UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TOPOLOGÍAS EN HIPERESPACIOS DE CONJUNTOS CERRADOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANANDA LÓPEZ POO CABRERA

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE DE 2021

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN-115819 *Estructuras asimétricas e hiperespacios*. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción

Un hiperespacio es una colección de subconjuntos de un espacio topológico equipada con una topología. A principios del siglo XX se dieron los primeros pasos para dar una topología a una clase de subconjuntos de un espacio X. En [15], Hausdorff se basó en las ideas de Pompeiu ([22]) para asignar una métrica a la clase $\mathrm{CL}(X)$ de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, en el caso en el que X es un espacio métrico acotado. Gran parte del estudio de la estructura de hiperespacios con la métrica de Hausdorff en los siguientes años se reunió en [17] por Kelley en 1942. En [26] y [27], Vietoris definió una topología en $\mathrm{CL}(X)$ cuando X es un espacio topológico, cuyas propiedades fueron investigadas por Michael en [19] en 1951. Este artículo sentó el precedente para el estudio de hiperespacios en los siguientes años. En la década de 1960, la topología de Fell se definió en [14], y la topología de Wijsman se introdujo en [29] inicialmente por sus aplicaciones en estadística.

En análisis convexo, en la clase $\mathrm{Conv_B}(X)$ de subconjuntos cerrados, convexos, acotados y no vacíos de un espacio normado X se ha usado principalmente la topología de la métrica de Hausdorff ([10]), pero esta resulta demasiado fuerte en colecciones de subconjuntos que no son necesariamente acotados. En el caso de un espacio normado X de dimensión finita, la topología de Fell solucionó el problema de extender la topología de la métrica de Hausdorff a la clase $\mathrm{Conv}(X)$ de subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos ([8]). Sin embargo, la topología de Fell no es ni siquiera Hausdorff cuando se consideran espacios normados de dimensión infinita ([6, Proposición 5.1.2]). La topología de Attouch-Wets se definió y se estudió inicialmente en [20, 1, 2]. Resultó ser la mejor topología que se reduce a la topología de Fell en el caso de dimensión finita ([6, Teoremas 3.1.4, 5.1.10]) y es adecuada para problemas de optimización ([1, 2, 8]).

En este trabajo estudiaremos las topologías de la métrica de Hausdorff, de Vietoris, de Fell, de Wijsman y de Attouch-Wets en hiperespacios de conjuntos cerrados y la relación entre ellas. También discutiremos el problema de cuándo una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos induce una función continua $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ entre sus respectivos hiperespacios (véase la ecuación 4.1 para la definición precisa de f^*).

La función inducida tiene un papel importante en el área de sistemas dinámicos ([4, 28]), por lo que el problema de su continuidad ha sido estudiado desde hace tiempo ([16, 19, 28]). Usualmente se considera el hiperespacio $\mathrm{K}(X)$ de subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico X, y en este caso la función inducida $f^* : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(X)$ siempre resulta continua ([4]). En el contexto de hiperespacios de subconjuntos cerrados, la función $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ es continua cuando se usa la topología de Vietoris ([19]), y Hitchcock dio una caracterización de su continuidad en el caso de la topología de la métrica de Hausdorff ([16, Teorema 2]). Con respecto a la topología de Fell sólo existen resultados parciales, y la continuidad de la función inducida no ha sido aún estudiada utilizando las topologías de Wijsman y de Attouch-Wets.

Este texto está organizado de la siguiente manera:

El capítulo 1 corresponde a los preliminares. En este se establecerán la notación, definiciones y resultados que se usarán posteriormente.

En el capítulo 2 se introducirán las topologías de la métrica de Hausdorff, de Vietoris, de Fell, de Wijsman y de Attouch-Wets y sus propiedades básicas.

En la primera sección del capítulo 3 se estudiarán las topologías en el espacio $\mathrm{CL}(X)$ que son inducidas por una topología en el espacio de funciones $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$. Es decir, si (X, d) es un espacio métrico, a cada elemento A de $\mathrm{CL}(X)$ se le puede asignar la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A)$, que es un elemento de $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$. Esta identificación permite obtener una topología en $\mathrm{CL}(X)$, por cada topología en $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$.

El resto del capítulo 3 se dedicará a la relación entre las topologías introducidas en el capítulo 2. Se establecerá bajo qué condiciones en un espacio X se cumple que dos de las topologías coincidan en $\mathrm{CL}(X)$, y se estudiará en qué subespacios de $\mathrm{CL}(X)$ se da la igualdad entre estas topologías.

En el capítulo 4 se discutirá el problema de cuándo la función inducida es continua. En particular, se dará una caracterización para la continuidad de $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ cuando se considera la topología de Attouch-Wets en $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{CL}(Y)$. También se caracterizará su continuidad cuando se usa la topología de Fell, en el caso en el que la función original $f : X \to Y$ es cerrada.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección se introducirán la notación y los conceptos que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

Si (X, τ) es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, denotaremos por $\operatorname{int} A$ y $\overline{A}$ al interior y la cerradura de A en X, respectivamente. Si (Y, σ) es otro espacio topológico, escribiremos $\mathrm{C}(X, Y)$ para designar el conjunto de funciones continuas de X a Y.

Si (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos por $B_\varepsilon(x)$ y $B_\varepsilon[x]$ a las bolas abierta y cerrada, respectivamente, con centro en x y radio ε. Es decir,

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad B_\varepsilon[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Dados un elemento x y un subconjunto no vacío A del espacio métrico (X, d) se define la distancia de x a A como $d(x, A) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$. Para $A \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$ denotaremos

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Sea X un conjunto. Una *métrica infinita* en X es una función $d : X \times X \to [0, \infty]$ tal que, para cada $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Es decir, cumple las condiciones usuales de una métrica, pero se permite que $d(x,y)=\infty$. Para $x\in X$ y $\varepsilon>0$, definimos las bolas abierta y cerrada con centro en x y radio ε de la misma forma que en un espacio métrico. La métrica infinita d induce una topología en X igual que lo hace una métrica ordinaria, es decir, $U\subseteq X$ es abierto en X si y sólo si para cada $x\in U$ existe $\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(x)\subseteq U$. Esta topología es metrizable, por ejemplo por la métrica $d':X\times X\to[0,\infty)$ dada por $d'(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$.

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Usaremos la siguiente notación para ciertas clases de subconjuntos de X:

$$2^X=\{A\subseteq X \mid A \text{ es cerrado en } X\},$$

$$\mathrm{CL}(X)=\{A\subseteq X \mid A\neq\emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\},$$
$$\mathrm{K}(X)=\{A\subseteq X \mid A\neq\emptyset \text{ y } A \text{ es compacto}\}.$$

Si (X,d) es un espacio métrico, denotaremos

$$\mathrm{CLB}(X)=\{A\in\mathrm{CL}(X) \mid A \text{ es acotado}\}.$$

Por último, si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio normado, denotaremos

$$\mathrm{Conv}(X)=\{A\in\mathrm{CL}(X) \mid A \text{ es convexo}\},$$

$$\mathrm{cc}(X)=\{A\in\mathrm{CL}(X) \mid A \text{ es convexo y compacto}\}.$$

Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff. Llamaremos *hiperespacio* a un espacio topológico formado al asignar una topología a una subfamilia de $\mathrm{CL}(X)$. Sea Δ una subfamilia de $\mathrm{CL}(X)$ que contiene a los conjuntos unitarios. Una propiedad mínima que pediremos que cumpla una topología en Δ es que preserve la topología del espacio X. Si una topología en Δ cumple que la función $i:X\to\Delta$ dada por $i(x)=\{x\}$ es un encaje, diremos que esta topología es *admisible*.

1.1. Topología débil

Sean X un conjunto, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_\alpha:X\to X_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ una familia de funciones. A la topología en X generada por la subbase

$$\left\{f_\alpha^{-1}(U) \mid U\subseteq X_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha,\ \alpha\in\mathrm{A}\right\}$$

se le llama la topología débil inducida por $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Es la topología más débil en X que cumple que cada f_α es continua. Es claro que si $\mathcal{B}_\alpha$ es una subbase de X_α para cada $\alpha \in A$, entonces

$$\left\{f_\alpha^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{B}_\alpha,\ \alpha \in A\right\}$$

también es una subbase para la topología débil inducida por $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Tenemos el siguiente teorema sobre la convergencia de redes en un espacio con la topología débil inducida por una familia de funciones. Las definiciones de red y convergencia de red pueden consultarse en [13, Sección 1.6].

Teorema 1.1.1. *Sea X un espacio con la topología débil inducida por la familia de funciones $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Sean $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X y x un elemento de X. Entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x si y sólo si la red $(f_\alpha(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f_\alpha(x)$ para cada $\alpha \in A$.*

Demostración. Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x, entonces $(f_\alpha(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f_\alpha(x)$ para cada $\alpha \in A$, debido a la continuidad de cada función f_α.

Por otro lado, supongamos que $(f_\alpha(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f_\alpha(x)$ para cada $\alpha \in A$. Sea V un conjunto abierto en X tal que $x \in V$. Como X tiene la topología débil inducida por $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ y $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ abierto en X_{α_i} para cada $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \subseteq V.$$

Como $(f_{\alpha_i}(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f_{\alpha_i}(x)$ en X_{α_i} y además $f_{\alpha_i}(x) \in U_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $f_{\alpha_i}(x_\lambda) \in U_i$ para cada $\lambda > \lambda_0$ y cada $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, se cumple que $x_\lambda \in V$ para toda $\lambda > \lambda_0$, y esto implica que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x. $\square$

Teorema 1.1.2. *Sea X un espacio con la topología débil inducida por la familia de funciones $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Si para cada $\alpha \in A$ X_α es completamente regular, entonces X es completamente regular.*

Demostración. Sean $C \subseteq X$ cerrado y $z \in X \backslash C$. Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ y $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ abierto en X_{α_i} para cada $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$z \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \subseteq X \backslash C.$$

Entonces, $f_{\alpha_i}(z) \notin X_{\alpha_i} \backslash U_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Como cada X_{α_i} es completamente regular, existe una función continua $g_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ tal que $g_i \circ f_{\alpha_i}(z) = 1$ y $g_i(x) = 0$ para toda $x \in X_{\alpha_i} \backslash U_i$.

Por lo tanto, la función $g : X \to [0,1]$ dada por el producto

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} g_i \circ f_{\alpha_i}(x)$$

es continua y cumple que $g(z) = 1$ y, como C está contenido en el conjunto $X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$, entonces $g(c) = 0$ para toda $c \in C$. Esto implica que X es completamente regular. □

1.2. Topologías en espacios de funciones

Sean X y Y espacios topológicos, A un subconjunto de X y U un subconjunto abierto de Y. Denotaremos $[A, U] := \{f \in \mathrm{C}(X, Y) \mid f(A) \subseteq U\}$. Recordemos las defienciones de las topologías punto-abierta y compacto-abierta en el espacio $\mathrm{C}(X, Y)$.

Definición 1.2.1. La topología punto-abierta τ_{PA} en $\mathrm{C}(X, Y)$ es la generada por la subbase

$$\{[\{x\}, U] \mid x \in X,\ U \subseteq Y \text{ abierto}\}.$$

Definición 1.2.2. La topología compacto-abierta τ_{CA} en $\mathrm{C}(X, Y)$ es la generada por la subbase

$$\{[C, U] \mid C \subseteq X \text{ compacto},\ U \subseteq Y \text{ abierto}\}.$$

Claramente se cumple que $\tau_{PA} \subseteq \tau_{CA}$.

Por otra parte, si además Y es un espacio métrico con métrica d, se define la topología de la convergencia uniforme en $\mathrm{C}(X, Y)$ de la siguiente manera.

Definición 1.2.3. La topología de la convergencia uniforme τ_{CU} en $\mathrm{C}(X, Y)$ es la inducida por la métrica infinita $d_{CU} : \mathrm{C}(X, Y) \times \mathrm{C}(X, Y) \to [0, \infty]$ dada por

$$d_{CU}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Si X es también un espacio métrico, se define la topología de la convergencia uniforme en acotados en $\mathrm{C}(X, Y)$ de la siguiente manera.

Definición 1.2.4. La topología de la convergencia uniforme en acotados τ_{CUA} en $\mathrm{C}(X,Y)$ es la generada por la base local en cada $f \in \mathrm{C}(X,Y)$ formada por los siguientes conjuntos:

$$\{g \in \mathrm{C}(X,Y) \mid d\left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right) < \varepsilon \text{ para cada } x \in B\},$$

con $B \subseteq X$ acotado y $\varepsilon > 0$.

De las definiciones anteriores es claro que $\tau_{CUA} \subseteq \tau_{CU}$. Por otra parte, también se cumple que $\tau_{CA} \subseteq \tau_{CUA}$.

Proposición 1.2.5. *Sean* (X,ρ) *y* (Y,d) *espacios métricos. En* $\mathrm{C}(X,Y)$*, la topología compacto-abierta está contenida en la topología de la convergencia uniforme en acotados.*

Demostración. Sean $C \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto. Consideremos $f \in [C,U]$. Entonces $f\left(C\right) \subseteq U$ y, como $f\left(C\right)$ es compacto y U es abierto en Y, existe $r > 0$ tal que $B_r\left(f\left(x\right)\right) \subseteq U$ para cada $x \in C$. Además, C es acotado por ser compacto, y se cumple que

$$f \in \{g \in \mathrm{C}(X,Y) \mid d\left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right) < r \text{ para cada } x \in C\} \subseteq [C,U].$$

Por lo tanto f es un punto interior de $[C,U]$ con respecto a τ_{CUA}, y entonces podemos concluir que todo abierto subbásico de τ_{CA} pertenece a τ_{CUA}. $\square$

Sean (X,ρ) y (Y,d) espacios métricos. Recordemos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y se llama *equicontinua en un punto* $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $f \in \mathcal{F}$, $y \in X$ y $\rho\left(x,y\right) < \delta$ entonces $d\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon$. La familia $\mathcal{F}$ se llama *equicontinua* si es equicontinua en cada punto $x \in X$.

Teorema 1.2.6. *Sean* (X,ρ) *y* (Y,d) *espacios métricos, y* $\mathcal{F}$ *una subfamilia equicontinua de* $\mathrm{C}(X,Y)$*. Entonces, en* $\mathcal{F}$ *la topología punto-abierta y la topología compacto-abierta coinciden.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un abierto subbásico de la topología compacto-abierta en $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{V} = [C,U] \cap \mathcal{F}$ para algún compacto $C \subseteq X$ y un abierto $U \subseteq Y$. La topología punto-abierta es siempre más gruesa que la compacto-abierta, por lo que basta ver que $\mathcal{V}$ es un abierto de la topología punto-abierta en $\mathcal{F}$.

Sea $g \in \mathcal{V}$. Entonces $g(C) \subseteq U$. Como U es abierto en Y y $g(C)$ es compacto, existe $r > 0$ tal que $B_r(y) \subseteq U$ para cada $y \in g(C)$.

Por otra parte, ya que $\mathcal{F}$ es equicontinua, para cada $x \in C$ existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B_{\delta_x}(x)) \subseteq B_{\frac{r}{2}}(f(x))$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Como C es compacto, existen $p_1, \ldots, p_m \in C$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta_{p_i}}(p_i).$$

Además, los conjuntos $\left[\{p_i\}, B_{\frac{r}{2}}(g(p_i))\right] \cap \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, m$, son abiertos subbásicos de la topología punto-abierta en $\mathcal{F}$, y

$$g \in \bigcap_{i=1}^{m} \left[\left(\{p_i\}, B_{\frac{r}{2}}(g(p_i))\right] \cap \mathcal{F}\right) \subseteq \mathcal{V}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es abierto en la topología punto-abierta en $\mathcal{F}$. $\square$

Capítulo 2

Topologías en el hiperespacio CL(X)

En este capítulo se introducirán las topologías en el hiperespacio CL(X) que se estudiarán a lo largo del texto, así como sus propiedades y resultados básicos.

2.1. Topología de Wijsman

La topología de Wijsman, que puede definirse en CL(X) para cualquier espacio métrico X, se introdujo inicialmente en [29]. Es una herramienta fundamental en la teoría de hiperespacios de un espacio métrico, dado que muchas hipertopologías clásicas pueden expresarse como supremos de topologías de Wijsman (ver Teorema 2.2.9, por ejemplo).

Sea (X, d) un espacio métrico. Dado $x \in X$, denotaremos por d_x a la función de CL(X) en $\mathbb{R}$ definida por $d_x(A) = d(x, A)$.

Definición 2.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de Wijsman τ_{W_d} en CL(X) es la topología débil inducida por la familia de funciones $\{d_x : \mathrm{CL}(X) \to \mathbb{R} \mid x \in X\}$.

Entonces, $\{d_x^{-1}((-\infty, a)),\ d_x^{-1}((a, \infty)) \mid a \in \mathbb{R},\ x \in X\}$ es una subbase para la topología de Wijsman. Como cada d_x es no negativa, basta considerar $a > 0$. Así, los conjuntos de la forma

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_x(A) < a\},\ \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_x(A) > a\},\ \text{con } a > 0,\ x \in X$$

son subbásicos para esta topología.

El par $(\mathrm{CL}(X), \tau_{W_d})$ será denotado por $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$.

Por el Teorema 1.1.1, tenemos el siguiente lema sobre la convergencia en el espacio $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$:

Lema 2.1.2. *Sean (X, d) un espacio métrico, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ y A un elemento de $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$. Entonces $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a A en el espacio $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ si y sólo si la red $(d_x(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $d_x(A)$ en $\mathbb{R}$ para cada $x \in X$.*

Proposición 2.1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de Wijsman en $\mathrm{CL}(X)$ es admisible.*

Demostración. Queremos probar que la función $i : X \to \mathrm{CL}_{W_d}(X)$ dada por $i(x) = \{x\}$ es un encaje. Consideremos $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X y y un elemento de X.

Para ver que la función i es continua, supongamos que $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a y. Entonces, debido a la continuidad de la función $d(x, \cdot) : X \to [0, \infty)$ para cada $x \in X$ fijo, la red $(d(x, y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $d(x, y)$. Es decir, la red $(d_x(\{y_\lambda\}))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $d_x(\{y\})$ para cada $x \in X$. Esto implica, por el Lema 2.1.2, que $(\{y_\lambda\})_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\{y\}$. Así, se tiene que la función i es continua.

Para ver que la inversa de i es continua, supongamos que la red $(\{y_\lambda\})_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\{y\}$ en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$. Por el Lema 2.1.2, $(d_x(\{y_\lambda\}))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $d_x(\{y\})$ para cada $x \in X$. En particular para $x = y$ se tiene que $(d(y, y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a 0, y por lo tanto $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a y. Así, i^{-1} es continua, y entonces la función i es un encaje. □

Proposición 2.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. El encaje $i : (X, d) \to \mathrm{CL}_{W_d}(X)$, dado por $i(x) = \{x\}$, es cerrado.*

Demostración. Sea $C \in \mathrm{CL}(X)\backslash i(X)$. Entonces existen $x, y \in C$ tales que $x \neq y$. Así, si $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$,

$$C \in \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_x(A) < \varepsilon\} \cap \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_y(A) < \varepsilon\} \subseteq \mathrm{CL}(X)\backslash i(X),$$

y por lo tanto $\mathrm{CL}(X)\backslash i(X)$ es abierto en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$. □

Recordemos que un espacio topológico X es de Tychonoff si es T_1 y completamente regular.

