UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Una Corrección en la Teoría de los R^i-continuos.

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Pablo Vázquez Cárdenas

DIRECTOR DE LA TESINA
Dra. Patricia Pellicer Covarrubias
Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria, CD. MX, Septiembre 2021.

Índice general

Introducción

Se dice que un espacio topológico X es un *continuo* si éste resulta ser no vacío, compacto, conexo y metrizable. Si K es un subespacio no vacío, compacto y conexo de un continuo X, entonces se dice que K es un *subcontinuo* de X. Por otro lado, decimos que un espacio topólogico X es *contráctil* si existen un punto x_0 de X y una función continua $H: X \times [0,1] \to X$ tales que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ para cualquier $x \in X$.

Determinar si un continuo dado es contráctil o no puede representar un gran reto. En principio, una respuesta afirmativa requiere de la existencia de un punto y de una función con características muy especiales, mientras que una respuesta negativa depende de un argumento que descarte la existencia de los mismos. Afortunadamente, en años recientes se han creado nuevas estrategias que permiten verificar de manera eficaz el que un continuo dado sea no contráctil. Una de estas tácticas es el estudio de los "R^i-continuos".

Dado un continuo particular X, un "R^i-continuo" de X es un subcontinuo que cumple ciertas condiciones (Definición 0.23) y cuya presencia garantiza el que X sea no contráctil ([2, Teorema 2, pág. 209]). La ventaja de esta herramienta por sobre otras es que la misma resulta basarse principalmente en la estructura del continuo X, y no en ideas más abstractas cuya comprensión podría presentar un reto adicional al que ya se tiene.

Los "R^i-continuos" fueron introducidos por S.T. Czuba en [3, Definición 1, pág. 300] para analizar la contractibilidad en cierto tipo de continuos (aquellos conocidos como los dendroides). Posteriormente, W.J. Charatonik en [2] generalizó muchas de las ideas presentadas en [3] para continuos de cualquier índole. Sin embargo, C.J. Rhee, I.S. Kim y R.S. Kim afirmaron en [7] que hubo ciertos descuidos en este proceso y que el enunciado [2, Proposición 1, pág. 208] es falso. Para sustentar esto último, los autores en [7, Ejemplo C, pág. 112] introdujeron un continuo $\mathcal{X}$ y un subcontinuo $\mathcal{K}$ de $\mathcal{X}$ (originalmente X y S_1 en [7, Ejemplo C, pág. 112]) afirmando que dichos objetos no satisfacen la proposición correspondiente.

El trabajo que presentamos tiene por objetivo dar una construcción detallada del continuo $\mathcal{X}$ y del subcontinuo $\mathcal{K}$. También mostramos que, contrario a lo que se afirmó en [7, Ejemplo C, pág. 112], $\mathcal{X}$ y $\mathcal{K}$ sí satisfacen la conclusión de [2, Proposición 1, pág. 208].

Capítulo 0

Preliminares

0.1. Notación y Conceptos Elementales.

Notación 0.1. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Denotaremos por $\overline{A}^X$ a la cerradura de A en X. En caso de que no exista confusión sobre el espacio topológico en el que estamos trabajando, utilizaremos la notación $\overline{A}$ en vez de $\overline{A}^X$.

Notación 0.2. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon > 0$. Definimos la *bola de radio ε centrada en x con respecto a la métrica d* como el conjunto:

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X : \ d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Observación 0.3. A partir de este momento, todos los subconjuntos de algún espacio topológico X que tomemos serán considerados como subespacios de X con su topología relativa.

Definición 0.4. [1, Definición 4.25, pág. 129] Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. Consideremos la colección:

$$\mathcal{T}_q := \{V \subseteq Y : \ q^{-1}(V) \text{ es un subconjunto abierto de } X\}.$$

Se tiene que $\mathcal{T}_q$ es una topología para Y [1, Teorema 4.20, inciso (1), pág. 126]. Al espacio cuyo conjunto de puntos es Y y cuya topología es $\mathcal{T}_q$ se le conoce como el *espacio cociente determinado por X y q*. Denotaremos a este espacio mediante el símbolo Y_q.

Definición 0.5. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una partición del conjunto X. Para cada $x \in X$, denotaremos por π_x al único elemento de $\mathcal{P}$ tal que $x \in \pi_x$. Tomemos la función $\pi : X \to \mathcal{P}$ dada por la regla de correspondencia $\pi(x) := \pi_x$. A la función π se le conoce como *proyección canónica* y al espacio topológico $\mathcal{P}_\pi$ se le conoce como el *espacio cociente de X generado por la partición $\mathcal{P}$*.

Definición 0.6. [4, Definición 1.3, pág. 121] Sean X y Y espacios topológicos y $q: X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que q es una *identificación* si la topología de Y coincide con la colección $\mathcal{T}_q$.

Como consecuencia directa de las Definiciones 0.4, 0.5 y 0.6, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 0.7. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{P}$ una partición del conjunto X y $\mathcal{P}_\pi$ el espacio cociente generado por la partición $\mathcal{P}$. Entonces la proyección canónica $\pi: X \to \mathcal{P}_\pi$ es una función continua; más aún, π es una identificación.*

Proposición 0.8. *[4, Teorema 2.1, pág. 122] Sean X y Y espacios topológicos, $B \subseteq Y$ y $q: X \to Y$ una identificación. Si B es un subconjunto abierto de Y, entonces la restricción $q|_{q^{-1}(B)}: q^{-1}(B) \to B$ es una identificación.*

Debido a su naturaleza, determinar si algún espacio cociente es metrizable puede llegar a representar un gran reto. Afortunadamente, [6, Lema 3.2, pág. 37] nos provee de un criterio para poder atender esta situación.

Proposición 0.9. *[6, Lema 3.2, pág. 37] Sean X un espacio metrizable, Y un espacio topológico y $f: X \to Y$ una función continua. Si X es compacto, f es suprayectiva y Y es un espacio T_2, entonces Y es un espacio metrizable.*

Las siguiente proposición nos será de gran utilidad para calcular las componentes de algún subconjunto particular.

Proposición 0.10. *[5, Teorema 4, Capítulo V, Sección III, pág. 140] Sean X un espacio topológico y C un subconjunto no vacío de X. Si C es conexo y C es un subconjunto abierto y cerrado de X, entonces C es una componente de X.*

A continuación formalizamos las definiciones de continuo y subcontinuo.

Definición 0.11. Sea X un espacio topológico no vacío. Decimos que X es un *continuo* si X es un espacio metrizable, compacto y conexo.

Definición 0.12. Sean X un continuo y K un subconjunto no vacío de X. Decimos que K es un *subcontinuo* de X si K es compacto y conexo. Si adicionalmente se tiene que $K \neq X$, entonces diremos que K es un *subcontinuo propio* de X.

0.2. Límites Superior e Inferior.

Definición 0.13. Sean X un espacio topológico y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Definimos el *límite inferior* y el *límite superior* en X de la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ como:

- $\liminf_X A_n := \{x \in X :$ para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geqslant N\}$.
- $\limsup_X A_n := \{x \in X :$ para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_j \neq \emptyset$ para todo $j \in J.\}$

Si llegase a existir $A \subseteq X$ tal que $\liminf_X A_n = A = \limsup_X A_n$, entonces diremos que A es el *límite* de la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y lo denotaremos mediante la expresión $\lim_X A_n = A$. En caso de que no exista confusión sobre el espacio topológico en el que estamos trabajando, utilizaremos las notaciones $\liminf A_n$, $\limsup A_n$ y $\lim A_n$ en vez de $\liminf_X A_n$, $\limsup_X A_n$ y $\lim_X A_n$, respectivamente.

Observación 0.14. Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de Y. Como consecuencia directa de la Definición 0.13 obtenemos que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos no vacíos de X tal que:

(i) $\liminf_Y A_n \subseteq \liminf_X A_n$ y

(ii) $\limsup_Y A_n \subseteq \limsup_X A_n$.

Proposición 0.15. *Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de Y. Si Y es un subconjunto cerrado de X, entonces:*

(i) $\liminf_Y A_n = \liminf_X A_n$*,*

(ii) $\limsup_Y A_n = \limsup_X A_n$ *y*

(iii) si existe $A \subseteq Y$ tal que $\lim_Y A_n = A$*, entonces* $\lim_X A_n = A$.

Demostración. Supongamos que Y es un subconjunto cerrado de X.

Probemos el inciso (i). Por la Observación 0.14, sólo debemos de corroborar que:

$$\liminf_X A_n \subseteq \liminf_Y A_n. \tag{1}$$

Tomemos $x \in \liminf_X A_n$ y veamos que $x \in \liminf_Y A_n$. Lo primero que debemos de asegurar es que $x \in Y$. Como Y es un subconjunto cerrado, sólo basta verificar que $x \in \overline{Y}$. Entonces, escojamos un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$. En tanto que $x \in \liminf_X A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$U \cap A_N \neq \emptyset$. Observemos que $U \cap A_N \subseteq U \cap Y$, por lo que $U \cap Y \neq \emptyset$. De esta manera, $x \in \overline{Y}$ y así, $x \in Y$. Ahora bien, para asegurar que $x \in \liminf_Y A_n$, elijamos un subconjunto abierto U de Y tal que $x \in U$. Tomemos un subconjunto abierto V de X tal que $U = V \cap Y$. Como $x \in U$, entonces $x \in V$. Por otro lado, como consecuencia de que $x \in \liminf_X A_n$ se tiene la existencia de $N \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap A_n \neq \emptyset$ para cualquier $n \geqslant N$. Notemos que dado $n \geqslant N$ se sigue que:

$$U \cap A_n = (V \cap Y) \cap A_n = V \cap (Y \cap A_n) = V \cap A_n \neq \emptyset.$$

Para cualquier $n \geqslant N$ obtenemos que $U \cap A_n \neq \emptyset$. Esto garantiza que x es un elemento de $\liminf_Y A_n$, lo cual asegura la veracidad de la la contención (1). Concluimos así que $\liminf_Y A_n = \liminf_X A_n$. Esto finaliza la prueba del inciso (i); el inciso (ii) se obtiene de manera similar. Finalmente, el inciso (iii) es una consecuencia directa de los incisos (i) y (ii). $\square$

Las siguientes son proposiciones que nos ayudarán a calcular límites de sucesiones de conjuntos. Es importante notar que en el texto que se da como referencia, las hipótesis de estos resultados incluyen que el espacio topológico en donde se esté trabajando sea un continuo. Sin embargo, tanto la compacidad como la conexidad del espacio correspondiente son propiedades que no se utilizan en las pruebas que sustentan dichas afirmaciones. Es por ello que en este texto únicamente pedimos la metrizabilidad del espacio en cuestión.

