UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA PRIMERA APLICACIÓN DE WAHL

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
MIGUEL ÁNGEL GUERRERO CASTILLO

TUTOR O TUTORES PRINCIPALES
DR. LUIS ABEL CASTORENA MARTÍNEZ
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM CAMPUS MORELIA

MORELIA, MICHOACÁN, MÉXICO
SEPTIEMBRE, 2021

Introducción

Una manera de estudiar el espacio moduli de curvas suaves de género g es por medio de las aplicaciones de Wahl. En este trabajo nos enfocaremos en estudiar la primera aplicación de Wahl. Para una curva suave X de género g y su haz canónico K_X, llamamos a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{K_X} : \wedge^2 H^0(X, K_X) & \longrightarrow & H^0(X, K_X^{\otimes 3}) \\ \sigma \wedge \tau & \mapsto & \sigma d\tau - \tau d\sigma \end{array}$$

la primera aplicación de Wahl de X. El comportamiento de esta aplicación depende solo de la geometría de X. Ciliberto y Miranda en [6] estratifican el espacio moduli $\mathcal{M}_g$ por medio del rango de la primera aplicación de Wahl. Por su parte, Wahl en [17] establece una interpretación del dual del $\text{Coker}(\Phi_K)$ en la teoría de deformaciones del cono sobre la curva canónica en $\mathbb{P}^{g-1}$.

Con el fin de estudiar el comportamiento de esta aplicación de Wahl, hemos desarrollado el trabajo de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 estudiamos conceptos fundamentales como lo es el encaje canónico de una curva, haces lineales y su equivalencia con divisores. Estos conceptos serán de utilidad para los demás capítulos.

En el Capítulo 2 abordamos el concepto de variedad determinantal o locus de degeneración, éste es de gran importancia para continuar el estudio de las aplicaciones de Wahl, pues brinda una herramienta para describir de una manera más completa el locus de degeneración en el espacio moduli donde la aplicación de Wahl tiene cierto rango. Por ejemplo, Wahl demuestra en [18] que el locus de curvas hiperelípticas en $\mathcal{M}_g$ coincide con el locus de curvas tales que el corango de Φ_{K_X} es $3g - 2$.

En el Capítulo 3 definimos de manera formal la primera aplicación de Wahl y enunciamos ciertas interpretaciones que nos ayudarán a entender mejor esta aplicación entre las secciones globales del haz canónico y el haz canónico tensorizado tres veces. El Teorema 3.23 nos dice el corango de la primera aplicación de Wahl de curvas cuyo modelo plano es de grado m y admite un nodo y un punto $r-$fold ordinario como sus únicas singularidades. Este teorema nos permite enfocarnos para el caso de curvas género 8. Ciliberto, Miranda y Harris en [5] demostraron que la primera aplicación de Wahl de la curva general de género 8 es inyectiva, es decir, para un abierto de Zariski en $\mathcal{M}_8$ se cumple que la primera aplicación de Wahl de cualquier curva en ese abierto es inyectiva.

La parte central del Capítulo 4 es el ejemplo de una curva suave de género 8 donde mostramos que la primera aplicación de Wahl no es inyectiva mediante cálculos explícitos, lo cual afirma que el locus de degeneración donde la primera aplicación de Wahl no es inyectiva es un cerrado no vacío en $\mathcal{M}_8$.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiaremos el encaje canónico de una curva, éste nos permite, vía un divisor muy amplio (el cual es el divisor canónico), poder encajar de manera holomorfa una curva algebraica en el espacio proyectivo mediante las secciones globales del haz canónico. Este encaje es importante pues tiene una geometría muy rica y el estudio de la curva canónica tiene muchas aplicaciones en la teoría de curvas algebraicas, algunas estas aplicaciones las veremos en el siguiente capítulo, donde se estudiará el haz canónico y el haz normal de una curva algebraica. Para esto vamos a estudiar la relación entre divisores y haces de línea sobre curvas.

Las pruebas de los resultados que cito sin demostración en este capítulo se pueden ver en [15].

1.1. Encaje canónico

A lo largo de este capítulo consideramos únicamente curvas algebraicas complejas irreducibles, suaves y proyectivas.
Se denotará por D a un divisor sobre una curva algebraica X, y por $\operatorname{div}(f)$ al divisor de una función meromorfa f en X. Si $D = \sum_i n_i \cdot p_i$ entonces $D(p_i)$ denotará el orden del divisor D en el punto p_i, $D(p_i) = n_i$. Por su parte, el espacio de funciones meromorfas con polos acotados por D se escribirá como $L(D) = \{f \text{ meromorfa en } X | \operatorname{div}(f) \geq -D\}$ y el sistema lineal de D como $|D| = \{E \text{ divisor en } X | E \sim D, E \geq 0\}$, donde la equivalencia lineal $\sim$ se define como: $E \sim D$ si y solo si su diferencia es el divisor de alguna función meromorfa.

Sistema lineal de una función holomorfa

Sea $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ una función holomorfa de una curva algebraica X al espacio proyectivo de dimensión n. A la función ϕ le podemos asociar un sistema lineal de la siguiente manera:
Consideremos $\phi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n]$, donde cada f_i es una función meromorfa en X. Sea $D = -\operatorname{mín}_i\{\operatorname{div}(f_i)\}$ el inverso del mínimo de los divisores de las funciones. De ahí que $-D \leq \operatorname{div}(f_i)$ para cada i; así $f_i \in L(D)$ para todo i.

Si denotamos por V_f al conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_i a_i f_i$ con $a_i \in \mathbb{C}$, tenemos que $V_f \subset L(D)$ es un subespacio lineal de $L(D)$. Por lo tanto, el conjunto de divisores $|\phi| = \{\mathrm{div}(g) + D | g \in V_f\}$ forma un sistema lineal en X, específicamente, un subsistema del sistema lineal completo $|D|$ ($|D|$ es el conjunto de todos los divisores positivos linealmente equivalentes a D).

El siguiente lema nos dice que el sistema lineal $|\phi|$ no depende de la elección de las funciones meromorfas $\{f_i\}$ inducidas por la función ϕ.

Lema 1.1. *El sistema lineal $|\phi|$ está bien definido.*

Demostración. Supongamos que ϕ está definido por ciertas funciones meromorfas f_i y g_i en X, esto es, $\phi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n]$ y $\phi = [g_0 : \cdots : g_n]$. Consideremos $p \in X$ tal que no sea parte del conjunto de ceros y polos de las funciones f_i y g_i (los cuales son un conjunto finito porque X es compacta). Se tiene que $[f_0(p) : \cdots : f_n(p)] = [g_0(p) : \cdots : g_n(p)]$ y ninguna de las coordenadas son cero.
Por lo tanto, existe $\lambda(p)$ que depende de p tal que $g_i(p) = f_i(p)\lambda(p)$ para todo i. Así, λ es una función meromorfa en X y solo es holomorfa en esos puntos p, debido a que es igual a $\frac{g_i}{f_i}$. Puesto que, $\mathrm{div}(g_i) = \mathrm{div}(\lambda) + \mathrm{div}(f_i)$, si denotamos por D y D' al negativo del mínimo de los divisores de los f_i y de los g_i, respectivamente; entonces $D' = D - \mathrm{div}(\lambda)$ y $|D'| = |D|$. Para ambos conjuntos de funciones $\{f_i\}$ y $\{g_i\}$, se tiene $|\phi_f|$=$\{\mathrm{div}(\sum_i a_i f_i) + D\}$ y $|\phi_g|$=$\{\mathrm{div}(\sum_i a_i g_i) + D'\}$. Un elemento en $|\phi_g|$ es un divisor de la forma $\mathrm{div}(\sum_i a_i g_i) + D'$, entonces

$$\mathrm{div}(\sum_i a_i g_i) + D' = \mathrm{div}(\sum_i a_i \lambda f_i) + D' = \mathrm{div}(\sum_i a_i f_i) + D,$$

éste también es un elemento de $|\phi_f|$. Así, $|\phi_f| = |\phi_g|$. ■

Definición 1.2. Sea X una curva algebraica. Dada una función holomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ con imagen no degenerada, el sistema lineal $|\phi|$ es llamado el *sistema lineal de la función ϕ.*

Un sistema lineal de dimensión proyectiva n cuyos divisores tienen grado d se denota por "g_d^n".

Definición 1.3. Sea Q un sistema lineal (esto es, Q es un g_d^r para ciertas r y d) en una curva algebraica X. Un punto p es un *punto base* del sistema lineal Q si todo divisor $E \in Q$ contiene a p (es decir, para todo $E \in Q$ satisface $E \geq p$). Un sistema lineal Q es llamado *libre de puntos base* si no tiene puntos base.

Notemos que si $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ es una función holomorfa con imagen no degenerada, entonces el sistema lineal asociado $|\phi|$ es libre de puntos base.

Lema 1.4. *Si $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ es una función holomorfa con imagen no degenerada entonces para todo $p \in X$ existe un divisor $E \in |\phi|$ el cual no tiene a p en su soporte.*

Demostración. Consideremos $p \in X$ fijo y $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$ para ciertas funciones meromorfas f_i, definimos $D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\}$. Supongamos que el orden mínimo de las f_i en p es k y corresponde a f_j, esto es, $\mathrm{ord}_p(f_j) = k$. Entonces $D(p) = -k$, y $E = \mathrm{div}(f_j) + D$ es un elemento del sistema lineal $|\phi|$. Así $E(p) = \mathrm{ord}_p(f_j) + D(p) = k - k = 0$, es decir, p no pertenece al soporte de E. ∎

Si consideramos el divisor $D = \sum_i n_i \cdot p_i$ entonces el divisor $D - p$ es $\sum_i n_i \cdot p_i - p$ y el espacio de funciones meromorfas $L(D-p)$, por definición, es el espacio de funciones meromorfas $L(D)$ con una restricción más, la cual es que aumente en 1 el orden de la función en p. La siguiente proposición establece una equivalencia entre el hecho de que p es un punto base del sistema $|D|$ y que coincidan las dimensiones de los espacios $L(D)$ y $L(D-p)$.

Proposición 1.5. *Sea D un divisor en una curva algebraica X. Entonces, un punto $p \in X$ es un punto base del sistema lineal completo $|D|$ si y solo si $dimL(D-p) = dimL(D)$. Además, $|D|$ es libre de puntos base si y solo si para todo punto $p \in X$, $dimL(D-p) = dimL(D) - 1$.*

El divisor hiperplano de una función holomorfa a $\mathbb{P}^n$

Supongamos que $H \subset \mathbb{P}^n$ es un hiperplano definido por los ceros de un polinomio homogéneo de grado uno. Consideremos $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ tal que la imagen no está completamente contenida en H. Fijemos un punto $p \in X$, y supongamos que L es la ecuación lineal homogénea de H. Escojamos otra ecuación lineal homogénea M que no se anule en $\phi(p)$ y consideremos la función $h = (\frac{L}{M}) \circ \phi$ definida en una vecindad de p. Esta función es holomorfa cerca de p. Definimos $\phi^*(H)(p)$ como el orden $\mathrm{ord}_p(h)$ de h en p, como h es holomorfa, este entero no es negativo; más aún, es positivo si y solo sí $\phi(p) \in H$. Esto define un divisor $\phi^*(H)$ en X, y es llamado un *divisor hiperplano* para la función ϕ.

El siguiente lema establece que el conjunto de los divisores hiperplanos forma exactamente el sistema lineal $|\phi|$.

Lema 1.6. *Supongamos que las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^n$ son $[x_0 : \cdots : x_n]$, y H está definido por la ecuación $L = \sum_i a_i x_i$. Sea ϕ la función holomorfa definida por $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$ y $D = -\min_i div(f_i)$. Si $\phi(X)$ no está contenida en el hiperplano H, entonces*

$$\phi^*(H) = div(\sum_i a_i f_i) + D.$$

La propiedad de que un sistema lineal sea libre de puntos base está caracterizada por una función holomorfa.

Proposición 1.7. *Sea $Q \subset |D|$ un sistema lineal libre de puntos base de dimensión (proyectiva) n en una curva algebraica compacta X. Entonces existe una función holomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ tal que $Q = |\phi|$. Más aún, ϕ es único salvo cambios de coordenadas lineales.*

Dado cualquier divisor D con $|D|$ libre de puntos base, denotamos por ϕ_D la función holomorfa asociada al sistema lineal completo $|D|$.

Proposición 1.8. *Sea X una curva algebraica compacta, y D un divisor en X cuyo sistema lineal completo $|D|$ no tiene puntos base. Entonces, ϕ_D es una función holomorfa inyectiva y un isomorfismo sobre su imagen, si y solo si para cualesquiera dos puntos p y q de X se satisface que $dim L(D-p-q) = dim L(D) - 2$.*

Cuando la función ϕ_D es un isomorfismo sobre su imagen, decimos que es un *encaje*. Un divisor D tal que $|D|$ no tiene puntos base y ϕ_D es un encaje, es llamado un divisor *muy amplio*.

El encaje canónico para curvas no hiperelípticas y el morfismo canónico para curvas hiperelípticas

Consideremos ahora el sistema lineal canónico $|K|$ en una curva algebraica X, esto es, $|K|$ consiste de los divisores de 1-formas holomorfas en X. Si X tiene género 0, entonces este sistema es vacío. Veremos que para género mayor a cero este sistema no tiene puntos base.