Proposición 2.1.5. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. El espacio* $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ *es de Tychonoff.*

Demostración. Sean B y C elementos de $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ distintos entre sí. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b \in B \backslash C$. Como C es cerrado en X, $d(b,C) > 0$ y $d(b,B) = 0$. Sean $r = \frac{d(b,C)}{2}$ y

$$\mathcal{U} := \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_b(A) < r\}, \quad \mathcal{V} := \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_b(A) > r\}.$$

Entonces $B \in \mathcal{U}$, $C \in \mathcal{V}$ y los conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos subbásicos ajenos entre sí. Por lo tanto, $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ es un espacio de Hausdorff.

Además, como τ_{W_d} es la topología débil inducida por la familia $\{d_x\}_{x\in X}$ y $\mathbb{R}$ es completamente regular, el Teorema 1.1.2 garantiza que $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ es completamente regular. $\square$

El siguiente ejemplo sobre la estructura de $\mathrm{CL}_{W_{\|\cdot\|}}(X)$ cuando $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach separable de dimensión infinita se puede consultar en [18].

Ejemplo 2.1.6. *Sea* X *un espacio de Banach separable de dimensión infinita.*

1. *El hiperespacio* $\mathrm{CL}_{W_{\|\cdot\|}}(X)$ *es homeomorfo al espacio de Hilbert separable* ℓ_2*.*

2. *El hiperespacio* $\mathrm{CLB}(X)_{W_{\|\cdot\|}}(X)$ *es homeomorfo a*

$$\ell_2 \times \{(x_n) \in \ell_2 \mid x_n = 0 \textit{ para toda } n \in \mathbb{N}\backslash F,\ F \subseteq \mathbb{N} \textit{ finito}\}.$$

2.2. Topologías hit-and-miss

Varias de las topologías clásicas en $\mathrm{CL}(X)$ pertenecen a un tipo de hipertopologías llamadas hit-and-miss.

Sea X un espacio topológico de Hausdorff y Y un subconjunto de X. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathrm{CL}(X)$:

$$Y^- := \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \cap Y \neq \emptyset\}, \quad Y^+ := \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \subseteq Y\}.$$

Definición 2.2.1. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y Δ un subconjunto de $\mathrm{CL}(X)$. A la topología en $\mathrm{CL}(X)$ que tiene como subbase los conjuntos de la forma V^-, con V un subconjunto abierto de X, y $(X\backslash B)^+$, con $B \in \Delta$, le llamaremos la topología hit-and-miss inducida por Δ.

Dado Δ un subconjunto de CL(X), denotaremos por $\tau(\Delta)$ a la topología hit-and-miss en CL(X) inducida por Δ, y por $\Sigma(\Delta)$ a la familia de uniones finitas de elementos de Δ. Entonces, una base para $\tau(\Delta)$ consiste en los conjuntos de la forma

$$V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap (X \backslash E)^+, \text{ con } V_i \text{ abierto en } X \text{ y } E \in \Sigma(\Delta).$$

Proposición 2.2.2. *Sean X un espacio de Hausdorff y Δ un subconjunto de* CL(X)*. La topología $\tau(\Delta)$ en* CL(X) *es admisible.*

Demostración. Queremos probar que la función $i : X \to \mathrm{CL}(X)$ dada por $i(x) = \{x\}$ es un encaje. Consideremos $V \subseteq X$ abierto y $B \in \Delta$. Entonces

$$i^{-1}\left(V^-\right) = \{x \in X \mid \{x\} \cap V \neq \emptyset\} = V \quad \text{y}$$

$$i^{-1}\left((X \backslash B)^+\right) = \{x \in X \mid \{x\} \subseteq X \backslash B\} = X \backslash B.$$

Por lo tanto, la imagen inversa bajo i de todo abierto subbásico de CL(X) es abierta en X, y entonces i es continua.

Por otra parte, dado $U \subseteq X$ abierto, se tiene que

$$i(U) = \{\{x\} \mid x \in U\} = U^- \cap i(X).$$

Lo anterior implica que i es abierta en su imagen. Por lo tanto, i es un encaje. □

Proposición 2.2.3. *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff. El encaje $i : (X, \tau) \to (\mathrm{CL}(X), \tau(\Delta))$, dado por $i(x) = \{x\}$, es cerrado.*

Demostración. Sea $C \in \mathrm{CL}(X) \backslash i(X)$. Entonces existen $x, y \in C$ tales que $x \neq y$. Como X es Hausdorff, existen $U, V \subseteq X$ abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Así,

$$C \in U^- \cap V^- \subseteq \mathrm{CL}(X) \backslash i(X),$$

y por lo tanto $\mathrm{CL}(X) \backslash i(X)$ es abierto en CL(X). □

Teorema 2.2.4. *Sean X un espacio de Hausdorff y Δ un subconjunto no vacío de* CL(X)*. Entonces, $\tau(\Delta)$ es Hausdorff si y sólo si para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta $U \subseteq X$ de x existe $E \in \Sigma(\Delta)$ tal que $x \in \operatorname{int} E \subseteq E \subseteq U$.*

Demostración. Supongamos que $|X| > 1$, en otro caso es claro que la proposición es cierta.

Supongamos que para cada elemento $x \in X$ y para cada vecindad abierta $U \subseteq X$ de x, existe $E \in \Sigma(\Delta)$ tal que $x \in \operatorname{int} E \subseteq E \subseteq U$. Sean A y B elementos de $\mathrm{CL}(X)$ distintos entre sí. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $a \in A \backslash B$. Como $X \backslash B$ es abierto en X, existe $F \in \Sigma(\Delta)$ tal que $a \in \operatorname{int} F \subseteq F \subseteq X \backslash B$. Sean

$$\mathcal{U} := (\operatorname{int} F)^{-} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} := (X \backslash F)^{+}.$$

Como $a \in \operatorname{int} F$ y $B \subseteq X \backslash F$, entonces $A \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{V}$. Además, los conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos y abiertos en $\mathrm{CL}(X)$. Por lo tanto, $\tau(\Delta)$ es Hausdorff.

Inversamente, supongamos que $\tau(\Delta)$ es Hausdorff y sean $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$. Podemos suponer que $U \subsetneq X$ pues, como X es Hausdorff y $|X| > 1$, existe un subconjunto abierto propio de X que contiene a x. Entonces $X \backslash U$ y $(X \backslash U) \cup \{x\}$ son elementos de $\mathrm{CL}(X)$ distintos entre sí. Como $\tau(\Delta)$ es Hausdorff, existen $V_1, \ldots, V_n, W_1 \ldots, W_m$ abiertos en X y $C, D \in \Sigma(\Delta)$ tales que

1. $X \backslash U \in \mathcal{B}_1 := \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^{-}\right) \cap (X \backslash C)^{+}$,
2. $(X \backslash U) \cup \{x\} \in \mathcal{B}_2 := \left(\bigcap_{i=1}^{m} W_i^{-}\right) \cap (X \backslash D)^{+}$,
3. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Como $X \backslash U \in V_i^{-}$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y también $X \backslash U \in (X \backslash C)^{+}$, entonces

$$X \backslash U \in (V_i \backslash C)^{-}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Análogamente,

$$(X \backslash U) \cup \{x\} \in (W_i \backslash D)^{-}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, podemos suponer que $V_i \cap C = \emptyset$ y $W_i \cap D = \emptyset$. En caso contrario sustituimos cada V_i y W_i por $V_i' := V_i \backslash C$ y $W_i' := W_i \backslash D$, respectivamente.

Ya que $(X \backslash U) \cup \{x\} \in (X \backslash D)^{+}$, entonces también $X \backslash U \in (X \backslash D)^{+}$. Pero como $X \backslash U \notin \mathcal{B}_2$, se sigue que $X \backslash U \notin W_j^{-}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $(X \backslash U) \cup \{x\}$ sí pertenece a W_j^{-}, concluimos que $x \in W_j$. Por lo tanto, existen índices $i \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $x \in W_i$. Supongamos sin pérdida de generalidad que estos índices son $1, \ldots, k$, para alguna $1 \leq k \leq m$.

Afirmamos que existe $l \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $W_l \subseteq C$. Supongamos lo contrario. Entonces $W_i \nsubseteq C$ para toda $i = 1, \ldots, k$. Tomemos $x_i \in W_i \backslash C$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Sea $Y = (X \backslash U) \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$. Notemos que:

1. Como $X \backslash U \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i^-$, entonces $Y \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i^-$.

2. Como $X \backslash U \in (X \backslash C)^+$ y $x_i \notin C$ para cada $i = 1, \ldots, k$, entonces $Y \in (X \backslash C)^+$.

3. Como $x_i \in W_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$, entonces $Y \in \bigcap_{i=1}^{k} W_i^-$. Por otra parte, tenemos que $(X \backslash U) \cup \{x\} \in W_i^-$ pero $x \notin W_i$ para cada $i = k+1, \ldots, m$. Esto implica que $X \backslash U \in \bigcap_{i=k+1}^{m} W_i^-$. Por lo tanto, $Y \in \bigcap_{i=k+1}^{m} W_i^-$.

4. Tenemos que $X \backslash U \in (X \backslash D)^+$. Además $x_i \notin D$ para cada $i = 1, \ldots, k$, ya que $W_i \cap D = \emptyset$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Entonces $Y \in (X \backslash D)^+$.

De los cuatro puntos anteriores se tiene que $Y \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, lo que contradice que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son ajenos. Por lo tanto, existe $l \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $W_l \subseteq C$.

Como $l \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $x \in W_l$. Así, ya que W_l es abierto en X, tenemos que $x \in \operatorname{int} C$. Por otra parte, el hecho de que $X \backslash U \in (X \backslash C)^+$ implica que $C \subseteq U$. Entonces C cumple que $x \in \operatorname{int} C \subseteq C \subseteq U$ y además $C \in \Sigma(\Delta)$. □

Ejemplo 2.2.5. *Sea X un espacio de Hausdorff.*

1. *Si $\Delta = \mathrm{CL}(X)$, entonces $\tau(\Delta)$ es Hausdorff si y sólo si X es regular. Ésta es la topología de Vietoris.*

2. *Si $\Delta = \mathrm{K}(X)$, entonces $\tau(\Delta)$ es Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto. Ésta es la topología de Fell.*

3. *Si X es un espacio métrico y Δ es el conjunto de las bolas cerradas en X, entonces $\tau(\Delta)$ es Hausdorff.*

4. *Si X es un espacio de Banach y Δ es el conjunto de los subconjuntos débilmente compactos no vacíos de X, entonces $\tau(\Delta)$ es Hausdorff si y sólo si X es reflexivo. Ésta es la topología de Mosco.*

A continuación veremos algunos ejemplos clásicos de topologías hit-and-miss.

2.2.1. Topología de Vietoris

Una de las topologías hit-and-miss más estudiadas es la topología de Vietoris, que puede definirse en $\mathrm{CL}(X)$ para cualquier espacio X de Hausdorff. Fue introducida por Vietoris en [26] y [27], y Michael identificó gran parte de sus propiedades topológicas básicas en [19].

Definición 2.2.6. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. La topología de Vietoris τ_V en $\mathrm{CL}(X)$ es la topología hit-and-miss inducida por $\Delta = \mathrm{CL}(X)$.

Entonces, una subbase para la topología de Vietoris consiste en los conjuntos de la forma V^- y W^+ con V y W abiertos en X. Notemos que $\Sigma(\mathrm{CL}(X)) = \mathrm{CL}(X)$, por lo que una base para la topología de Vietoris está formada por los conjuntos

$$V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap W^+, \text{ con } V_i \text{ y } W \text{ abiertos en } X.$$

Por otra parte, para $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de un espacio de Hausdorff X denotaremos

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle := \left\{ A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\}.$$

Si $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X, entonces $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \tau_V$, ya que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = U_1^- \cap \ldots \cap U_n^- \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right)^+ .$$

Además, si A es un elemento de $\mathrm{CL}(X)$, $V_1, \ldots, V_n, W$ son subconjuntos abiertos de X y $A \in V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap W^+$, entonces

$$A \in \langle V_1 \cap W, \ldots, V_n \cap W, W \rangle \subseteq V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap W^+.$$

Por lo tanto, los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, con cada U_i abierto en X, también forman una base para la topología de Vietoris.

Denotaremos el espacio $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ por $\mathrm{CL}_V(X)$.

Notemos que la topología de Vietoris es admisible, debido a la Proposición 2.2.2. Además, como $\Sigma(\mathrm{CL}(X)) = \mathrm{CL}(X)$, por la Proposición 2.2.4, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.7. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces $\mathrm{CL}_V(X)$ es de Hausdorff si y sólo si X es regular.*

A continuación, veremos en el Teorema 2.2.9 una forma de ver la topología de Vietoris como una topología débil, en el caso en el que el espacio X es metrizable. Para esto, primero probaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.8. *Sean (X,d) un espacio métrico y $\phi : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, la métrica ρ en X dada por*

$$\rho\,(x,y) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, d\,(x,y)\right\} + |\phi\,(x) - \phi\,(y)|$$

es equivalente a d.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Usando que ϕ es continua, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que para cada $y \in X$ si $d\,(x,y) < \delta$ entonces $|\phi\,(x) - \phi\,(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $r = \text{mín}\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Entonces, si $d\,(x,y) < r$ se cumple que $\rho\,(x,y) < \varepsilon$. Esto nos permite concluir que la topología en X inducida por ρ está contenida en la inducida por d.

Por otra parte, consideremos $s = \text{mín}\left\{\varepsilon, \frac{1}{2}\right\}$. Entonces, si $\rho\,(x,y) < s$ se cumple que $\text{mín}\left\{\frac{1}{2}, d\,(x,y)\right\} < s$, y por lo tanto $d\,(x,y) < \varepsilon$. Así, podemos concluir que la topología en X inducida por d está contenida en la inducida por ρ. $\square$

Teorema 2.2.9. *Sean X un espacio metrizable y $\mathcal{D}$ el conjunto de métricas en X compatibles con su topología. Entonces la topología de Vietoris en $\mathrm{CL}(X)$ es la topología débil inducida por la familia*

$$\{d_x : \mathrm{CL}(X) \to \mathbb{R} \mid x \in X,\ d \in \mathcal{D}\}, \tag{2.1}$$

donde cada d_x está dada por $d_x\,(A) = d\,(x,A)$. Por lo tanto, la topología de Vietoris es el supremo de las topologías de Wijsman τ_{W_d} generadas por cada métrica $d \in \mathcal{D}$.

Demostración. Denotemos por τ_D a la topología débil inducida por la familia 2.1. Primero demostraremos que $\tau_D \subseteq \tau_V$.

Sean $d \in \mathcal{D}$, $x \in X$ y $a > 0$. Entonces

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d\,(x,A) < a\} = B_a\,(x)^-,$$

y por lo tanto este conjunto pertenece a τ_V. Por otra parte, si

$$B \in \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d\,(x, A) > a\}\,,$$

sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $d\,(x, B) > r > a$. Entonces

$$B \in (X \backslash B_r\,[x])^+ \subseteq \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d\,(x, A) > a\}\,,$$

y por lo tanto $\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d\,(x, A) > a\}$ es un abierto de τ_V. Así, tenemos que $\tau_{W_d} \subseteq \tau_V$. Como d se eligió arbitrariamente, entonces $\tau_D \subseteq \tau_V$.

Para la otra contención, consideremos $V \subseteq X$ abierto y sea $d \in \mathcal{D}$. Si $C \in V^-$, existen $c \in C \cap V$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B^d_\varepsilon\,(c) \subseteq V$, donde $B^d_\varepsilon\,(c)$ es la bola abierta con respecto a la métrica d. Entonces

$$C \in \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d\,(c, A) < \varepsilon\} \subseteq V^-,$$

y por lo tanto V^- es un abierto de τ_{W_d}. Esto se cumple para cada métrica $d \in \mathcal{D}$, y entonces V^- pertenece a τ_D.

Por otra parte, sean $W \subseteq X$ abierto y $F \in W^+$. Entonces $F \subseteq W$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que W es un subconjunto propio de X, pues si $W = X$ tenemos que $W^+ = \mathrm{CL}(X) \in \tau_D$. Sea x_0 un punto fijo en $X \backslash W$. Como F y $X \backslash W$ son cerrados ajenos no vacíos, usando el lema de Urysohn podemos encontrar una función continua $\phi : X \to [0, 1]$ tal que $\phi\,(F) = 0$ y $\phi\,(X \backslash W) = 1$.

Sea $d \in \mathcal{D}$ arbitraria. Definimos una métrica ρ en X por

$$\rho\,(x, y) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, d\,(x, y)\right\} + |\phi\,(x) - \phi\,(y)|\,.$$

Por el Lema 2.2.8 tenemos que $\rho \in \mathcal{D}$. Afirmamos que

$$F \in \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid \rho\,(x_0, A) > \rho\,(x_0, F) - \frac{1}{4}\right\} \subseteq W^+,$$

lo cual garantizaría que W^+ es un abierto de τ_{W_ρ}, y por lo tanto de τ_D.

Supongamos por contradicción que existe $G \in \mathrm{CL}(X)$ tal que $\rho\,(x_0, G) > \rho\,(x_0, F) - \frac{1}{4}$ pero $G \nsubseteq W$. Entonces exsite $z \in G \backslash W$. Como x_0 y z pertenecen a $X \backslash W$ y $\phi\,(X \backslash W) = 1$, tenemos que $\rho\,(x_0, z) \leq \frac{1}{2}$. Además, como $\phi\,(F) = 0$, entonces $\rho\,(x_0, F) \geq 1$. Así,

$$1 \leq \rho\,(x_0, F) < \rho\,(x_0, G) + \frac{1}{4} \leq \rho\,(x_0, z) + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Esta contradicción nos permite concluir que W^+ pertenece a τ_D. Por lo tanto, $\tau_V \subseteq \tau_D$. $\square$

El teorema anterior implica que si X es metrizable, entonces $\mathrm{CL}_V(X)$ es de Hausdorff y completamente regular, por el Teorema 1.1.2.

2.2.2. Topología de Fell

Otro ejemplo clásico de topologías hit-and-miss es la topología de Fell, que puede definirse en $\mathrm{CL}(X)$ para cualquier espacio X. Fue introducida por Fell en [14], y se ha estudiado más recientemente tanto en hiperespacios de conjuntos cerrados como en espacios de funciones, en parte por sus aplicaciones en optimización ([5, 6]).

Definición 2.2.10. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. La topología de Fell τ_F en $\mathrm{CL}(X)$ es la topología hit-and-miss inducida por $\Delta = \mathrm{K}(X)$.

