



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Materia oscura dinámica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Jesús Antonio Cortés Asencio

TUTOR

Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Cortés

Asencio

Jesús Antonio

5556581111

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

417106889

2. Datos del tutor

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dr

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

4. Datos de sinodal 2

Dr

Eduardo

Peinado

Rodríguez

5. Datos del sinodal 3

Dr

Juan Carlos

Hidalgo

Cuéllar

6. Datos del sinodal 4

Dr

Sébastien Mickaël Marc

Fromenteau

7. Datos del trabajo escrito

Materia oscura dinámica

100 pp

2021

*Dedicada a mi madre, mi padre y mi hermana.
Los amo*

Quiero agradecer a todas y todos mis profesores de la Facultad de Ciencias, quienes me enseñaron y guiaron en este maravilloso mundo de la física. Especialmente, quiero agradecer a mi tutor, el Dr. Saúl Ramos, por su gran apoyo en mis primeros pasos en el mundo de la investigación. Finalmente, quiero agradecer a Viani por tantas ayudas y tantos aportes, a lo largo de toda mi carrera. Además, por tanto cariño y amor.

Índice general

1	Introducción y Motivación	1
2	Cosmología estándar	5
2.1	Dinámica del espacio-tiempo	5
2.1.1	Ecuación de Friedmann en un universo plano	5
2.1.2	Ecuación de continuidad	8
2.2	Evolución de un universo plano	9
2.2.1	Soluciones simples	9
2.3	Componentes de nuestro Universo	10
2.3.1	Densidad crítica	10
2.3.2	Modelo Λ CDM	11
2.4	Materia oscura (primer acercamiento)	12
2.4.1	Evidencias astrofísicas	12
3	Teoría cuántica del campo escalar	19
3.1	Teoría clásica de campos	19
3.1.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange	19
3.1.2	El Hamiltoniano	20
3.1.3	Teorema de Noether	21
3.2	Cuantización canónica	22
3.2.1	El campo escalar real	23
3.2.2	Partículas	24
3.2.3	Esquema de Heisenberg y propagadores	25
3.3	Teoría de interacción y diagramas de Feynman	26
3.3.1	Marco de interacción	26
3.3.2	Teorema de Wick	27
3.3.3	Diagramas de Feynman	29
3.3.4	Sección eficaz y tasa de decaimiento	30

4	Materia oscura	33
4.1	Evolución cosmológica de partículas	33
4.1.1	Ecuación de Boltzmann y grados de libertad	33
4.1.2	Condición de desacoplamiento de reliquias	36
4.2	Paradigma WIMP	37
4.2.1	Milagro WIMP	37
4.2.2	Detección directa y actual estatus de los modelos WIMPs	40
4.3	Paradigma ALP	41
4.3.1	El axión de QCD	42
4.3.2	Producción por desalineación	43
5	Materia oscura dinámica	45
5.1	Aspectos teóricos generales	45
5.1.1	Dinámica de los campos ϕ_i de materia oscura	46
5.1.2	La ecuación de estado de la materia oscura dinámica	49
5.2	Materia oscura dinámica a partir de 5D	54
5.2.1	Configuración general	54
5.2.2	Abundancias cosmológicas	60
5.2.3	Tasas de decaimiento	64
5.3	Abundancias y vidas medias de materia oscura dinámica	70
6	Conclusiones y observaciones finales	75
A	Detalles de cálculos	81
A.1	Obtención de la matriz de masa de Kaluza-Klein	81
A.2	Cálculo de la tasas de decaimiento	83
B	Orbifolds	85
B.1	Conceptos importantes	85
B.2	Definición formal de un orbifold	86
C	El oscilador armónico amortiguado	87
	Bibliografía	91

Capítulo 1

Introducción y Motivación

Leucipo de Mileto y Demócrito de Abdera, atomistas griegos, estaban convencidos de que toda la materia estaba constituida por bloques fundamentales e indivisibles, llamados átomos. Ellos conjeturaban que estos átomos eran infinitos en número, tal y como lo era el espacio que los contenía. Tiempo después, Epicuro sugirió en sus *Cartas a Heródoto* la existencia de un número infinito de otros mundos: “y es que además los mundos son infinitos en número, de los cuales algunos son tanto similares a éste, como disímiles”¹. Otros especulaban la existencia de materia inobservable que podría encontrarse dentro de nuestro Universo. Los Pitagóricos, por ejemplo, conjeturaron la existencia de *Antichthon*, la contra-tierra, que giraría del lado opuesto del “aro de fuego”, respecto a nuestro propio planeta.

A través de la historia, los primeros físicos, los filósofos naturales, especularon sobre la naturaleza de la materia y contemplaron la posibilidad de muchos tipos de ella, imperceptibles a nuestros sentidos. A pesar de que muchos de estos pensamientos carecen de rigor científico, nos revelan el deseo longevo de nuestra especie de descifrar la naturaleza de las componentes que conforman nuestro Universo.

Una de estas componentes se sitúa en la unión entre la física de partículas, astrofísica y cosmología, cuya identidad sigue siendo uno de los misterios de la física contemporánea, la materia oscura. Desde mediciones en las curvas de rotación de galaxia [1, 2] hasta las observaciones del efecto de lente gravitacional en las colisiones de cúmulos de galaxias [3], existe una vasta evidencia apuntando a que la mayoría de la materia en el Universo no interactúa fuertemente o electromagnéticamente. Dicha materia es, por lo tanto, eléctricamente neutra y presuntamente no relativista. Más allá de estas propiedades, muy poco es conocido sobre la naturaleza de la materia oscura.

La opción quizá más exitosa para explicar este fenómeno es considerar que la materia oscura está compuesta por partículas elementales aún no descubiertas. Muchos de estos modelos teóricos para física más allá del Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés) corresponden a teorías de campos cuánticos que incluyen partículas adicionales, con diferentes propuestas para las interacciones entre

¹Epicuro, *Epicuro: Epístola a Heródoto. Introducción, traducción y notas*, 305 a.C.

los campos responsables de la materia oscura y los de la materia observada. Los modelos de este tipo se pueden clasificar en i) modelos con partículas masivas que interactúan débilmente (WIMPs) [4] y ii) modelos con axiones pseudoescalares (ALPs) [5]. Las WIMPs recibieron mayor atención debido al llamado milagro WIMP: bajo ciertas hipótesis de producción térmica en el Universo temprano y una interacción mediada por la fuerza gravitacional y alguna otra fuerza tan o más débil que la fuerza débil, se obtiene con gran precisión la densidad de energía de la materia oscura observada actualmente. Sin embargo, en los últimos años los modelos con ALPs han cobrado mayor importancia debido a la ausencia de evidencia de WIMPs en experimentos de detección directa de materia oscura, tales como PandaX [6], LUX [7] y Xenon1T [8].

La característica en común de estos modelos recae en la existencia de una partícula de materia oscura singular, la cual necesita ser absolutamente estable o, al menos, poseer una vida media que iguale o supere la edad del Universo al día de hoy. Recientemente, un esquema alterno para entender el fenómeno de la materia oscura ha sido propuesto. En este nuevo paradigma llamado *materia oscura dinámica* [9], el sector oscuro comprende no solo una especie de partícula, sino un vasto ensemble de diferentes campos escalares, donde cada uno contribuye únicamente una fracción de la densidad de energía total de materia oscura. Ninguno de estos campos se supone absolutamente estable; más bien, se balancean las tasas de decaimiento con las abundancias cosmológicas de tal forma que es posible satisfacer las constricciones fenomenológicas relacionadas con los efectos de decaimiento de materia oscura.

Aunque en general pareciera difícil tener un conjunto de partículas que no solo sean candidatas a materia oscura, sino que sus abundancias y decaimientos estén balanceados en esta manera, resulta que teorías con dimensiones espaciales extra proveen naturalmente dichos estados. Si, por ejemplo, las dimensiones adicionales adoptaran la forma de alguna variedad diferencial y, además, las fuerzas del SM estuvieran restringidas a alguna *brana* (membrana n -dimensional, con $n > 3$ que soporta campos de norma y materia), se sigue inmediatamente que cualquier campo que se propague en el llamado *bulto* (el espacio fuera de la brana) debe transformarse trivialmente bajo el grupo de norma del SM. Como consecuencia, dichos campos del bulto pueden a lo más tener interacciones gravitacionales con la materia en la brana. Entonces, para un observador en la brana, estos campos podrían ser responsables de las interacciones asociadas a la materia oscura. En esta categoría, se incluyen ciertos de campos escalares complejos, conocidos como *módulos*, que describen el tamaño y la forma de las dimensiones extra. Como veremos en esta tesis, incluso en la ausencia de branas, la posible existencia de dimensiones extra conduce a un gran número de campos escalares que pueden jugar el papel de materia oscura.

Es importante recalcar que la estabilidad de las componentes de materia oscura requiere un escenario intrínsecamente dinámico. Esto es, los diferentes campos de materia oscura experimentan decaimientos a través de su evolución cosmológica. En estos casos, debido a que el escenario posee múltiples componentes, su fenomenología no puede ser caracterizada en términos de una sola sección eficaz. Esto puede llevar a una nueva fenomenología en la física de materia oscura, cambiando la forma en que realizamos experimentos para su observación en colisionadores de partículas y en otros experimentos.

Organización del trabajo

A continuación, damos un breve resumen del contenido de los capítulos de la presente tesis. Esto con la finalidad de guiar al lector no experimentado y de proporcionar datos que permitan al lector experto conocer dónde se encuentran los puntos fundamentales de nuestro estudio.

Cosmología estándar

Basados en el principio cosmológico, en la sección 2.1 se propone una solución a las ecuaciones de campo de Einstein usando la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Se obtiene la ecuación de Friedmann, la ecuación de estado y la ecuación de continuidad para un universo plano. Finalmente, se introduce la colección de parámetros que conforma el modelo Λ CDM en la sección 2.3 y se brinda un primer acercamiento a la materia oscura bajo este contexto en la sección 2.4. Principalmente se discuten algunas pruebas de su existencia.

Teoría cuántica del campo escalar

El modelo de materia oscura dinámica considera que el sector oscuro comprende un vasto conjunto de diferentes campos escalares. Por lo tanto, es necesario obtener las expresiones asociadas a procesos de decaimiento de nuestros campos de materia oscura en partículas del SM. Para esto, es necesario dar un repaso exhaustivo de la teoría cuántica del campo escalar. La teoría cuántica de campos nace de la peculiar confluencia de la relatividad especial y la mecánica cuántica; con esta teoría es posible explicar fenómenos que ocurren a distancias muy cortas y a escalas de energía muy altas. En el capítulo 3, se brinda un repaso de la cuantización del campo escalar de Klein-Gordon. En la sección final 3.3, se presenta la teoría de interacción y se derivan las expresiones de tasa de decaimiento y sección eficaz. Estas últimas siendo necesarias en el desarrollo de capítulos posteriores.

Materia oscura

Una vez discutidas las herramientas matemáticas de la teoría cuántica de campos, se exploran dos paradigmas actuales que buscan explicar el fenómeno de la materia oscura: las WIMPs y las ALPs. Primero, en la sección 4.1, se introduce la evolución cosmológica de “reliquias” en el Universo, estudiando la ecuación de Boltzmann y la condición de desacoplamiento de reliquias. Luego, en la sección 4.2, se introduce el paradigma WIMP y se repasa el actual estatus de estos modelos en experimentos actuales. Finalmente en la sección 4.3, se explora el paradigma ALP, con un énfasis importante en su mecanismo de producción: la producción por desalineación. La finalidad de esta discusión es su aplicación en la producción de estados de materia oscura en el modelo propuesto de materia oscura dinámica.

Materia oscura dinámica

El capítulo 5 representa la parte esencial del presente trabajo. Primero, en la sección 5.1, basado enteramente en el modelo propuesto por Keith Dienes en [9], se presentan los aspectos teóricos generales del modelo de materia oscura dinámica. Esto es, se propone que la materia oscura está compuesta por un vasto conjunto de partículas con diferentes masas, vidas medias y abundancias cosmológicas. Se caracteriza la configuración con tres cantidades específicas: la abundancia total Ω_{tot} , la medida de qué tanto nos alejamos de un enfoque tradicional η y un parámetro efectivo de ecuación de estado w_{eff} . Además, se desarrolla la evolución temporal de estas cantidades en la época cosmológica de dominio de materia. Una vez establecido este nuevo panorama, se desarrolla en la sección 5.2 un modelo en dimensiones extra; específicamente, se propone a la existencia de un campo 5D Φ propagándose en el bulto de dimensiones extra. La compactificación en el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 de este campo nos lleva a la aparición de un número infinito de campos escalares 4D en el espacio usual de Minkowski. Entonces, si se supone que estos campos adquirieron abundancias cosmológicas distintas a cero por un mecanismo de desalineación y se calcula lo más grande que puede ser una tasa de decaimiento para un acoplamiento genérico de estos campos con partículas del SM, se concluye que estas cantidades se balancean de tal forma que se cumple la relación $\Omega_i \Gamma_i \sim \text{constante}$. Esto nos permite concluir que este modelo es adecuado como una posible descripción de materia oscura dinámica.

Conclusiones y apéndices

En el capítulo 6, se ofrece una recapitulación de los resultados obtenidos y, además, se exponen los posibles planes a futuro para la investigación. En el primer apéndice A se encuentran los detalles de los cálculos más relevantes realizados en el capítulo 5. En el segundo apéndice B se ofrece una definición más formal de un orbifold, así como las condiciones de frontera que se pueden aplicar al compactificar un campo escalar en el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 . Por último, en el tercer apéndice C se encuentra un repaso del oscilador armónico amortiguado, el cual sirve como un buen análogo a la ecuación dinámica de un campo escalar en un universo homogéneo, isotrópico y en expansión.

Notación y convenciones

En esta tesis se trabaja con unidades naturales, esto es, tomando $c = \hbar = G = 1$. Además, para considerar un vector en 3 dimensiones se utiliza la notación \mathbf{x} , mientras que para considerar un vector en 4 dimensiones se usa x .

Los índices griegos $\mu, \nu, \rho \dots$ representan índices espacio-temporales con valores 0, 1, 2, 3, mientras que los índices latinos i, j, k toman los valores 1, 2, 3.

Finalmente, se utiliza la convención de sumas de Einstein. Cuando un índice es repetido en un monomio, se debe interpretar como la suma de la expresión en el monomio con todos los valores que puede adquirir el índice. Por ejemplo

$$x^\mu p_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 = x^0 p_0 + x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3.$$

Capítulo 2

Cosmología estándar

Nuestro objetivo en esta sección será plantear las ecuaciones dinámicas que gobiernan al espacio-tiempo y su evolución en un universo plano, usando la teoría de la Relatividad General. La discusión que se muestra a continuación está basada fuertemente en la sección 3.5 de [10] y en las primeras secciones de [11] y [12].

La cosmología moderna supone, como fundamento, el llamado *principio cosmológico*: a grandes escalas, el Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico. Aquí, *homogeneidad* es la propiedad de que el Universo parece idéntico en cualquier punto del espacio, mientras que *isotropía* se refiere a que las observaciones a grandes escalas son idénticas en toda dirección.

Desde los tiempos de Copérnico, sabemos que, a pesar de vivir en un lugar especial, no nos encontramos en el centro de todo. El principio cosmológico nos permite retener nuestro sentido de importancia invocando el argumento: si no estamos al centro del todo, entonces seguramente nadie más lo está. Sin embargo, esta no es la razón para tomarlo como cierto. En los recientes años y bajo distintos métodos se ha puesto a prueba el principio cosmológico [13, 14] y afortunadamente, se ha comprobado una y otra vez.

2.1 Dinámica del espacio-tiempo

2.1.1 Ecuación de Friedmann en un universo plano

Alexander Friedmann fue de los primeros en dar una solución cosmológica a las ecuaciones de campo de Einstein en 1922, publicado en la revista alemana de física *Zeitschrift für Physik* bajo el título de *Über die Krümmung des Raumes* (Sobre la curvatura del espacio). Esta se puede obtener partiendo de una métrica que se adecue al principio cosmológico. Es decir, si el Universo es homogéneo e isotrópico, la geometría del espacio-tiempo debe reflejar esta propiedad. Siendo así, podemos tener las siguientes geometrías:

- **Espacio plano:** topológicamente, el espacio plano es un espacio *no compacto*¹ y, por tanto, con volumen infinito.
- **Espacio con curvatura positiva:** se puede pensar como una esfera tres-dimensional embebida en un espacio plano (euclidiano) de 4 dimensiones donde se cumple

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2;$$

con R el radio de la esfera. La esfera tiene curvatura positiva, y topológicamente, es un espacio compacto, por tanto con un volumen finito.

- **Espacio con curvatura negativa:** haciendo un análogo al caso anterior podemos pensar en un hiperboloide embebido en un espacio euclidiano de 4 dimensiones donde se cumple

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -R^2.$$

Este es un espacio con curvatura negativa, y nuevamente, como el espacio plano, no es un espacio compacto, por tanto tampoco posee volumen finito.

La métrica que mejor se adecua a estas geometrías es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), dada en coordenadas esféricas y unidades naturales como

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

En consecuencia, el elemento infinitesimal de línea es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.2)$$

La métrica de FLRW, además de describir un universo homogéneo e isotrópico, representa un universo en expansión cuya tasa de expansión está caracterizada por el *factor de escala* $a(t)$, adimensional. Es importante notar que el Universo no se expande dentro de “algo”. Más bien, la geometría del espacio-tiempo descrita por (2.1) se hace más grande sin referenciar sobre qué.

La constante k dicta el tipo de geometría del espacio 3D, y puede adquirir los siguientes valores

$$k = \begin{cases} 1 & \text{universo cerrado,} \\ 0 & \text{universo plano,} \\ -1 & \text{universo abierto.} \end{cases} \quad (2.3)$$

¹Intuitivamente, un espacio compacto es aquel que puede ser cubierto por capas finitas en su totalidad. Por lo tanto, al no ser compacto, el volumen que ocupa es infinito

A partir de ahora, se desarrollará este capítulo suponiendo un universo plano. Invocando la teoría de la Relatividad General, tenemos que la dinámica del Universo está descrita por las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Ya que el principio cosmológico nos permite modelar al contenido del Universo como un fluido homogéneo e isotrópico², podemos caracterizarlo por dos cantidades: la densidad de energía $\rho(t)$ y la presión $P(t)$. Para cualquier fluido existe una relación entre la energía y la presión conocida como *ecuación de estado*. Las ecuaciones de estado en cosmología tienen la forma

$$P = w\rho, \quad (2.5)$$

con w una constante adimensional, referente al fluido cosmológico. De esta forma; el tensor de energía-momento adopta la siguiente forma

$$[T_{\nu}^{\mu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Finalmente llegamos a la parte principal de esta sección: queremos una ecuación que describa cómo los fluidos perfectos que llenan el espacio afectan la expansión del Universo. Para esto necesitamos las componentes no nulas del tensor de Ricci y del escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]g_{ij}, \\ R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ahora, usando las componentes $(\mu\nu) = (0, 0)$ de (2.7) en (2.4), obtenemos

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] = 8\pi\rho. \quad (2.8)$$

²Debido a nuestra “corta” percepción del Universo, podríamos pensar que los cúmulos de galaxias apuntan hacia un universo no homogéneo. Sin embargo, a grandes escalas debemos pensar a las galaxias como átomos en un fluido cosmológico.

Definiendo al parámetro de Hubble como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.9)$$

podemos reescribir (2.8) de la siguiente forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (2.10)$$

obteniendo la *ecuación de Friedmann* para un universo plano. Esta ecuación es posiblemente la ecuación más importante en la cosmología, debido a que, tomada en conjunto con la ecuación de estado (2.5) (y la ecuación de continuidad), se provee de un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto para determinar la dinámica del Universo.

2.1.2 Ecuación de continuidad

Para obtener la ecuación de continuidad hay que hacer referencia a una ley de conservación para la densidad de energía $\rho(t)$. Esta ley puede ser expresada en una ecuación de conservación para el tensor de energía-momento usando la derivada covariante D_μ de un espacio-tiempo arbitrario

$$D_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (2.11)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ denotan los símbolos de Christoffel.

La evolución de la densidad de energía está dada por $\nu = 0$. Como por isotropía $T_0^i = 0$, la ecuación (2.11) en unidades naturales se reduce a

$$\frac{d\rho}{dt} + \Gamma_{\mu 0}^\mu \rho - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = 0. \quad (2.12)$$

Ahora, utilizando (2.6) y que

$$\Gamma_{0\nu}^\mu = \begin{cases} H \delta_\nu^\mu & \text{para } \mu \neq \nu \\ 0 & \text{para } \mu = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

se deriva la ecuación de continuidad en el espacio-tiempo de FLRW

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.14)$$

Podemos sustituir en (2.14) la ecuación de estado (2.5) e integrar para determinar cómo la densidad de energía depende del factor de escala

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}, \\ \implies \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) &= -3(1+w) \log a, \\ \implies \rho(t) &= \rho_0 a^{-3(1+w)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde ρ_0 es la densidad de energía al tiempo presente y además utilizamos que $a(t_0) = a_0 = 1$.

Como mencionamos en (2.5), w depende del fluido cosmológico y puede tomar los siguientes valores

$$w = \begin{cases} 1/3 & \text{radiación,} \\ 0 & \text{materia,} \\ -1 & \text{constante cosmológica.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Con esto podemos ver el comportamiento de la densidad de energía (2.15) para cada tipo de contenido cósmico. Por ejemplo, para materia tenemos $w = 0$, lo que conduce a

$$\rho_m \sim \frac{1}{a^3}, \quad (2.17)$$

mientras que para el caso de radiación la densidad de energía depende del factor de escala de acuerdo a

$$\rho_r \sim \frac{1}{a^4}. \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) nos indican que a medida que el Universo se expande la densidad de energía se diluye como una potencia de $1/a$. Y se diluye más rápidamente la densidad de energía de radiación que la de materia independientemente de la componente dominante. Para el caso de $w = -1$

$$\rho_\Lambda \sim cte. \quad (2.19)$$

A diferencia de los universos de materia y radiación, en el caso que el Universo sea dominado por una energía del vacío, la densidad de energía permanece constante.

2.2 Evolución de un universo plano

2.2.1 Soluciones simples

La ecuación de continuidad (2.14), la ecuación de estado (2.5) y la ecuación de Friedmann (2.10) nos permiten conocer la evolución de nuestro Universo. Para resolver estas ecuaciones, primero necesitamos decidir qué tipo de fluido llena el espacio-tiempo. En el caso donde el contenido únicamente sea un fluido, escribimos (2.15) como

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}. \quad (2.20)$$

Al sustituirlo en la ecuación de Friedmann, nos conduce (para $w \neq 1$) a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_0}{3a^{3(1+w)}}, \quad (2.21)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3w)}. \quad (2.22)$$

Las constantes en (2.21) se absorbieron en t_0 . A continuación, podemos pasar a analizar esta solución para tres distintos casos.

- **Materia** ($w = 0$): para un universo plano compuesto únicamente por materia se cumple

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \implies \dot{a}(t) = \frac{2}{3t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3}. \quad (2.23)$$

Esto es conocido como el *Universo de Einstein-de Sitter*.

- **Radiación** ($w = 1/3$): para un universo plano lleno de radiación (partículas relativistas)

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \implies \dot{a}(t) = \frac{1}{2t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/2}. \quad (2.24)$$

- **Constante cosmológica** ($w = -1$): para un universo plano compuesto únicamente por una constante cosmológica, el lado derecho de (2.21) es constante. Esto conduce a la solución

$$a(t) \sim e^{\alpha t}, \quad \alpha = \sqrt{8\pi\rho_0/3}. \quad (2.25)$$

En general en el Universo existen varios fluidos. Si los fluidos comparten la misma ecuación de estado, como la materia oscura y la materia visible, podemos en general tratarlas como una misma. Sin embargo, si el Universo contiene fluidos con diferentes ecuaciones de estado, debemos incluirlos a todos. Así, si el Universo está conformado por una parte de radiación, otra de materia y una de energía de vacío, escribimos naturalmente

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda. \quad (2.26)$$

2.3 Componentes de nuestro Universo

Nuestro Universo está formado por materia convencional, materia oscura, radiación y una constante cosmológica. Veremos que estos aparecen en proporciones distintas.

2.3.1 Densidad crítica

Podemos expresar la ecuación de Friedmann, para un universo plano, como

$$1 = \frac{8\pi}{3H^2}\rho \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.27)$$

donde $\rho_c = 3H^2/8\pi$ es llamada *densidad crítica de energía* y define el valor para la densidad de energía ρ que debe tomar a un tiempo t para que el espacio-tiempo sea plano. Por ejemplo, al tiempo actual t_0 , con el valor medido del parámetro de Hubble [15]

$$H_0 \equiv H(t_0) \sim 67.8 \text{ km/s Mpc}, \quad (2.28)$$

podemos obtener la densidad crítica presente $\rho_{0,c} \sim 4.844 \text{ keV/cm}^3$. Luego, usamos esto para definir los parámetros adimensionales de energía, conocidos como *abundancias*;

$$\Omega_w = \frac{\rho_{0,w}}{\rho_{0,c}}. \quad (2.29)$$

Por construcción, a partir de la ecuación (2.27), vemos que

$$\sum_w \Omega_w = 1. \quad (2.30)$$

Entonces, cualquier exceso de energía hará que (2.30) sea mayor a 1, implicando que necesariamente vivimos en un universo cerrado. Asimismo, cualquier deficiencia de energía hará que (2.30) sea menor a uno, dando lugar a un universo abierto.

Por otra parte, al dividir (2.27) entre H_0^2 , podemos escribir en términos de las abundancias

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda. \quad (2.31)$$

Uno de los objetivos en la cosmología es medir los parámetros en esta ecuación.

2.3.2 Modelo Λ CDM

Las observaciones más recientes realizadas por la sonda *Planck* [15] han arrojado los siguientes valores para las distintas abundancias cosmológicas:

$$\Omega_r \approx 5.38 \times 10^{-5}, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.68, \quad \Omega_m \approx 0.31. \quad (2.32)$$

La letra Λ representa la constante cosmológica, que actualmente, es asociada con la energía oscura, i.e. aquella energía necesaria para explicar la expansión acelerada del espacio en contra de los efectos atractivos de la gravedad. Es importante recalcar que según estos datos, Ω_Λ comprende casi el 70 % de la densidad de energía del Universo. La otra abundancia considerable es la asociada a materia, pues constituye casi el restante 30 % de la densidad de energía del Universo. Sin embargo, de este porcentaje, solo el 5 % comprende toda la materia ordinaria observada como los átomos, elementos químicos, gases, etc. El otro 26 % corresponde a la materia oscura, la cual discutiremos en secciones posteriores. También, la densidad de energía total incluye una pequeña fracción de partículas relativistas que encontramos en la abundancia Ω_r . Esta colección de parámetros conforma al modelo Λ CDM, con Λ denotando la constante cosmológica y CDM denotando *cold dark matter*, materia oscura fría o no relativista.

2.4 Materia oscura (primer acercamiento)

Con lo desarrollado en las secciones anteriores, pareciera que hemos llegado a resolver las preguntas planteadas sobre la dinámica y evolución de nuestro Universo. Incluso usando las ecuaciones (2.22) podemos dar un estimado de la edad del cosmos, e hipotetizar sobre un instante $t = 0$ que dio origen a todo lo que nos rodea (*la gran explosión*). Otros, se dedican a estudiar la historia térmica del Universo y los procesos que conducen a la formación de las estructuras, tales como galaxias, estrellas, etcétera. Sin embargo, la cosmología aún dista de ser una teoría completa. Los terrenos desconocidos son lo que dan lugar a física nueva. Uno de estos temas es la llamada materia oscura.

2.4.1 Evidencias astrofísicas

Del parámetro $\Omega_m \approx 0.31$, la cantidad que corresponde a materia oscura es $\Omega_{\text{CDM}} \approx 0.26$. Poco sabemos sobre esta materia oscura. No sabemos si es una única especie de partícula o muchas. No sabemos si consiste de varios sectores desacoplados o solo uno. No obstante, existe una variedad de evidencia que apunta a la existencia de un tipo de materia invisible, eléctricamente neutra, que interactúa únicamente mediante la fuerza gravitacional y que compone alrededor del 26 % de todo el contenido energético del Universo. A continuación se presentan algunas de estas evidencias.

