



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CAOS EN BILLARES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ADÁN GONZÁLEZ ANDRADE

TUTOR

DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. **Alumno**
Adán
González
Andrade
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
2. **Presidente del jurado**
Dr.
David Philip
Sanders
3. **Vocal del jurado**
Dr.
Luis
Benet
Fernández
4. **Secretario del jurado**
Dr.
Jorge Gustavo
Hirsch
Ganievich
5. **Suplente del jurado**
Dr.
Julio César
Gutiérrez
Vega
6. **Suplente del jurado**
Dr.
Miguel Ángel
Bastarrachea
Magnani

Agradecimientos

A mi madre por su amor, esfuerzo y dedicación. Gracias por ser incondicional. A Yim por brindar su importante apoyo en todo momento.

A mi padre y a Mirna, por no fallar ni un sólo día durante mi recorrido universitario.

A Kike, que más que una abuela es una madre para mí. No tengo palabras para agradecer todo tu amor y apoyo.

A mis tíos Iván y Oscar, mi abuelo y toda mi familia, porque cuando los tiempos fueron difíciles siempre me dieron todo lo que en sus manos estaba.

A Sofía por su incalculable apoyo. Eternamente agradecido contigo y los tuyos.

Agradezco a Jorge por recibirme como alumno, por enseñarme tantas cosas y brindarme su amistad. Sus consejos y su conocimiento es algo que me guiará por el resto de los días.

Y a todas las personas que de una manera u otra formaron parte de mi camino: mis *roomies*, mis grandes amigos y a la persona que siempre ha estado ahí.

A la UNAM por ser la casa de estudios que me permitió sumergirme en el vasto y espectacular mundo de la ciencia.

Agradezco el apoyo brindado a este trabajo a través del proyecto DGAPA PAPIIT IN104020, «Caos y azar en sistemas cuánticos».

Resumen

En este trabajo se recopilan algunas de las bases de la teoría que describe a los sistemas físicos llamados billares. La principal motivación del estudio de dichos modelos es la descripción del caos clásico y su contraparte cuántica. Se implementa un código computacional en el lenguaje *Julia*, que permite graficar las trayectorias de partículas puntuales, así como calcular el máximo exponente de Lyapunov en billares circulares, elípticos, de Sinai y en estadios de Bunimovich. Además, con el fin de visualizar las regiones caóticas en estos sistemas, se calculan secciones de Poincaré utilizando las coordenadas de Poincaré–Birkhoff. Finalmente, se presenta una revisión sobre el concepto cuántico de caos y su relación con los billares cuánticos. Con esta intención, se desarrollan algunos aspectos del principio de correspondencia, que nos permite recuperar los cálculos clásicos dentro de la descripción cuántica. Así, se introduce el concepto de cicatriz cuántica, el cual relaciona los autoestados del sistema cuántico con las órbitas periódicas inestables en billares clásicos. De esta forma, este trabajo pretende ser una introducción al concepto de caos a la vez que motiva la extensión de las nociones desarrolladas hacia la investigación de frontera.

Abstract

This work collects some foundations of the theory for the description of physical systems known as billiards. The main motivation for studying such models is the description of classical chaos and its quantum counterpart. A computer code is implemented from scratch using the *Julia* language, which allows to plot point particle trajectories and to compute the maximal Lyapunov exponent for circular, elliptical and Sinai billiards as well for Bunimovich stadia. Furthermore, Poincaré sections in Poincaré–Birkhoff coordinates are employed with the purpose of exhibiting chaotic regions in these systems. Lastly, a review of the concept of quantum chaos and its relation with quantum billiards is presented as well. The correspondence principle allows to recover classical computations within the framework of quantum mechanics, providing a connection between quantum eigenstates. The concept of quantum scar is introduced. Hence, this work aims to serve as an introduction to the concept of chaos whilst motivating an extension of the notions that were outlined here towards frontier research.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	XI
1. Antecedentes	1
1.1. Caos	1
1.1.1. Caos determinista	1
1.1.2. Sistemas Hamiltonianos	2
1.1.3. Partícula libre	3
1.1.4. Órbitas periódicas	5
1.1.5. Secciones de Poincaré	6
1.1.6. Exponentes de Lyapunov	7
1.2. Dinámica de billares	8
1.2.1. Billares circulares	9
1.2.2. Billares elípticos	10
1.2.3. Billar de Sinai	11
1.2.4. Estadio de Bunimovich	12
1.3. Cálculo numérico del máximo exponente de Lyapunov en billares . . .	12
1.3.1. Evolución discontinua	13
1.3.2. Vector tangente	14

1.3.3. El máximo exponente de Lyapunov en billares	15
1.4. Cálculo numérico del máximo exponente de Lyapunov promedio . . .	16
1.4.1. Renormalización del vector tangente	17
1.4.2. Colisiones	18
1.4.3. Dos vías para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov .	21
1.5. Cálculos numéricos	22
2. Resultados	24
2.1. Evolución de partículas dentro de un billar	24
2.1.1. Billar circular	25
2.1.2. Billar elíptico	26
2.1.3. Billar de Sinai	27
2.1.4. Billar de Bunimovich	28
2.2. Espacio de Colisiones	29
2.2.1. Coordenadas de Poincaré–Birkhoff	29
2.2.2. Billar circular	29
2.2.3. Billar elíptico	30
2.2.4. Billar de Sinai y estadio de Bunimovich	31
2.3. Máximo exponente de Lyapunov	33
2.3.1. Verificación de resultados numéricos	33
2.3.2. Dos vías para el máximo exponente de Lyapunov promedio . .	34
3. Caos cuántico en billares	36
3.1. Caos en sistemas cuánticos	36
3.2. Billares cuánticos	37
3.3. El principio de correspondencia	38
3.3.1. Aproximación semiclásica	38
3.4. Cicatrices cuánticas	42
3.5. Conclusiones y trabajo a futuro	44
A. La medida y ergodicidad	46

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
B. Matriz de estabilidad	48
C. Evolución continua y por colisiones	50
C.1. Evolución libre	50
C.2. Evolución discontinua	52
C.2.1. Colisión con una superficie plana	52
C.2.2. Colisión con una superficie curva	54
D. Distancias al punto de colisión	56
D.1. Distancia a una pared	56
D.2. Distancia a una circunferencia	57
E. Máximo exponente de Lyapunov promedio	60
F. Construcción de la probabilidad semiclásica	62
G. Código	64

Índice de figuras

1.	Representación en el plano de una partícula teniendo una colisión con un obstáculo de un billar.	XII
1.1.	Una trayectoria en el espacio fase que interseca con una superficie de energía constante. El plano (región sombreada) sería una superficie de Poincaré.	7
1.2.	Una trayectoria para una partícula que evoluciona dentro de un billar circular de radio r	10
1.3.	Parámetros del billar de Sinai y del estadio de Bunimovich.	11
1.4.	Representación en el espacio fase de una discontinuidad generada por una colisión con un obstáculo del billar.	14
1.5.	Evolución de la perturbación en el espacio fase. Después de cada paso i se renormaliza $\delta\mathbf{\Gamma}$, para que tome el valor de la nueva condición inicial $\delta\mathbf{\Gamma}(0)$. Figura adaptada de [16, p. 91].	18
1.6.	Descripción geométrica de la colisión de una partícula puntual con una superficie curva. Adaptado de la figura 1 en [31].	19
1.7.	Descripción geométrica de la evolución de las componentes del vector de la perturbación $\delta\mathbf{\Gamma} = (\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p})^\dagger$. Adaptado de la figura 2 en [31].	20
2.1.	Familias de órbitas periódicas (N, T) para el billar circular.	24
2.2.	Trayectorias regulares del billar circular.	25
2.3.	a) Elipse con parámetros $a = 0.5$ y $b = 0.45$, b) elipse con parámetros $a = 0.5$ y $b = 0.3$	26

2.4. Par de trayectorias independientes entre sí en un billar de elipse con diferencia de ángulo inicial de 0.005 radianes.	26
2.5. Trayectorias en un billar de Sinai.	27
2.6. Otras trayectorias en un billar de Sinai.	27
2.7. Trayectorias en el estadio de Bunimovich.	28
2.8. Espacio de colisiones para el billar circular.	30
2.9. Espacio de colisiones del billar elíptico para dos distintos valores del eje mayor a y menor b , donde cada punto representa una colisión. Los parámetros en la figura a) son $a = 0.4$ y $b = 0.3$; mientras que para la figura b) los parámetros son $a = 0.4$ y $b = 0.2$	31
2.10. Espacio de colisiones para el billar de Sinai con los parámetros $L = 1$ y $b = 0.2$ y el estadio de Bunimovich con los parámetros $2\ell = 2$ y $r = 1.5$. Cada punto representa una colisión.	32
2.11. Máximo exponente de Lyapunov promedio en función de la longitud del segmento recto de un estadio de Bunimovich, para unos segmentos de circunferencia de radio fijo $r = 1.0$. En a) se encuentra el resultado obtenido por Hansen y Cvitanovic [39], mientras que en b) se hace un cálculo idéntico utilizando la herramienta numérica desarrollada para este trabajo. El parámetro a es idéntico al parámetro ℓ	33
2.12. Máximo exponente de Lyapunov calculado de formas diferentes usando la vía de razón de cambio y la de autovalores. Los resultados coinciden y no es posible distinguirlos en la gráfica. En la figura a) se hace el cálculo para el billar de Sinai donde el parámetro que se varía es el radio del disco central r , mientras que en b) se calcula para el estadio de Bunimovich donde el parámetro que se varía es la longitud del segmento recto ℓ	35
3.1. Diagrama en el espacio fase para el estado no normalizable $ q'\rangle$. Dado que su posición está definida tiene momento indefinido.	39
3.2. Traslape de los estados $ q'\rangle$ y $ p'\rangle$	39

3.3. Diagrama en el espacio fase para un autoestado de un potencial ligado $V(q)$	40
3.4. Traslape $ \langle q \psi\rangle ^2$ de los diagramas mostrados con anterioridad. Figura modificada de [18, p. 557].	41
3.5. Patrones de líneas nodales numéricamente reconstruidos de resolver la ecuación de onda para una placa. Figura de [45, p. 2119].	43
3.6. Curvas nodales $ \psi(x, y) = 0 $ para un cuadrante del billar de Bunimovich para una función propia de valor k dado. La orientación de las curvas se aprecia aleatoria. Figura de [46].	43
3.7. Cicatrices de la función de onda del estadio de Bunimovich, asociadas a las órbitas periódicas clásicas presentes en el equivalente clásico, de acuerdo a King [10].	44
D.1. Esquema: Una partícula en la posición \mathbf{q} y con velocidad \mathbf{v} colisiona con una frontera plana.	57
D.2. Esquema: Una partícula en la posición \mathbf{q} con velocidad \mathbf{v} colisiona con una circunferencia.	58
E.1. Máximo exponente de Lyapunov promedio calculado con dos expresiones diferentes.	61

Introducción

El concepto de caos es usado ampliamente desde hace mucho tiempo en la comunidad científica e incluso en la vida cotidiana. Es un tema ampliamente estudiado, habiendo diversas revistas especializadas en publicaciones sobre este tema [1, pp. 19, 20]. En este sentido, es innegable la relevancia de la teoría del caos hoy en día.

En los años 60 del siglo pasado, Edward Lorenz probó un modelo para la atmósfera en el cual encontró una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, llevándolo a concluir la impredecibilidad del clima [2]. Así, en palabras de Lorenz [3]

«Caos es cuando el presente determina el futuro pero el presente aproximado no determina aproximadamente el futuro.»

El trabajo de Lorenz fue un parteaguas para el estudio de los sistemas no-lineales. En los años posteriores, las investigaciones se enfocaron en identificar aquellos sistemas que mostraban ser caóticos a la vez que se desarrollaban métodos para caracterizar el caos. Un aspecto importante de estos estudios recae en encontrar las llamadas *rutas al caos*, que son las formas en las que (al variar algún parámetro) los sistemas no lineales pasan de un comportamiento simple o regular a uno caótico [4, p. 750]. Generalmente, los sistemas caóticos pueden dividirse en dos grupos: los disipativos (con presencia de fricción) y los conservativos (la energía es una constante de movimiento) [5, p. 15]. En este trabajo nos limitaremos a estudiar la dinámica de sistemas conservativos.

De entre todos los modelos a estudiar los que nos atañen son los billares en dos dimensiones, los cuales consisten en partículas que evolucionan bajo la acción de un potencial y que realizan colisiones con una frontera bien definida. Los billares

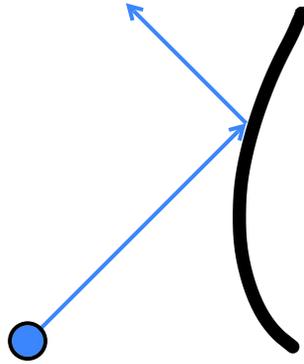


Figura 1: Representación en el plano de una partícula teniendo una colisión con un obstáculo de un billar.

son sistemas conservativos muy simplificados, que en función de ciertos parámetros pueden exhibir un comportamiento caótico, en el sentido de sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales. De entre los sistemas Hamiltonianos, los billares son los más estudiados desde un punto de vista matemático, y además se les conocen varias propiedades analíticas [6, p. 56].

Motivados por la simplicidad de estos modelos se implementará una herramienta numérica que nos permita caracterizar a los billares que presentan una dinámica caótica, aprovechando la extensa literatura existente para dicha finalidad. Se replicarán diversas técnicas con el objetivo de que al lector hispanohablante le sea instructivo el presente escrito.

El estudio de la dinámica en billares no es una labor únicamente teórica o computacional. Desde hace años se han realizado diversos experimentos que buscan respaldar las investigaciones en este tema [7] [8]. El hecho de ser simples no convierte a los billares en modelos de poca utilidad, sino todo lo contrario, pues el estudio de billares ha tenido aplicaciones prácticas en la óptica y acústica, además de que han sido fundamentales para el entendimiento de lo que se suele llamar caos cuántico [9] [10] [11].

Una de las motivaciones de este trabajo es indagar en la teoría que permita la descripción de la mecánica cuántica en billares. Una evidencia muy interesante sobre la correspondencia entre la mecánica clásica y cuántica se encuentra en las cicatrices

cuánticas, las cuales fueron descritas por primera vez en billares [12].

En este trabajo se presentan conceptos con los que se desarrolla un código computacional en el lenguaje *Julia*, que permite construir billares bidimensionales y estudiar la evolución de partículas en ellos, además, como una herramienta para cuantificar el caos se calcula el máximo exponente de Lyapunov. A su vez, se calculan secciones de Poincaré las cuales nos permiten visualizar el espacio de posiciones y momentos (espacio fase). Al final de esta tesis se encuentra el código escrito en el lenguaje *Julia* con el que se hicieron los cálculos aquí presentados, con la intención de que le sea sencillo al interesado replicarlos.

Se espera que este trabajo resulte instructivo para el lector que busca familiarizarse con algunos de los conceptos básicos de la teoría del caos, pues con esa intención los billares serán el hilo conductor para una descripción fundamental del caos tanto en sistemas clásicos como cuánticos.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Caos

El tema central a tratar en este trabajo es la descripción de la dinámica de un sistema particular: los billares. El aspecto que más nos interesa de dicha dinámica es el caos. En términos modernos, la palabra “caos” denota un estado de desorden e irregularidad [13, pp. 20-21], sin embargo, estas son medidas subjetivas; por lo cual no sirven para dar una definición correcta de caos.

Con la intención de dar un tratamiento adecuado al problema es importante describir y delimitar formalmente este concepto central, así que, en lo sucesivo nos referiremos al caos determinista simplemente como caos.

1.1.1. Caos determinista

Decimos que un sistema físico dependiente del tiempo es **determinista** si es posible calcular su comportamiento a futuro dada una condición inicial [1, p. 20]. Algunos sistemas no-lineales tienen la propiedad de separar trayectorias cercanas a un ritmo exponencial en una región acotada del espacio fase [13, pp. 23-24]. Nos referiremos al surgimiento de estas separaciones como **irregularidades**. Así, se asocia un comportamiento regular a un sistema integrable [6, p. 56]

Cuando se presenta un comportamiento irregular en sistemas dinámicos al apli-

car una evolución temporal determinista, sin ningún tipo de ruido o estocasticidad externa¹, se dice que se tiene caos determinista [14, p. 24]. Este sentido determinista del movimiento irregular o caótico es generado por sistemas no-lineales, cuyas leyes de movimiento pueden determinar la evolución temporal del sistema conociendo al menos su estado inicial. Cabe resaltar que la no-linealidad es una condición necesaria mas no suficiente para generar movimiento caótico [14, p. 16].

Así, esta casi imposibilidad de que la información sobre el futuro de la dinámica esté a nuestro alcance puede ser caracterizada por un término unificador, caos. De esta forma, una de las características más importantes sobre los sistemas caóticos es que el futuro distante y remoto se vuelve, esencialmente, independiente del estado presente, de forma que sólo puede describirse en promedio en términos probabilísticos [15, p. 49].

1.1.2. Sistemas Hamiltonianos

Los billares no son sistemas Hamiltonianos, para analizarlos hay que separar la dinámica: la evolución continua y las discontinuidades que generan las paredes. Antes de trabajar con las colisiones hay que mencionar las generalidades de una partícula libre, que es el potencial que se consideró para este escrito.

Sea $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ un Hamiltoniano donde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{\mathcal{D}})$ y $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{\mathcal{D}})$ sean la coordenada y momento canónico, respectivamente. Se tiene un sistema Hamiltoniano con \mathcal{D} grados de libertad, cuando la dinámica se puede derivar a partir de las ecuaciones de Hamilton, dadas por

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \mathcal{D} \quad (1.1)$$

Estas ecuaciones generan trayectorias $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ en el espacio fase de dimensión $2\mathcal{D}$. Nos referiremos a dichas trayectorias como **órbitas**.

Para un sistema de dos grados de libertad se puede escribir el Hamiltoniano

¹Por ruido nos referimos a los agentes externos que afectan los aspectos de la dinámica que se estudia, de forma similar, cuando dichos agentes externos inducen aleatoriedad nos referimos a la estocasticidad externa.

$$H(p_x, p_y, q_x, q_y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(q_x, q_y)$$

Para los fines de este trabajo, nos interesa la evolución de una partícula libre, lo que significa que se toma $V(q_x, q_y) = 0$. Así, la dinámica de este sistema queda determinada por

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial q_x} = 0, \quad \dot{q}_x = \frac{p_x}{m} \quad (1.2)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial V}{\partial q_y} = 0, \quad \dot{q}_y = \frac{p_y}{m} \quad (1.3)$$

Sistemas Integrables

Para un número \mathcal{D} de grados de libertad de un sistema y s el número de constantes de movimiento, si $s = \mathcal{D}$ se dice entonces que el sistema es integrable. Se sigue que un sistema no integrable es aquel con menos constantes de movimiento independientes que grados de libertad, es decir, $s < \mathcal{D}$. Así, cuando un sistema Hamiltoniano es integrable sus ecuaciones de movimiento pueden ser resueltas por cuadraturas. La noción de una cuadratura es la aplicación de operaciones básicas como la adición, la multiplicación, el cálculo de funciones inversas y la resolución de integrales de camino [16, p. 36], lo cual nos lleva a una solución exacta para las ecuaciones de movimiento. La presencia de caos determinista se relaciona con la falta de integrabilidad en un sistema físico.

1.1.3. Partícula libre

Sea $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ el conjunto de estados (\mathbf{q}, \mathbf{p}) en los cuales la dinámica de la partícula que evoluciona está definida para todo tiempo $-\infty < t < \infty$. Así, se obtiene un grupo de transformaciones para un tiempo continuo $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega \quad (1.4)$$

el cual resulta ser el flujo del sistema [15, p. 26]. Luego, se tiene que

$$\Phi^0 = \mathbb{I} \quad (1.5a)$$

$$\Phi^{t+\tau} = \Phi^t \circ \Phi^\tau \quad (1.5b)$$

para todo $t, \tau \in \mathbb{R}$. Cualquier trayectoria dada por el flujo Φ^t es una curva continua en Ω .

En términos generales, el Hamiltoniano produce un flujo en el espacio fase [14, p. 25] que corresponde con el de un fluido incompresible, pues la evolución temporal de un sistema Hamiltoniano conserva el volumen del espacio fase (como consecuencia del teorema de Liouville) [16, pp. 31, 39]. Los billares tienen un flujo Hamiltoniano al que llamaremos **flujo del billar** Φ .

Con la intención de establecer el problema de la dinámica de un billar, considérese que la trayectoria en el espacio fase al tiempo t para una partícula está dada por $\Gamma(t)$. Ahora bien, consideramos un sistema cuya evolución es continua y que tiene dimensión $2\mathcal{D}$, esto resulta en un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución ofrece la evolución temporal del sistema

$$\dot{\Gamma}(t) = \mathbf{F}(\Gamma(t)) \quad (1.6)$$

A partir de integrar este conjunto de ecuaciones acopladas se obtiene una expresión para la evolución temporal del sistema

$$\Gamma(t) = \Phi^t(\Gamma(0)) \quad (1.7)$$

Con esto tenemos una forma de escribir la evolución continua en el espacio fase para una partícula libre con condición inicial $\Gamma(0)$.