Entonces, una subbase para la topología de Fell consiste en los conjuntos de la forma V^- y $(X\backslash C)^+$, con V y C subconjuntos de X, V abierto en X y C compacto. Notemos que $\Sigma\left(\mathrm{K}(X)\right) = \mathrm{K}(X)$, por lo que una base para la topología de Fell está formada por los conjuntos

$$V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap (X\backslash C)^+ \,, \text{ con } V_i \text{ abierto en X y } C \text{ compacto.}$$

El par $(\mathrm{CL}(X), \tau_F)$ será denotado por $\mathrm{CL}_F(X)$.

La Proposición 2.2.2 implica que la topología de Fell es admisible. Además, por la Proposición 2.2.4 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.11. *Sean X un espacio de Hausdorff. Entonces $\mathrm{CL}_F(X)$ es de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.*

La topología de Fell en $\mathrm{CL}(X)$ se puede extender a $2^X = \mathrm{CL}(X) \cup \{\emptyset\}$ usando la misma subbase, pero ahora permitiendo que los conjuntos $(X\backslash C)^+$, con $C \subseteq X$ compacto, contengan también a $\emptyset$. El conjunto 2^X equipado con la topología de Fell será denotado por 2^X_F. De hecho, originalmente Fell definió esta topología en 2^X en [14], y probó una propiedad importante: La topología de Fell en 2^X siempre es compacta, sin importar cuál sea el espacio X. Para ver esto, recordemos el teorema de la subbase de Alexander ([13, 3.12.2]).

Teorema 2.2.12 (Teorema de la subbase de Alexander)**.** *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una subbase de X. Si cada cubierta de X formada por elementos de $\mathcal{B}$ tiene una subcubierta finita, entonces X es compacto.*

Teorema 2.2.13. *Sea X un espacio topológico. Entonces 2^X_F es compacto.*

Demostración. Para usar el teorema de la subbase de Alexander, consideremos la siguiente subbase de la topología de Fell en 2^X:

$$\mathcal{B} := \left\{V^- \mid V \subseteq X \text{ abierto}\right\} \cup \left\{(X \backslash C)^+ \mid C \subseteq X \text{ compacto y no vacío}\right\}.$$

Supongamos que $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ es una familia de abiertos en X y $\{C_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos compactos no vacíos de X tales que

$$\mathcal{U} := \left\{V_\alpha^- \mid \alpha \in \mathrm{A}\right\} \cup \left\{(X \backslash C_\gamma)^+ \mid \gamma \in \Gamma\right\}$$

es una cubierta de 2_F^X. Notemos que, como $\emptyset \notin V_\alpha^-$ para cada $\alpha \in \mathrm{A}$ y $X \notin (X \backslash C_\gamma)^+$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces los dos conjuntos A y Γ deben ser no vacíos.

Afirmamos que existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $C_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} V_\alpha$. Supongamos lo contrario. Entonces, podemos elegir $x_\gamma \in C_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$ tales que

$$\{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} V_\alpha\right) = \emptyset.$$

Como $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} V_\alpha$ es abierto en X, lo anterior implica que

$$\overline{\{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}} \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} V_\alpha\right) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $\overline{\{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}}$ es un elemento de 2_F^X que no pertenece al conjunto V_α^- para ningún $\alpha \in \mathrm{A}$ ni al conjunto $(X \backslash C_\gamma)^+$ para ningún $\gamma \in \Gamma$. Esto contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es una cubierta de 2_F^X.

Entonces, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ que cumple que $C_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} V_\alpha$. Además, como C_{γ_0} es compacto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{A}$ tales que $C_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. Consideremos

$$\mathcal{V} := \left\{V_{\alpha_i}^- \mid i = 1, \ldots, n\right\} \cup \left\{(X \backslash C_{\gamma_0})^+\right\}.$$

Si $B \in 2_F^X$ y $B \notin (X \backslash C_{\gamma_0})^+$, entonces $B \cap C_{\gamma_0} \neq \emptyset$. Esto implica que $B \cap V_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para alguna $i = 1, \ldots, n$, y por lo tanto $B \in V_{\alpha_i}^-$. Esto demuestra que $\mathcal{V}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, y por lo tanto podemos concluir que 2_F^X es compacto. □

Igual que para $\mathrm{CL}_F(X)$, que el espacio 2_F^X sea de Hausdorff es equivalente a que X sea localmente compacto.

Proposición 2.2.14. *Sean X un espacio de Hausdorff. Entonces 2^X_F es un espacio de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.*

Demostración. Si 2^X_F es un espacio de Hausdorff, en particular el subespacio $\mathrm{CL}_F(X)$ es de Hausdorff, y por lo tanto X es localmente compacto.

Por otra parte, si X es localmente compacto, el mismo argumento que se usó para ver que $\mathrm{CL}_F(X)$ es un espacio de Hausdorff prueba que 2^X_F también es de Hausdorff. En efecto, supongamos que $A, B \in 2^X_F$ son distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $a \in A \backslash B$, y sea C una vecindad compacta de a tal que $C \subseteq X \backslash B$. Entonces $\operatorname{int} C^-$ y $(X \backslash C)^+$ son abiertos disjuntos en 2^X_F que separan a A y a B. □

Por otra parte, el espacio $\mathrm{CL}_F(X)$ no es en general compacto, y el hecho de que sea compacto es equivalente a que X sea compacto.

Proposición 2.2.15. *Sea X un espacio de Hausdorff.*

1. *Si X es localmente compacto, entonces $\mathrm{CL}_F(X)$ es localmente compacto.*

2. *X es compacto si y sólo si $\mathrm{CL}_F(X)$ es compacto.*

Demostración. 1. Si X es localmente compacto, por la Proposición 2.2.14 se tiene que 2^X_F es un espacio de Hausdorff, y como es compacto, es localmente compacto. Por lo tanto, ya que $\mathrm{CL}(X) = 2^X \backslash \{\emptyset\}$ es un subespacio abierto de 2^X_F, entonces $\mathrm{CL}_F(X)$ también es localmente compacto.

2. Como el encaje $i : X \to \mathrm{CL}_F(X)$ es cerrado (por la Proposición 2.2.3), si $\mathrm{CL}_F(X)$ es compacto entonces X también es compacto.

Por otra parte, si X es compacto, entonces $(X \backslash X)^+ = (\emptyset)^+$ es abierto en 2^X_F y $\emptyset$ es un punto aislado. Esto implica que $\mathrm{CL}_F(X)$ es cerrado en el espacio compacto 2^X_F, y por lo tanto es compacto. □

Por el Teorema 2.2.9 sabemos que la topología de Wijsman está contenida en la topología de Vietoris. A continuación veremos que la topología de Fell está contenida en la de Wijsman.

Proposición 2.2.16. *Sea (X, d) un espacio métrico. En $\mathrm{CL}(X)$, la topología de Fell está contenida en la topología de Wijsman.*

Demostración. Sean V un subconjunto abierto de X y $F \in V^-$. Entonces $F \cap V \neq \emptyset$ y podemos tomar $p \in F \cap V$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subseteq V$. El conjunto $\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(p, A) < \varepsilon\}$ es abierto en la topología de Wijsman y

$$F \in \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(p, A) < \varepsilon\} \subseteq V^-.$$

Entonces F es un punto interior de V^- con respecto a τ_{W_d} para cada $F \in V^-$, y por lo tanto V^- pertenece a τ_{W_d}.

Por otra parte, sean C un subconjunto compacto de X y $G \in (X \backslash C)^+$. Entonces $G \cap C = \emptyset$ y, como $X \backslash G$ es abierto en X, para cada $x \in C$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que la bola $B_{\varepsilon_x}(x)$ está contenida en $X \backslash G$. Como C es compacto, podemos tomar $x_1, \ldots, x_n \in C$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i),$$

donde $r_i = \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$G \in \bigcap_{i=1}^{n} \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x_i, A) > r_i\} \subseteq (X \backslash C)^+.$$

Esto implica que G es un punto interior de $(X \backslash C)^+$ con respecto a τ_{W_d} para cada $G \in (X \backslash C)^+$, y por lo tanto $(X \backslash C)^+$ pertenece a τ_{W_d}.

Así, los subbásicos de la topología de Fell son abiertos en la topología de Wijsman, y por lo tanto se tiene que $\tau_F \subseteq \tau_{W_d}$. □

Denotaremos por $\mathbb{I}$ al intervalo $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ y por Q al cubo de Hilbert $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Como Q es homogéneo (ver [9, Teorema 4.1]), el espacio $Q \backslash \{x\}$ es homeomorfo a $Q \backslash \{y\}$ para cualesquiera x y y elementos de Q. Los siguientes resultados se probaron en [24] y [25]:

Ejemplo 2.2.17. *Sea X un espacio de Hausdorff. El hiperespacio $\mathrm{CL}_F(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert sin un punto $Q \backslash \{x\}$ si y sólo si X es un espacio metrizable, separable, localmente conexo, localmente compacto y no tiene componentes conexas compactas.*

Ejemplo 2.2.18.

1. *Para cada $n > 1$, el hiperespacio $\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times Q$.*

2. *El hiperespacio $\mathrm{Conv}_F(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$.*

2.3. Topología de la métrica de Hausdorff

Una de las hipertopologías más estudiadas es la topología de la métrica de Hausdorff, que puede definirse en CL(X) para cualquier espacio métrico X. Hausdorff introdujo esta métrica originalmente en [15] basándose en el trabajo de Pompeiu ([22]).

Definición 2.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de la métrica de Hausdorff τ_{H_d} en CL(X) es la topología inducida por la métrica infinita $H_d : \mathrm{CL}(X) \times \mathrm{CL}(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$H_d\,(A, B) = \sup_{x \in X} |d\,(x, A) - d\,(x, B)|\,. \tag{2.2}$$

Por ser inducida por una métrica infinita, la topología de la métrica de Hausdorff es metrizable.

En el subespacio CLB(X) de subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de X, H_d es una métrica usual.

Denotaremos el espacio $(\mathrm{CL}(X), H_d)$ por $\mathrm{CL}_{H_d}(X)$.

Proposición 2.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, para cada $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ se cumple que*

$$H_d\,(A, B) = \text{máx}\left\{\sup_{x \in B} d\,(x, A)\,, \sup_{x \in A} d\,(x, B)\right\}. \tag{2.3}$$

Demostración. Denotemos por $H'_d\,(A, B)$ a la parte derecha de la igualdad 2.3.

Sean $A, B \in \mathrm{CL}(X)$, $x \in X$, $a \in A$ y $b \in B$. Entonces $d\,(x, A) \leq d\,(x, a) \leq d\,(x, b) + d\,(b, a)$, y por lo tanto $d\,(x, A) - d\,(x, b) \leq d\,(b, a)$ para toda $a \in A$. Así,

$$d\,(x, A) - d\,(x, b) \leq d\,(b, A) \leq \sup_{x \in B} d\,(x, A) \leq H'_d\,(A, B) \text{ para toda } b \in B,$$

lo que implica que $d\,(x, A) - d\,(x, B) \leq H'_d\,(A, B)$. Análogamente tenemos que $d\,(x, B) - d\,(x, A) \leq H'_d\,(A, B)$, y entonces $|d\,(x, A) - d\,(x, B)| \leq H'_d\,(A, B)$ para cada $x \in X$. Por lo tanto, se cumple que $H_d\,(A, B) \leq H'_d\,(A, B)$.

Por otra parte,

$$d\,(b, A) = |d\,(b, A) - d\,(b, B)| \leq H_d\,(A, B) \text{ para toda } b \in B,$$

y entonces $\sup_{x \in B} d\,(x, A) \leq H_d\,(A, B)$. Análogamente $\sup_{x \in A} d\,(x, B) \leq H_d\,(A, B)$, y por lo tanto $H'_d\,(A, B) \leq H_d\,(A, B)$. □

Lema 2.3.3. *Sean (X,d) un espacio métrico, $A,B \in \mathrm{CL}(X)$ y $\varepsilon > 0$.*

1. *Si $H_d(A,B) < \varepsilon$, entonces $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$.*
2. *Si $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, entonces $H_d(A,B) \leq \varepsilon$.*
3. *$H_d(A,B) = \text{ínf}\{r > 0 \mid A \subseteq N_r(B),\ B \subseteq N_r(A)\}$.*

Demostración. *1.* Sea $a \in A$. Por la Proposición 2.3.2 tenemos que

$$d(a,B) \leq \sup_{x\in A} d(x,B) \leq H_d(A,B) < \varepsilon,$$

por lo que $a \in N_\varepsilon(B)$. Por lo tanto $A \subseteq N_\varepsilon(B)$, y análogamente tenemos que $B \subseteq N_\varepsilon(A)$.

2. Como $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, entonces $d(b,A) < \varepsilon$ para toda $b \in B$, y por lo tanto $\sup_{x\in B} d(x,A) \leq \varepsilon$. Análogamente se tiene que $\sup_{x\in A} d(x,B) \leq \varepsilon$. Por la Proposición 2.3.2, esto implica que $H_d(A,B) \leq \varepsilon$.

3. Esta igualdad es una consecuencia directa de *1* y *2*. □

Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos. Recordemos que una función $f:(X,d) \to (Y,d')$ es llamada una *isometría* si se cumple que $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$ para cada $x,y \in X$. En el caso en el que d o d' sean métricas infinitas, también llamaremos isometría a una función que cumple la condición anterior.

Proposición 2.3.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. La función $i:(X,d) \to \mathrm{CL}_{H_d}(X)$ dada por $i(x) = \{x\}$ es una isometría.*

Demostración. Sean $a,b \in X$. Por la desigualdad del triángulo se tiene que $|d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b)$ para toda $x \in X$, y por lo tanto

$$\sup_{x\in X} |d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b).$$

Por otra parte,

$$\sup_{x\in X} |d(x,a) - d(x,b)| \geq |d(a,a) - d(a,b)| = d(a,b).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$H_d(\{a\},\{b\}) = \sup_{x\in X} |d(x,a) - d(x,b)| = d(a,b),$$

y esto implica que i es una isometría. □

Por la proposición anterior podemos observar que la métrica H_d depende de la métrica d en X.

Como la función $i : (X, d) \to \mathrm{CL}_{H_d}(X)$ es una isometría, entonces también es un encaje. Por lo tanto, la topología de la métrica de Hausdorff es admisible.

Proposición 2.3.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. El encaje $i : (X, d) \to \mathrm{CL}_{H_d}(X)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $C \in \mathrm{CL}(X) \backslash i(X)$. Entonces existen $x, y \in C$ tales que $x \neq y$. Consideremos $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Si $A \in \mathrm{CL}(X)$ y se cumple que $H_d(C, A) < \varepsilon$, entonces C está contenido en $N_\varepsilon(A)$ y por lo tanto $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ y $A \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$. Como $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$, A tiene al menos dos elementos distintos. Entonces,

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid H_d(C, A) < \varepsilon\} \subseteq \mathrm{CL}(X) \backslash i(X),$$

y por lo tanto $\mathrm{CL}(X) \backslash i(X)$ es abierto en $\mathrm{CL}_{H_d}(X)$. $\square$

Un espacio métrico no vacío, conexo y compacto es llamado un *continuo*. Se dice que un continuo es *no degenerado* si tiene más de un punto. Por otra parte, un continuo localmente conexo es llamando un *continuo de Peano*. Los siguientes resultados centrales sobre hiperespacios con la topología de la métrica de Hausdorff pueden consultarse en [12] y [11]:

Ejemplo 2.3.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. El hiperespacio $\mathrm{CL}_{H_d}(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert Q si y sólo si X es un continuo de Peano no degenerado.*

Ejemplo 2.3.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. El hiperespacio $\mathrm{K}_{H_d}(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert sin un punto si y sólo si X no es compacto y es conexo, localmente conexo y localmente compacto.*

2.4. Topología de Attouch-Wets

La topología de Attouch-Wets se introdujo inicialmente en [20] por Mosco, y su estudio se retomó en [1, 2] por Attouch y Wets. Puede definirse en $\mathrm{CL}(X)$ para cualquier espacio métrico X. En este trabajo definiremos la métrica de Attouch-Wets como en [23], que es equivalente a [6, Definición 3.1.2].

Sean (X,d) un espacio métrico y x_0 un punto fijo en X. Definimos la métrica $d_{AW} : \mathrm{CL}(X) \times \mathrm{CL}(X) \to [0,\infty)$ como

$$d_{AW}(A,B) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \text{mín} \left\{ \frac{1}{k}, \sup_{x\in B_k(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| \right\} \right\}.$$

Notemos que d_{AW} está acotada por 1 y cumple lo siguiente.

Lema 2.4.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. Sean $0 < \varepsilon \leq 1$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{j}$. Entonces, para cada $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ se cumple que*

$$d_{AW}(A,B) < \varepsilon \quad \textit{si y sólo si} \quad \sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < \varepsilon.$$

Demostración. Sean $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ y supongamos que $d_{AW}(A,B) < \varepsilon$. Entonces, en particular

$$\text{mín} \left\{ \frac{1}{j}, \sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| \right\} < \varepsilon,$$

y como $\frac{1}{j} \geq \varepsilon$, se tiene que

$$\sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < \varepsilon.$$

Por otra parte, supongamos ahora que

$$\sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < \varepsilon.$$

Como además $\frac{1}{j+1} < \varepsilon$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{máx} \left\{ \sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)|, \frac{1}{j+1} \right\} < r < \varepsilon.$$

Así, para cada $k \leq j$ se tiene que

$$\text{mín} \left\{ \frac{1}{k}, \sup_{x\in B_k(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| \right\} \leq \sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < r,$$

y para cada $k \geq j+1$

$$\min\left\{\frac{1}{k}, \sup_{x\in B_k(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)|\right\} \leq \frac{1}{j+1} < r.$$

Esto implica que $d_{AW}(A,B) \leq r < \varepsilon$. □

Proposición 2.4.2. *Sea (X,d) un espacio métrico. La topología en $\mathrm{CL}(X)$ inducida por la métrica $d_{AW} : \mathrm{CL}(X) \times \mathrm{CL}(X) \to [0,\infty)$ no depende del punto $x_0 \in X$ que se usa para la definición de d_{AW}.*

Demostración. Sean x_0 y y_0 elementos de X, y denotemos por $d_{AW}^{x_0}$ y $d_{AW}^{y_0}$ a las métricas respectivas. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que $d_{AW}^{y_0}(A,B) < \delta$ implica que $d_{AW}^{x_0}(A,B) < \epsilon$ para cada $A, B \in \mathrm{CL}(X)$. Esto implicaría que la topología inducida por $d_{AW}^{x_0}$ está contenida en la inducida por $d_{AW}^{y_0}$, y análogamente se tiene la otra contención.

