Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Números bicomplejos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Ana Alicia Santos Suárez

TUTOR

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Agosto 2021

1.Datos del alumno
Santos
Suárez
Ana Alicia
5519167633
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311112209

2.Datos del tutor
M. en C.
Gómez
Ortega
José Antonio

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Cruz
Barriguete
Víctor Alberto

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Lascurain
Orive
Antonio

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Lara
Martínez
Pablo Alberto

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Gómez
Gutiérrez
Vinicio Antonio

7. Datos del trabajo escrito
Números bicomplejos
109 p
2021

Agradecimientos

Agradezco a mi padre Efraín, a mi madre Erendira y a mi hermano Luis por todo el apoyo, motivación y comprensión sin el cual este trabajo no hubiera sido concluido.

A Black, Puchi, Kenya, Frijol y Lady por hacer que mi ansiedad y estrés no acabaran conmigo.

A Jhaziel por el tiempo, la complicidad y cariño durante tantos años.

A el M. en C. José Antonio Gómez Ortega por su paciencia y tiempo dedicado en la realización del presente trabajo así como todas las oportunidades para desarrollarme profesionalmente.

A mis sinodales Víctor Barriguete, Lascurain, Pablo y Vinicio Gómez por su tiempo e interés al igual que todas las correcciones para el mejoramiento de la tesis.

A mis amigos, ustedes saben quienes son, cuya compañía, ideas y apoyo marcó una parte importante de mi vida.

Finalmente a la UNAM y sus académicos por brindarme una educación de calidad.

Índice general

Introducción

En este trabajo de tesis se estudia al conjunto de **números bicomplejos**, que son elementos de la forma:

$$z_1 + \mathbf{j} z_2, \tag{1}$$

donde z_1 y z_2 son números complejos y $\mathbf{j}$ es otra "unidad imaginaria"que tiene características similares al número complejo $\mathbf{i}$, particularmente que $\mathbf{j}^2 = \mathbf{i}^2 = -1$.

En el capítulo 1 se define al conjunto de los números bicomplejos y se destacan algunos conjuntos importantes que se encuentran dentro él. Se describen las características que hacen a este conjunto un anillo. Se introducen las distintas notaciones de un número bicomplejo así como los conceptos de "conjugación" y "módulo", todo esto se ejemplifica. Por último estudiamos brevemente al conjunto de "números hiperbólicos" que están dentro de los bicomplejos.

Se habla de estructuras algebraicas de este conjunto en el capítulo 2, como son espacios vectoriales, módulos, representaciones matriciales, formas bilineales y productos internos así como un posible orden parciales de los números hiperbólicos. Estas ideas nos ayudan a entender la geometría de los bicomplejos (capítulo 3) y visualizar algunas figuras. Haciendo analogía a la representación trigonométrica de los números complejos se define la idea de "argumento" y se estudian propiedades parecidas a las conocidas del análisis complejo usual, por ejemplo la que se conoce como el teorema de De Moivre.

En el capítulo 4 se habla también de la topología de los números bicomplejos, el concepto de límite mediante sucesiones, así como de un pequeño apartado a funciones bicomplejas de variable bicompleja, desde luego donde se contempla la definición de límite de funciones y de continuidad.

Ejemplificando con algunas "funciones elementales" y haciendo analogía con los complejos en el capítulo 5 se habla de polinomios, particularmente del conjunto de ceros de ellos, dando pie a un resultado análogo del teorema fundamental del álgebra para polinomios bicomplejos. Hablamos de las funciones logaritmo y exponencial. Debido a la diversidad de escritura de los bicomplejos hay diferentes maneras de estudiar estas funciones de manera sencilla, contemplando las diferentes estructuras de los bicomplejos.

En el capítulo 6 se estudian los conceptos de ser diferenciable y se discute la definición de función holomorfa en el sentido bicomplejo explotando las ventajas de escribir las funciones de diferentes maneras. Gracias al cálculo de varias variables y a estas representaciones, podemos hablar de derivadas parciales, gradientes, etc., lo que nos llevará como en el análisis complejo a las condiciones de Cauchy-Riemann. En este capítulo estas condiciones se estudian para el caso bicomplejo. Por último habla de que implicaciones tiene que la derivada de una función sea cero.

Como siempre, en matemáticas usando las definiciones se pueden demostrar propiedades interesantes. En el caso de este tema de tesis no es la excepción, partiendo de las definiciones que se dan en el primer capítulo da pie a resultados en el segundo capítulo. Los siguientes capítulos, como bien mencione en su momento, se usan las diferentes representaciones de los bicomplejos para demostrar propiedades, igualmente se trata de dar analogías con los números complejos para tratar de entender a este conjunto bicomplejo. Hay ilustraciones para apreciar algunos objetos geométricos buscando siempre una relación entre los complejos y los bicomplejos.

El trabajo de la tesis está basado en el libro *Bicomplex Holomorphic Functions: The Algebra, Geometry and Analysis of Bicomplex Numbers.* [1]

Capítulo 1

Números bicomplejos

1.1. Definición de números bicomplejos

Definición 1.1.1 *Al conjunto:*

$$\mathbb{BC} := \{z_1 + \mathbf{j}z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Se le conoce como el conjunto de los números bicomplejos.

Donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos con la unidad imaginaria $\mathbf{i}$. Se define a $\mathbf{j}$ como otra unidad imaginaria que satisface $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ y ambas son unidades imaginarias conmutativas, es decir, $\mathbf{ij} = \mathbf{ji}$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1$.

Los números bicomplejos pueden ser sumados y multiplicados de la siguiente manera:
Sean $Z, W, Y \in \mathbb{BC}$ con $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, $W = w_1 + \mathbf{j}w_2$ y $Y = y_1 + \mathbf{j}y_2$

- Suma

$$Z + W := (z_1 + w_1) + \mathbf{j}(z_2 + w_2).$$

- Multiplicación

$$ZW := (z_1w_1 - z_2w_2) + \mathbf{j}(z_1w_2 + z_2w_1).$$

Podemos observar que se cumple la conmutatividad y asociatividad tanto en suma como en producto, usando solamente que $\mathbb{C}$ es campo.

Los números bicomplejos tienen también las siguientes propiedades:

- Hay un neutro aditivo

$$0 := 0 + \mathbf{j}0.$$

- Para cada $Z \in \mathbb{BC}$, hay un inverso aditivo para Z dado como

$$-Z := -z_1 - \mathbf{j}z_2.$$

- Hay un neutro multiplicativo

$$1 := 1 + \mathbf{j}0.$$

- Hay una ley distributiva

$$Z(W + Y) = ZW + ZY$$

que verificamos para ejemplificar como trabajan los bicomplejos,

$$\begin{aligned} Z(W+Y) &= (z_1 + \mathbf{j}z_2)((w_1 + y_1) + \mathbf{j}(w_2 + y_2)) \\ &= z_1(w_1 + y_1) - z_2(w_2 + y_2) + \mathbf{j}(z_1(w_2 + y_2) + z_2(w_1 + y_1)) \\ &= (z_1w_1 - z_2w_2) + \mathbf{j}(z_1w_2 + z_2w_1) + (z_1y_1 - z_2y_2) + \mathbf{j}(z_1y_2 + z_2y_1) \\ &= ZW + ZY \end{aligned}$$

Dentro de $\mathbb{BC}$ existen dos conjuntos que pueden ser identificados con $\mathbb{C}$. El primero es el conjunto que tiene a todos los elementos de $\mathbb{BC}$ de la forma $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ con $z_2 = 0$, a este conjunto lo denotamos como $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, es decir $\mathbb{C}(\mathbf{i}) = \{(z_1 + \mathbf{j}z_2) \in \mathbb{BC} \mid z_2 = 0\}$. El segundo conjunto es $\mathbb{C}(\mathbf{j}) := \{(z_1 + \mathbf{j}z_2) \in \mathbb{BC} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ pues $\mathbf{j}$ cumple las mismas características que $\mathbf{i}$, es decir, $\mathbf{j}^2 = -1$ y conmuta con todos los números reales. Estos dos conjuntos son isomorfos como campos pero tienen diferentes características dentro de $\mathbb{BC}$.

Otro conjunto que está en $\mathbb{BC}$ es el conjunto de los números hiperbólicos denotado como $\mathbb{D}$. El conjunto $\mathbb{D}$ se define de la siguiente manera:

$$\mathbb{D} := \{x + \mathbf{k}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

donde $\mathbf{k} \notin \mathbb{R}$ y cumple que $\mathbf{k}^2 = 1$, es decir $\mathbf{k}$ es una unidad hiperbólica.

La multiplicación y la suma en $\mathbb{D}$ se definen así:

Sean $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{D}$ con $\mathfrak{z}_1 = x_1 + \mathbf{k}y_1$ y $\mathfrak{z}_2 = x_2 + \mathbf{k}y_2$

- Suma:

$$\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = (x_1 + \mathbf{k}y_1) + (x_2 + \mathbf{k}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathbf{k}(y_1 + y_2)$$

- Multiplicación:

$$\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 = (x_1 + \mathbf{k}y_1)(x_2 + \mathbf{k}y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathbf{k}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

En $\mathbb{BC}$ hay una unidad hiperbólica, haciendo $\mathbf{k} = \mathbf{ij} = \mathbf{ji}$, pues, $\mathbf{k}^2 = \mathbf{i}^2\mathbf{j}^2 = (-1)(-1) = 1$. Por lo que en $\mathbb{BC}$ existe un subconjunto isomorfo a los números hiperbólicos que es $\mathbb{D} := \{x + \mathbf{ij}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.2. Diferentes escrituras de los bicomplejos

El número $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \in \mathbb{BC}$ con $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$ y $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$, además $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ lo podemos expresar de diferentes maneras que nos ayudan a entender la estructura de $\mathbb{BC}$. Cualquier Z puede ser expresado de las siguientes maneras:

$$Z = (x_1 + \mathbf{i}y_1) + \mathbf{j}(x_2 + \mathbf{i}y_2) = z_1 + \mathbf{j}z_2 \tag{1.1}$$

$$Z = (x_1 + \mathbf{j}x_2) + \mathbf{i}(y_1 + \mathbf{j}y_2) = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2 \tag{1.2}$$

$$Z = (x_1 + \mathbf{k}y_2) + \mathbf{i}(y_1 - \mathbf{k}x_2) = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2 \tag{1.3}$$

$$Z = (x_1 + \mathbf{k}y_2) + \mathbf{j}(x_2 - \mathbf{k}y_1) = \mathfrak{w}_1 + \mathbf{j}\mathfrak{w}_2 \tag{1.4}$$

$$Z = (x_1 + \mathbf{i}y_1) + \mathbf{k}(y_2 - \mathbf{i}x_2) = w_1 + \mathbf{k}w_2 \tag{1.5}$$

$$Z = (x_1 + \mathbf{j}x_2) + \mathbf{k}(y_2 - \mathbf{j}y_1) = \omega_1 + \mathbf{k}\omega_2 \tag{1.6}$$

$$Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2 \tag{1.7}$$

donde $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, $\zeta_1, \zeta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in \mathbb{D}$. Notemos que cualquier elemento Z de $\mathbb{BC}$ se puede ver como elemento de $\mathbb{R}^4$ como en la ecuación (1.7), usando las ecuaciones (1.1) y (1.5) podemos identificar a Z como elemento de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, como elemento de $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ con (1.2), (1.6) y, finalmente, usando las ecuaciones (1.3) y (1.4) como elemento de $\mathbb{D}^2$.

1.2.1. Conjugaciones de números complejos

La estructura de $\mathbb{BC}$ sugiere tres conjugaciones distintas (pues tiene dos unidades complejas y una hiperbólica):

Sea $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$

(i) $\overline{Z} = \overline{z}_1 + \mathbf{j}\overline{z}_2$ (conjugación barra)

(ii) $Z^\dagger = z_1 - \mathbf{j}z_2$ (conjugación espada)

(iii) $Z^* = (\overline{Z})^\dagger = \overline{(Z^\dagger)} = \overline{z}_1 - \mathbf{j}\overline{z}_2$ (conjugación estrella)

Notemos que $\overline{z}_1$ y $\overline{z}_2$ son la conjugaciones usuales de z_1 y z_2 en los números complejos.

Las conjugaciones actúan de manera diferente en los conjuntos $\mathbb{C}(\mathbf{i}), \mathbb{C}(\mathbf{j})$ y $\mathbb{D}$.

Por ejemplo si $z_2 = 0$ entonces $Z = z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, luego:

- $\overline{Z} = \overline{z}_1 = x_1 - \mathbf{i}y_1$
- $Z^\dagger = Z = z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$
- $Z^* = \overline{(Z^\dagger)} = \overline{(Z)} = \overline{z}_1 = x_1 - \mathbf{i}y_1$

Notemos que Z es invariante bajo la conjugación espada y que la conjugación estrella coincide con la cojugación barra.

Si ahora usamos (1.2) y hacemos que $\zeta_2 = 0$ tenemos que $Z = \zeta_1 = x_1 + \mathbf{j}x_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, entonces:

- $\overline{Z} = \zeta_1 = x_1 + \mathbf{j}x_2$
- $Z^\dagger = \zeta_1^\dagger = x_1 - \mathbf{j}x_2$
- $Z^* = (\overline{Z})^\dagger = Z^\dagger = x_1 - \mathbf{j}x_2$

En este caso la conjugación barra fija a Z y las conjugaciones espada y estrella coinciden.

Finalmente, usando (1.4) y haciendo $\mathfrak{w}_2 = 0$, $Z = \mathfrak{w}_1 = x_1 + \mathbf{k}y_2$ tenemos:

- $\overline{Z} = \overline{(x_1 + \mathbf{ij}y_2)} = x_1 - \mathbf{ij}y_2 = x_1 - \mathbf{k}y_2$
- $Z^\dagger = (x_1 + \mathbf{ij}y_2)^\dagger = x_1 - \mathbf{ij}y_2 = x_1 - \mathbf{k}y_2$
- $Z^* = (\overline{Z})^\dagger = \overline{(x_1 - \mathbf{k}y_2)} = x_1 + \mathbf{k}y_2$

Observemos que la conjugación estrella no modifica a Z pero la conjugación barra y la conjugación estrella coinciden.

Usando las fórmulas de la Sección 1.2 podemos escribir las tres conjugaciones así:

- $\overline{Z} = \zeta_1 - \mathbf{i}\zeta_2 = \bar{\mathfrak{z}}_1 - \mathbf{i}\bar{\mathfrak{z}}_2 = \overline{\mathfrak{w}}_1 + \mathbf{j}\overline{\mathfrak{w}}_2 = \overline{w}_1 - \mathbf{k}\overline{w}_2 = \omega_1 - \mathbf{k}\omega_2 = x_1 - \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 - \mathbf{k}y_2$
- $Z^\dagger = \zeta_1^\dagger + \mathbf{i}\zeta_2^\dagger = \bar{\mathfrak{z}}_1 + \mathbf{i}\bar{\mathfrak{z}}_2 = \overline{\mathfrak{w}}_1 - \mathbf{j}\overline{\mathfrak{w}}_2 = w_1 - \mathbf{k}w_2 = \omega_1^\dagger - \mathbf{k}\omega_2^\dagger = x_1 + \mathbf{i}y_1 - \mathbf{j}x_2 - \mathbf{k}y_2$
- $Z^* = \zeta_1^\dagger - \mathbf{i}\zeta_2^\dagger = \mathfrak{z}_1 - \mathbf{i}\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{w}_1 - \mathbf{j}\mathfrak{w}_2 = \overline{w}_1 + \mathbf{k}\overline{w}_2 = \omega_1^\dagger + \mathbf{k}\omega_2^\dagger = x_1 - \mathbf{i}y_1 - \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2$

Cada conjugación es una operación aditiva, multiplicativa e involutiva en $\mathbb{BC}$. En efecto si $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ y $W = u_1 + \mathbf{j}u_2$, tenemos que

- $\overline{(Z + W)} = \overline{z}_1 + \overline{u}_1 + \mathbf{j}(\overline{z}_2 + \overline{u}_2) = \overline{z}_1 + \mathbf{j}\overline{z}_2 + \overline{u}_1 + \mathbf{j}\overline{u}_2 = \overline{Z} + \overline{W}$,
- $(Z + W)^\dagger = z_1 + u_1 - \mathbf{j}(z_2 + u_2) = z_1 - \mathbf{j}z_2 + u_1 - \mathbf{j}u_2 = Z^\dagger + W^\dagger$,
- $(Z + W)^* = (\overline{Z + W})^\dagger = (\overline{Z} + \overline{W})^\dagger = (\overline{Z})^\dagger + (\overline{W})^\dagger = Z^* + W^*$,
- $\overline{(ZW)} = (\overline{z}_1\overline{u}_1 - \overline{z}_2\overline{u}_2) + \mathbf{j}(\overline{z}_1\overline{u}_2 + \overline{z}_2\overline{u}_1) = (\overline{z}_1 + \mathbf{j}\overline{z}_2)(\overline{u}_1 + \mathbf{j}\overline{u}_2) = \overline{Z}\,\overline{W}$,
- $(ZW)^\dagger = (z_1u_1 - z_2u_2) - \mathbf{j}(z_1u_2 + z_2u_1) = (z_1 - \mathbf{j}z_2)(u_1 - \mathbf{j}u_2) = Z^\dagger W^\dagger$,
- $(ZW)^* = (\overline{ZW})^\dagger = (\overline{ZW})^\dagger = (\overline{Z})^\dagger(\overline{W})^\dagger = Z^*W^*$,
- $\overline{(\overline{Z})} = \overline{(\overline{z}_1 + \mathbf{j}\overline{z}_2)} = (\overline{\overline{z}}_1 + \mathbf{j}\overline{\overline{z}}_2) = z_1 + \mathbf{j}z_2 = Z$,
- $(Z^\dagger)^\dagger = (z_1 - \mathbf{j}z_2)^\dagger = z_1 + \mathbf{j}z_2 = Z$,
- $(Z^*)^* = \overline{(((\overline{Z})^\dagger)^\dagger)} = \overline{((\overline{Z}))} = Z$.

1.3. Módulo de números bicomplejos

En $\mathbb{C}$ podemos obtener el módulo al cuadrado de un número al multiplicar el número con su conjugado. En $\mathbb{BC}$ dado un número hay tres conjugados, obtendremos entonces tres diferentes módulos:

- $|Z|^2_{\mathbf{i}} = ZZ^{\dagger} = z_1^2 + z_2^2 = x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + 2\mathbf{i}(x_1y_1 + x_2y_2) = (|\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2) + 2\mathbf{i}Re(\zeta_1\zeta_2^{\dagger}) = w_1^2 - w_2^2 = (|\omega_1|^2 - |\omega_2|^2) - 2\mathbf{i}Im(\omega_1^{\dagger}\omega_2) \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$
- $|Z|^2_{\mathbf{j}} = Z\overline{Z} = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2\mathbf{j}(x_1x_2 + y_1y_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + 2\mathbf{j}Re(z_1\overline{z}_2) = \omega_1^2 - \omega_2^2 = (|w_1|^2 - |w_2|^2) - 2\mathbf{j}Im(\overline{w}_1w_2) \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$
- $|Z|^2_{\mathbf{k}} = ZZ^* = \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\mathbf{k}(x_1y_2 - y_1x_2) = (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) - 2\mathbf{k}Im(\zeta_1\zeta_2^{\dagger}) = \mathfrak{w}_1^2 + \mathfrak{w}_2^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) - 2\mathbf{k}Im(z_1\overline{z}_2) \in \mathbb{D}$

Donde, para cualquier $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}), \mathbb{C}(\mathbf{j})$, $|z|$ denota el módulo usual. Sabemos que el módulo, en los números complejos, es $\mathbb{R}^+ -$ valuado. En $\mathbb{BC}$ estos tres módulos no lo son, los primeros dos son $\mathbb{C}(\mathbf{i}), \mathbb{C}(\mathbf{j}) -$ valuados respectivamente y la última es $\mathbb{D} -$ valuado (hiperbólico-valuado).

El valor de $|Z|_{\mathbf{i}} = \sqrt{ZZ^{\dagger}}$, esta determinada por la siguiente convención: Si el número complejo $z = ZZ^{\dagger}$ es un número real no negativo entonces $\sqrt{z}$ denota su valor no negativo, de lo contrario, $\sqrt{z}$ denota el valor de la raíz cuadrada de z en el semiplano superior $\mathbb{H}$. Es decir si z está en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ o en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ se tomará la raíz $\sqrt{z}$ cuyo argumento este en el intervalo $[0, \pi)$.

Veamos que pasa con $|Z|_{\mathbf{i}}$ si $Z \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, es decir, $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$ con $\zeta_2 = 0$ y recordemos que $\zeta_1 = x_1 + \mathbf{j}x_2$

- $|Z|_{\mathbf{i}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\zeta_1|$.

Notemos que este módulo coincide con la norma Euclidiana en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

Pasa algo similar si $Z = z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ y el módulo $|Z|_{\mathbf{j}}$

- $|Z|_{\mathbf{j}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |z_1|$.

Observemos que la restricción de la formas cuadráticas

- $ZZ^{\dagger} = z_1^2 + z_2^2$
- $Z\overline{Z} = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$

en los planos $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ y $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, respectivamente, determinan la estructura usual Euclidiana en ellos.

Cabe mencionar que si $Z \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, tenemos que $|Z|_{\mathbf{i}} = \sqrt{z_1^2}$ que por lo general no es $|z_1|$, pero, por lo mencionado anteriormente, es igual a z_1 o $-z_1$. De manera dual tenemos que si $Z \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ entonces $|Z|_{\mathbf{i}} = |\zeta_1|$. Analogamente con $|Z|_{\mathbf{j}}$.

Después se comentará acerca de $|Z|_{\mathbf{k}}$. Mientras tanto, la siguiente propiedad se cumple para $|Z|^2_{\mathbf{k}}$

Proposición 1.3.1 *Para $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \in \mathbb{BC}$, se cumple lo siguiente:*

$$|Z|^2_{\mathbf{k}} = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \mathbf{k}(-2Re(z_1\overline{z}_2)) =: x + \mathbf{k}y$$

Donde $x = |z_1|^2 + |z_2|^2$ y $y = -2Im(z_1\overline{z}_2)$.
Además $x^2 - y^2 \geq 0$.

Demostración.
$|Z|^2_{\mathbf{k}} = ZZ^* = Z\overline{(Z^{\dagger})} = (z_1 + \mathbf{j}z_2)(\overline{z}_1 - \mathbf{j}\overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + \mathbf{j}(z_2\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathbf{ji}(x_1y_2 - y_1x_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \mathbf{k}(-2Im(z_1\overline{z}_2))$.
Para la segunda parte, como $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \geq 0$ basta ver $(x+y) \geq 0$ y $(x-y) \geq 0$ o bien $(x+y) \leq 0$ y $(x-y) \leq 0$), solamente desarrollamos el primer caso:

$$x + y = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Im(z_1\overline{z}_2) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_2y_1 - x_1y_2) = (x_1 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 \geq 0$$
$$x - y = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Im(z_1\overline{z}_2) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2(x_2y_1 - x_1y_2) = (x_1 - y_2)^2 + (x_2 + y_1)^2 \geq 0.$$

Por lo que $x^2 - y^2 \geq 0$. ■

Estos tres módulos no son real-valuados pero si preservan una importante propiedad multiplicativa:

- $|ZW|^2_{\mathbf{i}} = |Z|^2_{\mathbf{i}}|W|^2_{\mathbf{i}}$.
- $|ZW|^2_{\mathbf{j}} = |Z|^2_{\mathbf{j}}|W|^2_{\mathbf{j}}$.
- $|ZW|^2_{\mathbf{k}} = |Z|^2_{\mathbf{k}}|W|^2_{\mathbf{k}}$.

Debido a que

- $|ZW|^2_{\mathbf{i}} = (ZW)(ZW)^\dagger = (ZW)(Z^\dagger W^\dagger) = (ZZ^\dagger)(WW^\dagger) = |Z|^2_{\mathbf{i}}|W|^2_{\mathbf{i}}$.
- $|ZW|^2_{\mathbf{j}} = (ZW)\overline{(ZW)} = (ZW)(\overline{Z}\,\overline{W}) = (Z\overline{Z})\,(W\overline{W}) = |Z|^2_{\mathbf{j}}|W|^2_{\mathbf{j}}$.
- $|ZW|^2_{\mathbf{k}} = (ZW)(ZW)^* = (ZW)(Z^*W^*) = (ZZ^*)(WW^*) = |Z|^2_{\mathbf{k}}|W|^2_{\mathbf{k}}$.

■

1.3.1. La norma Euclidiana de un número bicomplejo

Como vimos los módulos no son real valuados, por esta razón consideraremos la norma Euclidiana en $\mathbb{BC}$ visto como:

- $\mathbb{C}^2(\mathbf{i}) = \mathbb{C}(\mathbf{i}) \times \mathbb{C}(\mathbf{i}) = \{(z_1, z_2) \,|\, z_1 + \mathbf{j}z_2 \in \mathbb{BC}\}$.
- $\mathbb{C}^2(\mathbf{j}) = \{(\zeta_1, \zeta_2) \,|\, \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2 \in \mathbb{BC}\}$.
- $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \,|\, (x_1 + \mathbf{i}y_1) + \mathbf{j}(x_2 + \mathbf{i}y_2) \in \mathbb{BC}\}$.

La norma Euclidiana, denotada como $|Z|$ es como siempre:

$$|Z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(|Z|^2_{\mathbf{k}})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}.$$

Proposición 1.3.2 *Para $Z, W \in \mathbb{BC}$ con $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ y $W = w_1 + \mathbf{j}w_2$, se cumple lo siguiente:*

$$|ZW| \leq \sqrt{2}|Z||W|.$$

Demostración.
$|ZW|^2 = |z_1w_1 - z_2w_2 + \mathbf{j}(z_1w_2 + z_2w_1)|^2 = |z_1w_1 - z_2w_2|^2 + |z_1w_2 - z_2w_1|^2 \leq (|z_1||w_1| + |z_2||w_2|)^2 + (|z_1||w_2| + |z_2||w_1|)^2 = |z_1|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + 2|z_1||w_1||z_2||w_2| + |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2 + 2|z_1||w_1||z_2||w_2| \leq |z_1|^2|w_1|^2 + |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2 + |z_1|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2 = 2(|z_1|^2|w_1|^2 + |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) = 2|Z|^2|W|^2$.

En la demostración usamos la desigualdad del triángulo y por último el hecho que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$. ■

1.4. Inversos y divisores de cero en $\mathbb{BC}$

Sabemos lo siguiente:

$$ZZ^\dagger = |Z|^2_{\mathbf{i}} \in \mathbb{C}(\mathbf{i}), \tag{1.8}$$

$$Z\overline{Z} = |Z|^2_{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}(\mathbf{j}), \tag{1.9}$$

$$ZZ^* = |Z|^2_{\mathbf{k}} \in \mathbb{D}. \tag{1.10}$$

Analicemos la igualdad (1.8). Si $Z \neq 0$ pero $|Z|_{\mathbf{i}} = 0$ entonces Z es un divisor de cero pues $Z^\dagger \neq 0$. Pero si $|Z|_{\mathbf{i}} \neq 0$, tenemos que Z es invertible.

Dividiendo de ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{|Z|_{\mathbf{i}}^2}$, obtenemos el inverso de Z, ya que

$$Z\frac{Z^{\dagger}}{|Z|_{\mathbf{i}}^2} = 1$$

entonces el inverso de Z es:

$$Z^{-1} = \frac{Z^{\dagger}}{|Z|_{\mathbf{i}}^2},$$

así como pasaba en el caso complejo. Entonces obtuvimos una descripción completa de los elementos que son invertibles y de los que no son en $\mathbb{BC}$.

Analizado las otras dos igualdades de manera análoga se obtiene lo siguiente:

Decimos que Z es invertible si $|Z|_{\mathbf{j}} \neq 0$, o bien $|Z|_{\mathbf{k}}$ no es un divisor de cero, en cuyo caso el inverso se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{Si } Z\frac{\overline{Z}}{|Z|_{\mathbf{j}}^2} = 1 \text{ entonces } Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{|Z|_{\mathbf{j}}^2}.$$

$$\text{Si } Z\frac{Z^*}{|Z|_{\mathbf{k}}^2} = 1 \text{ Por lo que } Z^{-1} = \frac{Z^*}{|Z|_{\mathbf{k}}^2}.$$

por lo que $Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{|Z|_{\mathbf{j}}^2} = \frac{Z^*}{|Z|_{\mathbf{k}}^2}$.

Desarrollando la idea de los divisores de cero tenemos que si $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, entonces $|Z|_{\mathbf{i}}^2 = z_1^2 + z_2^2$.

Entonces Z es invertible si y sólo si $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ y el inverso de Z es:

$$Z^{-1} = \frac{Z^{\dagger}}{z_1^2 + z_2^2} = \frac{z_1 - \mathbf{j}z_2}{z_1^2 + z_2^2}.$$

Si z_1 y z_2 son distintos de cero pero $z_1^2 + z_2^2 = 0$, entonces Z es un divisor de cero. Lo que es equivalente a que

$$z_1 = \pm\mathbf{i}z_2 \tag{1.11}$$

sustituyendo en Z tenemos $Z = \pm\mathbf{i}z_2 \pm \mathbf{j}z_2 = \pm\mathbf{i}z_2(1 \pm \mathbf{ij})$, haciendo a $\pm\mathbf{i}z_2 = \lambda$ tenemos que todos los divisores de cero en $\mathbb{BC}$ son de la forma:

$$Z = \lambda(1 \pm \mathbf{ij}) \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}(\mathbf{i}) \setminus \{0\} \tag{1.12}$$

Si cambiamos de escritura a Z, es decir, si $Z = \zeta_1 + \mathbf{j}\zeta_2$ con $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ tenemos lo siguiente:

$$|Z|_{\mathbf{i}}^2 = ZZ^{\dagger} = 0 \Longleftrightarrow (|\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2) + 2\mathbf{i}Re(\zeta_1\zeta_2^{\dagger}) = 0 \Longleftrightarrow Re(\zeta_1\zeta_2^{\dagger}) = 0 \text{ y } |\zeta_1| = |\zeta_2|$$

Uno podría intuir que es diferente a la descripción anterior de lo divisores de cero pero notando que $Re(\zeta_1\zeta_2^{\dagger}) = 0$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^2$ por lo que ζ_1 y ζ_2 son ortogonales en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ con la misma magnitud por lo que se cumple que:

$$\zeta_1 = \pm\mathbf{j}\zeta_2.$$

Sustituyendo en Z tenemos que los divisores de cero son de la forma:

$$Z = \pm\mathbf{j}\zeta_2(1 \pm \mathbf{ij}) \tag{1.13}$$

con $\pm\mathbf{j}\zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}) \setminus \{0\}$.

Denotamos con $\mathfrak{G}$ al conjunto de los divisores de cero en $\mathbb{BC}$ y con $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} \cup \{0\}$. Podemos resumir lo anterior como lo siguiente:

Teorema 1.4.1 *Sea $Z \neq 0$ entonces son equivalentes:*

1. *El número bicomplejo Z invertible.*
2. *Z no es divisor de cero.*
3. *$ZZ^{\dagger} \neq 0$.*
4. *$Z\overline{Z} \neq 0$.*
5. *$ZZ^{*} \notin \mathfrak{G}_0$.*
6. *$|Z|_{\mathbf{i}} \neq 0$.*
7. *$|Z|_{\mathbf{j}} \neq 0$.*
8. *$|Z|_{\mathbf{k}} \notin \mathfrak{G}_0$.*
9. *Si Z está escrito como $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, entonces $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$.*
10. *Si Z está escrito como $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$, entonces $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$.*

El Teorema 1.4.1 da pie a formular un comportamiento “dual”, que es lo que establece el siguiente:

Corolario 1.4.1 *Sea $Z \neq 0$, entonces son equivalentes:*

1. *Z no es invertible.*
2. *Z es un divisor de cero.*
3. *$Z\overline{Z} = 0 = ZZ^{\dagger}$.*
4. *$ZZ^{*} \in \mathfrak{G}_0$.*
5. *$|Z|_{\mathbf{i}} = |Z|_{\mathbf{j}} = 0$.*
6. *$|Z|_{\mathbf{k}} \in \mathfrak{G}_0$.*
7. *Si Z está escrito como $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ entonces $z_1^2 + z_2^2 = 0$.*
8. *Si Z está escrito como $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$ entonces $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0$.*

1.5. Representaciones idempotentes de los números bicomplejos

Hay dos divisores de cero “especiales”.

Proposición 1.5.1 *Los números bicomplejos*

$$\mathbf{e} = \frac{1 + \mathbf{ij}}{2}, \mathbf{e}^{\dagger} = \frac{1 - \mathbf{ij}}{2}$$

cumplen las propiedades siguientes:

1. *$\mathbf{e}\mathbf{e}^{\dagger} = 0$, es decir, cada uno de ellos es un divisor de cero.*
2. *$\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}$, $(\mathbf{e}^{\dagger})^2 = \mathbf{e}^{\dagger}$, es decir, cada uno de ellos es idempotente.*
3. *$\mathbf{e} + \mathbf{e}^{\dagger} = 1$, $\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\dagger} = \mathbf{ij}$.*
4. *$\mathbf{ie} = -\mathbf{je}$.*
5. *$\mathbf{ke} = \mathbf{e}$.*
6. *$\mathbf{ie}^{\dagger} = \mathbf{je}^{\dagger}$,*
7. *$\mathbf{ke}^{\dagger} = -\mathbf{e}^{\dagger}$.*

Demostración. Veamos directamente cada una de las afirmaciones de la proposición

1. $\mathbf{e}\mathbf{e}^{\dagger} = (\frac{1+\mathbf{ij}}{2})(\frac{1-\mathbf{ij}}{2}) = \frac{1-(\mathbf{ij})^2}{4} = \frac{1-1}{4} = 0$
2. $\mathbf{e}^2 = (\frac{1+\mathbf{ij}}{2})^2 = \frac{1+2\mathbf{ij}+1}{4} = \frac{1+\mathbf{ij}}{2} = \mathbf{e}$, $\quad (\mathbf{e}^{\dagger})^2 = (\frac{1-\mathbf{ij}}{2})^2 = \frac{1-2\mathbf{ij}+1}{4} = \frac{1-\mathbf{ij}}{2} = \mathbf{e}^{\dagger}$.
3. $\mathbf{e}+\mathbf{e}^{\dagger} = \frac{1+\mathbf{ij}}{2} + \frac{1-\mathbf{ij}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $\quad \mathbf{e}-\mathbf{e}^{\dagger} = \frac{1+\mathbf{ij}}{2} - \frac{1-\mathbf{ij}}{2} = \frac{2\mathbf{ij}}{2} = \mathbf{ij}$.
4. $\mathbf{ie} = \mathbf{i}(\frac{1+\mathbf{ij}}{2}) = \frac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{2} = -\mathbf{j}(\frac{1+\mathbf{ij}}{2}) = -\mathbf{je}$.
5. $\mathbf{ke} = \mathbf{ij}(\frac{1+\mathbf{ij}}{2}) = \frac{\mathbf{ij}+(\mathbf{ij})^2}{2} = \frac{1+\mathbf{ij}}{2} = \mathbf{e}$.
6. $\mathbf{ie}^{\dagger} = \mathbf{i}(\frac{1-\mathbf{ij}}{2}) = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{2} = \mathbf{j}(\frac{1-\mathbf{ij}}{2}) = \mathbf{je}^{\dagger}$.
7. $\mathbf{ke}^{\dagger} = \mathbf{ij}(\frac{1-\mathbf{ij}}{2}) = \frac{\mathbf{ij}-1}{2} = -\mathbf{e}^{\dagger}$.

■

La siguiente propiedad no tiene analogía con los números complejos y ejemplifica una de las peculiaridades de los números bicomplejos.

Proposición 1.5.2 *Para todo $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \in \mathbb{BC}$ se cumple:*

$$Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}$$

donde $\beta_1 = z_1 - \mathbf{i}z_2$ y $\beta_2 = z_1 + \mathbf{i}z_2$

Demostración.
$Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 = \frac{z_1-\mathbf{i}z_2+z_1+\mathbf{i}z_2}{2} + \mathbf{j}(\frac{z_2+\mathbf{i}z_1+z_2-\mathbf{i}z_1}{2}) = \frac{z_1-\mathbf{i}z_2}{2} + \frac{z_1+\mathbf{i}z_2}{2} + \mathbf{ij}(\frac{z_1-\mathbf{i}z_2}{2}) - \mathbf{ij}(\frac{z_1+\mathbf{i}z_2}{2}) = (z_1 - \mathbf{i}z_2)(\frac{1+\mathbf{ij}}{2}) + (z_1 + \mathbf{i}z_2)(\frac{1-\mathbf{ij}}{2}) = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}$. ■

La forma de escribir a Z, mencionada anteriormente, y dado que $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ se le conoce como representación $\mathbb{C}(\mathbf{i}) -$ *idempotente* de Z. Podemos notar que la representación idempotente de Z es única, pues, si Z tiene dos representaciones idempotentes

$$Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger} = \beta_1^{'}\mathbf{e} + \beta_2^{'}\mathbf{e}^{\dagger},$$

entonces $0 = (\beta_1 - \beta_1^{'})\mathbf{e} + (\beta_2 - \beta_2^{'})\mathbf{e}^{\dagger} \iff \beta_1 = \beta_1^{'}$ y $\beta_2 = \beta_2^{'}$.

Proposición 1.5.3 *La suma y la multiplicación de números bicomplejos pueden ser realizadas "término a término" en la representación $\mathbb{C}(\mathbf{i}) -$ idempotente. Específicamente si $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}$ y $W = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^{\dagger}$ son elementos de $\mathbb{BC}$, entonces:*

$$Z + W = (\beta_1 + \nu_1)\mathbf{e} + (\beta_2 + \nu_2)\mathbf{e}^{\dagger},$$
$$ZW = (\beta_1\nu_1)\mathbf{e} + (\beta_2\nu_2)\mathbf{e}^{\dagger},$$
$$Z^n = \beta_1^n\mathbf{e} + \beta_2^n\mathbf{e}^{\dagger}.$$

Demostración.
$Z + W = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger} + \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^{\dagger} = (\beta_1 + \nu_1)\mathbf{e} + (\beta_2 + \nu_2)\mathbf{e}^{\dagger}$.

$ZW = (\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger})(\nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^{\dagger}) = \beta_1\mathbf{e}\nu_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}\nu_1\mathbf{e} + \beta_1\mathbf{e}\nu_2\mathbf{e}^{\dagger} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}\nu_2\mathbf{e}^{\dagger} = \beta_1\nu_1\mathbf{e} + \beta_2\nu_2\mathbf{e}^{\dagger}$.

