



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

CONTROLABILIDAD DE LA ECUACIÓN DE POISSON
DONDE EL CONTROL ES EL DOMINIO DE DEFINICIÓN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

P R E S E N T A :

CIPRIANO CALLEJAS HERNÁNDEZ

ASESORA



DRA. MARÍA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA
SANTA CRUZ ACATLÁN ESTADO DE MÉXICO, AGOSTO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos



- ☞ A la Dra. *Luz de Teresa*, por su paciencia, apoyo y motivación. Este trabajo no sería posible sin su tutoría, y también porque sus enseñanzas y consejos me han ayudado tanto profesional como personalmente.
- ☞ A la Mtra. *Jeanett López*, porque sin ella no hubiera descubierto el interés por las ecuaciones diferenciales, así como la educación matemática. Sin duda una excelente profesora y consejera.
- ☞ Al Dr. *Enrique Loyola*, su pasión por las matemáticas es contagiosa, y sin él, no habría tenido el coraje de estudiar temas más avanzados.
- ☞ Al Dr. *Alberto Saldaña*, por sus valiosos consejos y ayuda en la realización de este trabajo.
- ☞ Al Lic. *Axel Saavedra*, por las valiosas observaciones a este trabajo.
- ☞ A las dos mujeres más importantes de mi vida: *Gloria Hernández e Irene Callejas*, madre y hermana. Ustedes son mis pilares.
- ☞ A todos lxs amigxs que estuvieron conmigo tanto en la carrera como durante la realización de este trabajo. Gracias por todas las risas y aventuras.

Índice general

Introducción	4
1 Espacios clásicos de funciones	10
1.1. Espacios de Lebesgue	12
2 Espacios de Sobolev	18
2.1. Espacios de Sobolev	19
2.2. Espacios de Sobolev Fraccionarios	31
3 Ecuaciones Diferenciales Elípticas de Segundo Orden	36
3.1. Regularidad en L^p	45
4 Diseño óptimo	50
4.1. Derivada local de una función en un conjunto variable	54
4.2. Diferenciación de un problema de contorno	59
4.3. Aplicación: condensador eléctrico de mínima capacidad	66
5 Control de la ecuación de Poisson	76
5.1. Relación con la literatura existente	77
5.2. Densidad del rango de $d\Lambda(0)$	84

Conclusiones	91
Apéndice A Álgebras de Banach	93
Apéndice B Diferenciación de funciones compuestas	96
Bibliografía	110

Introducción

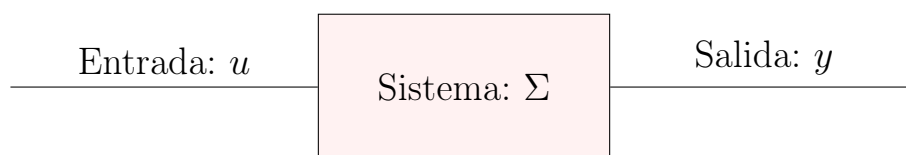


Figura 1: Sistema Entrada-Salida

La teoría de control es una rama de la ingeniería que estudia sistemas de tipo entrada-salida como en la Figura 1, en donde controlar el sistema Σ significa actuar sobre él para que se comporte de manera deseada, por ejemplo, determinar un control (entrada) u tal que la salida y , verifique $y = y_d$, con y_d un dato prescrito. Cuando Σ está descrito por un modelo matemático hablamos de la teoría matemática del control. Así Σ puede estar definido por una ecuación diferencial ordinaria/parcial, con retraso o estocástica. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Ecuación de calor unidimensional

Sean $T > 0$ y $u^0 \in L^2(0, \pi)$ consideremos la ecuación del calor.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h & (0, T) \times (0, \pi), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in (0, T), \\ u(0, x) = u^0(x) & x \in (0, \pi). \end{array} \right. \quad (1)$$

Decimos que (1) es controlable a cero si existe un control $h \in L^2((0, T) \times (0, \pi))$, tal que para todo dato inicial u^0 se tenga que la solución $u(T) = 0$, ver [1, Sección 2.5]. Una interpretación física de esto es calentar una varilla de longitud π internamente, por ejemplo, como lo que haría un horno de microondas, y el objetivo es conseguir una fuente de calor h , tal que la distribución (o temperatura) de calor u sea cero, es decir, se enfríe, para algún tiempo $T > 0$ determinado.

Ejemplo 2. The Rocket Car

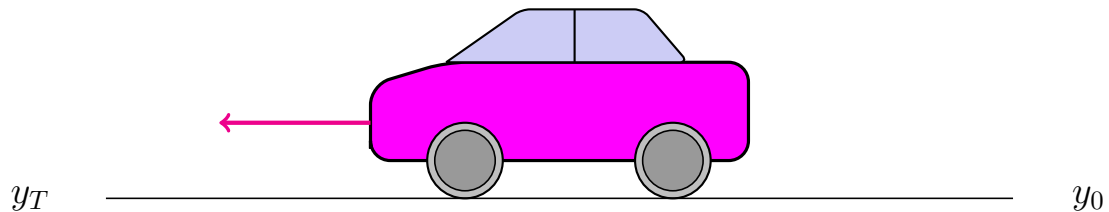
Consideramos un automóvil de masa unitaria que se mueve de un punto a otro (de y_0 a y_T), se desea determinar la manera para que llegue al otro extremo en un tiempo mínimo. Denotemos por y su posición y suponiendo que en los extremos el automóvil se encuentra en reposo, entonces por la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la fuerza¹ u es el control, el problema se expresa de la siguiente forma:

$$\text{mín } T > 0$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} y''(t) = u(t), & y(T) = y_T, \\ y'(0) = 0, & y'(T) = 0, \\ y(0) = y_0, & |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$

Gráficamente esta situación se puede ilustrar en la siguiente figura.



Existen diferentes vertientes en la teoría de control, listamos algunas de ellas:

¹Suponemos además que no existen otras fuerzas físicas que interfieren en el movimiento del automóvil.

- **Controlabilidad:** conducir el sistema (Σ) de una configuración inicial a una final (Ejemplo 1).
- **Control óptimo:** Minimizar o maximizar un funcional que depende de la solución y del control (Ejemplo 2), ver [2, Capítulo 1].
- **Estabilización:** Que las trayectorias (o estado) del sistema decaigan cuando $t \rightarrow \infty$ de manera determinada (exponencialmente, polinomial, etc.), ver [3, Capítulo 8].
- **Observabilidad:** Reconstruir un estado (o salida) a partir de datos parciales, ver [4].

En todas las vertientes existen problemáticas de control donde el tiempo es un dato importante [1, Capítulo 1]. En particular, el concepto de controlabilidad se encuentra estrechamente relacionado con el tiempo.

Por otro lado, el diseño óptimo u optimización de forma es una rama del control óptimo, en la cual el control es un dominio o forma Ω . En concreto, se busca Ω^* en una familia de dominios admisibles Ω_{ad} , de manera que el funcional $\mathcal{J} : \Omega_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ dado, verifique

$$\mathcal{J}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \Omega_{ad}} \mathcal{J}(\Omega). \quad (2)$$

Como es común en problemas de optimización, la derivada juega un papel importante para determinar condiciones necesarias para los dominios óptimos. No obstante, notemos que Ω_{ad} carece estructura afín normada con lo que no tiene sentido alguno

hablar de la derivada para la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \Omega_{ad} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega &\mapsto \mathcal{J}(\Omega). \end{aligned} \tag{3}$$

Más aún, incluso cuando se pueden escoger distintas topologías para Ω_{ad} , en principio esto es irrelevante para demostrar la existencia de Ω^* , de hecho se requieren de fuertes condiciones geométricas, ver Buttazzo G. [5, Capítulo 5] y Pironneau O. [6, Capítulo 3], con lo que se debe debilitar a (2) para, en el mejor de los casos, hablar de compacidad en Ω_{ad} y/o convexidad en \mathcal{J} .

Sin embargo, existen técnicas que permiten transformar el funcional (3) a

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\mapsto \mathcal{J}(\varphi), \end{aligned} \tag{4}$$

donde \mathcal{E} es un espacio normado (preferentemente completo y regular), esto con el objetivo de hacer uso del análisis funcional.

En esta tesis estudiaremos dos trabajos relacionados a la optimización de forma. En primera instancia estudiaremos el diseño de un condensador eléctrico de mínima capacidad. Posteriormente abordaremos el problema principal de este trabajo: estudiaremos el siguiente problema de controlabilidad planteado por Chenais D. y Zuazua E. en [7].

Consideremos la ecuación de Poisson con $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y condiciones Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

y un dato prescrito $u_d \in H^1(\omega)$, para un abierto $\omega \subset\subset \Omega$ dado. Se desea determinar un dominio Ω^* tal que la solución de (5) verifique

$$u_{\Omega^*} \Big|_{\omega} = u_d. \tag{6}$$

En [8], Chenais D. demuestra la existencia de Ω^* mediante el problema de optimización

$$\min_{\Omega} \mathcal{J}(\Omega) = \|u|_{\omega} - u_d\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mientras que Osses A. y Puel J. en [9], muestran un resultado de controlabilidad para la ecuación (5) donde el control actúa en la frontera de Ω . Recientemente en [7], Chenais D. y Zuazua E. mostraron que (6) no es posible, pero sí una versión débil, es decir, resuelven $\left\| u_{\Omega^*}|_{\omega} - u_d \right\| \leq \epsilon$, para cualquier $\epsilon > 0$ dado. A esto se le denomina un problema de controlabilidad aproximada.

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera:

1. En el Capítulo 1 introducimos brevemente los espacios de funciones k veces continuamente diferenciables, $C^k(\Omega)$, así como los conceptos de continuidad en el sentido de Hölder y Lipschitz. Más aún, definimos los espacios de funciones (Lebesgue) integrables, $L^p(\Omega)$ y el espacio de las funciones prueba, $\mathcal{D}(\Omega)$, así como algunos resultados de aproximación.
2. En el Capítulo 2 se definirán los espacios de Sobolev, $W^{k,p}(\Omega)$, espacios en los que las soluciones de EDP viven naturalmente. Demostramos el teorema de la traza puesto que será de vital importancia para probar el problema de control. También estudiaremos los espacios de Sobolev fraccionarios, necesarios para generalizar el teorema de la traza.
3. En el Capítulo 3 se tratará la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones para ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden. Nos centraremos en un resultado de regularidad en $L^p(\Omega)$ y damos una nueva versión a la clásica demostración encontrada en [10]. El objetivo de este capítulo

será mostrar que operador de Laplace, $-\Delta$, resulta ser un isomorfismo entre $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$.

4. En el Capítulo 4 introducimos la teoría de diseño óptimo para EDP con valores en la frontera. En particular, estudiaremos el problema de minimizar la capacidad de un condensador eléctrico en donde ejemplificamos el uso de la técnica «*diferenciación respecto del dominio*». Esto es, la herramienta que permite transformar la aplicación (3) en (4).
5. Finalmente, en el Capítulo 5, retomaremos el problema (5) y lo trataremos como un problema de controlabilidad, esto requerirá trabajar con una aplicación del estilo (3), con lo que, mediante la técnica antes mencionada, podremos demostrar que el problema (6) no es posible, por lo que se debilitará a uno de controlabilidad aproximada.

Espacios clásicos de funciones

En este capítulo mostraremos algunos espacios que serán de utilidad para el desarrollo del problema de control, a estos se les conocen en la literatura como espacios clásicos.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(\Omega)$ como

$$\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}^0(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ es continua} \right\}.$$

Definición 1. *Un multiíndice es una n tupla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ donde α_i para $i = 1, \dots, n$ es un entero positivo. Además, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.*

Se establece el operador diferencial D^α con α un multiíndice como

$$D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Así, definimos los espacios de funciones k veces diferenciables $\mathcal{C}^k(\Omega)$, para k un entero, de forma recursiva como

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega) : D^\alpha u \in \mathcal{C}(\Omega), |\alpha| = k \right\}.$$

Si Ω es acotado, entonces $\overline{\Omega}$ es compacto con lo que los espacios $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ son espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \left\{ \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^{\alpha}u(x)| \right\}.$$

Sin embargo, esto cambia drásticamente cuando Ω no es acotado o si se considera una norma diferente, por ejemplo, se puede probar que el espacio $\mathcal{C}([a, b])$ con la norma $\|u\| = \int_a^b |u(x)| dx$ no es completo.

Existen criterios de continuidad más restrictivos, como lo es ser Hölder continua o Lipschitz continua.

Definición 2 (Funciones Hölder continuas). Sea $\alpha \in (0, 1]$. Una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice Hölder continua si

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} : x \neq y \in \Omega \right\} < \infty.$$

El espacio de todas las funciones Hölder continuas se denota $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Nuevamente, cuando Ω es acotado, podemos considerar la norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_{\infty} + [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Así, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ es un espacio de Banach. En particular, cuando $\alpha = 1$, se dice que u es Lipschitz continua, esto da cabida a los siguientes espacios.

Definición 3 (Funciones Lipschitz continuas). Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, decimos que $u \in \text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ si u es acotada y globalmente Lipschitz, es decir:

(Acotada) Existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$\|u(x)\| \leq C_0.$$

(Globalmente Lipschitz) Existe una constante $C_1 \geq 0$ tal que para todo $x, y \in \Omega$ se tiene que

$$\|u(x) - u(y)\| \leq C_1 \|x - y\|.$$

Cuando $m = 1$, escribimos $\text{Lip}(\Omega)$. Más aún, u está en $\text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ si y sólo si todas las funciones componentes están en $\text{Lip}(\Omega)$.

1.1. Espacios de Lebesgue

Nos restringiremos a la medida de Lebesgue $|\Omega|$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible, y por tanto las integrales se entenderán con respecto a la misma. Para un estudio más general sobre teoría de la medida consultar [11, 12, 13, 14].

Definimos

$$\mathcal{L}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ medible, } \int_{\Omega} |u| < \infty \right\}.$$

Desafortunadamente $\mathcal{L}(\Omega)$ con $\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)| dx$ no es un espacio normado, pues existen funciones para las cuales $\rho(u) = 0$ pero $u \neq 0$. Sin embargo se pueden construir clases de equivalencia \sim de forma apropiada de tal manera que el espacio cociente $L^1(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega) / \sim$ es un espacio vectorial normado con la norma $\|u\|_{L^1(\Omega)} = \rho([u])$, ver [11, Proposición 5.5].

Definición 4. Sea $1 \leq p < \infty$, definimos los espacios vectoriales

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

con norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Cuando $p = \infty$ tenemos que

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \text{ c.s. en } \Omega \right\},$$

con norma

$$\text{ess sup } |u| = \inf \left\{ C \geq 0 : |u| \leq C \text{ c.s. en } \Omega \right\}.$$

Teorema 1 (Desigualdad de Young). Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Ver [13, Teorema 8.4]. ■

Teorema 2 (Desigualdad de Hölder). Sean $p \in [1, \infty]$ y q tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Entonces para $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ se tiene que $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Demostración. Ver [13, Teorema 8.6]. ■

Teorema 3 (de Riesz-Fischer). Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [11, Teorema 5.9]. ■

Decimos que una sucesión de funciones $(u_n)_{n \geq 1}$ converge a u en $L^p(\Omega)$ si y sólo si $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$, en general, la convergencia puntual y en norma no son equivalentes, véase la discusión en [15, pág. 247].

Definición 5. Decimos que ω está **fuertemente contenido** en Ω si: $\omega \subset \Omega$ y se cumple que $\bar{\omega} \subset \Omega$, denotado por $\omega \subset\subset \Omega$.

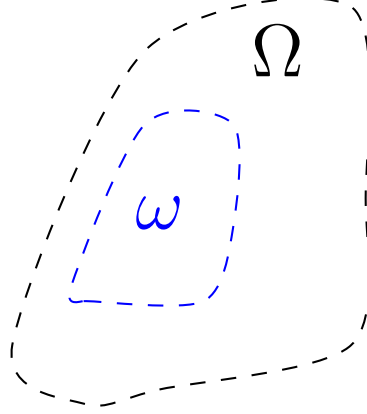


Figura 2: Descripción gráfica de un conjunto fuertemente contenido.

Definición 6. Decimos que f es *localmente integrable* si $f \in L^p(K)$ para todo $K \subset\subset \Omega$. Formalmente es el conjunto definido como

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \in L^p(K) : \forall K \text{ compacto}, K \subset \Omega\}.$$

Notemos que si $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ esto no implica que $u \in L^p(\Omega)$, para ello considérese la función $u(x) = 1$ definida en $\Omega = \mathbb{R}$. Sin embargo, sí se tiene la contención contraria $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

Definición 7. El **soporte** de una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la cerradura del conjunto donde la función no es cero, denotado por $\text{sop}(u)$. Es decir,

$$\text{sop}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Definición 8. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $\mathbb{R} \ni r > 0$ y $x_0 \in X$. Denotamos por $B(x_0, r)$ a la bola abierta con centro en x_0 y radio r , es decir,

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\},$$

y su cerradura, $\overline{B(x_0, r)}$, la bola cerrada, como

$$\overline{B(x_0, r)} = \left\{ x \in X : \|x - x_0\| \leq r \right\}.$$

Definición 9. El espacio de **funciones prueba** es el conjunto de funciones continuamente infinito diferenciables con soporte compacto, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(u) \text{ compacto, } \text{sop}(u) \subset \Omega\}$$

El siguiente ejemplo muestra que $\mathcal{D}(\Omega)$ no es vacío.

Ejemplo 1. Sea la función $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\left\{ \frac{-1}{1 - \|x\|^2} \right\}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, notemos que $\text{sop}(\varphi) = \overline{B(0, 1)}$, por otro lado si $\|x\| \rightarrow 1$ con $\|x\| < 1$ entonces $\frac{-1}{1 - \|x\|^2} \rightarrow -\infty$ y $\varphi(x) \rightarrow 0$. Para mostrar que es continuamente diferenciable notemos que

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \frac{-2x_i}{(1 - \|x\|^2)^2} \varphi(x) \quad \text{luego, por inducción} \quad D^\alpha \varphi = \frac{P_\alpha(x)}{(1 - \|x\|^2)^{2|\alpha|}} \varphi(x),$$

para P_α un polinomio, cuando $\|x\| \rightarrow 1$ para $\|x\| < 1$ la exponencial decae más rápido que el término $\frac{1}{(1 - \|x\|^2)^{2|\alpha|}}$ tal que $D^\alpha \varphi \rightarrow 0$, esto prueba que las derivadas son continuas.

Definición 10. Una sucesión regularizante (*mollifier en inglés*) es una sucesión $(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_n \geq 0, \quad \text{sop}(\varphi_n) \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})}, \quad \int_{\Omega} \varphi_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fijemos un entero positivo k y $1 \leq p < \infty$. Definimos el conjunto

$$\Omega_\epsilon = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon \right\}$$

y escribimos $\varphi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ donde φ es la función (1.3).

Definición 11. Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos su regularización como

$$u^\epsilon := \varphi_\epsilon * u \quad \text{en } \Omega_\epsilon,$$

esto es,

$$u^\epsilon(x) = \int_{\Omega} \varphi_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \varphi_\epsilon(y)u(x-y)dy, \quad x \in \Omega_\epsilon. \quad (1.4)$$

Teorema 4 (Propiedades de las sucesiones regularizantes). Sea u^ϵ la regularización de u , entonces,

(a) $u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

(b) $u^\epsilon \rightarrow u$ c.s. en Ω cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

(c) Si $u \in C(\Omega)$, entonces $u^\epsilon \rightarrow u$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω .

