UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DERIVACIÓN DE MEDIDAS COMPLEJAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

José Alberto Meléndez Piña

TUTOR

Pierre Michel Bayard

Ciudad de México 2021

Índice

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resumen de la tesis

La tesis que proponemos tiene tres ejes principales: el primero es la presentación del *espacio de medidas complejas*, así como su caracterización a través del *espacio de funciones de variación acotada normalizado*; el segundo eje aborda el *teorema de Radon-Nikodym*, tanto su prueba como sus consecuencias; y el tercero se corresponde con la noción de *derivación de medidas complejas*, ora su utilidad para extender resultados clásicos en el marco de la integral de Lebesgue, ora como herramienta para el cálculo de la *derivada de Radon-Nikodym*.

Presentamos un desglose por sección de los temas discutidos.

§ 1.2 Motivamos la definición de la derivada de Radon-Nikodym.

§ 1.3 Abordamos la intuición detrás del concepto de la *derivada de una medida compleja*.

§ 2.1 Formalizamos la definición de *medida compleja* en un espacio medible X, además de la *variación total* asociada a tales medidas; después probamos que el conjunto de medidas complejas, $\mathbb{M}(X)$, puede ser dotado con la estructura de espacio de Banach.

§ 2.2 Exponemos las nociones de medida *absolútamente continua* y medidas *mutuamente sigulares*. Luego presentamos a la familia de subespacios $\mathbb{M}_\mu(X)$ (medidas absolutamente continuas con respecto a μ).

§ 3.1 Planteamos la definición de función *absolútamente continua* y función de *variación acotada*; luego mostramos que el conjunto de estas funciones conforma resp. los espacios vectoriales AC y BVN. Por último mostramos algunas relaciones entre estos dos espacios.

§ 4.1 Probamos el *teorema de representación polar* y el *teorema de descomposición de Hahn-Jordan*. Además definimos la *integral con respecto a una medida compleja*.

§ 4.2 Demostramos el *teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym*, así como el teorema de Radon-Nikodym.

§ 4.3 Discutimos algunas consecuencias del teorema de Radon-Nikodym, entre ellas destaca la clasificación de $\mathbb{M}_\mu(X)$ a través del espacio $L^1(\mu)$.

§ 4.4 Exponemos el *teorema de la dualidad* $L^p - L^q$, más aún planteamos una discusión sobre la equivalencia entre el teorema de Radon-Nikodym, el teorema de la dualidad $L^p - L^q$ y el teorema de representación de Riesz.

§ 5.1 Exploramos un hipotético teorema tipo fundamental del cálculo en el marco de la integral de Lebesgue.

§ 5.2 Definimos la *derivada simétrica* de una medida compleja.

§ 5.3 Establecemos la *función maximal de Hardy-Littlewood* y mostramos la relación de ésta con la derivada de Radon-Nikodym.

§ 5.4 Discutimos una aproximación numérica de la derivada de Radon-Nikodym para el espacio de medida $\mathbb{R}^n$; además mostramos que la derivada de una medida compleja es un concepto con independencia geométrica.

§ 5.5 Desarrollamos aplicaciones del trabajo previo: el *teorema fundamental del cálculo para integrales de Lebesgue*, el *teorema de diferenciación de funciones monótonas*, una clasificación de $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ por medio de BVN.

§ 5.6 Probamos el *teorema de cambio de variable para integrales de Lebesgue*.

1.2 Introducción al teorema de Radon-Nikodym

Hacia finales del siglo XIX la comunidad matemática resolvió construir una teoría de integración que aventajara los inconvenientes inmanentes con la integral de Riemann (*e.g.* pasos al límite bajo el signo de integral más allá de convergencia uniforme, tratar con integrales de funciones no acotadas o bien con funciones "patológicamente" discontinuas, etc.) y así mismo preservara la intuición detrás del cálculo de áreas; estas investigaciones conllevaron a la ubérrima Teoría de la Medida y consubstancial a ésta, la integral de Lebesgue (para una discusión histórica ver [Jahnke, 2003, cap. IX]).

Esta generalización de la integral (en cuanto a integrales propias se refiere) devino en un par de preguntas fundamentales: dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, se entiende por **integral indefinida** de f al mapeo F definido como $x \mapsto \int_{[a,x]} f\,dm$.

(i) ¿Podemos caracterizar a las funciones que aparecen como integrales indefinidas?

(ii) ¿Se valida la ecuación: $\frac{d}{dx}F = f$ *c.s.* ? Más aún, dada la función $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable con derivada integrable, ¿se satisface $\int_{[a,b]} g'\, dm = g(b) - g(a)$?

Se tiene respuestas satisfactorias a ambas preguntas: la primera corresponde a un caso particular de uno los resultados más representativos de la Teoría de la Medida, el teorema de Radon-Nikodym; la segunda se encuentra en la formulación del teorema fundamental del cálculo en el marco de la integral de Lebesgue. Expondremos en la presente sección la naturaleza del teorema de Radon-Nikodym; ya bien, convenimos en que la pregunta (ii) la retomaremos hasta el capítulo 5 (conviene advertir desde ahora que con respecto a la última parte de esta pregunta, es en general falsa la proposición).

Nota 1.1. La pareja $(X, \mathscr{M})$ designa espacio medible con σ-álgebra $\mathscr{M}$, y si en la discusión $\mathscr{M}$ se sobreentiende usaremos la forma corta X; más aún la letra X será reservada para denotar un genérico espacio medible, o bien un espacio de medida. En particular $\mathbb{R}^n$, visto como espacio medible, supone la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$, salvo cuando hagamos explícito que trabajamos con la σ-álgebra de Lebesgue $\mathscr{L}$; ya bien en ambos casos la medida m hace referencia a la medida de Lebesgue.

Con el fin de motivar el tema consideremos $\mathbb{M}^+(X)$ el **espacio de medidas positivas** en X, es decir el conjunto de funciones $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ que son σ-aditivas y mapean el vacío al cero; nos proponemos a investigar su estructura y para ello nos asimos del siguiente corolario del teorema de la convergencia monótona que extrajimos de [Rudin, 2006, § 1.2].

Proposición 1.1. *Sea μ una medida positiva en X, y sea f una función medible y no negativa; considérese el mapeo*

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathscr{M} &\to [0, \infty] \\ E &\mapsto \int_E f\, d\mu. \end{aligned}$$

Entonces μ_f es una medida positiva en X.

Nota 1.2. Como caso particular de la primera afirmación, si f es la función característica de A para algún $A \in \mathscr{M}$, *i.e.* $f = 1_A$, escribimos a la medida asociada como μ_A.

Nota 1.3. Los espacios vectoriales los supondremos sobre el campo $\mathbb{C}$, excepto claro si se dice explícitamente otra cosa; luego dependiendo de cual estructura queramos enfatizar, el espacio de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ será abreviado como $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ o bien L^p si en la discusión es fijo el espacio de medida.

Observamos que la restricción $f \geq 0$ asegura la positividad de la medida μ_f, sin embargo si se supone que $f \in L^1(\mu)$ se extiende fácilmente al resultado análogo: el mapeo μ_f es σ-aditivo (este simple pero importante resultado lo probamos en la proposición 2.2, mas por ahora no interviene en la discusión). En virtud de este reconocimiento se da fundamento a la siguiente definición.

Definición 1.1. Dada la medida positiva μ en X y dada $f \in L^1(\mu)$, considérese el mapeo

$$\begin{aligned} \lambda : \mathscr{M} &\to \mathbb{C} \\ E &\mapsto \int_E f\, d\mu. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se dice entonces que λ es la **integral indefinida** de f con respecto a μ y se denota como: $\lambda = \mu_f$, $d\lambda = f\, d\mu$ o también de forma sugestiva, $f = \dfrac{d\lambda}{d\mu}$; a la función f se le conoce como la **derivada de Radon-Nikodym** asociada a tal integral indefinida.

Notamos la condición necesaria: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$; esta es una indicación de la relación entre dos medidas, el concepto de medida *absolutamente continua* y en cierto sentido su contraparte *medidas singulares*; estas nociones las presentamos formalmente en la definición 2.5.

Antes de continuar en nuestra exposición, requerimos introducir más notación. Dado el espacio X, la expresión $\mathrm{Sp}(X)$ o de forma corta Sp, refiere al **espacio de funciones simples**, es decir funciones medibles cuyo rango es un conjunto finito de $\mathbb{C}$; esta definición equivale a la siguiente: sea $s \in \mathrm{Sp}$, entonces existe una sucesión finita de conjuntos medibles y disjuntos (A_i), y ciertos $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}. \tag{1.2}$$

La expresión (1.2) se le conoce como **representación estándar** de s. Si para todo índice i se cumple que $\mu(A_i)$ es finita, entonces se dice que s es una **función escalón**, en cuyo caso lo indicaremos como $\mathrm{Sp}(\mu)$. Es fácil ver que tanto Sp como $\mathrm{Sp}(\mu)$ son espacios vectoriales.

Incluso en esta parte liminar de nuestra presentación, podemos figurar el carácter de la derivada de Radon-Nikodym en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 1.1. Probaremos la siguiente afirmación: en un espacio discreto cualquier medida es derivable con respecto a la medida de conteo.

Dado el espacio medible $\big(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})\big)$, consideremos las medidas positivas μ y #, donde # es la medida de conteo. Sea $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tal que $A = (a_i)$; como el espacio es discreto se verifica

$$\mu(A) = \sum_i \mu\big(\{a_i\}\big).$$

Definimos al mapeo f como $x \mapsto \mu\big(\{x\}\big)$. Acontece por la definición de integral

$$\int_A f\, d\# = \sup_{\substack{0 \le s \le f \\ s \in \mathrm{Sp}}} \sum_i s(a_i)\, \#\big(\{a_i\}\big), \tag{1.3}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones en Sp menores o iguales a f; ya bien por la construcción de f se cumple

$$\sup_{\substack{0\leq s\leq f \\ s\in \mathrm{Sp}}} \sum_i s(a_i)\#\big(\{a_i\}\big) = \sum_i f(a_i) = \sum_i \mu\big(\{a_i\}\big) = \mu(A). \tag{1.4}$$

Así pues de (1.3) y (1.4) concluimos

$$f = \frac{d\mu}{d\#}.$$

Este argumento no sólo prueba la existencia de la derivada de Radon-Nikodym, sino nos enseña explícitamente cuál es.

□

El siguiente ejemplo propone mostrar el perfil de la derivada de Radon-Nikodym en un contexto que nos es familiar.

Ejemplo 1.2. Sea m la medida de Lebesgue en $[0,+\infty)$, y sea μ una medida positiva tal que verifica $d\mu = \frac{d\mu}{dm}\,dm$, donde la función $\frac{d\mu}{dm}$ es continua; entonces la aplicación $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $x\mapsto \mu([0,x))$ es diferenciable y se cumple

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d\mu}{dm}(x)\,.$$

En efecto, sea $h>0$ (para $h<0$ es análogo), por construcción se valida

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mu\big([0,x+h]\big)-\mu\big([0,x]\big)}{h} = \frac{\mu\big((x,x+h]\big)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[x,x+h]}\frac{d\mu}{dm}\,dm.$$

Por el teorema del valor medio para integrales se tiene que existe $\xi_h\in[x,x+h]$ tal que

$$\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]}\frac{d\mu}{dm}dm = \frac{1}{h}\,\frac{d\mu}{dm}(\xi_h)\,m\big([x,x+h]\big) = \frac{d\mu}{dm}(\xi_h).$$

Así pues, dada la continuidad de $\frac{d\mu}{dm}$ se concluye

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d\mu}{dm}(x)\,.$$

Por lo tanto la derivada de Radon-Nikodym coincide en este caso con la derivada usual de $\mathbb{R}$.

□

A la luz del ejemplo 1.1 cabe la heurística: si toda medida positiva fuera la integral indefinida con respecto a una cierta μ medida, entonces habríamos clasificado el espacio $\mathbb{M}^+(X)$ en términos de integrales indefinidas (con respecto a μ) de funciones medibles no negativas; no obstante los siguiente contraejemplos muestran que esto no es en general posible: ora porque falla la existencia de la derivada, ora porque se pierde unicidad.

Ejemplo 1.3. Consideremos al espacio medible $\mathbb{R}$, y sea δ_x la medida de Dirac (también llamada medida puntual de masa). Supongamos que μ es la integral indefinida para cierta función medible f con respecto de δ_x, es decir se valida la ecuación

$$d\mu = f\, d\delta_x. \tag{1.5}$$

Probaremos que $\mu = k\delta_x$, donde k es una constante que depende únicamente de x; en otras palabras, μ satisface la ecuación (1.5) si y sólo si μ es un múltiplo escalar de δ_x.

Sea $E \in \mathscr{B}$ y sea (E_n) partición de éste. Por definición de integral se cumple

$$\mu(E) = \int_E f\, d\delta_x = \sup_{\substack{0\le s\le f\\ s\in \mathrm{Sp}}} \sum_n s(x)\, \delta_x(E_n).$$

Luego por tratarse de la medida de Dirac, esta suma se reduce a

$$\sup_{\substack{0\le s\le f\\ s\in \mathrm{Sp}}} \sum_n s(x)\, \delta_x(E_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E, \\ f(x) & \text{si } x \in E\,. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\mu = f(x)\, \delta_x.$$

Ahora bien nos preguntamos por la posible solución (o soluciones) de la ecuación

$$d\delta_x = f\, d\mu, \tag{1.6}$$

donde f es una función medible por determinar. Es inmediato ver que el lado derecho de (1.6) es de hecho δ_x, ello implica que $f(x) \neq 0$. Supongamos inicialmente que $f \in \mathrm{Sp}$, luego existe una sucesión finita de conjuntos medibles y disjuntos (A_i) y ciertos números complejos (α_i) que validan la descomposición $f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$; por definición de integral impropia, para todo $E \in \mathscr{B}$ se cumple

$$\int_E f\, d\mu = \sum_i \alpha_i\, \mu(A_i \cap E) = \delta_x(E). \tag{1.7}$$

Como (A_i) es una partición de X, existe un único A_k elemento de la sucesión tal que $x \in A_k$; así pues al evaluar en la ecuación (1.7): $E = \{x\}$ y $E = A_i$ con $i \neq k$, inferimos que

$$\alpha_k\, \mu\big(\{x\}\big) = 1, \quad \alpha_i \mu\big(A_i\big) = 0.$$

Por lo tanto μ se trata esencialmente de la medida de Dirac, mientras que f no es única mas es superflua en relación a la integral indefinida. En particular concluimos que la medida de Dirac no se expresa como una integral indefinida con respecto a la medida de Lebesgue.
□

En el siguiente ejemplo se muestra que la unicidad se puede perder para medidas "patológicas", *i.e.* medidas que no son σ-finitas ni regulares.

Ejemplo 1.4. Sea X un conjunto no vacío y consideremos la σ-álgebra trivial $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$; en este espacio medible definimos la medida positiva ν como

$$\begin{aligned} \nu : \mathscr{T} &\to [0,\infty] \\ \emptyset &\mapsto 0 \\ X &\mapsto \infty . \end{aligned}$$

Es notorio que esta σ-álgebra no es σ-finita ni regular. Por construcción se satisface, para cualesquiera f y g funciones medibles no nulas

$$\int_E f\,d\nu = \int_E g\,d\nu = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset, \\ \infty & \text{si } E = X . \end{cases}$$

Es decir $\nu_f = \nu_g$.
□

El teorema de Radon-Nikodym precisa condiciones para garantizar que existe un única derivada de Radon-Nikodym, en otras palabras nos enseña el recíproco de la proposición 1.1 y será la trama del capítulo 4.

No obstante que podríamos explorar en la dirección de medidas positivas para trazar una variante del teorema de Radon-Nikodym, esta hipotética presentación sería innecesariamente restrictiva pues descartaríamos de nuestras consideraciones a las funciones integrables que no son exclusivamente positivas, *i.e.* suprimiríamos la estructura de espacio vectorial inmanente de esta familia de funciones; a esta objeción se abren dos caminos: las *medidas con signo* (que toman valores en los reales extendidos) o bien su homólogo finito, las *medidas reales* (cuyo codominio es $\mathbb{R}$), ora bien de forma un tanto más general, las medidas con valores en $\mathbb{C}$ y que son conocidas como *medidas complejas*; aunque ambas teorías son muy ricas y no equivalentes entre sí, elegimos las medidas complejas pues la estructura del campo nos será requerida en el capítulo 5 al tratar con ciertos límites de cocientes.

1.3 Heurística de la derivada de medidas complejas

Podemos ir más lejos con el ejemplo 1.2 y discutir la extensión de éste a $\mathbb{R}^n$; para precisar esta idea supondremos un resultado básico de la medida de Lebesgue y cuya prueba se puede encuentrar en [Rudin, 2006, cap. 2].

Proposición 1.2. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal, entonces para cualquier E elemento de la σ-álgebra de Lebesgue $\mathscr{L}$, se satisface*

$$m(T(E)) = |\det T|\, m(E). \tag{1.8}$$

Nota 1.4. Emplearemos la notación $b[x,r)$ para designar la bola abierta con centro en x y radio r, además de la expresión (no ortodoxa) $B(r) := m(b[x,r))$; ésta no causa conflicto porque la medida de la bola no depende del punto x y la dimensión del espacio es fija. Si precisamos indicar que la bola es cerrada, lo haremos mediante la variante $b[x,r]$.

La ecuación (1.8) nos induce a conjeturar: dada $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f\in\mathscr{C}^1$, puesto que f puede ser localmente aproximada por una transformación afín, cabe esperar que se valide la ecuación

$$\lim_{r\searrow 0}\frac{m\big(f(b[x,r))\big)}{B(r)}=|\det f'(x)|. \tag{1.9}$$

Por cuanto del ejemplo 1.2, presumimos que el mapeo $\det f'$ coincide con ser la derivada de Radon-Nikodym asociada a cierta integral indefinida con respecto de m. Este argumento intuitivo será formalizado en las proposiciones 5.6 y 5.10, pero nos gustaría resaltar la figura de derivada que impera en el lado izquierdo de (1.9): este es el caracter de la *derivada de medidas complejas* (*cf.* definición 5.4).

Capítulo 2

Espacio de medidas complejas

2.1 Medidas complejas

Nuestro primer objetivo en este capítulo se sitúa en formalizar la definición de medida compleja; de manera heurística podemos indicar que estas medidas se corresponden con la noción física de medir pero permitiendo tomar valores en $\mathbb{C}$ (en contraste con la familiaridad de las mediciones con valores en $\mathbb{R}^+$); si bien podría parecer a primera vista esta perspectiva "demasiada abstracta", podemos citar como paradigma de estas medidas las que provienen de integrales indefinidas de funciones en L^1 (proposición 2.2). Además, fuera del contexto propio del Análisis, las medidas complejas desempeñan un papel fundamental en la Física, particularmente en descripciones ondulatorias (como ejemplo de esta afirmación, en [Cohen, 2012] el autor explota la naturaleza de las medidas complejas en aras de establecer una lógica interna a la mecánica cuántica). Por último señalamos que las medidas positivas finitas (*e.g.* las medidas de probabilidad) son un caso particular de medidas complejas.

La intuición de medir dicta que, para que una $\mathbb{C}$-función μ se le considere una medida compleja en X, es necesario que ésta sea σ-aditiva; así pues consideremos (A_n) una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos, luego tal μ debe satisfacer (independientemente del órden de los términos de la sucesión) la ecuación

$$\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu\left(A_n\right).$$

Esta condición de independencia en el órden equivale a que bajo reordenaciones, la serie converge a un único valor; esta premisa se satisface precisamente cuando la serie converge absolutamente tal como señala el teorema de reordenaciones de Riemann. Estas observaciones se condensan en la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Sea (A_n) una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos; considérese* *la función* $\mu : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n). \tag{2.1}$$

Entonces la serie $\sum_n \mu(A_n)$ *converge absolutamente.*

Demostración. Dado que $\sum_n \mu(A_n)$ converge absolutamente si y sólo si la parte real e imaginaria $\sum_n \Re e\, \mu(A_n)$ y $\sum_n \Im m\, \mu(A_n)$ convergen absolutamente, el problema procede a probar que $\sum_n \Re e\, \mu(A_n)$ converge absolutamente, pues los argumentos para la parte imaginaria son análogos.

Considérse las siguientes sucesiones

$$A_n^+ = \begin{cases} A_n & \text{si } \Re e\, \mu(A_n) \geq 0, \\ \emptyset & \text{si } \Re e\, \mu(A_n) < 0; \end{cases}$$

y de igual forma

$$A_n^- = \begin{cases} A_n & \text{si } \Re e\, \mu(A_n) \leq 0, \\ \emptyset & \text{si } \Re e\, \mu(A_n) > 0. \end{cases}$$

Entonces se valida

$$\Re e\, \mu\left(\bigsqcup_n A_n^+\right) = \sum_n \Re e\, \mu\left(A_n^+\right), \text{ y también } \Re e\, \mu\left(\bigsqcup_n A_n^-\right) = \sum_n \Re e\, \mu\left(A_n^-\right).$$

Observamos que, correspondientemente a cada desigualdad, la parte izquierda es un números real (no extendido), luego las series respectivas son convergentes; ello que implica que, en relación a la ecuación (2.1), dichas series de términos positivos y negativos convergen, lo cual sucede si y sólo si la convergencia es absoluta.

■

Definición 2.1. Por una **descomposición** de un conjunto $A \in \mathscr{M}$, se entiende una sucesión (A_n) de conjuntos medibles y disjuntos que tienen por unión a A, es decir $\bigsqcup_n A_n = A$.

El mapeo $\nu : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$ se dice que es una **medida compleja** si para cualquier $A \in \mathscr{M}$ y una descomposición (A_n) del mismo (y por tanto toda descomposición) se valida la ecuación

$$\nu(A) = \sum_n \nu(A_n).$$

Si el codominio de ν es $\mathbb{R}$ se dice que ésta es una **medida real**.

Nota 2.1. Es fácil confundir el término *partición* por *descomposición*, mas no son sinónimos: se considera que partición aplica únicamente cuando (A_n) es una sucesión finita (ya bien en la caso de que ν sea una medida positiva, se pide adicionalmente que dichos conjuntos tengan ν-medida finita).

A razón de este paralaje convenimos en que toda función simple con respecto a una medida compleja ν es de hecho una función escalón, es decir $s \in \mathrm{Sp}(\nu)$ si y sólo si existe una partición (A_i) de X tal que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, donde $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Es usual en muchos libros que se agregue como hipótesis de ser medida compleja las condiciones: $\mu(\emptyset) = 0$ o la conclusión de la proposición 2.1: la primera es reiterativa pues basta ver que

$$\mu(X) = \mu(X \cup \emptyset) = \mu(X) + \mu(\emptyset),$$

y como $\mu(X) \in \mathbb{C}$, se sigue la afirmación (misma que no aplica para medidas positivas pues podría ser tal mapeo identicamente constante con valor ∞); por cuanto a la segunda no resulta conveniente pues ocasionalmente argumentaremos que cierto mapeo es medida mostrando que éste es contablemente aditivo, y no adicionalmente mostrando que éste es independiente del órden de la sucesión.

La siguiente proposición nos muestra una familia de ejemplos de medidas complejas: medidas que provienen de integrales indefinidas.

Proposición 2.2. *Dada μ una medida positiva en X, y dada $f \in L^1(\mu)$, considérese el mapeo*

$$\begin{aligned} \nu : \mathscr{M} &\to \mathbb{C} \\ E &\mapsto \int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

Luego ν es una medida compleja.

Demostración. La prueba se reduce a mostrar que ν es σ-aditivo, es decir que la siguiente ecuación se valida

$$\nu\left(\bigsqcup E_n\right) = \int_{\bigsqcup E_n} f \, d\mu = \sum_n \int_{E_n} f \, d\mu = \sum_n \nu(E_n);$$

pero ello se sigue de la linealidad de la integral así como del teorema de la convergencia dominada aplicado a la sucesión $\sum_{n=1}^{k} f \, 1_{E_n}$.

■

Definición 2.2. Dada μ medida positiva y ν medida compleja en X; se dice que ν es **derivable en el sentido de Radon-Nikodym con respecto a** μ si existe una única $f \in L^1(\mu)$ tal que ν se expresa como la integral indefinida de f con respecto a μ, es decir si satisface para cualquier $E \in \mathscr{M}$

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu. \tag{2.2}$$

Queremos enfatizar la diferencia entre las definiciones 1.1 y 2.2: aquella expresa que cierta función medible es la derivada de Radon-Nikodym asociada a una integral indefinida; en contraste esta definición pone el énfasis en la posible validez de la ecuación (2.2) que supone una medida compleja con respecto de una positiva; como vimos en los ejemplos 1.3 y 1.4 dicha condición puede fallar: ora porque no existe tal función ora porque no es única. Si bien podríamos extender la definición 2.2 en el caso que μ también sea medida compleja (toda vez que hayamos establecido formalmente la integral con respecto a una medida compleja), no requeriremos hacerlo pues no abordaremos un ejemplo no trivial de este fenómeno.

Es fácil ver que el conjunto de medidas complejas es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{\mathscr{M}}$ con las operaciones puntuales, es decir

$$(\alpha \nu_1 + \nu_2)(E) := \alpha \nu_1(E) + \nu_2(E), \quad E \in \mathscr{M}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Esta oberservación se condensa en la siguiente definición.

Definición 2.3. Al conjunto de medias complejas en X con la estructura de espacio vectorial indicada en (2.3) se le conoce como el **espacio de medidas complejas** en X, y se denota como $\mathbb{M}(X)$, o incluso por $\mathbb{M}$ si el espacio medible se sobreentiende en la discusión. De la misma manera al conjunto de medidas reales en X se nombra como el **espacio de medidas reales**, ya bien para diferenciarlo emplearemos la notación $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(X)$.

Observamos que los elementos del espacio $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(X)$ que toman únicamente valores positivos están en correspondencia, vía una homotecia, con las medidas de probabilidad: dada $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(X)$, la medida $\tilde{\mu} := \dfrac{1}{\mu(X)}\,\mu$ es una medida de probabilidad en X.

Tenemos el siguiente resultado básico de convergencia de la medida cuya prueba la omitimos pues es esencialmente la misma que en el caso de medidas positivas.