1.1.4. Órbitas periódicas

Las **órbitas** describen trayectorias de un mapeo, pueden ser continuas, discretas, finitas o infinitas [16, p. 10]. Para estudiar las trayectorias periódicas vamos a suponer un sistema dinámico y continuo en el tiempo, tal que esté gobernado por la ecuación

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = A(t)\mathbf{q}(t) \quad (1.8)$$

con $A(t)$ una matriz $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ periódica

$$A(t + T) = A(t)$$

y donde el periodo es T . La principal solución $\Phi(t, t_0)$ de (1.8) es una matriz cuyas columnas son soluciones linealmente independientes de la misma, además para algún tiempo t_0 se tiene que $\Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}$. La evolución del sistema a partir de un tiempo dado t_0 está dada por

$$\mathbf{q}(t + t_0) = \Phi(t, t_0)\mathbf{q}(t_0)$$

La estabilidad de la solución para $\mathbf{q}(t + t_0)$ está dada por los autovalores de la llamada matriz de monodromía o matriz de estabilidad, que se define como

$$\tilde{\mathbf{M}}(t_0) = \Phi(t_0 + T, t_0) \quad (1.9)$$

y describe la evolución durante un periodo T [17, p. 191-192].

Vemos que esta matriz mapea un conjunto particular de la solución fundamental $\mathbf{q}(t)$ al tiempo t_0 en sus valores al tiempo $t_0 + T$, esto es justo lo que se conoce como mapeo de Poincaré (que se describe formalmente en la siguiente sección). Lo anterior permite estudiar la estabilidad de la solución periódica $\mathbf{q}_0(t)$. Dicho estudio se conduce al considerar los eigenvalores $\rho_{\mathcal{D}}$ de $\tilde{\mathbf{M}}$ que suelen llamarse los multiplicadores de Floquet.

En sistemas caóticos las órbitas periódicas son densas en todas partes, es decir, en cualquier punto donde se lance una trayectoria hay infinitas órbitas periódicas cercanas; son de medida cero pues no hay garantía que cualquier elección de condiciones

iniciales nos dé una órbita periódica y, además, la mayoría son de periodo muy largo. En el momento que una órbita se cierra en sí misma, la matriz de estabilidad adquiere nuevas y útiles propiedades. En general, la matriz de estabilidad para un periodo dependerá del sitio donde comienza la órbita; sin embargo, sus valores propios son los mismos sin importar en qué parte de la órbita se inicia la trayectoria [18].

1.1.5. Secciones de Poincaré

Visualizar la dinámica de un sistema Hamiltoniano es casi siempre difícil. Para \mathcal{D} grados de libertad el espacio fase es de dimensión $2\mathcal{D}$ debido al par momento \mathbf{p} y posición \mathbf{q} . Así, analizar la dinámica de un sistema con dos grados de libertad implica estudiar un hiperespacio fase de cuatro dimensiones. Para lidiar con ello, supongamos que nuestro sistema de dos dimensiones conserva la energía. Lo cual implica que una de las componentes del momento lineal $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ queda determinada por la otra componente y por la energía mecánica del sistema. De esta forma, para un Hamiltoniano que coincide con la energía, en el caso de una partícula que evoluciona bajo un potencial V tenemos que

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(q_x, q_y)$$

Así, reducimos el problema de visualizar cuatro componentes a sólo tres. Ahora bien, si fijamos una componente de la posición, digamos $q_y = 0$, la del momento queda determinada por

$$p_y = \sqrt{2mE - p_x^2 - 2mV(q_x, 0)} \quad (1.10)$$

para valores positivos o negativos de p_y . Consideramos $p_y > 0$ para asignarle unívocamente puntos del espacio fase con los del mapeo.

Entonces generamos un plano $q_y = 0$ al que se le llama sección de Poincaré Ω_{SP} [16, p. 61]. Ésta identifica con un punto cada intersección de la trayectoria con el plano generado, como se esquematiza en la figura 1.1. Dicho esto, se puede definir la sección de Poincaré como

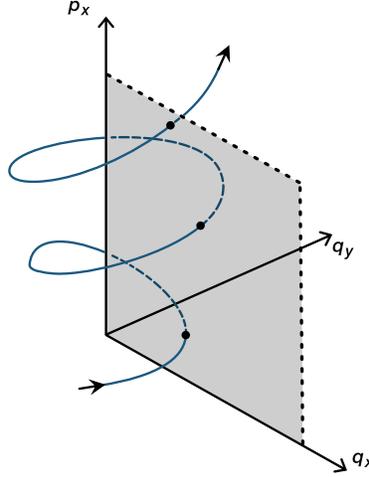


Figura 1.1: Una trayectoria en el espacio fase que interseca con una superficie de energía constante. El plano (región sombreada) sería una superficie de Poincaré.

$$\Omega_{SP} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4 \mid q_y = 0, H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E\} \quad (1.11)$$

Además, se define al mapeo de Poincaré \mathcal{P} , como la función que identifica dos puntos del espacio fase consecutivos en una sección de Poincaré. Así que, por ejemplo, se tiene que para una órbita periódica de periodo n y de condiciones iniciales $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \in \Omega_{SP}$, al aplicar n veces un mapeo de Poincaré se cumple que $\mathcal{P}^n(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = (\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$.

1.1.6. Exponentes de Lyapunov

El exponente de Lyapunov λ para un mapeo en una dimensión mide el ritmo de crecimiento exponencial de la divergencia de dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas [19, p. 55]. El crecimiento exponencial de una perturbación puede ser indicador de una dinámica caótica [16, p. 87] [20, p. 6].

Los exponentes de Lyapunov son autovalores de una matriz y poseen multiplicidad m , de forma que en sistemas ergódicos² se satisface que

²En el apéndice A se presenta el concepto de ergodicidad. Clásicamente en un sistema ergódico las trayectorias exploran de forma uniforme la totalidad del espacio fase disponible [21].

$$\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)} \geq \dots \geq \lambda^{(m)} \quad (1.12)$$

y todos tienen valores constantes en casi todas partes, lo que implica que no hay dependencia de las condiciones iniciales. A este conjunto de exponentes se le conoce como el Espectro de Lyapunov y, por convención, $\lambda^{(1)}$ es llamado el máximo exponente de Lyapunov (MEL). Ahora bien, $\lambda^{(i)} > 0$ es un indicador de crecimiento exponencial y $\lambda^{(i)} < 0$ es lo contrario, de forma que $\lambda^{(i)} = 0$ indica que no hay ni expansión ni contracción a ritmo exponencial en la separación entre trayectorias. Se dice entonces que un exponente de Lyapunov positivo corresponde a perturbaciones inestables mientras que el caso negativo a perturbaciones estables [15, pp. 41,42] [22, p. 480].

En un caso de dos dimensiones, para casi todo punto del espacio el Espectro de Lyapunov es simétrico alrededor del cero; esto quiere decir que hay un exponente (de multiplicidad doble) que es idénticamente cero y otros dos de igual valor absoluto pero de signos opuestos [15, p. 45]. De esta forma, para el caso en dos dimensiones, basta con conocer el MEL para poder escribir todo el espectro.

Los exponentes de Lyapunov son indicadores de caos determinista y dado que la dinámica de los billares es también determinista [15, p. 48], resulta necesario desarrollar este concepto. Por ello, en las siguientes secciones se describirá una metodología numérica, así como una definición apropiada para el cálculo del MEL en el sistema que es de nuestro interés.

Motivados por el concepto de exponente de Lyapunov, en lo sucesivo, nos referiremos al **caos** como la alta sensibilidad a las condiciones iniciales que generan una inestabilidad exponencial.

1.2. Dinámica de billares

Un **billar** es un sistema físico que consiste en un conjunto de fronteras $\{\partial\mathcal{V}_i\}_n$ bien definidas con las que una partícula que evoluciona en el espacio, bajo la acción de un potencial, puede colisionar [15, p. 19]. En general, se considera que dichas colisiones son especulares, es decir, que siguen la ley de reflexión para haces de luz donde el

ángulo de incidencia es igual al reflejado. Además, se considera que tanto la masa como la velocidad de la partícula son de magnitud unitaria [23, pp. 1-2]. De esta forma el momento lineal de las partículas dentro de los billares tienen norma uno. En lo sucesivo, restringiremos este estudio a billares de dos dimensiones, es decir, una partícula sometida a un potencial bidimensional y las fronteras son curvas en el plano.

Las trayectorias en un billar dibujan rectas entre cada obstáculo; de aquí surge un concepto útil para la dinámica de estos sistemas. Se le llama **cáustica** a una curva dentro de un billar bidimensional de forma que si un segmento de la trayectoria de una partícula en el billar es tangente a esta curva, entonces también lo es cada segmento reflejado [23, p. 73]. Estas curvas envolventes permiten recuperar información de las fronteras del billar.

1.2.1. Billares circulares

La disposición de las fronteras determina el tipo de billar; por ello hay varios billares en dos dimensiones que pueden ser estudiados. En este trabajo abordaremos cuatro de los billares más usuales. Primero comenzamos por el billar circular, cuya única frontera es una circunferencia, de esta forma, queda parametrizada totalmente por el radio r . Un aspecto importante sobre los billares circulares son sus órbitas periódicas, para el círculo se puede hacer un elemental análisis geométrico como el de la figura 1.2, donde la longitud de cada rebote equivale a $2r \sin(\theta/2)$. Para que la trayectoria se cierre en sí misma, es decir, que complete un periodo, se requiere pedir la condición

$$N\theta = 2\pi T, \quad (1.13)$$

donde N es un número entero asociado al número de rebotes que la partícula hace antes de completar un periodo y T es el número de revoluciones que ésta da antes de regresar al mismo punto en el espacio fase [24]. Si L denota la longitud de camino total de la órbita periódica, entonces se debe cumplir que

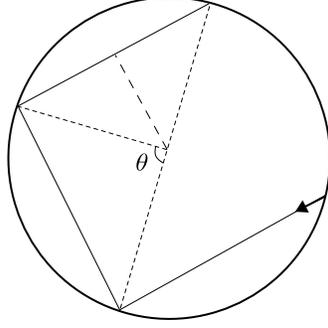


Figura 1.2: Una trayectoria para una partícula que evoluciona dentro de un billar circular de radio r .

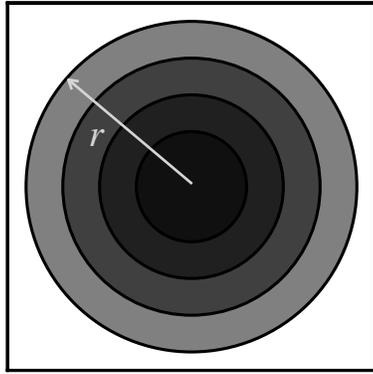
$$\frac{L(N, T)}{r} = 2N \operatorname{sen} \left(\frac{T\pi}{N} \right) \quad (1.14)$$

Así, la ecuación (1.14) es la longitud total de una familia de órbitas periódicas en el billar circular, de forma que estos conjuntos de trayectorias se pueden etiquetar por la pareja de parámetros (N, T) [24]. Conociendo el número de rebotes y cuantos ciclos le toma a la órbita cerrarse en sí misma, es suficiente para describir dicha familia de órbitas T -periódicas debido a la alta simetría de la circunferencia. En particular, se dice que esta es una simetría racional, en el sentido que si θ no es un múltiplo racional de π , entonces nuestra órbita no es cerrada [23, p. 21].

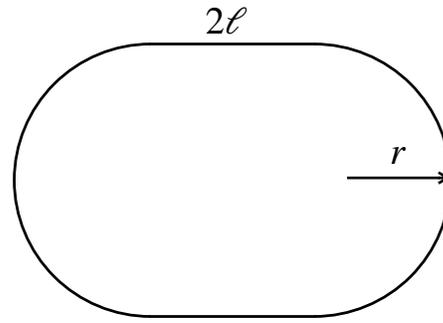
1.2.2. Billares elípticos

Por otra parte, están los billares elípticos, los cuales consisten en una frontera delimitada por una elipse que queda parametrizada totalmente por las magnitudes del eje mayor a y el eje menor b . En este caso no hay una forma analítica de parametrizar la longitud media de camino; por ello resulta importante la extensión de esta magnitud por medio de la teoría de la medida, concepto que se presenta en el apéndice A. Los billares elípticos son sistemas integrables [23, p. 53], así que sus trayectorias se consideran regulares.

Se sabe que el camino que un partícula sigue dentro de un billar elíptico siempre genera una curva cáustica. Dicha curva es una sección cónica confocal de la elipse



(a) Fronteras de un billar de Sinai.



(b) Frontera y parámetros del estadio de Bunimovich.

Figura 1.3: Parámetros del billar de Sinai y del estadio de Bunimovich.

original [25], o circunferencia para el caso de excentricidad cero.

1.2.3. Billar de Sinai

Un comportamiento hiperbólico se refiere a la existencia de direcciones hacia las cuales un mapeo se expande y se contrae, es decir, direcciones estables e inestables [23, p. 137]. Yákov G. Sinai descubrió los primeros ejemplos de billares con una dinámica hiperbólica [26] a los que llamó billares dispersivos. Un aspecto importante es que se sabe que bajo ciertas condiciones esta clase de billares son ergódicos, es decir, que los únicos subconjuntos del espacio fase que son invariantes ante el mapeo de billar tienen medida cero o uno [23, p. 137].

En su versión finita y más simple, el billar de Sinai consiste en una frontera cuadrada con un círculo en el centro [16, p. 87]. En ese sentido, es posible construir este sistema usando tres parámetros: la longitud de lado cuadrado L , el centro c y el radio r del disco, tal y como se esquematiza en la figura 1.3a.

Se sabe que los billares de Sinai son caóticos. Dicho comportamiento se debe a la curvatura negativa del obstáculo [6, p. 58] o dispersor, que en este caso es el disco central. Es sencillo visualizar esto al tomar en cuenta que cada que ocurre una colisión de trayectorias paralelas, éstas se separan cada vez más [27, p. 12].

1.2.4. Estadio de Bunimovich

El estadio de Bunimovich es probablemente el billar más popular en la literatura de física y matemáticas [23, p. 139]. Es un billar cuyas fronteras se componen de dos semicírculos idénticos y dos segmentos de recta paralelos [28]. A diferencia del billar de Sinai, se construye un billar de Bunimovich usando sólo dos parámetros: la longitud del segmento de recta 2ℓ y el radio de cada semicírculo r , tal y como se muestra en la figura 1.3b.

El estadio de Bunimovich es caótico al igual que el billar de Sinai, pero el mecanismo que induce este comportamiento es un tanto más sutil en este caso [6, p. 58]. Al igual que el billar de Sinai, se sabe que el estadio de Bunimovich es ergódico [29], propiedad que toma relevancia cuando se busca cuantificar el caos mediante el exponente de Lyapunov.

1.3. Cálculo numérico del máximo exponente de Lyapunov en billares

La dinámica de un billar implica que una partícula que evoluciona libremente puede colisionar con la frontera o algún obstáculo, lo cual genera una transformación discontinua en la trayectoria del espacio fase. Por ello hay que usar un marco de trabajo para esta dinámica. Hace varias décadas que se desarrolló un algoritmo numérico para el cálculo del espectro de Lyapunov en sistemas Hamiltonianos no integrables [30], dicho método es conocido como el algoritmo de Benettin. Tomando esto como base Dellago, Posch y Hoover [31, 32], extendieron esta metodología a la descripción de sistemas hamiltonianos con partículas que colisionan. Este marco de trabajo es adecuado para la formulación de los billares [9]. Es importante plantear el problema de la dinámica de un billar y para ello se describirá la evolución de una partícula libre para después extenderla al caso de una partícula en un billar.

1.3.1. Evolución discontinua

Trabajaremos con el caso más simple para la evolución de una partícula, aquel donde ésta evoluciona en el espacio de forma libre y sin el efecto de fuerzas externas, es decir, con un potencial constante. Si denotamos por $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ a los puntos del plano, el momento lineal para una partícula libre está dado por

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} = m\mathbf{v}$$

Entonces, el estado de una partícula en movimiento a cualquier tiempo está dado por su posición \mathbf{q} y por el vector unitario de momento lineal \mathbf{p} . Así, el espacio fase del sistema resulta

$$\Omega = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\},$$

A su vez, se etiquetará como $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^\dagger$ a los puntos del espacio fase, donde \dagger denota la operación de transponer matrices. Llamaremos $\mathbf{\Gamma}'(\tau_i)$ a un punto del espacio fase inmediatamente después de ocurrida la i -ésima colisión durante la evolución, a un tiempo discreto τ_i . Lo anterior se ilustra en la figura 1.4. Entonces, es claro ver que la evolución de una partícula en un billar consiste en una sucesiva aplicación de transformaciones continuas y discontinuas en el tiempo para la trayectoria en el espacio fase. Por ello, es necesario describir la transformación que genera dichas discontinuidades. Entonces, consideremos el conjunto de $2\mathcal{D}$ ecuaciones diferenciales ordinarias (1.6) con condición inicial $\mathbf{\Gamma}(0)$. Además, se toma en cuenta la transformación

$$\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}(\tau_i)) \tag{1.15}$$

la cual es aplicada a tiempos discretos $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots\}$ [32, p. 1487]. Con esto se tiene que en los lapsos $\tau_{i+1} - \tau_i$ la trayectoria en el espacio fase queda determinada por (1.7), lo cual implica la aplicación del flujo continuo Φ^t . Así, al tomar en cuenta las discontinuidades a los tiempos $\{\tau_i\}_N$ la evolución completa en el espacio fase se puede escribir como

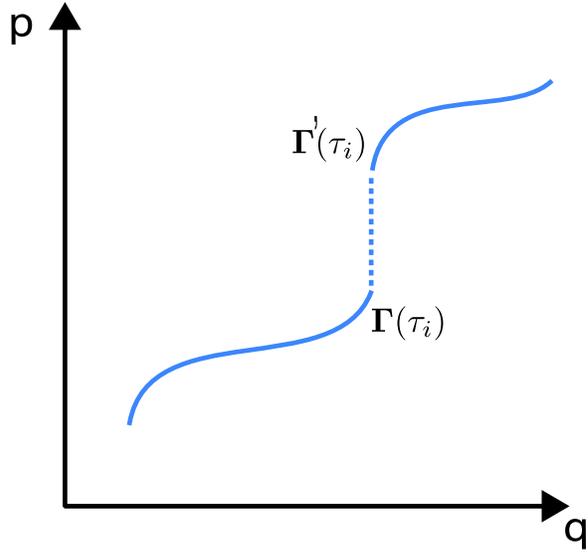


Figura 1.4: Representación en el espacio fase de una discontinuidad generada por una colisión con un obstáculo del billar.

$$\Gamma(t) = \mathbf{M} \circ \Phi^{t-\tau_N} \circ \mathbf{M} \circ \Phi^{\tau_N-\tau_{N-1}} \circ \dots \circ \mathbf{M} \circ \Phi^{\tau_1} \Gamma(0) \quad (1.16)$$

con $N+1$ el número total de colisiones en toda la evolución y \circ denotando composición funcional.

1.3.2. Vector tangente

Para el cálculo del exponente de Lyapunov es relevante analizar la evolución de la separación entre dos condiciones iniciales. Para ello se tomarán dos trayectorias en el espacio fase infinitesimalmente separadas. Consideremos una como la trayectoria de referencia $\Gamma(t)$ y a otra trayectoria perturbada $\Gamma_s(t)$ a la que llamaremos trayectoria satélite. Ambas trayectorias están relacionadas por un parámetro s que satisface

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma_s(t) = \Gamma(t)$$

El vector tangente asociado queda determinado por

$$\delta\Gamma(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_s(t) - \Gamma(t)}{s} \quad (1.17)$$

Por tanto, se hará referencia al vector $\delta\Gamma(t)$ como un vector infinitesimal que separa orbitas vecinas y que describe la evolución temporal de una perturbación infinitesimal [32, p. 1486]. La evolución del vector tangente permitirá analizar la separación de dos trayectorias, sin necesidad de evolucionar dos condiciones iniciales como tal.

1.3.3. El máximo exponente de Lyapunov en billares

Para calcular el máximo exponente de Lyapunov se evolucionará el vector que cuantifica la separación entre trayectorias. Con esto en mente, se puede linealizar (1.6) para obtener

$$\delta\dot{\Gamma} = \mathbf{D}(\mathbf{F}) \cdot \delta\Gamma = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Gamma} \cdot \delta\Gamma \quad (1.18)$$

donde $\mathbf{D}(\mathbf{F})$ es la matriz jacobiana del sistema. En analogía con (1.6), se puede obtener la ecuación de movimiento de $\delta\Gamma(t)$ si se integra (1.18). De esta forma se tendría que

$$\delta\Gamma(t) = \mathbf{L}^t \cdot \delta\Gamma(0) \quad (1.19)$$

Aquí, la transformación \mathbf{L}^t es el propagador de $\delta\Gamma(0)$ durante un tiempo t , el cual se aplica de forma continua. La aplicación del propagador en un intervalo $\tau_2 - \tau_1$ se puede escribir formalmente como [32, p. 1487]

$$\mathbf{L}^{\tau_2 - \tau_1} = e^{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{D}[\Gamma(t')] dt'} \quad (1.20)$$

Ahora denotemos por \mathbf{S} a la transformación discontinua del vector tangente correspondiente a \mathbf{M} , es decir,

$$\delta\Gamma' = \mathbf{S} \cdot \delta\Gamma \quad (1.21)$$

Así, mediante (1.19) y (1.21) se puede obtener la evolución completa para el vector tangente

$$\delta\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{S} \circ \mathbf{L}^{t-\tau_N} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{L}^{\tau_N-\tau_{N-1}} \circ \dots \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{L}^{\tau_1} \circ \delta\mathbf{\Gamma}(0) \quad (1.22)$$

El hecho de que (1.22) represente la evolución de la separación entre dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas, motiva a definir al máximo exponente de Lyapunov como [32, p. 1486]

$$\lambda(\mathbf{\Gamma}(0), \delta\mathbf{\Gamma}(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\mathbf{\Gamma}(t)|}{|\delta\mathbf{\Gamma}(0)|} \quad (1.23)$$

Para toda $\delta\mathbf{\Gamma}(0)$ dentro de una componente ergódica del espacio fase el valor de λ no depende de las condiciones iniciales [9, p. 3]. Como ya se mencionó, el billar de Sinai y el de Bunimovich son ergódicos, por lo cual podemos explotar la independencia de la condición inicial al calcular el MEL.