(d) Para $1 \leq p < \infty$, si $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ entonces $u^\epsilon \rightarrow u$ en $L^p_{loc}(\Omega)$.

Demostración. [16, Teorema 6, pág. 630]. ■

Teorema 5. $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Ver [17, Proposición 2.7]. ■

Corolario 1. Sea $u \in L^2(\Omega)$ y suponga que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene que,

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0,$$

entonces $u \equiv 0$.

Demostración. Ver [15, Corolario 19.25]. ■

Espacios de Sobolev

Decimos que Ω es un dominio si Ω es un conjunto abierto, acotado y conexo de \mathbb{R}^n . En particular nos interesan aquellos denominados dominios suaves.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$x = (x', x_n), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Consideremos $|x|$ como la norma usual para \mathbb{R}^n , definimos los conjuntos

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x_n > 0\},$$

$$Q = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1, |x_n| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^n,$$

$$Q_0 = \{x = (x', 0) : |x'| < 1\}.$$

Definición 12. Se dice que Ω es de clase C^k si para cada $x \in \partial\Omega$, existe una vecindad \mathcal{O} de \mathbb{R}^n y una aplicación biyectiva $\eta : Q \rightarrow \mathcal{O}$ tal que

$$\eta \in C^k(\overline{Q}), \quad \eta^{-1} \in C^k(\overline{\mathcal{O}}), \quad \eta(Q_+) = \mathcal{O} \cap Q, \quad \eta(Q_0) = \mathcal{O} \cap \partial\Omega.$$

A η se le llama carta (o coordenada) local.

Definición 13. Sea $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$, decimos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{sop}(\varphi_n) \subset K$ y si $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente en K para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definición 14. Una distribución es un funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continuo, es decir, $T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T\varphi_1 + \beta T\varphi_2$ y si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $T\varphi_n \rightarrow T\varphi$.

A partir de ahora denotamos $T\varphi$ por (T, φ) y al espacio de distribuciones en Ω se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 15. Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución, entonces la aplicación

$$\varphi \rightarrow (-1)^{|\alpha|}(T, D^\alpha \varphi)$$

define una distribución, llamada **derivada distribucional** y denotada por $D^\alpha T$.

Es decir,

$$(D^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(T, D^\alpha \varphi). \quad (2.1)$$

Definición 16 (Convergencia en el sentido de distribuciones). Sea $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, decimos que $T_n \rightarrow T$ en $\mathcal{D}(\Omega)'$ si y sólo si $(T_n, \varphi) \rightarrow (T, \varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Lema 1 (Unicidad). La derivada distribucional de T , si existe, es única casi siempre.

Demostración. Ver [16, Lema pág. 243]. ■

Para un estudio más detallado en la teoría de distribuciones consultar [18].

2.1. Espacios de Sobolev

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero no negativo.

Definición 17. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste en todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ cuyas derivadas distribucionales o débiles $D^\alpha u$ se encuentran en $L^p(\Omega)$.
i.e.

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k \right\}. \quad (2.2)$$

Definición 18. Dotamos los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty, \quad (2.3)$$

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \quad \text{para } p = \infty. \quad (2.4)$$

Se puede mostrar que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ y $\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$ son normas para los espacios de Sobolev correspondientes y además $W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ son espacios de Banach [16, Teorema 2, pág.239].

Los siguientes espacios de Sobolev son de particular interés.

- Los espacios de Hilbert $H^k(\Omega)$ donde

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

y la norma es inducida por el producto escalar

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \cdot D^\alpha v(x) dx.$$

Particularmente para $k = 1$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega) \right\}$$

donde el gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ se entiende en el sentido débil.

- El espacio de funciones que se anulan en la frontera $W_0^{k,p}(\Omega)$.

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{ \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ bajo la topología de } W^{k,p}(\Omega) \right\},$$

i.e. $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si existe una sucesión $(u_n)_{n \geq 1} \subset D(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. En particular, $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Definimos

$$W_{loc}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k,p}(\omega) : \omega \text{ compacto, } \omega \subset \Omega \right\}.$$

Se tienen los siguientes resultados de aproximación por funciones suaves.

Teorema 6 (Aproximación local). *Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y su regularización $u^\epsilon = \varphi_\epsilon * u$ en Ω_ϵ . Entonces*

$$u^\epsilon \rightarrow u \text{ en } W_{loc}^{k,p}(\Omega) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Demostración. Ver [16, Teorema 1, pág. 250]. ■

Teorema 7 (Aproximación global). *Sea Ω acotado y $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $(u_n)_{n \geq 1} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tal que*

$$u_n \rightarrow u \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Demostración. Ver [16, Teorema 2, pág. 251]. ■

Teorema 8 (Aproximación hasta la frontera). *Sea $1 \leq p < \infty$, Ω acotado de clase C^1 y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $(u_n)_{n \geq 1} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que*

$$u_n \rightarrow u \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Demostración. Ver [16, Teorema 3, pág. 252]. ■

El objetivo del siguiente resultado es extender funciones de $W^{k,p}(\Omega)$ a $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 9 (Operador extensión). *Suponga $1 \leq p \leq \infty$, Ω es acotado y de clase C^1 , consideremos un conjunto abierto V tal que $\Omega \subset\subset V$ entonces existe un operador lineal*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(I) $Eu = u$ c.s. en Ω .

(II) $\text{sop}(Eu) \subset V$.

(III) *Existe una constante $C = C(n, p, \Omega, V)$ tal que*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Llamamos a Eu la extensión de u a \mathbb{R}^n .

Demostración. Ver [16, Teorema 1, pág. 254] ■

Este resultado se puede generalizar para los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ ver [19].

Operador traza

Suponga que $u \in C(\bar{\Omega})$, entonces los valores de u sobre la frontera están bien definidos, sin embargo, las funciones en los espacios de Sobolev pueden no ser continuas, o incluso sólo estar definidas casi por doquier en Ω . Más aún, la frontera de un abierto tiene medida de Lebesgue cero, de esta manera no hay un significado directo para decir que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ toma valores en $\partial\Omega$.

Para los objetivos de este trabajo, definimos el espacio

$$L^p(\partial\Omega) = \left\{ u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\partial\Omega} |u|^p < \infty \right\},$$

con $1 \leq p < \infty$, para un estudio más detallado ver [20, 21].

Teorema 10 (De la traza). *Suponga que $1 \leq p < \infty$, Ω acotado y de clase C^1 . Entonces existe un operador lineal y acotado,*

$$\text{tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces $\text{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}$.
2. para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existe una constante $C > 0$ que depende de p y Ω tal que

$$\|\text{tr}(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde a $\text{tr}(u)$ se le llama la traza de u sobre $\partial\Omega$.

Demostración. Si definimos el operador

$$\begin{aligned} \text{tr} : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^p(\partial\Omega), \\ u &\mapsto \text{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

entonces por densidad, este puede ser extendido a un operador lineal continuo de manera única¹, que denotaremos de la misma manera,

$$\begin{aligned} \text{tr} : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\partial\Omega), \\ u &\mapsto \text{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

¹La densidad es una condición necesaria para la unicidad, de no ser así, la extensión se sigue por Hahn-Banach. Ver [Teorema de extensión continua](#).

En efecto, por el Teorema 8, sabemos que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$. En consecuencia, basta probar que el operador (2.5) es continuo.

Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Paso 1. Consideremos primero cuando

$$\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\},$$

el caso general se seguirá usando una transformación local. En efecto, supongamos que alrededor de $x^0 \in \partial\Omega$, la frontera es plana y se encuentra sobre el plano $\{x_n = 0\}$. Ver Figura 3. Entonces existe una bola abierta B con centro en x^0 y radio $r > 0$ tal que

$$B^+ := B \cap \{x_n > 0\} \subset \Omega,$$

$$B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Tomemos \hat{B} , la bola concéntrica con radio $\frac{r}{2}$.

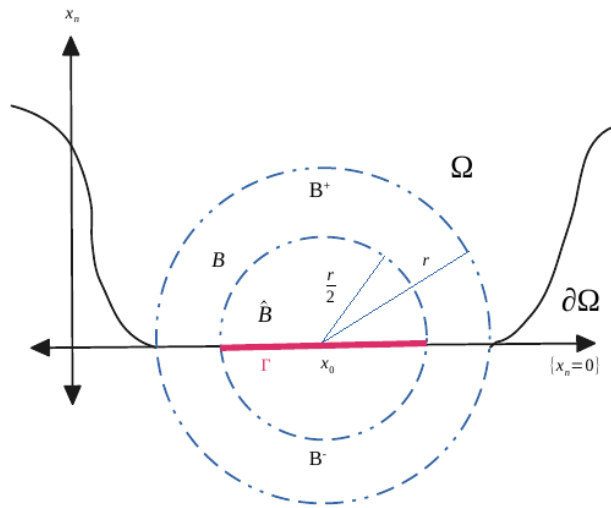


Figura 3: Descripción local de $\partial\Omega$.

Mostremos que

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C(p, B^+) \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}. \quad (2.6)$$

donde Γ es la parte de $\partial\Omega$ que se queda contenida en \hat{B} .

Sean la función $\xi \in \mathcal{D}(B)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ en B y $\xi \equiv 1$ en \hat{B} . Así, se tiene que $\text{sop}(\xi u) \subset B^+$ y $\xi u = u$ en Γ . Sea $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$.

Por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$\xi u(x', 0) = - \int_0^\infty \frac{\partial(\xi u(x', t))}{\partial x_n} dt.$$

Además, para $a, b > 0$, $|a + b|^p = 2^p \left| \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right|^p$ y por la convexidad de la función $h(x) = x^p$ es sencillo mostrar que

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p). \quad (2.7)$$

De esta manera, usando la desigualdad de Hölder, considerando que

$$\left| \frac{\partial \xi u(x', t)}{\partial x_n} \right|^p = \left| \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x_n} u(x', t)}_a + \underbrace{\xi \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)}_b \right|^p,$$

con lo que, por (2.7), se tiene que

$$\begin{aligned} |\xi u(x', 0)|^p &\leq \left(\int_0^\infty \frac{\partial(|\xi u(x', t)|)}{\partial x_n} dt \right)^p \\ &\leq r^{p-1} \int_0^\infty \frac{\partial(|\xi u(x', t)|^p)}{\partial x_n} dt \\ &\leq (2r)^{p-1} \int_0^\infty \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_n} u(x', t) \right|^p + \left| \xi \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^p dt. \end{aligned}$$

Integrando sobre Γ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} |\xi u(x', 0)|^p &\leq (2r)^{p-1} \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_n} u(x', t) \right|^p + \left| \xi \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^p dt dx' \\
&\leq C(p, B^+) \int_{B^+} |u(x)|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx \\
&\leq C(p, B^+) \int_{B^+} |u(x)|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \\
&\leq C(p, B^+) \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.
\end{aligned}$$

donde $C(p, B^+) = (2r)^{p-1} \max\{\|\xi\|_{\infty} + \|\xi_{x_n}\|_{\infty}\}$. Esto prueba (2.6).

Paso 2. Para el caso general, si alrededor x^0 la frontera no es plana, podemos considerar por la regularidad de Ω , una función que aplane dicha parte. En concreto, para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe un abierto W , bola abierta $B(x_0, r)$ y un diffeomorfismo $\varphi : B(x_0, r) \rightarrow W$ de clase C^1 tal que

$$\begin{aligned}
\varphi(B(x_0, r) \cap \Omega) &= W \cap \{x_n > 0\}, \\
\varphi(B(x_0, r) \cap \partial\Omega) &= W \cap \{x_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Ver Figura 4. De esta manera, por el mismo argumento del paso 1, y regresando a las coordenadas originales se tiene que

$$\int_{\Gamma} |u|^p dS \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \tag{2.8}$$

donde Γ es un subconjunto de $\partial\Omega$.

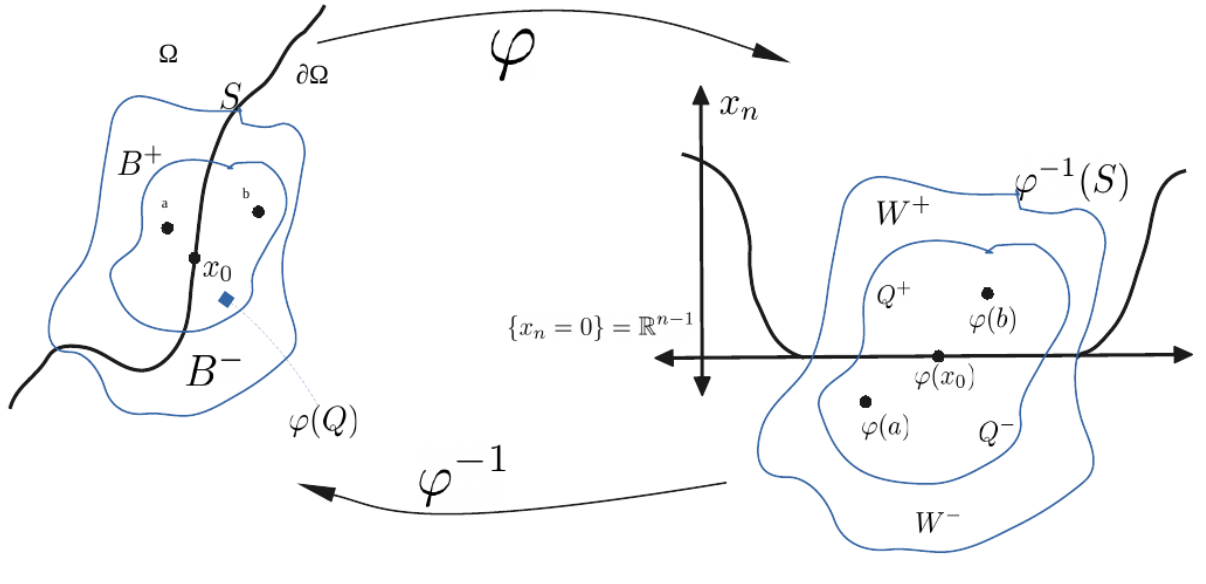


Figura 4: Transformación local.

Paso 3. Luego, como $\partial\Omega$ es compacto, existe una cubierta abierta finita de subconjuntos Γ_i de $\partial\Omega$, tales que

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i.$$

Por el paso 1 y 2, para cada $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, se tiene que

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Por tanto,

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |u|^p \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} |u|^p = \sum_{i=1}^N \|u\|_{L^p(\Gamma_i)}^p \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Definimos

$$\text{tr}(u) = u \Big|_{\partial\Omega},$$

entonces la estimación anterior implica que

$$\|\text{tr}(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (2.10)$$

donde C no depende de u . Esto prueba el Teorema 10 para $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Paso 4. Supongamos ahora que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ por densidad sabemos que existe una sucesión $(u_m)_{m \geq 1} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_m \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ esto es el Teorema 8. Usando la estimación (2.10) y por cómo definimos a tr , que

$$\|\text{tr}(u_m) - \text{tr}(u_l)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

en consecuencia, $(\text{tr}(u_m))_{m \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\partial\Omega)$, por completitud, existe un operador $\text{tr}(u) := \lim_{m \rightarrow \infty} \text{tr}(u_m) \in L^p(\partial\Omega)$, notemos que $\text{tr}(u)$ está bien definido pues de acuerdo a (2.10) no depende la elección de la sucesión (u_m) . Además es lineal y continuo. Finalmente, si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sabemos que las funciones u_m tomadas en $C^\infty(\overline{\Omega})$ convergen uniformemente a u en subconjuntos compactos de $\overline{\Omega}$, en particular en $\partial\Omega$. Por tanto, $(\text{tr}(u_m))_{m \geq 1}$ converge uniformemente a $u|_{\partial\Omega}$ en $\partial\Omega$. ■

Teorema 11 (Traza cero). *Suponga que Ω es acotado y de clase C^1 , si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y sólo si } \text{tr}(u) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Demostración. Ver [16, Teorema 2, pág. 259]. ■

Los teoremas de encaje intuitivamente dicen que si una función es lo suficientemente suave e integrable (en el sentido débil) entonces esto implica mayor regularidad.

Definición 19. *Sea $1 \leq p < n$, el exponente crítico de Sobolev p^* se define como*

$$p^* = \frac{np}{n-p} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Notemos que $p^* > p$.

Teorema 12 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). *Suponga que $1 \leq p < n$, entonces se tiene la siguiente inclusión*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n),$$

donde $q \in [p, p^*]$. Más aún, existe una constante C dependiente de p y n tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \quad (2.11)$$

Demostración. Ver [22, pág. 162-165]. ■

Teorema 13 (Desigualdad de Poincaré). *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n , $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Ver [22, pág. 174]. ■

Teorema 14 (de Morrey). *Sea $n < p \leq \infty$. Entonces la inclusión*

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *es continua. Además, existe una constante $C = C(p, n) > 0$ tal que*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Demostración. Ver [23, Teorema 5.7.4]. ■

Teorema 15 (de Rellich-Kondrashov). *Suponga que Ω es abierto, acotado y de clase C^1 . Entonces tenemos los siguientes encajes compactos*

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para toda $q \in [1, p^*]$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ si $p < n$.*

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para toda $q \in [p, \infty)$ si $p = n$.

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ si $p > n$.

En particular, la inclusión $\iota : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta para todo p y toda n .

Demostración. Ver [22, Teorema 9.16] ■

Definición 20 (Espacio dual). Sea $1 \leq p < \infty$ y q el exponente conjugado de p . El dual del espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$ entero se denota por $W^{-k,p}(\Omega)$.

Los siguientes resultados relacionan a los espacios de Sobolev $W^{k,\infty}(\Omega)$ con las funciones Lipschitz .

Teorema 16. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces $u \in \text{Lip}(\Omega)$ si y sólo si $u \in L^\infty(\Omega)$ y $\nabla u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ donde el gradiente de u se entiende en el sentido distribucional. Por tanto, los conjuntos $\text{Lip}(\Omega)$ y $W^{1,\infty}(\Omega)$ coinciden.

Demostración. [16, Teorema 4, pág. 279]. ■

Lo anterior se puede generalizar para funciones vectoriales $\text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Definición 21. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, decimos que $u \in \text{Lip}^k(\Omega)$ con $k \geq 1$ entero si:

1. Existe una constante C tal que para todo $x \in \Omega$

$$\|u(x)\| \leq C.$$

2. $D^\alpha u$ es globalmente Lipschitz para todo α tal que $0 \leq |\alpha| \leq k - 1$.

donde las derivadas son en el sentido distribucional.

En consecuencia, se tiene la siguiente relación

$$\text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Más aún, $\text{Lip}^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ dotado de las operaciones habituales y de la norma

$$\|u\|_k = \text{ess sup}_{0 \leq |\alpha| \leq k, x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \quad (2.12)$$

constituye un espacio de Banach para cada $k \geq 1$, consecuencia de la relación anterior.

2.2. Espacios de Sobolev Fraccionarios

El objetivo de esta sección es estudiar los espacios $H^s(\Omega)$, para s un número real, esto pues son los espacios naturales para hablar sobre las trazas de funciones en espacios de Sobolev. En su totalidad lo expuesto aquí se basa en [17, 24].

Definición 22 (Espacio de Schwartz).

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_\ell < \infty \text{ para todo } \ell \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

donde

$$\|\varphi\|_\ell = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{\ell}{2}} \sum_{|\alpha| \leq \ell} |D^\alpha \varphi(x)|. \quad (2.13)$$

es llamado el espacio de funciones de Schwartz o de funciones de decaimiento rápido.

A diferencia de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\Omega)$ es un espacio metrizable, esto es, que aunque la topología no sea inducida directamente por la norma se pueden encontrar funciones que resultan ser métricas, ver [18, Capítulo 2] y [17, pág. 39].