Lema 1.9. *El sistema lineal canónico $|K|$ en un curva algebraica X de género $g \geq 1$ es libre de puntos base.*

Demostración. Recordemos que las secciones globales del haz canónico son las $1-$formas diferenciales holomorfas. Por el teorema de Riemann-Roch, este espacio de secciones globales tiene dimensión igual a g. Supongamos que $|K|$ tiene un punto base $p \in X$, entonces por la proposición 1.5 se tiene que $\dim L(K-p) = \dim L(K) = g$, y por el teorema de Riemann-Roch $\dim L(p) - \dim L(K-p) = \deg(p) - g + 1$. Así $\dim L(p) = 2$, esto nos dice que existe una función meromorfa no constante en X que tiene un único polo simple en p. Por lo que X es biholomorfa a $\mathbb{P}^1$, lo cual es una contradicción. ■

Dado que $|K|$ es libre de puntos base, entonces esta definida la función holomorfa asociada
$$\phi : X \to \mathbb{P}^{g-1}, \tag{1.10}$$
es llamada la *aplicación canónica*, y cuando resulta ser un encaje se le conoce como el *encaje canónico*. Por la proposición 1.8, ϕ_K no es un encaje si y solo sí existen puntos p y q en X tales que $\dim L(K-p-q) \neq \dim L(K) - 2$, esto ocurre si $\dim L(K-p-q) = \dim L(K) - 1 = g - 1$.
Por el teorema de Riemann-Roch tenemos
$$\dim L(K-p-q) = \deg(K-p-q) + 1 - g + \dim L(p+q) = g - 3 + \dim L(p+q).$$

Por lo que ϕ_K no es un encaje si y solo si existen dos puntos p y q tales que $L(p+q) = 2$. Una función meromorfa no constante $f \in L(p+q)$ define una función de grado 2 en $\mathbb{P}^1$, es decir X es hiperelíptica.

Proposición 1.11. *Sea X una curva algebraica de género $g \geq 3$. Entonces la aplicación canónica es un encaje si y solo sí X no es hiperelíptica. En este caso la aplicación canónica encaja a X en $\mathbb{P}^{g-1}$ como una curva suave de grado $2g-2$.*

Para una curva hiperelíptica X de género $g \geq 2$, la aplicación canónica está definida pero no es un encaje, sin embargo, es posible ver la forma de la aplicación ϕ_K. Para esto supongamos que X está definido por $y^2 = h(x)$, donde $h(x)$ es un polinomio de grado $2g+1$ ó $2g+2$ con distintas raíces. Entonces, el espacio $\Omega^1(X)$ de 1-formas holomorfas en X es

$$\Omega^1(X) = \{g(x)\frac{dx}{y} | \deg(g) \leq g-1\}.$$

Si tomamos el divisor canónico $K = \mathrm{div}(\frac{dx}{y})$, entonces una base para el espacio $L(D)$ es $\{1, x, x^2, \cdots, x^{g-1}\}$. Entonces la aplicación canónica está definida por

$$\phi_K = [1 : x : x^2 : \cdots : x^{g-1}].$$

Si consideramos $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ la aplicación cubriente doble, que envía (x, y) a x; entonces la aplicación canónica ϕ_K es la composición de π con la aplicación de Veronese $\nu_{g-1} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{g-1}$.

1.2. Haces lineales

Un haz lineal sobre una curva algebraica X es en esencia asignar una línea compleja (espacio vectorial de dimensión compleja uno) en cada punto p de X. Un ejemplo de esto es el siguiente: dado que un punto $p \in \mathbb{P}^n$ define un subespacio L_p de dimensión uno en $\mathbb{C}^{n+1}$, es posible asignar L_p (considerado como espacio vectorial) a sí mismo (considerado como el punto p en $\mathbb{P}^n$), esto es un haz lineal en $\mathbb{P}^n$ conocido como el haz tautológico.

Definición 1.12. Un haz lineal sobre una curva algebraica X, es una variedad algebraica L junto con un morfismo $\pi : L \to X$ tal que existe $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de abiertos de X tales que:

1. Para cada $i \in I$, existe un isomorfismo $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U \times \mathbb{C}$ que satisface $\pi \circ \psi_i^{-1} = pr_1$, donde pr_1 es la proyección a la primera coordenada. La función ψ_i es llamada trivialización de L sobre U_i.

2. Para cada $i, j \in I$, el morfismo

$$\varphi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1}|_{U_i \cap U_j} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$$

tiene la forma

$$(p, v) \mapsto (p, r(p) \cdot v)$$

para alguna función regular no cero en ninguna parte $r \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. La función r es llamada función de transición.

Un ejemplo de un haz lineal en una curva algebraica X es el *haz lineal trivial*, definido como $L = X \times \mathbb{C}$ con el morfismo $\pi = pr_1$.

Ejemplo 1.13. (El haz lineal tautológico para un función $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$)
Dado que $\mathbb{P}^n$ tiene un haz lineal natural sobre sí mismo, el haz tautológico, entonces para cualquier función $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ se tendrá un haz lineal inducido de manera siguiente: la función Φ está definida por ciertas funciones racionales $f_0, f_1, \cdots, f_n$ en X, $\Phi(p) = [f_0(p) : \cdots : f_n(p)]$. Consideremos

$$L := \{(p, v) \in X \times \mathbb{C}^{n+1} | v \in \Phi(p)\} = \bigcup_{p \in X} (\{p\} \times \Phi(p)).$$

Notemos que la primera proyección da una función $\pi : L \to X$, y la fibra $L_p = \pi^{-1}(p)$ es isomorfa a la línea compleja asociada a $\Phi(p)$, la cual es $\{p\} \times \Phi(p)$.
Si $U_i \subset X$ es el abierto donde la $i-$ésima coordenada de Φ es distinta de cero, es decir,

$$U_i = \Phi^{-1}\{[z_0 : \cdots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \cdots : z_n] | z_k \in \mathbb{C}\},$$

entonces para cualquier $p \in U_i$ es posible expresar a $\Phi(p)$ de manera única como $[z_0 : \cdots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \cdots : z_n]$, estas funciones coordenadas $z_k = \frac{f_k}{f_i}$ son funciones regulares en U_i. Para cualquier $(p, v) \in \pi^{-1}(U_i)$, consideremos $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$

$$\phi_i(p, v) = (p, v_i),$$

donde v_i es la $i-$ésima coordenada del vector v. Con inversa que asigna a (p, s) el par (p, v), con $v = (sz_0, \cdots, sz_{i-1}, s, sz_{i+1}, \cdots, z_n)$.
Para analizar la compatibilidad entre ϕ_i y ϕ_j, sea $p \in U_i \cap U_j$ y $\Phi(p) = [z_0 : \cdots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \cdots : z_n]$, entonces para $(p, s) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ se tiene

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(p, s) = \phi_j(p, (sz_0, \cdots, sz_{i-1}, s, sz_{i+1}, \cdots, z_n)) = (p, sf_j/f_i),$$

notemos que $\frac{f_j}{f_i}$ es una función regular en $U_i \cap U_j$, por lo que se cumple el inciso 2) de la definición de un haz lineal.

Definición 1.14. Sea X una curva algebraica y supongamos que $\pi_1 : L_1 \to X$ y $\phi_2 : L_2 \to X$ son dos haces lineales. Una función $\alpha : L_1 \to L_2$ es un *homomorfismo de haces lineales* si

1. $\pi_2 \circ \alpha = \pi_1$.

2. Para cualquier par de trivializaciones $\phi_1 : \pi_1^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{C}$ y $\phi_2 : \pi_2^{-1}(U_2) \to U_2 \times \mathbb{C}$ para L_1 y L_2 respectivamente, la composición

$$\phi_2 \circ \alpha \phi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{C} \to (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{C},$$

tiene la forma

$$(p, s) \mapsto (p, f(p)s),$$

para alguna función regular f en $U_1 \cap U_2$.

El siguiente resultado nos dice que es posible definir un haz lineal vía funciones de transición.

Proposición 1.15. *Sea X una curva algebraica, $\{U_i\}$ una cubierta abierta de X, y para cada par de índices i, j, supongamos que t_{ij} es una función regular no nula en la intersección $U_i \cap U_j$, tal que la colección $\{t_{ij}\}$ satisface las condiciones de cociclo. Entonces, existe un haz lineal L, único salvo isomorfismo, con trivializaciones en cada U_i y funciones de transición t_{ij}.*

Ejemplo 1.16. Sea X una curva algebraica, y supongamos que $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i\}$ es un atlas en X. Para todo i y j, las cartas ϕ_i y ϕ_j son compatibles y entonces la composición $T_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es un función biholomorfa de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ a $\phi_i(U_i \cap U_j)$. Si se define $t_{ij} = T'_{ij} \circ \phi_i|_{U_i \cap U_j}$ y dado que la derivada T'_{ij} es no cero, entonces t_{ij} es una función holomorfa en $U_i \cap U_j$, y la colección $\{t_{ij}\}$ satisfacen las condiciones de cociclo. El haz lineal que estas funciones de transición definen es llamado el *haz tangente* T_X.

Ejemplo 1.17. Con la notación del ejemplo anterior, como $T_{ij} \circ T_{ji}$ es la identidad, entonces $T'_{ji} = 1/T'_{ij}$. Si definimos $t_{ij} = T'_{ji} \circ \phi_i|_{U_i \cap U_j}$, entonces el haz lineal que estas funciones de transición definen se llama el *haz canónico* K_X.

Correspondencia entre haces lineales y divisores

La relación entre haces lineales y divisores está ligada a la noción de una sección y su divisor asociado.

Definición 1.18. Sea $\pi : L \to X$ un haz lineal sobre una curva algebraica X. Una *sección meromorfa de L sobre* $U \subset X$ es una función $s : U \to L$ tal que

1. para cualquier $p \in U$, $s(p)$ está en la fibra de L sobre p, es decir, $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$;
2. para cualquier trivialización sobre $V \subset X$, $\phi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{C}$, la composición

$$pr_2 \circ \phi \circ s|_{U \cap V} : U \cap V \to \mathbb{C}$$

   es una función meromorfa en $U \cap V$

Definición 1.19. Sea X una curva algebraica, y $\pi : L \to X$ un haz lineal en X. Para una sección meromorfa s de L, el *orden* de s en un punto $p \in X$, $\mathrm{ord}_p(s)$, es el orden de la función racional $f = pr_2 \circ \phi \circ s$ donde $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$ es cualquier trivialización sobre U tal que $p \in U$.

Esta definición es independiente de la elección de la trivialización. En efecto, si consideramos otra trivialización sobre V tal que $p \in V$, entonces $\phi' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{C}$ con función de transición t entre ambas, no cero en ninguna parte; así la función racional $f' = pr_2 \circ \phi' \circ s$ es tf y por lo tanto tienen el mismo orden.

Se define el *divisor de una sección meromorfa* s como

$$\mathrm{div}(s) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(s) \cdot p.$$

La siguiente proposición nos dice que los divisores de todas las secciones de un haz lineal son linealmente equivalentes.

Proposición 1.20. *Sea L un haz lineal sobre una curva algebraica X. Supongamos que s_1 y s_2 son dos secciones meromorfas de L. Entonces,* $\operatorname{div}(s_1) \sim \operatorname{div}(s_2)$.

Recíprocamente, es posible obtener un haz lineal apartir de un divisor.

Proposición 1.21. *Sea X una curva algebraica y D un divisor sobre X. Entonces D determina un único haz lineal L_D sobre X.*

Demostración. Denotemos el divisor D por $D = \sum_{i \in I} n_i \cdot p_i$. Para cada p_i consideremos un abierto U_i que lo contiene tal que no contiene a los demás, $p_j \notin U_i$ para $j \neq i$, y definimos $U_* = X - \{p_i\}_{i \in I}$. Estos abiertos forman un cubierta abierta $\{U_i, U_*\}_{i \in I}$ de X y para cada U_i existe una carta coordenada z_i centrada en p_i. Sea $f_i = z_i^{n_i}$ una función meromorfa en cada U_i y $f_* = 1$ en U_*. Entonces las funciones $g_{ij} := \frac{f_i}{f_j}$ son holomorfas y nunca cero en $U_i \cap U_j$ y las funciones $g_{i*} = \frac{f_i}{1}$ y $g_{*i} = \frac{1}{f_i}$ también son holomorfas y no nulas en $U_i \cap U_*$. Notemos que éstas cumplen las condiciones de cociclos pues:

1. $g_{ii} \equiv 1$ en U_i para todo $i \in I$ y $g_{**} \equiv 1$ en U_*,

2. $g_{ji} g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} \frac{f_j}{f_i} = 1$ en $U_i \cap U_j$,

3. $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = \frac{f_i}{f_j} \frac{f_j}{f_k} \frac{f_k}{f_1} = 1$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$

Por la proposición (1.15), las funciones de transición $\{g_{ij}\}$ definen un haz lineal L_D, este haz es llamado el *haz lineal asociado al divisor D*. ■

Capítulo 2

Variedades determinantales

En este capítulo estudiaremos el concepto de variedad determinantal o locus de degeneración, este concepto es de gran importancia, debido a que proporciona herramientas para describir de una manera más completa el locus de degeneración en el espacio moduli donde la aplicación de Wahl tiene cierto rango y con ello estudiar su inyectividad o sobreyectividad. Las definiciones y propiedades enunciadas en esa sección se pueden encontrar en [1].