1.4. Cálculo numérico del máximo exponente de Lyapunov promedio

Consideramos una partícula con condición inicial $\mathbf{\Gamma}(0) \equiv \mathbf{\Gamma}_0$ que evoluciona durante un tiempo t_N , durante el cual ocurren N colisiones. Así, entre cada colisión hay un tiempo de evolución $\tau_{i+1} - \tau_i$ para la partícula libre, entonces el tiempo total de evolución T_N consta de intervalos discretos de la forma $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$, de manera que puede escribirse como

$$T_N = \sum_i^N \Delta\tau_i \quad (1.24)$$

De acuerdo a la manera en que hemos definido al máximo exponente de Lyapunov en (1.23), expresemos esta magnitud como

$$\lambda(\mathbf{\Gamma}_0, \delta\mathbf{\Gamma}_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T_N} \ln \left| \frac{\delta\mathbf{\Gamma}_N}{\delta\mathbf{\Gamma}_0} \right| \quad (1.25)$$

Tomamos $|\delta\Gamma_0| = 1$, haciendo la renormalización pertinente para el vector tangente después de cada colisión, tal y como se detalla en la sección 1.4.1. Con esto expresamos el máximo exponente de Lyapunov asociado a la transformación de la i -ésima colisión ocurrida en el lapso $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ como

$$\lambda_i = \frac{1}{\Delta\tau_i} \ln |\delta\Gamma(\tau_i)| \quad (1.26)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$ con N un número grande que representa el número de colisiones en la evolución. De esta manera, el máximo exponente de Lyapunov promediado en el tiempo resulta ser

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\ln |\delta\Gamma(\tau_i)|}{\Delta\tau_i} \quad (1.27)$$

Al tomar $\Delta\tau = \Delta\tau_i$, y con esto podemos aproximar el MEL como

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N\Delta\tau} \sum_{i=1}^N \ln |\delta\Gamma(\tau_i)| = \frac{1}{t_N} \sum_{i=1}^N \ln |\delta\Gamma(\tau_i)| \quad (1.28)$$

En el apéndice E se muestra numéricamente que la ecuación (1.27) no es una expresión adecuada para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov. Por esta razón, en lo sucesivo, cada vez que refiramos al MEL promedio se usará la expresión (1.28).

1.4.1. Renormalización del vector tangente

El paso final en la metodología del cálculo del MEL es aprovechar la libertad que tenemos en la dinámica debido a que ahora ésta es lineal y sólo nos interesa la tasa de crecimiento. Además, dado que el espacio fase de los billares que estamos revisando no es mixto,³ aprovechamos el hecho de que el exponente de Lyapunov es independiente de la separación inicial $|\delta\Gamma(0)|$. Para evitar desbordamiento numérico a la hora de aplicar (1.22) se renormalizará la condición inicial cada que ocurra una colisión, tal

³Un espacio fase mixto es aquel donde las regiones de dinámica caótica y regular coexisten [9, p. 2].

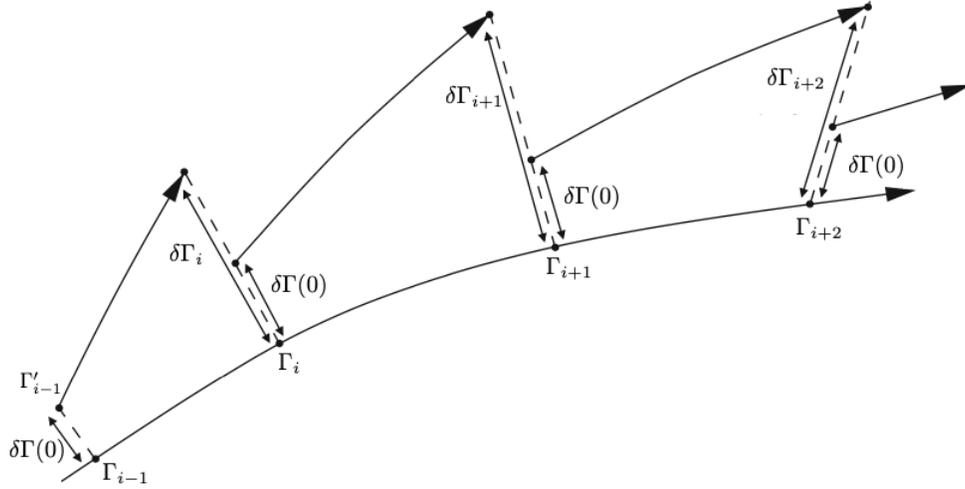


Figura 1.5: Evolución de la perturbación en el espacio fase. Después de cada paso i se renormaliza $\delta\mathbf{\Gamma}$, para que tome el valor de la nueva condición inicial $\delta\mathbf{\Gamma}(0)$. Figura adaptada de [16, p. 91].

y como se ilustra en la figura 1.5.

1.4.2. Colisiones

La propagación en el tiempo para una partícula en el espacio tangente, es decir, para el vector de desviación, dado un potencial de partícula libre está dado por (C.5), lo que puede escribirse en términos de las condiciones iniciales $\delta\mathbf{q}(0)$ y $\delta\mathbf{p}(0)$ como

$$\delta\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & t \cdot \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \delta\mathbf{\Gamma}(0) \quad (1.29)$$

A tiempos discretos, la ecuación (1.29) es interrumpida por colisiones con las fronteras ocasionando que el vector de la perturbación cambie de forma discontinua. Etiquetemos con una tilde a los estados asociados a la partícula un instante después de sufrir una colisión. Entonces, la ecuación (C.11) representa el estado del vector de desplazamiento cuando ocurre una colisión con una superficie plana, lo cual está dado por

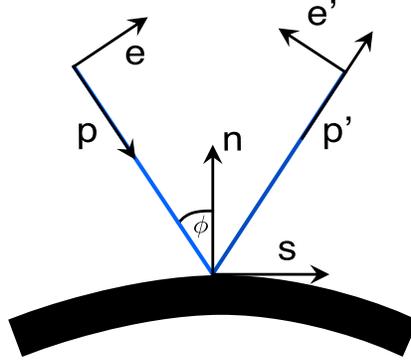


Figura 1.6: Descripción geométrica de la colisión de una partícula puntual con una superficie curva. Adaptado de la figura 1 en [31].

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} - 2(\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \delta\mathbf{p} - 2(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \end{pmatrix}$$

lo que significa que tanto las componentes del momento como las de la posición se reflejan en la superficie, donde \mathbf{n} es el vector normal de la frontera en el punto donde ocurre la colisión. Esta ecuación se deriva en el apéndice C.2.1.

Para el caso de una colisión con una superficie curva se tiene la ecuación (C.16), que viene dada por

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} - 2(\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \delta\mathbf{p} - 2(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - 2[(\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\delta\mathbf{n}] \end{pmatrix}$$

cuya construcción es un tanto más compleja, donde $\delta\mathbf{n}$ es la separación entre los vectores normales del punto de colisión de la partícula de referencia y la satélite.

Para este caso, se introduce la curvatura γ_r como la razón de cambio entre la orientación del vector tangente y el crecimiento de la separación desde el punto de la colisión. Dicha curvatura, por ejemplo, toma valores $\gamma_r = \pm 1/r$ dependiendo si la colisión toma lugar dentro o fuera de un círculo de radio r . Además, se introducen los vectores unitarios \mathbf{e} y \mathbf{e}' , los cuales son ortogonales a \mathbf{p} y \mathbf{p}' respectivamente, lo cual se observa en la figura 1.6.

De la figura 1.7 se tiene que el ángulo de incidencia y el ángulo reflejado se ven alterados por $\delta\mathbf{n}$, por lo que se espera que la transformación para el momento lineal

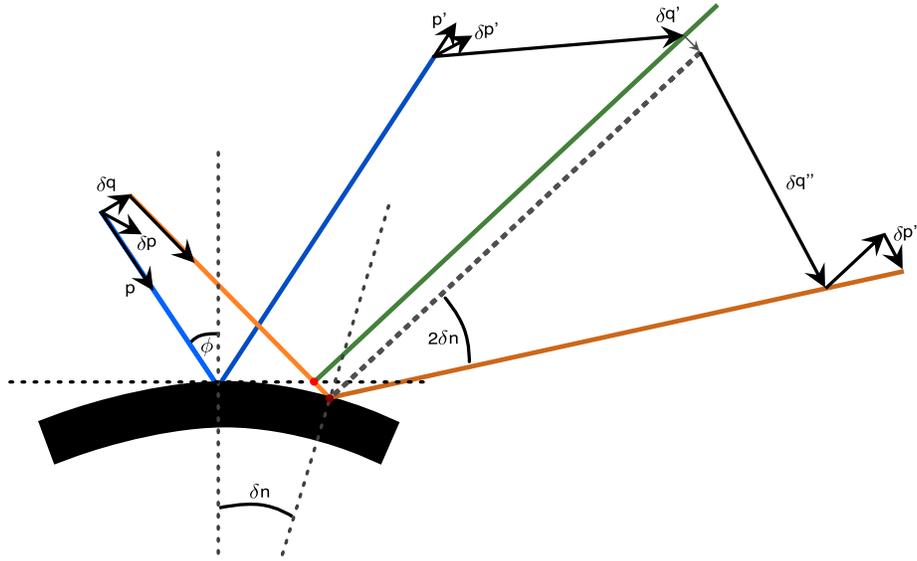


Figura 1.7: Descripción geométrica de la evolución de las componentes del vector de la perturbación $\delta\Gamma = (\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p})^\dagger$. Adaptado de la figura 2 en [31].

cambie siguiendo la relación

$$\delta\mathbf{p} \rightarrow \delta\mathbf{p}' - 2\delta\mathbf{n} |\mathbf{p}| \mathbf{e}' \quad (1.30)$$

Además, δs representa el desplazamiento sobre la superficie, que se calcula como

$$\delta s = \frac{\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}}{\cos(\phi)} \quad (1.31)$$

Considerando que $\delta\mathbf{n} = \gamma_r \delta s$, se puede escribir el vector de desplazamiento a partir de la colisión con una superficie curva (C.16) como

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} - 2(\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \delta\mathbf{p} - 2(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - 2\gamma_r \frac{\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}}{\cos(\phi)} |\mathbf{p}| \mathbf{e}' \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

donde ϕ es el ángulo de incidencia. Usando la ecuación (1.32) para las colisiones y (C.5) para la propagación en el espacio del vector tangente, es posible calcular la evolución de esta cantidad en un billar.

1.4.3. Dos vías para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov

Además de lo ya presentado, es posible calcular el espectro de Lyapunov resolviendo un problema de eigenvalores, para esto consideremos el caso de un mapeo \mathbf{M} donde $\mathbf{\Gamma}_0$ es la condición inicial y $\mathbf{\Gamma}_i$ la i -ésima órbita correspondiente. Si tomamos un desplazamiento infinitesimal desde $\mathbf{\Gamma}_0$ en la dirección de un vector tangente $\delta\mathbf{\Gamma}_0$, la evolución de dicho vector de desviación está dada por

$$\delta\mathbf{\Gamma}_{i+1} = \mathbf{S} [\mathbf{M}^i(\mathbf{\Gamma}_i)] \cdot \delta\mathbf{\Gamma}_i \quad (1.33)$$

donde $\mathbf{S} [\mathbf{M}^i(\mathbf{\Gamma}_i)]$ es la matriz jacobiana del sistema. Para una evolución de N órbitas tenemos que el vector tangente está dado por

$$\delta\mathbf{\Gamma}_N = \mathbf{S} [\mathbf{M}^N(\mathbf{\Gamma}_0)] \cdot \delta\mathbf{\Gamma}_0 \quad (1.34)$$

Denotamos a la dirección del crecimiento de la perturbación de la condición inicial como

$$\delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 = \frac{\delta\mathbf{\Gamma}_0}{|\delta\mathbf{\Gamma}_0|}$$

De acuerdo a la definición (1.23) para el máximo exponente de Lyapunov, podemos desarrollar en términos de la matriz jacobiana del sistema

$$\lambda(\mathbf{\Gamma}_0, \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0) = \lim_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \ln \frac{|\delta\mathbf{\Gamma}_{t_N}|}{|\delta\mathbf{\Gamma}_0|} \quad (1.35)$$

$$= \lim_{t_N \rightarrow \infty} \frac{1}{t_N} \ln \left| \mathbf{S} [\mathbf{M}^N(\mathbf{\Gamma}_0)] \cdot \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 \right| \quad (1.36)$$

Llamemos a la ecuación (1.35) la vía razón de cambio. Así, conociendo el vector de desviación a cada intervalo de tiempo podemos calcular el exponente de Lyapunov.

Consideremos una N muy grande que nos permita aproximar que

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{\Gamma}_0, \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0) &\approx \bar{\lambda}_{t_N}(\mathbf{\Gamma}_0, \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0) \\
&\equiv \frac{1}{t_N} \ln \left| \mathbf{D} [\mathbf{M}^N(\mathbf{\Gamma}_0)] \cdot \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 \right| \\
&= \frac{1}{2t_N} \ln \left| \mathbf{D} [\mathbf{M}^N(\mathbf{\Gamma}_0)] \cdot \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 \right|^2
\end{aligned} \tag{1.37}$$

donde el último término denota la norma de matrices que se calcula como

$$|\mathbf{M}| = (\text{máximo autovalor de } \mathbf{M}^\dagger \mathbf{M})^{1/2} \tag{1.38}$$

Sea

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Gamma}_0) = \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0^\dagger \cdot \{ \mathbf{D} [\mathbf{M}^N(\mathbf{\Gamma}_0)] \}^\dagger \mathbf{D} [\mathbf{M}^N(\mathbf{\Gamma}_0)] \cdot \delta\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 = \delta\mathbf{\Gamma}_{t_N}^\dagger \delta\mathbf{\Gamma}_{t_N} \tag{1.39}$$

por el teorema espectral, tenemos que $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Gamma}_0)$ es una matriz hermitiana con autovalores reales y no negativos, cuyos autovectores pueden tomarse reales. Ahora bien, denotamos por Λ_{1,t_N} al máximo autovalor de $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Gamma}_0)$, así que, de (1.37) podemos expresar al máximo exponente como

$$\bar{\lambda}_{t_N}(\mathbf{\Gamma}_0) = \frac{1}{2t_N} \ln(\Lambda_{1,t_N}) \tag{1.40}$$

La ecuación (1.40) sería la vía de autovalores para calcular el exponente de Lyapunov.

1.5. Cálculos numéricos

La implementación numérica de la dinámica de una partícula en un billar se hará utilizando el lenguaje *Julia*. Una de las motivaciones de elegir este lenguaje es que en los últimos años éste ha sido utilizado en múltiples centros de investigación debido a sus diversas bondades [33]. Actualmente, existe una librería llamada *DynamicalBi-*

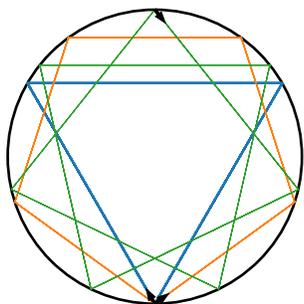
lliards desarrollada en este lenguaje [34]. Este trabajo no se enfocará en presentar una alternativa a dicha biblioteca, mas bien se buscará construir desde cero un algoritmo que permita evolucionar y representar gráficamente partículas en billares, así como estudiar otras propiedades en el marco de la descripción del caos en billares. Como guía para el desarrollo de trayectorias en un billar sirvió como base el trabajo de Datseris [35], desarrollos posteriores a eso pueden encontrarse en el apéndice G.

Capítulo 2

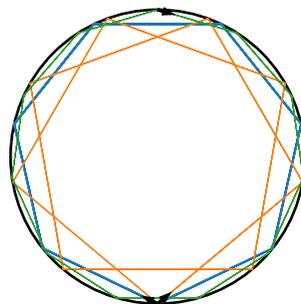
Resultados

2.1. Evolución de partículas dentro de un billar

Una vez desarrollada la teoría que describe la dinámica de un billar, se busca implementar una herramienta numérica que permita evolucionar las trayectorias de las partículas en diferentes billares. Esto se realizó numéricamente en el lenguaje *Julia* y el código se encuentra en el apéndice G. En la primera parte de este capítulo se muestran algunas trayectorias para los billares antes mencionados, dadas distintas condiciones iniciales.

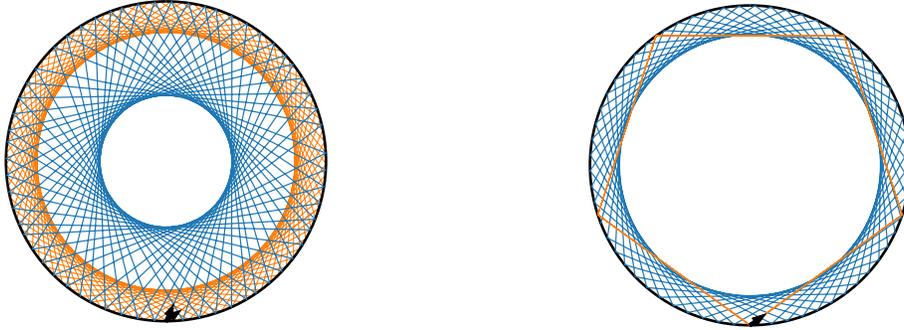


(a) En azul (3,1), en naranja (5,1) y en verde (7,2).



(b) En azul (8,1), en naranja (9,2) y en verde (11,1).

Figura 2.1: Familias de órbitas periódicas (N, T) para el billar circular.



(a) Dos trayectorias independientes entre sí. (b) Dos trayectorias cercanas e independientes entre sí.

Figura 2.2: Trayectorias regulares del billar circular.

2.1.1. Billar circular

Se grafican algunas trayectorias que generan familias de órbitas periódicas (N, T) de acuerdo a la discusión de la sección 1.2, recordando que N es el número de colisiones en cada ciclo y T el número de revoluciones que se completan antes de cerrar una órbita. La simetría rotacional y la generación de órbitas poligonales sugieren un comportamiento bastante regular en los billares circulares y es justo este aspecto de la dinámica lo que se busca estudiar. Para ello se considera el caso de una circunferencia dentro de la cual se evolucionan dos diferentes condiciones iniciales, tal y como se muestra en la figura 2.2a. Las condiciones iniciales se encuentran en el punto más bajo del billar, indicadas por una flecha. De forma característica, ambas evoluciones se destacan por generar cáusticas que se observan como círculos concéntricos en el límite de N tendiendo infinito.

En el caso de la figura 2.2b se tiene un partícula que describe una trayectoria (color naranja) en un billar circular para un ángulo inicial de $\pi/5$, después se evoluciona otra partícula pero para la condición inicial $\pi/5 - 0.01$, sin embargo, esta trayectoria (color azul) resulta ser una órbita de periodo muy largo pues toma muchas colisiones en cerrarse, tal y como se discutió en la sección 1.2.

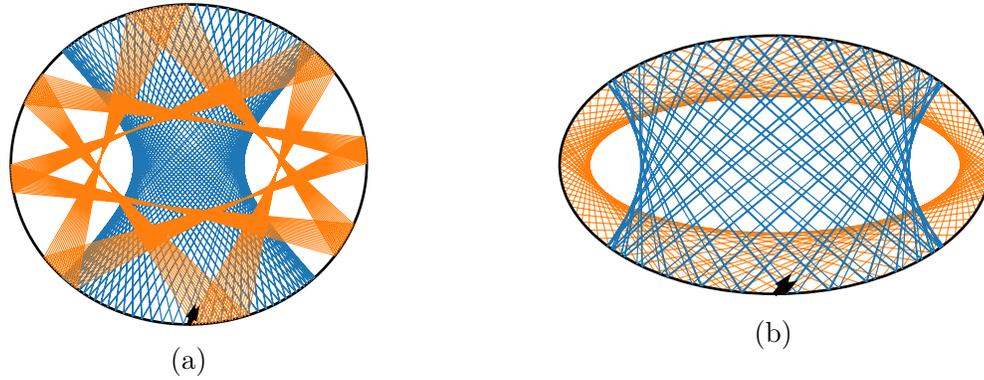


Figura 2.3: *a)* Elipse con parámetros $a = 0.5$ y $b = 0.45$, *b)* elipse con parámetros $a = 0.5$ y $b = 0.3$.