Podemos suponer que $\varepsilon \leq 1$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{j}$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_j(x_0) \subseteq B_m(y_0)$. Consideremos $\delta = \min\left\{\frac{1}{m}, \varepsilon\right\}$. Entonces, si $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ cumplen que $d_{AW}^{y_0}(A,B) < \delta$, se tiene que

$$\min\left\{\frac{1}{m}, sup_{x\in B_m(y_0)} |d(x,A) - d(x,B)|\right\} < \delta$$

y, como $\frac{1}{m} \geq \delta$, entonces

$$sup_{x\in B_m(y_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < \delta.$$

Ya que $B_j(x_0) \subseteq B_m(y_0)$, lo anterior implica que

$$\sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < \delta \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, por el Lema 2.4.1 tenemos que $d_{AW}^{x_0}(A,B) < \epsilon$. □

Definición 2.4.3. Sea (X,d) un espacio métrico. La topología de Attouch-Wets τ_{AW_d} en $\mathrm{CL}(X)$ es la topología inducida por la métrica $d_{AW} : \mathrm{CL}(X) \times \mathrm{CL}(X) \to [0,\infty)$.

Denotaremos el espacio $(\mathrm{CL}(X), \tau_{AW_d})$ por $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$.

Sean (X, d) un espacio métrico y x_0 un punto fijo de X. Notemos que para cada $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ se tiene que

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{k}, \sup_{x\in B_k(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)|\right\} \leq \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)|$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, en general se cumple que $d_{AW}(A,B) \leq H_d(A,B)$. Esto implica que la topología de Attouch-Wets está contenida en la topología de la métrica de Hausdorff.

Proposición 2.4.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. La topología de Attouch-Wets en $\mathrm{CL}(X)$ es admisible.*

Demostración. Sea x_0 un punto fijo en X. Queremos probar que la función $i : (X, \tau_d) \to \mathrm{CL}_{AW_d}(X)$ dada por $i(x) = \{x\}$ es un encaje. Por una parte, sabemos que la función $i' : (X, d) \to \mathrm{CL}_{H_d}(X)$ dada por $i'(x) = \{x\}$ es continua, pues de hecho es una isometría, y como $\tau_{AW_d} \subseteq \tau_{H_d}$, entonces i es continua.

Por otra parte, para ver que i es abierta en su imagen consideremos $U \subseteq X$ abierto y $\{z\} \in i(U)$. Queremos ver que $\{z\}$ es un punto interior de $i(U)$ en $i(X)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subseteq U$. Tomemos $j \in \mathbb{N}$ tal que $z \in B_j(x_0)$, y sea $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{j}, \varepsilon\right\}$. Entonces, si y es un elemento de X tal que $d_{AW}(\{z\},\{y\}) < \delta$, en particular

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{j}, \sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,\{z\}) - d(x,\{y\})|\right\} < \delta,$$

y como $\frac{1}{j} \geq \delta$,

$$\sup_{x\in B_j(x_0)} |d(x,\{z\}) - d(x,\{y\})| < \delta \leq \varepsilon.$$

Entonces, ya que $z \in B_j(x_0)$, se tiene que

$$|d(z,\{z\}) - d(z,\{y\})| = d(z,y) < \varepsilon,$$

y por lo tanto $y \in B_\varepsilon(z) \subseteq U$ y $\{y\} \in i(U)$. De esto concluimos que $B_\delta(\{z\}) \cap i(X) \subseteq i(U)$, lo que implica que $\{z\}$ es un punto interior de $i(U)$ en $i(X)$. Entonces, $i(U)$ es abierto en $i(X)$ y la función i es abierta en su imagen. Por lo tanto, i es un encaje. $\square$

Proposición 2.4.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. El encaje $i : (X, d) \to \mathrm{CL}_{AW_d}(X)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $C \in \mathrm{CL}(X) \backslash i(X)$. Entonces existen $y, z \in C$ tales que $y \neq z$. Sea x_0 un punto fijo en X, en el cual basaremos la métrica de Attouch-Wets. Sea j un número natural tal que y y z pertenecen a la bola $B_j(x_0)$ y $\frac{1}{j} < \frac{d(y,z)}{2}$. Si $A \in \mathrm{CL}(X)$ y se cumple que $d_{AW}(C, A) < \frac{1}{j}$, por el Lema 2.4.1 se tiene que

$$\sup_{x \in B_j(x_0)} |d(x, C) - d(x, A)| < \frac{1}{j}.$$

Ya que $y, z \in B_j(x_0) \cap C$, tenemos que $d(y, A) < \frac{1}{j}$ y $d(z, A) < \frac{1}{j}$. Pero como $\frac{1}{j} < \frac{d(y,z)}{2}$, entonces A tiene al menos dos elementos. Así, se tiene que

$$\left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_{AW}(C, A) < \frac{1}{j}\right\} \subseteq \mathrm{CL}(X) \backslash i(X),$$

y por lo tanto $\mathrm{CL}(X) \backslash i(X)$ es abierto en $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$. □

En algunas ocasiones las topologías de Vietoris y de la métrica de Hausdorff resultan demasiado fuertes. Por ejemplo, en el plano $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual, se esperaría que las rectas por el origen con pendiente $\frac{1}{n}$ convergieran al eje horizontal. Esto no pasa cuando $\mathrm{CL}(\mathbb{R}^2)$ tiene la topología de Vietoris o de la métrica de Hausdorff, pero sí cuando tiene la topología de Attouch-Wets:

Ejemplo 2.4.6. *Sea d la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, y consideremos las rectas*

$$C_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x}{n}\right\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}.$$

Entonces, la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a C en el espacio $\mathrm{CL}_{AW_d}(\mathbb{R}^2)$, pero no en $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$ ni en $\mathrm{CL}_{H_d}(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. El conjunto $(\mathbb{R} \times (-1, 1))^+$ es abierto en $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$ y contiene a C, pero no contiene a C_n para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión (C_n) no converge a C en $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$. Además, como

$$C_n \nsubseteq \mathbb{R} \times (-1, 1) = N_1(C) \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

por el Lema 2.3.3 tenemos que la sucesión (C_n) tampoco converge a C en $\mathrm{CL}_{H_d}(\mathbb{R}^2)$.

Por otra parte, veamos que (C_n) converge a C en $\mathrm{CL}_{AW_d}(\mathbb{R}^2)$. Sean $\varepsilon > 0$ y j un número natural tal que $\frac{1}{j} < \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos

$$B_n = C_n \cap ([-j, j] \times \mathbb{R}) \text{ y } B = C \cap ([-j, j] \times \mathbb{R}).$$

Entonces, si x pertenece a la bola $B_j(0)$, se cumple que $d(x, C_n) = d(x, B_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $d(x, C) = d(x, B)$. Por lo tanto, por el Lema 2.4.1 tenemos que $d_{AW}(C, C_n) < \frac{1}{j}$ si y sólo si $d_{AW}(B, B_n) < \frac{1}{j}$.

Sea k un número natural tal que $\frac{j}{k} < \frac{1}{j}$. Si $n \geq k$, es fácil ver que $B_n \subseteq N_{\frac{1}{j}}(B)$ y $B \subseteq N_{\frac{1}{j}}(B_n)$, y por lo tanto

$$d_{AW}(B, B_n) \leq H_d(B, B_n) < \frac{1}{j}.$$

Así, se tiene que $d_{AW}(C, C_n) < \frac{1}{j} < \varepsilon$ para toda $n \geq k$, y por lo tanto podemos concluir que la sucesión (C_n) converge a C en $\mathrm{CL}_{AW_d}(\mathbb{R}^2)$. □

El siguiente resultado sobre la estructura de $\mathrm{CL}_{AW_{\|\cdot\|}}(X)$ cuando $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita se probó en [3].

Ejemplo 2.4.7. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita con peso $w(X)$.*

1. *El hiperespacio $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$ es homeomorfo a un espacio de Hilbert con peso $2^{w(X)}$.*

2. *Si X es separable, $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$ es homeomorfo al espacio ℓ_∞ formado por todas las sucesiones acotadas y equipado con la norma del supremo, dada por $\|(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.*

Capítulo 3

Coincidencia de topologías

En este capítulo estudiaremos qué topologías en el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ son inducidas por una topología en el espacio de funciones $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$, así como la relación entre las topologías en $\mathrm{CL}(X)$ introducidas anteriormente. Recordemos que en el capítulo 2 se demostraron las contenciones $\tau_F \subseteq \tau_{W_d} \subseteq \tau_V$ y $\tau_{AW_d} \subseteq \tau_{H_d}$. En este capítulo veremos qué otras relaciones hay entre estas topologías y daremos condiciones en el espacio X para que coincidan entre sí.

3.1. Topologías en el espacio $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$

Sea (X,d) un espacio métrico. Dado $A \in \mathrm{CL}(X)$, denotaremos por d_A a la función continua de X en $\mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x,A)$. Consideremos la función $F : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{C}(X,\mathbb{R})$ dada por $F(A) = d_A$. Como la distancia de un subconjunto cerrado A de X a un punto $x \in X \backslash A$ es positiva, F es una función inyectiva. Por lo tanto, podemos ver a $\mathrm{CL}(X)$ como un subconjunto de $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$, y considerar las topologías de subespacio inducidas en $\mathrm{CL}(X)$ por ciertas topologías que usualmente se dan al espacio de funciones $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$: la topología punto-abierta, la topología compacto-abierta, la topología de la convergencia uniforme y la topología de la convergencia uniforme en acotados.

Proposición 3.1.1. *La topología punto-abierta en* $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$ *induce la topología de Wijsman en* $\mathrm{CL}(X)$.

Demostración. Recordemos que, para cada $x \in X$, denotamos por d_x a la función de $\mathrm{CL}(X)$ en $\mathbb{R}$ que está definida como $d_x(A) = d(x,A)$.

Bajo la identificación $A \in \mathrm{CL}(X) \to d_A \in \mathrm{C}(X, \mathbb{R})$, la topología de subespacio en $\mathrm{CL}(X)$ dada por la topología punto-abierta en $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ está generada por la subbase que consiste en los conjuntos

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_A(\{x\}) \subseteq U\} = \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_x(A) \in U\} = d_x^{-1}(U),$$

con $x \in X$, $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Entonces es la topología débil inducida por $\{d_x \mid x \in X\}$, que es la topología de Wijsman. $\square$

Lema 3.1.2. *La familia* $\{d_A : X \to \mathbb{R} \mid A \in \mathrm{CL}(X)\}$ *es equicontinua.*

Demostración. Sean $A \in \mathrm{CL}(X)$, $a \in A$ y $x, y \in X$. Como

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$

entonces $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ para cada $a \in A$, por lo que $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. Entonces $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, y análogamente $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. Por lo tanto, $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para cada $A \in \mathrm{CL}(X)$ y $x, y \in X$. La desigualdad anterior garantiza que la familia $\{d_A : X \to \mathbb{R} \mid A \in \mathrm{CL}(X)\}$ es equicontinua. $\square$

Del Lema 3.1.2 y del Teorema 1.2.6 concluimos que la topología compacto-abierta en $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ no induce una topología más fina en $\mathrm{CL}(X)$ que la topología punto-abierta. Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.3. *La topología compacto-abierta en* $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ *induce la topología de Wijsman en* $\mathrm{CL}(X)$*.*

Teorema 3.1.4. *La topología de la convergencia uniforme en acotados en* $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ *induce la topología de Attouch-Wets en* $\mathrm{CL}(X)$*.*

Demostración. Sean $A \in \mathrm{CL}(X)$ y $\mathcal{B}$ un elemento de la base local de A en la topología inducida por τ_{CUA} en $\mathrm{CL}(X)$. Es decir,

$$\mathcal{B} = \{C \in \mathrm{CL}(X) \mid |d_A(x) - d_C(x)| < \varepsilon \text{ para cada } x \in B\}$$

con B un subconjunto acotado de X y $\varepsilon > 0$. Supongamos que la métrica d_{AW} está basada en el punto $x_0 \in X$. Como B es acotado, podemos tomar $j \in \mathbb{N}$ tal que $B \subseteq B_j(x_0)$ y $\frac{1}{j} \leq \varepsilon$. Entonces, si $C \in \mathrm{CL}(X)$ y $d_{AW}(A, C) < \frac{1}{j}$, por el Lema 2.4.1 se tiene que

$$\sup_{x \in B_j(x_0)} |d(x, A) - d(x, C)| < \frac{1}{j} \leq \varepsilon.$$

Esto implica que la bola abierta $\left\{C \in \mathrm{CL}(X) \mid d_{AW}(A,C) < \frac{1}{j}\right\}$ en la topología de Attouch-Wets está contenida en $\mathcal{B}$. Por lo tanto, todo elemento de la base local de A en la topología inducida por τ_{CUA} en $\mathrm{CL}(X)$ es abierto en $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$.

Por otra parte, Sea $0 < r \leq 1$, y consideremos $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j+1} < r \leq \frac{1}{j}$. Entonces, el Lema 2.4.1 implica que el conjunto

$$\left\{C \in \mathrm{CL}(X) \mid |d_A(x) - d_C(x)| < \frac{r}{2} \text{ para cada } x \in B_j(x_0)\right\}$$

está contenido en la bola $\{C \in \mathrm{CL}(X) \mid d_{AW}(A,C) < r\}$. Por lo tanto, toda bola abierta en τ_{AW_d} con centro en A y radio $r \leq 1$ es abierta en la topología inducida por τ_{CUA}. Entonces, podemos concluir que la topología en $\mathrm{CL}(X)$ dada por τ_{CUA} es τ_{AW_d}. □

Recordemos que la topología de la convergencia uniforme en $\mathrm{C}(X,Y)$ es la inducida por la métrica infinita $d_{CU} : \mathrm{C}(X,Y) \times \mathrm{C}(X,Y) \to [0,\infty]$ dada por

$$d_{CU}(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

y por lo tanto induce en $\mathrm{CL}(X)$ una topología que está generada por la métrica infinita $d'_{CU} : \mathrm{CL}(X) \times \mathrm{CL}(X) \to [0,\infty]$ dada por

$$d'_{CU}(A,B) = d_{CU}(d_A, d_B) = \sup_{x \in X} |d_A(x) - d_B(x)|.$$

Usando la definición de la métrica de Hausdorff H_d (ecuación 2.2), concluimos que $d'_{CU}(A,B) = H_d(A,B)$. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.5. *La topología de la convergencia uniforme en* $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$ *induce la topología de la métrica de Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$.

Por el hecho de que $\tau_{PA} \subseteq \tau_{CA} \subseteq \tau_{CUA} \subseteq \tau_{CU}$ y por los Teoremas 3.1.1, 3.1.4 y 3.1.5, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.5.1. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Entonces,* $\tau_{W_d} \subseteq \tau_{AW_d} \subseteq \tau_{H_d}$.

Del corolario anterior y la Proposición 2.2.16 se tienen las contenciones

$$\tau_F \subseteq \tau_{W_d} \subseteq \tau_{AW_d} \subseteq \tau_{H_d}.$$

A continuación veremos bajo qué condiciones se dan las igualdades entre estas topologías.

3.2. Relación entre las topologías de Fell y de Wijsman

En esta sección veremos que la coincidencia de τ_F y τ_{W_d} en $\mathrm{CL}(X)$ es equivalente a que las bolas cerradas propias del espacio X sean compactas.

Proposición 3.2.1. *Sean (X, d) un espacio métrico y Δ un subconjunto de $\mathrm{CL}(X)$ que contiene a $\mathrm{F}_2(X) := \{\{x, y\} \mid x, y \in X\}$. Entonces, la topología de Fell y la topología de Wijsman coinciden en Δ si y sólo si las bolas cerradas propias de X son compactas.*

Demostración. Supongamos que toda bola cerrada propia en X es compacta. Veamos que τ_F y τ_{W_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$, y por lo tanto también en Δ. Sean $x \in X$ y $a > 0$. Entonces

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x, A) < a\} = B_a(x)^-,$$

y por lo tanto este conjunto pertenece a τ_F. Por otra parte, sea

$$B \in \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x, A) > a\},$$

y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, B) > r > a$. Entonces, $B \subseteq X \backslash B_r[x]$. Además, si $C \in \mathrm{CL}(X)$ y C está contenido en $X \backslash B_r[x]$, entonces $d(x, c) > r$ para cada $c \in C$, y esto implica que $d(x, C) \geq r > a$. Por lo tanto,

$$B \in (X \backslash B_r[x])^+ \subseteq \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x, A) > a\}.$$

Como $\emptyset \neq B \subseteq X \backslash B_r[x]$, entonces $B_r[x]$ es una bola cerrada propia en X y por lo tanto es compacta. Esto implica que $(X \backslash B_r[x])^+$ es un abierto en la topología de Fell, por lo que B es un punto interior de

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x, A) > a\}$$

con respecto a τ_F. Entonces, este conjunto pertenece a τ_F.

De lo anterior podemos concluir que $\tau_{W_d} \subseteq \tau_F$, y la contención $\tau_F \subseteq \tau_{W_d}$ se tiene por la Proposición 2.2.16.

Ahora supongamos que τ_F y τ_{W_d} coinciden en Δ. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que la bola cerrada $B_\varepsilon[x]$ está contenida propiamente en X. Entonces existe $y \in X$ tal que $d(x, y) > \varepsilon$.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $B_\varepsilon[x]$. Afirmamos que la sucesión $(\{x_n, y\})_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\{y\}$ en Δ con la topología de Wijsman. En efecto, como

$d\left(x,\left(\{x_n,y\}\right)\right) \leq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $d(x,y) > \varepsilon$, entonces la sucesión $\left(d_x\left(\{x_n,y\}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $d_x\left(\{y\}\right)$ en $\mathbb{R}$. Por el Lema 2.1.2, esto implica la afirmación.

Como τ_F y τ_{W_d} coinciden en Δ, $(\{x_n,y\})$ tampoco converge a $\{y\}$ en Δ con la topología de Fell. Por lo tanto, existen $V_1,\ldots,V_n$ abiertos en X, C un subconjunto compacto de X y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) tales que

$$\{y\} \in V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap (X\backslash C)^+ \cap \Delta$$

$$\text{y } \{x_{n_k},y\} \notin V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \cap (X\backslash C)^+ \cap \Delta \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Estos dos hechos implican que $\{x_{n_k},y\} \notin (X\backslash C)^+$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y como $\{y\}$ sí pertenece a $(X\backslash C)^+$, tenemos que la subsucesión (x_{n_k}) está contenida en el compacto C. Por lo tanto, tiene una subsucesión convergente.

Entonces, toda sucesión en $B_\varepsilon[x]$ tiene una subsucesión convergente, y de esto concluimos que $B_\varepsilon[x]$ es compacta. Así, toda bola cerrada propia de X es compacta. □

Como un espacio normado es localmente compacto si y sólo si tiene dimensión finita, la proposición anterior implica lo siguiente:

Corolario 3.2.1.1. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado y Δ un subconjunto de $\mathrm{CL}(X)$ que contiene a $\mathrm{F}_2(X)$. Entonces, la topología de Fell y la topología de Wijsman coinciden en Δ si y sólo si X tiene dimensión finita.*

La Proposición 3.2.1 implica que las topologías de Fell y de Wijsman en general no coinciden en $\mathrm{CL}(X)$ ni en $\mathrm{K}(X)$, y se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1.2. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si la topología de Fell y la topología de Wijsman coinciden en el subespacio $\mathrm{F}_2(X)$ de $\mathrm{CL}(X)$, entonces coinciden en $\mathrm{CL}(X)$.*

De hecho, τ_F y τ_{W_d} tampoco coinciden en general en el espacio $\mathrm{cc}(X)$ de subconjuntos convexos, compactos y no vacíos de un espacio normado X (y por lo tanto tampoco en $\mathrm{Conv}(X)$):

Ejemplo 3.2.2. *En el espacio $\ell_2 = \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$, con la norma dada por*

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

el abierto $\{A \in \mathrm{cc}(\ell_2) \mid d\left((3,0,0,\ldots),A\right) > 2\}$ en $\mathrm{cc}_{W_d}(\ell_2)$ no es abierto en $\mathrm{cc}_F(\ell_2)$ (donde d es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$).