Definición 23 (Transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

es llamada la transformada de Fourier de φ , y

$$\check{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.15)$$

es llamada la transformada de Fourier inversa de φ .

Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ al espacio dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a sus elementos se les llama *distribuciones temperadas*. Más aún, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si existen números: $c > 0$, $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $|T\varphi| \leq c\|\varphi\|_\ell$, ver [17, Teorema 2.48].

La idea es caracterizar a los espacios $H^k(\mathbb{R}^n)$ mediante la transformada de Fourier, para esto requerimos de los siguientes resultados.

Teorema 17. Para $k \geq 1$ entero, se tienen las siguientes inclusiones

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^k(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.16)$$

Más aún, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^k(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Ver [17, Teorema 3.3]. ■

Introducimos los espacios L^2 con peso.

Definición 24. Sea w una función positiva y continua en \mathbb{R}^n , entonces

$$L^2(\mathbb{R}^n, w) := \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : wu \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

En particular, los pesos de interés especial son

$$w_s(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{s/2} \quad s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

Proposición 1. *El espacio $L^2(\mathbb{R}^n, w_s)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle w_s u, w_s v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Más aún,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n, w_s) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad (2.18)$$

y se tiene que tanto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ son densos en $L^2(\mathbb{R}^n, w_s)$.

Demostración. Ver [17, Proposición 3.10] ■

Teorema 18. *Sea $k \in \mathbb{N}_0$. La transformada Fourier \mathcal{F} y su inversa \mathcal{F}^{-1} generan aplicaciones unitarias de $H^k(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n, w_k)$ y de $L^2(\mathbb{R}^n, w_k)$ en $H^k(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Más aún,*

$$\mathcal{F}[H^k(\mathbb{R}^n)] = \mathcal{F}^{-1}[H^k(\mathbb{R}^n)] = L^2(\mathbb{R}^n, w_k). \quad (2.19)$$

Demostración. Ver [17, Teorema 3.11]. ■

Más aún, en virtud de (2.19) se tiene que

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n, w_k)] = \mathcal{F}^{-1}[L^2(\mathbb{R}^n, w_k)], \quad (2.20)$$

es decir, podemos definir al espacio $H^k(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, w_k)$ bajo la transformada de Fourier, y esta relación no depende de la elección de k , de hecho se tiene para toda s real.

Demostración. Ver [24, Teorema 4.2.3] ■

Sea Ω abierto, definimos

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \text{existe } g \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } g|_{\Omega} = u \right\}.$$

La importancia de los espacios de Sobolev fraccionarios para este trabajo es caracterizar el rango del operador traza. Si Ω es de clase C^∞ , los operadores traza² se definen, respectivamente, para $1 \leq p < \infty$ como

$$\text{tr} : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega) \text{ y para } k \geq 2, \text{tr}_\nu := \text{tr} \frac{\partial}{\partial \nu} : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega).$$

donde ν es el vector normal de $\partial\Omega$.

Teorema 19. *Sea Ω un dominio acotado de clase C^∞ .*

(I) *Sea $s > \frac{1}{2}$, entonces la aplicación traza $\text{tr} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ es una aplicación lineal y continua. Además,*

$$\text{tr}[H^s(\Omega)] = H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (2.21)$$

(II) *Sea $s > \frac{3}{2}$, entonces la traza de $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denotado por $\text{tr}_\nu : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ es una aplicación lineal y continua. Además,*

$$\text{tr}_\nu[H^s(\Omega)] = H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega). \quad (2.22)$$

Demostración. Ver [17, Teorema 4.24]. ■

En particular,

■ Para $s = 1$

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \text{tr}[H^1(\Omega)]. \quad (2.23)$$

²En comparación con el Teorema 10, las hipótesis son más generales, ver [19, Teorema 5.22] para su demostración.

- Para $s = 2$

$$H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) = \text{tr}[H^2(\Omega)]. \quad (2.24)$$

Ecuaciones Diferenciales Elípticas de Segundo Orden

En este capítulo introducimos algunos conceptos de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden, en particular nos enfocamos en la teoría de regularidad para soluciones débiles.

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una relación de la forma

$$F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots) = 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

donde F es una función de variables independientes x_i , de una función desconocida u y de sus derivadas.

Definición 25. Se dice que u es **solución fuerte** de la EDP si después de sustituirla en (3.1) se satisface la relación puntualmente.

Definición 26. Una EDP Lineal de orden k se puede escribir de la siguiente forma

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \quad (3.2)$$

en donde a $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$ se le denomina operador diferencial.

En particular, consideraremos operadores diferenciales que tienen forma divergencia, es decir:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \quad (3.3)$$

Definición 27. Un operador diferencial L es (uniformemente) **elíptico** si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta \|\xi\|^2 \quad \text{c.s. en } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 1. El operador de Laplace, definido como

$$-\Delta = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

es elíptico.

La ecuación (3.2) es una EDP **Elíptica** si L es un operador elíptico. Más aún, podemos considerar condiciones de frontera tipo Dirichlet.

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

En esta tesis estudiaremos el caso más simple entre las ecuaciones elípticas, esto es, cuando L es el operador de Laplace con condiciones tipo Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Notemos que una solución fuerte para (3.5) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Supongamos que u es solución fuerte (3.5), multiplicando por $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integramos sobre Ω se tiene que

$$-\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (3.6)$$

Recordando la siguiente identidad vectorial

$$(-\Delta u)\varphi = -\operatorname{div}(\nabla u \varphi) + \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

entonces la ecuación (3.6) se puede escribir como

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u \varphi) dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (3.7)$$

Luego, por el teorema de la divergencia y considerando que φ es de soporte compacto,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u \varphi) dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi dx = 0.$$

Por tanto la ecuación (3.7) se reduce a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (3.8)$$

y notemos que no es necesario considerar a $u \in C^2(\Omega)$. Basta tomar $u \in H^1(\Omega)$ y si requerimos añadir la condición de frontera, entonces es razonable considerar $H_0^1(\Omega)$, más aún por densidad, la ecuación se cumple para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Con lo que a

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.9)$$

se le denomina solución débil de (3.5).

Definición 28. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ con X, Y espacios de Banach se dice que es acotado inferiormente si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \geq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 20 (de operadores acotados). Sean X, Y espacios de Banach, y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, entonces T está acotado inferiormente si y sólo si T es inyectivo y tiene rango, $\mathcal{R}(T)$, cerrado.

Demostración. Ver [25, Teorema 2.5] ■

Teorema 21 (de representación de Riesz). Sea $(H, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert y $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y acotado. Entonces existe un único elemento $v \in H$ tal que

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in H.$$

Demostración. Ver [26, Teorema 1.4.4]. ■

Teorema 22 (Lax-Milgram). Suponga que $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, donde H un espacio de Hilbert tal que

(i) B es **continua**, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) B es **coerciva**, es decir, existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$B(u, u) \geq \beta \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Y sea $F(v) = \langle f, v \rangle$ un funcional acotado en H , es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $|f(v)| \leq C \|v\|$ para toda $v \in H$. Entonces existe una **única** $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H. \tag{3.10}$$

Demostración. 1. Para cada $u \in H$ fija, la aplicación $v \mapsto B(u, v)$ es un funcional lineal y acotado en H , entonces por el Teorema de representación de Riesz 21 existe un único $w \in H$ tal que

$$B(u, v) = (w, v) \quad \forall v \in H.$$

2. Definamos $Au = w$ de tal manera que $B(u, v) = (Au, v)$, entonces $A : H \rightarrow H$ es un operador lineal y acotado.

En efecto, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $x, y \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} (A(ax + by), v) &= B(ax + by, v) \\ &= aB(x, v) + bB(y, v) \\ &= a(Ax, v) + b(Ay, v) \\ &= (aAx + bAy, v) \end{aligned}$$

y por ser B acotado, entonces A es acotado, es decir,

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B(u, Au) \leq \alpha\|u\|\|Au\| \Rightarrow \|Au\| \leq \alpha\|u\| \quad \forall u \in H.$$

3. A es un operador inyectivo y $\mathcal{R}(A)$ es cerrado en H .

En efecto, por el Teorema 20 basta probar que A es inferiormente acotado, pero esto es consecuencia de la coercividad de B ,

$$\beta\|u\|^2 \leq B(u, u) = (Au, u) \leq \|Au\|\|u\| \Rightarrow \beta\|u\| \leq \|Au\|.$$

4. Se tiene que $\mathcal{R}(A) = H$.

Como $\mathcal{R}(A)$ es cerrado entonces $H = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, argumentemos por contradicción, si $\mathcal{R}(A) = H$ no fuera cierto, esto implica que existe un elemento

$w \in H, w \neq 0$ y $w \in \mathcal{R}(A)^\perp$, sin embargo se tiene que

$$\beta \|w\|^2 \leq B(w, w) = (Aw, w) = 0 \Rightarrow w = 0$$

lo que contradice la hipótesis sobre w . Por tanto $\mathcal{R}(A)^\perp = \{0\}$.

5. Por Teorema de representación de Riesz 21 para algún $w \in H$, se tiene que

$$\langle f, v \rangle = (w, v), \quad \forall v \in H.$$

Luego por ser A un operador inyectivo, cuyo rango \mathcal{R} coincide con ser H podemos encontrar $u \in H$ tal que $Au = w$, entonces

$$B(u, v) = (Au, v) = (w, v) = (f, v) \quad \forall v \in H,$$

esto prueba (3.10).

6. Para la unicidad, sea u y \bar{u} tal que satisfacen (3.10) esto implica que

$$B(u - \bar{u}, v) = 0, \quad \forall v \in H,$$

haciendo $v = u - \bar{u}$ y por coercividad $\beta \|u - \bar{u}\|^2 \leq B(u - \bar{u}, u - \bar{u}) = 0$, entonces $u - \bar{u} = 0$.

■

Teorema 23 (Teorema de existencia y unicidad). *Sea Ω abierto, acotado de \mathbb{R}^n y $f \in L^2(\Omega)$ una función dada. Entonces existe una **única solución** para el problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Demostración. Basta probar las hipótesis del Teorema 22, para

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad H = H_0^1(\Omega).$$

1. $B(u, v)$ es coerciva y acotada.

En efecto, $B(u, v)$ es bilineal, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}$,

$$B(ax + by, v) = \int_{\Omega} \nabla(ax + by) \cdot \nabla v dx = aB(x, v) + bB(y, v)$$

de manera análoga se prueba que $B(u, v)$ también es lineal en v , más aún, $B(u, v)$ claramente es simétrica. Además, por la desigualdad de Hölder

$$|B(u, v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por la desigualdad de Poincaré (Teorema 13), la coercividad es inmediata ya que

$$B(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

2. $F(v)$ es acotada.

En efecto, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \int_{\Omega} |f||v| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2} \left\{ \left(\int_{\Omega} |v|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \right\} \\ &\leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Por tanto se prueba que existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que satisface (3.11). ■

Los siguientes resultados muestran que si los datos Ω y f en (3.5) son suficientemente regulares, entonces las soluciones heredan dicha regularidad.

Teorema 24. Sea $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ solución (débil) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Más aún, suponga que Ω es de clase C^2 . Entonces

$$u \in H^2(\Omega)$$

y existe una $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Demostración. Ver [16, Teorema 4, pág. 3.17]. ■

Teorema 25. Sean m un entero no negativo, $f \in H^m(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución (débil) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Más aún, suponga que Ω es de clase C^{m+2} . Entonces

$$u \in H^{m+2}(\Omega)$$

y existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Demostración. Ver [16, Teorema 5, pág. 323]. ■

Teorema 26. Sean $f \in C^\infty(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución (débil) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Más aún, suponga que Ω es de clase C^∞ . Entonces

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Demostración. Ver [16, Teorema 6, pág. 326]. ■

Definición 29. Una función $u \in C^2(\Omega)$ se llama armónica en Ω si $\Delta u = 0$ en Ω .

Teorema 27 (Principio del máximo). Sea Ω un conjunto acotado y abierto de \mathbb{R}^d con $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ armónica en Ω . Entonces se tiene que:

1. (Principio Fuerte del Máximo) Entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

2. (Principio Débil del Máximo) Más aún, si Ω es conexo y existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u,$$

entonces u es constante en Ω .

Demostración. Ver [16, Teorema 4, pág. 27]. ■

Teorema 28. Sea Ω es conexo, entonces para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.12)$$

se tiene que $u \equiv 0$ en Ω .

Demostración. Por el principio del máximo tenemos que $u \leq 0$, por otro lado consideremos $\bar{u}(x) = -u(x)$ donde \bar{u} es solución del problema.

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

de nuevo tenemos que $\bar{u} \leq 0$, entonces $u \geq 0$. Por tanto $u = 0$ en Ω . ■

3.1. Regularidad en L^p

Sean $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y $f \in L^p(\Omega)$, consideremos ahora el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

El objetivo de esta sección es demostrar que para el problema de arriba se tiene que

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega),$$

y esto permitirá caracterizar al operador

$$-\Delta : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega).$$

Teorema 29. *Sea Ω un dominio de clase $C^{1,1}$ con $\gamma \subset \partial\Omega$. Sea $u \in W^{2,p}(\Omega)$, con $1 < p < \infty$, una solución fuerte de $-\Delta u = f$ en Ω y $u = 0$ sobre γ , en el sentido de $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces para cualquier $\omega \subset\subset \Omega \cup \gamma$, se tiene que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right) \quad (3.15)$$

Demostración. Ver [10, Teorema 9.13]. ■

En particular, cuando $\omega = \partial\Omega$ entonces en el teorema anterior podemos considerar a $\omega = \bar{\Omega}$ y se obtiene una estimación global en $W^{2,p}(\Omega)$, esto consecuencia de $\Omega \subset \bar{\Omega}$.

Lema 2. *Sea Ω acotado de clase $C^{1,1}$, y consideremos el operador $-\Delta$. Entonces existe una constante C independiente de u tal que para $1 < p < \infty$, se tiene*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.16)$$

Demostración. Por contradicción, si (3.16) no fuera cierto entonces existe una sucesión $(u_k)_{k \geq 1} \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega)} > k \|\Delta u_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

Sea $\bar{u}_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega)}}$, entonces lo anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{k} > \|\Delta \bar{u}_k\|_{L^p(\Omega)},$$

si definimos $f_k = \Delta \bar{u}_k$, se tiene que $\|f_k\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces existe una subsucesión (que denotamos de la misma manera), tal que $f_k \rightharpoonup f$ en $L^p(\Omega)$ y por la compacidad de los encajes $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ también se tiene que $\bar{u}_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$. Luego considerando la estimación (3.15) tomando $\omega = \bar{\Omega}$, se tiene que

$$1 = \|\bar{u}_k\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left(\|\bar{u}_k\|_{L^p(\Omega)} + \|f_k\|_{L^p(\Omega)} \right), \quad (3.17)$$

y como $\|f_k\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ podemos decir que

$$\|u_k\|_{p,\Omega} \geq \frac{1}{C} - \epsilon > 0, \quad (3.18)$$

para k suficientemente grande. Por otro lado, si multiplicamos a (3.14) por $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integramos sobre Ω , se tiene después de hacer integración por partes y considerando que $\bar{u}_k \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}_k \nabla g = \int_{\Omega} f_k g \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \nabla g = 0.$$

Esto implica que u es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

luego por principio del máximo se puede concluir que $u \equiv 0$ en Ω , lo que contradice (3.18). ■

Teorema 30 (Regularidad L^p). Sea Ω un conjunto acotado, abierto y de clase C^2 de \mathbb{R}^n y $f \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$, entonces el problema Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

tiene una única solución débil $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Por el Teorema de Lax-Milgram, existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ y por el Teorema 24, se tiene que $u \in H^2(\Omega)$, en consecuencia para $p = 2$ es claro que

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Tomando esto como punto de partida, se tienen los siguientes casos:

1. Sea $1 < p < 2$.

Consideremos $f_m = \varphi_m * f$, la regularización de f , tomando en cuenta que $f_m \rightarrow f$ en $L^p(\Omega)$ y $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ de forma continua. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, u_m es la solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u_m &= f_m & \Omega \\ u_m &= 0 & \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.20)$$

multiplicando por la función prueba $|\Delta u_m|^{p-1}$ a (3.20) e integrando, se tiene que, usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} |\Delta u_m|^p &= - \int_{\Omega} |\Delta u_m|^{p-1} \Delta u_m = \int_{\Omega} f_m |\Delta u_m|^{p-1} \\ &= \|f_m\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\Delta u_m|^{(p-1)q} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

como $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$, y $q(p-1) = p$, lo anterior se puede escribir como

$$\|\Delta u_m\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|f_m\|_{L^p(\Omega)} \|\Delta u_m\|_{L^p(\Omega)}^{p-1},$$

Por otro lado, por la estimación del Lema 2 y la desigualdad anterior se tiene

$$\|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \|\Delta u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_m\|_{L^p(\Omega)}, \quad (3.21)$$

esto es, la sucesión (u_m) es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ con lo que podemos extraer una subsucesión, que denotamos de la misma manera, tal que $u_m \rightharpoonup u$ en $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ con lo que, en el sentido distribucional,

$$-\int_{\Omega} \Delta u_m \varphi \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f_m \varphi \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

con lo que concluimos que

$$-\Delta u = f \quad \text{c.s. en } \Omega, u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Caso 2. Consideremos $\infty > p > 2$.

Recordemos al exponente crítico de Sobolev

$$2^* = \frac{2n}{n-2} \quad \text{donde,} \quad \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Con esto, basta probar que el Teorema 30 es válido para $p = 2^*$ puesto que $p > 2$.

Puesto que $\Delta u \in L^{2^*}(\Omega)$, por desigualdad de Gagliardo 12,

$$\|D^\alpha u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{2,2^*}(\Omega)} \quad \forall |\alpha| \leq 2, \quad (3.22)$$

esto implica que

$$u \in W^{2,2^*}(\Omega) \cap W_0^{1,2^*}(\Omega).$$

De esta manera, si trabajamos iterativamente sobre 2^{*j} , se puede probar que para algún \hat{j} adecuado, $2^{*\hat{j}} > n$. Por tanto, usando el Teorema 15, se tiene que $u \in C(\bar{\Omega})$ y que, por densidad,

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$



En particular, con lo anterior se ha probado el siguiente resultado.

Teorema 31. *Sea Ω de clase C^2 , el Laplaciano definido como*

$$-\Delta : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

es un isomorfismo.