Proposición 2.3. *Dada ν medida compleja y dada (A_n) una sucesión creciente de conjuntos medibles tales que $\bigcup A_n = A$, entonces:*

$$\lim_n \nu(A_n) = \nu(A).$$

Similarmente dada $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles tales que $\bigcap B_n = B$, entonces:

$$\lim_n \nu(B_n) = \nu(B).$$

En ciernes del próximo teorema conviene tener presente el siguiente resultado, y cuya demostración se puede encontrar en [Rudin, 2006, cap. II].

Teorema 2.1. *Sea X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable, y sea μ una medida positiva de Borel sobre X tal que es finita en compactos, entonces μ es regular y σ-finita.*

Asociado a las medidas complejas, consideremos el siguiente mapeo: dada (A_n) descomposición de $A \in \mathscr{M}$, definimos

$$\begin{aligned} |\nu| : \mathscr{M} &\to [0,\infty] \\ A &\mapsto \sup_{(A_n)} \sum_n |\nu(A_n)|, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\sup_{(A_n)}$ indica que el supremo es tomado sobre todas las descomposiciones del conjunto A. El siguiente teorema expone el carácter de este mapeo.

Teorema 2.2. *Sea ν una medida compleja, entonces $|\nu|$ es una medida positiva finita.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathscr{M}$ tales que, $A \subset B$, entonces $|\nu|(A) \leq |\nu|(B)$; ello se sigue al aplicar la definición y de la siguiente observación: dada (A_n) una descomposición de A, la sucesión $(B - A, A_n)$ es una descomposición para B; en consecuencia a esta afirmación, si $|\nu|(B)$ es finito, también lo es $|\nu|(A)$.

Sea (b_n) una sucesión de números reales tal que $0 \leq b_n \leq |\nu|(A_n)$; por la propiedad de ser supremo se tiene que para toda $\dfrac{\varepsilon}{2^n} > 0$ existe una descomposición $(A_{nj})_j$ de A_n que satisface la desigualdad

$$|\nu|(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_j |\nu(A_{nj})| \text{ o bien: } b_n - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_j |\nu(A_{nj})|.$$

Así, sumando sobre n se llega a

$$\sum_n b_n - \varepsilon \leq \sum_{n,j} |\nu(A_{nj})| \leq |\nu|(A).$$

Luego tomando el sup sobre cada b_n y haciendo $\varepsilon \to 0$ se obtiene

$$\sum_n |\nu|(A_n) \leq |\nu|(A). \tag{2.5}$$

Por otro lado, sea B_j una descomposición de A, por la σ-aditividad aplicada a la descomposición $(A_n \cap B_j)_n$ de B_j se sigue

$$\sum_j |\nu(B_j)| = \sum_j \Big| \sum_n \nu(A_n \cap B_j) \Big| \leq \sum_{n,j} |\nu(A_n \cap B_j)| \leq \sum_n |\nu|(A_n),$$

y por la arbitrariedad de la partición B_j se cumple

$$|\nu|(A) \leq \sum_n |\nu|(A_n); \tag{2.6}$$

de las ecuaciones (2.5) y (2.6) se obtiene que $|\nu|$ es una medida positiva.

Aún falta probar que es finita: el argumento es por contradicción, la idea es construir una sucesión decreciente de conjuntos medibles tales que la norma de sus medidas tiende a infinito.

Supóngase que $|\nu|(X)$ no es finita, entonces para toda $N \in \mathbb{N}$ existe (X_n) descomposición de X tal que

$$\sum_n |\nu(X_n)| > N. \tag{2.7}$$

Sea $A_1 = X$, por el supuesto en la ecuación (2.7) exite $B \subset A_1$ con la propiedad

$$|\nu(B)| \geq |\nu(A_1)| + 2;$$

si $|\nu|(B) = \infty$ entonces se define $A_2 := B$, en caso contrario se cumple que $|\nu|(A_1 - B) = \infty$ y se define a $A_2 := A_1 - B$; por construcción se verifica

$$|\nu(A_2)| \geq |\nu(A_1) - \nu(B)| \geq |\nu(B)| - |\nu(A_1)| \geq 2.$$

Es claro que se pudo poner en lugar de 2 cualquier otro número, en partícular el asociado al índice n, por cuanto queda definida recursivamente la sucesión decreciente (A_n) que satisface $|\nu(A_n)| \geq n$, de modo que para $A = \bigcap A_n$ se cumple -vía la proposición 2.3- que

$$\nu(A) = \lim_n \nu(A_n). \tag{2.8}$$

Ello es un absurdo pues por el lado izquierdo de (2.8) se infiere que $|\nu(A)|$ es un número finito, mientras que por el lado derecho acontece que es infinito.

■

Corolario. *Dada μ medida compleja en el espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B})$, se cumple que $|\mu|$ es regular.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.1 a la medida positiva $|\mu|$.

■

Definición 2.4. Dada ν medida compleja, a la medida positiva asociada $|\nu|$ se le llama **variación total**; luego ν se dice que es una **medida regular** en tanto que $|\nu|$ lo sea.

Uno de nuestros objetivos en la tesis es estudiar la estructura de $\mathbb{M}(X)$; como vimos éste es un espacio vectorial, este hecho aunuado al siguiente resultado nos permite concluir que $\mathbb{M}(X)$ tiene estructura de un espacio de Banach, es decir un espacio vectorial normado y completo.

Proposición 2.4. *El espacio $\mathbb{M}(X)$ tiene estructura de espacio de Banach, cuya norma viene dada por la asignación*

$$\|\nu\| := |\nu|(X), \quad \nu \in \mathbb{M}(X).$$

Demostración. Primero probaremos que dicha asignación es en efecto una norma. Dadas $\lambda, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{M}(X)$ y dada $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple

$$\begin{aligned}\|\alpha\nu_1\| = |\alpha\nu_1|(X) = \sup \sum_n |\alpha\nu_1(X_n)| = \sup \sum_n |\alpha||\nu_1(X_n)| \\ = |\alpha| \sup \sum_n |\nu_1(X_n)| = |\alpha|\,|\nu_1|(X) = |\alpha|\,\|\nu_1\|.\end{aligned}$$

Luego se verifica la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned}\|\nu_1+\nu_2\| = |\nu_1+\nu_2|(X) = \sup\sum_n |(\nu_1+\nu_2)(X_n)| = \sup\sum_n |\nu_1(X_n)+\nu_2(X_n)| \\ \leq \sup\sum_n |\nu_1(X_n)| + \sup\sum_n |\nu_2(X_n)| = \|\nu_1\|+\|\nu_2\|.\end{aligned}$$

Esto prueba que el mapeo $\| \, \|$ es una seminorma; se afirma ahora que éste es no degenerado: supóngase que existe $\lambda \in \mathbb{M}(X)$ no identicamente cero cuya seminorma es cero, es decir λ verifica la siguiente igualdad

$$0 = \|\lambda\| = |\lambda|(X) = \sup\sum_n |\lambda(X_n)|. \tag{2.9}$$

Por el supuesto que λ es no nula existe $A \in \mathscr{M}$ tal que $\lambda(A) \neq 0$, pero el conjunto $\{A, X \setminus A\}$ forma una partición de X, en consecuencia

$$\sup\sum_n |\lambda(X_n)| \geq |\lambda(A)| + |\lambda(X \setminus A)| > 0,$$

lo que es una contradicción con (2.9). Por tanto $\| \, \|$ es una norma.

Ahora se probará que $\mathbb{M}$ es completo. Sea (ν_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{M}$, se afirma que para cualquier $A \in \mathscr{M}$ existe el siguiente límite

$$\lim_n \nu_n(A).$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis de ser (ν_n) una sucesión de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $k, m > N$, se cumple

$$\varepsilon > \|\nu_k - \nu_m\| = |\nu_k - \nu_m|(X) \geq |(\nu_k - \nu_m)(X)| = |\nu_k(X) - \nu_m(X)|;$$

luego por ser $\mathbb{C}$ un espacio métrico completo, el límite $\lim_n \nu_n(X)$ existe, más aún

$$|\nu_k(A) - \nu_m(A)| \leq |\nu_k - \nu_m|(A) \leq |\nu_k - \nu_m|(X) < \varepsilon,$$

donde la segunda desigualdad se sigue de la monotonía de $|\nu|$, y nuevamente por la completitud de $\mathbb{C}$ se tiene que está justificada la asignación

$$\nu(A) := \lim_n \nu_n(A).$$

Es claro además que $\nu(\emptyset) = 0$. Dada $(A_i)_i$ una descomposición de A, se cumple que para m, k suficientemente grandes y para todo $\varepsilon > 0$

$$|\nu_k(A) - \nu_m(A)| = \left| \sum_i \nu_k(A_i) - \nu_m(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y también

$$|\nu_m(A) - \nu(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo $k \to \infty$ acontece

$$\left| \sum_i \nu(A_i) - \nu_m(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por cuanto se verifica

$$\left| \sum_i \nu(A_i) - \nu(A) \right| \leq \left| \sum_i \nu(A_i) - \nu_m(A) \right| + |\nu_m(A) - \nu(A)| < \varepsilon.$$

Es decir, ν es σ-aditiva.

■

Nota 2.2. Hacemos notar que si λ es una medida positiva finita en X, por definición de variación total se sigue que $|\lambda| = \lambda$, *i.e.* al asociar a λ su variación total, ésta queda invariante; en particular se cumple $\|\lambda\| = \lambda(X)$.

2.2 Subespacios de $\mathbb{M}(X)$

Toda vez que hemos establecido que $\mathbb{M}(X)$ tiene estructura de espacio de Banach, nos dirigimos a exhibir algunos de sus subespacios.

Definición 2.5. Considérese X y sean μ medida positiva, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ medidas positivas o complejas. Se dice que λ es **absolutamente continua** con respecto a μ y se denota como: $\lambda \ll \mu$ si para toda $E \in \mathscr{M}$ se valida la implicación

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

A las medidas λ_1, λ_2 se les llama **mútuamente singulares** ya bien a λ_1 se le dice que es **sigular** con respecto a λ_2 y viceversa, y se representa como $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si existen $E, F \in \mathscr{M}, E \cap F = \emptyset, E \cup F = X$ tales que se cumple

$$\lambda_1(E) = \lambda_2(F) = 0.$$

Esta última condición se puede reformular diciendo que λ_1 está **concentrada** en $X - E$ y λ_2 está concentrada en $X - F$.

Ejemplo 2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto contable de $\mathbb{R}$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función con las siguientes condiciones: $f \restriction_{\mathbb{R} \setminus A} \equiv 0$ y $\operatorname{ran}(f)$ forma una sucesión de términos absolutamente sumables. Definimos el mapeo $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ como

$$\mu(E) := \sum_{x \in E \cap A} f(x), \quad E \in \mathscr{B}.$$

Observamos que el mapeo μ está bien definido pues la serie es absolútamente sumable, lo cual equivale a ser invariante bajo reordenaciones; más aún por la convergencia absoluta se verifica

$$\sum_{x \in \left(\cup_i E_i\right) \cap A} f(x) = \sum_i \sum_{x \in E_i \cap A} f(x).$$

Ello implica que μ es σ-aditiva, por cuanto concluimos que μ es una medida compleja. Notamos además que esta conclusión sigue siendo válida si f toma valores positivos posiblemente extendidos, es decir si se tiene que $\mathrm{codom}(f) = [0,\infty]$, en cuyo caso μ es una medida positiva (no necesariamente finita e incluso si existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = \infty$, entonces μ no es ni siquiera σ-finita).

Se mostrará ahora que μ y m son mútuamente singulares. Se observa que el conjunto $\{A, \mathbb{R}\setminus A\}$ forma una descomposición de $\mathbb{R}$, luego por construcción se satisface

$$m(A) = \mu(\mathbb{R}\setminus A) = 0.$$

Esta última afirmación se verifica en particular si para $x_0 \in A$, se define $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ para $x \neq x_0$ (medida de Dirac); o bien si consideramos el caso de medidas positivas y se tiene $f(x) = 1$ para toda $x \in A$ (medida de conteo). En conclusión la medida de Dirac (o una combinación lineal de éstas) y la medida de conteo concentrada en A corresponden a medidas singulares con respecto a la medida de Lebesgue. En el ejemplo 5.1 expondremos otra medida positiva que es singular con respecto a la medida de Lebesgue, pero con la propiedad de que no está concentrada en un conjunto contable.

Podemos generalizar la construcción pasada para medidas positivas a través de la definición de suma sobre conjuntos no numerables.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $f : A \to [0,\infty]$, definimos

$$\sum_{x\in A} f(x) := \sup\left\{ \sum_{x\in F} f(x) : F \subset A,\ F \text{ es finito} \right\}.$$

Es fácil ver que si $A = \mathbb{R}$ y $f \equiv 1$, entonces μ es de hecho la medida de conteo # en $\mathbb{R}$; notamos además que # no es σ-finita en este espacio medible, no obstante que se cumple $m \ll \#$. Ahora bien, para cualquier $s \in \mathrm{Sp}\big([0,1]\big)$ no nula acontece

$$\int_{[0,1]} s\, d\# = \infty. \tag{2.10}$$

Por el teorema de la convergencia monótona se deriva que la ecuación (2.10) es válida para cualquier función medible positiva no nula definida en $[0,1]$. En conclusión, la medida de Lebesgue no es derivable con respecto a la medida de conteo pese a que se satisface $m \ll \#$.
$\square$

El siguiente lema condensa las principales propiedades "aritméticas" de la definición 2.5.

Lema 2.1. *Dado X, sea (λ_n) una sucesión de medidas complejas y μ medida positiva; se tiene las siguientes implicaciones:*

(i) Si $\lambda_n \ll \mu$ para todon $\in \mathbb{N}$ y $\sum_n \lambda_n$ es medida, entonces $\sum_n \lambda_n \ll \mu$.

(ii) *Si* $\lambda_1 \ll \mu$ *y* $\lambda_2 \perp \mu$ *entonces* $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(iii) *Si* $\lambda \ll \mu$ *y* $\lambda \perp \mu$, *entonces* $\lambda = 0$.

(iv) $\lambda \ll \mu$ *si y sólo si* $|\lambda| \ll \mu$.

(v) *Si* $\lambda_1 \ll \lambda_2$ *y* $\lambda_2 \ll \mu$ *entonces* $\lambda_1 \ll \mu$.

(vi) *Si* $\lambda \ll \mu$, *para cualquier* $\alpha \in \mathbb{C}$ *se cumple* $(\alpha\lambda) \ll \mu$..

(vii) *Si* $\lambda_n \perp \mu$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\sum_n \lambda_n$ *es medida, entonces* $\sum_n \lambda_n \perp \mu$.

Demostración.

(i) Dado $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = 0$, por hipótesis se sigue que para toda n, $\lambda_n(E) = 0$, luego

$$\sum_n \lambda_n(E) = 0.$$

Aunque en general es falso que $\sum_n \lambda_n$ es una medida compleja (basta considerar una sucesión de medidas de Dirac), sí se tiene al menos que este resultado es válido para una suma finita.

(ii) Sea $E, F \in \mathscr{M}$ ajenos tales que $\lambda_2(F) = \mu(E) = 0$, luego, por ser λ_1 absolutamente continua con respecto a μ se tiene $\lambda_1(E) = 0$, es decir E, F satisfacen las condiciones donde λ_1, λ_2 son mútuamente singulares.

(iii) La hipótesis y el inciso anterior implican que $\lambda \perp \lambda$ de donde $\lambda = 0$.

(iv) Supóngase que $\mu(E) = 0$ y sea (E_n) una descomposición de E, entonces $\mu(E_n) = 0$ y como $\lambda \ll \mu$, $\lambda(E_n) = 0$ para toda n; por tanto $\sum |\lambda(E_n)| = 0$ entonces $|\lambda|(E) = 0$. El regreso es trivial.

(v, vi) Se sigue de la definición.

(vii) Sean $A_n, B_n \in \mathscr{M}$ tales que $A_n \cap B_n = \emptyset$ y se cumple que μ está concentrada en A_n mientras que λ_n está concentrada en B_n; luego considérese $A = \bigcup_n A_n$ y $B = \bigcap_n B_n$, es fácil ver que $X = A \sqcup B$, por lo tanto μ está concentrada en A y $\sum_n \lambda_n$ está concentrada en B.

■

Nota 2.3. Debido al inciso (iii) del lema precedente, se interpreta a las relaciones -absolutamente continua y mútuamente singular-, como condiciones opuestas.

El siguiente lema nos enseña una caracterización de la continuidad absoluta entre medidas, y será invocado en la prueba del teorema de Radon-Nikodym.

Lema 2.2. *Considérese* μ *una medida positiva y* λ *una medida compleja en* X*; las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(i) λ *es absolutamente continua con respecto a* μ, *es decir* $\lambda \ll \mu$.

(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $E \in \mathscr{M}$ que satisface $\mu(E) < \delta$ implica que $|\lambda(E)| < \varepsilon$.*

Demostración.

(ii $\Rightarrow$ i) Sea $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = 0$; dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe $\delta > 0$ que satisface

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow |\lambda(E)| < \varepsilon.$$

y por la arbitrariedad de ε se concluye $\lambda(E) = 0$.

(i $\Rightarrow$ ii) La prueba es por contradicción. Supóngase que (ii) es falso, entonces existe $\varepsilon > 0$ y $(E_n) \in \mathscr{M}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mu(E_n) < 2^{-n}$ pero $|\lambda(E_n)| \geq \varepsilon$, ya bien esta última desigualdad implica que $|\lambda|(E_n) \geq \varepsilon$. Se define

$$A_n := \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\,, \quad A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Así pues

$$\mu(A_n) = \mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n+1}.$$

Por construcción se verifica

$$A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots;$$

luego por la monotonía de la medida se cumple

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n) = 0.$$

Por otro lado

$$|\lambda|(A) = \lim_n |\lambda|(A_n) \geq \lim_n |\lambda|(E_n) \geq \varepsilon,$$

es decir $\mu(A) = 0$ y $|\lambda|(A) \neq 0$, en otras palabras no se cumple $|\lambda| \ll \mu$ pero ello contradice el lema 2.1 inciso (iv).

■

Corolario. *Dada $f \in L^1(\mu)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\int_E f\,d\mu\right| < \varepsilon$ siempre que $\mu(E) < \delta$.*

Demostración. Basta considerar la medida $\int_E f\,d\mu$, $E \in \mathscr{M}$, notar que ésta es absolutamente continua con respecto a μ y aplicar el lema 2.2.

■

Es interesante reparar en que la condición entre dos medidas que satisfacen ser absolutamente continuas cada una respecto a la otra (es decir dadas μ y λ medidas complejas tales que verifican $\lambda \ll \mu$ y también $\mu \ll \lambda$) establece una relación de equivalencia en $\mathbb{M}(X)$ (la transitividad se deriva del inciso (v) del lema 2.1); esta observación se condensa en la siguiente definición.

Definición 2.6. Dadas μ, λ medidas complejas o positivas en X, se dice que éstas son **mutuamente continuas** si: $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.

Ejemplo 2.2. Considérse $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, y sea $\lambda \in (0, \infty)$. Se define μ_λ la *medida de Poisson con parámetro* λ como

$$\mu_\lambda(A) := \sum_{j \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}, \quad A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}).$$

Es fácil ver que se validan las siguientes equivalencias

$$\mu_\lambda(A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow \#(A) = 0;$$

por tanto la medida de conteo es equivalente a la medida de Poisson.
$\square$

Proposición 2.5. *Sea* $\mu \in \mathbb{M}(X)$*, considérese* $\mathbb{M}_\mu(X) = \{\nu \in \mathbb{M}(X) : \nu \ll \mu\}$*; se afirma que éste es un subespacio cerrado de* $\mathbb{M}(X)$*.*

Demostración. Acontece de los incisos (i) y (vi) del lema 2.1 que $\mathbb{M}_\mu(X)$ es cerrado bajo la suma y la acción del campo; falta demostrar que éste es cerrado con respecto a la norma.

Sea $\lambda \in \mathbb{M}$ tal que $\text{dist}(\lambda, \mathbb{M}_\mu) = 0$, luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_0 \in \mathbb{M}_\mu$ tal que $\|\lambda_0 - \lambda\| < \varepsilon$; dado $A \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(A) = 0$, se sigue

$$|\lambda(A)| \leq |\lambda(A) - \lambda_0(A)| + |\lambda_0(A)| \leq |\lambda - \lambda_0|(A) < \varepsilon.$$

Por tanto $\lambda \ll \mu$, es decir $\lambda \in \mathbb{M}_\mu$.

$\blacksquare$

Definición 2.7. Dado $\mu \in \mathbb{M}(X)$, al conjunto $\{\nu \in \mathbb{M}(X) : \nu \ll \mu\}$ se le conoce como el **espacio de medidas absolutamente continuas respecto a** μ, y se denota por $\mathbb{M}_\mu(X)$.

Una consecuencia que derivaremos del teorema de Radon-Nikodym es la clasificación del espacio $\mathbb{M}_\mu(X)$ en términos de $L^1(\mu)$ (teorema 4.6); a razón de ello no le dedicaremos especial atención a esta familia de subespacios salvo por la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sean* μ, ν, *y* $\lambda \in \mathbb{M}(X)$ *tales que las medidas* μ *y* λ *son mutuamente continuas, y las medidas* μ, ν *mutamente singulares, entonces*

(i) $\mathbb{M}_\mu = \mathbb{M}_\lambda$.

(ii) $\mathbb{M}_\mu \cap \mathbb{M}_\nu = \{0\}$.

(iii) $L^\infty(\mu) = L^\infty(\nu)$.

Demostración.

(i) Se sigue del inciso (v) del lema 2.1 y la proposición 2.5.

(ii) Es consecuencia de los incisos (ii) y (iii) del lema 2.1.

(iii) El espacio $L^\infty(\mu)$ depende de la medida μ tan sólo en la relación que ésta determina el ideal de los conjuntos nulos; en consecuencia si μ y ν son equivalentes, entonces los ideales respectivos son iguales, y por lo tanto $L^\infty(\mu) = L^\infty(\nu)$.

■

Observamos que el inciso (i) de la proposición 2.6 sugiere partir el estudio de $\mathbb{M}(X)$ en clases de equivalencia inducida por la relación -medidas mútuamente equivalentes-. Por otro lado el inciso (ii) nos enseña que en $\mathbb{M}(X)$ existe una noción de ortogonalidad, pese a no postular que trata de un espacio Hilbert.

Capítulo 3

Espacio de funciones de variación acotada

3.1 Dos familias de funciones

El objetivo de este capítulo es introducir el conjunto de *funciones de variación acotada*; esta familia de funciones desempeña un papel fundamental en distintas áreas del Análisis, incluyendo la teoría de series de Fourier, la rectificación de curvas y por supuesto la teoría de integración; de hecho con maquinaria básica (el lema del sol naciente) en [Riesz and Nagy, 1956] se caracteriza a estas funciones como aquellas que tienen derivada (finita) salvo quizá en un conjunto nulo (*cf.* corolario de teorema 5.7). Ya bien el interés en nuestra exposición por este espacio de funciones radica en clasificar a $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ (*cf.* teorema 5.7).

En la siguiente definición presentamos dos clases de funciones: las funciones absolútamente continuas y las funciones de variación acotada. Tendremos que esperar hasta el final del capítulo para explorar las relaciones entre estas dos nociones (*cf.* proposición 3.3).

Definición 3.1. Dado $I=[a,b]$ un intervalo, la función $f: I \to \mathbb{C}$ se dice que es **absolutamente continua** en I si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon,$$

donde $[x_1,y_1]$, $[x_2,y_2], \ldots, [x_n,y_n]$ son intervalos disjuntos en I.

Dada la función $F: I \to \mathbb{C}$, sea

$$\mathscr{P}(a,x) = (t_0, t_1, \cdots, t_{n+1}), \tag{3.1}$$

una sucesión creciente y finita de puntos en el subintervalo (a,x), al mapeo

$$\begin{aligned} V_F : I &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \sup_{\mathscr{P}(a,x)} \sum_{i=0}^{n} |F(t_{i+1}) - F(t_i)| \end{aligned} \tag{3.2}$$

se le conoce como **variación** de F en I; más aún el supremo sobre $\mathscr{P}(a,b)$ en la ecuación (3.2) se le llama **variación total** de F y se denota como $V(F,a,b)$; si éste es finito (*i.e.* si $V_F(b) < \infty$) se dice entonces que F tiene **variación acotada** en I. El conjunto de funciones de variación acotada en I se donota como $BV(I)$.

Nota 3.1. Si el dominio de F es $\mathbb{R}$, la definición de absolutamente continua aplica sin más; ya bien para cualquier intervalo compacto $I = [a,b]$ está especificada la función $V_F \restriction_{[a,b]}$, luego notamos que V_F es creciente por lo que están precisados los límites $\lim_{x\to\pm\infty} V_F$; en virtud de ello extendemos estas definiciones para dominios no acotados haciendo $V_F(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} V_F(x)$, en cuyo caso abreviamos la notación: $BV := BV(\mathbb{R})$; como consecuencia de esto queda definido el conjunto de funciones de **variación acotada normalizado**

$$NBV := \{F \in BV : F \text{ es continua por la derecha y } V_F(-\infty) = 0\}.$$

Es inmediato ver que si $F \in BV$, se verifica $F_{\restriction_I} \in BV(I)$ para cualquier intervalo I; el recíproco de esta obervación es falso: basta considerar $F = id$; mas si $F \in BV(I)$ entonces la extensión $\tilde{F}$ de F a $\mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{F}(x) = F(a) \text{ si } x < a \text{ y } \tilde{F}(x) = F(b) \text{ si } x > b,$$

satiface $\tilde{F} \in BV$, razón por la cual no se pierde generalidad al concentrar el discurso en el espacio BV.

