza en  $(x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1})$ .

Por definición, una cuerda de  $C$  que tiene su cola en  $(x_i, C, x_{j-1})$  y que tenga la cabeza en  $(x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1})$ , evita que  $x_i$  tenga la propiedad de la cabeza, como se muestra en la figura 4.37.

**Observación 2:** No existen cuerdas de  $C$  que tengan su cola en  $(x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1})$  y que tengan la cabeza en  $(x_i, C, x_{j-1})$ .

Esta observación es análoga a la observación anterior.

**Afirmación 1:** La trayectoria  $T_i$  es la única  $(x_i, x_{i-1})$ -trayectoria dirigida en  $D$ .

Supongamos que existe  $T'_i$  otra  $(x_i, x_{i-1})$ -trayectoria dirigida distinta a  $T_i$ .

**Afirmación 1.1:**  $V(T'_i) \subset V(T_i)$ .

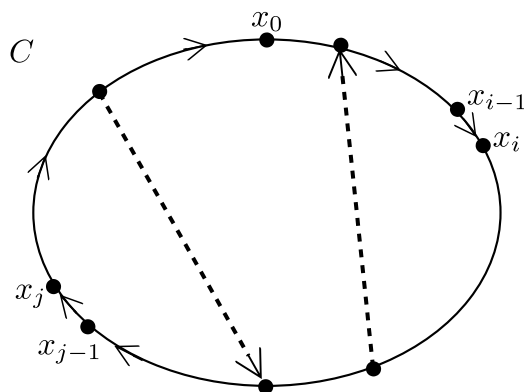


Figura 4.37: Observaciones 1 y 2 para para  $x_i$  y  $x_j$  respectivamente

Sabemos que  $V(T'_i) \subseteq V(T_i)$  ya que  $T_i$  pasa por todos los vértices de  $D$ ; es decir,  $V(T_i) = V(C) = V(D)$ . Supongamos por contradicción que  $V(T_i) = V(T'_i)$  y denotemos a  $T'_i$  como  $T'_i = (u_0 = x_i, \dots, u_m = x_{i-1})$ .

Notemos que dos trayectorias dirigidas distintas pueden tener el mismo conjunto de vértices y tener distintas flechas; sin embargo, si dos trayectorias dirigidas tienen el mismo conjunto de flechas, entonces necesariamente tendrán el mismo conjunto de vértices.

Sea  $(u_r, u_{r+1})$  la primer flecha de  $T'_i$  que no pertenece a  $F(T_i)$ . Notemos que  $u_r$  no puede ser  $x_i$  ya que la flecha  $(u_r, u_{r+1})$  sería una cuerda de  $C$  que tendría la cola en  $x_i$ . Por lo tanto,  $(u_r, u_{r+1})$  evita que  $x_i$  tenga la propiedad de la cabeza.

Por elección de la flecha  $(u_r, u_{r+1})$ , se tiene que:

$$(x_i, T'_i, u_r) = (x_i, T_i, u_r) = (x_i, C, u_r).$$

Como  $x_i$  tiene la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ , entonces el vértice  $u_{r+1}$  debe pertenecer a los vértices de la trayectoria dirigida  $(x_i, C, u_{r-2}) = (x_i, T_i, u_{r-2}) = (x_i, T'_i, u_{r-2})$ . Es decir,  $u_{r+1} \in V((x_i, T'_i, u_r))$ , lo cual implica que  $T'_i$  tiene vértices repetidos. Por lo tanto,  $T'_i$  no es una trayectoria dirigida, lo cual es una contradicción; ver la figura 4.38.

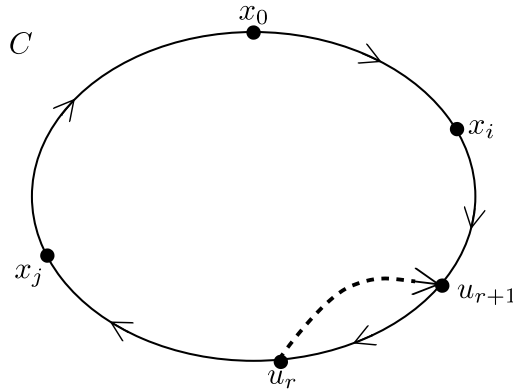


Figura 4.38: Afirmación 1

De esta manera podemos concluir que  $T_i$  es la única  $(x_i, x_{i-1})$ -trayectoria dirigida en  $D$ .