2.1. Variedades determinantales genéricas

Sea $M = M(m, n)$ la variedad de matrices de $m \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Para $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$ se define

$$M_k = M_k(m, n) = \{A \in M : \operatorname{rank}(A) \leq k\}.$$

La estructura de variedad de M_k viene dada por los ceros de los menores de tamaño $(k+1) \times (k+1)$. Estos menores son polinomios homogéneos, los cuales dotan de una estructura de variedad afín en un espacio de dimensión $m \cdot n$ y de una estructura de variedad proyectiva en un espacio proyectivo de dimensión $m \cdot n - 1$.
La variedad M_k es llamada una variedad determinantal génerica.

Por otro lado, si consideramos

$$\hat{M}_k = \hat{M}_k(m, n) = \{(A, W) \in M \times G(n-k, n) : A \cdot W = 0\},$$

la proyección a la grassmaniana $G(n-k, n)$, dota a $\hat{M}_k$ con una estructura un haz vectorial sobre $G(n-k, n)$ de rango mk. Entonces $\hat{M}_k$ es suave, conexa, y es de dimensión $k(m+n-k)$ [1, pág. 67]. Ahora si se considera la proyección

$$\pi : M \times G(n-k, n) \to M,$$

tenemos que $\pi(\hat{M}_k) = M_k$, así M_k es una subvariedad algebraica irreducible de M.
Si $A \in M_k \backslash M_{k-1}$, existe un único punto en $\pi^{-1}(A)$, el cual es $(A, \ker(A))$.

Recordemos que un vector tangente a $G(n-k,n)$ en W es un morfismo

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]) \to G(n-k,n)$$

basado en W, así si $\{w_1, w_2, \cdots, w_{n-k}\}$ es una base para W, podemos levantar esto a un morfismo $(w_1+\epsilon v_1, \cdots, w_{n-k}+\epsilon v_{n-k})$ sobre la variedad de $(n-k)-$ hojas en $\mathbb{C}^n$. Las v_i's se encuentran determinadas módulo W y el homomorfismo

$$\phi : W \to \mathbb{C}^n/W$$

correspondiente al vector tangente definido por $\phi(w_i) = v_i$ mód W, donde v_i mód W es la clase de v_i en $\mathbb{C}^n/W$.

Un vector tangente a $\hat{M}_k$ en (A, W) es un par (B, ϕ) donde B es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que $(A+\epsilon B)(w_i+\epsilon v_i) = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n-k$. Si $A \cdot W = 0$ y $Av_i + Bw_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots n-k$, esto es $(A\phi + B) \cdot W = 0$, entonces $\phi_*(T_{(A,W)}(M_k)) = \{B \in M : B \cdot W \subset A \cdot \mathbb{C}^n\}$, este espacio tiene dimensión igual a $(n-k)(m-\mathrm{rank}(A))$ [1, pág. 69]. En particular, si $A \in M_k \backslash M_{k-1}$ entonces el diferencial de ϕ en $(A, \ker(A))$ es inyectivo, por lo que A es un punto suave de M_k y el espacio tangente a M en A es

$$T_A(M) = \{B \in M : B \cdot \ker(A) \subset A \cdot \mathbb{C}^n\}.$$

El cono tangente a M_k en A es

$$\mathcal{T}_A(M_k) = \{B \in M : \text{ para algún } W \in G(n-k, \mathrm{Ker}\ A), B \cdot W \subset A \cdot \mathbb{C}^n\}$$

Si $A \in M_k \backslash M_{k-1}$, se tiene que $\mathcal{T}_A(M_k)$ genera a M como espacio vectorial, pues dado cualquier vector no nulo $v \in \mathbb{C}^n$ y cualquier vector $w \in \mathbb{C}^m$, existe un $B \in \mathcal{T}_A(M_k)$ tal que $Bv = w$. Esto se sigue del hecho de que existe un $W \in G(n-k, \mathrm{Ker}\ A)$ tal que $v \notin W$; y para tal W se satisfacen las condiciones: $B \cdot W \subset A \cdot \mathbb{C}^n$, $B \cdot v = w$. Por lo que se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *El locus singular de M_k es exactamente M_{k-1}.*

Algunos ejemplos de variedades determinantales son las que están definidas por el encaje de Segre y la aplicación de Veronese, los cuales se pueden ver en [12].

Ejemplo 2.2. Consideremos M_1 el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{mn-1}$ asociado al espacio vectorial de matrices $m \times n$ y $k = 1$. Una matriz $(Z_{i,j})$ de tamaño $m \times n$ es de rango 1 si y solo si podemos expresar como un producto $Z = U^t V$ donde $U = (u_1, ..., u_m)$ y $V = (v_1, ..., v_n)$.
Por lo que $M_1 \subset M = \mathbb{P}^{mn-1}$ es la variedad de Segre, es decir, la imagen del encaje de Segre

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} & \to & \mathbb{P}^{mn-1} \\ ([a_0 : \cdots : a_{m-1}], [b_0 : \cdots : b_{n-1}]) & \mapsto & [a_0 b_0 : \cdots : a_0 b_{n-1} : \cdots : a_{m-1} b_0 : \cdots : a_{m-1} b_{n-1}] \end{array}$$

Si $n = m = 2$, entonces $\Sigma_{1,1} := \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ y

$$\Sigma_{1,1} = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3 : \det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 0\},$$

es una variedad determinantal genérica.

Cono tangente a una variedad determinantal genérica

El cono tangente es una generalización de la noción del espacio tangente a una variedad para el caso de variedades con singularidades. En esta sección se expresa el cono tangente a una variedad determinantal genérica como el producto de un espacio lineal y otra variedad determinantal genérica de menor dimensión. Sea $A \in M_k$ tal que $A \in M_h - M_{h-1}$, es decir que A tiene rango h. Mediante un cambio de base, es posible elegir bases para $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$ tal que A es representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sea U una vecindad de A en M dada por $X_{1,1} \neq 0$, consideremos $x_{i,j} = X_{i,j}/X_{1,1}$ entonces un elemento general de U es

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & 1+x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_{h,1} & \cdots & & 1+x_{h,h} & x_{h,h+1} & \cdots & x_{h,n} \\ x_{h+1,1} & \cdots & & x_{h+1,h} & x_{h+1,h+1} & \cdots & x_{h+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & & & & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

donde A corresponde al origen de este sistema de coordenadas. El cono tangente de M_k en A es el espacio de matrices φ cuyo bloque inferior derecho de tamaño $(m-h)\times(n-h)$ tiene rango a lo más $k-h$. Sean $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{f_j\}_{j=1}^m$ bases de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ tales que $\mathrm{Ker}(A)$ es generado por $\{e_{h+1},...,e_n\}$ y la imagen de A es generada por $\{f_1,...,f_h\}$, así el bloque inferior derecho de tamaño $(m-h)\times(n-h)$ de φ representa la composición $\varphi' : KerA \hookrightarrow \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m/Im(A)$ y el cono tangente es

$$\mathcal{T}_A(M_k) = \{\varphi \in Hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) | rank(\varphi' : KerA \to Coker(A)) \leq k-h\}.$$

Sea H_2 el subespacio complementario a $H_1 := KerA$ en $\mathbb{C}^n$ y sea K_2 el subespacio complementario a $K_1 := A\cdot\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$. Una matriz B de $m\times n$ tal que $W \in G(n-k, kerA)$ y $B\cdot W \subset A\cdot\mathbb{C}^n$, es equivalente a tener tres aplicaciones lineales arbitarias $\alpha_1 : H_1 \to K_1$, $\alpha_2 : H_2 \to K_2$, $\alpha_3 : H_2 \to K_1$ y una aplicación lineal $\alpha_4 : H_1 \to K_2$ de rango a lo sumo $k-h$, con $h = rank(A)$. Por lo que el soporte de $\mathcal{T}_A(M_k)$ puede ser identificado con el producto

$$V \times M_{k-h}(m-h, n-h)$$

donde V es un espacio lineal de dimensión $h(m+n-h)$[1, pág. 70].

2.2. Variedades determinantales

Sea $\phi : E \longrightarrow F$ un homomorfismo de haces vectoriales holomorfos de rango n y m respectivamente sobre una variedad X. Al elegir una trivialización local de E y F sobre un abierto U, el homomorfismo ϕ es representado por una matriz A de funciones holomorfas de tamaño $m \times n$.

$$f : U \longrightarrow M = M(m, n)$$

Denotemos por U_k a la preimagen de M_k. El ideal de U_k es generado por los menores $(k+1) \times (k+1)$ de A y U_k es independiente de la elección de la trivialización, por lo tanto existe un subespacio analítico bien definido

$$X_k(\phi) \subset X$$

tal que $X_k(\phi) \cap U = U_k$ para cualquier $U \subset X$. Esta variedad $X_k(\phi)$ se llama la *k-ésima variedad determinantal* o *k-ésimo locus de degeneración* asociado a ϕ.

$$X_k(\phi) = \{p \in X | \text{rank}(\phi(p)) \leq k\} = D_k(\phi).$$ [1]

Si $X_k(\phi)$ es no vacío se tiene codimensión a lo más $(m-k)(n-k)$. Se dice que X_k tiene *dimensión esperada* si su dimensión es igual a $\dim X - (m-k)(n-k)$.

Ejemplo 2.3. Para cualquier homomorfismo de haces vectoriales $\phi : E \to F$ de rango n y m sobre una variedad X tal que $n \leq m$ y $k = n-1$, se tiene que la $(n-1)$-ésima variedad determinantal asociada a ϕ es $X_{n-1}(\phi) = \{p \in X | \phi(p) \text{ es no inyectiva}\}$.

La variedad determinantal genérica M_k es la k-ésima variedad determinantal asociada al morfismo ϕ entre los espacios de funciones regulares sobre la variedad de matrices,

$$\phi : \mathcal{O}_M^n \longrightarrow \mathcal{O}_M^m,$$

donde $\phi_A(v) = A \cdot v$.

$$X_k(\phi) = \{A \in M | rank(\phi_A) = rank(A) \leq k\} = M_k$$

Así como se definió la desingularización $\hat{M}_k$ de M_k; es posible definir el análogo $\hat{X}_k(\phi)$ de $X_k(\phi)$. Consideremos el haz de Grassmann de $(n-k)-$planos en las fibras de E, $\pi : G(n-k, E) \longrightarrow X$ con fibra $\pi^{-1}(p) = G(n-k, E_p)$ la grassmanniana de subespacios vectoriales de dimensión $n-k$ en E_p. Sea S el subhaz universal sobre $G(n-k, E)$ y sea Q el haz cociente en $G(n-k, E)$ definidos de manera siguiente: si p es un punto de X y W es un $(n-k)-$plano en E_p, es decir un punto en la fibra $\pi^{-1}(p)$, entonces la fibra de S sobre W es W y la fibra de Q es E_p/W. Se tiene una sucesión exacta

$$0 \to S \to \pi^*E \to Q \to 0.$$

Si se compone $\pi^*(\phi) : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$ con la inclusión de S en π^*E se obtiene

$$\Phi : S \to \pi^*F$$

[1] La notación $D_k(\phi)$ es en referencia al k-ésimo locus de degeneración

Por lo que $\hat{X}_k(\phi)$ será la subvariedad de $G(n-k, E)$ definida por el anulamiento de Φ, es decir, $\hat{X}_k(\phi)$ es el conjunto de elementos (p, W) donde p es un punto de $X_k(\phi)$ y W es un $(n-k)-$plano contenido en el kernel de ϕ_p.

Definición 2.4. Una variedad algebraica es Cohen-Macaulay si el anillo de coordenadas es Cohen-Macaulay, esto es si es Noetheriano y todas sus localizaciones en ideales primos son Cohen-Macaulay[2].

Si una variedad determinantal tiene dimensión esperada entonces es una variedad Cohen-Macaulay [1, pág. 84].

Proposición 2.5. *Si $X_k(\phi)$ tiene codimensión $(m-k)(n-k)$, entonces es Cohen-Macaulay.*

[2]Un anillo local Noetheriano R es Cohen-Macaulay si la profundidad de R es igual a su dimensión, depth(R)=dim(R).

Capítulo 3

La primera aplicación de Wahl

Existen varias maneras de llegar a la primera aplicación de Wahl, una de ellas es considerar las aplicaciones Gaussianas como lo hace Wahl en [16] y otra a partir de definir la diferencial de una sección global como lo hace Miranda en [14]. En este capítulo estudiaremos ambas construcciones y ciertas interpretaciones de la primera aplicación de Wahl, además de los resultados demostrados por E. Kang en [13] que nos dicen el corango de la primera aplicación de Wahl en curvas suaves con modelo plano que admiten cierto tipo de singularidades.