La última parte es por inducción, donde mostramos solamente el paso inductivo, si $n = k + 1$
$Z^{k+1} = Z^kZ = (\beta_1^k\mathbf{e} + \beta_2^k\mathbf{e}^{\dagger})(\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}) = \beta_1^k\beta_1\mathbf{e} + \beta_2^k\beta_2\mathbf{e}^{\dagger} = \beta_1^{k+1}\mathbf{e} + \beta_2^{k+1}\mathbf{e}^{\dagger}$. ■

Ahora tomemos un número bicomplejo $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$ con $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, entonces podemos ver que

$$Z = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^{\dagger} = (\zeta_1 - \mathbf{j}\zeta_2)\mathbf{e} + (\zeta_1 + \mathbf{j}\zeta_2)\mathbf{e}^{\dagger}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$. Esta representación de Z se le conoce como representación $\mathbb{C}(\mathbf{j}) -$ *idempotente* de Z y se cumple que la escritura es única.

Por lo que todo número bicomplejo tiene dos representaciones idempotentes con coeficientes complejos, una en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y otra en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$:

$$Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger} = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^{\dagger}.$$

Observemos lo siguiente:

$$\mathbf{e}Z = \beta_1\mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e}$$

y

$$\mathbf{e}^{\dagger}Z = \beta_2\mathbf{e}^{\dagger} = \alpha_2\mathbf{e}^{\dagger}.$$

Entonces la unicidad consiste no en el hecho de que los coeficientes β_1 y α_1 (β_2, α_2) sean iguales, sino que sus productos $\beta_1\mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e}$ $(\beta_2\mathbf{e}^{\dagger} = \alpha_2\mathbf{e}^{\dagger})$ son iguales. Además lo anterior es equivalente a $(\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{e} = 0$ y como $\mathbf{e}$ es un divisor de cero entonces $\beta_1 - \alpha_1$ también es divisor de cero por lo que $\beta_1 - \alpha_1 = A\mathbf{e}^{\dagger}$ con A en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ o en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$. Esto último es justificado por lo siguiente:

Sean $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ con $\beta_1 = c_1 + \mathbf{i}d_2, \beta_2 = c_2 + \mathbf{i}d_2$, entonces

$$\begin{aligned} Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger} \quad &= (c_1 + \mathbf{i}d_1)\mathbf{e} + (c_2 + \mathbf{i}d_2)\mathbf{e}^{\dagger} \\ &= c_1\mathbf{e} - \mathbf{j}d_1\mathbf{e} + c_2\mathbf{e}^{\dagger} + \mathbf{j}d_2\mathbf{e}^{\dagger} \\ &= (c_1 - \mathbf{j}d_1)\mathbf{e} + (c_2 + \mathbf{j}d_2)\mathbf{e}^{\dagger} \\ &= \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^{\dagger}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = c_1 - \mathbf{j}d_1$, $\alpha_2 = c_2 + \mathbf{j}d_2$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 &= c_1 + \mathbf{i}d_1 - c_1 + \mathbf{j}d_1 = d_1(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i}d_1(1 - \mathbf{ij}) \\ &= 2d_1\mathbf{ie}^{\dagger} = 2d_1\mathbf{je}^{\dagger}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.1 *Consideremos el número bicomplejo* $Z = (2 + \mathbf{i}) + \mathbf{j}(3 - \mathbf{i}) = z_1 + \mathbf{j}z_2$, *entonces* $\beta_1 = z_1 - \mathbf{i}z_2 = (2 + \mathbf{i}) - \mathbf{i}(3 - \mathbf{i}) = 1 - 2\mathbf{i}$ *y* $\beta_2 = z_1 + \mathbf{i}z_2 = (2 + \mathbf{i}) + \mathbf{i}(3 - \mathbf{i}) = 3 + 4\mathbf{i}$. *Ahora expresando a* Z *en su forma* $\mathbb{C}(\mathbf{i}) - $ *idempotente*

$$Z = (1 - 2\mathbf{i})\mathbf{e} + (3 + 4\mathbf{i})\mathbf{e}^{\dagger}$$

expresando a $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$ *con* $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$

$$Z = (2 + 3\mathbf{j}) + \mathbf{i}(1 - \mathbf{j}) = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2.$$

Entonces $\alpha_1 = \zeta_1 - \mathbf{j}\zeta_2 = 1 + 2\mathbf{j}$ *y* $\alpha_2 = \zeta_1 + \mathbf{j}\zeta_2 = 3 + 4\mathbf{j}$.

Ahora expresando a Z *en su forma* $\mathbb{C}(\mathbf{j}) - $ *idempotente*

$$Z = (1 + 2\mathbf{j})\mathbf{e} + (3 + 4\mathbf{j})\mathbf{e}^{\dagger}$$

$\beta_1 - \alpha_1 = d_1(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 1 - 2\mathbf{i} - 1 - 2\mathbf{j} = -2(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -2\mathbf{i}(1 - \mathbf{ij}) = -4\mathbf{ie}^{\dagger} = -4\mathbf{je}^{\dagger}$, *por lo que* $d_1 = -2$.

Ejemplo 1.5.2 *Consideremos a* $Z = (1 + \mathbf{i}) + \mathbf{j}(3 - 2\mathbf{i}) = z_1 + \mathbf{j}z_2$

Recordemos, $\beta_1 = z_1 - \mathbf{i}z_2 = -1 - 2\mathbf{i}$ *y* $\beta_2 = z_1 + \mathbf{i}z_2 = 3 + 4\mathbf{i}$, *luego, en la primera representación idempotente sucede que:*

$$Z = (-1 - 2\mathbf{i})\mathbf{e} + (3 + 4\mathbf{i})\mathbf{e}^{\dagger}$$

Ahora escribiremos el mismo número bicomplejo como:

$$Z = (1 + 3\mathbf{j}) + \mathbf{i}(1 - 2\mathbf{j}) = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2.$$

Entonces $\alpha_1 = \zeta_1 - \mathbf{j}\zeta_2 = -1 + 2\mathbf{j}$ *y* $\alpha_2 = \zeta_1 + \mathbf{j}\zeta_2 = 3 + 4\mathbf{j}$. *En la segunda representación idempotente de* Z:

$$Z = (-1 + 2\mathbf{j})\mathbf{e} + (3 + 4\mathbf{j})\mathbf{e}^{\dagger}.$$

Por lo tanto $\beta_1 = -1 - 2\mathbf{i} = c_1 + \mathbf{i}d_1,\ \beta_2 = 3 + 4\mathbf{i} = c_2 - \mathbf{i}d_2,\ \alpha_1 = -1 + 2\mathbf{j} = c_1 - \mathbf{j}d_1,\ \alpha_2 = 3 + 4\mathbf{i} = c_2 + \mathbf{j}d_2$ *como vimos anteriormente se cumple que:*

$$\beta_1 - \alpha_1 = d_1(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Como $\beta_1 - \alpha_1 = -2(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -4\mathbf{ie}^{\dagger} = -4\mathbf{je}^{\dagger}$. *Observemos que* $d_1 = -2$.

Veamos como se manifiestan los módulos anteriores mencionados bajo estas representaciones idempotentes. Sea $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$.
Entonces:

$$\overline{Z} = \overline{\beta}_1\mathbf{e}^\dagger + \overline{\beta}_2\mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e}^\dagger + \alpha_2\mathbf{e},$$
$$Z^\dagger = \beta_1\mathbf{e}^\dagger + \beta_2\mathbf{e} = \alpha_1^\dagger\mathbf{e}^\dagger + \alpha_2^\dagger\mathbf{e},$$
$$Z^* = \overline{\beta}_1\mathbf{e} + \overline{\beta}_2\mathbf{e}^\dagger = \alpha_1^\dagger\mathbf{e} + \alpha_2^\dagger\mathbf{e}^\dagger.$$

Luego, el cuadrado de cada módulo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}|Z|_{\mathbf{j}}^2 = Z\overline{Z} &= (\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger)(\overline{\beta}_1\mathbf{e}^\dagger + \overline{\beta_2}\mathbf{e}) = \beta_1\overline{\beta}_2\mathbf{e} + \beta_2\overline{\beta_1}\mathbf{e}^\dagger\\ &= (\alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger)(\alpha_1\mathbf{e}^\dagger + \alpha_2\mathbf{e}) = \alpha_1\alpha_2\mathbf{e} + \alpha_1\alpha_2\mathbf{e}^\dagger = \alpha_1\alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Z|_{\mathbf{i}}^2 = ZZ^\dagger &= (\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger)(\beta_1\mathbf{e}^\dagger + \beta_2\mathbf{e}) = \beta_1\beta_2\mathbf{e} + \beta_1\beta_2\mathbf{e}^\dagger = \beta_1\beta_2\\ &= (\alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger)(\alpha_1^\dagger\mathbf{e}^\dagger + \alpha_2^\dagger\mathbf{e}) = \alpha_1\alpha_2^\dagger\mathbf{e} + (\alpha_1\alpha_2^\dagger)^\dagger\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{C}(\mathbf{i}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Z|_{\mathbf{k}}^2 = ZZ^* &= (\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger)(\overline{\beta}_1\mathbf{e} + \overline{\beta}_2\mathbf{e}^\dagger) = \beta_1\overline{\beta}_1\mathbf{e} + \beta_2\overline{\beta}_2\mathbf{e}^\dagger = |\beta_1|^2\mathbf{e} + |\beta_2|^2\mathbf{e}^\dagger\\ &= (\alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger)(\alpha_1^\dagger\mathbf{e} + \alpha_2^\dagger\mathbf{e}^\dagger) = \alpha_1\alpha_1^\dagger\mathbf{e} + \alpha_2\alpha_2^\dagger\mathbf{e}^\dagger = |\alpha_1|^2\mathbf{e} + |\alpha_2|^2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{D}^+.\end{aligned}$$

Por último tenemos que la norma Euclidiana de Z en su forma idempotente es:

$$\begin{aligned}|Z| &= \sqrt{Re(|Z|_{\mathbf{k}}^2)} = \sqrt{Re(|\beta_1|^2\mathbf{e} + |\beta_2|^2\mathbf{e}^\dagger)} = \sqrt{Re(\tfrac{1}{2})(|\beta_1|^2(1+\mathbf{ij}) + |\beta_2|^2(1-\mathbf{ij}))}\\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2}.\end{aligned}$$

Podemos caracterizar el ser invertible con respecto a la representación idempotente.

Teorema 1.5.4 *Dado $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{BC} \setminus \{0\}$ con $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ lo siguiente es equivalente:*

1. *Z es invertible.*
2. *$\beta_1 \neq 0 \neq \beta_2$*
3. *$\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$*

Demostración.
(1. $\Longrightarrow$ 2.)
Como Z es invertible tenemos que $|Z|_{\mathbf{i}}^2 = ZZ^\dagger \neq 0$, luego, usando la expresión $\mathbb{C}(\mathbf{i}) -$ *idempotente* de Z tenemos que $|Z|_{\mathbf{i}}^2 = \beta_1\beta_2 \neq 0$ por lo tanto $\beta_1 \neq 0 \neq \beta_2$ pues $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ es campo.
(2. $\Longrightarrow$ 3.)
Como $\beta_1 \neq 0 \neq \beta_2$ entonces $\beta_1\overline{\beta_2}\mathbf{e} + \overline{\beta}_1\beta_2\mathbf{e}^\dagger = |Z|_{\mathbf{j}}^2 \neq 0$ y $|Z|_{\mathbf{j}}^2 = \alpha_1\alpha_2$, por lo tanto $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$.
(3. $\Longrightarrow$ 1.)
Usando la hipótesis tenemos que $|Z|_{\mathbf{j}}^2 = \alpha_1\alpha_2 \neq 0$, entonces Z es invertible. ∎

Otra vez, tenemos una "dualidad" en como expresar los divisores de cero y los números invertibles pero ahora con la forma idempotente.

Corolario 1.5.1 *Dado $Z \neq 0$, $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{BC}$, son equivalentes:*

1. *Z es un divisor de cero,*
2. *$\beta_1 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$ o $\beta_2 = 0$ y $\beta_1 \neq 0$,*

3. $\alpha_1 = 0$ *y* $\alpha_2 \neq 0$ *o* $\alpha_1 \neq 0$ *y* $\alpha_2 = 0$.

Demostración.
$(1. \Longrightarrow 2.)$
Si Z es divisor de cero, entonces $\beta_1\beta_2 = |Z|^2_{\mathbf{i}} = 0$ entonces $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$ o $\beta_2 = 0$ y $\beta_1 \neq 0$
$(2. \Longrightarrow 3.)$
Supongamos que $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$, entonces $0 = |Z|^2_{\mathbf{j}} = \beta_1\overline{\beta_2}\mathbf{e} + \overline{\beta}_1\beta_2\mathbf{e}^\dagger = \alpha_1\alpha_2$, por lo tanto $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 \neq 0$ o $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 = 0$. Análogamente con $\beta_2 = 0$ y $\beta_1 \neq 0$.
$(3. \Longrightarrow 1.)$
Supongamos que $\alpha_1 = 0\, y\, \alpha_2 \neq 0$, por lo tanto $0 = \alpha_1\alpha_2 = |Z|^2_{\mathbf{j}}$ y entonces Z es un divisor de cero. Análogamente con $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 = 0$. ■
Entonces los divisores de cero se pueden escribir de una de las siguientes cuatro formas:

$$Z = \beta_1\mathbf{e} \text{ con } \beta_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}) \setminus \{0\},$$

$$Z = \beta_2\mathbf{e}^\dagger \text{ con } \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}) \setminus \{0\},$$

$$Z = \alpha_1\mathbf{e} \text{ con } \alpha_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}) \setminus \{0\},$$

$$Z = \alpha_2\mathbf{e}^\dagger \text{ con } \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}) \setminus \{0\}.$$

Proposición 1.5.5 *Los elementos* $\mathbf{e}$ *y* $\mathbf{e}^\dagger$ *son los únicos elementos idempotentes no triviales de* $\mathbb{BC}$.

Demostración.
Supongamos que existe $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \neq 0$ o $Z \neq 1$ tal que $Z^2 = Z$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ o $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ entonces usando la hipótesis si $Z^2 = Z$ se tiene que $\beta_1^2 = \beta_1$ y $\beta_2^2 = \beta_2$ por lo tanto $\beta_1 \in \{0, 1\}$ y $\beta_2 \in \{0, 1\}$. Entonces sustituyendo los valores de β_1 y β_2 tenemos cuatro candidatos:

$$Z = 0\mathbf{e} + 0\mathbf{e}^\dagger = 0$$

$$Z = 0\mathbf{e} + 1\mathbf{e}^\dagger = \mathbf{e}^\dagger$$

$$Z = 1\mathbf{e} + 0\mathbf{e} = \mathbf{e}$$

$$Z = 1\mathbf{e} + 1\mathbf{e}^\dagger = 1$$

Entonces $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^\dagger$ son los únicos elementos idempotentes no triviales de $\mathbb{BC}$. ■

Observación 1.5.1 *Las siguientes fórmulas nos ayudan a expresar los coeficientes de la escritura idempotente de un número bicomplejo en términos del mismo número bicomplejo*

$$Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \quad y\ Z^\dagger = \beta_2\mathbf{e} + \beta_1\mathbf{e}^\dagger,$$

entonces:

$$\beta_1 = \beta_1\mathbf{e} + \beta_1\mathbf{e}^\dagger = Z\mathbf{e} + Z^\dagger\mathbf{e}^\dagger,$$

$$\beta_2 = \beta_2\mathbf{e}^\dagger + \beta_2\mathbf{e} = Z\mathbf{e}^\dagger + Z^\dagger\mathbf{e}.$$

Ahora escribiendo a Z *en su forma* $\mathbb{C}(\mathbf{j}) - idempotente, Z = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger$ *obtenemos fórmulas similares:*

$$\gamma_1 = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_1\mathbf{e}^\dagger = Z\mathbf{e} + \overline{Z}\mathbf{e}^\dagger;$$

$$\gamma_2 = \gamma_2\mathbf{e}^\dagger + \gamma_2\mathbf{e} = \overline{Z}\mathbf{e} + Z\mathbf{e}^\dagger.$$

1.6. Números hiperbólicos en los números bicomplejos

En esta sección describiremos algunas propiedades de los números hiperbólicos y como podemos obtenerlas usando los números bicomplejos.

Para un número hiperbólico $\mathfrak{z} = x + \mathbf{k}y$, su conjugado (hiperbólico) $\mathfrak{z}^\diamond$ se define como

$$\mathfrak{z}^\diamond := x - \mathbf{k}y.$$

Por lo que

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z}^\diamond = x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$$

que dará el cuadrado del módulo (intrínseco) de $\mathfrak{z}$:

$$|\mathfrak{z}|^2_{hyp} := x^2 - y^2,$$

que es un número real que puede ser negativo.

Si x y y son números reales diferentes de cero pero $x^2 - y^2 = 0$, entonces el número hiperbólico correspondiente $\mathfrak{z} = x + \mathbf{k}y$ es un divisor de cero, porque su conjugado no es cero, sin embargo el producto de ellos es cero $\mathfrak{z}\mathfrak{z}^\diamond = 0$. Todos los divisores de cero en $\mathbb{D}$ están caracterizados por: $x^2 = y^2$, es decir, $x = \pm y$, por lo tanto, estos divisores de cero son de la forma:

$$\mathfrak{z} = x \pm \mathbf{k}x = x(1 \pm \mathbf{k})$$

con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La representación idempotente de un número hiperbólico $\mathfrak{z} = x + \mathbf{k}y \in \mathbb{D}$ es

$$\mathfrak{z} = (x + y)\mathbf{e} + (x - y)\mathbf{e}^\diamond$$

donde $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{k})$, $\mathbf{e}^\diamond = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{k})$. Más adelante ser verá que estos elementos idempotentes en $\mathbb{D}$ coinciden y cumplen proposiciones que satisfacen los elementos idempotentes no triviales de $\mathbb{BC}$.

Cuando no haya peligro de confusión, se denotará a los coeficientes de la representación idempotente de un número hiperbólico $\mathfrak{z}$ por $s := x + y$ y $t := x - y$, entonces tenemos:

$$\mathfrak{z} = s\mathbf{e} + t\mathbf{e}^\diamond,$$

observemos que

$$|\mathfrak{z}|^2_{hyp} = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = st.$$

Veamos como están relacionadas estas propiedades con los números bicomplejos. Sea $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ con $Im(z_1) = 0 = Re(z_2)$, es decir, nuestros números hiperbólicos son de la forma $\mathfrak{z} = x_1 + \mathbf{ij}y_2$ y la unidad hiperbólica es $\mathbf{ij}$=$\mathbf{k}$. Entonces la conjuación *diamante* es consistente con la conjugación † y *barra* de la siguientes manera:

$$\mathfrak{z}^\diamond = ((x_1 + \mathbf{i}0) + \mathbf{j}(0 + \mathbf{i}y_2))^\dagger = \overline{((x_1 + \mathbf{i}0) + \mathbf{j}(0 + \mathbf{i}y_2))} = x_1 - \mathbf{k}y_2.$$

Es decir, si $\mathfrak{z} = x_1 + \mathbf{ij}y_2 = x_1 + \mathbf{k}y_2$ entonces $\mathfrak{z}^\diamond = x_1 - \mathbf{k}y_2$. Por esta razón ya no escribiremos el conjugado hiperbólico de $\mathbf{e}$ como $\mathbf{e}^\diamond$ sino usaremos la notación bicompleja $\mathbf{e}^\dagger$.

Para un número bicomplejo arbitrario en la Sección 1.4 definimos cada uno de los tres módulos. Veamos que pasa si evaluamos los tres módulos en $\mathfrak{z} = x_1 + \mathbf{k}y_2 \in \mathbb{D}$ arbitrario. Entonces tomando a $\mathfrak{z} = z_1 + \mathbf{j}z_2 := (x_1 + \mathbf{i}0) + \mathbf{j}(0 + \mathbf{i}y_2) \in \mathbb{BC}$, tenemos:

$$|\mathfrak{z}|^2_{\mathbf{i}} = z_1^2 + z_2^2 = x_1^2 - y_2^2 = |\mathfrak{z}|^2_{hyp}.$$

Recordando la definición de $|\cdot|_{\mathbf{i}}$ involucra la conjugación †, la definición de $|\cdot|_{\mathbf{j}}$ involucra la conjugación *barra* y en los números hiperbólicos ambas conjugaciones coinciden ya que $|\mathfrak{z}|^2_{\mathbf{j}} = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = (x_1 + \mathbf{j}0)^2 + \mathbf{i}(0 + \mathbf{j}y_2)^2 = x_1^2 - y_2^2 = |\mathfrak{z}|^2_{hyp}$, por lo tanto:

$$|\mathfrak{z}|^2_{\mathbf{i}} = |\mathfrak{z}|^2_{\mathbf{j}} = |\mathfrak{z}|^2_{hyp}.$$

Pero no pasa lo mismo con la conjugación * pues:

$$|\mathfrak{z}|^2_{\mathbf{k}} = ZZ^* = ZZ = Z^2 = \mathfrak{z}^2.$$

Anteriormente habíamos definido solamente $|\mathfrak{z}|^2_{hyp}$ pero no hemos definido $|\mathfrak{z}|_{hyp}$ que claramente sería tomar la raíz cuadrada de $x^2 - y^2$. Algunos otros autores consideran los valores no negativos de $x^2 - y^2$ únicamente.

Podemos pensar que los números bicomplejos son raíces cuadradas de números hiperbólicos. Entonces consideremos las soluciones en $\mathbb{BC}$ de la ecuación $Z^2 = R$ para un número real R. Escribamos $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$, entonces la ecuación $Z^2 = R$ es equivalente a:

$$\beta_1^2\mathbf{e} + \beta_2^2\mathbf{e}^\dagger = R\mathbf{e} + R\mathbf{e}^\dagger$$

que es equivalente a:

$$\beta_1^2 = R;\ \beta_2^2 = R.$$

Tenemos 3 casos:
Caso 1. $R = 0$.
La única solución para $\beta_1^2 = R$; $\beta_2^2 = R$ es que $\beta_1 = 0 = \beta_2$, por lo tanto $Z = 0$.

Caso 2. $R > 0$.
Entonces $\beta_1 = \pm\sqrt{R}$; $\beta_2 = \pm\sqrt{R}$, por lo que tenemos 4 soluciones:

$$\sqrt{R}; -\sqrt{R};\ \mathbf{k}\sqrt{R};\ -\mathbf{k}\sqrt{R}$$

Estas son todas las soluciones en $\mathbb{BC}$, y son reales o números hiperbólicos.

Caso 3. $R < 0$.
Tenemos que $\beta_1 = \pm\mathbf{i}\sqrt{-R}$, $\beta_2 = \pm\mathbf{i}\sqrt{-R}$ cuyas soluciones son:

$$\mathbf{i}\sqrt{-R}, -\mathbf{i}\sqrt{-R}, \mathbf{ik}\sqrt{-R} = -\mathbf{j}\sqrt{-R}, -\mathbf{ik}\sqrt{-R} = \mathbf{j}\sqrt{-R}.$$

En este caso la ecuación $Z^2 = R$ tiene cuatro soluciones, ninguna de ellas es un número hiperbólico, dos de ellas son números complejos en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y las últimas dos son números complejos en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

Retomando a la definición de $|\mathfrak{z}|_{hyp}$ de un número hiperbólico $\mathfrak{z}$ podemos ver que si $x_1^2 - y_2^2 > 0$ este módulo se puede tomar como el número positivo $\sqrt{x_1^2 - y_2^2}$ o incluso como el número hiperbólico $\pm\mathbf{k}\sqrt{x_1^2 - y_2^2}$. Pero si $x_1^2 - y_2^2 < 0$, entonces no hay soluciones en $\mathbb{D}$, los candidatos deberían ser tomados como números complejos (en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ o en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$).

Notemos que si $x_1^2 - y_2^2 > 0$ tenemos que $\sqrt{x_1^2 - y_2^2}$ coincide con los valores, que son iguales, con $|\mathfrak{z}|_{\mathbf{i}}$ y $|\mathfrak{z}|_{\mathbf{j}}$.
Si $x_1^2 - y_2^2 < 0$, entonces $|\mathfrak{z}|_{hyp}$ puede se escogido como $|\mathfrak{z}|_{\mathbf{i}} \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ o como $|\mathfrak{z}|_{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, recordemos que se toma la raíz cuadrada que esta en el plano superior.

1.6.1. Representación idempotente de números hiperbólicos

Se mostró que los elementos idempotentes de los números hiperbólicos $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^\diamond$ y los elementos idempotentes de los números bicomplejos $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^\dagger$ coinciden. Es decir, son los mismos números bicomplejos, que a la vez, son números hiperbólicos. En el caso de los números hiperbólicos se tiene que $(x + y)$ y $(x - y)$ corresponden a los coeficientes β_1 y β_2 de un número bicomplejo. Pues considerando a $\mathfrak{z} = z_1 + \mathbf{j}z_2 := (x_1 + 0) + \mathbf{j}(0 + \mathbf{i}y_2) \in \mathbb{BC}$ su representación idempotente es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger &= (z_1 - \mathbf{i}z_2)\mathbf{e} + (z_1 + \mathbf{i}z_2)\mathbf{e}^\dagger \\ &= (x_1 - \mathbf{i}(\mathbf{i}y_2))\mathbf{e} + (x_1 + \mathbf{i}(\mathbf{i}y_2))\mathbf{e}^\dagger \\ &= (x_1 + y_2)\mathbf{e} + (x_1 - y_2)\mathbf{e}^\dagger. \end{aligned}$$

Se definirá el conjunto de los números hiperbólicos no negativos, $\mathbb{D}^+$, como:

$$\mathbb{D}^+ = \{x + \mathbf{k}y \mid x^2 - y^2 \geq 0, x \geq 0\} = \{x + \mathbf{k}y \mid x \geq 0;\ |y| \leq x\}.$$

Si hacemos a $\nu = x + y$ y $\mu = x - y$, podemos expresar $\mathbb{D}^+$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{D}^+ = \{\nu\mathbf{e} + \mu\mathbf{e}^\dagger \mid \nu, \mu \geq 0\}.$$

Por lo tanto los números hiperbólicos positivos son aquellos cuyos coeficientes idempotentes son ambos no negativos, de ahí su nombre.

En la siguiente Figura 1.1, los puntos (x, y) corresponden a los números hiperbólicos, $\mathfrak{z} = x+\mathbf{k}y$. Podemos ver en que puntos están ubicados los elementos de $\mathbb{D}^+$ y el plano que es simétrico con respecto al origen corresponde a los números hiperbólicos negativos. Los otros puntos no son positivos ni negativos.

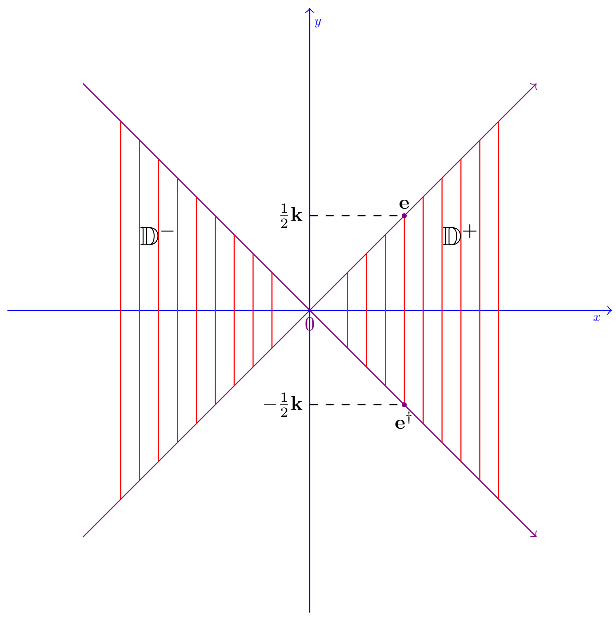

Figura 1.1: Números hiperbólicos positivos y negativos.

Análogamente los números hiperbólicos no positivos son:

$$\mathbb{D}^- = \{x + \mathbf{k}y \mid x \leq 0;\ |y| \leq |x|\},$$

o equivalentemente:

$$\mathbb{D}^- = \{\nu\mathbf{e} + \mu\mathbf{e}^\dagger\} \mid \nu, \mu \leq 0\}.$$

Diremos que un número hiperbólico $\mathfrak{z} = \nu\mathbf{e} + \mu\mathbf{e}^\dagger$ es *semipositivo* si uno de los coeficientes ν o μ es positivo y el otro es cero.

Los números hiperbólicos no negativos juegan un rol análogo a los números reales no negativos, esto se verá manipulando las raíces cuadradas de los números hiperbólicos en $\mathbb{D}^+$.

Sea $\mathfrak{z} = \mu\mathbf{e} + \nu\mathbf{e}^\dagger$ con $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se puede ver que los números hiperbólicos $\pm\sqrt{\mu}\mathbf{e} \pm \sqrt{\nu}\mathbf{e}^\dagger$ son todos los que elevados al cuadrado dan $\mathfrak{z}$. Pero observemos que $\sqrt{\mu}\mathbf{e}+\sqrt{\nu}\mathbf{e}^\dagger$ es el único número hiperbólico no negativo.

Hasta ahora, hemos definido que significa $|Z|_\mathbf{i}$ y $|Z|_\mathbf{j}$ pero no hemos definido a $|Z|_\mathbf{k}$.

Sea $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{BC}$, sabemos que $|Z|^2_\mathbf{k} = |\beta_1|^2\mathbf{e} + |\beta_2|^2\mathbf{e}^\dagger$ es un número hiperbólico no negativo, por lo tanto el módulo $|Z|_\mathbf{k}$ puede ser tomado como:

$$|Z|_\mathbf{k} := |\beta_1|\mathbf{e} + |\beta_2|\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{D}.$$

Ahora, consideremos la siguiente ecuación:

$$|\mathfrak{z}|_{\mathbf{k}} = \mathfrak{w},$$

donde $\mathfrak{z}$ es un número hiperbólico desconocido en $\mathbb{D}^+$. Escribiendo a $\mathfrak{z}$ y $\mathfrak{w}$ en su forma idempotente $\mathfrak{z} = \beta_1\mathbf{e}+\beta_2\mathbf{e}^\dagger$ y $\mathfrak{w} = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger$ podemos concluir lo siguiente:

- Si $\mathfrak{w} = 0$, entonces $\mathfrak{z} = 0$ es la única solución.
- Si $\mathfrak{w}$ un número hiperbólico semi positivo, es decir, $\mathfrak{w}$ es es un divisor de cero positivo: $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 > 0$ o $\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 = 0$, entonces las soluciones también son divisores de cero pero no necesariamente semi positivos:

$$\mathfrak{z} = \pm\gamma_2\mathbf{e}^\dagger \text{ o } \mathfrak{z} = \pm\gamma_1\mathbf{e},$$

- Si $\mathfrak{w}$ es positivo pero no semi positivo: $\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 > 0$, entonces todas las soluciones son:

$$\mathfrak{z} = \pm\gamma_1\mathbf{e} \pm \gamma_2\mathbf{e}^\dagger.$$

1.7. Norma Euclidiana. Producto de bicomplejos

Sabemos que para cualesquiera números bicomplejos Z, W se tiene:

$$|ZW| \leq \sqrt{2}|Z||W|.$$

Observemos que esta desigualdad es óptima, se logra la igualdad con $Z = W = \mathbf{e}$, ya que

$$|\mathbf{ee}| = |\mathbf{e}| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

en efecto $|\mathbf{e}| = \sqrt{Re(|\mathbf{e}|^2_{\mathbf{k}})} = \sqrt{Re(|1\mathbf{e} + 0\mathbf{e}^\dagger|^2_{\mathbf{k}})} = \sqrt{Re(|\frac{1+\mathbf{ij}}{2}|^2_{\mathbf{k}})} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y es claro $\sqrt{2}|\mathbf{e}||\mathbf{e}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si se toma el conjugado de $\mathbf{e}$ la igualdad también se cumple.

Para ciertos números bicomplejos podemos decir más.

Proposición 1.7.1 *Si $U = u_1 + \mathbf{j}u_2 \in \mathbb{BC}$ arbitrario, pero Z es complejo en $\mathbb{C}(\mathbf{i}), \mathbb{C}(\mathbf{j})$ o si Z es hiperbólico. Entonces:*

a) Si $Z \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ o $\mathbb{C}(\mathbf{j})$, entonces $|ZU| = |Z||U|$.

b) Si $Z = x_1 + \mathbf{k}y_2 \in \mathbb{D}$, donde $x_1 \in \mathbb{R}$ y $y_2 \in \mathbb{R}$ entonces en general

$$|ZU| \neq |Z||U|$$

pero se puede asegurar que,

$$|ZU|^2 = |Z|^2|U|^2 + 4x_1y_2Re(\mathbf{i}u_1\overline{u}_2).$$

Demostración.
Primero demostraremos el inciso a.

Sea $Z = z_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $U = u_1 + \mathbf{j}u_2 = (u_1 - \mathbf{i}u_2)\mathbf{e} + (u_1 + \mathbf{i}u_2)\mathbf{e}^\dagger$, entonces

$$|ZU|^2 = |z_1(u_1 + \mathbf{j}u_2)|^2 = |(z_1u_1) + \mathbf{j}(z_1u_2)|^2 = |z_1u_1|^2 + |z_1u_2|^2 = |z_1|^2|U|^2 = |Z|^2|U|^2.$$

Usamos el hecho de que la norma Euclidiana de un número complejo (en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ o en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$), visto como un número bicomplejo, coincide con su módulo.

Ahora, tomemos $Z = x_1 + \mathbf{j}x_2 = (x_1 - \mathbf{i}x_2)\mathbf{e} + (x_1 + \mathbf{i}x_2)\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, entonces:

$$\begin{aligned} |ZU|^2 &= |((x_1 - \mathbf{i}x_2)\mathbf{e} + (x_1 + \mathbf{i}x_2)\mathbf{e}^\dagger))((u_1 - \mathbf{i}u_2)\mathbf{e} + (u_1 + \mathbf{i}u_2)\mathbf{e}^\dagger| \\ &= |(x_1 - \mathbf{i}x_2)(u_1 - \mathbf{i}u_2)\mathbf{e} + (x_1 + \mathbf{i}x_2)(u_1 + \mathbf{i}u_2)\mathbf{e}^\dagger|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(|x_1 - \mathbf{i}x_2|^2|u_1 - \mathbf{i}u_2|^2 + |x_1 + \mathbf{i}x_2|^2|u_1 + \mathbf{i}u_2|^2) = |Z|^2|U|^2. \end{aligned}$$

Finalmente para el inciso *b*), sea $Z = x_1 + \mathbf{ij}y_2 = (x_1 + y_2)\mathbf{e} + (x_1 - y_2)\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{D}$, entonces:

$$\begin{aligned} |ZU|^2 &= |(x_1 + \mathbf{ij}y_2)(u_1 + \mathbf{i}u_2)|^2 \\ &= |((x_1 + y_2)\mathbf{e} + (x_1 - y_2)\mathbf{e}^\dagger)((u_1 - \mathbf{i}u_2)\mathbf{e} + (u_1 + \mathbf{i}u_2)\mathbf{e}^\dagger)|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}((x_1 + y_2)^2|u_1 - \mathbf{i}u_2|^2 + (x_1 - y_2)^2|u_1 + \mathbf{i}u_2|^2) \\ &= |Z|^2|U|^2 + 4x_1y_2Re(\mathbf{i}u_1\overline{u}_2) \neq |Z|^2|U|^2. \end{aligned}$$

■

Vamos a caracterizar a las parejas (Z, W) tales que la norma Euclidiana es multiplicativa.

Proposición 1.7.2 *Sean $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ y $W = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger$ dos bicomplejos, entonces:*

$$|ZW| = |Z||W|$$

si y sólo si $|\beta_1| = |\beta_2|$ o $|\gamma_1| = |\gamma_2|$.

Demostración.
Tenemos que $ZW = \beta_1\gamma_1\mathbf{e} + \beta_2\gamma_2\mathbf{e}^\dagger$, entonces: $|ZW|^2 = \frac{1}{2}(|\beta_1\gamma_1|^2 + |\beta_2\gamma_2|^2)$.

Por otro lado, $|Z|^2|W|^2 = \frac{1}{4}(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2)(|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2)$.

Luego, $|ZW|^2 = |Z|^2|W|^2$, si y sólo si

$$\tfrac{1}{2}\left(|\beta_1\gamma_1|^2 + |\beta_2\gamma_2|^2\right) = \tfrac{1}{4}\left(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2\right)\left(|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2\right).$$

Equivalentemente

$$0 = |\beta_1|^2|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_1\beta_1|^2 - 2|\gamma_1\beta_2|^2 + |\beta_1|^2|\gamma_2|^2 + |\beta_2|^2|\gamma_2|^2 + |\beta_2|^2|\gamma_1|^2,$$

que factorizando se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= -|\gamma_1|^2|\beta_1|^2 - |\gamma_2|^2|\beta_2|^2 + |\beta_1|^2|\gamma_2|^2 + |\beta_2|^2|\gamma_1|^2 \\ &= \left(|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2\right)\left(|\beta_1|^2 - |\beta_2|^2\right) \end{aligned}$$

si y sólo si $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ o $|\beta_1| = |\beta_2|$. ■

Observación 1.7.1 *Si $|\beta_1| = |\beta_2|$ entonces $|Z| = |\beta_1|\mathbf{e} + |\beta_2|\mathbf{e}^\dagger = |\beta_1|(\mathbf{e} + \mathbf{e}^\dagger) = |\beta_1| = |\beta_2|$, entonces, podemos concluir que la propiedad multiplicativa de la norma Euclidiana se cumple si y sólo si la norma Euclidiana de cualquiera de los factores coincide con el módulo (como números complejos) de las componentes idempotentes.*

Lo anterior da pie al siguiente resultado:

Proposición 1.7.3 *Un número bicomplejo Z es un producto de un número complejo en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y otro número complejo en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ si y sólo si las componentes idempotentes de Z tienen el mismo módulo como números complejos.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $Z = z_1z_2$ donde $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$ y $z_2 = x_2 + \mathbf{j}y_2$, por lo que $Z = z_1x_2 + \mathbf{j}z_1y_2 = (z_1x_1 - \mathbf{i}z_1y_1)\mathbf{e} + (z_1x_1 + \mathbf{i}z_1y_1)\mathbf{e}^\dagger = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ donde $\beta_1 = z_1x_1 - \mathbf{i}z_1y_1$ y $\beta_2 = z_1x_1 + \mathbf{i}z_1y_1$ ahora $|\beta_1| = |z_1x_1 - \mathbf{i}z_1y_1| = |z_1||x_1 - \mathbf{i}y_1| = |z_1||x_1 + \mathbf{i}y_1| = |z_1x_1 + \mathbf{i}z_1y_1| = |\beta_2|$.