**Afirmación 2:** La trayectoria  $T_j$  es la única  $(x_j, x_{j-1})$ -trayectoria dirigida en  $D$ .

La demostración de esta afirmación es análoga a la demostración afirmación 1, al intercambiar el vértice  $x_i$  por  $x_j$ .

Como la longitud de  $T_i$  es  $n - 1$ , entonces bajo la coloración arcoíris  $\varphi$ , tenemos que cada flecha de  $T_i$  tiene un color diferente; igualmente bajo la coloración  $\varphi$  las flechas de la trayectoria dirigida  $T_j$  reciben un color diferente.

**Afirmación 3:**  $\varphi(x_{i-1}, x_i) = \varphi(x_{j-1}, x_j)$ .

Notemos que las trayectorias dirigidas  $T_i$  y  $T_j$  pueden ser representadas de la siguiente manera:

$$T_i = (x_i, C, x_{j-1}) \cup (x_{j-1}, x_j) \cup (x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1}),$$

$$T_j = (x_j, C, x_0) \cup (x_0, C, x_{i-1}) \cup (x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, C, x_{j-1}).$$

Observamos que las subtrayectorias dirigidas  $(x_i, C, x_{j-1})$ ,  $(x_j, C, x_0)$  y  $(x_0, C, x_{i-1})$  están contenidas tanto en  $T_i$  como en  $T_j$ , y son subtrayectorias arcoíris que utilizan en total  $n - 2$  colores distintos. Por lo que, necesariamente las flechas restantes  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $(x_{j-1}, x_j)$  deben tener el mismo color; es decir,  $\varphi(x_{i-1}, x_i) = \varphi(x_{j-1}, x_j)$ .

Con las afirmaciones anteriores y las observaciones 1 y 2, tenemos que las únicas flechas que conectan a las subdigráficas inducidas  $D[V((x_i, C, x_{j-1}))]$  y  $D[V((x_j, C, x_0)) \cup V((x_0, C, x_{i-1}))]$  son las flechas  $(x_{i-1}, x_i)$  y  $(x_{j-1}, x_j)$ , respectivamente.

**Afirmación 4:**  $(x_{j-1}, C, x_0) \cup (x_0, C, x_i)$  es la única  $(x_{j-1}, x_i)$ -trayectoria dirigida en  $D$ .

Nombramos a la trayectoria dirigida  $(x_{j-1}, C, x_0) \cup (x_0, C, x_i)$  como  $P_1$ . Vamos a proceder por contradicción, suponiendo que existe otra  $(x_{j-1}, x_i)$ -trayectoria dirigida, digamos  $R_1$ .

Sea  $(x_r, x_s)$  la primer flecha de  $F(R_1)$  que no está en  $F(P_1)$ . Observamos que  $x_r \in V(P_1)$  y  $x_s$  es distinto del sucesor de  $x_r$  bajo el ciclo  $C$ . Por el comentario que precede a la afirmación 4,  $(x_{j-1}, x_j)$  es la primera flecha de  $P_1$  y por lo tanto  $x_r \neq x_{j-1}$ . Consideramos 2 casos, dependiendo de la ubicación del vértice  $x_s$  en el ciclo dirigido  $C$ .

**Caso 1:**  $x_s \in V((x_{r+2}, C, x_{j-1}))$ .

En este caso tenemos que la flecha  $(x_r, x_s)$  evita que  $x_j$  tenga la propiedad de la cabeza, lo cual es una contradicción, como se muestra en la figura 4.39.