3.1. Aplicaciones Gaussianas

La siguiente construcción se puede hacer sobre una variedad proyectiva de dimensión n, nosotros nos restringiremos al caso de curvas.
Sean L, M dos haces lineales en una curva suave X y sea

$$\mu_{L,M} : H^0(X, L) \otimes H^0(X, M) \longrightarrow H^0(X, L \otimes M), \tag{3.1}$$

la aplicación multiplicación de secciones globales. Si denotamos $\mathcal{R}(L, M) = \mathrm{Ker}(\mu_{L,M})$ entonces la aplicación Gaussiana

$$\Phi_{L,M} : \mathcal{R}(L, M) \longrightarrow H^0(X, K_X \otimes L \otimes M), \tag{3.2}$$

se define de la siguiente manera: sean $\alpha = \sum_1^k l_i \otimes m_i \in \mathcal{R}(L, M)$ y $U \subset X$ un abierto tal que se tiene una trivialización local para L y M, y sea S el generador de las secciones de L restringidas en U y sea T el generador de las secciones de M restringidas en U. Es posible expresar $l_i = f_i S$ y $m_i = g_i T$ localmente en U, donde f_i, g_i son funciones holomorfas en U. Por hipótesis $\sum f_i g_i = 0$ y definimos localmente

$$\Phi_{L,M}(\alpha) = \sum (f_i dg_i - g_i df_i) S \otimes T \in H^0(U, K_X \otimes L \otimes M) \tag{3.3}$$

Para mostrar que esto es independiente de la elección de la trivialización local consideremos otros generadores $\bar{S}$ y $\bar{T}$, entonces $\bar{S} = u^{-1}S$ y $\bar{T} = v^{-1}T$ con u y v unidades en el anillo de funciones holomorfas en U. Por lo que $l_i = \bar{f}_i \bar{S}$ y $m_i = \bar{f}_i \bar{T}$, donde $\bar{f}_i = u f_i$

y $\bar{g}_i = vg_i$, entonces

$$\begin{aligned}\sum(\bar{f}_i d\bar{g}_i - \bar{g}_i d\bar{f}_i)\bar{S}\otimes\bar{T} &= \sum uv(f_i dg_i - g_i df_i)u^{-1}v^{-1}S\otimes T\\ &\quad + \sum(uf_i g_i dv - vg_i f_i du)S\otimes T\end{aligned}$$

Como $\sum f_i g_i = 0$, la expresión anterior es igual a $\Phi_{L,M}(\alpha)$. Se sigue que $\Phi_{L,M}(\alpha)$ es independiente de la elección de la trivialización, por lo tanto da un elemento bien definido de $H^0(X, K_X \otimes L \otimes M)$.
Todavía falta verificar que $\Phi_{L,M}$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal, sin embargo las propiedades de aditividad y multiplicación por escalar se siguen de la linealidad de la derivada y el producto tensorial, lo que debemos mostrar es que si $\alpha = \sum l_i \otimes m_i = 0$ entonces $\Phi_{L,M}(\alpha) = 0$.
Para esto, consideremos una base $\{n_j\}$ de $H^0(X, M)$ tal que $m_i = \sum_j \beta_{ij} n_j$ y $\sum_i \beta_{ij} l_i = 0$ para toda j ($\beta_{ij} \in \mathbb{C}$). Si tomamos $n_j = c_j T$ se tiene que $b_i = \sum_j \beta_{ij} c_j$ y $\sum_i \beta_{ij} a_i = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\sum a_i db_i - b_i da_i &= \sum_{i,j} a_i \beta_{ij} dc_j + \sum_{i,j} \beta_{ij} c_j da_i\\ &= \sum_{i,j} \beta_{ij} c_j da_i.\end{aligned}$$

Si se fija j, entonces $\sum_i \beta_{ij} a_i = 0$ implica que $\sum_i \beta_{ij} da_i = 0$. Por lo tanto $\Phi_{L,M}(\alpha) = 0$.

Una propiedad importante de esta aplicación Gaussiana es la naturalidad para una función $f : Y \longrightarrow X$ entre dos curvas, f^*L y f^*M. Esto es, existe un diagrama natural conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(L,M) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, K_X \otimes L \otimes M) \arrow[d] \\ \mathcal{R}(f^*L, f^*M) \arrow[r] & H^0(Y, K_Y \otimes f^*L \otimes f^*M). \end{tikzcd}$$

Si N es un haz lineal invertible entonces, existe un diagrama natural conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(L,M) \otimes H^0(N) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, \Omega^1_X \otimes L \otimes M) \otimes H^0(X,N) \arrow[d] \\ \mathcal{R}(L, M\otimes N) \arrow[r] & H^0(X, \Omega^1_X \otimes L \otimes M \otimes N). \end{tikzcd}$$

Si $L = M$, entonces $\mathcal{R}(L,L) = \mathrm{Ker}(S^2H^0(X,L) \to H^0(X, L^{\otimes 2})) \oplus \wedge^2 H^0(X,L)$, identificando a $\wedge^2 H^0(X,L)$ como un subespacio de $\mathcal{R}(L,L)$ vía $l_1 \wedge l_2 \mapsto \frac{1}{2}(l_1 \otimes l_2 - l_2 \otimes l_1)$. Dado que $\Phi_{L,L}$ se anula en el producto tensorial simétrico, entonces $\Phi_{L,L}$ queda esencialmente definido por la siguiente aplicación Gaussiana [1]

$$\begin{aligned}\Phi_L : \wedge^2\, H^0(X,L) &\to H^0(X, K_X \otimes L^{\otimes 2})\\ \sigma_1 \wedge \sigma_2 &\longrightarrow \sigma_1 d\sigma_2 - \sigma_2 d\sigma_1.\end{aligned} \tag{3.4}$$

[1]El nombre Gaussiano se deriva del caso donde X es una curva y L es muy amplio; en este caso Φ_L es el pull-back de las secciones hiperplano del clásico mapeo de Gauss, después de componer con el encaje de Plücker

Esto es, en una trivialización local en un abierto U con generador S, se tiene que $\sigma_1 = fS$ y $\sigma_2 = gS$.
Mediante la identificación $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_1)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\Phi_{L,L}\left(\frac{1}{2}(\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_1)\right) &= \frac{1}{2}(fdg - gdf)S \otimes S - \frac{1}{2}(gdf - fdg)S \otimes S \\ &= (fdg - gdf)S \otimes S\end{aligned}$$

por lo que de manera local se tiene que $\sigma_1 d\sigma_2 - \sigma_2 d\sigma_1 = (fdg - gdf)S \otimes S$.

La siguiente construcción corresponde a R. Miranda en [14], la cual se aborda de manera local en una curva suave X. Consideremos p un punto de X y σ una sección holomorfa en p de un haz lineal L sobre X.

Para una carta coordenada local z en p de X y una sección de trivialización local e en p de L, se tiene que $\sigma = f(z) \cdot e$ donde f es una función holomorfa en p. Si se define $d\sigma = f'(z) \cdot edz$, entonces $d\sigma$ es una sección de $L \otimes \Omega^1_X$, el producto tensorial de L y la gavilla de 1-formas holomorfas en X. Sin embargo, $d\sigma$ no está bien definida, pues si se considera otra sección de trivialización local ê entonces $e = g(z)\hat{e}$, donde $g(z)$ es una función holomorfa distinta de cero y así $d\sigma = [f'(z)g(z) + g'(z)f(z)] \cdot \hat{e}dz = f'(z) \cdot edz + \frac{g'(z)f(z)}{g(z)} \cdot edz$, en lugar de $f'(z) \cdot edz$.

Por lo tanto, si σ_1 y σ_2 son dos secciones de L tales que $\sigma_1 = f_1(z)e$ y $\sigma_2 = f_2(z)e$ entonces considerar $d\sigma_1 \otimes \sigma_2 - d\sigma_2 \otimes \sigma_1$, que localmente es

$$[f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)] \cdot e \cdot e \cdot dz,$$

se tiene que esta diferencia está bien definida de la elección de la sección de trivialización local. Si consideramos otra sección de trivialización local ê y $e = g(z)\hat{e}$ entonces

$$\begin{aligned}d\sigma_1 \otimes \sigma_2 - d\sigma_2 \otimes \sigma_1 &= (f_1'(z)g(z) + g'(z)f_1(z)) \cdot \hat{e}dz \otimes \sigma_2 \\ &\quad -(f_2'(z)g(z) + g'(z)f_2(z)) \cdot \hat{e}dz \otimes \sigma_1 \\ &= (f_1'(z) \cdot edz + \sigma_1 \frac{g'(z)}{g(z)}dz) \otimes \sigma_2 \\ &\quad -(f_2'(z) \cdot edz + \sigma_2 \frac{g'(z)}{g(z)}dz) \otimes \sigma_1 \\ &= (f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)) \cdot e \cdot e \cdot dz.\end{aligned}$$

Así, se obtiene una aplicación bien definida de $H^0(X, L) \times H^0(X, L) \to H^0(X, L \otimes L \otimes \Omega^1_X)$ definida por $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto d\sigma_1 \otimes \sigma_2 - d\sigma_2 \otimes \sigma_1$. Por la antisimetría en σ_1 y σ_2 se consigue la aplicación

$$\Phi_L : \wedge^2 H^0(X, L) \to H^0(X, L^{\otimes 2} \otimes \Omega^1_X)$$

3.2. Primera aplicación de Wahl

Sea X una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$ y consideremos $K_X = \Omega^1_X$ el haz lineal canónico, entonces a la aplicación Φ_K se le conoce como la primera aplicación de Wahl

$$\Phi = \Phi_K : \wedge^2 H^0(X, K_X) \to H^0(X, (K_X)^{\otimes 3}) \tag{3.5}$$

Notemos que las dimensiones del dominio y rango de Φ_K no cambian para cualquier curva suave X (de género $g \geq 2$) si se fija el género, debido a que por el teorema de Riemann-Roch se tiene que $h^0(X, K_X) = g$, y entonces

$$\begin{aligned}
\dim\left(\wedge^2 H^0(X, K_X)\right) &= \frac{g(g-1)}{2} \\
\dim\left(H^0(X, (K_X)^{\otimes 3}\right) &= \deg(K_X^{\otimes 3}) - g + 1 = 3\deg(K_X) - (g-1) \\
&= 5(g-1)
\end{aligned}$$

Por cuestiones de dimensión se tienen 3 casos:

1. Si $\frac{g(g-1)}{2} < 5(g-1)$, esto es $g < 10$, entonces Φ_K no es sobreyectiva.
2. Si $\frac{g(g-1)}{2} = 5(g-1)$, es decir $g = 10$, entonces Φ_K puede ser un isomorfismo.
3. Si $\frac{g(g-1)}{2} > 5(g-1)$, esto es $g > 10$, entonces, Φ_K no es inyectiva

Ciliberto y Miranda en [6] han estudiado el rango de Φ_K para curvas de género menor que 12, encontraron que para curvas de género g distinto de 9 y 11, la primera aplicación de Wahl es inyectiva para la curva general en el sentido moduli. Esto es, para un abierto de Zariski en $\mathcal{M}_g$ se cumple que la primera aplicación de Wahl es inyectiva. Además Ciliberto, Harris y Miranda en [5] también probaron que para género igual a 10 o mayor que 12, se cumple que Φ_K es sobreyectiva para la curva general en el sentido moduli, tal como se resume en la siguiente tabla.

g	$3 \leq g \leq 8$	9	10	11	≥ 12
Φ	inyectiva	kernel 1-dim	$\cong$	corank 1	sobreyectiva

Cuadro 3.1: Ciliberto-Harris-Miranda para una curva general

Cabe mencionar que para $g = 10$, Cukierman y Ulmer en [8] demostraron que el locus en $\mathcal{M}_{10}$ donde la primera aplicación de Wahl no es inyectiva es un divisor en $\mathcal{M}_{10}$, y años más tarde G. Farkas y M. Popa en [9] interpretaron este divisor de maneras distintas y con ello dieron un contraejemplo a una conjetura famosa de Harris-Morrison sobre la inclinación (*slope*) de $\mathcal{M}_g$.

El siguiente resultado relaciona el cokernel de esta aplicación con el espacio de secciones globales del haz normal torcido (*twists of normal bundle*) de X y se puede encontrar en [7].

Proposición 3.6. *Sea $C \subset \mathbb{P}^r$ una curva de género g, N_C el haz normal de C en $\mathbb{P}^r$, $L = \mathcal{O}(1)$ restringido a C y $N_C(-k) := N_C \otimes L^{-k}$. Entonces,*

1. *La sucesión*

$$0 \longrightarrow H^0(C, L)^\vee \longrightarrow H^0(C, N_C(-1)) \longrightarrow coker(\Phi_{K,L})^\vee \longrightarrow 0$$

es exacta.