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U} := \{A \in \mathrm{cc}(\ell_2) \mid d\left((3,0,0,\ldots),A\right) > 2\}$ es abierto en $\mathrm{cc}_F(\ell_2)$. Como $\{0\}$ es un elemento de $\mathcal{U}$, existen $V_1,\ldots,V_j$ abiertos en ℓ_2 y C un subconjunto compacto de ℓ_2 tales que

$$\{0\} \in V_1^- \cap \ldots \cap V_j^- \cap (X \backslash C)^+ \cap \mathrm{cc}(\ell_2) \subseteq \mathcal{U}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ mayor o igual a 2 sea y_i el elemento de ℓ_2 con 2 en la primera coordenada, 1 en la i-ésima coordenada y 0 en las demás, y sea $Y_i = \{ty_i \mid t \in [0,1]\}$ el segmento que une 0 con y_i. Como $d\left((3,0,0,\ldots),y_i\right) = \sqrt{2} < 2$ para cada $i \geq 2$, ningún segmento Y_i pertenece a $\mathcal{U}$. Además, ya que

$$Y_i \in V_1^- \cap \ldots \cap V_j^- \cap \mathrm{cc}(\ell_2) \text{ para toda } i \geq 2,$$

entonces cada Y_i intersecta a C.

Por lo tanto, para toda $i \geq 2$ existe $t_i \in [0,1]$ tal que $t_i y_i$ pertenece al compacto C, y entonces existe una subsucesión $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(i)_{i\geq 2}$ tal que $(t_{i_k} y_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a algún $y \in C$. Pero para cada $n, m \geq 2$, con $n \neq m$ se tiene que

$$d\left(t_n y_n, t_m y_m\right) = \left((2t_n - 2t_m)^2 + t_n^2 + t_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq t_n.$$

Así, la sucesión $(t_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0, y como la sucesión $(y_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces $(t_{i_k} y_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0. De aquí se tiene que $y = 0$, lo cual contradice que $\{0\} \subseteq X \backslash C$. □

3.3. Relación entre las topologías de Wijsman y de Attouch-Wets

Recordemos que un subconjunto Y de un espacio métrico (X,d) es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito F de X tal que $Y \subseteq \bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(x)$. Es claro que todo subconjunto de un conjunto totalmente acotado también es totalmente acotado. Además, un subconjunto de X es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo ([13, Teoremas 4.3.27, 4.3.28, 4.3.29]).

En esta sección veremos que la coincidencia de τ_{W_d} y τ_{AW_d} en $\mathrm{CL}(X)$ es equivalente a que los subconjuntos acotados del espacio X sean totalmente acotados. Para esto, demostraremos primero el siguiente lema.

Lema 3.3.1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si para toda vecindad $\mathcal{U}$ de X en $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$ existen $V_1,\ldots,V_n$, abiertos no vacíos en X, tales que $V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \subseteq \mathcal{U}$, entonces todo subconjunto acotado de X es totalmente acotado.*

Demostración. Sean Y un subconjunto acotado de X y $\varepsilon > 0$. Sea x_0 un punto fijo en X, en el cual basaremos la métrica de Attouch-Wets. Consideremos $j \in \mathbb{N}$ tal que $Y \subseteq B_j(x_0)$ y $\frac{1}{j} < \varepsilon$. Por la hipótesis del lema, existen $V_1, \ldots, V_n$ abiertos no vacíos tales que

$$V_1^- \cap \ldots \cap V_n^- \subseteq \left\{ A \in \mathrm{CL}(X) \mid d_{AW}(X, A) < \frac{1}{j} \right\}. \tag{3.1}$$

Sea $x_i \in V_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, y denotemos $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Por 3.1 podemos inferir que $d_{AW}(X, G) < \frac{1}{j}$. Por lo tanto, usando el Lema 2.4.1 se tiene que

$$\sup_{x \in B_j(x_0)} |d(x, X) - d(x, G)| < \frac{1}{j} < \varepsilon.$$

Como $d(x, X) = 0$ para cada $x \in X$, entonces $d(x, G) < \varepsilon$ para toda $x \in B_j(x_0)$. Así, como Y está contenido en la bola $B_j(x_0)$, tenemos que

$$Y \subseteq \bigcup_{x \in G} B_\varepsilon(x).$$

De esta manera podemos concluir que todo subconjunto acotado de X es totalmente acotado. □

Proposición 3.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, la topología de Wijsman y la topología de Attouch-Wets coinciden en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y sólo si los subconjuntos acotados de X son totalmente acotados.*

Demostración. Supongamos que la métrica d_{AW} está basada en el punto $x_0 \in X$.

Supongamos que los subconjuntos acotados de X son totalmente acotados. Sean $C \in \mathrm{CL}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Como $B_n(x_0)$ es totalmente acotado, existe un subconjunto finito F de X tal que

$$B_n(x_0) \subseteq \bigcup_{x \in F} B_{\frac{1}{4n}}(x). \tag{3.2}$$

Denotemos por $\mathcal{B}$ al conjunto

$$\bigcap_{x \in F} \left\{ A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x, A) < d(x, C) + \frac{1}{4n} \;\text{ y }\; d(x, A) > d(x, C) - \frac{1}{4n} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es abierto en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ y contiene a C. Sean $B \in \mathcal{B}$ y $x \in B_n(x_0)$. Por la contención 3.2, existe $y \in F$ tal que $d(x,y) < \frac{1}{4n}$. Entonces, para cada $b \in B$ se tiene que

$$d(x,B) \leq d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,b) < \frac{1}{4n} + d(y,b),$$

y por lo tanto $d(x,B) \leq \frac{1}{4n} + d(y,B)$. Como $y \in F$ y $B \in \mathcal{B}$, inferimos que

$$d(x,B) < d(y,C) + \frac{2}{4n}. \tag{3.3}$$

Por otra parte, para cada $c \in C$ se tiene que

$$d(y,C) \leq d(y,c) \leq d(y,x) + d(x,c) < \frac{1}{4n} + d(x,c),$$

y por lo tanto $d(x,C) \geq d(y,C) - \frac{1}{4n}$. De esto y la desigualdad 3.3 concluimos que

$$d(x,B) - d(x,C) < \frac{3}{4n}.$$

De manera análoga al razonamiento anterior obtenemos que $d(x,C) - d(x,B) < \frac{3}{4n}$. Entonces, se cumple que $|d(x,C) - d(x,B)| < \frac{3}{4n}$ para cada x en la bola $B_n(x_0)$, y por lo tanto

$$\sup_{x \in B_n(x_0)} |d(x,C) - d(x,B)| \leq \frac{3}{4n} < \frac{1}{n}.$$

Por el Lema 2.4.1, esto implica que $d_{AW}(C,B) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces, el conjunto $\mathcal{B}$ está contenido en la bola abierta en $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$ con centro en C y radio ε, y por lo tanto ésta es abierta también en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$. Así, concluimos que $\tau_{AW_d} \subseteq \tau_{W_d}$, y la otra contención se tiene por el Corolario 3.1.5.1. Entonces, $\tau_{W_d} = \tau_{AW_d}$.

Ahora, supongamos que τ_{W_d} y τ_{AW_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$. Una base de vecindades en el punto X en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$ está dada por los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x_i, A) < r\}, \text{ con } x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } r > 0,$$

ya que no se cumple que $d(x,X) > \delta$ para ningunos $x \in X$ y $\delta > 0$. Entonces, como

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid d(x_i, A) < r\} = B_r(x_i)^{-}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, el hecho de que $\tau_{AW_d} \subseteq \tau_{W_d}$ y el Lema 3.3.1 implican que los subconjuntos acotados de X son totalmente acotados. $\square$

Si un espacio normado tiene dimensión finita, entonces es localmente compacto y por lo tanto sus subconjuntos acotados son totalmente acotados. Por otra parte, si un espacio de Banach tiene dimensión infinita, entonces sus bolas cerradas no son compactas. Por ser subconjuntos cerrados de un espacio completo sí son completas, y por lo tanto no son totalmente acotadas. Entonces, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces, la topología de Wijsman y la topología de Attouch-Wets coinciden en $\mathrm{CL}(X)$ si y sólo si X tiene dimensión finita.*

En el caso en el que X es un espacio de Banach de dimensión infinita, se puede dar una descripción topológica de $\mathrm{CL}\,(X)$ como sigue:

Ejemplo 3.3.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Entonces,*

1. *el hiperespacio $\mathrm{CL}_{W_{\|\cdot\|}}(X)$ es homeomorfo al espacio de Hilbert separable ℓ_2 ([18]);*

2. *el hiperespacio $\mathrm{CL}_{AW_{\|\cdot\|}}(X)$ es homeomorfo al espacio ℓ_∞ ([3]).*

La Proposición 3.3.2 implica que las topologías de Wijsman y de Attouch-Wets en general no coinciden en $\mathrm{CL}(X)$, y de hecho tampoco coinciden en el espacio $\mathrm{cc}(X)$ cuando X es un espacio normado (y por lo tanto tampoco en $\mathrm{K}(X)$ ni en $\mathrm{Conv}(X)$):

Ejemplo 3.3.4. *En el espacio ℓ_2, con la norma dada por*

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para cada $i \in \mathbb{N}$ sea e_i el elemento de ℓ_2 que tiene 1 en la i-ésima coordenada y 0 en las demás, y sea E_i el segmento que une 0 con e_i. Entonces, la sucesión $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\{0\}$ en $\mathrm{cc}_{W_d}(\ell_2)$ pero no en $\mathrm{cc}_{AW_d}(\ell_2)$, donde d es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.

Demostración. Sea $x = (x_n) \in \ell_2$. Por el Lema 2.1.2, para demostrar que $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\{0\}$ con respecto a la topología de Wijsman basta ver que $(d(x, E_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $d(x, 0) = \|x\|$ en $\mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como la función raíz es continua, podemos tomar $\delta > 0$ tal que si $r \geq 0$ y $\left|\|x\|^2 - r\right| < \delta$ entonces $\left|\|x\| - r^{\frac{1}{2}}\right| < \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 < \delta.$$

Entonces,

$$\|x\| - \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Sea $k > N$. Para toda $y = (y_n) \in E_k$, las primeras N coordenadas de y son 0, por lo que

$$\|x - y\| \geq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} > \|x\| - \varepsilon.$$

Esto implica que $d(x, E_k) \geq \|x\| - \varepsilon$, y como además $0 \in E_k$, entonces $d(x, E_k) \leq \|x\|$. Así, podemos concluir que $|\|x\| - d(x, E_k)| \leq \varepsilon$ para toda $k > N$. Por lo tanto, la sucesión $(d(x, E_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\|x\|$, y entonces $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\{0\}$ con respecto a la topología de Wijsman.

Por otra parte, como para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\|x\|<2} |d(x, \{0\}) - d(x, E_i)| \geq |d(e_i, \{0\}) - d(e_i, E_i)| = \|e_i\| = 1 > \frac{1}{2},$$

por el Lema 2.4.1 se tiene que $d_{AW}(\{0\}, E_i) \geq \frac{1}{2}$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la sucesión $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no converge a $\{0\}$ con respecto a la topología de Attouch-Wets. $\square$

3.4. Relación entre las topologías de Attouch-Wets y de la métrica de Hausdorff

En esta sección veremos que la coincidencia de τ_{AW_d} y τ_{H_d} en $\mathrm{CL}(X)$ es equivalente a que el espacio X sea acotado.

Proposición 3.4.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y Δ un subconjunto de $\mathrm{CL}(X)$ que contiene a $\mathrm{F}_2(X)$ o que contiene a X y a las bolas cerradas. Entonces, la topología de Attouch-Wets y la topología de la métrica de Hausdorff coinciden en Δ si y sólo si X es acotado.*

Demostración. Supongamos que la métrica d_{AW} está basada en el punto $x_0 \in X$.

Supongamos que X es acotado. Entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $X \subseteq B_j(x_0)$ y, por lo tanto, para cada $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ se cumple que

$$H_d(A,B) = \sup_{x \in B_j(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)|.$$

Por el Lema 2.4.1, esto implica que para cada $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{j}$ se cumple que si $d_{AW}(A,B) < \varepsilon$ entonces $H_d(A,B) < \varepsilon$. Por lo tanto, τ_{H_d} está contenida en τ_{AW_d} en $\mathrm{CL}(X)$, y por el Lema 3.1.5.1 se tiene la otra contención. Así, τ_{AW_d} y τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$, y entonces también en Δ.

Ahora, supongamos que τ_{AW_d} y τ_{H_d} coinciden en Δ. Supongamos primero que Δ contiene a $\mathrm{F}_2(X)$. Como la bola abierta con centro en $\{x_0\}$ y radio 1 en Δ con la topología de la métrica de Hausdorff es también abierta con respecto a la topología de Attouch-Wets, existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \Delta$ y $d_{AW}(\{x_0\}, A) < \delta$ entonces $H_d(\{x_0\}, A) < 1$.

Podemos suponer sin perder la generalidad que $\delta \leq 1$. Sea k el número natural tal que $\frac{1}{k+1} < \delta \leq \frac{1}{k}$. Afirmamos que X está contenido en la bola $B_{2k}(x_0)$. Supongamos lo contrario, entonces existe $y \in X$ tal que $d(x_0,y) \geq 2k$. Así, para cada $x \in B_k(x_0)$ se tiene que

$$2k \leq d(x_0,y) \leq d(x_0,x) + d(x,y) < k + d(x,y),$$

y por lo tanto $d(x,y) > k$. Entonces, $d(x,\{x_0,y\}) = d(x,x_0)$ para toda $x \in B_k(x_0)$, y esto implica que

$$\sup_{x \in B_k(x_0)} |d(x,\{x_0\}) - d(x,\{x_0,y\})| = 0.$$

Por el Lema 2.4.1, podemos concluir que $d_{AW}(\{x_0\},\{x_0,y\}) < \delta$, y por lo tanto $H_d(\{x_0\},\{x_0,y\}) < 1$. Usando el Lema 2.3.3, se tiene que $d(x_0,y) < 1$. Pero $d(x_0,y) \geq 2k$, que contradice $k \geq 1$. Entonces X está contenido en la bola $B_{2k}(x_0)$, por lo que es acotado.

Por otra parte, supongamos que Δ contiene a X y a las bolas cerradas. Como τ_{AW_d} y τ_{H_d} coinciden en Δ, existe $r > 0$ tal que si $A \in \Delta$ y $d_{AW}(X, A) < r$ entonces $H_d(X, A) < 1$.

Podemos suponer que $r \leq 1$. Sea m el número natural que cumple que $\frac{1}{m+1} < r \leq \frac{1}{m}$. Como

$$\sup_{x \in B_m(x_0)} |d(x, X) - d(x, B_m[x_0])| = \sup\{0\} = 0,$$

por el Lema 2.4.1 se tiene que $d_{AW}(X, B_m[x_0]) < r$, y esto implica que $H_d(X, B_m[x_0]) < 1$. Por lo tanto, usando nuevamente el Lema 2.3.3, concluimos que

$$X \subseteq N_1(B_m[x_0]) = \bigcup_{p \in B_m[x_0]} B_1(p) \subseteq B_{m+1}(x_0).$$

Entonces, X es acotado. □

La proposición anterior implica que las topologías de Attouch-Wets y de la métrica de Hausdorff en general no coinciden en $\mathrm{CL}(X)$ ni en $\mathrm{K}(X)$, y tampoco en $\mathrm{Conv}(X)$ cuando X es un espacio normado. Además, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.4.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si la topología de Attouch-Wets y la topología de la métrica de Hausdorff coinciden en el subespacio $\mathrm{F}_2(X)$ de $\mathrm{CL}(X)$, entonces coinciden en $\mathrm{CL}(X)$.*

Si (X, d) es un espacio métrico, denotaremos por

$$\mathrm{CB}(X) = \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \text{ es conexo y acotado}\}.$$

Aunque τ_{AW_d} y τ_{H_d} en general no coinciden en $\mathrm{K}(X)$ o en $\mathrm{Conv}(X)$, sí coinciden en $\mathrm{CB}(X)$, y por lo tanto también en el subespacio $\mathrm{cc}(X)$ cuando X es un espacio normado:

Proposición 3.4.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de Attouch-Wets y la topología de la métrica de Hausdorff coinciden en $\mathrm{CB}(X)$.*

Demostración. Supongamos que la métrica d_{AW} está basada en el punto $x_0 \in X$.

Sean $C \in \mathrm{CB}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Como C es acotado, existe $r > 0$ tal que $C \subseteq B_r(x_0)$. Sea j un número natural que cumple que $j > r + \frac{\varepsilon}{2}$ y que $\frac{1}{j} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Supongamos que $D \in \mathrm{CB}(X)$ y que $d_{AW}(C, D) < \frac{1}{j}$. Por el Lema 2.4.1, esto implica que

$$\sup_{x \in B_j(x_0)} |d(x, C) - d(x, D)| < \frac{1}{j} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como C está contenido en $B_r(x_0) \subseteq B_j(x_0)$, para cada $c \in C$ se tiene que

$$d(c, D) = |d(c, C) - d(c, D)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $C \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(D)$.

De forma análoga, para cada $d \in D \cap B_j(x_0)$ se tiene que $d(d, C) < \frac{\varepsilon}{2}$, y entonces $D \cap B_j(x_0) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(C)$.

Veamos que de hecho $D = D \cap B_j(x_0)$. Supongamos que existe $w \in D \backslash B_j(x_0)$. Como C es no vacío, existe $y \in C$, y ya que C está contenido en $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(D)$, existe $z \in D$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Debido a que $y \in C \subseteq B_r(x_0)$, entonces

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, como D es conexo, entonces su imagen bajo la función continua $d(x_0, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. Como w y z son elementos de D y

$$d(x_0, z) < r + \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ y }\; d(x_0, w) \geq j > r + \frac{\varepsilon}{2},$$

existe $p \in D$ tal que $d(x_0, p) = r + \frac{\varepsilon}{2} < j$.

Por lo tanto, p es un elemento de $D \cap B_j(x_0)$, y como este conjunto está contenido en $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(C)$, existe $q \in C$ tal que $d(p, q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$r + \frac{\varepsilon}{2} = d(x_0, p) \leq d(x_0, q) + d(q, p) < d(x_0, q) + \frac{\varepsilon}{2},$$

y por lo tanto $d(x_0, q) > r$. Pero esto contradice que q pertenece a $C \subseteq B_r(x_0)$. Entonces, concluimos que $D = D \cap B_j(x_0)$.