- **Curvas de rotación de galaxias:** las curvas de rotación proveen un método para medir la masa de una galaxia. La idea detrás del método es la siguiente: podemos tomar la aproximación plana de galaxias espirales con campo de fuerza central. Entonces, la aceleración centrífuga de una estrella orbitando a distancia r del centro galáctico es

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (2.33)$$

Sustituyendo esta ecuación en la segunda ley de Newton, obtenemos

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \implies v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (2.34)$$

donde $M(r)$ es la masa encerrada en una esfera de radio r . Lejos del centro de la galaxia se esperaría que $M(r)$ sea constante para que la velocidad disminuyera como $v \sim \sqrt{1/r}$. Esto no es lo que se observa. La velocidad de rotación es medida observando el gas interestelar, y se encuentra que la rotación permanece constante en la frontera de la galaxia. Esto sugiere que en realidad la masa crece como $M(r) \sim r$ en puntos cercanos a la frontera de la galaxia. Esto es lo que se conoce como el *halo de materia oscura*.

Por ejemplo, en la Figura 2.1, se muestra la discrepancia de las curvas de rotación para la galaxia espiral Messier-33. En orden, se encuentran: la curva de rotación observada (puntos azules) comparada con el mejor ajuste de línea (curva roja continua). Además, se muestra la

contribución de halo de materia oscura (curva roja de línea-punto), la curva correspondiente a la masa observada (curva roja de líneas) y la contribución de gas (curva roja de líneas largas).

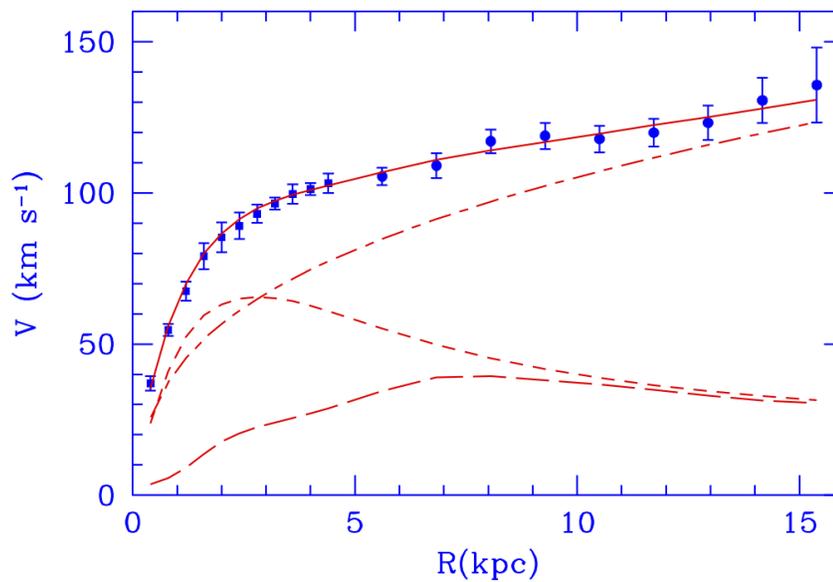


Figura 2.1: Curva de rotación de galaxia para la galaxia espiral M33. Se muestra la curva de rotación observada (puntos azules) comparada con el mejor ajuste de línea (curva roja continua). Además, se muestra la contribución de halo de materia oscura (curva roja de línea-punto), la curva correspondiente a la masa observada (curva roja de líneas) y la contribución de gas (curva roja de líneas largas). Imagen obtenida de [16].

- **Lentes gravitacionales:** una predicción comprobada de la relatividad general es que la trayectoria de la luz sufre una desviación cuando se acerca a objetos masivos, esto implica que la imagen de un objeto observado desde la tierra podría aparentar estar distorsionada, como

se ve en la Figura 2.2. Este fenómeno es llamado *lente gravitacional*. Las fuertes distorsiones de este tipo nos permiten determinar de forma precisa la masa del cúmulo en el primer plano. Y sorpresivamente la masa calculada es mayor a la masa visible.

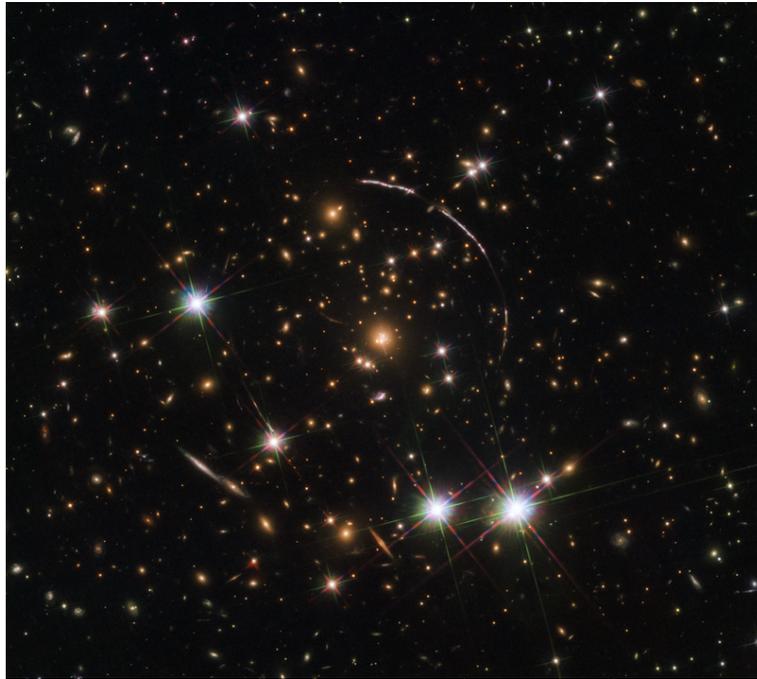


Figura 2.2: Distorsión de la imagen de la galaxia Sunburst Arc debido a un cúmulo de galaxias. El fenómeno produce al menos 13 imágenes de la galaxia de fondo, distribuida a lo largo de 4 arcos. Tres de estos arcos son visibles en la parte superior derecha de la imagen, mientras que el arco faltante es visible en la parte inferior izquierda. Imagen obtenida del sitio web de Hubble <https://hubblesite.org/>

- **El cúmulo de bala:** en la Figura 2.3 se muestran dos cúmulos de galaxias que previamente colisionaron. Existen tres tipos de materia en la imagen: estrellas, gas caliente detectado por rayos-X (en rosa) y la distribución de masa detectada a través de lente gravitacional (en azul). Las estrellas se encuentran en dos subcúmulos debido a que galaxias individuales tienen baja probabilidad de colisionar. Sin embargo, la mayor parte de la materia bariónica se asienta en nubes de gas caliente que interactúa fuertemente cuando los cúmulos colisionan. Pero, la mayor parte de la materia, es oscura y, como las galaxias, atraviesan una a lado de otra, aparentemente inafectada por la colisión. La interpretación de esto es que la materia oscura interactúa débilmente consigo misma y con la materia bariónica.

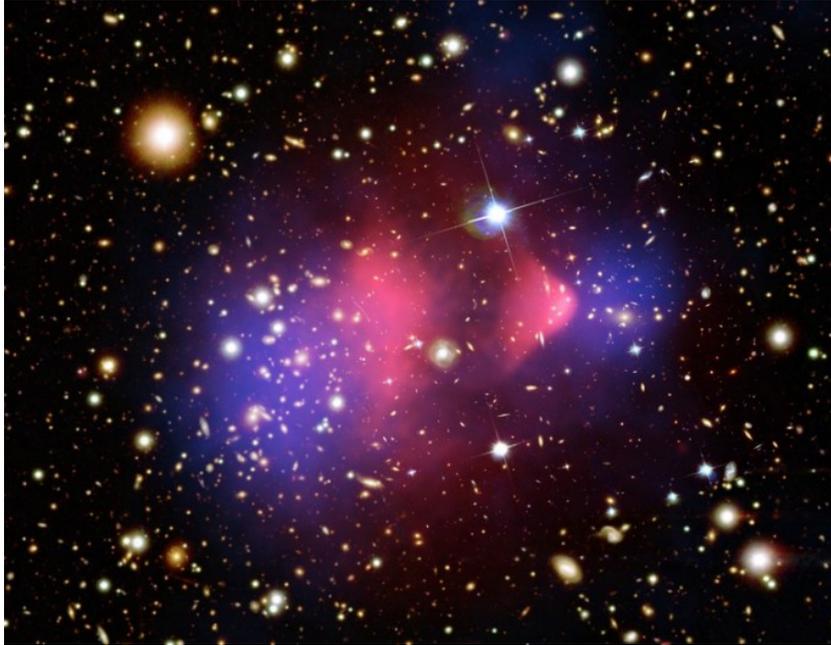


Figura 2.3: La materia en el cúmulo de galaxia 1E 0657-56, mejor conocida como el cúmulo de bala. Imagen tomada del sitio web <https://apod.nasa.gov/apod/ap060824.html>

- **Nucleosíntesis del Big Bang:** la evidencia mostrada anteriormente no es suficiente para concluir que la materia oscura está compuesta por una nueva partícula desconocida. Por ejemplo, podría aparecer en forma de una especie de estrella fallida, alguna forma de materia bariónica exótica, etc. Sin embargo, la teoría de la nucleosíntesis del Big Bang, la cual nos habla de cómo los elementos ligeros fueron forjados en el Universo temprano, nos ofrece una prueba de que este no puede ser el caso.

Resulta que la abundancia relativa de diferentes elementos depende de la cantidad total de materia bariónica. En particular, la abundancia relativa de deuterio cambia con la densidad bariónica. Esto se muestra en la Figura (2.4), donde la barra vertical turquesa queda fija por las observaciones de la abundancia relativa. Las cajas negras muestran la abundancia relativa de cada elemento, con barras de error y la correspondiente constricción en la densidad bariónica. Esto nos dice que la cantidad total de materia bariónica conforma un bajo porcentaje de la densidad de energía total, eliminando la posibilidad de alguna forma de materia oscura bariónica exótica.

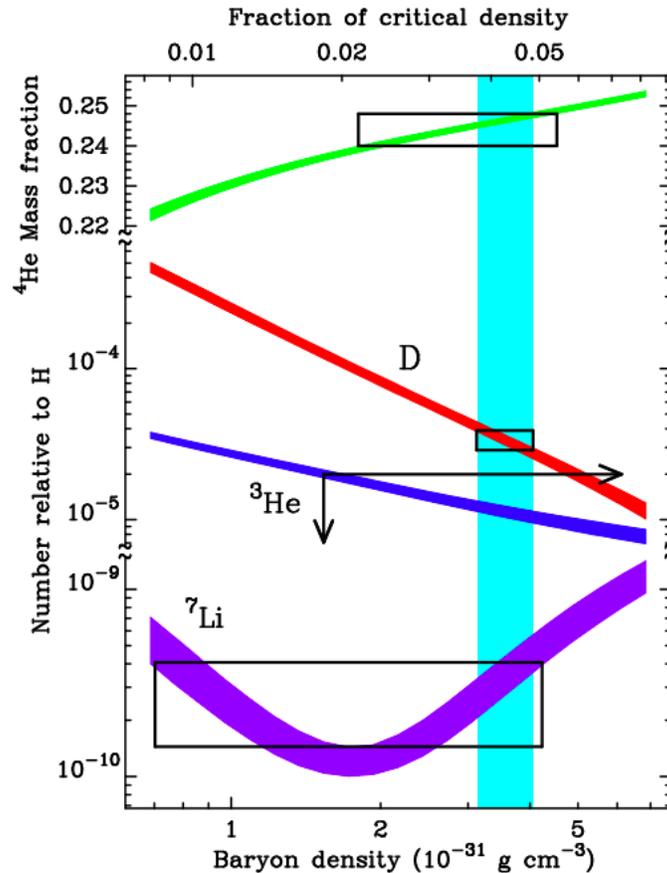


Figura 2.4: La abundancia relativa de los elementos ligeros forjados en el Universo temprano, en función de la densidad bariónica. Imagen tomada de [17].

- **Formación de estructura:** el CMB nos dice que en etapas tempranas, nuestro Universo era cercano a ser homogéneo e isotrópico con fluctuaciones pequeñas en la energía. Sin embargo, hoy esas fluctuaciones han crecido en cúmulos de galaxias.

Resulta que esto no pudo haber ocurrido únicamente con materia bariónica. En el evento de la gran explosión, la materia bariónica estaba acoplada con los fotones y estos proveen una presión que sobrepasa el colapso gravitatorio. Este colapso solo puede suceder después de que el Universo baje su temperatura y los fotones se desacoplen, unos 300,000 años después de la gran explosión. Esto no deja tiempo para que el Universo evolucione a como lo vemos hoy. La materia oscura ofrece una solución a este problema debido a que únicamente experimenta la fuerza de gravedad: la llamada inestabilidad gravitacional de Jeans, que permite la formación

de estructuras. En consecuencia, la materia oscura comienza a colapsar en redes de halos de materia oscura mucho antes que la materia ordinaria, la cual es impedida por fuerzas de presión. Sin la materia oscura, la distribución de cúmulos no se reproduce en simulaciones [18] y por lo tanto, la época de formación de galaxias ocurriría tiempo después del tiempo que es observado.

- **Fondo de radiación de microondas (CMB):** otra evidencia para la existencia de materia oscura proviene de las escalas cosmológicas de las anisotropías del CMB. El CMB es la radiación remanente del universo temprano. Los fotones experimentaron oscilaciones que se “congelaron” antes del desacoplamiento de la materia bariónica a un redshift de 1100. La escala angular y altura de los picos de estas oscilaciones resultan efectivas para imponer constricciones a los parámetros cosmológicos. El radio de la primera oscilación después del desacoplamiento provee una manera de saber la geometría del universo: si la luz viaja en líneas rectas, entonces la escala angular del primer pico debería encontrarse a 1 grado, y esto resultó ser correcto, como se ve en la Fig. 2.5. La altura del segundo pico implica que 5% del contenido del universo corresponder a materia bariónica, mientras que la posición de los primeros tres picos implica que el 26% del contenido del universo es materia oscura, pues de ser menor la amplitud de los picos también sería menor.

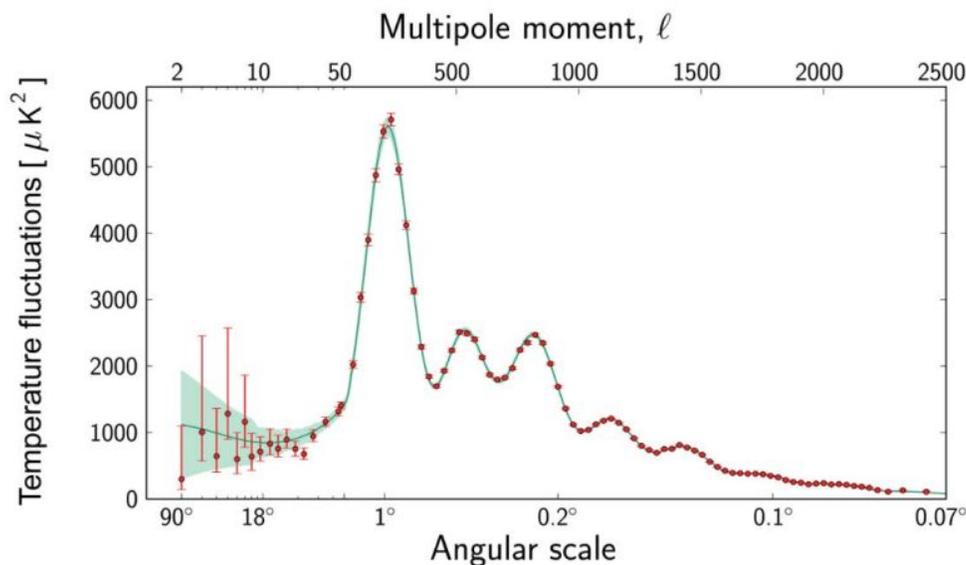


Figura 2.5: Espectro de potencias angular de las fluctuaciones de temperatura en el CMB. Las fluctuaciones se muestran a diferentes escalas angulares en el cielo. Los puntos rojos con barras de error corresponden a los datos de la sonda Planck. La curva verde representa el modelo Λ CDM. Imagen obtenida de <https://inspirehep.net/literature/1508128>.

Capítulo 3

Teoría cuántica del campo escalar

La teoría cuántica de campos acopla las dos teorías físicas más revolucionarias del siglo XX, la relatividad especial y la mecánica cuántica. Esta peculiar teoría se basa, como su nombre lo dice, en la cuantización de un campo clásico. En la mecánica cuántica se promueven los grados de libertad clásicos a operadores actuando en un espacio de Hilbert. La cuantización de un campo no es muy diferente. En este nuevo esquema, los grados de libertad son promovidos a funciones valuadas por operadores en el espacio-tiempo.

La siguiente discusión está centrada específicamente en la teoría del campo escalar, basada en los primeros tres capítulos de [19] y los capítulos 2 y 4 de [20].

3.1 Teoría clásica de campos

Un *campo* es una cantidad que está definida en todo punto del espacio-tiempo, es decir, una función

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(x). \quad (3.1)$$

Notemos que estamos trabajando con un número infinito de grados de libertad, al menos uno para cada punto \mathbf{x} en el espacio. Dos ejemplos de campos, con los que hemos trabajado hasta ahora, son el campo eléctrico y el campo magnético.

3.1.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

La dinámica de estos campos está dada por el Lagrangiano, el cual es función de uno o más campos ϕ y sus derivadas $\partial_\mu\phi$,

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi), \quad (3.2)$$

con \mathcal{L} la densidad Lagrangiana. Así, la acción se escribe como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (3.3)$$

Para determinar las ecuaciones de movimiento usamos el principio de mínima acción. Este principio establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración a otra entre un tiempo inicial t_1 y un tiempo final t_2 , lo hace a través de la trayectoria en el espacio de configuración para la cual S es mínimo. Esto es equivalente a variar una trayectoria, tomar los puntos extremos fijos y pedir que $\delta S = 0$. Entonces, escribimos

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right),\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde el último término es una derivada total y desaparece para cualquier $\delta \phi$ que decae en infinito y que, además, obedece $\delta \phi(\mathbf{x}, t_1) = \delta \phi(\mathbf{x}, t_2)$. Al invocar el principio de mínima acción, se cumple la igualdad

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.5)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange de movimiento. Para entender cómo se utilizan, tomemos la siguiente densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,\end{aligned}\quad (3.6)$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ es el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski. Luego, siguiendo la ecuación (3.5), obtenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi. \quad (3.7)$$

En conclusión, la ecuación de movimiento, dada la densidad Lagrangiana (3.6), es

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (3.8)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de *Klein-Gordon*.

3.1.2 El Hamiltoniano

Haciendo una conexión con la mecánica clásica, definimos la densidad Hamiltoniana en la teoría de campos como

$$\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (3.9)$$

donde $\pi(x)$ se define como

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (3.10)$$

Notemos que $\pi(x)$ es una función de x como lo es el campo $\phi(x)$. Naturalmente, se sigue que el Hamiltoniano es

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (3.11)$$

3.1.3 Teorema de Noether

Un concepto crucial en la teoría de campos es el de simetría. Las simetrías son transformaciones de un sistema físico que dejan la acción invariante. El *teorema de Noether*¹ relaciona simetrías con cantidades físicas conservadas. El teorema es aplicable a simetrías continuas, como las rotaciones. Para ver como una simetría da lugar a una cantidad conservada, consideremos la transformación infinitesimal

$$\phi \rightarrow \phi' \equiv \phi + \alpha \Delta\phi, \quad (3.12)$$

donde α es un parámetro continuo y $\Delta\phi$ una deformación del campo. Si esta transformación deja la acción S invariante, entonces es una simetría. Esto requiere, en particular, que el Lagrangiano \mathcal{L} sea invariante hasta una 4-divergencia $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu$, ya que esta desaparece cuando es integrada sobre d^4x en virtud del teorema de Gauss. Por lo tanto, una transformación de simetría satisface

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu. \quad (3.13)$$

Para la transformación (3.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha \Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\alpha \Delta\phi) \\ &= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right) + \alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta\phi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El término en corchetes desaparece debido a las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.5). Comparando (3.14) con (3.13), se concluye que la llamada “corriente conservada”

$$j^\mu \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right) - \mathcal{J}^\mu \quad (3.15)$$

satisface

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.16)$$

Esta expresión corresponde a una ecuación de continuidad. Como consecuencia, sucede que la *carga* asociada

$$Q \equiv \int d^3x j^0 \quad (3.17)$$

¹Amalie Emmy Noether fue una de las grandes mentes matemáticas del siglo XX. Considerada la madre del álgebra moderna, sus trabajos abrieron caminos nuevos que marcaron de manera fundamental el análisis de los grupos de simetrías que aparecen en las teorías especial y general de la relatividad.

es constante. Esta conclusión se obtiene mediante

$$\dot{Q} = \int d^3x \partial_0 j^0 = \int d^3x \partial_\mu j^\mu - \int d^3x \partial_k j^k = 0, \quad (3.18)$$

donde el término $\partial_\mu j^\mu$ es cero por el teorema de Noether, mientras que la integral del término $\partial_k j^k$ es cero por teorema de Gauss.

3.2 Cuantización canónica

Recordemos que en la mecánica cuántica existe una “receta” que nos lleva del formalismo Hamiltoniano a la teoría cuántica. Esta receta nos dice las coordenadas generalizadas q y su momento conjugado p deben promoverse a operadores. De esta manera, la estructura de los paréntesis de Poisson se transforma en la estructura de relaciones de conmutación (con $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0, \\ [q_i, p_j] &= i\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hacemos esto análogo para el campo $\phi(x)$ y $\pi(x)$, promoviéndolos a operadores y postulando que satisfacen (a tiempos iguales)

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 \\ [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Un operador evaluado en el espacio que cumpla estas relaciones de conmutación es llamado *campo cuántico*. También, es de notar que en (3.20) separamos la parte espacial de la temporal. Pues, los operadores solo dependen de \mathbf{x} mientras que la parte temporal se sienta en en los estados $|\psi\rangle$, como en el marco de la mecánica cuántica de Schrödinger. Sin embargo, ahora la función de onda es un *funcional*, esto es, una función de todas las posibles configuraciones del campo ϕ .

Aunque, estemos trabajando con un número infinito de grados de libertad, podemos encontrar una manera de escribir la dinámica tal que cada grado de libertad evolucione independientemente. Por ejemplo, para la ecuación de Klein-Gordon, tomamos la transformada de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t), \quad (3.21)$$

donde los modos de Fourier $\phi(\mathbf{p}, t)$ representan los campos en el espacio de momentos. Sustituyendo esta solución en la ecuación de Klein-Gordon (3.8), encontramos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\mathbf{p}^2 + m^2) \right) \phi(\mathbf{p}, t) = 0. \quad (3.22)$$

Así encontramos que la solución mas general de la ecuación de Klein-Gordon es una superposición lineal de osciladores armónicos simples, con frecuencia de oscilación $w_{\mathbf{p}} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Concluimos que para cuantizar ϕ debemos cuantizar este número infinito de osciladores.

3.2.1 El campo escalar real

Recordamos de mecánica cuántica no relativista que el Hamiltoniano del oscilador armónico está dado por

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2. \quad (3.23)$$

Una forma de encontrar el espectro de energía es definiendo los operadores escalera. La utilidad de estos operadores radica en que nos permiten ir de un nivel de energía a otro. Estos operadores toman la forma

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}q + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}p \quad \text{y} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}q - \frac{i}{\sqrt{2\omega}}p, \quad (3.24)$$

que fácilmente pueden ser invertidos para obtener

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad \text{y} \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger). \quad (3.25)$$

Para la ecuación de Klein-Gordon podemos realizar el mismo método usado en la mecánica cuántica de introducir los operadores escalera, pero en este caso, cada modo de Fourier en (3.21) se trata como un oscilador independiente con sus propios operadores a y a^\dagger , que ahora llamaremos *operadores de creación y aniquilación*:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \\ \pi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Empleando las relaciones de conmutación (3.20), se obtiene

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad , \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (3.27)$$

De esta forma, podemos escribir el Hamiltoniano (3.11) en términos de los operadores a y a^\dagger , partiendo de la ecuación (3.9)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \left(\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger) \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Antes de continuar con lo que parece ser una integral divergente, debido a la evaluación en cero de la función delta, debemos introducir el concepto de *vacío*. Definamos el vacío $|0\rangle$ exigiendo que sea aniquilado por la acción de todo operador $a_{\mathbf{p}}$, i.e.

$$a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{p}. \quad (3.29)$$

En consecuencia, la energía del estado base E_0 , proviene del segundo término en la última línea de (3.28). Esta divergencia aparece al considerar el espacio en el que estamos trabajando como infinito. Para poder trabajar correctamente con esto, ponemos a nuestro sistema en una caja de volumen V . De este modo, la divergencia $\delta(0)$ aparece porque estamos calculando la energía total, en lugar de calcular la densidad de energía ϵ_0 . Con el fin de encontrar esta densidad, dividimos el término divergente entre el volumen V

$$\epsilon_0 = \frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{p}}. \quad (3.30)$$

No obstante, este término sigue siendo divergente. Esta densidad puede interpretarse como la suma de los estados base de cada oscilador armónico. Un buen alivio es que trabajaremos con este infinito de una forma más práctica: lo ignoraremos, pues en física solo estamos interesados en diferencias de energía y no existe una manera directa de medir ϵ_0 . Finalmente, escribimos el Hamiltoniano substrayendo este infinito, como

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \quad (3.31)$$

3.2.2 Partículas

Con la expresión del Hamiltoniano (3.31) y las relaciones de conmutación (3.27), se puede verificar que se cumplen las relaciones

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad y \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \quad (3.32)$$

Esto nos indica que, tal como el oscilador armónico, podemos construir estados de energía actuando sobre el vacío con el operador $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ de la siguiente forma

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}\rangle. \quad (3.33)$$

Para encontrar la energía asociada a este estado, aplicamos H

$$H |\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle, \quad (3.34)$$

con $\omega_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Reconocemos esta ecuación como la relación de dispersión $E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Por lo tanto, podemos escribir $\omega_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{p}}$. Interpretamos el estado $|\mathbf{p}\rangle$ como el eigenestado de momento de una *partícula*² de masa m .

²A pesar de llamar a los estados $|\mathbf{p}\rangle$ como partículas, estas no están localizadas en el espacio de ninguna forma, como se dijo son eigenestados de momento.

Continuando con la discusión, podemos crear estados de múltiples partículas haciendo que a^\dagger actúe múltiples veces sobre el vacío, como

$$a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle. \quad (3.35)$$

Como todos los a^\dagger conmutan consigo mismo, el estado es simétrico bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas, indicando que estamos trabajando con *partículas bosónicas*.

3.2.3 Esquema de Heisenberg y propagadores

Para hacer explícita la dependencia temporal de los operadores $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{p}}$ usamos las ecuaciones de movimiento en el esquema de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbf{p}} = i[H, a_{\mathbf{p}}]. \quad (3.36)$$

Posteriormente, usando (3.32) escribimos

$$a_{\mathbf{p}}(t) = e^{-iE_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}. \quad (3.37)$$

Haciendo la dependencia temporal explícita, podemos reescribir las ecuaciones (3.26) como

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right). \quad (3.38)$$

A simple vista parecería que no hemos hecho nada. Sin embargo, ahora el exponente está escrito en términos de 4-vectores, $p \cdot x = E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$.