2. *Si $k \geq 2$ entonces $H^0(C, N_C(-k)) \cong [coker(\Phi_{K\otimes L^{k-1},L})]^\vee$.*

Demostración. La sucesión del haz normal para C es

$$0 \longrightarrow K_C^{-1} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^r}|_C \longrightarrow N_C \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

La sucesión exacta de Euler es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow H^0(C, L)^\vee \otimes L \longrightarrow T_{\mathbb{P}^r}|_C \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

si se tensoriza por L^{-k} a las sucesiones exactas (3.7) y (3.8) se obtienen

$$0 \longrightarrow K_C^{-1} \otimes L^{-k} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k} \longrightarrow N_C(-k) \longrightarrow 0 \tag{3.9}$$

$$0 \longrightarrow L^{-k} \longrightarrow H^0(C, L)^\vee \otimes L^{-k+1} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k} \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

Para (3.10), la primer función al nivel de H^1 es

$$H^1(C, L^{-k}) \longrightarrow H^0(C, L)^\vee \otimes H^1(C, L^{-k+1}) \tag{3.11}$$

es dual a

$$H^0(C, L) \otimes H^0(C, K_C \otimes L^{k-1}) \longrightarrow H^0(C, K_C \otimes L^k) \tag{3.12}$$

Esta aplicación es sobreyectiva, ver en [11], pues L es libre de puntos base y por lo tanto la función (3.11) es inyectiva y se tiene una sucesión exacta corta al nivel de H^0

$$0 \longrightarrow H^0(C, L^{-k}) \longrightarrow H^0(C, L)^\vee \otimes H^0(C, L^{-k+1}) \longrightarrow H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) \longrightarrow 0$$

Como L es muy amplio entonces tiene grado positivo y L^{-k} es un haz lineal de grado negativo por lo que $H^0(C, L^{-k}) = 0$, entonces

$$H^0(C, L)^\vee \otimes H^0(C, L^{-k+1}) \cong H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) \tag{3.13}$$

Para $k = 1$, $H^0(C, L)^\vee = H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})$.
Para $k \geq 2$, $H^0(C, L)^\vee \otimes H^0(C, L^{-k+1}) = 0$, entonces $H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) = 0$.
La inyectividad de (3.11) nos da exactitud al nivel de H^1

$$0 \longrightarrow H^1(C, L^{-k}) \longrightarrow H^0(C, L)^\vee \otimes H^1(C, L^{-k+1}) \longrightarrow H^1(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

si se dualiza y se aplica dualidad de Serre

$$0 \longrightarrow H^1(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \longrightarrow H^0(C,L) \otimes H^0(C, K_C \otimes L^{k-1}) \longrightarrow H^0(C, K_C \otimes L^k)$$

Por lo tanto

$$H^1(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \cong \mathcal{R}(L, K_C \otimes L^{k-1}) = \text{ es el dominiio de } \Phi_{L,K_C \otimes L^{k-1}}.$$

La sucesión exacta corta en (3.9) nos induce una sucesión exacta larga de grupos de cohomología,

$$0 \longrightarrow H^0(C, K_C^{-1} \otimes L^{-k}) \longrightarrow H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) \longrightarrow H^0(C, N_C(-k)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(C, K_C^{-1} \otimes L^{-k}) \longrightarrow H^1(T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) \longrightarrow H^1(C, N_C(-k)) \longrightarrow 0$$

Como $L = \mathcal{O}(1)$ entonces $H^0(C, K_C^{-1} \otimes L^{-k}) = 0$. Si dualizamos la anterior sucesión exacta larga se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^1(C, N_C(-k))^\vee \longrightarrow H^1(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \longrightarrow H^1(C, K_C^{-1} \otimes L^{-k})^\vee \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^0(C, N_C(-k))^\vee \longrightarrow H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \longrightarrow 0$$

Dado que $H^1(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \cong \mathcal{R}(L, K_C \otimes L^{k-1})$, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\mathcal{R}(L, K_C \otimes L^{k-1}) \longrightarrow H^0(K_C^2 \otimes L^k) \longrightarrow H^0(N_C(-k))^\vee \longrightarrow H^0(T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \longrightarrow 0$$

La primera aplicación que aparece en la anterior sucesión exacta es la aplicación Gaussiana $\Phi_{L,K_C \otimes L^{k-1}}$, así que tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow coker(\Phi_{L,K_C \otimes L^{k-1}}) \longrightarrow H^0(C, N_C(-k))^\vee \longrightarrow H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k})^\vee \longrightarrow 0$$

■

Como ya se había mostrado anteriormente, tenemos que $H^0(C, T_{\mathbb{P}^r}|_C \otimes L^{-k}) = 0$ para $k > 1$. Del resultado anterior se sigue que

$$h^0(C, N_C(-1)) = \text{corank}(\Phi_{L,K_C}) + h^0(C,L), \tag{3.15}$$

y para $k > 1$

$$h^0(C, N_C(-k)) = \text{corank}(\Phi_{L,K_C \otimes L^{k-1}}). \tag{3.16}$$

Ahora, si consideramos el encaje canónico de la curva mediante las secciones de K_C (es decir, si tomamos $L = K$) entonces tenemos el corango de la primera aplicación de Wahl en términos de la dimensión de grupos de cohomología.

$$\text{corank}(\Phi_K) = h^0(C, N_C \otimes K_C^{-1}) - h^0(C, K_C) = h^0(C, N_C \otimes K_C^{-1}) - g. \tag{3.17}$$

El siguiente resultado demostrado por Ciliberto-Miranda-Harris en [5] nos dice las dimensiones del haz normal torcido para la curva general de género g, las cuales son importantes para estudiar la inyectividad o sobreyectividad de la primera aplicación de Wahl para un género dado.

Proposición 3.18. *Sea C una curva general de género $g \geq 3$. Entonces, las dimensiones de las secciones globales del haz normal torcido son*

$h^0(N_C(-k)) \setminus g$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	≥ 12
$k = 1:$	10	13	15	16	16	15	14	10	12	g
$k = 2:$	6	5	3	1	0	0	0	0	0	0
$k = 3:$	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$k = 4:$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 3.2: Ciliberto-Miranda para una curva general

Los siguientes dos resultados son demostrados en [18] y nos permite afirmar que el locus en $\mathcal{M}_g$ donde la primera aplicación de Wahl no es inyectiva es un conjunto no vacío para ciertos valores de g. También nos permite ver al conjunto de curvas hiperelípticas y trigonales de género g como algún locus de degeneración en $\mathcal{M}_g$.

Proposición 3.19. *(Wahl) Para una curva hiperelíptica de género $g \geq 2$, dada por $y^2 = f(x)$ con f de grado $2g+1$, el rango de Φ es $2g-3$ (es decir, el cokernel de dimensión $3g-2$).*

Proposición 3.20. *(Ciliberto-Miranda, Brawner) Sea C una curva trigonal general de género $g \geq 4$. Entonces $dim(ker(\Phi)) = \frac{(g-4)(g-5)}{2}$ y $dim(coker(\Phi)) = g+5$.*

Otra interpretación de la primera aplicación de Wahl es relacionado con el problema de extendibilidad: Dada una variedad proyectiva irreducible $X \subset \mathbb{P}^n$, ¿cuándo existe una variedad proyectiva $Y \subset \mathbb{P}^{n+1}$, que no sea un cono, de la cual X es una sección hiperplana? Dado un entero positivo r, una $r-$extensión de $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad $Y \subset \mathbb{P}^{n+r}$ tal que X es una sección de un espacio lineal. El siguiente resultado probado por Lvovski (ver [4]) da una condición necesaria para la extendibilidad.

Teorema 3.21. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva, suave e irreducible y tal que no es una cuádrica. Sea $\alpha(X) = h^0(N_{X|\mathbb{P}^n}(-1)) - n - 1$. Si X es $r-$extendible y $\alpha(X) < n$, entonces $r \leq \alpha(X)$.*

Para la primera aplicación de Wahl, tenemos que por cuestión de dimensión, Φ no es inyectiva si y solo si corank$(\Phi) \geq 5g - 5 - \frac{g^2-g}{2} + 1 = \frac{11g-g^2-8}{2}$. Como corank$(\Phi) = h^0(N(-1)) - g$, entonces esto es equivalente a $h^0(N(-1)) \geq \frac{11g-g^2-8}{2} + g$. Por lo tanto, por el teorema 3. 21 para el caso en el que $\dim(X) = 1$ y $n = g-1$ entonces la primera aplicación de Wahl de X es no inyectiva si X es $\frac{11g-g^2-8}{2}-$extendible, esto es, existe

una variedad proyectiva $Y \subset \mathbb{P}^{\frac{13g-g^2-10}{2}}$ tal que X es una sección de un subespacio lineal.
Otro caso particular del teorema 3. 21 es que si una curva suave X vive en una superficie $K3$, entonces Φ es no sobreyectiva. Además, si Φ es sobreyectiva y $X \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es una sección hiperplano de $Y \subset \mathbb{P}^g$, entonces Y es el cono sobre la curva X. Esto fue probado por Wahl en [18], utilizando teoría de deformaciones de conos (ver también [2]).

Teorema 3.22. *Si X es una curva suave que vive en una superficie K-3, entonces la primera aplicación de Wahl Φ_K no es sobreyectiva.*

3.3. La primera aplicación de Wahl de curvas de género 8

A continuación vamos a estudiar el comportamiento de la primera aplicación de Wahl sobre curvas de género 8, lo que queremos analizar es el locus de degeneración cuando la primera aplicación de Wahl es no inyectiva, para esto consideremos X una curva de género 8 y

$$\begin{array}{cccc} \Phi_K: & \wedge^2 H^0(X, K_X) & \longrightarrow & H^0(X, K_X^{\otimes 3}) \\ & \dim 28 & & \dim 35 \end{array}$$

Se sabe que para la curva general esta aplicación es inyectiva, esto es, para un abierto de Zariski en $\mathcal{M}_8$ (el espacio moduli de curvas de género 8) se cumple que la primera aplicación de Wahl es inyectiva. Por lo tanto el conjunto de curvas donde no es inyectiva es un cerrado (puede ser vacío). Sin embargo, este cerrado no es vacío por que para la curva trigonal de género 8 por la Proposición 3. 20 se tiene que $\operatorname{corank}(\Phi_K)) = 13$ y $\dim(Kernel(\Phi_K)) = 6$. Es decir, la primera aplicación de Wahl de curvas trigonales de género 8 no es inyectiva.
Ahora nos preguntamos por algún ejemplo explícito de una curva de género 8 donde la primera aplicación de Wahl no sea inyectiva.

El siguiente teorema es un resultado general para curvas suaves de cualquier género que admitan un modelo plano con un nodo y un punto $r - fold$ ordinario como sus únicas singularidades y nos permitirá estudiar la aplicación de Wahl para curvas suaves que admitan un modelo de curva plana (de grado 6) en $\mathbb{P}^2$ con 2 puntos nodales como singularidades, esto para caer en el caso de curvas género 8. Para este caso, es posible encontrar una base explícita para las secciones globales del haz canónico como funciones polinomiales de coordenadas afines x, y y por lo tanto es posible describir explícitamente la imagen de la aplicación de Wahl. El siguiente teorema así como los siguientes lemas fueron demostrados por Kang en [13].

Teorema 3.23. *Sean $r \geq 2$ y C una curva suave cuyo modelo plano es de grado m y admite un nodo y un punto $r-$fold ordinario como sus únicas singularidades. Entonces:*

I. *para el caso $m \geq r + 6$, el corango de Φ_K es 8.*

II. *para el caso $m = r + 5$, el corango de Φ es 8 si $r = 2$, y es igual a 7 si $r \geq 3$.*

III. *para el caso $m = r + 4$, el corango de Φ es 9.*

Este resultado lo demostraremos más adelante, para eso definimos lo siguiente: Sea $V(m; r, 2)$ la variedad que parametriza curvas planas irreducibles de grado m con un punto $r-$fold ordinario y un nodo como sus únicas singularidades. Sea $C \in V(m; r, 2)$ con punto $r-$fold en $P[0 : 0 : 1]$, y su nodo en $Q[0 : 1 : 1]$ y C intersecta la línea al infinito en m puntos distintos. Entonces, la ecuación de C en coordenadas afines está dada como

$$F(x, y) = \sum_{r \leq i+j \leq m, i \geq 2} a_{ij} x^i y^j + \sum_{l=r-1}^{m-2} b_l x(y-1) y^l + \sum_{l=r}^{m-2} c_l (y-1)^2 y^l$$

Por simplicidad, escribiremos $a_i = a_{i,m-i}$ $(i \geq 2)$, $b = b_{m-2}$, $c = c_{m-2}$, $a'_i = a_{i,r-i}$ $(i \geq 2)$ y $b' = b_{r-2}$, $c' = c_{r-2}$. Por suposición del hecho que la curva intersecta a la línea al infinito en m puntos distintos, las partes homogéneas de grado m y de grado r de la ecuación (denotadas por F_m y F_r respectivamente) se separan de todos los factores lineales distintos y las sumas $\sum_{l=r-2}^{m-2} a_{2,l}$, $\sum_{l=r-1}^{m-2} b_l$ y $\sum_{l=r}^{m-2} c_l$ no son ceros.

Por la fórmula de Plücker para una curva plana proyectiva de grado m con un nodo y un punto $r - fold$ ordinario se tiene que el género geométrico de C es

$$g(C) = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{r(r-1)}{2} - 1,$$

y las secciones globales del haz canónico están dadas como

$$H^0(C, K_C) = \left\{ \sum_{r-1 \leq i+j \leq m-3, i \geq 1} a_{ij} x^i y^j + \sum_{k=r-1}^{m-4} b_k y^k (y-1) | a_{ij}, b_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Calcularemos la imagen de la primera aplicación de Wahl explícitamente con respecto a esta base.