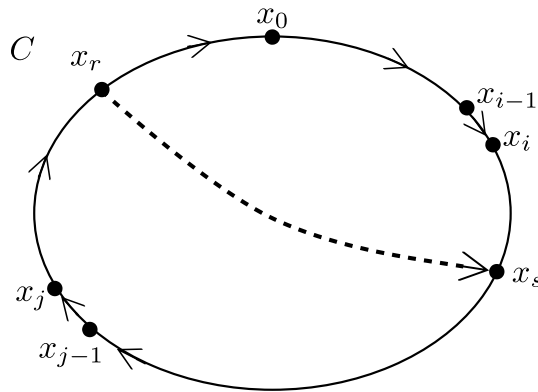


Figura 4.39: Caso 1 para  $x_s$

**Caso 2:**  $x_s \in V((x_j, C, x_r))$ .

En este caso, la trayectoria dirigida  $R_1$  tiene vértices repetidos, lo que nos lleva a una contradicción, como se muestra en la figura 4.40.

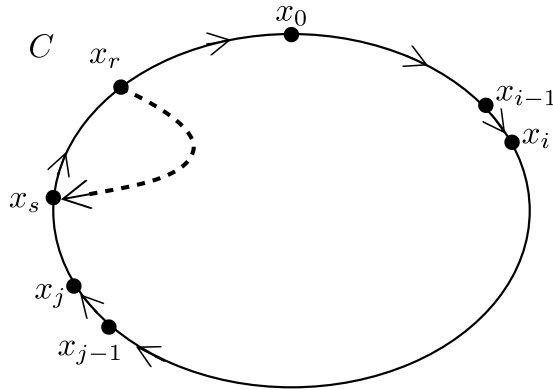


Figura 4.40: Caso 2 para  $x_s$

Por los dos casos anteriores, concluimos que  $x_s$  es el sucesor de  $x_r$  bajo el ciclo  $C$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, tenemos que  $P_1 = (x_{j-1}, C, x_0) \cup (x_0, C, x_i)$  es la única  $(x_{j-1}, x_i)$ -trayectoria dirigida en  $D$ .

Como  $\varphi$  es una coloración arcoíris, y por la afirmación 4 la trayectoria dirigida  $P_1$  es la única  $(x_{j-1}, x_i)$ -trayectoria dirigida en  $D$ , entonces  $P_1$  es una trayectoria arcoíris, lo cual contradice la afirmación 3, ya que  $\varphi(x_{j-1}, x_j) = \varphi(x_{i-1}, x_i)$ .

Por lo tanto, como el suponer que  $\vec{rc}(D) \leq n - 1$  nos lleva a una contradicción, entonces podemos concluir que  $\vec{rc}(D) = n$ , lo que se quería demostrar.  $\square$



Para concluir este capítulo, enunciaremos nuevamente el teorema principal, el cual se demuestra con los lemas anteriores.

**Teorema (4.2).** *Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa con  $n$  vértices. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1)  $\vec{c}(D) = n$ .
- (2)  $D$  es una digráfica hamiltoniana, pero no tiene ciclos hamiltonianos especiales.
- (3)  $D$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y dos vértices  $x_i$  y  $x_j$  tales que tienen la propiedad de la cabeza con respecto a  $C$ , pero el par  $\{x_i, x_j\}$  no es un par fuerte de  $C$  en  $D$ .

*Demostración.* (1)  $\implies$  (2) es la contrapositiva del lema 4.3 y el lema 4.4.

(2)  $\implies$  (3) se sigue del lema 4.5.

(3)  $\implies$  (1) es consecuencia del lema 4.6. □

# Capítulo 5

## Coloración arcoíris en torneos

En este último capítulo presentamos un resultado para torneos fuertemente conexos con más de 5 vértices que nos permite acotar su número de coloración arcoíris entre 2 y  $n - 1$ . Este resultado se encuentra en el artículo [5], el cual es la fuente principal de este trabajo.

### 5.1. Definiciones

Decimos que una digráfica  $D$  es **semicompleta**, si para todo par de vértices  $x$  y  $y$  se tiene que  $\{(x, y), (y, x)\} \cap F(D) \neq \emptyset$ ; es decir, para cualquier par de vértices  $x$  y  $y$  en  $V(D)$ , al menos una de las flechas  $(x, y)$  o  $(y, x)$  pertenece a  $F(D)$ .