Así, tenemos que $C \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(D)$ y que $D \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(C)$, y esto implica que $H_d(C, D) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\left\{A \in \mathrm{CB}(X) \mid d_{AW}(C, A) < \frac{1}{j}\right\} \subseteq \{A \in \mathrm{CB}(X) \mid H_d(C, A) < \varepsilon\},$$

y de esto concluimos que la topología de la métrica de Hausdorff está contenida en la topología de Attouch-Wets en $\mathrm{CB}(X)$. Como la topología de Attouch-Wets está contenida en la topología de la métrica de Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$, entonces también en el subespacio $\mathrm{CB}(X)$. Por lo tanto, estas topologías coinciden en $\mathrm{CB}(X)$. □

Como $\tau_F \subseteq \tau_{W_d} \subseteq \tau_{AW_d} \subseteq \tau_{H_d}$ en $\mathrm{CL}(X)$, las cuatro topologías coinciden si y sólo si el espacio X es compacto, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, la topología de Fell y la topología de la métrica de Hausdorff coinciden en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Si X es compacto, las Proposiciones 3.2.1, 3.3.2 y 3.4.1 implican que $\tau_F = \tau_{W_d}$, $\tau_{W_d} = \tau_{AW_d}$ y $\tau_{AW_d} = \tau_{H_d}$ en $\mathrm{CL}(X)$.

Inversamente, supongamos que τ_F y τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$. Entonces, por las Proposiciones 3.2.1, 3.3.2 y 3.4.1 se tiene que X es totalmente acotado y que las bolas cerradas propias de X son compactas. Podemos suponer que X tiene más de un punto, pues en otro caso X es compacto. Entonces, existen $x, y \in X$ tales que $d(x, y) > 0$. Esto implica que toda bola cerrada de radio $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{3}$ es propia, y por lo tanto compacta. Como X es totalmente acotado, existe un subconjunto finito F de X tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon[x]$. Así, X es la unión finita de subconjuntos compactos, y entonces es compacto. □

3.5. Relación de la topología de Vietoris con otras topologías

La topología de Vietoris suele ser demasiado fuerte. Por ejemplo, en el plano $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual d, las rectas horizontales con ecuación $y = \frac{1}{n}$ convergen al eje $y = 0$ en $\mathrm{CL}_{H_d}(\mathbb{R}^2)$ (y entonces también en $\mathrm{CL}_{AW_d}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{CL}_{W_d}(\mathbb{R}^2)$ y $\mathrm{CL}_F(\mathbb{R}^2)$), pero no en $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$.

Ejemplo 3.5.1. *Consideremos las rectas*

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{n} \right\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}.$$

Entonces, la sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* C *en el espacio* $\mathrm{CL}_{H_d}(\mathbb{R}^2)$*, pero no en* $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$*.*

Demostración. Como C_n está contenido en $N_{\frac{2}{n}}(C)$ y C está contenido en $N_{\frac{2}{n}}(C_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 2.3.3 tenemos que $H_d(C, C_n) \leq \frac{2}{n}$, y por lo tanto la sucesión (C_n) converge a C en $\mathrm{CL}_{H_d}(\mathbb{R}^2)$.

Por otra parte, consideremos el conjunto

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ y } y < \frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\right\}.$$

Como V es abierto en $\mathbb{R}^2$, V^+ es un abierto de $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$. Ya que V^+ contiene a C pero no contiene a C_n para ninguna $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (C_n) no converge a C en $\mathrm{CL}_V(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Este ejemplo implica que en general τ_V no está contenida en ninguna de las topologías τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d} y τ_{H_d}. Por otra parte, por el Teorema 2.2.9 sabemos que sí se cumplen las contenciones $\tau_F \subseteq \tau_V$ y $\tau_{W_d} \subseteq \tau_V$. Sin embargo, por el Lema 3.3.1 se tiene que la contención $\tau_{AW_d} \subseteq \tau_V$ sólo se puede dar si en el espacio X todos los subconjuntos acotados son totalmente acotados. Por lo tanto, en general no se dan las contenciones $\tau_{AW_d} \subseteq \tau_V$ y $\tau_{H_d} \subseteq \tau_V$.

Aunque τ_V no coincide con ninguna de las topologías τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d} y τ_{H_d} en $\mathrm{CL}(X)$, o incluso en $\mathrm{Conv}(X)$ (Ejemplo 3.5.1), en la siguiente proposición veremos que τ_V y τ_{H_d} sí coinciden en el espacio $\mathrm{K}(X)$.

Proposición 3.5.2. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. La topología de Vietoris y la topología de la métrica de Hausdorff coinciden en* $\mathrm{K}(X)$*.*

Demostración. Sean $A \in \mathrm{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Como A es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i).$$

Entonces, A pertenece a $\langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_n)\rangle$, que es un abierto básico de la topología de Vietoris. Además, si $B \in \langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_n)\rangle \cap \mathrm{K}(X)$, entonces

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i) \text{ y } B \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i) \neq \emptyset \text{ para cada } i = 1 \ldots, n.$$

Por lo tanto $B \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{4}}(A)$ y, como A está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i)$, también $A \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(B)$. Esto implica que $H_d(A,B) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ por el Lema 2.3.3, y entonces

$$A \in \langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_n)\rangle \cap \mathrm{K}(X) \subseteq \{C \in \mathrm{K}(X) \mid H_d(A,C) < \varepsilon\}.$$

De esto concluimos que en $\mathrm{K}(X)$ la topología de la métrica de Hausdorff está contenida en la topología de Vietoris.

Ahora, sean V un subconjunto abierto de X y $D \in V^- \cap \mathrm{K}(X)$. Entonces existen $y \in D \cap V$ y $\delta > 0$ tal que la bola $B_\delta(y)$ está contenida en V. Así, si $E \in \mathrm{K}(X)$ cumple que $D \subseteq N_\delta(E)$, entonces $E \cap B_\delta(y) \neq \emptyset$. Esto implica que

$$\{C \in \mathrm{K}(X) \mid H_d(D,C) < \delta\} \subseteq V^- \cap \mathrm{K}(X),$$

y por lo tanto $V^- \cap \mathrm{K}(X)$ es abierto en $\mathrm{K}_{H_d}(X)$.

Por otra parte, sea $F \in V^+ \cap \mathrm{K}(X)$. Entonces $F \subseteq V$, y como F es compacto y V es abierto en X, existe $r > 0$ tal que $B_r(z)$ está contenida en V para cada $z \in F$. Así, si $G \in \mathrm{K}(X)$ cumple que $G \subseteq N_r(F)$, entonces $G \subseteq V$. Por lo tanto,

$$\{C \in \mathrm{K}(X) \mid H_d(F,C) < r\} \subseteq V^+ \cap \mathrm{K}(X)$$

y $V^+ \cap \mathrm{K}(X)$ es abierto en $\mathrm{K}_{H_d}(X)$. Entonces, los subbásicos de $\mathrm{K}_V(X)$ son abiertos con respecto a la topología de la métrica de Hausdorff. Así, podemos concluir que estas topologías coinciden en $\mathrm{K}(X)$. □

Si un espacio métrico X es compacto, entonces $\mathrm{CL}(X) = \mathrm{K}(X)$, y por lo tanto τ_V y τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$. Así, por la Proposición 3.4.3 se tiene que todas las topologías τ_V, τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d} y τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$ cuando X es compacto.

Conversamente, la coincidencia de τ_V con cualquiera de las topologías τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d} y τ_{H_d} implica que X es un espacio compacto, como veremos en las siguientes proposiciones.

Proposición 3.5.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. La topología de la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris coinciden en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Supongamos que $\tau_{H_d} = \tau_V$. Primero demostraremos que el espacio X es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\tau_{H_d} \subseteq \tau_V$, la bola abierta

$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid H_d(X, A) < \varepsilon\}$ es abierta con respecto a τ_V, y por lo tanto existen $V_1, \ldots, V_n$ abiertos en X tales que

$$X \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subseteq \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid H_d(X, A) < \varepsilon\}.$$

Sea $x_i \in V_i$ para cada $i \in 1, \ldots, n$. Como $F := \{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, entonces $H_d(X, F) < \varepsilon$, y por lo tanto

$$X \subseteq N_\varepsilon(F) = \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x).$$

Así, concluimos que X es totalmente acotado.

Ahora demostraremos que X es completo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Para probar que esta sucesión converge basta demostrar que tiene una sucesión convergente. Supongamos por contradicción que (x_n) no tiene subsucesiones convergentes. Entonces el conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, y por lo tanto existen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ subsucesiones de (x_n) tales que

$$\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{x_{m_l} \mid l \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ no tienen subsucesiones convergentes, los conjuntos $B := \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ y $C := \{x_{m_l} \mid l \in \mathbb{N}\}$ son cerrados en X. Entonces, como $B \in (X \backslash C)^+$ y $\tau_V \subseteq \tau_{H_d}$, existe $r > 0$ tal que

$$\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid H_d(B, A) < r\} \subseteq (X \backslash C)^+.$$

Además, como (x_n) es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < r$ para cada $n, m \geq N$. Sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $n_i, m_j \geq N$. Entonces

$$H_d\left(B, B \cup \left\{x_{m_j}\right\}\right) < r,$$

pero, como $x_{m_j} \in C$, tenemos que $B \cup \left\{x_{m_j}\right\} \notin (X \backslash C)^+$. Esta contradicción nos permite concluir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y por lo tanto X es completo. Entonces, X es compacto. □

Proposición 3.5.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de Wijsman y la topología de Vietoris coinciden en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Supongamos que $\tau_{W_d} = \tau_V$. Como $\tau_{W_d} \subseteq \tau_{H_d}$, entonces se cumple que $\tau_V \subseteq \tau_{H_d}$. Esto implica que X es completo, como se probó en la Proposición 3.5.3.

Afirmamos que X es acotado. Supongamos que no lo es. Entonces existen $a \in X$ y una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $d(a, a_n) > n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in X$. Como $d(x, a_n) \geq n - d(a, x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $d(x, a_n) \to \infty$. Por lo tanto, la sucesión $(d(x, \{a, a_n\}))_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante y converge a $d(x, a)$. Esto pasa para cada $x \in X$, por lo que por el Lema 2.1.2 tenemos que $(\{a, a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{a\}$ en el espacio $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$. Por otra parte, como $\{a, a_n\} \notin (B_1(a))^+$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $(\{a, a_n\})$ no converge a $\{a\}$ en $\mathrm{CL}_V(X)$. Esto contradice que $\tau_{W_d} = \tau_V$. Por lo tanto, X es acotado.

Demostraremos que X es totalmente acotado. Supongamos lo contrario. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para cada $n \neq m$. Esto implica que (x_n) no tiene subsucesiones convergentes, y por lo tanto todo subconjunto de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en X. Consideremos dos casos posibles.

Caso 1: Existen $\delta > 0$ y una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de (x_n) tales que $B_\delta\left(x_{n_j}\right) = \left\{x_{n_j}\right\}$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Denotemos $z_j^1 = x_{n_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Como X es acotado, $\left(d\left(z_1^1, z_j^1\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, y por lo tanto existe una subsucesión $\left(z_j^2\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\left(z_j^1\right)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\left(d\left(z_1^1, z_j^2\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente. De la misma forma, existe una subsucesión $\left(z_j^3\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\left(z_j^2\right)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\left(d\left(z_2^2, z_j^3\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente, y podemos continuar de esta manera. Ahora, tomemos la subsucesión diagonal $\left(z_j^j\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Para facilitar la notación, denotemos $w_j = z_j^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Si $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $(w_j)_{j=m+1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(z_j^{m+1}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, y entonces se cumple que $(d(w_m, w_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $m \in \mathbb{N}$.

Sean

$$Y := \{w_{2j} \mid j \in \mathbb{N}\}, \quad Z := X \backslash Y \ \text{ y } \ Z_j := Z \cup \{w_{2j}\}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Como Y es un subconjunto de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces es cerrado en X. Además, por la hipótesis de este caso Y es abierto en X. Por lo tanto, Z y cada Z_j son también cerrados y abiertos en X.

Como $Z_j \notin Z^+$ para toda $j \in \mathbb{N}$, $(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ no converge a Z en $\mathrm{CL}_V(X)$, y por lo tanto tampoco en $\mathrm{CL}_{W_d}(X)$. Entonces, usando el Lema 2.1.2, sabemos que existe $x \in X$ tal que $(d(x, Z_j))_{j\in\mathbb{N}}$ no converge a $d(x, Z)$. Esto implica que existen $r > 0$ y $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tales que $d(x, Z) - d(x, Z_j) > r$ para toda $j \in J$. Entonces $d(x, Z_j) < d(x, Z) - r$, y por lo tanto existe $p_j \in Z_j$ tal que $d(x, p_j) < d(x, Z) - r$. Esta desigualdad implica que p_j debe ser el punto

w_{2j}, para cada $j \in J$, y también que $x \notin Z$. Entonces $x \in Y$. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $x = w_{2i}$. Así, tenemos que para cada $j \in J$

$$d(w_{2i}, w_{2j}) < d(w_{2i}, Z) - r. \tag{3.4}$$

Por otra parte, como la sucesión $(d(w_{2i}, w_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$|d(w_{2i}, w_n) - d(w_{2i}, w_m)| < \frac{r}{2} \tag{3.5}$$

para cada $n, m \geq K$. Como J es infinito, podemos elegir $s \in J$ tal que $2s \geq K$. De las desigualdades 3.4 y 3.5 inferimos que

$$d(w_{2i}, w_{2s+1}) < d(w_{2i}, w_{2s}) + \frac{r}{2} < d(w_{2i}, Z) - \frac{r}{2}.$$

Recordemos que los términos de la sucesión (x_n) son todos distintos entre sí, y por lo tanto los términos de su subsucesión (w_j) también. Esto implica que $w_{2s+1} \in Z$, y entonces tenemos que $d(w_{2i}, Z) < d(w_{2i}, Z) - \frac{r}{2}$, que es una contradicción.

Caso 2: Para toda $\delta > 0$ existe un subconjunto finito F de $\mathbb{N}$ tal que $B_\delta(x_n) \neq \{x_n\}$ si $n \in \mathbb{N}\backslash F$.

Entonces, podemos construir una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) tal que $B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x_{n_k}) \neq \{x_{n_k}\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomemos un punto $y_k \in B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x_{n_k})$ tal que $y_k \neq x_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como $(d(x_{n_k}, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0, el hecho de que (x_{n_k}) no tiene subsucesiones convergentes implica que (y_k) tampoco. Por lo tanto, el conjunto $A := \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en X. Sean $B := \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ y $B_k := B \cup \{y_k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. La elección de cada punto y_k y el hecho de que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para cada $n \neq m$ garantizan que $A \cap B = \emptyset$.

Como para cada $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(x, B_k) = d(x, y_k)$ o que $d(x, B_k) = d(x, B)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x, B) - d(x, B_k) &\leq d(x, B) - d(x, y_k) \\ &\leq d(x, x_{n_k}) - d(x, y_k) \\ &\leq d((x_{n_k}, y_k) < \frac{\varepsilon}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $(d(x, B_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $d(x, B)$ para toda $x \in X$, y entonces, usando el Lema 2.1.2, podemos concluir que $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a B en el espacio $\mathrm{CL}_{AW_d}(X)$. Sin embargo, como $B \in (X\backslash A)^+$ y $B_k \notin (X\backslash A)^+$

para toda $k \in \mathbb{N}$, (B_k) no converge a B en $\mathrm{CL}_V(X)$. Esto contradice que $\tau_{W_d} = \tau_V$.

Por lo tanto, concluimos que X es totalmente acotado, y como es completo, entonces es compacto. □

Proposición 3.5.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de Fell y la topología de Vietoris coinciden en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Supongamos que $\tau_F = \tau_V$. Como $\tau_F \subseteq \tau_{W_d} \subseteq \tau_V$, entonces $\tau_{W_d} = \tau_V$, y por lo tanto la Proposición 3.5.4 garantiza que X es compacto. □

Proposición 3.5.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. La topología de Attouch-Wets y la topología de Vietoris coinciden en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Supongamos que $\tau_{AW_d} = \tau_V$. Entonces, por la Proposición 3.5.2 tenemos que τ_{AW_d} y τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{K}(X)$, y por el Corolario 3.4.1.1 concluimos que τ_{AW_d} y τ_{H_d} también coinciden en $\mathrm{CL}(X)$. Por lo tanto $\tau_{H_d} = \tau_V$, y la Proposición 3.5.3 garantiza que X es compacto. □

Si (X, d) es un espacio métrico, denotaremos

$$\mathrm{C}(X) = \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \text{ es compacto y conexo}\}.$$

Las Proposiciones 3.4.2 y 3.5.2 implican que τ_V, τ_{AW_d} y τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{C}(X)$. Por lo tanto, por las Corolarios 3.2.1.1 y 3.3.2.1 se tiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.7. *Si $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión finita, todas las topologías τ_V, τ_F, $\tau_{W_{\|\cdot\|}}$, $\tau_{AW_{\|\cdot\|}}$ y $\tau_{H_{\|\cdot\|}}$ coinciden en* $\mathrm{C}(X)$*, y por lo tanto también en* $\mathrm{cc}(X)$*.*

Por la Proposición 2.2.15 sabemos que un espacio de Hausdorff X es compacto si y sólo si $\mathrm{CL}_F(X)$ es compacto. A continuación veremos que esto también se cumple para las otras topologías.

Proposición 3.5.8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que* $\mathrm{CL}(X)$ *tiene cualquiera de las topologías τ_V, τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d}, τ_{H_d}. Entonces X es compacto si y sólo si* $\mathrm{CL}(X)$ *es compacto.*

Demostración. Como τ_F está contenida en cualquiera de las topologías τ_V, τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d} y τ_{H_d}, si $\mathrm{CL}(X)$ es compacto entonces $\mathrm{CL}_F(X)$ es compacto, y por la Proposición 2.2.15 se tiene que X es compacto.

Por otra parte, si X es compacto, entonces τ_V, τ_F, τ_{W_d}, τ_{AW_d}, τ_{H_d} coinciden en $\mathrm{CL}(X)$, y son compactas por la Proposición 2.2.15. □

3.6. Resumen del capítulo

En esta sección resumiremos los resultados de este capítulo. Sea (X, d) un espacio métrico. Recordemos que se cumplen las contenciones

$$\tau_F \subseteq \tau_{W_d} \subseteq \tau_{AW_d} \subseteq \tau_{H_d} \ \text{ y } \ \tau_F \subseteq \tau_{W_d} \subseteq \tau_V$$

en el espacio $\mathrm{CL}(X)$.

La siguiente tabla indica condiciones necesarias y suficientes en el espacio X para que estas topologías coincidan en $\mathrm{CL}(X)$, así como los subespacios de $\mathrm{CL}(X)$ en los que sí coinciden.