La expresión en (3.38) nos permite estudiar la estructura causal de la teoría. Por ejemplo, podemos preguntar por la amplitud de tener inicialmente una partícula en un punto del espacio-tiempo x y encontrarla tiempo después en un punto y . Calculamos esto de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle e^{-ip \cdot x + iq \cdot y} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \equiv D(x-y). \end{aligned} \quad (3.39)$$

La función $D(x-y)$ es llamada *propagador*. A pesar de que la expresión en (3.39) es correcta, en la siguiente sección repasaremos la teoría de interacción, y en esa teoría la cantidad importante es el *propagador de Feynman*

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x-y), & \text{si } x^0 > y^0 \\ D(y-x), & \text{si } y^0 > x^0, \end{cases} \quad (3.40)$$

con T el ordenamiento temporal

$$T\phi(x)\phi(y) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ \phi(y)\phi(x) & \text{si } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Aunque parece suficiente tener esta definición para el propagador de Feynman, resulta útil expresarlo en términos de una integral de 4-momento

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (3.42)$$

3.3 Teoría de interacción y diagramas de Feynman

Cuando pensamos en incorporar interacción a una teoría, podemos pensar en incorporar un potencial $V(\phi)$ al Lagrangiano. Mientras que este tipo de Lagrangianos resultan útiles en el área de materia condensada, es raro encontrarlo en la física de altas energías. En este trabajo es suficiente considerar añadir *pequeñas* perturbaciones a la teoría. Por ejemplo, consideremos el Lagrangiano del campo escalar real con una pequeña perturbación, esto es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n, \quad (3.43)$$

donde los coeficientes λ_n son llamados *constantes de acoplamiento*. Existe un *marco* realmente útil en la mecánica cuántica para describir sistemas donde tenemos pequeñas perturbaciones añadidas a un Hamiltoniano ya conocido; el *marco de interacción*.

3.3.1 Marco de interacción

Por un momento volvamos a la mecánica cuántica con un número finito de grados de libertad. En el marco de Schrödinger, el estado evoluciona como

$$i \frac{d|\psi\rangle_S}{dt} = H |\psi\rangle_S, \quad (3.44)$$

mientras que los operadores O_S son independientes del tiempo. En contraste, en el marco de Heisenberg, los estados están fijos y los operadores cambian con el tiempo

$$\begin{aligned} O_H(t) &= e^{iHt} O_S e^{-iHt} \\ |\psi\rangle_H &= e^{iHt} |\psi\rangle_S. \end{aligned} \quad (3.45)$$

El *marco de interacción* es una mezcla de ambos, en donde el Hamiltoniano adopta la forma

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (3.46)$$

donde la dependencia del tiempo en los operadores está dada por H_0 , mientras que la dependencia del tiempo en los estados está dada por H_{int} , esto es

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= e^{iH_0t} |\psi(t)\rangle_S \\ O_I(t) &= e^{iH_0t} O_S e^{-iH_0t}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Aplicándolo al Hamiltoniano (3.46), obtenemos

$$H_I \equiv (H_{int})_I = e^{iH_0t} (H_{int})_S e^{-iH_0t} \quad (3.48)$$

y concluimos que

$$i \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} = H_I(t) |\psi\rangle_I. \quad (3.49)$$

Para resolver esta ecuación, proponemos

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I, \quad (3.50)$$

con $U(t, t_0)$ un operador unitario de evolución temporal. Sustituyendo (3.50) en (3.49), obtenemos

$$i \frac{dU}{dt} = H_I(t)U. \quad (3.51)$$

La solución de esta ecuación diferencial viene dada por la *fórmula de Dyson*, la cual permite escribir al operador unitario de evolución temporal en una suma de integrales

$$U(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') + \dots \quad (3.52)$$

3.3.2 Teorema de Wick

El resultado importante de la sección anterior es que en la teoría de interacción es necesario calcular cantidades como $\langle f | T \{ H_I(x_1) \dots H_I(x_n) \} | i \rangle$. No obstante, como el Hamiltoniano H_I posee operadores de creación y aniquilación, resultaría más sencillo mover todos los operadores de aniquilación a la derecha, donde se anularían debido a (3.29). El teorema de Wick nos provee de un método para trabajar justo de esta manera.

De (3.40), ya sabemos que obtenemos el propagador de Feynman

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \Delta_F(x - y). \quad (3.53)$$

Para generalizar esto al caso de más de dos campos, primero separamos los operadores en dos sumandos: uno que contenga únicamente operadores de creación y otro que contenga únicamente

operadores de aniquilación. Esto se logra escribiendo $\phi(x) = \phi(x)^+ + \phi(x)^-$, con

$$\begin{aligned}\phi(x)^+ &= \int \frac{d^e p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} \\ \phi(x)^- &= \int \frac{d^e p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Descomponiendo el producto de dos campos

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(x)^+\phi(y)^+ + \phi(y)^-\phi(x)^+ + \phi(x)^-\phi(y)^+ + \phi(x)^-\phi(y)^- + [\phi(x)^+, \phi(y)^-]. \quad (3.55)$$

Hemos escrito la expresión de una forma que todos los términos excepto el conmutador están escritos en *orden normal*. Esto es, todos los operadores de aniquilación están a la derecha y todos los operadores de creación a la izquierda. Las expresiones escritas en orden normal tienen la ventaja que su valor esperado en el vacío es cero, y las denotaremos por $(: :)$. Ahora bien, podemos escribir el término del conmutador usando (3.27)

$$[\phi(x)^+, \phi(y)^-] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (3.56)$$

De esta manera, definimos la *contracción* de campos como

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi(x)^+, \phi(y)^-] & \text{si } x^0 > y^0 \\ [\phi(y)^+, \phi(x)^-] & \text{si } x^0 < y^0, \end{cases} \quad (3.57)$$

y por lo tanto

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x-y). \quad (3.58)$$

Esto era de esperarse por la expresión (3.53), pues ya habíamos dicho que en expresiones ordenadas temporalmente solo existe una contribución del término del conmutador. Podemos resumir todo lo desarrollado hasta ahora escribiendo

$$T\phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + \overline{\phi(x)\phi(y)}. \quad (3.59)$$

Para generalizar esta expresión a más campos, invocamos el *teorema de Wick*:

$$T\phi(x_1)\dots\phi(x_n) =: \phi(x_1)\dots\phi(x_n) : + \text{todas las posibles contracciones}, \quad (3.60)$$

donde “todas las posibles contracciones” significa un término para cada forma de contraer pares de campos. Esta expresión implica que todos los operadores que no están contraídos son términos de orden normal, mientras que cada par de operadores contraídos aporta como un factor Δ_F .

3.3.3 Diagramas de Feynman

La utilidad del teorema de Wick radica en que nos permite traducir cualquier amplitud o función de correlación $\langle i|T\{H_I(x_1)\dots(H_I(x_n))\}|f\rangle$ en una suma de productos de propagadores de Feynman. La única dificultad es la combinatoria, esto es, no perder de vista ningún par de contracción de campos. Aquí, es donde los *diagramas de Feynman* ayudan representando gráficamente los procesos de interacción.

Tomemos como ejemplo una interacción dada por el Hamiltoniano, $H_{int} = g \int d^3x \psi^\dagger \psi \phi$, el cual contiene operadores de creación y aniquilación. En particular

- $\phi \sim a + a^\dagger$: este operador puede crear o destruir ϕ partículas.
- $\psi \sim b + c^\dagger$: este operador puede destruir ψ partículas a través de b y crear antipartículas³ a través de c^\dagger .
- $\psi^\dagger \sim b^\dagger + c$: este operador crea partículas ψ a través de b^\dagger y aniquilar antipartículas con c .

A primer orden en la teoría de perturbación, encontramos términos como $c^\dagger b^\dagger a$. Esto aniquila una partícula ϕ , produciendo un par ψ partícula-antipartícula, esto es $\phi \rightarrow \psi\bar{\psi}$, o un proceso de *decaimiento*.

A segundo orden en la teoría de perturbación, tendremos términos más complicados como $(c^\dagger b^\dagger a)(c b a^\dagger)$. Este término contribuye a los procesos de *dispersión* $\psi\bar{\psi} \rightarrow \phi \rightarrow \psi\bar{\psi}$. Para ver el uso y acción de esta herramienta, estudiemos los dos diagramas más simples que contribuyen a un orden g^2 . Por ejemplo, para un proceso de dispersión $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$ tenemos los diagramas en la Figura 3.1.

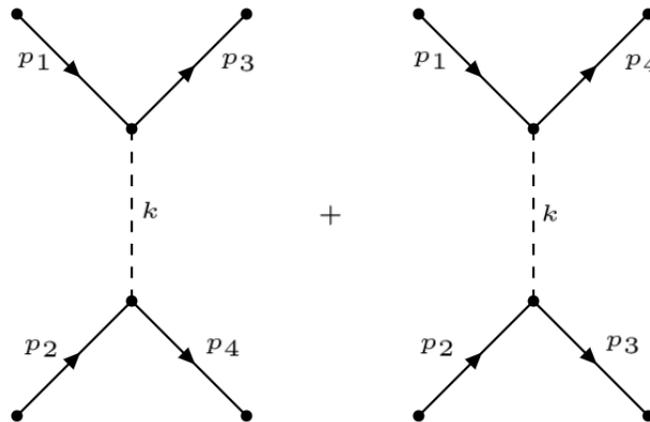


Figura 3.1: Diagramas de Feynman para un proceso de dispersión.

³Hasta ahora hemos trabajado únicamente con el campo escalar real. Cuando uno cuantiza campos escalares complejos $\psi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$, se da lugar a operadores de creación y aniquilación asociados a la antipartícula.

Ahora, en vez de calcular los términos involucrados de la amplitud de dispersión, podemos asociar unas reglas para cada diagrama usando las reglas de Feynman:

- Agregar un momento p_i a cada línea interna
- A cada vértice le corresponde un factor de

$$(-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i p_i\right). \quad (3.61)$$

- A cada línea interna punteada le corresponde a una partícula con momento k y un factor

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\mathbf{p}^2 - m^2}. \quad (3.62)$$

Incluimos el mismo factor para una línea sólida interna.

Bajo estas reglas, podemos entonces asociarle la siguiente expresión matemática a los diagramas en la Figura 3.1

$$i(-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (3.63)$$

la cual debe de coincidir con hacer el cálculo de este proceso $\langle f | S | i \rangle$. La matriz S está definida como

$$\langle f | S | i \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle, \quad (3.64)$$

con $|f\rangle$, $|i\rangle$ eigenestados de la teoría de interacción.

La interpretación física de un diagrama es: las partículas son creadas en los vértices. La partícula de interacción denotada por la línea punteada, por ejemplo en el primer diagrama, tiene momento $k = (p_1 - p_3) = (p_4 - p_2)$. Esta partícula no satisface la energía de dispersión usual. Debido a que $k^2 \neq m^2$, por lo tanto, llamaremos a esta partícula una *partícula virtual* y se dice que se encuentra *off shell* (fuera del cascarón).

Nuestro resultado final de la amplitud de dispersión a orden g^2 fue (3.63). La función delta que aparece en la expresión se debe a la conservación del 4-momento, el cual es común en todos los elementos de la matriz S . Definiremos la amplitud \mathcal{A} , quitando esta función delta

$$\mathcal{A} = \frac{\langle f | S | i \rangle}{i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_F - p_I)}. \quad (3.65)$$

3.3.4 Sección eficaz y tasa de decaimiento

Para finalizar este capítulo, aterrizaremos la teoría a cosas que podemos medir. Hasta ahora, tenemos las herramientas para computar amplitudes para partículas en procesos de decaimiento y

dispersión. La probabilidad para que las cosas sucedan estará dada por el cuadrado de la amplitud. Estas probabilidades son llamadas *tasa de decaimiento* y *sección eficaz*.

Empecemos con la probabilidad de que una partícula $|i\rangle$ con momento p_I decaiga en un número de partículas $|f\rangle$ con momento p_f y momento total $p_F = \sum_f p_f$, esto es

$$P = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle}, \quad (3.66)$$

donde los estados obedecen la formula de la normalización relativista

$$\langle i|i\rangle = (2\pi)^3 2E_{p_I} \delta^{(3)}(0) = 2E_{p_I} V \quad y \quad \langle f|f\rangle = \prod_{\text{estados finales}} 2E_{p_f} V. \quad (3.67)$$

Aquí, hemos remplazado $\delta^{(3)}(0)$ por V , el volumen del espacio en tres dimensiones. Ahora, suponemos que nuestra partícula inicial está en reposo, esto es, $\vec{p}_I = 0$ y $E_{p_I} = m$. La probabilidad de decaimiento es

$$P = \frac{|\mathcal{A}|^2}{2mV} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_I - p_F) VT \prod_{\text{estados finales}} \frac{1}{2E_{p_i} V}, \quad (3.68)$$

con $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = VT$, el volumen del espacio-tiempo. Para continuar, integramos sobre todo el momento de las partículas finales $V \int d^3 p_i / (2\pi)^3$. Pues, esto hace que se cancele el elemento de volumen espacial en (3.68) y se crea una densidad de estados finales dada por

$$d\Pi = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_I - p_F) \prod_{\text{estados finales}} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_i}}. \quad (3.69)$$

Finalmente sumamos sobre los estados finales

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_{\text{estados finales}} \int |\mathcal{A}|^2 d\Pi. \quad (3.70)$$

Esta ecuación es la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo, $\dot{P} = \Gamma$, y es llamada la *anchura de la partícula*. Esta cantidad es igual al recíproco de la vida media $\tau = 1/\Gamma$.

Ahora, pasamos a calcular la amplitud para un proceso de dispersión, que llamaremos *sección eficaz*. Cuando dos haces de partículas colisionan, a veces las partículas pegan y rebotan, otras veces pasan sin interactuar. Para computar esta cantidad en la teoría, calcularemos de hecho una cantidad más adecuada conocida como la *sección eficaz diferencial*. Esta es la probabilidad de que un proceso de dispersión ocurra en un ángulo solido (θ, ϕ)

$$d\sigma = \frac{\text{Probabilidad diferencial}}{\text{Unidad de tiempo} \times \text{Unidad de Flujo}} = \frac{1}{4E_1 E_2 V} \frac{1}{F} |\mathcal{A}|^2 d\Pi, \quad (3.71)$$

donde la probabilidad por unidad de tiempo es la misma de la anchura de partícula. Ahora, solo necesitamos una expresión para el flujo. Si consideramos el sistema de referencia del centro de masa de la colisión, el flujo en un volumen estaría dado por $F = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/V$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{1}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} d\Pi. \quad (3.72)$$

En pocas palabras, ya podemos tomar nuestra amplitud de dispersión favorita y computar las probabilidades que tiene una partícula para salir disparada a nuestro ángulo favorito.

Capítulo 4

Materia oscura

Habiendo repasado, como primer acercamiento, las evidencias experimentales más contundentes para la existencia de materia oscura y una vez discutidas las herramientas matemáticas de la teoría de cuántica de campos, ahora podemos pasar a estudiar a la materia oscura desde el punto de vista de la física de partículas. En este capítulo se analizarán dos tipos de partículas candidatas a materia oscura: partículas masivas que interactúan débilmente (WIMPs) y axiones pseudoescalares (ALPs). En cada escenario, se buscará establecer en qué etapa del Universo las partículas de materia oscura fueron creadas y mediante cual mecanismo.

4.1 Evolución cosmológica de partículas

La siguiente discusión es clave para entender el paradigma WIMP, y está fuertemente basada en [4] y en la sección 3 de [21].

4.1.1 Ecuación de Boltzmann y grados de libertad

Normalmente, se considera el proceso de producción de las WIMPs como un proceso térmico, esto supone un desacople de la bola de fuego primigenia que fue el Universo temprano. La primera observación es que la energía del vacío no juega un rol en el Universo temprano, por tanto podemos escribir la ecuación de Friedmann (2.10) como

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_m + \rho_r) = \frac{\rho_m + \rho_r}{3M_P^2}, \quad (4.1)$$

con M_P , la masa de Planck reducida. Esta ecuación nos permitirá dar una condición de desacoplamiento de reliquia dada la densidad de energía de la especie de partícula. Para hallarla, necesitamos estudiar la *ecuación de Boltzmann*.

Para describir la evolución de una especie de partículas χ , necesitamos analizar la trayectoria de su función de distribución f_χ en el espacio fase, la cual, dependerá de las interacciones que esas

partículas puedan experimentar a lo largo de dicha trayectoria. Esta dinámica queda descrita por la ecuación de Boltzmann

$$\frac{df_\chi}{d\lambda} = E_\chi \frac{df_\chi}{dt}, \quad (4.2)$$

con λ la variable que parametriza la trayectoria de la partícula y E_χ su energía. Aunque formalmente se necesita integrar la ecuación de Boltzmann en el espacio fase 6D para hablar de la dinámica de la especie de partícula, resulta que se puede simplificar el problema tomando los momentos de la función de distribución. Se perderá información del sistema tomando esta simplificación, pero será suficiente tomar los primeros momentos para describir el comportamiento de la especie en el Universo temprano. Las ecuaciones de evolución para los momentos de la función de distribución son llamadas *ecuaciones de fluido*. El n -ésimo momento de la función de distribución para una especie χ se define como

$$M_n(f_\chi) \equiv \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p_\chi |\mathbf{p}|^n f_\chi, \quad (4.3)$$

donde g denota el factor de degeneración de espín. El 0-momento de f_χ es lo que llamamos la densidad de número de la especie χ

$$n_\chi = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p_\chi f_\chi, \quad (4.4)$$

mientras que la densidad de energía de la especie χ queda definida por $\rho_\chi = n_\chi E_\chi$, i.e.

$$\rho_\chi = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p_\chi E_\chi f_\chi. \quad (4.5)$$

El espectro del CMB es cercano al espectro de un cuerpo negro, esto implica que las especies del SM coexistían en un baño térmico común en el Universo temprano. Esto es lo que nos permite usar termodinámica en equilibrio para el estudio del universo temprano. Entonces, usando la función de distribución $f_\chi = 1/e^{E_\chi/T} \pm 1$, con T la temperatura del baño térmico en común, podemos encontrar soluciones para (4.4) y (4.5). Usando los dos casos límites de la relación de dispersión $E_\chi^2 = \mathbf{p}_\chi^2 + m_\chi^2$, con m_χ la masa de la especie de partícula, siendo uno el régimen ultra-relativista (radiación) y el otro el límite no-relativista (materia), podemos obtener las soluciones encontradas al computar la integral (4.4):

$$n_\chi(T) = \begin{cases} g \left(\frac{m_\chi T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_\chi/T} & \text{estados no-relativistas } T \ll m, \\ \frac{\zeta_3}{\pi^2} g T^3 & \text{bosones relativistas } T \gg m, \\ \frac{3}{4} \frac{\zeta_3}{\pi^2} g T^3 & \text{fermiones relativistas } T \gg m, \end{cases} \quad (4.6)$$

con ζ la función zeta de Riemann, cuyo valor $\zeta_3 = 1.2$. Igualmente, podemos computar las soluciones para (4.5)

$$\rho_\chi(T) = \begin{cases} m_\chi g \left(\frac{m_\chi T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_\chi/T} & \text{estados no-relativistas } T \ll m, \\ \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{bosones relativistas } T \gg m, \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{fermiones relativistas } T \gg m. \end{cases} \quad (4.7)$$

Otra cosa a notar son los números activos de grados de libertad en nuestro sistema, los cuales también dependen de la temperatura. Por ejemplo, arriba de la escala electrodébil, el número efectivo de grados de libertad incluyen todas las partículas del SM. Entonces, para incluir diferentes estados con diferentes temperaturas, definimos g_{eff} como una suma con peso con la temperatura específica para cada componente

$$g_{\text{eff}} \equiv \sum_{\text{bosones}} g_b \frac{T_b^4}{T^4} + \sum_{\text{fermiones}} \frac{7}{8} g_f \frac{T_f^4}{T^4}, \quad (4.8)$$

con $g_b = g_{\text{gluón}} + g_{\text{débil}} + g_{\text{fotón}} + g_{\text{Higgs}} = 28$, y $g_f = g_{\text{quark}} + g_{\text{lepton}} + g_{\text{neutrino}} = 90$. Para el contenido del SM a la misma temperatura tenemos

$$g_{\text{eff}}(T > 175 \text{ GeV}) = 106.75, \quad (4.9)$$

y así cuando reducimos la temperatura, este número baja. Para el día de hoy el valor que tenemos es

$$g_{\text{eff}}(T_0) = 3.6. \quad (4.10)$$

En la Fig. 4.1 se encuentran el valor de los grados de libertad efectivos a lo largo de la historia térmica del universo. La curva negra representa la función definida en (4.8).

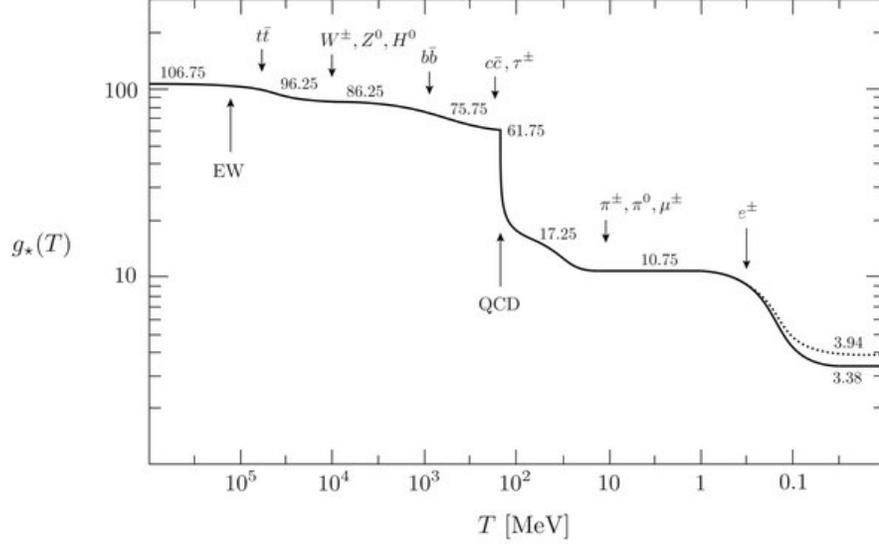


Figura 4.1: Grados de libertad efectivos como función de la temperatura. Los valores numéricos son mostrados antes y después de cada transición de fase. Imagen tomada de [22].

Finalmente, podemos revisar el caso del Universo temprano dominado por radiación, donde según (4.7), escribimos $\rho_r = \pi^2/30 g_{\text{eff}} T^4$ y luego lo sustituimos en la ecuación (4.1) para obtener

$$H^2 = \frac{\rho_r}{3M_{Pl}^2} = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}} T^4. \quad (4.11)$$

Esta ecuación es importante ya que relaciona tiempo, temperatura y constante de Hubble como tres posibles escalas para la evolución del Universo.

4.1.2 Condición de desacoplamiento de reliquias

De la sección anterior concluimos que las densidades de todas las partículas creadas de un baño térmico común en el Universo temprano están regidas por la ecuación (4.7) y además, este comportamiento es descrito por la ecuación de Boltzmann. Solucionar esta ecuación podría convertirse en un serio problema numérico. Por lo tanto, tomaremos un camino distinto al llevar la cuenta de los grados de libertad relevantes $g(T)$ y computar la densidad de reliquia de la especie χ como función de la temperatura. Este camino a su vez nos obligará a reconocer cuales partículas están en equilibrio dada una temperatura en particular.

Por ejemplo, para el caso de la reliquia del CMB, una reliquia de fotones, debemos tomar en cuenta los procesos de dispersión que mantienen los neutrinos, fotones y electrones en equilibrio térmico. Esto es

$$\bar{\nu}_e e^- \rightarrow W^* \rightarrow \bar{\nu}_e e^- \quad y \quad e^- \gamma \rightarrow e^* \rightarrow e^- \gamma, \quad (4.12)$$

y tal como vimos en la sección 3.3.4, estos procesos de dispersión tendrán asociados una sección eficaz dada por

$$\sigma_{\nu e}(T) = \frac{\pi\alpha^2 T^2}{s_w^4 m_w^4} \ll \sigma_{\gamma e}(T) = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}, \quad (4.13)$$

donde $g \equiv e/\sin\theta_w \equiv e/s_w$ con $s_w^2 \approx 1/4$ define el acoplamiento débil $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ y el factor π aparece debido a la integración angular.

La tasa de interacción

$$\Gamma \equiv \langle\sigma v\rangle n \quad (4.14)$$

nos indica la probabilidad de que los procesos de dispersión (4.12) ocurran. Es una combinación de la sección eficaz, la densidad de número y la velocidad. Ya que el Universo se expande, la densidad de neutrinos, fotones y leptones bajará al punto donde estos procesos ya no ocurran. En consecuencia, podemos cuantificar esto en una condición: se detendrá el equilibrio entre fotones, neutrinos y leptones cuando sus respectivas tasas de interacción se encuentren por debajo de la expansión de Hubble, esto es

$$\frac{\Gamma(T_{\text{dec}})}{H(T_{\text{dec}})} < 1, \quad (4.15)$$

con T_{dec} la temperatura de desacoplamiento del baño térmico.

4.2 Paradigma WIMP

Con el desarrollo estudiado hasta ahora, pasaremos a estudiar la densidad de una partícula hipotética y masiva que interactúa débilmente (Weakly Interacting Massive Particle) como principal agente de materia oscura. Supondremos que fue creada térmicamente en el Universo temprano y además, que su masa es del orden de GeV. Esto último, para garantizar que las WIMPs sean una especie no-relativista al momento de desacoplarse del baño térmico y de esta manera, satisfacer las constricciones impuestas por el modelo Λ CDM.