Recordamos que en una digráfica  $D$ , una flecha  $(u, v)$  es **asimétrica** si  $(v, u)$  no pertenece a  $F(D)$ . Si en una digráfica  $D$ , toda flecha es asimétrica, entonces decimos que  $D$  es **asimétrica**.

De esta manera podemos definir un **torneo** como una digráfica semicompleta y asimétrica.

De forma alternativa, se puede definir un torneo  $T$  como una digráfica que se obtiene de una gráfica completa con  $n$  vértices,  $K_n$ , al asignarle una y sólo una dirección a cada una de las aristas de  $K_n$ . El nombre de torneos, proviene de la teoría de juegos debido a que modelan las rondas de apareamiento de juegos en la que todos los jugadores o equipos se enfrentan, sin posibilidad de tener empates; usualmente, la dirección de la flecha indica el ganador de cada uno de estos encuentros. En la figura 5.1 se muestra la gráfica completa  $K_6$ , a la que le ha sido asignada una dirección a cada una de sus aristas.

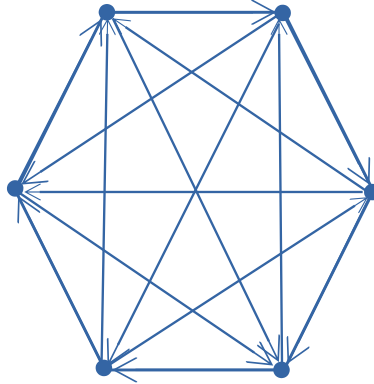


Figura 5.1: Ejemplo de un torneo con 6 vértices

## 5.2. Coloración arcoíris en torneos fuertemente conexos

Presentamos primero un teorema auxiliar, que nos permite ver que un torneo fuertemente conexo siempre contiene un ciclo dirigido hamiltoniano.

**Teorema 5.1.** *Si  $T$  es un torneo fuertemente conexo con al menos 3 vértices, entonces  $T$  contiene un ciclo dirigido hamiltoniano.*

*Demostración.* Tomemos a  $C$  como un ciclo dirigido en  $T$ , de longitud máxima; sabemos que  $C$  existe por la proposición 2.1.

Vamos a proceder por contradicción, suponiendo que  $C$  no es un ciclo hamiltoniano. Consideremos a la partición de  $V(T)$  dada por:

$$V(C),$$

$$Y = V(T) - V(C).$$

Por nuestra suposición, sabemos que  $Y \neq \emptyset$ .

Vamos a considerar dos casos, dependiendo de los invecinos y exvecinos que tengan los vértices del conjunto  $Y$ .

**Caso 1:** Existe  $v$  en  $Y$  tal que  $v$  tiene al menos un invecino y un exvecino en  $C$ .

Sean  $x_{in}$  y  $x_{ex}$  un invecino y un exvecino de  $v$  en  $C$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el ciclo dirigido  $C$  empieza y termina en  $x_{in}$ . Consideremos la trayectoria dirigida  $(x_{in}, C, x_{ex})$ , como se muestra en la figura 5.2.