Condiciones para la igualdad en CL(X)	**Subespacios en los que se cumple la igualdad**
$\tau_{W_d} = \tau_V$ si y sólo si X es compacto	
$\tau_{W_d} = \tau_F$ si y sólo si las bolas cerradas propias de X son compactas	
$\tau_{W_d} = \tau_{H_d}$ si y sólo si X es totalmente acotado	
$\tau_{W_d} = \tau_{AW_d}$ si y sólo si los subconjuntos acotados de X son totalmente acotados	
$\tau_V = \tau_F$ si y sólo si X es compacto	
$\tau_V = \tau_{H_d}$ si y sólo si X es compacto	$\tau_V = \tau_{H_d}$ en $\mathrm{K}(X)$
$\tau_V = \tau_{AW_d}$ si y sólo si X es compacto	$\tau_V = \tau_{AW_d}$ en $\mathrm{C}(X)$
$\tau_F = \tau_{H_d}$ si y sólo si X es compacto	
$\tau_F = \tau_{AW_d}$ si y sólo si las bolas cerradas propias de X son compactas y sus subconjuntos acotados son totalmente acotados	
$\tau_{H_d} = \tau_{AW_d}$ si y sólo si X es acotado	$\tau_{H_d} = \tau_{AW_d}$ en $\mathrm{CB}(X)$

Capítulo 4

Continuidad de la función inducida

Sean X y Y espacios topológicos de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Denotaremos por f^* a la *función inducida* $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$, definida por

$$f^*(A) = \overline{f(A)}. \tag{4.1}$$

Es un hecho conocido que si X y Y son espacios métricos compactos y $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{CL}(Y)$ tienen la topología de Vietoris (que en este caso coincide con las otras hipertopologías), entonces la función inducida $f^* : \mathrm{CL}_V(X) \to \mathrm{CL}_V(Y)$ es continua. También, si X y Y son espacios métricos y consideramos los espacios $\mathrm{K}(X)$ y $\mathrm{K}(Y)$ con la topología de Vietoris (que en estos espacios coincide con la topología de la métrica de Hausdorff), entonces la función $f^* : \mathrm{K}_V(X) \to \mathrm{K}_V(Y)$ es continua. (Estos dos hechos son consecuencias de [19, Teorema 5.10]).

En esta sección discutiremos el problema de cuándo la función inducida es continua, cuando los espacios $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{CL}(Y)$ tienen alguna de las topologías definidas anteriormente. Daremos una caracterización para la continuidad de $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ con la topología de Attouch-Wets, en términos de ciertas condiciones en la función original $f : X \to Y$. Además, en el caso en el que la función f es cerrada, caracterizaremos la continuidad de f^* con respecto a la topología de Fell. También demostraremos los hechos sabidos sobre la función inducida en los casos de la topologías de Vietoris y de la métrica de Hausdorff.

4.1. Continuidad de la función inducida respecto a la topología de Vietoris

El siguiente resultado fue probado por Michael en [19].

Proposición 4.1.1. *Sean X un espacio de Hausdorff, Y un espacio normal y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f^* : \mathrm{CL}_V(X) \to \mathrm{CL}_V(Y)$ es continua.*

Demostración. Sean V y W abiertos en Y. Queremos probar que $(f^*)^{-1}(V^-)$ y $(f^*)^{-1}(W^+)$ son abiertos en $\mathrm{CL}_V(X)$. Como V es abierto en Y,

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}\left(V^-\right) &= \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid \overline{f(A)} \cap V \neq \emptyset\right\} \\ &= \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid f(A) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset\right\} \\ &= f^{-1}(V)^- .\end{aligned}$$

Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es abierto en X, y por lo tanto $(f^*)^{-1}(V^-)$ es abierto en $\mathrm{CL}_V(X)$.

Por otra parte, sea $B \in (f^*)^{-1}(W^+)$. Entonces $\overline{f(B)} \subseteq W$. Como Y es un espacio normal, existe un abierto $U \subseteq Y$ tal que

$$\overline{f(B)} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}B \in f^{-1}(U)^+ &= \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \subseteq f^{-1}(U)\right\} \\ &= \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid f(A) \subseteq U\} \\ &\subseteq \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid \overline{f(A)} \subseteq W\right\} = (f^*)^{-1}\left(W^+\right).\end{aligned}$$

Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X, y por lo tanto $f^{-1}(U)^+$ es abierto en $\mathrm{CL}_V(X)$. Entonces B es un punto interior de $(f^*)^{-1}(W^+)$ en $\mathrm{CL}_V(X)$, y podemos concluir que $(f^*)^{-1}(W^+)$ es abierto en $\mathrm{CL}_V(X)$. □

4.2. Continuidad de la función inducida respecto a la topología de Fell

Sean X y Y espacios topológicos. Recordemos que una función $f : X \to Y$ es llamada *propia* si $f^{-1}(C)$ es compacto para cada $C \subseteq Y$ compacto.

Además, si X es de Hausdorff y $g : X \to Y$ es continua, cerrada y cumple que $g^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$, entonces g es propia (ver [13, Teorema 3.7.2], por ejemplo).

Proposición 4.2.1. *Sean X y Y espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua.*

1) Si f es propia y Y es localmente compacto, entonces $f^* : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua.

2) Si f es cerrada, entonces $f^* : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(Y)$ es continua si y sólo si f es propia o constante.

Demostración. 1) Sean V un subconjunto abierto de Y y C un subconjunto compacto de Y. Como $(f^*)^{-1}(V^-) = f^{-1}(V)^-$, entonces $(f^*)^{-1}(V^-)$ es abierto en $\mathrm{CL}_F(X)$.

Por otra parte, sea $A \in (f^*)^{-1}\left((Y\backslash C)^+\right)$. Entonces $\overline{f(A)} \subseteq Y\backslash C$, y por lo tanto $C \subseteq Y\backslash\overline{f(A)}$. Como Y es localmente compacto, existe un subconjunto abierto W de Y tal que $\overline{W}$ es compacto y

$$C \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq Y\backslash\overline{f(A)}.$$

Entonces $A \in f^{-1}\left(Y\backslash\overline{W}\right)^+$. Además, $f(B) \subseteq Y\backslash W$ para cada $B \in f^{-1}\left(Y\backslash\overline{W}\right)^+$, y como W es abierto en Y, entonces

$$\overline{f(B)} \subseteq Y\backslash W \subseteq Y\backslash C.$$

Por lo tanto, $f^{-1}\left(Y\backslash\overline{W}\right)^+ \subseteq (f^*)^{-1}\left((Y\backslash C)^+\right)$.

Como la función f es propia, $f^{-1}\left(Y\backslash\overline{W}\right)^+ = \left(Y\backslash f^{-1}\left(\overline{W}\right)\right)^+$ es abierto en $\mathrm{CL}_F(X)$, y así podemos concluir que $(f^*)^{-1}\left((Y\backslash C)^+\right)$ es abierto en $\mathrm{CL}_F(X)$. Entonces, f^* es continua.

2) Si f es constante, entonces f^* también es constante y por lo tanto es continua. Supongamos que f es propia. Sean V abierto en Y y $C \subseteq Y$ compacto. Tenemos que $(f^*)^{-1}(V^-) = f^{-1}(V)^-$ y, como f es cerrada,

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}\left((Y\backslash C)^+\right) &= \{A \in \mathrm{CL}(X) \mid f(A) \subseteq Y\backslash C\} \\ &= \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \subseteq X\backslash f^{-1}(C)\right\} \\ &= \left(X\backslash f^{-1}(C)\right)^+.\end{aligned}$$

Como f es continua y propia, $f^{-1}(V)$ es abierto en X y $f^{-1}(C)$ es compacto. Por lo tanto, $f^{-1}(V)^{-}$ y $(X\backslash f^{-1}(C))^{+}$ son abiertos en $\mathrm{CL}_F(X)$, y entonces f^* es continua.

Ahora supongamos que f^* es continua y que f no es constante. Como f es continua y cerrada, para probar que f es propia basta ver que $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$.

Sea $y \in Y$. Entonces $(Y\backslash\{y\})^{+}$ es abierto en $\mathrm{CL}_F(Y)$ y, ya que f^* es continua,

$$\mathcal{U} := (f^*)^{-1}\left((Y\backslash\{y\})^{+}\right) = \left\{A \in \mathrm{CL}(X) \mid A \subseteq X\backslash f^{-1}(y)\right\}$$

es abierto en $\mathrm{CL}_F(X)$. Además, como f no es constante, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq y$, y por lo tanto $\{x\} \in \mathcal{U}$. Así, existe un abierto básico $\mathcal{B}$ de $\mathrm{CL}_F(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$. Sean $V_1, \ldots, V_n$ abiertos en X y $K \subseteq X$ compacto tales que

$$\mathcal{B} = V_1^{-} \cap \ldots \cap V_n^{-} \cap (X\backslash K)^{+}.$$

Sea $p \in f^{-1}(y)$. Entonces $\{x, p\} \notin \mathcal{U}$, y esto implica que $\{x, p\} \notin \mathcal{B}$. Pero como $\{x\} \in V_i^{-}$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $\{x\} \in (X\backslash K)^{+}$, concluimos que $p \notin X\backslash K$. Por lo tanto, $f^{-1}(y) \subseteq K$. Ya que $f^{-1}(y)$ es cerrado en X y K es compacto, tenemos que $f^{-1}(y)$ es compacto. $\square$

En [28], los autores consideraron el caso de una función continua $f : X \to X$ cuando X es un espacio localmente compacto y segundo numerable, y probaron que la función inducida $f^* : \mathrm{CL}_F(X) \to \mathrm{CL}_F(X)$ es continua si f es perfecta. También dieron condiciones en f para que la continuidad de la función inducida implique que f es perfecta. La proposición anterior es una generalización de estos resultados.

4.3. Continuidad de la función inducida respecto a la topología de la métrica de Hausdorff

Para ver la continuidad de la función inducida $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ con respecto a la topología de la métrica de Hausdorff usaremos los siguientes dos lemas:

Lema 4.3.1 (Lema de Efremovic)**.** *Sean* (X,d) *un espacio métrico,* $\varepsilon > 0$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones en* X *tales que* $d(x_n, y_n) \geq \varepsilon$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces existe* $J \subseteq \mathbb{N}$ *infinito tal que* $d(x_i, y_j) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ *para cada* $i, j \in J$*.*

Demostración. Consideremos dos casos posibles.

Caso 1: Existen $K \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $x_0 \in X$ tales que $\{x_n \mid n \in K\} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)$ ó $\{y_n \mid n \in K\} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x_n \mid n \in K\} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)$. Sean $i, j \in K$. Como $x_i, x_j \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)$, entonces $d(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, por hipótesis $d(x_j, y_j) \geq \varepsilon$. Así,

$$\varepsilon \leq d(x_j, y_j) \leq d(x_j, x_i) + d(x_i, y_j) < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_i, y_j),$$

y por lo tanto $d(x_i, y_j) > \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $i, j \in K$. Entonces podemos tomar K como el conjunto J que buscamos.

Caso 2: Para cada $K \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $x \in X$ ocurre que $\{x_n \mid n \in K\} \nsubseteq B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)$ y $\{y_n \mid n \in K\} \nsubseteq B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)$.

Construyamos recursivamente una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ que cumpla que $d\left(x_{n_i}, y_{n_j}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Sea $n_1 = 1$. Entonces, por hipótesis, $d(x_{n_1}, y_{n_1}) \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{4}$. Sea $k > 1$ y supongamos que ya se construyeron $n_1, \ldots, n_{k-1}$ tales que $d\left(x_{n_i}, y_{n_j}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Por la suposición de este caso, los conjuntos

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_{n_i})\right) \quad \text{y} \quad \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_{n_i})\right)$$

son finitos. Por lo tanto, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_{n_i})$ y $y_{n_k} \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_{n_i})$. Esto y el hecho de que $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{4}$ implican que $d\left(x_{n_i}, y_{n_j}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Entonces, existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tal que $d\left(x_{n_i}, y_{n_j}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. El conjunto $J = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ cumple lo que buscamos.

□

Lema 4.3.2. *Sean* (X,d) *y* (Y,d') *espacios métricos,* $f : X \to Y$ *una función continua y* $\varepsilon > 0$*. Supongamos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones en* X *que cumplen que* $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0 *y que* $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es cerrado en* X*.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado en X. Entonces existen $p \in X$ y una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tales que (x_{n_k}) converge a p. Como $(d(x_n, y_n))$ converge a 0, la sucesión (y_{n_k}) también converge a p. Así, ya que f es continua, $(f(x_{n_k}))$ y $(f(y_{n_k}))$ convergen a $f(p)$. Pero esto contradice que $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en X. □

Sean d y d' métricas infinitas en los conjuntos X y Y, respectivamente. Al igual que en espacios métricos, diremos que una función $f : (X, d) \to (Y, d')$ es *uniformemente continua* si cumple que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Proposición 4.3.3. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) $f^* : \mathrm{CL}_{H_d}(X) \to \mathrm{CL}_{H_{d'}}(Y)$ *es continua.*

2) $f^* : \mathrm{CL}_{H_d}(X) \to \mathrm{CL}_{H_{d'}}(Y)$ *es uniformemente continua.*

3) $f : X \to Y$ *es uniformemente continua.*

Demostración. 3) $\implies$ 2). Supongamos que $f : X \to Y$ es uniformemente continua, y sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Consideremos $A, B \in \mathrm{CL}(X)$ tales que $H_d(A, B) < \delta$. Queremos ver que $H_{d'}(f^*(A), f^*(B)) < \varepsilon$ para probar que f^* es uniformemente continua.

Sea $z \in \overline{f(A)}$. Existe $a \in A$ tal que $d(z, f(a)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Además, como $H_d(A, B) < \delta$, por el Lema 2.3.3 existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, y por lo tanto $d'(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces,

$$d(z, f(b)) \leq d(z, f(a)) + d(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica que $z \in N_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(\overline{f(B)}\right)$ para cada $z \in \overline{f(A)}$, y entonces $\overline{f(A)} \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(\overline{f(B)}\right)$. Análogamente se tiene que $\overline{f(B)} \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(\overline{f(A)}\right)$, y por lo tanto, debido al Lema 2.3.3,

$$H_{d'}\left(\overline{f(A)}, \overline{f(B)}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así, concluimos que $f^* : \mathrm{CL}_{H_d}(X) \to \mathrm{CL}_{H_{d'}}(Y)$ es uniformemente continua.

2) $\implies$ *1)*. Es claro.

1) $\implies$ *3)*. Supongamos que $f : X \to Y$ no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ hay $x_n, y_n \in X$ tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ y $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Aplicando el Lema 4.3.1, podemos suponer que $d'(f(x_n), f(y_m)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

Consideremos el conjunto $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Por el Lema 4.3.2 tenemos que $A \in \mathrm{CL}(X)$. Veamos que f^* no es continua en A.

Afirmamos que para toda $\delta > 0$ existe $B \in \mathrm{CL}(X)$ tal que $H_d(A, B) < \delta$ pero $H_{d'}(f^*(A), f^*(B)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$. En efecto, sea $\delta > 0$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \delta$. Definimos el conjunto

$$B := (A \setminus \{x_m\}) \cup \{y_m\}.$$

Por el Lema 4.3.2, B también pertence a $\mathrm{CL}(X)$. Además, como $d(x_m, y_m) < \frac{1}{m}$, el Lema 2.3.3 implica que

$$H_d(A, B) \leq \frac{1}{m} < \delta.$$

Por otra parte, ya que $d'(f(x_n), f(y_m)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f(y_m) \notin N_{\frac{\varepsilon}{4}}(f(A)) = N_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(\overline{f(A)}\right).$$

Por lo tanto $\overline{f(B)}$ no está contenido en $N_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(\overline{f(A)}\right)$, y por el Lema 2.3.3 se tiene que $H_{d'}\left(\overline{f(A)}, \overline{f(B)}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces, podemos concluir que f^* no es continua. $\square$

Hitchcock probó estos resultados en [16], en el contexto de espacios uniformes.

4.4. Continuidad de la función inducida respecto a la topología de Attouch-Wets

A continuación, en las Proposiciones 4.4.1 y 4.4.2 veremos condiciones necesarias para que la función inducida $f^* : \mathrm{CL}(X) \to \mathrm{CL}(Y)$ sea continua con respecto a la topología de Attouch-Wets. Posteriormente, en la Proposición 4.4.5, caracterizaremos la continuidad de f^* precisamente con estas condiciones.

Si $f : (X, d) \to (Y, d')$ es una función entre espacios métricos y A es un subconjunto de X, se dice que f es *uniformemente continua en A* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a \in A$, $x \in X$ y $d(a, x) < \delta$ entonces $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$. Esto es más fuerte que el hecho de que la restricción $f\restriction_A$ sea uniformemente continua.

Proposición 4.4.1. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $f^* : \mathrm{CL}_{AW_d}(X) \to \mathrm{CL}_{AW_{d'}}(Y)$ es continua, entonces f es uniformemente continua en todo subconjunto A de X tal que $f(A)$ es acotado.*

Demostración. Sean x_0 y y_0 puntos fijos en los espacios X y Y, respectivamente. Supongamos que las métricas d_{AW} y d'_{AW} en $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{CL}(Y)$ están basadas en los puntos x_0 y y_0.

Sea A un subconjunto de X tal que $f(A)$ es acotado. Supongamos que f no es uniformemente continua en A. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ hay $a_n \in A$ y $x_n \in X$ tales que $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$ y $d'(f(a_n), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Aplicando el Lema 4.3.1, podemos suponer que $d'(f(a_n), f(x_m)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

Consideremos el conjunto $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Por el Lema 4.3.2 tenemos que $B \in \mathrm{CL}(X)$. Veamos que f^* no es continua en B.

Como $f(A)$ es acotado, podemos tomar $j \in \mathbb{N}$ tal que $f(A) \subseteq B_j(y_0)$. Sea $\varepsilon' = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{j}\right\}$. Afirmamos que para toda $\delta > 0$ existe $C \in \mathrm{CL}(X)$ tal que $d_{AW}(B, C) < \delta$ pero $d'_{AW}(f^*(B), f^*(C)) \geq \varepsilon'$. En efecto, sea $\delta > 0$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \delta$. Definimos el conjunto

$$C := (B \setminus \{x_m\}) \cup \{a_m\}.$$

Por el Lema 4.3.2, C también pertence a $\mathrm{CL}(X)$. Además, para cada $x \in X$ se tiene que

$$|d(x, B) - d(x, C)| \leq d(x_m, a_m) < \frac{1}{m},$$

lo que implica que

$$d_{AW}(B, C) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min\left\{ \frac{1}{k}, \sup_{x \in B_k(x_0)} |d(x, B) - d(x, C)| \right\} \right\} \leq \frac{1}{m} < \delta.$$

Por otra parte, como $d'(f(a_m), f(x_n)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $d'(f(a_m), f(B)) \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Ya que $f(a_m)$ es un elemento de $f(A) \subseteq B_j(y_0)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_j(y_0)} |d'(x, f(B)) - d'(x, f(C))| &\geq |d'(f(a_m), f(B)) - d'(f(a_m), f(C))| \\ &= d'(f(a_m), f(B)) \geq \frac{\varepsilon}{4} \geq \varepsilon'.\end{aligned}$$

Además $\frac{1}{j} \geq \varepsilon'$, y entonces

$$\begin{aligned}d'_{AW}\left(\overline{f(B)}, \overline{f(C)}\right) &\geq \text{mín}\left\{\frac{1}{j}, \sup_{x\in B_j(y_0)} \left|d'\left(x, \overline{f(B)}\right) - d'\left(x, \overline{f(C)}\right)\right|\right\} \\ &= \text{mín}\left\{\frac{1}{j}, \sup_{x\in B_j(y_0)} |d'(x, f(B)) - d'(x, f(C))|\right\} \geq \varepsilon'.\end{aligned}$$

Por lo tanto, f^* no es continua. $\square$

Proposición 4.4.2. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $f^* : \mathrm{K}_{AW_d}(X) \to \mathrm{K}_{AW_d}(Y)$ es continua, entonces $f^{-1}(B)$ es acotado para cada subconjunto acotado B de Y tal que $|B \cap f(X)| > 1$.*

Demostración. Sean x_0 y y_0 puntos fijos en los espacios X y Y, respectivamente. Supongamos que las métricas d_{AW} y d'_{AW} en $\mathrm{K}(X)$ y $\mathrm{K}(Y)$ están basadas en los puntos x_0 y y_0.