Diseño óptimo

En este capítulo introduciremos resultados necesarios para entender el problema de control desde la perspectiva del diseño óptimo, el ejemplo al final de este capítulo será el modelo base a trabajar.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera regular y consideremos, para distintos dominios Ω , a φ solución de

$$\begin{cases} A(\varphi(\Omega)) = f & \text{en } \Omega, \\ B(\varphi(\Omega)) = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde f y g son funciones dadas en Ω y $\partial\Omega$, respectivamente. Denotamos

$$\text{para todo } x \in \Omega, \quad \varphi(\Omega) = \varphi(\Omega, x).$$

Además consideremos el funcional de costo

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} C(\varphi(\Omega)) dx, \quad (4.2)$$

donde A, B, C son operadores diferenciales (posiblemente lineales). Las ecuaciones en (4.1) pueden ser usadas en conjunto, por ejemplo, si $\varphi(\Omega)$ es solución de la ecuación de

Laplace con condiciones Dirichlet. Entonces un problema de **diseño óptimo** consiste en resolver un problema de optimización del estilo

$$\min_{\Omega \in \Omega_{ad}} \mathcal{J}(\Omega) = \mathcal{J}(\Omega^*), \quad (4.3)$$

donde Ω^* es referido como dominio óptimo y Ω_{ad} el conjunto de dominios admisibles. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Optimización de una boquilla de manguera La velocidad $u(x)$ en un punto x de un fluido como el agua, con velocidad moderada, puede ser aproximada por la ecuación $u(x) = \nabla\varphi(x)$ para todo $x \in \Omega$ donde φ es la solución de $\Delta\varphi = 0$ en Ω y Ω es la región ocupada por el fluido. Entonces el fluido en una boquilla Ω con una presión de chorro $\varphi_{\Gamma_0} - \varphi_{\Gamma_1}$ se obtiene resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \Omega \\ \varphi = 0 & \Gamma_0 \\ \varphi = 0 & \Gamma_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \Gamma_w \end{array} \right. \quad (4.4)$$

donde Γ_i son la entrada y salida de la boquilla y Γ_w son las paredes laterales (ver Figura 5). Si es de interés diseñar una boquilla de manera que la velocidad del fluido se aproxime a una velocidad u_d prescrita localmente, por ejemplo, en una región D tal que $D \subset\subset \Omega$. Entonces esto es equivalente a resolver

$$\min_{\Omega \in \Omega_{ad}} E(\Omega) = \int_{\Omega} \left| \nabla\varphi \Big|_D - u_d \right|^2 dx,$$

donde φ es la solución de (4.4), y el conjunto de dominios admisibles se define como

$$\Omega_{ad} = \{D : D \subset\subset \Omega; \text{ con } \Gamma_0, \Gamma_1 \text{ fijos}\}.$$

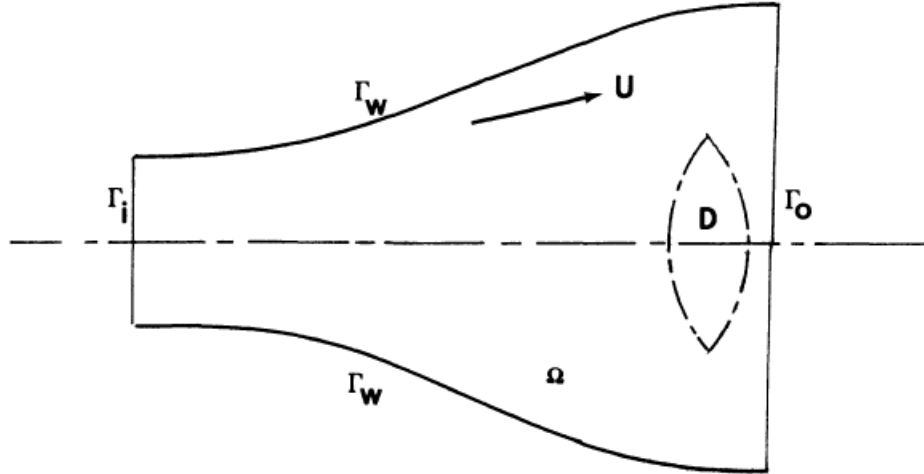


Figura 5: Imagen tomada de O. Pironneau. Optimal Shape Design for Elliptic Systems.

Supongamos la existencia de un dominio óptimo, observemos que estos problemas requieren estudiar aplicaciones del estilo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \Omega_{ad} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Omega &\mapsto \mathcal{J}(\Omega) \end{aligned} \tag{4.5}$$

y como es usual, la derivada es una condición necesaria para determinar un dominio óptimo. La primera dificultad que se presenta es la carencia de estructura de espacio afín (o normado) para Ω_{ad} . Sin embargo, en [27], Simon J. y Murat F. estudiaron una técnica llamada "*diferenciación respecto al dominio*", que como su nombre lo dice, permite derivar a (4.5), cuya idea es la siguiente:

Consideremos $\Omega_0 \in \Omega_{ad}$ fijo y sea $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial lo suficientemente regular, con lo que podemos definir un nuevo dominio, denotado por $\Omega_0 + u$, como

$$(I + u)(\Omega_0) = \left\{ x + u(x) : x \in \Omega_0 \right\} = \Omega_0 + u. \tag{4.6}$$

De esta manera, $\Omega + u$ no es más que la deformación del dominio inicial Ω_0 . Más aún para campos vectoriales suficientemente pequeños, $I + u$ es una familia de difeomor-

fismos. Llamamos a $\Omega_0 + u$ la variación de Ω_0 . Basta entonces considerar un espacio adecuado \mathcal{E} , tal que para cada $u \in \mathcal{E}$, se verifique $\Omega_0 + u \in \Omega_{ad}$ y en consecuencia, la aplicación (4.5) se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\mapsto \mathcal{J}(u). \end{aligned} \tag{4.7}$$

De esta manera, para resolver (4.3) se pueden usar técnicas variacionales. En la literatura a esta técnica también se le conoce como el método de los mapeos, ver [6, Capítulo 8].

Definición 30. Consideremos un operador $F : E \rightarrow F$ con E, F espacios de Banach. Se dice que F es (Fréchet) diferenciable en $x_0 \in E$ si existe un operador lineal y acotado $F' : E \rightarrow F$ tal que para todo h en un entorno de 0 se verifica

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + o(h),$$

donde

$$\frac{o(h)}{\|h\|_E} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|h\|_E \rightarrow 0.$$

A $F'(x_0)$ se le llama la derivada de F en x_0 .

Definición 31. Consideremos un operador $F : E \rightarrow F$, con E, F espacios de Banach. Se dice que F es Gâteaux diferenciable en x_0 si el límite

$$DF(x_0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R},$$

existe, cuando $DF(x_0, \cdot)$ es lineal (en general no), puede ser expresada como

$DF(x_0, h) = F'_G(x_0)h$ con lo que al operador lineal y acotado $F'_G(x_0)$ se le llama la derivada de Gâteaux.

En general la derivada de Gâteaux y Fréchet no son equivalentes, sin embargo, se tiene el siguiente resultado local.

Teorema 32. *Si la derivada de Gâteaux $F'_G(x)$ existe en una vecindad \mathcal{O}_{x_0} del punto x_0 , y $F'_G(x)$ es una función continua en \mathcal{O}_{x_0} , entonces la derivada de Fréchet $F'(x_0)$ existe en x_0 y coincide con la derivada de Gâteaux.*

Demostración. Ver [28, Teorema 1, pág. 270]. ■

4.1. Derivada local de una función en un conjunto variable

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , estamos interesados en la diferenciabilidad en el origen de la aplicación

$$\begin{aligned} z : \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\Omega + u), \\ u &\mapsto z(u). \end{aligned} \tag{4.8}$$

para u de norma suficientemente pequeña. Esta aplicación realmente se traduce estudiar a $z(u)$, una función definida en un abierto $\Omega + u$, para cada $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Esto es, una función definida en un conjunto variable.

Notemos que una relación de este tipo no puede ser derivable respecto a u en la forma habitual debido a que su dominio varía con u . Por ello, estudiaremos la diferenciabilidad de sus restricciones a determinados conjuntos ω , denotadas por $z|_{\omega}$, en los cuales esté definida $z(u)$ para todo u de norma $\|u\|_k$ suficientemente pequeña. A partir de estas restricciones, será posible definir "la derivada local en el origen" para

dicha aplicación, en todo Ω . Dado $\omega \subset\subset \Omega$, tomemos u de norma suficientemente pequeña para cada $\omega \subset\subset \Omega + u$. Denotamos por I a la función identidad en \mathbb{R}^n .

Definición 32. Sea $k \geq m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Decimos que la aplicación (4.8) es *localmente derivable en el origen* si, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la correspondiente aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\omega), \\ u &\mapsto z(u)\Big|_{\omega} = z_{\omega}(u) \end{aligned} \quad (4.9)$$

es Fréchet diferenciable en el origen. Donde la derivada en dirección u es denotada por

$$z'(u) = \frac{d}{dt} z_{\omega}(0 + tu)\Big|_{t=0}, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega. \quad (4.10)$$

Donde $z'(u)$ de $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ a $W^{m,p}(\omega)$, es una aplicación lineal y continua.

Los resultados citados en la demostración del siguiente teorema se encuentran en el Apéndice B.

Teorema 33 (Existencia de la derivada local). Sea $k \geq m \geq 1$ y $1 < p < \infty$ y la aplicación (4.8). Si la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\Omega), \\ u &\mapsto z(u) \circ (I + u) \end{aligned} \quad (4.11)$$

es derivable en 0, i.e. se verifica que

$$z(u) \circ (I + u) = z(0) + \dot{z}(u) + o(u) \text{ en } W^{m,p}(\Omega),$$

donde $u \mapsto \dot{z}(u)$ es lineal y continua, con derivada en dirección u dada por $\dot{z}(u)$. Entonces, la aplicación (4.9) es derivable en 0 con derivada en dirección u dada por

$z'(u)$ tal que

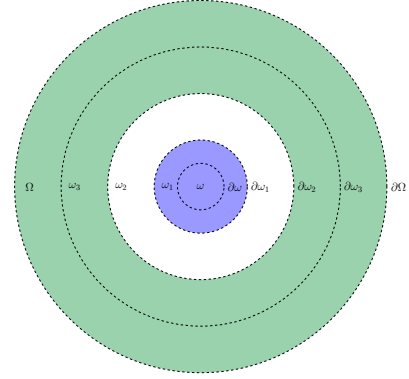
$$z(u) = z(0) + z'(u) + o(u) \text{ en } W^{m-1,p}(\omega).$$

Más aún,

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \nabla z(0). \quad (4.12)$$

Demostración. Sea $\omega \subset\subset \Omega$ y consideremos tres abiertos ω_1, ω_2 y ω_3 tales que

$$\omega \subset\subset \omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \omega_3 \subset\subset \Omega.$$



Sea la función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida como

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & x \in \omega_1, \\ \mathbf{0} & x \in \mathbb{R}^n \setminus \omega_2. \end{cases}$$

Para $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ de norma suficientemente pequeña, escribamos

$$f(u) = \begin{cases} \varphi z(u) & \text{en } \Omega, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Notemos que $f(u) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, i.e. extendimos $z(u)$ de Ω a \mathbb{R}^n mediante φ .

Luego por la Proposición 3 y el hecho que $\varphi \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto \varphi \circ (I + u) \end{aligned} \quad (4.13)$$

es derivable en 0.

Por otro lado, de la hipótesis (4.11) y como la función (4.13) es derivable, entonces

tanto φ como $z(u)$ son derivables en el origen, en consecuencia su producto también, es decir, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\Omega), \\ u &\mapsto (\phi z(u)) \circ (I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0.

Para $\|u\|_k$ suficientemente pequeña, se tiene que:

$$(\phi z(u)) \circ (I + u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \omega_3.$$

Luego, la aplicación.

$$\begin{aligned} B(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto f(u) \circ (I + u) \end{aligned} \tag{4.14}$$

es derivable en 0.

Después, aplicando la Proposición 4 a la función (4.14), restringiendo a ω y teniendo en cuenta que $f(u)|_{\omega} = z(u)$ y obtenemos que la función (4.9) es derivable en 0.

Finalmente, por (4.14) y de la Proposición 4 se deduce que también

$$f'(u) = \dot{f}(u) - u \cdot \nabla f(0). \tag{4.15}$$

Entonces, tomando en cuenta la definición de f , la ecuación (4.15) restringida a ω podemos concluir que la ecuación (4.12) es cierta. ■

El caso de las distribuciones

Sea $f \in W^{m,p}(\Omega + u)$ y $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $\|u\| < \frac{1}{2}$ donde $1 - k \leq m \leq 0$ y $p \in (1, \infty)$. Se define la **distribución transportada** $f \circ (I + u) \in W^{m,p}(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} & \left\langle f \circ (I + u), \Psi \right\rangle_{B(\Omega), B'(\Omega)} \\ &= \left\langle f, \Psi \circ (I + u)^{-1} \text{Jac}((I + u)^{-1}) \right\rangle_{B(\Omega+u), B'(\Omega+u)}, \end{aligned}$$

para toda $\Psi \in (W^{m,p}(\Omega))'$, donde $B = W^{m,p}$, $B' = (W^{m,p})'$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B, B'}$ denota un producto de dualidad entre B y B' . Cabe notar que esta definición tiene sentido. En efecto, por el Lema 7, $(I + u)^{-1} \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, y por tanto, $\Psi \circ (I + u)^{-1} \text{Jac}(I + u)^{-1} \in (W^{m,p}(\Omega + u))'$.

Por otro lado, para el caso en que $f \circ (I + u)$ con $f \in L^1(\Omega + u)$, la definición tiene la siguiente modificación.

$$\begin{aligned} & \left\langle f \circ (I + u), \Psi \right\rangle_{L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)} \\ &= \left\langle f, \Psi \circ (I + u)^{-1} \text{Jac}((I + u)^{-1}) \right\rangle_{L^1(\Omega+u), L^\infty(\Omega+u)} \quad \forall \Psi \in L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Un caso límite. Cuando $m = 0$, $p = 1$ y $k \geq 2$, el Teorema 33 es cierto si se sustituye en (4.9) $W_{loc}^{-1,1}(\Omega)$ por el dual, $(C_c^1(\Omega))'$, de $C_c^1(\Omega)$. Es decir, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$ se tiene que la aplicación,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow (C_c^1(\bar{\omega}))' \\ u &\mapsto z(u) \Big|_{\omega} \end{aligned} \tag{4.16}$$

es derivable en 0.

4.2. Diferenciación de un problema de contorno

Usualmente z es la solución de un problema de contorno del estilo (4.1) definido en $\Omega + u$. Por ejemplo, sea z la solución de

$$\begin{cases} -\Delta z = 0 & \text{en } \Omega + u, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Entonces, por el Capítulo 3, sabemos que $z(u) \in H_0^1(\Omega + u)$, para cada u fijo. En la sección anterior, estudiamos la derivabilidad de la solución z , la cual varía con u . Ahora, estudiaremos la relación que tiene la derivada, $z'(u)$ con respecto a la ecuación que satisface $z(u)$ en $\Omega + u$ y la correspondiente en $\partial\Omega + u$. Entonces, suponiendo la existencia de la derivada local en el origen de $z(u)$, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 34 (Derivada de una ecuación en $\Omega + u$). *Consideremos la aplicación (4.8) con $k \geq m \geq 1$ y $p \in [1, \infty)$ y Supongamos que la función (4.11) es derivable en el origen. Sean $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y una aplicación lineal y continua*

$$\begin{aligned} A : W^{m,p}(\omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\omega), \\ z(u) &\mapsto Az(u) = f, \quad \forall \omega \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Además, $z(u)$ satisface que

$$Az(u) = f \quad \text{en } \Omega + u, \quad \text{i.e., en } \mathcal{D}'(\Omega + u). \quad (4.18)$$

Entonces la derivada local en el origen de (4.8) , $z'(u)$, verifica

$$Az'(u) = 0 \quad \text{en } \Omega + u. \quad (4.19)$$

Demostración. Sea $\omega \subset\subset \Omega$. Por el Teorema 33 la aplicación (4.9) es derivable en 0 en $W^{m-1,p}(\omega)$. Por otro lado, el operador A restringido a $W^{m-1,p}(\omega)$ es Frechét

derivable en todo punto, es decir, la aplicación $z \mapsto (Az, \varphi)$ es derivable para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, en el sentido distribucional, más aún, coincide con su derivada (por ser A un operador lineal). Por tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}'(\omega), \\ u &\mapsto (A \circ z_\omega)(u) \end{aligned}$$

es derivable en 0. Además,

$$D(A \circ z_\omega)(0) = ADz_\omega(0) = Az'(u) \text{ en } \omega.$$

Dado que f es independiente de u , obtenemos

$$Az'(u) = 0 \text{ en } \omega.$$

Finalmente, como ω es arbitrario queda demostrado el teorema. ■

Teorema 35 (Derivada de una ecuación en $\partial\Omega + u$). *Sea $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_k$ es suficientemente pequeña, de manera que*

(a) $z(u) \in W^{1,1}(\Omega + u)$ con $k \geq 1$,

(b) la función (4.11) es derivable en el origen con $m = p = 1$,

(c) Ω es un dominio de clase Lip^1 ,

(d) se verifica que $z(0) \in W^{2,1}(\Omega)$,

y se tiene la condición de contorno

$$z(u) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega + u. \tag{4.20}$$

Entonces, para cada $\omega \subset\subset \Omega$, la función (4.11) definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow L^1(\omega), \\ u &\mapsto z_\omega(u) \end{aligned} \quad (4.21)$$

es derivable en 0. En consecuencia, la función $u \mapsto z(u)$ es localmente derivable en el origen y su derivada, en la dirección u , $z'(u)$ verifica

$$z'(u) \in W^{1,1}(\Omega) \quad (4.22)$$

y

$$z'(u) = -(u \cdot \nu) \frac{\partial z(0)}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (\text{i.e. } L^1(\partial\Omega)), \quad (4.23)$$

donde ν es el vector unitario exterior a Ω . Además,

$$z'(u) + u \cdot \nabla z(0) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (\text{i.e. } L^1(\partial\Omega)). \quad (4.24)$$

Demostración. Por las hipótesis (a) y (b), aplicando el Teorema 33 se obtiene que la función (4.21) es derivable en 0, más aún, se tiene que

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \nabla z(0) \quad \text{para toda } u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \text{ y } \omega \subset\subset \Omega. \quad (4.25)$$

La hipótesis (a) tiene perfecto sentido, sabemos por el Teorema 10, que $\text{tr}(z(u))$ se encuentra en $L^1(\partial\Omega + u)$. Así, de (b), se tiene que $\dot{z}(u) \in W^{1,1}(\Omega)$ con lo que la traza está bien definida, de (4.20) se tiene que $z(u) \circ (I + u) = 0$ sobre Ω y derivando de ambos lados se obtiene que

$$\dot{z}(u) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Por (d) tenemos que $\nabla z(0) \in W^{1,1}(\Omega)$ y usando la relación (4.25) se tiene que

$$W^{1,1}(\Omega) \ni z'(u) = \underbrace{\dot{z}(u)}_{\in W^{1,1}(\Omega)} - u \cdot \underbrace{\nabla z(0)}_{\in W^{1,1}(\Omega)}.$$

Esto prueba (4.22) y en consecuencia, tiene sentido hablar de las trazas de $z'(u)$, $\dot{z}(u)$ y $\nabla z(u)$ para cada $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con lo que por la linealidad del operador traza

$$\text{tr}(z'(u)) = \underbrace{\text{tr}(\dot{z}(u))}_{=0} - \text{tr}(u \cdot \nabla z(u)).$$

En particular, esto implica que

$$z'(u) = -u \cdot \nabla z(0) \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Por otro lado, $z(0)$ es constante sobre $\partial\Omega$ y en consecuencia, posee derivada proporcional al vector normal, es decir:

$$\nabla z(0) = \nu \cdot (\nu \cdot \nabla z(0)) = \nu \cdot \frac{\partial z(0)}{\partial \nu}.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión en (4.24), obtenemos (4.23). ■

Teorema 36 (Variación de las parciales). *Supongamos que*

(a) *se tiene la aplicación (4.8) con $k \geq m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$ y*

(b) *la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\epsilon(0) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\Omega), \\ u &\mapsto z(u) \circ (I + u) \end{aligned} \tag{4.26}$$

es derivable en 0.

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\epsilon(0) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,p}(\Omega), \\ u &\mapsto \frac{\partial z(u)}{\partial x_i} \circ (I + u) \end{aligned} \tag{4.27}$$

es derivable en 0, con derivada denotada por $\frac{\dot{\partial}z}{\partial x_i}(u)$.