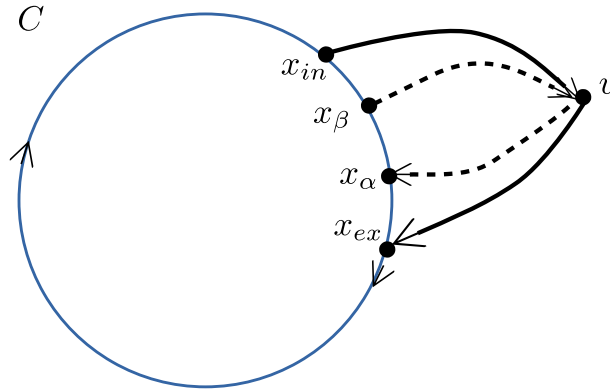


Figura 5.2: Caso 1

Sea  $x_\alpha$ , el primer vértice en la trayectoria dirigida  $(x_{in}, C, x_{ex})$  tal que  $x_\alpha$  es un exvecino de  $v$ ; sabemos que  $x_\alpha$  existe porque al menos  $x_{ex}$  es un exvecino de  $v$  en la trayectoria dirigida  $(x_{in}, C, x_{ex})$ . Por la elección de  $x_\alpha$ , su antecesor, digamos  $x_\beta$ , es un invecino de  $v$ . Por lo tanto, la trayectoria dirigida  $(x_\beta, v) \cup (v, x_\alpha) \cup (x_\alpha, C, x_{in}) \cup (x_{in}, C, x_\beta)$  es un ciclo dirigido de longitud mayor que  $C$ , lo cual contradice la elección de  $C$ .

**Caso 2:** Para cualquier vértice  $v$  en  $Y$ , se tiene que  $v$  es invecino de todos los vértices de  $C$  o  $v$  es exvecino de todos vértices de  $C$ .

Llamemos  $V_1 = \{v \in Y : v \in N_T^-(x_i), \text{ para todo } x_i \in V(C)\}$ , es decir,  $V_1$  es el conjunto de todos los vértices que no pertenecen al ciclo  $C$  y que son invecinos de todos los vértices del ciclo  $C$ . Similarmente, consideramos al conjunto  $V_2 = \{v \in Y : v \in N_T^+(x_i) \text{ para todo } x_i \in V(C)\}$ , es decir,  $V_2$  es el conjunto de todos los vértices que no pertenecen al ciclo  $C$  y que son exvecinos de todos los vértices del ciclo  $C$ .

Vamos a demostrar que tanto  $V_1$  como  $V_2$  son conjuntos no vacíos; observamos que por construcción de  $Y$  al menos uno de ellos es no vacío.

Supongamos por el contrario que  $V_1 = \emptyset$ . Dado que sabemos que el conjunto  $Y$  es no vacío, entonces tenemos que  $Y = V_2$ , es decir,  $Y$  consiste únicamente de vértices tales que todos ellos son exvecinos de todos los vértices de  $C$ . Ahora bien, dado que  $\{V(C), V_2\}$  es una partición de  $V(T)$ , entonces por el teorema 2.5 tenemos que existe al menos una flecha  $f$  cuya cola pertenece a  $V_2$  y la cabeza pertenece a  $V(C)$ ; esto contradice la suposición de que en  $V_2$  solamente existen vértices que son adyacentes desde cada vértice de  $C$ . Por lo tanto,  $V_1$  es distinto del vacío. De manera análoga se demuestra que  $V_2 \neq \emptyset$ .

Tomemos la siguiente partición de los vértices de  $T$ :

$$U_1 = V(C) \cup V_1,$$

$$U_2 = V(T) - U_1.$$

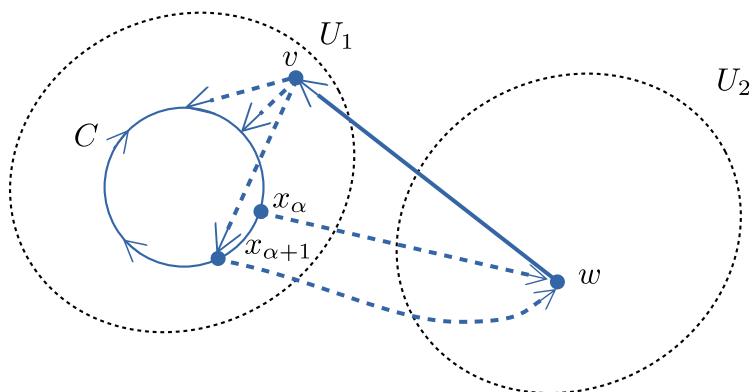


Figura 5.3: Partición de  $T$  en  $U_1$  y  $U_2$

Utilizando el teorema 2.5, tenemos que existe una flecha  $(w, v)$  tal que la cola  $w$  pertenece a  $U_2$ , y la cabeza  $v$  pertenece a  $U_1$ ; más aún,  $v \in V_1$  por definición de  $U_2$ , ver la figura 5.3.