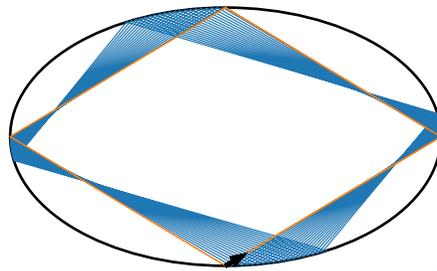
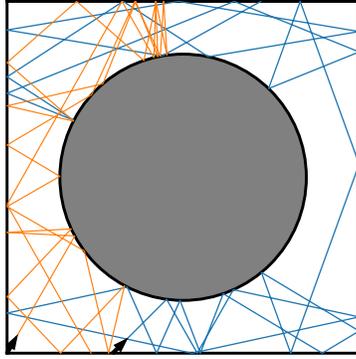


Figura 2.4: Par de trayectorias independientes entre sí en un billar de elipse con diferencia de ángulo inicial de 0.005 radianes.

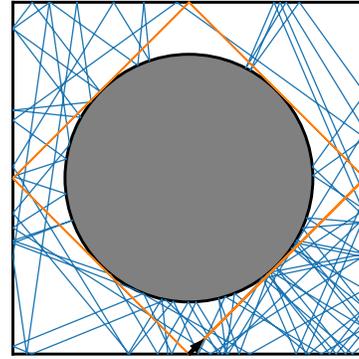
2.1.2. Billar elíptico

Si partimos del caso de una frontera circular y modificamos ligeramente la excentricidad de la curva, la evolución de las condiciones iniciales puede cambiar, tal y como se observa en la figura 2.3. Para el billar de elipse las familias de órbitas pueden no sólo generar la cáustica de una elipse concéntrica, sino que se puede tener una curva envolvente en forma de hipérbola.

De evolucionar pares de partículas en el billar se observa un comportamiento regular para esta frontera. En la figura 2.4 se muestra el caso de dos condiciones inicialmente cercanas, para un caso se genera una órbita que cierra luego de cuatro colisiones, para la otra se genera una trayectoria regular pero que no cierra en la primeras colisiones.

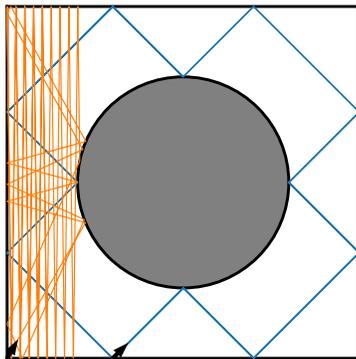


(a) Dos trayectorias independientes en un billar de Sinai.

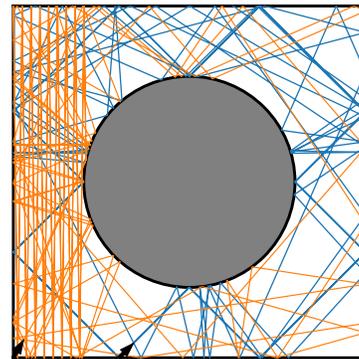


(b) Par de trayectorias independientes entre sí dentro de un billar de Sinai, con diferencia de ángulo inicial de 0.01 radianes.

Figura 2.5: Trayectorias en un billar de Sinai.



(a) Dos trayectorias en un billar de Sinai considerando 40 colisiones.

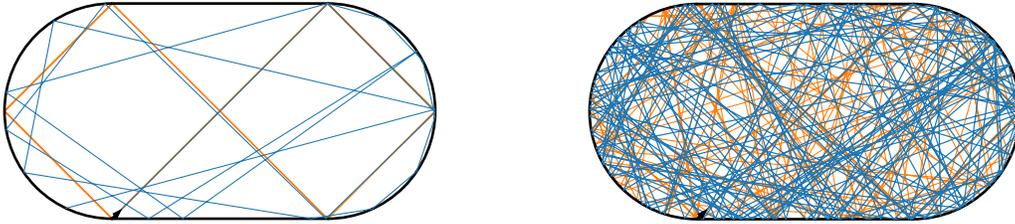


(b) Las mismas dos trayectorias en un billar de Sinai considerando 150 colisiones.

Figura 2.6: Otras trayectorias en un billar de Sinai.

2.1.3. Billar de Sinai

Se considera una frontera cuadrada de longitud unitaria con un disco centrado, de forma que el único parámetro que vamos a considerar es el radio de la circunferencia. En general, se observa una distribución en todo el espacio al evolucionar cualquier condición inicial, como se muestra en la figura 2.5a. El disco en este billar actúa como un dispersor de las trayectorias, así que cualquier trayectoria que no interactúe con este disco se espera que sea regular, debido a la simetría de la frontera cuadrada, sin embargo, en ciertos casos estas familias de órbitas periódicas pueden ser inestables ante pequeñas perturbaciones, como se observa en la figura 2.5b.



(a) Una trayectoria que pareciera ser periódica acompañada de otra con condición inicial ligeramente distinta, para un estadio de Bunimovich considerando 40 colisiones. (b) Las mismas dos trayectorias en un estadio de Bunimovich considerando 150 colisiones.

Figura 2.7: Trayectorias en el estadio de Bunimovich.

En el billar de Sinai se pueden encontrar órbitas periódicas donde la partícula evoluciona cuando se consideran pocas colisiones. Sin embargo, la dinámica irregular e inestable de este billar se observa al considerar una evolución temporal más grande puesto que al final las partículas terminan colisionando de manera uniforme con todas las paredes, ya sea por las propiedades dispersoras del disco central, o bien, por el ruido numérico inherente a un modelo computacional como este. El comportamiento a tiempos largos se puede ejemplificar en la figura 2.6, pues para un pequeño número de colisiones pareciera haber regiones regulares que resultan no serlo cuando N se aumenta.

2.1.4. Billar de Bunimovich

El estadio de Bunimovich consta de fronteras tanto curvas como rectas, lo cual genera una situación de dispersión análoga al billar de Sinai. Evolucionar partículas en este billar genera órbitas irregulares que visitan uniformemente el espacio accesible. Salvo por las colisiones completamente perpendiculares a los segmentos rectos del billar, no hay órbitas que se mantengan periódicamente estables, debido al ruido numérico. Se tiene que las trayectorias son muy inestables alrededor de este tipo de órbitas, como se observa en la figura 2.7.

Una vez que discutimos la regularidad de las trayectorias en el espacio de configuraciones para diferentes billares, resulta intuitivo preguntarse cómo está relacionada esta dinámica con el concepto de caos; para ello se calcula el máximo exponente de

Lyapunov en los billares de trayectorias irregulares. Antes de eso, se analizará y calcularán las secciones de Poincaré generadas por el mapeo de billar que se ha presentado con anterioridad. Esto con la intención de visualizar la regularidad de las trayectorias en el espacio fase.

2.2. Espacio de Colisiones

2.2.1. Coordenadas de Poincaré–Birkhoff

Las **coordenadas de frontera**, también llamadas **coordenadas de Poincaré–Birkhoff** [14, p.60] [36] [27, p. 9], son aquellas que reducen la naturaleza continua de un billar a un mapeo, considerando los puntos donde ocurren las colisiones y cierta componente de la velocidad. Estas coordenadas son dos: ξ y $\text{sen}(\phi_n)$ [37, p. 1]. El primer parámetro es la longitud de arco del obstáculo en cuestión, mientras que el otro nos da la velocidad tangencial en el punto de colisión, pero dado que estamos en el caso de rapidez unitaria basta calcular $\text{sen}(\phi_n)$, donde ϕ_n es el ángulo entre el vector de velocidad y el vector normal al obstáculo, medido a partir del vector normal.

A continuación se presentan las secciones de Poincaré que se calcularon para los cuatro tipos de billares que se han mencionado en este escrito. En todos los casos se observa una concordancia con la literatura [27, pp. 10 - 12] [38, p. 812] [14, pp. 63-64].

2.2.2. Billar circular

Para el espacio de colisiones en las coordenadas de Poincaré–Birkhoff se muestra la evolución independiente de 1500 partículas con condiciones iniciales aleatorias considerando 200 colisiones en cada caso, donde cada punto representa una colisión y las 200 colisiones de una condición inicial tienen el mismo color; tal y como se ve en la figura 2.8. Las condiciones aleatorias se generan indicando un punto en la frontera y un ángulo cuya magnitud se escala de forma aleatoria. Después de que se evolucionan las 200 colisiones, el punto final sobre la frontera será el punto de inicio de la siguiente partícula a la cual, nuevamente se le da una orientación aleatoria. De esta forma se

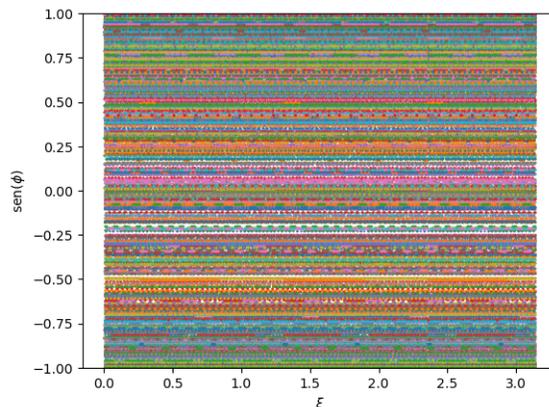


Figura 2.8: Espacio de colisiones para el billar circular.

induce aleatoriedad en cada evolución. Este proceso se repite en todos los billares subsecuentes.

Aquí, ξ es el parámetro de longitud de arco y ϕ_n el ángulo entre el vector de velocidad y la normal al obstáculo. Este espacio de colisiones muestra una familia de rectas horizontales que indican que la velocidad tangencial no cambia a lo largo de las colisiones con los bordes, debido a que el ángulo de incidencia permanece constante a lo largo de cada evolución, siendo la única variable para cada caso la posición en la frontera donde ocurre la colisión. El hecho de que algunas rectas se vean más *punteadas* que otras hace referencia a la simetría racional de la circunferencia. Dado el par que identifica cada familia (N, T) es posible recuperar una idea sobre N en cada familia de órbitas periódicas.

2.2.3. Billar elíptico

Para el caso del billar de elipse se compara el espacio de colisiones para dos billares diferentes generados por distintos valores del eje mayor a y el eje menor b , pues a diferencia del caso circular, el ángulo de incidencia sí es función de la curvatura en el punto de la colisión. Para ambos billares se consideró la evolución independiente de 2000 partículas con condiciones iniciales aleatorias considerando 250 colisiones en cada caso, tal y como se ve en la figura 2.9. Se observa que conforme la elipse aumenta su excentricidad respecto a la de la circunferencia, la familia de curvas en el espacio de

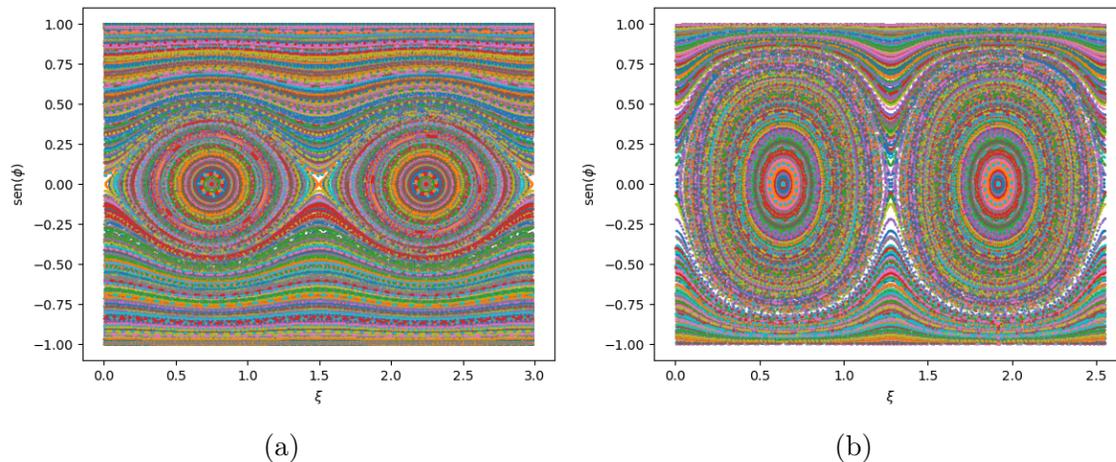


Figura 2.9: Espacio de colisiones del billar elíptico para dos distintos valores del eje mayor a y menor b , donde cada punto representa una colisión. Los parámetros en la figura a) son $a = 0.4$ y $b = 0.3$; mientras que para la figura b) los parámetros son $a = 0.4$ y $b = 0.2$.

colisiones se deforma, dando lugar a dos tipos de órbitas: aquellas que se distribuyen de manera no uniforme en casi todo punto de la frontera y las que sólo colisionan con ciertas regiones de la frontera, lo que genera regiones acotadas para la evolución de la partícula.

2.2.4. Billar de Sinai y estadio de Bunimovich

Para construir el parámetro ξ en los siguientes billares se hizo una división para cada segmento de las fronteras. Con el billar de Sinai se separaron cuatro secciones que corresponden a cada lado del cuadrado, mientras que la última sección está asociada al perímetro del disco, como se observa en la figura 2.10a. Para el estadio de Bunimovich se sigue una lógica similar, se tiene una sección que representa el perímetro de la circunferencia completa y dos secciones asociadas a cada segmento recto del billar, como se observa en la figura 2.10b. En ambos casos, el parámetro de longitud de arco es simplemente la unión de los perímetros de las fronteras.

Tanto para el billar circular como para el elíptico se observan curvas suaves en la sección de Poincaré. Es un aspecto destacable sobre dos billares que sabemos que no tienen una dinámica caótica. El hecho de que el billar de Sinai y el estadio de

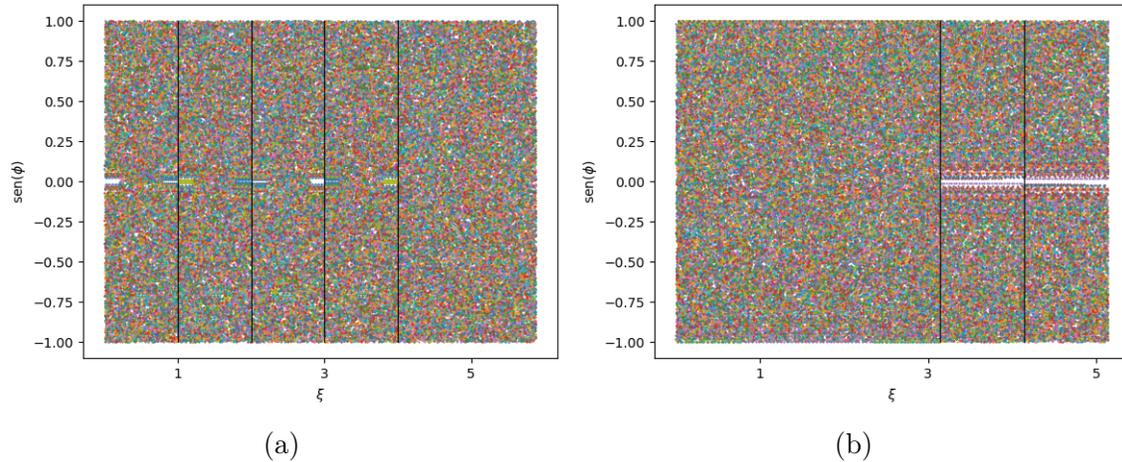


Figura 2.10: Espacio de colisiones para el billar de Sinai con los parámetros $L = 1$ y $b = 0.2$ y el estadio de Bunimovich con los parámetros $2\ell = 2$ y $r = 1.5$. Cada punto representa una colisión.

Bunimovich tengan una imagen del espacio de colisiones sin este tipo de curvas, sugiere ser un indicador de billares caóticos.

En el espacio de colisiones para el billar de Sinai se muestra la ausencia de familia de curvas como se ve en la figura 2.10a. Así, vemos que hay un comportamiento irregular para este billar. Por otro lado, el espacio de colisiones para el estadio de Bunimovich resulta ser muy similar al caso del billar de Sinai, siendo que no aparecen familias de curvas en dicho mapeo, tal y como se muestra en la figura 2.10b. No tenemos órbitas periódicas y, por tanto, lo asociamos a un comportamiento irregular. En ambos casos se observan dos regiones localizadas como líneas rectas que se deben a condiciones iniciales que mantienen a la partícula rebotando hasta que colisionan con alguna frontera que hace que se comience a dispersar, cubriendo de forma aleatoria la frontera del billar.

Esta manera de *llenar el espacio de colisiones* hace resaltar que visualizar la sección de Poincaré de un billar sirve para determinar si la dinámica es caótica. Resta discutir si con sólo analizar la sección de Poincaré en un billar es suficiente para etiquetar a la dinámica como caótica.

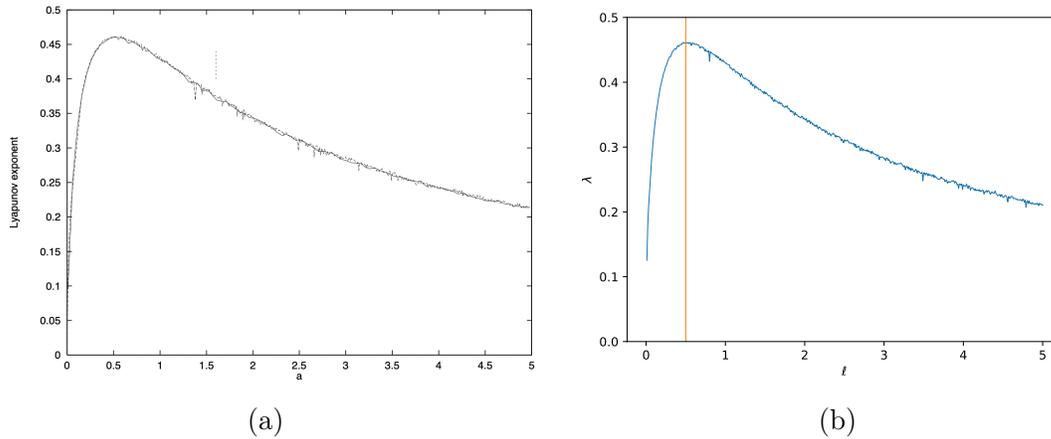


Figura 2.11: Máximo exponente de Lyapunov promedio en función de la longitud del segmento recto de un estadio de Bunimovich, para unos segmentos de circunferencia de radio fijo $r = 1.0$. En *a*) se encuentra el resultado obtenido por Hansen y Cvitanovic [39], mientras que en *b*) se hace un cálculo idéntico utilizando la herramienta numérica desarrollada para este trabajo. El parámetro a es idéntico al parámetro ℓ .

2.3. Máximo exponente de Lyapunov

2.3.1. Verificación de resultados numéricos

Con el código que se presenta en este trabajo es posible calcular el máximo exponente de Lyapunov. Para corroborar que se obtienen resultados concordantes con los ya existentes se calculó el MEL promedio para el estadio de Bunimovich, para esto se utilizaron los mismos parámetros que en el trabajo de Hansen y Cvitanovic [39]. Se fijó el radio de los segmentos de circunferencia y se varió la longitud del segmento recto del estadio 2ℓ . Con esto se calcularon 1,000 trayectorias diferentes al azar para 2,000 colisiones en cada caso.

En la figura 2.11a se muestra una curva cuyo valor máximo es alcanzado en $\ell = 0.5$ [39, p. 4]. El cálculo que se realizó en este trabajo replica dicho valor máximo para este parámetro, el cual se identifica con una línea vertical naranja en la figura 2.11b. Con esto se observa que efectivamente el código computacional desarrollado replica los resultados esperados.

2.3.2. Dos vías para el máximo exponente de Lyapunov promedio

Dando seguimiento a la misma idea, se calculó el máximo exponente de Lyapunov usando la vía de razón de cambio y la vía de autovalores. Para el cálculo promedio del MEL usando ambas vías se evolucionaron 100 partículas que colisionaron 2500 veces. Se varió el radio del disco central en el caso del billar de Sinai y el largo de la sección recta en el billar de Bunimovich. En la figura 2.12 se tiene en azul el máximo exponente Lyapunov calculado usando la ecuación de la vía razón de cambio (1.35), mientras que en naranja se usó la ecuación de la vía de autovalores (1.40). Para el caso de las mismas trayectorias se observa que, en promedio, el máximo exponente de Lyapunov resulta tener el mismo valor calculado por cualquiera de las dos vías. La precisión entre ambos métodos es de cuatro cifras significativas, lo cual hace la diferencia de los valores imperceptible. Este es un resultado esperado, debido a que no se utilizó ninguna aproximación de por medio.

Cabe destacar que la vía de autovalores puede resultar útil cuando se trabaja en billares de dimensión mayor, pues de esta forma se puede obtener de forma directa el espectro de Lyapunov completo.

En este punto, observamos que el billar de Sinai y el estadio de Bunimovich tienen un MEL promedio positivo asociado a su dinámica, por ello, concluimos que estos billares son caóticos; lo cual coincide con la literatura [6, p. 57]. Esto último en adición con las secciones de Poincaré presentadas en la sección anterior, sugieren una relación entre la presencia de curvas suaves en el espacio de colisiones y el MEL asociado al billar.