Lema 3.24. *Para $C \in V(m; r, 2)$ con $m - r \geq 4$ y $r \geq 3$, la* ImΦ *está generada por:*

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{(y-1)^2 y^{2r-2} dy, \cdots, (y-1)^2 y^{2m-10} dy, \\
&\quad x(y-1) y^{2r-3} dy, x(y-1) y^{2r-2} dy, \cdots, x(y-1) y^{2m-10} dy, \\
&\quad x^2 y^{2r-4} dy, x^2 y^{2r-3} dy, \cdots, x^2 y^{2m-10} dy, \\
&\quad x^3 y^{2r-5} dy, x^3 y^{2r-4} y dy, \cdots, x^3 y^{2m-11} dy, \cdots, x^{2m-8} dy\}. \\
G_2 &= \{x(y-1) y^{2r-3} dx, x(y-1) y^{2r-2} dx, \cdots, x(y-1) y^{2m-10} dx, \\
&\quad x^2 y^{2r-4} dx, x^2 y^{2r-3} dx, \cdots, x^2 y^{2m-10}, \cdots, x^{2m-8} dx\}. \\
G_3 &= \{y^{2m-8}((y-1)dx - xdy), xy^{2m-9}((y-1)dx - xdy)\} \\
&= \{\omega_i = x^i y^j ((y-1)dx - xdy) | 0 \leq i \leq 2m-8, i+j = 2m-8\} \\
G_4 &= \{x^2 y^{2r-6}(ydx - xdy), x^3 y^{2r-7}(ydx - xdy), \cdots, x^{2r-4}(ydx - xdy)\} \\
&\quad \cup \{y^{2r-4}(y-1)^2 (ydx - xdy), xy^{2r-5}(y-1)(ydx - xdy)\}. \\
&= \{\tau_i = x^i y^j (ydx - xdy) | i \leq 2, i+j = 2r-4\} \\
&\quad \cup \{\tau_0 = y^{2r-4}(y-1)^2 (ydx - xdy), \tau_1 = -xy^{2r-5}(y-1)(ydx - xdy)\} \\
G_5 &= \{y^{2r-2}((y-1)dx - xdy), \cdots, y^{2m-9}((y-1)dx - xdy)\} \\
&= \{\sigma_k = y^k ((y-1)dx - xdy) | 2r-2 \leq k \leq 2m-9\}.
\end{aligned}$$

Si $r = 2$, entonces $G_4 = \{\tau_0\}$ y todos los otros elementos en la $\mathrm{Im}\Phi$ *permanecen sin cambios.*

Tenemos que si $m - r \geq 4$ entonces, la cantidad de elementos en cada conjunto es

	Cantidad de elementos
G_5	$2m - 2r - 6$
G_4	$2r - 3$
G_3	$2m - 7$
G_2	$2m^2 - 15m - 2r^2 + 5r + 24$
G_1	$2m^2 - 2r^2 - 13m + 3r + 17$

Denotemos por $\mathrm{Gen}\Phi$ la unión de G_1, G_2, G_3, G_4 y G_5 del lema 3.24 y $\#\mathrm{Gen}$ la cantidad de elementos en $\mathrm{Gen}\Phi$.

Lema 3.25. *Para $C \in V(m;r,2)$ con $m-r \geq 4$, entonces $\#\mathrm{Gen} = 4m^2 - 4r^2 - 24m + 8r + 25$.*

Dado que no todos los elementos en $\mathrm{Gen}\Phi$ son linealmente independientes debemos encontrar todas las relaciones en $\mathrm{Gen}\Phi$, el número de relaciones lo denotaremos por $\#\mathrm{Rel}$. Para determinar este número utilizaremos los siguientes lemas.

Lema 3.26. *Para $C \in V(m : r, 2)$ con $m - r \geq 5$.*

I. *Para el caso $m \geq r + 6$, $(2m - 12)$ elementos de G_3 pueden ser generados por otros elementos de* $\mathrm{Gen}\Phi$ *excepto elementos de G_4.*

II. *Para el caso $m = r + 5$, $(2m - 13)$ elementos de G_3 pueden ser generados por otros elementos de* $\mathrm{Gen}\Phi$ *excepto elementos de G_4.*

Demostración. (i) Tenemos dos relaciones básicas: $F = 0$, el cual da una relación entre x y y, y $dF = 0$, el cual da una relación entre dx y dy. Consideramos las siguientes ecuaciones (R1), (R2) y (R3) y todas sus combinaciones lineales.

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{R1}) & x^i y^j F dx = 0 \\ (\mathrm{R2}) & x^i y^j F dy = 0 \\ (\mathrm{R3}) & x^i y^j dF = 0 \end{array}$$

Cualquier relación en $\mathrm{Gen}\Phi$ que contenga a alguna ω_i es obtenida de las relaciones:

$$\begin{array}{lll} (1) & x^i y^j F((y-1)dx - xdy) = 0, & i + j = m - 8, \quad i \geq 0 \\ (2) & x^i y^j (mFdx - xdF) = 0, & i + j = m - 7, \quad i \geq 0 \\ (3) & x^i y^j ((y-1)dF - mFdy) = 0, & i + j = m - 7, \quad i \geq 0 \end{array} \tag{3.27}$$

Puesto que el grado $m \geq r + 6$, cualquier término en las relaciones anteriores tiene grado mayor a $2r - 3$.
La relación (1) de (3. 27) da

$$\begin{aligned} x^i y^{m-8-i} F((y-1)dx - xdy) &= \{\sum_{k=2}^{m} a_k x^{i+k} y^{2m-8-i-k} + b_{m-2} x^{i+1} (y-1) y^{2m-10-i} \\ &\quad + c_{m-2} x^i (y-1)^2 y^{2m-10-i}\}((y-1)dx - xdy) + s \end{aligned}$$

donde s es una combinación lineal de términos de grado menor. Si cualquier monomio en s es un múltiplo de x^2 p $x(y-1)$, entonces por el rango del grado es un elemento de $S_1 \cup S_2$ (donde S_k es el espacio lineal generado por el conjunto G_k con $k = 1, 2, 3, 4, 5$). Entonces, los monomios de grado menor restante son

$$y^{m-8}((y-1)dx - xdy)\sum_{l=r}^{m-3} c_l (y-1)^2 y^l$$

y éstos son elementos de S_5. Por lo tanto los términos de grado menor son elementos de $S_1 \cup S_2 \cup S_5$.
Además, por la relación (2) de (3. 27) se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= x^i y^{m-7-i}(mFdx - xdF) \\
&= \sum_{0\le k\le m} (m-k)a_{k,m-k}x^{k+i}y^{2m-7-k-i}dx - (m-k)a_{k,m-k}x^{k+i+1}y^{2m-8-k-i}dy \\
&\quad + \sum_{r\le k+l\le m-1}(m-k)a_{k,l}x^{k+i}y^{l+j}dx + \sum_{r\le k+l\le m-1}(-l)a_{k,l}x^{k+i+1}y^{j+l-1}dy \\
&= \sum_{0\le k\le m}(m-k)a_k\omega_{k+i} + s_1 + s_2.
\end{aligned}$$

De la relación (3) de (3. 27), $x^i y^j((y-1)dF - mFdy) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{2\le k\le m} a_k\omega_{i+k} + b\omega_{i+1} + c\omega_i &= s_1 + s_2 + s_5 \quad 0 \le i \le m-8 \\
\sum_{2\le k\le m}(m-k)a_k\omega_{i+k} + (m-1)b\omega_{i+1} + mc\omega_i &= s_1 + s_2 + s_5 \quad 0 \le i \le m-7 \\
\sum_{2\le k\le m} ka_k\omega_{i+k-1} + b\omega_i &= s_1 + s_2 + s_5 \quad 0 \le i \le m-7.
\end{aligned}$$

Consideremos la matriz cuya $i-$ésima columna consiste de coeficientes de ω_{i-1} en las tres expresiones anteriores y denotemos a cada fila por A_i, B_j y C_j, donde $1 \le i \le m-7$, $1 \le j \le m-6$:

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\
ma_0 & (m-1)a_1 & \cdots & a_{m-1} & & & \\
 & ma_0 & (m-1)a_1 & \cdots & a_{m-1} & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & ma_0 & (m-1)a_1 & \cdots & a_{m-1} \\
a_1 & 2a_2 & \cdots & ma_m & & & \\
 & a_1 & 2a_2 & \cdots & ma_m & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & a_1 & 2a_2 & \cdots & ma_m
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{m-7} \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{m-6} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{m-6} \\ B
\end{pmatrix}$$

Tenemos que $B_i + C_{i+1} = mA_i$, para $1 \leq i \leq m-7$, así podemos eliminar las primeras $m-7$ filas. Denotando por $M = M_{2m-7}(C)$ la matriz restante, si rank$M = s$ esto significa que s elementos de G_3 pueden ser generados por otros elementos de GenΦ. El rango de M es $2m-12$.

Para (ii), el caso $m = r+5$, notemos que la diferencia máxima de los grados de los elementos de ImΦ es $(2m-2r-3) = 7$ y la diferencia máxima de los grados de los monomios de F es $(m-r+1) = 6$.
La relación (2) da las misma relaciones en GenΦ que en el caso anterior, sin embargo (1) y (3) contienen términos de grado $2r-3$ por la condición del grado. Entonces tomemos

$$\begin{array}{ll} (1)' & x^i y^j F(ydx - xdy) = 0 \\ (3)' & x^i y^j (ydF - mFdy) = 0 \end{array}$$

en lugar de (1) y de (3). Después de sumar todas la relaciones, se obtiene la matriz $M = M_{2m-7}(C)$ sin la fila C_1, debido a que cuando $i = 0$, $(3)'$ no induce ninguna relación en GenΦ. Por lo tanto rank$(M) = 2m-13$. ■

Lema 3.28. *Tomemos $C \in V(m; r, 2)$ con $m \leq r+4$.*

I. *Si $r = 2$, entonces no existen relación que involucre al elemento τ_0.*

II. *Si $r \geq 3$, y $m \geq r+6$, entonces $(2r-4)$ elementos de G_4 pueden ser generados por otros elementos de* Gen(Φ) *excepto elementos de G_3.*

III. *Si $r \geq 3$ y $m = r+5$, entonces $(2r-5)$ elementos de G_4 pueden generarse por otros elementos de* Gen(Φ) *excepto elementos de G_3.*

Demostración. (i) Si $r = 2$, entonces G_4 consiste de τ_0 solamente y el menor grado de los monomios de τ_0 es $2r-3 = 1$. Dado que todo monomio de F tiene grado mayor o igual a dos, $Fdx = 0$ o $Fdy = 0$ no pueden dar relaciones que contengan a τ_0. Consideremos $dF = 0$. Si $F_2 = a'_2 x^2 + b' x(y-1)y + c'(y-1)^2 y^2$ es la parte de F que contiene todos los términos de grado más pequeño, entonces todos lo términos de grado menor de dF aparecen en dF_2. Examinemos dF_2:

$$\begin{aligned} dF_2 &= a'_2 2xdx + b'\{(y-1)ydx + xydy + x(y-1)dy\} \\ &\quad + c'\{2(y-1)y^2 dy + 2(y-1)^2 ydy\}. \end{aligned}$$

Como no aparecen los términos xdx y ydy en τ_0, entonces $a'_2 = c' = 0$ si $dF = 0$ da una relación que involucra a τ_0. El término restante $b'((y-1)ydx + xydy + x(y-1)dy)$ no puede hacer relaciones que contengan a τ_0 en GenΦ. Por lo tanto no existen relaciones en GenΦ que contengan a τ_0.

(ii) Consideremos las ecuaciones

$$\begin{array}{lll} (1) & x^i y^j F(ydx - xdy) = 0 & i+j = r-4, i \geq 0 \\ (2) & x^i y^j (rFdx - xdF) = 0 & i+j = r-3, i \geq 0 \\ (3) & x^i y^j (ydx - rFdy) = 0 & i+j = r-3, i \geq 1 \\ (4) & y^{r-3}(y-1)(ydF - rFdy) = 0 & i = 0 \end{array}$$

Las expresiones (1), (2), (3) dan las siguientes relaciones que contienen elementos de G_4:

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k\le r} a'_k\tau_{k+i} + s_1 + s_2 = 0, &\quad \exists s_j \in S_j, \quad 0\le i\le r-4\\
\sum_{0\le k\le r} (r-k)a'_k\tau_{k+i} + s_1 + s_2 = 0, &\quad \exists s_j \in S_j, \quad 0\le i\le r-3\\
\sum_{0\le k\le r} ka'_k\tau_{k+i-1} + s_1 + s_2 = 0, &\quad \exists s_j \in S_j, \quad 0\le i\le r-3
\end{aligned}$$

Consideremos la matriz cuya $i-$ésima columna consiste de los coeficientes de los τ_{i-1} y denotemos cada fila por A_i, B_j y D_j, donde $1\le i\le r-3$, $1\le j\le r-2$;

$$\begin{pmatrix}
a'_0 & a'_1 & \cdots & a'_r & & & \\
 & a'_0 & a'_1 & \cdots & a'_r & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & a'_0 & a'_1 & \cdots & a'_r \\
ra'_0 & (r-1)a'_1 & \cdots & a'_{r-1} & & & \\
 & ra'_0 & (r-1)a'_1 & \cdots & a'_{r-1} & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & ra'_0 & (r-1)a'_1 & \cdots & a'_{r-1} \\
a'_1 & 2a'_2 & \cdots & ra'_r & & & \\
 & a'_1 & 2a'_2 & \cdots & ra'_r & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & a_1 & 2a_2 & \cdots & ma_m
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_{r-3}\\ B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_{r-2}\\ C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_{r-2}\\ B \end{pmatrix}$$

cuyo rango de esta matriz es $(2r-4)$.

Para el tercer caso (iii), las ecuaciones (1), (2) y (3) dan relaciones en GenΦ, sin embargo, (4) no da relaciones por la condición del grado $m-8 = r-3$. En (4), $y^{m-8}(y-1)(ydF - rFdy) = 0$ contiene términos de grado $2m-7$, los cuales no pueden expresarse en combinación lineal de elementos de G_3 a no ser que $b = c = 0$, lo cual es imposible por el supuesto de que C intersecta la línea al infinito en m puntos distintos. Por las relaciones (1), (2) y (3) tenemos una matriz M de tamaño $(3r-8)\times(2r-3)$, la cual es la misma matriz que en el caso (ii) excepto la fila que es obtenida de (4). Entonces el rank$(M) = 2r-5$.