($\Leftarrow$) Sea $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ donde $\beta_1 = z_1 - \mathbf{i}z_2$ y $\beta_2 = z_1 + \mathbf{i}z_2$, entonces $|\beta_1| = |\beta_2| \Longleftrightarrow |z_1 - \mathbf{i}z_2| = |z_1 + \mathbf{i}z_2| \Longleftrightarrow |z_1 - \mathbf{i}z_2|^2 = |z_1 + \mathbf{i}z_2|^2 \Longleftrightarrow (\overline{z}_1 + \mathbf{i}\overline{z}_2)(z_1 - \mathbf{i}z_2) = (\overline{z}_1 - \mathbf{i}\overline{z}_2)(z_1 + \mathbf{i}z_2) \Longleftrightarrow \overline{z}_1z_1 - \mathbf{i}z_2\overline{z}_1 + \mathbf{i}\overline{z}_2z_1 + \overline{z}_2z_2 = \overline{z}_1z_1 + \mathbf{i}z_2\overline{z}_1 - \mathbf{i}\overline{z}_2z_1 + \overline{z}_2z_2 \Longleftrightarrow -2\mathbf{i}z_2\overline{z}_1 = -2\overline{z}_2z_1 \Longleftrightarrow z_2\overline{z}_1 = \overline{z}_2z_1 \Longleftrightarrow \overline{z}_2z_1 = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por lo que, $\overline{z}_2z_1 = \lambda$.

Tenemos los siguientes casos:

i) Si $\lambda = 0$, tenemos que $Z = z_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, si $z_2 = 0$; o bien $Z = \mathbf{j}z_2$, si $z_1 = 0$; o bien $Z = 0$, cuando $z_1 = z_2 = 0$ en cualquier caso es claro que que Z es producto de un elemento en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

ii) Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$z_1 = \frac{\lambda z_2}{|z_2|^2}.$$

Sustituyendo en $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, tenemos que $Z = \frac{\lambda z_2}{|z_2|^2} + \mathbf{j}z_2 = z_2(\frac{\lambda}{|z_2|^2} + \mathbf{j})$ con $z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $(\frac{\lambda}{|z_2|^2} + \mathbf{j}) \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$. ■

Corolario 1.7.1 *La norma Euclidiana del producto de dos números bicomplejos es igual al producto de sus normas si y sólo si al menos uno de ellos es el producto de un número complejo en* $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ *y otro número complejo en* $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

Demostración.

($\Rightarrow$)

Sean Z y W tales que $|ZW| = |Z||W|$ por la proposición antepasada tenemos que $|\beta_1| = |\beta_2|$ o $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ donde β_1, β_2 son las componentes idempotentes de Z y γ_1, γ_2 son las componentes idempotentes de W y por la proposición anterior cada uno de Z o W son producto de un número complejo en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y otro en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

($\Leftarrow$)

Supongamos que Z es el producto de dos números complejos, como en las hipótesis, entonces por la Proposición 1.7.3, las componentes idempotentes de Z tienen el mismo módulo, finalmente, usando la Proposición 1.7.2 $|ZW| = |Z||W|$. ■

La desigualdad

$$|ZW| \leq \sqrt{2}|Z||W|,$$

nos dice que la relación entre la norma Euclidiana $|Z|$ de un bicomplejo invertible Z y la norma $|Z^{-1}|$ es más compleja que lo "convencional". Dado que,

$$1 = |ZZ^{-1}| \leq \sqrt{2}|Z||Z^{-1}|$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|Z|} \leq \sqrt{2}|Z^{-1}|$$

Entonces, nos preguntamos por los números bicomplejos que hacen que se cumpla la fórmula "convencional":

$$\frac{1}{|Z|} = |Z^{-1}|.$$

La respuesta nos la da la Proposición 1.7.2 $|ZW| = |Z||W|$ haciendo $W = Z^{-1}$, entonces tenemos la fórmula anterior, que usando resultados anteriores, esto sucede si y sólo si Z es el producto de dos números complejos, uno en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y otro en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$, o bien, si el módulo de las componentes idempotentes de Z coincide.

Capítulo 2

Estructuras algebraicas de $\mathbb{BC}$

2.1. El anillo de los números bicomplejos

Con las operaciones que se dieron en el Capítulo 1 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1 $(\mathbb{BC}, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con unidad. Es decir:*

1. $(\mathbb{BC}, +)$ *es un grupo conmutativo con elemento neutro el número* $0 = 0 + \mathbf{j}0$*. Además cada número bicomplejo* $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ *tiene por inverso aditivo a* $-Z = -z_1 - \mathbf{j}z_2$*.*

2. *La multiplicación es asociativa, conmutativa, y con elemento identidad* $1 = 1 + \mathbf{j}\,0$*.*

3. *La multiplicación es distributiva sobre la suma, i.e, para cualquier* $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{BC}$ *tenemos que:*

$$Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3. \tag{2.1}$$

Apelando al lenguaje utilizado en la **teoría de anillos**, se sabe que a los elementos invertibles, es decir los Z para los cuales existe un W con $ZW = 1$, son llamados *unidades*. Por lo general el conjunto de las no unidades y el de los divisores de cero (es decir, los Z para los cuales existe un $W \neq 0$ con $ZW = 0$), no tienen los mismos elementos.

Por ejemplo:

1. En $\mathbb{Z}$, el conjunto de no unidades es $\{\mathbb{Z}\} \setminus \{-1, 1\}$ y 0 es el único divisor de cero.

Si denotamos como $\mathbb{BC}^{-1}$ al conjunto de los elementos invertibles y $\mathfrak{S}$ los elementos distintos de cero que no son invertibles tenemos la siguiente partición de $\mathbb{BC}$:

$$\mathbb{BC} = \mathbb{BC}^{-1} \cup \mathfrak{S} \cup \{0\}.$$

Un *ideal* de un anillo R es un subgrupo aditivo N de R, que satisface las siguientes propiedades:

$$aN \subseteq N \quad \text{y} \quad Nb \subseteq N \quad \forall a, b \in R.$$

Si R es un anillo conmutativo y N es un ideal de la forma $N = \{na : n \in R\} = N_a$ con $a \in R$ fijo, diremos que N es un *ideal principal.*

En los números bicomplejos hay dos ideales destacables que son: $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}} := \mathbb{BC} \cdot \mathbf{e}$ y $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger} := \mathbb{BC} \cdot \mathbf{e}^\dagger$, ambos son ideales principales. Particularidades de estos anillos son las siguientes:

$$\mathbb{BC}_{\mathbf{e}} \cap \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger} = \{0\},$$

$$\mathbb{BC}_{\mathbf{e}} + \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger} = \mathbb{BC},$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger} = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}^\dagger \cdot \mathbb{BC}_{\mathbf{e}} = \{0\}.$$

2.2. Espacios vectoriales y módulos en $\mathbb{BC}$

Un subconjunto S de un anillo R es un *subanillo* si es un anillo con las operaciones heredadas de R.

Consideremos un anillo conmutativo con elemento unitario Ay $(M, +)$ un grupo abeliano. Diremos que M es un $A -$ *módulo* si existe una operación $A \times M \to M$ denotada por $(a, x) \to ax$ tal que para $a, b \in A$; $x, y \in M$, se cumple

1. $a(x + y) = ax + ay$,
2. $(a + b)x = ax + bx$,
3. $1x = x$,
4. $(ab)x = a(bx) = b(ax)$.

Por ejemplo, si S es un subanillo de un anillo conmutativo R, entonces R es un módulo sobre el anillo S.

En los números bicomplejos los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ y $\mathbb{D}$ son subanillos del anillo $\mathbb{BC}$ por lo tanto $\mathbb{BC}$ puede ser visto como un módulo sobre cada uno de los anillos anteriores y sobre el mismo. Sabemos que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ son campos por lo que $\mathbb{BC}$ es un espacio vectorial sobre cada uno de estos conjuntos.

Usando la identidad (1.9) tenemos el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{BC} \ni Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2 \mapsto (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4. \tag{2.2}$$

De igual modo, con la relación (1.3), tenemos el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$,

$$\mathbb{BC} \ni Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \mapsto (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}). \tag{2.3}$$

Componiendo el isomorfismo (2.3) y la función inversa de (2.2) obtenemos un isomorfismo de espacios vectorial sobre $\mathbb{R}$, entre $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, como espacios vectoriales sobre

$$\mathbb{R}^4 \ni (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}). \tag{2.4}$$

Considerando a $\mathbb{BC}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ y utilizando (1.4), tenemos el isomorfismo de $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ espacios vectoriales,

$$\mathbb{BC} \ni Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2 \mapsto (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j}). \tag{2.5}$$

Las imágenes de los números 1 e $\mathbf{i}$ bajo este isomorfismo son la base canónica de $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ e induce el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^4 \ni (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + \mathbf{j}x_2, y_1 + \mathbf{j}y_2). \tag{2.6}$$

Notemos que los isomorfismos (2.4) y (2.6) son distintos lo cual hace ver que dentro de $\mathbb{BC}$ los conjuntos $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ y $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ juegan distintos roles. Otra diferencia que podemos ver es que si consideramos el conjunto $\{1, \mathbf{i}\}$ y le damos a $\mathbb{BC}$ una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y o bien sobre $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ podemos observar lo siguiente:

1. Si $\mathbb{BC}$ es considerado como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ tenemos que $\{1, \mathbf{i}\}$ son linealmente independientes, en efecto si $\alpha_1 = x_1 + \mathbf{j}y_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ y $\alpha_2 = x_2 + \mathbf{j}y_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ cumplen,

$$\alpha_1 + \mathbf{i}\alpha_2 = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{k}y_2 = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0,$$

   por lo que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2. Sin embargo, si $\mathbb{BC}$ es considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, el conjunto $\{1, \mathbf{i}\}$ es linealmente dependiente, ya que podemos tener la combinación lineal, $\alpha_1 + \mathbf{i}\alpha_2 = 0$, con $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = \mathbf{i}$.

La relación (1.5) da pie a otro $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$isomorfismo entre $\mathbb{BC}$ y $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$:

$$\mathbb{BC} \ni Z = (x_1 + \mathbf{i}y_1) + \mathbf{k}(y_2 - \mathbf{i}x_2) = w_1 + \mathbf{k}w_2 \mapsto (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}). \tag{2.7}$$

Se describirá la relación entre los isomorfismos (2.3) y (2.7). Fijémonos que bajo (2.3), las imágenes de los números 1, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son:

$$1 \mapsto (1, 0),$$

$$\mathbf{j} \mapsto (0, 1),$$

$$\mathbf{k} \mapsto (0, \mathbf{i}),$$

por lo que tenemos que hacer un cambio de la base canónica de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ a la base $(1, 0), (0, \mathbf{i})$ debido a la escritura de nuestros números bicomplejos.

Entonces, la matriz de cambio de base es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

Por lo que un par $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ le corresponde otro $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, gracias a la siguiente regla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -\mathbf{i}z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Un razonamiento similar se aplica a $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, usando (1.6), se pude definir el $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$isomorfismo:

$$\mathbb{BC} \ni Z = (x_1 + \mathbf{j}x_2) + \mathbf{k}(y_2 - \mathbf{j}y_1) = \omega_1 + \mathbf{k}\omega_2 \mapsto (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j}). \tag{2.9}$$

La relación entre (2.5) y (2.9), es también un cambio de la base canónica de $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ a la base $\{(1, 0), (0, \mathbf{j})\}$. La matriz de cambio de base es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Al igual que en el isomorfismo (2.7), tomando parejas $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ y $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, se relacionan como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ -\mathbf{j}\zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Ya hemos señalado algunas diferencias entre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\mathbb{C}(\mathbf{j})$, sin embargo existe un isomorfismo entre estos campos,

$$\varphi : \mathbb{C}(\mathbf{i}) \to \mathbb{C}(\mathbf{j}), \tag{2.10}$$

$$\varphi(x + \mathbf{i}y) = x + \mathbf{j}y.$$

Este último isomorfismo nos ayuda a formalizar las diferentes escrituras idempotentes de un número bicomplejo:

$$Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger = (c_1 + \mathbf{i}d_1)\mathbf{e} + (c_2 + \mathbf{i}d_2)\mathbf{e}^\dagger \tag{2.11}$$

$$= \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger = (c_1 - \mathbf{j}d_1)\mathbf{e} + (c_2 + \mathbf{j}d_2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Lo que demuestra que $\alpha_1 = (\varphi(\beta_1))^\dagger$ y $\alpha_2 = \varphi(\beta_2)$. Se puede ver que las escrituras idempotentes de los números bicomplejos nos dan mas isomorfismos, para argumentar esto necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1 *Los divisores de cero:*

$$\mathbf{e} = \tfrac{1+\mathbf{ij}}{2} \quad y \quad \mathbf{e}^\dagger = \tfrac{1-\mathbf{ij}}{2}$$

son linealmente independientes si $\mathbb{BC}$ *tiene estructura de espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ *o bien sobre* $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

Demostración. Haciendo referencia a isomorfismo (2.3) las imágenes de $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^\dagger$ son:

$$\mathbf{e} \mapsto \left(\frac{1}{2}, \frac{\mathbf{i}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, \mathbf{i}),$$

$$\mathbf{e}^\dagger \mapsto \left(\frac{1}{2}, \frac{-\mathbf{i}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, -\mathbf{i}).$$

Ahora consideremos la ecuación:

$$\lambda_1(1, \mathbf{i}) + \lambda_2(1, -\mathbf{i}) = (0, 0),$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, tenemos que lo anterior pasa si y solamente si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De la misma manera para el caso de $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$.

$\blacksquare$

Usando la cadena de igualdades (2.11), definimos los siguientes isomorfismo de espacios vectoriales sobre los campos $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\mathbb{C}(\mathbf{j})$, respectivamente.

$$\mathbb{BC} \ni Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \mapsto (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}), \tag{2.12}$$

$$\mathbb{BC} \ni Z = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\dagger \mapsto (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j}). \tag{2.13}$$

La relación entre (2.3) y (2.12) así como (2.5) y (2.13) esta dado por un cambio de base de la base cánonica a la siguiente base en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\mathbf{i}}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{-\mathbf{i}}{2}\right)\right\}$$

y a la base en $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\mathbf{j}}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{-\mathbf{j}}{2}\right)\right\}.$$

Al usar la matriz de cambio de base queda de la siguiente manera en el espacio $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ 1 & \mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - \mathbf{i}z_2 \\ z_2 + \mathbf{i}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

y en el espacio $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & -\mathbf{j}\zeta_2 \\ \zeta_1 & \mathbf{j}\zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Ahora consideremos al conjunto $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dotado con la suma componente a componente heredada de $\mathbb{D}$. Así, $\mathbb{D}^2$ es un grupo abeliano. $\mathbb{D}^2$ se vuelve un módulo sobre $\mathbb{D}$ si definimos la multiplicación por escalar (de $\mathbb{D}$) mediante componente a componente. Las fórmulas (1.5) y (1.6) dan pie a los siguientes isomorfismos de $\mathbb{D}-$módulos:

$$\mathbb{BC} \ni Z = (x_1 + \mathbf{k}y_2) + \mathbf{i}(y_1 - \mathbf{k}x_2)) = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2 \mapsto (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \in \mathbb{D}^2 \tag{2.15}$$

y

$$\mathbb{BC} \ni Z = (x_1 + \mathbf{k}y_2) + \mathbf{j}(x_2 - \mathbf{k}y_1)) = \mathfrak{w}_1 + \mathbf{j}\mathfrak{w}_2 \mapsto (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2) \in \mathbb{D}^2. \tag{2.16}$$

2.3. Estructuras de álgebra en $\mathbb{BC}$

Si M es un $A-$módulo sobre un anillo conmutativo A, éste se dirá que es una *álgebra* sobre A, si existe una multiplicación en M que cumple para $x, y, z \in M$ y para $a, b \in A$ lo siguiente:

- Distributiva por la derecha: $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$.
- Distributiva por la izquierda: $z\cdot(x+y) = z\cdot x + z\cdot y$.
- Compatibilidad con escalares: $(ax)\cdot(by) = (ab)(x\cdot y)$.

Es decir la operación binaria (multiplicación) es bilineal.

Como $\mathbb{BC}$ tiene estructura de módulo sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ y $\mathbb{BC}$, estas estructuras generan las correspondientes álgebras.

A $\mathbb{BC}$ lo podemos ver como un álgebra sobre $\mathbb{R}$ si usamos el isomorfismo (2.2) y definimos la multiplicación de los puntos (x_1, y_1, x_2, y_2) y (s_1, t_1, s_2, t_2), como el punto que tiene por entradas a,

$$x_1s_1 - y_1t_1 - x_2s_2 + y_2t_2,\ x_1t_1 + y_1s_1 - x_2t_2 - y_2s_2,\ x_1s_2 - y_1t_2 + x_2s_1 - y_2t_1,\ x_1t_2 + y_1s_2 + x_2t_1 + y_2 + s_1 \quad (2.17)$$

Por lo anterior $\mathbb{R}^4$ hereda una estructura de álgebra conmutativa (es decir el producto en el álgebra conmuta) sobre $\mathbb{R}$. Se sabe que no hay muchas definiciones "buenas" de una multiplicación en $\mathbb{R}^4$. La multipliación bicompleja (2.17) es una de estas. Esta definición se puede comparar con la multiplicación de los cuaterniones.

Los isomorfismos (2.3), (2.7) y (2.12), nos dan tres opciones para introducir una multiplicación en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, concretamente.

Sea $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 = w_1 + \mathbf{k}w_2 = a_1\mathbf{e} + a_2\mathbf{e}^\dagger$ y $W = p_1 + \mathbf{j}p_2 = \theta_1 + \mathbf{k}\theta_2 = c_1\mathbf{e} + c_2\mathbf{e}^\dagger$ entonces,

$$\begin{aligned}(z_1, z_2)\cdot(p_1, p_2) &:= (z_1p_1 - z_2p_2, z_1p_2 + z_2p_1);\\ (w_1, w_2)\cdot(\theta_1, \theta_2) &:= (w_1\theta_1 + w_2\theta_2, w_1\theta_2 + w_2 + \theta_1);\\ (a_1, a_2)\cdot(c_1, c_2) &:= (a_1c_1, a_2c_2).\end{aligned}$$

Cada una de estas tres fórmulas definen una multiplicación conmutativa en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$. Si a $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ lo vemos como espacio vectorial sin ninguna base fija, las fórmulas anteriores nos definen 3 multiplicaciones distintas, sin embargo, si generamos a $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ con las bases: $\{(1,0),(0,1)\}, \{(1,0),(0,\mathbf{i})\}, \left\{(\frac{1}{2}, \frac{\mathbf{i}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{-\mathbf{i}}{2})\right\}$ y usando (2.8) tanto como (2.14), podemos ver que las tres fórmulas definen la misma multiplicación en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ expresadas de diferente manera dependiendo la base. Por ejemplo, de (2.8) se tiene que:

$$(w_1, w_2) = (z_1, -\mathbf{i}z_2) \quad \text{y} \quad (\theta_1, \theta_2) = (p_1, -\mathbf{i}p_2)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}(w_1, w_2)\cdot(\theta_1, \theta_2) &= (w_1\theta_1 + w_2\theta_2, w_1\theta_2 + w_2\theta_1)\\ &= (z_1p_1 - z_2p_2, -\mathbf{i}(z_1p_2 + z_2p_1))\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathbf{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1p_1 - z_2p_2\\ z_1p_2 + z_2p_1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}w_1\theta_1 + w_2\theta_2\\ w_1\theta_2 + w_2\theta_1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Es similar con el espacio vectorial, $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, sobre $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.

Por último, como $\mathbb{BC}$ es un módulo sobre $\mathbb{D}$ y sobre sí mismo (recuerde que $\mathbb{BC}$ es un anillo), entonces $\mathbb{BC}$ es una álgebra sobre $\mathbb{D}$ y sobre $\mathbb{BC}$. Como tal, $\mathbb{BC}$ es isomorfo a $\mathbb{D}^2$, como $\mathbb{D}$-álgebras, un isomorfismo puede ser cualquiera de (2.15) o (2.16).

2.4. Representación matricial de los números bicomplejos

El campo $\mathbb{C}$ es isomorfo al conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 de entradas reales de la forma:

$$\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}.$$

Es decir, la función:

$$\phi_{\mathbb{C}} : z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo de campos entre $\mathbb{C}$ y el conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
Estas matrices conmutan bajo la multiplicación y cualquiera de ellas tiene inversa excepto la matriz cero. Es decir, el conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es un campo. Por lo tanto el isomorfismo es un isomorfismo de campos. La unidad imaginaria $\mathbf{i}$ es identificado con la matriz:

$$\mathcal{I} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $z = x + \mathbf{i}y$, entonces

$$\phi_{\mathbb{C}}(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = xI_2 + y\mathcal{I}.$$

El cuadrado de la norma de z coincide con $det_{\phi_{\mathbb{C}}}(z)$.

Con un razonamiento similar podemos crear un isomorfismo de anillos entre $\mathbb{BC}$ y las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes complejos de la forma

$$\begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

Y está dado por:

$$\Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})} : Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \in \mathbb{BC} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Bajo este isomorfismo es inmediato que:

$$\Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} = \mathbf{i}I_2, \qquad \Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: \mathcal{J},$$
$$\Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(\mathbf{e}) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} =: \xi, \qquad \Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(\mathbf{e}^\dagger) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} =: \xi^\dagger.$$

Por lo tanto para cualquier $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ su imagen $\Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z)$ es

$$\Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) = z_1 I_2 + z_2\mathcal{J} = \beta_1\xi + \beta_2\xi^\dagger.$$

Hay funciones que nos permiten identificar a los números bicomplejos con matrices de entradas en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ o en $\mathbb{D}$:

$$\Phi_{\mathbb{C}(\mathbf{j})} : Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2 \in \mathbb{BC} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_1 \end{pmatrix},$$
$$\Phi_{\mathbb{D}} : Z = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{BC} \mapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_1 & -\mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente $\mathbb{BC}$ puede ser identificado con las matrices de orden 4 de coeficientes reales gracias a la siguiente función:

$$\Phi_{\mathbb{R}} : Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2 \in \mathbb{BC} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & -x_2 & y_2 \\ y_1 & x_1 & -y_2 & -x_2 \\ x_2 & -y_2 & x_1 & -y_1 \\ y_2 & x_2 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Toda matriz de 4×4 con coeficientes reales, determina una función lineal en $\mathbb{R}^4$. Puede que estas transformaciones no sean lineales cuando $\mathbb{R}^4$ es visto como $\mathbb{BC}-$módulo, es decir que no sean funciones $\mathbb{BC}-$lineales. Las únicas matrices que son $\mathbb{BC}-$lineales son las de la forma de $\Phi_{\mathbb{R}}(Z)$. Hasta este punto hemos utilizado la siguiente identificación entre $\mathbb{BC}$ y $\mathbb{R}^4$:

$$Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2 \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Lo anterior da a pie a lo siguiente, una identificación de $\mathbb{BC}$ con $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$:

$$Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \leftrightarrow (z_1, z_2) = (x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

y hay también una identificación entre $\mathbb{BC}$ y $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$:

$$Z = \zeta_2 + \mathbf{i}\zeta_2 \leftrightarrow (\zeta_1, \zeta_2) = (x_1 + \mathbf{j}x_2, y_1 + \mathbf{j}y_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j}) \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2).$$

La transformación $\mathbb{R}-$lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que también es $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$lineal, que tiene por matriz asociada a T una de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ l & -m & u & -v \\ m & l & v & u \end{pmatrix}.$$

Mientras que si T representa una función $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$lineal, la matriz asociada es de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b & -e & -f \\ c & d & -g & -h \\ e & f & a & b \\ g & h & c & d \end{pmatrix}.$$

La matriz $\phi_{\mathbb{C}}(z)$ representa una función que es $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$lineal así como $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$lineal.

2.5. Formas bilineales y productos internos

En el conjunto $\mathbb{R}$, visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la siguiente fórmula define una forma bilineal, que, a su vez, es un producto interno: si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x, y) := x \cdot y,$$

cuya forma cuadrática (real) es:

$$\mathcal{Q} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x, x) = x^2$$

que define el cuadrado de la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbb{C}$ se puede ver como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ y cada una de estas estructuras genera lo análogo a lo descrito anteriormente. Cuando $\mathbb{C}$ es visto como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces la forma bilineal esta dada, para $z = x + \mathbf{i}y$, $w = u + \mathbf{i}v$ por:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z, w) := xu + yv = Re(z\overline{w}),$$

que es el producto canónico en $\mathbb{R}^2$. La forma cuadrática es:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z) := \mathcal{B}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z, z) = x^2 + y^2$$

y define el cuadrado de la métrica Euclidiana en $\mathbb{C}$.

Cuando $\mathbb{C}$ es considerado un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tiene una forma bilineal y una sesquilineal, a saber:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C},1}(z, w) := z \cdot w$$
$$\mathcal{B}_{\mathbb{C},2}(z, w) := z \cdot \overline{w},$$

respectivamente. La segunda fórmula es la producto interno canónico en $\mathbb{C}$. Estos dos productos dan las siguientes formas cuadráticas:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},1}(z) := \mathcal{B}_{\mathbb{C},1}(z, z) := z^2$$

y

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z) := \mathcal{B}_{\mathbb{C},2}(z, z) := |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Notemos que $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z) = \mathcal{Q}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z)$ es el cuadrado de la métrica Euclidiana en $\mathbb{C}$. Tenemos también que $\mathcal{B}_{\mathbb{C},1}$ no es un producto interno y $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},1}$ no define ninguna métrica en el sentido clásico.

Estas ideas se pueden extender en los números bicomplejos. Empezando viendo a $\mathbb{BC} = \mathbb{R}^4$ y con la forma bilineal (real):

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z,W) := x_1u_1 + y_1v_1 + x_2u_2 + y_2v_2,$$

para $Z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ y $W = (u_1, v_1, u_2, v_2)$, que es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^4$. La forma cuadrádratica es:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z) := \mathcal{B}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z,Z) := x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2,$$

que como se observa, define el cuadrado de la métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^4$.

Cuando $\mathbb{BC}$ es visto como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, $\mathbb{BC} = \mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, entonces tiene tanto una forma $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ bilineal y otra forma $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ sesquilineal:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1}(Z,W) := z_1w_1 + z_2w_2 = \tfrac{1}{2}(ZW^\dagger + Z^\dagger W)$$

y

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},2}(Z,W) := z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2\overline{w_2} = \tfrac{1}{2}(ZW^* + Z^\dagger \overline{W}).$$

La segunda expresión es el producto interno canónico de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$. Estas fórmulas dan pie a las formas cuadráticas:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1}(Z) := \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1}(Z,Z) := z_1^2 + z_2^2 = Z \cdot Z^\dagger = |Z|_{\mathbf{i}}^2$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},2}(Z) &:= \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},2}(Z,Z) := |z_1|^2 + |z_2|^2 = \tfrac{1}{2}(ZZ^* + Z^\dagger\overline{Z}) \\ &= \tfrac{1}{2}(|Z|_{\mathbf{k}}^2 + |Z^\dagger|_{\mathbf{k}}^2) = \tfrac{1}{2}(|Z|_{\mathbf{k}}^2 + |\overline{Z}|_{\mathbf{k}}^2).\end{aligned}$$

Nuevamente, $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},2}(Z) = \mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z)$ es el cuadrado de la métrica canónica en $\mathbb{C}^2$.

$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1}$ no es llamado un producto interno en $\mathbb{BC}$, y $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1}$ no define ninguna métrica en el sentido clásico.

De manera similar, si pensamos ahora que $\mathbb{BC} = \mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, por lo que $\mathbb{BC}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(\mathbf{j})$:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{j},1}(Z) := \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = Z \cdot \overline{Z} = |Z|_{\mathbf{j}}^2$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{j},2}(Z) &:= |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = \tfrac{1}{2}(ZZ^* + \overline{Z}Z^\dagger) \\ &= \tfrac{1}{2}(|Z|_{\mathbf{k}}^2 + |Z^\dagger|_{\mathbf{k}}^2) = \tfrac{1}{2}(|Z|_{\mathbf{k}}^2).\end{aligned}$$

Cuando $\mathbb{BC}$ es identificado a $\mathbb{D}^2$, las cosas cambian, notemos primero:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},1}(Z,W) := \mathfrak{z}_1\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{z}_2\mathfrak{w}_2 = \tfrac{1}{2}(ZW^* + Z^*W)$$

y

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},2}(Z,W) := \mathfrak{z}_1\mathfrak{w}_1^\diamond + \mathfrak{z}_2\mathfrak{w}_2^\diamond = \tfrac{1}{2}(ZW^\dagger + Z^*\overline{W}) = \tfrac{1}{2}(Z\overline{W} + Z^*W^\dagger),$$

imitando las situaciones previas, pero ahora ambas formas toman valores en $\mathbb{D}$, no en $\mathbb{C}$ o en $\mathbb{R}$. Observemos que la primera forma bilineal es hiperbólica y la segunda hiperbólica sesquilineal. Las formas cuadráticas son las siguientes:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},1}(\mathfrak{z}) := \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},1}(Z,Z) = \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2{}^2 = Z \cdot Z^* = |Z|_{\mathbf{k}}^2$$

y

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},2}(\mathfrak{z}) := \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},2}(Z,Z) = \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_1{}^\diamond + \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_2{}^\diamond = \tfrac{1}{2}(ZZ^\dagger + Z^*\overline{Z}) = \tfrac{1}{2}(Z\overline{Z} + Z^*Z^\dagger) = \tfrac{1}{2}(|Z|_{\mathbf{i}}^2 + |Z^*|_{\mathbf{i}}^2) = \tfrac{1}{2}(|Z|_{\mathbf{j}}^2 + |Z^*|_{\mathbf{j}}^2).$$

Se nota que $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},1}$ tiene valores hiperbólicos y $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbb{D},2}$ toma valores reales pero no es definida positivamente.

Por último, viendo a $\mathbb{BC}$ como un módulo sobre sí mismo, sugiere la siguiente forma bilineal bicompleja:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC}}(Z,W) := Z \cdot W$$

y las tres formas sesquilineales bicomplejas:

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_{\mathbb{BC},bar}(Z,W) := Z \cdot \overline{W}, \text{ (forma sesquilineal barra)}\\ \mathcal{B}_{\mathbb{BC},\dagger}(Z,W) := Z \cdot W^{\dagger}, \text{ (forma sesquilineal espada)}\\ \mathcal{B}_{\mathbb{BC},*}(Z,W) := Z \cdot W^{*}, \text{ (forma sesquilineal estrella).}\end{gathered}$$

Las últimas tres formas sesquilineales coinciden con los tres módulos anteriormente introducidos. Lo cual da pie a una geometría mas compleja.

Considerando, nuevamente, la forma cuadrática real valuada $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z) = x^2+y^2$; como coincide con $\mathcal{B}_{\mathbb{C},2}(z,z)$, entonces $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}$ se puede factorizar de la siguiente manera:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2} = (x+\mathbf{i}y)(x-\mathbf{i}y) = z \cdot \overline{z}.$$

Esta última identidad puede ser vista como una de las razones por la necesidad de introducir los números complejos: si se quiere factorizar $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z)$ (que es una forma cuadrática real valuada definida positivamente); por lo tanto, el conjunto de sus valores es $\mathbb{R}$-uno-dimensional, en el producto de dos formas lineales que deberían ser reales dos dimensionales entonces la unidad imaginaria $\mathbf{i}$ emerja y genere todo el conjunto $\mathbb{C}$.
Una idea similar es relacionada con $\mathbb{BC}$. Consideremos la forma cuadrática $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ valuada $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1} = z_1^2 + z_2^2$. Se sabe que puede ser factorizada de la siguiente manera:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbf{i},1} = (z_1+\mathbf{j}z_2)(z_1-\mathbf{j}z_2) = Z \cdot Z^{\dagger}$$

donde el conjunto de valores de $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbf{i},1}$ es uno-dimensional sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ pero los factores son dos dimensionales sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$. Que como en el caso de $\mathbb{C}$, la $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbf{i},1}$ emerge de una forma cuadrátrica real. Es importante que los factores sean dos dimensionales sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, no uno dimensionales, pues tendríamos la siguiente factorización:

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1+\mathbf{i}z_2)(z_1-\mathbf{i}z_2). \tag{2.19}$$

Proposición 2.5.1 $\mathbb{BC}$ *es la única álgebra conmutativa de dimensión dos sobre* $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ *que permite la factorización anterior.*

Demostración.

Supongamos que existe una álgebra dos dimensional sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ tal que para cuatro de sus elementos, digamos, a, b, c y d se satisface la siguiente identidad:

$$z_1^2 + z_2^2 = (az_1+bz_2)(cz_1+dz_2)$$

para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$. Por lo tanto, se cumple lo siguiente: $z_1^2 + z_2^2 = acz_1^2 + bdz_2^2 + (ad+bc)z_1z_2$, que es equivalente a $ac = 1$; $bd = 1$ y $ad + bc = 0$.

Por lo tanto todos los elementos son invertibles y $c^{-1}d + d^{-1}c = 0$. Es decir: $(c^{-1}d)^2 = -1$.

Por lo que si denotamos como $\mathbf{j} = c^{-1}d$, tenemos que $\mathbf{j}^2 = -1$ y $\mathbf{j}^{-1} = -\mathbf{j}$; la factorización anterior se vuelve:

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + \mathbf{j}z_2)(z_1 - \mathbf{j}z_2).$$

Así el álgebra compleja que estamos buscando deberá estar generada por 1 y $\mathbf{j} \neq \pm\mathbf{i}$, y de nuevo obtenemos $\mathbb{BC}$. ■

De la misma manera si empezamos con la forma cuadrática $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ valuada $\zeta_1^2 + \zeta_2^2$ obtenemos a $\mathbb{BC}$ como una $\mathbb{C}(\mathbf{j})$-álgebra. Finalmente si partimos con la forma cuadrática $\mathbb{D}$-valuada:

$$\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2$$

actuando en la $\mathbb{D}$-álgebra, entonces cualquiera de las dos unidades imaginarias, $\mathbf{i}$ o $\mathbf{j}$, llegaremos a una factorización con los factores $\mathbb{D}$-dos dimensionales.

2.6. El orden parcial en $\mathbb{D}$

2.6.1. Definición del orden parcial

En el capítulo anterior se discutió la relación entre los $\mathbb{R}^+$ y los números hiperbólicos no negativos dentro de $\mathbb{D}$. Podemos extender (de manera parcial) las relaciones de “mayor que”y “menor que” en los números hiperbólicos.

Sean $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{D}$; si la diferencia $\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1 \in \mathbb{D}^+$, es decir, que la diferencia es un número hiperbólico no negativo, lo anterior se denota de la siguiente manera:

$$\mathfrak{z}_2 \succeq \mathfrak{z}_1 \quad \text{o} \quad \mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2.$$

Es decir $\mathfrak{z}_2$ es $\mathbb{D}$-mayor o igual que $\mathfrak{z}_1$, o bien que, $\mathfrak{z}_1$ es $\mathbb{D}$-menor o igual que $\mathfrak{z}_2$.
Escribiendo estos números en su forma idempotente $\mathfrak{z}_1 = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ y $\mathfrak{z}_2 = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger$ con $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

$$\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2 \quad \text{sí y sólo si} \quad \gamma_1 \geq \beta_1 \quad \text{y} \quad \gamma_2 \geq \beta_2.$$

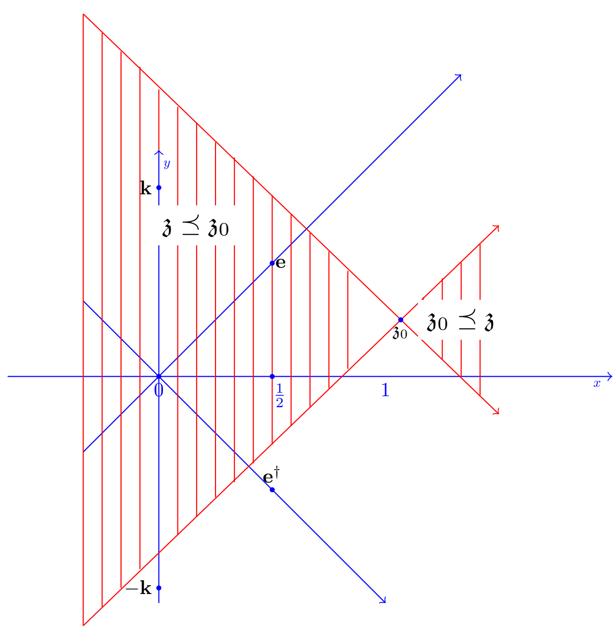

Figura 2.1: Un orden parcial en $\mathbb{D}$.

En la Figura 2.1, $\mathfrak{z}_\circ = x_0 + \mathbf{k}y_0$ es un número hiperbólico arbitrario y se puede ver que el plano esta dividido en 4 partes: la parte del plano de todos los números que son $\mathbb{D}$-mayores o iguales a $\mathfrak{z}_\circ$ ($\mathfrak{z} \succeq \mathfrak{z}_\circ$); la parte de los números son $\mathbb{D}$-menores o iguales a $\mathfrak{z}_\circ$ ($\mathfrak{z} \preceq \mathfrak{z}_\circ$) y las dos partes de los números no son $\mathbb{D}$-comparables con $\mathfrak{z}_\circ$.

Veamos que "$\preceq$" es un orden parcial en $\mathbb{D}$:

1. "$\preceq$" es reflexiva pues:
   $\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_1$ sí y sólo si $\beta_1 \geq \beta_1$ y $\beta_2 \geq \beta_2$, y esto último es claro.

2. "$\preceq$" es antisimétrica:
   Si $\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2$ y $\mathfrak{z}_2 \preceq \mathfrak{z}_1$, tenemos que $\gamma_1 \geq \beta_1$ y $\gamma_2 \geq \beta_2$, y que $\beta_1 \geq \gamma_1$ y $\beta_2 \geq \gamma_2$, entonces $\gamma_1 = \beta_1$ y $\gamma_2 = \beta_2$, luego $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2$.