Por una parte se corroboró la dinámica caótica que caracteriza al billar de Sinai y al estadio de Bunimovich mediante el MEL, por otra parte, se tienen a las secciones de Poincaré como herramientas para determinar si un sistema es caótico en alguna región dada.

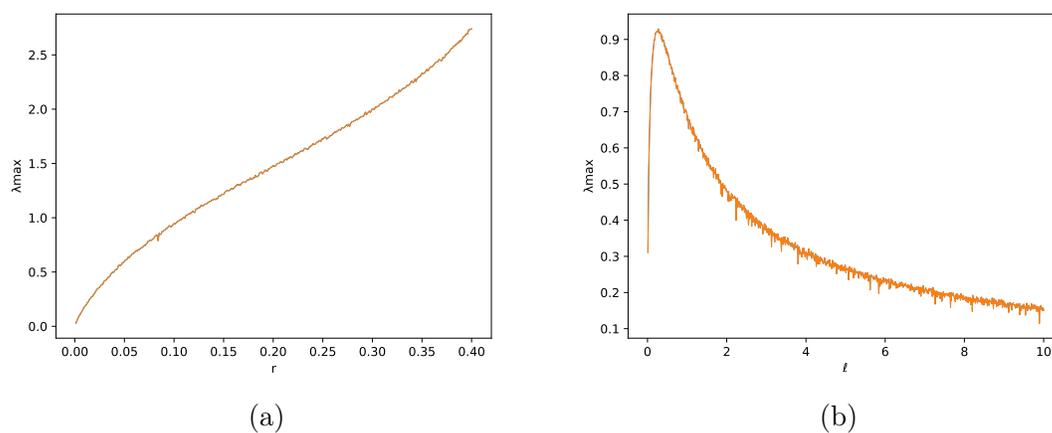


Figura 2.12: Máximo exponente de Lyapunov calculado de formas diferentes usando la vía de razón de cambio y la de autovalores. Los resultados coinciden y no es posible distinguirlos en la gráfica. En la figura *a*) se hace el cálculo para el billar de Sinai donde el parámetro que se varía es el radio del disco central r , mientras que en *b*) se calcula para el estadio de Bunimovich donde el parámetro que se varía es la longitud del segmento recto l .

Capítulo 3

Revisión de caos cuántico en billares y trabajo a futuro

En esta sección se hace una revisión general de los conceptos, definiciones y propiedades que nos permitan extender el concepto de caos a los sistemas cuánticos. Se presentará la construcción de un billar cuántico, se desarrollará el principio de correspondencia que motiva el uso del límite semiclásico ($\hbar \rightarrow 0$) y se revisará el fenómeno de cicatrización en dichos sistemas. Finalmente, se harán conclusiones sobre el presente escrito y las posibilidades de extender el trabajo aquí realizado para futuras investigaciones.

3.1. Caos en sistemas cuánticos

Es natural querer extender la idea de los sistemas clásicos a los cuánticos. Dicha motivación es debida en gran parte al principio de correspondencia, el cual justifica el uso de expresiones clásicas en la teoría cuántica y una interpretación física de la mecánica cuántica a partir de conceptos clásicos [40, p. 125]. Surge la necesidad de definir el concepto de caos para los fenómenos cuánticos. En ese rubro, Berry [41] propone un cambio de nombre para los estudios de esta naturaleza: *caología cuántica*. Así, por caología cuántica entendemos al estudio de fenómenos semiclásicos asociados a sistemas cuya contraparte clásica exhibe caos.

Para los fines prácticos de este trabajo y en concordancia con cierta parte del uso común de la terminología [37, p. 5] [16, p. 105] definimos al **caos cuántico** como: el campo de la física que estudia la mecánica cuántica de sistemas que clásicamente son caóticos. A pesar de esto, todos los sistemas cuánticos pueden ser formalmente analizados sin hacer referencia a un análogo clásico.

3.2. Billares cuánticos

Se define un billar cuántico plano como un pozo de potencial bidimensional, que consta de una región $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ donde la posición de las paredes que la rodean queda especificada por una curva cerrada $\partial\mathcal{V}$. Así, las soluciones estacionarias deben satisfacer la ecuación de Schrödinger en el interior del pozo y deben anularse en el borde [42, p. 5].

Se busca la solución de la ecuación de Schrödinger cuyo Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = -\nabla^2 + V(\mathbf{r})$$

donde el potencial se puede escribir como

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in \mathcal{V} \\ \infty & \text{otro caso} \end{cases}$$

Expresamos la energía en términos del número de onda $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, así que fijamos la unidades como $\hbar^2/2m = 1$, de forma que $E = k^2$. Entonces, tenemos que las soluciones estacionarias satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_k(\mathbf{r}) = 0$$

con condición de Dirichlet a la frontera $\psi|_{\partial\mathcal{V}} = 0$. En este sentido, hay dos grupos de métodos para resolver la ecuación de Helmholtz [37, pp. 77, 79]; los métodos por diagonalización de la base y los métodos por función de Green, pero en este escrito

no se hace más mención sobre estos métodos.

3.3. El principio de correspondencia

Se puede establecer el principio de correspondencia como: *la mecánica cuántica recupera a la mecánica clásica en tanto que la acción se haga grande en comparación a la constante de Planck h* [18, p. 555]. La motivación de esta sección es mostrar que este principio es equivalente a demandar que para el caso de grandes cantidades de energía y órbitas grandes los cálculos cuánticos deben coincidir con los clásicos.

Este principio es fundamental para dar validez a la llamada aproximación semiclásica, por ello, se desarrollan algunos elementos de la teoría que respalden la validez de este principio. Para esto, en las siguientes secciones se seguirá un desarrollo de conceptos tal y como lo hace Heller [18], acerca de la dinámica de paquetes de onda localizados.

3.3.1. Aproximación semiclásica

Se busca llegar a una expresión para la probabilidad semiclásica que coincida con el álgebra exacta de la mecánica cuántica, para ello se describirá una cuantización semiclásica de sistemas integrables que describe un grado de libertad, para ilustrar de forma general la idea de esta aproximación. Un camino para conseguir esto [18] es representando los estados mediante diagramas en los cuales consideramos el traslape de la posición y el momento, pues construyendo diagramas del espacio fase se puede dilucidar una forma de construir una probabilidad semiclásica. Se busca que las amplitudes semiclásicas formadas de esta manera correspondan perfectamente con los resultados de la mecánica cuántica.

Se usan los **paquetes de onda** para representar una trayectoria y su *inmediata vecindad* en el espacio fase, para el límite semiclásico. Usualmente se dice que son el análogo de las trayectorias clásicas [18, p. 551].

Por **amplitud cuántica** $\psi_{n_j}(q) = \langle q | \psi_{n_j}(q) \rangle$ se hace referencia al traslape entre dos estados, cada uno con valor definido en una variable canónica y valor indefinido

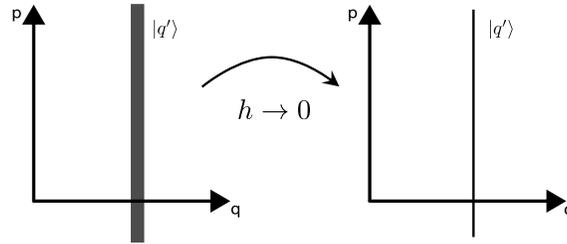


Figura 3.1: Diagrama en el espacio fase para el estado no normalizable $|q'\rangle$. Dado que su posición está definida tiene momento indefinido.

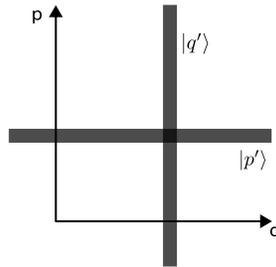


Figura 3.2: Traslape de los estados $|q'\rangle$ y $|p'\rangle$.

para su variable conjugada. Por ejemplo, al definir la energía E_{n_j} se indefine el tiempo o el ángulo, o bien, definir la posición q e indefinir el momento lineal p . Así, las densidades clásicas en el espacio fase Ω funcionan como los análogos de los estados cuánticos.

Representación de estados mediante diagramas

Consideramos un estado no normalizable $|q'\rangle$ en Ω , por convención, para representar dicho estado gráficamente se considera que la región que representa este estado tiene ancho h ; mientras que cada punto es de magnitud $1/h$. El hecho que los estados no sean normalizables refleja el hecho de que tengamos una banda de largo infinito, pues un estado normalizable debería mostrar una banda de área finita. Entonces, al tomar el límite semiclassical la representación se convierte en una función delta $\delta(q' - q)$ en Ω , tal y como se observa en la figura 3.1. Para el caso de la representación del momento $|p'\rangle$ en el espacio fase se tiene un caso análogo, pero aquí la región se extiende a lo largo del eje q . Así, representamos gráficamente el traslape $|\langle q'|p'\rangle|^2$ de dichos estados como se muestra en la figura 3.2.

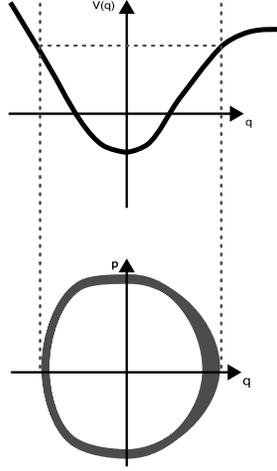


Figura 3.3: Diagrama en el espacio fase para un autoestado de un potencial ligado $V(q)$.

Ahora bien, para estados normalizables tales como los autoestados de la energía $|\psi_{n_j}\rangle$ queremos que el área del diagrama sea h , así que, por normalización se pide que los valores dentro de la región sean $1/h$. En la figura 3.3 se tiene un estado propio $|\psi_{n_j}\rangle$ de un Hamiltoniano típico $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, de manera que los bordes de la región sombreada corresponden al estado $H(j, p) = E(nh)$ correspondiente a la acción $j = nh$, mientras que el estado $H(j, p) = E((n+1)h)$ corresponde a la acción $j = (n+1)h$ [18]. Así, la diferencia entre estas dos acciones es

$$\Delta j = (n+1)h - nh = h \quad (3.1)$$

El ancho de la curva en la figura 3.3 varía, por lo cual, si denotamos como $d = d(q, p)$ a la función del ancho de la curva en cierto punto y desarrollando las coordenadas de ángulo acción, se tiene que

$$dE = |\nabla H| \cdot d = (dE/dj)dj = \nu h$$

donde $|\nabla H|$ es la norma del gradiente del Hamiltoniano, que resulta

$$|\nabla H| = \left| \left(\frac{\partial}{\partial q} H, \frac{\partial}{\partial p} H \right) \right| = \left| \left(\frac{\partial V}{\partial q}, \frac{p}{m} \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^2 + \frac{p^2}{m^2}}$$

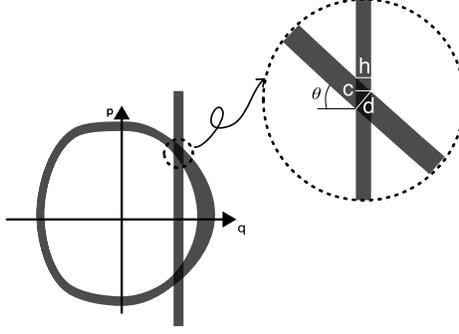


Figura 3.4: Traslape $|\langle q|\psi\rangle|^2$ de los diagramas mostrados con anterioridad. Figura modificada de [18, p. 557].

Así se tiene que

$$d = \frac{\nu h}{|\nabla H|}$$

Ahora bien, con lo anterior podemos analizar el traslape entre el estado $|\psi_{n_j}\rangle$ y $|q\rangle$, como se muestra en la figura 3.4. El área de la intersección dada por el paralelogramo mostrado en la figura se calcularía como $A = 2(hc/2) = hc$. Por lo tanto, podemos escribir que

$$A = \frac{hd}{\cos\theta} = h^2 \frac{\nu}{|\nabla H| \cos\theta}$$

Ahora bien, considerando que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$, y de acuerdo al diagrama es fácil ver que $\tan\theta = dp/dq$. De aquí se puede escribir

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2 \left(\frac{dE}{dE}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2}} = \frac{p}{m|\nabla H|}$$

y por tanto

$$A = \frac{h^2 \nu m}{p}$$

La contribución del traslape entre ambos es entonces $\nu m/p$. Esta magnitud, de acuerdo a la ecuación (F.4) desarrollada en el apéndice F, es precisamente la probabilidad clásica al coincidir con el determinante de Van Vleck

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial^2 F_2(x, j)}{\partial x \partial j} = \frac{\nu m}{p}$$

Ahora bien, se puede calcular la amplitud semiclassical como

$$\text{amplitud cuántica} \approx \sum (\text{probabilidad clásica})^{1/2} e^{i \cdot \text{fase}} \quad (3.2)$$

Lo anterior nos deja una función de onda normalizada dada por

$$\psi_{n_j}(x) \approx \sum \left| \frac{\nu m}{p(j, x)} \right|^{1/2} e^{i \int p(j, x') dx' / \hbar} \quad (3.3)$$

la cual representa un autoestado normalizado, que coincide con el resultado estándar de aplicar el método WKB [43, p. 318]. Esta es justo la correspondencia que queríamos verificar.

3.4. Cicatrices cuánticas

Décadas atrás, Berry [44] conjeturó que las autofunciones de sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico deberían parecerse localmente a una superposición de ondas planas. Con esto, la función de onda es modelada como

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_i^n c_i \text{sen}(\mathbf{k}_i \mathbf{r} + \phi_i) \quad (3.4)$$

donde \mathbf{k}_i son vectores de onda uniformemente distribuidos en todas las direcciones con una magnitud fija k , ϕ_i son fases aleatorias uniformemente distribuidas y c_i son coeficientes aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $(-1, 1)$ y normalizados de forma que $\int_V |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1$ [37, p. 101].

El espectro de un billar cuántico consiste en un número infinito de valores propios positivos. Las funciones propias asociadas $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, pueden ser normalizadas y constituyen un conjunto ortonormal completo para las funciones de cuadrado integrable, donde cada función es infinitamente diferenciable en los puntos interiores. El conjunto de puntos donde cada autofunción ψ_i se anula es llamado el conjunto nodal,

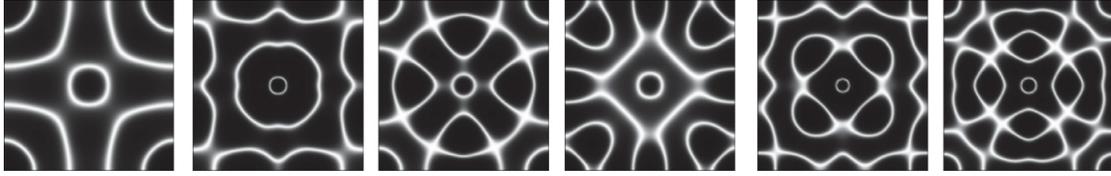


Figura 3.5: Patrones de líneas nodales numéricamente reconstruidos de resolver la ecuación de onda para una placa. Figura de [45, p. 2119].

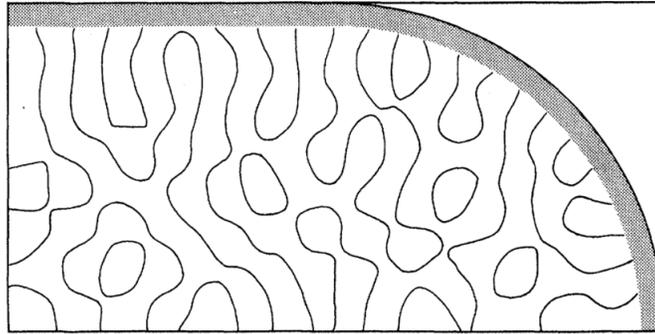


Figura 3.6: Curvas nodales $|\psi(x, y) = 0|$ para un cuadrante del billar de Bunimovich para una función propia de valor k dado. La orientación de las curvas se aprecia aleatoria. Figura de [46].

el cual consiste de curvas infinitamente diferenciables en el interior de \mathcal{V} . Cuando m curvas nodales se cruzan en un punto, lo hacen formando ángulos iguales π/m [42, pp. 5-6].

Visualmente, estas curvas tienen las mismas características que las famosas líneas nodales de Chladni, que son patrones que se forman por partículas de arena que se quedan fijas en los nodos de los modos resonantes de una placa vibrando [45, p. 2113], tal y como se observan en la figura 3.5. Este experimento es precursor en el estudio de varios campos como la acústica y la sismología, pero también resulta relevante en los billares cuánticos.

Para el problema de un billar de Bunimovich cuántico, McDonald y Kaufman [46] abordaron la solución de la ecuación de Helmholtz de forma numérica, como se ve en la figura 3.6. Inspirado por este trabajo, Heller [12] bautiza estas huellas generadas por las curvas nodales como cicatrices cuánticas.

Así, de acuerdo a Heller [18, p. 636] se establece la siguiente definición: Un estado propio cuántico de un sistema que es clásicamente caótico tiene una cicatriz de una

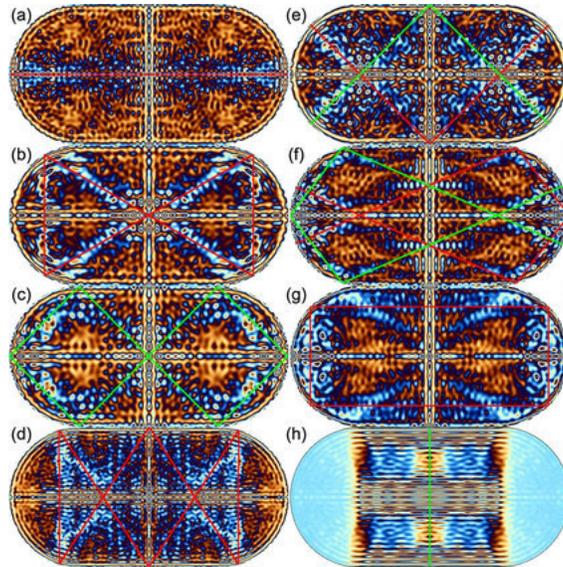


Figura 3.7: Cicatrices de la función de onda del estadio de Bunimovich, asociadas a las órbitas periódicas clásicas presentes en el equivalente clásico, de acuerdo a King [10].

órbita periódica inestable si su densidad en las variedades clásicas, cerca de la órbita periódica, difiere de forma significativa de la densidad estadísticamente esperada.

Desde hace tiempo hasta la actualidad se han realizado estudios sobre la cicatrización de autoestados en billares, incluso en problemas que involucran al cómputo cuántico [10]. Se ha encontrado una clara correspondencia entre los billares cuánticos y clásicos, en el sentido de que estas cicatrices sugieren que las órbitas periódicas presentes en los billares clásicos no son independientes del todo en la descripción de su análogo cuántico, como se observa por ejemplo en la figura 3.7. Evidentemente, el fenómeno de auto estados cicatrizados no es exclusivo de billares. Por ejemplo, recientemente se halló que todos los estados propios del modelo de Dicke caótico están cicatrizados [47], dicho modelo representa la interacción entre átomos y fotones, en contraste con la estructura simplificada de un billar.

3.5. Conclusiones y trabajo a futuro

Si bien, los billares llevan décadas de ser estudiados ampliamente, no dejan de ser bastante ilustrativos para la comprensión del concepto de caos, en el sentido del cre-

cimiento exponencial de la separación entre trayectorias inicialmente muy cercanas. En este escrito se trabajó con un formalismo para la descripción de billares clásicos en dos dimensiones, con la intención de que al lector le sea sencillo replicar las construcciones analíticas y seguir la construcción numérica. Estos sistemas acotados son una gran manera de mostrar que los exponentes de Lyapunov son herramientas fundamentales para la cuantificación del caos. Así mismo, se presentaron las coordenadas de Poincaré–Birkhoff y las secciones de Poincaré como alternativas cualitativas para visualizar aspectos fundamentales de la dinámica de los billares en un espacio fase de más de 3 dimensiones. Todo lo desarrollado en este rubro puede ser trabajado para ser extendido a otros sistemas clásicos, pues los billares clásicos son conocidos por su nobleza, en el sentido de ser modelos donde es sencillo desarrollar el estudio de la dinámica caótica.

Además de este desarrollo, se ha presentado una revisión cualitativa acerca de los billares cuánticos. Se discutió la construcción bajo las leyes de la mecánica cuántica y se mostró la validez del principio de correspondencia en términos de órbitas, el cual nos da la libertad de desarrollar una teoría semiclásica de los billares que esté en perfecta concordancia con el álgebra y los resultados de la mecánica cuántica. En ese sentido, uno de los aspectos más interesantes de estos sistemas son las cicatrices cuánticas, pues tener un fenómeno que sugiere una relación entre la dinámica clásica y cuántica vía órbitas periódicas es una puerta abierta para el estudio de propiedades físicas aún inexploradas.

Queda claro que este trabajo sirve también como motivación para explorar temas más profundos de la física. Así, queda como trabajo a futuro la descripción de billares cuánticos en términos de la resolución directa de la ecuación de Helmholtz, o bien, mediante la propagación de paquetes Gaussianos en el límite de una dinámica semiclásica. Además, el estudio de la cicatrización de autoestados de billares es una gran oportunidad de contrastar este comportamiento con otros sistemas cuánticos más complejos. Dado que el concepto de caos cuántico es de amplio interés para la comunidad científica activa, las ideas que se acaban de presentar pueden ser una gran oportunidad de lidiar con este problema tanto analítico y numérico como conceptual.