Tomemos un vértice en  $V(C)$ , digamos  $x_\alpha$ , y sea  $x_{\alpha+1}$  su sucesor bajo el ciclo dirigido  $C$ . Por definición de  $U_2$ , existe la flecha  $(x_\alpha, w)$  y por definición de  $U_1$ , existe la flecha  $(v, x_{\alpha+1})$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $C$  empieza y termina en el vértice  $x_{\alpha+1}$ . Se sigue que  $(x_\alpha, w) \cup (w, v) \cup (v, x_{\alpha+1}) \cup (x_{\alpha+1}, C, x_\alpha)$  es un ciclo dirigido de longitud mayor a la longitud de  $C$ , lo cual contradice la elección de  $C$ .

De la contradicción de los casos 1 y 2, tenemos entonces que  $T$  debe tener necesariamente un ciclo dirigido hamiltoniano. □

**Teorema 5.2.** *Si  $T$  es un torneo fuertemente conexo con  $n \geq 5$  vértices, entonces  $2 \leq \vec{rc}(T) \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Primero veamos que  $2 \leq \vec{rc}(T)$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $T$ . Dado que  $T$  es un torneo, entonces sabemos que  $(u, v) \in F(T)$  ó  $(v, u) \in F(T)$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $(u, v) \in F(T)$ , lo cual significa que  $d(u, v) = 1$ . Como  $T$  es un torneo, entonces  $T$  es una digráfica asimétrica, por lo que  $(v, u) \notin F(T)$ . Por lo tanto,  $d(v, u) \geq 2$ .

5.2. COLORACIÓN ARCOÍRIS EN TORNEOS FUERTEMENTE CONEXOS 97

Dado que:

$$2 \leq d(v, u) \leq \text{diám}(T),$$

entonces por el teorema 3.1 tenemos que:

$$2 \leq \vec{rc}(T),$$

lo cual demuestra la primera desigualdad de este teorema.

Para demostrar la segunda desigualdad, tomamos un ciclo dirigido hamiltoniano  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  que sabemos que existe por el teorema 5.1. Como  $T$  es un torneo, tenemos los siguientes dos casos: existe un  $x_i$  en  $C$  tal que  $(x_i, x_{i+2})$  es una flecha de  $T$  ó  $(x_{i+2}, x_i)$  es una flecha de  $T$ , para toda  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , con los índices tomados módulo  $n$ .

**Caso 1:** Existe un  $x_i$  en  $C$  tal que  $(x_i, x_{i+2})$  es una flecha de  $T$ , con los índices tomados módulo  $n$ .

En este caso, tenemos que las flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tienen la propiedad de la trayectoria, ya que la flecha  $(x_i, x_{i+2})$  es una  $(x_i, x_{i+2})$ -trayectoria dirigida que no contiene a la flecha  $(x_i, x_{i+1})$ , y la trayectoria  $(x_{i+1})$  no pasa por la flecha  $(x_{i+1}, x_{i+2})$ . Por lo tanto,  $C$  es un ciclo hamiltoniano del tipo (B), y al aplicar el lema 4.4, tenemos que  $\vec{rc}(T) \leq n-1$ , que es lo que queríamos demostrar.

**Caso 2:**  $(x_{i+2}, x_i)$  es una flecha de  $T$ , para toda  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , con los índices tomados módulo  $n$ .

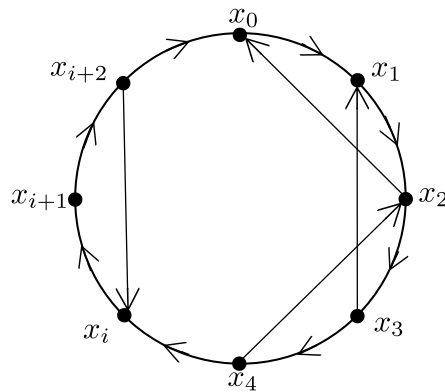


Figura 5.4: Caso 2

Consideremos a la subdigráfica  $T'$  dada por:

$$V(T') = V(C)$$

$$F(T') = F(C) \cup \{(x_{i+2}, x_i) : 0 \leq i \leq n-1\} - \{(x_1, x_2), (x_3, x_1), (x_2, x_0)\}$$

como se muestra en la figura 5.5.