Es decir, se verifica que

$$\frac{\partial z(u)}{\partial x_i} \circ (I + u) = \frac{\partial z(0)}{\partial x_i} + \frac{\dot{\partial}z}{\partial x_i}(u) + \theta(u) \quad \text{en } W^{m-1,p}(\Omega).$$

Demostración. Gracias al Lema 9,

$$\frac{\partial z(u)}{\partial x_i} \circ (I + u) = \sum_{k=1}^d M_{ik}(u) \frac{\partial(z(u) \circ (I + u))}{\partial x_k} \quad 0 \leq i \leq d, \quad (4.28)$$

donde

$$[M_{ij}(u)] = \left[\frac{\partial(I + u)_i}{\partial x_j} \right]^{-1}.$$

Fijando i , por el Lema 10 se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\epsilon(0) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{Lip}^{k-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n \times n}) = W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n \times n}), \\ u &\mapsto [M_{ij}(u)] \end{aligned}$$

es derivable en 0, y como $k \geq m$ restringiendo a Ω se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\epsilon(0) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto [M_{ij}(u)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

es derivable en 0. Por otro lado, usando (b), la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\epsilon(0) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto \left[\frac{\partial(z(u) \circ (I + u))}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

es derivable en 0. Por tanto, (4.27) es una consecuencia directa de la derivabilidad en 0 de (4.29) y (4.30). ■

En la demostración del Teorema 36 sólo se probó la existencia de la derivada $\frac{\dot{\partial}z}{\partial x_i}$, sin embargo esta se puede calcular. En efecto, como

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)'(u) = \left(\frac{\dot{\partial}z}{\partial x_i}\right)(u) - u \cdot \nabla \left(\frac{\partial z(0)}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial z'(u)}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{z}(u)}{\partial x_i} - \frac{\partial(u \cdot \nabla(z(0)))}{\partial x_i}.$$

Además,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)' = \frac{\partial z'}{\partial x_i}.$$

Entonces,

$$\frac{\dot{\partial}z}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_i} = -\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \nabla z(0).$$

Variación del funcional de costo.

Para concluir con esta sección, falta determinar cómo se relaciona la derivada local de $z(u)$ con el funcional asociado (4.2). Para los objetivos de este trabajo consideraremos funcionales de la siguiente forma

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega+u} \mathcal{F}(z(u)) dx. \quad (4.31)$$

Estamos interesados en determinar derivabilidad de $\mathcal{J}(u)$ en el origen. Recordemos que $z(u)$ es la solución de un problema de contorno. Por ejemplo, sea z solución de (4.17), podemos considerar el funcional

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega+u} |\nabla z(u)|^2 dx.$$

Donde $\mathcal{F}(z(u)) = |\nabla z(u)|^2$. El cual se encuentra bien definido, pues $z(u) \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 37 (Variación de la integral). *Supongamos que Ω es de clase Lip^1 y para $k \geq 2$ se tiene que*

1. *la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\epsilon(0) \subset Lip^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{1,1}(\Omega), \\ u &\mapsto z(u) \circ (I + u) \end{aligned} \tag{4.32}$$

es derivable en 0, con derivada en la dirección u denotada por $\dot{z}(u)$,

2. *el operador $\mathcal{F} : W^{1,1}(\omega) \rightarrow L^1(\omega)$, para todo $\omega \subset\subset \Omega$, restringido a $L^1(\omega)$ es diferenciable en el origen con derivada denotada por $D\mathcal{F}(z(u))$,*

3. $\mathcal{F}(z(0)) \in W^{1,1}(\Omega)$.

Entonces la aplicación $u \mapsto \mathcal{J}(u)$ es diferenciable en \mathbb{R} y su derivada en la dirección u está dada por

$$\int_{\Omega} D\mathcal{F}(z(u))z'(u)dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \mathcal{F}(z(0))dS.$$

Demostración. Ver [29, Teorema 3.3]. ■

4.3. Aplicación: condensador eléctrico de mínima capacidad

Un condensador o capacitor eléctrico es un dispositivo pasivo que tienen la característica de almacenar energía en forma de campo eléctrico, resultado de una separación de la carga eléctrica. Constituido por un par de superficies conductoras paralelas (láminas o placas) las cuales están separadas por un material dieléctrico o aislante. Las placas sometidas a un diferencial de potencial adquieren una determinada carga eléctrica (positiva en una de ellas y negativa en la otra), siendo nula la variación de carga total.

Consideremos un conjunto abierto y acotado Ω de \mathbb{R}^2 cuya forma es de una corona, es decir, existen dos conjuntos abiertos y acotados Ω_1 y Ω_0 tales que $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0$ de esta manera $\Omega = \Omega_0 - \overline{\Omega_1}$, con lo que Ω_i representan las placas conductoras del capacitor (Ver Figura 6).

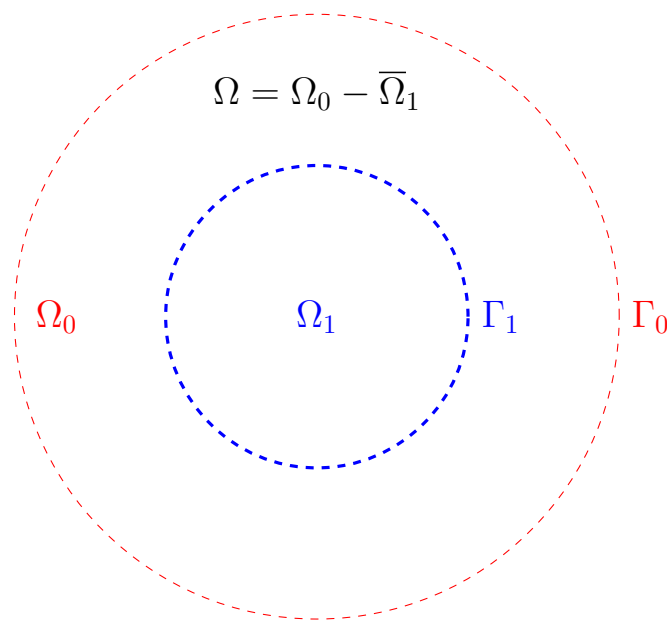


Figura 6: Forma geométrica del dominio

Ω es el material dieléctrico y la diferencia de potencial es y . Entonces se puede deducir que y es solución de

$$\begin{cases} \Delta y = 0 & \text{en } \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ y = 1 & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.33)$$

Más aún, la capacidad eléctrica del condensador está dada por

$$\mathcal{C}(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 dx. \quad (4.34)$$

Consideremos entonces el problema de determinar un condensador eléctrico de mínima capacidad. Esto es,

$$\text{mín } \left\{ \mathcal{C}(\Omega) : \Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \text{ tal que } \Omega = \Omega_0 \setminus \Omega_1, \text{ como en la Figura 6} \right\}. \quad (4.35)$$

Para la prueba de la existencia de un mínimo véase [8]. Por tanto, asumiremos que el problema tiene solución, lo que estudiaremos en esta sección es estudiar la derivabilidad en el origen de $\mathcal{C}(\Omega)$.

Primero recordemos algunos resultados sobre la regularidad de la solución de (4.33). Sean abiertos $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de \mathbb{R}^2 tales que $\Omega_1 \subset\subset \mathcal{O}_1 \subset\subset \mathcal{O}_2 \subset\subset \Omega_0$ y una función de corte $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ donde $\varphi \equiv 1$ en \mathcal{O} y $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}_2$, con la que podemos construir una función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Gamma_1, \\ 0 & \text{si } x \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Esto permite reescribir el problema (4.33), como

$$\begin{cases} \Delta y = 0 & \text{en } \Omega, \\ y = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por [10, Teorema 8.9, Corolario 8.11] y los resultados de regularidad en [10, Sección 9.5], existe una única solución de (4.33), y en caso particular que Ω es de clase Lip^2 se tiene que

$$y \in C^\infty(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \quad \text{con } 1 \leq p < \infty.$$

Para cada $u \in \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_2$ sea suficientemente pequeña, el abierto $\Omega + u$ es de forma anular y es de nuevo de clase Lip^2 .

Escribamos

$$y(u) = y(\Omega + u) \text{ donde } y(0) = y, \quad \mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(\Omega + u), \text{ donde } \mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(\Omega).$$

La siguiente definición y resultado serán importantes para aplicar lo visto en la sección anterior.

Definición 33. *Sea \mathcal{V} un espacio vectorial y $M \subset \mathcal{V}$ un subespacio, decimos que M es una **variedad lineal** si este se puede escribir para algún $v \in \mathcal{V}$ como:*

$$M = v + A = \{v + a : a \in A\}, \tag{4.37}$$

donde A es un subespacio vectorial de \mathcal{V} al cual se le llama **subespacio director**.

Teorema 38 (de la Función Implícita). *Sean E, F y G espacios de Banach, $U \subset E$, $V \subset F$ conjuntos abiertos y una función*

$$\mathcal{F} : U \times V \rightarrow G$$

de clase $C^m(U \times V)$ para $m \geq 1$. Suponga que para algún $(x_0, y_0) \in U \times V$,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(x_0, y_0) : F \rightarrow G$$

es un isomorfismo. Entonces existen vecindades U_0 de x_0 y W_0 de $F(x_0, y_0)$ y una única función de clase C^m

$$g : U_0 \times W_0 \rightarrow V$$

tal que para todo $(x, w) \in U_0 \times W_0$

$$F(x, g(x, w)) = w.$$

Demostración. Ver [30, Teorema 2.5.7] ■

Claramente (4.35) es un problema de diseño óptimo, en donde la aplicación a estudiar es $\Omega \in \Omega_{ad} \mapsto \mathcal{C}(\Omega) \in \mathbb{R}$. Notemos que, por la regularidad de la solución y , es adecuado tomar $\mathcal{E} = \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, con lo que las deformaciones para un $\Omega \in \Omega_{ad}$ fijo, quedan definidas, para todo $u \in \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, como

$$\Omega + u = \left\{ x + u(x) : x \in \Omega \right\}.$$

De esta manera, por el Teorema 33, para que la derivada local de $y(u)$ exista, entonces debemos probar el siguiente resultado.

Lema 3 (Variación Total del Potencial). *Para $1 \leq p < \infty$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{2,p}(\Omega), \\ u &\mapsto y(u) \circ (I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0. Además, su derivada denotada por $\dot{y}(u)$ verifica que

$$\Delta \dot{y}(u) = \Delta(u \cdot \nabla y(0)) \text{ en } \Omega,$$

$$\dot{y}(u) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Demostración. 1. Ecuación satisfecha por $y(u) \circ (I + u)$.

Consideremos a $V_*^{2,p}$ el subespacio de $W^{2,p}(\Omega)$ definido como

$V_*^{2,p} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ y el conjunto

$$W_*^{2,p} = \left\{ v \in W^{2,p}(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_0, v = 1 \text{ en } \Gamma_1 \right\}.$$

Luego, tomando g_0 como la restricción de una función de la forma (4.36) a $\bar{\Omega}$, que por densidad se encuentra también en $W^{2,p}(\Omega)$, en consecuencia $W_*^{2,p}$ representa una variedad lineal, i.e.

$$W_*^{2,p} = g_0 + V_*^{2,p}.$$

Por otro lado, sea la aplicación

$$\mathcal{F} : \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times V_*^{2,p} \rightarrow L^p(\Omega)$$

definida por

$$\mathcal{F}(u, v) = \sum_{i,j,k=1}^d M_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M_{ik}(u) \left(\frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial g_0}{\partial x_k} \right) \right), \quad (4.38)$$

donde

$$[M_{ij}] = {}^t \left[\frac{\partial(I + u)_i}{\partial x_j} \right]^{-1}.$$

Para $u \in \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ de norma $\|u\|_2$ suficientemente pequeña, el potencial eléctrico asociado a $\Omega + u$ verifica que

$$y(u) \in C^\infty(\Omega + u) \cap W^{2,p}(\Omega + u)$$

y es solución del problema

$$\begin{cases} \Delta y(u) = 0 & \text{en } \Omega + u, \\ y(u) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 + u, \\ y(u) = 1 & \text{sobre } \Gamma_1 + u. \end{cases}$$

cuyo equivalente fijo es

$$\begin{cases} (\Delta y(u)) \circ (I + u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ y(u) \circ (I + u) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ y(u) \circ (I + u) = 1 & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.39)$$

Como consecuencia de (4.39), $y(u) \circ (I + u) \in W_*^{2,p}$, es decir, podemos escribir

$$y(u) \circ (I + u) = g_0 + z(u) \quad \forall z(u) \in V_*^{2,p} \quad (4.40)$$

Luego, anteriormente por el Teorema 36 se había presentado la variación de las derivadas parciales, si recordamos, el operador de Laplace son las segundas derivadas parciales, en consecuencia retomando (4.28), se tiene que por el Lema 9

$$\frac{\partial y(u)}{\partial x_i} \circ (I + u) = \sum_{k=1}^d M_{ik}(u) \frac{\partial (y(u) \circ (I + u))}{\partial x_k} \quad 0 \leq i \leq d. \quad (4.41)$$

Luego, por el Lema 7 podemos reescribir a (4.41) como

$$\frac{\partial y(u)}{\partial x_i} = \left(\sum_{k=1}^d M_{ik}(u) \frac{\partial (y(u) \circ (I + u))}{\partial x_k} \right) (I + u)^{-1}. \quad (4.42)$$

Volviendo a aplicar el Lema 9 a (4.42) resulta que usando (4.42) y (4.40),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(u)}{\partial x_i^2} \circ (I + u) &= \sum_{j=1}^n M_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial x_i} \circ (I + u) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^d M_{ik}(u) \frac{\partial}{\partial x_k} (y(u) \circ (I + u)) \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n M_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M_{ik}(u) \frac{\partial}{\partial x_k} (y(u) \circ (I + u)) \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n M_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M_{ik}(u) \frac{\partial}{\partial x_k} (g_0 + z(u)) \right) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(\Delta y(u)) \circ (I + u) = F(u, z(u)) \quad (4.43)$$

y por (4.39) se deduce

$$\mathcal{F}(u, z(u)) = 0.$$

para cada $u \in \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ en un entorno de 0.

2. Aplicación del Teorema de la Función Implícita.

Por la observación del Lema 8, se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n \times n}), \\ u &\mapsto [M_{ij}(u)] \end{aligned}$$

es de clase $C^1(\mathcal{B}(0, \epsilon))$ y su derivada en dirección u se denota por $-{}^t\text{Jac}(u)$. Además \mathcal{F} es afín con respecto a v , por tanto, F es clase C^1 en un entorno de $(0, z(0))$.

Luego, como

$$\mathcal{F}(0, z(0)) = 0$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(0, z(0)) = \sum_{i,j,k=1}^n M_{ij}(0) \frac{\partial}{\partial x_j} (M_{ik}(0) \frac{\partial}{\partial x_k}) = \Delta, \quad (4.44)$$

que por el Teorema 31 se tiene que Δ es un isomorfismo entre $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$. En consecuencia por el Teorema 38 se tiene que existen vecindades \mathcal{O}_1 de 0 en $\text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y \mathcal{O}_2 de $z(0)$ en $V_*^{2,p}$ y una aplicación continuamente diferenciable,

$$g : \mathcal{O}_1 \rightarrow V_*^{2,p}$$

tal que $g(u) = z(u)$ para todo $u \in \mathcal{O}_1$ y $F(u, g(u)) = 0$ para todo $(u, v) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Por tanto, $z(u)$ es diferenciable, entonces $y(u) \circ (I + u)$ es derivable en 0, cuya derivada se denotaba por $\dot{y}(u)$, ver Figura 7.

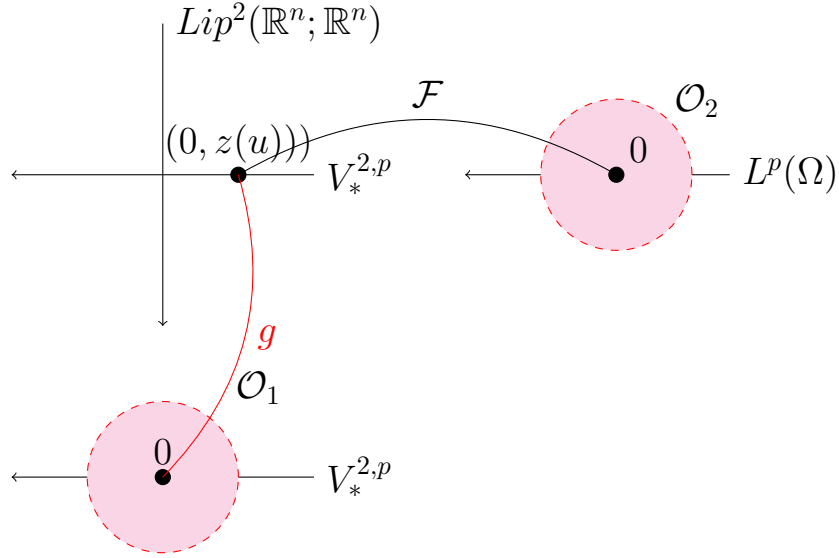


Figura 7: Aplicación del TFI.

3. Ecuaciones que verifica $\dot{y}(u)$.

Aplicando la regla a de la cadena a la relación $\mathcal{F}(u, g(u))$ el Teorema 38 también implica que

$$\dot{y}(u) = g'(0; u) = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(0; z(0))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(0; z(0))(u).$$

Por un lado, aplicando el Lema 10 se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = -\sum_{j,k=1}^d \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} \frac{\partial y(0)}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 y(0)}{\partial x_j \partial x_k} \right) = -\Delta(u \cdot \nabla y(0)).$$

De aquí y por (4.44) se obtiene

$$\dot{y}(u) = -(\Delta)^{-1} \Delta(u \cdot \nabla y(0)) \quad \Rightarrow \quad \Delta \dot{y}(u) = -\Delta(u \cdot \nabla y(0)).$$

Finalmente, como $y(u) \circ (I + u)$ es constante sobre Γ_0 y Γ_1 se tiene que $\dot{y}(u) \in H_0^1(\Omega)$. ■

Más aún, el teorema anterior no solo muestra que $y(u)$ tiene derivada local en el origen, si no que también ejemplifica el Teorema 34 con $A = -\Delta$. Mientras que el siguiente resultado es lo equivalente al Teorema 35.

Lema 4 (Derivada local). *Dados $1 \leq p < \infty$ y un abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación*

$$\mathcal{B}_\epsilon(0) \subset \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\omega) \cap W^{2,p}(\omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\omega), \quad (4.45)$$

$$u \mapsto y(u) \Big|_\Omega \quad (4.46)$$

es derivable en 0. En consecuencia $u \mapsto y(u)$ es localmente derivable en 0. Además la derivada local, denotada por $y'(u)$ verifica

$$y'(u) \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega),$$

$$\Delta y'(u) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (4.47)$$

$$y'(u) = -(u \cdot \nu) \frac{\partial y(0)}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (4.48)$$

Demostración. Por Lema 3 y el Teorema 33 con $k = m = 2$, se obtiene la derivabilidad de (4.45), además, $y'(u)$ verifica

$$y'(u) = \dot{y}(u) - u \cdot \nabla y(0) \quad \forall u \in \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n). \quad (4.49)$$

Por otra parte, el Teorema 34 implica que

$$\Delta y'(u) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

con lo que se tiene (4.47) y además que $y'(u) \in C^\infty(\Omega)$ por ser armónica.