Proposición 0.16. *[8, Observación 1.18, pág. 6] Sean X un espacio topológico, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X y $A \subseteq X$. Si $\limsup A_n \subseteq A \subseteq \liminf A_n$, entonces $\lim A_n = A$.*

Proposición 0.17. *[8, Proposiciones 1.24 y 1.25, págs. 8 y 9] Sean X un espacio topológico metrizable y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Entonces:*

(i) $x \in \liminf A_n$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X convergente a x tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in A_n$.

(ii) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si existe una sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ estrictamente creciente de elementos de $\mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_{n_k} \in A_{n_k}$ de modo que la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a x.

Proposición 0.18. *[8, Lema 1.23, pág. 8] Sean X un espacio topológico metrizable, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X y A un subconjunto cerrado no vacío de X. Consideremos la sucesión $(\overline{A_n})_{n=1}^{\infty}$. Si $\lim \overline{A_n} = A$, entonces $\lim A_n = A$.*

Los siguientes resultados nos permitirán establecer el comportamiento de los límites superiores e inferiores de sucesiones de subconjuntos bajo funciones continuas.

Lema 0.19. *Sean X y Y espacios topológicos, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X y $f: X \to Y$ una función continua. Entonces:*

(i) $f(\liminf A_n) \subseteq \liminf f(A_n)$ *y*

(ii) $f(\limsup A_n) \subseteq \limsup f(A_n)$.

Demostración. Únicamente probaremos el inciso (i) ya que el inciso (ii) se puede obtener de manera similar. Tomemos $y \in f(\liminf A_n)$ y veamos que $y \in \liminf f(A_n)$. Escojamos un subconjunto abierto V de Y tal que $y \in V$. Verifiquemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f(A_n) \neq \emptyset$ para cualquier $n \geqslant N$. Elijamos $x \in \liminf A_n$ tal que $f(x) = y$. Notemos que $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X tal que $x \in f^{-1}(V)$. En tanto que $x \in \liminf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(V) \cap A_n \neq \emptyset$ para cualquier $n \geqslant N$. Observemos que dado $n \geqslant N$ se tiene que:

$$\emptyset \neq f(f^{-1}(V) \cap A_n) = V \cap f(A_n).$$

De esta manera, $V \cap f(A_n) \neq \emptyset$ para cualquier $n \geqslant N$. Así, $y \in \liminf f(A_n)$; lo cual nos permite concluir que $f(\liminf A_n) \subseteq \liminf f(A_n)$. □

Lema 0.20. *Sean X y Y espacios topológicos metrizables, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X y $f: X \to Y$ una función continua. Si X es compacto, entonces* $\limsup f(A_n) = f(\limsup A_n)$.

Demostración. Supongamos que X es compacto. Por el inciso (ii) del Lema 0.19, basta comprobar que:

$$\limsup f(A_n) \subseteq f(\limsup A_n). \tag{2}$$

Tomemos $y \in \limsup f(A_n)$ y probemos que $y \in f(\limsup A_n)$. Por la Proposición 0.17, existe una sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ estrictamente creciente de elementos de $\mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $y_{n_k} \in f(A_{n_k})$ de modo que la sucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a y. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escojamos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$. Esto significa que la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ satisface:

$$\lim f(x_{n_k}) = y. \tag{3}$$

Ahora bien, notemos que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X. Como X es compacto y metrizable, entonces existe una subsucesión $(n_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ de $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $(x_{n_{k_m}})_{m=1}^{\infty}$ es convergente. Observemos que:

(a) $(n_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathbb{N}$ y

(b) Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_{n_{k_m}} \in A_{n_{k_m}}$.

Tomemos $x \in X$ tal que $\lim x_{n_{k_m}} = x$. Notemos que por los incisos (a) y (b), podemos utilizar la Proposición 0.17 para obtener que:

$$x \in \limsup A_n. \tag{4}$$

Observemos que $(f(x_{n_{k_m}}))_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$. Por (3) se tiene que $\lim f(x_{n_{k_m}}) = y$; sin embargo, de la continuidad de f se sigue que $\lim f(x_{n_{k_m}}) = f(x)$. De esta manera, $f(x) = y$; luego, por (4) concluimos que $y \in f(\limsup A_n)$. Esto nos permite corroborar la veracidad de la contención (2); así, $\limsup f(A_n) = f(\limsup A_n)$. □

Proposición 0.21. *Sean X y Y espacios topológicos metrizables, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X, $A \subseteq X$, y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es compacto y* $\lim A_n = A$, *entonces* $\lim f(A_n) = f(A)$.

Demostración. Supongamos que X es compacto y que $\lim A_n = A$. Probemos que $\lim f(A_n) = f(A)$ utilizando la Proposición 0.16; es decir, mostremos que:

$$\limsup f(A_n) \subseteq f(A) \subseteq \liminf f(A_n). \tag{5}$$

En tanto que $\limsup A_n = \lim A_n = A$, la primera contención es una consecuencia directa del Lema 0.20. Por otro lado, como $\liminf A_n = \lim A_n = A$, entonces la segunda contención es una consecuencia directa del Lema 0.19. De esta manera, la contención (5) es verdadera y por la Proposición 0.16 obtenemos que $\lim f(A_n) = f(A)$. □

Concluimos el tema de límites calculando el límite inferior de una sucesión "alternante" de subconjuntos.

Proposición 0.22. *Sean X un espacio topológico metrizable, $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ y $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ sucesiones de subconjuntos no vacíos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hagamos:*

$$C_n = \begin{cases} A_m, & \text{si } n = 2m-1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}; \\ B_m, & \text{si } n = 2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos no vacíos de X tal que:

$$\liminf C_n = \liminf A_m \cap \liminf B_m.$$

Demostración. Probemos la igualdad correspondiente mediante doble contención. Mostremos primero que:

$$\liminf C_n \subseteq \liminf A_m \cap \liminf B_m. \tag{6}$$

Tomemos $x \in \liminf C_n$ y comprobemos que $x \in \liminf A_m \cap \liminf B_m$. Verifiquemos que $x \in \liminf A_m$ mediante la Definición 0.13. Escojamos un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y veamos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_m \neq \emptyset$ para cualquier $m \geqslant M$. Como $x \in \liminf C_n$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap C_n \neq \emptyset$ para cualquier $n \geqslant N$. Tomemos $M := N$ y sea $m \geqslant M$. Hagamos $n := 2m - 1$ y observemos que $n \geqslant N$. Esto significa que $U \cap C_n \neq \emptyset$; sin embargo $C_n = A_m$. De esta manera, para cualquier $m \geqslant M$ se tiene que $U \cap A_m \neq \emptyset$; lo cual nos permite concluir que $x \in \liminf A_m$. Notemos que de manera similar se puede comprobar que $x \in \liminf B_m$, por lo que $x \in \liminf A_m \cap \liminf B_m$. Así, la contención (6) es verdadera.

Comprobemos ahora que:

$$\liminf A_m \cap \liminf B_m \subseteq \liminf C_n. \tag{7}$$

Tomemos $x \in \liminf A_m \cap \liminf B_m$ y verifiquemos que $x \in \liminf C_n$ utilizando la Definición 0.13. Escojamos un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y mostremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap C_n \neq \emptyset$ para cualquier $n \geqslant N$. Como $x \in \liminf A_m \cap \liminf B_m$, entonces existen $M_A, M_B \in \mathbb{N}$ tales que:

- $U \cap A_m \neq \emptyset$ para cualquier $m \geqslant M_A$ y
- $U \cap B_m \neq \emptyset$ para cualquier $m \geqslant M_B$.

Hagamos $M := \max\{M_A, M_B\}$ y posteriormente definamos $N := 2M$. Tomemos $n \geqslant N$ y notemos que tenemos dos casos: $n = 2m - 1$ o $n = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $n = 2m - 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como $n \geqslant N$, se sigue que $2m - 1 \geqslant 2M$; esto significa que $2m \geqslant 2M$. De esta manera $m \geqslant M \geqslant M_A$, por lo que $U \cap A_m \neq \emptyset$. Observemos que $C_n = A_m$, luego $U \cap C_n \neq \emptyset$. Similarmente, si $n = 2m$, entonces $U \cap C_n \neq \emptyset$. Concluimos que $x \in \liminf C_n$; así la contención (7) es verdadera.

En tanto que las contenciones (6) y (7) son válidas, la igualdad en cuestión se satisface. $\square$

0.3. R^i-continuos.

Definición 0.23. Sean X un continuo y K un subcontinuo propio de X. Decimos que:

- K es un R^1-*continuo* si existen un subconjunto abierto propio U de X tal que $K \subseteq U$ y dos sucesiones $(C_n^1)_{n=1}^{\infty}$ y $(C_n^2)_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tales que $\limsup_X C_n^1 \cap \limsup_X C_n^2 = K$.
- K es un R^2-*continuo* si existen un subconjunto abierto propio U de X tal que $K \subseteq U$ y dos sucesiones $(C_n^1)_{n=1}^{\infty}$ y $(C_n^2)_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tales que $\lim_X C_n^1 \cap \lim_X C_n^2 = K$.
- K es un R^3-*continuo* si existen un subconjunto abierto propio U de X tal que $K \subseteq U$ y una sucesión $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $\liminf_X C_n = K$.

Capítulo 1

El continuo $\mathcal{X}$.