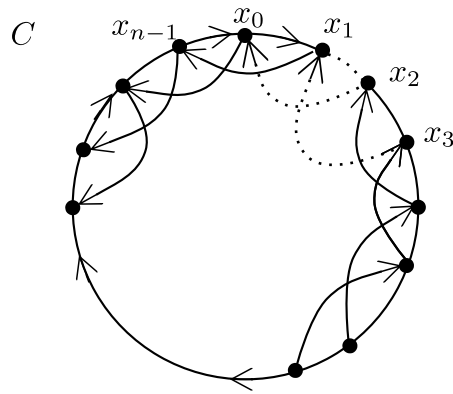


Figura 5.5: subdigráfica  $T'$

Vamos a ver que  $T'$  cumple las hipótesis del corolario 3.4.1, lo cual nos va a garantizar que  $\vec{rc}(T) \leq n-1$ .

**Afirmación 1:**  $T'$  es una subdigráfica generadora de  $T$ .

Esta afirmación se sigue del hecho de que  $C$  es un ciclo hamiltoniano en  $T$ , y por construcción de  $T'$ , tenemos que  $V(T') = V(C)$ . Por lo tanto,  $T'$  cumple la definición de ser una subdigráfica generadora de  $T$ .

## 5.2. COLORACIÓN ARCOÍRIS EN TORNEOS FUERTEMENTE CONEXOS 99

**Afirmación 2:**  $T'$  es una subdigráfica fuertemente conexa de  $T$ .

En efecto, observamos que el camino dirigido dado por:

$$(x_2, C, x_0) \cup (x_0, x_1) \cup (x_1, x_{n-1}) \cup (x_{n-1}, x_0) \cup (x_0, x_{n-2}) \cup (x_{n-2}, x_{n-1}) \cup \dots \\ \cup (x_4, x_5) \cup (x_5, x_3) \cup (x_3, x_4) \cup (x_4, x_2),$$

es un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de  $T'$ , como se muestra en la figura 5.5. Por lo tanto, por el teorema 2.3, se sigue que  $T'$  es una subdigráfica de  $T$  fuertemente conexa.

**Afirmación 3:**  $T'$  no es una subdigráfica hamiltoniana.

Supongamos por el contrario que existe  $C'$  un ciclo dirigido hamiltoniano en  $T'$ .

Observamos que  $\delta_{T'}^-(x_0) = 1$ , y que  $\delta_{T'}^-(x_1) = \delta_{T'}^+(x_1) = 1$ , entonces las flechas  $(x_{n-1}, x_0)$ ,  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, x_{n-1})$  pertenece a  $F(C')$ . Como  $l(C') \geq 5$ , entonces bajo la sucesión de vértices de  $V(C')$ , tenemos que existe un vértice  $x_a$ , que es adyacente hacia  $x_{n-1}$ , con  $x_a \neq x_1$ . Por lo tanto, la flecha  $(x_a, x_{n-1})$  pertenecen a  $F(C')$ . Esto significa que  $\delta_{C'}^-(x_{n-1}) = 2$ , lo cual contradice el hecho de que  $C'$  sea un ciclo dirigido. Por lo tanto,  $T'$  no es una subdigráfica hamiltoniana.

Así, con las afirmaciones 1, 2 y 3, estamos en condiciones de aplicar el corolario 3.4.1, que nos garantiza que  $\vec{rc}(T) \leq n - 1$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Con este resultado, que acota el número de coloración arcoíris para torneos fuertemente conexos, terminamos este trabajo. Enunciamos aquí un teorema adicional, que nos proporciona una cota inferior y superior al número de coloración arcoíris en torneos fuertes, basados en el diámetro del torneo. La demostración de este resultado se encuentra en [5]. Aquí lo enunciamos sin demostración debido a la extensión de la prueba.