Apéndice A

La medida y ergodicidad

En términos generales, un atractor es un conjunto invariante hacia el cual todas las órbitas cercanas convergen [48, p. 201]. En términos de la dinámica, se dice que cuando un conjunto de varias condiciones iniciales son atraídas hacia un tipo particular de movimiento entonces se tiene un atractor [22, p. 186]. Este concepto es importante cuando se habla de estabilidad y regularidad en las trayectorias.

Para los sistemas físicos que nos interesan en este trabajo se va a tratar con medidas de probabilidad μ para regiones acotadas R , las cuales asignan números no negativos a cualquier subconjunto de R e identifican el número 1 a R , es decir, $\mu(R) = 1$. Ahora supongamos el caso de un atractor caótico asociado a un mapeo en una dimensión y que además se tiene un pozo de atracción B . Se define como cuenca de atracción a la cerradura del conjunto de condiciones iniciales cuyas órbitas se aproximan al atractor cuando la evolución temporal tiende a infinito [49]. Es decir, el conjunto de las condiciones iniciales que generan trayectorias caóticas.

Ahora bien, dado un intervalo S , denotemos por $\mu(S, \Gamma_0)$ a la fracción de tiempo durante el cual una órbita originada por alguna condición inicial Γ_0 en B se mantiene en el intervalo S en el límite en que la longitud de dicha órbita tiende a infinito. Si $\mu(S, \Gamma_0)$ toma el mismo valor para cada Γ_0 en la cuenca de atracción, salvo por un conjunto de Lebesgue de condiciones iniciales de medida cero, entonces decimos que $\mu(S, \Gamma_0)$ es la medida natural de S [19, pp. 54, 55]. Este concepto es de utilidad en sistemas físicos como los billares, que característicamente tienen asociada una medida

natural. Al hablar de medida surge naturalmente un concepto usualmente estudiado en sistemas físicos como los billares, la ergodicidad.

Se dice que un sistema es **ergódico** si casi toda trayectoria cruza de forma arbitrariamente cercana a todo punto energéticamente permitido del espacio fase, es decir, que lo llena. A pesar de esto, la ergodicidad no garantiza decaimiento de correlaciones en el límite de tiempos largos, lo cuál es una condición necesaria para los sistemas mezclados [14, p. 28]. El mezclado estadístico se interpreta usualmente como una independencia asintótica del futuro distante respecto al presente [15, p. 302] que es la misma noción de caos determinista que se dio con anterioridad.

Apéndice B

Matriz de estabilidad

Consideramos que Φ es una matriz jacobiana [20, p. 7]. Así, para un espacio fase de dos dimensiones x y p se tiene que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_x = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_{p'} + \left(\frac{\partial p}{\partial p'}\right)_{x'} \left(\frac{\partial p'}{\partial x'}\right)_x$$

y además

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p'}{\partial x'}\right)_x &= -\frac{m_{22}}{m_{21}} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_x &= m_{12} - \frac{m_{11}m_{22}}{m_{21}}\end{aligned}$$

donde m_{ij} son las componentes de la matriz de estabilidad bidimensional. Con esto, se puede deducir que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p'}\right)_{x'} = m_{11} \tag{B.1a}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_{p'} = m_{12} \tag{B.1b}$$

Así las cosas, se propone la expresión para dicha matriz, de la forma

$$\Phi(p, x) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial p'}\right)_{x'} & \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_{p'} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial p'}\right)_{x'} & \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_{p'} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

donde se puede ver que

$$\delta p = m_{11}\delta p' + m_{12}\delta x' \quad (\text{B.3a})$$

$$\delta q = m_{21}\delta p' + m_{22}\delta x' \quad (\text{B.3b})$$

Esta expresión general nos ayudará a calcular los flujos del billar, tanto para el caso de evolución continua como para el caso de las discontinuidades.

Apéndice C

Evolución continua y por colisiones

C.1. Evolución libre

Resulta útil escribir las órbitas de una evolución bidimensional en el espacio fase como

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x(t) \\ q_y(t) \\ p_x(t) \\ p_y(t) \end{pmatrix}$$

con \mathbf{q} y \mathbf{p} son los vectores de posición y momento respectivamente. Debido a que el potencial presente es el de una partícula libre las ecuaciones de movimiento quedan dadas por

$$\dot{\Gamma} = \mathbf{F}(\Gamma(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}/m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

pues el primer elemento se identifica directamente con la velocidad de la partícula, mientras que el segundo nos dice que no hay cambios en el momento lineal pues es una partícula libre. Para obtener explícitamente una forma de calcular la propagación calculamos la derivada de (C.1) de forma que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(\Gamma) &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Gamma} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{m \partial q_x} & \frac{\partial p_x}{m \partial q_y} & \frac{\partial p_x}{m \partial p_x} & \frac{\partial p_x}{m \partial p_y} \\ \frac{\partial p_y}{m \partial q_x} & \frac{\partial p_y}{m \partial q_y} & \frac{\partial p_y}{m \partial p_x} & \frac{\partial p_y}{m \partial p_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

Como consideramos partículas de masa unitaria reducimos la expresión a

$$\mathbf{D}(\Gamma) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

Recordando que se estableció que la propagación de una partícula libre está determinada por la ecuación (1.20), la desarrollamos como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}^{\tau_{i+1}-\tau_i} &= e^{\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbf{D}[\Gamma(t')] dt'} \\
 &= e^{\mathbf{D}(\tau_{i+1}-\tau_i)} = \mathbb{I}_{2 \times 2} + (\tau_{i+1} - \tau_i) \mathbf{D} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \Delta t \cdot \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

con $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$. Así, le aplicamos este propagador al vector tangente, de forma que obtenemos una expresión para evolucionar de forma libre en el espacio al vector que cuantifica la desviación entre la partícula de referencia y la partícula satélite, lo anterior está dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}^{\Delta\tau}(\delta\mathbf{\Gamma}) &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2\times 2} & \Delta\tau \cdot \mathbb{I}_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \mathbb{I}_{2\times 2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta\mathbf{p} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} + \Delta\tau \cdot \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{p} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

C.2. Evolución discontinua

La perturbación generada en una discontinuidad vendría dada por

$$\delta\mathbf{\Gamma}' = \left. \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \mathbf{\Gamma}} \right|_{\mathbf{\Gamma}} \cdot \delta\mathbf{\Gamma} + \left[\left. \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \mathbf{\Gamma}} \right|_{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{F}(\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma})) \right] \delta t_c \tag{C.6}$$

donde $\delta t_c(\mathbf{\Gamma}, \delta\mathbf{\Gamma}) = t_j(\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma}) - t_j(\mathbf{\Gamma})$ es el tiempo de retardo [32, p. 1487], que es el tiempo entre la colisión de la partícula de referencia y la satélite. Debido a que la partícula de referencia y la partícula satélite no colisionan al mismo tiempo, es importante considerar el retardo que hay entre una colisión y la subsecuente. Entonces, la ecuación (C.6) se obtiene de una aproximación lineal en el tiempo para el espacio fase. Este es el punto de partida para calcular la matriz jacobiana asociada a cada tipo de colisión en un billar: planas y curvas.

C.2.1. Colisión con una superficie plana

Ahora bien, para la reflexión después de la colisión tenemos que el mapeo \mathbf{M} no modifica la posición de la partícula, pero sí lo hace con su dirección mediante la Ley

de Reflexión. Esto se expresa como

$$\begin{aligned}
 \Gamma' &= M(\Gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario perpendicular a la superficie en el punto de la colisión, \mathbf{q}' y \mathbf{p}' denotando la posición y el momento lineal un instante después de ocurrir la colisión y donde se toma en cuenta que $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$, pues la colisión no genera un desplazamiento instantáneo en la partícula. Queremos ver la evolución de la perturbación dada en la ecuación (C.6), para esto calculamos la derivada del mapeo que no es más que la matriz Jacobiana, que vendría dada en general por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial \Gamma} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

donde tomamos en cuenta que el punto de colisión \mathbf{q}' es totalmente independiente de la dirección de incidencia. Así, la matriz Jacobiana depende únicamente de cómo varía \mathbf{p}' debido a una reflexión especular.

Ahora bien, para el caso de una colisión con una superficie plana, tenemos que el vector normal a la superficie es independiente del punto de colisión, y en general es independiente de la dirección de incidencia, por lo cual se obtiene que

$$\frac{\partial M}{\partial \Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & [\mathbb{I}_{2 \times 2} - 2\mathbf{n} \mathbf{n}] \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

El tiempo de retardo se calcula con cinemática elemental, pues simplemente se divide la separación perpendicular entre la trayectoria de referencia y la satélite en el instante de la colisión, entre la proyección normal de la velocidad [27, p. 29]

$$\delta t_c = -\frac{(\delta \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{p}_i/m \cdot \mathbf{n})} \quad (\text{C.10})$$

Con esto, sustituimos (C.1), (C.7), (C.9) y (C.10) en (C.6), de forma que se obtiene

$$\delta \Gamma' = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q} - 2(\delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \delta \mathbf{p} - 2(\delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

que es la propagación de una perturbación al reflejarse en una superficie plana.

C.2.2. Colisión con una superficie curva

Para desarrollar este caso notemos que las mismas ecuaciones satisfacen el sistema, pues seguimos hablando de una partícula libre. La única ecuación que cambia es (C.9), debido a que el vector normal \mathbf{n} es ahora una función del punto de colisión. De esta forma tendríamos que

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{q}} = \\ &= 0 - 2 \left\{ \mathbf{n} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{p} \right] + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{q}} \right\} \\ &= -2 [\mathbf{n} \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbb{I}_{2 \times 2}] \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{p}} = \mathbb{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n} \quad (\text{C.14})$$

aquí el operador \mathbf{B} corresponde a la reflexión especular en el punto de colisión, tal y como ocurría en el caso de la superficie plana. $\partial\mathbf{n}/\partial\mathbf{q}$ es la matriz de las derivadas del vector normal \mathbf{n} con respecto a la posición del punto de colisión. Al sustituir en la ecuación (C.6) se tiene que

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q}_c - 2(\delta\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \mathbf{A}\delta\mathbf{q}_c + \mathbf{B}\delta\mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

donde $\delta\mathbf{q}_c = \delta\mathbf{q} + (\mathbf{p}/m)\delta\tau_c$ es el vector de la diferencia entre el punto de colisión de la partícula de referencia y la partícula satélite, considerando la curvatura de la superficie que vive en el espacio de configuraciones. De forma exacta tendríamos

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} - 2(\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \delta\mathbf{p} - 2(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - 2[(\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\delta\mathbf{n}] \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

donde $\delta\mathbf{n} = \partial\mathbf{n}/\partial\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{q}_c$ es la variación de \mathbf{n} debida al desplazamiento $\delta\mathbf{q}_c$. Nótese que para una superficie plana $\delta\mathbf{n} = 0$ se recupera la ecuación (C.11).

Apéndice D

Distancias al punto de colisión

D.1. Distancia a una pared

El problema consiste en considerar que la recta formada por la evolución libre de una partícula y el segmento de recta de una pared se intersecan. Nos interesa conocer la separación entre la posición de la partícula y el punto de dicha intersección. Esto se representa de forma esquemática en la figura D.1. Aquí tenemos una partícula con posición \mathbf{q} y velocidad \mathbf{v} , además, la pared (segmento de recta) tiene un punto de inicio \mathbf{p}_0 y hay un vector normal a este obstáculo que se denota por $\hat{\mathbf{n}}$.

Denotemos a la magnitud del segmento de recta $\overline{\mathbf{qB}}$ como r y a $\overline{\mathbf{qA}}$ como d . Con esto se busca calcular d . Sea el vector de la diferencia $\Delta = \mathbf{p}_0 - \mathbf{q}$, tenemos entonces que

$$r = |\Delta| \sin(\alpha)$$

A su vez, se tiene que

$$d = \frac{r}{\sin(\beta)} = \frac{|\Delta| \sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad (\text{D.1})$$

Ahora bien, notando que

$$\beta = \pi/2 - \theta$$

$$\alpha = \pi/2 - \omega$$

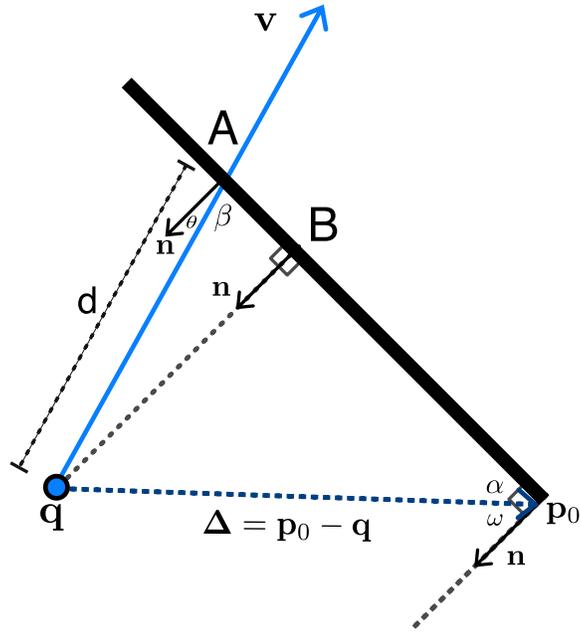


Figura D.1: Esquema: Una partícula en la posición \mathbf{q} y con velocidad \mathbf{v} colisiona con una frontera plana.

se puede reescribir d como

$$d = \frac{|\Delta| \cos(\omega)}{\sin(\theta)}$$

Expresado en términos del producto interno obtenemos

$$d = \frac{[\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}] \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (\text{D.2})$$

que es la ecuación para la distancia recorrida por una partícula hasta colisionar con una pared plana. Vale la pena notar estamos suponiendo una velocidad de magnitud unitaria y por ello la distancia es igual al tiempo recorrido.

D.2. Distancia a una circunferencia

Para establecer el problema es útil revisar la figura D.2. Así, definimos un círculo de radio r centrado en el punto $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$ dado por la ecuación

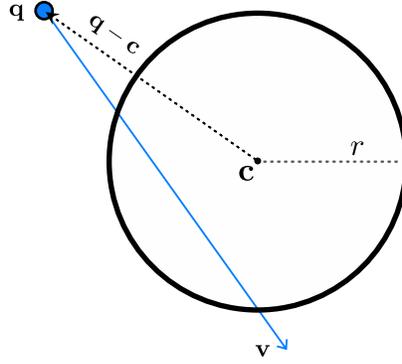


Figura D.2: Esquema: Una partícula en la posición q con velocidad v colisiona con una circunferencia.

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$$

Además, dada una partícula en una posición $q = (x_0, y_0)$ y el vector de velocidad de ésta $v = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, podemos escribir las ecuaciones de movimiento como

$$x(t) = (x_1 - x_0)t + x_0 \quad (D.3)$$

$$y(t) = (y_1 - y_0)t + y_0 \quad (D.4)$$

el parámetro t resultará ser el tiempo de evolución, el cuál tiene el mismo valor que la distancia de recorrido hasta el punto de colisión.

Ahora bien, nos interesa la intersección de la circunferencia con la recta generada por el vector velocidad, por ello sustituimos (D.3) en la ecuación de la circunferencia de forma que obtenemos

$$[(x_1 - x_0)t + x_0 - c_x]^2 + [(y_1 - y_0)t + y_0 - c_y]^2 = r^2$$

Desarrollando y agrupando términos se obtiene una ecuación cuadrática para el tiempo

$$At^2 + Bt + C = 0$$

donde los coeficientes pueden escribirse en términos del vector velocidad, el vector posición de la partícula y el del centro de la circunferencia como

$$A = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1 \quad (\text{D.5})$$

$$B = 2(x_1 - x_0)(x_0 - c_x) + 2(y_1 - y_0)(y_0 - c_y) = 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{c}) \quad (\text{D.6})$$

$$C = (x_0 - c_x)^2 + (y_0 - c_y)^2 - r^2 = (\mathbf{q} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{c}) - r^2 \quad (\text{D.7})$$

De aquí notamos que $B < 0$ cuando el vector de velocidad apunta hacia el centro de la circunferencia y $C > 0$ cuando la partícula se encuentra fuera del disco.

Por tanto, el tiempo t en el que la partícula evoluciona de forma libre antes de colisionar con la circunferencia está dado por

$$t = \frac{1}{2} \left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4C} \right) \quad (\text{D.8})$$

Resulta necesario considerar el discriminante $\Delta = B^2 - 4C$ en la ecuación (D.8). Si $\Delta < 0$ entonces no hay soluciones reales, lo que significa que la trayectoria de la partícula no cruza con la circunferencia. Si $\Delta = 0$ entonces hay una solución real y tendríamos que la trayectoria es tangente a la circunferencia. Además, si $\Delta > 0$ hay dos soluciones para t y entonces la recta asociada al vector velocidad es secante a la circunferencia, lo cual garantiza que habrá una colisión.

Finalmente, si se tiene una partícula que colisiona con la parte externa del disco entonces se elige como el punto de intersección aquel que ocurre al menor tiempo (o el más cercano). En estas condiciones siempre se tiene que $B < 0$, entonces la solución de menor magnitud es aquella con la parte negativa de la raíz en el discriminante. Para el caso de colisiones dentro de la circunferencia, basta escoger el punto de intersección cuyo vector normal a la superficie apunte en sentido opuesto al vector velocidad. Para el análisis de la geometría elíptica se utiliza como base el método desarrollado en [35].

Apéndice E

Máximo exponente de Lyapunov promedio

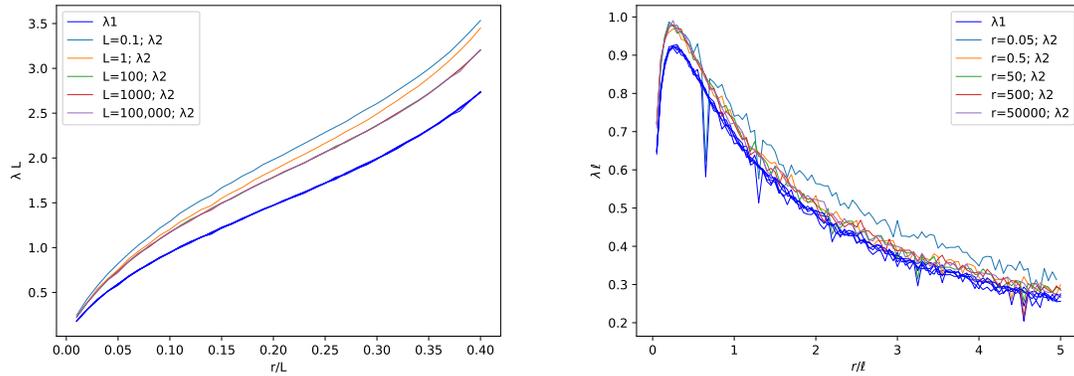
En la sección 1.4 se presentó una expresión para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov promedio. De aquí surgió la inquietud de si es posible calcular el máximo exponente de Lyapunov considerando el tiempo entre cada colisión en lugar del tiempo promedio de evolución. Para responder a esto, se calculó el MEL promedio para el billar de Sinai y el estadio de Bunimovich de ambas maneras. De forma similar a como se hizo en la sección 2.3, se usa la herramienta desarrollada en este trabajo para calcular el MEL para comparar ambas expresiones: la primera, a la que llamaremos λ_1 es aquella donde tomamos el promedio temporal igual para todas las órbitas, es decir, usando la ecuación (1.28), dada por

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{t_N} \sum_{i=1}^N \ln |\delta\mathbf{\Gamma}(\tau_i)|$$

mientras que λ_2 representa el cálculo considerando cada fracción de tiempo τ_i , es decir, utilizando la ecuación (1.27), expresada como

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\ln |\delta\mathbf{\Gamma}(\tau_i)|}{\Delta\tau_i}$$

La idea es aumentar y disminuir la velocidad de la partícula en el billar, para esto



(a) Billar de Sinai donde el parámetro que se varía es el radio del disco central r .

(b) Estadio de Bunimovich donde el parámetro que se varía es la longitud del segmento recto l .

Figura E.1: Máximo exponente de Lyapunov promedio calculado con dos expresiones diferentes.

se cambiaron las dimensiones de cada billar modificando el valor de sus parámetros en varios órdenes de magnitud. La figura E.1 es la gráfica del MEL promedio para los diferentes órdenes de magnitud de los parámetros en cada billar, cuyos ejes están escalados para ser contrastados en una misma figura. En todos los casos, el cálculo se realizó para una evolución de 1500 colisiones y cada exponente se promedió sobre 100 condiciones iniciales distintas.

En la figura E.1 se observa que el MEL que se promedió usando el tiempo total de evolución λ_1 mantiene su magnitud en un valor constante sin importar las dimensiones del billar, mientras que la expresión que depende del tiempo de evolución entre colisiones λ_2 se aleja cada vez más de este valor constante conforme las dimensiones del billar se reducen. Así, nos convencemos de que la forma adecuada de calcular el MEL promedio es usando el tiempo total promedio, lo cual tiene concordancia con la definición del exponente de Lyapunov dada para tiempos que tienden a infinito. Si bien, esta respuesta resulta ser trivial conceptualmente, es una interesante forma de ver que la metodología utilizada para calcular el MEL corresponde con lo que la teoría demanda.