En este capítulo presentamos un continuo $\mathcal{X}$, el cual es el resultado de tomar cuatro copias ajenas de un continuo particular X_0 y "adherirlas" de una manera especial en un espacio cociente.

Nuestro primer paso es definir al continuo X_0. Sin embargo, antes de comenzar con su construcción, haremos algunas aclaraciones con respecto a la notación que utilizaremos.

Notación 1.1. Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}^3$, denotemos por pq al segmento de recta contenido en $\mathbb{R}^3$ que existe entre los puntos p y q. Es decir:

$$pq := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x = (1-t)p + tq \text{ para algún } t \in [0,1]\}.$$

Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^3$, denotemos por $p_1 p_2 \cdots p_n$ a la unión de todos los segmentos de recta $p_k p_{k+1}$. Es decir:

$$p_1 p_2 \cdots p_n := \textstyle\bigcup_{k=1}^{n-1} p_k p_{k+1}.$$

Notación 1.2. Para cualquier $k \in \mathbb{R}$, denotamos por Π_k al plano contenido en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $z = k$. Es decir:

$$\Pi_k := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{k\}.$$

Observación 1.3. A partir de este momento, todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que tomemos serán considerados como subespacios de $\mathbb{R}^3$ con la topología usual.

Sin más que aclarar, comencemos con la construcción de X_0.

Ejemplo 1.4. Tomemos los puntos $a_0 := (2,0,0)$, $b_0 := (1,0,0)$, $q_0 := (1,1,0)$, $r_0 := (-1,1,0)$, $s_0 := (-1,-1,0)$ y $t_0 := (1,-1,0)$ (ver Figura 1.1). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos los puntos:

$$p_n^+ := \left(\tfrac{n+2}{n+1}, \tfrac{1}{n+1}, 0\right), \qquad p_n^- := \left(\tfrac{n+2}{n+1}, -\tfrac{1}{n+1}, 0\right),$$
$$q_n^+ := \left(\tfrac{n+2}{n+1}, \tfrac{n+2}{n+1}, 0\right), \qquad q_n^- := \left(\tfrac{n}{n+1}, \tfrac{n}{n+1}, 0\right),$$
$$r_n^+ := \left(-\tfrac{n+2}{n+1}, \tfrac{n+2}{n+1}, 0\right), \qquad r_n^- := \left(-\tfrac{n+2}{n+1}, \tfrac{n}{n+1}, 0\right),$$
$$s_n^+ := \left(-\tfrac{n+2}{n+1}, -\tfrac{n+2}{n+1}, 0\right), \qquad s_n^- := \left(-\tfrac{n+2}{n+1}, -\tfrac{n}{n+1}, 0\right),$$
$$t_n^+ := \left(\tfrac{n+2}{n+1}, -\tfrac{n+2}{n+1}, 0\right). \qquad t_n^- := \left(\tfrac{n}{n+1}, -\tfrac{n}{n+1}, 0\right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos al conjunto D_n como:

$$D_n = a_0 p_n^+ q_n^+ r_n^+ r_n^- q_n^- t_n^- s_n^- s_n^+ t_n^+ p_n^- a_0.$$

Hagamos $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Por otro lado, precisemos:

$$S_0 := s_0 t_0 q_0 r_0.$$

Definamos el conjunto $G := a_0 b_0 \cup S_0$ y finalmente tomemos:

$$X_0 := G \cup D.$$

Una representación del espacio X_0 se puede consultar en la Figura 1.1.

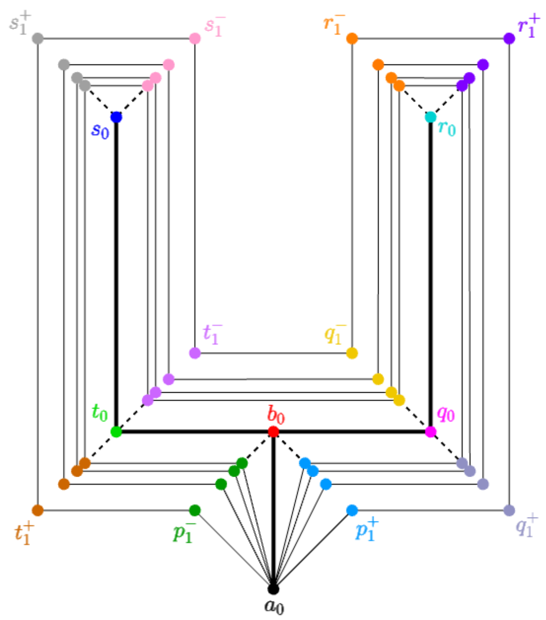

Figura 1.1: El espacio X_0 visto por arriba del eje Z. Las líneas punteadas son únicamente una referencia y representan la convergencia de las sucesiones en cuestión.

Observación 1.5. X_0 es un continuo: En efecto, como X_0 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y X_0 es un subconjunto acotado y cerrado de $\mathbb{R}^3$, entonces X_0 es metrizable y compacto. Por otro lado, X_0 es conexo por trayectorias, por lo que X_0 es conexo.

Nuestro siguiente paso es construir un subespacio Y de $\mathbb{R}^3$ el cual esté conformado por cuatro copias ajenas de X_0; todas ellas posicionadas de tal modo que se nos facilite describir el espacio cociente que estamos buscando.

Para poder explicar la posición de cada copia de X_0, haremos uso de una función específica.

Definición 1.6. Tomemos la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por la regla de correspondencia $f(x,y,z):=(-y,x,z+1)$ y la función identidad $\mathrm{Id}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Notemos que la función f está dada por una traslación en el eje Z por *una* unidad, seguida de una rotación de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje Z. Para cada $k\in\{0,1,2,3\}$, admitamos la función $f^k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por:

$$f^k:=\begin{cases}\mathrm{Id}, & \text{si } k=0;\\ f, & \text{si } k=1;\\ f\circ f, & \text{si } k=2;\\ f\circ f\circ f, & \text{si } k=3.\end{cases}$$

Observación 1.7. Elijamos $p\in X_0$ y escojamos $k\in\{0,1,2,3\}$. Observemos que la función f^k está dada por una traslación en el eje Z por k unidades seguida de una rotación de $k\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje Z. Esto significa que $f^k(p)$ es el resultado de trasladar el punto p al plano Π_k (ver Notación 1.2) y rotarlo $k\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje Z. De esta manera, para cualquier $A\subseteq X_0$ se tiene que $f^k(A)$ es el resultado de trasladar el subconjunto A al plano Π_k y rotarlo $k\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje Z.

Observación 1.8. Para cualquier $k\in\{0,1,2,3\}$, se tiene que $f^k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es una isometría. En consecuencia, para cualquier $A\subseteq\mathbb{R}^3$ y $k\in\{0,1,2,3\}$, la restricción $f^k|_A:A\to f^k(A)$ es una isometría. En particular, para cualquier $k\in\{0,1,2,3\}$ se tiene que X_0 y $f^k(X_0)$ son isométricos. Esto y la Observación 1.5, nos permiten concluir que $f^k(X_0)$ es un continuo para cualquier $k\in\{0,1,2,3\}$.

Observación 1.9. Consideremos $A\subseteq X_0$. Para cualesquiera $i,j\in\{0,1,2,3\}$ tales que $i\neq j$, se tiene que $f^i(A)\cap f^j(A)=\emptyset$. En particular, para cualesquiera $i,j\in\{0,1,2,3\}$ tales que $i\neq j$, se tiene que $f^i(X_0)\cap f^j(X_0)=\emptyset$.

Ejemplo 1.10. Sea X_0 el continuo construido en el Ejemplo 1.4. Para cada $k\in\{0,1,2,3\}$ pensemos en la función $f^k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ introducida en la Definición 1.6. Consideremos el conjunto:

$$Y:=\textstyle\bigcup_{k=0}^{3} f^k(X_0).$$

Una representación del espacio Y se puede consultar en la Figura 1.2.

Proposición 1.11. *Sean X_0 y Y los espacios presentados en los Ejemplos 1.4 y 1.10 respectivamente. Para cada $k\in\{0,1,2,3\}$ escojamos la función $f^k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ como en la Definición 1.6. Entonces, se tiene que:*

(i) Y es metrizable y compacto.

(ii) Para cualquier $k\in\{0,1,2,3\}$ se tiene que $f^k(X_0)$ es un subconjunto abierto y cerrado de Y.

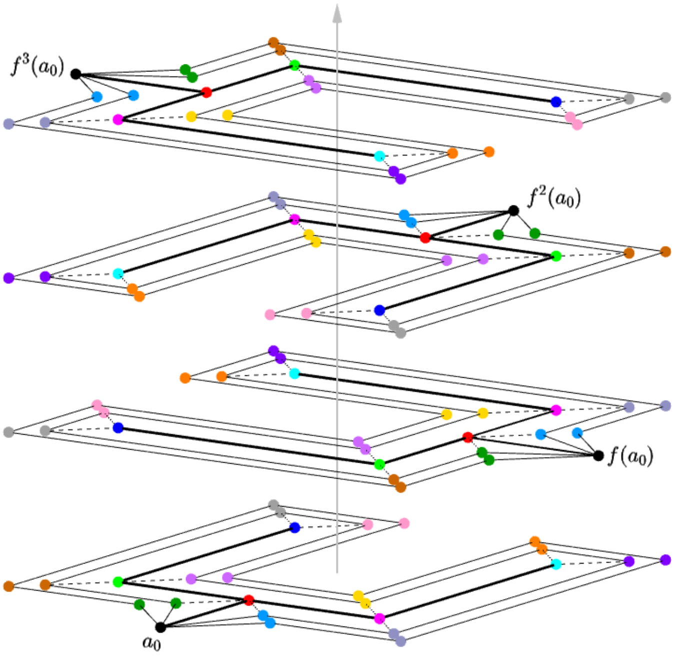

Figura 1.2: El espacio Y.

Demostración. El inciso (i) se obtiene gracias a que Y es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y a que Y es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^3$.