**Teorema 5.3.** *Si  $T$  es un torneo fuertemente conexo, entonces:*

$$diám(T) \leq \vec{rc}(T) \leq diám(T) + 2.$$





# Conclusiones

Los objetivos de este trabajo son, dar una introducción detallada a los conceptos y definiciones necesarias para entender la teoría de coloración arcoíris en gráficas y digráficas; proporcionar demostraciones detalladas de los resultados que se presentan en [5].

En los primeros dos capítulos de este trabajo damos definiciones básicas y otras más especializadas para entender los conceptos enunciados en [5]. Asimismo, presentamos una serie de resultados, demostraciones y caracterizaciones referentes a las digráficas fuertemente conexas y mínimamente fuertes.

En el tercer capítulo introducimos la coloración de coloración arcoíris para digráficas, y damos cotas para las familias de digráficas fuertemente conexas y mínimamente fuertes. Además, se enuncia la definición de la propiedad de la trayectoria, la cual nos ayuda, en caso de cumplirse, a disminuir en uno la cota superior de la coloración arcoíris para las digráficas fuertemente conexas cuyo número de coloración arcoíris es igual a su orden. Este capítulo concluye dando una cota superior a la coloración arcoíris para las digráficas mínimamente fuertes que no son hamiltonianas o que no son un ciclo.

El cuarto capítulo se centró en el estudio de la coloración arcoíris para gráficas hamiltonianas. En particular, vimos una caracterización para las digráficas mínimamente fuertes basada en la coloración arcoíris. Después, se introdujeron las definiciones de la propiedad de la cabeza, ciclo hamiltoniano especial y par fuerte. Con estas definiciones, se caracterizan a las digráficas fuertemente conexas cuyo número de coloración arcoíris es igual a su orden.

Por último, en el quinto capítulo presentamos la definición de un torneo a partir de las definiciones de digráfica asimétrica y digráfica semicompleta, y se muestran cotas inferiores y superiores para la coloración arcoíris de torneos fuertemente conexas de orden mayor o igual a 5. Al final del capítulo, se enuncia un resultado que acota la coloración arcoíris de los torneos fuertes respecto al diámetro del torneo. Este y otros resultados adicionales relacionados con torneos

fuertes, se presentan al final del artículo [5], y pueden ser desarrollados en otras tesis o trabajos de investigación.

Durante la escritura de esta tesis, nos hemos planteado algunos problemas para futuras investigaciones. Proponemos la posibilidad de explorar a las digráficas cuasitransitivas, debido a que los torneos son un caso particular de este tipo de digráficas y dado que esta noción está relacionada con la propiedad de la trayectoria, así como investigar el número de coloración arcoíris en distintos tipos de productos, por ejemplo, la suma de Zykov.

Para el lector interesado en conocer nuevos resultados en la teoría de coloración arcoíris en digráficas, [4] presenta un compendio actualizado con resultados recientes.

# Bibliografía

- [1] Gary Chartrand, Garry L Johns, Kathleen A McKeon y col. «Rainbow connection in graphs». En: *Mathematica Bohemica* 133.1 (2008), págs. 85-98.
- [2] S Chakraborty, E Fischer, A Matsliah y col. «Hardness and algorithms for rainbow connectivity». En: *Proceedings of the 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), Freiburg*. 2009, págs. 243-254.
- [3] Xueliang Li, Yongtang Shi y Yuefang Sun. «Rainbow connections of graphs: A survey». En: *Graphs and Combinatorics* 29.1 (2013), págs. 1-38.
- [4] Xueliang Li y Yuefang Sun. «An updated survey on rainbow connections of graphs-a dynamic survey». En: *Theory and Applications of Graphs* 1 (2017), pág. 3.
- [5] Paul Dorbec, Ingo Schiermeyer, Elżbieta Sidorowicz y col. «Rainbow connection in oriented graphs». En: *Discrete Applied Mathematics* 179 (2014), págs. 69-78.
- [6] Víctor Alfonso López Vázquez. *Una introducción a la coloración arcoíris*. Tesis de licenciatura. UNAM, 2018.