Apéndice F

Construcción de la probabilidad semiclásica

Como ejemplo, se trabaja con la probabilidad de la posición para un sistema dada una determinada acción. Consideramos un estado cuyo valor inicial denotamos por un subíndice i y por f se denota un estado posterior, entonces la densidad clásica del espacio fase, expresando una acción j dada, es $\delta(j_f(p_f, q_f) - j)$; mientras que a una posición definida q le corresponde $\delta(q_f - q_i)$. La motivación es calcular la distribución de probabilidad de q dado que tenemos la acción j del sistema.

Se puede construir una forma de calcular probabilidad clásica $P_j(q)$, de forma que esté dada por

$$P_j(q) = \int \delta(q_f - q_i) \delta(j_f(p_f, x_f) - j) dp_f dq_f = \sum \left| \frac{\partial j}{\partial p} \right|_x^{-1} \quad (\text{F.1})$$

La última igualdad en F.1 es un determinante de Van Vleck. En este caso es un determinante de $n \times n$, con n el número de coordenadas. El determinante de Van Vleck se puede representar como [50, p. 39] [51, p. 3]

$$V(q, q', t) = (-1)^n \det \left[\frac{\partial^2 j(q, q', t)}{\partial q \partial q'} \right] = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 j}{\partial q_i \partial q'_i} & \frac{\partial^2 j}{\partial q_i \partial q'_j} \\ \frac{\partial^2 j}{\partial q_j \partial q'_i} & \frac{\partial^2 j}{\partial q_j \partial q'_j} \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

donde q_i representa una coordenada paralela al momento, mientras que las otras $(n - 1)$ coordenadas q_j son perpendiculares a él. Para un tiempo suficientemente corto ($q = q'$), cada componente puede representarse como

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 j}{\partial q_j \partial q'_i}$$

Así, puede escribirse una aproximación para la función de onda semiclásica dada por

$$\psi_{n_j}(x) = \langle x | \psi_{n_j} \rangle \approx \sum \left| \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right|_x^{1/2} e^{i[\text{fase de } x]} \quad (\text{F.3})$$

donde $j = (n + 1/2)\hbar$ para el movimiento ligado a una dimensión.

Se puede expresar la derivada $\partial p / \partial q$ en términos de la función generadora $F_2(x, j)$ de la transformación canónica

$$(j, \theta) \rightarrow (p, x)$$

la cual está dado por

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial^2 F_2(x, j)}{\partial x \partial j}$$

donde $p = \partial F_2 / \partial x$. De las ecuaciones de Hamilton en coordenadas de ángulo acción

$$\frac{\partial^2 F_2(q, j)}{\partial q \partial j} = \frac{\partial(\partial F_2 / \partial q)}{\partial j} = \frac{\partial p(j, q)}{\partial j} = \frac{\partial p(j, q)}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial j} = \frac{1}{\dot{q}} \dot{\theta} = \frac{m\nu}{p(j, q)} \quad (\text{F.4})$$

con $\dot{\theta} = \nu$. Lo anterior nos deja una función de onda normalizada dada por

$$\psi_{n_j}(x) \approx \sum \left| \frac{\nu m}{p(j, x)} \right|^{1/2} e^{i \int p(j, x') dx' / \hbar} \quad (\text{F.5})$$

Apéndice G

Código

```
#####
    #= Código utilizado para la tesis "Caos en Billares" por Adán González Andrade. =#
#####
    # LIBRERIAS
#####
using PyPlot
#=# Usamos PyPlot para la representación gráfica (dibujar trayectorias, delimitar
    obstáculos y representar los mapeos de colisiones). =#
import PyPlot: plot, arrow
#=# La importación explícita nos permite modificar y redefinir las funciones. =#
using StaticArrays
#=# Generamos "arreglos estáticos" que serán estructuras y tipos. Así tenemos control
    de las propiedades de cada objeto, sus características particulares y compartidas. =#
using LinearAlgebra: dot, normalize, norm, eigen, cross
#=# Usaremos la función producto punto, normalización, norma. =#
#####
    # DEFINICIONES
#####
const SV = SVector{2,Float64}
#=# Se define un arreglo estático (SV) tipo vector de dos entradas (por ser billar 2D). =#
#=#
Se usan estructuras (struct) para organizar la forma en que se compone cada frontera
y elemento del billar.
#=#
abstract type ParticulaPuntual end
#=# Se define un tipo (type) para las partículas, del cual pueden desprenderse estructuras
(subtipos) dependiendo el potencial en el que evolucionen. =#
mutable struct Particula <: ParticulaPuntual
```

```

#= La estructura Particula es del tipo ParticulaPuntual=#
    pos::SV
    vel::SV
#= La posicion y velocidad de la particula se define como un vector 2D =#
end
Particula(x0, y0,  $\phi$ 0) = Particula(SV(x0, y0), SV(cos( $\phi$ 0), sin( $\phi$ 0)))
#= La funcion Particula tiene por entrada la posición inicial y el ángulo inicial.
Esta información se recupera con un par de vectores estáticos, uno para la posición (x,y)
y otro para las proyecciones del ángulo  $\phi$ . =#
abstract type Obstaculo end
#= Así como definimos un tipo para las particulas, lo hacemos con los obstaculos.
Aquí trataremos el caso de paredes planas, curvas y discos. =#
#####
struct Pared <: Obstaculo
#= Las paredes son del tipo Obstaculo. Es una recta con un punto inicial y uno final
y un vector normal que indica la cara que se considera que sufre las colisiones. =#
    p0::SV #Punto de inicio.
    pf::SV #Punto final.
    normal::SV #Vector normal a la superficie de la pared.
end
struct Disco <: Obstaculo
#= Se considera que las colisiones ocurren por fuera de la frontera. =#
    c::SV #Centro del disco.
    r::Float64 #Radio del disco.
end
struct Elipse <: Obstaculo
#= Se considera que las colisiones ocurren dentro de la frontera. =#
    c::SV #Centro.
    a::Float64 #Eje mayor.
    b::Float64 #Eje menor.
end
struct SemiElipse <: Obstaculo
    c::SV #Centro.
    a::Float64 #Eje mayor.
    b::Float64 #Eje menor.
    o::SV #Orientación de la media elipse. Puede ser [1,0] o [-1,0].
end
#= Así, podemos ver a un billar como una tupla de obstáculos y sus subtipos. =#
const Billar = NTuple{N, Obstaculo} where N
#####
#   DINÁMICA DE LA PARTÍCULA LIBRE EN UN BILLAR
#####
#= La idea es generar funciones de único nombre pero que a partir del tipo de obstáculo
hagan el cálculo correspondiente, para el estado actual de la partícula. =#
#####

```

```

# COLISIONES
@inline nocolision() = (Inf, SV(0.0, 0.0))
#= Se llama esta función cuando no habrá colisión con el obstáculo dado. Se etiqueta por
un tiempo infinito y una posición en el origen de coordenadas. =#
##### Pared Plana #####
#= Para saber si una partícula puede colisionar con una pared verificamos que la dirección
de ésta sea opuesta a la del vector normal a la superficie (en caso contrario descartamos
dicha pared), con esto calculamos el tiempo que la partícula evolucionará antes de
colisionar y usando cinemática calculamos la posición final donde ocurre la colisión. =#
#####
@inline function colision(p::Particula, w::Pared)
#= Esta función evalúa si dado el estado actual de la partícula y dada cierta pared, habrá
o no una colisión. En caso de haberla, devuelve el tiempo de evolución y el punto de
colisión. =#
    n = vecnormal(w, p.pos)
#= Llamamos al valor del vector normal de la pared que se analiza. =#
    direccion = dot(p.vel, n)
#= Un valor positivo significa que la partícula no se dirige hacia este obstáculo, si
da igual a cero quiere decir que la partícula se mueve de forma paralela a la pared. =#
    if direccion ≥ 0.0
        return nocolision() # No habrá colisión con esta pared.
    else
        t = dot(w.p0 - p.pos, n)/direccion
        #= Tiempo de evolución hasta el punto de colisión. Ecuación D.2.=#
        return t, p.pos + t * p.vel
        #= Devuelve el tiempo de trayecto y la posición final de la partícula. =#
    end
end
vecnormal(w::Pared, pos) = w.normal
#= Para las paredes el vector normal ya está dado al definir. Sólo lo invocamos. =#
##### Disco #####
#= Para verificar si una partícula colisiona o no con el disco se analiza el ángulo
entre el vector de velocidad y el vector posición del centro de la circunferencia. Además
queremos el tiempo (o la distancia para evolución unitaria) que le toma a la partícula
colisionar con el disco. =#
#####
@inline function colision(p::Particula, d::Disco)
    sentido = dot(p.vel, vecnormal(d, p.pos))
    sentido ≥ 0.0 && return nocolision()
#= En este caso la partícula no se dirige hacia el disco. =#
    qc = p.pos - d.c
    B = 2*dot(p.vel, qc)
    C = dot(qc, qc) - d.r*d.r
    Δ = B*B - 4*C
    Δ ≤ 0.0 && return nocolision() #Caso donde no hay dos intersecciones (no secante).

```

```

    t = (-B - sqrt( $\Delta$ ))/2
    #= Ecuación D.8. Tiempo más corto. =#
    return t, p.pos + t * p.vel
    #= Devuelve el tiempo de trayecto y la posición final de la partícula. =#
end
vecnormal(d::Disco, pos) = normalize(pos - d.c)
#= Vector normal a la posición actual de la partícula respecto al centro del disco. =#
##### Elipse #####
#= Para verificar si una partícula colisiona o no con la elipse se analiza el ángulo
entre el vector de velocidad y el vector posición del centro de la curva. Además
queremos el tiempo (o la distancia para evolución unitaria) que le toma a la partícula
colisionar con el disco. Para los cálculos de la elipse se usa de base el algoritmo
desarrollado en [35] que se muestra a continuación. =#
#####
function vecnormal(e::Elipse, pos) #Vector normal a la superficie.
    x0, y0 = pos
    h, k = e.c
    return normalize(SV(-(x0-h)/(e.a*e.a), -(y0-k)/(e.b*e.b)))
end
function colision(p::Particula, e::Elipse)
#= Se busca la distancia más corta al punto de colisión de una partícula con una elipse. =#
    a = e.a; b = e.b
    pc = p.pos - e.c
     $\mu$  = p.vel[2]/p.vel[1]
     $\psi$  = pc[2] -  $\mu$ *pc[1]
    denom = a*a* $\mu$ * $\mu$  + b*b
     $\Delta^2$  = denom -  $\psi$ * $\psi$ 
     $\Delta$  = sqrt( $\Delta^2$ ); f1 = -a*a* $\mu$ * $\psi$ ; f2 = b*b* $\psi$ 
    I1 = SV(f1 + a*b* $\Delta$ , f2 + a*b* $\mu$ * $\Delta$ )/denom
    I2 = SV(f1 - a*b* $\Delta$ , f2 - a*b* $\mu$ * $\Delta$ )/denom
    d1 = norm(pc - I1); d2 = norm(pc - I2)
    return d1 > d2 ? (d1, I1 + e.c) : (d2, I2 + e.c)
end
##### Semi-elipse #####
#= Para verificar si una partícula colisiona o no con la mitad de una elipse se hace
un tratamiento análogo al caso del billar elíptico completo. Con la adición de que
aquí se trata por casos la región de colisión. Se considera una evolución dentro de
la elipse. =#
#####
function vecnormal(s::SemiElipse, pos)
    x0, y0 = pos
    h, k = s.c
    return normalize(SV(-(x0-h)/(s.a*s.a), -(y0-k)/(s.b*s.b)))
end
function colision(p::Particula, s::SemiElipse)

```

```

a = s.a; b = s.b
pc = p.pos - s.c
μ = p.vel[2]/p.vel[1]
ψ = pc[2] - μ*pc[1]
denom = a*a*μ*μ + b*b
Δ2 = denom - ψ*ψ
Δ = sqrt(complex(Δ2)); f1 = -a*a*μ*ψ; f2 = b*b*ψ
imag(Δ) != 0 && return nocolision()
Δ = real(Δ)
I1 = SV(f1 + a*b*Δ, f2 + a*b*μ*Δ)/denom
I2 = SV(f1 - a*b*Δ, f2 - a*b*μ*Δ)/denom
d1 = norm(pc - I1); d2 = norm(pc - I2)
# Primero se analiza la orientación de la elipse.
if s.o[1] < 0 # i.e. elipse abierta por el lado izquierdo.
# Tomamos la distancia más lejana (donde se supone que sería la colisión).
    if d1 > d2 && (I1[1] > 0) # Punto de colisión a la derecha del centro.
        return (d1, I1 + s.c)
    elseif d1 > d2 && (I1[1] < 0)
        return nocolision()
    elseif d2 > d1 && (I2[1] > 0) # Punto de colisión a la derecha del centro.
        return (d2, I2 + s.c)
    elseif d2 > d1 && (I2[1] < 0)
        return nocolision()
    end
#####
elseif s.o[1] > 0 # i.e. elipse abierta por el lado derecho.
# Tomamos la distancia más lejana (donde se supone que sería la colisión).
    if d1 > d2 && (I1[1] < 0)
        # Punto de colisión a la izquierda del centro.
        return (d1, I1 + s.c)
    elseif d1 > d2 && (I1[1] > 0)
        return nocolision()
    elseif d2 > d1 && (I2[1] < 0)
        # El punto de colisión a la derecha del centro.
        return (d2, I2 + s.c)
    elseif d2 > d1 && (I2[1] > 0)
        return nocolision()
    end
end
end
#####
# EVOLUCIÓN
#####
#= Ahora se hace una función que evalúe todas las posibles colisiones en cada obstáculo.
Sin embargo, solo se considerará a aquella que tome el menor tiempo en ocurrir.

```

```

Por ejemplo, en el billar de Sinai una misma trayectoria podría colisionar con
un disco y con una pared, pero la verdadera colisión es la que ocurre primero. =#
#####
function colision_verdadera(p::ParticulaPuntual, br)
    j, tevol, pc = 0, Inf, SV(0.0, 0.0)
    #= j es un contador, tevol es el tiempo de evolución y pc es el punto de colisión. =#
    for i in eachindex(br)
        t, c = colision(p, br[i])
    #= Se evalúa la colisión en cada obstáculo del billar. =#
        if t < tevol
    #= Se descartan las evaluaciones que tengan tiempos infinitos (función nocolision).
    Cada que haya una colisión que ocurra a un tiempo más pequeño que el anterior, será
    el candidato a ser la colisión verdadera. =#
            j = i
            tevol = t
            pc = c
        end
    end
    return j, tevol, pc
    #= Se devuelve el número que etiqueta al obstáculo donde ocurre la colisión,
    el tiempo de evolución antes de la colisión y el punto donde ocurre ésta. =#
end
#####
    #= Teniendo la información de la nueva colisión simplemente trasladamos nuestra partícula
    al punto de colisión. =#
#####
    propagar!(p::Particula, pos, t) = (p.pos = pos)
#####
    #= Una vez que se traslada la partícula al punto de colisión, calculamos el vector normal
    a dicho punto del obstáculo y actualizamos el vector de velocidad haciendo una reflexión
    especular. =#
#####
function r_especular!(p::ParticulaPuntual, o::Obstaculo)
    n = vecnormal(o, p.pos)
    p.vel = p.vel - 2*dot(n, p.vel)*n # Ley de Reflexión.
    global i_normal = n
    #= Se genera una variable global que almacena el vector normal en esta colisión. =#
end
#####
    #= Función "maestra" que invoca las anteriores funciones para evolucionar la partícula. =#
#####
inline function evolucionar!(p::ParticulaPuntual, br)
    i::Int, tmin::Float64, pc::SV = colision_verdadera(p, br) # Escogemos la colisión.
    if tmin != Inf # Nos aseguramos de que exista al menos una colisión.
        propagar!(p, pc, tmin) # La partícula se traslada.
    end

```

```

        r_especular!(p, br[i]) # La partícula se refleja especularmente.
    end
    return i, tmin, p.pos, p.vel
#= La colisión ocurre con el obstáculo i, toma un tiempo tmin en ocurrir, se localiza en
p.pos y la reflexión modifica la dirección como p.vel. =#
end
#####
#= Función que evoluciona a una partícula con condiciones iniciales dada a lo largo de N
colisiones dentro de un billar determinado. =#
#####
function evolucion!(p::ParticulaPuntual, br, N::Int)
    t = [0.0]; iobstaculo = zeros(0); xt = [p.pos[1]]; yt = [p.pos[2]]; c = 0;
    vxt = [p.vel[1]]; vyt = [p.vel[2]]; nx = zeros(0); ny = zeros(0);
#= Se almacenan las condiciones iniciales para luego evolucionar. =#
    while c < N
        posprev = p.pos; velprev = p.vel
        i, tevol = evolucionar!(p, br)
        xs, ys = p.pos
        vxs, vys = p.vel
        nxs, nys = i_normal
        push!(t, tevol); push!(iobstaculo, i);
        append!(xt, xs); append!(yt, ys);
        append!(vxt, vxs); append!(vyt, vys);
        append!(nx, nxs); append!(ny, nys);
        c += 1
    end
    return xt, yt, vxt, vyt, t, nx, ny, iobstaculo
#= Devolvemos la posición, la velocidad, el tiempo de evolución y el vector normal
en el punto de colisión para cada trayectoria. =#
end
#####
#= Se definen las funciones que generan los billares utilizados en este trabajo. =#
#####
#= Billar de elipse (o circunferencia para a=b) en función del radio de semicírculo r y
mitad de longitud de segmento de recta ℓ. =#
function BElipse(c,a,b)
    SemiIzquierda = SemiElipse(c, a, b, [1,0])
    SemiDerecha = SemiElipse(c, a, b, [-1,0])
    return (SemiIzquierda, SemiDerecha)
end
#= Billar de Sinaí para un disco centrado y una caja cuadrada. =#
function BSinaí(l,r)
    x, y, r = l, l, r
    p0 = [0.0,y]; pf = [0.0, 0.0]; n = [1,0.0]
    pared_izq = Pared(p0, pf, n) #Pared izquierda.