Para probar el inciso (ii), tomemos $k \in \{0,1,2,3\}$. Recordemos que $f^k(X_0)$ es compacto (Observación 1.8). Como $f^k(X_0) \subseteq Y$ y Y es un espacio metrizable y compacto, entonces $f^k(X_0)$ es un subconjunto cerrado de Y. Esto significa que para cualquier $k \in \{0,1,2,3\}$ se tiene que $f^k(X_0)$ es un subconjunto cerrado de Y. Ahora bien, tomemos $k \in \{0,1,2,3\}$ y notemos que $f^k(X_0) = \bigcap_{j\in\{0,1,2,3\}\setminus\{k\}}(Y \setminus f^j(X_0))$. De esta manera, $f^k(X_0)$ es una intersección finita de subconjuntos abiertos de Y; luego, $f^k(X_0)$ es un subconjunto abierto de Y. Concluimos así que para cualquier $k \in \{0,1,2,3\}$ se tiene que $f^k(X_0)$ es un subconjunto abierto de Y. $\square$

Comenzamos con la construcción del continuo más importante de este trabajo: el continuo $\mathcal{X}$. A continuación definiremos una partición $\mathcal{P}$ de Y la cual nos permita describir al espacio cociente que buscamos. Para ello, primero definiremos un subconjunto especial S de Y.

Definición 1.12. Sea S_0 el conjunto precisado en el Ejemplo 1.4. Para cada $k \in \{0,1,2,3\}$ tomemos la función $f^k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la Definición 1.6. Consideremos:

$$S := \bigcup_{k=0}^{3} f^k(S_0).$$

Nuestro siguiente paso es construir dos particiones $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ de los conjuntos $Y\backslash S$ y S respectivamente. Posteriormente, definiremos a $\mathcal{P}$ como la unión de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$.

La partición $\mathcal{Q}$ tiene por objetivo relacionar a los puntos de $Y\backslash S$ *únicamente* consigo mismos, mientras que la partición $\mathcal{R}$ tiene por objetivo relacionar a todos los puntos de S cuya *única* distinción sea su altura.

Definición 1.13. Sean Y el espacio mencionado en el Ejemplo 1.10 y S el conjunto presentado en la Definición 1.12. Admitamos:

$$\mathcal{Q} := \{\{p\} : \ p \in Y\backslash S\}.$$

Por otro lado, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tomemos la recta:

$$L_{(x,y)} := \{(x, y, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Posteriormente, hagamos:

$$\mathcal{R} := \{L_{(x,y)} \cap Y : (x, y, z) \in S\}.$$

Finalmente, definamos:

$$\mathcal{P} := \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}.$$

Observación 1.14. De sus respectivas definiciones, es claro que $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ son particiones de $Y\backslash S$ y S respectivamente. Esto significa que $\mathcal{P}$ es una partición de Y.

Ejemplo 1.15. Sean Y el espacio provisto en el Ejemplo 1.10 y $\mathcal{P}$ la partición construida en la Definición 1.13. Definamos a $\mathcal{X}$ como el espacio cociente que se obtiene de Y y que está generado por la partición $\mathcal{P}$ (ver Figura 1.3).

Notación 1.16. El símbolo "$\mathcal{P}$" será utilizado para denotar a la *partición* de Y construída en la Definición 1.13, mientras que el símbolo "$\mathcal{X}$" será utilizado para referirnos al *espacio* definido en el Ejemplo 1.15.

Nuestra siguiente misión es probar que $\mathcal{X}$ es efectivamente un continuo. Para ello, necesitamos de los siguientes cuatro resultados.

Observación 1.17. Sean Y y $\mathcal{X}$ los espacios considerados en los Ejemplos 1.10 y 1.15 respectivamente. Tomemos la función $\pi : Y \to \mathcal{X}$ como en la Definición 0.5 y recordemos que π es suprayectiva y continua; mas aún, π es una identificación (Proposición 0.7). Notemos que para cualquier $A \subseteq Y$, si A es un subconjunto abierto (cerrado) de Y y $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, entonces $\pi(A)$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathcal{X}$.

Observación 1.18. Sean Y y $\mathcal{X}$ los espacios señalados en los Ejemplos 1.10 y 1.15 respectivamente. Pensemos en la función π de la Observación 1.17 y en el conjunto S de la Definición 1.12. Entonces:

(i) Para cualesquiera $p, q \in Y \setminus S$, se tiene que $\pi(p) = \pi(q)$ si y sólo si $p = q$. En particular, para cualquier $A \subseteq Y \setminus S$ se tiene que $\pi|_A : A \to \pi(A)$ es biyectiva.

(ii) Para cualquier $A \subseteq Y \setminus S$ se tiene que $\pi(A) = \{\{p\} : p \in A\}$. En particular, para cualesquiera $A \subseteq Y \setminus S$ y $p \in Y$, si $\pi(p) \in \pi(A)$, entonces $p \in A$.

(iii) Para cualquier $A \subseteq Y \setminus S$ se tiene que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. En particular, para cualquier $A \subseteq Y \setminus S$, si A es un subconjunto abierto (cerrado) de Y, entonces $\pi(A)$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathcal{X}$.

(iv) Para cualesquiera $A \subseteq Y$ y $p \in Y \setminus S$, si $\pi(p) \in \pi(A)$ entonces $p \in A$.

(v) Para cualesquiera $p, q \in S$ tales que $p = (x, y, z)$ y $q = (u, v, w)$, se tiene que $\pi(p) = \pi(q)$ si y solo si $(x, y) = (u, v)$.

Lema 1.19. *Sean Y y $\mathcal{X}$ los espacios prescritos en los Ejemplos 1.10 y 1.15 respectivamente. Consideremos la función $\pi : Y \to \mathcal{X}$ de la Observacion 1.17. Para cada $M \subseteq \mathbb{R}^2$, definamos:*

$$\Lambda_M := (M \times \mathbb{R}) \cap Y.$$

Para todo $M \subseteq \mathbb{R}^2$ se tiene que:

(i) $\pi^{-1}(\pi(\Lambda_M)) = \Lambda_M$ y

(ii) si M es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{R}^2$, entonces $\pi(\Lambda_M)$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathcal{X}$.

Demostración. Elijamos $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

Probemos el inciso (i). Notemos que la contención $\Lambda_M \subseteq \pi^{-1}(\pi(\Lambda_M))$ siempre es válida, de manera que sólo tenemos que verificar la contención $\pi^{-1}(\pi(\Lambda_M)) \subseteq \Lambda_M$. Tomemos $p \in \pi^{-1}(\pi(\Lambda_M))$ y probemos que $p \in \Lambda_M$. Observemos que $\pi(p) \in \pi(\Lambda_M)$. También apreciemos que tenemos dos casos $p \in Y \setminus S$ o $p \in S$. Si $p \in Y \setminus S$, entonces el inciso (iv) de la Observación 1.18 garantiza que $p \in \Lambda_M$. Supongamos entonces que $p \in S$ y elijamos $q \in \Lambda_M$ tal que $\pi(q) = \pi(q)$. Como $p \in S$, si $q \in Y \setminus S$ entonces $\pi(p) \neq \pi(q)$; sin embargo, esta última desigualdad no es válida, por lo que $q \in S$. Ahora bien, asumamos que $p = (x, y, z)$ y $q = (u, v, w)$. Por el inciso (v) de la Observación 1.18 obtenemos que $(x, y) = (u, v)$, luego $(x, y) \in M$. Esto significa que $(x, y, z) \in \Lambda_M$, con lo cual obtenemos que $p \in \Lambda_M$. Concluimos así que $\pi^{-1}(\pi(\Lambda_M)) \subseteq \Lambda_M$, de manera que $\pi^{-1}(\pi(\Lambda_M)) = \Lambda_M$.

Para mostrar el inciso (ii), supongamos que M es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathbb{R}^2$. Entonces, se tiene que Λ_M es un subconjunto abierto (cerrado) de Y. Esto, el inciso (i), y la Observación 1.17 nos permiten garantizar que $\pi(\Lambda_M)$ es un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathcal{X}$. $\square$

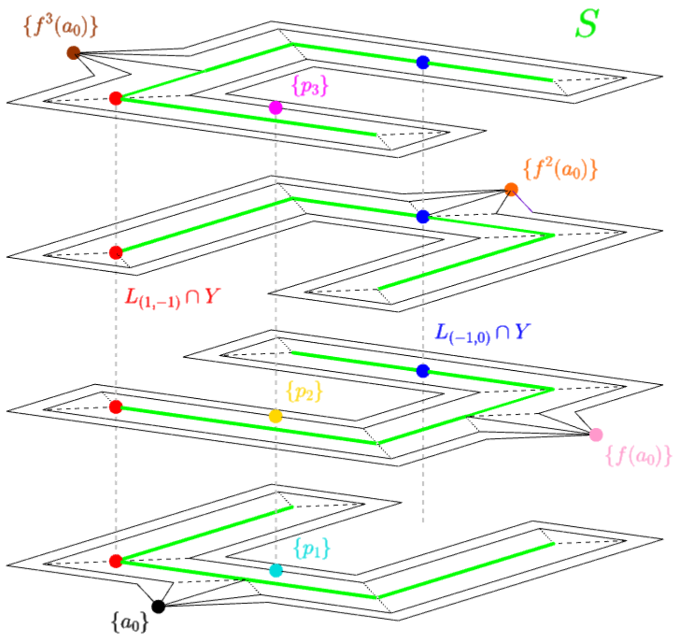

Figura 1.3: El continuo $\mathcal{X}$. Cada conjunto de puntos coloreado de un mismo color representa un elemento distinto de $\mathcal{X}$.