3. "$\preceq$" es transitiva:
   Sea $\mathfrak{z}_3 = \delta_1\mathbf{e} + \delta_2\mathbf{e}^\dagger$. Si $\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2$ y $\mathfrak{z}_2 \preceq \mathfrak{z}_3$, entonces $\gamma_1 \geq \beta_1$ y $\gamma_2 \geq \beta_2$ y $\delta_1 \geq \gamma_1$ y $\delta_2 \geq \gamma_2$, por lo que $\delta_1 \geq \beta_1$ y $\delta_2 \geq \beta_2$ por tanto $\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_3$.

En caso de que $\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1 \in \mathbb{D}^+ \backslash\{0\}$ lo denotamos como $\mathfrak{z}_2 \succ \mathfrak{z}_1$ y decimos que $\mathfrak{z}_2$ es $\mathbb{D}$ mayor que $\mathfrak{z}_1$, o también podemos escribir $\mathfrak{z}_1 \prec \mathfrak{z}_2$ y decir que $\mathfrak{z}_1$ es $\mathbb{D}$ menor que $\mathfrak{z}_2$. Esto implica que si $\mathfrak{z} \in \mathbb{D}^+$ es equivalente a $\mathfrak{z} \succeq 0$ y que si $\mathfrak{z} \in \mathbb{D}^+\backslash\{0\}$ es equivalente a $\mathfrak{z} \succ 0$. Si $\mathfrak{z} \in \mathbb{D}^-$ es equivalente a $\mathfrak{z} \preceq 0$ y $\mathfrak{z} \in \mathbb{D}^-\backslash\{0\}$ es equivalente $\mathfrak{z} \prec 0$.

2.6.2. Propiedades del orden parcial

Sean $\mathfrak{z}, \mathfrak{w}, \mathfrak{n} \in \mathbb{D}$.

(I) Consecuencias de la definición del orden en $\mathbb{D}$:

- Si $\mathfrak{z}$ y $\mathfrak{n}$ son comparables con respecto a $\preceq$, entonces solo una de las siguientes relaciones ocurre:

$$\mathfrak{z} \prec \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \succ \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{n}.$$

- Las desigualdades $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n} \preceq \mathfrak{w}$ implican que $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{w}$.
- Las desigualdades $\mathfrak{z} \preceq \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n} \prec \mathfrak{w}$ implican que $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{w}$.

(II) Conexiones entre la adición y orden en $\mathbb{D}$

- $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{w}$ implica que $\mathfrak{z} + \mathfrak{n} \prec \mathfrak{w} + \mathfrak{n}$.
- $\mathfrak{z} \preceq \mathfrak{w}$ implica que $\mathfrak{z} + \mathfrak{n} \preceq \mathfrak{w} + \mathfrak{n}$.
- $0 \prec \mathfrak{z}$ implica que $-\mathfrak{z} \prec 0$.
- $\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2$ y $\mathfrak{n} \preceq \mathfrak{w}$ implica que $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{n} \preceq \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{w}$.
- $\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2$ y $\mathfrak{n} \prec \mathfrak{w}$ implica que $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{n} \prec \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{w}$.

(III) Conexiones entre la multiplicación y el orden parcial en $\mathbb{D}$

- Si $\mathfrak{z}$ y $\mathfrak{n}$ son números hiperbólicos no negativos, entonces el producto: $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{n} \in \mathbb{D}^+$.
- Si $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{n} \in \mathbb{D}^+\backslash\{0\}$, entonces su producto: $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{n} \in \mathbb{D}^+\backslash\{0\}$.
- Si $\mathfrak{z}$ y $\mathfrak{n}$ son números hiperbólicos estrictamente negativos, entonces el producto es estrictamente positivo: $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{n} \succ 0$.
- Si alguno de los números $\mathfrak{z}$ o $\mathfrak{n}$ es estrictamente positivo y el otro es estrictamente negativo, entonces su producto es estrictamente negativo: $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{n} \prec 0$.
- Si $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{w} \succ 0$, entonces $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{w} \prec \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}$.
- Si $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{w} \prec 0$, entonces $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{w} \succ \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}$.
- Si $\mathfrak{z}$ es estrictamente positivo, entonces tiene inverso y el inverso es positivo: Si $\mathfrak{z} \succ 0$ y $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{n}$, entonces $\mathfrak{z}^{-1} \succ 0$ y $\mathfrak{n}^{-1} \prec \mathfrak{z}^{-1}$.

Ejemplo 2.6.1 *Ilustraremos las propiedades mencionadas anteriormente resolviendo la siguiente desigualdad:*

$$|\mathfrak{z}|_{\mathbf{k}} \preceq \mathfrak{w}, \tag{2.20}$$

para $\mathfrak{z} = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ en $\mathbb{D}$, donde $\mathfrak{w} = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{D}^+$ está fija y $|\cdot|_{\mathbf{k}}$ es el módulo $\mathbb{D}$-valuado.

Si $\mathfrak{w} = 0$ la única solución es $\mathfrak{z} = 0$. Por lo tanto, consideremos que $\mathfrak{w} \in \mathbb{D}^+\backslash\{0\}$. La desigualdad (2.20) es equivalente a: $|\beta_1|\boldsymbol{e} + |\beta_2|\boldsymbol{e}^\dagger \preceq \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger$ que es equivalente al siguiente sistema: $|\beta_1| \leq \gamma_1$ y $|\beta_2| \leq \gamma_2$.

Por lo tanto las soluciones de (2.20) son números hiperbólicos $\mathfrak{z} = \beta_1\boldsymbol{e} + \beta_2\boldsymbol{e}^\dagger$ con $-\gamma_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ y con $-\gamma_2 \leq \beta_2 \leq \gamma_2$. Esto significa que la desigualdad (2.20) es equivalente a la doble desigualdad hiperbólica $-\mathfrak{w} \preceq \mathfrak{z} \preceq \mathfrak{w}$.

Introduciremos la noción de *intervalo hiperbólico (o segmento hiperbólico)*. Dados $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{D}$ con $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$, el intervalo hiperbólico es el conjunto:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_{\mathbb{D}} := \{\mathfrak{z} \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{a} \preceq \mathfrak{z} \preceq \mathfrak{b}\}.$$

Consideremos como ejemplos los siguientes dos casos:

- Sea $\mathfrak{a} = \mathbf{k}$ y $\mathfrak{b} = 1$. Como $\mathbf{k} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^\dagger \preceq 1 = \mathbf{e} + \mathbf{e}^\dagger$, entonces el intervalo $[\mathbf{k}, 1]_{\mathbb{D}}$ esta bien definido. Las desigualdades:

$$\mathbf{k} \preceq \mathfrak{z} = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \preceq 1$$

nos dan:

$$1 \leq \beta_1 \leq 1, \quad \text{y} \quad -1 \leq \beta_2 \leq 1.$$

Se sigue que el intervalo es un conjunto uno dimensional. Observe la Figura 2.2.

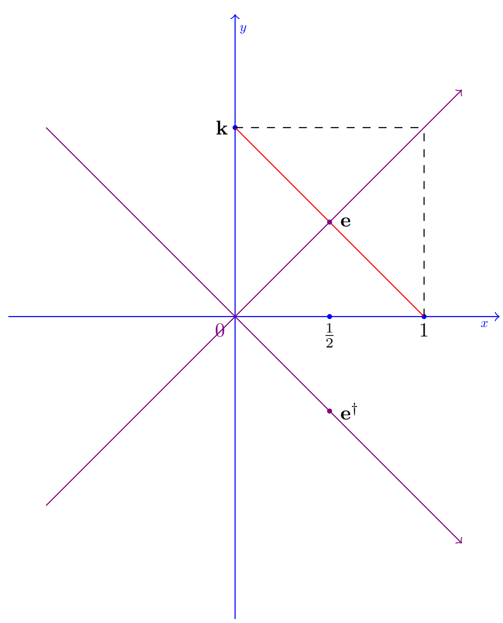

Figura 2.2: El segmento hiperbólico $[\mathbf{k}, 1]_{\mathbb{D}}$.

- Ahora sean $\mathfrak{a} = \mathbf{k}$ y $\mathfrak{b} = 2$ ($\mathbf{k} \preceq 2$). En este caso el intervalo esta dado por:

$$[\mathbf{k}, 2]_{\mathbb{D}} = \{\mathfrak{z} = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \mid 1 \leq \beta_1 \leq 2 \ \text{ y } \ -1 \leq \beta_2 \leq 2\},$$

y es un conjunto dos dimensional. Observe la Figura 2.3.

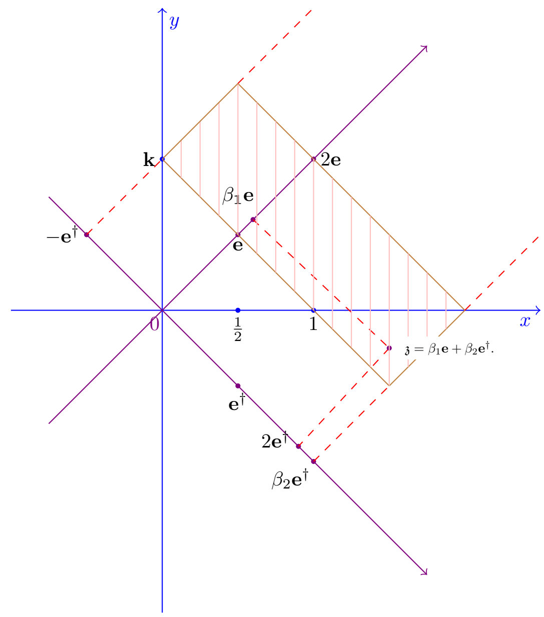

Figura 2.3: El intervalo hiperbólico $[\mathbf{k}, 2]_{\mathbb{D}}$.

2.6.3. Subconjuntos $\mathbb{D}$-acotados en $\mathbb{D}$

Dada un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{D}$, vamos a definir, de manera usual, la noción de $\mathbb{D}$-cota superior y $\mathbb{D}$-cota inferior, así como que un conjunto este $\mathbb{D}$-acotado superiormente, o bien, $\mathbb{D}$-acotado inferiormente y también lo que significa que un conjunto sea $\mathbb{D}$-acotado.

Diremos que α es una cota $\mathbb{D}$-superior (resp. una cota $\mathbb{D}$-inferior) para $\mathcal{A}$, si para cualquier $a \in \mathcal{A}$ sucede que a es comparable con α y $a \preceq \alpha$ (resp. $\alpha \preceq a$). Notemos que esto no significa que los elementos de $\mathcal{A}$ son comparables entre si; y que tampoco significa que dos cotas $\mathbb{D}$-superiores (o resp. dos cotas $\mathbb{D}$-inferiores) α y β son comparables.

Si $A \subset \mathbb{D}$ es un conjunto $\mathbb{D}$-acotado superiormente, definimos la noción de su $\mathbb{D}$-supremo, denotado como $\sup_{\mathbb{D}}\mathcal{A}$, como la mínima cota superior. Y de manera análoga se define el $\mathbb{D}$-ínfimo, denotado como $\inf_{\mathbb{D}}\mathcal{A}$ como la mayor cota inferior.

Aquí la “menor” cota superior significa que $\sup_{\mathbb{D}}\mathcal{A} \preceq \alpha$ para cualquier otra $\mathbb{D}$-cota superior α; aún cuando no todas las $\mathbb{D}$-cotas superiores sean comparables. Similarmente el significado de la “mayor” cota inferior es entendido.

Cualquier conjunto de números hiperbólicos, distinto del vacío, que es $\mathbb{D}$- acotado superiormente tiene $\mathbb{D}$-supremo, y si es $\mathbb{D}$-acotado inferiormente, entonces tiene $\mathbb{D}$-ínfimo.

Para encontrar supremos e ínfimos se puede proceder más fácilmente si consideramos lo siguiente: Dado un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{D}$, sean $\mathcal{A}_1 := \{a_1 | a_1\mathbf{e} + a_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathcal{A}\}$ y $\mathcal{A}_2 := \{a_2 | a_1\mathbf{e} + a_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathcal{A}\}$.

Si $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$-acotado superior, entonces $\sup_{\mathbb{D}}\mathcal{A}$ puede obtenerse con la siguiente fórmula:

$$\sup_{\mathbb{D}}\mathcal{A} = \sup\mathcal{A}_1 \cdot \mathbf{e} + \sup\mathcal{A}_2 \cdot \mathbf{e}^\dagger.$$

Si $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$-acotado inferiormente, entonces el $\inf_{\mathbb{D}}\mathcal{A}$ puede calcularse según la siguiente fórmula:

$$\inf_{\mathbb{D}}\mathcal{A} = \inf\mathcal{A}_1 \cdot \mathbf{e} + \inf\mathcal{A}_2 \cdot \mathbf{e}^\dagger.$$

Las fórmulas anteriores describen algo muy particular del orden parcial $\mathbb{D}$. Notemos que cuales quiera dos $\mathbb{D}$-cotas superiores pueden ser no comparables pero siempre son comparables con respecto a la $\sup_{\mathbb{D}}\mathcal{A}$. Así, también si tomamos las $\mathbb{D}$-cotas inferiores.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{D}$, denotamos como $-\mathcal{A}$ al conjunto de elementos de $\mathcal{A}$ multiplicados por -1, y denotamos por $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ al conjunto de sumas $\mathfrak{z} + \mathfrak{n}$ con $\mathfrak{z} \in \mathcal{A}$ y $\mathfrak{n} \in \mathcal{B}$ y definimos de la misma manera al conjunto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. Se tienen las siguientes proposiciones:

- Un conjunto $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$ acotado superiormente (inferiormente) si y sólo si el conjunto $-\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$-acotado inferiormente (superiormente), para dichos conjuntos se cumple lo siguiente:

$$\inf_{\mathbb{D}} -\mathcal{A} = -\sup_{\mathbb{D}} \mathcal{A}; \quad \sup_{\mathbb{D}} -\mathcal{A} = -\inf_{\mathbb{D}} \mathcal{A}.$$

- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathbb{D}$-acotados inferiormente, entonces el conjunto $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ también y para dichos conjuntos se tiene:

$$\inf_{\mathbb{D}} \mathcal{A} + \inf_{\mathbb{D}} \mathcal{B} = \inf_{\mathbb{D}} (\mathcal{A} + \mathcal{B}).$$

- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathbb{D}$-acotados superiormente, entonces el conjunto $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ también es acotado inferiormente y se cumple lo siguiente:

$$\sup_{\mathbb{D}} \mathcal{A} + \sup_{\mathbb{D}} \mathcal{B} = \sup_{\mathbb{D}} (\mathcal{A} + \mathcal{B}).$$

- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subconjuntos de $\mathbb{D}^+$ y si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathbb{D}$-acotados interiormente entonces el conjunto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ también está acotado inferiormente y para este conjunto se tiene:

$$\inf_{\mathbb{D}} (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \inf_{\mathbb{D}} \mathcal{A} \cdot \inf_{\mathbb{D}} (\mathcal{B}).$$

- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathbb{D}$-acotados superiormente, entonces el conjunto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ también es acotado superiormente y su supremo se calcula como:

$$\sup_{\mathbb{D}} (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \sup_{\mathbb{D}} (\mathcal{A}) \cdot \sup_{\mathbb{D}} (\mathcal{B}).$$

2.7. La norma hiperbólica en $\mathbb{BC}$

Hemos visto que para $Z = \beta_1 \mathbf{e} + \beta_2 \mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{BC}$, se tiene la siguiente fórmula:

$$|Z|_{\mathbf{k}} = |\beta_1| \mathbf{e} + |\beta_2| \mathbf{e}^\dagger.$$

Tenemos que la función:

$$|\cdot|_{\mathbf{k}} : \mathbb{BC} \to \mathbb{D}^+$$

cumple las propiedades:

(I) $|Z|_{\mathbf{k}} = 0$ sí y sólo si $Z = 0$.

(II) $|Z \cdot W|_{\mathbf{k}} = |Z|_{\mathbf{k}} \cdot |W|_{\mathbf{k}}$, para cualesquiera $Z, W \in \mathbb{BC}$;

(III) $|Z + W|_{\mathbf{k}} \preceq |Z|_{\mathbf{k}} + |W|_{\mathbf{k}}$ para cualesquiera $Z, W \in \mathbb{BC}$.

La primera propiedad es clara, la segunda se probó en el Capítulo 1. La tercera tiene la siguiente justificación:

$$\begin{aligned} |Z + W|_{\mathbf{k}} &= |(\beta_1 + \nu_1) \cdot \mathbf{e} + (\beta_2 + \nu_2) \cdot \mathbf{e}^\dagger|_{\mathbf{k}} \\ &= |\beta_1 + \nu_1| \cdot \mathbf{e} + |\beta_{1.9cm} + \nu_2| \cdot \mathbf{e}^\dagger \\ &\preceq (|\beta_1| + |\nu_1|) \cdot \mathbf{e} + (|\beta_2| + |\nu_2|) \mathbf{e}^\dagger \\ &= |Z|_{\mathbf{k}} + |W|_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Las propiedades (I) – (III) manifiestan que las propiedades del módulo hiperbólico de un número bicomplejo se comporta de manera similar a la del módulo de un número complejo.
Diremos que $|\cdot|_{\mathbf{k}}$ es una norma $\mathbb{D}$-valuada en el $\mathbb{BC}$-módulo $\mathbb{BC}$.

Observación 2.7.1 (1) *Como para cualquier $Z \in \mathbb{BC}$ se cumple que:*

$$|Z|_{\mathbf{k}} \preceq \sqrt{2} \cdot |Z|, \tag{2.21}$$

con $|Z|$ la norma Euclidiana de Z, entonces tenemos:

$$|Z \cdot W|_{\mathbf{k}} \preceq \sqrt{2}|Z| \cdot |W|_{\mathbf{k}}.$$

En contraste con las propiedades (II), esta desigualdad incluye las normas hiperbólica y Euclidiana simultáneamente.

(2) *Sean $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{D}^+$, se cumplen que,*

$$\mathfrak{z}_1 \preceq \mathfrak{z}_2, \quad \Longrightarrow \quad |\mathfrak{z}_1| \preceq |\mathfrak{z}_2|. \tag{2.22}$$

(3) *Notemos que la definición de norma hiperbólica de un número bicomplejo Z no depende de su representación idempotente. Se ha usado, para $Z \in \mathbb{BC}$ la representación $\mathbb{C}(\mathbf{i})$-idempotente, $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$. Si escribiéramos a Z en su forma $\mathbb{C}(\mathbf{j})$-idempotente, $Z = \alpha_1\mathbf{e}+\alpha_2\mathbf{e}^\dagger$, llegaríamos a que tiene la misma norma $|Z|_{\mathbf{k}}$, debido a que $|\beta_1| = |\alpha_1|$ y $|\beta_2| = |\alpha_2|$.*

(4) *La norma Euclidiana de la norma hiperbólica $|Z|_{\mathbf{k}}$ de un número hiperbólico Z coincide con la norma Euclidiana de Z, esto es:*

$$||Z|_{\mathbf{k}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2} = |Z|. \tag{2.23}$$

2.7.1. Grupos multiplicativos de $\mathbb{BC}$ y $\mathbb{D}$

El conjunto $\mathbb{R}^+$ es un grupo multiplicativo. Para el conjunto $\mathbb{D}^+$ la situación es mas complicada, aunque tiene ciertas analogías. Sea $\mathbb{D}^+_{inv} := \mathbb{D}^+ \setminus \mathfrak{S}_0$ el conjunto de números hiperbólicos invertibles. Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

- Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{D}^+_{inv}$, entonces $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \in \mathbb{D}^+_{inv}$;
- $1 \in \mathbb{D}^+_{inv}$;
- Si $\lambda \in \mathbb{D}^+_{inv}$, entonces $\lambda^{-1} \in \mathbb{D}^+_{inv}$.

Por lo tanto, $\mathbb{D}^+_{inv}$ es un grupo multiplicativo con respecto a la multiplicación hiperbólica, lo que lo hace un análogo a $\mathbb{R}^+$; algo mas, $\mathbb{R}^+$ es un subgrupo de $\mathbb{D}^+_{inv}$.
Los divisores de cero en $\mathbb{D}^+$ son de la forma $\mathfrak{z} = \lambda\mathbf{e}$ o de la forma $\mathfrak{z} = \mu\mathbf{e}^\dagger$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$; usaremos las notaciones $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}} := \{\lambda\mathbf{e} \,|\, \lambda > 0\}$ y $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}^\dagger} := \{\mu\mathbf{e}^\dagger \,|\, \mu > 0\}$. Ambos conjuntos son conjuntos de números hiperbólicos semi positivos, también son conjuntos cerrados bajo la multiplicación hiperbólica pero ninguno de ellos contiene al uno.

Podemos darle a $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}$ y $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}^\dagger}$ una estructura de grupo multiplicativo. Empezando con $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}$, observamos que para cualquier $\lambda > 0$ se tiene $\lambda\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$, y $\dfrac{1}{\lambda}\mathbf{e} \cdot \lambda\mathbf{e} = 1 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$. Entonces podemos dar a $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}$ la multiplicación $\star$ definida por $\lambda_1\mathbf{e} \star \lambda_2\mathbf{e} = \lambda_1\lambda_2\mathbf{e}$, donde $\lambda_1\mathbf{e}, \lambda_2\mathbf{e} \in \mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}$, que es una multiplicación hiperbólica en $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}$, y ver que en $(\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}},\star)$ se cumple:

1. Si $\lambda_1\mathbf{e}, \lambda_2\mathbf{e} \in \mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}$, entonces su producto $\lambda_1\mathbf{e} \star \lambda_2\mathbf{e} = \lambda_1\lambda_2\mathbf{e}$ está en $(\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}, \star)$.
2. El elemento $1 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ sirve de unidad $1_\star$ en la multiplicación $\star$, es decir: $1_\star \star \lambda\mathbf{e} = \mathbf{e}\lambda\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$.
3. Si $\lambda\mathbf{e} \in (\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}, \star)$, entonces $\dfrac{1}{\lambda}\mathbf{e}$ es su $\star$-inverso esto es: $\lambda\mathbf{e} \star \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{e} = 1 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} = 1_\star$.

Entonces, se puede concluir que $(\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}}, \star)$ es un grupo multiplicativo. Con un razonamiento similar podemos también concluir que $\mathbb{D}^+_{\mathbf{e}^\dagger}$, con cambios simples, es un grupo multiplicativo. Cada uno de estos grupos son isomorfos a $\mathbb{R}^+$.

Los conjuntos $\mathbb{D}_{inv} := \mathbb{D} \setminus \mathfrak{S}_0$ y $\mathbb{BC}_{inv} := \mathbb{BC} \setminus \mathfrak{S}_0$ son grupos multiplicativos con sus respectivas multiplicaciones, por lo tanto:

$$\mathbb{D}^+_{inv} \subset \mathbb{D}_{inv} \subset \mathbb{BC}_{inv},$$

donde $\subset$ significa inclusión con todo y estructura de grupos. Podemos usar los mismo argumentos en $\mathbb{D}_{\mathbf{e}} := \mathbf{e} \cdot \mathbb{D} \setminus \{0\} = \{\lambda \mathbf{e} \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $\mathbb{D}_{\mathbf{e}^\dagger} := \mathbf{e}^\dagger \cdot \mathbb{D} \setminus \{0\} = \{\mu \mathbf{e}^\dagger \mid \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}} \setminus \{0\}$, $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger} \setminus \{0\} := \{\mu \mathbf{e}^\dagger \mid \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Los primeros dos conjuntos son isomorfos al grupo multiplicativo de los números reales. Los últimos dos son isomorfos al grupo multiplicativo de los números complejos.

Capítulo 3

Geometría y representación trigonométrica en $\mathbb{BC}$

La geometría de los números complejos coincide con la del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^2$, lo que permite una buena compatibilidad entre la estructura algebraica de $\mathbb{C}$ y la geometría de $\mathbb{R}^2$, que es expresada por la igualdad:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{3.1}$$

Además, las operaciones algebraicas en los números complejos pueden ser fácilmente interpretadas en términos de la geometría del plano $\mathbb{R}^2$; por ejemplo, la múltiplicacion de números complejos, es entendida como sumar sus argumentos y multiplicar sus módulos, es equivalente a realizar una rotación y una homotecia en el plano euclidiano. Se desea extender esta idea para el espacio euclidiano $\mathbb{C}^2$.

Las propiedades geométricas de los cuaterniones son compatibles con la estructura Euclidiana de $\mathbb{C}^2$ de la misma manera en que los complejos son con la estructura Euclidiana de $\mathbb{C}$.

Pero debido a las diferentes estructuras algebraicas que tienen los bicomplejos, tenemos algo más sofisticado pues tenemos muchas formas cuadráticas, de hecho sabemos que las formas análogas de (3.1) son:

$$Z \cdot Z^{\dagger} = z_1^2 + z_2^2 = |Z|_{\mathbf{i}}^2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}), \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}); \tag{3.2}$$

$$Z \cdot \overline{Z} = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = |Z|_{\mathbf{j}}^2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}), \qquad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}); \tag{3.3}$$

$$Z \cdot Z^* = \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 = |Z|_{\mathbf{k}}^2 \in \mathbb{D}, \qquad \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{D}. \tag{3.4}$$

Además, la estructura Euclidiana de $\mathbb{BC} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ es producida por la siguiente forma cuadrática:

$$|Z|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2. \tag{3.5}$$

Esto significa que una geometría "auténtica" de los números bicomplejos esta relacionada con las formas cuadráticas, una $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$valuada, otra es $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$valuada, una forma cuadrática $\mathbb{D}-$valuada y una última forma cuadrática $\mathbb{R}-$valuada.

3.1. Dibujando y pensando en $\mathbb{R}^4$

Trataremos de describir la geometría de los números bicomplejos empezando con objetos en $\mathbb{R}^4$. Describiremos estos objetos usando a los bicomplejos, pues, si vemos a $\mathbb{BC}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tenemos que $\mathbb{BC} = \mathbb{R}^4$.

Antes de empezar a analizar figuras en $\mathbb{R}^4$ consideremos cubos de menores dimensiones. En $\mathbb{R}$ el cubo con un vértice en el origen y lado de longitud 1 es el segmento [0,1].

Usando este segmento, se puede construir el cubo dos dimensional pegando perpendicularmente el cubo de dimensión uno a cada uno de los puntos de [0,1]. Obteniendo así el cuadrado de lados iguales a uno.

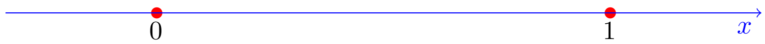

Figura 3.1: Cubo uno dimensional.

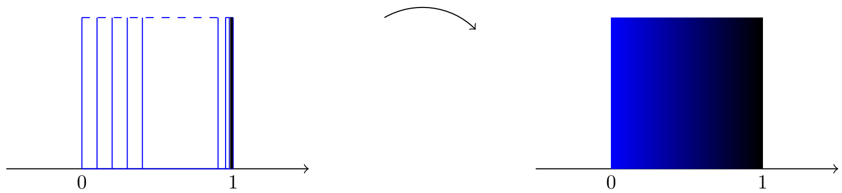

Figura 3.2: Cubo de dos dimensiones.

Extendiendo esta idea, se puede construir un cubo de lado unitario pegando al intervalo [0,1] un cubo de la dimensión anterior de manera perpendicular, es decir, ir pegando un cuadrado de lado uno perpendicularmente a cada uno de los puntos de dicho intervalo.Vea Figura 3.3.

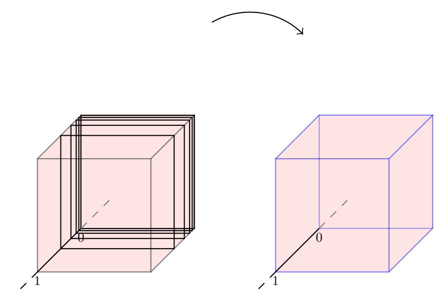

Figura 3.3: Cubo de tres dimensiones.

Para construir el cubo de cuatro dimensiones se repite el proceso, es decir, pegamos a cada uno de los puntos del intervalo [0,1] de manera perpendicular un cubo de lado 1 y de dimensión tres. Vease Figura 3.4.

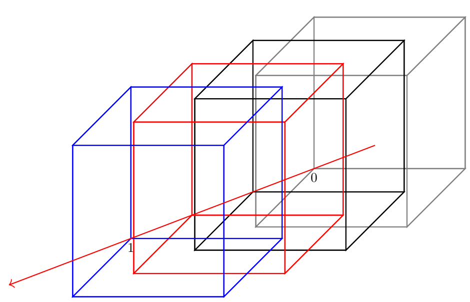

Figura 3.4: Cubo de cuatro dimensiones.

Como se puede ver, la intuición que tenemos de que podamos pegar de manera perpendicular un objeto tridimensional a otro unidimensional en el espacio tridimensional se nos hace imposible, pero como tenemos una dimensión mas por lo que si es posible la construcción de que todos los posibles cubos tridimensionales no se intersecan entre ellos y están todos pegados de manera perpendicular a los p untos del intervalo [0,1].

La misma idea nos puede ayudar a visualizar a todo el plano 4 dimensional con los ejes coordinados x_0, x_1, x_2, x_3: a cada punto del eje x_0, le pegamos, perpendicularmente una copia de $\mathbb{R}^3$. Véase Figura 3.5.

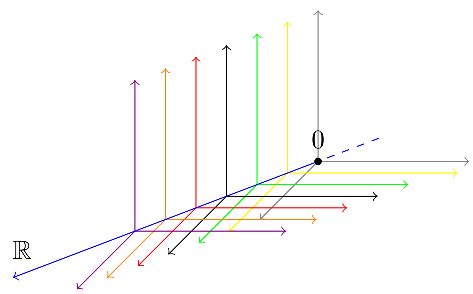

Figura 3.5: $\mathbb{R}^4$ como una unión infinita de copias de $\mathbb{R}^3$.

Otra manera de ver el mundo de cuatro dimensiones es la siguiente: Toma, por ejemplo, el plano de dimensión dos generado por 1 e **i**; a cada punto de este plano hay que pegarle perpendicularmente una copia del plano de dos dimensiones generado por **j** y **k**.

Cuando se menciona la perpendicularidad se refiere a que, implícitamente, los dos conjuntos pasan por el origen y son complementos ortogonales el uno con el otro; si uno no pasa por el origen de uno, entonces se vuelven complementos ortogonales si se trasladan al origen. Esta idea es clara con nuestra intuición de 3 dimensiones, y para la cuarta dimensión podemos buscar analogías, por ejemplo, un análogo a dos planos que son perpendiculares en $\mathbb{R}^4$ podrían ser dos rectas ortogonales en $\mathbb{R}^2$, o bien, una línea recta y un plano perpendicular a la recta en el caso de $\mathbb{R}^3$.

Tradicionalmente, el cubo de cuatro dimensiones, es presentado como un sólido en $\mathbb{R}^4$ cuya superficie tridimensional consiste en ocho cubos pegados en un forma muy particular.
Veremos que el acercamiento que planteamos aquí no contradice la idea tradicional. En lugar de pegar un cubo tridimensional en cada punto del intervalo $[0,1]$ en el eje x_0, el proceso será pegar cubos en cada uno de los puntos del intervalo [0,1] pero en el eje x_1, o en el eje x_2, o bien, en el eje x_3, denotaremos dichos intervalos como $[0,\mathbf{i}]$, $[0,\mathbf{j}]$ y $[0,\mathbf{k}]$ respectivamente, obteniendo la misma figura geométrica. Con esto en mente introduciremos lo siguiente:

- C_r es el cubo pegado al punto $r \in [0,1]$.
- I_s es el cubo pegado al punto $s \in [0,\mathbf{i}]$.
- J_u es el cubo pegado al punto $u \in [0,\mathbf{j}]$.
- K_v es el cubo pegado al punto $k \in [0,\mathbf{k}]$.

Proposición 3.1.1 *La frontera (topológica) de un cubo de cuatro dimensiones es la unión de los cubos de tres dimensiones $C_0, C_1, I_0, I_{\mathbf{i}}, J_0, J_{\mathbf{j}}, K_0$ y $K_{\mathbf{k}}$.*

Demostración.
Se sigue de notar que los cubos mencionados son los cubos "extremos" cuando los procesos descritos se aplican a cada uno de los intervalos: [0,1], [0, **i**], [0, **j**] y [0, **k**].

■

Para ver de forma más detallada como están pegados los cubos escribiremos a continuación los vértices de manera explícita.

Como se puede esperar, C_0 y C_1 son conjuntos disjuntos así como los conjuntos I_0 e $I_{\mathbf{i}}$. Sin embargo, los conjuntos C_0 e I_0 tienen en común los siguientes vértices: 0, $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{j}+\mathbf{k}$. Esto significa que están pegados en el cuadrado cuyos vértices son los anteriores mencionados.

De manera similar con C_0 e $I_\mathbf{i}$ están pegados al cuadrado $\mathbf{i}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

El cuadrado en común de los cubos C_1 e I_0 tiene los vértices 1, $1+\mathbf{j}, 1+\mathbf{k}, 1+\mathbf{j}+\mathbf{k}$; el cuadrado en común de los cubos C_1 e $I_\mathbf{i}$ tiene los vértices $1+\mathbf{i}, 1+\mathbf{i}+\mathbf{j}, 1+\mathbf{i}+\mathbf{k}, 1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Cubo	Vértices
C_0	0, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
C_1	1, $1+\mathbf{i}$, $1+\mathbf{j}$, $1+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
I_0	0, $\mathbf{j}$, $1+\mathbf{j}$, 1, $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{k}$.
$I_\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$, $1+\mathbf{i}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
J_0	0, 1, $\mathbf{i}$, $1+\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$, $1+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{k}$.
$J_\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$, $1+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
K_0	0, 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $1+\mathbf{i}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $1+\mathbf{j}$.
$K_\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$, $1+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $1+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Tabla 3.1: Cubos y sus vértices.

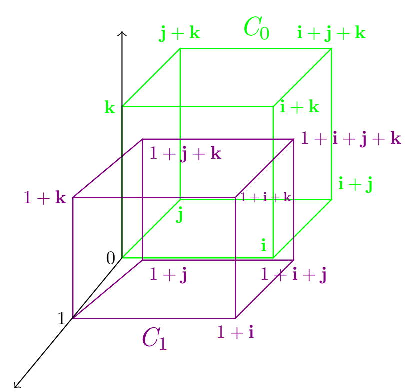

Figura 3.6: Los cubos C_0 y C_1 con sus vértices.

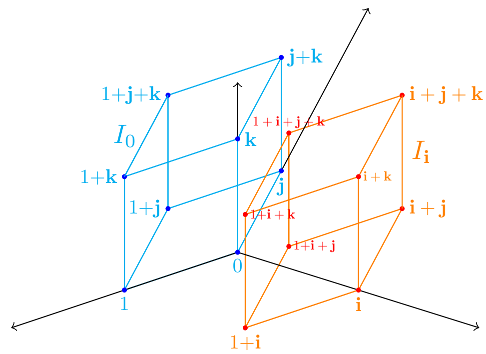

Figura 3.7: Los cubos I_0 e $I_\mathbf{i}$ y sus vértices.

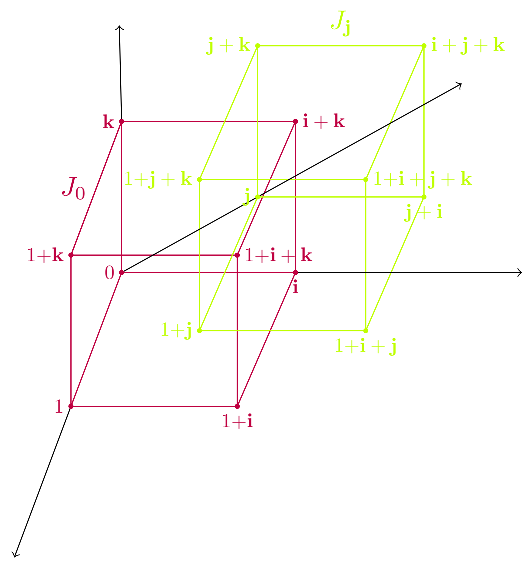

Figura 3.8: Los cubos J_0 y $J_\mathbf{j}$ con sus vértices.

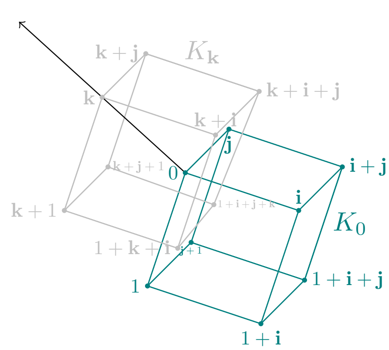

Figura 3.9: Los cubos K_0 y $K_\mathbf{k}$ sus vértices.

La Tabla 3.2 muestra:

- Los vértices del cubo de cuatro dimensiones (son dieciseis).
- Los vértices de cada uno de sus lados de tres dimensiones.
- Los vértices donde los lados tridimensionales se intersectan.

Observe que la primera columna nos da todos los vértices y los otras columnas nos muestran que cubo corresponde a cada vértice, además, cada renglón muestra los cubos con vértices fijos.

0	C_0		I_0		J_0		K_0	
1		C_1	I_0		J_0		K_0	
$\mathbf{i}$	C_0			$I_\mathbf{i}$	J_0		K_0	
$\mathbf{j}$	C_0		I_0			$J_\mathbf{j}$	K_0	
$\mathbf{k}$	C_0		I_0		J_0			$K_\mathbf{k}$
$1+\mathbf{i}$		C_1		$I_\mathbf{i}$	J_0		K_0	
$1+\mathbf{j}$		C_1	I_0			$J_\mathbf{j}$	K_0	
$1+\mathbf{k}$		C_1	I_0		J_0			$K_\mathbf{k}$
$\mathbf{i}+\mathbf{j}$	C_0			$I_\mathbf{i}$		$J_\mathbf{j}$	K_0	
$\mathbf{i}+\mathbf{k}$	C_0			$I_\mathbf{i}$	J_0			$K_\mathbf{k}$
$\mathbf{j}+\mathbf{k}$	C_0		I_0			$J_\mathbf{j}$		$K_\mathbf{k}$
$1+\mathbf{i}+\mathbf{j}$		C_1		$I_\mathbf{i}$		$J_\mathbf{j}$	K_0	
$1+\mathbf{i}+\mathbf{k}$		C_1		$I_\mathbf{i}$	J_0			$K_\mathbf{k}$
$1+\mathbf{j}+\mathbf{k}$		C_1	I_0			$J_\mathbf{j}$		$K_\mathbf{k}$
$1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$		C_1		$I_\mathbf{i}$		$J_\mathbf{j}$		$K_\mathbf{k}$
$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$	C_0			$I_\mathbf{i}$		$J_\mathbf{j}$		$K_\mathbf{k}$

Tabla 3.2: Vértices del cubo de cuatro dimensiones.