4.2.1 Milagro WIMP

Empezamos dando por hecho que existe una interacción que mantiene a la partícula de materia oscura χ en el baño térmico con las demás partículas del SM. Al momento del desacoplamiento la materia oscura se “congela”, con una densidad específica. Este proceso es descrito por el elemento de matriz de la *aniquilación de materia oscura*

$$\chi\chi \rightarrow f\bar{f}, \quad (4.16)$$

con f un fermión del SM. Ahora, suponemos que la tasa de interacción es mediada por *interacciones electrodébiles*, así la dependencia en la temperatura de la ecuación (4.13) es remplazada por la

masa de materia oscura m_χ . Permitimos el uso de la masa del bosón Z y el acoplamiento débil que corresponde a la sección eficaz de aniquilación

$$\sigma_{\chi\chi}(T \ll m_\chi) = \frac{\pi\alpha^2 m_\chi^2}{c_w^4 m_Z^4}, \quad (4.17)$$

donde hemos combinado la masa de materia oscura m_χ con una interacción débil mediante el factor $1/m_Z$. Antes de pasar a computar la tasa de interacción, debemos encontrar la velocidad de las partículas. Pues, como buscamos que sean no-relativistas, $v \neq 1$. Debido al número limitado de escalas de energía en nuestra descripción, podemos estimar

$$\frac{m_\chi}{2} \langle v^2 \rangle \iff \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2T}{m_\chi}}. \quad (4.18)$$

Usando la ecuación de tasa de interacción (4.14) y las ecuaciones (4.6) y (4.18), podemos escribir

$$\Gamma = \langle \sigma_{\chi\chi} v \rangle n_\chi = \sigma_{\chi\chi} \sqrt{\frac{2T}{m_\chi}} g \left(\frac{m_\chi T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_\chi/T}, \quad (4.19)$$

y como estamos estudiando justo la etapa de desacoplamiento, debe cumplirse la igualdad en (4.15). Así, podemos igualar la ecuación anterior con la expresión encontrada en (4.11) para obtener

$$\sigma_{\chi\chi} \sqrt{\frac{2T_{\text{dec}}}{m_\chi}} g \left(\frac{m_\chi T_{\text{dec}}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_\chi/T_{\text{dec}}} = H = \frac{\pi}{3\sqrt{10} M_{\text{Pl}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} T_{\text{dec}}^2, \quad (4.20)$$

luego podemos despejar $e^{-x_{\text{dec}}}$, con $x_{\text{dec}} \equiv m_\chi/T$

$$e^{-x_{\text{dec}}} = 1.8 \frac{\sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})}}{m_\chi M_{\text{Pl}} \sigma_{\chi\chi}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{10} \alpha^2} \frac{c_w^4 m_Z^4}{m_\chi^3 M_{\text{Pl}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})}, \quad (4.21)$$

donde en la segunda igualdad se sustituyó el valor de la sección eficaz (4.17). Finalmente, solo hace falta considerar los grados de libertad efectivos, que en el rango de $T_{\text{dec}} = 5 - 80$ GeV, los bosones débiles y los top quarks ya se han desacoplado. En consecuencia, observando la Fig. (4.1), tenemos que $g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}}) = 86.25$ y sustituyéndolo en la ecuación anterior arroja

$$e^{-x_{\text{dec}}} \approx 6 \times 10^5 \frac{m_Z^4}{m_\chi^3 M_{\text{Pl}}} = \begin{cases} 2 \times 10^{-9} \implies m_\chi = 10 \text{ GeV} \\ 6 \times 10^{-11} \implies m_\chi = 30 \text{ GeV} \\ 8 \times 10^{-12} \implies m_\chi = 60 \text{ GeV}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Como punto de referencia usaremos $m_\chi = 30 \text{ GeV} \implies x_{\text{dec}} \approx 23$. Como siguiente paso, calculamos la densidad de número al instante de desacoplamiento

$$n_\chi(T_{\text{dec}}) = g \left(\frac{m_\chi T_{\text{dec}}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-x_{\text{dec}}} = \frac{\pi}{3\sqrt{20} M_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{m_\chi}{T_{\text{dec}}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} T_{\text{dec}}^2 \frac{c_w^4 m_Z^4}{\pi \alpha^2 m_\chi^2} \approx \frac{10^3}{x_{\text{dec}}^{3/2}} \frac{m_Z^4}{M_{\text{Pl}}}. \quad (4.23)$$

El último paso antes de computar la densidad de reliquia es notar que para un desacoplamiento no relativista debemos evolucionar la densidad de energía a la temperatura actual T_0 . Comenzamos con el hecho de que una vez que la especie de partícula se ha desacoplado, su densidad de número decae como $1/a^3$ (tal como se estudió en el capítulo 2, en la ecuación (2.17)). Por lo tanto, es correcto escribir

$$\rho_\chi(T_0) = m_\chi n_\chi(T_0) = m_\chi n_\chi(T_{\text{dec}}) \left(\frac{a(T_{\text{dec}})}{a(T_0)} \right)^3. \quad (4.24)$$

Para traducir esta dependencia del factor de escala a una dependencia de temperatura, citaremos el siguiente resultado termodinámico

$$a(T) \propto \frac{1}{T}, \quad (4.25)$$

resultado que se usa a entropía constante. Esta relación es correcta si los grados de libertad que describen la densidad de energía del Universo no cambian. Una vez teniendo este resultado, tomamos en cuenta los grados de libertad activos y su temperatura individual para escribir precisamente

$$\left(\frac{a(T_{\text{dec}})T_{\text{dec}}}{a(T_0)T_0} \right)^3 = \frac{g_{\text{eff}}(T_0)}{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} \approx \frac{3.6}{100} = \frac{1}{28}, \quad (4.26)$$

que aunque no son exactamente los grados de libertad que habíamos planteado, a temperaturas $T_{\text{dec}} > 5 \text{ GeV}$ podemos tomar un aproximado sobre el número de neutrinos desacoplados. Usamos este resultado para obtener la densidad de energía hoy

$$\rho_\chi(T_0) = m_\chi \left(\frac{a(T_{\text{dec}})T_{\text{dec}}}{a(T_0)T_0} \right)^3 \frac{T_0^3}{T_{\text{dec}}^3} n_\chi(T_{\text{dec}}) = T_0^3 \frac{n_\chi(T_{\text{dec}}) x_{\text{dec}}^3}{28 m_\chi^2} \approx 3 \times 10^3 \frac{m_Z^4}{m_\chi^2 M_{\text{Pl}}^2} T_0^3, \quad (4.27)$$

donde en la segunda igualdad usamos $m_\chi = x_{\text{dec}} T_{\text{dec}}$ y en la aproximación usamos la ecuación (4.23).

Finalmente y después de un arduo trabajo, computamos la densidad de reliquia para la materia oscura WIMP

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{\rho_\chi(T_0) h^2}{3 M_{\text{Pl}}^2 H_0^2} \approx 3 \times 10^3 \frac{7 \times 10^7 \text{ GeV}^3}{2 \times 10^{18}} \frac{1}{m_\chi^2} \frac{10^9}{5 \text{ GeV}}, \quad (4.28)$$

simplificando esta expresión, obtenemos

$$\Omega_\chi h^2 \approx 0.12 \left(\frac{13 \text{ GeV}}{m_\chi} \right)^2. \quad (4.29)$$

Este resultado es conocido como el *milagro WIMP*, pues si uno asume un agente de materia oscura con una masa en la escala electrodébil y un proceso de aniquilación mediado por la interacción débil, la densidad de reliquia obtenida resulta ser justamente la observada.

4.2.2 Detección directa y actual estatus de los modelos WIMPs

Por casi tres décadas, la búsqueda experimental de materia oscura ha continuado con su actividad intensa. Y es seguro decir, que ha habido un progreso significativo en los modelos de WIMPs. En esta sección repasaremos a aquellas posibles señales de WIMPs que se han visto en experimentos de detección directa y la situación actual de dichos modelos de materia oscura.

Una de las más importantes estrategias para la búsqueda de WIMPs como candidatas a materia oscura es su detección directa por medio de dispersiones elásticas en nucleones [23, 24]. Para las WIMPs que interactúan con los bariones, este proceso puede llevar a una clara señal de fondo en detectores subterráneos.

La dispersión de partículas de materia oscura en nucleones puede ser detectada vía producción de luz (centelleo de fotones), carga (ionización de átomos en un material) o calor (fonones en detectores de cristal). Usando una de estas técnicas de discriminación se extraen posibles señales de detección de WIMPs. Dependiendo de la técnica usada, se usan una variedad de materiales objetivo para la búsqueda. Por ejemplo, los *cristales de centelleo* son usados para las señales débiles de dispersión de núcleo en los experimentos de DAMA/LIBRA [25]. Por casi dos décadas, estos experimentos han reportado señales de partículas tipo materia oscura en un intervalo de confianza de 9.3σ . La masa de estas partículas se encuentran entre los 10 a 15 GeV o entre 60 a 100 GeV dependiendo del núcleo utilizado en el proceso de dispersión. Sin embargo, estos resultados contrastan con aquellos publicados con otras colaboraciones como: LUX [7], XENON1T [8] y PandaX-II [6].

Las señales de carga de las dispersiones de núcleo de materia oscura se miden por detectores germanio de baja temperatura. Esta técnica ha sido empleada por la colaboración CoGeNT y llevó a la observación de una partícula consistente con la hipótesis WIMP para la materia oscura, con una masa entre los 7 y 10 GeV [26]. Pero, tal como en el caso anterior, estos resultados han sido desfavorecidos por otros detectores de germanio, como CDEX [27] y MALBEK [28].

Por otro lado, las señales de calor emitidas por las dispersiones de núcleo de materia oscura en cristales pueden proveer constricciones relevantes para la búsqueda de WIMPs. En el 2013 el detector CDMS-Si publicó sus resultados [29] reportando la observación de tres posibles eventos candidatos a detección de WIMPs. Sin embargo, estos resultados no fueron confirmados por los experimentos posteriores CDMS-II y Super CDMS. Otra señal tipo calor fue obtenida por la colaboración CRESST-II en 2011 [30]. Se observó un exceso en el número de eventos en dos rangos de masa alrededor de 10 GeV y 25 GeV en un intervalo de confianza de 4.2σ y 4.7σ respectivamente. No obstante, como fue puntualizado después en [31], este exceso se debió a información faltante del fondo.

El límite más riguroso para la sección eficaz σ_p de materia oscura se encuentra de resultados de búsqueda de dicha materia en detectores de xenon: XENON1T (el más reciente y nuevo), LUX y PandaX-II. Todos ellos presentando una mejora de los límites presentados por la colaboración de XENON100.

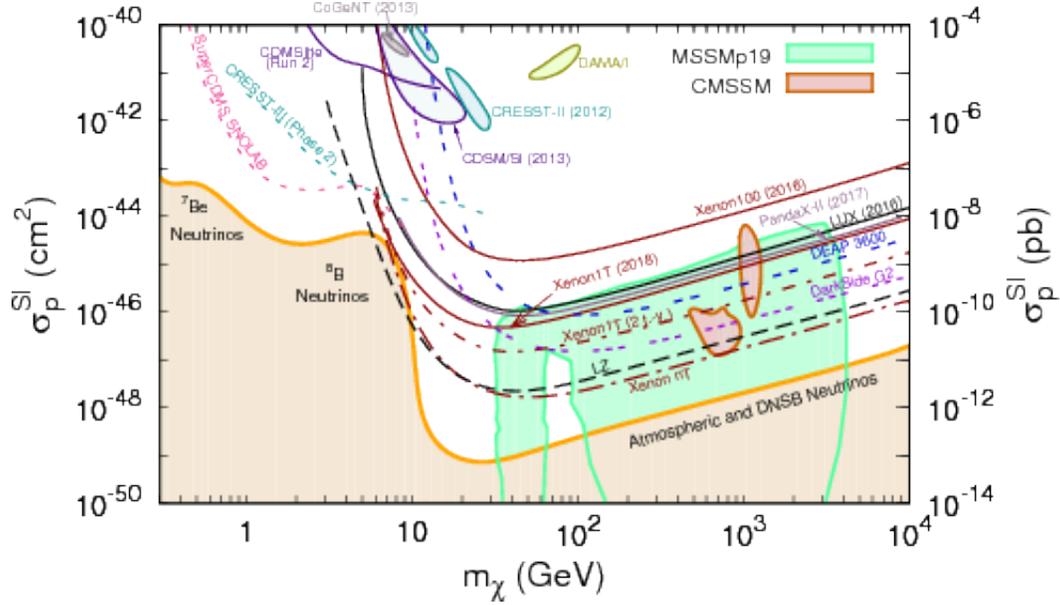


Figura 4.2: Límites actuales en la sección eficaz de dispersión de materia oscura en nucleones dadas por múltiples colaboraciones. La zonas sombreadas en la parte superior de la gráfica corresponden a regiones favorecidas para la detección de materia oscura. La parte sombreada debajo de la línea naranja corresponde al irreducible fondo de neutrinos. Gráfica tomada de <https://inspirehep.net/literature/1610814>.

El resumen del actual estatus experimental de la búsqueda de partículas de materia oscura se encuentra en Fig.(4.2), donde se muestra el actual límite en la sección eficaz como función de la masa de partícula de materia oscura. Las anomalías reportadas en el pasado por algunas colaboraciones, jamás fueron confirmadas. Actualmente se espera una mejora de esta gráfica por el futuro detector de xenon DARWIN [32], el cuál algunos llaman la última esperanza de detección de alguna partícula de materia oscura bajo el esquema de las WIMPs.

4.3 Paradigma ALP

Desde los primeros momentos de su aparición, el axión de la cromodinámica cuántica (QCD) ha sido propuesto como un buen candidato a materia oscura. Este tuvo su primera aparición en la solución elegante de Peccei y Quinn para el problema CP en la interacción fuerte [33]. Con la ayuda de la teoría de cuerdas y la abundancia de partículas tipo axión (ALPs), el axión ha llegado a jugar un rol importante en modelos de inflación y de generación de condiciones iniciales cosmológicas. Debido a esto y a la ausencia de evidencias para los modelos WIMP de materia oscura, es que los modelos de axión han cobrado más relevancia en los últimos años.

En esta sección, primeramente repasaremos la aparición del axión en QCD. Para luego repasar un posible mecanismo de producción cosmológico para un ALP; producción por desalineación.

Cuya principal diferencia con aquellos modelos de WIMPs radica en su producción no térmica. La discusión que se muestra a continuación, está basada en las notas [34].

4.3.1 El axión de QCD

La cromodinámica cuántica es la teoría cuántica de campos que explica las interacciones fuertes. QCD ha probado ser muy exitosa a nivel perturbativo, pero al momento de hacer estudios no perturbativos nos encontramos con el llamado problema CP en las interacciones fuertes. El problema CP surge debido a la estructura no trivial del vacío en QCD. Específicamente, el Lagrangiano de QCD puede contener el término adicional

$$\mathcal{L}_{QCD} \supset \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} \text{Tr} G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

donde g_s es el acoplamiento SU(3), $G_{\mu\nu}$ el tensor de fuerza para el campo del gluón. En principio, el término θ puede entenderse como un parámetro que puede adquirir cualquier valor.

Para encontrar los eigenvalores de masa, es decir, para diagonalizar las matrices de masa de quarks, se debe hacer una rotación axial. Esto implica un cambio en el valor de la fase del determinante de la matriz de masa de los quarks. En consecuencia, la contribución de esta rotación al término (4.30) es la de modificar el parámetro θ como

$$\bar{\theta} = \theta + \text{Arg} \det M, \quad (4.31)$$

donde M es la matriz de masa de los quarks. Es así como surge el problema, pues si $\bar{\theta} \neq 0$ entonces se rompe la simetría CP en QCD. La consecuencia más importante de esta violación es que predice un momento dipolar eléctrico para el neutrón de $d \approx 5 \times 10^{-16} e \text{ cm}$. El valor experimental para este momento dipolar posee una cota de $d_n < 0.63 \times 10^{-25} e \text{ cm}$. Esto permite obtener una cota para $\bar{\theta} < 10^{-9}$. La razón por la cual este parámetro es tan pequeño es conocido como el problema CP en las interacciones fuertes. Una supresión tan grande de $\bar{\theta}$ implica una cancelación entre θ y $\text{Arg} \det M$, pero no existe razón alguna para pensar en dicha cancelación. Esto en física es lo que se conoce como *fine-tuning*, es decir, una fijación muy sensible pero poco natural de parámetros con la finalidad de ajustarse a los datos empíricos.

La solución a este problema vino de la mano de la existencia de una nueva simetría global en la naturaleza llamada simetría PQ, por los autores Peccei y Quinn. Al romperse espontáneamente la simetría PQ (forma similar al mecanismo de Higgs), a una escala de energía desconocida, por decir f_a , aparece un pseudo Goldstone bosón llamado axión. Se predice que los axiones son neutrales en carga, además de tener una muy pequeña sección eficaz de interacción con la fuerza fuerte y débil, haciéndolos muy difíciles de detectar.

Previo al rompimiento espontáneo de PQ, los axiones poseen masa nula y se acoplan a los gluones bajo el término de interacción

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{f_a} \frac{g_s^2}{32\pi^2} a \text{Tr} G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

Es de notar que este término es parecido a (4.30), con la diferencia que en el último se incluye el campo del axión (a). Al romperse espontáneamente la simetría PQ, el axión adquiere un valor esperado de vacío dado por

$$\langle a \rangle = \bar{\theta} f_a, \quad (4.33)$$

lográndose así la cancelación del término (4.30), solucionando el problema CP en las interacciones fuertes. Al romperse espontáneamente la simetría PQ global, el axión adquiere una masa de

$$m_a \approx 0.62 \text{ eV} \frac{10^7 \text{ GeV}}{f_a}. \quad (4.34)$$

En conclusión, el axión es una partícula neutra en carga, difícil de detectar, casi invisible a la materia bariónica, estable, es decir, una perfecta candidata a partícula de materia oscura.

4.3.2 Producción por desalineación

Después de reconocer a los axiones como posibles partículas candidatas a materia oscura, una idea natural es preguntarse cómo se pueden producir estas partículas a lo largo de la historia cosmológica. Inmediatamente, podríamos pensar en una producción térmica como en el caso de las WIMPs, esto es, un desacoplamiento de la bola de fuego primigenia. Sin embargo, esto implica a su vez axiones como modelo a materia oscura relativista y al querer entrar en contacto con Λ CDM, necesitamos un mecanismo de producción de materia oscura fría. Es bajo este contexto donde aparece el mecanismo de desalineación, el cual solo depende de interacciones gravitacionales y por consecuente, no depende de una producción térmica.

Para entender el mecanismo, primero necesitamos la ecuación que describa la dinámica de un campo escalar libre ϕ en un Universo homogéneo e isotrópico y en expansión. Esta es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_a^2\phi = 0, \quad (4.35)$$

con ϕ representando el campo del axión y m_a la masa del axión. El método para obtener esta ecuación será desarrollado a detalle en el capítulo posterior, por ahora será suficiente notar que resulta una ecuación de oscilador armónico amortiguado. En este caso, la ecuación (4.35) tiene una solución exacta

$$\phi(t) = a^{-3/2}(t/t_i)^{1/2} (C_1 J_n(m_a t) + C_2 Y_n(m_a t)), \quad (4.36)$$

donde $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ corresponden a funciones de Bessel de primer y segundo orden, y t_i el tiempo inicial. Los coeficientes C_1 y C_2 quedan determinados por las condiciones iniciales. Para los axiones producidos por mecanismo de desalineación, las condiciones iniciales se pueden interpretar como $\langle \phi \rangle = \phi(t_i)$ y quedan bien definidas cuando $H(t_i) \gg m_a$

$$\phi(t_i) = f_a \theta_i, \quad \dot{\phi}(t_i) = 0. \quad (4.37)$$

La producción por desalineación de axiones de materia oscura puede ser obtenida dada estas condiciones iniciales. La idea se puede entender de la siguiente manera: cuando se rompe la simetría PQ,

la tasa de Hubble es mucho mayor que la masa del axi3n y el campo se encuentra sobreamortiguado. Esto marca la condici3n $\dot{\phi} = 0$ inicialmente. El valor homog3neo del campo queda determinado por el evento de ruptura de simetría. El t3rmino “desalineaci3n” se refiere a este escenario, donde existe un desplazamiento inicial el campo del axi3n y luego ocurre un “alineamiento de vacío”, donde el valor inicial que toma el campo se relaja al m3nimo del potencial. Cuando $H > m_a$, el campo de axi3n se encuentra sobreamortiguado y se encuentra “congelado” por su valor inicial. La ecuaci3n de estado a estos tiempos es $w_a = -1$, y el axi3n se comporta como una energía de vacío. Es por esto que los axiones sirven como modelos de energía oscura. Tiempo despu3s, cuando $H < m_a$, el campo de axi3n se encuentra subamortiguado y las oscilaciones comienzan. La ecuaci3n de estado oscila alrededor de $w_a = 0$, tal como lo hace la materia ordinaria y el motivo principal de considerar a los axiones como candidatos a materia oscura.

La transici3n en la ecuaci3n de estado del axi3n puede ser aproximada si definimos un valor fijo en el factor de escala a_{osc} , y simplemente decimos que el comportamiento de ρ_a a tiempos posteriores ser3

$$\rho_a(a) \approx \rho_a(a_{osc})(a_{osc}/a)^3, \quad (4.38)$$

esto recordando que para un universo dominado por materia la densidad de energía escala como $1/a^3$. Entonces, si la densidad de energía y presi3n del campo de axi3n son

$$\rho_a = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_a^2\phi^2, \quad P_a = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m_a^2\phi^2, \quad (4.39)$$

podemos decir que la densidad de energía es constante hasta a_{osc} y por lo tanto, usando las condiciones en (4.37), aproximamos la densidad de energía al momento de la transici3n de estado como

$$\rho_a(a_{osc}) \approx m_a^2\langle\phi\rangle^2/2. \quad (4.40)$$

Este resultado es importante, pues nos dice que la densidad de energía en la poblaci3n por mecanismo de desalineaci3n queda determinada por el desplazamiento inicial del campo y la masa únicamente.

Capítulo 5

Materia oscura dinámica

Comúnmente, los modelos propuestos que buscan revelar la naturaleza de la materia oscura consisten en una única especie de partícula χ estable. Esto implica una restricción para el tiempo de vida media de la especie de partícula, dado por las observaciones astrofísicas [35],

$$\tau_\chi \gtrsim 10^{26} \text{ s.} \quad (5.1)$$

Sin embargo, se puede descartar la estabilidad si la abundancia cosmológica de la componente de materia oscura al tiempo de decaer es lo suficientemente pequeña. Se aprovechará este hecho para analizar la propuesta de K. Dienes en [9], donde la materia oscura consiste en un conjunto de campos con diferentes masas y abundancias. Además, en lugar de imponer la estabilidad para cada campo, se requiere que aquellas componentes más estables sean las más abundantes. En contraste, las abundancias de las componentes inestables se suprimen de acuerdo al tamaño de sus respectivas tasas de decaimiento. Este balance hace posible que las restricciones fenomenológicas impuestas por los efectos de decaimiento de materia oscura se satisfagan.

5.1 Aspectos teóricos generales

Para ser más específicos, supongamos que la materia oscura consiste de N campos, con $N \gg 1$. Debido a la multitud de campos de materia oscura, ningún campo en particular necesita cargar consigo la abundancia completa Ω_{CDM} observada por el satélite Planck, siempre y cuando la suma de las abundancias individuales coincida con Ω_{CDM} . En particular, cada campo puede poseer una abundancia muy baja. Por supuesto, si todos estos campos tienen la misma vida media, entonces deben continuar siendo estables para evadir los problemas con las observaciones astrofísicas. Sin embargo, los campos pueden poseer diferentes vidas medias, siempre y cuando aquellos con abundancias más grandes tengan vidas medias más largas. Desde esta perspectiva, el escenario tradicional de materia oscura es simplemente un caso límite donde $N = 1$.

5.1.1 Dinámica de los campos ϕ_i de materia oscura

Suponemos que si la materia oscura está compuesta por nuevas partículas, entonces el esquema está descrito por campos escalares ϕ_i con sus correspondientes masas m_i y anchuras de partícula Γ_i . También, damos por hecho que estas anchuras Γ_i corresponden a procesos de decaimiento directo sin pasar por estados intermedios, i.e. $\phi_i \rightarrow \text{SM}$. Además, por simplicidad, modelamos el Universo por la cosmología estándar FLRW, que progresa a través de cuatro etapas distintas: inflación, recalentamiento (la cual consideraremos como una fase dominada por materia, donde esta es comprendida por las oscilaciones coherentes del campo inflacionario), una etapa de radiación y una última etapa dominada por materia.

La dinámica de un campo escalar bajo la cosmología estándar está descrita por la acción [36]

$$S = \int d^3x dt a^3(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2a^2(t)} \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (5.2)$$

Ahora, invocando el principio cosmológico, diremos que el campo de materia oscura ϕ tiene variaciones espaciales despreciables, i.e. $\nabla\phi = 0$. En consecuencia, la acción (5.2) se reduce a

$$S = \int d^3x dt a^3(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (5.3)$$

Reconocemos directamente la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = a^3(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$. Entonces, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.5), obtenemos la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (5.4)$$

Esta ecuación de movimiento corresponde a la de un oscilador armónico amortiguado, ver Apéndice C, y son las oscilaciones coherentes del campo ϕ las que dan origen a la densidad de energía asociada a este mismo. Sin embargo, estas oscilaciones no son eternas, pues de existir acoplamientos de otros campos con ϕ , entonces también existe una dinámica asociada al decaimiento de ϕ en otras especies más ligeras. Por lo tanto, en el término de amortiguamiento en la ecuación de movimiento es preciso considerar el decaimiento de ϕ , Γ . De esta manera, para cada campo ϕ_i se satisface la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi}_i + [3H + \Gamma_i]\dot{\phi}_i + m_i^2\phi_i = 0. \quad (5.5)$$

A un tiempo temprano, cuando $3H(t) + \Gamma_i > 2m_i$, el campo ϕ_i no oscila y, por lo tanto, su densidad de energía escala con el tiempo como una energía de vacío. En contraste, a tiempos posteriores, cuando $3H(t) + \Gamma_i < 2m_i$, el campo se encuentra subamortiguado y oscila; a dichos tiempos, su densidad de energía escala como materia. La condición $3H(t) + \Gamma_i = 2m_i$, en consecuencia, determina un “encendido”, donde cada ϕ_i pasa de comportarse como energía oscura a comportarse como materia.

Para encontrar la ecuación de evolución de las abundancias cosmológicas Ω_i asociadas a los campos ϕ_i , primero, exigimos que todas estas abundancias estén inicialmente establecidas en un

tiempo en común t_G . Inmediatamente, se obtiene que las abundancias en nuestro conjunto pueden ser separadas en dos grupos: aquellos estados pesados con masas $3H(t_G) + \Gamma_i < 2m_i$ que empezarán a oscilar simultáneamente y los estados ligeros con $3H(t_G) + \Gamma_i > 2m_i$ que experimentarán un “encendido escalonado” [9]. Por otro lado, de la definición para el parámetro de Hubble en (2.9) y la solución de $a(t)$ en un universo lleno de materia (2.23) y en uno de radiación (2.24), podemos aproximar $H(t) \sim 1/t$ en toda época no inflacionaria. Además, si suponemos que los procesos de decaimiento solo son relevantes a tiempos tardíos y no afectan la dinámica de los campos en su tiempo de encendido, se cumple que $\Gamma_i \ll H(t)$ cuando $H(t) \sim m_i$ y vemos que el encendido para cada campo ϕ_i escala como $t_i \sim 1/m_i$. Debido a esto, los estados más pesados de materia oscura dinámica se encienden primero y los estados ligeros después.

Para continuar, multiplicamos la ecuación (5.5) por $\dot{\phi}_i$ y usando la expresión para la densidad de energía $\rho_i = 1/2m_i^2\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}^2$ y el teorema virial $m_i^2\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}^2$, obtenemos

$$\dot{\rho}_i + [3H + \Gamma_i]\rho_i = 0. \quad (5.6)$$

Es de notar que esta ecuación corresponde al caso de considerar la ecuación de continuidad con un término de fricción Γ_i e imponer $w = 0$, i.e.

$$\dot{\rho}_i + [3H + \Gamma_i](\rho_i + P_i) = 0 \iff \dot{\rho}_i + [3H + \Gamma_i](\rho_i + w\rho_i) = 0. \quad (5.7)$$

Volviendo a la ecuación (5.6), podemos dividir la expresión entre H^2

$$\dot{\rho}_i + [3H + \Gamma_i]\rho_i = 0 \iff \frac{\dot{\rho}_i}{H^2} + [3H + \Gamma_i]\frac{\rho_i}{H^2} = 0. \quad (5.8)$$

Por otro lado, si la densidad crítica de energía es $\rho_c = 3H^2/8\pi \sim H^2$ y la abundancia se define según (2.29), podemos aproximar la abundancia como

$$\Omega_i \sim \frac{\rho_i}{H^2} \implies \dot{\Omega}_i \sim \frac{\dot{\rho}_i H^2 - 2H\dot{H}\rho_i}{H^4} = \frac{\dot{\rho}_i}{H^2} - \frac{2\dot{H}\rho_i}{H^3}. \quad (5.9)$$

Entonces sumamos un cero conveniente a (5.8)

$$\frac{\dot{\rho}_i}{H^2} + [3H + \Gamma_i]\frac{\rho_i}{H^2} + \left(\frac{2\dot{H}\rho_i}{H^3} - \frac{2\dot{H}\rho_i}{H^3} \right) = \frac{\dot{\rho}_i}{H^2} - \frac{2\dot{H}\rho_i}{H^3} + \left(3H + \Gamma_i + \frac{2\dot{H}}{H} \right) \frac{\rho_i}{H^2} = 0, \quad (5.10)$$

para reconocer en esta expresión a Ω_i y $\dot{\Omega}_i$ y de esta forma obtener la ecuación de movimiento para las abundancia de las componentes que se comportan como materia

$$\dot{\Omega}_i + \left(3H + 2\frac{\dot{H}}{H} + \Gamma_i \right) \Omega_i = 0. \quad (5.11)$$

Es muy importante notar algunos detalles sobre la ecuación diferencial (5.11): primero, las soluciones encontradas para Ω_i corresponden únicamente para la abundancia de aquellas componentes

que se comportan como materia, pues para llegar a ella impusimos la condición $w = 0$. Además, para resolverla es necesario indicar explícitamente el parámetro de Hubble $H(t)$ para la época cosmológica de interés, que es independiente de la elección particular de w . Por lo tanto, existe una solución distinta para cada época del Universo. Considerando las épocas de dominio de radiación y materia que sucedieron al termino del periodo inflacionario, proponemos $H \approx \kappa/3t$, con κ una constante específica para cada era cosmológica. Si, además, ignoramos los decaimientos de estas partículas, obtenemos la ecuación diferencial

$$\dot{\Omega}_i + \left(\frac{\kappa - 2}{t}\right) \Omega_i = 0, \quad (5.12)$$

cuya solución es $\Omega \sim (t/t_G)^{2-\kappa}$ (con t_G el tiempo inicial donde se establece la abundancia). Específicamente, los valores que adopta κ a través de la historia del Universo los encontramos dadas las soluciones para $a(t)$ en un universo plano en (2.23) y (2.24),

$$\kappa = \begin{cases} 2 & \text{época de materia y recalentamiento,} \\ 3/2 & \text{época de radiación.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Por lo tanto, las soluciones para (5.12) son

$$\Omega(t) \sim \begin{cases} (t/t_G)^{1/2} & \text{época de radiación,} \\ \text{constante} & \text{recalentamiento y época de materia.} \end{cases} \quad (5.14)$$

Es importante notar que aunque de la ecuación (2.27) se puede concluir que $\Omega_i = \rho_i/\rho_c = 1$ en un universo plano, esto no contradice los resultados en (5.14). El detalle se encuentra en que lo que debe ser igual a 1 es la suma de las abundancias y no cada componente de forma individual. En nuestro caso, estamos encontrando la dinámica de la abundancia únicamente para el fluido cosmológico que se comporta como materia.