Proposición 1.20. *El espacio $\mathcal{X}$ exhibido en el Ejemplo 1.15 es T_2.*

Demostración. Pensemos en el espacio Y del Ejemplo 1.10 y en la función π de la Observación 1.17. Recordemos que π es suprayectiva. Escojamos $\pi(p), \pi(q) \in \mathcal{X}$ tales que $\pi(p) \neq \pi(q)$ y encontremos subconjuntos abiertos *ajenos* $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ tales que $\pi(p) \in \mathcal{U}$ y $\pi(q) \in \mathcal{V}$. Como $\pi(p) \neq \pi(q)$, entonces $p \neq q$. Admitamos el conjunto S de la Definición 1.12 y observemos que tenemos dos casos: $\{p,q\} \not\subseteq S$ o $\{p,q\} \subseteq S$. Supongamos que $\{p,q\} \not\subseteq S$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p \in Y \setminus S$. S un subconjunto cerrado de Y, podemos elegir un subconjunto abierto U de Y tal que $p \in U \subseteq \overline{U} \subseteq Y \setminus S$ y $q \notin \overline{U}$. Hagamos $\mathcal{U} := \pi(U)$ y $\mathcal{V} := \mathcal{X} \setminus \pi(\overline{U})$. Por el inciso (iii) de la Observación 1.18 obtenemos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{X}$; también se tiene que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos. Por otro lado, como $p \in U$, entonces $\pi(p) \in \mathcal{U}$. Ahora bien, en busca de una contradicción supongamos que $\pi(q) \notin \mathcal{V}$, lo cual significa que $\pi(q) \in \pi(\overline{U})$. Como $\overline{U} \subseteq Y \setminus S$, entonces el inciso (ii) de la Observación 1.18 garantiza que $q \in \overline{U}$. sin embargo, esto último contradice la manera en la que tomamos $\overline{U}$, por lo que $\pi(q) \in \mathcal{V}$. Concluimos así que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos *ajenos* de $\mathcal{X}$ tales que $\pi(p) \in \mathcal{U}$ y $\pi(q) \in \mathcal{V}$.

Resta ver cómo proceder en el caso en que $\{p,q\} \subseteq S$. Supongamos que $\{p,q\} \subseteq S$ y asumamos que $p = (x,y,z)$ y $q = (u,v,w)$. Como $\pi(p) \neq \pi(q)$, entonces el inciso (v) de la Observación 1.18 garantiza que $(x,y) \neq (u,v)$. Tomemos un subconjunto abierto O de $\mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) \in O$ y $(u,v) \notin \overline{O}$.

Hagamos Λ_O y $\Lambda_{\overline{O}}$ como en el Lema 1.19 y notemos que por el inciso (ii) del Lema 1.19, $\pi(\Lambda_O)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$. Similarmente, $\pi(\Lambda_{\overline{O}})$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{X}$. Definamos $\mathcal{U} := \pi(\Lambda_O)$ y $\mathcal{V} := \mathcal{X} \backslash \pi(\Lambda_{\overline{O}})$. Notemos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos *ajenos* de $\mathcal{X}$. Por otra parte, como $p \in \Lambda_O$, entonces $\pi(p) \in \mathcal{U}$. Ahora bien, en busca de una contradicción supongamos que $\pi(q) \notin \mathcal{V}$, lo cual significa que $\pi(q) \in \pi(\Lambda_{\overline{O}})$. Se sigue que $q \in \pi^{-1}(\pi(\Lambda_{\overline{O}}))$. Por el inciso (i) del Lema 1.19, se tiene que $q \in \Lambda_{\overline{O}}$, lo cual nos permite asegurar que $(u, v) \in \overline{O}$. Esto contradice la manera en la que tomamos $\overline{O}$, así que $\pi(q) \in \mathcal{V}$. Finalmente, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos *ajenos* de $\mathcal{X}$ tales que $\pi(p) \in \mathcal{U}$ y $\pi(q) \in \mathcal{V}$.

De esta manera, para cualesquiera $\pi(p), \pi(q) \in \mathcal{X}$ tales que $\pi(p) \neq \pi(q)$, existen subconjuntos abiertos *ajenos* $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ tales que $\pi(p) \in \mathcal{U}$ y $\pi(q) \in \mathcal{V}$. Concluimos así que $\mathcal{X}$ es un espacio T_2. □

Proposición 1.21. *El espacio $\mathcal{X}$ presentado en el Ejemplo 1.15 es un continuo.*

Demostración. Tomemos el espacio Y construido en el Ejemplo 1.10 y la función π de la Observación 1.17. Recordemos que π es continua y suprayectiva; también que Y es metrizable y compacto. Esto significa que $\mathcal{X}$ es la imagen continua de un espacio metrizable y compacto. De esta manera, $\mathcal{X}$ es compacto; además, al ser $\mathcal{X}$ un espacio T_2, la Proposición 0.9 garantiza que $\mathcal{X}$ es metrizable. Resta comprobar que $\mathcal{X}$ es conexo. Admitamos el continuo X_0 del Ejemplo 1.4 y para cada $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ pensemos en la función f^k de la Definición 1.6. Observemos que $\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{3} \pi(f^k(X_0))$ y que para cada $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, la Observación 1.8 y la continuidad de π garantizan que $\pi(f^k(X_0))$ es un subespacio conexo de $\mathcal{X}$. Por otro lado, elijamos el punto s_0 de la Definición 1.4 y notemos que $\pi(s_0) \in \bigcap_{k=0}^{3} \pi(f^k(X_0))$. Esto significa que $\mathcal{X}$ es una unión de subespacios conexos cuya intersección es no vacía. Concluimos así que $\mathcal{X}$ es conexo.

Al ser $\mathcal{X}$ metrizable, compacto y conexo, obtenemos que $\mathcal{X}$ es un continuo. □

Observación 1.22. A partir de este momento, todos los subconjuntos de $\mathcal{X}$ que tomemos serán considerados como subespacios de $\mathcal{X}$ con la topología cociente.

Concluimos este capítulo introduciendo dos subcontinuos de $\mathcal{X}$ que nos son de interés.

Definición 1.23. Sean Y y $\mathcal{X}$ los espacios de los Ejemplos 1.10 y 1.15 respectivamente. Admitamos la función π de la Observación 1.17, el conjunto S_0 del Ejemplo 1.4, a los puntos q_0 y r_0 del Ejemplo 1.4 y a la función f de la Definición 1.6. Hagamos:

$$K := S_0 \cup f(q_0 r_0).$$

Posteriormente, consideremos los conjuntos:

$$\mathcal{C} := \pi(q_0 r_0) \text{ y } \mathcal{K} := \pi(K).$$

Una representación gráfica de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ se puede consultar en la Figura 1.4.

Proposición 1.24. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ las colecciones presentadas en la Definición 1.23. Entonces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ son subcontinuos propios de $\mathcal{X}$ tales que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$.*

Demostración. El que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ es una consecuencia directa de la definición de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$. También el que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ sean subconjuntos propios de $\mathcal{X}$. Ahora bien, pensemos en el espacio Y del Ejemplo 1.10, en la función π de la Observación 1.18, en el conjunto S_0 de la Definición 1.12, en los puntos q_0 y r_0 del Ejemplo 1.4 y en la función f de la Definición 1.6. Notemos que la continuidad de π garantiza que $\pi(q_0 r_0)$ es compacto y conexo, por lo que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $\mathcal{X}$. Similarmente se tiene que $\pi(S_0)$ y $\pi(f(q_0, r_0))$ son compactos y conexos. Observemos que $\pi(r_0) \in \pi(S_0) \cap \pi(f(q_0, r_0))$. Esto significa que $\pi(S_0) \cup \pi(f(q_0 r_0))$ es compacto y conexo. Por otro lado, notemos que :

$$\mathcal{K} = \pi(K) = \pi(S_0 \cup f(q_0 r_0)) = \pi(S_0) \cup \pi(f(q_0 r_0)).$$

Entonces, $\mathcal{K}$ es compacto y conexo, por lo que $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $\mathcal{X}$. $\square$

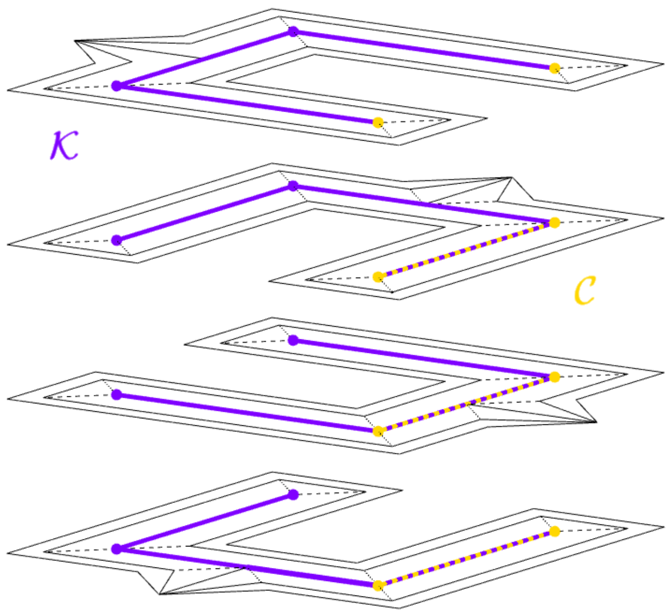

Figura 1.4: Los subcontinuos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$.

Capítulo 2

R^i-continuos de $\mathcal{X}$.

Observación 2.1. A lo largo de este capítulo estaremos trabajando con los espacios X_0, Y y $\mathcal{X}$ de los Ejemplos 1.4, 1.10, 1.15, respectivamente; también citaremos a los subcontinuos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ precisados en la Definición 1.23. Utilizaremos las funciones $f^k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la Definición 1.6, la función $\pi : Y \to \mathcal{X}$ de la Observación 1.17, el conjunto S de la Definición 1.12 y los puntos $p_m^+, q_m^+, r_m^+, r_m^-, q_m^-, t_m^-, s_m^+, s_m^-, t_m^+, p_m^-,\ a_0, s_0, t_0, q_0, r_0,$ y b_0 del Ejemplo 1.4. Suplicamos al lector que tenga presente todos estos elementos en el transcurso del texto. Cabe recordar que cada subconjunto que tomemos de algún espacio particular sera considerado como subespacio del mismo con su topología relativa.