```

```

p0 = [x,0.0]; pf = [x, y]; n = [-1,0.0]
pared_der = Pared(p0, pf, n) #Pared derecha.
p0 = [x,y]; pf = [0.0, y]; n = [0.0,-1]
pared_sup = Pared(p0, pf, n) #Pared superior.
p0 = [0.0,0.0]; pf = [x, 0.0]; n = [0.0,1]
pared_inf = Pared(p0, pf, n) #Pared inferior.
disco = Disco([x/2, y/2], r) #Disco centrado.
return (pared_inf, pared_der, pared_sup, pared_izq, disco)
end
###
#= Billar de Bunimovich en función del radio de semicírculo r y mitad de longitud de
segmento de recta  $\ell$ . =#
function BBunimovich( $\ell$ , r)
pared $\alpha$  = Pared([r,2*r], [r + 2* $\ell$ ,2*r], [0.0,-1])
pared $\beta$  = Pared([r,0.0], [r + 2* $\ell$ ,0.0], [0.0,1])
circuloA = SemiElipse([r, r], r, r, [1,0])
circuloB = SemiElipse([r + 2* $\ell$ , r], r, r, [-1,0])
return (pared $\beta$ , circuloB, pared $\alpha$ , circuloA)
end
#####
#= FUNCIONES GENERADORAS DE FRONTERAS =#
#####
#=
Para graficar las fronteras de los billares.
=#
const COLORBORDE = (0,0,0) #Fronteras en color negro.
const BORDE = 2.0 # Grosor del borde.
function plot(d::Disco)
facecolor = (COLORBORDE..., 0.5)
circle1 = PyPlot.plt.Circle(d.c, d.r,
edgecolor = COLORBORDE, facecolor = facecolor, lw = BORDE)
PyPlot.gca().add_artist(circle1)
end
function plot(w::Pared)
PyPlot.plot([w.p0[1],w.pf[1]],[w.p0[2],w.pf[2]]);
color=COLORBORDE, lw = BORDE)
end
function plot(e::Ellipse)
facecolor = (COLORBORDE..., 0.5)
ellipse1 = PyPlot.matplotlib.patches.Ellipse(e.c, 2e.a,2e.b,
edgecolor = COLORBORDE, fill = false, lw = BORDE)
# False para círculo sin relleno.
PyPlot.gca().add_artist(ellipse1)
end
function plot(s::SemiElipse)

```

```

if s.o[1] < 0 # i.e. abierta por el lado izquierdo.
    facecolor = (COLORBORDE..., 0.5)
    semiarcd = matplotlib.patches.Arc(s.c, s.a*2,s.b*2,angle=0.0,
    theta1=-90, theta2=90,
    edgecolor = COLORBORDE, fill = false, lw = BORDE)
    # False para arco sin relleno.
    PyPlot.gca().add_artist(semiarcd)
elseif s.o[1] > 0 #i.e. abierta por el lado derecho.
    facecolor = (COLORBORDE..., 0.5)
    semiarci = matplotlib.patches.Arc(s.c, s.a*2,s.b*2,angle=0,
    theta1=90, theta2=270,
    edgecolor = COLORBORDE, fill = false, lw = BORDE)
    # False para arco sin relleno
    PyPlot.gca().add_artist(semiarci)
end
end
function plot(Br::Billar)
    # Se grafica una tupla de fronteras.
    for front ∈ Br; plot(front); end
   (gca().set_aspect("equal") # Para evitar que se presenten deformaciones.
end
function plot(p::ParticulaPuntual)
    # Se dibuja una flecha que representa a la partícula en el plano.
    v0 = (p.pos[1],p.pos[2],0.02*p.vel[1],0.02*p.vel[2])
    arrow(v0[1],v0[2],v0[3],v0[4],width = 0.008,color = COLORBORDE, zorder = 3)
    # *Aumentar el parámetro zorder en caso de que la flecha aparezca capas detrás.
end
#####
    #= MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV =#
#####
    # Construimos la función que propaga al vector tangente.
function propagador( $\delta q_i$  ,  $\delta p_i$ ,  $\Delta t_i$ )
     $\delta q_i$  = transpose( $\delta q_i$ )
     $\delta p_i$  = transpose( $\delta p_i$ )
    Li = vcat( $\delta q_i$  + ( $\Delta t_i$  *  $\delta p_i$ ) ,  $\delta p_i$ ) # Propagador ecuación C.5.
    return Li
end
#####
    #= Se crea una función que calcule  $\gamma_r$  (curvatura) para cada obstáculo y lo almacene
    en la misma etiqueta que el número de obstáculo del billar. =#
#####
function  $\gamma_r$ (historia,br)
    ipared = historia[8]
    #= Se analizan todas las paredes con las que hubo colisión durante la evolución. =#
    curvatura = zeros(0)

```

```

for j in eachindex(ipared)
  if br[ipared[j]] isa Pared
    # ¿Este elemento corresponde a una Pared del billar?
    append!(curvatura,0)
  elseif br[ipared[j]] isa Disco
    # ¿Este elemento corresponde a un Disco del billar?
    append!(curvatura, 1/br[ipared[j]].r)
    #  $\gamma = 1/r > 0$ , porque la partícula está fuera del disco.
  elseif br[ipared[j]] isa SemiElipse # Supondremos a=b
    append!(curvatura, -1/(br[ipared[j]].a)) # Estamos dentro de las elipses
  end
end
return curvatura

#= Devuelve un arreglo con las curvaturas de cada obstáculo con el que hubo colisión. =#
end
#####
#####
#= Una función que evoluciona al vector tangente de forma discontinua, dada una
i-ésima colisión con el i-ésimo obstáculo. =#
#####
function offsetp( $\delta\Gamma_i$ ,  $\gamma_i$ , n, e, ef, cosphi) # En alusión al vector offset primado.
  dq_i =  $\delta\Gamma_i[1,:]$ 
  dp_i =  $\delta\Gamma_i[2,:]$ 
  #= Etiquetamos al  $\delta q$  y  $\delta p$  del actual vector de desviación. =#
   $\delta\Gamma_q = dq_i - 2 \cdot \text{dot}(dq_i, n) \cdot n$ 
   $\delta\Gamma_p = dp_i - 2 \cdot \text{dot}(dp_i, n) \cdot n - 2 \cdot \gamma_i \cdot (\text{dot}(dq_i, e) / \text{cosphi}) \cdot ef$ 
  #= Ecuación 1.32. Donde es claro que se toma  $|p| = 1$ . =#
   $\delta\Gamma_q = \text{transpose}(\delta\Gamma_q)$ 
   $\delta\Gamma_p = \text{transpose}(\delta\Gamma_p)$ 
  return vcat( $\delta\Gamma_q$ ,  $\delta\Gamma_p$ )
end
#####
#= Se define al vector tangente inicial. El exponente de Lyapunov es independiente de las
condiciones iniciales, así que tomamos un vector arbitrario pero de norma unitaria. =#
#####
 $\delta\Gamma_{00} = \text{vcat}([1 \ 0], [0 \ 0])$ 
#####
#= Se construye una función que calcule y devuelva cada estado del vector tangente a lo
largo de la evolución. El vector tangente inicial se propaga de forma continua, luego
al sufrir una colisión se propaga de forma discontinua, luego este vector se almacena.
Así, el vector que sufre la discontinuidad se renormaliza y se almacena como el nuevo
vector inicial dinámico. Este proceso se repite para todas las colisiones. =#
#####
# VIA RAZÓN DE CAMBIO -> 1
# VIA AUTOVALORES -> 2

```

```
#####
###
function  $\delta\Gamma$ (offset0, historia , br, via::Int)
     $d\Gamma_0$  = offset0 # Vector inicial dinámico.
     $d\Gamma\_mags$  = zeros(0)
    curvaturas =  $\gamma r$ (historia , br)
    for j in 1:(size(historia[1])[1]-1)
# Revisamos cada colisión de una partícula que fue evolucionada. =#
        offset_actual = propagador( $d\Gamma_0$ [1, :],  $d\Gamma_0$ [2, :], historia[5][j+1])
# Hacemos la propagación continua. Tomamos el  $\Delta\tau_{j+1}$  porque hasta que se da la segunda
posición hay un  $\Delta\tau$ . =#
        vnormal = vcat(historia[6][j], historia[7][j])
# Se invoca el vector normal de esta colisión
        p0 = vcat(historia[3][j], historia[4][j])
# p antes de colisionar.
        p_c = vcat(historia[3][j+1], historia[4][j+1])
# p después de colisionar.
        cosang = -dot(vnormal, p0)
# Coseno del ángulo de incidencia (signos opuestos entre p y n).
        ei = vcat(-p0[2] , p0[1])
        ef = vcat(-p_c[2], p_c[1])
# Vectores normales a p y p'.
         $d\Gamma_c$  = offsetp(offset_actual, curvaturas[j], vnormal, ei, ef, cosang)
# Se realiza la evolución discontinua del vector tangente.
        if via == 1
            append!( $d\Gamma\_mags$ , norm( $d\Gamma_c$ ))
# Se almacena la norma del vector tangente.
        elseif via == 2
            append!( $d\Gamma\_mags$ , last(eigen(transpose( $d\Gamma_c$ )* $d\Gamma_c$ ).values))
# Se almacena el máximo autovalor del producto del vector tangente con su transpuesta.
Ecuación 1.39.=#
        end
         $d\Gamma_0$  =  $d\Gamma_c$  / norm( $d\Gamma_c$ )
# Este es el nuevo vector inicial ya normalizado.
    end
    return  $d\Gamma\_mags$ 
end
#####
# Función que calcula el máximo exponente de Lyapunov para un billar mediante la vía
razón de cambio, dada una partícula de referencia inicial, un primer vector de desviación
inicial y un número dado de colisiones a evaluar. =#
#####
function  $\lambda$ (part, offsetinicial, br, N, via::Int)
    historial = evolucion!(part, br, N)
    historial_ $\delta\Gamma$  =  $\delta\Gamma$ (offsetinicial, historial, br, via)
end
```

```

#= Si via = 1 se almacenan las normas del vector tangente, si via = 2 se almacenan
los máximos autovalores. =#
    ΔtTOT = 0
    for i in 2:(size(historial[5])[1] - 1)
        ΔtTOT += historial[5][i]
# Se calcula el tiempo total de evolución de la partícula.
    end
    if via == 1
        Lyapunov = (1/ΔtTOT) * (sum(log.(historial_δΓ))) # Ecuación 1.35.
    elseif via == 2
        Lyapunov = 1/(2 * ΔtTOT) * sum(log.(historial_δΓ)) #Ecuación 1.40.
    end
    return Lyapunov
end
#####
#####
#= Función que calcula el maximo exponente de Lyapunov para un billar considerando cada
intervalo de tiempo entre colisiones en lugar de un tiempo total de evolución. Esto para
una partícula de referencia inicial, un primer vector de desviación inicial,
y un número dado de colisiones a evaluar. =#
function λ2(part, offsetinicial, br, N)
    historial = evolucion!(part, br, N)
    historial_δΓ = δΓt(offsetinicial, historial, br,1)
    λi = zeros(0)
    for i in 2:(size(historial[5])[1] - 1)
        append!(λi , (1/historial[5][i]) * log.(historial_δΓ[i-1]))
    end
    Lyapunov = (1/(N-1) * (sum(λi)))
    return Lyapunov
end
#####
#####
#= COORDENADAS DE POINCARÉ-BIRKHOFF =#
#####
#= Función que convierte de coordenadas en el espacio de configuraciones a las
de Poincaré-Birkhoff. =#
function coordenadasPB(posx, posy, velx, vely, o::Obstaculo)
    pos = vcat(posx, posy)
    vel = vcat(velx, vely)
    n = vecnormal(o, pos)
    v3d= [velx, vely, 0]
    n3d= [n[1], n[2], 0]
    senφ = cross(v3d, n3d)[3]
    # Por definición del producto cruz: AxB = |A||B|senφ, con |A||B| = 1.
    ξ = arco(posx, posy, o) # Función especial para cada obstáculo.

```

```

    return  $\xi$ , sen $\varphi$ 
end
####
# Pared plana
####
function arco(qx, qy , o::Pared)
    pos = vcat(qx,qy)
     $\ell$  = norm(pos - o.p0)
    return  $\ell$ 
end
####
# Disco
####
function arco(qx,qy , o::Disco)
    pos = vcat(qx,qy)
    R = (pos - o.c)/o.r
    if R[2] > 0
# Caso en el que la colisión ocurrió en el 1er o 2do cuadrante
        r = acos(clamp(R[1],-1,1))
    else
# Caso en el que la colisión ocurrió en el 3er o 4o cuadrante
        r =  $\pi$  + acos(-clamp(R[1],-1,1))
    end
    return r*o.r
end
####
# Semicircunferencia
####
# Llamamos a esta función para los cálculos de curvatura en elipses.
function arco(qx,qy,o::SemiElipse)
    pos = vcat(qx,qy)
    R = (pos - o.c)/o.a
    if R[2] > 0
# Caso en el que la colisión ocurrió en el 1er o 2do cuadrante
        r = acos(clamp(R[1],-1,1))
    else
# Caso en el que la colisión ocurrió en el 3er o 4o cuadrante
        r =  $\pi$  + acos(-clamp(R[1],-1,1))
    end
    return r*o.a
end
####
# Elipse
####
using QuadGK

```

```

#Llamamos a esta función para los cálculos de curvatura en elipses.
function arco(qx, qy, o::Ellipse)
    h = o.c[1]
    k = o.c[2]
#Se analiza por cuadrantes
    if qx == h+o.a
         $\theta = 0$ 
    elseif qx == h-o.a
         $\theta = \pi$ 
    elseif qy > k
         $\theta = \text{acos}((qx-h)/o.a)$ 
    elseif qy < k
         $\theta = 2*\pi - \text{acos}((qx-h)/o.a)$ 
    end
    f(t) = sqrt(o.a^2*sin(t)^2 + o.b^2*cos(t)^2)
    return rc = quadgk(f, 0,  $\theta$ ) [1] # Radio de curvatura
end
#####
# Función para llenar los ejes de un mapeo en coordenadas de Birkhoff ( $\xi, \text{sen}(\varphi)$ ). #
# mapeo: resultante de hacer cambio de variables #
###
# Billar de Sinai
###
function mapeoPBBS(qx, qy, vx, vy, iobstaculo, billar::Billar)
    radio = billar[5].r
     $\xi\text{Sinai} = [0, 1, 2, 3, 4, 4 + 2*\pi*\text{radio}]$ 
    N = size(iobstaculo)[1]
    xi, sphi = zeros(0), zeros(0)
    for j in 1:N
# q[j+1] la posición de la i-esima colisión.
        append!(xi, coordenadasPB(qx[j+1], qy[j+1], vx[j+1], vy[j+1],
            billar[iobstaculo[j]]) [1] +  $\xi\text{Sinai}[\text{Int}(iobstaculo[j])])$ )
# A la longitud de arco se le suma.
        append!(sphi, coordenadasPB(qx[j+1], qy[j+1], vx[j+1], vy[j+1],
            billar[iobstaculo[j]]) [2])
    end
    return xi, sphi
end
###
# Billar Circular
###
function mapeoPBBC(qx, qy, vx, vy, iobstaculo, billar::Billar)
    radio = billar[1].a
     $\xi\text{Circular} = [0, \pi*\text{radio}, 2*\pi*\text{radio}]$ 
    N = size(iobstaculo)[1]

```

```

    xi , sphi = zeros(0) , zeros(0)
    for j in 1:N
# q[j+1] la posición de la i-esima colisión.
        append!(xi, coordenadasPB(qx[j+1],qy[j+1],vx[j+1],vy[j+1],
            billar[iobstaculo[j]]) [1])
# A la longitud de arco se le suma.
        append!(sphi ,coordenadasPB(qx[j+1],qy[j+1],vx[j+1],vy[j+1],
            billar[iobstaculo[j]]) [2])
    end
    return xi, sphi
end
####
# Estadio de Bunimovich
###
function mapeoPBBB(qx, qy, vx, vy, iobstaculo, billar::Billar, ℓ, r)
    ξBunimovich = [2*pi*r, 0, 2*pi*r + 2*l, 0]
    N = size(iobstaculo)[1] # Número de colisiones
    xi , sphi = zeros(0) , zeros(0)
# Arreglos para devolver el punto de colisión
    for j in 1:N
        append!(xi, coordenadasPB(qx[j+1],qy[j+1],vx[j+1],vy[j+1],
            billar[iobstaculo[j]]) [1] + ξBunimovich[Int(iobstaculo[j])])
        append!(sphi ,coordenadasPB(qx[j+1],qy[j+1],vx[j+1],vy[j+1],
            billar[iobstaculo[j]]) [2])
    end
    return xi, sphi
end
####
# Billar Elíptico
###
function mapeoPBEB(qx, qy, vx, vy, iobstaculo, billar::Billar)
    ra = billar[1].a
    rb = billar[1].b
    obs = Elipse(billar[1].c,ra,rb)
    N = size(iobstaculo)[1]
    xi , sphi = zeros(0) , zeros(0)
    for j in 1:N
# q[j+1] la posición de la i-esima colisión.
        append!(xi, coordenadasPB(qx[j+1],qy[j+1],vx[j+1],vy[j+1],obs) [1])
# A la longitud de arco se le suma.
        append!(sphi ,coordenadasPB(qx[j+1],qy[j+1],vx[j+1],vy[j+1],
            obs) [2])
    end
    return xi, sphi
end
end

```

Bibliografía

- [1] É. Ghys, “The butterfly effect,” in *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 19–39, Springer, Cham, 2015.
- [2] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of atmospheric sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [3] G. Salter, V. R. Voller, and C. Paola, “Deterministic chaos in a model of a simple delta network,” in *AGU Fall Meeting Abstracts*, vol. 2017, pp. EP21B–1843, 2017.
- [4] D. J. Gauthier, “Resource letter: Cc-1: Controlling chaos,” *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 8, pp. 750–759, 2003.
- [5] H. J. Korsch and F. Zimmer, *Chaotic Billiards*, pp. 15–36. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [6] O. Bohigas, “Random matrix theories and chaotic dynamics,” tech. rep., Paris-11 Univ., 1991.
- [7] B. Dietz and A. Richter, “Quantum and wave dynamical chaos in superconducting microwave billiards,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, no. 9, p. 097601, 2015.
- [8] H.-J. Stöckmann, *Quantum chaos: an introduction*. American Association of Physics Teachers, 2000.
- [9] G. Datseris, L. Hupe, and R. Fleischmann, “Estimating Lyapunov exponents in billiards,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 29, no. 9, p. 093115, 2019.

- [10] C. C. King, “Exploring quantum, classical and semi-classical chaos in the stadium billiard,” *Quanta*, vol. 3, no. 1, 2014.
- [11] H. Garcia-Gracia and J. C. Gutiérrez-Vega, “Tunneling phenomena in the open elliptic quantum billiard,” *Physical Review E*, vol. 86, no. 1, p. 016210, 2012.
- [12] E. J. Heller, “Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems: Scars of periodic orbits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 1515–1518, Oct 1984.
- [13] H. G. Schuster and W. Just, *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [14] H. J. Korsch, H.-J. Jodl, and T. Hartmann, *Chaos: a program collection for the PC*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic billiards*. American Mathematical Soc., 2006. No. 127.
- [16] S. Wimberger, *Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos: An Introduction*. Springer, 2016.
- [17] L. Jaurigue, *Passively Mode-Locked Semiconductor Lasers: Dynamics and Stochastic Properties in the Presence of Optical Feedback*. Springer, 2017.
- [18] E. J. Heller, “Wavepacket dynamics and quantum chaology,” *Session LII-Chaos and quantum physics (Les Houches, France, 1989)*, 1991.
- [19] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [20] J. Chávez Carlos, *Caos en sistemas átomo-campo*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2018.
- [21] B. Bederson and H. Walther, *Advances in atomic, molecular, and optical physics*. Elsevier, 2003.
- [22] J. R. Taylor, *Classical mechanics*. University Science Books, 2005.

- [23] S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, vol. 30. American Mathematical Soc., 2005.
- [24] R. W. Robinett, “Periodic orbit theory analysis of a continuous family of quasi-circular billiards,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 39, no. 1, pp. 278–298, 1998.
- [25] S.-J. Chang and R. Friedberg, “Elliptical billiards and poncelet’s theorem,” *Journal of mathematical physics*, vol. 29, no. 7, pp. 1537–1550, 1988.
- [26] Y. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections,” *Russian Mathematical Surveys*, vol. 25, no. 2, p. 137, 1970.
- [27] J. A. Hernández Tahuilán, “Regiones de comportamiento atípico en billares caóticos,” *Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático*, vol. 27, no. 3, 2010.
- [28] L. A. Bunimovich, “On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 65, no. 3, pp. 295–312, 1979.
- [29] A. Hassell and L. Hilgert, “Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic,” *Annals of Mathematics*, pp. 605–618, 2010.
- [30] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory,” *Meccanica*, vol. 15, no. 1, pp. 9–20, 1980.
- [31] C. Dellago and H. Posch, “Lyapunov exponents of systems with elastic hard collisions,” *Physical Review E*, vol. 52, no. 3, p. 2401, 1995.
- [32] C. Dellago, H. A. Posch, and W. G. Hoover, “Lyapunov instability in a system of hard disks in equilibrium and nonequilibrium steady states,” *Physical Review E*, vol. 53, no. 2, p. 1485, 1996.

- [33] J. M. Perkel, “Julia: come for the syntax, stay for the speed,” *Nature*, vol. 572, no. 7768, pp. 141–143, 2019.
- [34] JuliaDynamics, “Dynamical billiards.” <https://juliadynamics.github.io/DynamicalBilliards.jl/dev/#About-Billiards>, consultado el 5 de marzo de 2021.
- [35] G. Datseris, “Simulating billiards in julia.” <https://nextjournal.com/julia/billiard>, consultado el 5 de marzo de 2021.
- [36] JuliaDynamics, “Phase space. coordinate systems,” 2020. <https://juliadynamics.github.io/DynamicalBilliards.jl/dev/basic/phasespaces/#>, consultado el 5 de marzo de 2021.
- [37] C. Lozej, *Transport and Localization in Classical and Quantum Billiards*. PhD thesis, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2020.
- [38] M. A. Bandres and J. C. Gutiérrez-Vega, “Classical solutions for a free particle in a confocal elliptic billiard,” *American Journal of Physics*, vol. 72, no. 6, pp. 810–817, 2004.
- [39] J. L. Hansen and P. Cvitanovic, “Lyapunov exponents for the stadium billiard,” *Citeseer*, 1995.
- [40] D. Greenberger, K. Hentschel, and F. Weinert, *Compendium of quantum physics: concepts, experiments, history and philosophy*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [41] M. Berry, “Quantum chaology, not quantum chaos,” *Physica Scripta*, vol. 40, no. 3, p. 335, 1989.
- [42] E. G. Vergini, *Estudio cuántico y semiclásico de billares clásicamente caóticos*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1995.
- [43] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall, 2a ed, 2010.

- [44] M. V. Berry, “Regular and irregular semiclassical wavefunctions,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 10, pp. 2083–2091, dec 1977.
- [45] P. Tuan, C. Wen, P. Chiang, Y. Yu, H.-C. Liang, K.-F. Huang, and Y.-F. Chen, “Exploring the resonant vibration of thin plates: reconstruction of chladni patterns and determination of resonant wave numbers,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 137, no. 4, pp. 2113–2123, 2015.
- [46] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, “Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, pp. 1189–1191, Apr 1979.
- [47] S. Pilatowsky-Cameo, D. Villaseñor, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, L. F. Santos, and J. G. Hirsch, “Ubiquitous quantum scarring does not prevent ergodicity,” *Nature communications*, vol. 12, no. 1, pp. 1–8, 2021.
- [48] R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC Press, 2018.
- [49] J. Sprott and A. Xiong, “Classifying and quantifying basins of attraction,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, no. 8, p. 083101, 2015.
- [50] R. Artuso, “Classical and quantum zeta-functions and periodic orbits theory r. artuso,” *New Directions in Quantum Chaos: Varenna on Lake Como, Villa Monastero, 20-30 July 1999*, vol. 143, p. 1, 2000.
- [51] M. Visser, “van vleck determinants: Geodesic focusing in lorentzian spacetimes,” *Physical Review D*, vol. 47, no. 6, p. 2395, 1993.