Observamos que la suma en la ecuación (3.2) aumenta (propiamente no decrece) si se agregan más puntos t_j a $\mathscr{P}(a,x)$ en la asociación (3.1); luego en caso de que a ó b son finitos y $(a,b) \subset \mathrm{Dom} F$ podemos suponer que $\mathscr{P}(a,x)$ verifica siempre que $t_0 = a$ y correspondientemente $t_{n+1} = x$; acontece de ello que la variación de F satisface ser *aditiva en intervalos*, es decir para todo $x \in (a,b)$ se valida:

$$V(F,a,b) = V(F,a,x) + V(F,x,b). \tag{3.3}$$

La ecuación (3.3) sugiere una correpondencia con $\mathbb{M}^+\big((a,b)\big)$ (*i.e.* medidas positivas finitas), no obstante deberemos esperar hasta la sección 5.5 para desarrollar esta perspectiva.

Las definiciones anteriores se extienden de manera directa cuando el codominio es un espacio de Banach, más aún si éste tiene dimensión finita los enunciados y las pruebas son, salvo notación, las mismas que derivaremos para $\mathbb{C}$, por esta razón no se pierde generalidad al concentrarnos en el caso complejo; conviene agregar que para dimensión infinita, aunque el discurso es análogo, se requiere un mayor cuidado (ver [Lang, 1993, cap. 10]).

Si bien las definiciones precedentes son bastante técnicas, la proposición 3.1 nos ayudará con la intuición; antes de exponerla conviene recordar la noción de *medida continua*.

Definición 3.2. Sea $(X,\mathscr{M})$ un espacio medible (no vacío) tal que $\{x\} \in \mathscr{M}$, para toda $x \in X$; se dice que la medida compleja o positiva μ en X es **continua** si verifica $\mu\big(\{x\}\big) = 0$ para cualquier x.

Ejemplo 3.1. Es fácil ver que para cualquier μ medida positiva en $\big(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N})\big)$ distinta de la medida nula, se cumple que μ no es continua.

Por otro lado consideremos al espacio $\mathbb{M}(\mathbb{R})$; es fácil ver que m es una medida continua, en contraste con δ_x (o de forma más general una combinación lineal de éstas). Si bien m y δ_x son medidas singulares entre sí, en el ejemplo 5.1 expondremos otra medida singular con respecto a la medida de Lebesgue, pero con la propiedad de que ésta es continua.
□

Proposición 3.1. *Dado* $(\mathbb{R}^+,\mathscr{B})$*, sean* m,μ *medidas positivas, donde* m *es la restricción de la medida de Lebesgue; considérese el mapeo* f *definido como* $x \mapsto \mu([0,x])$*; se afirma que*

(i) μ *es continua si y sólo si* f *es continua.*

(ii) $\mu \ll m$ *si y sólo si* f *es absolutamente continua.*

Demostración.

(i) La condición necesaria y suficiente se concluye de la siguiente igualdad: sea $x \in \mathbb{R}^+$ y sea (a_n) una sucesión de términos positivos tal que $a_n \to 0$, luego

$$\big|f(x) - f(x+a_n)\big| = \big|\mu\big([0,x]\big) - \mu\big([0,x+a_n]\big)\big| = \big|\mu\big((x,x+a_n]\big)\big|,$$

y por monotonía de la medida se concluye el resultado.

(ii) Supóngase que μ es absolutamente continua con respecto a m, sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$; por el lema 2.2 existe $\delta > 0$ tal que $\mu\big([a,b]\big) < \frac{\varepsilon}{n}$ siempre que $m([a,b]) < \delta$. Considérese $[x_1,y_1]$, $[x_2,y_2], \ldots$, $[x_n,y_n]$ intervalos disjuntos tales que $m\big([x_i,y_i]\big) < \delta$, donde $1 \le i \le n$; por la definición de f se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} \big|f(y_i) - f(x_i)\big| = \sum_{i=1}^{n} \mu\big((x_i,y_i]\big) \le n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Esto implica que f es absolutamente continua.

Supóngase ahora que f es absolutamente continua en el intervalo I; supóngase además que se verifica $m(E) < \varepsilon$, para algún $E \subset I$ y $\varepsilon > 0$ dado; por la regularidad de la medida de Lebesgue, existe $A \subset \mathbb{R}^+$ tal que es una unión finita de intervalos abiertos que cubren a E y satisface $m(E) < m(A) < \varepsilon$. Considérese entonces

$$A = (x_1, y_1) \sqcup (x_2, y_2) \sqcup \ldots \sqcup (x_n, y_n).$$

Por cuanto para $\delta = \varepsilon$ se verifica $m([x_i, y_i]) < \delta$, donde $1 \leq i \leq n$. Luego por la continuidad absoluta de f se sigue

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(y_i) - f(x_i) \right| = \sum_{i=1}^{n} \mu\big((x_i, y_i]\big) = \mu(A) < \varepsilon.$$

Así pues por el lema 2.2 se concluye $\mu \ll m$.

■

Incluimos a modo de ejemplo unas observaciones que resultarań de suma importancia.

Ejemplo 3.2.

(i) Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y acotada, entonces $F \in BV$, pues se cumple por la definición de variación

$$V_F(x) = F(x) - F(-\infty).$$

En particular, si $f \in BV$ y sea $I := (a, b)$ intervalo (quizá impropio), como V_f es creciente, entonces su variación total en I viene dada por: $V(f, a, b) = V_f(b) - V_f(a)$.

(ii) Si $F, G \in BV$, y $a, b \in \mathbb{C}$ entonces $aF + bG \in BV$; esto se sigue de la relación

$$\begin{aligned} V_{aF+bG}(x) &= \sup_{\mathscr{P}(a,x)} \sum_{i=0}^{n} |\big(aF + bG\big)(t_i) - \big(aF + bG\big)(t_{i-1})| \\ &\leq |a| \sup_{\mathscr{P}(a,x)} \sum_{i=0}^{n} |\big(F\big)(t_i) - \big(F\big)(t_{i-1})| + |b| \sup_{\mathscr{P}(a,x)} \sum_{i=0}^{n} |\big(G\big)(t_i) - \big(G\big)(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

En otras palabras BV es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, por cuanto NBV lo es tambień; más aún haciendo ajustes menores en la prueba podemos afirmar que se cumple el análogo para las funciones absolutamente continuas, explícitamente: el conjunto de funciones absolutamente continuas sobre $\mathbb{R}$ (o bien sobre un intervalo I) tienen estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, mismo que se denotará como AC (resp. $AC\big(I\big)$).

Esta observación tiene como consecuencia la caracterización

$$f \in AC \Leftrightarrow \Re e\, f, \Im m\, f \in AC \tag{3.4}$$

$$F \in BV \Leftrightarrow \Re e\, F, \Im m\, F \in BV, \tag{3.5}$$

que se sigue de las desigualdades: $|\Re e\, F|, |\Im m\, F| \leq |F| \leq |\Re e\, F| + |\Im m\, F|$; ello conlleva a unificar las consideraciones sobre el codominio real y complejo.

(iii) Si $g : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el intervalo acotado $I = (a,b)$ y además g' está acotada, entonces $g \in BV(I) \cap AC(I)$ pues por el teorema del valor medio para algún $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$ se sigue

$$\begin{aligned} V(g,a,b) = \sup_{\mathscr{P}(a,b)} \sum_{i=0}^{n} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| &= \sup_{\mathscr{P}(a,b)} \sum_{i=0}^{n} |g'(\xi_i)|\,|t_{i+1} - t_i| \\ &\leq \sup_{t\in I} |g'(t)|(b-a). \end{aligned}$$

(iv) Considérese la función

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Sea $\mathscr{P}_{N+1} = \left(\frac{2}{\pi(2(N+1)+1)}, \frac{2}{\pi(2N+1)}, \ldots, \frac{2}{\pi}\right)$ con $N \geq 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^{N} \left| f\Big(\frac{2}{\pi(2(i+1)+1)}\Big) - f\Big(\frac{2}{\pi(2i+1)}\Big) \right| = \sum_{i=0}^{N} \left| \frac{2}{\pi(2(i+1)+1)} + \frac{2}{\pi(2i+1)} \right|$$

lo que implica que $f \notin BV\big([0,1]\big)$.

(v) Supóngase que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz continua cuya constante de Lipschitz es $C > 0$, es decir f satisface que para todo $x, y \in [a,b]$, se verifica: $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$; probaremos que $f \in AC\big([a,b]\big)$.

Dados $[x_1,y_1], [x_2,y_2], \ldots, [x_n,y_n]$ intervalos disjuntos en $[a,b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| \leq C \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \varepsilon,$$

para cualesquiera intervalos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \varepsilon / C := \delta.$$

□

De los incisos (i) y (ii) del ejemplo 3.2 inferimos que la diferencia entre dos funciones crecientes y acotadas es una función de variación acotada, luego es natural preguntarse sobre el recíproco: ¿dada una función de variación acotada, ésta se puede expresar como la diferencia entre dos funciones crecientes y acotadas? La siguiente proposición resulve afirmativamente esta cuestión, pero requerimos antes de un lema.

Lema 3.1. *Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de variación acotada:*

(i) Las funciones $V_F + F$, y $V_F - F$ son crecientes.

(ii) Si F es absolutamente continua, entonces V_F, $V_F + F$, y $V_F - F$ también lo son.

(iii) $V_F(-\infty) = 0$.

(iv) Si F es continua por la derecha, también lo es V_F.

Demostración.

(i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de variación existe $\mathscr{P}(-\infty, x) = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = x$ con la propiedad

$$\sum_{i=0}^{N} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \geq V_F(x) - \varepsilon.$$

Más aún se verifica también por definición

$$V_F(y) \geq \sum_{i=0}^{N} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| + |F(y) - F(x)|.$$

Entonces se valida la desigualdad

$$\begin{aligned} V_F(y) \pm F(y) &\geq \sum_{i=0}^{N} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \ + |F(y) - F(x)| \pm \big(F(y) - F(x)\big) \pm F(x) \\ &\geq V_F(x) - \varepsilon \pm F(x). \end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de ε, se concluye $V_F(y) \pm F(y) \geq V_F(x) \pm F(x)$, es decir ambas funciones son crecientes.

(ii) En virtud de que AC es un espacio vectorial, la prueba se reduce a mostrar que $V_F \in AC$.

Para cualquier intervalo (a, b) se satisface

$$V_F(b) - V_F(a) = \sup_{\mathscr{P}(a,b)} \sum_{j=0}^{M} |F(x_{j+1}) - F(x_j)|. \tag{3.6}$$

Luego por la hipótesis de continuidad absoluta, el lado derecho de (3.6) se puede hacer arbitrariamente pequeño escogiendo a b suficientemente cercano de a, en otras palabras: dado $\varepsilon > 0$, sea δ asociada a dicho ε y a una sucesión disjunta de intervalos $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ tales que $\sum_{i=0}^{N}(b_i - a_i) < \delta$, se verifica

$$\sum_{i=1}^{N} V_F(b_i) - V_F(a_i) < \varepsilon;$$

lo que concluye (ii).

(iii) Dado $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, elíjase $x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{N} \left|F(x_{i+1}) - F(x_i)\right| \geq V_F(x) - \varepsilon.$$

Por definición se cumple

$$V_F(x) - V_F(x_0) \geq \sum_{i=0}^{N} \left|F(x_{i+1}) - F(x_i)\right|.$$

Luego para $y \leq x_0$ se tiene $V_F(y) \leq \varepsilon$, por cuanto $V(-\infty) = 0$.

(iv) Sea $\alpha := \inf_{t \searrow x} V_F(t) - V_F(x)$, dado $\varepsilon > 0$, elíjase $\delta > 0$ que satisface para todo $h \in (0, \delta)$,

$$\max\left\{\left|F(x+h) - F(x)\right|, \quad V_F(x+h) - \inf_{t \searrow x} V_F(t)\right\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Luego considérese $x_0 = x < x_1 < \cdots < x_{N+1} = x+h$ tal que

$$\sum_{i=0}^{N} \left|F(x_{i+1}) - F(x_i)\right| \geq \frac{3}{4}\big(V_F(x+h) - V_F(x)\big) \geq \frac{3}{4}\alpha,$$

por construcción se cumple

$$\sum_{i=1}^{N} \left|F(x_{i+1}) - F(x_i)\right| \geq \frac{3}{4}\alpha - \left|F(x_1) - F(x_0)\right| \geq \frac{3}{4}\alpha - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Análogamente se cumple para cierto $t_0 = x < t_1 < \cdots < t_{M+1} = x_1$

$$\sum_{j=0}^{M} \left|F(t_{j+1}) - F(t_j)\right| \geq \frac{3}{4}\big(V_F(x_1) - V_F(x)\big) \geq \frac{3}{4}\alpha.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{4} + \alpha &> \big(V_F(x+h) - \inf_{t \searrow x} V_F(t)\big) + \big(\inf_{t \searrow x} V_F(t) - V_F(x)\big) = V_F(x+h) - V_F(x) \\ &\geq \sum_{j=0}^{M} \left|F(t_{j+1}) - F(t_j)\right| + \sum_{i=1}^{N} \left|F(x_{i+1}) - F(x_i)\right| \geq \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{4}\varepsilon.\end{aligned}$$

Ello que implica que $\varepsilon > \alpha$ y por lo tanto $\alpha = 0$; esta condición sucede precisamente cuando V_F es continua por la derecha.

■

Nota 3.2. A la representación de F como la expresión: $\frac{1}{2}(V_F + F) - \frac{1}{2}(V_F - F)$ se le llama la **descomposición de Jordan** de la función F, y a los términos $\frac{1}{2}(V_F + F)$, $\frac{1}{2}(V_F - F)$ se les dice respectivamente la **variación positiva** y la **variación negativa** de F.

Proposición 3.2. *Una condición necesaria y suficiente para que una función* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sea de variación acotada es que se exprese como la diferencia entre dos funciones crecientes y acotadas.*

Demostración. La condición suficiente se sigue de los incisos (i) y (ii) del ejemplo 3.2. Luego por el lema 3.1 se tiene que $F=\frac{1}{2}(V_F+F)-\frac{1}{2}(V_F-F)$, donde cada miembro es una función creciente; en consecuencia basta probar que éstos son acotados.

Dados $x,y\in\mathbb{R}$ tal que $x<y$, por ser $V_F\pm F$ creciente se cumple

$$V_F(x)\pm F(x)\leq V_F(y)\pm F(y),$$

lo que es equivalente a

$$|F(y)-F(x)|\leq V_F(y)-V_F(x);$$

más aún dado que $F\in BV$, se verifica

$$V_F(y)-V_F(x)\leq V_F(\infty)-V_F(-\infty)<\infty.$$

Se infiere entonces que F y por tanto $V_F\pm F$ son funciones acotadas.

■

Corolario. *Si* $F\in BV$ *entonces para todo* $x\in\mathbb{R}$ *están definidos los límites laterales:* $\lim_{t\searrow x}F(t)$, $\lim_{t\nearrow x}F(t)$*, así como* $\lim_{x\to\pm\infty}F(x)$.

Demostración. Basta descomponer a F como la diferencia entre dos funciones crecientes $F=F_1-F_2$, y notar que sendos límites están definidos para F_j.

■

Ejemplo 3.3. A pesar de la proposición 3.2 podría parecer todavía arcana la intuición detrás del concepto de función de variación acotada (pues su definición es muy técnica), mas para atemperar esta situación motivaremos esta noción en términos geométricos.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, considéramos a la gráfica de f como un conjunto en $\mathbb{C}$, específicamente: $\mathrm{Graph}_f:=\{t+if(t):t\in[a,b]\}$; una poligonal a Graph_f es una unión finita de segmentos que unen al punto $t_k+if(t_k)$ con el punto $t_{k+1}+if(t_{k+1})$, $0\leq k\leq N$, donde $a=t_0<t_1<\cdots<t_{N+1}=b$; luego la longitud de Graph_f, denotada como $L(\mathrm{Graph}_f)$, se define como el supremo sobre las longitudes de todas las poligonales.

Sea $F(t)=t+if(t)$, aplicando las definiciones anteriores obtenemos que

$$L(\mathrm{Graph}_f)=V(F,a,b)$$

Luego si $V(F,a,b)$ es finita, se dice la que curva es *rectificable*.

El concepto de variación acotada extiende la noción de longitud de una curva (en el marco de la geometría elemental) en casos que no se garantiza la suavidad de la misma. □

En el inciso (ii) del lema 3.1 probamos que si $F \in AC$ entonces $V_F \in BV$; una cuestión relacionada es si se valida $F \in BV$, en otras palabras si $AC \subset BV$; la respuesta es en general negativa, es fácil ver que se cumple: $id \in AC$ pero id no es de variación acotada en $\mathbb{R}$; sin embargo la siguiente proposición encuentra condiciones que aseguran $F \in BV$. El enunciado recíproco $BV \subset AC$ será tratado en la proposición 5.9.

Proposición 3.3. *Si F es de absolutamente continua en el intervalo compacto $[a,b]$, entonces F tiene variación acotada en dicho intervalo.*

Demostración. Sea δ la correspondiente a la hipótesis $F \in AC\big([a,b]\big)$ para $\varepsilon = 1$, luego dada $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$, considérese la partición regular de $[a,b]$ de diámetro $\frac{1}{N}$, es decir

$$[a,b] = \bigsqcup_{i=0}^{N-1} \left[\frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N}(i+1)\right].$$

Luego para todo índice i la sucesión $x_0 = \frac{b-a}{N} i < x_1 < \cdots < x_{M+1} = \frac{b-a}{N}(i+1)$ satisface $\sum_{j=0}^{M} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| < 1$, de donde al tomar supremo sobre tales sucesiones se verifica

$$V\big(F, \frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N}(i+1)\big) \leq 1.$$

Luego como la variación es una función aditiva en intervalos se concluye

$$V\big(F, a, b\big) \leq N.$$

■

Capítulo 4

Teorema de Radon-Nikodym

4.1 Resultados previos

Uno de los resultados más representativos de la Teoría de la Medida lo constituye el teorema que le da título a este capítulo, y que como hemos adelantado establece condiciones necesarias y suficientes para que una medida ν se pueda representar como una integral indefinida de Lebesgue con respecto a una medida positiva μ, es decir condiciones que validen la ecuación $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ para una única $f \in L^1(\mu)$ y para cualquier conjunto medible E.

El objetivo de este capítulo es presentar la demostración del teorema de Radon-Nikodym, así como algunas de sus consecuencias; para este fin precisamos de un par de lemas así como de una definición elemental: la *integral con respecto a una medida compleja*; para este fin decidimos urdir nuestra exposición con la perspectiva de la *integral de Bochner* y no a través de una presentación tradicional por medio de la descomposición de Hahn-Jordan para medidas con signo; ello acarreó que la prueba fuera un tanto más larga, sin embargo este paralaje nos permite profundizar con mejores herramientas en el espacio $\mathbb{M}(X)$.

Lema 4.1 (Promedio cerrado)**.** *Sea μ medida positiva finita en X, $f \in L^1(X)$, y $S \subset \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado; considérese la media*

$$A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu, \quad E \in \mathscr{M}, \quad \mu(E) > 0.$$

Supóngase que se satisface $A_E(f) \in S$ para todo $E \in \mathscr{M}$ con medida positiva, entonces $f(x) \in S$ c.s.

Demostración. Es claro que basta considerar el caso $S \subsetneq \mathbb{C}$; sea $\alpha \in S^c$, como S^c es abierto entonces existe $r > 0$ tal que $D[a;r) \subset S^c$, más aún, dado que S^c es la unión contable de tales discos, el teorema se reduce a mostrar que $E = f^{-1}(D[a,r))$ tiene medida cero. Supóngase entonces lo contrario *i.e.* $\mu(E) > 0$, luego se verifica

$$|A_E(f) - \alpha| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f-\alpha)\,d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f-\alpha|\,d\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E r\,d\mu \leq r.$$

Por cuanto $A_E(f) \in S^c$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mu(E) = 0$.

■

Corolario. *Sea $f \in L^1(\mu)$ con μ medida positiva y finita, dado $r \in (0,\infty)$, si*

$$\left| \int_A f\, d\mu \right| \leq r\mu(A), \quad A \in \mathscr{M},$$

entonces $|f(x)| \leq r$ c.s.

Demostración. Considérese $b[0,r] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, éste conjunto es cerrado y se cumple

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu \in b[0,r], \quad A \in \mathscr{M}, \quad \mu(A) > 0.$$

Por el lema 4.1 se verifica la relación $|f(x)| \leq r$ salvo quizá en un conjunto nulo, y ello se da precisamente cuando $f(x) \in b[0,r]$ *c.s.*

■

Definición 4.1. Dada $\nu \in \mathbb{M}(X)$, sea $s \in \mathrm{Sp}(|\nu|)$ tal que tiene representación estándar $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ donde $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de X en conjuntos de $|\nu|$-medida finita. Se define la **integral de** s **función escalón** con respecto a la medida compleja ν, como

$$\int_X s\, d\nu := \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \nu(A_i).$$

Notamos que esta integral se puede interpretar como un funcional lineal en el espacio $\mathrm{Sp}(|\nu|)$, mismo que (en este contexto, no confundir con la notación de integral indefinida) se denotará por $d\nu$, es decir

$$d\nu : \mathrm{Sp}(|\nu|) \to \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Esta observación es el punto de partida del siguiente teorema.

Teorema 4.1 (Representación polar)**.** *Dada $\nu \in \mathbb{M}(X)$ no nula, existe una única funcion $h \in L^1(|\nu|)$ tal que $|h| = 1$ y satisface $h = \dfrac{d\nu}{d|\nu|}$.*

Demostración. La existencia y unicidad de h se consiguen del siguiente argumento: sea $s \in \mathrm{Sp}(|\nu|)$, por definición se satisface

$$\begin{aligned}\left| \int_X s\, d\nu \right| = \left| \sum_i^n \alpha_i\, \nu(A_i) \right| &\leq \sum_i^n |\alpha_i|\, |\nu(A_i)| \leq \sum_i^n |\alpha_i|\, |\nu|(A_i) \\ &= \int_X |s|\, d|\nu| \leq \|s\|_{L^2(|\nu|)} \|1_X\|_{L^2(|\nu|)},\end{aligned}$$

donde la última desiguladad se sigue de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz con la función 1_X; por tanto $d\nu$ es un funcional continuo actuando en el espacio $\mathrm{Sp}(|\nu|)$, más aún como $\mathrm{Sp}(|\nu|)$ es denso en $L^2(|\nu|)$, por el teorema de extensión de homomorfismos lineales se sigue que $d\nu$ puede ser extendido a un único funcional en $L^2(|\nu|)$, y se emplea la misma notación $d\nu$ para tal extensión.

Dado que $L^2(|\nu|)$ es un espacio de Hilbert, por el teorema de representación de Riesz existe un único $h \in L^2(|\nu|)$ tal que

$$d\nu = h\,d|\nu|. \tag{4.2}$$

En consecuencia para $f \in L^2(|\nu|)$ se tiene

$$d\nu(f) = \int_X f h\, d|\nu|.$$

Nótese además que $L^2(|\nu|) \subset L^1(|\nu|)$ por cuanto se verifica que $h \in L^1(|\nu|)$.

Resta probar que $|h| = 1$. Sea $r > 0$ y sea $S_r = \{x \in X : |h(x)| \leq r\}$, nótese que $S_r \in \mathscr{M}$; dada (A_n) una descomposición de S_r, se cumple

$$\begin{aligned}\sum_n |\nu(A_n)| = \sum_n \left| \int_X 1_{A_n} d\nu \right| = \sum_n \left| \int_X 1_{A_n} h\, d|\nu| \right| &\leq \sum_n \int_X 1_{A_n} |h| d|\nu| \\ &\leq \sum_n r|\nu|(A_n) = r|\nu|(S_r),\end{aligned}$$

por lo cual se valida

$$|\nu|(S_r) \leq r|\nu|(S_r).$$

Si $r < 1$ necesariamente $|\nu|(S_r) = 0$ pero se supuso que ν es no nula, en consecuencia basta considerar el caso $|h(x)| \geq 1$ para toda $x \in X$ salvo quizá en un conjunto nulo; luego la demostración se reduce a probar que $|h| \leq 1$ *c.s.*

Sea $A \in \mathscr{M}$, de la definición de h se sigue

$$\left| \int_X 1_A h\, d|\nu| \right| = \left| \int_X 1_A\, d\nu \right| = |\nu(A)| \leq |\nu|(A),$$

y por el corolario del lema 4.1 se concluye la demostración. ■

Nota 4.1. El nombre de representación polar viene de la analogía con la representación polar en $\mathbb{C}$.

Definición 4.2. Dada $\nu \in \mathbb{M}(X)$ y $f \in L^1(X)$; en virtud de la descomposición polar expresada en la ecuación (4.2), se define la **integral f con respecto a la medida compleja ν** como

$$\int_X f\, d\nu := \int_X f h\, d|\nu|.$$

El desarrollo de la integral a través de la descomposicón polar tiene el inconveniente de basarse en pruebas no contructivas (el teorema de representación de Riesz), lo que imposibilita el cálculo concreto de una integral con respecto a una medida compleja; sin embargo el teorema de descomposición de Hahn-Jordan nos permite reducir tal problema a un par de integrales con respecto de medidas positivas finitas (*cf.* ecuación (4.5)).

Teorema 4.2 (Descomposición de Hahn-Jordan)**.** *Sea ν una medida real en X, considérese*

$$\nu^{+} = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu), \quad \nu^{-} = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu). \tag{4.3}$$

(i) La expresión $\nu = \nu^{+} - \nu^{-}$ es una descomposición de ν como la diferencia de dos medidas positivas mutuamente singulares.