Por último, cabe mencionar que las soluciones en (5.14) coinciden con el caso $w = 0$ para la ecuación de evolución temporal de Ω obtenida al considerar que $\rho \sim a^{-3(1+w)}$ de (2.20) y $\rho_c \sim H^2$:

$$\Omega(t) \sim \begin{cases} t^{(1-3w)/2} & \text{época de radiación,} \\ t^{-2w} & \text{recalentamiento y época de materia,} \\ \exp[-3H(1+w)t] & \text{inflación.} \end{cases} \quad (5.15)$$

Por lo tanto, si queremos saber cómo evoluciona la abundancia para algún tipo de fluido cosmológico en una época específica, basta con sustituir el valor correspondiente de w en (5.15). Por ejemplo, en lugar de resolver la ecuación diferencial para $w = -1$ en (5.7), podemos tomar $w = -1$ en (5.15) y, análogo al caso de materia, obtener que para un fluido que se comporta como energía de vacío, la abundancia escala con el tiempo como

$$\Omega(t) \sim \begin{cases} (t/t_G)^2 & \text{época de radiación,} \\ (t/t_G)^2 & \text{recalentamiento y época de materia.} \end{cases} \quad (5.16)$$

5.1.2 La ecuación de estado de la materia oscura dinámica

Con el fin de caracterizar una configuración particular de materia oscura dinámica en cualquier momento del tiempo, y en específico la ecuación de estado para la materia oscura dinámica, introducimos tres parámetros complementarios. Primero, definimos la contribución del conjunto de materia oscura dinámica a la abundancia total de reliquia de materia oscura. Esto es simplemente la suma de las contribuciones Ω_i de las componentes individuales

$$\Omega_{\text{tot}} \equiv \sum_i \Omega_i. \quad (5.17)$$

Esta cantidad incluye contribuciones para aquellas componentes del conjunto que ya se encuentran oscilando y se comportan como materia. En contraste, otra característica importante para un conjunto de materia oscura dinámica, es el grado al cual la abundancia total queda distribuida a lo largo de las componentes que la constituyen. Por ejemplo, uno podría preguntarse qué tanto Ω_{tot} queda distribuida entre una componente dominante y el resto. Con esta idea en mira, podemos definir

$$\eta \equiv 1 - \frac{\Omega_{\text{max}}}{\Omega_{\text{tot}}}, \quad (5.18)$$

con $\Omega_{\text{max}} \equiv \max \{\Omega_i\}$, definida como la densidad de reliquia máxima de los múltiples estados de materia oscura. De esta forma, η cuantifica la fracción de la densidad total que no es compuesta por una sola componente dominante: un valor $\eta \ll 1$ indica que una especie particular constituye la totalidad de la abundancia de reliquia de materia oscura, como en los modelos tradicionales, mientras que $\eta \sim \mathcal{O}(1)$ implica que el conjunto completo contribuye no-trivialmente para Ω_{tot} .

Finalmente, podemos definir un parámetro efectivo de ecuación de estado w_{eff} que aplique al conjunto entero de materia oscura dinámica. Para encontrar este w_{eff} , reescribimos la ecuación de continuidad (2.14) como

$$3H(1+w) = -\frac{d \log \rho}{dt}. \quad (5.19)$$

Esta es una relación general que no toma suposiciones sobre la dependencia de w . Así, podemos tomar esto como la definición fundamental de w_{eff} :

$$w_{\text{eff}} \equiv -\left(\frac{1}{3H} \frac{d \log \rho_{\text{tot}}}{dt} + 1\right). \quad (5.20)$$

Específicamente, podemos expresar (5.20) en función de la abundancia de reliquia para cada era cosmológica (dominio de materia o radiación), primero sustituyendo el valor de $H = \kappa/3t$:

$$\begin{aligned} w_{\text{eff}} &= -\left(\frac{1}{3H} \frac{d \log \rho_{\text{tot}}}{dt} + 1\right) = -\left(\frac{t}{\kappa} \frac{d \log \rho_{\text{tot}}}{dt} + 1\right) = -\left(\frac{1}{\kappa} \frac{d \log \rho_{\text{tot}}}{d \log t} + 1\right) \\ &= \frac{-1}{\kappa} \frac{1}{d \log t} (d \log \rho_{\text{tot}} + \kappa d \log t) = \frac{-1}{\kappa} \frac{1}{d \log t} \left(\frac{d \rho_{\text{tot}}}{\rho_{\text{tot}}} + \kappa \frac{dt}{t}\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Usando el ansatz $H = \kappa/3t$ encontramos que

$$t = \frac{\kappa}{3H} \implies dt = -\kappa \frac{dH}{3H^2} = -t \frac{dH}{H}, \quad (5.22)$$

para sustituirlos en (5.21) y obtener que

$$w_{\text{eff}} = \frac{-1}{\kappa} \frac{1}{d \log t} \left(\frac{d\rho_{\text{tot}}}{\rho_{\text{tot}}} - \kappa \frac{dH}{H} \right). \quad (5.23)$$

Por otro lado, usando la definición de la abundancia, $\Omega_{\text{tot}} = 8\pi\rho_{\text{tot}}/3H^2$, podemos escribir

$$d \log \Omega_{\text{tot}} = \frac{d\Omega_{\text{tot}}}{\Omega_{\text{tot}}} = \frac{d\rho_{\text{tot}}}{\rho_{\text{tot}}} - 2 \frac{dH}{H}. \quad (5.24)$$

Reconocemos esta cantidad en la expresión (5.23) para $\kappa = 2$. Entonces, sustituyendo los valores que adopta κ en (5.13), escribimos el parámetro efectivo como

$$w_{\text{eff}} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(\frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{d \log t} \right) & \text{recalentamiento y época de materia,} \\ -\frac{2}{3} \left(\frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{d \log t} \right) + \frac{1}{3} & \text{época de radiación.} \end{cases} \quad (5.25)$$

El parámetro w_{eff} continua teniendo una interpretación directa como un parámetro de ecuación de estado relacionando densidad de energía con presión, a pesar de ser un parámetro dependiente del tiempo.

Después de definir estas cantidades, es sencillo evaluarlas como funciones del tiempo. Para ser específicos, enfoquémonos en la evolución del conjunto de materia oscura dinámica durante la época actual, i.e. la época de dominio de materia¹. Tomando la aproximación de que el decaimiento de cada ϕ_i puede ser tomado instantáneamente a un tiempo $\tau_i = \Gamma_i^{-1}$, i.e. las abundancias permanecen constantes hasta que decaen a un tiempo τ_i , podemos expresarlas como

$$\Omega_i(t) = \Omega_i \Theta(\tau_i - t), \quad (5.26)$$

con $\Theta(\tau_i - t)$ la función de Heaviside, definida como

$$\Theta(\tau_i - t) = \begin{cases} 1 & \tau_i \geq t \\ 0 & \tau_i < t. \end{cases} \quad (5.27)$$

¹A pesar de que actualmente el universo es dominado por una energía de vacío, esta se volvió relevante recientemente, relativo a la edad del universo. Por lo tanto, podemos aproximar la época actual como la etapa final de la época de dominio de materia.

Por lo tanto,

$$\frac{d\Omega_{tot}(t)}{dt} = \sum_i \Omega_i \frac{d}{dt} \Theta(\tau_i - t) = - \sum_i \Omega_i \delta(\tau_i - t), \quad (5.28)$$

con $d\Theta(x)/dx = \delta(x)$. Sin embargo, desde una perspectiva del conjunto entero de estados de materia oscura dinámica, estamos principalmente interesados en el régimen en el cual el número de componentes es grande y el espectro de diferentes vidas medias a través del conjunto tiende a ser continuo. Esto motiva a reescribir (5.28) como

$$\frac{d\Omega_{tot}(t)}{dt} = - \int d\tau \Omega(\tau) n_\tau(\tau) \delta(\tau - t) = -\Omega(t) n_\tau(t), \quad (5.29)$$

donde $n_\tau(\tau)$ es la densidad de estados de materia oscura por unidad de τ , i.e. $n_\tau = N/\tau$. Esto es, estamos suponiendo que el conjunto de abundancias en función de su tiempo de decaimiento no existe de forma discreta, sino que cada abundancia tiene asociado cierto “ancho”. De esta manera, al tomar un límite donde el conjunto queda conformado por un número grande de partículas, la variable τ puede tomarse como una variable continua para describir el comportamiento colectivo de estas.

Para continuar, es necesario especificar las formas funcionales de n_τ y $\Omega(\tau)$. Supongamos que $\Omega(\tau)$ y n_τ pueden ser parametrizadas a través de potencias de Γ de la forma [9]

$$\Omega(\Gamma) \approx A\Gamma^\alpha, \quad n_\Gamma(\Gamma) \approx B\Gamma^\beta, \quad (5.30)$$

con A, B coeficientes (generalmente con dimensiones) y α, β exponentes de escalamiento. Además, donde n_Γ ahora denota la densidad de estados de materia oscura por unidad de Γ , i.e. $n_\Gamma = N/\Gamma = N\tau$. Usando las definiciones de n_Γ y n_τ , podemos escribir

$$\frac{n_\tau}{n_\Gamma} = \frac{N}{N\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} \implies n_\tau = \Gamma^2 n_\Gamma. \quad (5.31)$$

Entonces, sustituyendo (5.30) y (5.31) en (5.29), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d\Omega_{tot}(t)}{dt} = -A\Gamma^\alpha \Gamma^2 B\Gamma^\beta = -AB t^{-\alpha} t^{-\beta} t^{-2} = -AB t^{-\alpha-\beta-2}. \quad (5.32)$$

donde en la segunda igualdad, debido al término $\delta(\tau - t)$ en (5.29), usamos $\Gamma = t^{-1}$. Para encontrar las soluciones de (5.32), imponemos la condición $\Omega_{tot} = \Omega_{\text{CDM}}$, cuando $t = t_{\text{hoy}} \equiv t_0$. Luego, notamos que habrá dos casos: $\alpha + \beta \neq 1$ y $\alpha + \beta = -1$. En el caso $\alpha + \beta \neq 1$, obtenemos

$$\int_{t_0}^t d\Omega_{tot}(t) = \int_{t_0}^t -AB t^{-\alpha-\beta-2} dt \implies \Omega_{tot}(t) - \Omega_{\text{CDM}} = \frac{AB}{\alpha + \beta + 1} \left(t^{-\alpha-\beta-1} - t_0^{-\alpha-\beta-1} \right). \quad (5.33)$$

Por otro lado, para el caso $\alpha + \beta = -1$, encontramos la solución

$$\int_{t_0}^t d\Omega_{tot}(t) = \int_{t_0}^t -AB t^{-\alpha-\beta-2} dt \implies \Omega_{tot}(t) - \Omega_{\text{CDM}} = -AB \log \left(\frac{t}{t_0} \right). \quad (5.34)$$

Podemos resumir estas soluciones para $\Omega_{\text{tot}}(t)$ de la siguiente manera:

$$\Omega_{\text{tot}}(t) = \begin{cases} \Omega_{\text{CDM}} + \frac{AB}{\alpha+\beta+1} \left(t^{-\alpha-\beta-1} - t_0^{-\alpha-\beta-1} \right) & \text{si } \alpha + \beta \neq -1, \\ \Omega_{\text{CDM}} - AB \log\left(\frac{t}{t_0}\right) & \text{si } \alpha + \beta = -1. \end{cases} \quad (5.35)$$

Estos resultados nos indican dos cosas muy importantes: primero, la cantidad Ω_{tot} experimenta una evolución temporal que trasciende a aquella dada por la expansión del Universo y segundo, la dinámica colectiva del conjunto queda caracterizada por la suma $x \equiv \alpha + \beta$ de los exponentes en lugar de cada exponente por separado.

Para encontrar la expresión del parámetro efectivo de ecuación de estado, primero aplicamos la función logaritmo de ambos lados a la ecuación (5.35) y, después, derivamos respecto a $\log t$. En el caso $x \neq -1$, desarrollamos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{d \log t} &= -\frac{t}{2} \frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{dt} = -\frac{t}{2} \frac{d}{dt} \log \left[\Omega_{\text{CDM}} + \frac{AB}{(x+1)t_0^{x+1}} \left(\frac{t^{-(x+1)}}{t_0^{-(x+1)}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{t}{2} \frac{AB}{\Omega_{\text{CDM}} t_0^{1+x}} \left[\frac{(x+1)}{x+1 + \frac{AB}{\Omega_{\text{CDM}} t_0^{x+1}} \left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(x+1)} - 1 \right)} \right] \left(\frac{t^{-(x+2)}}{t_0^{-(x+1)}} \right) \\ &= \frac{AB}{2\Omega_{\text{CDM}} t_0^{1+x}} \left[\frac{x+1}{\left(x+1 - \frac{AB}{\Omega_{\text{CDM}} t_0^{x+1}} \right) (t/t_0)^{1+x} + \frac{AB}{\Omega_{\text{CDM}} t_0^{x+1}}} \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Podemos definir $w_* \equiv \frac{AB}{2\Omega_{\text{CDM}} t_0^{1+x}}$, para reescribir de forma compacta la expresión anterior como

$$-\frac{1}{2} \frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{d \log t} = \frac{(1+x)w_*}{2w_* + (1+x - 2w_*)(t/t_0)^{1+x}}. \quad (5.37)$$

Desarrollar el caso $x = -1$ en (5.35) es más directo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{d \log t} &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d \log t} \left[\log \left(\Omega_{\text{CDM}} - AB \log\left(\frac{t}{t_0}\right) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-AB}{\Omega_{\text{CDM}} - AB \log(t/t_0)} \right) = \frac{AB}{2\Omega_{\text{CDM}}} \left(\frac{1}{1 - \frac{AB}{\Omega_{\text{CDM}}} \log(t/t_0)} \right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

De igual forma, al definir $w_\bullet \equiv \frac{AB}{2\Omega_{\text{CDM}}}$ escribimos

$$-\frac{1}{2} \frac{d \log \Omega_{\text{tot}}}{d \log t} = \frac{w_\bullet}{1 - 2w_\bullet \log(t/t_0)}. \quad (5.39)$$

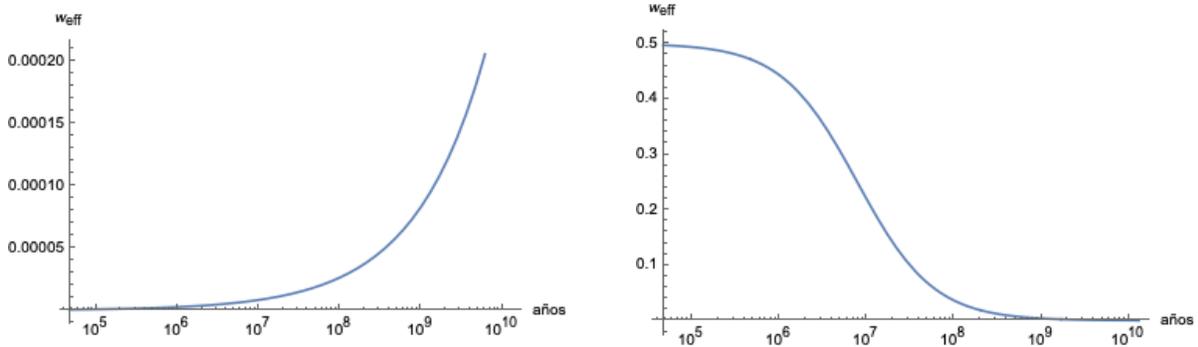


Figura 5.1: El comportamiento del parámetro de ecuación de estado w_{eff} en función del tiempo. La gráfica de la izquierda corresponde al caso $1 + x < 2w_*$ ($x = -1.5$), mientras que la gráfica de la derecha corresponde al caso $1 + x > 2w_*$ ($x = 0$). Para ambos casos, se tomaron los valores $w_* = 0.003$ y $t_0 = 13 \times 10^9$ años.

En resumen, los resultados para el parámetro efectivo de ecuación de estado están dados por

$$w_{\text{eff}}(t) = \begin{cases} \frac{(1+x)w_*}{2w_* + (1+x-2w_*)(t/t_0)^{1+x}}, & \text{si } x \neq -1, \quad \text{con } w_* \equiv \frac{AB}{2\Omega_{\text{CDM}} t_0^{1+x}}. \\ \frac{w_\bullet}{1 - 2w_\bullet \log(t/t_0)}, & \text{si } x = -1, \quad \text{con } w_\bullet \equiv \frac{AB}{2\Omega_{\text{CDM}}}. \end{cases} \quad (5.40)$$

Observamos directamente que en $t = t_0$

$$w_{\text{eff}}(t_0) = \begin{cases} w_* & \text{si } x \neq -1, \\ w_\bullet & \text{si } x = -1. \end{cases} \quad (5.41)$$

Si el conjunto de partículas candidatas a materia oscura dinámica pretende estar de acuerdo con las observaciones astrofísicas, se espera que w_* (o w_\bullet) posea un valor cercano a cero (ya que en el modelo Λ CDM $w = 0$). Por ejemplo, para el caso más amplio donde $x \neq -1$, esto permite imponer $w_* \approx 0$ para estudiar el comportamiento de (5.40) en función del tiempo. En la Fig. 5.1 se muestra que para $1 + x < 2w_*$, la función w_{eff} es monótona creciente, antes de alcanzar el valor w_* al tiempo $t = t_0$. En contraste, para $1 + x > 2w_*$, la función es monótona decreciente antes de alcanzar el valor w_* al tiempo $t = t_0$. Si, además, consideramos que una variedad de observaciones astrofísicas estipulan que w_{eff} no debió haber experimentado fuertes variaciones en el pasado reciente [37], entonces aquellos escenarios fenomenológicamente preferidos son donde se satisface

$$x < 2w_* - 1 \quad \implies \quad x < -1. \quad (5.42)$$

La implicación es debido a que imponemos $w_* \approx 0$. En este escenario, por el comportamiento de la función, podemos asegurar que para tiempos anteriores a al época actual, $w_{\text{eff}} \geq 0$. Además,

también podemos estar seguros que se cumple $w_{\text{eff}} \leq w_*$, i.e.

$$0 \leq w_{\text{eff}} \leq w_* \quad \text{para todo } t < t_0. \quad (5.43)$$

Y por lo tanto, como imponemos $w_* \approx 0$, obtenemos que $w_{\text{eff}} \approx 0$ para todo $t < t_0$. Cabe mencionar, que no es posible afirmar lo mismo para el caso $x > -1$, por el comportamiento de la función en Fig. 5.1. La descripción anterior indica la historia de w_{eff} previa al tiempo presente. Sin embargo, el correspondiente comportamiento creciente o decreciente continúa para $t > t_0$. Este resultado, en conjunto con la dinámica no-trivial para Ω_{tot} , indica una parte importante de este escenario: las componentes de materia oscura se encuentran activamente decayendo, antes, durante y después de la época actual.

5.2 Materia oscura dinámica a partir de 5D

El modelo de K. Dienes propone un nuevo paradigma para la física de materia oscura, que hasta ahora solo ha sido presentado de forma general. No se ha demostrado que el conjunto de estados de materia oscura puede ser armado fácilmente de tal forma que las abundancias cosmológicas de las componentes individuales estén balanceadas contra las vidas medias.

En esta sección, estudiamos un modelo con una dimensión espacial extra compactificada en un orbifold \mathbb{Z}_2 , como aparecen en modelos de cuerdas. Mostraremos en este escenario que estados de Kaluza-Klein propagándose en el espacio-tiempo 5D naturalmente proveen un conjunto de candidatos a materia oscura dinámica. Veremos que es viable un mecanismo de desalineación para adquisición de abundancias distintas a cero para los distintos estados y que se obedece la relación de la forma ya anticipada

$$\Omega_i \Gamma_i^\alpha \sim \text{constante}. \quad (5.44)$$

5.2.1 Configuración general

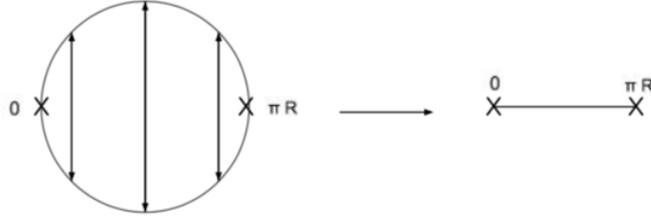
Consideramos un espacio-tiempo 5D como

$$\mathbb{M}^4 \otimes S^1/\mathbb{Z}_2, \quad (5.45)$$

donde \mathbb{M}^4 denota al espacio-tiempo usual de Minkowski y el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 puede ser visto como un círculo de radio R con puntos identificados por la acción

$$\mathbb{Z}_2 : y \rightarrow -y. \quad (5.46)$$

El dominio fundamental del orbifold, tal como se muestra en la Fig. 5.2, puede ser tomado como el segmento $[0, \pi R]$ con dos puntos fijos, en $y = 0$ y también en $y = \pi R$. Las superficies 4D ubicadas en estos dos extremos son llamadas *branas*, mientras que el espacio 5D (5.45) omitiendo esos puntos fijos es llamado *bulto* [38].


 Figura 5.2: Acción de la simetría \mathbb{Z}_2 en el espacio S^1 .

Por simplicidad, consideramos el caso en el que existe un campo escalar 5D Φ . Entonces, si despreciamos la gravedad y denotamos a los campos del SM como ψ_i , encontramos que tal escenario tiene una acción de la forma [39]

$$S = \int d^4x dy [\mathcal{L}_{5D}(\Phi) + \delta(y) \mathcal{L}_0(\psi_i, \Phi) + \delta(y - \pi R) \mathcal{L}_{\pi R}(\psi_i, \Phi)]. \quad (5.47)$$

Esta acción indica que la interacción de Φ con el SM queda restringida a las branas ubicadas en los puntos fijos del orbifold. Al suponer Φ un campo escalar, este debe cumplir la ecuación de Klein-Gordon (3.8). Por lo tanto, podemos escribir \mathcal{L}_{5D} como

$$\mathcal{L}_{5D} = \frac{1}{2} \partial_K \Phi^* \partial^K \Phi - \frac{1}{2} M^2 |\Phi|^2, \quad (5.48)$$

con ∂_K la derivada 5D y M una masa sin especificar del bulto. Por otro lado, \mathcal{L}_0 y $\mathcal{L}_{\pi R}$ consisten de dos contribuciones: el Lagrangiano usual del SM, \mathcal{L}_{SM} y un término de interacción \mathcal{L}_{int} . En general, podemos decir que existen dos interacciones importantes, aquellas asociadas a acoplamientos entre Φ y ψ_i y la interacción de “masa de brana”

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2} m^2 |\Phi|^2. \quad (5.49)$$

Este término no debe ser confundido con la masa del bulto M . Por el momento, solo consideraremos el término de interacción de masa de brana, pues abordaremos en la sección 5.2.3 el problema de las interacciones entre Φ y los estados del SM de una manera distinta.

Bajo la simetría \mathbb{Z}_2 , el campo $\Phi(x^\mu, y)$ tiene una propiedad de transformación definida por

$$\Phi(x^\mu, -y) = P \Phi(x^\mu, y), \quad (5.50)$$

donde $P = \pm 1$. Además, el campo $\Phi(x^\mu, y)$, debe cumplir la condición de frontera en el círculo, i.e. una traslación periódica a lo largo de la coordenada y de la forma $y \rightarrow y + 2\pi R$,

$$\Phi(x^\mu, y + 2\pi R) = \Phi(x^\mu, y). \quad (5.51)$$

Estas son las conocidas condiciones de frontera de Hosotani-Scherk-Schwarz [39]. Entonces, podemos describir al campo Φ en modos de Fourier alrededor del círculo como

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x^\mu) e^{iky/R}. \quad (5.52)$$

Si además tomamos en (5.50) el caso $P = +1$, la descomposición en modos de Fourier para Φ se simplifica a ²

$$\Phi(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} r_k \phi_k(x^\mu) \cos\left(\frac{ky}{R}\right). \quad (5.53)$$

Los factores de normalización

$$r_k \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ \sqrt{2} & \text{para } k > 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

están definidos para asegurar que cada modo ϕ_k posea un término cinético canónicamente normalizado en la teoría resultante 4D [40]. Esta simple descomposición de Fourier nos dice algo muy importante: un campo escalar 5D Φ , propagándose en $\mathbb{M}^4 \otimes S^1/\mathbb{Z}_2$, se divide en un número infinito de campos escalares 4D ϕ_k en el espacio usual de Minkowski. Esta es la llamada *descomposición de Kaluza-Klein* [39].

Sustituyendo la descomposición para Φ (5.53) en (5.47), reescribimos la acción como

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x dy \left(\frac{1}{2} \partial_K \Phi^* \partial^K \Phi - \frac{1}{2} M^2 |\Phi|^2 - \frac{1}{2} \delta(y) m^2 |\Phi|^2 \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\mu \phi_k^* \partial^\mu \phi_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathcal{M}_{kl}^2 \phi_k \phi_l^* \right), \end{aligned} \quad (5.55)$$

donde las componentes de la matriz de masa de Kaluza-Klein están dadas por

$$\mathcal{M}_{kl}^2 = \left(\frac{kl}{R^2} + M^2 \right) \delta_{kl} + r_k r_l m^2, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.56)$$

Explícitamente obtenemos,

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} M^2 + m^2 & \sqrt{2} m^2 & \sqrt{2} m^2 & \sqrt{2} m^2 & \dots \\ \sqrt{2} m^2 & \frac{1}{R^2} + M^2 + 2m^2 & 2 m^2 & 2 m^2 & \dots \\ \sqrt{2} m^2 & 2 m^2 & \frac{4}{R^2} + M^2 + 2m^2 & 2 m^2 & \dots \\ \sqrt{2} m^2 & 2 m^2 & 2 m^2 & \frac{9}{R^2} + M^2 + 2m^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

²Para el caso $P = -1$, la descomposición de Fourier en (5.52) quedaría expresada únicamente en sumas de funciones seno.

De esta matriz, notamos que, de no ser por el término de masa de brana la matriz, sería diagonal. Debido a que \mathcal{M}^2 es no diagonal, los eigenestados de masa ϕ_λ son distintos a los eigenestados de momento ϕ_k , i.e., existe una “mezcla” inducida como resultado de la masa de brana. Podemos caracterizar el grado de mezcla en términos del parámetro adimensional

$$\epsilon \equiv \frac{1}{mR} \implies \mathcal{M}_{kl}^2 = m^2 \left[\left(kl \epsilon^2 + \frac{M^2}{m^2} \right) \delta_{kl} + r_k r_l \right]. \quad (5.58)$$

Para el caso $\epsilon \gg 1$, la matriz (5.57) es esencialmente diagonal; esto es lo que ocurriría, por ejemplo, en el límite $R \rightarrow 0$, donde los modos de Kaluza-Klein se desacoplan. En contraste, para $\epsilon \ll 1$, la mezcla es máxima en todos los modos.