3.2. Representación trigonométrica en términos complejos

Cualquier número complejo tiene su representación trigonométrica o polar, en esta representación aparece el módulo y el argumento del número. Se mostrará primero que los números bicomplejos que no son divisores de cero o el cero, se pueden representar de manera trigonométrica, donde el módulo y el argumento son números complejos. También existe una representación donde el argumento y el módulo son téminos hiperbólicos.

Sea $Z \in \mathbb{BC} \setminus \mathfrak{S}_0$, es decir, $|Z|_\mathbf{i} \neq 0$. Entonces escribimos:

$$Z = z_1 + \mathbf{j} z_2 = |Z|_\mathbf{i} \left(\frac{z_1}{|Z|_\mathbf{i}} + \mathbf{j} \frac{z_2}{|Z|_\mathbf{i}} \right). \tag{3.6}$$

Como

$$\left(\frac{z_1}{|Z|_\mathbf{i}} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{|Z|_\mathbf{i}} \right)^2 = 1,$$

El sistema de ecuaciones trigonométricas

$$\cos \Theta = \frac{z_1}{|Z|_\mathbf{i}}, \qquad \operatorname{sen} \Theta = \frac{z_2}{|Z|_\mathbf{i}}, \tag{3.7}$$

tiene al menos una solución $\Theta \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$. De hecho tiene una infinidad de soluciones, debido a la periocidad de las funciones complejas seno y coseno.

Notemos que si Θ_0 es solución del sistema (3.7), entonces la igualdad $\tan\Theta_0 = \frac{z_2}{z_1}$ implica que $\frac{z_2}{z_1} \neq \pm\mathbf{i}$ (pues la función $\tan z$ toma cualquier valor en $\mathbb{C}$ excepto $\pm\mathbf{i}$, pues de lo contrario $e^{iz} = 0$ lo cual no es posible), pero esto es equivalente a decir que Z no es un divisor de cero. En analogía con el caso complejo, llamamos a cualquier solución del sistema (3.7) un **argumento complejo de un número bicomplejo** Z , y denotamos por $\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z)$ al conjunto de todas las soluciones. Si denotamos por $\Theta_0 = \theta_{01} + \mathbf{i}\,\theta_{02} \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ a la solución particular obtenida eligiendo su parte real $\theta_{01} \in [0, 2\pi)$, que se le llama *valor principal* del argumento complejo, entonces

$$\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) = \big\{\Theta_0 + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Para el valor principal del argumento complejo, se usará la notación $\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z)$. Para un $m \in \mathbb{Z}$ fijo, se denotará por $\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i}),m}(Z) := \arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) + 2m\pi$, por lo tanto

$$\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) := \big\{ \arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i}),m}(Z) \mid m \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Para un número bicomplejo invertible Z, obtenemos su forma $\mathbb{BC}_{\mathbf{i}}$ trigonométrica:

$$Z = |Z|_{\mathbf{i}}(\cos\Theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Theta), \tag{3.8}$$

donde Θ es un valor arbitrario del argumento complejo.

Recordemos que para un número complejo z, la representación polar es de la forma

$$z = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\alpha), \qquad r > 0$$

con $r = |z|$ y $\alpha \in \mathrm{Arg}(z)$.

La situación bicompleja es más sofisticada. Por ahora un número bicomplejo tiene una representación de la forma

$$Z = C \cdot (\cos\alpha + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}\,\alpha)$$

con α en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y C no es necesariamente el módulo complejo de Z; lo es ($C = |Z|_{\mathbf{i}}$) si C está en el semiplano superior, en este caso $\alpha \in \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}$. Si C está en el semiplano inferior, entonces $C = -|Z|_{\mathbf{i}}$ y $\alpha + \pi \in \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z)$: ya que

$$\begin{aligned} Z &= C(\cos\alpha + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\alpha) = -C(-\cos\alpha - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\alpha) \\ &= -C(\cos(\alpha+\pi) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\alpha+\pi)). \end{aligned}$$

Se ilustrará este fenómeno usando la representación $\mathbb{BC}_{\mathbf{i}} -$ *trigonométrica* del número $Z = z_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$. Por definición:

$$|Z|_{\mathbf{i}} = |z_1|_{\mathbf{i}} = \sqrt{z_1^2} = \begin{cases} z_1 & \text{si } z_1 \text{ está en el semiplano superior;} \\ -z_1 & \text{si } z_1 \text{ está en el semiplano inferior.} \end{cases}$$

Como $Z = z_1 = z_1(\cos 0 + \mathbf{j}\,\mathrm{sen} 0)$, entonces

$$\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) = \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(z_1) = \begin{cases} \{0 + 2\pi m = 2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\} & \text{si } z_1 \text{ está en el semiplano superior;} \\ \{0 + \pi + 2\pi m = (2m+1)\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} & \text{si } z_1 \text{ está en el semiplano inferior.} \end{cases}$$

Por lo que la representación trigonométrica de cualquier número complejo en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ es:

$$z_1 = z_1(\cos(2\pi m) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(2\pi m))$$

con $m \in \mathbb{Z}$ si z_1 pertenece al semiplano superior; y si pertenece al semiplano inferior, entonces

$$z_1 = -z_1(\cos((2m+1)\pi) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}((2m+1)\pi)), \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.2.1 *Se usan los nombres semiplano superior y semiplano inferior de la siguiente manera:*

El semiplano superior es $\Pi^+ := \{z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}) \mid Im(z) > 0 \quad o \quad z \in [0, \infty)\}$.

El semiplano inferior es $\Pi^- := \{z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}) \mid Im(z) < 0 \quad o \quad z \in (-\infty, 0)\}$.

Entonces $z \in \Pi^+$ *si y sólo si* $|z|_\mathbf{i} = z$ *y* $z \in \Pi^-$ *si y sólo si* $|z|_\mathbf{i} = -|z|$*, el módulo usual real valuado de los números reales. Por lo tanto el módulo* $|z|_\mathbf{i}$ *de un número complejo extiende el valor absoluto de los números reales, no el módulo usual de los números complejos.*

Si $Z \notin \mathfrak{S}_0$, entonces el módulo complejo de Z y el módulo de $Z^\dagger$ coinciden, lo hace que la representación trigonométrica de $Z^\dagger$ sea la siguiente

$$\begin{aligned} Z^\dagger = z_1 - \mathbf{j}z_2 &= |Z|_\mathbf{i}\left(\frac{z_1}{|Z|_\mathbf{i}} - \mathbf{j}\frac{z_2}{|Z|_\mathbf{i}}\right) \\ &= |Z|_\mathbf{i}(\cos\Theta - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Theta) \end{aligned}$$

con Θ como en (3.8).

Dado Z de la forma (3.8) y $W = |W|_\mathbf{i}(\cos\Omega + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Omega)$, se tiene:

$$\begin{aligned} ZW &= |Z|_\mathbf{i}(\cos\Theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Theta)(|W|_\mathbf{i}(\cos\Omega + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Omega)) \\ &= |Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i}(\cos\Theta\cos\Omega - \mathrm{sen}\Theta\mathrm{sen}\Omega) + \mathbf{j}\,(\cos\Theta\mathrm{sen}\Omega + \mathrm{sen}\Theta\cos\Omega)), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$ZW = |Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i}(\cos(\Theta + \Omega) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\Theta + \Omega)). \tag{3.9}$$

Como es mencionado anteriormente la fórmula (3.9) no necesariamente significa que $|ZW|_\mathbf{i}$ es igual a $|Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i}$ y que $\Theta + \Omega$ pertenece a $\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(ZW)$. Lo que si podemos concluir es lo siguiente:

(a) Si el número complejo $|Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i} \in \Pi^+$, entonces necesariamente

$$|ZW|_\mathbf{i} = |Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i};$$

sin embargo, en este caso $\Theta + \Omega \in \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(ZW)$ y $\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(ZW) = \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) + \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(W)$;

(b) si el número complejo $|Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i} \notin \Pi^+$ se sigue

$$|Z|_\mathbf{i}|W|_\mathbf{i} = -|ZW|_\mathbf{i};$$

en este caso $\Theta + \Omega + \pi \in \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(ZW)$ y $\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(ZW) + \pi = \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(Z) + \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(W)$.

La fórmula de De Moivre $\mathbb{BC}_\mathbf{i}$-análoga es una generalización menos directa de su antecedente complejo. Por una parte, podemos escribir que

$$Z^n = |Z|_\mathbf{i}^n(\cos\Theta_{Z^n} + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Theta_{Z^n}).$$

Por otro lado podemos obtener por inducción que

$$Z^n = |Z^n|_\mathbf{i}(\cos(n\Theta) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(n\Theta), \tag{3.10}$$

Pero no siempre $|Z^n|_\mathbf{i} = |Z|_\mathbf{i}^n$, ni $n\Theta$ coincide con Θ_{Z^n}. Coinciden cuando $|Z|_\mathbf{i}^n$ está en Π^+ de lo contrario

$$|Z|_\mathbf{i}^n = -|Z|_\mathbf{i}^n \text{ y } \Theta_{Z^n} = n\Theta + \pi.$$

Llamaremos a la fómula (3.10) la *fórmula bicompleja de De Moivre*, recordando que no siempre coincide con la representación trigonométrica en términos de Z^n.

Para números invertibles $Z \in \mathbb{BC}$, se cumple:

$$0 \neq ZZ^\dagger = z_1^2 + z_2^2,$$

es decir

$$ZZ^{\dagger}(z_1^2+z_2^2)^{-1} = ZZ^{\dagger}|Z|_{\mathbf{i}}^{-2} = 1.$$

Usando la fórmula trigonométrica de $Z^{\dagger}$ tenemos:

$$Z^{-1} = Z^{\dagger}|Z|_{\mathbf{i}}^{-2} = |Z|_{\mathbf{i}}\left(\cos\Theta - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Theta\right)|Z|_{\mathbf{i}}^{-2}$$

y finalmente

$$Z^{-1} = |Z|_{\mathbf{i}}^{-1}(\cos\Theta - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Theta). \tag{3.11}$$

Con lo anterior, la fórmula (3.10) es cierta para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. , Este resultado nos permite escribir el cociente de dos bicomplejos invertibles en su forma trigonométrica así:

$$\frac{Z}{W} = \frac{|Z|_{\mathbf{i}}}{|W|_{\mathbf{i}}}\left(\cos(\Theta-\Omega) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\Theta-\Omega)\right). \tag{3.12}$$

Si tomamos $W = Z^{\dagger}$ tenemos:

$$\frac{Z}{Z^{\dagger}} = (\cos(2\Theta) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(2\Theta)), \tag{3.13}$$

que es un número bicomplejo de módulo complejo 1.

Si en lugar de trabajar con $|Z|_{\mathbf{i}}$ trabajamos con $|Z|_{\mathbf{j}}$ la forma $\mathbb{BC}_{\mathbf{j}}-$*trigonométrica* de un número bicomplejo es

$$Z = |Z|_{\mathbf{j}}(\cos\Psi_0 + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\Psi_0), \tag{3.14}$$

donde el módulo complejo $|Z|_{\mathbf{j}}$ de un número complejo $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$ es

$$|Z|_{\mathbf{j}} = \sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2},$$

y $\Psi_0 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$. Las nociones de conceptos como el argumento, el argumento principal y todas las propiedades así como la fórmula de De Moivre son ciertas y análogas al caso $\mathbb{BC}_{\mathbf{i}}$, es claro el significado de la notación $\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{j})}(Z)$, $\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{j}),m}(Z)$, $\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{j})}(Z)$.

3.3. Representación trigonométrica en términos hiperbólicos

Para el propósito de esta sección será de gran utilidad la representación idempotente de los bicomplejos

$$Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}$$

donde $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$. Sabemos que $Z \notin \mathfrak{S}_0$, (es decir Z no es cero ni un divisor de cero) si y sólo si su módulo hiperbólico $|Z|_{\mathbf{k}}$ es positivo y no es un divisor de cero hiperbólico. Si esto ocurre, entonces lo siguiente es válido:

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}}|Z|_{\mathbf{k}}^{-1}(\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}) = |Z|_{\mathbf{k}}(|\beta_1|^{-1}\mathbf{e} + |\beta_2|^{-1}\mathbf{e}^{\dagger})(\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger})$$

que da pie a

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}}\left(\frac{\beta_1}{|\beta_1|}\mathbf{e} + \frac{\beta_2}{|\beta_2|}\mathbf{e}^{\dagger}\right), \tag{3.15}$$

donde los números complejos $\frac{\beta_1}{|\beta_1|}$ y $\frac{\beta_2}{|\beta_2|}$ son de módulo uno. Por lo que son de la forma

$$\frac{\beta_1}{|\beta_1|} = e^{\mathbf{i}\theta_1}, \qquad \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = e^{\mathbf{i}\theta_2} \tag{3.16}$$

con $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, por lo tanto, θ_1 y θ_2 estan bien definidos y tiene un significado geométrico. De la fórmula (3.15), consideremos el número hiperbólico

$$\Psi_Z := \theta_1\mathbf{e} + \theta_2\mathbf{e}^{\dagger}$$

que lo se le denomina el *argumento hiperbólico* o *ángulo hiperbólico*, asociado al número bicomplejo Z. Más adelante se justificarán estos nombres.

Primero, escribamos $Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2 \in \mathbb{BC} \setminus \mathfrak{S}_0$ como

$$Z = (x_1 + \mathbf{k}y_2) + \mathbf{i}(y_1 - \mathbf{k}x_2) = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2$$

con $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{D}$. Entonces $|Z|^2_{\mathbf{k}} = ZZ^* = \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 \in \mathbb{D}^+ \setminus \{0\}$, por lo tanto $|Z|_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2}$ es el valor de la raíz cuadrada que pertenece a $\mathbb{D}^+ \setminus \mathfrak{S}_0$. Luego, se sigue que

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}}|Z|^{-1}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2) = |Z|_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathfrak{z}_1}{\sqrt{\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2}} + \mathbf{i}\frac{\mathfrak{z}_2}{\sqrt{\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2}} \right), \tag{3.17}$$

donde la suma de los cuadrados de los números hiperbólicos $\frac{\mathfrak{z}_1}{\sqrt{\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2}}$ y $\frac{\mathfrak{z}_2}{\sqrt{\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{z}_2^2}}$ es uno.

Lo anterior se asemeja a la identidad trigonométrica que cumplen la función seno y coseno al sumar sus cuadrados:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

para toda $\alpha \in \mathbb{C}$, esta última identidad también se cumple para cualquier número bicomplejo. En particular para números en $\mathbb{D}$, entonces usando (3.8) se concluye que para cualquier número invertible Z existe un número hiperbólico

$$\Psi_0 := \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger$$

tal que

$$\cos\Psi_0 = \frac{\mathfrak{z}_1}{|Z|_{\mathbf{k}}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\Psi_0 = \frac{\mathfrak{z}_2}{|Z|_{\mathbf{k}}}; \tag{3.18}$$

observe que gracias a la periodicidad de las funciones la elección de ν_1 y ν_2 no son únicas.

Como Ψ_0 actua de alguna manera como el argumento hiperbólico, o el ángulo hiperbólico de Z, hay que establecer una relación entre Ψ_0 y Ψ_Z

Proposición 3.3.1 *Dado un número invertible Z, este tiene una representación trigonométrica hiperbólica ($\mathbb{BC}_{\mathbf{k}}$-representación trigonométrica) dada como*

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}}(\cos\Psi_Z + \mathbf{i}\operatorname{sen}\Psi_Z) = |Z|_{\mathbf{k}}(e^{\mathbf{i}\nu_1}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^\dagger)$$

con $\Psi_Z = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{D}^+_{inv}$ que llamaremos el ángulo hiperbólico o el argumento hiperbólico principal de Z.

Demostración.
Se sabe que (vea [1] capítulo 6, también [2])

$$\cos\Psi_0 = \cos(\nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger) = \cos\nu_1\mathbf{e} + \cos\nu_2\mathbf{e}^\dagger$$

y

$$\operatorname{sen}\Psi_0 = \operatorname{sen}(\nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger) = \operatorname{sen}\nu_1\mathbf{e} + \operatorname{sen}\nu_2\mathbf{e}^\dagger;$$

por lo tanto

$$\cos\Psi_0 + \mathbf{i}\operatorname{sen}\Psi_0 = (\cos\nu_1 + \mathbf{i}\operatorname{sen}\nu_1)\mathbf{e} + (\cos\nu_2 + \mathbf{i}\operatorname{sen}\nu_2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Combinando esta ecuación con (3.17) y (3.15) uno obtiene:

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}}(\cos\Psi_0 + \mathbf{i}\operatorname{sen}\Psi_0) = |Z|_{\mathbf{k}}((\cos\nu_1 + \mathbf{i}\operatorname{sen}\nu_1)\mathbf{e} + (\cos\nu_2 + \mathbf{i}\operatorname{sen}\nu_2)\mathbf{e}^\dagger) = |Z|_{\mathbf{k}} \left(\frac{\beta_1}{|\beta_1|}\mathbf{e} + \frac{\beta_2}{|\beta_2|}\mathbf{e}^\dagger \right).$$

Tomando en cuenta la periodicidad de las funciones trigonométricas y eligiendo valores para ν_1 y ν_2 en el intervalo $[0, 2\pi)$ se obtiene que Ψ_0 puede ser tomado igual a Ψ_Z. Se usará la notación Ψ_Z para enfatizar que el ángulo esta ligado a $Z \in \mathbb{BC} \setminus \mathfrak{S}_0$. ■

En contraste con el argumento complejo de un número bicomplejo que está definido únicamente para números invertibles, se puede definir también el argumento hiperbólico para divisores de cero. Considere, por ejemplo, un divisor de cero de la forma $Z = \beta_1\mathbf{e}$, entonces $ZZ^* = |\beta_1|^2\mathbf{e}$ lo que implica que $|Z|_{\mathbf{k}} = |\beta_1|\mathbf{e}$, es un número hiperbólico semi positivo, por lo tanto

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}} \frac{\beta_1}{|\beta_1|}\mathbf{e},$$

y como $\frac{\beta_1}{|\beta_1|}$ es un número complejo de módulo (real) uno, se puede escribir como $e^{\mathbf{i}\nu_1}$ con $\nu_1 \in [0, 2\pi)$. En este caso el ángulo hiperbólico asociado a Z es el divisor de cero hiperbólico

$$\nu := \nu_1 \mathbf{e}.$$

Análogamente, si $Z = \beta_2 \mathbf{e}^\dagger$, entonces $|Z|_{\mathbf{k}} = |\beta_2|\mathbf{e}^\dagger$ y

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}} \frac{\beta_2}{|\beta_2|}\mathbf{e}^\dagger = |Z|_{\mathbf{k}} e^{\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^\dagger.$$

En este caso, el ángulo hiperbólico asociado a Z es el divisor de cero hiperbólico

$$\nu := \nu_2 \mathbf{e}^\dagger$$

con $\nu_2 \in [0, 2\pi)$.

3.3.1. Propiedades algebraicas de la representación trigonométrica en términos hiperbólicos

En analogía con el argumento (real) de un número complejo y con los argumentos complejos de un número bicomplejo, se introduce la siguiente notación. Se denota con $\arg_{\mathbb{D}} Z$, para $Z \neq 0$, el argumento principal hiperbólicos de un Z, más concreto, $\arg_{\mathbb{D}} Z = \Psi_Z$ para $Z \in \mathbb{BC}_{inv}$ y $\arg_{\mathbb{D}} Z = \nu_1 \mathbf{e}$ o $\arg_{\mathbb{D}} Z = \nu_2 \mathbf{e}^\dagger$ para cualquier divisor de cero Z. Entonces, $\arg_{m,n;\mathbb{D}} Z$ es

$$\arg_{m,n;\mathbb{D}} Z := (\nu_1 + 2\pi m)\mathbf{e} + (\nu_2 + 2\pi n)\mathbf{e}^\dagger$$

para un Z invertible y de manera similar para un Z divisor de cero. Finalmente, $\mathrm{Arg}_{\mathbb{D}} Z$ denota al conjunto de todos los ángulos hiperbólicos posibles:

$$\mathrm{Arg}_{\mathbb{D}} Z := \{\arg_{m,n;\mathbb{D}} Z \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

para cualquier Z invertible y de manera similar si Z es divisor de cero.

Ejemplo 3.3.1 *Vamos a considerar las forma trigonométrica en términos hiperbólicos de ciertos bicomplejos.*

(a) Dado un número complejo $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, entonces $z = z\mathbf{e} + z\mathbf{e}^\dagger$; como se ha mencionado con anterioridad el módulo hiperbólico coincide con el módulo usual de los números complejos, i.e.,

$$|z|_{\mathbf{k}} = |z|\mathbf{e} + |z|\mathbf{e}^\dagger = |z|.$$

Por lo tanto, la representación trigonométrica en términos hiperbólicos es:

$$z = |z|\left(\frac{z}{|z|}\mathbf{e} + \frac{z}{|z|}\mathbf{e}^\dagger\right) = |z|(e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^\dagger) = |z|e^{\mathbf{i}\theta},$$

por lo que, la forma trigonométrica usual de un número complejo z y su forma trigonométrica en términos hiperbólicos, cuando es visto como un número bicomplejo, coinciden. En particular, el argumento hiperbólico de z, $\Psi_z = \theta\mathbf{e} + \theta\mathbf{e}^\dagger = \theta$, coincide con el argumento usual (real) de z. Así

$$Arg_{\mathbb{D}} z = Arg z = \{\theta + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) La unidad imaginaria $\mathbf{j}$ tiene forma idempotente $\mathbf{j} = (-\mathbf{i})\mathbf{e} + \mathbf{i}\mathbf{e}^\dagger$, lo que hace que $|\mathbf{j}|_{\mathbf{k}} = 1\mathbf{e} + 1\mathbf{e}^\dagger = 1$. Así su representación trigonométrica en términos hiperbólicos es

$$\mathbf{j} = |\mathbf{j}|_{\mathbf{k}}(-\mathbf{i}\mathbf{e} + \mathbf{i}\mathbf{e}^\dagger) = e^{\mathbf{i}\frac{3}{2}\pi}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}^\dagger,$$

y su argumento hiperbólico es $\Psi_{\mathbf{j}} = \dfrac{3\pi}{2}\mathbf{e} + \dfrac{\pi}{2}\mathbf{e}^\dagger$, por lo tanto

$$Arg_{\mathbb{D}}\mathbf{j} = \left\{ \left(\frac{3}{2} + 2m\right)\pi\mathbf{e} + \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi\mathbf{e}^{\dagger} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(c) Si $Z = \mathfrak{z} = a\mathbf{e} + b\mathbf{e}^{\dagger}$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$, *es decir,* $\mathfrak{z} \in \mathbb{D}$, $|\mathfrak{z}|_{\mathbf{k}} = |a|\mathbf{e} + |b|\mathbf{e}^{\dagger}$, *entonces su representación trigonométrica en forma hiperbólica es*

$$\mathfrak{z} = |\mathfrak{z}|_{\mathbf{k}} \left(\frac{a}{|a|}\mathbf{e} + \frac{b}{|b|}\mathbf{e}^{\dagger} \right) = |\mathfrak{z}|_{\mathbf{k}}(\pm\mathbf{e} \pm \mathbf{e}^{\dagger}).$$

Lo que hace que haya cuatro opciones del valor principal del argumento hiperbólico de un número hiperbólico como se indica en la Figura 3.10:

$$\Psi_{\mathfrak{z}} = 0\mathbf{e} + 0\mathbf{e}^{\dagger} = 0, \quad \Psi_{\mathfrak{z}} = 0\mathbf{e} + \pi\mathbf{e}^{\dagger} = \pi\mathbf{e}^{\dagger}, \quad \Psi_{\mathfrak{z}} = \pi\mathbf{e} + 0\mathbf{e}^{\dagger} = \pi\mathbf{e} \quad o \quad \Psi_{\mathfrak{z}} = \pi\mathbf{e} + \pi\mathbf{e}^{\dagger} = \pi.$$

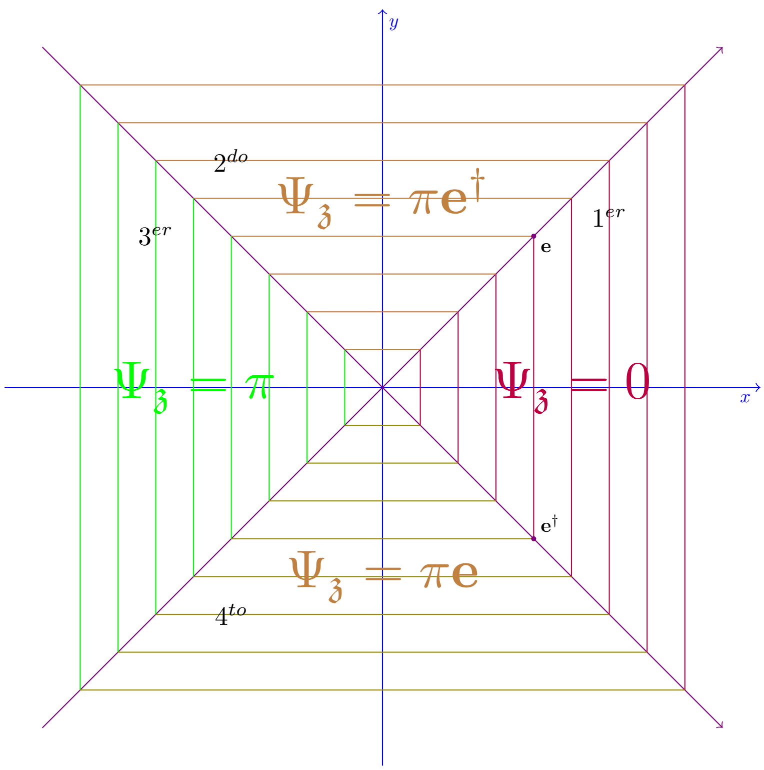

Figura 3.10: Argumentos hiperbólicos de números hiperbólicos vistos como bicomplejos.

Entonces el conjunto $Arg_{\mathbb{D}}\mathfrak{z}$, *dependiendo en que cuadrante se ubique el número* $\mathfrak{z}$, *es*

$$Arg_{\mathbb{D}}\mathfrak{z} = \begin{cases} \{2\pi(m\mathbf{e} + n\mathbf{e}^{\dagger}) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} & \textit{si } \mathfrak{z} \textit{ está en el 1er. cuadrante} \\ \{2\pi m\mathbf{e} + (2n+1)\pi\mathbf{e}^{\dagger} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} & \textit{si } \mathfrak{z} \textit{ está en el 2do. cuadrante} \\ \{(2m+1)\pi\mathbf{e} + 2n\pi\mathbf{e}^{\dagger} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} & \textit{si } \mathfrak{z} \textit{ está en el 3er. cuadrante} \\ \{(2m+1)\pi\mathbf{e} + (2n+1)\pi\mathbf{e}^{\dagger} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} & \textit{si } \mathfrak{z} \textit{ está en el 4to. cuadrante} \end{cases}$$

Regresando a las propiedades de las representaciones trigonométricas en términos hiperbólicos, tomando dos bicomplejos invertibles Z y W en su representación trigonométrica en téminos hiperbólicos, entonces

$$\begin{aligned} ZW &= |Z|_{\mathbf{k}}(\cos\Psi_Z + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\Psi_Z)|W|_{\mathbf{k}}(\cos\Psi_W + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\Psi_W) \\ &= |Z|_{\mathbf{k}}|W|_{\mathbf{k}}(e^{\mathbf{i}\nu_1}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^{\dagger})(e^{\mathbf{i}\mu_1}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\mu_2}\mathbf{e}^{\dagger}) \\ &= |ZW|_{\mathbf{k}}(\cos(\Psi_Z + \Psi_W) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\Psi_Z + \Psi_W)) \qquad (3.19) \\ &= |ZW|_{\mathbf{k}}\left(e^{\mathbf{i}(\nu_1+\mu_1)}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}(\nu_2+\mu_2)}\mathbf{e}^{\dagger}\right). \end{aligned}$$

Se puede concluir que

$$\mathrm{Arg}_{\mathbb{D}}(ZW) = \mathrm{Arg}_{\mathbb{D}}Z + \mathrm{Arg}_{\mathbb{D}}W.$$

De manera similar, si uno de los factores, o ambos, son divisores de cero.

En particular, si $Z = W$ obtenemos

$$\begin{aligned} Z^2 = &\quad |Z|_{\mathbf{k}}^2\left(e^{\mathbf{i}(2\nu_1)}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}(2\nu_2)}\mathbf{e}^{\dagger}\right) \\ = &\quad |Z|_{\mathbf{k}}^2\left((\cos(2\nu_1) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(2\nu_1)\mathbf{e}) + (\cos(2\nu_2) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(2\nu_2))\mathbf{e}^{\dagger}\right). \end{aligned}$$

Usando inducción, obtenemos el análogo de la fórmula de De Moivre; para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$Z^n = |Z|_{\mathbf{k}}^n\left(e^{\mathbf{i}(n\nu_1)}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}(n\nu_2)}\mathbf{e}^{\dagger}\right) = |Z|_{\mathbf{k}}^n\left((\cos(n\nu_1) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\nu_1)\mathbf{e}) + (\cos(n\nu_2) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\nu_2)\mathbf{e}^{\dagger})\right). \qquad (3.20)$$

Algo similar sucede en el caso de los divisores de cero.

Para un número bicomplejo invertible su módulo hiperbólico es un número hiperbólico invertible, entonces

$$Z^{-1} = |Z|_{\mathbf{k}}^{-1}\left(e^{-\mathbf{i}\nu_1}\mathbf{e} + e^{-\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^{\dagger}\right)$$

que implica, de manera inmediata que la fórmula bicompleja de De Moivre se cumple para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Veamos la relación de las representaciones trigonométricas en términos hiperbólicos de Z y Z^*. Como la conjugación $*$ de $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}$ es $Z^* = \overline{\beta_1}\mathbf{e} + \overline{\beta_2}\mathbf{e}^{\dagger}$, tenemos:

$$|Z^*|_{\mathbf{k}} = |\beta_1|\mathbf{e} + |\beta_2|\mathbf{e}^{\dagger} = |Z|_{\mathbf{k}},$$

por lo tanto

$$Z^* = |Z^*|_{\mathbf{k}}\left(\frac{\overline{\beta_1}}{|\beta_1|}\mathbf{e} + \frac{\overline{\beta_2}}{|\beta_2|}\mathbf{e}^{\dagger}\right) = |Z|_{\mathbf{k}}(e^{-\mathbf{i}\nu_1}\mathbf{e} + e^{-\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^{\dagger}),$$

podemos concluir que, $\mathrm{Arg}_{\mathbb{D}}Z^* = -\mathrm{Arg}_{\mathbb{D}}Z$.

Algo similar sucede con la conjugación de números complejos, recuerde que $arg z$=-$arg\overline{z}$.

3.3.2. Interpretación geométrica de la representación trigonométrica en términos hiperbólicos

Se verá, en analogía con el caso complejo, que la representación trigonométrica en términos hiperbólicos nos brinda una clara interpretación geométrica.

Como el módulo hiperbólico de un número bicomplejo $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^{\dagger}$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ es el número positivo (no necesariamente estrictamente positivo)

$$|Z|_{\mathbf{k}} = |\beta_1|\mathbf{e} + |\beta_2|\mathbf{e}^{\dagger},$$

se puede definir la esfera bicompleja $\mathbb{S}_{\gamma_0}$ con centro en el origen y con radio positivo $\gamma_0 = a_0\mathbf{e} + b_0\mathbf{e}^{\dagger} \in \mathbb{D}^+$ como

$$\mathbb{S}_{\gamma_0} := \{Z \in \mathbb{BC} \,|\, |Z|_{\mathbf{k}} = \gamma_0\}.$$

Veamos una interpretación geométrica de este conjunto.

Primero, observe que si a_0 o b_0 son cero entonces γ_0 es un divisor de cero, supongamos que $\gamma_0 = a_0\mathbf{e}$, entonces

$$\mathbb{S}_{\gamma_0} = \{Z = \beta_1\mathbf{e} \,|\, |\beta_1| = a_0\};$$

este conjunto es una circunferencia en el plano real de dimensión dos $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}}$ con centro en el origen y radio $\dfrac{a_0}{\sqrt{2}} = |a_0\mathbf{e}|$. De manera similar si $\gamma_0 = b_0\mathbf{e}^\dagger$, entonces el conjunto $\mathbb{S}_{\gamma_0}$ es una circunferencia en $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$ con centro en el origen y radio $b_0/\sqrt{2} = |b_0\mathbf{e}^\dagger|$.

Por lo tanto, cuando el radio de una esfera bicompleja es divisor de cero positivo, i.e., un número hiperbólico semi positivo, entonces la esfera, es una circunferencial usual. Observe Figura 3.11 y Figura 3.12

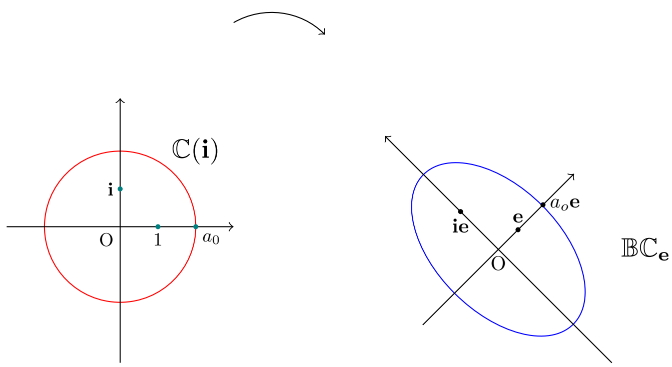

Figura 3.11: La esfera bicompleja $\mathbb{S}_{a_0\mathbf{e}}$.

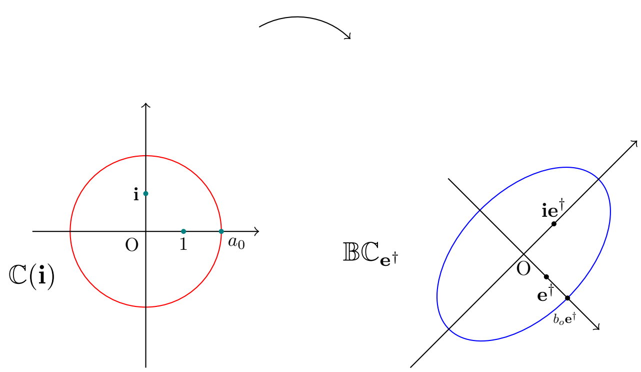

Figura 3.12: La esfera bicompleja $\mathbb{S}_{b_0\mathbf{e}^\dagger}$.

Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, entonces la intersección del plano hiperbólico $\mathbb{D}$ y la esfera $\mathbb{S}_{\gamma_0}$ consiste de cuatro números hiperbólicos $\pm a_0\mathbf{e} \pm b_0\mathbf{e}^\dagger$, es decir, en estos puntos el plano $\mathbb{D}$ toca la esfera de manera tangencial. Es decir que, en este caso, la esfera $\mathbb{S}_0$ es una variedad 3-dimensional con la forma de un toro (véase la Figura 3.13).

Se enfatizara el hecho de que aunque el toro es una superficie de 3 dimensiones, visto como una variedad, y su superficie es una 2-variedad, ambas variedades viven en un mundo de cuatro dimensiones. Lo anterior es porque la esfera $\mathbb{S}_{\gamma_0}$ esta dada como

$$\mathbb{S}_{\gamma_0} = \{Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \,|\, |\beta_1| = a_0, |\beta_2| = b_0\}$$

Lo que permite otra descripción de este conjunto: es el producto cartesiano de dos circunferencias, que identificaremos, una de ellas, como $C_{\mathbf{e}}\left(0; \dfrac{a_0}{\sqrt{2}}\right)$, que está en el plano $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}}$ dicha esfera esta anclada en el origen y su radio es $\frac{a_0}{\sqrt{2}}$; la otra esfera, denotada como $C_{\mathbf{e}^\dagger}\left(0; \frac{b_0}{\sqrt{2}}\right)$, se encuentra en el plano $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$ que tiene el origen como centro y $\frac{b_0}{\sqrt{2}}$ como radio. Se puede ver en Figura 3.13.

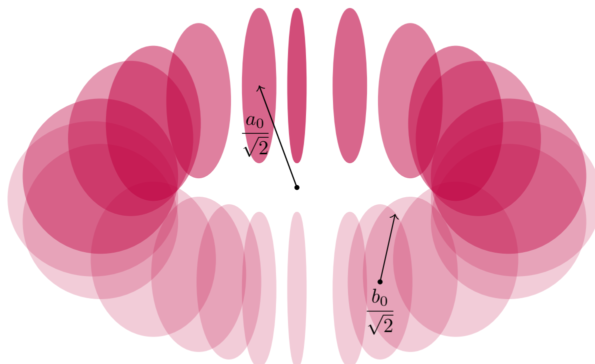

Figura 3.13: La esfera bicompleja de radio hiperbólico $a_0\mathbf{e} + b_0\mathbf{e}^\dagger$.

Estas esferas de radio hiperbólico le dan un sentido geométrico al argumento hiperbólico. Sea $Z \in \mathbb{BC}_{inv}$ escrito de la siguiente manera

$$Z = |Z|_{\mathbf{k}}(e^{\mathbf{i}\nu_1}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^\dagger)$$

con argumento hiperbólico de valor principal $\arg_{\mathbb{D}} Z = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{D}^+_{inv}$.

Sea γ_0 fijo tal que $|Z|_{\mathbf{k}} =: \gamma_0 = a_0\mathbf{e} + b_0\mathbf{e}^\dagger$, entonces todos los bicomplejos que tienen este número como módulo hiperbólico pertenecen a la esfera $\mathbb{S}_{\gamma_0}$ que es la superficie de un toro Euclideano; como se mencionó anteriormente, esta superficie puede ser vista como el producto cartesiano

$$C_{\mathbf{e}}\left(0; \frac{a_0}{\sqrt{2}}\right) \times C_{\mathbf{e}^\dagger}\left(0; \frac{b_0}{\sqrt{2}}\right)$$

Cualquier punto del toro tiene una correspondencia uno a uno con los números de la forma $\mu_1\mathbf{e}+\mu_2\mathbf{e}^\dagger$ donde $\mu_1, \mu_2 \in [0, 2\pi)$; y esto último está en correspondencia de uno en uno con las parejas de puntos donde cada uno pertenece a la correspondiente circunferencia:

$$a_0 e^{\mathbf{i}\mu_1}\mathbf{e} \in C_{\mathbf{e}}\left(0; \frac{a_0}{\sqrt{2}}\right),$$
$$b_0 e^{\mathbf{i}\mu_2}\mathbf{e}^\dagger \in C_{\mathbf{e}^\dagger}\left(0; \frac{b_0}{\sqrt{2}}\right).$$

Además,

$$a_0e^{\mathbf{i}\mu_1}\mathbf{e} + b_0e^{\mathbf{i}\mu_2}\mathbf{e}^\dagger = (a_0\mathbf{e} + b_0\mathbf{e}^\dagger)(e^{\mathbf{i}\mu_1}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\mu_2}\mathbf{e}^\dagger) = \gamma_0(e^{\mathbf{i}\mu_1}\mathbf{e} + e^{\mathbf{i}\mu_2}\mathbf{e}^\dagger) = Z.$$

Esto muestra que el valor del módulo hiperbólico de Z dice en que esfera Z está ubicado y su argumento hiperbólico determina el lugar exacto de Z en la esfera.