(ii) Si $\nu = \lambda_1 - \lambda_2$ donde λ_1, λ_2 son medidas positivas mutuamente singulares, i.e. si se tiene otra descomposición, entonces

$$\nu^{+} \leq \lambda_1, \quad \nu^{-} \leq \lambda_2.$$

Demostración. Es fácil ver que ν^{+}, ν^{-} son medidas positivas (el caso ν^{-} se sigue por la definición de $|\nu|$), luego basta demostrar que son mutuamente singulares *i.e.* que existen $A, B \in \mathscr{M}$ tales que $X = A \sqcup B$ y se satisface para cualquier $E \in \mathscr{M}$

$$\nu^{+}(E) = \nu(A \cap E), \quad \nu^{-} = -\nu(B \cap E).$$

Por el teorema de representación polar se sigue que existe $h \in L^1(\nu)$ tal que $|h| = 1$ y se cumple

$$d\nu = h\, d|\nu|; \tag{4.4}$$

en consecuencia h es una función real *c.s.* (y por lo tanto en todos lados redefiniendo en un conjunto nulo), así mismo h toma únicamente los valores 1 y -1; sea entonces

$$A = \{x \in X \mid h(x) = 1\}, \quad B = \{x \in X \mid h(x) = -1\}.$$

Dado que

$$\frac{1}{2}(1+h) = \begin{cases} h & \text{en } A \\ 0 & \text{en } B, \end{cases}$$

se tiene de (4.4) que para cualquier $E \in \mathscr{M}$

$$\begin{aligned} \nu^{+}(E) &= \int_E d\left(\frac{1}{2}(\nu + |\nu|)\right) = \int_E \frac{1}{2}(1+h)\, d|\nu| \\ &= \int_E 1_A h\, d|\nu| = \int_{E \cap A} d\nu = \nu(E \cap A). \end{aligned}$$

Luego como $\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu^{+}(E) - \nu^{-}(E)$ y cada uno de los sumandos es finito, se concluye: $\nu^{-} = -\nu(B \cap E)$. Esto prueba (i).

Para (ii) basta observar que $\nu \leq \lambda_1$ luego

$$\nu^{+}(E) = \nu(E \cap A) \leq \lambda_1(E \cap A) \leq \lambda_1(E).$$

El argumento es análogo para ν^{-}.

■

Nota 4.2. A las medidas ν^+, ν^- expresadas en (4.3) se les llama respectivamente **variación positiva** y **variación negativa** de ν; luego a la representación $\nu = \nu^+ - \nu^-$ se le conoce como la **descomposición de Jordan** de la medida ν y en virtud del inciso (ii) del teorema 4.2 acontece la propiedad de ser óptima.

Consideremos μ una medida compleja en X; dada la identificación de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ como espacios vectoriales, sabemos que a μ podemos descomponerla como $\mu = \Re e\,\mu + i\,\Im m\,\mu$, donde $\Re e\,\mu$ y $\Im m\,\mu$ son medidas reales en X, por cuanto el teorema 4.2 implica que μ puede ser escrita como

$$\mu = \Re e\,\mu^+ - \Re e\,\mu^- + i\,\Im m\,\mu^+ - i\,\Im m\,\mu^-, \tag{4.5}$$

de forma tal que cada sumando es una medida positiva finita; ello conlleva a que gran parte de la teoría de medidas complejas, e incluso medidas que toman valores en espacios vectoriales de dimensión finita, se reduce a consideraciones sobre medidas positivas finitas, no obstante en el capítulo 5 explotaremos el hecho de tener medidas con valores en $\mathbb{C}$.

4.2 Enunciado y prueba del teorema

La siguiente proposición es por muchos autores el teorema de Radon-Nikodym pues corresponde a la parte no trivial de las condiciones necesarias y suficientes para que una medida compleja o positiva se exprese como una integral indefinida (con respecto de una medida positiva dada). La idea de la demostración sigue el patrón de generalizar casos: primero se supone que se tienen medidas positivas finitas, luego se extiende a medidas σ-finitas y por último se aborda el caso complejo.

Teorema 4.3 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Considérese μ y λ medidas positivas σ-finitas, y ν una medida compleja en X.*

(i) Existe un único par de medidas σ-finitas λ_{ac}, λ_s en $\mathbb{M}$ tales que

$$\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_s, \quad \lambda_{ac} \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu. \tag{4.6}$$

El resultado análogo se tiene para ν, es decir

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s, \quad \nu_{ac} \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu. \tag{4.7}$$

(ii) Existe una única función medible h que satisface

$$d\lambda_{ac} = h\,d\mu. \tag{4.8}$$

Si λ se supone finita, entonces $h \in L^1(\mu)$.

(iii) Existe una única $f \in L^1(\mu)$ tal que

$$d\nu_{ac} = f\,d\mu. \tag{4.9}$$

Demostración. Para probar (i) y (ii) se supondrá inicialmente que μ, λ son medidas positivas finitas.

Defínase $\varphi := \lambda + \mu$, luego φ es una medida positiva finita en X lo que implica la contención $L^1(\varphi) \supset L^2(\varphi)$; además $f \in L^1(\lambda) \cap L^1(\mu)$ si y sólo si $f \in L^1(\varphi)$ pues se verifica

$$\int_X f\, d\varphi = \int_X f\, d\lambda + \int_X f\, d\mu. \tag{4.10}$$

Dada $f \in L^2(\varphi)$, se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_X f\, d\lambda\right| \leq \int_X |f|\, d\lambda \leq \int_X |f|\, d\varphi = \int_X |f|\, 1_X\, d\varphi \leq \left(\int_X |f|^2\, d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} (\varphi(X))^{\frac{1}{2}}.$$

Luego el mapeo

$$f \to \int_X f\, d\lambda$$

es un funcional continuo en $L^2(\varphi)$; por el teorema de representación de Riesz existe un único $g \in L^2(\varphi)$ que satisface

$$\int_X f\, d\lambda = \int_X fg\, d\varphi. \tag{4.11}$$

La ecuación (4.11) se cumple en particular para $f = 1_E$ con $E \in \mathscr{M}$ tal que $\varphi(E) > 0$ (nótese que esto se puede suponer debido a que si $\varphi(E) = 0$ para toda $E \in \mathscr{M}$ entonces $\mu, \lambda \equiv 0$ y el teorema se valida trivialmente), luego el lado izquierdo de (4.11) es $\lambda(E)$ y como $0 \leq \lambda \leq \varphi$ se obtiene

$$0 \leq \lambda(E) \leq \varphi(E),$$

o bien de manera equivalente

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g\, d\varphi \leq 1. \tag{4.12}$$

Por el lema del promedio cerrado (4.1) se satisface $g(x) \in [0,1]$ *c.s.*, ya bien sin pérdida de generalidad se puede suponer que $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ ya que esto no afecta la integral (4.12). Por cuanto de las ecuaciones (4.11) y (4.10), se valida

$$\int_X (1-g) f\, d\lambda = \int_X fg\, d\varphi - \int_X fg\, d\lambda = \int_X fg\, d\lambda + \int_X fg\, d\mu - \int_X fg\, d\lambda;$$

ello implica que

$$\int_X (1-g) f\, d\lambda = \int_X fg\, d\mu. \tag{4.13}$$

En virtud de esto se parte a X como

$$A = \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\}, \quad B = \{x \in X : g(x) = 1\}.$$

Se definen las siguientes medidas sobre X

$$\lambda_{ac}(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E); \quad E \in \mathscr{M}.$$

Es claro que estas medidas satisfacen: $\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_s$, $\lambda_{ac} \perp \lambda_s$; si se toma a $f = 1_B$ en (4.13) se obtiene

$$\int_X (1-g)\, 1_B \, d\lambda = \int_B (1-g)\, d\lambda = 0 = \int_B d\mu = \mu(B),$$

en consecuencia $\lambda_s \perp \mu$.

Sea $E \in \mathscr{M}$; luego como $L^1(\varphi) \supset L^q(\varphi)$ para todo $q > 1$, entonces el mapeo $f = (1+g+\cdots+g^n)1_E$ verifica que $f \in L^1(\varphi)$; así pues de (4.13) se deriva

$$\int_E (1-g)(1+g+\cdots+g^n)\, d\lambda = \int_E (1-g^{n+1})\, d\lambda = \int_E g(1+g+\cdots+g^n)\, d\mu. \tag{4.14}$$

Por construcción, para toda $x \in B$ se tiene $1 - g^n(x) = 0$, más aún por tratarse de una serie geométrica, para cualquier $x \in A$ acontece

$$g^{n+1}(x) \to 0,$$

donde la convergencia es monótona decreciente. En virtud de ello se validan las hipótesis del siguiente corolario del teorema de la convergencia monótona:

Sea $(f_n) : X \to [0,\infty]$ una sucesión de funciones medibles tales que

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots \geq 0,\ f_n \to f(x) \text{ puntualmente, y } f_1 \in L^1(\mu).$$

Entonces $f \in L^1(\mu)$ y se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ (para su prueba basta considerar $g_n = f_1 - f_n$ y dado que $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq f_1 - f$ basta aplicar el teorema de la convergencia monótona).

Por ello se infiere que, para cualquier $E \in \mathscr{M}$

$$\int_E (1-g^{n+1})\, d\lambda \to \lambda_{ac}(E). \tag{4.15}$$

Por otro lado la sucesión monótona de funciones: $g(1+g+\cdots+g^n)$, converge puntualmente a una función h (por el criterio de la serie geométrica), e invocando nuevamente el teorema de la convergencia monótona, se cumple

$$\int_E g(1+g+\cdots+g^n)\, d\mu \to \int_E h\, d\mu. \tag{4.16}$$

Luego de las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16) se sigue

$$\lambda_{ac}(E) = \int_E h\, d\mu, \quad E \in \mathscr{M}. \tag{4.17}$$

En particular si en la ecuación (4.17) se hace $E = X$, se obtiene que

$$h \in L^1(\mu), \tag{4.18}$$

ya que $\lambda_{ac}(X) < \infty$. Esto concluye la existencia de la derivada de Radon-Nikodym en el supuesto que las medidas μ, λ son positivas y finitas. Toda vez que hayamos establecido la existencia de la derivada de Radon-Nikodym para las disposiciones: -μ σ-finita y λ finita-, o bien -μ σ-finita y ν compleja-, se puede observar que el argumento dado en la deducción de (4.18) aplica sin más (sin embargo éste no válido el caso en que λ sea σ-finita, en general sólo se puede afirmar que h es una función medible).

Considérese ahora el caso: μ y λ son σ-finitas; por hipótesis X se expresa como una unión numerable de conjuntos disjuntos cuya medida con respecto a μ es finita, y al mismo tiempo X es una unión numerable de conjuntos disjuntos cuya medida con respecto a λ es finita; tomando sus intersecciones se garantiza que existe (X_n) descomposición de X con la propiedad

$$\mu(X_n), \lambda(X_n) < \infty.$$

Sean $\mu^n = \mu_{X_n}$, $\lambda^n = \lambda_{X_n}$ (esta notación se explica en la nota 1.2); por el argumento dado en la deducción de (4.17), para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que existen λ_s^n, h_n, tales que

$$\lambda_s^n \perp \mu, \qquad d\lambda^n = d\lambda_s^n + h_n \, d\mu^n. \tag{4.19}$$

Por construcción se tiene

$$\mu^n(X \setminus X_n) = \int_{X \setminus X_n} h_n \, d\mu^n = 0;$$

lo cual nos permite asumir que

$$h_n(X \setminus X_n) = 0,$$

por cuanto la siguiente función toma sólo valores reales positivos (y no así valores extendidos)

$$h := \sum_n h_n.$$

Se afirma que el siguiente mapeo

$$\lambda_s := \sum_n \lambda_s^n,$$

es una medida positiva σ-finita; dada $\big(E_i\big)$ una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos, en virtud de la proposción 2.1 se verifica

$$\lambda_s\big(\bigsqcup_i E_i\big) = \sum_n \lambda_s^n\big(\bigsqcup_i E_i\big) = \sum_{n,i} \lambda_s^n\big(E_i\big) = \sum_{i,n} \lambda_s^n\big(E_i\big) = \sum_i \lambda_s\big(E_i\big),$$

más aún de la ecuación (4.19) se cumple que λ_s es una medida σ-finita.

Estos razonamientos, aunado a la conclusión del lema 2.1 inciso (vii), prueban la existencia de (4.6) y (4.8); la unicidad de la función h acontece del lema básico: si $\int_E f d\mu = 0$ para $f \in L^1(\mu)$ y para toda $E \in \mathscr{M}$ entonces $f = 0$ *c.s.*

Se probará ahora la únicidad de esta descomposición, para ello invocaremos repetidamente varios de los incisos del lema 2.1 que serán referidos utilizando el número correspondiente.

Sean λ'_{ac}, λ'_s un par de medidas que satisfacen $\lambda_{ac} + \lambda_s = \lambda'_{ac} + \lambda'_s = \lambda$, entonces

$$\lambda'_{ac} - \lambda_{ac} = \lambda_s - \lambda'_s;$$

dado (i) (vi) y (vii) se sigue

$$(\lambda'_s - \lambda_s) \perp \mu, \quad (\lambda'_{ac} - \lambda_{ac}) \ll \mu,$$

pero ello implica que

$$(\lambda'_{ac} - \lambda_{ac}),\, (\lambda_s - \lambda'_s) \ll \mu, \quad (\lambda'_{ac} - \lambda_{ac}),\, (\lambda_s - \lambda'_s) \perp \mu;$$

luego de (iii) se sigue $\lambda'_{ac} - \lambda_{ac} = \lambda_s - \lambda'_s = 0$, y en conclusión

$$\lambda'_a = \lambda_a,\, \lambda'_s = \lambda_s.$$

Se observa además que los argumentos de unicidad valen igual para el caso complejo, así para terminar la partes (i) y (ii) del teorema, nos falta probar la validez de (4.7), pero ello se deriva a través la descomposición de Hahn-Jordan: dada la descomposición de ν como $\nu = \Re e\, \nu + \Im m\, \nu$, por el teorema 4.2 se cumple

$$\nu = \nu^+_{\Re e} - \nu^-_{\Re e} + \nu^+_{\Im m} - \nu^-_{\Im m};$$

luego se satisfacen las condiciones del caso positivo en sendas medidas positivas, así pues se verifica

$$\nu = \nu^+_{\Re e_{ac}} + \nu^+_{\Re e_s} - \nu^-_{\Re e_{ac}} - \nu^-_{\Re e_s} + \nu^+_{\Im m_{ac}} + \nu^+_{\Im m_s} - \nu^-_{\Im m_{ac}} - \nu^-_{\Im m_s}.$$

Separando las partes que son absolutamente continuas y singulares respectivamente, y nuevamente del lema 2.1 incisos (i) y (ii) se concluye la unicidad de la descomposición dicha en (4.7).

Por último se probará (iii); por la parte (ii) de la prueba se puede afirmar que existe una única $p \in L^1(\mu, \mathbb{R})$ tal que

$$d|\nu_{ac}| = p\, d\mu.$$

Por el teorema 4.1 acaece que existe $g \in L^1(|\nu_{ac}|)$ tal que

$$d\nu_{ac} = g\, d|\nu_{ac}| = p\, g\, d\mu;$$

ya bien si $f := p\, g$, entonces $d\nu_{ac} = f\, d\mu$, lo que concluye la validez de (4.9).

■

Nota 4.3. A la expresión $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ se le conoce como la **descomposición de Lebesgue de ν relativa a μ**.

Con respecto a la notación empleada en el teorema 4.3, en el caso en que λ no sea una medida positiva finita falla la conclusión $h \in L^1(X)$ (es fácil ver que h es integrable si y sólo si λ es finita); no obstante podemos afirmar que h satisface ser *localmente* $L^1(X)$, ello significa que para toda $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\int_{X_n} h\, d\mu < \infty$.

Queremos hacer notar que en la demostración que presentamos del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, para probar la existencia de la derivada de Radon-Nikodym invocamos al teorema de representación de Riesz (mismo que es no constructivo); a razón de este argumento a la demostración se le conoce como la *prueba de von Neumann*. La prueba de von Neumann tiene el inconveniente de ser no constructiva, luego yace el problema de buscar una identificación (en términos de funciones familiares) o bien un algoritmo para aproximar a la derivada de Radon-Nikodym (como el que se presenta en el ejemplo 1.1); no obstante que en el capítulo 5 resolveremos esta cuestión para el importante ejemplo $X = \mathbb{R}^n$ (teorema 5.4), desconocemos si existe un resultado análogo para el caso general. Esta importante discusión será ampleada al final del capítulo.

Teorema 4.4 (Radon-Nikodym)**.** *Dado el espacio de medida X con μ medida positiva σ-finita, y dado el mapeo $\nu : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$, los siguientes son equivalentes.*

(i) Existe $f \in L^1(\mu)$ tal que $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$

(ii) $\nu \in \mathbb{M}(X)$ y satisface $\nu \ll \mu$.

Demostración. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ se probó en la proposición 2.2, mientras que la proposición $(ii) \Rightarrow (i)$ se corresponde con el teorema 4.3.

■

Nota 4.4. Conviene recordar otras dos equivalencias presentadas corresp. en el inciso (iv) del lema 2.1 y en el lema 2.2.

En el ejemplo 1.3 podemos apreciar que la falla de una derivada de Radon-Nikodym puede ser explicada, a la luz del teorema 4.4, como razón de que la medida de Dirac es singular con respecto a la medida de Lebesgue; más aún el ejemplo 2.1 nos permite advertir que este teorema es óptimo en el sentido que no se generaliza (o al menos no de forma simple) para medidas que no satisfacen ser σ- finitas.

4.3 Corolarios

La siguiente proposición es un resultado previo al importante teorema 4.6.

Teorema 4.5. *Sea μ una medida positiva σ-finita en X y sea $f \in L^1(\mu)$, entonces*

$$\|\mu_f\| = \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Luego el mapeo

$$L^1(\mu) \to \mathbb{M}(X)$$
$$f \mapsto \mu_f,$$

es un monomorfismo isométrico.

Demostración. Sea (X_k) una descomposición de X; notamos que se valida

$$\|\mu_f\| = |\mu_f|(X) = \sup_{(X_k)} \sum_k \left| \int_{X_k} f\, d\mu \right| \leq \sup_{(X_k)} \sum_k \int_{X_k} |f|\, d\mu.$$

Luego por el teorema de la convergencia monótona se satisface

$$\sum_k \int_{X_k} |f|\, d\mu = \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Por tanto $\|\mu_f\| \leq \|f\|_{L^1(\mu)}$. Entonces basta probar la desigualdad contraria *i.e.* $\|f\|_{L^1(\mu)} \leq \|\mu_f\|$; se puede asumir que $\|f\|_{L^1(\mu)} > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $f \in L^1$ existe $A \in \mathscr{M}$ de μ-medida finita que cumple

$$\|f\|_{L^1(\mu)} - \varepsilon = \int_X |f|\, d\mu\ - \varepsilon < \int_A |f|\, d\mu = \sum_i \int_{A_i} |f|\, d\mu, \tag{4.20}$$

donde (A_i) es una descomposición arbitraria de A.

Por otro lado, el teorema de Egorov garantiza la existencia de una sucesión creciente de funciones escalón (k_n) que converge uniformemente a f en $A \setminus Z$, donde Z es un conjunto de medida arbitariamente pequeña; ello implica que para cualquier $\varepsilon > 0$ y $\tilde{f}$ representante de f, si $x \in A \setminus Z$ se verifica

$$|\tilde{f}(x) - k_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(A)}, \tag{4.21}$$

siempre que n sea suficientemente grande.

Dada (A_i) partición de A y dada k_n fija que satisface la ecuación (4.21), se define la función escalón $s = \sum_i \alpha_i\, \mu(A_i),\ \alpha_i \in \mathbb{C}$, como

$$s := \left(\sum_i 1_{A_i} \right) (k_n).$$

Por construcción se verifica

$$\sum_i \int_{A_i} |f|\, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} \left(|s| + \frac{\varepsilon}{\mu(A)} \right) d\mu = \sum_i \int_{A_i} |s|\, d\mu + \varepsilon. \tag{4.22}$$

Más aún

$$\sum_i \int_{A_i} |s|\, d\mu = \sum_i |\alpha_i|\, \mu(A_i) = \sum_i \left| \int_{A_i} s\, d\mu \right|. \tag{4.23}$$

Pero de (4.21) y de la definición de μ_f, se sigue

$$\sum_i \left| \int_{A_i} s\, d\mu \right| \leq \sum_i \left| \int_{A_i} f\, d\mu \right| + \varepsilon \leq \sum_i |\mu_f|(A_i) + \varepsilon. \tag{4.24}$$

Además de la positividad de la medida $|\mu_f|$ acontece

$$\sum_i |\mu_f|(A_i) \leq |\mu_f|(X). \tag{4.25}$$

Así pues de las desigualdades (4.20) a la (4.25) se concluye

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \leq |\mu_f|(X).$$

Por último, es claro que el mapeo $f \mapsto \mu_f$ es un morfismo lineal entre estos espacios, más del hecho que se preserva la norma, es decir que es una isometría, se deriva que es monomorfismo.

■

Corolario. *Sea μ una medida positiva σ-finita en X y sea $f \in L^1(\mu)$, se cumple*

$$d|\mu_f| = |f|\, d\mu.$$

Demostración. Sea $A \in \mathscr{M}$ y (A_n) una descomposición del mismo; considérese A_1 como subespacio medible de X; por el teorema 4.5 se satisface

$$|\mu_f|(A_1) = \int_{A_1} |f|\, d\mu.$$

Este resultado se extiende por linealidad para las funciones escalón, es decir se verifica

$$\int_A \Big(\sum_n \alpha_n 1_{A_n} \Big) d|\mu_f| = \int_A \Big(\sum_n \alpha_n 1_{A_n} \Big) |f|\, d\mu.$$

Ya bien el caso general

$$\int_E g\, d|\mu_f| = \int_E g |f|\, d\mu, \quad g \in L^1(|\mu_f|),$$

se sigue del teorema de la convergencia dominada.

■

Teorema 4.6. *Sea μ una medida σ- finita en $(X, \mathscr{M})$, entonces los espacios $L^1(\mu)$ y $\mathbb{M}_\mu(X)$ son isométricamente isomorfos.*

Demostración. Se sigue del teorema 4.5 que $f \mapsto \mu_f$ es monomorfismo isométrico, y del teorema 4.3 que éste es epimorfismo.

■

Presentamos la siguiente proposición que tiene como corolario una condición necesaria en la equivalencia de medidas.

Proposición 4.1. *Considérese μ, λ medidas postivas en X tal que μ es σ-finita; sea además $\nu \in \mathbb{M}(X)$; supóngase que estas medidas satisfacen*

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda,$$

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu.$$

Entonces se cumple

$$d\nu = \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) d\mu.$$

Demostración. Por hipótesis acontece $\nu \ll \lambda$ y también $\lambda \ll \mu$; luego del lema 2.1 inciso (v) se sigue $\nu \ll \mu$, además se satisfacen las hipótesis del teorema 4.3, por cuanto se valida la ecuación $d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$. Por otro lado se verifica para $h = 1_A$

$$\int_X h \, d\nu = \int_X h \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = \int_X h \left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) d\mu.$$

Por linealidad se valida la ecuación para h función escalón, y por el teorema de convergencia dominada se extiende aún más para $h \in L^1(\nu)$. Por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym se concluye el resultado.

■

Corolario. *Si $\mu, \lambda \in \mathbb{M}(X)$ son mutuamente continuas, entonces*

$$\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right) = 1 \quad \textit{c.s. con respecto a } \mu \textit{ ó } \lambda.$$

La proposición 4.1 tiene la reminiscencia de la regla de la cadena, más aún es fácil probar que bajo las hipótesis $\mu_1, \mu_2 \ll \mu_3,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, acontece

$$\frac{d(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)}{d\mu_3} = \alpha \frac{d\mu_1}{\mu_3} + \beta \frac{d\mu_2}{\mu_3}.$$

Pese a lo sugerente de estos resultados, la analogía con respecto al operador derivada no es directa, exponemos la siguiente razón: la multiplicación puntual no convierte a L^1 en un álgebra, por ejemplo consideremos el espacio $X = (0, 1]$ con la σ-álgebra de Borel; se prueba sin dificultad que la función f definida como $x \mapsto x^{-1/2}$, satisface ser integrable, sin embargo f^2 no lo es. En virtud de ello carece de sentido una regla de Leibniz vista como derivación en un álgebra. Si bien podríamos seguir explorando esta idea bajo la convolución, esta discusión va más allá del objetivo de la tesis.

4.4 Dualidad en espacios de Lebesgue

Los espacios de Lebesgue, o también llamados espacios L^p, ocupan un lugar destacado en el análisis; en esta sección expondremos un resultado icónico para esta familia de espacios: *el teorema de dualidad* $L^p - L^q$; este teorema nos muestra que en condiciones generales los espacios $L^q(\mu)$ y $(L^p(\mu))^*$, donde $p \in (1, \infty)$ y q es su exponente conjugado, son isométricamente isomorfos, más aún si se fortalecen las hipótesis se puede extender parcialmente este resultado para $p = 1$.

Nuestra demostración del teorema de dualidad $L^p - L^q$ se puede entender como una aplicación del teorema de Radon-Nikodym, no obstante como veremos en el ejemplo 4.2 estos dos teoremas son de hecho equivalentes.

En virtud de la descomposición de Hahn-Jordan (teorema 4.2) no perdemos generalidad si restringimos nuestras consideraciones (por el momento) a medidas positivas.

La siguiente definición la incluimos porque aliviará la notación en un par pruebas.

Definición 4.3. Dada f función medible, se define la **función signo** de f como

$$\operatorname{sgn} f := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si } f(x) = 0; \end{cases}$$

Es fácil convencerse de que sgn f es una función medible; luego se verifica

$$f = (\operatorname{sgn} f)|f|. \tag{4.26}$$

A la expresión $(\operatorname{sgn} f)|f|$ se le llama **descomposición polar** de f.

La siguiente proposición nos muestra que, para $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ el mapeo $g \mapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu$ es un funcional lineal continuo, pero de hecho nos dice mucho más. Para facilitar la lectura conviene recordar la siguiente definición.

Definición 4.4. Dada μ medida positiva en X; si para toda $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathscr{M}$ que satisface: $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$, se dice que μ es una medida **semiinfinita**.

Nota 4.5. Es claro que toda medida σ-finita es de hecho una medida semiinfinita, y además la contención es propia: basta ver que la medida de conteo # en $\mathbb{R}$ es semiinfinta pero no es σ-finita (*cf.* ejemplo 2.1).

Proposición 4.2. *Dada μ es una medida positiva en X, sea $p \in (1, \infty)$ y q su exponente dual, considérese*

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle_\mu : L^p(\mu) \times L^q(\mu) &\to \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu. \end{aligned} \tag{4.27}$$

(i) Se tiene que $\langle\, , \rangle_\mu$ es una forma sesquilineal continua tal que los núcleos izquierdo y derecho son triviales; más aún si la medida μ es σ-finita, se cumple lo propio para $p = 1, \infty$.