Para calcular los eigenvalores λ^2 de (5.57), necesitamos resolver la ecuación

$$\det (\mathcal{M}_{kl}^2 - \lambda^2 \mathbb{I}_d) = 0, \quad (5.59)$$

que según [41], corresponde a resolver la ecuación para el polinomio característico

$$\left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{R^2} - (\lambda^2 - M^2) \right) \right] \left[\lambda^2 - M^2 - m^2 + 2(\lambda^2 - M^2)m^2 R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (\lambda^2 - M^2)R^2} \right] = 0. \quad (5.60)$$

Es conveniente notar que $\lambda^2 = k^2/R^2 + M^2$ nunca es solución para esta ecuación si $m \neq 0$. Esto permite enfocarnos únicamente en el caso donde el segundo factor en (5.60) se cancela. La suma en el segundo factor puede ser calculada explícitamente (con $\lambda^2 \neq M^2$), usando la expansión de fracciones parciales para la función cotangente [42]:

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}. \quad (5.61)$$

Identificando en la suma de (5.60) a $x = \sqrt{\lambda^2 - M^2}R$ y $n = k$, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (\lambda^2 - M^2)R^2} = \frac{1}{2R^2(\lambda^2 - M^2)} - \frac{\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2} \cot(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2})}{2R^2(\lambda^2 - M^2)}. \quad (5.62)$$

Entonces, sustituyendo esta cantidad en (5.60), y exigiendo que el segundo factor sea nulo, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda^2 - M^2 - m^2 + 2(\lambda^2 - M^2)m^2 R^2 \left(\frac{1}{2R^2(\lambda^2 - M^2)} - \frac{\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2} \cot(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2})}{2R^2(\lambda^2 - M^2)} \right) &= 0 \\ \iff \lambda^2 - M^2 - m^2 + m^2 - \pi m^2 R \sqrt{\lambda^2 - M^2} \cot(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2}) &= 0 \\ \iff \lambda^2 - M^2 = \pi m^2 R \sqrt{\lambda^2 - M^2} \cot(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2}). & \end{aligned} \quad (5.63)$$

Por lo tanto, los eigenvalores resultan ser la solución a la ecuación trascendental

$$\pi m^2 R \cot\left(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2}\right) = \sqrt{\lambda^2 - M^2}. \quad (5.64)$$

Para cada eigenvalor λ , el correspondiente eigenestado de masa ϕ_λ puede ser escrito como una suma de los estados de Kaluza-Klein ϕ_k como

$$|\phi_\lambda\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_{\lambda k} |\phi_k\rangle, \quad (5.65)$$

donde $\mathcal{U}_{\lambda k}$ es la matriz unitaria que diagonaliza a \mathcal{M}_{kl}^2 . En álgebra lineal, una matriz \mathcal{M} es diagonalizable si es similar a una matriz diagonal, i.e. si existe una matriz invertible \mathcal{U} y una matriz diagonal \mathcal{D} tal que $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{U} = \mathcal{D}$ [43]. Además, los vectores columna de \mathcal{U} forman una base que consiste en los eigenvectores de \mathcal{M} y las entradas en la diagonal de \mathcal{D} son los correspondientes eigenvalores de \mathcal{M} . Aplicando este formalismo a nuestro caso, tenemos que los vectores columna de $\mathcal{U}_{\lambda k}$ son los eigenvectores de la matriz \mathcal{M}_{kl}^2 . Según [41], los eigenvectores de \mathcal{M}_{kl}^2 están dados exactamente por

$$\mathcal{U}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{C_\lambda}} \left(\frac{\lambda^2 - M^2}{\lambda^2 - M^2}, \frac{\sqrt{2} \lambda^2 - M^2}{(\lambda^2 - M^2) - 1/R^2}, \frac{\sqrt{2} \lambda^2 - M^2}{(\lambda^2 - M^2) - 4/R^2}, \frac{\sqrt{2} \lambda^2 - M^2}{(\lambda^2 - M^2) - 9/R^2}, \dots \right), \quad (5.66)$$

con C_λ un factor de normalización;

$$C_\lambda = \frac{\lambda^2 - M^2}{2m^2} \left(1 + \frac{\pi^2 m^2 R^2}{\sin^2(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2})} \right). \quad (5.67)$$

Podemos reescribir (5.66) multiplicando cada entrada por $1 = m^2/m^2$, obteniendo

$$\mathcal{U}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{C_\lambda}} \left(\frac{(\lambda^2 - M^2)/m^2}{(\lambda^2 - M^2)/m^2}, \frac{\sqrt{2} (\lambda^2 - M^2)/m^2}{(\lambda^2 - M^2)/m^2 - 1/m^2 R^2}, \frac{\sqrt{2} (\lambda^2 - M^2)/m^2}{(\lambda^2 - M^2)/m^2 - 4/m^2 R^2}, \dots \right). \quad (5.68)$$

Si definimos los eigenvalores adimensionales como $\tilde{\lambda} \equiv \sqrt{\lambda^2 - M^2}/m$, y recordamos la definición del parámetro ϵ en (5.58), podemos reducir la expresión (5.68) en

$$\mathcal{U}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{C_\lambda}} \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2}, \frac{\sqrt{2} \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - \epsilon^2}, \frac{\sqrt{2} \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - 4\epsilon^2}, \frac{\sqrt{2} \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - 9\epsilon^2}, \dots \right) \iff \mathcal{U}_{\lambda k} = \frac{1}{\sqrt{C_\lambda}} \frac{r_k \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - k^2 \epsilon^2}. \quad (5.69)$$

Por otro lado, desarrollando el factor C_λ usando la expresión $\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
C_\lambda &= \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \left(1 + \pi^2 m^2 R^2 \csc^2(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2}) \right) \\
&= \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \left(1 + \pi^2 m^2 R^2 \left[1 + \cot^2(\pi R \sqrt{\lambda^2 - M^2}) \right] \right) \\
&= \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \left(1 + \pi^2 m^2 R^2 \left[1 + \tilde{\lambda}^2 / (\pi^2 m^2 R^2) \right] \right) \\
&= \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \left(1 + \pi^2 / \epsilon^2 + \tilde{\lambda}^2 \right),
\end{aligned} \tag{5.70}$$

donde en la tercera igualdad usamos el valor de la cotangente encontrada en (5.64) y en la cuarta igualdad usamos la definición del parámetro ϵ (5.58). Sustituyendo el valor de C_λ (5.70) en (5.69), las componentes de la matriz $\mathcal{U}_{\lambda k}$ toman la forma

$$\mathcal{U}_{\lambda k} = A_\lambda \frac{r_k \tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^2 - k^2 \epsilon^2}, \tag{5.71}$$

con

$$A_\lambda \equiv \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 / \epsilon^2 + \tilde{\lambda}^2}}. \tag{5.72}$$

Notemos que para el modo cero $\phi_{k=0}$, tenemos los elementos de matriz

$$\langle \phi_\lambda | \phi_{k=0} \rangle = A_\lambda \langle \phi_{k=0} | \phi_{k=0} \rangle = A_\lambda, \tag{5.73}$$

suponiendo la normalización $\langle \phi_k | \phi_j \rangle = \delta_{kj}$ sobre los estados de Kaluza-Klein [39]. Además, al restringir las interacciones de Φ con el SM en la brana localizada en $y = 0$, resultará útil definir la proyección del campo 5D Φ sobre la brana del SM en $y = 0$ para estudiar las tasas de decaimiento, i.e.

$$\phi' \equiv \Phi(y) \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} r_k \phi_k. \tag{5.74}$$

Esto conduce a los elementos de matriz

$$\begin{aligned}
\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle &= \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_k r_j}{\tilde{\lambda}^2 - k^2 \epsilon^2} \langle \phi_k | \phi_j \rangle \\
&= \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_k r_j}{\tilde{\lambda}^2 - k^2 \epsilon^2} \delta_{kj} \\
&= \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k^2}{\tilde{\lambda}^2 - k^2 \epsilon^2} \\
&= \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}} \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}^2 / \epsilon^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{\lambda}^2 / \epsilon^2) - k^2} \right).
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Usando nuevamente la expansión de la cotangente en (5.61), reescribimos la expresión anterior como

$$\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle = \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R} \epsilon^2} \frac{1}{\tilde{\lambda}^2/\epsilon^2} \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}^2/\epsilon^2} + 2 \left(\frac{\pi \epsilon}{2\tilde{\lambda}} \cot \left(\frac{\pi \tilde{\lambda}}{\epsilon} \right) - \frac{1}{2(\tilde{\lambda}^2/\epsilon^2)} \right) \right] = \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\pi}{\tilde{\lambda} \epsilon} \cot \left(\frac{\pi \tilde{\lambda}}{\epsilon} \right) \quad (5.76)$$

Finalmente, podemos reescribir la ecuación de eigenvalores (5.64) usando el parámetro adimensional $\tilde{\lambda}$ y ϵ , obteniendo

$$\pi \cot \left(\frac{\pi \tilde{\lambda}}{\epsilon} \right) = \tilde{\lambda} \epsilon \quad \implies \quad \cot \left(\frac{\pi \tilde{\lambda}}{\epsilon} \right) = \frac{\tilde{\lambda} \epsilon}{\pi}. \quad (5.77)$$

Por lo tanto, la expresión en (5.76) se reduce a

$$\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle = \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\pi}{\epsilon \tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda} \epsilon}{\pi} = \frac{A_\lambda \tilde{\lambda}^2}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (5.78)$$

Las expresiones anteriores (5.78) y (5.73) nos resultan útiles para transformar del espacio de los eigenestados de masa $|\phi_\lambda\rangle$ y los eigenestados de Kaluza-Klein $|\phi_k\rangle$.

5.2.2 Abundancias cosmológicas

A lo largo de la historia evolutiva del Universo existen muchos mecanismos, a través de los cuales, los diferentes estados de Kaluza-Klein pudieron haber sido poblados y de este modo adquirido abundancias cosmológicas distintas a cero. Inspirados en los modelos de axión para materia oscura, supondremos una producción por desalineación. La idea física intuitiva detrás de este mecanismo es suponer que a temperaturas $T = f_\Phi$ el campo escalar Φ adquiere un valor esperado de vacío (VEV) y rompe una simetría global $U(1)$ de desplazamiento (*shift symmetry*) [41]

$$\Phi \rightarrow \Phi + c, \quad (5.79)$$

con c una constante. A altas temperaturas el campo se encuentra esencialmente “congelado” en este valor, como se muestra en la gráfica izquierda de la Fig. 5.3. Sin embargo, cuando el Universo baja su temperatura, se genera masa para la partícula de este campo. Esto implica que cuando la masa del campo supera la tasa de expansión del Universo, este rodará hacia el mínimo de potencial y eventualmente oscilará alrededor de él, como se muestra en la gráfica de la derecha en Fig. 5.3. La energía almacenada en esta oscilación se comporta como materia [34].

La producción por desalineación en nuestro caso implica que, al imponer la simetría (5.79) en la densidad Lagrangiana (5.48), la masa del bulto es $M = 0$. Luego, previo a la dinámica que establece la masa de brana m , no existe un potencial bien definido para Φ y, como resultado, cualquier VEV $\langle \Phi \rangle$ es igualmente probable que suceda, i.e.

$$\langle \Phi \rangle = \theta f_\Phi^{3/2} \quad (5.80)$$

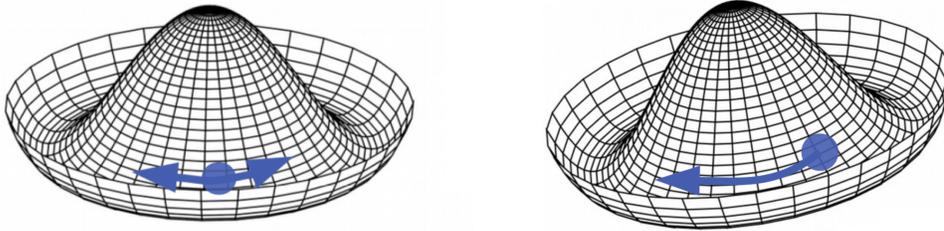


Figura 5.3: Visualización de la idea intuitiva detrás del mecanismo de desalineación para un campo escalar. La transición de la gráfica de la izquierda a la gráfica de la derecha, puede entenderse como el rompimiento de la simetría global $U(1)$ de desplazamiento, i.e. se puede pensar como un ligera inclinación al potencial.

donde θ es un coeficiente adimensional y f_Φ es la constante de decaimiento del campo 5D Φ . Una vez realizada la descomposición de Kaluza-Klein para el campo Φ , notamos que cuando $m = 0$ en (5.55) la única contribución a la masa para los campos ϕ_i son los elementos diagonales en la matriz (5.57). Por lo tanto, los eigenestados de masa ϕ_λ son meramente los estados de momento ϕ_k . Mientras que el potencial para cada ϕ_k con $k \neq 0$ es distinto de cero debido a la presencia de las masas de los eigenestados de momento, y se minimiza cuando $\phi_k = 0$, el potencial para el modo cero ϕ_0 no está definido. Debido a la ausencia del potencial para ϕ_0 no existe un VEV preferido para $\langle \phi_0 \rangle$. Esto significa que, cuando la simetría (5.79) se rompe, el valor $\langle \phi_0 \rangle$ es totalmente arbitrario. Nuestra ignorancia sobre este valor inicial queda depositada en el *ángulo de desalineación* θ , al igual que en el caso del campo 5D Φ . Esto permite escribir las condiciones iniciales como

$$\langle \phi_0 \rangle = \theta \hat{f}_\phi, \quad \langle \phi_k \rangle = 0, \quad \text{para } k > 0, \quad (5.81)$$

con $\hat{f}_\phi \equiv \sqrt{2\pi R} f_\Phi^{3/2}$ [9]. Por supuesto, los valores iniciales en (5.81) también pueden ser entendidos como la manifestación de la simetría (5.79) en 4D, donde ahora tenemos el caso

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0 + c \quad \text{y} \quad \phi_k \rightarrow \phi_k, \quad \text{para } k > 0. \quad (5.82)$$

Esta es la situación que existe antes de que se desarrolle la dinámica en la brana que establece el término m . Sin embargo, una vez que se genera la masa de brana m , i.e. cuando los términos fuera de la diagonal en (5.57) se vuelven apreciables, los ϕ_k dejan de ser eigenestados de masa y necesitamos hacer un cambio de base a los eigenestados ϕ_λ . De la condición (5.73), podemos escribir

$$\langle \phi_\lambda \rangle = \theta \hat{f}_\phi A_\lambda \quad \text{para toda } \lambda. \quad (5.83)$$

La dinámica que establece la masa de brana m también establece una densidad de energía, que según la ecuación (4.40), adopta la forma

$$\rho_\lambda = \frac{1}{2} \theta^2 \lambda^2 A_\lambda^2 \hat{f}_\phi^2. \quad (5.84)$$

Por otro lado, dada la expresión de la densidad crítica (2.27), podemos expresarla de la siguiente forma

$$\rho_c = 3H^2 M_P^2, \quad (5.85)$$

donde $M_P = (8\pi)^{-1/2}$ es la escala de Planck reducida (en unidades naturales) y H el parámetro de Hubble. Tomando este resultado y la ecuación (2.29), escribimos la abundancia inicial para cada eigenestado de masa como

$$\Omega_\lambda^{(G)} = \frac{\theta^2}{6} \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 \left(\frac{m \hat{f}_\phi}{M_P H} \right)^2, \quad (5.86)$$

donde hemos usado que $\lambda^2 = m^2 \tilde{\lambda}^2$. Este valor para λ^2 es válido, debido a que al imponer la simetría de desplazamiento, es necesario considerar $M = 0$.

Vamos a suponer que a un tiempo t_G se establece la abundancia inicial, i.e. $\Omega_\lambda(t_G) = \Omega_\lambda^{(G)}$. El siguiente paso es determinar el valor correspondiente de $\Omega_\lambda(t_0)$. Para encontrar este valor, es necesario indicar si t_G se sitúa durante la época de recalentamiento, radiación o materia. Además, recordando la dinámica de los campos en la sección 5.1.1, es necesario indicar si ϕ_λ experimenta un encendido instantáneo en t_G y se comporta como materia, con $w = 0$, o si experimenta un encendido escalonado a t_λ y se comporta como una energía de vacío, con $w = -1$ a un tiempo $t_\lambda > t_G$. De esta manera, hay seis casos diferentes a considerar.

Por simplicidad, suponemos que para los modos ϕ_λ , que forman parte del encendido escalonado, el correspondiente tiempo de encendido t_λ ocurre cuando $3H(t_\lambda) = 2\lambda$ (el amortiguamiento crítico). Por lo tanto, podemos dar los siguientes resultados.

- **Época de materia:** para aquellos modos que tienen un encendido instantáneo durante la época de materia, i.e. $t_G > t_{eq}$ (con t_{eq} el tiempo donde se da la época de igualdad de radiación y materia), podemos aproximar la abundancia cosmológica al tiempo de hoy como la abundancia inicial multiplicada por un factor de decaimiento $X_\lambda \equiv e^{-\Gamma_\lambda(t_0 - t_G)}$. Esto se debe a que según los resultados en (5.14), $\Omega \sim$ constante para la época de materia. Por lo tanto, escribimos

$$\Omega_\lambda(t_0) \sim X_\lambda \Omega_\lambda^{(G)} \sim \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 X_\lambda \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2 (m t_G)^2, \quad (5.87)$$

recordando que $H(t_G) \sim 1/t_G$. Por otro lado, para los modos con un encendido escalonado, $t_\lambda > t_G$, dadas las soluciones en (5.16), podemos escribir

$$\Omega_\lambda(t_0) \sim X_\lambda \Omega_\lambda^{(G)} \left(\frac{t_\lambda}{t_G} \right)^2 \sim A_\lambda^2 X_\lambda \frac{1}{t_G^2} \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2, \quad (5.88)$$

donde hemos usado que $t_\lambda \sim 1/\lambda$, debido a que en la sección 5.1.1, concluimos que $t_i \sim 1/m_i$.

- **Época de radiación:** para un t_G en esta época, i.e. $t_{RC} \lesssim t_G \lesssim t_{eq}$ (con t_{RC} el tiempo donde termina la época de recalentamiento) tenemos según (5.14), para el caso de un encendido instantáneo

$$\Omega_\lambda(t_0) \sim X_\lambda \Omega_\lambda^{(G)} \left(\frac{t_{eq}}{t_G} \right)^{1/2} \sim \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 X_\lambda \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2 m^2 t_G^{3/2} t_{eq}^{1/2}. \quad (5.89)$$

Para el encendido escalonado, según las soluciones de la abundancia para un fluido con $w = -1$ en (5.16), obtenemos que

$$\Omega_\lambda(t_0) \sim X_\lambda \Omega_\lambda^{(G)} \left(\frac{t_{eq}}{t_\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{t_\lambda}{t_G} \right)^2 \sim \tilde{\lambda}^{1/2} A_\lambda^2 X_\lambda \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2 \frac{1}{t_G^{1/2}} (m t_{eq})^{1/2}, \quad (5.90)$$

donde el término $\left(\frac{t_{eq}}{t_\lambda} \right)^{1/2}$ permite que la función Ω_λ sea una función continua en esta época. Esto es, en el encendido escalonado, si $t_\lambda = t_G$, recuperamos el resultado del encendido instantáneo.

- **Recalentamiento:** para esta época se cumple que $t_G \lesssim t_{RC}$. Entonces, primero para el encendido instantáneo, según las soluciones en (5.14), obtenemos

$$\Omega_\lambda(t_0) \sim X_\lambda \Omega_\lambda^{(G)} \sim \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 X_\lambda \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2 (m t_G)^2. \quad (5.91)$$

Por otro lado, para el encendido escalonado, según las soluciones en (5.16), podemos escribir que

$$\Omega_\lambda(t_0) \sim X_\lambda \Omega_\lambda^{(G)} \left(\frac{t_\lambda}{t_G} \right)^2 \sim A_\lambda^2 X_\lambda \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2 \frac{1}{t_G^2}. \quad (5.92)$$

Es importante recalcar que solo existen tres comportamientos para $\Omega_\lambda(t_0)$ en función de $\tilde{\lambda}$. En las tres épocas cosmológicas para el encendido instantáneo tenemos que $\Omega_\lambda(t_0) \sim \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2$. Para los encendidos escalonados tenemos dos casos, para la época de materia y recalentamiento se cumple $\Omega_\lambda(t_0) \sim A_\lambda^2$, mientras que para la época de radiación se tiene $\Omega_\lambda(t_0) \sim \tilde{\lambda}^{1/2} A_\lambda^2$.

Siguiendo con la discusión, podemos tomar la ecuación (5.72) y separarla en dos regímenes, para $\tilde{\lambda}$ grandes y $\tilde{\lambda}$ pequeñas:

$$A_\lambda \sim \begin{cases} 1/\tilde{\lambda} & \text{para } \tilde{\lambda} \ll \sqrt{1 + \pi^2/\epsilon^2}, \\ 1/\tilde{\lambda}^2 & \text{para } \tilde{\lambda} \gg \sqrt{1 + \pi^2/\epsilon^2}. \end{cases} \quad (5.93)$$

Finalmente, podemos dar los resultados generales, suponiendo un mecanismo de desalineación, en dos conjuntos: el comportamiento para $\tilde{\lambda}$ grandes

$$\Omega_\lambda \sim \begin{cases} \tilde{\lambda}^{-2} & \text{instantáneo,} \\ \tilde{\lambda}^{-7/2} & \text{escalonado (época de radiación),} \\ \tilde{\lambda}^{-4} & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento),} \end{cases} \quad (5.94)$$

así como el comportamiento para $\tilde{\lambda}$ pequeños

$$\Omega_\lambda \sim \begin{cases} \text{constante} & \text{instantáneo,} \\ \tilde{\lambda}^{-3/2} & \text{escalonado (época de radiación),} \\ \tilde{\lambda}^{-2} & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento).} \end{cases} \quad (5.95)$$

En estos resultados hemos trivializado la dependencia en λ de X_λ . El factor X_λ denota el proceso de decaimiento, que al haber sido ignorado, implica que nuestros resultados representan aquella abundancia previa al inicio del proceso de decaimiento, i.e. nuestro análisis es apropiado para el periodo previo al comienzo de los decaimientos de los estados de Kaluza-Klein con abundancias significativas.

5.2.3 Tasas de decaimiento

Hasta este punto, hemos supuesto que el campo 5D Φ no posee masa, $M = 0$, y que la masa de brana es distinta de cero, $m \neq 0$. Esto fue suficiente para determinar las correspondientes abundancias cosmológicas que emergen de un mecanismo de desalineación. De cierta forma, es notable que estos resultados dependan de tan pocas suposiciones. De hecho, esperamos que se mantengan para todos los escenarios donde se cumpla que $M = 0$ y $m \neq 0$.

Sin embargo, para determinar las tasas de decaimiento de los modos de Kaluza-Klein, es necesario tener más información sobre los acoplamientos entre el campo 5D Φ y los estados 4D ψ_i del SM. En otras palabras, necesitamos conocer los términos de interacción que pueden aparecer en \mathcal{L}_{int} en (5.47). Fenomenológicamente, es más riesgoso si en nuestro escenario de materia oscura dinámica estas tasas de decaimiento son demasiado grandes, debido a que, tasas de decaimiento grandes implican vidas medias cortas para los estados de materia oscura. Tener vidas medias cortas para todos los estados tendría como consecuencia que aquellos estados pesados decayeran a tiempos tempranos, modificando así la historia del universo temprano. Por lo tanto, tendremos un acercamiento distinto al problema, considerando el peor caso posible y determinando qué tan grandes pueden ser estas tasas de decaimiento.

Generalmente, los operadores de dimensión más baja en \mathcal{L}_{int} son aquellos que dan lugar a tasas de decaimiento grandes [20]. Por lo tanto, al restringirnos a operadores de dimensión más baja, debemos considerar aquellos que son, a lo más, lineales en Φ . Sea $F_{\mu\nu}$ una fuerza de campo genérica del SM, encontramos que los operadores de dimensión más baja posible y lineales en Φ que pueden

aparecer en \mathcal{L}_{int} toman la forma [9]

$$\frac{1}{f_{\Phi}^{3/2}} \Phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \frac{1}{f_{\Phi}^{3/2}} \Phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (5.96)$$

dependiendo de si Φ posee simetría CP par o CP impar respectivamente, donde $\tilde{F}^{\mu\nu} \sim \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ y $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita. Por otro lado, considerando a ψ un campo fermiónico genérico del SM, los términos de interacción de dimensión más baja que se pueden construir son [9]

$$\frac{1}{f_{\Phi}^{3/2}} \Phi \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi, \quad \frac{1}{f_{\Phi}^{3/2}} (\partial_{\mu} \Phi) \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi, \quad (5.97)$$

dependiendo de si Φ posee simetría CP par o CP impar respectivamente, con γ^{μ} las matrices de Dirac y $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$ denotando al campo fermiónico adjunto. Estos grupos de operadores dan lugar a acoplamientos cuatro-dimensionales para la proyección del campo 5D Φ sobre la brana del SM:

$$\frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle}{\hat{f}_{\phi}} \phi' F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle}{\hat{f}_{\phi}} \phi' F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (5.98)$$

y

$$\frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle}{\hat{f}_{\phi}} \phi' \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi, \quad \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle}{\hat{f}_{\phi}} (\partial_{\mu} \phi') \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi, \quad (5.99)$$

recordando las definiciones de ϕ' en (5.74) y \hat{f}_{ϕ} en (5.81). Además, es importante resaltar que el término $\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle$ en (5.98) y (5.99), resulta de considerar un cambio a la base de los eigenestados de masa ϕ_{λ} . Este cambio de base es producto del mecanismo de desalineación. En la sección 5.2.2, se estableció que una vez que se genera la masa de brana m , se necesita hacer un cambio de base a los eigenestados ϕ_{λ} .

Del acoplamiento en (5.98), el vértice relevante es aquel que aparece en la Fig. 5.4. La amplitud de este proceso se obtiene por medio del cálculo [44]

$$i\mathcal{A} = i \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle}{\hat{f}_{\phi}} g_{\mu\nu} \epsilon_{(\sigma)}^{\mu}(k_1) \epsilon_{(\sigma')}^{\nu}(k_2), \quad (5.100)$$

con $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico y $\epsilon_{(\lambda)}^{\mu}$ los vectores de polarización de los estados finales. Luego, elevando al cuadrado se obtiene

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_{\phi}^2} g_{\mu\nu} \epsilon_{(\sigma)}^{\mu}(k_1) \epsilon_{(\sigma')}^{\nu}(k_2) g_{\alpha\beta} \epsilon_{(\sigma)}^{\alpha}(k_1) \epsilon_{(\sigma')}^{\beta}(k_2). \quad (5.101)$$

Sustituyendo esta amplitud en la tasa de decaimiento (A.18), se obtiene

$$\Gamma_{\lambda} = \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \sum_{\text{estados finales}} \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_{\phi}^2} g_{\mu\nu} \epsilon_{(\sigma)}^{\mu}(k_1) \epsilon_{(\sigma')}^{\nu}(k_2) g_{\alpha\beta} \epsilon_{(\sigma)}^{\alpha}(k_1) \epsilon_{(\sigma')}^{\beta}(k_2) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}}. \quad (5.102)$$

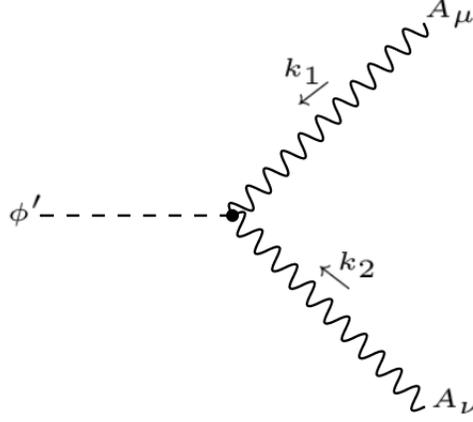


Figura 5.4: Diagrama de Feynman del proceso de decaimiento de ϕ' en bosones de norma, para los términos de interacción en (5.98).