Finalmente, tomando en cuenta la igualdad (4.49) y el hecho que $y(u) \in H_0^1$ se tiene que

$$y'(u) = -u \cdot \nabla y(0) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Luego, como $y(0)$ es constante sobre la frontera de Ω , entonces su gradiente es proporcional al vector normal, con lo que se obtiene (4.48). ■

Finalmente se tiene que $\mathcal{C}(u)$ es derivable en el origen y se da una expresión para su derivada. Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 39 (Derivabilidad de la capacidad). *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \mathcal{C}(u) \end{aligned} \tag{4.50}$$

es derivable en 0. Además, su derivada en dirección u está dada por

$$\mathcal{C}'(u) = - \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) \left| \frac{\partial y(0)}{\partial \nu} \right|^2.$$

Demostración. Ver [31, Teorema 3.7]. ■

Si además suponemos que $|\Omega| = 1$ para todo $\Omega \in \Omega_{ad}$, entonces $\mathcal{C}'(\Omega_0, u) = 0$ para un Ω_0 construido a partir de una sucesión minimizante $(\Omega_m)_{m \geq 1}$ y para $\Omega \in \Omega_{ad}$ se tiene que $\mathcal{C}(\Omega_0) \leq \mathcal{C}(\Omega)$, ver [31, pág. 22].

Control de la ecuación de Poisson

Sea $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, conexo y regular.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde Ω es un abierto a determinar tal que $\omega \subset\subset \Omega$. Además,

1. se tiene $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
2. se conoce un dato prescrito $u_d \in H^1(\omega)$. Es decir,

$$-\Delta u_d = f \text{ en } \omega.$$

Con lo que formulamos la siguiente pregunta:

¿Existe un dominio Ω tal que u solución de (5.1) satisface que $u|_{\omega} = u_d$? En caso de ser cierto. ¿Es Ω único?

5.1. Relación con la literatura existente

D. Chenais en [8], demostró la existencia de un dominio óptimo para (5.1), planteando el problema como uno de optimización, es decir:

$$\min_{\Omega \in U_{ad}} \mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} |u|_{\omega} - u_d|^2$$

y se desarrollan los siguientes pasos:

1. Restringir $U_{ad} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^n : \omega \subset\subset \Omega\}$ a aquellos conjuntos que cumplan cierta propiedad de regularidad. Es decir, Ω debe ser de clase Lip^1 al menos.
2. Adecuar la topología débil de L^2 en el conjunto de funciones características χ_{Ω} para cada $\Omega \in U_{ad}$ de tal manera que se tenga compacidad.
3. Finalmente, probar la continuidad de \mathcal{J} en U_{ad} . Por tanto, el mínimo se alcanza.

Por consiguiente, asumiremos la existencia de al menos un dominio óptimo.

Por otro lado, Puel J. y Osses A. [9] demuestran un problema de controlabilidad para (5.1) de la siguiente forma: sea el conjunto $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ donde los valores de u sobre Γ_0 son desconocidos y tomando en cuenta que se conocen ciertas mediciones de la solución en $L^p(S)$ donde $S \subset \Omega$ es una superficie de codimensión uno (una curva para $n = 2$ o una superficie para $n = 3$); la idea es entonces recuperar los valores sobre Γ_0 . Esto es, un problema inverso. Matemáticamente esto quiere decir que si para toda

$v \in L^p(\Gamma_0)$ se tiene que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \\ u = v & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Entonces (5.2) representa un problema de control en la frontera, con lo que se busca v tal que dado $u_d \in L^p(S)$ se tenga que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\left\| u \Big|_S - u_d \right\|_{L^p(S)} \leq \epsilon.$$

Claramente si $\epsilon = 0$ se tendría control exacto, sin embargo, el problema de control exacto, en general no tiene solución, debido al efecto regularizante del operador $-\Delta$, por ejemplo, si $f = 0$ la solución u es analítica en Ω , $u \in C^\infty(\Omega)$, en cambio u_d sólo es tomada en $L^p(S)$. Es decir, estamos buscando un control en un espacio muy grande, cuando a lo que aspiramos acercarnos se encuentra en espacio muy pequeño. Como es usual en los problemas de control aproximado, se demostró que el conjunto de estados alcanzables

$$\left\{ u(v) \Big|_S : v \in L^p(\Gamma_0) \right\}$$

es denso en $L^p(S)$, ver [9, Teorema 2.1].

Más recientemente, Chenais D. y Zuazua E., en [7], abordaron el problema (5.1) como uno de controlabilidad, esto es, de determinar un control Ω tal que para u solución de (3.14), se tenga que $u = u_d$ en ω . Así, el objetivo de este capítulo es mostrar que la solución de este problema de control se basa en usar las técnicas vistas en el Capítulo 4.

Primero definamos concretamente el conjunto de dominios (o controles) admisibles

Ω_{ad} como:

$$\Omega_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^n : \omega \subset\subset \Omega \right\}$$

de esta manera, podemos considerar los siguientes problemas de controlabilidad:

Controlabilidad Exacta ¿Existe un dominio $\Omega^* \in \Omega_{ad}$ tal que

$$u_{\Omega^*} \Big|_{\omega} = u_d \quad ?$$

Controlabilidad Aproximada Sea $\epsilon > 0$, ¿existe un dominio $\Omega_{\epsilon}^* \in \Omega_{ad}$ tal que

$$\left\| u_{\Omega_{\epsilon}^*} \Big|_{\omega} - u_d \right\| \leq \epsilon \quad ?$$

Unicidad

El siguiente ejemplo muestra que el dominio óptimo Ω para el problema en cuestión no es único.

Ejemplo 1. Funciones propias del Laplaciano

Sea $\Omega = (0, 1)^2$ y $u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, claramente u es solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

Así, dado un subconjunto abierto $\omega \subset \Omega$, con

$$f = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \text{ y } u_d = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

entonces Ω provee de una solución a nuestro problema. Sin embargo, podemos construir diferentes dominios donde las extensiones naturales de u y f resuelven el problema (5.3), consecuencia de la imparidad de la función seno.

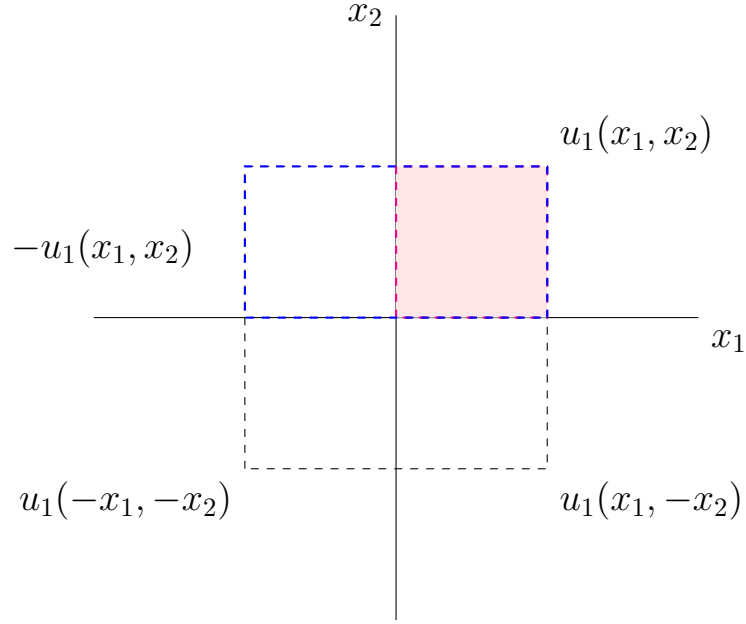


Figura 8: Posibles extensiones del problema Dirichlet.

Por ejemplo, si consideramos \bar{u} y \bar{f} como

$$\bar{u} = \begin{cases} -u & \Omega, \\ 0 & \text{c.o.c,} \end{cases}$$

y

$$\bar{f} = \begin{cases} -f & \Omega, \\ 0 & \text{c.o.c,} \end{cases}$$

entonces estas satisfacen (5.3) con $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$.

Controlabilidad local

La falta de unicidad permite establecer el problema desde un enfoque local, esto es, consideremos un dominio fijo Ω_0 para el cual el problema (5.1) tiene la solución correspondiente u_0 . Entonces, resolvemos la siguiente cuestión: si para u_0 cerca de u_d , existe un dominio Ω' cerca de Ω_0 tal que se tenga controlabilidad exacta o aproximada

según sea el caso. Es decir,

$$\text{si } \|u_d - u_0\| \leq \epsilon \Rightarrow \exists \Omega^* : \|\Omega^* - \Omega_0\| \leq \epsilon$$

bajo alguna norma y sentido adecuado en el caso de los dominios.

Para adaptar el problema (5.1) a las técnicas de diseño óptimo vistas en el capítulo anterior, requerimos las siguientes hipótesis.

- Consideremos Ω_0 de clase $W^{2,\infty}$, así todos los demás dominios serán perturbaciones de este.
- Consideremos $\tau \subset W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\tau = \left\{ I + \theta : \theta \in \Theta \right\}$, donde Θ es una vecindad del origen en $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $\|\theta\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} < 1/2$.

Para cada $\theta \in \Theta$, la variación de los dominios estará definida como

$$\Omega_0 + \theta = \left\{ x + \theta(x) : x \in \Omega_0 \right\}. \quad (5.4)$$

Sea $u_\theta \in H_0^1(\Omega_0 + \theta)$ la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\theta = f & \text{en } \Omega_0 + \theta, \\ u_\theta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_0 + \theta. \end{cases} \quad (5.5)$$

Denotamos por Ω_θ a $\Omega_0 + \theta$ y por Γ_θ a $\partial\Omega_0 + \theta$. Cabe notar que para simplificar notación, por u_θ nos referimos a la $u(\theta)$ del Capítulo 4.

Como es usual en problemas de control, la controlabilidad se reduce a estudiar el conjunto de estados alcanzables $\mathcal{R}(\Theta)$, que en este caso son las restricciones de las soluciones a los problemas elípticos (5.5) en ω . Esto es,

$$\mathcal{R}(\Theta) = \left\{ u_\theta \Big|_\omega : \theta \in \Theta \right\}.$$

En principio, los elementos de $\mathcal{R}(\Theta)$ sólo satisfacen que

$$-\Delta u_\theta = f \text{ en } \omega;$$

sin embargo, para poder describir de manera única a $\mathcal{R}(\Theta)$ debemos tomar en cuenta también el valor en la frontera de las soluciones restringidas a ω . Por tanto, estudiar $\mathcal{R}(\Theta)$ equivalente a estudiar el conjunto de trazas alcanzables definido como

$$\mathcal{R}_\partial(\Theta) = \left\{ u_\theta \Big|_{\partial\omega} : \theta \in \Theta \right\}.$$

En efecto, u pertenece a $\mathcal{R}(\Theta)$ si y sólo si

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \omega, \\ u = z & \text{sobre } \partial\omega, \end{cases} \quad (5.6)$$

para algún $z \in \mathcal{R}_\partial(\Theta)$. Denotemos por u_0 la solución del problema correspondiente (5.5) cuando $\theta = 0$ y z_0 su valor sobre $\partial\omega$.

Cuando θ varía en Θ , necesariamente u_θ se encuentra cerca de u_0 , en consecuencia z_θ también estará cerca de z_0 , con lo que es natural hacerse la pregunta si cuando θ varía en Θ , z_θ cubre una bola de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ con centro z_0 o si cubre al menos un subconjunto denso de dicha bola. Estos son los problemas de controlabilidad (local) exacta y aproximada, respectivamente, que mencionábamos antes.

Para hacer más preciso el estudio de estos problemas, consideremos la aplicación Λ definida como

$$\begin{aligned} \Lambda : \theta &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega), \\ \theta &\mapsto z_\theta = \text{tr}_{\partial\omega}(u_\theta). \end{aligned}$$

Notemos que $z_0 = \Lambda(0)$ y el rango de Λ , definido como

$$\mathcal{R}(\Lambda) = \{z_\theta \in H^{1/2}(\partial\omega) : z_\theta = \text{tr}_{\partial\omega}(u_\theta), \text{ para algún } \theta \in \Theta\},$$

no es más que $\mathcal{R}_\partial(\Theta)$, en consecuencia nos interesa estudiar el rango de Λ . De esta manera, los conceptos de controlabilidad quedan expresados como:

Controlabilidad Exacta .

¿Existe una vecindad \mathcal{N} de z_0 en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}(\Lambda)$?

ó

Controlabilidad Aproximada .

¿Existe una vecindad \mathcal{N} de z_0 en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ tal que la intersección $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}(\Lambda)$ es un subconjunto denso de \mathcal{N} ?

Efecto regularizante del operador de Laplace

Por ser Λ una aplicación fuertemente no lineal es natural linealizar el problema y utilizar el Teorema de la Función Implícita (TFI) para obtener resultados locales. Denotemos por $d\Lambda(0)$ la derivada de Fréchet en el origen de Λ y notemos que se tendría control exacto si:

(*) $d\Lambda(0)$ fuera un isomorfismo entre $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$.

En efecto, por el TFI (Teorema 38) se sigue que existe una vecindad W_0 de $\Lambda(0)$ en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}(\Lambda(0))$.

(*) $d\Lambda(0)$ fuera un operador suprayectivo.

En efecto, por ser $d\Lambda(0)$ un operador lineal suprayectivo en particular implica que $\ker d\Lambda(0) = \{0\}$ y por tanto, $d\Lambda(0)$ es un isomorfismo, con lo que las

hipótesis del Teorema 38 se satisfacen y existe una vecindad $\mathcal{N} \subset H^{1/2}(\partial\omega)$ de $\Lambda(0)$ contenida en $\Lambda(\mathcal{N})$, ver [30, Colorario 2.5.8].

Sin embargo, el efecto regularizante hace que ninguna de las dos situaciones sea posible, pues el supuesto sobre la sobreyectividad de $d\Lambda(0)$ no es realista. En efecto, para cualquier $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la regularidad de $\Lambda(\theta) = z_\theta$ depende de la regularidad de la función f en alguna vecindad de $\partial\omega$, por ejemplo, si $f \in L^2$ entonces la u_θ se encuentra en $H^2(\omega)$ y por tanto z_θ estaría en $H^{3/2}(\partial\omega)$, ver Teorema 19. Por otro lado, si f es analítica, entonces z_θ también analítica si el dominio ω lo es, lo mismo puede ser dicho para el operador linealizado $d\Lambda(0)$, claramente si no se puede aspirar a ser suprayectivo, menos a ser un isomorfismo. Como consecuencia, en el mejor de los casos podemos aspirar a que $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}(\Lambda)$ sea un subconjunto denso de \mathcal{N} , por ello sólo se discutirá el control aproximado, esto equivalente a mostrar la densidad del rango del operador $d\Lambda(0)$ en $H^{1/2}(\partial\omega)$, no obstante esto no es suficiente para poder ocupar el TFI y decir algo sobre el problema no lineal, para ese caso lo que se hace es discretizar el problema no lineal, con lo que el problema se plantea en espacios de dimensión finita y la densidad del rango del operador linealizado sí implica su sobreyectividad y permite usar el TFI. Ver [7].

5.2. Densidad del rango de $d\Lambda(0)$

Mostrar que el rango del operador linealizado es denso en $H^{1/2}(\partial\omega)$ es equivalente a probar un resultado de continuación única para la solución del sistema adjunto, consecuencia de teorema de Hahn-Banach. Por simplicidad nos restringiremos al subespacio $L^2(\partial\omega)$ de $H^{1/2}(\partial\omega)$, de esta esta manera adaptaremos el argumento del Teorema 2.1 descrito en [9].

Observemos que el operador Λ está constituido por la composición de los siguientes operadores

$$\begin{aligned} G : \Theta &\rightarrow H_0^1(\Omega_\theta), \\ \theta &\mapsto u_\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\partial\omega} : H_0^1(\Omega_\theta) &\rightarrow L_2(\partial\omega), \\ u_\theta &\mapsto \text{tr}_{\partial\omega}(u_\theta) = z_\theta. \end{aligned}$$

De esta manera, $\Lambda = \text{tr}_{\partial\omega} \circ G$. Por lo visto en el capítulo anterior, para $u(\theta) = u_\theta$ solución de (5.5) se tiene que considerar su variación local y total, esto es, para $m \geq 1$,

$\dot{u}(\theta) \in H^m(\Omega_0)$ y verifica que

$$u(\theta) \circ (I + \theta) = u(0) + \dot{u}(\theta) + o(\theta) \quad \text{en } H^m(\Omega_0),$$

$u'(\theta) \in H^m(\Omega_0)$ y verifica que

$$\text{Para cada } \mathcal{O} \subset\subset \Omega_0, \quad u(\theta) = u(0) + u'(\theta) + o(\theta) \quad \text{en } H^m(\mathcal{O}).$$

Más aún, tenemos que.

Lema 5. *Sea $m \geq 1$ un entero, si $\dot{u}(\theta)$ existe en $H^m(\Omega_0)$, entonces existe $u'(\theta)$ en $H^{m-1}(\Omega_0)$. Más aún,*

$$u'(\theta) = \dot{u}(\theta) - \theta \cdot \nabla u(0) \quad \text{c.p.t.p. en } \Omega_0. \quad (5.7)$$

Demostración. Basta adaptar el Teorema 33 con $p = 2$. ■

Concretamente Λ es la composición de las aplicaciones

$$\theta \longmapsto u_\theta \Big|_\omega \longmapsto u_\theta \Big|_{\partial\omega},$$

con lo que es natural trabajar con la derivada local u'_θ . También, por esta tiene sentido que u'_θ sea un elemento de $H^1(\Omega_0)$ y en consecuencia, por el Lema 5, \dot{u}_θ se encuentra en $H^2(\Omega_0)$. La regularidad de u_θ depende de la regularidad de f para el problema (5.5), sin embargo podemos ser más flexibles y pedir que $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, veamos el siguiente resultado.

Lema 6. *Si f está en $H^1(\mathbb{R}^n)$, entonces \dot{u}_θ está en $H^2(\Omega_0)$.*

Demostración. La demostración es semejante al Lema 3 daremos aquí una idea de la adaptación.

Basta considerar la función $\mathcal{G}(u, \theta) = \mathcal{F}(u, u(\theta)) - f \circ (I + \theta)$, donde \mathcal{F} es (4.38), más aún se puede mostrar que $u(\theta)$ satisface

$$\mathcal{G}(\theta, u(\theta)) = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{G}(0, u(0)) = 0.$$

De esta manera para probar que \mathcal{G} es de clase C^1 , necesariamente $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposición 2. *Suponga que f está en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y sea*

$$G : W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(\omega),$$

$$\theta \mapsto u_\theta \Big|_\omega.$$

La aplicación G es diferenciable en el origen y se tiene que

$$dG(0) \cdot \theta = u'_\theta \Big|_\omega,$$

donde u'_θ es la solución única del problema

$$\begin{cases} -\Delta u'_\theta = 0 & \text{en } \Omega_0, \\ u'_\theta = -\frac{\partial u_0}{\partial n}(\theta \cdot n) & \text{en } \Gamma_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Más aún, el operador Λ es diferenciable en el origen y

$$d\Lambda(0) \cdot \theta = u'_\theta \Big|_{\partial\omega}.$$

Demostración. Por el Lema 6, la aplicación $\theta \mapsto u(\theta)$ es localmente diferenciable en el origen, esto prueba que G es diferenciable en el origen, y la existencia de $u'(\theta)$. Finalmente, para la derivabilidad de Λ , tomando en cuenta que la traza es una aplicación lineal

$$\begin{aligned} d\Lambda(0) \cdot \theta &= d(\text{tr}_{\partial\omega} \circ G)(0, \theta) = \text{tr}'_{\partial\omega}(G(0), G'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} \text{tr}_{\partial\omega} \left(u(0) + t u'_\omega(\theta) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(z_0 + t \text{tr}(u'_\omega(\theta)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \text{tr}_{\partial\omega}(u'(\theta)). \end{aligned}$$

Finalmente, por el Teorema 34 y Teorema 35 se sigue que $u'(\theta)$ es solución de (5.8). ■

Teorema 40. *Sea u solución de $-\Delta u = 0$ en Ω . Supóngase que para un conjunto abierto \mathcal{O} de \mathbb{R}^n*

(a) $\Gamma = \mathcal{O} \cap \partial\Omega$ es una variedad de clase C^∞ de dimensión $n - 1$, $|\Gamma| > 0$ y $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 = u$ sobre Γ . Entonces, $u \equiv 0$ en Ω . Más aún, el conjunto

$$N = \left\{ x \in \Gamma : \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 = u(x) \right\}$$

tiene medida $(n-1)$ dimensional cero.