En [2, pág. 208] se hizo la siguiente afirmación:

Afirmación 2.2. [2, Proposición 1, pág. 208] Sean X un continuo y K un subcontinuo de X. Si existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que K es un R^i-continuo de X, entonces existe un subcontinuo C de X tal que C es un R^3-continuo de X y tal que $C \subseteq K$.

A fin de refutar la Afirmación 2.2, en [7, Ejemplo C, pág. 112] se afirmó que $\mathcal{K}$ es un R^1-continuo de $\mathcal{X}$ que no contiene R^3-continuos de $\mathcal{X}$. Sin embargo, en este capítulo probaremos que $\mathcal{C}$ es un R^3-continuo de $\mathcal{X}$, lo cual nos permitirá contradecir la afirmación hecha en [7, Ejemplo C, pág. 112].

Según la Definición 0.23, para probar que $\mathcal{C}$ es un R^3-continuo debemos de encontrar un subconjunto abierto propio $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ que contenga a $\mathcal{C}$ y una sucesión de componentes $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$.

La construcción del subconjunto $\mathcal{U}$ dependerá de un subconjunto abierto U de Y, el cual será definido en un futuro no muy lejano. Por ahora nos concentraremos en precisar y analizar un subconjunto particular de X_0 que será el cimiento de nuestro razonamiento.

Definición 2.3. Hagamos $b_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ y tomemos el conjunto:

$$Z_0 := \left[\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} a_0 p_m^-\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} a_0 p_m^+\right) \cup a_0 b_1\right] \cap X_0.$$

Una representación gráfica de Z_0 se puede consultar en la Figura 2.1. Observemos que $Z_0 \subseteq X_0$ y posteriormente definamos:

$$O := X_0 \backslash Z_0.$$

Observación 2.4. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos:

$$b_m := \left(\tfrac{m}{m+1}, 0, 0\right).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos:

$$A_m := p_m^+ q_m^+ r_m^+ r_m^- q_m^- b_m \text{ y } B_m := b_m t_m^- s_m^- s_m^+ t_m^+ p_m^-.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ hagamos:

$$V_m := A_m \backslash \{p_m^+, b_m\} \text{ y } W_m := B_m \backslash \{b_m, p_m^-\}.$$

Por otro lado, tomemos:

$$A_0 := b_0 q_0 r_0 \text{ y } B_0 := s_0 t_0 b_0.$$

Precisemos:

$$V_0 := A_0 \backslash \{b_0\} \text{ y } W_0 := B_0 \backslash \{b_0\}.$$

Una representación gráfica de los conjuntos V_1, V_0, W_1, W_0 y de la sucesión $(b_m)_{m=1}^{\infty}$ se puede encontrar en la Figura 2.1. Pese a que en dicha imagen no se incluye los dibujos de los conjuntos A_1, A_0, B_1, y B_0, no hay que perder de vista que los mismos se pueden obtener uniendo los pares de puntos correspondientes a las interpretaciones gráficas de los conjuntos V_1, V_0, W_1 y W_0, respectivamente. Ahora bien, notemos que:

$$O = \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} V_m\right) \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} W_m\right).$$

Proposición 2.5. *Sea O el conjunto precisado en la Definición 2.3. Para todo $m \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos V_m y W_m como en la Observación 2.4. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que V_m y W_m son subconjuntos abiertos y cerrados de O.*

Demostración. Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Notemos que A_m es un subconjunto cerrado de X_0. Esto significa que $A_m \backslash \{p_m^+, b_m\}$ es un subconjunto abierto de X_0, por lo que V_m es un subconjunto abierto de X_0. Ahora bien, $V_m \subseteq O$ de modo que V_m es un subconjunto abierto de O. Por otro lado, la identidad $A_m \cap O = V_m$ y el hecho de que A_m es un subconjunto cerrado de X_0 nos permiten concluir que V_m es un subconjunto cerrado de O. Análogamente se obtiene que W_m es un subconjunto abierto y cerrado de O. $\square$

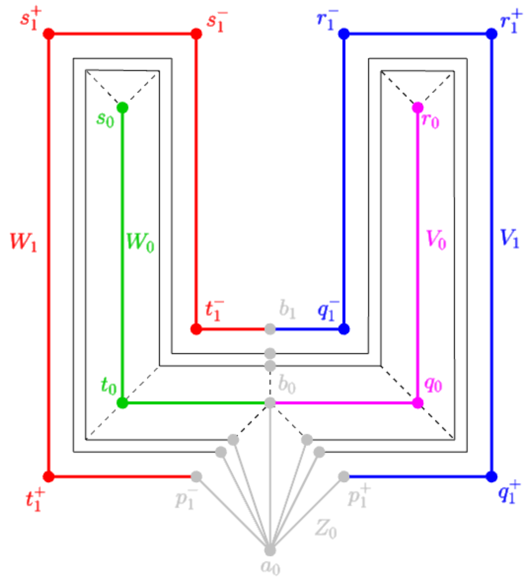

Figura 2.1: Los conjuntos V_1, V_0, W_1 y W_0.

Proposición 2.6. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ escojamos los conjuntos V_m y W_m de la Observación 2.4. Pensemos en los conjuntos A_0 y B_0 como en la Observación 2.4. Entonces:*

$$\text{lím}_{X_0} V_m = A_0 \text{ y } \text{lím}_{X_0} W_m = B_0.$$

Demostración. Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ seleccionemos el conjunto A_m de la Observación 2.4. A fin de verificar que $\text{lím}_{X_0} V_m = A_0$, primero mostremos que $\text{lím}_{X_0} A_m = A_0$. Para ello, hagamos uso de la Proposición 0.16; es decir, comprobemos que se satisfacen las siguientes contenciones:

(1) $\text{lím sup}_{X_0} A_m \subseteq A_0$ y

(2) $A_0 \subseteq \text{lím inf}_{X_0} A_m$.

Para probar la contención (1), veamos que:

$$X_0 \setminus A_0 \subseteq X_0 \setminus \text{lím sup}_{X_0} A_m. \tag{2.1}$$

Elijamos $p \in X_0 \setminus A_0$ y construyamos un subconjunto abierto V de X_0 que contenga a p y para el cual exista $M \in \mathbb{N}$ tal que tal que $A_m \cap V = \emptyset$ para cualquier $m \geqslant M$. Notemos que $X_0 = (X_0 \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m) \cup (\bigcup_{m=0}^{\infty} A_m)$, por lo que tenemos dos casos:

$$p \in X_0 \setminus \textstyle\bigcup_{m=0}^{\infty} A_m \text{ o } p \in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m.$$

Supongamos que $p \in X_0 \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$. Hagamos $V := X_0 \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$ y mostremos que V es un subconjunto abierto de X_0. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos:

$$E_m = b_m t_m^- s_m^- s_m^+ t_m^+ p_m^- a_0 p_m^+ \setminus \{b_m, p_m^+\}.$$

Tomemos el conjunto W_0 de la Observación 2.4 y notemos que:

$$V = (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) \cup W_0. \tag{2.2}$$

Por otro lado, observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que E_m es un subconjunto abierto de X_0; de igual manera, W_0 es un subconjunto abierto de X_0. Esto significa que $(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) \cup W_0$ es un subconjunto abierto de X_0, lo cual según la igualdad (2.2) nos permite confirmar que V es un subconjunto abierto de X_0. Ahora bien, $p \in V$ y $A_m \cap V = \emptyset$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Así, si $p \in X_0 \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$ entonces $p \in X_0 \setminus \limsup_{X_0} A_m$. Supongamos ahora que $p \in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$. Como $p \notin A_0$, entonces existe un único $M \in \mathbb{N}$ tal que $p \in A_M$. Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ admitamos el conjunto D_m del Ejemplo 1.4 y apreciemos que:

$$A_m \subseteq D_m \setminus \{a_0\} \text{ para cualquier } m \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

En particular $A_M \subseteq D_M \setminus \{a_0\}$, lo cual significa que $p \in D_M \setminus \{a_0\}$. Consideremos $V := D_M \setminus \{a_0\}$ y percatémonos de que V es un subconjunto abierto de X_0 que contiene a p. Por otro lado, como para cualquier $m \in \mathbb{N} \setminus \{M\}$ se satisface que $D_m \setminus \{a_0\} \cap V = \emptyset$, entonces por (2.3) obtenemos que $A_m \cap V = \emptyset$ para todo $m \geqslant M$. Concluimos así que $p \in X_0 \setminus \limsup_{X_0} A_m$, de modo que la contención (2.1) es válida. Esto finaliza la prueba de la contención (1).

Para la prueba de la contención (2), mostremos que para cualquier $p \in A_0$ se cumple que $p \in \liminf_{X_0} A_n$ haciendo uso de la Proposición 0.17. Tomemos $p \in A_0$ y seleccionemos los puntos b_0, q_0 y r_0 del Ejemplo 1.4. Recordemos que $A_0 = b_0 q_0 \cup q_0 r_0$, por lo que tenemos dos casos:

$$p \in b_0 q_0 \text{ o } p \in q_0 r_0.$$

Supongamos que $p \in b_0 q_0$. Esto nos provee de una $\alpha \in [0,1]$ tal que:

$$p = b_0(1-\alpha) + \alpha q_0.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos:

$$p_m := p_m^+(1-\alpha) + \alpha q_m^+.$$

Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $p_m \in A_m$. Por otro lado:

$$p = (1-\alpha) b_0 + \alpha q_0 = (1-\alpha) \lim p_m^+ + \alpha \lim q_m^+ = \lim p_m.$$

Se sigue que $(p_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X_0 convergente a p tal que $p_m \in A_m$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Resta construir la sucesión correspondiente cuando $p \in q_0 r_0$; sin embargo, esta instancia se resuelve de manera similar a la anterior. Por la Proposición 0.17 obtenemos que $p \in \liminf_{X_0} A_n$, de modo que la contención (2) es verdadera.