Nótese que $m_{\phi'}$ corresponde a la masa de la partícula ϕ' , mientras que m_f es la masa de la partícula del estado final. Para continuar con el desarrollo, usamos las relaciones de completitud que satisfacen los vectores de polarización [45]

$$\sum_{\sigma} \epsilon_{(\sigma)}^{\mu}(k_1) \epsilon_{(\sigma)}^{\nu}(k_1) = -g^{\mu\nu} + \frac{(k_1)^{\mu}(k_1)^{\nu}}{m_f^2} \quad (5.103)$$

y sumamos sobre todas las polarizaciones σ y σ'

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda} &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_{\phi}^2} g_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{(k_1)^{\mu}(k_1)^{\alpha}}{m_f^2} \right) g_{\alpha\beta} \left(-g^{\nu\beta} + \frac{(k_2)^{\nu}(k_2)^{\beta}}{m_f^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\ &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_{\phi}^2} \left(-\delta_{\nu}^{\alpha} + \frac{(k_1)_{\nu}(k_1)^{\alpha}}{m_f^2} \right) \left(-\delta_{\alpha}^{\nu} + \frac{(k_2)^{\nu}(k_2)_{\alpha}}{m_f^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\ &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_{\phi}^2} \left(4 - \frac{(k_2)^{\nu}(k_2)_{\nu}}{m_f^2} - \frac{(k_1)_{\nu}(k_1)^{\nu}}{m_f^2} + \frac{(k_1)_{\nu}(k_2)^{\nu}(k_1)^{\alpha}(k_2)_{\alpha}}{m_f^4} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Como k_1 y k_2 son los 4-momentos de los vectores A , entonces $(k_1)_{\nu}(k_1)^{\nu} = k_1^2 = (k_2)^{\nu}(k_2)_{\nu} = k_2^2 = m_f^2$, y obtenemos

$$\Gamma_{\lambda} = \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_{\lambda} | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_{\phi}^2} \left(2 - \frac{(k_1 \cdot k_2)^2}{m_f^4} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}}. \quad (5.105)$$

Ahora, suponemos que k es el momento de la partícula ϕ' . Usando la conservación del momento, obtenemos

$$k^2 = m_{\phi'}^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + 2k_1 \cdot k_2 + k_2^2 = 2m_f^2 + 2k_1 \cdot k_2 \quad \Longrightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{m_{\phi'}^2 - 2m_f^2}{2}. \quad (5.106)$$

Sustituyendo este resultado en la tasa de decaimiento (5.105), vemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(2 - \frac{(m_{\phi'}^2 - 2m_f^2)^2}{4m_f^4} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\ &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(1 - \frac{m_{\phi'}^4}{4m_f^4} + \frac{m_{\phi'}^2}{m_f^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\ &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(1 - \frac{m_{\phi'}^4}{4m_f^4} + \frac{m_{\phi'}^2}{m_f^2} \right) \left(\frac{m_f^4}{m_{\phi'}^4} \right) \left(\frac{m_{\phi'}^4}{m_f^4} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\ &= \frac{m_{\phi'}^3}{16\pi m_f^4} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(\frac{m_f^4}{m_{\phi'}^4} - \frac{1}{4} + \frac{m_f^2}{m_{\phi'}^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Finalmente, recordamos que para el escenario de la materia oscura dinámica no tendremos un único término de masa para todos los campos escalares que la componen. Más bien, para cada campo ϕ_k en la acción (5.55) existe un término de masa dado por los eigenvalores λ de la matriz de masa de Kaluza-Klein. Por lo tanto, $m_{\phi'} = \lambda$. Esto arroja una tasa de decaimiento para el término de interacción (5.98) de

$$\Gamma_\lambda \sim \lambda^3 \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(\frac{m_f^4}{\lambda^4} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{m_{\phi'}^2} \right) \quad (5.108)$$

donde sustituimos (5.78) en el último paso. Este resultado representa la tasa de decaimiento en dos bosones de norma genéricos, donde se aparenta una posible dependencia sobre λ de la forma $\Gamma_\lambda \sim \lambda^3$. El canal de decaimiento cinéticamente accesible para todos los modos, independiente de su masa, es el decaimiento en par de fotones. La tasa de decaimiento de un eigenestado de masa ϕ_λ en par de fotones es [44]

$$\Gamma_\lambda = \frac{c_\gamma^2 \alpha^2 \lambda^3}{256\pi^3 \hat{f}_\phi^2} \langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2 = G_\gamma (\tilde{\lambda}^2 A_\lambda)^2 \frac{\lambda^3}{\hat{f}_\phi^2}, \quad (5.109)$$

donde $\alpha \equiv e^2/4\pi$, y donde se definió la cantidad $G_\gamma \equiv c_\gamma^2 \alpha^2 / 256\pi^3$. Por otra parte, para el caso de los términos de interacción en (5.99), tenemos el decaimiento del campo ϕ' en los fermiones ψ y $\bar{\psi}$.

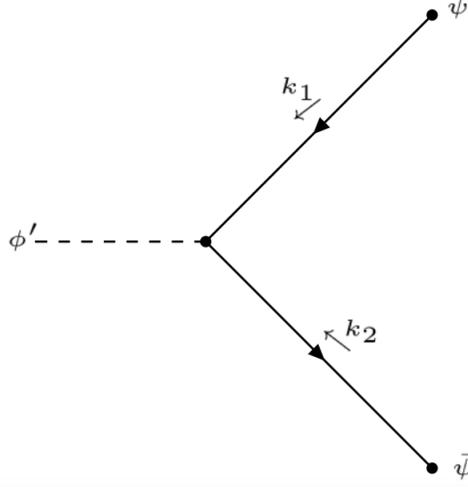


Figura 5.5: Diagrama de Feynman del proceso de decaimiento de ϕ' en fermiones, para los términos de interacción en (5.99).

En este escenario, encontramos que el vértice relevante es el que aparece en la Fig.5.5. La amplitud para este proceso es [44]

$$i\mathcal{A} = i \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle}{\hat{f}_\phi} (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma^5, \quad (5.110)$$

con $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$. El cuadrado de esta amplitud es

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} (\not{k}_1 + \not{k}_2)^2 (\gamma^5)^2 \\ &= \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} (k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2), \end{aligned} \quad (5.111)$$

donde hemos usado la propiedad $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}_d$. Sustituyendo esta amplitud en la tasa de decaimiento (A.18), se obtiene

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \sum_{\text{estados finales}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} (k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\
&= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \text{Tr} \left((k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2) \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\
&= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(\text{Tr}(k_1^2) + \text{Tr}(2k_1 k_2) + \text{Tr}(k_2^2) \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}},
\end{aligned} \tag{5.112}$$

donde en la tercera línea usamos la identidad para la traza: $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$. Otra identidad que nos es útil para continuar es $\text{Tr}(A\tilde{B}) = 4(A \cdot B)$. Aplicándola a (5.112) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda &= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} (4(k_1 \cdot k_1) + 8(k_1 \cdot k_2) + 4(k_2 \cdot k_2)) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\
&= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} (4m_f^2 + 4m_{\phi'}^2 - 8m_f^2 + 4m_f^2) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}} \\
&= \frac{1}{16\pi m_{\phi'}} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} (4m_{\phi'}^2) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2}},
\end{aligned} \tag{5.113}$$

donde en la segunda igualdad se utilizó el valor de $(k_1 \cdot k_2)$ encontrado en (5.106). También se cumple que $(k_1)_\nu (k_1)^\nu = k_1^2 = (k_2)^\nu (k_2)_\nu = k_2^2 = m_f^2$. Finalmente, reemplazando $m_{\phi'}$ por λ , obtenemos

$$\Gamma_\lambda = \frac{m_{\phi'}}{4\pi} \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle^2}{\hat{f}_\phi^2} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_{\phi'}^2} \right)^{1/2} \implies \Gamma_\lambda \sim \tilde{\lambda} \frac{(\tilde{\lambda}^2 A_\lambda)^2}{\hat{f}_\phi^2} \tag{5.114}$$

Concluimos que, al ser nuestro objetivo el calcular que tan grandes pueden ser estas tasas de decaimiento, el proceso (5.109) es mayor al de (5.114). Entonces, así como para las abundancias cosmológicas, podemos dar como resultado general para $\tilde{\lambda}$ grandes

$$\Gamma_\lambda \sim \tilde{\lambda}^3, \tag{5.115}$$

y para $\tilde{\lambda}$ pequeños

$$\Gamma_\lambda \sim \tilde{\lambda}^5. \tag{5.116}$$

5.3 Abundancias y vidas medias de materia oscura dinámica

En resumen, podemos dar los resultados obtenidos para las abundancias en términos de λ , usando que $\tilde{\lambda}m = \lambda$. Para λ grandes :

$$\Omega_\lambda \sim \begin{cases} \lambda^{-2} & \text{instantáneo,} \\ \lambda^{-7/2} & \text{escalonado (época de radiación),} \\ \lambda^{-4} & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento).} \end{cases} \quad (5.117)$$

Y para λ pequeños:

$$\Omega_\lambda \sim \begin{cases} \text{constante} & \text{instantáneo,} \\ \lambda^{-3/2} & \text{escalonado (época de radiación),} \\ \lambda^{-2} & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento).} \end{cases} \quad (5.118)$$

Complementario a esto, también podemos dar los resultados obtenidos para las tasas de decaimiento en términos de λ :

$$\Gamma_\lambda \sim \begin{cases} \lambda^3 & \text{para } \lambda \text{ grandes,} \\ \lambda^5 & \text{para } \lambda \text{ pequeños.} \end{cases} \quad (5.119)$$

Ahora podemos estudiar cómo los estados de Kaluza-Klein balancean sus vidas medias contra sus abundancias. Primero, encontramos que para el comportamiento de λ grandes, combinando los resultados (5.119) y (5.117), los estados ϕ_λ obedecen una ecuación de balance de la forma

$$\begin{aligned} \text{instantáneo: } & \Omega_\lambda \Gamma_\lambda^{2/3} \sim \text{constante,} \\ \text{escalonado (época de radiación): } & \Omega_\lambda \Gamma_\lambda^{7/6} \sim \text{constante,} \\ \text{escalonado (época de materia y recalentamiento): } & \Omega_\lambda \Gamma_\lambda^{4/3} \sim \text{constante.} \end{aligned} \quad (5.120)$$

Por otro lado, combinando los resultados (5.119) y (5.118) se obtienen las relaciones para el comportamiento de λ pequeños

$$\begin{aligned} \text{instantáneo: } & \Omega_\lambda \sim \text{constante,} \\ \text{escalonado (época de radiación): } & \Omega_\lambda \Gamma_\lambda^{3/10} \sim \text{constante,} \\ \text{escalonado (época de materia y recalentamiento): } & \Omega_\lambda \Gamma_\lambda^{2/5} \sim \text{constante.} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Físicamente, la abundancia indica la cantidad de partículas que existen, mientras que la tasa de decaimiento denota la probabilidad de que ocurra un decaimiento de esta especie de partícula. La

5.3. ABUNDANCIAS Y VIDAS MEDIAS DE MATERIA OSCURA DINÁMICA 71

ecuaciones de balance encontradas en (5.120) y (5.121) establecen que, a pesar de que las partículas ϕ_λ se encuentran activamente decayendo, se logra un balance con la abundancia de tal forma que aparenta un efecto de estabilidad. Dicho de otra forma, podemos decir que aquellos estados ϕ_λ con abundancias grandes poseen vidas medias largas y, en contraste, los estados con abundancias bajas poseen vidas medias cortas.

Volviendo a la caracterización del esquema de materia oscura dinámica, podemos calcular los exponentes α y β que aparecen en las ecuaciones (5.30). Estos resultados nos permitirán encontrar la ecuación de estado efectiva para nuestro conjunto de estados de materia oscura. Los valores de α se obtienen directamente de los resultados obtenidos en (5.120) y en (5.121). Para el cálculo del coeficiente β , primero notamos que los estados de Kaluza-Klein están igualmente distribuidos en el conjunto, i.e. la densidad de estados por unidad de masa es independiente de λ . Por lo tanto, $n_\lambda \sim \lambda^0$. Esto se traduce a que

$$n_\Gamma \sim n_\lambda |d\Gamma/d\lambda|^{-1} \sim \Gamma^{(1-x)/x} \quad \text{para el caso de } \Gamma \sim \lambda^x. \quad (5.122)$$

Entonces, para λ pequeños, $x = 5$, lo que arroja un coeficiente $\beta = -4/5$. Mientras que para λ grandes, $x = 3$, lo que arroja un coeficiente $\beta = -2/3$. Podemos concluir que para el régimen de λ grandes, nuestro modelo posee los exponentes

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (-2/3, -2/3) & \text{instantáneo} \\ (-7/6, -2/3) & \text{escalonado (época de radiación)} \\ (-4/3, -2/3) & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento)}. \end{cases} \quad (5.123)$$

En contraste, para el régimen de λ pequeños

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (0, -4/5) & \text{instantáneo} \\ (-3/10, -4/5) & \text{escalonado (época de radiación)} \\ (-2/5, -4/5) & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento)}. \end{cases} \quad (5.124)$$

Cabe resaltar que si queremos que nuestro escenario de materia oscura dinámica se alinee con las observaciones cosmológicas, esperamos que w_\star en (5.40) al tiempo de hoy adquiera un valor cercano a cero, debido a que en el modelo Λ CDM $w = 0$. Esto sugiere que, dado el parámetro x en (5.40), escenarios donde se cumpla $x < -1$ son fenomenológicamente preferidos sobre aquellos con $x \geq -1$. Ya que, si $x < -1$ podremos asegurar que $0 \leq w_{\text{eff}} \leq w_\star$ para todo $t < t_0$.

Entonces, dados nuestros coeficientes (α, β) podemos calcular los valores para x en nuestros diferentes casos bajo estudio. Para el régimen de λ pequeños

$$x = \begin{cases} -4/5 & \text{instantáneo} \\ -11/10 & \text{escalonado (época de radiación)} \\ -6/5 & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento)}. \end{cases} \quad (5.125)$$

Y para el régimen de λ grandes

$$x = \begin{cases} -4/3 & \text{instantáneo} \\ -11/6 & \text{escalonado (época de radiación)} \\ -2 & \text{escalonado (época de materia y recalentamiento)}. \end{cases} \quad (5.126)$$

El último paso para calcular el valor w_{eff} en la época actual, es determinar los coeficientes A y B que aparecen en las ecuaciones (5.30), i.e.

$$A \approx \Omega_\lambda \Gamma^{-\alpha}, \quad B \approx n_\Gamma \Gamma^{-\beta} \approx \Gamma^{-(\beta+1)}. \quad (5.127)$$

Para hacer este cálculo explícito es necesario fijar un solo escenario de los seis que se han trabajado hasta ahora. Por ejemplo, podemos tomar el caso donde las abundancias iniciales se establecieron en la época de dominio de radiación con un encendido escalonado. Tomando los resultados para las abundancias en (5.90) y el proceso de decaimiento en par de fotones de (5.109), escribimos para A :

$$A \approx \begin{cases} \frac{\theta^2 (t_{\text{eq}})^{1/2} (G_\gamma)^{7/6} m^4}{6 M_P^2 (\hat{f}_\phi)^{1/3}}, & \text{para } \lambda \text{ grandes} \\ \frac{\theta^2 (t_{\text{eq}})^{1/2} (G_\gamma)^{3/10} m^2}{6 M_P^2 (\hat{f}_\phi)^{-7/5}} & \text{para } \lambda \text{ pequeños.} \end{cases} \quad (5.128)$$

Y para B :

$$B \approx \begin{cases} \frac{m^{2/3} \hat{f}_\phi^{2/3}}{G_\gamma^{1/3} \lambda} & \lambda \text{ grandes} \\ \frac{m^{2/5} \hat{f}_\phi^{2/5}}{G_\gamma^{1/5} \lambda} & \lambda \text{ pequeños.} \end{cases} \quad (5.129)$$

Los resultados en (5.128) y (5.129) dependen del valor que adopta la constante de decaimiento de los campos \hat{f}_ϕ , la masa de brana m y el inverso de radio de compactificación $1/R$. Bajo un análisis en el espacio de parámetros, se puede determinar los valores preferentes para estas cantidades de tal forma que se cumpla

$$\sum_\lambda \Omega_\lambda(t_0) = \sum_\lambda \tilde{\lambda}^{1/2} A_\lambda^2 X_\lambda \left(\frac{\hat{f}_\phi}{M_P} \right)^2 (m t_{\text{eq}})^{1/2} \approx \Omega_{\text{CDM}} \quad (5.130)$$

Un conjunto preferente de parámetros es $\hat{f}_\phi = 10^{14}$ GeV, $m = 0.56$ eV y $1/R = 0.01$ eV [44]. Finalmente, usando los valores de estos coeficientes y los resultados para el caso del encendido escalonado en la época de radiación del exponente x en (5.126), obtenemos el parámetro w_{eff} a un $t = t_0$

$$w_{\text{eff}}(t_0) \approx \begin{cases} 6.21 \times 10^{-22} & \text{para } \lambda \text{ grandes,} \\ 3.1 \times 10^{-3} & \text{para } \lambda \text{ pequeños.} \end{cases} \quad (5.131)$$

5.3. ABUNDANCIAS Y VIDAS MEDIAS DE MATERIA OSCURA DINÁMICA 73

donde se tomó el valor $t_0 \sim 10^{17} \text{ s} \sim 1.5 \times 10^{41} (\text{GeV})^{-1}$. Si comparamos el valor que arroja Planck sobre el parámetro efectivo de ecuación de estado para la materia oscura $w = 0.00029$ [46], se concluye que los resultados obtenidos en (5.131) pueden ser interpretados como un parámetro de ecuación de estado correspondiente a materia oscura. Sin embargo, existen varios detalles alrededor de su obtención. Primero, los resultados en (5.131) solo son aproximaciones para dar sentido al tamaño del parámetro de ecuación de estado que puede ser obtenido con base en el modelo de una dimensión extra compactificada en un orbifold \mathbb{Z}_2 . Y segundo, y lo más importante: a diferencia de los valores de los exponentes α y β , los coeficientes A y B tuvieron que ser ajustados para que arrojaran descripciones compatibles con el modelo ΛCDM , específicamente que $\Omega_{\text{tot}}(t_0) \approx \Omega_{\text{CDM}}$. Esto implica un problema de *ajuste fino* sobre los valores de A y B . Sin embargo, si tomamos en cuenta el análisis para los resultados de x en (5.126), estos son notables. Debido a que no solo obtuvimos un conjunto de estados cuyas tasas de decaimiento y abundancias cosmológicas se balancean para rendir cuentas de la “estabilidad” de la materia oscura observada, sino que además ofrecen un parámetro de ecuación de estado en un rango fenomenológicamente viable. Esto es, los estados de Kaluza-Klein en este modelo de una dimensión extra compactificada en un orbifold \mathbb{Z}_2 funcionan como excelentes candidatos a materia oscura dinámica.

Capítulo 6

Conclusiones y observaciones finales

En este trabajo discutimos un nuevo paradigma para la física de materia oscura, basado en la propuesta de K. Dienes en [9], llamado materia oscura dinámica. En contraste con los paradigmas actuales sobre el problema de la materia oscura, donde se hipotetiza la existencia de una partícula estable, el escenario de materia oscura dinámica puede ser caracterizado por el reemplazo de la estabilidad por un balanceo entre las abundancias cosmológicas y las tasas de decaimiento a través del vasto conjunto de componentes de materia oscura. Para obtener dicho conjunto de estados que no solo sean candidatos a materia oscura, sino que también sus abundancias y tasas de decaimiento se encuentren balanceadas de la forma

$$\Omega_i \Gamma_i^\alpha = \text{constante}, \quad (6.1)$$

se propuso un modelo inspirado en teoría de cuerdas. Se mostró que un campo escalar cinco-dimensional propagado en el bulto de una dimensión extra, naturalmente provee estados que obedecen una ecuación de balanceo inversa como en (6.1), donde se relacionan sus abundancias y anchuras de partícula de manera correcta. Además, se encontró que estos estados conspiran para arrojar un parámetro de ecuación de estado efectivo en un rango fenomenológicamente viable, lo que implica que el escenario puede satisfacer las constricciones impuestas por las observaciones cosmológicas. Este desarrollo se encuentra expuesto en el capítulo 5, el cual representa la parte esencial de la presente tesis.

Para poder desarrollar este trabajo, primeramente se aborda un repaso de la cosmología estándar. Se estudia la dinámica del espacio-tiempo y su evolución en un universo plano, homogéneo, isotrópico y en expansión. Además, se introduce el modelo Λ CDM, caracterizado por los parámetros Ω_m , Ω_Λ y Ω_r . A su vez, se menciona que las observaciones recientes arrojan que solo el 5% de la materia visible se encuentra descrita por partículas del SM, mientras que el resto es conformada por un tipo de materia invisible, eléctricamente neutra y que solo interactúa gravitacionalmente con la materia ordinaria. Por último, se discuten algunas evidencias astrofísicas sobre su existencia.

Antes de repasar algunos modelos que intentan explicar el fenómeno de materia oscura, presentamos en el capítulo 3 el formalismo de la teoría cuántica de campos. Se consideró prudente discutir

la teoría cuántica del campo escalar y derivar las expresiones necesarias para poder trabajar con los acoplamientos de los campos de materia oscura con los campos del SM.

Armados con la herramienta matemática de la teoría cuántica de campos, se repasa el modelo de las partículas masivas que interactúan débilmente (WIMPs) como candidatas a materia oscura, así como el llamado milagro WIMP: bajo una hipótesis de producción térmica en el universo temprano y una interacción mediada por la fuerza gravitacional y alguna otra fuerza tan o más débil que la fuerza débil, se obtiene la densidad de energía de materia oscura

$$\Omega_\chi h^2 \approx 0.12 \left(\frac{13 \text{ GeV}}{m_\chi} \right)^2. \quad (6.2)$$

Esta expresión coincide con la densidad de energía de materia oscura medida por el satélite Planck, $\Omega_{CDM} \approx 0.26$, si suponemos que la masa de la WIMP es del orden de $\sim 30 \text{ GeV}$. Sin embargo, remontándonos a la Fig 4.2, se observa que aquellas anomalías reportadas en el pasado por algunas colaboraciones dedicadas a la búsqueda de dicha partícula, han sido refutadas. Esto motiva a repasar un modelo alternativo para explicar el fenómeno de la materia oscura, las partículas tipo axión (ALPs). Por lo tanto, se explora el origen de dicho modelo en el problema de la violación de CP en las interacciones fuertes. Específicamente, se brinda detalle en el mecanismo de producción de estas partículas tipo axión, para ser utilizado en nuestro modelo candidato a materia oscura dinámica.

Una vez planteados los fundamentos teóricos, se exponen los aspectos generales de la materia oscura dinámica. Primero se propone que la materia oscura está compuesta por un conjunto de N campos escalares, con $N \gg 1$, cuya ecuación dinámica en el Universo es como la de un oscilador armónico amortiguado. Esto permite separar a los campos en dos conjuntos: aquellos cuya masa excede al factor de amortiguamiento y oscilan instantáneamente comportándose como materia y aquellos cuya masa es menor al amortiguamiento y debido a esto, experimentan un encendido escalonado. El conjunto completo de campos queda totalmente caracterizado por la densidad de energía total $\Omega_{tot} \equiv \sum \Omega_i$, la medida de qué tanto nuestro escenario se desvía del enfoque tradicional $\eta \equiv 1 - \Omega_0/\Omega_{tot}$ y el parámetro de ecuación de estado efectivo w_{eff} . Un resultado importante en esta parte es que w_{eff} es distinto de cero al tiempo presente; es decir, que las componentes de materia oscura están decayendo antes, durante, y después de la época actual. Como resultado, cantidades cosmológicas como Ω_{tot} experimentan una evolución temporal independiente de aquella dada por la expansión del Universo.

Finalmente, inspirados en la teoría de cuerdas, se presenta el modelo candidato a materia oscura dinámica. Se considera un campo escalar 5D Φ propagándose en el espacio-tiempo

$$\mathbb{M}^4 \otimes S^1/\mathbb{Z}_2, \quad (6.3)$$

donde \mathbb{M}^4 representa el espacio-tiempo de Minkowski y el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 la dimensión extra. La compactificación de esta dimensión divide al campo escalar 5D en un número infinito de campos

escalares 4D ϕ_i en el espacio usual de Minkowski, cuya ecuación dinámica queda definida como

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\mu \phi_k^* \partial^\mu \phi_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathcal{M}_{kl}^2 \phi_k \phi_l^* \right), \quad (6.4)$$

donde \mathcal{M}_{kl}^2 es la matriz de masa de dichos campos 4D de materia oscura.

Para que este modelo pueda ser aceptable como un modelo de materia oscura dinámica, se necesita que las abundancias cosmológicas y tasas de decaimiento de los campos ϕ_i , $i = 0, 1, \dots, N$, se encuentren balanceados mediante la relación (6.1). En este trabajo, esta relación se obtiene suponiendo que los diferentes campos adquirieron abundancias distintas a cero mediante un mecanismo de desalineación, discutido en la sección 5.2.2. En consecuencia ϕ_0 posee un valor esperado de vacío

$$\langle \phi_0 \rangle = \theta \hat{f}_\phi, \quad (6.5)$$

donde θ denota al ángulo de desalineación (en la producción por desalineación) y \hat{f}_ϕ la escala de energía asociada al campo 5D Φ . La expresión (6.5) implica que la abundancia inicial para cada campo está dada en términos del eigenvalor de masa $\tilde{\lambda}$ de \mathcal{M}_{kl}^2 como

$$\Omega_\lambda^{(G)} = \frac{\theta^2}{6} \tilde{\lambda}^2 A_\lambda^2 \left(\frac{m \hat{f}_\phi}{M_P H} \right)^2. \quad (6.6)$$

Para encontrar la abundancia al día de hoy, se consideran tres eras cosmológicas en donde se pudo establecer la abundancia inicial: época de materia, época de radiación y recalentamiento. También se considera si es un encendido instantáneo o escalonado. Sin embargo, encontramos que solo existen tres comportamientos para $\Omega_\lambda(t_0)$. Y por lo tanto, al dar los resultados en dos conjuntos distintos, el comportamiento para $\tilde{\lambda}$ grandes y para $\tilde{\lambda}$ pequeños, obtenemos los resultados en (5.94) y (5.95).

Por otro lado, para calcular las tasas de decaimiento, se considera el peor escenario posible y nos preguntamos qué tan grandes pueden ser estas cantidades. Para un acoplamiento de ϕ' (la proyección del campo Φ en la brana) con un tensor de fuerza de campo genérico del SM, encontramos los términos de interacción

$$\frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle}{\hat{f}_\phi} \phi' F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle}{\hat{f}_\phi} \phi' F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (6.7)$$

y los términos de interacción de ϕ' con un campo fermiónico genérico del SM

$$\frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle}{\hat{f}_\phi} \phi' \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad \frac{\langle \phi_\lambda | \phi' \rangle}{\hat{f}_\phi} (\partial_\mu \phi') \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (6.8)$$

Al hacer los cálculos de las amplitudes para estos procesos, se encuentra para $\tilde{\lambda}$ grandes que $\Gamma \sim \tilde{\lambda}^3$ y para $\tilde{\lambda}$ pequeños $\Gamma \sim \tilde{\lambda}^5$. Esto permite concluir que, sin importar si los estados de

materia oscura experimentan un encendido instantáneo o escalonado, e independientemente de la era cosmológica donde se establece su abundancia inicial, se cumple la ecuación de balanceo anticipada entre sus tasas de decaimiento y sus abundancias cosmológicas. Estos resultados los encontramos en (5.120) y en (5.121).

Teóricamente, esto permite concluir que el modelo presentado funciona como candidato a materia oscura dinámica. Volviendo entonces a este esquema, los resultados obtenidos permiten calcular los exponentes (α, β) y los coeficientes (A, B) que aparecen en el parámetro w_{eff} (ver ecuación (5.40)). El cálculo de los exponentes (α, β) se hace de forma directa y se obtienen los resultados justos para que el parámetro w_{eff} se encuentre en un rango fenomenológicamente viable. Sin embargo, para calcular los coeficientes (A, B) es necesario realizar un ajuste fino a tres parámetros de la teoría, de tal forma que la suma de las abundancias individuales, al día de hoy, se aproxime a Ω_{CDM} . Este problema de *ajuste fino* deja abierta la pregunta si existe una teoría que prediga a (A, B) sin necesidad de recurrir a un análisis de valores preferentes para los parámetros del modelo. Sin embargo, dados los valores para (α, β) y (A, B) , se aproxima el valor del parámetro efectivo de ecuación de estado w_{eff} en (5.131). Se encuentra que, de forma general, al día de hoy, $w_{\text{eff}}(t_0) \approx 0$ y por lo tanto, este puede ser tomado como una descripción de un parámetro que describe a estados de materia oscura.