Sea B un subconjunto acotado de Y tal que $|B \cap f(X)| > 1$. Entonces existen $a, b \in f^{-1}(B)$ tales que $f(a) \neq f(b)$. Sea $r > 0$ tal que la intersección de las bolas $B_r(f(a))$ y $B_r(f(b))$ es vacía. Además, como B es acotado, podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ tal que se cumple que $B \subseteq B_M(y_0)$. Consideremos $\varepsilon = \text{mín}\left\{r, \frac{1}{M}\right\}$.

Como f^* es continua en $\{a\}$ y en $\{b\}$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $C \in \mathrm{K}_{AW_d}(X)$

$$d_{AW}(\{a\}, C) < \delta \text{ implica que } d'_{AW}(\{f(a)\}, f(C)) < \varepsilon$$

$$\text{y } d_{AW}(\{b\}, C) < \delta \text{ implica que } d'_{AW}(\{f(b)\}, f(C)) < \varepsilon.$$

Podemos suponer que $\delta \leq 1$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j+1} < \delta \leq \frac{1}{j}$. Tomemos $L \in \mathbb{N}$ tal que $a, b \in B_L(x_0)$ y sea $k = \text{máx}\{j, L\}$.

Afirmamos que $f^{-1}(B) \subseteq B_{3k}(x_0)$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $p \in f^{-1}(B)$ que cumple que $d(x_0, p) \geq 3k$. Así, si $x \in B_k(x_0)$, se tiene que

$$3k \leq d(x_0, p) \leq d(x_0, x) + d(x, p) < k + d(x, p).$$

Esto implica que $d(x, p) > 2k$. Por otra parte, como a y b son elementos de $B_L(x_0) \subseteq B_k(x_0)$, entonces se tiene que $d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) < 2k$ y $d(x, b) \leq d(x, x_0) + d(x_0, b) < 2k$. Así, para cada $x \in B_k(x_0)$ las distancias de x a a y a b son menores que la distancia de x a p. Por lo tanto,

$$\sup_{x \in B_k(x_0)} |d(x, \{a\}) - d(x, \{a, p\})| = 0 = \sup_{x \in B_k(x_0)} |d(x, \{b\}) - d(x, \{b, p\})|.$$

Como $j \leq k$ y $\frac{1}{j+1} < \delta \leq \frac{1}{j}$, lo anterior implica, por el Lema 2.4.1, que $d_{AW}(\{a\}, \{a, p\}) < \delta$ y $d_{AW}(\{b\}, \{b, p\}) < \delta$. Entonces,

$$d'_{AW}(\{f(a)\}, \{f(a), f(p)\}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d'_{AW}(\{f(b)\}, \{f(b), f(p)\}) < \varepsilon.$$

Así, tenemos que

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{M}, \sup_{x \in B_M(y_0)} |d'(x, \{f(a)\}) - d'(x, \{f(a), f(p)\})|\right\} < \varepsilon,$$

y como $\frac{1}{M} \geq \varepsilon$, entonces

$$|d'(x, \{f(a)\}) - d'(x, \{f(a), f(p)\})| < \varepsilon \text{ para cada } x \in B_M(y_0).$$

En particular, ya que $p \in f^{-1}(B)$, entonces $f(p) \in B \subseteq B_M(y_0)$ y

$$d'(f(p), f(a)) = |d'(f(p), \{f(a)\}) - d'(f(p), \{f(a), f(p)\})| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, como $\varepsilon \leq r$, tenemos que $f(p)$ pertenece a $B_r(f(a))$, y análogamente que $f(p)$ pertenece a $B_r(f(b))$. Esto contradice que la intersección de las bolas $B_r(f(a))$ y $B_r(f(b))$ es vacía. Por lo tanto, concluimos que $f^{-1}(B) \subseteq B_{3k}(x_0)$ y que entonces $f^{-1}(B)$ es acotado. □

Ejemplo 4.4.3. *Para cada espacio métrico (X, d) no acotado existe una función 1-Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$ tal que la función inducida $f^* : \mathrm{K}_{AW_d}(X) \to \mathrm{K}_{AW_d}(\mathbb{R})$ no es continua.*

Demostración. Sea x_0 un punto fijo en X. Supongamos que las métricas d_{AW} y d'_{AW} en $\mathrm{K}(X)$ y $\mathrm{K}(\mathbb{R})$ están basadas en los puntos x_0 y 0, respectivamente (donde d' es la métrica usual de $\mathbb{R}$).

Consideremos la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan^{-1}(d(x_0, x))$. Esta función es 1-Lipschitz, pues para cada $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\tan^{-1}(d(x_0,x)) - \tan^{-1}(d(x_0,y))\right| \\ &\leq |d(x_0,x) - d(x_0,y)| \leq d(x,y). \end{aligned}$$

Por otra parte, como $f^{-1}\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = X$ no es acotado, la Proposición 4.4.2 implica que $f^* : \mathrm{K}_{AW_d}(X) \to \mathrm{K}_{AW_{d'}}(\mathbb{R})$ no es continua. □

Notemos que aunque la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan^{-1}(x)$ es un encaje abierto Lipschitz, estas buenas propiedades no garantizan la continuidad de la función $f^* : \mathrm{K}_{AW_d}(X) \to \mathrm{K}_{AW_{d'}}(\mathbb{R})$.

Finalmente, antes de caracterizar la continuidad de la función inducida con respecto a la topología de Attouch-Wets probaremos primero el siguiente lema.

Lema 4.4.4. *Sean (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$, $j > 0$ y C un subconjunto no vacío de X. Si $L > 2j + d(x_0, C)$, entonces*

$$d(x, C) = d(x, C \cap B_L(x_0)) \ \ \text{para cada } x \in B_j(x_0).$$

Demostración. Sea $x \in B_j(x_0)$. Basta ver que existe $z \in C \cap B_L(x_0)$ tal que $d(x,z) \leq d(x,y)$ para toda $y \in C \backslash B_L(x_0)$.

Como para cada $w \in C$

$$d(x, C) \leq d(x, w) \leq d(x, x_0) + d(x_0, w),$$

entonces

$$d(x, C) \leq d(x, x_0) + d(x_0, C) < j + d(x_0, C).$$

Por lo tanto, existe $z \in C$ tal que

$$d(x, z) < j + d(x_0, C), \tag{4.2}$$

y entonces, por la hipótesis sobre L,

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, x) + d(x, z) < j + j + d(x_0, C) < L.$$

Esto implica que z pertenece a $C \cap B_L(x_0)$. Además, si $y \in C \backslash B_L(x_0)$, entonces $d(x_0, y) \geq L$ y por lo tanto, por la desigualdad 4.2,

$$d(x,y) \geq d(x_0,y) - d(x_0,x) > L - j > j + d(x_0,C) > d(x,z).$$

Entonces $d(x,z) < d(x,y)$, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 4.4.5. *Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f^* : \mathrm{CL}_{AW_d}(X) \to \mathrm{CL}_{AW_{d'}}(Y)$ es continua si y sólo si se cumple lo siguiente:*

1) La función f es uniformemente continua en todo subconjunto A de X tal que $f(A)$ es acotado.

2) El conjunto $f^{-1}(B)$ es acotado para cada subconjunto acotado B de Y tal que $|B \cap f(X)| > 1$.

Demostración. Sean x_0 y y_0 puntos fijos en los espacios X y Y, respectivamente. Supongamos que las métricas d_{AW} y d'_{AW} en $\mathrm{CL}(X)$ y $\mathrm{CL}(Y)$ están basadas en los puntos x_0 y y_0.

Si la función $f^* : \mathrm{CL}_{AW_d}(X) \to \mathrm{CL}_{AW_{d'}}(Y)$ es continua, entonces la restricción $f^* : \mathrm{K}_{AW_d}(X) \to \mathrm{K}_{AW_{d'}}(Y)$ también es continua, y por las Proposiciones 4.4.1 y 4.4.2 se tiene que se cumplen *1)* y *2)*.

Inversamente, supongamos que se cumplen las condiciones *1)* y *2)*. Si f es constante, f^* también es constante y por lo tanto es continua. Entonces, supongamos que f no es constante. Sean $A \in \mathrm{CL}(X)$ y $0 < \varepsilon \leq 1$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{j}$. Como f no es constante, existe $L \in \mathbb{N}$ que cumple que $|B_L(y_0) \cap f(X)| > 1$, y podemos suponer que

$$L > 2j + d'(y_0, f(A)) + \varepsilon. \tag{4.3}$$

Como se cumple *2)*, entonces $f^{-1}(B_L(y_0))$ es acotado, y por lo tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(B_L(y_0))$ está contenido en la bola $B_M(x_0)$.

Además, como se cumple *1)*, f es uniformemente continua en $f^{-1}(B_L(y_0))$, y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que para cada $p \in f^{-1}(B_L(y_0))$ y $x \in X$ que cumplen que $d(p,x) < \delta$ se tiene que $d'(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Podemos suponer que $\delta \leq \frac{1}{M}$.

Sea $B \in \mathrm{CL}(X)$ tal que $d_{AW}(A,B) < \delta$. Como $\delta \leq \frac{1}{M}$, debido al Lema 2.4.1 se tiene que

$$\sup_{x \in B_M(x_0)} |d(x,A) - d(x,B)| < \delta. \tag{4.4}$$

Queremos ver que $d'_{AW}(f^*(A), f^*(B)) < \varepsilon$ para probar que f^* es continua en A.

Aplicando el Lema 4.4.4 al conjunto $f(A)$ obtenemos lo siguiente.

Afirmación 1. *Se cumple que* $d'(x, f(A)) = d'(x, f(A) \cap B_L(y_0))$ *para toda* $x \in B_j(y_0)$.

Afirmación 2. *Se cumple que* $d'(y_0, f(B)) \leq d'(y_0, f(A)) + \varepsilon$.

Demostración. Consideremos $y \in f(A) \cap B_L(y_0)$ y tomemos $z \in A$ tal que $f(z) = y$. Como z es un elemento de $f^{-1}(B_L(y_0)) \subseteq B_M(x_0)$, por la desigualdad 4.4 se tiene que

$$d(z, B) = |d(z, A) - d(z, B)| < \delta.$$

Entonces, existe $b \in B$ tal que $d(z, b) < \delta$ y, como $z \in f^{-1}(B_L(y_0))$, esto implica que $d'(f(z), f(b)) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d'(y_0, f(B)) \leq d'(y_0, f(b)) &\leq d'(y_0, y) + d'(y, f(b)) \\ &= d'(y_0, y) + d'(f(z), f(b)) \\ &< d'(y_0, y) + \varepsilon \end{aligned}$$

y, como esto se cumple para cada $y \in f(A) \cap B_L(y_0)$, entonces

$$d'(y_0, f(B)) \leq d'(y_0, f(A) \cap B_L(y_0)) + \varepsilon.$$

Por la Afirmación 1, esto es lo que se quería demostrar. $\square$

De la Afirmación 2 inferimos que $d'(y_0, f(B)) + 2j \leq d'(y_0, f(A)) + \varepsilon + 2j$. Entonces, usando el Lema 4.4.4 y la desigualdad 4.3 obtenemos lo siguiente.

Afirmación 3. *Se cumple que* $d'(x, f(B)) = d'(x, f(B) \cap B_L(y_0))$ *para toda* $x \in B_j(y_0)$.

Ahora, consideremos $y \in f(B) \cap B_L(y_0)$. Sea $z \in B$ tal que $f(z) = y$. Como z es un elemento de $f^{-1}(B_L(y_0)) \subseteq B_M(x_0)$, por la desigualdad 4.4 se tiene que

$$d(z, A) = |d(z, A) - d(z, B)| < \delta.$$

Entonces, existe $a \in A$ tal que $d(z, a) < \delta$ y, como $z \in f^{-1}(B_L(y_0))$, esto implica que $d'(f(z), f(a)) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$d'(y, f(A)) = d'(f(z), f(A)) \leq d'(f(z), f(a)) < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Sea $x \in B_j(y_0)$. Como para cada $w \in f(A)$ se tiene que

$$d'(x, f(A)) \leq d'(x, w) \leq d'(x, y) + d'(y, w),$$

entonces $d'(x, f(A)) \leq d'(x, y) + d'(y, f(A))$. Por 4.5, esto implica que $d'(x, f(A)) < d'(x, y) + \varepsilon$, y como esto se cumple para cada $y \in f(B) \cap B_L(y_0)$, entonces

$$d'(x, f(A)) \leq d'(x, f(B) \cap B_L(y_0)) + \varepsilon.$$

Así, por la Afirmación 3 se tiene que $d'(x, f(A)) - d'(x, f(B)) \leq \varepsilon$. Además, debido a la Afirmación 1 se tiene de manera análoga a lo anterior que $d'(x, f(B)) - d'(x, f(A)) \leq \varepsilon$. Entonces $|d'(x, f(A)) - d'(x, f(B))| \leq \varepsilon$, y como esto pasa para toda $x \in B_j(y_0)$,

$$\sup_{x \in B_j(y_0)} \left| d'\left(x, \overline{f(A)}\right) - d'\left(x, \overline{f(B)}\right) \right| =$$

$$\sup_{x \in B_j(y_0)} |d'(x, f(A)) - d'(x, f(B))| \leq \varepsilon.$$

Como $\frac{1}{j+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{j}$, lo anterior implica que $d'_{AW}\left(\overline{f(A)}, \overline{f(B)}\right) \leq \varepsilon$, por el Lema 2.4.1. Con esto podemos concluir que f^* es continua en cada $A \in \mathrm{CL}(X)$, y por lo tanto es continua. $\square$

Finalmente notemos que para garantizar la continuidad de la función inducida en el caso de la topología de Wijsman, sólo es necesario verificar que la preimagen de los conjuntos de la forma $\{A \in \mathrm{CL}(Y) \mid d'_x(A) > a\}$, con $x \in Y$ y $a > 0$, es abierta en $\mathrm{CL}(X)$. Esto es porque sabemos que la preimagen de cada conjunto $\{A \in \mathrm{CL}(Y) \mid d'_x(A) < a\} = B_a(x)^-$ es de la forma V^-, con V abierto en X, y estos conjuntos están contenidos en la topología de Wijsman.

Terminamos este capítulo con la siguiente pregunta.

Pregunta 4.4.6. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. ¿Bajo qué condiciones la función inducida $f^* : \mathrm{CL}_{W_d}(X) \to \mathrm{CL}_{W_{d'}}(Y)$ resulta continua?*

Referencias

[1] H. Attouch y R. Wets. *Quantitative stability of variational systems: I. the epigraphical distance*. Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1991), 695-730.

[2] H. Attouch y R. Wets. *Quantitative stability of variational systems: II. A framework for nonlinear conditioning*. SIAM J. Optimization 3 (1993), 359-381.

[3] T. Banakh, M. Kurihara, K. Sakai. *Hyperspaces of normed linear spaces with the Attouch-Wets topology*. Set-Valued Anal. 11 (2003), 21-36.

[4] J. Banks. *Chaos for induced hyperspace maps*. Chaos, Solitons and Fractals 25 (2005), 681-685.

[5] G. Beer. *More on convergence of continuous functions and topological convergence of sets*. Can. Math. Bull. 28 (1985), 52-59.

[6] G. Beer. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[7] G. Beer, A. Lechicki, S. Levi, S. Naimpally. *Distance functionals and suprema of hyperspace topologies*. Ann. Mat. Pura Appl. 162 (1992), 367-381.

[8] G. Beer y R. Lucchetti. *Convex optimization and the epi-distance topology*. Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1991), 795-813.

[9] C. Bessaga y A. Pelczynski. *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*. Polish Scientific Publishers, Varsovia, 1975.

[10] C. Castaing y M. Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[11] D. W. Curtis. *Hyperspaces of noncompact metric spaces*. Compositio Math. 40 (1980), 139-152.

[12] D. W. Curtis y R. M. Schori. 2^X *and* $C(X)$ *are homeomorphic to the Hilbert cube*. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927-931.

[13] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[14] J. M. G. Fell. *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact hon-Hausdorff space*. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 472-476.

[15] F. Hausdorff. *Mengenlehre*. Springer, Berlin, 1927.

[16] G. Hitchcock. *Topologies on uniform hyperspaces*. Quaestiones Mathematicae 29 (2006), 299-311.

[17] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*. Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.

[18] W. Kubis, K. Sakai, M. Yaguchi. *Hyperspaces of separable Banach spaces with the Wijsman topology*. Topology Appl. 148 (2005), 7-32.

[19] E. Michael. *Topologies on spaces of subsets*. Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

[20] U. Mosco. *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*. Adv. in Math. 3 (1969), 510-585.

[21] S. B. Nadler. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, M. Dekker, 1978.

[22] D. Pompeiu. *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 7 (1905), 265-315.

[23] K. Sakai y M. Yaguchi. *The AR-property of the spaces of closed convex sets*. Colloquium Mathematicum 106, No. 1 (2006), 15-24.

[24] K. Sakai y Z. Yang. *Hyperspaces of non-compact metrizable spaces which are homeomorphic to the Hilbert cube*. Topology Appl. 127 (2002), 331-342.

[25] K. Sakai y Z. Yang. *The spaces of closed convex sets in euclidean spaces with the Fell topology*. Bull. Pol. Acad. Sci. 55 (2007), 139-143.

[26] L. Vietoris. *Stetige Mengen*. Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), 173-204.

[27] L. Vietoris. *Bereiche zweiter Ordnung*. Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), 258-280.

[28] Y. Wang, G. Wei, W. H. Campbell, S. Bourquin. *A framework of induced hyperspace dynamical systems equipped with the hit-or-miss topology*. Chaos, Solitons and Fractals 41 (2009), 1708-1717.

[29] R. Wijsman. *Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, II*. Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 32-45.