(ii) Si $1 \leq q < \infty$, el mapeo

$$\begin{aligned} \Psi : L^q &\to (L^p)^* \\ g &\mapsto \langle \cdot, g \rangle_\mu \end{aligned}$$

es un morfismo antilinear isométrico tal que

$$\|g\|_{L^q} = \|\langle \cdot, g\rangle_\mu\| = \sup\left(\left| \int_X f\bar{g}\, d\mu \right| : \|f\|_{L^p} = 1 \right). \tag{4.28}$$

Si μ es semiinfinita, el resultado sigue siendo válido también para $q = \infty$.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in L^p$; $g_1, g_2 \in L^q$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; de la linealidad de la integral se verifica

$$\begin{aligned} \langle \alpha f_1 + f_2, \beta g_1 + g_2 \rangle &= \int_X (\alpha f_1 + f_2)(\overline{\beta g_1 + g_2})\, d\mu \\ &= \alpha\bar{\beta}\langle f_1, g_1\rangle + \alpha\langle f_1, g_2\rangle + \bar{\beta}\langle f_2, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle, \end{aligned}$$

por tanto $\langle \, , \, \rangle_\mu$ es un mapeo sesquilinear, es decir lineal en la primera entrada y antilineal en la segunda; más aún de la monotonía de la integral y de la desigualdad de Hölder se sigue

$$|\langle f, g\rangle_\mu| \leq \|f\bar{g}\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}. \tag{4.29}$$

En consecuencia $\langle \, , \, \rangle_\mu$ es una forma sesquilinear continua; en particular si se fija a f o a g en la ecuación (4.27), acontece, correspondientemente, un funcional en L^p o en L^q.

Ahora bien para probar que los núcleos de tal forma son triviales basta argumentar para alguno de ellos pues cambiando p por q en el mapeo $\langle \, , \, \rangle_\mu$ se obtiene el resultado análogo.

Considérese $f \in L^p$ ortogonal a L^q, *i.e.* para cualquier $g \in L^q$, f satisface

$$\langle f, g\rangle_\mu = 0. \tag{4.30}$$

Ello implica que para cualquier $s \in \mathrm{Sp}(\mu)$ función escalón tal que $s \in L^q$, se cumple $\langle f, s\rangle_\mu = 0$; luego por linealidad de la integral se sigue $f \restriction_A = 0$ *c.s.* para toda $A \in \mathscr{M}$ que tenga medida finita. Por hipótesis se verifica que $\{x \in X : |f(x)|^p \neq 0\}$ es σ-finito, *i.e.* existe (X_n) descomposición de éste tal que para toda n, X_n tiene medida finita. Por cuanto del teorema de la convergencia monótona aplicado a $(f 1_{X_n})$, se tiene que $f = 0$ *c.s.*; además dado que las funciones escalón son densas en L^q, se concluye que si f satisface (4.30), entonces $f = 0$ *c.s.* El argumento: -las funciones escalón son densas en L^q-, es válido aun para $q = 1$, pero deja de funcionar si $q = \infty$; mas si μ es σ-finita, para cualquier $f \in L^\infty$ acontece que, para $A \in \mathscr{M}$ de medida finita, $f 1_A \in L^1(\mu)$ y aplicando el mismo razonamiento se corrobora que $f 1_A = 0$ *c.s.*, luego por la hipótesis de ser μ σ-finita, se deriva que $f = 0$ *c.s.* también en este caso. Ello concluye el inciso (i) de la prueba.

Dada $g \in L^q$, $g \neq 0$, la condición de igualdad en la desigualdad de Hölder sugiere considerar la siguiente función

$$f = \frac{|g|^{q-1} \text{sgn } g}{\|g\|_{L^p}^{q-1}}. \tag{4.31}$$

Nótese que si $q = 1$ la ecuación (4.31) se reduce a $f = \text{sgn } g$, en cuyo caso se valida $\|f\|_{L^\infty} = \|\text{sgn } g\|_{L^\infty} = 1$; además se infiere que $\int_X f\bar{g}\, d\mu = \|g\|_{L^1}$.

Por construcción se cumple

$$\|f\|_{L^p}^p = \frac{\int_X |g|^{(q-1)p}\, d\mu}{\|g\|_{L^q}^{(q-1)p}} = \frac{\int_X |g|^q\, d\mu}{\|g\|_{L^q}^q} = 1.$$

Entonces

$$\|\langle \cdot, g\rangle_\mu\| \geq \int_X f\bar{g}\, d\mu = \int_X \frac{|g|^{q-1}}{\|g\|_{L^p}^{q-1}} \text{sgn } g\, \bar{g}\, d\mu = \frac{\int_X |g|^q\, d\mu}{\|g\|_{L^q}^{q-1}} = \|g\|_{L^q}. \tag{4.32}$$

Por definición de norma en $(L^p)^*$, se tiene la igualdad precisamente en el supremo de las $f \in L^p$ tales que $\|f\|_{L^p} = 1$. Así de (4.29) y (4.32) se concluye (4.28).

Por último supóngase que μ es semiinfinita y considérese $g \in L^\infty$. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $A := \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$; por construcción se cumple $\mu(A) > 0$.

En virtud de que μ es semiinfinita existe $B \subset A$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$. Defínase $f := \dfrac{1_B \text{sgn } g}{\mu(B)}$, es inmediato ver que $\|f\|_{L^1} = 1$. Así pues

$$\|g\|_{L^\infty} - \varepsilon \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g|\, d\mu = \int_X f\bar{g}\, d\mu \leq \|\langle\, , g\rangle_\mu\|.$$

La última desigualdad se convierte en igualdad tomando el supremo sobre las $f \in L^1$ tales que $\|f\|_{L^p} = 1$; como ε es arbitrario, se concluye (4.28) y con ésta el inciso (ii) de la proposición.

■

El siguiente resultado es un recíproco parcial del pasado, mismo que será ampleado en el teorema 4.7.

Lema 4.2. *Sea μ una medida positiva semiinfinita en X y sean $p \in [1, \infty]$ y q su exponente conjugado; supóngase que se verifica: para g función medible, si $f \in Sp(\mu)$ implica $f\bar{g} \in L^1(\mu)$ y además el escalar*

$$M_q(g) = \sup\left\{ \left| \int_X f\bar{g}\, d\mu \right| : f \in Sp(\mu) \text{ y } \|f\|_{L^p} = 1 \right| \right\},$$

es finito, entonces $g \in L^q(\mu)$ y $M_q(g) = \|g\|_{L^q}$.

Demostración. Primero notamos que si f es una función medible y acotada que se anula en el complemento de un conjunto $E \in \mathscr{M}$ de medida finita y además $\|f\|_{L^p} = 1$, entonces

$$\Big|\int_X f\bar{g}\,d\mu\Big| \leq M_q(g). \tag{4.33}$$

En efecto: dado que $\mu(E) < \infty$ entonces existe, para cualquier q, una sucesión $(f_n) \in \mathrm{Sp}(\mu)^{\mathbb{N}}$ tal que $|f_n| \leq |f|$ (en particular éstas se anulan fuera de E también) y $f_n \to f$ *c.s.* De la desigualdad $|f_n| \leq \|f\|_{L^\infty} 1_E$ y dado que $1_E\bar{g} \in L^1$ se deriva $|f_n\bar{g}| \leq \|f\|_{L^\infty}|1_E g|$ además satisfacen las hipótesis del teorema de la convergencia dominada, en consecuencia

$$\Big|\int_X f\bar{g}\,d\mu\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\int_X f_n\bar{g}\,d\mu\Big| \leq M_q(g).$$

Supóngase ahora que $q < \infty$; dado $\varepsilon > 0$ considérese el conjunto

$$A = \{x \in X : |g(x)| > \varepsilon\};$$

se probará que $\mu(A) < \infty$.

El argumento es por reducción al absurdo: supóngase que $\mu(A) = \infty$ y sea $N \in \mathbb{N}$; luego por la hipótesis de ser semiinfinita existe $B \subset A$ tal que $N < \mu(B) < \infty$. Considérese primero el caso $q = 1$: se cumple $1_B \in \mathrm{Sp}(\mu)$, y además se satisface $\varepsilon\, 1_B < |g\, 1_B|$, por cuanto

$$\varepsilon\mu(B) = \int_X \varepsilon 1_B\,d\mu \leq \int_X |g1_B|\,d\mu < M_1(q) < \infty; \tag{4.34}$$

pero el lado izquierdo de (4.34) puede ser arbitrariamente grande lo que contradice el hecho que $M_1(g)$ es finito.

Ahora supóngase que $1 < q < \infty$, sea $f = \mu(B)^{-\frac{1}{p}} 1_B \operatorname{sgn}\tilde{g}$, donde $\tilde{g}$ es una función escalón tal que $g1_B \leq \tilde{g} \leq g1_B + \varepsilon 1_B$; por la definición de f se verifica que $\|f\|_{L^p} = 1$, por tanto

$$\varepsilon\mu(B)^{\frac{1}{q}} = \varepsilon\mu(B)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\mu(B)^{1/p}}\int_B |g|\,d\mu \leq \int_X f\bar{g}\,d\mu;$$

y nuevamente el lado izquierdo se puede hacer arbitrariamente grande mientras que el lado derecho está acotado: contradicción.

De estos argumentos se desprende que el conjunto

$$S_g = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$$

es σ-finito: basta considerar la sucesión de conjuntos tal que el n-ésimo término viene dado por: $A_n = \{x \in X : |g(x)| > \frac{1}{n}\}$, en otras palabras: $S_g = \bigcup_n A_n$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se verifica: $\mu(A_n) < \infty$. Sea $(g_{nk})_{nk} \in \mathrm{Sp}(\mu)$ tal que para toda n se cumple $(g_{nk})_k \to g1_{A_n}$ de manera creciente cuando $k \to \infty$, luego $g_n \to g$ puntualmente y además $|g_n| \leq |g|$. Dada $\tilde{g}$ una función escalón tal que $g1_{A_n} \leq \tilde{g} \leq g1_{A_n} + \frac{1}{n}1_{A_n}$, considérese

$$f_n = \frac{|g_n|^{q-1}\operatorname{sgn}\tilde{g}}{\|g_n\|_{L^q}^{q-1}};$$

nótese que

$$\|f\|_{L^p}^p = \frac{\int_X |g|^{(q-1)p}\, d\mu}{\|g\|_{L^q}^{(q-1)p}} = \frac{\int_X |g|^q\, d\mu}{\|g\|_{L^q}^q} = 1$$

y por el lema de Fatou aplicado a g_n se sigue

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^q} &\le \liminf \|g_n\|_{L^q} \le \liminf \int_X |f_n \bar{g}_n|\, d\mu \le \liminf \int_X |f_n \bar{g}|\, d\mu \\ &\le \liminf \int_X f_n \bar{g}\, d\mu \le M_q(g),\end{aligned}$$

en donde la última desigualdad se deriva de (4.33). Por tanto $g \in L^q$ y por la desigualdad de Hölder se concluye además $M_q(g) \le \|g\|_q$. Esto completa la prueba para el caso $q < \infty$.

Por último supóngase que $q = \infty$; dado $\varepsilon > 0$, considérse el conjunto

$$A = \{x \in X : |g(x)| \ge M_\infty(g) + \varepsilon\}.$$

Se afirma que A es nulo: supóngase lo contrario *i.e.* $0 < \mu(A)$, luego existe $B \subset A$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$, dada $f = \mu(B)^{-1} 1_B \operatorname{sgn} \bar{g}$ (con $\bar{g}$ definida como arriba), de nuevo se verifica que $\|f\|_{L^1} = 1$, entonces

$$\int_X f g\, d\mu \ge \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g|\, d\mu \ge M_\infty(g) + \varepsilon;$$

pero esto contradice (4.33). Por tanto $\|g\|_{L^\infty} \le M_\infty(g)$ y por la desigualdad de Hölder se tiene $M_\infty(g) \le \|g\|_{L^\infty}$.

■

El siguiente teorema completa la afirmación hecha al inicio de la sección: en condiciones generales los espacios $(L^p)^*$ y L^q con $p \in [1,\infty)$ son isométricamente isomorfos.

Teorema 4.7 (Dualidad $L^p - L^q$). *Dada μ una medida positiva en X y dado $p \in (1,\infty)$ y q su exponente conjugado, se afirma que el mapeo*

$$\begin{aligned} L^q(\mu) &\to (L^p(\mu))^* \\ g &\mapsto \langle \cdot, g \rangle_\mu, \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, g \rangle_\mu(f) := \int_X f \bar{g}\, d\mu$, es un isomorfismo isométrico. Si además μ se supone σ- finita, se verifica la misma conclusión para $p = 1$.

Demostración. Supóngase inicialmente que la medida μ es finita; nótese que en virtud de la proposición 4.2 basta demostrar que tal morfismo es de hecho sobreyectivo, es decir que para cualquier $\lambda \in (L^p(\mu))^*$ existe un $g \in L^q(\mu)$ tal que se satisface

$$\lambda(f) = \int_X f \bar{g}\, d\mu, \quad f \in L^p(\mu). \tag{4.35}$$

Considérese el mapeo

$$\begin{aligned} \nu : \mathscr{M} &\to \mathbb{C} \\ E &\mapsto \lambda(1_E). \end{aligned}$$

Se probará que $\nu \in \mathbb{M}$: dada (E_n) descomposición de E, luego $1_E = \sum_i 1_{E_i}$ donde la convergencia de la serie es con respecto a la norma L^p *i.e.*

$$\|1_E - \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}\|_{L^p} = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} 1_{E_i}\|_{L^p} = \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)^{1/p},$$

luego $\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)^{1/p} \to 0$, cuando $n \to \infty$ por el supuesto que μ es finita. Dado que λ es lineal y continua, entonces

$$\nu(\sqcup_i E_i) = \lambda(1_{\sqcup_i E_i}) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n+1} 1_{E_i}\right) + \lambda\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} 1_{E_i}\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} 1_{E_i}\right).$$

En consecuencia ν es una medida compleja. Si además $\mu(E) = 0$ se infiere que $1_E = 0$ como elemento de L^p, por lo cual $\nu(E) = 0$ *i.e.* $\nu \ll \mu$; por el teorema de Radon-Nokodym existe $\bar{g} \in L^1(\mu)$ tal que $d\nu = \bar{g}\,d\mu$, dicho de otra forma se satisface (4.35), para $f \in \mathrm{Sp}(\mu)$; adicionalmente es fácil ver que

$$\left|\int_X f\bar{g}\,d\mu\right| \leq \|\lambda\|\,\|f\|_{L^p};$$

por tanto se verifican las condiciones del lema 4.2, lo que establece dos cosas: $g \in L^q$, $\|g\|_{L^q} = \|\lambda\|$, y como $\mathrm{Sp}(\mu)$ es denso en L^p dicho funcional se puede extender de manera isométrica a L^p, es decir se tiene (4.35) para toda $f \in L^p$. Esto prueba el teorema para medidas positivas finitas.

Supóngase ahora que μ es σ-finita y sea $(E_n) \in \mathscr{M}^{\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos de medida finita que cubren a X; nótese que a través de los morfismos de inclusión se puede identificar a los espacios $L^p(E_n), L^q(E_n)$ con subespacios correspondientes a $L^p(X), L^q(X)$ de funciones que se anulan en el complemento de E_n; el argumento anterior para μ finita muestra que para $n \in \mathbb{N}$ arbitraria, existe una $g_n \in L^q(E_n)$ tal que $\lambda(f) = \int_{E_n} f\bar{g}_n\,d\mu,\ f \in L^p(E_n)$, y además

$$\|g_n\|_{L^q} = \|\lambda \restriction_{L^p(E_n)}\| \leq \|\lambda\|.$$

Como g_n es única módulo el ideal de conjuntos nulos relativo a μ, entonces $g_n = g_m \restriction_{E_n}$ cuando $n < m$, así mediante el límite puntual queda definida la función medible g, es decir

$$g_n \to g.$$

Por el teorema de la convergencia monótona se verifica

$$\|g\|_{L^q} = \lim_n \|g_n\|_{L^q} \leq \|\lambda\|.$$

Más aún por el teorema de la convergencia dominada se tiene que $f1_{E_n} \to f$ en la norma L^p; por tanto

$$\lambda(f) = \lim_n \lambda\left(f 1_{E_n}\right) = \lim_n \int_X f 1_{E_n} \bar{g}\, d\mu = \int_X f \bar{g}\, d\mu.$$

Esto prueba el caso en la medida μ es σ-finita.

Por último sea μ es una medida positiva, de la hipótesis $f \in L^p(X)$ se sigue que el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\},$$

es σ-finito. Por otro lado, para cualquier subconjunto σ-finito $E \subset X$ existe una única $g_E \in L^q(E)$ tal que se verifica (4.35) y $\|g_E\|_{L^q} \leq \|\lambda\|$. Se observa además que para toda $F \in \mathscr{M}$ tal que es σ- finita y además $E \subset F \subset X$, se satisface

$$g_E = g_F \upharpoonright_E \; c.s.$$

por cuanto $\|g_E\|_{L^q} \leq \|g_F\|_{L^q}$.

Sea

$$M = \sup\{\|g_E\|_{L^q} : E \subset X, \text{ con } E \text{ de medida } \sigma\text{-finita}\}.$$

Por construcción $M \leq \|\lambda\|$. Elíjase una sucesión (E_n) tal que $\|g_{E_n}\|_{L^q} \to M$, nótese además que el conjunto

$$F := \bigcup_n E_n,$$

es σ-finito, luego $\|g_{E_n}\|_{L^q} \leq \|g_F\|_{L^q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por cuanto se infiere que $M = \|g_F\|_{L^q}$.

Sea ahora $A \supset F$ tal que es σ-finito, se verifica

$$\int_A |g|^q\, d\mu \leq \int_A |g1_F|^q\, d\mu + \int_A |g1_{A\setminus F}|^q\, d\mu \leq M^q = \int_F |g|^q\, d\mu;$$

(nótese que aquí se utiliza la condición $q < \infty$) por tanto $g1_{A\setminus F} = 0$ y entonces $g_A = g_F$ *c.s.* Luego el conjunto

$$A = F \cup \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

es σ-finito. En conclusión se verifica la ecuación

$$\lambda(f) = \int_X f g_A\, d\mu = \int_X f g_F\, d\mu$$

y haciendo $g := g_F$ se satisface (4.35) en el caso general.

■

Corolario. *Para cualquier $p \in (1,\infty)$, el espacio $L^p(X)$ es reflexivo.*

En la discusión de la dualidad en espacios L^p hemos relegado el caso $p = \infty$, es decir ¿será $L^1 \to (L^\infty)^*$ es isomorfismo? Nuevamente por la proposición 4.2 esta pregunta se reduce a determinar si la forma sesquilinear encontrada es sobreyectiva; para estudiar esta cuestión presentamos el siguiente teorema que da una condición necesaria.

Teorema 4.8. *Dado V espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$, si V^* es separable entonces V es separable.*

Demostración. Como V^* es separable existe $A \subset V^*$ tal que es denso y numerable, luego sea $(f_i)_i$ una enumeración de A y considérese

$$F = \{f \in V^* \mid f = \sum_i^n \alpha_i f_i,\ \alpha_i \text{ con parte real e imaginaria racional y } f_i \in A\};$$

se observa que F es numerable pues es una unión numerable de conjuntos numerables; sea entonces $(f_n)_n$ una enumeración de éste, se puede suponer además que F no contiene al funcional 0, ya bien esta condición es equivalente a que $\|f_n\| > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la definición de norma de V^* existe para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $\varepsilon > 0$

$$x_n \in V \text{ tal que } \|x_n\| = 1 \text{ y } \|f_n\| - \varepsilon < |f_n x_n|;$$

en particular esto es válido para $\varepsilon = \frac{\|f_n\|}{2}$, entonces se contruye recursivamente la siguiente sucesion $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$

$$\|x_n\| = 1 \text{ y } \|f_n\| \leq 2|f_n x_n|. \tag{4.36}$$

Considérese entonces

$$Y = \{x \in V \mid x = \sum_i^n \alpha_i x_i,\ \alpha_i \text{ con partes racionales y } x_i \in (x_n)_n\}.$$

Se observa que Y es numerable, se afirma que además es denso en V *i.e.* $\bar{Y} = V$. La prueba se hará por contradicción, así supóngase que existe $z \in V$ tal que $z \notin \bar{Y}$, ello equivale a la condición

$$\operatorname{dist}(z, \bar{Y}) > 0.$$

Es claro que $z \neq 0$. Se define el mapeo

$$\begin{aligned} f : \bar{Y} \oplus \mathbb{C}z &\to \mathbb{C} \\ m + \lambda z &\mapsto \lambda. \end{aligned}$$

Es notorio que f es un funcional lineal que satisface $f(\overline{Y}) = 0$, $f(z) = 1$ y dado que se cumple para cualquier $y \in \overline{Y}$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{dist}(z, \overline{Y}) \leq \|z - \beta y\|,$$

se deriva en particular para $\beta = -\frac{|\alpha|}{|\alpha^2|}$

$$|\alpha|\mathrm{dist}(z,\overline{Y}) \leq \|\alpha z + y\|.$$

Por cuanto se cumple la desigualdad

$$|f(y+\alpha z)| = |\alpha| \leq \frac{\|\alpha z + y\|}{\mathrm{dist}(z,\overline{Y})}.$$

Es decir, f es continuo en $\overline{Y}$ y por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\tilde{f} \in V^*$ tal que $\tilde{f}(\overline{Y}) = 0$, $\tilde{f}(z) = 1$. En suma acontece que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |\tilde{f}z| \leq |(\tilde{f} - f_m)(z)| + |f_m z| &\leq \|\tilde{f} - f_m\| \, \|z\| + \|f_m\| \, \|z\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3\|z\|}\|z\| + 2|f_m x_m| \, \|z\|; \end{aligned}$$

mas por densidad de (f_n) y por (4.36) se satisface

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{3\|z\|}\|z\| + 2|f_m x_m| \, \|z\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2|(\tilde{f} - f_m)(x_m)| \, \|z\| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\|\tilde{f} - f_m\|\|z\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3\|z\|}\|z\| = \varepsilon \end{aligned}$$

En consequencia $|\tilde{f}(z)| = 0$, y en particular $|f(z)| = 0$, lo que contradice la construcción de f. Por lo tanto (x_m) es denso en V.

■

Ejemplo 4.1. En este ejemplo probaremos que l^1 no es isomorfo a $(l^\infty)^*$, es decir que existen funcionales en l^∞ que no se expresan como $\sum_n f_n \bar{g}_n$ donde $f \in l^\infty$ y $g \in l^1$; para este fin demostraremos que si $p \in (0,\infty)$ entonces l^p es separable mientras que l^∞ no lo es, de manera que, de existir tal isomorfismo entonces $l^1 \leftrightarrow (l^\infty)^*$ sería separable, lo que contradeciría el teorema anterior. La demostración de que l^1 es separable la prodríamos haber omitido pues bastaba notar que podemos dar una base de Schauder, sin embargo decidimos incluirla por considerarla ilustrativa.

(i) Si $0 < p < \infty$ entonces l^p es separable.

Sea $M \subset \mathrm{Sp}(\#)$ tal que M es conjunto de las sucesiones de la forma: $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, 0, 0, \ldots)$ donde $\eta_k \in \mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q}$; es claro que M es contable. Se afirma que M es denso en l^p. Sea $(x_k)_k$ en l^p, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2};$$

nótese que esto no se garantiza en el caso $p = \infty$. Luego, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que para cada x_k existe un racional η_k tal que

$$|x_k - \eta_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n}} \text{ o equivalentemente } |x_k - \eta_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n}.$$

Así
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - \eta_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$
Entonces si $y = (\eta_1, \ldots, \eta_k, 0, \ldots)$ se satisface
$$\|x-y\|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k - \eta_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p;$$
por lo cual
$$\|x-y\| < \varepsilon,$$
mostrándose así que M es denso en l^p, por cuanto l^p es separable.

(ii) Dada $\left(x_k^{(n)}\right)_n \in (l^\infty)^{\mathbb{N}}$, *i.e.* $\left(x_k^{(n)}\right) \in l^\infty$ para cada n, se define recursivamente (z_k) como
$$(z_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } \left|\left(x_k^{(k)}\right)\right| > 1, \\ \\ 2 \text{ si } \left|\left(x_k^{(k)}\right)\right| \leq 1. \end{cases}$$
Es claro que $(z_k) \in l^\infty$ ya bien para todo n se verifica $\|\left(x_k^{(n)}\right) - (z_k)\|_{l^\infty} \geq 1$, es decir $(z_k) \notin \overline{\left(x_k^{(n)}\right)}$, por tanto no existe un conjunto numerable denso en l^∞.

Como consecuente de este ejemplo obtenemos que el teorema 4.8 da una condición necesaria pero no suficiente: en efecto l^1 es separable mientras que $(l^1)^* \leftrightarrow l^\infty$ no lo es.
$\square$

Nos proponemos ahora presentar las ideas que justifican la afirmación hecha al principio de la sección: el teorema de dualidad $L^p - L^q$ y el teorema de Radon-Nikodym son proposiciones equivalentes.

Ejemplo 4.2. Supongamos el teorema de la dualidad $L^p - L^q$ es decir: dada μ una medida positiva σ-finita en X, $p \in [1,\infty)$ y $\varphi \in (L^p(\mu))^*$, entonces existe una única $g \in L^q(\mu)$ tal que
$$\varphi(f) = \int_X f\bar{g}\, d\mu, \quad f \in L^p(\mu). \tag{4.37}$$
Luego consideremos μ, ν medidas positivas finitas en X, afirmamos que se tiene la descomposición de Lebesgue: $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ donde $\nu_{ac} \ll \mu$ y $\nu_s \perp \mu$ de modo que se cumple la relación $d\nu_{ac} = h\, d\mu$ para una única función medible h .