Como se satisfacen las contenciones (1) y (2), entonces por la Proposición 0.16 concluimos que $\lim_{X_0} A_m = A_0$. Ahora bien, recordemos que nuestro objetivo es probar que $\lim_{X_0} V_m = A_0$. Observemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\overline{V_m} = A_m$, luego $\lim_{X_0} \overline{V_m} = A_0$. En tanto que A_0 es un subconjunto cerrado y no vacío de X_0, la Proposición 0.18 asegura que $\lim_{X_0} V_m = A_0$. Notemos que de manera similar se puede obtener que $\lim_{X_0} W_m = B_0$. □

Definición 2.7. Sea Z_0 el conjunto designado en la Definición 2.3. Admitamos las rectas $L_{(1,0)}$ y $L_{(-1,0)}$ definidas en el Ejemplo 1.13. Hagamos:

$$U := Y \setminus (Z_0 \cup f^2(Z_0) \cup L_{(1,0)} \cup L_{(-1,0)}).$$

Observación 2.8. U es un subconjunto abierto de Y ya que Z_0, $f^2(Z_0)$, $L_{(1,0)}$ y $L_{(-1,0)}$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^3$.

Observación 2.9. Pensemos en el conjunto O de la Definición 2.3. Recordemos que $Y = \bigcup_{k=0}^{3} f^k(X_0)$. Seleccionemos $k \in \{0, 2\}$ y notemos que:

$$U \cap f^k(X_0) = f^k(O). \tag{2.4}$$

De esta manera, $f^k(O) \subseteq U$. Asimismo, si para cualquier $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ consideramos los conjuntos V_m y W_m de la Observación 2.4, entonces obtenemos que $f^k(V_m), f^k(W_m) \subseteq U$ (ver Figura 2.2).

Proposición 2.10. *Sea $k \in \{0, 2\}$. Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ elijamos los conjuntos V_m y W_m de la Observación 2.4. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^k(V_m)$ y $f^k(W_m)$ son subconjuntos abiertos y cerrados de U.*

Demostración. Tomemos el conjunto O de la Definición 2.3. El que $f^k(X_0)$ sea un subconjunto abierto y cerrado de Y (inciso (ii) de la Proposición 1.11) garantiza que $U \cap f^k(X_0)$ es un subconjunto abierto y cerrado de U. Esto y la identidad (2.4) de la Observación 2.9 nos permiten concluir que:

$$f^k(O) \text{ es un subconjunto abierto y cerrado de } U. \tag{2.5}$$

Escojamos $m \in \mathbb{N}$. Recapitulemos que V_m y W_m son subconjuntos abiertos y cerrados de O (Proposición 2.5) y que $f^k|_O$ es un homeomorfismo (Observación 1.7). Se sigue que $f^k(V_m)$ y $f^k(W_m)$ son subconjuntos abiertos y cerrados de $f^k(O)$. Esto y la afirmación (2.5) nos permiten verificar que $f^k(V_m)$ y $f^k(W_m)$ son subconjuntos abiertos y cerrados de U. □

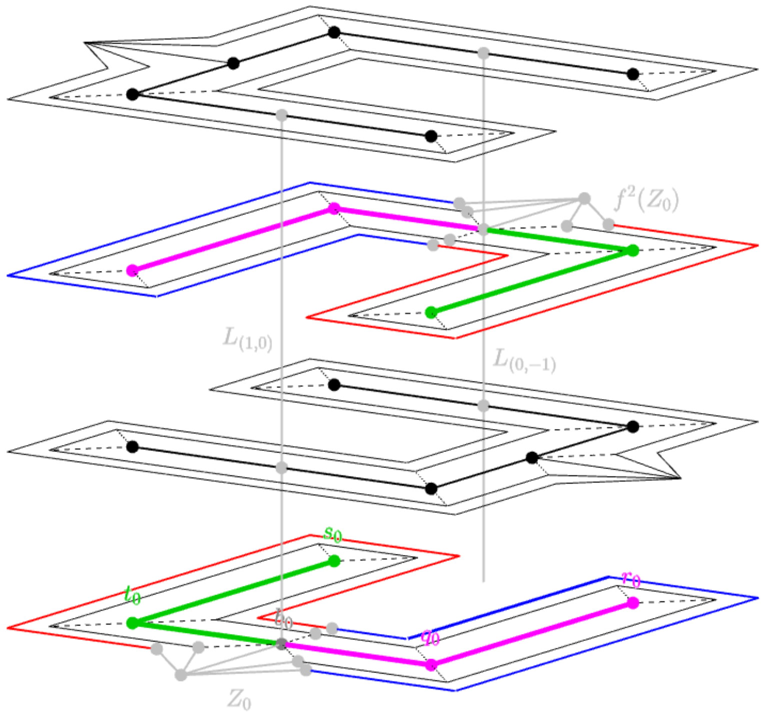

Figura 2.2: El conjunto U y su relación con los conjuntos $f^k(V_m)$ y $f^k(W_m)$.

Proposición 2.11. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ admitamos los conjuntos V_m y W_m de la Observación 2.4; también elijamos a los conjuntos A_0 y B_0 de la Observación 2.4. Entonces:*

$$\text{lím}_Y V_m = A_0 \ \text{y} \ \text{lím}_Y f^2(W_m) = f^2(B_0).$$

Demostración. La primera igualdad es una consecuencia de que X_0 es un subconjunto cerrado de Y (inciso (ii) de la Proposición 1.11), de la igualdad $\text{lím}_{X_0} V_m = A_0$ (Proposición 2.6) y del inciso (iii) de la Proposición 0.15. Para la segunda igualdad, recordemos que $\text{lím}_{X_0} W_m = B_0$ (Proposición 2.6) y que la función $f^2|_{X_0}$ es continua (Observación 1.8). Notemos que por la Proposición 0.21 se tiene que $\text{lím}_{f^2(X_0)} f^2(W_m) = f^2(B_0)$. Como $f^2(X_0)$ es un subconjunto cerrado de Y (inciso (ii) de la Proposición 1.11), entonces por el inciso (iii) de la Proposición 0.15 obtenemos que $\text{lím}_Y f^2(W_m) = f^2(B_0)$. $\square$

No perdamos de vista que buscamos conseguir un subconjunto abierto propio $\mathcal{U}$ del continuo $\mathcal{X}$ que contenga al subcontinuo $\mathcal{C}$ y una sucesión de componentes $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\text{lím inf}_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$.

Antes de proceder con la definición de $\mathcal{U}$, construiremos una sucesión de subconjuntos de Y la cual nos permitirá precisar la definición de la sucesión $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definición 2.12. Para cada $m \in \mathbb{N}$ tomemos los conjuntos V_m y W_m de la Observación 2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hagamos:

$$C_n = \begin{cases} V_m, & \text{si } n = 2m-1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}; \\ f^2(W_m), & \text{si } n = 2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Observación 2.13. Por la Observación 2.9 se tiene que $C_n \subseteq U$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.14. Escojamos $n \in \mathbb{N}$. Observemos que si n es impar, entonces $C_n \subseteq X_0$. Por otro lado, si n es par, entonces $C_n \subseteq f^2(X_0)$. Esto significa que los elementos de la sucesión $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ están alternando su posición entre las distintas copias de X_0 (ver Figura 2.3).

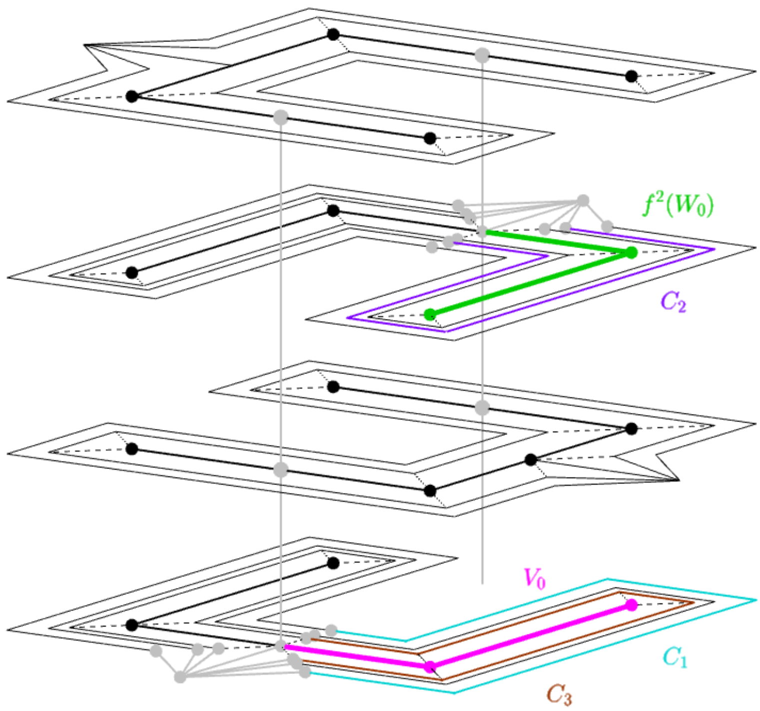

Figura 2.3: La sucesión $(C_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definición 2.15. Sea U el conjunto precisado en la Definición 2.7. Hagamos:

$$\mathcal{U} := \pi(U).$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ admitamos el conjunto C_n de la Definición 2.12. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$\mathcal{C}_n := \pi(C_n).$$

Observación 2.16. Gracias a que $C_n \subseteq U$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ (Observación 2.13), se tiene que $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{U}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.17. Tomemos el conjunto U de la Definición 2.7. Recordemos que $b_0 = (1,0,0)$ (Ejemplo 1.4) y que para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $f^2(x,y,z) = (-x,-y,z+2)$ (Definición 1.6). Entonces, $f^2(b_0) = (-1,0,2)$. Notemos que $L_{(1,0)} \cap U = \emptyset = L_{(-1,0)} \cap U$, luego $\pi(b_0), \pi(f^2(b_0)) \notin \pi(U)$. De esta manera, $\pi(b_0), \pi(f^2(b_0)) \notin \mathcal{U}$.