Demostración. Ver [32, Teorema 2.1] ■

Para simplificar la notación, escribamos Ω en lugar de Ω_0 y Γ en vez de Γ_0 .

Teorema 41. *Supongamos que existe un conjunto no vacío de Γ tal que $\frac{\partial u}{\partial n} \neq 0$. Entonces $\mathcal{R}(d\Lambda(0))$ es denso en $L^2(\partial\omega)$.*

Demostración. Para mostrar la densidad basta probar que $\mathcal{R}(d\Lambda(0))^\perp = \{0\}$ ¹, esto es, dado $g \in L^2(\partial\omega)$ tal que

$$\forall w \in \mathcal{R}(d\Lambda(0)) \quad \int_{\partial\omega} gw = 0, \quad (5.9)$$

entonces $g = 0$.

Por definición $\forall w \in \mathcal{R}(d\Lambda(0)) = \{u'(\theta) : \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\}$, de esta manera (5.9) es equivalente a

$$\forall \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad \int_{\partial\omega} gu'_\theta = 0. \quad (5.10)$$

Definamos el sistema adjunto para $\varphi \in H^1(\Omega)$ como

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = g \otimes \delta_{\partial\omega}, & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.11)$$

donde $\delta_{\partial\omega}$ es la medida de Dirac y $g \otimes \delta_{\partial\omega} \in [H^1(\Omega_0)]'$ está definido por

$$\langle g \otimes \delta_{\partial\omega}, v \rangle_{[H^1(\Omega)]', H^1(\Omega)} = \int_{\partial\omega} gv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Probemos la siguiente afirmación: si $\varphi = 0$, entonces $g = 0$.

De (5.10) y (5.11) se tiene que

$$\forall \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \quad \langle -\Delta\varphi, u'(\theta) \rangle_{[H^1(\Omega)]', H^1(\Omega)} = \int_{\partial\omega} gu'(\theta) = 0. \quad (5.12)$$

Tomando en cuenta que

¹Esto es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, ver [22, Corolario 1.8]

(*) $u'(\theta) \in H^1(\Omega)$, $\Delta u'(\theta) \in L^2(\Omega)$ de tal manera que $\frac{\partial u'(\theta)}{\partial \nu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

(*) $\Delta\varphi \in [H^1(\Omega)]'$ y φ es suave para alguna vecindad de Γ .

Luego, usando integración por partes y el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi \Delta u'_{\theta} - \underbrace{\int_{\Omega} \Delta\varphi u'(\theta)}_{\langle \Delta\varphi, u'_{\theta} \rangle_{[H^1(\Omega)]', H^1(\Omega)} = 0} &= \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla u'(\theta) + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla u'(\theta)) \\
&= \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla u'(\theta) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u'(\theta) \nabla\varphi) \\
&= \underbrace{\int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial u'(\theta)}{\partial \nu} dS}_{\langle \frac{\partial u'_{\theta}}{\partial \nu}, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}} - \int_{\Gamma} u'(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por (5.12) se sabe que $\langle \Delta\varphi, u'(\theta) \rangle_{[H^1(\Omega_0)]', H^1(\Omega_0)} = 0$, además $\Delta u'(\theta) = 0$ en Ω , haciendo integración por partes en segundo sumando del lado derecho y como $\varphi = 0$ sobre Γ ; en consecuencia,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} u'(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

y usando la identidad (5.8) sobre Γ ,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial u(0)}{\partial \nu} (\theta \cdot \nu) = 0 \quad \forall \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n). \quad (5.13)$$

Más aún, $A = \{\theta \cdot \nu : \theta \in W^{2,\infty}\}$ es denso en $L^2(\Gamma)$ por el Corolario 1, es decir $A^{\perp} = \{0\}$, en consecuencia de (5.13) se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial u(0)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Como se asumió que $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} \neq 0$ sobre el conjunto abierto $\gamma \subset \Gamma_0$, se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi = g \otimes \delta_{\partial\omega} & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \gamma, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

En particular,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi = 0 & \text{en } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \gamma, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Tomando en cuenta que ω es simplemente conexo y aplicando el Teorema 40 se deduce que

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{\omega}.$$

Considerando que $\varphi \in H^1(\Omega)$ y su traza sobre $\partial\omega$ es un operador continuo. Por tanto,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi = 0 & \omega, \\ \varphi = 0 & \partial\omega, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

que por el principio del máximo, $u \equiv 0$ en ω .

Con lo que $\varphi = 0$ en Ω y finalmente $g = 0$, con lo que se muestra lo deseado. ■

Conclusiones

En este trabajo no estudiamos la discretización del problema no lineal considerado, sin embargo se puede mencionar que en [7] se demuestra que bajo ese marco de dimensión finita el problema linealizado es exactamente controlable, más aún, la demostración se basa en probar un nuevo principio de continuación única. Más tarde, en [1] los mismos autores tratan el problema en concreto para dos dimensiones con un enfoque totalmente numérico.

Controlar una EDP mediante su dominio de referencia ha sido aplicado no sólo para el caso elíptico como se ha mostrado en este trabajo. En [33] se plantea el problema para la ecuación del calor y la ecuación de ondas. Sin embargo, a diferencia del caso estacionario, se debe considerar la variable temporal en el dominio de control, es decir, se busca determinar un dominio óptimo $\Omega(t)$ que puede o no depender de t , tal que $y_{\Omega(\cdot)} = y_d$. En el mismo artículo se prueba que para el caso parabólico el problema linealizado es aproximadamente controlable, mientras que, para el caso hiperbólico, tanto el problema como su equivalente linealizado son exactamente controlables.

Por otro lado, en particular referente a la técnica de diferenciación respecto del dominio, ha sido anteriormente usada en problemas de control, por ejemplo en [34] J. Ortega y E. Zuazua consideran el problema de control aproximado en la frontera para

la ecuación de calor con la restricción siguiente: dado un dato $y_1 \in L^2(\Omega)$, se busca un control h tal que la solución satisfaga no sólo $\|y(T, h) - y_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$ sino que también $\int_{\Omega} y(x, t) = \int_{\Omega} y$, es decir, que la masa total de la solución $y(x, t)$ sea constante a lo largo de una trayectoria. Por los mismos autores, en [35], se estudia la estabilización del sistema de placas termoelásticas. A partir de las propiedades espectrales de un problema elíptico cuyo dominio es deformado se puede estudiar la estabilización del sistema en cuestión. Por último J. Ortega et. al. en [36] estudian un problema inverso de identificación de un cuerpo rígido sumergido en un fluido gobernado por el sistema de Boussinesq.

Finalmente, referente a la optimización de forma, cabe mencionar el trabajo de E. Trélat, C. Zhang y E. Zuazua en [37] donde se plantea un problema de optimización donde el estado es la solución de la ecuación de calor. En concreto, se muestra para $T > 0$, cualquier $y_0 \in L^2(D)$ y $f \in L^2(D)$ con $D \subset \mathbb{R}^n$ llamada la región de diseño, y considerando cualquier valor prescrito $z \in H_0^1(D)$, el problema

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_{\omega}^N} J^T(\Omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\omega} |y(x, t) - z(x)|^2 + |\nabla y(x, t) - \nabla z(x)|^2 dx dt, \quad (5.17)$$

donde $\mathcal{O}_{\omega}^N = \{\Omega \subset D : \omega \subset \Omega : \#\Omega \leq N\}$, $\#\Omega$ es el número de componentes conexas de Ω , ω es fijo y Ω es el control (donde la ecuación del calor evoluciona), entonces este problema tiene al menos un mínimo, más aún T representa un parámetro, con lo que también se analiza el comportamiento asintótico de las soluciones de (5.17) cuando $T \rightarrow \infty$.

Álgebras de Banach

Las álgebras de Banach son la rama del análisis funcional dedicado al estudio de operadores a través de su estructura algebraica. Para un estudio más profundo consultar [25, 38, 39].

Definición 34 (Álgebra). *Un álgebra unitaria \mathcal{A} es un espacio vectorial real que junto con la operación (o aplicación)*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto xy,\end{aligned}$$

satisface: para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. (Asociatividad) $(xy)z = x(yz)$,
2. (Distributividad) $x(y + z) = xy + xz$,
3. (Asociatividad con la multiplicación por escalar) $(\alpha x)y = x(\alpha y)$,
4. (Elemento identidad) existe un único $e \in \mathcal{A}$ tal que $e \neq 0$ y se tiene que $xe = ex = x$, llamado identidad.

Definición 35. *Un álgebra de Banach es un álgebra donde \mathcal{A} es un espacio de Banach donde se cumple que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para toda $x, y \in \mathcal{A}$ y además el elemento identidad cumple que $\|e\| = 1$.*

De esta manera, un álgebra de Banach estudia espacios normados donde la multiplicación es una aplicación continua, además cabe notar que un álgebra de Banach no tiene por qué ser conmutativa.

Teorema 42. *Sea Ω acotado y Lipschitz, si $p > 1$ y $kp > n$ o $p = 1$ y $k \geq n$ entonces existe una constante $C = C(n, k, p, \Omega)$ tal que, para toda $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, el producto uv definido puntualmente c.s. en Ω , $uv \in W^{k,p}(\Omega)$ y satisface*

$$\|uv\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

En particular $W^{k,p}(\Omega)$ es un álgebra de Banach conmutativa y unitaria, donde la unidad es la función constante $u(x) = 1$.

Demostración. Ver [19, Teorema 4.39]. ■

Notemos $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $Lip^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ coinciden (por el Teorema 16), por tanto, usando el teorema anterior se tiene que $Lip^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es también un álgebra de Banach.

Definición 36. *Sean x, y elementos del álgebra \mathcal{A} . Entonces*

1. *y es llamado elemento inverso derecho (izquierdo) de x si $xy = e$ ($yx = e$). Si y es ambos, entonces y es el inverso de x .*
2. *Un elemento de \mathcal{A} para el cual existe al menos un inverso (derecho, izquierdo) es llamado elemento invertible (derecho invertible, izquierdo invertible).*

3. Cuando un elemento x es invertible, su inverso es único y se denota por x^{-1} .
4. El conjunto de todos los elementos invertibles de \mathcal{A} se denota por $\text{inv}(\mathcal{A})$. Los elementos invertibles por la derecha (izquierda) se denotan por $\text{inv}_r(\mathcal{A})$ e $\text{inv}_l(\mathcal{A})$ respectivamente. Por tanto,

$$\text{inv}(\mathcal{A}) = \text{inv}_r(\mathcal{A}) \cap \text{inv}_l(\mathcal{A}).$$

Teorema 43. Para T en un álgebra de Banach, la sucesión $\|T^n\|^{1/n}$ converge a un número denotado por $\rho(T)$, donde para todo natural n , $\rho(T) \leq \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|$.

Demostración. Ver [38, Proposición 13.12]. ■

Teorema 44. Si $\rho(T) < 1$, entonces $e - T$ es invertible, $(e - T)^{-1} = e + T + T^2 + \dots$.

Demostración. Ver [38, Teorema 13.20]. ■

El teorema anterior es válido si $\rho(T)$ es sustituido por $\|T\|$ (ver [40, Teorema 7.3-1]), en particular cuando \mathcal{A} es un espacio de Banach ó $\mathcal{A} = B(X)$ con X un espacio de Banach¹.

Teorema 45. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \text{inv}(\mathcal{A}) &\rightarrow \text{inv}(\mathcal{A}) \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned} \tag{A.1}$$

es diferenciable, con derivada $\mathcal{H}'(x)h = x^{-1}hx^{-1}$.

Demostración. Ver [38, demostración del Teorema 13.21]. ■

¹Revisar las [notas de análisis numérico complejo de Sheehan Olver, Lección 15](#).

Diferenciación de funciones compuestas

Denotemos por I la función identidad en \mathbb{R}^n , es decir, $I(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 7 (Invertibilidad). Sea $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\| < \frac{1}{2}$.

Entonces la aplicación

$$u \mapsto I + u \tag{B.1}$$

es invertible. Más aún,

$$(I + u)^{-1} = I + v \text{ para alguna } v \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$

y

$$\|v\|_k \leq C_k \|u\|_k \text{ para alguna constante positiva } C_k.$$

Demostración. En efecto, como

$$\|I - (I - u)\|_k = \|u\|_k < 1,$$

entonces, por el Teorema 44, $I + u$ es invertible. Por otro lado,

$$(I + u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^n.$$

Escribiendo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^n = u \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^{n-1}$, se tiene que

$$\left\| u \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^{n-1} \right\|_k \leq \|u\|_k \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^{n-1} \right\|_k \leq \|u\|_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 2\|u\|_k,$$

esto es, $\|v\|_k \leq C\|u\|_k$. Finalmente. como u es una contracción por ser Lipschitz, entonces $v \in Lip^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. ■

Notación: Por $[a_{ij}]$ nos referimos a una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, esto es una matriz de entradas a_{ij} con $1 \leq i, j \leq n$.

Recordemos que la derivada de una función vectorial $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ con $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es llamada el **Jacobiano** de u y es el determinante de la matriz de las derivadas parciales de orden uno de sus funciones coordenadas u_i , esto es,

$$\text{Jac}(u) = \left| \det \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \right|. \quad (\text{B.2})$$

Lema 8. Sea $k \geq 1$, si $k > 1$ la aplicación

$$\begin{aligned} Lip^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow Lip^{k-1}(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto \text{Jac}(I + u) \end{aligned}$$

y para $k = 1$,

$$\begin{aligned} Lip^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto \text{Jac}(I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0. Más aún, su derivada en el origen y dirección u está dada por:

$$\frac{\partial \text{Jac}(I + u)}{\partial u}(0) \cdot u = \text{div } u. \quad (\text{B.3})$$

Equivalentemente, se verifica la ecuación

$$\text{Jac}(I+u) = \text{Jac}(I) + \text{div } u + o(u) = 1 + \text{div } u + o(u) \text{ en } \text{Lip}^{k-1}(\mathbb{R}^n)(L^\infty(\mathbb{R}^n)) \text{ para } k=1.$$

Demostración. Ver [31, Lema 2.2]. ■

Lema 9. Sea $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ y $\|u\|_k < \frac{1}{2}$ y $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\nabla f \circ (I + u) = {}^t \left[\frac{\partial(I+u)_j}{\partial x_j} \right]^{-1} \nabla(f \circ (I + u)) \quad (\text{B.4})$$

Demostración. Sea $(f_n)_{n>1}$ una sucesión regularizante, tal que $f_n \rightarrow f$ en $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, de esta manera, para cada n fijo se tiene que $f_n \circ (I + u) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces por la regla de la cadena,

$$\nabla(f_n \circ (I + u)) = \left[\frac{\partial(I+u)_i}{\partial x_j} \right]^t \cdot (\nabla f_n) \circ (I + u).$$

Finalmente por densidad y consecuencia del encaje $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ el resultado se sigue. ■

Lema 10. Sea $k > 1$. La aplicación

$$\begin{aligned} F : \mathcal{B}(0, \epsilon) \subset \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{Lip}^{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}), \\ u \mapsto F(u) &= {}^t \left[\frac{\partial(I+u)_j}{\partial x_j} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

es derivable en 0 y su derivada es

$$dF(0) \cdot u = - \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]^t = - {}^t \text{Jac}(u). \quad (\text{B.6})$$

Equivalentemente, se verifica que

$$F(u) = I - {}^t \text{Jac}(u) + \theta(u) \quad \text{en} \quad \text{Lip}^{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Demostración. Escribamos $G(u) = {}^t \left[\frac{\partial(I+u)_j}{\partial x_j} \right]$, claramente G es continuamente diferenciable y $dF(0; u) = {}^t(\text{Jac } u)$.

Por el Teorema 45, $d\mathcal{H}(e) \cdot a = -a$ y teniendo en cuenta que F coincide ser la composición de $\mathcal{H} \circ G$ donde \mathcal{H} es (A.1), entonces $d(\mathcal{H} \circ F)(0; u) = -{}^t(\text{Jac } u)$ ■

Corolario 2 (Estimación para el Jacobiano). Para $u \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $\|u\|_1 < \frac{1}{2}$, existe una constante $C > 0$ tal que verifica que

$$\|\text{Jac}(I + u)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C + o(u). \quad (\text{B.7})$$

Demostración. En efecto, si $\|u\|_1 < \frac{1}{2}$ se verifica

$$\text{para algún } v \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) : \quad (I + u)^{-1} = (I + v) \quad \text{y } \|v\|_1 \leq C_1 \|u\|_1.$$

Luego, por el Lemma 8

$$\text{Jac}(I + v) = 1 + \text{div } v + o(v) \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

de esta forma se verifica que, considerando que $\|\text{div } u\|_\infty \leq M \|v\|_1$ consecuencia de que las derivadas de v son Lipschitz,

$$\begin{aligned} \|\text{Jac}(I + u)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|\text{Jac}(I + v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 1 + M \|v\|_1 + o(v) \\ &\leq C + o(u) \end{aligned}$$

donde $C = 1 + M \|v\|_1$. ■

Continuidad y diferenciabilidad de $u \mapsto f \circ (I + u)$

Lema 11. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto f \circ (I + u) \end{aligned}$$

es continua en 0.