Observe que la esfera $\mathbb{S}_{\gamma_0}$ está en correspondencia biyectiva con el intervalo hiperbólico (véase la Figura 3.14)

$$[0, 2\pi)_{\mathbb{D}} = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{D} \,|\, 0 \preceq \mathfrak{z} \prec 2\pi\} = \{\mathfrak{z} = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger \,|\, \nu_1, \nu_2 \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{D}^+.$$

La correspondencia está dada por: $a_0e^{\mathbf{i}\nu_1}\mathbf{e} + b_0e^{\mathbf{i}\nu_2}\mathbf{e}^\dagger \longleftrightarrow \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger$.

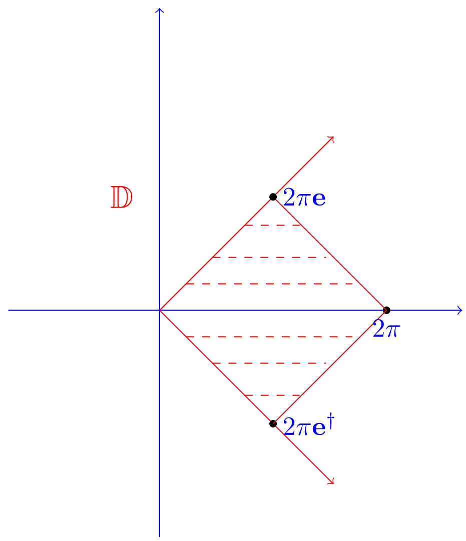

Figura 3.14: El intervalo hiperbólico $[0, 2\pi)_{\mathbb{D}}$.

3.4. Rectas en $\mathbb{BC}$

3.4.1. Rectas en el plano complejo

Una "línea recta" en el plano $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos $\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a_1x + a_2y = b\}$, donde a_1, a_2 y b son elementos de $\mathbb{R}$. y diremos que tiene ecuación,

$$a_1x + a_2y = b \tag{3.21}$$

Si escribimos como $a = (a_1, a_2)$ y $z = (x, y)$, la ecuación (3.21) es equivalente a

$$\langle a, z\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle (a_1, a_2), (x, y)\rangle_{\mathbb{R}^2} = b. \tag{3.22}$$

Si $a = a_1 + \mathbf{i}a_2$ y $z = x + \mathbf{i}y$, la ecuación (3.21) se puede escribir como $\overline{a}z + a\overline{z} = 2b$ que es equivalente a

$$Re(a\overline{z}) = Re(\overline{a}z) = b, \tag{3.23}$$

donde a resulta ser un vector normal a la recta. Por ejemplo si $z_1, z_2 \in \ell$, entonces $\langle a, z_1\rangle = \langle a, z_2\rangle = b$, por lo que $\langle a, z_2 - z_1\rangle = 0$, lo que asegura que $a \perp \ell$.

Si $a = |a|e^{\mathbf{i}\theta_0} = |a|(\cos\theta_0 + \mathbf{i}\,\operatorname{sen}\theta_0)$ y $z = |z|(\cos\theta + \mathbf{i}\,\operatorname{sen}\theta)$ (3.23) es equivalente a

$$|a||z|\cos(\theta - \theta_0) = b. \tag{3.24}$$

El ángulo que forma la recta con el eje real positivo es $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$. La tangente de tal ángulo se llama *la pendiente de la recta* y se denota por m; esto es $m = \tan(\theta_0 + \frac{\pi}{2})$.

Si la recta tiene la forma (3.21) y $a_2 \neq 0$ entonces $m = -\frac{a_1}{a_2}$. Si $a_2 = 0$, la recta es vertical (paralela al eje y). Si la recta tiene la forma de suma $\overline{a}z + a\overline{z} = 2b$ entonces tenemos que

$$z = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{z} + \frac{2b}{\overline{a}}. \tag{3.25}$$

Si $M := -\dfrac{a}{\overline{a}} = -\dfrac{a_1 + \mathbf{i}a_2}{a_1 - \mathbf{i}a_2} = -\dfrac{\frac{a_1}{a_2} + \mathbf{i}}{\frac{a_1}{a_2} - \mathbf{i}} = -\dfrac{-m + \mathbf{i}}{-m - \mathbf{i}} = -\dfrac{m - \mathbf{i}}{m + \mathbf{i}}$, entonces $m = \mathbf{i}\left(\dfrac{1 - M}{1 + M}\right)$.

Así la pendiente de la recta (3.21), o de cualquiera de sus ecuaciones, es

$$m = \tan(\theta_0 + \tfrac{\pi}{2}) = \mathbf{i}\left(\frac{1 - M}{1 + M}\right) = \mathbf{i}\frac{\overline{a} + a}{\overline{a} - a} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

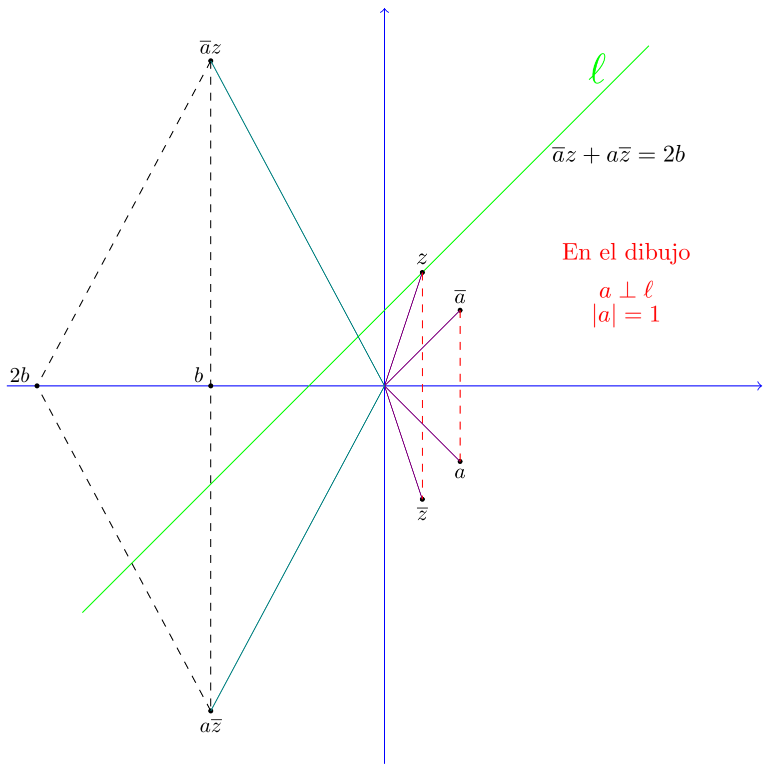

Figura 3.15: El punto z pertenece a ℓ si y sólo si $Re(\overline{a}z) = Re(a\overline{z})$.

En conclusión, el número complejo M es una "caracterización" intrínseca de la recta real, y determina la pendiente geométrica. Podemos simplificar la ecuación (3.25) de la siguiente manera

$$z = M\overline{z} + B \tag{3.26}$$

donde $B = \frac{2b}{a}$. Veamos algunos casos particulares

- Si $M = -1$. Como $-1 = M = \frac{a}{-\overline{a}}$, tenemos que $a = \overline{a} = a_1$ es un número real y entonces $a_2 = 0$, lo que garantiza que la línea recta es una recta vertical $a_1x = b$, que no tiene una pendiente bien definida. En coordenadas complejas la ecuación de esta recta vertical es $z = -\overline{z} + B$ donde $B = \frac{2b}{a_1}$ es un número real.
- Si $M = 1$. Tenemos en este caso que $a = -\overline{a} = \mathbf{i}a_2$, por lo que la línea recta es horizontal con ecuación $a_2y = b$. En coordenadas complejas la ecuación es $z = \overline{z} + B$ con $B = -\mathbf{i}\frac{2b}{a_2}$ que es un número imaginario puro.

Se conoce que si una línea recta pasa por un punto $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ y tiene pendiente $m \neq 0$, entonces la ecuación de la línea se escribe como

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3.27}$$

o en términos complejos

$$z - z_0 = M(\overline{z} - \overline{z_0}). \tag{3.28}$$

Si la línea se determina por dos puntos $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ y $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$, de manera que $x_0 \neq x_1$ entonces la recta tiene por ecuación

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{3.29}$$

En con coordenadas complejas,

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z}_1 - \overline{z}_0}(\overline{z} - \overline{z_0}) \tag{3.30}$$

en estas dos últimas ecuaciones, se tiene que $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ y $M = \dfrac{z_1 - z_0}{\overline{z}_1 - \overline{z}_0}$.

Si hacemos $\nu_1 = x_1 - x_0$, $\nu_2 = y_1 - y_0$, la ecuación (3.29), nos asegura que

$$\frac{y - y_0}{\nu_2} = \frac{x - x_0}{\nu_1} = t,$$

podemos usar a t como un parámetro para obtener lo que se conoce como ecuación paramétrica de la recta

$$x(t) = x_0 + t\nu_1, \qquad\qquad y(t) = y_0 + t\nu_2$$

recta que tiene dirección $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y pasa por el punto (x_0, y_0), la pendiente es $m = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$. Su número complejo característico asociado es

$$M = \frac{\nu_1 + \mathbf{i}\,\nu_2}{\nu_1 + \mathbf{i}\,\nu_2}$$

y su coeficiente complejo es $a = \nu_2 - \mathbf{i}\,\nu_1 = -\mathbf{i}(\nu_1 + \mathbf{i}\nu_2)$ y admite como ecuación paramétrica compleja a

$$z(t) = z_0 + t(\mathbf{i}a). \tag{3.31}$$

La representación paramétrica de la línea recta está ilustrada en la siguiente figura,

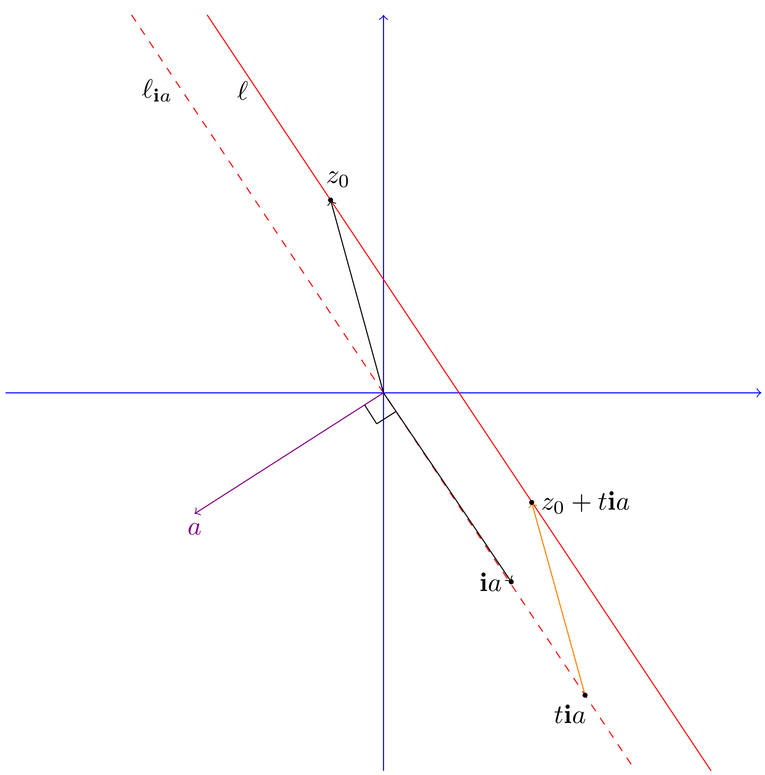

Figura 3.16: Representación paramétrica de una línea recta.

Todo punto w de la línea recta $\ell_{\mathbf{i}a}$ (que pasa por el origen y que tiene dirección $\mathbf{i}a$) es de la forma $w = t(\mathbf{i}a)$ con $t \in \mathbb{R}$. Cada punto de la recta se obtiene por una traslación $t(\mathbf{i}a) + z_0$ del punto $t(\mathbf{i}a)$ por el vector z_0, así:

$$\ell_{\mathbf{i}a} = \{t(\mathbf{i}a) + z_0 \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

3.4.2. Rectas reales en $\mathbb{BC}$

Si $Z_0, Z_1 \in \mathbb{BC}$ y Z_0 no es cero, la *línea recta real* con dirección Z_0 y que pasa por Z_1 es

$$\ell_{Z_0} + Z_1 = \{\lambda Z_0 + Z_1 \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3.4.3. Rectas complejas en $\mathbb{BC}$

Se define una línea recta compleja en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ como el conjunto de soluciones $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ de la ecuación

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 = b, \tag{3.32}$$

donde $a_1, a_2, b \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ son coeficientes fijos. La ecuación es equivalente a un sistema lineal real de 4 ecuaciones en 4 variables reales. Cuya solución por lo general será una plano bidimensional en $\mathbb{R}^4$ (si la matriz de coeficientes tiene rango 2).

Ahora si vemos a $\mathbb{BC}$ como $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ esto es si $Z \in \mathbb{BC}$ lo escribimos como $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, tenemos que $z_1 = \dfrac{Z + Z^\dagger}{2}$ y $z_2 = -\mathbf{j}\dfrac{Z - Z^\dagger}{2}$ y la línea recta compleja (3.32) se considera como una línea recta $\mathbb{C}(\mathbf{i}) - \textit{compleja}$ en $\mathbb{BC}$ con ecuación en los bicomplejos

$$A^\dagger Z + A Z^\dagger = 2b \tag{3.33}$$

donde $A = a_1 + \mathbf{j}a_2 \neq 0$ es su coeficiente bicomplejo (que tiene su similar en $\mathbb{C}$ como (3.23)).

Observación 3.4.1 *Si $a_1 = 0, a_2 = 1$ y $b = 0$, la ecuación (3.32) es $0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 = 0$, que tiene por solución el conjunto $\mathbb{C}(\mathbf{i}) \subset \mathbb{BC}$ $(z_1 \hookrightarrow (z_1 + 0 \cdot \mathbf{j}))$.*

Observación 3.4.2 *Si ahora $a_1 = 1, a_2 = 0$ y $b = 0$, la ecuación (3.32) es $1 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 = 0$, las soluciones son el conjunto $\mathbb{C}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{j} \subset \mathbb{BC}$ $(\mathbf{j}z_2 \hookrightarrow (0 + \mathbf{j}z_2))$.*

3.4.4. Representación paramétrica de líneas rectas en $\mathbb{BC}$

Veamos una alternativa para describir líneas rectas $\mathbb{C}(\mathbf{i}) - \textit{complejas}$ en $\mathbb{BC}$, es equivalente a lo anterior. Sean $Z_0 = z_1^0 + \mathbf{j}z_2^0 \in \mathbb{BC} \setminus \{0\}$ y $W_0 = w_1^0 + \mathbf{j}w_2^0 \in \mathbb{BC}$, arbitrarios, la línea recta $\mathbb{C}(\mathbf{i}) - \textit{compleja}$ que pasa por W_0 con dirección Z_0 es

$$L_{Z_0} + W_0 = \{\lambda Z_0 + W_0 \,:\, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbf{i})\}.$$

Veamos la relación que tiene está caracterización con la ecuación de la recta compleja (3.32). Si $Z \in L_{Z_0} + W_0$ con $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, entonces para algún $\lambda \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda z_1^0 + w_1^0 \\ z_2 &= \lambda z_2^0 + w_2^0 \end{aligned}$$

de donde $z_1 z_2^0 - z_2 z_1^0 = w_1^0 z_2^0 - w_2^0 z_2^0$, que es una forma particular de la ecuación

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 = b \tag{3.34}$$

con $a_1 = z_2^0, a_2 = -z_1^0$ y $b = w_1^0 z_2^0 - w_2^0 z_1^0$.
Recíprocamente, dada la ecuación $z_1 a_1 + z_2 a_2 = b$ con $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, podemos encontrar Z_0 y W_0 elementos de $\mathbb{BC} \setminus \{0\}$ tal que si $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ satisface (3.34), entonces Z pertenece a la línea recta compleja $L_{Z_0} + W_0$.

Es claro que de (3.34) podemos despejar z_1, como

$$z_1 = \frac{b - a_2}{a_1} + a_2 \frac{1 - z_2}{a_1},$$

entonces tomando $\lambda = \frac{z_2 - 1}{a_1}$, tenemos que si $z_1 = \frac{b - a_2}{a_1} - \lambda a_2$, que al sustituir en (3.34), se obtiene

$$z_2 = 1 + \lambda a_1,$$

por lo que $Z_0 = -a_2 + \mathbf{j}a_1$ y $W_0 = \frac{b-a_2}{a_1} + \mathbf{j}$ son números bicomplejos que garantizan las identidades:

$$\begin{aligned} \lambda Z_0 + W_0 &= -\lambda a_2 + \mathbf{j}\lambda a_1 + \tfrac{b-a_2}{a_1} + \mathbf{j} \\ &= \left(\tfrac{b-a_2}{a_1} - \lambda a_2\right) + \mathbf{j}(\lambda a_1 + 1) \\ &= z_1 + \mathbf{j}z_2 = Z \end{aligned}$$

por lo que Z es un punto de la línea recta compleja $L_{Z_0} + W_0$. Por último veamos como es la línea recta $a_1z_1 + a_2z_2 = b$ cuando $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$.

Supongamos que $a_1 = 0$ y $a_2 \neq 0$, esto es $a_2z_2 = b$. Desde luego si $b = 0$, deberá ser $z_2 = 0$ y la recta es $\{Z = z_1 + \mathbf{j}z_2 \in \mathbb{BC};\ z_2 = 0\}$ que es $\mathbb{C}(\mathbf{i}) \hookrightarrow \mathbb{BC}$.

Pero si $b \neq 0$, entonces $z_2 = \frac{b}{a_2}$ y z_1 puede ser cualquier número de $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, la recta es $L_{\mathbf{i}} + \frac{b}{a_2}\mathbf{j}$, donde $L_{\mathbf{i}} = \{\lambda\mathbf{i} : \lambda \in \mathbb{C}(\mathbf{i})\}$.

Si $a_2 = 0$ y $a_1 \neq 0$, entonces la ecuación es $a_1z_1 = b$, si $b \neq 0$ entonces la línea recta compleja es

$$L_{\mathbf{j}} + \tfrac{b}{a_1}$$

donde $L_{\mathbf{j}} = \{\lambda\mathbf{j} : \lambda \in \mathbb{C}(\mathbf{i})\}$.

3.4.5. Rectas hiperbólicas en $\mathbb{BC}$

En esta sección se tiene el interés en las soluciones $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \in \mathbb{D}^2$ de la ecuación

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{b}, \tag{3.35}$$

con $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ y $\mathfrak{b}$ en $\mathbb{D}$, pero solamente en aquellas soluciones que forman planos reales de dos dimensiones en $\mathbb{BC}$; aquellos conjuntos de soluciones los llamaremos *rectas hiperbólicas*, por lo que hay que analizar la ecuación (3.35) para diferentes combinaciones de los valores de sus coeficientes.

Escribiendo a $\mathfrak{z}_1 = x_1 + \mathbf{k}y_2$ y $\mathfrak{z}_2 = y_1 + \mathbf{k}(-x_2)$, se puede identificar la solución $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \in \mathbb{D}^2$ de (3.35) con el número bicomplejo $Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2 = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{BC}$, por lo tanto se dirá que Z es una solución de (3.35).
Como $Z^* = \mathfrak{z}_1 - \mathbf{i}\mathfrak{z}_2$, entonces

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{1}{2}(Z + Z^*); \qquad \mathfrak{z}_2 = \frac{\mathbf{i}}{2}(Z^* - Z)$$

y (3.35) se vuelve

$$A^*Z + AZ^* = 2\mathfrak{b}, \tag{3.36}$$

con el coeficiente complejo $A = \mathfrak{a}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{a}_2$.
Considere los siguientes casos como ejemplos

Ejemplo 3.4.1 *Si $\mathfrak{a}_1 = 0, \mathfrak{a}_2 = 1, \mathfrak{b} = 0$, entonces $\mathfrak{z}_2 = 0$ y $\mathfrak{z}_1$ toma cualquier valor hiperbólico, es decir, el conjunto de soluciones de la ecuación*

$$\mathfrak{z}_2 = 0,$$

es el conjunto $\{\mathfrak{z}_1 \,|\, \mathfrak{z}_1 \in \mathbb{D}\} = \mathbb{D}$.

Ejemplo 3.4.2 *Si $\mathfrak{a}_1 = 1, \mathfrak{a}_2 = 0, \mathfrak{b} = 0$, se obtiene la ecuación*

$$\mathfrak{z}_1 = 0,$$

que describe al conjunto $\mathbf{i}\mathbb{D}$.

Como es de esperarse los conjuntos $\mathbb{D}$ y $\mathbf{i}\mathbb{D}$ son rectas hiperbólicas. Recuerde que el plano de dos dimensiones (real) $\mathbb{D}$ no es una recta $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ compleja ni tampoco una recta $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ compleja.
Siguiendo con el análisis de (3.35), se escribirá cada número hiperbólico en su forma idempotente

$$\mathfrak{a}_1 = \alpha_1^1\mathbf{e} + \alpha_2^1\mathbf{e}^\dagger, \qquad \mathfrak{a}_2 = \alpha_1^2\mathbf{e} + \alpha_2^2\mathbf{e}^\dagger, \qquad \mathfrak{b} = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger,$$
$$\mathfrak{z}_1 = \eta_1^1\mathbf{e} + \eta_2^1\mathbf{e}^\dagger, \qquad \mathfrak{z}_2 = \eta_1^2\mathbf{e} + \eta_1^2\mathbf{e}^\dagger,$$

donde todos los coeficientes son reales, escribiendo a A de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A &= \mathfrak{a}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{a}_2 = \alpha_1^1\mathbf{e} + \alpha_2^1\mathbf{e}^\dagger + \mathbf{i}(\alpha_1^2\mathbf{e} + \alpha_2^2\mathbf{e}^\dagger) \\ &= (\alpha_1^1 + \mathbf{i}\alpha_1^2)\mathbf{e} + (\alpha_2^1 + \mathbf{i}\alpha_2^2)\mathbf{e}^\dagger \end{aligned}$$

y

$$Z = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2 = (\eta_1^1 + \mathbf{i}\eta_1^2)\mathbf{e} + (\eta_2^1 + \mathbf{i}\eta_2^2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Observamos que el componente $(\eta_1^1 + \mathbf{i}\eta_1^2)\mathbf{e} = \eta_1^1\mathbf{e} + \eta_1^2\mathbf{ie}$ puede verse como un punto (o vector) en el plano $\mathbb{BC}_\mathbf{e}$ (que es una recta compleja) con coordenadas (η_1^1, η_1^2); el mismo comentario se aplica a la otra componente de Z, así como ambas componentes de A.
Por lo tanto, (3.35) en forma idempotente es de la siguiente forma

$$(\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_1^2\eta_1^2)\mathbf{e} + (\alpha_2^1\eta_2^1 + \alpha_2^2\eta_2^2)\mathbf{e}^\dagger = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger,$$

que es equivalente a una pareja (no un sistema) de ecuaciones reales independientes

$$\begin{cases} \alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_1^2\eta_1^2 = \nu_1, \\ \alpha_2^1\eta_2^1 + \alpha_2^2\eta_2^2 = \nu_2. \end{cases} \tag{3.37}$$

Empezaremos excluyendo las situaciones donde el conjunto de soluciones es el conjunto vacío o $\mathbb{BC}$.

(I) $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} = 0$ (en este caso la ecuación (3.35) define todo $\mathbb{BC}$), es decir, $A = \mathfrak{b} = 0$.

(II) $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = 0$, $\mathfrak{b} \neq 0$ (en este caso el conjunto de soluciones es el conjutno vacío), es decir, $A = 0$ y $\mathfrak{b} \neq 0$.

(III) $\mathfrak{a}_1 = \alpha_1^1\mathbf{e}$ y $\mathfrak{a}_2 = \alpha_1^2\mathbf{e}$ con coeficientes reales α_1^1 y α_1^2 diferentes de cero simultáneamente, pero $\mathfrak{b} = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger$, con $\nu_2 \neq 0$ (conjunto vacio), es decir, $A = (\alpha_1^1 + \mathbf{i}\alpha_1^2)\mathbf{e}$ y $\mathfrak{b} \notin \mathbb{BC}_\mathbf{e}$.

(IV) $\mathfrak{a}_1 = \alpha_2^1\mathbf{e}^\dagger$ y $\mathfrak{a}_2 = \alpha_2^2\mathbf{e}^\dagger$ de la misma manera α_2^1 y α_2^2 números reales, diferentes de cero simultáneamente, pero $\mathfrak{b} = \nu_1\mathbf{e} + \nu_2\mathbf{e}^\dagger$, con $\nu_1 \neq 0$ (conjunto vacío), es decir, $A = (\alpha_2^1 + \mathbf{i}\alpha_2^2)\mathbf{e}^\dagger$ y $\mathfrak{b} \notin \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$.

En todas estas situaciones las soluciones de (3.35) no forma una recta hiperbólica.

Hay mas conjuntos de soluciones de (3.35) que no forma un plano real dos dimensional; ellos surgen si

(V) A y $\mathfrak{b}$ están en $\mathbb{BC}_\mathbf{e}$, es decir, $A = (\alpha_1^1 + \mathbf{i}\alpha_1^2)\mathbf{e}$ y $\mathfrak{b} = \nu_1\mathbf{e}$ (note que $\alpha_2^1 = \alpha_2^2 = \nu_2 = 0$).

(VI) A y $\mathfrak{b}$ están en $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$, es decir, $A = (\alpha_2^1 + \mathbf{i}\alpha_2^2)\mathbf{e}^\dagger$ y $\mathfrak{b} = \nu_2\mathbf{e}^\dagger$ (note que $\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = \nu_1 = 0$).

Si la condición (V) se cumple, entonces la segunda ecuación (3.37) determina todo el plano real dos dimensional $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$; por lo tanto (3.37) determina el producto cartesiano de la recta real $\mathbb{BC}_\mathbf{e}$ con el plano $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$, que es, un conjunto tres dimensional en $\mathbb{BC}$. Lo mismo se produce en el caso de (VI). No les llamamos a estos conjuntos rectas hiperbólicas.

Teorema 3.4.1 *La ecuación (3.35) determina una línea recta si y sólo si ninguna de las restricciones anteriores son válidas.*
Demostración.

Las ecuaciones idempotentes en (3.37) determinan un conjunto de dos dimensiones si y sólo si cada una de ellas determina un conjunto unidimensional, que se cumple si y sólo si ninguna de de las restricciones se cumplen.

■

Corolario 3.4.1 *Un plano real de dos dimensiones P en $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{BC}$ es una recta hiperbólica si y sólo si sus proyecciones en el las rectas complejas $\mathbb{BC}_\mathbf{e}$ y $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$ son rectas reales usuales.*

Observación 3.4.3 *Sea Γ_1 sea cualquier recta real en el plano $\mathbb{BC}_\mathbf{e}$ y sea Γ_2 sea cualquier recta real en el plano $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$; por el Teorema y el Corolario anterior el conjunto*

$$\Gamma_1\mathbf{e} + \Gamma_2\mathbf{e}^\dagger$$

es una recta hiperbólica en $\mathbb{BC}$ y cualquier recta hiperbólica es de esta forma.

Capítulo 4

Límites y continuidad

La noción de límite para funciones complejas es bien conocida y sus propiedades dependen fuertemente de las propiedades del módulo de un número complejo, que entre varias afirmaciones se destacan, para $a, b \in \mathbb{C}$ las siguientes:

$$|ab| = |a||b|, \qquad ||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|, \qquad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \qquad \textit{con} \qquad a \neq 0. \tag{4.1}$$

En particular, la existencia del límite de una función es equivalente a la existencia de los límites de su parte real y de su parte imaginaria. Además, el límite de una función existe si y sólo si el límite del conjugado de la función existe.

El propósito de este capítulo es extender la anterior idea a las funciones bicomplejas demostrando que existen similitudes pero también diferencias que se señalarán. De hecho, en lugar de las propiedades (4.1) para el módulo Euclidiano se tienen las propiedades análogas de la forma

$$|ZW| \leq \sqrt{2}|Z||W|, \qquad |Z+W| \leq |Z| + |W|, \tag{4.2}$$

estas propiedades ayudaran a repetir la mayor cantidad de pruebas. Por ahora recordemos que $|Z^{-1}|$ no es siempre igual a $\dfrac{1}{|Z|}$.

4.1. Sucesiones bicomplejas

Definición 4.1.1 *Una sucesión de números bicomplejos* $\{Z\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que es convergente, si existe* $Z_0 \in \mathbb{BC}$ *tal que para cualquier* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, si para cualquier* $n \geq N$ *se cumple,*

$$|Z_n - Z_0| < \epsilon.$$

En este caso decimos que Z_0 *es el límite de la sucesión. Lo anterior se denota como*

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_0,$$

y diremos que la sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* Z_0*. Para simplificar se denotará como* $Z_n \to Z_0$*.*

Observación 4.1.1 $Z_n \to Z_0$ *si y sólo si* $|Z_n - Z_0| \to 0$.

Observación 4.1.2 *Recordemos que*

$$\begin{aligned}
|Z|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 \\
&= |\mathfrak{z}_1|^2 + |\mathfrak{z}_2|^2 = |\mathfrak{w}_1|^2 + |\mathfrak{w}_2|^2 \\
&= |w_1|^2 + |w_2|^2 = |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 \\
&= \frac{1}{2}(|a_1|^2 + |a_2|^2) = \frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2).
\end{aligned}$$

Observación 4.1.3 *Si $Z_n \to Z_0$, $W_n \to W_0$ y $A \in \mathbb{BC}$ entonces*

$$Z_n \pm W_n \to Z_0 \pm W_0,$$
$$AZ_n \to AZ_0$$

Para justificar basta observar que:

$$|(Z_n \pm W_n) - (Z_0 \pm W_0)| \leq |Z_n - Z_0| + |W_n - W_0|$$
$$|AZ_n - AZ_0| \leq \sqrt{2}|A||Z_n - Z_0|.$$

Observación 4.1.4 *Si $Z_n \to Z_0$ y $W_n \to W_0$ entonces $Z_nW_n \to Z_0W_0$.*

Para justificar la observación 4.1.4 no es difícil ver que:
$(Z_nW_n - Z_0W_0) = (Z_n - Z_0)(W_n - W_0) + W_0(Z_n - Z_0) + Z_0(W_n - W_0)$, ahora por la desigualdad del triángulo y $|ZW| \leq \sqrt{2}|Z||W|$, se obtiene

$$|Z_nW_n - Z_0W_0| \leq \sqrt{2}|Z_n - Z_0||W_n - W_0| + \sqrt{2}|W_0||Z_n - Z_0| + \sqrt{2}|Z_0||W_n - W_0|,$$

ahora ya estamos en los reales y el lado derecho converge a cero.

Observación 4.1.5 *Sean $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números bicomplejos tales que $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = W_0 \notin \mathfrak{S}_0$, entonces los cocientes $\frac{Z_n}{W_n}$ están bien definidos para una n suficientemente grande y $\left\{\frac{Z_n}{W_n}\right\}_{n\to\infty}$ converge a $\frac{Z_0}{W_0}$.*

Para ver una justificación se usará la representación idempotente:

$$Z_n = \beta_{1n}\mathbf{e} + \beta_{2n}\mathbf{e}^\dagger, \qquad W_n = \gamma_{1n}\mathbf{e} + \gamma_{2n}\mathbf{e}^\dagger, \tag{4.3}$$

$$Z_0 = \beta_{10}\mathbf{e} + \beta_{20}\mathbf{e}^\dagger, \qquad W_0 = \gamma_{10}\mathbf{e} + \gamma_{20}\mathbf{e}^\dagger, \tag{4.4}$$

entonces

$$\frac{Z_n}{W_n} = \frac{\beta_{1n}}{\gamma_{1n}}\mathbf{e} + \frac{\beta_{2n}}{\gamma_{2n}}\mathbf{e}^\dagger.$$

Por hipótesis, los siguientes límites siguientes existen:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{1n} = \beta_{10},\ \lim_{n\to\infty} \beta_{2n} = \beta_{20},\ \lim_{n\to\infty} \gamma_{1n} = \gamma_{10},\ \lim_{n\to\infty} \gamma_{2n} = \gamma_{20}.$$

Como, $\gamma_{10} \neq 0$, $\gamma_{20} \neq 0$, entonces las sucesiones $\left\{\frac{\beta_{1n}}{\gamma_{1n}}\right\}_{n\geq N}$ y $\left\{\frac{\beta_{2n}}{\gamma_{2n}}\right\}_{n\geq N}$ están bien definidas para una $N \in \mathbb{N}$ y convergen a $\frac{\beta_{10}}{\gamma_{10}}$ y $\frac{\beta_{20}}{\gamma_{20}}$ respectivamente. Por lo tanto, $\left\{\frac{Z_n}{W_n}\right\}_{n\to\infty}$ es convergente y converge a $\frac{Z_0}{W_0}$.

Recordando las "buenas" propiedades del módulo hiperbólico, podemos introducir otra noción de convergencia en las sucesiones bicomplejas.

Definición 4.1.2 *Una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números bicomplejos converge hiperbólicamente (o es $\mathbb{D}$-convergente); si converge con respecto a la norma hiperbólica valuada $|\cdot|_{\mathbf{k}}$ a el número Z_0. Es decir, si para cualquier número hiperbólico estrictamente positivo ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ se cumple:*

$$|Z_n - Z_0|_{\mathbf{k}} \preceq \varepsilon.$$

Usando la representación idempotente

$$Z_n = \beta_{1n}\mathbf{e} + \beta_{2n}\mathbf{e}^\dagger;\ Z_0 = \beta_{10}\mathbf{e} + \beta_{20}\mathbf{e}^\dagger$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1\mathbf{e} + \varepsilon_2\mathbf{e}^\dagger,$$

se obtiene, que la desigualdad es equivalente a las dos desigualdades siguientes,

$$|\beta_{1n} - \beta_{10}| < \varepsilon_1 \text{ y } |\beta_{2n} - \beta_{20}| < \varepsilon_2;$$

lo que significa que $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al número Z_0 con respecto a la norma hiperbólica valuada si y sólo si converge a Z_0 con respecto al norma Euclidiana. Hacemos notar que aunque las normas no se pueden comparar, mientras toman valores en anillos diferentes, se sigue obteniendo los mismos conjuntos de sucesiones convergentes y divergentes. Por lo que se escribirá "sucesión convergente" sin especificar el tipo de convergencia.

4.2. La topología Euclidiana en $\mathbb{BC}$

Con anterioridad le hemos dado a $\mathbb{BC}$ una norma Euclidiana, que está asociada con la identificación $\mathbb{BC} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) = \mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, consideremos el espacio topológico $(\mathbb{BC}, \tau)$ donde τ es la topología usual o Euclidiana en $\mathbb{R}^4$, su base consiste en todas las bolas abiertas de $\mathbb{R}^4$. Como para cualquiera $Z, W \in \mathbb{BC}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} |Z+W| &\leq |Z| + |W|; \\ |ZW| &\leq \sqrt{2}|Z||W|, \end{aligned}$$

entonces la suma y la multiplicación son funciones continuas con respecto a τ, por lo que el espacio topológico $(\mathbb{BC}, \tau)$, es también un espacio vectorial topológico. Pero también $\mathbb{BC}$ es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, de igual modo sobre $\mathbb{C}(\mathbf{j})$, pero también es un módulo sobre $\mathbb{D}$, con operaciones continuas.

Además de las bolas Euclidianas abiertas también se consideran bolas abiertas bicomplejas con radios que no sean divisores de cero,

$$\{Z \mid |Z|_{\mathbf{k}} \prec \gamma\} \quad \text{con} \quad \gamma \in \mathbb{D}^+_{inv}.$$

Geométricamente, dicha bola puede ser vista como un bidisco en $\mathbb{C}^2$, por lo que dichas bolas forman otra base en la topología τ. En la Sección 4.1 se introdujo dos formas diferentes de convergencia de sucesiones. Ahora, considerando lo anterior, la convergencia es la misma con respecto a la topología usual pero una definición involucra a la base Euclidiana y la otra a la base con bolas bicomplejas con radios distintos a divisores de cero. Se puede usar cualquiera de las dos bases dependiendo cual convenga.

4.3. Continuidad de funciones bicomplejas

Dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{BC}$, cualquier función $F : \Omega \to \mathbb{BC}$ se le llamará una función bicompleja de variable bicompleja $Z \in \Omega$. Como Z y $F(Z)$ son números bicomplejos, cada uno admite cualquiera de las representaciones (1.1)-(1.7) y las representaciones idempotentes, entonces F puede interpretarse en formas diferentes: como una función de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ a $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, de $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ a $\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, de $\mathbb{BC}_{\{\mathbf{e},\mathbf{e}^\dagger\}}$ a $\mathbb{BC}_{\{\mathbf{e},\mathbf{e}^\dagger\}}$ y también de $\mathbb{D}^2$ a $\mathbb{D}^2$. Todos estas funciones son diferentes pero todas coinciden cuando la estructura bicompleja es considerada.