Primero observamos que $\mu + \nu$ es una medida positiva y finita, más aún si $f \in L^1(\mu+\nu)$ entonces $f \in L^1(\nu)$. Luego el morfismo lineal
$$\lambda : L^1(\mu+\nu) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \int_X f\, d\nu$$

es un funcional continuo en $L^1(\mu+\nu)$: en efecto, se sigue de la desigualdad

$$|\lambda(f)| = \left|\int_X f\,d\nu\right| \leq \int_X |f|\,d\nu \leq \int_X |f|\,d\mu + \int_X |f|\,d\nu = \int_X |f|\,d(\mu+\nu)$$
$$= \|f\|_{L^1(\mu+\nu)}.$$

Por el teorema de la dualidad $L^p - L^q$ existe una única $g \in L^\infty(\mu+\nu)$ tal que

$$\int_X f\,d\nu = \int_X f\bar{g}\,d(\mu+\nu), \quad f \in L^1(\mu+\nu). \tag{4.38}$$

Dado que $(\mu+\nu)(X) < \infty$, se satisface $1_X \in L^1(\mu+\nu)$ y de (4.38) podemos inferir que la función medible g es real y no negativa. Tenemos además de la siguiente equivalencia

$$\int_X d\nu = \int_X g\,d(\mu+\nu) = \int_X g\,d\mu + \int_X g\,d\nu \Leftrightarrow \int_X (1-g)\,d\nu = \int_X g\,d\mu,$$

de donde deducimos que $0 \leq g \leq 1$ *c.s.* con respecto a μ y a ν.

Definimos

$$E = \{x \in X : g(x) = 1\}.$$

Es claro que E es medible, luego al evaluar $f = 1_E$ en la ecuación (4.38) derivamos que $\mu(E) = 0$; esta observación se puede reformular como sigue: dada la partición $X = E \sqcup (X\setminus E)$, por construcción se cumple $\mu(E) = 0$, $\nu_E(X\setminus E) = 0$, es decir $\nu_E \perp \mu$.

Estas estimaciones se sintetizan en la ecuación

$$\int_{X\setminus E} f(1-g)\,d\nu = \int_X fg\,d\mu,$$

de donde apreciamos que en el subespacio medible inducido X/E se valida la relación $d\nu_{X\setminus E} = \dfrac{g}{1-g}\,d\mu$, lo que muestra la existencia y unicidad de la derivada de Radon-Nikodym; además obtenemos que

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s$$

donde $\nu_{ac} = 1_{X\setminus E}\,\nu$, y la parte singular es $\nu_s = \nu_E$.

Podríamos extender este ejemplo para incluir medidas complejas tan sólo adaptando la prueba del teorema 4.3.
□

El teorema de representación de Riesz establece que los espacios de Hilbert son autoduales; la demostración “usual” de dicho teorema (por ejemplo la que se expone en [Folland, 1999, § 5.5]) explota dos propiedades inherentes de los espacios de Hilbert: la completitud como espacio métrico y la noción geométrica de complemento ortogonal, *i.e.* dado un subespacio cerrado M, se verifica que el subespacio cerrado

$M^{\perp}$ le es complementario (observamos que dicha noción no se tiene en espacios de Banach arbitrarios). Es interesante notar que el caso particular de $p = 2$ del teorema de dualidad $L^p - L^q$ se corresponde con el teorema de representación de Riesz (de hecho algunos autores se refieren al teorema de la dualidad $L^p - L^q$ como el *teorema de Riesz para* L^p), aunque esta variante del teorema de Riesz está limitada al contexto a los espacios de Lebesgue; ya bien esta restricción es superflua para espacios de Hilbert separables, pues como sabemos éstos son isométricamente isomorfos a l^2 [O'Searcoid, 2012, § 12.3].

El teorema de representación de Riesz fue la clave para garantizar la existencia de la derivada de Radon-Nikodym en la demostración 4.3; más aún en el argumento que presentamos del teorema 4.7, para mostrar la existencia de una función en L^q que represente a un funcional actuando en L^p invocamos al teorema de Radon-Nikodym. La unicidad en todos estos razonamientos fue establecida con propiedades elementales de la integral.

Es posible proyectar otra disposición de la equivalencia entre el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym y el teorema de dualidad $L^p - L^q$: si contamos con una prueba alternativa del teorema de Radon-Nikodym que no haga uso del teorema del teorema de representación de Riesz, entonces tendríamos como corolario el teorema de representación de Riesz; una prueba que satisface estas especulaciones se puede encontrar por ejemplo en [Halmos, 1950, § 31].

A estas circunnavegaciones sumamos que para cualquier espacio de medida Ω, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, es conocida una prueba geométrica del teorema de la dualidad $L^p - L^q$ basada en argumentos de convexidad uniforme y variacionales (y por supuesto independiente del teorema de Radon-Nikodym); dicha demostración se puede encontrar en [Adams and Fournier, 2003, p. 47].

Por lo tanto para subespacios medibles de $\mathbb{R}^n$ concluimos: el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, el teorema de la dualidad $L^p - L^q$ y el teorema de representación de Riesz son proposiciones equivalentes entre sí. No obstante una inspección de las demostraciones citadas nos enseña que ninguna de éstas es *computable*, es decir ninguna de éstas nos permite establecer un algoritmo para calcular la derivada de Radon-Nikodym f para una medida compleja μ absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue m; sin embargo en el teorema 5.4 resolveremos esta cuestión.

Capítulo 5

Derivación de Medidas Complejas

5.1 Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental de cálculo que se presenta en los cursos elementales consta de dos afirmaciones y formula una relación entre integrales y derivadas; de manera heurística se dice que éstas son operaciones inversas. Específicamente el resultado es el siguiente:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable.

(i) Si f es continua en $c \in [a,b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es diferenciable en ese punto y se cumple

$$F'(c) = f(c).$$

(ii) Si $f = g'$ para alguna función diferenciable entonces se verifica la siguiente igualdad

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Este resultado parcial suele distinguirse del otro nombrándolo el teorema de Barrow.

En este capítulo establecermos el teorema análogo para integrales de Lebesgue; conviene advertir desde ahora que el desarrollo de éste es más delicado, ello lo podemos advertir si proyectamos una versión heurística.

Conjetura. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medible.

(i') La función $F(x) = \int_{[a,x]} f\,dm$ es diferenciable salvo quizá en un conjunto nulo y se cumple

$$F' = f \ \ c.s. \tag{5.1}$$

(ii') Si $f = g'$ $c.s.$ para alguna función diferenciable tal que $g' \in L^1$, entonces se verifica la siguiente igualdad

$$\int_{[a,b]} f\,dm = g(b) - g(a). \tag{5.2}$$

Como veremos en el teorema 5.5, la primera parte de nuestra conjetura (i') es en efecto correcta, sin embargo la segunda parte es falsa como lo muestra el siguiente ejemplo. Antes de presentarlo conviene recordar una proposición básica sobre medidas positivas en $\mathbb{R}$ y cuya demostración se puede encontrar en [Folland, 1999, §1.5].

Teorema 5.1. *Considérese $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, sean $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y continuas por la derecha, entonces existe una única medida regular μ^F tal que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica $\mu^F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a)$; además $\mu^F = \mu^G$ si y sólo so $F - G$ es constante.*

De manera recíproca, si μ es una medida positiva regular, la función

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big((0,x]\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\mu\big((0,x]\big) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es creciente, continua por la derecha y se valida $\mu = \mu^F$.

Ejemplo 5.1. Vamos a discutir brevemente algunas características de la función conocida con el nombre pintoresco de *escalera del diablo* (o también llamada *función de Cantor*).

Sea (δ_n) una sucesión de reales tal que $1 = \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$, $\delta_n \to 0$; asociada a ésta construiremos recursivamente la siguiente familia de conjuntos: sea $E_0 = [0,1]$, luego E_{n+1} se define como la unión de todos los intervalos que se forman removiendo de cada parte conexa de E_n (notamos que hay 2^n de tales intervalos) un segmento centrado y abierto de longitud tal que los dos intervalos restantes tengan longitudes $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ (por ejemplo si $\delta_n = (2/3)^n$ obtenemos la construcción clásica del conjunto de Cantor); es fácil convencerse de que se satisface: $E_0 \supset E_1 \supset \cdots$, y además $m(E_n) = \delta_n$; consideremos entonces al conjunto límite

$$E = \bigcap_n E_n.$$

Notamos que E es nulo con respecto a la medida de Lebesgue; adicionalmente algunas características topológicas fáciles de probar son que E es un conjunto compacto, denso en ninguna parte y perfecto (*i.e.* contiene a sus puntos de acumulación).

Subordinada a la familia (E_n), definimos la sucesión de funciones

$$g_n = \delta_n^{-1} 1_{E_n} \;\text{ y }\; f_n(x) = \int_{[0,x]} g_n\,dm.$$

Observamos que para cada n se cumple

$$f_n(0) = \int_{[0,0]} \delta_n^{-1} 1_{E_n}\, dm = 0, \quad f_n(1) = \int_{[0,1]} \delta_n^{-1} 1_{E_n}\, dm = 1.$$

Por costrucción tenemos además que f_n es mónotona creciente, más aún toma un valor constante en cada conexo del complemento de E_n (pues vista a f_n como medida, en estos intervalos no se está sumando nada); en contraparte, si I es uno de los 2^n intervalos que componen a E_n, se verifica la igualdad

$$\int_I g_{n+1}\, dm = \delta_{n+1}^{-1} \int_{I \cap E_{n+1}} dm = 2(\delta_{n+1}^{-1})(2^{-n-1}\delta_{n+1}) = 2^{-n} = \int_I g_n\, dm. \tag{5.3}$$

Luego si $x \in [0,1] \setminus E_n$, como $E_{n+1} \subset E_n$, entonces $x \notin E_{n+1}$. Se infiere de (5.3) que

$$f_{n+1}(x) = f_n(x), \qquad x \in [0,1] \setminus E_n.$$

Por cuanto f_n y f_{n+1} difieren en dos intervalos de longitud menor a 2^{-n}, es decir

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \int_{[0,x]} |g_{n+1} - g_n|\, dm < 2^{-n+1}, \qquad x \in E_n.$$

Por lo tanto (f_n) converge uniformemente a una función continua y monótona creciente c (llamada **escalera del diablo**) tal que $\mathsf{c}(0) = 0$, $\mathsf{c}(1) = 1$ lo que implica que $\mathsf{c} \in L^1([0,1])$, y como c es constante en $[0,1] \setminus E$ entonces c' existe en tal conjunto y $\mathsf{c}' = 0$ *c.s.* No obstante

$$\int_{[0,1]} \mathsf{c}'\, dm \neq \mathsf{c}(1) - \mathsf{c}(0).$$

Del teorema 5.1 se garantiza que existe una única medida positiva μ_{c} (referida como la **medida de Cantor**) tal que $\mu_{\mathsf{c}}((a,b]) = \mathsf{c}(b) - \mathsf{c}(a)$ para cualesquiera $a, b \in [0,1]$. En suma: de la ecuación (5.3), del hecho que E_n está formado por 2^n intervalos disjuntos y de la continuidad por abajo de la medida, concluimos que $\mu_{\mathsf{c}}(E) = 1$, lo implica que μ_{c} no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue; más aún $\mu_{\mathsf{c}} \perp m$, ya que $[0,1] = E \sqcup ([0,1] \setminus E)$ y $m(E) = 0$, $\mu_{\mathsf{c}}([0,1] \setminus E) = 0$, esto último se sigue invocando nuevamente la continuidad por abajo de la medida.
$\square$

En contraparte de la escalera del diablo, conviene recordar lo que aprendimos del ejemplo 1.2: existe una familia de funciones medibles, cuya continuidad es “no patológica”, tales que verifican la ecuación (5.2); ello implica que nuestra búsqueda de condiciones necesarias y suficientes tiene sentido. Ya bien si f es continua en todos lados tenemos la siguiente proposición.

Lema 5.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que f es continua en $b[x, r_0)$, luego*

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f - f(x)|\, dm = 0. \tag{5.4}$$

Demostración. Nótese que $|f - f(x)|$ es una función continua en $b[x, r_0)$, luego para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ siempre que $y \in b[x, \delta)$. Sea $0 < r < \delta$, por la monotonía de la integral se cumple

$$0 \leq \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f - f(x)|\, dm \leq \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} \varepsilon\, dm = \varepsilon.$$

Lo que concluye la ecuación (5.4). ■

Supongamos que se tienen las condiciones (ii') de nuestra conjetura y para cierta función positiva $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se valida el teorema de Barrow, ya bien sin perdida de generalidad fijamos $a = 0$ y $f(0) = 0$; entonces se verifica

$$\int_{[0,x]} f'\, dm = f(x). \tag{5.5}$$

Por el teorema 2.2, la expresión de la izquiera de (5.5) es una medida real en el espacio medible $\big([0,b), \mathscr{B}\big)$, misma que si se denota por μ verifica la condición $\mu \ll m$; esta observación contrasta con la medida de Cantor (ejemplo 5.1); por cuanto, de la proposición 3.1, derivamos que una condición necesaria para que se valide la ecuación (5.2) es que f sea absolutamente continua en el intervalo $[a,b]$; como veremos en el teorema 5.8 ésta es también una condición suficiente.

Nota 5.1. A lo largo de la tesis hemos sido cuidados en privilegiar en $\mathbb{R}^n$ a la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$, contrario a la usanza anticuada de normalizar el discurso con la σ-álgebra de Lebesgue $\mathscr{L}$, pues como sabemos son inconsistentes las composiciones de morfismos topológicos y los morfismos de medida, además de otros inconvenientes que plantea la completación (ver [Simon, 2015, p. 210] para una discusión de este punto); sin embargo hacemos notar que si se tiene un mapeo continuo $F : U \to \mathbb{R}^n$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces para toda bola $b[x,r)$ contenida en U se cumple $F\big(b[x,r)\big) \in \mathscr{L}$ pues $b[x,r)$ es σ-compacto, condición que se preserva bajo continuidad.

Otra observación que podemos derivar del ejemplo 5.1 es que la escalera del diablo mapea un conjunto nulo en uno de medida positiva; ello motiva la siguiente condición necesaria.

Proposición 5.1. *Sea $E \in \mathscr{L}$ un conjunto nulo que es al menos numerable; considérese un mapeo $T : E \to \mathbb{R}^n$ que satisface*

$$\limsup \left\{ \frac{\|T(y) - T(x)\|}{\|y - x\|} : \textit{ para todo } x \in E \textit{ cuando } \; y \to x \right\} < \infty.$$

Se afirma que $m(T(E)) = 0$.

Demostración. Dados k, $p \in \mathbb{N}$, se define la familia de conjuntos

$$F_{k,p} := \{x \in E : |T(y) - T(x)| \leq k|y - x|, \text{ para todo } y \in b[x, 1/p) \cap E\}.$$

Nótese que $E = \bigcup_{k,p\in\mathbb{N}} F_{k,p}$, luego basta probar que para $F := F_{k_0,p_0}$, donde k_0, p_0 son arbitrarios, se cumple $m(T(F)) = 0$.

Por construcción $m(F) = 0$; luego por la regularidad de la medida de Lebesgue, para toda $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de bolas abiertas $(b_i) = \big(b[x_i, r_i)\big)$, donde $x_i \in F$, y $r_i < 1/p_0$, tales que $F \subset \cup_i b_i$ y se cumple $m(\bigcup_i b_i) < \varepsilon$; luego si $x \in F \cap b_i$ entonces $|x_i - x| < r_i$. En consecuencia

$$|T(x_i) - T(x)| \leq k_0 |x_i - x| < k_0 r_i;$$

es decir $T(F \cap b_i) \subset b\big[T(x_i), k_0 r_i\big)$. Por tanto

$$T(F) \subset \bigcup_i b\big[T(x_i), k_0 r_i\big).$$

Pero la medida de esta unión está mayorada por

$$\sum_i m\Big(b\big[T(x_i), k_0 r_i\big)\Big) = k_0^n \sum_i m(b_i) < k_0^n \varepsilon.$$

En virtud de que la medida de Lebesgue es completa se concluye que $T(F)$ es medible y su medida es cero.

■

Corolario. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $T : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en todos lados, entonces T mapea conjuntos $\mathscr{L}$-nulos en conjuntos $\mathscr{L}$-nulos.*

5.2 Derivada simétrica

Consideremos la noción de derivada en la forma expresada por la ecuación (5.1); nos gustaría extender a $\mathbb{R}^n$ el sentido de los límites

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{\int_{[a,x+h]} f\,dm - \int_{[a,x]} f\,dm}{h}, \qquad \lim_{h\nearrow 0} \frac{\int_{[a,x+h]} f\,dm - \int_{[a,x]} f\,dm}{h}.$$

En $\mathbb{R}$ estas relaciones nos invitan a plantear la definición de *derivada derecha* y *derivada izquierda* de la medida m_f; podemos columbrar además que si ambas derivadas existen y son iguales, obtendríamos una definición de derivada de medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue; sin embargo esta heurística, por la dependencia en el órden de $\mathbb{R}$, no parece tener una generalización natural en $\mathbb{R}^n$; más prometedor es tomar como punto de partida la derivada simétrica

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{[a,x+h]} f\,dm - \int_{[a,x-h]} f\,dm}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{[x-h,x+h]} f\,dm}{2h}. \tag{5.6}$$

Ahora bien podemos suponer sin pérdida de generalidad que $h > 0$ y que f es integrable en el intervalo $I = [x-h, x+h]$, o de manera general que f sea *localmente integrable* (definición 5.1). Apreciamos que el numerador de (5.6) es una medida real, al denotarla por $\mu := m_f$, bosquejamos una noción de derivada para medidas absolútamente continuas con respecto a la medida m:

$$\lim_{I\to x}\frac{\mu(I)}{m(I)}. \tag{5.7}$$

No obstante falta formalizar la expresión $I \to x$; por ejemplo podemos interpretar a I como una cubo, una celda o una bola en $\mathbb{R}^n$, sendas centradas en x, y que, correspondientemente, su longitud, diámetro y radio tienden a cero; luego de esta disyuntiva inicial demostrar que la teoría es equivalente con cualquier otra elección dentro de una familia de conjuntos que tenga una propiedad de *contracción adecuada* (definición 5.7). Resalta en este punto la dificultad que existe en querer amplear a espacios medibles generales la primera parte del teorema fundamental del cálculo: estos deben contar *a priori* con una noción geométrica de familia de conjuntos contraíbles que sea compatible con la idea de una “aproximación estable” en algún sentido (una discusión de este tema se encuentra en [Bruckner, 1971]).

Nota 5.2. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible y sea $a \in \mathbb{R}$; abreviaremos la notación del conjunto $\{x \in X : f(x) > a\}$ por la expresión $\mathscr{D}_a f$.

Definición 5.1. Sea X tanto un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, como también un espacio de medida con la σ-álgebra de Borel y una medida positiva λ. Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles, se dice que g es **localmente integrable** si para todo $K \subset X$ conjunto precompacto se cumple

$$\int_K |g|\, d\lambda < \infty.$$

Por otro lado, se dice que f es **débil** $L^1(\lambda)$ y se denota como $L^1_w(\lambda)$, si para cualquier $a \in (0,\infty)$ se satisface

$$\lambda(\mathscr{D}_a|f|) < \infty. \tag{5.8}$$

Se denota al conjunto de las funciones localmente integrables como $L^1_{\text{loc}}(\lambda)$, y al de las funciones débilmente integrables como $L^1_w(\lambda)$.

Es fácil ver que $L^1_{\text{loc}}(\lambda), L^1_w(\lambda)$ son espacios lineales; además por definición $L^1(\lambda) \subset L^1_{\text{loc}}(\lambda)$; más aún se verifica $L^1(\lambda) \subset L^1_w(\lambda)$: basta notar que dada $f \in L^1$ y a un real positivo, entonces

$$\lambda(\mathscr{D}_a|f|) \le \int_{\lambda(D_a|f|)} |f|\, d\lambda \le \int_X |f|\, d\lambda = \|f\|_{L^1}.$$

La contención en ambos casos es propia: dada la función

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

luego $f \notin L^1$ pero claramente para cualquier precompacto $V \subset (0,1)$ se cumple $\int_V f\,dm < \infty$; además el conjunto

$$\mathscr{D}_a f = \{x \in (0,1) : \frac{1}{x} > a\}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

tiene medida finita.

La noción de $L^1_{\text{loc}}(\lambda)$ la encontramos en nuestra exposición del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym en el supuesto en que ambas medidas son positivas y σ-finitas; específicamente: si μ es una medida positiva σ-finita en $\mathbb{R}^n$ que es además absolútamente continua con respecto a m, entonces la derivada de Radón-Nikodym (teorema 4.3) f satisface estar en $L^1_{\text{loc}}(m)$.

Definición 5.2. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$; definimos la **media** de f en $b[x,r)$ como

$$A_r f(x) := \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} f\,dm. \tag{5.9}$$

El siguiente lema es ampliamente utilizado en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales.

Lema 5.2. *Si $f \in L^1_{loc}$, la función*

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C}, \\ (r,x) &\mapsto A_r f(x), \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Sean $(r_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ y $(x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ tales que $r_n \to r_0$ y $x_n \to x_0$, entonces $1_{b[x_n,r_n)} \to 1_{b[x_0,r_0)}$ donde la convergencia es puntual en $\mathbb{R}^n \setminus \partial b[r_0,x_0)$, ya bien $1_{b[x_n,r_n)} \to 1_{b[x_0,r_0)}$ con convergencia *c.s.*, además podemos suponer que esta sucesión de funciones está dominada por $1_{b[x_0,r_0+1)}$ es decir $|1_{b[x_n,r_n)}| \leq 1_{b[x_0,r_0+1)}$, basta tomar un n suficientemente grande.

Considérese la sucesión $f\,1_{b[x_n,r_n)}$, luego ésta verifica las hipótesis del teorema de la convergencia dominada, así

$$\lim_{n\to\infty} \int_{b[x_n,r_n)} f\,dm = \int_{b[x_0,r_0)} f\,dm. \tag{5.10}$$

Por cuanto A es continua en r y x; más aún se tiene trivialmente la convergencia (con respecto a ambas variables) de la sucesión

$$\frac{1}{m\big(b[x_n,r_n)\big)} \to \frac{1}{m\big(b[x_0,r_0)\big)}. \tag{5.11}$$

Por lo tanto de (5.10) y (5.11) se concluye

$$A(r_n,x_n) \to A(r_0,x_0).$$

■

Es natural estimar el límite cuando $r \to 0$ en la ecuación (5.9); esta cuestión la exploraremos pero en forma de una condición más fuerte. Para ello debemos recordar que si $F \in L^1(m)$ entonces es indeterminada la expresión $F(x)$ en un punto particular; sin embargo justificaremos que en el sentido de la media podemos darle una interpretación a esta expresión: dada $F \in L^1_{\text{loc}}(m)$, considérese $f_1, f_2 \in [F]$, es decir elementos de la misma clase de equivalencia; supóngase que existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lim_{r\searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f_1 - \alpha|\, dm = 0, \quad \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f_2 - \beta|\, dm = 0. \tag{5.12}$$

Entonces

$$\lim_{r\searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f_2 - \alpha|\, dm = 0. \tag{5.13}$$

En efecto, observamos que

$$f_2 - \alpha \sim f_2 - \beta \sim f_1 - \alpha, \tag{5.14}$$

pues si acaso el conjunto en el que son distintas estas funciones se incrementa por un elemento y m es continua. Luego la equivalencia (5.14) se mantiene cuando se toman a ambos lados valores absolutos divididos sobre el mismo escalar, por cuanto para $r > 0$ suficientemente pequeño se verifica

$$\frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f_2 - \alpha| = \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f_2 - \beta| = \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f_1 - \alpha|.$$

Por continuidad (lema 5.2) se concluye (5.13)

Definición 5.3. Sea $F \in L^1_{\text{loc}}(m)$; a la asignación

$$\mathscr{L}_F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f - f(x)|\, dm = 0, \text{ para alguna } f \in [F]\}, \tag{5.15}$$

se le conoce como el **conjunto de Lebesgue** de la función F.

No obstante que $\mathscr{L}_f$ en principio podría ser vacío, tenemos la siguiente proposición que nos anticipa la importancia del conjunto de Lebesgue.

Proposición 5.2. *Supóngase que $\mathscr{L}_f \neq \emptyset$ y sea $x \in \mathscr{L}_f$, entonces*

$$\lim_{r\searrow 0} A_r f(x) = f(x). \tag{5.16}$$

Demostración. Notamos que

$$\lim_{r\searrow 0} A_r f(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{r\searrow 0} A_r\big(f - f(x)\big) = 0.$$

Además

$$0 \leq \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{B(r)} \Big| \int_{b[x,r)} \big(f - f(x)\big)\, dm \Big| \leq \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} |f - f(x)|\, dm.$$

Luego por la hipótesis $x \in \mathscr{L}_f$, se concluye el resultado.

■

Si en la ecuación (5.9) identificamos a la integral con la medida m_f, entonces ésta puede reescribirse como
$$A_r f(x) = \frac{m_f\big(b[x,r)\big)}{m\big(b[x,r)\big)};$$
esta expresión se corresponde con la relación (5.7) cuando interpretamos I como $b[x,r)$, así $I \to x$ se interpreta como $r \to 0$. Notamos además que $m_f \ll m$; en la siguiente definición no consideramos *a priori* tal restricción.

Definición 5.4. Dada $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$ y dada $r > 0$, se define la expresión

$$\big(Q_r\mu\big)(x) := \frac{\mu\big(b[x,r)\big)}{B(r)}. \tag{5.17}$$

Considérese
$$\mathscr{L}_\mu := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe el límite } \lim_{r\searrow 0} \big(Q_r\mu\big)(x)\}. \tag{5.18}$$

Luego la asignación con dominio $\mathscr{L}_\mu$

$$(D\mu)(x) := \lim_{r\searrow 0} \big(Q_r\mu\big)(x), \tag{5.19}$$

se le llama la **derivada simétrica** de μ en x.

5.3 Función maximal de Hardy-Littlewood

Las siguientes funciones son indicadas para el análisis de la derivada simétrica; fueron sugeridas por una técnica general para controlar los comportamientos límites de una familia de operadores: a tráves de una función que la mayore de forma apropiada.

Definición 5.5. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}$, el mapeo

$$\begin{aligned} Hf : \mathbb{R}^n &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \sup_{r>0} A_r|f|(x) \end{aligned} \tag{5.20}$$

define a la **función maximal de Hardy-Littlewood** asociada a f.