Demostración. Por densidad de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ consideremos una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ próxima a f y para toda $u \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ escribamos

$$f \circ (I + u) - f = (f - \varphi) \circ (I + u) - (f - \varphi) + \varphi \circ (I + u) - \varphi. \quad (\text{B.8})$$

En efecto, si $\|u\|_1$ es suficientemente pequeña se tiene que $I + u \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, por la desigualdad de Hölder, haciendo $\tau = (I + u)(x)$ y consecuencia del Corolario 2

$$\begin{aligned} \|(f - \varphi) \circ (I + u)\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f - \varphi) \circ (I + u)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f - \varphi)(\tau)|^p \text{Jac}(I + u)^{-1} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\|\text{Jac}(I + u)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left(C + o(u) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|(f - \varphi) \circ (I + u)\|_p \leq \left\{ C + o(u) \right\}^{\frac{1}{p}} \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (\text{B.9})$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ (I + u))(x) - \varphi(x) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (\varphi \circ (I + \tau u))(x) d\tau \\ &= \int_0^1 (\nabla \varphi \circ (I + \tau u))(x) \cdot u(x) d\tau, \end{aligned}$$

de donde

$$|(\varphi \circ (I + u))(x) - \varphi(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \left(\int_0^1 |(\nabla \varphi \circ (I + \tau u))(x)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Haciendo $y = (I + \tau u)(x)$, por Fubini y la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned} & \|\varphi \circ (I + u) - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ & \leq \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |(\nabla \varphi \circ (I + \tau u))(x)|^p d\tau dx \\ & \leq \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |(\nabla \varphi(y))^p \text{Jac}(I + \tau u)^{-1}| dy d\tau \\ & \leq \|u\|_{L^\infty}^p \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|\text{Jac}(I + \tau u)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

Por tanto, por el Corolario 2

$$\|\varphi(I + u) - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^\infty} (C + o(u))^{1/p} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}. \quad (\text{B.10})$$

De esta manera usando las estimaciones (B.9) y (B.10), podemos acotar a (B.8) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|f \circ (I + u) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \leq \left\{ C + o(u) \right\}^{\frac{1}{p}} \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \quad + \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \\ & \quad \|u\|_{L^\infty} \left\{ C + o(u) \right\}^{1/p} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

En consecuencia, existe una constante $\mathcal{K} > 0$ tal que

$$\|f \circ (I + u) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \mathcal{K} \left(\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \right).$$

Como f es próxima a φ y eligiendo u tal que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ sea suficientemente pequeña, entonces el segundo miembro de (B.11) se puede hacer tan pequeño como se desee. ■

El lema anterior puede ser generalizado al caso en que $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ con $m \geq 1$ y $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $k \geq \sup\{1, m\}$. Más aún, la aplicación $u \mapsto f \circ (I + u)$ no sólo es continua en 0, sino en todo punto de $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ [27, Lema 4.4, pág IV.9]. Sea $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Si aproximamos a f por funciones $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y tomando el límite en (B.11), entonces para cada $u \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ suficientemente pequeño (en norma), se tiene que

$$\|f \circ (I + u) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}. \quad (\text{B.12})$$

Lema 12. *Sea $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ con $m \geq 1$ entero y $1 \leq p < \infty$ con $k \geq 1$ entero. Si la aplicación*

$$\begin{aligned} \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto f \circ (I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0, entonces también lo es cuando se restringe a $\text{Lip}^{k'}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $k' \geq k$.

Lema 13. *Sea $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ con $m \geq 1$ entero, $1 \leq p < \infty$ y k entero tal que $k \geq 1$. Supongamos que la aplicación*

$$\begin{aligned} \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto G(u) = f \circ (I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0 con derivada denotada por $G'(0; \cdot)$. Si G restringida a $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y con valores en $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ es también derivable en 0, entonces su derivada vuelve a ser $G'(0; \cdot)$, es decir, para toda $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $\|u\|_k$ suficientemente pequeña, se verifica:

$$f \circ (I + u) = f + G'(0; \cdot) + \theta(u) \quad \text{en} \quad W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Lema 14. *Sea la aplicación*

$$G : \text{Lip}^{m-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$$

y supongamos que $m \geq 2$, entonces las siguientes son equivalentes:

(i) *La aplicación G es derivable en 0.*

(ii) *La aplicación*

$$\begin{aligned} F : \text{Lip}^{m-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-2,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1}), \\ u &\mapsto F(u) = (G(u), \nabla G(u)) \end{aligned}$$

es derivable en 0.

Demostración. Ver [31, Lema 2.10]. ■

Proposición 3. *Sea $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ con $m \geq 1$ entero, $1 \leq p < \infty$ y k un entero tal que $k \geq \sup\{1, m - 1\}$. La aplicación*

$$\begin{aligned} \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto f \circ (I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0 y su derivada en 0 para toda dirección u es:

$$\frac{\partial f \circ (I + u)}{\partial u}(0) \cdot u = \nabla f \cdot u \quad \forall u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n). \quad (\text{B.13})$$

Equivalentemente, para toda $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_k$ es suficientemente pequeña, se verifica:

$$f \circ (I + u) = f + \nabla f \cdot u + \theta(u).$$

Demostración. La idea será usar un argumento de inducción sobre m y k .

Caso: $m = 1, k = 1$ Supóngase que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y sea $u \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $u \neq \vec{0}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$\begin{aligned} (f \circ (I + u))(x) - f(x) - u(x) \nabla f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \left\{ (f \circ (I + \tau u))(x) - \tau u(x) \nabla f(x) \right\} d\tau \\ &= \int_0^1 u(x) \left\{ \nabla f \circ (I + \tau u)(x) - \nabla f(x) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder y Fubini,

$$\begin{aligned} &\| (f \circ (I + u)) - f - u \nabla f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \int_0^1 |\nabla f \circ (I + \tau u)(x) - \nabla f(x)|^p d\tau dx \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla f \circ (I + \tau u)(x) - \nabla f(x)|^p d\tau dx \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f \circ (I + \tau u)(x) - \nabla f(x)|^p dx d\tau. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\| (f \circ (I + u)) - f - u \cdot \nabla f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \| \nabla f \circ (I + \tau u) - \nabla f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por hipótesis $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, de esta manera podemos elegir una sucesión $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, similar a (B.11),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|u\|_1} \|f \circ (I + u) - f - u \cdot \nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \| \nabla f \circ (I + \tau u) - \nabla f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \left(\| \nabla f - \varphi_k \|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} + \|u\|_1 \| \text{Jac } \varphi_k \|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \right). \end{aligned}$$

Tomando $k \rightarrow \infty$ y $\|u\|_1 \rightarrow 0$, se tiene

$$\frac{1}{\|u\|_1} \|f \circ (I + u) - f - u \cdot \nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

Sea ahora $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, considerando un argumento precedente, conduce a la desigualdad válida para $u \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|u\|_1} \|f \circ (I + u) - f - u \cdot \nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \right) \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En consecuencia la Proposición 3 es cierta para $m = 1$ y $k = 1$.

Caso general Por el Lema 12, basta probarlo para $k = \sup\{1, m - 1\}$. La idea es usar el Lema 14 con $G(u) = f \circ (I + u)$ con la hipótesis de inducción sobre m .

Entonces, supóngase cierta la Proposición 3 para $k = \sup\{1, m - 1\}$, para un $m \leq 1$ y sea $f \in W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Dado que $\nabla f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ por el Lema 12 la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Lip}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) & \rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \\ u & \mapsto \nabla f \circ (I + u) \end{aligned}$$

es derivable en 0. Recordando que en el Lema 9 se tiene la igualdad

$$\nabla f \circ (I + u) = \left[\frac{\partial (I + u)_i}{\partial x_j} \right]^{-1} \nabla (f \circ (I + u)). \quad (\text{B.14})$$

Entonces por el argumento anterior sabemos que el miembro izquierdo es derivable en 0, y el primer producto del miembro derecho también lo es, por el Lema 10, implicando así que la aplicación $\nabla (f \circ (I + u))$ también es derivable en 0. Por otro lado, por hipótesis de inducción tenemos que $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, por lo que la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Lip}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) & \rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n), \\ u & \mapsto \nabla (f \circ (I + u)) \end{aligned}$$

es derivable en 0 con derivada en dirección u dada por $u \cdot \nabla f$. En consecuencia usando el Lema 14, la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Lip}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1}), \\ u &\mapsto \left(f \circ (I + u), \nabla(f \circ (I + u)) \right) \end{aligned}$$

es derivable en 0. Por el Lema 13 esto es equivalente a derivabilidad en 0 de la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Lip}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ u &\mapsto f \circ (I + u) \end{aligned}$$

Más aún, su derivada en la dirección u es $u \cdot \nabla f$, con lo que se prueba lo deseado. ■

Generalización: f depende de u

Proposición 4. *Sea la función $f : \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ con $k \geq m \geq 1$ y $p \in [1, \infty)$ tal que la aplicación*

$$\begin{aligned} \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ u &\rightarrow f(u) \circ (I + u) \end{aligned} \tag{B.15}$$

es derivable en 0, con derivada en dirección u dada por:

$$\frac{\partial f(u) \circ (I + u)}{\partial u}(0) \cdot u = \dot{f}(u).$$

Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n), \\ u &\rightarrow f(u) \end{aligned} \tag{B.16}$$

es derivable en 0 con derivada en dirección u dada por:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u}(0) \cdot u = f'(u) = \dot{f}(u) - u \cdot \nabla f(0).$$

Equivalentemente, para cada $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $\|u\|_k$ suficientemente pequeña, existe $\dot{f}(u) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ siendo la aplicación $u \mapsto \dot{f}(u)$ lineal y continua que verifica

$$f(u) \circ (I + u) = f(0) + \dot{f}(u) + \theta(u) \text{ en } W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Entonces, para tales u existe $f'(u) \in W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ siendo la aplicación $u \mapsto f'(u)$ lineal y continua tal que verifica

$$f(u) = f(0) + f'(u) + \theta(u) \text{ en } W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Además se tiene

$$f'(u) = \dot{f}(u) - u \cdot \nabla f(0).$$

Demostración. **Caso** $m = 1$. Sea $k \geq 1$. Para $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ consideremos la función descrita por

$$\chi(u) = f(u) - f(0) - \dot{f}(u) + u \cdot \nabla f(0).$$

Notemos que $\chi(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, haciendo el cambio de variable $x = (I + u)(\tau)$, usando la desigualdad de Hölder y por el Corolario 2 se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\chi(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi(u)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi(u) \circ (I + u)(\tau)|^p \text{Jac}(I + u) d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\|\text{Jac}(I + u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \|\chi(u) \circ (I + u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left(C + o(u) \right)^{\frac{1}{p}} \|\chi(u) \circ (I + u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{B.17}$$

y recordemos que $o(u)$ es tal que

$$\frac{o(u)}{\|u\|_1} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_1 \rightarrow 0.$$

Escribamos:

$$\begin{aligned} & \chi(u) \circ (I + u) \\ &= f(u) \circ (I + u) - f(0) \circ (I + u) - \dot{f}(u) \circ (I + u) + \\ & u \circ (I + u) \cdot \nabla f(0) \circ (I + u) \\ &= f(u) \circ (I + u) - f(0) - \dot{f}(0) - \left(f(0) \circ (I + u) - f(0) - u \cdot \nabla f(0) \right) \\ & - \left(\dot{f}(u) \circ (I + u) - \dot{f}(u) \right) + u \circ (I + u) \cdot \left(\nabla f(0) \circ (I + u) - \nabla f(0) \right) \\ & + (u \circ (I + u) - u) \cdot \nabla f(0). \end{aligned} \tag{B.18}$$

Notemos que los primeros dos sumandos pueden hacerse tan pequeños como se desee por la Proposición 3 y por la hipótesis (B.15), respectivamente. De esta manera basta acotar el sumando restante de (B.18) en $L^p(\mathbb{R}^n)$. En efecto, concretamente se tiene que por (B.15)

$$\frac{1}{\|u\|_k} \left\| f(u) \circ (I + u) - f(0) - \dot{f}(u) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_k \rightarrow 0 \tag{B.19}$$

Luego, como $f(0) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y gracias a la Proposición 3, $f(0)$ es derivable en 0 con derivada $u \cdot \nabla f(0)$, i.e.

$$\frac{1}{\|u\|_k} \left\| f(0) \circ (I + u) - f(0) - u \cdot \nabla f(0) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_k \rightarrow 0 \tag{B.20}$$

Por otro lado, como $\dot{f}(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ podemos utilizar la cota (B.12), más aún, tomando en cuenta que tanto ∇ como \dot{f} son operadores lineales (\mathcal{L}_c) y continuos,

por la norma del operador se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \dot{f}(u) \circ (I + u) - \dot{f}(u) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \left\| \nabla \dot{f}(u) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \left\| \dot{f}(u) \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \left\| \dot{f} \right\|_{\mathcal{L}_c(\text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n); W^{1,p}(\mathbb{R}^n))} \|u\|_k.
\end{aligned}$$

Como $\nabla f(0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, por el Lema 11, se tiene la continuidad en 0. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u\|_k} \left\| u \circ (I + u) \cdot \left(\nabla f(0) \circ (I + u) - \nabla f(0) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|u \circ (I + u)\|_\infty^{1/p} \frac{1}{\|u\|_k} \left\| \nabla f(0) \circ (I + u) - \nabla f(0) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_k \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Por último, para $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ usando (B.12) y considerando que ∇ es un operador continuo

$$\|u \circ (I + u) - u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1})} \leq C(\|u\|_k)^2. \tag{B.22}$$

Obtenemos también que,

$$\frac{1}{\|u\|_k} \left\| (u \circ (I + u) - u) \cdot \nabla f(0) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_k \rightarrow 0. \tag{B.23}$$

Por tanto, por las estimaciones de (B.19) a (B.23), se verifica que

$$\frac{1}{\|u\|_k} \left\| \chi(u) \circ (I + u) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|u\|_k \rightarrow 0, \tag{B.24}$$

lo cual llevado a (B.17), prueba la proposición para $m = 1$.

Caso general: Basta utilizar un argumento análogo al de la demostración para la Proposición 3, aplicando el Lema 14 con $G(u) = f(u)$, [27, Lema 4.6, pág. IV.19]. ■

Bibliografía



- [1] Enrique Zuazua. Controllability of partial differential equations. 2006.
- [2] Fredi Tröltzsch. *Optimal control of partial differential equations: theory, methods, and applications*, volume 112. American Mathematical Soc., 2010.
- [3] Luz de Teresa. *Introducción a la teoría del control*. Notas de curso, comunicación, 2018.
- [4] Szymon Doljecki. Observability for the one-dimensional heat equation. *Studia Mathematica*, 48, 1973.
- [5] Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo. *Variational methods in some shape optimization problems*. Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002.
- [6] Olivier Pironneau. Optimal shape design for elliptic systems. In *System Modeling and Optimization*, pages 42–66. Springer, 1982.
- [7] Denise Chenais and Enrique Zuazua. Controllability of an elliptic equation and its finite difference approximation by the shape of the domain. *Numerische Mathematik*, 95(1):63–99, 2003.

- [8] Denise Chenais. On the existence of a solution in a domain identification problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 52(2):189–219, 1975.
- [9] Axel Osses and Jean-Pierre Puel. On the controllability of the laplace equation observed on an interior curve. *Rev. Mat. Complut*, 11(2):403–441, 1998.
- [10] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 2015.
- [11] Carlos S Kubrusly. *Essentials of measure theory*. Springer, 2015.
- [12] Guillermo Grabinsky. *Teoría de la medida*. Las prensas de ciencias, 2011.
- [13] Richard L Wheeden. *Measure and integral: an introduction to real analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [14] Halsey Lawrence Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York, 1988.
- [15] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [16] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [17] Dorothee Haroske and Hans Triebel. *Distributions, Sobolev spaces, elliptic equations*, volume 4. European Mathematical Society, 2007.
- [18] Mohammed A Al-Gwaiz. *Theory of distributions*. CRC Press, 1992.
- [19] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Elsevier, 2003.

- [20] Michel Chipot. *Elements of nonlinear analysis*. Birkhäuser, 2012.
- [21] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo, and Gérard Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*. SIAM, 2014.
- [22] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [23] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo, and Gérard Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*. SIAM, 2014.
- [24] Dharendra Bahuguna, Venkataramanarao Raghavendra, and B.V. Rathish Kumar. *Topics in Sobolev Spaces and Applications*. Alpha Science Int'l Ltd., 2002.
- [25] Yuri A Abramovich, Yuri A Abramovich, and Charalambos D Aliprantis. *An invitation to operator theory*, volume 1. American Mathematical Soc., 2002.
- [26] Dietmar A. Salamon Theo Bühler. *Functional Analysis*. American Mathematical Society, 2018.
- [27] François Murat and Jacques Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. *Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris*, 6:189, 1976.
- [28] Andréi Nikolaevich Kolmogorov. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Moskovskii universitet, 1957.
- [29] Jacques Simon. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2(7-8):649–687, 1980.

- [30] Ralph Abraham, Jerrold E Marsden, and Tudor Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] Jacques Simon. Différentiation de problèmes aux limites par rapport au domaine. *Lecture Notes, Universidad de Sevilla*, 1991.
- [32] EJP Georg Schmidt and Norbert Weck. On the boundary behavior of solutions to elliptic and parabolic equations—with applications to boundary control for parabolic equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 16(4):593–598, 1978.
- [33] Jonathan Touboul. Controllability of the heat and wave equations and their finite difference approximations by the shape of the domain. *arXiv preprint arXiv:0705.4221*, 2007.
- [34] Jaime Humberto Ortega and Enrique Zuazua. On a constrained approximate controllability problem for the heat equation. *Journal of optimization theory and applications*, 108(1):29–64, 2001.
- [35] Jaime Humberto Ortega and Enrique Zuazua. Generic simplicity of the spectrum and stabilization for a plate equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(5):1585–1614, 2000.
- [36] Anna Doubova Krasotchenko, Enrique Fernández Cara, Manuel González Burgos, and Jaime Humberto Ortega Palma. A geometric inverse problem for the boussinesq system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 6(6), 1213-1238., 2006.

- [37] Emmanuel Trélat, Can Zhang, and Enrique Zuazua. Optimal shape design for 2d heat equations in large time. *arXiv preprint arXiv:1705.02764*, 2017.
- [38] Joseph Muscat. *Functional Analysis, an introduction to metric spaces , Hilber Spaces, and Banach Algebras*. Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [39] Terry J. Morrison. *Functional analysis: An introduction to Banach space theory*, volume 43. John Wiley & Sons, 2011.
- [40] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. wiley New York, 1978.
- [41] Jurgen Jost, Jürgen Jost, and Xianqing Li-Jost. *Calculus of variations*, volume 64. Cambridge University Press, 1998.
- [42] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis and its applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1978.
- [43] Mónica Clapp. *Análisis Real*. IMATE, 2013.
- [44] Rakotoson Jean-Michel Rakotoson Jean-Emile. *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*. Presses Universitaires de France, 1999.
- [45] Luc Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [46] S David Promislow. *A first course in functional analysis*, volume 86. SIAM, 2008.

- [47] François Murat and Jacques Simon. *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*. VI Laboratoire d'Analyse Numérique, 1974.
- [48] François Murat and Jacques Simon. Etude de problèmes d'optimal design. In *IFIP Technical Conference on Optimization Techniques*, pages 54–62. Springer, 1975.
- [49] Juan A Bello, Enrique Fernández-Cara, and Jacques Simon. The variation of the drag with respect to the domain in navier-stokes flow. In *Optimization, Optimal Control and Partial Differential Equations*, pages 287–296. Springer, 1992.
- [50] Jan Sokolowski and Jean-Paul Zolésio. Introduction to shape optimization. In *Introduction to Shape Optimization*, pages 5–12. Springer, 1992.
- [51] Bijan Mohammadi and Olivier Pironneau. Shape optimization in fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36:255–279, 2004.
- [52] Sorin Micu and Enrique Zuazua. An introduction to the controllability of partial differential equations. *Quelques questions de théorie du contrôle*. Sari, T., ed., *Collection Travaux en Cours Hermann, to appear*, 2004.
- [53] Shmuel Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*, volume 369. American Mathematical Soc., 2010.
- [54] Denise Chenais and Enrique Zuazua. Finite-element approximation of 2d elliptic optimal design. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 85(2):225–249, 2006.

- [55] Denise Chenais and Enrique Zuazua. Approximation par éléments finis de problèmes elliptiques d'optimisation de forme. *Comptes Rendus Mathématique*, 338(9):729–734, 2004.
- [56] Jacques Louis Lions. Remarks on approximate controllability for parabolic systems. In *The finite element method in the 1990's*, pages 612–620. Springer, 1991.
- [57] Leoni Giovanni. A first course in sobolev spaces: volume 181 of graduate studies in mathematics. *American Mathematical Society*, 140, 2017.
- [58] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, György Pólya, DE Littlewood, G Pólya, et al. *Inequalities*. Cambridge university press, 1952.
- [59] Jaques Louis Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. tome 1 et 2. *RMA*, 8, 1988.