■

Para encontrar las relaciones en GenΦ que no contengan elementos de G_3 y G_4, denotaremos de la siguiente manera a ciertos elementos en GenΦ:

$$\begin{aligned}
Y_{i,j} &= x^i y^j dy \quad i \geq 2 \\
Y_{1,j} &= x(y-1)y^{j-1}dy \quad i = 1 \\
Y_{0,j} &= (y-1)^2 y^{j-2}dy \quad i = 0 \\
X_{i,j} &= x^i y^j dx \quad i \geq 2 \\
X_{1,j} &= x(y-1)y^{j-1}dy \quad i = 1 \\
X_{0,j} &= y^{j-1}((y-1)dx - xdy) + x(y-1)y^{j-2}dy \quad i = 0 \\
&= \sigma_{j-1} + Y_{1,j-1}
\end{aligned}$$

Lema 3.29. *Sea $C \in V(m; r, 2)$ con $m \geq r + 6$. Entonces un número*

$$\left(\sum_{n=r-2}^{m-8}\right) - 1$$

de $X_{i,j}$, $Y_{i,j}$ pueden ser generados por otros $X_{i,j}$, $Y_{i,j}$.

Demostración. Para cualquier $n = i+j$, tal que $r-2 \leq n = i+j \leq m-8$, consideramos las relaciones

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad x^i y^j F dx = 0 \\
&(2) \qquad x^i y^j F dy = 0 \\
&(3) \qquad x^{i+1} y^j dF = 0 \\
&(4) \qquad y^{n+1} dF = 0
\end{aligned}$$

De las relaciones (1), (2) y (3) obtenemos las siguientes relaciones en GenΦ:

$$(1) \qquad \sum_{k=2}^{m} a_k X_{k+i,m+n-i-k} + bX_{i+1,m+n-i-1} + cX_{i,m+n-i} = s_1 + s_2 + s_5, \quad \exists s_j \in S_j, \quad 0 \leq i \leq n$$

$$(2) \qquad \sum_{k=2}^{m} a_k Y_{k+i,m+n-i-k} + bY_{i+1,m+n-i-1} + cY_{i,m+n-i} = s_1 + s_2 + s_5, \quad \exists s_j \in S_j, \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\begin{aligned}
(3) \qquad & \sum_{k=2}^{m} ka_k X_{k+i,m+n-i-k} + bX_{i+1,m+n-i-1} + \\
& + \sum_{k=2}^{m} (m-k)a_k Y_{k+i+1,m+n-i-k-1} + (m-1)bY_{i+2,m+n-i-2} + mcX_{i+1,m+n-i-1} \\
& = s_1 + s_2 + s_5, \quad \exists s_j \in S_j, \quad 0 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Donde s_j es una combinación de elementos de G_j con grado menor que $m+n$.
Para la relación (4), primero consideramos el caso $n = r-2$ (es decir $y^{r-1}dF = 0$):

$$\begin{aligned} y^{r-1}dF &= \{\sum_{r\leq k+l\leq m, k\geq 3} ka_{k,l}x^{k-1}y^{r-1+l}dx + \sum_{k=2}^{m} la_{k,l}x^k y^{r+l-2}dy \\ &\quad + \sum_{l=r-1}^{m-2} lb_l x(y-1)y^{r+l-2}dy + \sum_{l=r}^{m-2} lc_l(y-1)^2 y^{r+l-2}dy\} \\ &\quad +\{\sum_{r\leq k+l\leq m, k=2} ka_{k,l}x^{k-1}y^{r-1+l}dx + \sum_{l=r-1}^{m-2} b_l(y-1)y^{r+l-1}dx \\ &\quad + \sum_{l=r-1}^{m-2} b_l xy^{r+l-1}dy + \sum_{l=r}^{m-2} 2c_l(y-1)y^{r+l-2}dy\} \end{aligned}$$

Los dos primeros renglones después de la igualdad corresponde a elementos de $S_1 \cup S_2$. Sin embargo, los últimos dos renglones no pueden ser representados por combinaciones lineales de elementos de $\mathrm{Gen}\Phi$. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} &\{\sum_{r\leq k+l\leq m, k=2} ka_{k,l}x^{k-1}y^{r-1+l}dx + \sum_{l=r-1}^{m-2} b_l(y-1)y^{r+l-1}dx \\ &\qquad + \sum_{l=r-1}^{m-2} b_l xy^{r+l-1}dy + \sum_{l=r}^{m-2} 2c_l(y-1)y^{r+l-2}dy\} \\ \\ = &\quad \{2\sum_{l=r-2}^{m-2} a_{2,l}x(y-1)y^{r-1+l}dx + \sum_{l=r-1}^{m-2} b_l(y-1)y^{r+l-1}((y-1)dx - xdy) \\ &\quad + \sum_{l=r-1}^{m-2} 2b_l x(y-1)y^{r+l-1}dy + \sum_{l=r}^{m-2} 2c_l(y-1)^2 y^{r+l-1}dy\} \end{aligned}$$

Si esta ecuación fuese una combinación lineal de $\mathrm{Gen}\Phi$, entonces se requiere que

$$\sum_{l=r-1}^{m-2} b_l = \sum_{l=r}^{m-2} c_l = \sum_{l=r-2}^{m-2} a_{2,l} = 0,$$

lo cual es imposible. Así $r^{r-1}dF = 0$ no induce una relación en $\mathrm{Gen}\Phi$. Similarmente, $y^{n+1}dF = 0$ $(r-2 \leq n \leq m-8)$ no induce relaciones en $\mathrm{Gen}\Phi$. Sin embargo, si consideramos $y^{n-1}(y-1)dF = 0$ $(r-1 \leq n \leq m-8$, entonces ésta si induce una relación en $\mathrm{Gen}\Phi$:

$$\begin{aligned} (4) \qquad & \sum k = 2^m ka_k X_{k-1,m+n-k+1} + bX_{0,m+n} \\ & + \sum_{k=2}^{m}(m-k)a_k Y_{k,m+n-k} + (m-1)bY_{1,m+n-1} + mcY_{0,m+n} \\ = \quad & s_1 + s_2 + s_5 \quad \exists s_j \in S_j, \quad r-1 \leq n \leq m-8. \end{aligned}$$

Así, para cada $r-1 \leq n \leq m-8$, hay $3n+4$ relaciones en $X_{i,j}, Y_{i,j}$ cuyo grado es menor o igual a $m+n$. Si $n = r-2$, entonces existen $3n+3$ relaciones que contienen

$X_{i,j}, Y_{i,j}$ con grado menor o igual a $m+r-2$ y más grande que $2r-3$.
Consideremos las matrices $M_{m+n}(C)$ de tamaño $(3n+4)\times(2m+2n+2)$ para cada $r-1\leq n\leq m-8$ (obtenida de todos los coeficientes del grado más alto, $m+n$)

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
c & b & \cdots & a_m & & & & & & & & & & \\
 & c & b & \cdots & a_m & & & & & & & & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\
 & & & c & b & \cdots & a_m & & & & & & & \\
 & & & & & & & c & b & \cdots & a_m & & & \\
 & & & & & & & & c & b & \cdots & a_m & & \\
 & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & c & b & \cdots & a_m \\
d_0 & d_1 & \cdots & d_{m-1} & & & & e_1 & e_2 & \cdots & e_m & & & \\
 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{m-1} & & & & e_1 & e_2 & \cdots & e_m & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & d_0 & d_1 & \cdots & d_{m-1} & & & & e_1 & e_2 & \cdots & e_m
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
:(1)i=0 \\
:(1)i=1 \\
\quad\vdots \\
:(1)i=n \\
:(2)i=0 \\
:(2)i=1 \\
\quad\vdots \\
:(2)i=n \\
\quad :(4) \\
:(3)i=0 \\
\quad\vdots \\
:(3)i=n
\end{array}$$

donde $d_0=mc$, $d_1=(m-1)b$ y $d_i=(m-i)a_i$ $(2\leq i\leq n)$, y $e_i=ia_i$ $(0\leq i\leq n)$. La cual tiene rango maximal $3n+4$ para cada n $(r-1\leq n\leq m-8)$. Y la matriz $M_{m+r-2}(C)$ de tamaño $(3n+3)\times(2n+2m+2)$ si $n=r-2$, es similar a la anterior sin una fila, por lo tanto tiene rango $3(r-2)+3$. ■

Ahora finalmente daremos una demostración del teorema 3.23

Demostración. (i) Por los lemas anteriores, el número de relaciones para GenΦ es

$$\begin{aligned}
\#\mathrm{Rel} &= (2m-12)+(2r-4)+\sum_{n=r-1}^{m-8}+(3(r-2)+3) \\
&= \frac{1}{2}(3m^2-3r^2-33m+11r+76).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cork}\Phi &= (5g-5)+\sharp\mathrm{Rel}-\sharp\mathrm{Gen}\Phi \\
&= \frac{1}{2}(5m^2-5r^2-15m+5r+10) \\
&\quad +\frac{1}{2}(3m^2-3r^2-33m+11r+76) \\
&\quad -\frac{1}{2}(8m^2-8r^2-48m+16r+50) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

(ii) Por la condición del grado $m-r=5$, no existen relaciones que contengan elementos de G_1 y G_2 solamente.
Si $r\geq 3$, entonces por lema 1,2, se tiene que $g=4m-15$, $\#\mathrm{Gen}\Phi=24m-115$ y $\#\mathrm{Rel}=4m-28$, entonces $\mathrm{cork}\Phi=(5g-5)+\#\mathrm{Rel}-\#\mathrm{Gen}\Phi=7$.

Si $r = 2$, entonces $\#\mathrm{Rel} = 2m - 13 = 1$ y $\#\mathrm{Gen}\Phi = 53$, por lo tanto $\mathrm{cork}\Phi = 8$.

(iii)Por la condición del grado $m - 8 = r - 4$, cualquier relación posible en $\mathrm{Gen}\Phi$ contiene ambos elementos de G_3 y G_5 simúltaneamente. Las ecuaciones $x^i y^j F(ydx - xdy) = 0$ para $i + j = m - 8 = r - 4$ nos dan $m - 7$ relaciones en $\mathrm{Gen}\Phi$. Ahora consideraremos las ecuaciones restantes $x^i y^j (mFdy - ydF) = 0$ y $x^i y^j (mFdx - xdF)$ para $i + j = m - 7 = r - 3$. Los términos de menor grado en $x^i y^j (mFdy - ydF) = 0$ para $i + j = r - 3$ son

$$\begin{aligned}
&mx^i y^{r-3-i}\{\sum_{k=2}^{r} a_{k,r-k}x^k y^{r-k} + b_{r-1}x(y-1)y^{r-1} + c_r(y-1)^2 y^r\}dy \\
&-x^i y^{r-3-i+1}\{\sum_{k=2}^{r} k a_{k,r-k}x^{k-1}y^{r-k}dx + \sum_{k=2}^{r}(r-k)a_{k,r-k}x^k y^{r-k-1}dy \\
&+b_{r-1}((y-1)y^{r-1}dx + xy^{r-1}dy + (r-1)x(y-1)y^{r-2}dy) \\
&+c_r(2(y-1)y^r dy + r(y-1)^2 y^{r-1}dy)\}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Los términos que no son divisibles por x^{i+1} pueden escribirse como

$$c_r x^i y^{r-3-i}\{(m-r)(y-1)^2 y^r dy - 2(y-1)y^{r+1}dy\} \qquad (3.31)$$

Si buscamos que (3.31) sea una combinación lineal de $\mathrm{Gen}\Phi$, entonces debido al término de grado $2r - 3$ en $x^i(y-1)^2 y^{2r-i-3}dy$, es necesario el término $x^{i-1}(y-1)^2 y^{2r-i-2}dx$; sin embargo, este término no está en (3.30). Así que es necesario $c_r = 0$. De manera similar, si consideramos el siguiente término

$$b_{r-1}x^i y^{r-3-i}\{(m-r)x(y-1)y^{r-1}dy + (y-1)y^{r-1}(xdy - ydx) - xy^r dy\}. \qquad (3.32)$$

Dado que $(m - r) \neq 0$, entonces para que (3.32) sea combinación lineal de $\mathrm{Gen}\Phi$, entonces debido al término de grado $2r - 3$ en $x^{i+1}(y-1)y^{2r-4-i}dy$ necesita el término $(m-r)b_{r-1}x^i(y-1)y^{2r-i-3}dx$. Sin embargo, este término no está en (3.30), a menos que $b_{r-1} = 0$. Pero entonces P no es un punto ordinario múltiple. Por lo tanto, $x^i y^{m-7-i}(mFdy - ydF) = 0$ no da relaciones en $\mathrm{Gen}\Phi$.
Cuando se consideran las ecuaciones $x^i y^{m-7-i}(mFdx - xdF) = 0$, $x^i y^{r-3-i}(rFdy - ydF) = 0$ o $x^i y^{r-3-i}(rFdx - xdF) = 0$ se obtiene que no existen relaciones en $\mathrm{Gen}\Phi$.