Se ilustrará lo anterior con un ejemplo. Considere la función bicompleja $F(Z) = Z^2$ y sus diferentes maneras de escribirla de acuerdo a sus diferentes representaciones:

$$\begin{aligned} F(Z) = Z^2 &= (z_1 + \mathbf{j}z_2)^2 = (z_1^2 - z_2^2) + \mathbf{j}(2z_1z_2) \\ &= (\gamma_1 + \mathbf{i}\gamma_2)^2 = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \mathbf{i}(2\gamma_1\gamma_2) \\ &= (\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger)^2 = \beta_1^2\mathbf{e} + \beta_2{}^2\mathbf{e}^\dagger \\ &= (\mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2)^2 = (\mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2) + \mathbf{i}(2\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2). \end{aligned}$$

Esto genera las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \ni (z_1, z_2) &\mapsto (z_1^2 - z_2^2, 2z_1z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}); \\ \mathbb{C}^2(\mathbf{j}) \ni (\gamma_1.\gamma_2) &\mapsto (\gamma_1^2 - \gamma_2^2, 2\gamma_1\gamma_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{j}); \\ \mathbb{D}^2 \ni (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) &\mapsto (\mathfrak{z}_1^2 - \mathfrak{z}_2^2, 2\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) \in \mathbb{D}^2. \end{aligned}$$

Consideremos Z_0 un punto en la cerradura de Ω. Diremos que la función F tiene *límite* A en Z_0 si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|Z - Z_0| < \delta$ entonces $|F(Z) - A| < \epsilon$. Como es usual en los espacios métricos, es equivalente a decir que para cualquier sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z_0$, la sucesión $\{F(Z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Se obtiene lo siguiente:

(I) Si el límite $\lim\limits_{Z\to Z_0} F(Z)$ existe, entonces es único.

(II) Si el límite $\lim\limits_{Z\to Z_0} F(Z)$ existe, entonces la función F está acotada en una bola Euclidiana con centro en Z_0 y es $\mathbb{D}$-acotada en una bola bicompleja con radio que no sea un divisor de cero.

(III) Si $\lim_{Z\to Z_0} F(Z) = A \notin \mathfrak{S}_0$, entonces existe una bola B con centro en Z_0 tal que para toda $Z \in B$, $F(Z) \notin \mathfrak{S}_0$.

(IV) Si $\lim_{Z\to Z_0} F(Z) = A$, $\lim_{Z\to Z_0} G(Z) = B$, entonces la suma, el producto y el cociente (si $B \notin \mathfrak{S}_0$) tienen límite en Z_0 y las fórmulas usuales para dichas expresiones se cumplen.

Una función bicompleja es ***continua*** en el punto $Z_0 \in \Omega \subset \mathbb{BC}$, si el $\lim_{Z\to Z_0} F(Z)$ existe y es igual a $F(Z_0)$, esto es,

$$\lim_{Z\to Z_0} F(Z) = F(Z_0).$$

Entonces, se dice que la función bicompleja $F : \Omega \to \mathbb{BC}$, donde $\Omega \subset \mathbb{BC}$, es continua en Ω si y sólo si F es continua en todo $Z_0 \in \Omega$.

Ya que hay diferentes maneras de escribir a los números bicomplejos, F hereda las representaciones análogas, específicamente:

$$F = f_1 + \mathbf{j}f_2 = \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 = g_1 + \mathbf{k}g_2 = \gamma_2 + \mathbf{k}\gamma_2 = \mathfrak{f}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_1 + \mathbf{j}\mathfrak{g}_2 = f_{11} + \mathbf{i}f_{12} + \mathbf{j}f_{21} + \mathbf{k}f_{22},$$

donde f_1, f_2, g_1, g_2 son funciones $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ valuadas, $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2$ son funciones $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ valuadas, $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ son funciones hiperbólicas valuadas, y $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$, son real valuadas, todas de variable bicompleja Z.

Teorema 4.3.1 *Una función F es continua si y sólo si sus componentes son continuas, es decir, si F se escribe de cualquiera de las diferentes maneras mencionadas anteriormente, F es continua si y sólo si f_1, f_2 son funciones continuas o ρ_1, ρ_2 son funciones continuas o g_1, g_2 son funciones continuas o γ_1, γ_2 son funciones continuas o $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ son funciones continuas o $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ son funciones continuas o $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ son funciones continuas.*

Como en el caso complejo, es fácil probar que si dos funciones son continuas en un punto, entonces su suma y producto es continuo en ese punto. Además, si la segunda función toma un valor invertible en Z_0, entonces el cociente es continuo en ese punto. Así como la composición de funciones continuas también es continua.

Capítulo 5

Funciones bicomplejas elementales

5.1. Polinomios de una variable bicompleja

5.1.1. Polinomios reales y complejos

Una polinomio complejo es una expresión de la forma

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

donde $a_k \in \mathbb{C}$ y z es una variable compleja. Si $a_n \neq 0$ se dice que el polinomio es de grado n. Un polinomio de grado cero, por definición es una función constante distinta de cero. Cuando $a_k \in \mathbb{R}$, para toda k, el polinomio $p(z)$ es llamado polinomio real de una variable compleja. Observe que $p(z)$ es un polinomio real de variable compleja si y sólo si

$$\overline{p(\overline{z})} = p(z) \tag{5.1}$$

para toda $z \in \mathbb{C}$. Se concluye que si $p(a) = 0$, entonces $p(\overline{a}) = 0$; es decir el número a es real o p tiene a a y a su conjugado $\overline{a}$ como ceros.

Escribiendo (5.1) como $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$, concluimos que el rango $p(\mathbb{C})$ del polinomio real p es simétrico con respecto al eje real. Una de las propiedades mas destacables de los polinomios complejos está establecida en el teorema fundamental del álgebra que asegura que un polinomio complejo de grado n con $n \geq 1$, tiene exactamente n ceros considerando multiplicidades. Las pruebas usuales de este teorema usan métodos de topología y de análisis. En particular si $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios de grado no mayor a n y se cumple $p(z) = q(z)$ para $n + 1$ puntos distintos entonces $p = q$.

Observe que los polinomios reales de variable compleja obedecen al teorema fundamental del álgebra, pero la situación con los polinomios reales de variable real es diferente: cualquier polinomio de grado $n > 0$ puede tener cualquier número de ceros hasta n. Se verá que pasa, en este sentido, con los polinomios bicomplejos.

5.1.2. Polinomios bicomplejos

Una expresión de la forma,

$$p(Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k Z^k$$

con $A_k \in \mathbb{BC}$ se dirá que es un *polinomio bicomplejo* de grado n, con variable bicompleja Z. Escribamos $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ en su forma $\mathbb{C}(\mathbf{i}) - idempotente : Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ con $\beta_1 := z_1 - \mathbf{i}z_2$ y $\beta_2 := z_1 + \mathbf{i}z_2$. Se escriben también a las coeficientes de la siguiente manera $A_k = \gamma_k\mathbf{e} + \delta_k\mathbf{e}^\dagger$, para $k = 0, \ldots, n$. Entonces $Z^k = \beta_1^k\mathbf{e} + \beta_2^k\mathbf{e}^\dagger$ y el polinomio puede reescribirse en términos idempotentes como

$$p(Z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\gamma_k \beta_1^k\right) \mathbf{e} + \sum_{k=0}^{n} \left(\delta_k \beta_2^k\right) \mathbf{e}^\dagger =: \phi(\beta_1)\mathbf{e} + \psi(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Si denotamos al conjunto de raíces distintas de ϕ y ψ por S_1 y S_2, y si denotamos por S el conjunto de raíces distintas del polinomio p, entonces

$$S = S_1\mathbf{e} + S_2\mathbf{e}^\dagger,$$

entonces la estructura del conjunto nulo de un polinomio bicomplejo $p(Z)$ de grado n esta completamente descrita por los siguientes tres casos:

1. Si ambos polinomios ϕ y ψ son de grado al menos uno, y si $S_1 = \{\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,k}\}$ y $S_2 = \{\beta_{2,1}, \ldots, \beta_{2,l}\}$, entonces el conjunto de las distintas raíces de p está dado por

$$S = \{Z_{s,t} = \beta_{1,s}\mathbf{e} + \beta_{2,t}\mathbf{e}^\dagger \mid s = 1, \ldots, k; t = 1, \ldots, l\}.$$

2. Si ϕ es idénticamente cero, entonces $S_1 = \mathbb{C}$ y $S_2 = \{\beta_{2,1}, \ldots, \beta_{2,l}\}$, con $l \leq n$.

   Por lo tanto

$$S = \{Z_t = \lambda\mathbf{e} + \beta_{2,t}\mathbf{e}^\dagger \mid \lambda \in \mathbb{C}, t = 1, \ldots, l\}.$$

   De manera similar, si ψ es idénticamente cero, entonces $S_2 = \mathbb{C}$ y $S_1 = \{\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,k}\}$, donde $k \leq n$. Entonces

$$S = \{Z_s = \beta_{1,s}\mathbf{e} + \lambda\mathbf{e}^\dagger \mid \lambda \in \mathbb{C}, s = 1, \ldots, k\}.$$

3. Si todos los coeficientes A_k con la excepción $A_0 = \gamma_0\mathbf{e} + \delta_0\mathbf{e}^\dagger$ son múltiplos complejos de $\mathbf{e}$ (respectivamente $\mathbf{e}^\dagger$), pero $\delta_0 \neq 0$ (respectivamente $\gamma_0 \neq 0$), entonces p no tiene raíces.

Se harán ejemplos para obtener S, S_1, S_2.

Ejemplo 5.1.1 *Consideremos el siguiente polinomio*

$$\begin{aligned} p(Z) = \quad & \left(\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\mathbf{i}}{2}\right) Z^5 + (-(1+4\mathbf{i}) + 2\mathbf{j}(2-\mathbf{i}))Z^4 + ((-11+6\mathbf{i}) - \mathbf{j}(12+11\mathbf{i}))Z^3 \\ & + \left(\left(\frac{29}{2} + 13\mathbf{i}\right) + \mathbf{j}\left(-13 + \frac{47}{2}\mathbf{i}\right)\right) Z^2 + \left(\left(\frac{13}{2} - 17\mathbf{i}\right) + \mathbf{j}\left(17 + \frac{13}{2}\mathbf{i}\right)\right) Z - \left(\frac{11}{2} + \mathbf{i}\right) + \mathbf{j}\left(1 - \frac{11}{2}\mathbf{i}\right). \end{aligned}$$

Los $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ polinomios correspondientes son:

$$\begin{aligned} \phi(\beta_1) \quad &= \beta_1^5 - (3+8\mathbf{i})\beta_1^4 + 2(-11+9\mathbf{i})\beta_1^3 + 2(19+13\mathbf{i})\beta_1^2 + (13-34\mathbf{i})\beta_1 - (11+2\mathbf{i}), \\ \psi(\beta_2) \quad &= \beta_2^4 - 6\mathbf{i}\beta_2^3 - 9\beta_2^2. \end{aligned}$$

Las raíces distintas son $S_1 = \{\mathbf{i}, 1+2\mathbf{i}\}$ y $S_2 = \{0, 3\mathbf{i}\}$. Entonces p tiene las siguientes cuatro raíces:

$$S = \left\{\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j},\ 2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \frac{1+2\mathbf{i}}{2} + \mathbf{j}\frac{-2+\mathbf{i}}{2},\ \frac{1+5\mathbf{i}}{2} + \mathbf{j}\frac{1+\mathbf{i}}{2}\right\}.$$

Ejemplo 5.1.2 *Considere el polinomio*

$$p(Z) = (1 + \mathbf{ij})Z^2 - (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 2(\beta_1^2 - \mathbf{i})\mathbf{e}.$$

Los polinomios complejos asociados son:

$$\phi(\beta_1) = 2(\beta_1^2 - \mathbf{i}), \quad \psi(\beta_2) \equiv 0.$$

El conjunto nulo de p es

$$S = \left\{ \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \mathbf{e} + \lambda\mathbf{e}^\dagger \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Ejemplo 5.1.3 *El polinomio:*

$$p(Z) = (1 + \mathbf{ji})Z^2 + (1 - \mathbf{i}) + \mathbf{j}(1 - \mathbf{i}) = (2\beta_1^2 - \mathbf{i})\mathbf{e} + 2\mathbf{e}^\dagger,$$

cuyos polinomios complejos asociados son:

$$\phi(\beta_1) = 2(\beta_1^2 - \mathbf{i}), \quad \psi(\beta_2) \equiv 2,$$

por lo que $p(Z)$ no tiene raíces, pues va a tener cuando $\phi(\beta_1)$ y $\psi(\beta_2)$ ambos tengan.

También es importante notar que el polinomio bicomplejo puede no tener una factorización única. Por ejemplo, el polinomio $Z^3 - 1$ tiene 9 ceros. Los polinomios complejos asociados son

$$\phi(\beta_1) = \beta_1^3 - 1, \quad \psi(\beta_2) = \beta_2^3 - 1.$$

Los conjuntos de ceros de ϕ y ψ son, respectivamente:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{\beta_{1,1} = 1, \beta_{1,2} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \beta_{1,3} = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ S_2 &= \left\{\beta_{2,1} = 1, \beta_{2,2} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \beta_{2,3} = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Entonces el conjunto de ceros de p es

$$S = \{Z_{kl} = \beta_{1,k}\mathbf{e} + \beta_{2,l}\mathbf{e}^\dagger \mid k, l = 1, 2, 3\},$$

y tenemos quizás 9 factorizaciones distintas veamos dos de estas dos:

- Tomando a $Z_{11} = 1, Z_{22} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $Z_{33} = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ la factorización es

$$Z^3 - 1 = (Z - 1)\left(Z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)\left(Z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)$$

- Considerando a $Z_{11} = 1$, $Z_{23} = -\frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $Z_{32} = -\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$Z^3 - 1 = (Z - 1)\left(Z + \frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(Z + \frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Es claro que los polinomios bicomplejos no satisfacen el teorema fundamental del álgebra en su forma original. Al mismo tiempo, los siguientes resultados son verdaderos y resumen los comentarios anteriores.

Teorema 5.1.1 ***(Teorema fundamental del álgebra para polinomios bicomplejos.)*** *Considere al polinomio $p(Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k Z^k$. Si todos los coeficientes de A_k, a excepción de $A_0 = \gamma_0\mathbf{e} + \delta_0\mathbf{e}^\dagger$, son múltiplos complejos de $\mathbf{e}$ (respectivamente, $\mathbf{e}^\dagger$), pero $\delta_0 \neq 0$ (respectivamente, $\gamma_0 \neq 0$), entonces p no tiene raíces en los bicomplejos, de lo contrario, p tiene, al menos, una raíz bicompleja.*

Corolario 5.1.1 *Sea p un polinomio bicomplejo de grado $n \geq 1$ y supongamos que tiene, al menos, una raíz. Entonces:*

1. *Si al menos uno de los coeficientes A_k, para $k = 1, \ldots, n$, es invertible, entonces p tiene a lo mas n^2 raíces distintas.*

2. *Si todos los coeficientes son múltiplos complejos de $\mathbf{e}$ (respectivamente, $\mathbf{e}^\dagger$), entonces p tiene una infinidad de raíces.*

La fórmula (5.1) tiene varias analogías en los bicomplejos. Consideremos que todos los coeficientes del polinomio $p(Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k Z^k$ sean reales, entonces

$$p(Z) = \overline{p(\overline{Z})} = p(Z^\dagger)^\dagger = p(Z^*)^* \tag{5.2}$$

para toda $Z \in \mathbb{BC}$. Esto implica que si $(p(Z_0) = 0)$, entonces $p(\overline{Z_0}) = 0$, $p(Z_0^\dagger) = 0$, $p(Z_0^*) = 0$. Ahora si $Z_0 \in \mathbb{R}$ como $Z_0 = Z_0^* = Z_0^\dagger = \overline{Z_0}$, no hay nuevas raíces. Si Z_0 no es real, entonces lo siguiente se cumple

- $Z_0 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}) \setminus \mathbb{R}$, entonces $\overline{Z} \neq Z_0$ también es una raíz de p.
- $Z_0 \in \mathbb{C}(\mathbf{j}) \setminus \mathbb{R}$, entonces $Z_0^\dagger \neq Z_0$ también es una raíz de p.
- $Z_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$, entonces $\overline{Z_0} = Z_0^\dagger \neq Z_0$ también es una raíz de p.
- Si Z_0 no pertenece a ninguno de los tres conjuntos anteriores mencionados y el polinomio p tiene como raíz a Z_0, entonces los conjugados $\overline{Z_0}, Z_0^\dagger$ y Z_0^* son también raíces de p.

La ecuación (5.2) puede ser escrita como

$$p(\overline{Z}) = \overline{p(Z)};\ p(Z^\dagger) = p(Z)^\dagger;\ p(Z^*) = p(Z)^*$$

esto significa que el rango $p(\mathbb{BC})$ del polinomio p con coeficientes reales posee las tres simetrías generadas por las tres conjugaciones.

Ahora supongamos que los coeficientes del polinomio $p(Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k Z^k$ son elementos de $\mathbb{C}(\mathbf{i})$, entonces

$$p(Z) = p(Z^\dagger)^\dagger \tag{5.3}$$

para toda $Z \in \mathbb{BC}$. Esto implica que si Z_0 es una raíz de $p, p(Z_0) = 0$, entonces $p(Z_0^\dagger) = 0$; si $Z_0 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, entonces Z_0 no tiene "asociado" ninguna raíz de p. Pero si $Z_0 \notin \mathbb{C}(\mathbf{i})$, entonces $Z_0^\dagger$ es una raíz de p. Como (5.3) es equivalente a $p(Z^\dagger) = p(Z)^\dagger$, uno podría concluir que el rango $p(\mathbb{BC})$ de dicho polinomio tiene la simetría determinada por la conjungación $\dagger$.

Se hace una investigación más profunda de los ceros de un polinomio en [8] y [9].

Definición 5.1.1 *Se llamarán funciones racionales bicomplejas a las funciones de la forma*

$$\frac{p(Z)}{q(Z)}$$

donde p y q son polinomios bicomplejos.

Tales funciones están bien definidas para aquellos valores de Z para los cuales el polinomio $q(Z) = B_m Z^m + B_{m-1} Z^{m-1} + \cdots + B_1 Z + B_0$ toma solamente valores en $\mathbb{BC}_{inv} := \mathbb{BC} \setminus \mathfrak{S}_0$.

Si ambos polinomios son de grado uno: digamos que $p(Z) = A_1 Z + A_0, q(Z) = B_1 Z + B_0$, entonces tenemos una transformación lineal fraccional. Si los coeficientes A_1 y B_1 son ambos invertibles, entonces la transformación lineal fraccional $\frac{A_1 Z + A_0}{B_1 Z + B_0}$ toma la siguiente forma

$$C_1 + \frac{C_2}{Z + C_3}$$

con C_1, C_2, C_3 bicomplejos.

5.2. Funciones exponenciales.

5.2.1. Las funciones exponenciales real y compleja

Desde el punto de vista de los números reales no es intuitivo que haya una relación entre la función e^x y las funciones trigonométricas como $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. De hecho, estas funciones son deducidas completamente de diferentes fuentes, la única similaridad, es la expresión de su serie de Taylor. Usando la unidad imaginaria se puede deducir la fórmula de Euler $e^{\mathbf{i}x} = \cos x + \mathbf{i} \operatorname{sen} x$ formalmente con la ayuda de las series anteriores.

La exponencial compleja se puede deducir de muchas maneras, si se recuerda el número e es el límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, entonces, se considera, que para cualquier número real x, el límite de la sucesión $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ es la definición de la función exponencial real, es decir

$$exp(x) = e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{5.4}$$

La exponencial real definida como (5.4) tiene varias propiedades; por ejemplo, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot \ldots \cdot e}_{\text{n veces}}$. También tiene la propiedad $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$, válida para cualesquiera reales x_1 y x_2.

La definición de la exponencial real (5.4) se puede extender a los números complejos en el sentido de que para cualquier $z \in \mathbb{C}$

$$exp(z) = e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n. \tag{5.5}$$

Desde luego se puede deducir la fórmula de Euler, anteriormente mencionada:

$$e^z = e^x\left(\cos(y) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(y)\right),$$

también se tiene que, $|e^z| = e^x$ y Arg $e^z = \{y + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

También podemos considerar a la exponencial compleja como

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{5.6}$$

Se resumen algunas propiedades de la exponencial compleja en el siguiente

Teorema 5.2.1 *La función exp(z) cumple*

(a) $exp(0) = 1$

(b) Para cualesquiera complejos z y w, $exp(z)exp(w) = exp(z+w)$.

(c) Para cualquier complejo z, $exp(z)^{-1} = exp(-z)$.

(d) Para cualquier complejo z se tiene que $exp(z) \neq 0$.

(e) exp es su propia derivada: $exp'(z) = exp(z)$.

(f) La función $exp(x)$ con x en el eje real es monótona creciente, positiva y

$$exp(x) \to \infty \text{ cuando } x \to \infty, \qquad exp(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty.$$

(g) Existe un número positivo π tal que $exp(\frac{\pi\mathbf{i}}{2}) = \mathbf{i}$.

(h) $exp(z) = 1$ si y sólo si $z = (2\pi\mathbf{i})k$ con k un entero.

(i) exp es una función periódica, con periodo $2\pi\mathbf{i}$.

(j) La función $t \to exp(\mathbf{i}t)$ envía el eje real a la circunferencia unitaria.

(k) Si w es un número complejo y $w \neq 0$, entonces $w = exp(z)$ para alguna z.

Demostración.

Para la demostración de este resultado, véase [3].

■

5.2.2. La función exponencial bicompleja

En esta sección, se introduce la función exponencial bicompleja tratando de usar las ideas en la sección previa.

Teorema 5.2.2 *Sea Z cualquier número bicomplejo. Entonces la sucesión*

$$Z_n := \left(1+\frac{Z}{n}\right)^n$$

es convergente, y si Z es escrito como $Z = z_1 + \mathbf{j}\, z_2$ el límite es

$$e^{z_1}\left(\cos(z_2) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2)\right).$$

Demostración.

Escribamos a Z en su forma $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$idempotente $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{Z}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{\beta_1}{n}\mathbf{e}+\frac{\beta_2}{n}\mathbf{e}^\dagger\right)^n = \left(\mathbf{e}+\mathbf{e}^\dagger+\frac{\beta_1}{n}\mathbf{e}+\frac{\beta_2}{n}\mathbf{e}^\dagger\right)^n \\ &= \left(\left(1+\frac{\beta_1}{n}\right)\mathbf{e}+\left(1+\frac{\beta_2}{n}\right)\mathbf{e}^\dagger\right)^n = \left(1+\frac{\beta_1}{n}\right)^n\mathbf{e}+\left(1+\frac{\beta_2}{n}\right)^n\mathbf{e}^\dagger.\end{aligned}$$

Recordando que las correspondientes sucesiones de números complejos $\left(1+\frac{\beta_1}{n}\right)^n$ y $\left(1+\frac{\beta_2}{n}\right)^n$ son convergentes a los números e^{β_1}y e^{β_2} respectivamente, se obtiene que el límite del lado derecho existe, además

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{Z}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\beta_1}{n}\right)^n\mathbf{e}+\left(1+\frac{\beta_2}{n}\right)^n\mathbf{e}^\dagger\right) = e^{\beta_1}\mathbf{e}+e^{\beta_2}\mathbf{e}^\dagger \\ &= \frac{1}{2}(e^{\beta_1}+e^{\beta_2}) + \mathbf{j}\,\frac{\mathbf{i}}{2}(e^{\beta_1}-e^{\beta_2}) = \frac{1}{2}(e^{z_1-\mathbf{i}z_2}+e^{z_1+\mathbf{i}z_2}) + \mathbf{j}\,\frac{\mathbf{i}}{2}(e^{z_1-\mathbf{i}z_2}-e^{z_1+\mathbf{i}z_2}) \qquad (5.7) \\ &= e^{z_1}\left(\frac{1}{2}(e^{-\mathbf{i}z_2}+e^{\mathbf{i}z_2}) + \mathbf{j}\,\frac{\mathbf{i}}{2}(e^{-\mathbf{i}z_2}-e^{\mathbf{i}z_2})\right) = e^{z_1}(\cos(z_2)+\mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2)).\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.

■

El teorema anterior justifica la siguiente

Definición 5.2.1 *Se establece que,*

$$e^Z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{Z}{n}\right)^n.$$

Además, por el teorema anterior, si Z está escrito como $Z = z_1 + \mathbf{j}\, z_2$, entonces se obtiene la fórmula bicompleja de Euler:

$$e^Z = e^{z_1}(\cos(z_2)+\mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2)).$$

Por otro lado si se escribe a Z como $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\,\zeta_2$ con $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ entonces

$$e^Z = e^{\zeta_1}(\cos(\zeta_2)+\mathbf{i}\ \mathrm{sen}(\zeta_2)).$$

Pero, si Z tiene forma idempotente $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$, entonces

$$e^Z = e^{\beta_1}\mathbf{e} + e^{\beta_2}\mathbf{e}^\dagger.$$

La situación con $\mathbb{D}$ es más sutil; si $Z = a + \mathbf{k}b = a + \mathbf{ji}b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}e^Z &= e^{a+\mathbf{k}b} = e^a(\cos(b\mathbf{i})+\mathbf{j}\,\mathrm{sen}(b\mathbf{i})) \\ &= e^a(\cosh(b)+\mathbf{ji}\,\mathrm{senh}(b)) = e^a(\cosh(b)+\mathbf{k}\,\mathrm{senh}(b)),\end{aligned}$$

donde cosh y senh son las clásicas funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico; por lo tanto se llega a la definición de *función exponencial hiperbólica* (en el sentido de los números hiperbólicos).

Todo lo anterior ejemplifica una vez más las peculiaridades de las diferentes escrituras de los bicomplejos.

Se hace énfasis en algunas propiedades de la función exponencial bicompleja.

- Primero, observe que la exponencial bicompleja es una extensión a $\mathbb{BC}$ de la función exponencial compleja usual: de hecho para $Z = z_1 + \mathbf{j}0 \in \mathbb{C}\ \ (\mathbb{C}(\mathbf{i}))$, se tiene
$$e^Z = e^{z_1}(\cos(0) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(0)) = e^{z_1}.$$
Del mismo modo la restricción de e^Z para $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}0 \in \mathbb{C}\ \ (\mathbb{C}(\mathbf{j}))$, da la función $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$compleja. Concretamente si $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}0$ con $\zeta_1 = a_1 + \mathbf{j}a_2$, entonces $e^Z = e^{a_1}(\cos(a_2) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(a_2)) = e^{\zeta_1} \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$.

- Note que e^{z_1} es el módulo complejo del número bicomplejo $e^Z = e^{z_1}(\cos(z_2) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2))$ y z_2 es el argumento complejo del mismo número.
- Para $Z = 0 = 0\mathbf{e} + 0\mathbf{e}^\dagger$, se tiene: $e^0 = 1\mathbf{e} + 1\mathbf{e}^\dagger$.
- Para cualquier número $Z \in \mathbb{BC}$, se tiene que e^Z es invertible, debido a que $e^Z = e^{z_1 - \mathbf{i}z_2}\mathbf{e} + e^{z_1+\mathbf{i}z_2}\mathbf{e}^\dagger$ y los términos exponenciales $e^{z_1 - \mathbf{i}z_2}$ y $e^{z_1+\mathbf{i}z_2}$ son funciones exponenciales complejas, entonces jamás serán cero. El inverso de e^Z es
$$e^{-Z} = e^{-(z_1-\mathbf{i}z_2)}\mathbf{e} + e^{-(z_1+\mathbf{i}z_2)}\mathbf{e}^\dagger = e^{-z_1}(\cos(z_2) - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(z_2)).$$
Por lo tanto, la imagen de la función exponencial bicompleja no contiene al cero ni a los divisores de cero.
- Para $\mathbf{e} = 1 \cdot \mathbf{e} + 0 \cdot \mathbf{e}^\dagger$, y $\mathbf{e}^\dagger = 0 \cdot \mathbf{e} + 1 \cdot \mathbf{e}^\dagger$, se tiene:
$$\begin{aligned} e^{\mathbf{e}} &= e \cdot \mathbf{e} + 1 \cdot \mathbf{e}^\dagger = e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}}\left(\cosh\left(\frac{1}{2}\right) + \mathbf{ji}\ \mathrm{senh}\left(\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$
De manera similar
$$\begin{aligned} e^{\mathbf{e}^\dagger} &= 1 \cdot \mathbf{e} + e \cdot \mathbf{e}^\dagger = e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) - \mathbf{j}\ \mathrm{sen}\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}}\left(\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - \mathbf{ji}\ \mathrm{senh}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (e^{\mathbf{e}})^\dagger. \end{aligned}$$
Observe que ambos números, $e^{\mathbf{e}}$ y $e^{\mathbf{e}^\dagger}$, son hiperbólicos. Esto es porque $\mathbf{e}, \mathbf{e}^\dagger$ son idempotentes y porque la restricción de la exponencial bicompleja a los números hiperbólicos es hiperbólica.
- Debido al conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{BC}$, se puede demostrar que para cualquier $Z_1, Z_2 \in \mathbb{BC}$, la siguiente fórmula se cumple
$$e^{Z_1}e^{Z_2} = e^{Z_1+Z_2}. \tag{5.8}$$
En efecto, escribiendo $Z_1 = z_{11} + \mathbf{j}\,z_{12}$ y $Z_2 = z_{21} + \mathbf{j}\,z_{22}$ se tiene:
$$\begin{aligned} e^{Z_1}e^{Z_2} &= (e^{z_{11}}(\cos(z_{12}) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_{12})))\,(e^{z_{21}}(\cos(z_{22}) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_{22}))) \\ &= e^{z_{11}}e^{z_{21}}((\cos(z_{12}) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_{12})))(e^{z_{21}}(\cos(z_{22}) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_{22}))) \\ &= e^{z_{11}}e^{z_{21}}((\cos(z_{12})\cos(z_{22}) - \mathrm{sen}(z_{12})\,\mathrm{sen}(z_{22}) + \mathbf{j}\,(\mathrm{sen}(z_{12})\cos(z_{22}) + \mathrm{sen}(z_{22}\cos(z_{12}))) \\ &= e^{z_{11}+z_{21}}(\cos(z_{12}+z_{22}) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_{12}+z_{22})) = e^{Z_1+Z_2}. \end{aligned}$$
- En el caso $Z = 0 + \mathbf{j}z_2$, se tiene:
$$e^Z = e^{\mathbf{j}z_2} = \cos(z_2) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2).$$

- La fórmula compleja $e^{\mathbf{i}\pi}+1$ sigue siendo válida para los números bicomplejos, pero es complementada con su imagen espejo $e^{\mathbf{j}\pi}+1=0$.

- Para cualquier $Z=\beta_1\mathbf{e}+\beta_2\mathbf{e}^\dagger\in\mathbb{BC}$ y cualquier número bicomplejo invertible $W=\gamma_1\mathbf{e}+\gamma_2\mathbf{e}^\dagger$, i.e., $\gamma_1\gamma_2\neq 0$, la ecuación $e^Z=W$ es equivalente al sistema $e^{\beta_1}=\gamma_1$ y $e^{\beta_2}=\gamma_2$. debido a que $\gamma_1\gamma_2\neq 0$ se sigue que hay una solución. Este es el primer paso para hablar del logaritmo bicomplejo que se verá más adelante.

- Recordando que la función exponencial compleja y las funciones trigonométricas son periódicas, se tiene

$$\begin{aligned} e^Z &= e^{z_1}(\cos(z_2)+\mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2)) \\ &= e^{z_1+2\pi\mathbf{i}m}(\cos(z_2+2\pi n)+\mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2+2\pi n)) \\ &= e^{Z+2\pi(m\mathbf{i}+n\mathbf{j})}, \end{aligned}$$

  para enteros m y n. Por lo tanto la función exponencial bicompleja es periódica con periodos $2\pi(m\mathbf{i}+n\mathbf{j})$.

5.3. Logaritmo bicomplejo

5.3.1. Logaritmo real y complejo

Debido a que la exponencial real es una función monótona, entonces el logaritmo real, como su función inversa, tiene un buen comportamiento. La situación se vuelve más complicada cuando hablamos de su extensión, el logaritmo complejo. La noción del logaritmo de un número complejo se introduce usando la ecuación $e^z=w$. Debido a su periodicidad, esta ecuación tiene, para $w\neq 0$, una familia numerable de soluciones de la forma

$$ln|w|+\mathbf{i}(\arg\, w+2\pi m)$$

donde $ln|w|$ es el logaritmo real de un número positivo $|w|$ y $m\in\mathbb{Z}$. Por lo tanto, para cualquier número complejo distinto de cero w hay una infinidad de números que pueden ser su logaritmo.

Se dirá que el valor principal del logaritmo de w es

$$log(w)=ln|w|+\mathbf{i}\arg\, w$$

cuando $\arg w\in(-\pi,\pi)$, entonces la función está definida en el conjunto $\mathbb{C}^-=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq 0\}$.

Si $m\in\mathbb{Z}$ fijo, llamaremos a

$$log_m w=ln|w|+\mathbf{i}(\arg\, w+2\pi m)$$

la rama m-ésima del logaritmo de w en $\mathbb{C}^-$.

Por último al conjunto

$$Log(w):=\{log_m w\mid m\in\mathbb{Z}\}$$

lo llamaremos el logaritmo complejo de w.

Una de las propiedades destacables de logaritmo es la siguiente

$$Log(w_1w_2)=Log(w_1)+Log(w_2). \tag{5.9}$$

La identidad anterior es una igualdad entre conjuntos, la suma de los conjuntos es la totalidad de sumas de elementos de los conjuntos. Observe que las ramas de logaritmo no cumple esta propiedad.

5.3.2. Logaritmo de un número bicomplejo

Sean $Z \in \mathbb{BC}$ escrito como $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$, y un número bicomplejo invertible $W = w_1 + \mathbf{j}w_2$. Se estudiarán las soluciones a la ecuación $e^Z = W$. Escribamos a W en su forma trigonométrica

$$W = |W|_{\mathbf{i}}(\cos\theta + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}\,\theta),$$

donde $|W|_{\mathbf{i}}$ es el módulo complejo y θ es el argumento complejo de W, es decir $|W|_{\mathbf{i}} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ y $\theta \in Arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}W$. De la ecuación

$$e^{z_1}(\cos(z_2) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(z_2)) = |W|_{\mathbf{i}}(\cos(\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}W) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}W))$$

se sigue que

$$z_1 \in \mathrm{Log}|W|_{\mathbf{i}},$$

es el logaritmo complejo de un número complejo $|W|_{\mathbf{i}}$, y que

$$z_2 \in \mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}W = \{\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}W + 2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

En analogía con el patrón del logaritmo complejo se introduce las siguientes definiciones para un número bicomplejo invertible W, el número

$$\log(W) = \log||W|_{\mathbf{i}}| + \mathbf{i}\arg|W|_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}W$$

es llamado el *valor principal del logaritmo bicomplejo de* W.
La función,

$$\log_{m,n}(W) := \log_m|W|_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\,(\arg_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(W) + 2\pi n),$$

con dos enteros arbitrarios m y n, es llamada *la rama* $(m,n)-$*ésima del logaritmo bicomplejo.*

Y finalmente el conjunto

$$\mathrm{Log}(W) := \{\log_{m,n}(W) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es llamado el *logaritmo bicomplejo de W.*

Si usamos la forma $\mathbb{C}(\mathbf{i})$-idempotente de $W = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\dagger$ resulta que

$$\mathrm{Log}(W) = \mathrm{Log}(\gamma_1)\mathbf{e} + \mathrm{Log}(\gamma_2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Esto es porque si $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$, entonces la ecuación $e^Z = W$ es equivalente a las dos ecuaciones complejas

$$e^{\beta_1} = \gamma_1,\ e^{\beta_2} = \gamma_2$$

que tiene por soluciones los logaritmos complejos $\mathrm{Log}(\gamma_1)$ y $\mathrm{Log}(\gamma_2)$ respectivamente;

$$\mathrm{Log}(W) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Log}(\gamma_1\gamma_2) + \frac{1}{2}\mathbf{ji}\,\mathrm{Log}\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \mathrm{Log}\sqrt{\gamma_1\gamma_2} + \mathbf{ji}\,\mathrm{Log}\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = \mathrm{Log}|W|_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\,\mathrm{Arg}_{\mathbb{C}(\mathbf{i})}(W),$$

se uso el hecho de que

$$\theta = \mathbf{i}\log\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}. \tag{5.10}$$

Algunas propiedades que cumple el logaritmo bicomplejo son las siguientes

- El logaritmo bicomplejo no está bien definido para divisores de cero, pues la exponencial bicompleja $W = e^Z$ es siempre invertible.
- Si $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$ es un número bicomplejo invertible y si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces
$$e^{\log_{m,n}(Z)} = e^{\log_m|Z|_{\mathbf{i}} + \mathbf{j}\arg_{\mathbf{i}}(Z) + 2n\pi\mathbf{j}} = e^{\log_m|Z|_{\mathbf{i}}}e^{\mathbf{j}\arg_{\mathbf{i}}(Z)} = |Z|_{\mathbf{i}}(\cos(\arg_{\mathbf{i}}(Z)) + \mathbf{j}\ \mathrm{sen}(\arg_{\mathbf{i}}(Z))) = Z.$$
- Para $Z = 1 = 1 + \mathbf{j}0$, se tiene:
$$\log_{n,m}(1) = 0 + 2m\pi\mathbf{i} + 2n\pi\mathbf{j}$$
para toda $m, n \in \mathbb{Z}$.
- Para Z_1 y Z_2 dos números bicomplejos invertibles la siguiente igualdad de conjuntos se cumple:
$$\mathrm{Log}(Z_1Z_2) = \mathrm{Log}(Z_1) + \mathrm{Log}(Z_2). \tag{5.11}$$

Capítulo 6

Derivada y diferencial bicompleja

6.1. La derivada bicompleja

Considerando a $\mathbb{BC}$ como un espacio topológico dotado por la topología Euclidiana de $\mathbb{R}^4$ y denotaremos a Ω como un conjunto abierto. Sea $F : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ una función bicompleja de una variable bicompleja Z y $Z_0 \in \Omega$ un punto fijo.

Proposición 6.1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- *El límite*
$$\lim_{Z \to Z_0} \frac{F(Z) - F(Z_0)}{Z - Z_0} \tag{6.1}$$
existe para cuando $Z - Z_0 \notin \mathfrak{S}_0$.

- *El límite*
$$\lim_{H \to 0} \frac{F(Z_0 + H) - F(Z_0)}{H} \tag{6.2}$$
existe para cuando $H \notin \mathfrak{S}_0$.

- *Existe una función* $F_1(H)$ *continua en* 0 *tal que:*
$$F(Z_0 + H) = F(Z_0) + HF_1(H) \tag{6.3}$$
para H *en una vecindad de* 0 *y* $H \notin \mathfrak{S}_0$.

- *Si existe un número bicomplejo* D *y existe una función* α_{F,Z_0} *tal que:*
$$F(Z_0 + H) - F(Z_0) = DH + \alpha_{F,Z_0}(H)H; \tag{6.4}$$
para H *en una vecindad de* 0, $H \notin \mathfrak{S}_0$. *y* $\lim_{H \to 0} \alpha_{F,Z_0}(H) = 0$.

Además, el valor del límite de las dos condiciones primeras, el valor $F_1(0)$ *y el valor* D *coinciden.5*

Demostración.