Por otro lado para $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$, se define la asignación

$$\begin{aligned} M\mu : \mathbb{R}^n &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \sup_{r>0}\{\mathrm{Q}_r|\mu|(x)\} \end{aligned} \tag{5.21}$$

se le conoce como **función maximal de la medida** μ.

De la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood podemos ver que las siguientes propiedades se satisfacen: dadas $f, g \in L^1_{\text{loc}}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

(i) $0 \leq Hf \leq \infty$.

(ii) $H(f+g) \leq Hf + Hg$.

(iii) $H(\alpha f) = |\alpha| Hf$.

Esta observación unida a la proposición siguiente nos permite concluir que H es un operador semilineal actuando en el espacio de funciones medibles; más aún podemos refinar en cuanto al dominio y codominio de H (*cf.* corolario de la proposición 5.5).

Proposición 5.3. *Dada $f \in L^1_{loc}$ y dada $\mu \in \mathbb{M}$ entonces*

(i) La función Hf es medible.

(ii) La función $M\mu$ es semicontinua inferiormente, y por tanto medible.

Demostración.

(i) Se sigue de notar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se cumple la relación

$$(Hf)^{-1}\big((a,\infty)\big) = \bigcup_{r>0} (A_r|f|)^{-1}\big((a,\infty)\big). \tag{5.22}$$

Luego por el lema 5.2 cada uno de los miembros de la parte derecha de (5.22) es un conjunto abierto, por lo que la parte izquiera es también un abierto; como los intervalos (a,∞) forman una base de la topología, se sigue que Hf es continua y por lo tanto medible.

(ii) Sea $a \in \mathbb{R}$, basta probar que el conjunto $\mathscr{D}_a M\mu$ es abierto. Primero se nota que si $a \leq 0$ entonces $\mathscr{D}_a M\mu = \mathbb{R}^n$, por ello los únicos casos no triviales a considerar son $a > 0$ y $\mathscr{D}_a M\mu \neq \emptyset$.

Dado $x \in \mathscr{D}_a M\mu$, existe $r > 0$ tal que para algún $t > a$ se cumple

$$\frac{|\mu|\big(b[x,r)\big)}{m\big(b[x,r)\big)} = t; \tag{5.23}$$

más aún existe $\delta > 0$ tal que

$$a(r+\delta)^n < r^n t. \tag{5.24}$$

Sea $y \in b[x,\delta)$ y $z \in b[x,r)$, entonces $|z-y| \leq |z-x| + |x-y| < r+\delta$, así pues

$$b[x,r) \subset b[y,r+\delta). \tag{5.25}$$

Luego de (5.24) se tiene

$$a\,m\big(b[y,r+\delta)\big) < t\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n m\big(b[y,r+\delta)\big). \tag{5.26}$$

Además por geometría elemental se cumple

$$\frac{m\big(b[x,r)\big)}{m\big(b[y,r+\delta)\big)} = \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n. \tag{5.27}$$

Entonces

$$t\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n m\big(b[y,r+\delta)\big) = tm\big(b[x,r)\big); \tag{5.28}$$

mas de (5.23) y (5.25) se verifica

$$t\,m\big(b[x,r)\big) = |\mu|\big(b[x,r)\big) \leq |\mu|\big(b[y,r+\delta)\big). \tag{5.29}$$

Concatenando (5.26), (5.28) y (5.29) se obtiene

$$a\,m\big(b[y,r+\delta)\big) < |\mu|\big(b[y,r+\delta)\big);$$

en consecuencia $b[x,\delta) \subset \mathscr{D}_a M\mu$, por cuanto el conjunto $\mathscr{D}_a M\mu$ es abierto.

■

Ejemplo 5.2. Sean $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > 0$ y $g = 1_{[0,1]}$ es claro que $f,g \in L^1_{\text{loc}}(m)$, luego

$$Hf(x) = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |t|^\alpha\,dt\right\} = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{\alpha+1}\,(x+r)^\alpha\right\} = \infty.$$

Por otro lado

$$Hg(x) = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} 1_{[0,1]}(x)\,dt\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2(1-x)} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Nótese que $g \in L^1(m)$ pero $Hg \notin L^1(m)$; no obstante $Hg \in L^1_w(m)$: dado $a > 0$ entonces

$$am(\mathscr{D}_a|Hg|) = am(\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > a\}) < \infty$$

En contraparte $f \notin L^1(m)$ y $Hf \notin L^1_w(m)$.
□

Proposición 5.4. *Dada $\mu \in \mathbb{M}$ tal que $\mu \ll m$, entonces $M\mu = Hf$ donde $f = \dfrac{d\mu}{dm}$.*

Demostración. Por definición de la función maximal de la medida μ se tiene

$$M\mu(x) = \sup_{r>0}\{Q_r|\mu|\}(x) = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{B(r)}|\mu|(b[x,r))\right\}.$$

Luego por el corolario al teorema 4.5 esta expresión se reescribe como

$$\sup_{r>0}\left\{\frac{1}{B(r)}\int_{b[x,r)} |f|\,dm\right\},$$

lo que corresponde a la definición de $Hf(x)$.

■

Dada $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$, como consecuencia de la descomposición de Lebesgue podemos concentrar nuestro análisis de la función maximal a las partes μ_{ac} y μ_s, donde $\mu_{ac} \ll m$ y $\mu_s \perp m$, es decir estudiar por separado las funciones $M\mu_{ac}$ y $M\mu_s$; en primer caso, por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, se satisface $d\mu_{ac} = f\,dm$, entonces por la proposición 5.4 ello equivale al estudio de la función Hf.

5.4 Independencia geométrica de la derivada

El siguiente lema utiliza una fuerte intuición geométrica del espacio $\mathbb{R}^n$ y lo podemos interpretar de la siguiente forma: si se tiene que (localmente) una familia finita de bolas cubren a un conjunto medible dado, entonces podemos extraer una subfamilia disjunta que, vía una homotecia, funcione como cubierta de la mismo; el enunciado análogo con cubos se le conoce como el teorema de la **cubierta de Vitali**.

Lema 5.3 (Cubierta de Vitali para bolas)**.** *Dado $W = \bigcup_{i=1}^{N} b[x_i, r_i)$ es decir W es una unión finita de bolas con el conjunto de índices $\{1, \ldots, N\}$, entonces existe $S \subset \{1, \ldots, N\}$ tal que*

(i) Las bolas $b[x_i, r_i)$ con $i \in S$ son disjuntas.

(ii) $W \subset \bigcup_{i \in S} b[x_i, 3r_i)$.

(iii) $m(W) \leq 3^n \sum_{i \in S} m\big(b[x_i, r_i)\big)$.

Demostración. Se puede afirmar que la familia de bolas $b[x_i, r_i)$ está ordenada de manera que $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$; la construcción de S será recursiva: sea $i_1 = 1$ y considérese las bolas que no intersectan a $b[x_{i_1}, r_{i_1})$, si acaso hay una sea $b[x_{i_2}, r_{i_2})$ la primera de éstas; luego si existe aún alguna bola que no intersecte a $b[x_{i_2}, r_{i_2})$ se define a $b[x_{i_3}, r_{i_3})$ como la primera de esta subfamilia, etc. Este proceso se continua hasta que ya no existan bolas disjuntas a alguna $b[x_{i_s}, r_{i_s})$; sea entonces $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ y por construcción (i) se cumple.

Se afirma que si alguna bola $b[x_j, r_j)$ con $j \in \{1,...,N\}$ intersecta a $b[x_{i_j}, r_{i_j})$ con $i_j \in S$, entonces $b[x_j, r_j) \subset b[x_{i_j}, 3r_{i_j})$. Basta ver que si $y \in b[x_j, r_j)$, como $r_j \leq r_{i_j}$, entonces

$$|y - x_{i_j}| \leq |y - x_j| + |x_j - x_{i_j}| < r_j + 2r_{i_j} < 3r_{i_j}$$

es decir $y \in b[x_{i_j}, 3r_{i_j})$, esto prueba (ii).

Por último, como $m\big(b[x, 3r)\big) = 3^n m\big(b[x, r)\big)$, entonces de (i) y (ii) se concluye (iii).

■

Recordemos que nuestro acometido es estudiar la función $D\mu$ a través de una función que la domina, en este caso $M\mu$, sin embargo podría resultar vacuo este intento si por ejemplo $M\mu = \infty$ $c.s.$; el siguiente teorema excluye esta posibilidad, de hecho nos dice mucho más.

Proposición 5.5. *Sea $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ y dado $a > 0$ un real positivo, entonces*

$$m(\mathscr{D}_a M\mu) \leq \frac{3^n}{a}\|\mu\|. \tag{5.30}$$

Demostración. Por la proposición 5.3 se deriva que el mapeo $M\mu$ es semicontinuo inferiormente, lo cual implica que $\mathscr{D}_a M\mu$ es abierto; además se puede suponer que es distinto del vacío pues en caso contrario la ecuación (5.30) se cumple trivialmente. Sea $K \subset \mathscr{D}_a M\mu$ un conjunto compacto, luego para cualquier $x \in K$ existe $r > 0$ tal que

$$|\mu|\big(b[x,r)\big) > am\big((b[x,r)\big).$$

Por otro lado, dada la compacidad de K existe una familia finita de bolas que lo cubre, y por el lema 5.3 existe una subfamilia $\{b[x_1,r_1),\cdots,b[x_s,r_s)\}$ de bolas disjuntas tales que

$$m(K) \leq 3^n \sum_{i=1}^{s} m\big(b[x_i,r_i)\big) \leq \frac{3^n}{a}\sum_{i=1}^{s}|\mu|\big(b[x_i,r_i)\big) \leq \frac{3^n}{a}\|\mu\|.$$

Como la medida μ es regular (corolario del teorema 2.2) se obtiene (5.30) tomando el supremo sobre todos los compactos $K \subset \mathscr{D}_a M\mu$.

■

Corolario. *El mapeo*

$$\begin{aligned} H : L^1(m) &\to L^1_{loc}(m) \\ f &\mapsto Hf \end{aligned}$$

es un operador sublineal acotado.

Demostración. Basta probar que H es acotado. Considérese la medida m_f y con ella la función maximal Mm_f; por la proposición 5.5 se tiene que Mm_f está acotada en $b[0,1)$; luego por la proposición 5.4 se sigue que $Mm_f = Hf$, lo cual concluye la afirmación.

■

Teorema 5.2. *Dada $f \in L^1_{loc}$, entonces $\mathscr{L}_f = \mathbb{R}^n$ salvo quizá en un conjunto nulo.*

Demostración. Defínase

$$\bar{A}f(x) := \limsup_{r \searrow 0}\big(A_r|f - f(x)|\big)(x).$$

Luego para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface

$$0 \leq \liminf_{r \searrow 0}\big(A_r|f - f(x)|\big)(x) \leq \bar{A}f(x);$$

por cuanto la prueba se reduce a mostrar la afirmación: $\bar{A}f = 0$ *c.s.*, más aún dado que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} b[x_n,r_n]$ para cierta sucesión de bolas, basta probar éste para alguna genérica b.

Sea $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, dado que $\mathscr{C}(b)$ es denso en $L^1(b)$, existe $g \in \mathscr{C}(b)$ tal que $\|f-g\|_{L^1} < \frac{1}{k}$ donde $f = f\restriction_b$; sea entonces

$$h := f - g.$$

Por el lema 5.1 se tiene

$$\bar{A}g = 0. \tag{5.31}$$

Nótese además que

$$\big(A_r|h-h(x)|\big)(x) \leq \frac{1}{B(r)}\int_{b[x,r)} |h|\,dm + |h(x)|;$$

lo que implica

$$\bar{A}h \leq Hh + |h|. \tag{5.32}$$

Como $A_r|f-f(x)| \leq A_r|g-g(x)| + A_r|h-h(x)|$ se sigue de (5.31) y (5.32)

$$\bar{A}f \leq Hh + |h|. \tag{5.33}$$

Por otro lado sea $x \in \mathscr{D}_{2a}\bar{A}f$, entonces

$$2a < \big(\bar{A}f\big)(x) \leq \big(Hh\big)(x) + |h(x)|.$$

Ello implica que se satisface al menos una de estas afirmaciones: $a < \big(Hh\big)(x)$ o bien $a < |h(x)|$, es decir

$$\mathscr{D}_{2a}\bar{A}f \subset \mathscr{D}_a Hh \cup \mathscr{D}_a|h|; \tag{5.34}$$

denotando a $E(a,k) := \mathscr{D}_a Hh \cup \mathscr{D}_a|h|$, se cumple

$$m\big(E(a,k)\big) \leq m\big(\mathscr{D}_a Hh\big) + m\big(\mathscr{D}_a|h|\big).$$

Por la proposición 5.5 y el teorema 4.5 se verifica

$$m\big(\mathscr{D}_a Hh\big) \leq \frac{3^n}{a}\|h\|_{L^1};$$

más aún se satisface trivialmente

$$m\big(\mathscr{D}_a|h|\big) \leq \frac{\|h\|_{L^1}}{a}.$$

Por otro lado $\|h\|_{L^1} < \dfrac{1}{k}$, entonces

$$m\big(E(a,k)\big) \leq \frac{3^n+1}{ak}. \tag{5.35}$$

En suma acontece

$$\mathscr{D}_{2a}\bar{A}f \subset \bigcap_k E(a,k).$$

Sin embargo de (5.35) concluimos que la medida de la intersección es cero, es decir $\mathscr{D}_{2a}\bar{A}f$ está contenido en un conjunto nulo, y por construcción es un conjunto medible, por lo que $m\big(\mathscr{D}_{2a}\bar{A}f\big) = 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$, por lo tanto $\bar{A}f = 0\ \ c.s.$

■

Nota 5.3. Supondremos en los sucesivo que $\mathscr{L}_f = \mathbb{R}^n$; ello acorta los enunciados y no quita generalidad.

En el siguiente ejemplo invocaremos la definición de *densidad métrica* de un conjunto Lebesgue-medible.

Definición 5.6. Considérese $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L})$; dado $x \in \mathbb{R}^n$, si el límite siguiente existe

$$\rho(x) := \lim_{r \searrow 0} \frac{m\big(E \cap b[x,r)\big)}{m\big(b[x,r)\big)},$$

entonces a su valor se le refiere como la **densidad métrica** de E en x.

Ejemplo 5.3. En este ejemplo mostraremos una pequeña aplicación de los temas discutidos que es quizá sorprendente a primera vista, pues nos arroja luz de la estructura de los conjuntos de Lebesgue; la heurística que planteamos es la siguiente: dado $E \in \mathscr{L}$ entonces localmente los puntos de E están o bien "concentrados" o por el contrario éstos están "dispersos", y en ese sentido la estructura local de E es cercana a la de un intervalo, ya bien se asemejan al conjunto de Cantor. Formalmente tenemos la siguiente afirmación: dado $E \in \mathscr{L}$, se define $\phi(E) := \{x \in E \mid \rho(x) = 1\}$, entonces se verifica

$$m\big(E \setminus \phi(E)\big) = 0.$$

En efecto al aplicar la proposición 5.2 y el teorema 5.2 a la función 1_E, acontece para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\rho(x) = \lim_{r \to 0} \frac{m\big(E \cap b[x,r)\big)}{m\big(b[x,r)\big)} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} 1_E \, dm = 1_E(x).$$

Luego $1_E = 1_{E \setminus \phi(E)} + 1_{\phi(E)}$, por cuanto se satisface $m\big(E \setminus \phi(E)\big) = 0$; además se cumple que $\rho(x)$ toma únicamente los valores 0 y 1.

El corolario de esta afirmación es que no existe un conjunto medible E tal que para cualquier n-celda I y para cualquier ε, se verifica

$$\varepsilon < \frac{m(E \cap I)}{m(I)} < 1 - \varepsilon.$$

En vista de ello cristalizamos nuestra intuición: los puntos de E o están concentrados o bien están dispersos, excluyendo la posibilidad de un caso intermedio.
□

Proposición 5.6. *Sea $\mu \in \mathbb{M}$ tal que $d\mu = f\,dm$ con $f \in L^1(m)$, entonces*

$$D\mu = f \;\; c.s. \tag{5.36}$$

Demostración. La relación $d\mu = f\,dm$ implica que para todo conjunto medible E se satisface $\mu(E) = \int_E f\,dm$, en particular para $b[x,r)$; luego para $x \in \mathbb{R}^n$ por la proposición 5.2 se verifica

$$f(x) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{B(r)} \int_{b[x,r)} f\,dm = \lim_{r \searrow 0} \frac{\mu\big(b[x,r)\big)}{B(r)} = D\mu(x).$$

Luego por el teorema 5.2 se concluye (5.36).

■

Este resultado nos permite bosquejar una aproximación numérica de la derivada de Radon-Nikodym en el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}, m)$. Consideremos $\mu \in \mathbb{M}$ tal que $\mu \ll m$, el algoritmo que proponemos para aproximar a $f = \dfrac{d\mu}{dm}$ es el siguiente: se efectúa el cálculo $\lim\limits_{r\to 0}\big(Q_r\mu\big)(x)$ para una cantidad suficiente de $x \in \mathbb{R}^n$, luego con estos valores se genera una función continua que los interpole; ya bien por el teorema de Lusin, ésta aproxima a f salvo posiblemente en un conjunto de medida arbitrariamente pequeña.

En nuestra presentación de la derivada de medidas complejas encontramos un meandro de posibilidades al bosquejar la noción *familia que aproxima*, entendida ésta en el sentido de cristalizar la expresión $E_x \to x$, ya que ésta nos faculta a precisar el límite

$$\lim_{E_x \to x} \frac{\mu(E_x)}{m(E_x)}.$$

Esta cuestión es consubstancial a la pregunta ¿hay alguna razón *a priori* para desarrollar la teoría con bolas y no con otro tipo de familias de conjuntos (redes, politopos, filtros...)? Quizá es velada una propiedad del espacio que subyace en estos argumentos: usar conjuntos geométricos nos permite un control sobre el cardinal de la familia, en cuanto que se extrae una sucesión de ésta. El teorema 5.3 nos enseña que dicha elección geométrica es irrelevante, mas para exponerlo requerimos de la siguiente definición.

Definición 5.7. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que la sucesión de conjuntos medibles (E_i) se **contraen agradablemente** a x si

(i) Existe $\big(b(x,r_i)\big)_i$ tal que $r_i \searrow 0$ y $E_i \subseteq b(x,r_i)$.

(ii) Existe $a > 0$ que satisface $am\big(b(x,r_i)\big) \leq m(E_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Notamos que no requerimos postular que $x \in E_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, ni siquiera que exista una relación entre las sucesiones que se contraen agradablemente (E_i^1), (E_i^2) a dos puntos distintos x_1, x_2. Observamos además que de la familia de n-cubos, o de manera más general, de las n-celdas con la propiedad de que la proporción entre sus aristas sea fija, se puede extraer una sucesión que se contrae agradablemente: basta elegir una sucesión de n-celdas inscritas en una sucesión de bolas que se contraen a un punto.

Teorema 5.3. *Sea $f \in L^1$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$, dada (E_i) una sucesión de conjuntos que se contraen agradablemente a x, entonces*

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m\big(E_i\big)} \int_{E_i} f\,dm$$

Demostración. Por ser (E_i) una sucesión que se contrae agradablemente a x existe $a > 0$ (independiente de i) y una sucesión $b_i = b(x, r_i)$ que satisface

$$\begin{aligned} E_i &\subset b_i, \\ \frac{a}{m(E_i)} &\leq \frac{1}{B_i}. \end{aligned}$$

Por cuanto

$$0 \leq \frac{a}{m(E_i)} \int_{E_i} |f - f(x)|\,dm \leq \frac{1}{B_i} \int_{b[x_i,r_i)} |f - f(x)|\,dm.$$

Por el teorema 5.2 se concluye la afirmación.

■

La proposición 5.6 sugiere la pregunta: ¿qué pasa con $D\mu$ cuando $\mu \perp m$? El siguiente teorema corresponde a esta situación.

Proposición 5.7. *Sea (E_i) una sucesión de conjuntos medibles que se contraen agradablemente a $x \in \mathbb{R}^n$; sea además $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu \perp m$, entonces*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} = 0 \;\; c.s.\;\; [m]. \tag{5.37}$$

Demostración. Se puede suponer que $m(E_i) \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego el teorema de descomposición de Hahn-Jordan (teorema 4.2) muestra que es suficiente probar (5.37) bajo la hipótesis adicional: μ medida positiva finita. Por definición de (E_i) se cumple para cierto $a > 0$ las desigualdades

$$am\big(b[x,r_i)\big) \leq m(E_i) \leq m\big(b[x,r_i)\big),$$

más ello equivale a

$$\frac{a\mu(E_i)}{m(E_i)} \leq \frac{\mu(E_i)}{m\big(b[x,r_i)\big)} \leq \frac{\mu\big(b[x,r_i)\big)}{m\big(b[x,r_i)\big)}.$$

Por lo cual se verifica (5.37) siempre que

$$\big(D\mu\big)(x) = 0.$$

Se define

$$\big(\bar{D}\mu\big)(x) = \lim_{i\to\infty} \Big[\sup_{0<r<1/i} \big(Q_r\mu\big)(x)\Big]. \tag{5.38}$$

Se afirma que $\bar{D}\mu$ es una función medible: basta ver que la cantidad entre corchetes forma una sucesión decreciente, y como $\sup_{0<r<1/i} Q_r\mu$ es una función semicontinua inferiormente (basta imitiar la prueba dada a la proposición 5.3) se concluye la afirmación.

Sean $a, \varepsilon > 0$, dado que $\mu \perp m$ se infiere que μ está concentrado en un conjunto de medida cero (con respecto a m), más aún como μ es una medida finita en $\mathbb{R}^n$, μ es una medida regular, ello implica que existe $K \subset \mathbb{R}$ compacto tal que $m(K) = 0$ y $\mu(K) > \|\mu\| - \varepsilon$.

Defínase la medida $\mu_1(E) := \mu(K \cap E)$, $E \in \mathscr{B}$ y considérese $\mu_2 := \mu - \mu_1$; luego $\|\mu_2\| < \varepsilon$ y para $x \in \mathbb{R} \setminus K$ se cumple:

$$\big(\bar{D}\mu\big)(x) = \big(\bar{D}\mu_2\big)(x) \leq \big(M\mu_2\big)(x).$$

Por cuanto

$$\mathscr{D}_a(\bar{D}\mu) \subset K \cup \mathscr{D}_a(M\mu_2).$$

Por la proposición 5.5 se sigue

$$m\big(\mathscr{D}_a(\bar{D}\mu)\big) \leq \frac{3^n}{a}\|\mu_2\| < \frac{3^n}{a}\varepsilon;$$

por lo tanto $\bar{D}\mu = 0 \ \ c.s.\ [m]$.

■

Teorema 5.4. *Supóngase que para cada $x \in \mathbb{R}$ está asociada la sucesión de conjuntos que se contraen agradablemente $\big(E_i(x)\big)$ y sea $\mu \in \mathbb{M}$ tal que tiene, con respecto a m, la descomposición de Lebesgue $d\mu = f\,dm + d\mu_s$, entonces*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu\big(E_i(x)\big)}{m\big(E_i(x)\big)} = f(x); \tag{5.39}$$

en particular $\mu \perp m$ si y solo si $(D\mu)(x) = 0 \ \ c.s.\ [m]$.

Demostración. De las proposiciones 5.6 y 5.7 se sigue

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m_f\big(E_i(x)\big)}{m\big(E_i(x)\big)} = f(x); \quad \lim_{i\to\infty} = \frac{\mu_s\big(E_i(x)\big)}{m\big(E_i(x)\big)} = 0.$$

En virtud de ello se concluye (5.39).

■

5.5 Aplicaciones

El siguiente teorema es la primera parte de nuestra anunciada proyección de un teorema tipo fundamental del cálculo para integrales de Lebesgue.

Teorema 5.5 (Fundamental del cálculo I para integrales de Lebesgue)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, se define*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\,dm$$

entonces $F' = f \ \ c.s.$

Demostración. Considérese (h_n) una sucesión de reales positivos que converge a cero, luego por el teorema 5.3 se sigue que salvo quizá un conjunto nulo se verifica

$$F_d'(x) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{h_n} \int_{[x,x+h_n]} f\,dm = f(x),$$
$$F_i'(x) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{F(x+(-h_n))-F(x)}{(-h_n)} = \lim_{n\to\infty} \Big(-\tfrac{1}{h_n}\Big) \int_{[x-h_n,x]} f\,dm = f(x).$$

Es decir la derivada izquierda y derecha de F en x existen y son iguales entre sí, y por el teorema 5.2 se concluye $F' = f$ *c.s.*

■

Toda vez hecho este avance que postulamos al inicio del capítulo, nuestra diana ahora es establecer la segunda parte del teorema fundamental del cálculo para integrales de Lebesgue, para ello requerimos los siguientes resultados.

Nota 5.4. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por la derecha (resp. continua por la izquiera), fijamos la notación $F(x+) := \lim\limits_{t\searrow x} F(t)$ (y resp. $F(x-) := \lim\limits_{t\nearrow x} F(t)$).

Teorema 5.6 (Diferenciación de funciones monótonas)**.** *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona y sea $G(x) := F(x+)$*

(i) El conjunto de discontinuidades de F es contable.

(ii) F y G son diferenciables c.s. y $F' = G'$ salvo quizá en un conjunto nulo.

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que F es creciente (pues el caso decreciente se reduce a invertir el signo), luego la familia de intervalos $\big(F(x-),F(x+)\big)$ con $x \in \mathbb{R}$ son disjuntos (en los puntos de continuidad estos intervalos son vacíos). Luego para $N \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\bigcup_{|x|<N} \big(F(x-),F(x+)\big) \subset \big(F(-N),F(N)\big),$$

por cuanto se deriva

$$\begin{aligned}\sum_{|x|<N} \big(F(x+)-F(x-)\big) &= \sup\{\sum_{x\in\mathscr{F}} \big(F(x+)-F(x-)\big) \mid \mathscr{F} \text{ es finito } \} \\ &\leq F(N)-F(-N)\big) < \infty.\end{aligned}$$

Ello que implica que $\{x \in (-N,N) \mid F(x+) \neq F(x-)\}$ es contable, por cuanto se concluye la primera afirmación.