Por lo que solamente se tienen $m-7$ relaciones en $\mathrm{Gen}\Phi$, obtenidas de $x^i y^j F(ydx - xdy) = 0$ para $i + j = m - 8$. Así $g = 3m - 10$, $\#\mathrm{Rel} = m - 7$ y $\#\mathrm{Gen}\Phi = 16r - 7 = 16m - 71$, por lo tanto $\mathrm{corank}(\Phi) = 9$. ■

Capítulo 4

Análisis de la primera aplicación de Wahl

4.1. Ejemplo

Consideremos una curva suave C que admita un modelo de curva plana en $\mathbb{P}^2$ con solamente dos nodos. Esto es, tomemos $C \in V(m; 2, 2)$ una curva plana irreducible con nodos en $P[0:0:1]$ y $Q[0:1:1]$.
En coordenadas afines, se tiene la ecuación de C dada por

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{2\leq i+j\leq 6, i\geq 2} a_{ij}x^iy^j + \sum_{l=1}^{4} b_l x(y-1)y^l + \sum_{l=2}^{4} c_l(y-1)^2y^l \qquad (4.1) \\ &= a_{20}x^2 + a_{21}x^2y + a_{30}x^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{31}x^3y + a_{40}x^4 + a_{23}x^2y^3 + a_{32}x^3y^2 + \\ &\quad +a_{41}x^4y + a_{50}x^5 + a_{24}x^2y^4 + a_{33}x^3y^3 + a_{42}x^{42} + a_{51}x^5y + a_{60}x^6 \\ &\quad +b_1x(y-1)y + b_2x(y-1)y^2 + b_3x(y-1)y^3 + b_4x(y-1)y^4 + \\ &\quad +c_2(y-1)^2y^2 + c_3(y-1)^2y^3 + c_4(y-1)^2y^4. \end{aligned}$$

Por la fórmula de Plücker, el género geométrico de C es

$$g(C) = \frac{(6-1)(6-2)}{2} - 2 = 8.$$

Las secciones globales del haz canónico K_C están dadas por

$$H^0(C, K_C) = \left\{ \sum_{1\leq i+j\leq 3} a_{ij}x^iy^j + \sum_{k=1}^{2} b_k y^k(y-1) | a_{ij}, b_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ahora calcularemos explícitamente la imagen de la primera aplicación de Wahl para la base $\{x, xy, x^2, x^3, xy, x^2y, y(y-1), y^2(y-1)\}$,

$$\begin{aligned}
\Phi = \Phi_{K_C}\colon \bigwedge^2 H^0(C, K_C) &\to H^0(C, K_C^{\otimes 3}) \\
x \wedge xy &\mapsto x^2dy \\
x \wedge x^2 &\mapsto x^2dx \\
x \wedge xy^2 &\mapsto 2x^2ydy \\
x \wedge x^2y &\mapsto x^2ydx + x^3dy \\
x \wedge x^3 &\mapsto 2x^3dx \\
x \wedge y(y-1) &\mapsto xydy + x(y-1)dy - y(y-1)dx \\
x \wedge y^2(y-1) &\mapsto 2xy(y-1)dy + xy^2dy - y^2(y-1)dx \\
xy \wedge x^2 &\mapsto x^2ydx - x^3dy \\
xy \wedge x^3 &\mapsto 2x^3ydx - x^4dy \\
xy \wedge xy^2 &\mapsto x^2y^2dy \\
xy \wedge x^2y &\mapsto x^2y^2dx \\
xy \wedge y(y-1) &\mapsto xy^2dy - y^2(y-1)dx \\
xy \wedge y^2(y-1) &\mapsto xy^2(y-1)dy + xy^3dy - y^3(y-1)dx \\
x^2 \wedge x^3 &\mapsto 2x^4dx \\
x^2 \wedge xy^2 &\mapsto -x^2y^2dy + 2yx^3dy \\
x^2 \wedge x^2y &\mapsto x^4dy \\
x^2 \wedge y(y-1) &\mapsto x^2ydy + x^2(y-1)dy - 2xy(y-1)dx \\
x^2 \wedge y^2(y-1) &\mapsto 2x^2y(y-1)dy + x^2y^2dy - 2xy^2(y-1)dx \\
x^3 \wedge xy^2 &\mapsto -2x^3y^2dx + 2x^4ydy \\
x^3 \wedge x^2y &\mapsto x^5dy - x^4ydx \\
x^3 \wedge y(y-1) &\mapsto x^3ydy + x^3(y-1)dy - 3x^2y(y-1)dx \\
x^3 \wedge y^2(y-1) &\mapsto 2x^3y^2dy + 2x^3y(y-1)dy - 3x^2y^2(y-1)dx \\
xy^2 \wedge x^2y &\mapsto x^2y^3dy - x^3y^2dy \\
xy^2 \wedge y(y-1) &\mapsto xy^3dy - xy^2(y-1)dy - y^3(y-1)dx \\
xy^2 \wedge y^2(y-1) &\mapsto xy^4dy - y^4(y-1)dx \\
x^2y \wedge y(y-1) &\mapsto x^2y^2dy - 2xy^2(y-1)dx \\
x^2y \wedge y^2(y-1) &\mapsto x^2y^2(y-1)dy + x^2y^3dy - 2xy^3(y-1)dx \\
y(y-1) \wedge y^2(y-1) &\mapsto y^2(y-1)^2dy
\end{aligned}$$

Por lo que, a priori hay 28 elementos en la $\mathrm{Im}\Phi$. Sin embargo, existen únicamente dos relaciones en la $\mathrm{Im}\Phi$.

Por simplicidad, denotemos por

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Phi(x \wedge x^2y) = x^2ydx + x^3dy \\
\beta &= \Phi(xy \wedge x^2) = x^2ydx - x^3dy \\
\gamma &= \Phi(xy \wedge x^2y) = x^2y^2dx \\
\delta &= \Phi(x^2 \wedge xy) = -x^2y^2dx + 2x^3ydy \\
\epsilon &= \Phi(x^3 \wedge y(y-1)) = x^3ydy + x^3(y-1)dy - 3x^2y(y-1)dx \\
\zeta &= \Phi(x^2y \wedge y(y-2)) = x^2y^2dy - 2xy^2(y-1)dx \\
\eta &= \Phi(xy \wedge xy^2) = x^2ydx - x^3dy \\
\mu &= \Phi(x \wedge xy^2) = 2x^2ydy \\
\nu &= \Phi(x^2 \wedge y^2(y-1)) = 2x^2y(y-1)dy + x^2y^2dy - 2xy^2(y-1)dx
\end{aligned}$$

Solo se cumplen las siguientes dos relaciones

$$\alpha + 2\beta = \epsilon - \delta + 2\gamma$$

$$\zeta + 2\eta = \mu + \nu.$$

Así $\text{corank}(\Phi) = 5(g-1) - (28-2) = 35 - 26 = 9$.
Por lo tanto, para esta curva C de género 8, la primera aplicación de Wahl no es inyectiva y se muestra que el $\text{corank}(\Phi) = 9$ como lo enuncia el teorema 3.23 en el tercer inciso.

4.2. Análisis del teorema 3.23

Consideremos una curva suave C como en el Teorema 3.23, es decir que admita un modelo plano de grado m con un punto $r-$fold ordinario y un nodo como singularidades.

- Para el caso $m = r + 5$, se tiene que el género de C es $g = 4r + 5$. En la siguiente tabla se muestra el caso con valores específicos para r.

r	g	$coker(\Phi)$
2	13	8
3	17	7
4	21	7
5	25	7

Cuadro 4.1: Caso $m = r + 5$

El primer renglón del cuadro 4.1 nos dice que para la curva suave C de género 13 con un modelo plano de grado 7 con dos nodos como singularidades, la primera aplicación de Wahl no es sobreyectiva. Por su parte, el segundo renglón establece que para la curva suave C de género 17 con un modelo plano de grado 8 y admite un nodo y un punto triple ordinario como singularidades, se tiene que la primera aplicación de Wahl no es sobreyectiva. Dado que Ciliberto y Miranda demostraron que la primera aplicación de Wahl es sobreyectiva para la curva general de género $g \geq 12$ en el sentido moduli, esto es, la primera aplicación de Wahl en un abierto de Zariski de $\mathcal{M}_g$ es sobreyectiva. Así existe la posibilidad de que el conjunto de curvas en $\mathcal{M}_g$ donde dicha aplicación no es sobreyectiva sea vacío, sin embargo el cuadro 4.1 muestra que efectivamente no es vacío.

- Para el caso $m = r + 4$, se tiene que el género de C es $g = 3r + 2$.

r	g	$coker(\Phi)$	$\dim(\mathrm{Ker}\Phi)$
2	8	9	2
3	11	9	14
4	14	9	35
5	17	9	65

Cuadro 4.2: Caso $m = r + 4$

El primer renglón del cuadro 4.2 nos dice que para la curva suave C de género 8 cuyo modelo plano es de grado 6 con dos nodos como singularidades, la primera aplicación de Wahl no es inyectiva. Por su parte, el segundo renglón establece que para la curva suave C de género 11 cuyo modelo plano es de grado 7 y admite un nodo y un punto triple ordinario como singularidades, se tiene que la primera aplicación de Wahl tiene corango 9, a diferencia de lo que ocurre para la curva general, pues para la curva general dicha aplicación tiene corango 1.
En los últimos dos renglores del cuadro 4.2 se muestra que el conjunto de curvas en el espacio moduli $\mathcal{M}_g$ $(g = 14, 17)$ donde la primera aplicación de Wahl no es sobreyectiva resulta ser un cerrado no vacío. Esto termina nuestro análisis.

Concluimos este trabajo de tesis con la siguiente observación, planteando una relación entre el ejemplo aquí desarrollado y el estudio de cierta variedad de Severi, motivando algunas preguntas interesantes para trabajo a futuro. Sea $\mathcal{V}_{d,g,\delta}$ la variedad de Severi que parametriza curvas planas de género g, grado d que admiten δ singularidades nodales. Existe un morfismo natural $\mathcal{V}_{d,g,\delta} \to \mathcal{M}_g$ que a cada curva plana Γ le asocia el modelo no singular $[\tilde{\Gamma}]$, donde $\tilde{\Gamma}$ es la normalización de Γ. Este morfismo es dominante para $d \geq \frac{2g}{3} + 2$ y $d < \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ estas dos condiciones nos dan que $g \leq 10$. Nuestro ejemplo de la sección 3.1 nos hace ver que el locus W_8 en $\mathcal{M}_8$ definido como el conjunto de curvas de género 8 donde la aplicación de Wahl tiene corango 9 es una subvariedad de $\mathcal{M}_8$ de dimensión al menos 13. Y esta variedad contiene curvas cuyo modelo plano es una séxtica con 2 nodos, es decir, la imagen de la variedad de Severi en $\mathcal{M}_8$ debe intersectar a W_8, por lo que una pregunta natural e interesante es entender como están relacionadas estas 2 variedades dentro de $\mathcal{M}_8$. Este es un trabajo de investigación más profundo que requiere de técnicas y herramientas nuevas para su estudio.

Bibliografía

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths y J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Vol. I, Springer, New York, 1985. 9, 10, 11, 13

[2] A. Beauville y J. Y. Mérindol, *Sections hyperplanes des surfaces K-3*, Duke Math J. 55 (1987) 873-878. 21

[3] G. Burn, *The normal bundle of the canonical genus 8 curve*. Disponible en arXiv:1703.06213

[4] C. Ciliberto, T. Dedieu y E. Sernesi, *Wahl maps and extensions of canonical curves and K3 surfaces* J. reine angew. Math. 761 (2020), 219-245. 20

[5] C. Ciliberto, J. Harris y H. Miranda, *On the surjectivity of the Wahl map*, Duke Math. J. 57 (1988) 829-858. ii, 17, 20

[6] C. Ciliberto y H. Miranda, *Gaussian maps for certain families of canonical curves*, Complex Projective Geometry. Eds G. Ellingsrud et al. London Mathematical Society LNS 179, Cambrigde, (1992), 106-127. ii, 17

[7] C. Ciliberto y H. Miranda, *On the Gaussian map for canonical curves of low genus*, Duke Math. J.61, (1990), 417-443. 17

[8] F. Cukierman y D. Ulmer, *Curves of genus 10 on K3 surfaces*, Compositio Math. 89 (1993), 81-90. 17

[9] C. Farkas y M. Popa, *Effective divisors on M_g and a counterexample to the Slope Conjecture* Disponible en arXiv:math/0209171 (2002) 17

[10] C. Farkas, *Gaussian maps, Gieseker-Petri loci and large theta characteristics* Disponible en arXiv:math/0402042 (2004)

[11] M. Green, *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties*, J. Differential Geometry 19 (1984), 125-171. 18

[12] J. Harris, *Algebraic Geometry* Springer Graduate Texts in Mathematics, New York (1992) 98-113. 10

[13] E. Kang, *On the corank of Wahl map on smooth curves with plane model*, Kyushu J. Math. Vol 50. (1996), 471-492. 14, 21

[14] R. Miranda, *Graph curves and Curves on K3 surfaces*, Lectures on Riemann Surfaces, World Scientific, (1987), 106-127. 14, 16

[15] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surface*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 5, American Mathematical Society (1995) 1

[16] J. Wahl, *The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity*, Duke Math. J. 55, (1987), 843-871. 14

[17] J. Wahl, *Deformations of quasi-homogeneous surface singularities*, Math. Ann. 280 (1988) 105-128. ii

[18] J. Wahl, *Guassian maps on algebraic curves*, J. Diff. Geom. 32, (1990), 77-98. ii, 20, 21

[19] J. Wahl, *Gaussian maps and tensor products of irreducible representation*, Manuscripta Math 73 (1991), 229-260.