Vale la pena recalcar algunas señales fenomenológicas que son únicas para la configuración de materia oscura dinámica. Bajo ciertas circunstancias, estas observaciones podrían ser tomadas como “indicios” del esquema. Las observaciones son:

- Una sección eficaz no definida: como la materia oscura está compuesta por un conjunto de partículas con una variedad de masas y vidas medias, es seguro concluir que no existe una sección eficaz definida para caracterizar al conjunto completo de campos de materia oscura. Esto podría acarrear consecuencias para la detección directa y fenomenología de colisionadores de partículas.
- Supresión de los modos ligeros: los acoplamientos entre la materia oscura dinámica en el bulto y los estados del SM en la brana son relevantes para dictar en qué grado esta materia oscura es “visible” al SM. Resulta que, para teorías donde se incorpora la masa de brana, los acoplamientos entre la brana y los eigenestados de masa en el bulto se suprimen. Este es un comportamiento que vemos en los elementos de matriz de acoplamiento (5.78). A pesar de que pareciera que este acoplamiento siempre alcanza un valor asintótico para λ grandes, según Fig. 6.1, este acoplamiento se ve suprimido para λ pequeños.

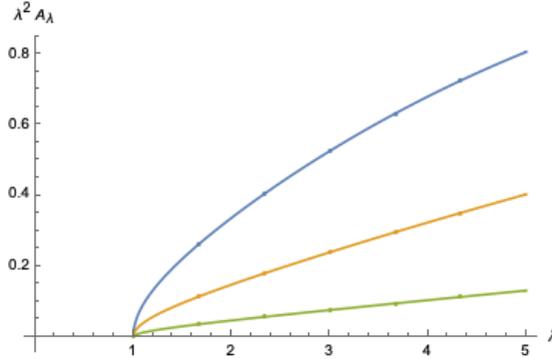


Figura 6.1: Valores para $\tilde{\lambda}^2 A_\lambda$ en función de los eigenvalores de masa $\tilde{\lambda}$, para $y = \pi$ (azul), $y = 1$ (amarillo), $y = 0.3$ (verde). Estas curvas representan el comportamiento global de la función. Cabe resaltar que los valores de acoplamiento vendrán dado en un conjunto discreto según el eigenvalor λ .

- Decoherencia cuántica: este fenómeno es discutido por Dienes en [40]. Básicamente la idea es la siguiente: una combinación lineal de estados ϕ_n puede acoplarse a la brana. Esta es la proyección que definimos como ϕ' . Sin embargo, cuando ϕ' es creado a través de una interacción con la brana, rápidamente sufre una decoherencia conforme se propaga debido a que no es un eigenestado de masa.

Una forma de entender este proceso es pensar que si ϕ' consiste en un gran número de diferentes eigenestados, estos quedan desfasados entre ellos bajo una evolución temporal. En consecuencia, no pueden acoplarse a la brana a tiempos tardíos y esencialmente se vuelven invisibles respecto a la física en la brana.

Finalmente, cabe decir que este trabajo sobre el modelo de materia oscura dinámica representa el primer paso sobre un análisis más extenso que se realizará. Se podría pensar en extender la teoría considerando un modelo que describa la etapa de inflación en el universo y la materia oscura dinámica de un mismo origen. Por ejemplo, en el modelo de inflación natural en [47, 48], se considera el potencial para dos campos axiónicos a_1 y a_2 , dado por

$$V = \Lambda_1^4 \left[1 - \cos \left(\frac{a_1}{f_1} + \frac{a_2}{g_1} \right) \right] + \Lambda_2^4 \left[1 - \cos \left(\frac{a_1}{f_2} + \frac{a_2}{g_2} \right) \right], \quad (6.9)$$

con Λ_1, Λ_2 las escalas de confinamiento de los campos axiónicos y f_1, g_1, f_2, g_2 las constantes de decaimientos. Este potencial conduce a inflación, por lo tanto, se podría proponer en lugar de dos campos axiónicos, tener dos torres infinitas de Kaluza-Klein (5.53) en el potencial (6.9). Por un lado se buscaría que una de estas torres derive en inflación y por el otro, buscar que la otra torre siga la dinámica de materia oscura dinámica descrita en este trabajo.

Apéndice A

Detalles de cálculos

A.1 Obtención de la matriz de masa de Kaluza-Klein

En la sección 5.2.1, partimos de la acción

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x dy \left[\frac{1}{2} \partial_K \Phi^* \partial^K \Phi - \frac{1}{2} M^2 |\Phi|^2 - \frac{1}{2} \delta(y) m^2 |\Phi|^2 \right] \\
 &= \int d^4x dy \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} \partial_y \Phi^* \partial^y \Phi - \frac{1}{2} M^2 |\Phi|^2 - \frac{1}{2} \delta(y) m^2 |\Phi|^2 \right].
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Escribimos la solución como

$$\Phi(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} r_k \phi_k(x^\mu) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) \implies \Phi^*(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=0}^{\infty} r_k \phi_k^*(x^\mu) \cos\left(\frac{ky}{R}\right). \tag{A.2}$$

Si sustituimos la expansión de Φ en la acción (A.1), encontramos que

$$\partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi = \frac{1}{2\pi R} \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2 \partial_\mu \phi_k^* \partial^\mu \phi_k \cos^2\left(\frac{ky}{R}\right), \tag{A.3}$$

así como

$$\begin{aligned}
 \partial_y \Phi^* \partial^y \Phi &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{k,l=0}^{\infty} r_k r_l \phi_l^* \phi_k \partial_y \cos\left(\frac{ly}{R}\right) \partial^y \cos\left(\frac{ky}{R}\right) \\
 &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{k,l=0}^{\infty} r_k r_l \phi_l^* \phi_k \frac{kl}{R^2} \text{sen}\left(\frac{ly}{R}\right) \text{sen}\left(\frac{ky}{R}\right),
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

y finalmente que

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \Phi\Phi^* \\ &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{k,l=0}^{\infty} r_k r_l \phi_l^* \phi_k \cos\left(\frac{ly}{R}\right) \cos\left(\frac{ky}{R}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Para integrar sobre la coordenada y , usamos las siguientes relaciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno en el intervalo $[0, \pi R]$ [42]

$$\int_0^{\pi R} \sin\left(\frac{ly}{R}\right) \sin\left(\frac{ky}{R}\right) dy = \frac{\pi R}{2} \delta_{kl}, \quad \int_0^{\pi R} \cos\left(\frac{ly}{R}\right) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) dy = \frac{\pi R}{2} \delta_{kl}. \quad (\text{A.6})$$

Además, usamos la propiedad de la función $\delta(y)$

$$\int_0^{\pi R} \delta(y - y_0) f(y) dy = \begin{cases} 2\pi R f(y_0) & \text{si } 0 < y < \pi R \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Finalmente desarrollamos los términos en la acción

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy \frac{1}{2\pi R} \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2 \partial_\mu \phi_k^* \partial^\mu \phi_k \cos^2\left(\frac{ky}{R}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy \frac{1}{2\pi R} \sum_{k,l=0}^{\infty} r_k r_l \phi_l^* \phi_k \frac{kl}{R^2} \sin\left(\frac{ly}{R}\right) \sin\left(\frac{ky}{R}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy M^2 \frac{1}{2\pi R} \sum_{k,l=0}^{\infty} r_k r_l \phi_l^* \phi_k \cos\left(\frac{ly}{R}\right) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy \delta(y) m^2 \frac{1}{2\pi R} \sum_{k,l=0}^{\infty} r_k r_l \phi_l^* \phi_k \cos\left(\frac{ly}{R}\right) \cos\left(\frac{ky}{R}\right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\mu \phi_k^* \partial^\mu \phi_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{kl}{R^2} \phi_l^* \phi_k \delta_{kl} - \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} M^2 \phi_l^* \phi_k \delta_{kl} - \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} m^2 r_k r_l \phi_l^* \phi_k \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \partial_\mu \phi_k^* \partial^\mu \phi_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left(\frac{kl}{R^2} \delta_{kl} + M^2 \delta_{kl} + m^2 r_k r_l \right) \phi_l^* \phi_k \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De esta expresión definimos la matriz de masa de Kaluza-Klein como

$$\mathcal{M}_{kl}^2 \equiv \frac{kl}{R^2} \delta_{kl} + M^2 \delta_{kl} + m^2 r_k r_l = \left(\frac{kl}{R^2} + M^2 \right) \delta_{kl} + m^2 r_k r_l. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Cálculo de la tasas de decaimiento

Podemos escribir (3.70) como

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_I - p_F) \prod_{\text{estados finales}} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_i}} \quad (\text{A.10})$$

El caso de interés es aquel donde el campo ϕ 4-dimensional decae a dos estados finales, digamos, con momento \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 respectivamente. Por lo que nuestra tasa de decaimiento se reduce a

$$\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int \delta^{(4)}(p_I - (k_1 + k_2)) \frac{d^3 k_1}{E_{k_1}} \frac{d^3 k_2}{E_{k_2}}, \quad (\text{A.11})$$

donde hemos denotado m_ϕ como la masa de la partícula ϕ . A continuación, escribimos a $\delta^{(4)}$ de forma general como el producto de dos deltas

$$\delta^{(4)}(p_I - (k_1 + k_2)) = \delta(p_I^0 - (k_1 + k_2)^0) \delta^3(\mathbf{p}_I - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)). \quad (\text{A.12})$$

Luego, suponiendo que la partícula ϕ inicialmente se encuentra en reposo y usando la relación de dispersión $E_{\mathbf{k}_1}^2 = |\mathbf{k}_1|^2 + m_f^2$, simplificamos la expresión (A.12) a

$$\delta^{(4)}(p_I - (k_1 + k_2)) = \delta(m_\phi - 2\sqrt{|\mathbf{k}_1|^2 + m_f^2}) \delta^3((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)), \quad (\text{A.13})$$

con $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$.

Siguiendo con el desarrollo, usamos la ecuación (1.160) de [42], la cual dice que: si el argumento de $\delta(x)$ es una función de $g(x)$ con ceros en a_i reales, entonces

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|g'(a_i)|}. \quad (\text{A.14})$$

Al considerar el argumento de la delta unidimensional en (A.13) como una función de k , cuyo único cero real se encuentra en $|\mathbf{k}_1| = (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}$, llegamos a la expresión

$$\delta^{(4)}(p_I - (k_1 + k_2)) = \frac{E_{\mathbf{k}_1}}{2|\mathbf{k}_1|} \delta\left(|\mathbf{k}_1| - (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}\right) \delta^3((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)). \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo en (A.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{64\pi^2 m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int \delta^{(4)}(p_I - (k_1 + k_2)) \frac{d^3 k_1}{E_{k_1}} \frac{d^3 k_2}{E_{k_2}} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int \frac{d^3 k_1}{E_{k_1}} \frac{d^3 k_2}{E_{k_2}} \frac{E_{\mathbf{k}_1}}{|\mathbf{k}_1|} \delta\left(|\mathbf{k}_1| - (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}\right) \delta^3((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int \frac{d^3 k_2}{|\mathbf{k}_2| E_{k_2}} \delta\left(|\mathbf{k}_2| - (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

La integral sobre d^3k_2 se puede cambiar por $d\Omega |\mathbf{k}_2|^2 dk_2$

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{64\pi^2 m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int \frac{d^3k_2}{|\mathbf{k}_2| E_{k_2}} \delta\left(|\mathbf{k}_2| - (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}\right) \\
&= \frac{1}{64\pi^2 m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int d\Omega \int \frac{dk_2 |\mathbf{k}_2|}{E_{k_2}} \delta\left(|\mathbf{k}_2| - (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}\right) \\
&= \frac{1}{16\pi m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \int \frac{dk_2 |\mathbf{k}_2|}{E_{k_2}} \delta\left(|\mathbf{k}_2| - (m_\phi/2)\sqrt{1 - 4(m_f^2/m_\phi^2)}\right)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Finalmente, integrando trivialmente sobre $|\mathbf{k}_2|$, encontramos

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi m_\phi} \sum_{\text{estados finales}} |\mathcal{A}|^2 \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_\phi^2}}. \tag{A.18}$$

Apéndice B

Orbifolds

Los orbifolds se encuentran en la intersección de muchas áreas de las matemáticas, incluyendo geometría algebraica y diferencial, álgebra y teoría de cuerdas. Estos fueron introducidos por primera vez en la geometría diferencial por Satake, quien los llamó *V-variedades* [49]. Pero, fue William Thurston en su curso *Geometry and topology of three-manifolds* [50], quien adoptó por primera vez el nombre de orbifold. Según Thurston, podemos pensar a los orbifolds como espacios con singularidades aisladas, i.e. un espacio que se asemeja al espacio cociente de un grupo actuando sobre un espacio, en conjunto con información sobre la acción del grupo en puntos del espacio donde no es libre. Por ejemplo, si consideramos el espacio cociente del disco D^2 por la acción del grupo de rotaciones de orden 3 alrededor del centro del disco, nuestro orbifold sería el espacio cociente junto con la información de cómo el grupo de rotaciones actúa como el grupo cíclico de orden 3 en el origen.

B.1 Conceptos importantes

Para entender la definición de un orbifold, es necesario conocer las definiciones de: espacio topológico, grupo y acción de un grupo sobre un conjunto [51, 52].

Definición B.1.1. Una topología en un conjunto X , es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- El conjunto vacío y X están contenidos en τ .
- La unión de los elementos de cualquier subconjunto de τ está en τ .
- La intersección de los elementos de cualquier subconjunto finito de τ está en τ .

Un espacio topológico es un conjunto X donde se ha especificado una topología τ .

Definición B.1.2. Un grupo es un conjunto G , junto con una operación binaria “.”, donde se satisfacen los axiomas de grupo:

- Para todo $a, b, c, \in G$, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$.
- Existe un elemento $e \in G$, tal que para cada $a \in G$, se cumple $e \cdot a = a = a \cdot e$.
- Para cada $a \in G$, existe un elemento $b \in G$, tal que $a \cdot b = e$ y $b \cdot a = e$. Este elemento b es único y es llamado el inverso de a .

Definición B.1.3. La acción de un grupo G en un espacio topológico X es un mapeo continuo $f : G \times X \rightarrow X$, denotado por $(g, x) \rightarrow gx$.

El conjunto $G(x) = \{gx \in X | g \in G\}$ es llamado la *órbita* de x . El espacio X/G es el conjunto de órbitas en X dotado con la topología cociente, respecto al mapeo natural $X \rightarrow X/G$ que llamaremos el mapeo orbital.

B.2 Definición formal de un orbifold

Basados en el texto de Thurston [50], podemos dar la definición formal de un orbifold, así como un ejemplo de este.

Definición B.2.1. Una carta n -dimensional de orbifold en un espacio topológico X , es una 3-tupla (\tilde{U}, G, π) , donde

- \tilde{U} es un abierto en \mathbb{R}^n .
- G es un grupo finito de homeomorfismos de \tilde{U} .
- $\pi : \tilde{U} \rightarrow X$ es un mapeo definido como $\pi = \bar{\pi} \circ p$. Donde $p : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/G$ es el mapeo orbital y $\bar{\pi} : \tilde{U}/G \rightarrow X$ es el mapeo que induce un homeomorfismo de \tilde{U}/G en un abierto $U \subset X$.

Definición B.2.2. Un atlas n -dimensional de orbifold en X es una colección $\mathcal{U} = \{(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \pi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de cartas n -dimensionales de orbifold que cubren a X .

Definición B.2.3. Un orbifold n -dimensional consiste de un espacio topológico de Hausdorff¹ junto con un atlas n -dimensional de orbifold.

Finalmente, como ejemplo, consideremos la acción de \mathbb{Z}_2 en \mathbb{R}^3 por una reflexión en el plano zy . El espacio cociente $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_2$ es el semiplano $x \geq 0$, que denotaremos por \mathcal{F} . Físicamente, podemos imaginar un espejo en la “pared” zy de \mathcal{F} . Este espacio cociente tiene una estructura de orbifold donde cada punto x en la frontera de \mathcal{F} tiene una vecindad homeomórfica al cociente de una vecindad $U \subset \mathbb{R}^3$ módulo \mathbb{Z}_2 .

¹Un espacio topológico de Hausdorff es un espacio topológico donde para cada dos puntos distintos, existe una vecindad para cada uno que es disjunta de la otra.

Apéndice C

El oscilador armónico amortiguado

El análisis subsecuente está basado en el texto [53].

Un oscilador real, después de haber sido puesto en movimiento, gradualmente perderá energía y la amplitud de movimiento disminuirá con el tiempo. La pérdida de energía puede ser modelada por la adición de un amortiguamiento, tal que la ecuación de movimiento toma la forma

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{C.1})$$

donde γ actúa como este amortiguamiento, pues en el caso $\gamma = 0$ recuperamos la ecuación de movimiento de un oscilador armónico usual.

Para encontrar la solución en (C.1), un método es suponer un ansatz

$$x(t) = Ce^{\alpha t}, \quad (\text{C.2})$$

de tal forma que (C.1) se convierte en la ecuación algebraica

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{C.3})$$

Esta es una ecuación cuadrática para α , con solución

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{C.4})$$

Y, por lo tanto, la solución general a la ecuación del oscilador armónico amortiguado es

$$x(t) = e^{-(\gamma/2)t} (C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}). \quad (\text{C.5})$$

Ahora, nótese que los casos $\gamma > 2\omega_0$, $\gamma = 2\omega_0$ y $\gamma < 2\omega_0$ tienen comportamientos físicos muy distintos. Repasaremos brevemente estos tres casos

- Subamortiguamiento $\gamma < 2\omega_0$: matemáticamente tenemos que la frecuencia

$$\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (\text{C.6})$$

es un número positivo. Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = e^{-(\gamma/2)t} (C_1 e^{i\omega_u t} + C_2 e^{-i\omega_u t}), \quad (\text{C.7})$$

como $x(t)$ debe ser un número real. Debe ocurrir que $C_1 = C_2^*$. Y de esta forma, escribir

$$C_1 = \frac{1}{2} A e^{i\phi}, \quad C_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\phi}, \quad (\text{C.8})$$

para dos constantes reales A y ϕ . Esto lleva a la solución

$$x(t) = A e^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_u t + \phi). \quad (\text{C.9})$$

Entonces, vemos que para el caso subamortiguado, el sistema oscila, pero cuando se llega al tiempo $t = \omega_u$ este se detiene y la amplitud lentamente baja conforme avanza el tiempo.

- Sobreamortiguamiento $\gamma > 2\omega_0$: en este caso $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2$ es positivo, por lo tanto las raíces en (C.4) son reales. Así, la solución general es simplemente

$$x(t) = C_1 e^{-u_1 t} + C_2 e^{-u_2 t}, \quad (\text{C.10})$$

donde

$$u_1 = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad u_2 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{C.11})$$

Ambas soluciones tienen un comportamiento de exponencial decreciente. Como $u_1 > u_2$, la solución u_1 desaparecerá primero, dejando únicamente a la solución u_2 .

- Amortiguamiento crítico $\gamma = 2\omega_0$: en este último caso, la ecuación (C.5) se reduce a

$$x(t) = C e^{-\omega_0 t}. \quad (\text{C.12})$$

Sin embargo, como la dinámica del sistema está descrita por una ecuación diferencial parcial de segundo orden, entonces deben existir dos soluciones linealmente independiente. Para encontrar la otra solución, volvamos a la ecuación del oscilador armónico amortiguado pero con $\gamma = 2\omega_0$ desde el comienzo. De esta manera, la ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (\text{C.13})$$

Computando la solución, encontramos que

$$x(t) = (C + Bt) e^{-\omega_0 t} \quad (\text{C.14})$$

Una comparación de estos tres casos se muestra en la Fig.C.1.

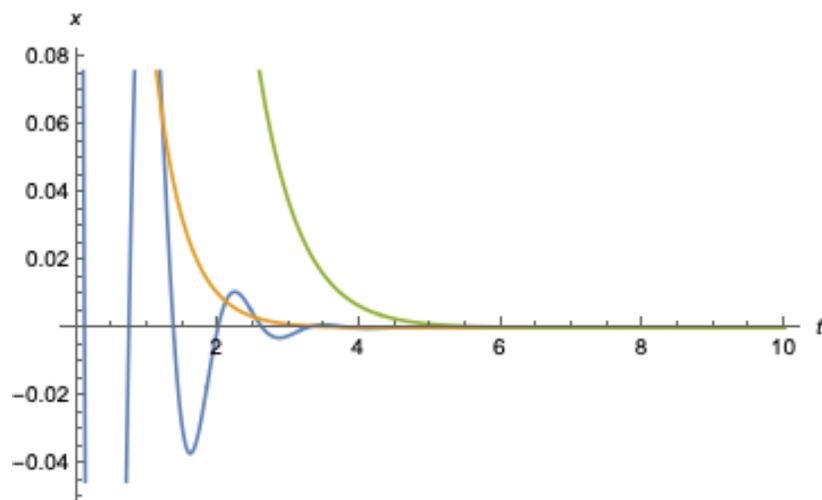


Figura C.1: Comparación del comportamiento subamortiguado (curva azul), sobreamortiguado (curva amarilla) y amortiguamiento crítico (curva verde). Se tomó $\gamma=4$

Bibliografía

- [1] H. Andernach and F. Zwicky, *English and spanish translation of zwicky's (1933) the redshift of extragalactic nebulae*, 2017.
- [2] Y. Sofue and V. Rubin, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **39** (2001), no. 1, 137–174.
- [3] D. Clowe, M. Bradač, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky, *The Astrophysical Journal* **648** (2006), no. 2, L109–L113.
- [4] M. Dutra, *Origins for dark matter particles:from the wimp miracle to the fimp wonder*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, 2019.
- [5] R. Daido, F. Takahashi, and W. Yin, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2017** (2017), no. 05, 044–044.
- [6] J. Xia, A. Abdukerim, W. Chen, X. Chen, Y. Chen, X. Cui, D. Fang, C. Fu, K. Giboni, F. Giuliani, and et al., *Physics Letters B* **792** (2019), 193–198.
- [7] D. Akerib, S. Alsum, H. Araújo, X. Bai, A. Bailey, J. Balajthy, P. Beltrame, E. Bernard, A. Bernstein, T. Biesiadzinski, and et al., *Physical Review Letters* **118** (2017), no. 2, 193–198.
- [8] E. Aprile, J. Aalbers, F. Agostini, M. Alfonsi, L. Althueser, F. Amaro, M. Anthony, F. Arneodo, L. Baudis, B. Bauermeister, and et al., *Physical Review Letters* **121** (2018), no. 11, 193–198.
- [9] K. R. Dienes and B. Thomas, *Phys. Rev.* **D85** (2012), 083523, [1106.4546].
- [10] S. Ramos-Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*, Las prensas de ciencias, 2016.
- [11] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univeristy Press, 2008.
- [12] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, 2009.
- [13] C. A. Bengaly, R. Maartens, N. Randriamiarinarivo, and A. Baloyi, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2019** (2019), no. 09, 025–025.

- [14] F. S. Labini and Y. V. Baryshev, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010** (2010), no. 06, 021–021.
- [15] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al., *Astronomy Astrophysics* **641** (2020), A6.
- [16] E. Corbelli and P. Salucci, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **311** (2000), no. 2, 441–447.
- [17] S. Burles, K. M. Nollett, and M. S. Turner, *Nucl. Phys. A* **663** (2000), 861c–864c, [astro-ph/9903300].
- [18] M. Davis, G. Efstathiou, C. S. Frenk, and S. D. M. White, *Astrophys. J.* **292** (1985), 371–394.
- [19] D. Tong, *Quantum field theory*, University of Cambridge, 2006.
- [20] M. Peskin and D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Perseus Books, 1995.
- [21] M. Bauer and T. Plehn, *Yet Another Introduction to Dark Matter: The Particle Physics Approach*, Lecture Notes in Physics, vol. 959, Springer, 2019.
- [22] J. Baur, *Astrophys. J.* **292** (2017), 371–394.
- [23] J. D. Lewin and P. F. Smith, *Astropart. Phys.* **6** (1996), 87–112.
- [24] T. M. Undagoitia and L. Rauch, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **43** (2015), no. 1, 013001.
- [25] R. Bernabei, P. Belli, A. Bussolotti, F. Cappella, R. Cerulli, C. Dai, A. d’ Angelo, H. He, A. Incicchitti, H. Kuang, and et al., *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **592** (2008), no. 3, 297–315.
- [26] C. E. Aalseth, P. S. Barbeau, J. Colaresi, J. I. Collar, J. Diaz Leon, J. E. Fast, N. E. Fields, T. W. Hossbach, A. Knecht, M. S. Kos, and et al., *Physical Review D* **88** (2013), no. 1, 193–198.
- [27] Q. Yue, W. Zhao, K. Kang, J. Cheng, Y. Li, S. Lin, J. Chang, N. Chen, Q. Chen, Y. Chen, and et al., *Physical Review D* **90** (2014), no. 9, 193–198.
- [28] Majorana, G. K. Giovanetti et al., *Phys. Procedia* **61** (2015), 77–84, [1407.2238].
- [29] R. Agnese, A. Anderson, D. Balakishiyeva, R. Basu Thakur, D. Bauer, J. Billard, A. Borgland, M. Bowles, D. Brandt, P. Brink, and et al., *Physical Review D* **91** (2015), no. 5, 193–198.
- [30] G. Angloher, M. Bauer, I. Bavykina, A. Bento, C. Bucci, C. Ciemniak, G. Deuter, F. von Feilitzsch, D. Hauff, P. Huff, and et al., *The European Physical Journal C* **72** (2012), no. 4, 193–198.

- [31] M. Kuźniak, M. Boulay, and T. Pollmann, *Astroparticle Physics* **36** (2012), no. 1, 77–82.
- [32] J. Aalbers, F. Agostini, M. Alfonsi, F. Amaro, C. AMSler, E. Aprile, L. Arazi, F. Arneodo, P. Barrow, L. Baudis, and et al., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016** (2016), no. 11, 017–017.
- [33] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977), 1440–1443.
- [34] D. J. Marsh, *Physics Reports* **643** (2016), 1–79.
- [35] X. Chen and M. Kamionkowski, *Physical Review D* **70** (2004), no. 4, A6.
- [36] E. Kolb and M. Turner, *The early universe*, Addison Wesley Publishing Company, 1990.
- [37] M. Kopp, C. Skordis, D. B. Thomas, and S. Ilić, *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018), no. 22, 221102, [1802.09541].
- [38] C. Csaki, *TASI lectures on extra dimensions and branes*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2002): Particle Physics and Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model(s)*, 4 2004.
- [39] M. Chaichian and A. Kobakhidze, *Physical Review D* (2002), 25–59, [hep-ph/0208129].
- [40] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, *Physical Review D* **62** (2000), no. 10, A6.
- [41] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, *Nuclear Physics B* **557** (1999), no. 1-2, 25–59.
- [42] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical methods for physicists*, Elsevier, 2013.
- [43] S. Friedberg and A. Insel, *Lineal algebra*, Illinois State University, 2000.
- [44] K. R. Dienes and B. Thomas, *Physical Review D* **85** (2012), no. 8, A9.
- [45] F. Halzen and A. Martin, *Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics*, John Wiley and Sons, 1984.
- [46] S. Kumar and L. Xu, *Physics Letters B* **737** (2014), 244–247.
- [47] J. E. Kim, H. P. Nilles, and M. Peloso, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2005** (2005), no. 01, 005–005.
- [48] K. Freese and W. H. Kinney, *Physical Review D* **70** (2004), no. 8, 209.
- [49] I. Satake, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **42 6** (1956), 359–63.

- [50] W. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, lecture notes of Princeton University, 1980.
- [51] J. Munkres, *Topology*, Dover Publications, 2000.
- [52] D. Avella, O. Mendoza, E. Corina Sáenz, and M. José Souto, *Grupos 1*, Colección papirhos, 2015.
- [53] H. Goldstein and C. Poole, *Classical mechanics*, Addison Wesley, 2000.