Ahora bien se observa que (i) implica $G = F$ *c.s.*, además G es creciente y continua por la derecha, luego por el teorema 5.1 se sigue que existe una única medida positiva μ_G tal que

$$G(x+h)-G(x) = \begin{cases} \mu_G\big((x,x+h]\big) & \text{si } h \geq 0, \\ \mu_G\big((x+h,x]\big) & \text{si } h \leq 0. \end{cases}$$

Luego para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu_G 1_{[-N,N]}$ es una medida compleja, por cuanto satisface las hipótesis del teorema 5.4 con respecto a la sucesión de conjuntos que se contrae agradablemente $\{(x-1/i,x]$ y $(x,x+1/i] : i \in \mathbb{N}\}$; así la función derivada $G' \restriction_{[-N,N]}$ existe salvo posiblemente en un conjunto nulo y por el teorema de la convergencia dominada se verifica la misma conclusión para G, *i.e.* se garantiza la existencia de la función derivada G'.

Para terminar la prueba se demostrará que si $H := G - F$, acontece que H' existe y es igual a cero *c.s.* Sea (x_i) una enumeración de los puntos en los cuales $H \neq 0$, luego $H(x_i) > 0$ y además $\sum_{\{i:|x_i|<N\}} H(x_i) < \infty$ (por la misma razón que en el argumento aplicado arriba) para cualquien $N \in \mathbb{N}$. Sea δ_i la medida de masa puntual en x_i, se define $\mu := \sum_i H(x_i)\delta_i$; luego $\mu 1_{[-N,N]}$ es una medida compleja singular con respecto a m, y por el teorema 5.4 se infiere $H' \restriction_{[-N,N]} = 0$, por lo que H' existe y $H' = 0$ *c.s.*

■

Corolario. *Dada $F \in BV$ entonces el conjunto de discontinuidades de F es contable, más aún si $G(x) := F(x+)$, se tiene que F' y G' existen y son iguales salvo quizá en un conjunto nulo.*

Demostración. Por la proposición 3.2 se sigue que F se descompone como la diferencia entre dos funciones crecientes, luego del teorema 5.6 se concluye la afirmación.

■

El teorema 5.6 se entiende en este contexto como una aplicación del teorema 5.4, ya bien es un resultado central para el Análisis Real; una discusión del tema se encuentra en [Riesz and Nagy, 1956, cap. I], donde además se deriva el teorema 5.6 con métodos elementales, más aún a partir de éste se prueba la primera parte del teorema fundamental del cálculo en el marco de las integrales de Lebesgue (teorema 5.5): una perspectiva substancialmente distinta de la que hemos desarrollado en la tesis.

El siguiente teorema se entiende como una aplicación del pasado; figura entre los resultados más importantes de la tesis.

Teorema 5.7. *Sea $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$, se define $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $x \to \mu\big((-\infty,x]\big)$, entonces $F \in NBV$. De forma inversa, si $F \in NBV$, existe una única medida compleja μ^F que satisface $F(x) = \mu^F\big((-\infty,x]\big)$, en cuyo caso $|\mu^F| = \mu^{V_F}$.*

Por lo tanto los espacios $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ y NBV son isométricamente isomorfos.

Demostración. Considérese la descomposición de Hahn-Jordan expresada como $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, donde $\mu_j^\pm$ son medidas positivas finitas; luego sendas funciones $F_j^\pm(x) := \mu_j^\pm\big((-\infty,x)\big)$ son crecientes y continuas por la derecha, además se satisface $F_j^\pm(-\infty) = 0$ y $F_j^\pm(\infty) = \mu_j^\pm(\mathbb{R}) < \infty$, por cuanto se infiere $F = F_1^+ - F_1^- + i(F_2^+ - F_2^-) \in NBV$, ya que NBV es un espacio vectorial.

Por otro lado, dada $F \in NBV$, $F = F_1 + iF_2$, de la proposición 3.2 se sigue $F = F_1^+ - F_1^- + i(F_2^+ - F_2^-)$, donde las funciones $F_j^\pm$ son crecientes y vía la redefinición

$G_j^{\pm}(x) = F_j^{\pm}(x+)$ se garantiza que $G_j^{\pm}$ es continua por la derecha. Por el teorema 5.1 acontece que $G_j^{\pm}$ está en correspondencia con una medida positiva $\mu_j^{\pm}$, así $F(x) = \mu^F\big((-\infty,x]\big)$, donde $\mu^F = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$.

Falta demostrar $|\mu^F| = \mu^{V_F}$. Se define $G(x) := |\mu^F|\big((-\infty,x]\big)$, nótese que $G(-\infty) = 0$. Sea el intervalo $I = [a,b]$, luego

$$\begin{aligned} |F(b) - F(a)| = |\mu^F\big((-\infty,b]\big) - \mu^F\big((-\infty,a]\big)| &= |\mu^F\big((a,b]\big)| \\ &\leq |\mu^F|\big((a,b]\big) = G(b) - G(a). \end{aligned}$$

Entonces para cualquier sucesión $\mathscr{P}(-\infty,x) = x_0 < \cdots < x_{N+1} = x$, se cumple

$$\sum_{i=0}^{N} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{N} |\mu^F|\big([x_i, x_{i+1}]\big).$$

Esta desigualdad se valida cuando se toma supremo sobre $\mathscr{P}(-\infty,x)$, por tanto

$$\sup_{\mathscr{P}(-\infty,x)} \sum_{i=0}^{N} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| = V_F(x) \leq G(x).$$

Por cuanto se obtiene $V_F \leq G$.

Por otro lado de la definición de variación se tiene

$$|\mu^F(I)| = |F(b) - F(a)| \leq V_F(b) - V_F(a) = \mu^{V_F}(I).$$

Como μ^F, μ^{V_F} son medidas regulares, para cualquier conjunto medible E se verifica $|\mu^F(E)| \leq \mu^{V_F}(E)$, así pues para (E_i) descomposición de E se cumple

$$|\mu^F|(E) = \sup_{(E_i)} \sum_{i=1}^{N} |\mu^F(E_i)| \leq \sup_{(E_i)} \sum_{i=1}^{N} \mu^{V_F}(E_i) = \mu^{V_F}(E).$$

Ello implica la validez de $G \leq V_F$ y por tanto $G = V_F$, lo que concluye la afirmación $|\mu^F| = \mu^{V_F}$.

■

Nota 5.5. Dada $F \in NBV$, emplearemos la notación μ^F para indicar la medida asociada que es descrita en el teorema 5.7.

Proposición 5.8. *Dada $F \in NBV$ entonces $F' \in L^1(m)$; además se verifica que $\mu^F \perp m$ si y sólo si $F' = 0$ c.s., y por el contrario se cumple $\mu^F \ll m$ precisamente cuando $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'\,dm$.*

Demostración. El corolario del teorema 5.6 garantiza la existencia de F' *c.s.*, por cuanto no se pierde generalidad si se supone que $F'(x)$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$; luego por el teorema 5.7 se sigue que, para $h > 0$ y $E_h = (x-h, x+h)$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mu^F(E_h)}{m(E_h)}.$$

Así pues de los teoremas 5.4 y 4.3 se concluye la prueba.

■

Proposición 5.9. *Dada $F \in NBV$, una condición necesaria y suficiente para que $F \in AC$ es que valide $\mu^F \ll m$.*

Demostración. Si se supone $\mu^F \ll m$, luego la continuidad absoluta de F se concluye de aplicar el inciso (ii) de la proposición 3.1 a las partes real e imaginaria de la descomposición de Hahn-Jordan de μ^F.

Se probará ahora la condición necesaria. Sea $E \in \mathscr{B}$ tal que $m(E) = 0$; dadas ε y δ en la definición de absolutamente continua (respecto a F), por la regularidad de μ^F existe una sucesión de abiertos $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset E$ que satisface $\mu^F(U_j) \to \mu^F(E)$, además se puede suponer que $m(U_1) < \delta$. Dado que U_j se expresa como una unión disjunta de intervalos (a_j^k, b_j^k), para cada $N \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\sum_{k=1}^{N} |\mu^F\left((a_j^k, b_j^k)\right)| \leq \sum_{k=1}^{N} |F(b_j^k) - F(a_j^k)| < \varepsilon.$$

Luego cuando $N \to \infty$ se tiene $|\mu^F(U_j)| \leq \varepsilon$, y por tanto $\mu^F(E) = 0$, lo que concluye $\mu^F \ll m$.

■

Corolario. *Dada $f \in L^1(m)$, la función $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, dm$ satisface estar en $NBV \cap AC$ y satisface $f = F'$ c.s. De forma recíproca si $F \in NBV \cap AC$, se sigue que F' existe salvo quizá en un conjunto nulo, $F' \in L^1(m)$ y se verifica $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'\, dm$.*

Demostración. La condición necesaria se sigue de notar que $F \in NBV$ por el teorema 5.7, además del teorema de Radon-Nikodym y de la proposición 5.9 se verifica que $F \in AC$.

Ahora bien la condición suficiente se obtiene de observar que si $F \in NBV$, entonces $F' \in L^1(m)$ por la proposición 5.8; por último invocando la proposición 5.9 y el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym se concluye la afimación.

■

Este último corolario es esencialmente el teorema de Barrow, sin embargo escrito en esta forma es vago el reconocimiento, por ello lo reformulamos para intervalos acotados en donde, vía la proposición 3.3, se satisface automáticamente la hipótesis de variación acotada.

Teorema 5.8 (Fundamental del cálculo II para integrales de Lebesgue)**.** *Sea $I = [a, b]$ un intervalo acotado y sea $f : I \to \mathbb{C}$, los siguientes son equivalentes.*

(i) La función f es absolutamente continua en I.

(ii) La función f es diferenciable salvo quizá en un conjunto nulo, $f' \in L^1(I)$ y se cumple

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'\, dm.$$

Demostración.

(i $\Rightarrow$ ii) Sea F tal que $F(x) := f(x) - f(a)$, y considérese la extensión $\tilde{F}$ de F a todo $\mathbb{R}$ definida por: $\tilde{F}(x) = 0$ si $x < a$ y $\tilde{F}(x) = f(b)$ si $x > b$; luego por la proposición 3.3 se satisface $\tilde{F} \in NBV$ y por el corolario a la proposición 5.5 se concluye (ii).

(i $\Rightarrow$ ii) Sea $\tilde{f}$ la extensión de f definida por $\tilde{f}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$; luego $\tilde{f} \in L^1(m)$, por cuanto del corolario a la proposición 5.9 se deriva que $\tilde{f} \in AC$, pero ello implica que $f \in AC$.

■

A manera de digresión nos gustaría reflexionar sobre un figurativo teorema tipo fundamental del cálculo para espacios medibles generales: el inconveniente de tal hipotética proposición correspondientemente a la primera parte del teorema fundamental del cálculo, se inicia en dotar a los espacios medibles con nociones geométricas de *conjuntos elementales* que aproximen en medida: esta es la naturaleza de la cubierta de Vitali (lema 5.3). Por cuanto a la segunda parte del teorema fundamental es una cuestión más complicada pues *a priori* se requiere que el espacio tenga un cálculo diferencial y que éste sea compatible con la medida, quizá en la forma de los grupos de Haar; desconocemos si hay un tratamiento al respecto; no obstante en estos argumentos subyace el prejucio de que la integral de Lebesgue es la perspectiva adecuada para generalizar el teorema de Barrow, es decir, el explorar ideas que conecten al álgebra conmutativa y los problemas de medición *lato sensu*; pero ¿es acaso que existe otra integral que extienda a la de Riemann y que acepte de forma más robusta un teorema tipo fundamental del cálculo? La respuesta es sí, la integral de Henstock-Kurzweil, sin embargo no nos ocuparemos de ella pues rebasa el objetivo de nuestra tesis.

5.6 Teorema de cambio de variable

Toda vez que hemos demostrado el teorema fundamental del cálculo en el marco de las integrales de Lebesgue, nuestra nueva diana será otro resultado clásico del cálculo elemental: el *teorema de cambio de variable*; nuestro primer paso en esta dirección es el siguiente lema de conjuntos invariantes bajo mapeos continuos.

Lema 5.4. *Sea $F : b[0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua tal que para cualquier $\varepsilon \in (0,1)$ y cualquier $x \in \partial b[0,1)$ se verifica*

$$|F(x) - x| < \varepsilon. \tag{5.40}$$

Entonces $b[0,1-\varepsilon) \subset F\big(b[0,1)\big)$.

Demostración. La prueba es por reducción al absurdo. Supóngase que existe $a \in b[0,1-\varepsilon)$ tal que $a \notin F\big(b[0,1)\big)$; luego por (5.40) para todo $x \in \partial b[0,1)$ se sigue $1-\varepsilon < |F(x)|$, en consecuencia $a \notin F\big(\partial b[0,1)\big)$ y por tanto $a \notin F\big(b[0,1]\big)$. Como consecuencia a estas obervaciones se deriva que el mapeo

$$\begin{aligned} G : b[0,1] &\to b[0,1] \\ x &\mapsto \frac{a - F(x)}{|a - F(x)|}, \end{aligned}$$

es continuo. Luego para $x \in \partial b[0,1)$ se cumple

$$x \cdot (a - F(x)) = x \cdot a + x \cdot \big(x - F(x)\big) - 1 < |a| + \varepsilon - 1 < 0.$$

Ello implica que $x \cdot G(x) < 0$, ya bien $x \neq G(x)$; más aún si $x \in b[0,1)$ entonces $x \neq G(x)$ ya que $G(x) \in \partial b[0,1)$. En virtud de ello G no tiene puntos fijos, lo que contradice el teorema del punto fijo de Brouwer.

■

La siguiente proposición formaliza la heurística planteada en la sección 1.3.

Proposición 5.10. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $F : U \to \mathbb{R}^n$ un mapeo continuo y diferenciable en un punto x_0, entonces*

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{m\big(F(b[x_0, r))\big)}{B(r)} = |\det F'(x_0)|. \tag{5.41}$$

Demostración. Debido a la invarianza bajo translaciones de la medida de Lebesgue, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ y $F(x_0) = 0$.

Hay dos casos a distinguir: $F'(0)$ es invertible o bien no lo es; supóngase inicialmente el primero de éstos, luego sea

$$\begin{aligned} G : U &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \big(F'(0)\big)^{-1} F(x). \end{aligned}$$

Por construcción se verifica $G'(0) = \mathrm{Id}$; luego basta probar que

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{m\big(G(b(0, r))\big)}{B(r)} = 1, \tag{5.42}$$

pues por la proposición 1.2 se tiene

$$m\Big(F\big(b[0,r)\big)\Big) = m\Big(F'(0)\, G\big(b[0,r)\big)\Big) = |\det F'(0)|\, m\Big(G\big(b[0,r)\big)\Big).$$

Por la diferenciabilidad de G, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in b[0,\delta)$ entonces

$$|G(x) - x| < \varepsilon |x|. \tag{5.43}$$

Se afirma que para $r \in (0, \delta)$ se valida

$$b\big[0, (1-\varepsilon) r\big) \subset G\big(b[0,r)\big) \subset b\big[0, (1+\varepsilon) r\big). \tag{5.44}$$

La primera contención se tiene de aplicar el lema 5.4 a $b[0,r)$ (ello en virtud de que se verifica $|G(x) - x| < \varepsilon r$); la segunda se sigue de (5.43) ya que $|G(x)| < (1+\varepsilon)|x|$.

Por último de (5.44) se deriva

$$(1-\varepsilon)^n \leq \frac{m\big(G(b[0,r))\big)}{B(r)} \leq (1+\varepsilon)^n,$$

lo que concluye (5.42).

Ahora bien si $F'(0)$ no es invertible, entonces la imagen de este operador tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$, luego por la regularidad de la medida m, dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para E_η definido como

$$E_\eta := \bigcup_{x \in F'(0)\big(b[0,1)\big)} b[x,\eta),$$

se cumple $m(E_\eta) < \varepsilon$. Nótese además que si se aplica una homotecia de razón r al conjunto E_η acontece

$$m\Big(\bigcup_{x \in F'(0)\big(b[0,1)\big)} b[x,r\eta)\Big) < \varepsilon\, r^n.$$

Por la diferenciabilidad de F en el origen, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in b[0,\delta)$ se satisface

$$|F(x) - F'(0)(x)| \leq \eta |x|.$$

Si $r \in (0,\delta)$ entonces $F\big(b[0,r)\big) \subset E_{\eta r}$; luego como $m(E_{\eta r}) < \varepsilon r^n$, se deriva

$$m\big(F(b[0,r))\big) < \varepsilon r^n. \tag{5.45}$$

Dado que $r^n = m\big(b[0,r)\big)/m\big(b[0,1)\big)$, entonces de la desigualdad (5.45) se sigue

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{m\big(F(b[0,r))\big)}{B(r)} = 0.$$

Por lo tanto se verifica la ecuación (5.41).

■

Teorema 5.9 (Cambio de variable para integrales de Lebesgue)**.** *Dados los subconjuntos X, U de $\mathbb{R}^n$ tales que X es Lebesgue medible, U es abierto, $X \subset U$, y dada $G : U \to \mathbb{R}^n$ continua, inyectiva y diferenciable en X con la propiedad*

$$m\big(G(U \setminus X)\big) = 0, \tag{5.46}$$

entonces para cualquier $f \in L^1(m)$ se satisface

$$\int_{G(X)} f\, dm = \int_X (f \circ G) |\det G'|\, dm. \tag{5.47}$$

Demostración. En virtud del corolario de la proposición 5.1 se puede asumir que X tiene medida positiva. La demostración se parte en los siguientes tres pasos.

(i) Si $E \in \mathscr{L}$ y $E \subset U$, entonces $G(E) \in \mathscr{L}$.

(ii) Para todo $E \in \mathscr{L}$ se verifica

$$m\big(G(E \cap X)\big) = \int_X 1_E |\det G'|\, dm.$$

(iii) Para todo $A \in \mathscr{L}$ se cumple

$$\int_{G(X)} 1_A \, dm = \int_X (1_A \circ G) |\det G'| \, dm.$$

Para probar (i) se mostrará que $G(E)$ se expresa como la unión de un conjunto nulo y un conjunto F_σ. Sean $E_0, E_1 \subset U$, $E = E_0 \cup E_1$ tales que E_0 es un conjunto de medida cero y E_1 un conjunto F_σ. De la ecuación (5.46) y de la completitud de la σ-álgebra de Lebesgue acontece $G(E_0 \setminus X) \in \mathscr{L}$, y además $m\big(G(E_0 \setminus X)\big) = 0$; luego por el corolario de la proposición 5.1 se tiene que $G(E_0 \cap X) \in \mathscr{L}$ y en este caso también se cumple $m\big(G(E_0 \cap X)\big) = 0$. En virtud de que G es inyectiva se verifica la igualdad

$$G\big(E_0\big) = G\big((E_0 \setminus X) \sqcup (E_0 \cap X)\big) = G\big(E_0 \setminus X\big) \sqcup G\big(E_0 \cap X\big).$$

Por cuanto $G(E_0) \in \mathscr{L}$, más aún $m\big(G(E_0)\big) = 0$. Por otro lado existe una sucesión (C_i) de conjuntos cerrados tales que $E_1 = \bigcup_i C_i$, ya bien cada C_i es un conjunto σ-compacto pues $C_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \big(C_i \cap b[0,k]\big)$; ello que implica que E_1 es un conjunto σ-compacto y por la continuidad de G se infiere que $G(E_1)$ es un conjunto σ-compacto, lo que valida $G(E_1) \in \mathscr{L}$. Por lo tanto $G(E) = G(E_0 \cup E_1) = G(E_0) \cup G(E_1) \in \mathscr{L}$, y se concluye (i).

Se probará ahora (ii). Por el teorema de invarianza del dominio (se recuerda el enunciado: dada $f : V \to \mathbb{R}^n$ donde $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, y f continua e inyectiva, acontece que $f(V)$ es abierto) se sigue que $G(U)$ es abierto. Luego para $k \in \mathbb{N}$ se define la sucesión

$$U_k := \bigcup_{x \in U} \big(G(U) \cap b[x,k)\big).$$

Asociada a esta familia de abiertos, se define la sucesión de conjuntos de medida finita $X_k := X \cap U_k$, y con ella se define también la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} \mu_k : \mathscr{L} &\to [0,\infty] \\ E &\mapsto m\big(G(E \cap X_k)\big). \end{aligned}$$

Se afirma que para toda $k \in \mathbb{N}$ el mapeo μ_k es una medida positiva finita: es claro por construcción que μ_k mapea el vacío al cero y que es acotada; la σ-aditividad se sigue en virtud de la inyectividad de G

$$\mu_k\big(\sqcup_i E_i\big) = m\Big(G\big((\sqcup_i E_i) \cap X_k\big)\Big) = m\Big(G\big(\sqcup_i (E_i \cap X_k)\big)\Big) = m\Big(\sqcup_i \big(G(E_i \cap X_k)\big)\Big).$$

Por el corolario de la proposición 5.1 se deriva que $\mu_k \ll m$, luego por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym se verifica $d\mu_k = f_k dm$, donde $f_k \in L^1(m)$; más aún se satisfacen las hipótesis de la proposición 5.6, lo que implica que $D\mu_k$ existe salvo quizá en un conjunto nulo, $f_k = D\mu_k$ y para cualquier $E \in \mathscr{L}$ se cumple

$$\mu_k(E) = \int_E D\mu_k \, dm. \tag{5.48}$$

Se mostrará ahora que para todo $x \in X_k$ se valida

$$(D\mu_k)(x) = |\det G'(x)|. \tag{5.49}$$

Por construcción se satisface $U_k \setminus X_k \subset U \setminus X$. Luego de la inyectividad de G, y de la hipótesis (5.46) se sigue que para cualquier conjunto $E \in \mathscr{L}$

$$\begin{aligned} m\big(G\big(E \cap U_k\big)\big) &= m\big(G\big(E \cap (U_k \setminus X_k)\big) \sqcup (E \cap X_k)\big)\big) \\ &= m\big(G\big(E \cap (U_k \setminus X_k)\big)\big) + m\big(G\big(E \cap X_k\big)\big) = \mu_k(E). \end{aligned}$$

Ello implica que se puede reemplazar a X_k por U_k en la definición de μ_k. Ahora bien sea $x_0 \in X_k$, luego como U_k es abierto existe $b[x_0, r)$ tal que $b[x_0, r) \subset U_k$; por construcción se verifica la igualdad

$$\frac{\mu_k\big(b[x_0, r)\big)}{B(r)} = \frac{m\big(G\big(b[x_0, r)\big)\big)}{B(r)}.$$

Luego aplicando la proposición 5.10 se obtiene (5.49), ello aunado a la ecuación (5.48) permite derivar

$$m\big(G(E \cap X_k)\big) = \int_{X_k} 1_E |\det G'|\, dm. \tag{5.50}$$

Así pues al aplicar el teorema de la convergencia monótona cuando $k \to \infty$, se obtiene la parte (ii) de la prueba.

Por último se demostrará el inciso (iii). Sea A un boreliano, es fácil ver que $1_{G^{-1}(A)} = 1_A \circ G$; dado que 1_A es una función Borel-medible y G es continua se infiere que $1_{G^{-1}(A)}$ es Borel medible, y por tanto $G^{-1}(A) \in \mathscr{L}$. Además por la inyectividad de G se verifica

$$G\big(G^{-1}(A) \cap X\big) = A \cap G(X). \tag{5.51}$$

La ecuación (5.51) aunado al inciso (ii), implican que para toda $A \in \mathscr{B}$ se verifica

$$\int_{G(X)} 1_A\, dm = m\big(G\big(G^{-1}(A) \cap X\big)\big) = \int_X 1_{G^{-1}(A)} |\det G'|\, dm. \tag{5.52}$$

Finalmente si $N \in \mathscr{L}$ es un conjunto nulo, entonces existe un boreliano A que contiene a N y que también tiene medida cero; luego de (5.52) se sigue que $(1_A \circ G)|\det G'| = 0$ *c.s.* Como $0 \leq 1_N \leq 1_A$ se infiere que con respecto a (5.52) ambas integrales se anulan si A es reemplazado por N; en virtud de que un conjunto Lebesgue-medible se descompone con la unión disjunta de un boreliano con un conjunto nulo, se satisface (5.52) para cualquier conjunto A Lebesgue-medible, lo que completa la parte (iii) de la prueba.

Dada $f \in L^1(m)$, la validez de (5.47) se sigue del inciso (iii) al aplicar el teorema de la convergencia dominada a una sucesión de funciones escalón que converge puntualmente a f.

$\blacksquare$

Bibliografía

[Adams and Fournier, 2003] Adams, R. and Fournier, J. (2003). *Sobolev Spaces*. Academic Press, second edition.

[Bruckner, 1971] Bruckner, A. M. (1971). *Differentiation of integrals*. Herbert Ellsworth Slaught Memorial Papers, Amer. Math. Monthly, 78(9).

[Cohen, 2012] Cohen, D. W. (2012). *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*. Springer-Verlag New York, Inc.

[Cohn, 2013] Cohn, D. L. (2013). *Measure theory*. Springer-Verlag.

[Folland, 1999] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, second edition.

[Halmos, 1950] Halmos, P. R. (1950). *Measure Theory*. Springer-Verlag.

[Jahnke, 2003] Jahnke, H. N. (2003). *A History of Analysis*. Number 24 in History of Mathematics. American Mathematical Society.

[Lang, 1993] Lang, S. (1993). *Real and Funtional Analysis*. Springer-Verlag New York, Inc., third edition.

[O'Searcoid, 2012] O'Searcoid, M. (2012). *Elements of Abstract Analysis*. Springer-Verlag New York, Inc.

[Riesz and Nagy, 1956] Riesz, F. and Nagy, B. S. (1956). *Functional Analysis*. Blackie & Son Limited. Translated from the second French ed. by Boron, L.

[Rudin, 2006] Rudin, W. (2006). *Real and Complex Analysis*. Tata McGraw-Hill Education, third edition.

[Simon, 2015] Simon, B. (2015). *Real Analysis. A Comprehensive Course in Analysis, Part 1*. American Mathematical Society.

[Tao, 2010] Tao, T. (2010). *An Epsilon of Room, I: pages from year three of a mathematical blog*. Citeseer.