Observación 2.18. Pensemos en el conjunto U de la Definición 2.7 y apreciemos que:

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = U.$$

Proposición 2.19. *Sea $\mathcal{U}$ el conjunto construido en la Definición 2.15. Entonces $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto y propio de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Por la Observación 2.17 obtenemos que $\mathcal{U}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{X}$. Por otro lado, recapitulemos que al ser $\mathcal{X}$ el espacio cociente de Y generado por la partición $\mathcal{P}$, se tiene que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$ si y sólamente si $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de Y. Por las Observaciones 2.8 y 2.18 concluimos que $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de Y, lo cual nos permite asegurar que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto propio de $\mathcal{X}$. Por último, apreciemos que $q_0r_0 \subseteq U$, por lo que $\pi(q_0r_0) \subseteq \pi(U)$. De esta manera, $\mathcal{C} \subseteq U$. □

Proposición 2.20. *Sea $\mathcal{U}$ el conjunto señalado en la Definición 2.15. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos el conjunto $\mathcal{C}_n$ como en la Definición 2.15. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{C}_n$ es una componente de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ y probemos que $\mathcal{C}_n$ es una componente de $\mathcal{U}$ utilizando la Proposición 0.10. Supongamos que $n = 2m-1$ para algún $m \in \mathbb{N}$, lo cual significa que $\mathcal{C}_n = \pi(V_m)$. De la construcción del conjunto V_m (Observación 2.4) se sigue que V_m es conexo. Al ser π una función continua (Observación 1.17), obtenemos que:

$$\pi(V_m) \text{ es conexo.} \tag{2.6}$$

Ahora bien, mostremos que:

$$\pi(V_m) \text{ es un subconjunto abierto y cerrado de } \mathcal{U}. \tag{2.7}$$

Recordemos que π es una identificación (Observación 1.17). Entonces, combinando las Proposiciones 0.8 y 2.19 así como la Observación 2.18 obtenemos que la restricción $\pi|_U : U \to \mathcal{U}$ es una identificación. Como $V_m \subseteq Y \setminus S$, por el inciso (iii) de la Observación 1.18 obtenemos que $\pi^{-1}(\pi(V_m)) = V_m$. Dado que V_m es un subconjunto abierto y cerrado de U (Proposición 2.10), concluimos que el enunciado (2.7) es verdadero.

Por las afirmaciones (2.6) y (2.7) y la Proposición 0.10 obtenemos que $\pi(V_m)$ es una componente de $\mathcal{U}$, lo cual nos permite asegurar que $\mathcal{C}_n$ es una componente de $\mathcal{U}$ cuando $n=2m-1$ para algún $m\in\mathbb{N}$. Similarmente, $\mathcal{C}_n$ es una componente de $\mathcal{U}$ si $n=2m$ para algún $m\in\mathbb{N}$. Así, para cualquier $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{C}_n$ es una componente de $\mathcal{U}$. □

Hasta el momento tenemos que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto propio de $\mathcal{X}$ que contiene a $\mathcal{C}$ y que $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de componentes de $\mathcal{U}$. Sólo resta verificar que $\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n=\mathcal{C}$ para concluir que $\mathcal{C}$ es un R^3-continuo de $\mathcal{X}$.

Proposición 2.21. *Para cada $n\in\mathbb{N}$, tomemos el conjunto $\mathcal{C}_n$ como en la Definición 2.15. Entonces:*

$$\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n=\mathcal{C}.$$

Demostración. Para cada $m\in\mathbb{N}$ seleccionemos los conjuntos V_m y W_m como en la Observación 2.4. Para cualquier $n\in\mathbb{N}$ se tiene que:

$$\mathcal{C}_n=\begin{cases}\pi(V_m), & \text{si } n=2m-1 \text{ para algún } m\in\mathbb{N};\\ \pi(f^2(W_m)), & \text{si } n=2m \text{ para algún } m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

De la Proposición 0.22 se sigue que:

$$\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n=\liminf_{\mathcal{X}} \pi(V_m)\cap\liminf_{\mathcal{X}} \pi(f^2(W_m)). \tag{2.8}$$

Escojamos a los conjuntos A_0 y B_0 como en la Observación 2.4. Recordemos que $\pi:Y\to\mathcal{X}$ es una función continua (Observación 1.17) y que $\lim_Y V_m=A_0$ y $\lim_Y f^2(W_m)=f^2(B_0)$ (Proposición 2.11). Por la Proposición 0.21 concluimos que:

$$\lim_{\mathcal{X}} \pi(V_m)=\pi(A_0) \quad \text{y} \quad \lim_{\mathcal{X}} \pi(f^2(W_m))=\pi(f^2(B_0)).$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (2.8) obtenemos que:

$$\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n=\pi(A_0)\cap\pi(f^2(B_0)). \tag{2.9}$$

Una representación gráfica de la identidad (2.9) se puede consultar en la Figura 2.4. Ahora bien, notemos que:

$$\pi(A_0)=\pi(b_0q_0)\cup\pi(q_0r_0). \tag{2.10}$$

Por otro lado, llamemos c_0 al punto medio del segmento q_0r_0; es decir:

$$c_0:=\tfrac{1}{2}q_0+\tfrac{1}{2}r_0.$$

Apreciemos que:

$$\pi(f^2(t_0b_0))=\pi(f(q_0c_0)). \tag{2.11}$$

También observemos que:

$$\pi(f^2(B_0)) = \pi(f^2(s_0t_0)) \cup \pi(f^2(t_0b_0)). \tag{2.12}$$

Entonces, combinando (2.11) y (2.12) garantizamos que:

$$\pi(f^2(B_0)) = \pi(q_0r_0) \cup \pi(f(q_0c_0)). \tag{2.13}$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\pi(b_0q_0) \cap \pi(q_0r_0) = \pi(\{q_0\}); & \qquad &\pi(q_0r_0) \cap \pi(q_0r_0) = \pi(q_0r_0); \\ &\pi(b_0q_0) \cap \pi(f(q_0c_0)) = \emptyset. & &\pi(q_0r_0) \cap \pi(f(q_0c_0)) = \pi(\{r_0\}). \end{aligned}$$

Utilizando estas identidades así como (2.10) y (2.13) aseguramos que:

$$\pi(A_0) \cap \pi(f^2(B_0)) = \pi(\{q_0\}) \cup \pi(q_0r_0) \cup \pi(\{r_0\}) = \pi(q_0r_0) = \mathcal{C}. \tag{2.14}$$

Finalmente, las igualdades (2.9) y (2.14) verifican que $\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$. $\square$

Concluimos este capítulo resumiendo el trabajo hecho.

Corolario 2.22. *$\mathcal{C}$ es un R^3-continuo de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo propio de $\mathcal{X}$ contenido en $\mathcal{K}$ (Proposición 1.24). Por otro lado, $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto propio de $\mathcal{X}$ que contiene a $\mathcal{C}$ (Proposición 2.19) y $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de componentes de $\mathcal{U}$ (Proposición 2.20) tal que $\liminf_{\mathcal{X}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ (Proposición 2.21). Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es un R^3-continuo de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$. $\square$

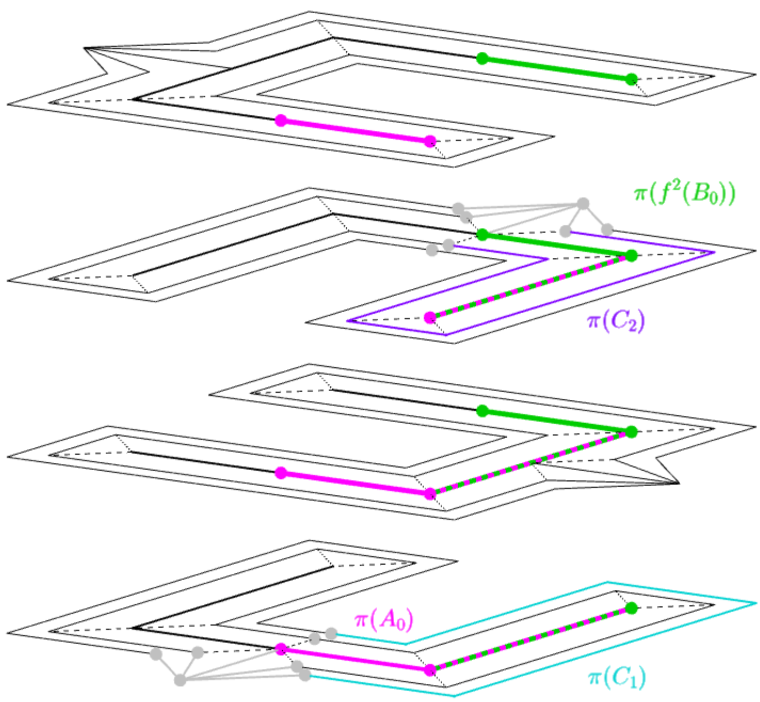

Figura 2.4: El límite inferior de la sucesión $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{X}$ está dado por la intersección de los conjuntos $\pi(A_0)$ y $\pi!(f^2(B_0))$.

Bibliografía

[1] Casarrubias, F., y Tamariz, A. *Elementos de Topología General.* No. 47 en Aportaciones Matemáticas. SMM-IMATE-UNAM, 2015.

[2] Charatonik, W. J. *R^i-Continua and Hyperspaces.* Topology and its Applications. *23* (1986), 207–216.

[3] Czuba, S. T. *R^i-Continua and Contractibility.* Proceedings of the International Conference on Geometric Topology (1980), 75–79.

[4] Dugundji, J. *Topology.* Allyn and Bacon, Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon Inc, 1966.

[5] Kuratowski, K. *Topology: Volume II.* No. v. 2. Elsevier Science, 2014.

[6] Nadler Jr., S. B. *Continuum Theory: An Introduction.* Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1992.

[7] Rhee, C., Kim, I., y Kim, R. *W-Regular Convergence of R^i-Continua.* Bull. Korean Math. Soc. *31*, 1 (1994), 105–113.

[8] Solis, C. *R^i-Conjuntos y Admisibilidad.* Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2013. `https://bit.ly/3ysz0P5`.