Basta seguir las definiciones. ■

Observación 6.1.1 *Es necesario hacer un comentario en esta parte. Tradicionalmente, vea [10], p. 138 y p. 432, si* h *es un incremento real o complejo, el símbolo* $\mathfrak{o}(h)$, *es usado para indicar cualquier expresión de la forma* $\alpha(h)|h|$ *con* $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. *Como en ambos casos la expresión* $\frac{|h|}{h}$ *sigue acotada cuando* $h \to 0$, *es claro que se puede reemplazar la expresión* $\alpha(h)|h|$ *por* $\alpha(h)h$ *en la expresión de* $\mathfrak{o}$.

Sin embargo, la situación es diferente en el caso bicomplejo. En $\mathbb{BC}$ se tiene que $\frac{|H|}{H}$ no es acotada cuando $H \to 0$, y por lo tanto se necesita distinguir cuidadosamente las dos expresiones. Acorde con la noción usual, se usara $\mathfrak{o}(H)$ para denotar una función de la forma $\alpha(H)|H|$, y por lo tanto la expresión en la proposición anterior $\alpha(H)H$ no es en general, $\mathfrak{o}(H)$. Esta distinción está en al base de las nociones de las condiciones fuertes y débiles de Stoltz para funciones bicomplejas que son usadas por G. B. Price en [9].

Definición 6.1.1 *Diremos que la función $F : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ es* ***derivable en*** *Z_0 si cumple cualquiera de las condiciones de la Proposición 6.1.1 Y el valor común se dirá que es la* ***derivada de*** *F* ***en*** *Z_0 y se denota por $F'(Z_0)$.*

Observación 6.1.2 *Una función bicompleja F derivable en Z_0 tiene la siguiente propiedad:*

$$\lim_{H\notin\mathfrak{S}_0, H\to 0}(F(Z_0 + H) - F(Z_0)) = 0. \tag{6.5}$$

En otras palabras, una función F, que es derivable en Z_0, tiene la propiedad de continuidad "débil", en el sentido que $F(Z)$ converge a $F(Z_0)$ tanto como Z converge a Z_0 de tal manera que $Z - Z_0$ es invertible.

Las operaciones algebraicas de funciones derivables siguen reglas habituales de sus antecedentes reales y complejos.

Teorema 6.1.2 *(**Derivadas y operaciones algebraicas**) Sean dos funciones bicomplejas definidas F y G en $\Omega \subset \mathbb{BC}$ y derivable en $Z_0 \in \Omega$. Entonces:*

1. *La suma y diferencia de F y G son derivables en Z_0 y*
$$(F \pm G)'(Z_0) = F'(Z_0) \pm G'(Z_0).$$
2. *Para cualquier número bicomplejo C, la función $C \cdot F$ es derivable en Z_0 y*
$$(C \cdot F)'(Z_0) = C \cdot F'(Z_0).$$
3. *El producto de F y G es derivable en Z_0 y*
$$(F \cdot G)'(Z_0) = F'(Z_0) \cdot G(Z_0) + F(Z_0) \cdot G'(Z_0).$$
4. *Si G es continua en Z_0 y $G(Z_0) \notin \mathfrak{S}_0$, entonces el cociente $\frac{F}{G}$ es derivable en Z_0 y*
$$\left(\frac{F}{G}\right)'(Z_0) = \frac{F'(Z_0)G(Z_0) - F(Z_0)G'(Z_0)}{(G(Z_0))^2}.$$

Demostración.

1. Usando a (6.3) y las hipótesis podemos que
$$F(Z) = F(Z_0) + (Z - Z_0)F_1(Z) \quad \text{y} \quad G(Z) = G(Z_0) + (Z - Z_0)G_1(Z).$$
Por lo que
$$F(Z) \pm G(Z) = F(Z_0) \pm G(Z_0) + (Z - Z_0)M(Z)$$
donde $M(Z) = F_1(Z) \pm G_1(Z)$ es continua en Z_0, pues, es suma de funciones continuas en Z_0.
De nuevo por (6.3) se concluye que $F(Z)+G(Z)$ es derivable, de tal manera que $(F \pm G)'(Z_0) = M(Z_0) = F_1(Z_0) \pm G_1(Z_0) = F'(Z_0) \pm G'(Z_0)$.
2. Sea $C \in \mathbb{BC}$ y $F(Z) = F(Z_0) + (Z - Z_0)F_1(Z)$ entonces
$$C \cdot F(Z) = C \cdot F(Z_0) + (Z - Z_0) \cdot C \cdot F_1(Z),$$

como $C \cdot F_1(Z)$ es continua en Z_0, se tiene que $C \cdot F(Z)$ es derivable en Z_0, y $(C \cdot F(Z_0))' = C \cdot F_1(Z_0) = C \cdot (F'(Z_0))$.

3. Usando las expresiones de (6.3) para $F(Z)$ y $G(Z)$ podemos llegar a

$$F(Z) \cdot G(Z) = F(Z_0)G(Z_0) + (Z - Z_0)P(Z)$$

donde $P(Z) = F_1(Z)G(Z_0) + F(Z_0)G_1(Z) + (Z - Z_0)F_1(Z)G_1(Z)$ que es una función continua en Z_0 por lo que $F(Z) \cdot G(Z)$ es derivable en Z_0 además la derivada es

$$(F \cdot G)'(Z_0) = F'(Z_0)G(Z_0) + F(Z_0)G'(Z_0).$$

4. Notemos que usando $G(Z) = G(Z_0) + (Z - Z_0)G_1(Z)$ podemos llegar a

$$\frac{1}{G(Z)} = \frac{1}{G(Z_0)} + (Z - Z_0)\frac{(-G_1(Z))}{G(Z_0)G(Z)}$$

luego

$$\frac{F(Z)}{G(Z)} = \frac{F(Z_0)}{G(Z_0)} + (Z - Z_0)\left(\frac{F(Z_0)(-G_1(Z))}{G(Z_0)G(Z)} + \frac{F_1(Z)}{G(Z_0)} + (Z - Z_0)F_1(Z)\left(\frac{(-G_1(Z))}{G(Z_0)G(Z)}\right)\right).$$

Por lo que $\dfrac{F(Z)}{G(Z)}$ es derivable y la derivada es

$$\frac{F'(Z_0)G(Z_0) - F(Z_0)G'(Z_0)}{(G(Z_0))^2}.$$

■

Teorema 6.1.3 ***(Regla de la cadena)*** *Consideremos dos funciones bicomplejas F y G, donde F está definida en un conjunto abierto Ω y G definida en $F(\Omega) \subset \mathbb{BC}$. Supongamos que hay un punto $Z_0 \in \Omega$ tal que $W_0 = F(Z_0)$ es un punto interior de $F(\Omega)$ y tales que para $Z \in \Omega$ se cumpla que $F(Z) - F(Z_0) \notin \mathfrak{S}_0$, $Z - Z_0 \notin \mathfrak{S}_0$. Suponiendo que F es derivable en Z_0 y G es derivable en W_0. Entonces la composoción $G \circ F$ es derivable en Z_0 y*

$$(G \circ F)'(Z_0) = G'(F(Z_0))F'(Z_0).$$

Además. si $F'(Z_0) \notin \mathfrak{S}_0$ y F es biyectiva alrededor de Z_0, entonces F^{-1} es derivable en $W_0 = F(Z_0)$ y

$$(F^{-1})'(W_0)F'(Z_0) = 1.$$

Demostración. Veamos que $(G \circ F)(Z)$ es derivable en Z_0

$$(G \circ F)(Z) = G(F(Z_0)) + (F(Z) - F(Z_0))G_1(F(Z)) = G(F(Z_0)) + (Z - Z_0)F_1(Z)G_1(F(Z))$$

como $F_1(Z)G_1(F(Z))$ es una función continua en Z_0 tenemos que $(G \circ F)(Z)$ es derivable en Z_0 y

$$(G \circ F)'(Z_0) = G'(F(Z_0))F'(Z_0).$$

Ahora, si $F(Z)$ es invertible y derivable en Z_0 entonces

$$F(Z) = F(Z_0) + (Z - Z_0)F_1(Z).$$

Sea $Y = F(Z)$ y sustituyendo en lo anterior

$$Y = W_0 + (F^{-1}(Y) - F^{-1}(W_0))F_1(F^{-1}(Y))$$

por lo que

$$F^{-1}(Y) = \frac{(Y - W_0)}{F_1(F^{-1}(Y))} + F^{-1}(W_0)$$

notemos que $\dfrac{(Y - W_0)}{F_1(F^{-1}(Y))}$ es continua en W_0 por lo tanto $F^{-1}(Y)$ es derivable en W_0 y la derivada es

$$\frac{1}{F'(F^{-1}(W_0))}.$$

■

Teorema 6.1.4 ***(Derivadas de funciones elementales.)*** *Las funciones siguientes introducidas en el Capítulo 5 son derivables en cualquier punto $Z = Z_0$ donde estén definidas, concretamente:*

1. *Cualquier función constante es derivable con derivada igual a cero.*
2. *Los polinomios bicomplejos son derivables en cualquier $Z \in \mathbb{BC}$. En particular, se tiene:*
$$(Z^N)' = nZ^{n-1}.$$
3. *La función exponencial bicompleja e^Z es derivable y su derivada en un punto Z es e^Z.*
4. *La función $(m,n)-$rama logarítmica $F(Z) = ln_{m,n}(Z)$, que está definida para todos los números bicomplejos invertibles Z, es derivable para tales Z, y su derivada es*
$$(ln_{m,n})'(Z) = \frac{1}{Z}.$$

Demostración.

1. Es cierta usando la Definición 6.1.1.
2. Recordando que para cualesquiera números se cumple lo siguiente
$$Z^n - Z_0^n = (Z - Z_0)(Z^{n-1} + Z^{n-2}Z_0 + \ldots + Z_0^{n-1})$$
y utilizando (6.3) con la función,
$$F_1(Z) = Z^{n-1} + Z^{n-2}Z_0 + \ldots + Z_0^{n-1}$$
como $F'(Z_0) = F_1(Z_0) = Z_0^{n-1} + Z_0^{n-2}Z_0 + \ldots + Z_0^{n-1}$ se obtiene el resultado.
3. Consideremos a $Z \in \mathbb{BC}$ y H cualquier número bicomplejo invertible, tenemos
$$\frac{e^{Z+H} - e^Z}{H} = e^Z \cdot \frac{e^H - 1}{H}.$$
Se demostrará que
$$\lim_{H \notin \mathfrak{S}_0 \to 0} \frac{e^H - 1}{H} = 1.$$
Para esto, escribamos a H en su forma $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$idempotente $H = h\mathbf{e} + k\mathbf{e}^\dagger$, donde $hk \neq 0$. Entonces $e^H = e^h\mathbf{e} + e^k\mathbf{e}^\dagger$, por lo que
$$\frac{e^H - 1}{H} = \frac{e^h\mathbf{e} + e^k\mathbf{e}^\dagger}{h\mathbf{e} + k\mathbf{e}^\dagger} = \frac{e^h - 1}{h}\mathbf{e} + \frac{e^k - 1}{k}\mathbf{e}^\dagger.$$
Por lo tanto
$$\lim_{H \notin \mathfrak{S}_0 \to 0} \frac{e^H - 1}{H} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)\mathbf{e} + \lim_{k \to 0}\left(\frac{e^k - 1}{k}\right)\mathbf{e}^\dagger = \mathbf{e} + \mathbf{e}^\dagger = 1.$$
Se sigue que
$$\lim_{H \notin \mathfrak{S}_0} \frac{e^{Z+H} - e^Z}{H} = \lim_{H \notin \mathfrak{S}_0} e^Z \cdot \frac{e^H - 1}{H}.$$
Es decir $(e^Z)' = e^Z$, para toda $Z \in \mathbb{BC}$.

4. Recordemos que la $(m, n)-$rama de logarítmo de la función $\ln_{m,n}$ está definida para todos los números bicomplejos invertibles, también es la inversa de la función e^Z (al menos en un subconjunto de su dominio). Entonces tenemos por la parte 4 del Teorema 6.1.2:

$$1 = \left(e^{ln_{n,m}}(Z)\right)' = e^{ln_{m,n}}(Z) \cdot (ln_{n,m})'(Z) = Z \cdot (ln_{m,n})'(Z).$$

Como Z es un número bicomplejo invertible arbitrario tenemos

$$(ln_{m,n})'(Z) = \frac{1}{Z},$$

lo cual concluye la demostración.

■

6.1.1. Diferentes tipos de derivadas parciales de funciones de bicomplejas

Sea F una función bicompleja $F : \Omega \to \mathbb{BC}$ de variable bicompleja

$$Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2.$$

Debido a las diferentes maneras en que se pueden escribir los números bicomplejos, F hereda las representaciones análogas, específicamente:

$$F = f_1 + \mathbf{j}f_2 = \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2 = g_1 + \mathbf{k}g_2 = \gamma_2 + \mathbf{k}\gamma_2 = \mathfrak{f}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_1 + \mathbf{j}\mathfrak{g}_2 = f_{11} + \mathbf{i}f_{12} + \mathbf{j}f_{21} + \mathbf{k}f_{22}, \tag{6.6}$$

donde f_1, f_2, g_1, g_2 son funciones $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ valuadas, $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2$ son funciones $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ valuadas, $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ son funciones hiperbólicas valuadas, y $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$, son real valuadas, todas de variable bicompleja Z.

Sea $Z_0 \in \Omega$ y tomemos a $H = h_{11} + +\mathbf{i}h_{12} + \mathbf{j}h_{21} + \mathbf{k}h_{22}$ el incremento, las derivadas parciales de F con respecto a las variables x_1, y_1, x_2, y_2 esta definidas de la manera usual (cuando estas existen) a continuación se muestra la notación de dichas derivabas:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_0) := \lim_{h_{11}\to 0} \frac{F(Z_0 + h_{11}) - F(Z_0)}{h_{11}}, \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z_0) := \lim_{h_{12}\to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{i}h_{12}) - F(Z_0)}{h_{12}}, \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z_0) := \lim_{h_{21}\to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{j}h_{21}) - F(Z_0)}{h_{21}}, \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z_0) := \lim_{h_{22}\to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{k}h_{22}) - F(Z_0)}{h_{22}}. \tag{6.10}$$

Usando (1.1) y (1.2) se pueden escribir los incrementos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H &= h_1 + \mathbf{j}h_2 := (h_{11} + \mathbf{i}h_{12}) + \mathbf{j}(h_{21} + \mathbf{i}h_{22}) \\ &= \kappa_1 + \mathbf{i}\kappa_2 := (h_{11} + \mathbf{j}h_{21}) + \mathbf{i}(h_{12} + \mathbf{j}h_{22}). \end{aligned}$$

que da pie a la siguiente definición

Definición 6.1.2 *Las derivadas parciales complejas de una función bicompleja F están definidas como los siguientes límites (si existen):*

$$F'_{z_1}(Z_0) := \lim_{h_1\to 0} \frac{F(Z_0 + h_1) - F(Z_0)}{h_1}, \tag{6.11}$$

$$F'_{z_2}(Z_0) := \lim_{h_2\to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{j}h_2) - F(Z_0)}{h_2}, \tag{6.12}$$

$$F'_{\zeta_1}(Z_0) := \lim_{\kappa_1 \to 0} \frac{F(Z_0 + \kappa_1) - F(Z_0)}{\kappa_1}, \tag{6.13}$$

$$F'_{\zeta_2}(Z_0) := \lim_{\kappa_2 \to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{i}\kappa_2) - F(Z_0)}{\kappa_2}. \tag{6.14}$$

De manera similar introducimos las derivadas parciales hiperbólicas: si usamos (1.3) y escribimos los incrementos como

$$H = \mathfrak{h}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{h}_2 := (h_{11} + \mathbf{k}h_{22}) + \mathbf{i}(h_{12} + \mathbf{k}(-h_{21})),$$

entonces las derivadas parciales hiperbólicas son

$$F'_{\mathfrak{z}_1}(Z_0) := \lim_{\mathfrak{h}_1 \notin \mathfrak{S}_0(\mathbb{D}), \mathfrak{h}_1 \to 0} \frac{F(Z_0 + \mathfrak{h}_1) - F(Z_0)}{\mathfrak{h}_1},$$

$$F'_{\mathfrak{z}_2}(Z_0) := \lim_{\mathfrak{h}_2 \notin \mathfrak{S}_0(\mathbb{D}), \mathfrak{h}_2 \to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{i}\mathfrak{h}_2) - F(Z_0)}{\mathfrak{h}_2}, \tag{6.15}$$

donde el símbolo $\mathfrak{S}_0(\mathbb{D}) := \mathfrak{S}_0 \cap \mathbb{D}$ indicamos el conjunto los divisores de cero hiperbólicos en $\mathbb{D}$ junto con el 0.

Se podría pensar que debido a la "simetría" de las unidades imaginarias $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, y por lo tanto en analogía entre las correspondientes variables complejas, no hay razón para definir todas las derivadas parciales (6.11) – (6.14). El siguiente ejemplo ilustra que dentro de los bicomplejos hay diferencias relevantes.

Ejemplo 6.1.1 *Considere la función $F : \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$, $F(Z) = Z^\dagger$. Podemos ver lo siguiente*

$$F'_{z_1}(Z_0) = 1, \qquad F'_{z_2}(Z_0) = -\mathbf{j}$$

pues

$$F'_{z_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1}{h_1} = 1$$

y además

$$F'_{z_2}(Z_0) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{-\mathbf{j}h_2}{h_2} = -\mathbf{j}.$$

Pero $F'_{\zeta_1}(Z_0)$ no existe para cualquier $Z_0 \in \mathbb{BC}$. Ya que

$$F'_{\zeta_1}(Z_0) = \lim_{\kappa_1 \to 0} \frac{h_{11} - \mathbf{j}h_{22}}{h_{11} + \mathbf{j}h_{22}},$$

este último no existe pues haciendo $h_{11} = 0$ o $h_{22} = 0$ el valor del límite no es el mismo.

De manera similar $F'_{\zeta_2}(Z_0)$ tampoco existe.

Observación 6.1.3 *Las fórmulas (1.4)-(1.6) sugieren introducir seis derivadas parciales: cuatro complejas y dos hiperbólicas. Pero como existe una relación directa entre las correspondientes variables:*

$$w_1 = z_1, \quad w_2 = -\mathbf{i}z_2, \quad \omega_1 = \zeta_1, \quad \omega_2 = -\mathbf{j}\zeta_2, \quad \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{z}_1, \quad \mathfrak{w}_2 = -\mathbf{k}\mathfrak{z}_2,$$

se puede ver que no hay información nueva. Cuando se utiliza la escritura idempotente se tienen resultados más interesantes.

Los números bicomplejos tienen distintas representaciones, en esta sección se investigará que implica la existencia de la derivada en los diferentes tipos de derivadas parciales.

Teorema 6.1.5 *Considere la función bicompleja $F : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ derivable en $Z_0 \in \Omega$. Entonces los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. *Las derivadas parciales reales $\dfrac{\partial F}{\partial x_\ell}(Z_0)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y_\ell}(Z_0)$ existen, para $\ell = 1, 2$.*
2. *Las derivadas parciales reales satisfacen las siguientes identidades:*

$$F'(Z_0) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_0) = -\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z_0) = -\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z_0) = \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z_0). \tag{6.16}$$

Demostración.
Como F es derivable en Z_0, el límite (6.2) existe sin importar de que manera H converja a cero, mientras sea un número invertible. Primero consideremos a H como un número real, es decir, de la forma $H = x_1 = x_1 + \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{j}0 \to 0$, $x_1 \neq 0$, que es siempre invertible. Como $F'(Z_0)$ existe, entonces el siguiente límite también existe:

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{F(Z_0 + x_1) - F(Z_0)}{x_1}$$

y coincide con $\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_0)$. Para los demás casos basta tomar a $H = \mathbf{i}y_1, \mathbf{j}x_2, \mathbf{k}y_2$, todos distintos de cero, usar la unicidad de $F'(Z_0)$ y se obtienen los resultados faltantes. ■

Escribamos a F de la siguiente manera $F = f_{11} + \mathbf{i}f_{12} + \mathbf{j}f_{21} + \mathbf{k}f_{22}$ en términos de sus componentes reales, que son todas funciones reales de variable bicompleja. Una consecuencia inmediata del Teorema 6.1.5 es:

Corolario 6.1.1 *Si F es derivable en Z_0, entonces la matriz Jacobiana (real) de F en Z_0 es de la forma*

$$J_{Z_0}[F] := \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

donde

$$a := \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{12}}{\partial y_1} = \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} = \frac{\partial f_{22}}{\partial y_2}, \tag{6.18}$$

$$b := -\frac{\partial f_{11}}{\partial y_1} = \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_{21}}{\partial y_2} = \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2}, \tag{6.19}$$

$$c := -\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_{12}}{\partial y_2} = \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{22}}{\partial y_1}, \tag{6.20}$$

$$d := \frac{\partial f_{11}}{\partial y_2} = -\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_{21}}{\partial y_1} = \frac{\partial f_{22}}{\partial x_1}, \tag{6.21}$$

y donde todas las derivadas parciales están evaluadas en Z_0.

Demostración. La prueba consiste en manipular las identidades de (6.16) escritas en términos de f_{kl}. ■

Observación 6.1.4 *Toda matriz de 4×4 con entradas reales determina una transformación lineal en $\mathbb{R}^4$. Pero si vemos a $\mathbb{R}^4$ como $\mathbb{BC}$ no toda matriz de 4×4 va a ser una transformación lineal en $\mathbb{BC}$, sin embargo las matrices de la forma (6.17) si inducen transformaciones lineales en $\mathbb{BC}$. Además, en la matriz (6.17) hay escondidas dos linealidades con respecto a los campos $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ en el siguiente sentido: consideremos las identificaciones*

$$(x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2) = (z_1, z_2) \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

y

$$(x_1 + \mathbf{j}x_2, y_1 + \mathbf{j}y_2) = (\zeta_1, \zeta_2) \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

se tiene dos diferentes identificaciones $\mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \leftrightarrow \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{C}^2(\mathbf{j}) \leftrightarrow \mathbb{R}^4$. Se sigue que una matriz de 4×4 con entradas reales no solo determina una transformación lineal real también una $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$lineal, si y sólo si es de la forma

$$\begin{pmatrix} l & -m & u & -v \\ m & l & v & u \\ t & -s & g & -h \\ s & t & h & g \end{pmatrix}$$

de manera similar, una matriz de 4×4 define una tranformación $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$lineal, si y sólo si es de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B & -E & -F \\ C & D & -G & -H \\ E & F & A & B \\ G & H & C & D \end{pmatrix}$$

la matriz (6.17) tiene ambas estructuras.

Observación 6.1.5 *El determinante de (6.17) está dado por*

$$det(J_{Z_0}) = ((b+c)^2 + (a-d)^2) \cdot ((b-c)^2 + (a+d)^2) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Lo anterior es equivalente a

$$|| \ F'(Z_0) \ |_{\mathbf{i}}^2|^2,$$

es decir el cuadrado del módulo usual del cuadrado del módulo complejo de $F'(Z_0)$.

Notemos que $det(J_{Z_0}) = 0$ si y sólo si $F'(Z_0) \in \mathfrak{S}_0$, que es equivalente a

$$b = -c \ y \ a = d, \ \ o \ bien, \ b = c \ y \ a = -d. \tag{6.22}$$

Note que estas relaciones son entre las derivadas parciales reales de los componentes reales de F evaluados en Z_0. Recordemos que las derivadas F en Z_0 están dadas por

$$F'(Z_0) = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

De hecho, si $b = -c$ y $a = d$, (respectivamente si $b = c$ y $a = -d$) entonces

$$F'(Z_0) = a(1+\mathbf{k}) + b(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = a(1+\mathbf{k}) + \mathbf{i}b(1-\mathbf{k}) = 2(a+\mathbf{i}b)\mathbf{e},$$

entonces $F'(Z_0) \in \mathbb{BC}_{\mathbf{e}} \subset \mathfrak{S}_0$ (respectivamente $F'(Z_0) \in \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$). Ahora, $F'(Z_0) = 0$ si y sólo si $a = b = c = d = 0$, y $F'(Z_0) \in \mathfrak{S}_0$ si y sólo si (6.22) se cumplen. Por ejemplo, si para todas las cuatro derivadas parciales reales de cualquier función $f_{k\ell}$ son cero en Z_0, se sigue que $F'(Z_0) = 0$. En particular, si una de las $f_{k\ell}$ es constante alrededor de Z_0, entonces $F'(Z_0) = 0$

A continuación se investigarán las consecuencias de la existencia de $F'(Z_0)$ en términos de las variables $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$, donde se escribirá la variable Z como $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$.

Teorema 6.1.6 *Considere la función bicompleja $F = f_1 + \mathbf{j}f_2$ derivable en Z_0. Entonces*

1. *Las derivadas $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejas parciales $F'_{z_l}(Z_0)$ existe para $l = 1, 2$.*

2. *Las derivadas parciales complejas anteriores cumplen lo siguiente:*

$$F'(Z_0) = F'_{z_1}(Z_0) = -\mathbf{j}F'_{z_2}(Z_0), \tag{6.23}$$

que es equivalente al sistema Cauchy-Riemann $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejo de F (en Z_0), también llamado sistema generalizado de Cauchy-Riemann:

$$f'_{1,z_1}(Z_0) = f'_{2,z_2}(Z_0), \qquad f'_{1,z_2}(Z_0) = -f_{2,z_1}(Z_0). \tag{6.24}$$

Demostración.
Así como en la demostración del Teorema 6.1.5, el límite debería ser el mismo sin importar como se acerque H a cero, mientras H sea invertible. Se eligirá a $H = h_1 = h_1 + \mathbf{j}0 \to 0$, y observe que $Z_0 = z_{01} + \mathbf{j}z_{02}$, entonces $Z_0 + H = (z_{01} + h_1) + \mathbf{j}z_{02}$. Entonces, como $F'(Z_0)$ existe, el siguiente límite también existe:

$$F'(Z_0) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{F(Z_0 + h_1) - F(Z_0)}{h_1} = F'_{z_1}(Z_0).$$

De manera similar si tomamos $H = \mathbf{j}h_2 \to 0$ obtenemos:

$$F'(Z_0) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{F(Z_0 + \mathbf{j}h_2) - F(Z_0)}{\mathbf{j}h_2} = -\mathbf{j}F'_{z_2}(Z_0).$$

Es decir, las derivadas parciales complejas de F con respecto a z_1 y z_2 existen (en Z_0), y verifican las siguiente igualdad:

$$F'(Z_0) = F'_{z_1}(Z_0) = -\mathbf{j}F'_{z_2}(Z_0). \tag{6.25}$$

Si escribimos a $F = f_1 + \mathbf{j}f_2$, las derivadas parciales complejas de F en Z_0 están dadas por

$$F'_{z_1}(Z_0) = f'_{1,z_1}(Z_0) + \mathbf{j}f'_{2,z_1}(Z_0),\ F'_{z_2}(Z_0) = f'_{1,z_2}(Z_0) + \mathbf{j}f'_{2,z_2}(Z_0).$$

Podemos notar que la igualdad (6.25) es equivalente a las condiciones $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejas de Cauchy-Riemann para F en Z_0.

■

Observe que el símbolo f'_{1,z_1} (y otro similares definidos) denota en esta situación la derivada parcial compleja en un punto, no formalmente el operador

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$$

definido en las funciones C^1. Al mismo tiempo, estos resultados indican que las funciones bicomplejas que son derivables en un dominio están relacionados con las funciones holomorfas de dos variables complejas.

Corolario 6.1.2 *Sea $F = f_1 + \mathbf{j}f_2$ una función bicompleja derivable en Z_0, entonces los componentes reales de las funciones $f_1 = f_{11} + \mathbf{i}f_{12}$ y $f_2 = f_{21} + \mathbf{i}f_{22}$ satisfacen las condiciones usuales reales de Cauchy-Riemann (en el punto Z_0) asociadas con cada variable compleja $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$ y $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$; en notación compleja esto es equivalente a*

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z_1}}(Z_0) = \frac{\partial F}{\partial \overline{z_2}}(Z_0) = 0, \tag{6.26}$$

es decir,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_1}}(Z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_2}}(Z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z_1}}(Z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z_2}}(Z_0) = 0, \tag{6.27}$$

donde los símbolos $\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z_2}}$ son operadores formales de funciones $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ valuadas en z_1 y z_2, con derivadas parciales en Z_0, a saber

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_1}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_2}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y_2}\right).$$

Demostración. Usaremos las igualdades de (6.16) involucrando las derivadas parciales reales de $F = f_1 + \mathbf{j}f_2$ en Z_0. La segunda igualdad en (6.16) es

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_0) = -\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z_0), \tag{6.28}$$

que es equivalente a (para simplificar se eliminará la referencia explícita a Z_0)

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}+\mathbf{i}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1}+\mathbf{j}\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}+\mathbf{ij}\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1}=-\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial y_1}+\mathbf{i}\frac{\partial f_{12}}{\partial y_1}+\mathbf{j}\frac{\partial f_{21}}{\partial y_1}+\mathbf{ij}\frac{\partial f_{22}}{\partial y_1}\right).$$

debido a que las funciones $f_{k\ell}$ son reales, esto es equivalente al sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}&=\frac{\partial f_{12}}{\partial y_1}, &\qquad \frac{\partial f_{11}}{\partial y_1}&=-\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1},\\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}&=\frac{\partial f_{22}}{\partial y_1}, &\qquad \frac{\partial f_{21}}{\partial y_1}&=-\frac{\partial f_{22}}{\partial x_1}.\end{aligned} \tag{6.29}$$

Estas son las condiciones reales de Cauchy-Riemann para las funciones complejas $f_1 = f_{11}+\mathbf{i}f_{12}$ y $f_2 = f_{21}+\mathbf{i}f_{22}$, con respecto a la variable $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$. En notación compleja, si escribimos la igualdad (6.28) en términos del operador diferencial complejo $\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$, se vuelve equivalente a la primera parte de (6.26). Se repetirá este razonamiento para la igualdad

$$-\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z_0)=\mathbf{ij}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z_0), \tag{6.30}$$

que, después de dividir por $\mathbf{j}$, es equivalente a la segunda igualdad de (6.26). Esto lleva a la conclusión que f_1 y f_2 verifican las condiciones reales de Cauchy-Riemann con respecto a la variable z_2 en Z_0. ∎

Este corolario muestra la relación entre la derivabilidad bicompleja y la holomorfía clásica de las funciones complejas de dos variables complejas.

Se expresará a Z como $Z = \zeta_1 + \mathbf{i}\zeta_2$, y la función bicompleja F como $F = \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2$, donde $\rho_1 = f_{11} + \mathbf{j}f_{12}$ y $\rho_2 = f_{21} + \mathbf{j}f_{22}$ son funciones $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$valuadas. Se probará el siguiente resultado.

Teorema 6.1.7 *Considere la función F bicompleja derivable en Z_0. Entonces*

1. *Las derivadas $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$complejas parciales $F'_{\zeta_\ell}(Z_0)$ existen, para $\ell = 1, 2$.*
2. *Las derivadas complejas cumplen la siguiente igualdad:*

$$F'(Z_0) = F'_{\zeta_1}(Z_0) = -\mathbf{i}F'_{\zeta_2}(Z_0), \tag{6.31}$$

que es equivalente al sistema Cauchy-Riemann $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$complejo (en Z_0):

$$\rho'_{1,\zeta_1}(Z_0)=\rho'_{2,\zeta_2}(Z_0), \qquad \rho'_{1,\zeta_2}(Z_0)=-\rho'_{2,\zeta_1}(Z_0). \tag{6.32}$$

Demostración. Consideremos a H, invertible, de la forma $H = \kappa_1 + \mathbf{i}0$ y después de la forma $H = 0 + \mathbf{i}\kappa_2$, donde $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, si procedemos de manera similar al Teorema 6.1.6 concluimos que las derivadas parciales complejas de F existen en Z_0 para $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$, y cumplen la igualdad

$$F'(Z_0) = F'_{\zeta_1}(Z_0) = -\mathbf{i}F'_{\zeta_2}(Z_0), \tag{6.33}$$

donde

$$F'_{\zeta_1}(Z_0)=\rho'_{1,\zeta_1}(Z_0)+\mathbf{i}\rho'_{2,\zeta_1}(Z_0),\ F'_{\zeta_2}(Z_0)=\rho'_{1,\zeta_2}(Z_0)+\mathbf{i}\rho'_{2,\zeta_2}(Z_0).$$

Observe que la igualdad (6.33) es equivalente al sistema (6.32). ∎

Corolario 6.1.3 *Si $F = \rho_1 + \mathbf{i}\rho_2$ es una función bicompleja derivable en Z_0, entonces las componentes reales de las funciones $\rho_1 = f_{11} + \mathbf{j}f_{21}$ y $\rho_2 = f_{21} + \mathbf{j}f_{22}$ verifican las condiciones reales de Cauchy-Riemann en Z_0 asociado a las variables $\zeta_1 = x_1 + \mathbf{j}x_2$ y $\rho_2 = y_1 + \mathbf{j}y_2$. En notación compleja esto es equivalente a*

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1^*}(Z_0)=\frac{\partial F}{\partial \zeta_2^*}(Z_0)=0, \tag{6.34}$$

es decir,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta_1^*}(Z_0)=\frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta_2^*}(Z_0)=\frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta_1^*}(Z_0)=\frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta_2^*}(Z_0)=0, \tag{6.35}$$

donde,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \; \frac{\partial}{\partial \zeta_2^*} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y_2}\right).$$

Demostración. Se sigue de las igualdades de (6.16) entre las derivadas parciales reales de F que garantizan

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_0) = -\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial x_2}F(Z_0), \qquad -\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z_0) = \mathbf{ij}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z_0) \tag{6.36}$$

que son equivalentes a (6.34). ■

Observación 6.1.6 *Se demostró en el Ejemplo 6.1.1 que es posible para una función bicompleja tener derivadas parciales con respecto a z_1 y z_2 pero no tener derivadas parciales con respecto a ζ_1, ζ_2. Pero si una función bicompleja es derivable esto no es posible. Una función bicompleja derivable tiene derivadas parciales con respecto a las variables $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejas z_1, z_2 así como a las variables $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$complejas ζ_1, ζ_2. Además , las fómulas (6.23) y (6.31) demuestran que dichas derivadas están relacionadas por*

$$F'_{z_1}(Z_0) = F'_{\zeta_1}(Z_0) = -\mathbf{j}F'_{z_2}(Z_0) = -\mathbf{i}F'_{\zeta_2}(Z_0).$$

Expresando la variable bicompleja $Z = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2$, donde $\mathfrak{z}_1 = x_1 + \mathbf{k}y_2$ y $\mathfrak{z}_2 = y_1 + \mathbf{k}(-x_2)$ son números hiperbólicos y a la función $F = \mathfrak{f}_1 + \mathbf{k}\mathfrak{f}_2$, donde $\mathfrak{f}_1 = f_{11} + \mathbf{k}(f_{22})$ y $\mathfrak{f}_2 = f_{12} + \mathbf{k}(-f_{21})$. Se tiene lo siguiente:

Teorema 6.1.8 *Si la función bicompleja $F = \mathfrak{f}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{f}_2$ es derivable en un punto Z_0, entonces:*

1. *Las derivadas parciales hiperbólicas $F'_{\mathfrak{z}_\ell}$ existen para $\ell = 1, 2$.*
2. *Las derivadas parciales anteriores cumplen lo siguiente*

$$F'(Z_0) = F'_{\mathfrak{z}_1}(Z_0) = -\mathbf{i}F'_{\mathfrak{z}_2}(Z_0),$$

que es equivalente al sistema de Cauchy-Riemann para los componentes hiperbólicos de la función derivable bicompleja:

$$\mathfrak{f}_{1,\mathfrak{z}_1}(Z_0)' = \mathfrak{f}'_{2,\mathfrak{z}_2}(Z_0), \quad \mathfrak{f}'_{1,\mathfrak{z}_2}(Z_0) = -\mathfrak{f}'_{2,\mathfrak{z}_1}(Z_0). \tag{6.37}$$

Demostración. Se demuestra como antes, solo que tomando $H = \mathfrak{h}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{h}_2$ pero como H es invertible entonces $H = \mathfrak{h}_1 + \mathbf{i}0$ o bien $H = \mathbf{i}\mathfrak{h}_2$, donde $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ números hiperbólicos. Se obtiene también:

$$F'(Z_0) = F'_{\mathfrak{z}_1}(Z_0) = -\mathbf{i}F'_{\mathfrak{z}_2}(Z_0),$$

que es equivalente a sistema (6.37). ■

Corolario 6.1.4 *Si $F = \mathfrak{f}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{f}_2$ es derivable en Z_0, entonces los componentes reales de las funciones $\mathfrak{f}_1 = f_{11} + \mathbf{k}f_{22}$ y $\mathfrak{f}_2 = f_{12} + \mathbf{k}(-f_{21})$ cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann con respecto a las variables $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{D}$; en términos hiperbólicos esto es equivalente a*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond}(Z_0) = \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond}(Z_0) = 0, \tag{6.38}$$

es decir,

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond}(Z_0) = \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond}(Z_0) = \frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond}(Z_0) = \frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond}(Z_0) = 0, \tag{6.39}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y_2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{6.40}$$

Demostración. Usando las igualdades de (6.16) obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_0) = \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z_0), \qquad \frac{\partial F}{\partial y_1}(Z_0) = -\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z_0), \tag{6.41}$$

donde $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$. Usando (6.40) obtenemos (6.38). ■

Observación 6.1.7 *Apelando a las fórmulas (1.4)-(1.6) que usan las variables $w_1, w_2, \omega_1, \omega_2$ y las variables hiperbólicas $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$, podría preguntarse ¿Qué pasa con las condiciones de Cauchy-Riemann con respecto a las derivadas parciales correspondientes? La Observación 6.1.3 explica como puede obtenerse directamente de los enunciados anteriores.*

Definición 6.1.3 *Sea F una función bicompleja definida en un conjunto no vacío $\Omega \subset \mathbb{BC}$. Si F tiene derivada bicompleja en todo punto de Ω, se dirá que F es una función holomorfa bicompleja, o bien, una función $\mathbb{BC}-$holomorfa.*

6.2. Diferenciabilidad real y derivabilidad bicompleja

6.2.1. Diferenciabilidad real y derivada bicompleja.

Sea $\Omega \subset \mathbb{BC}$ un conjunto abierto y $F : \Omega \to \mathbb{BC}$ es una función bicompleja de clase $C^1(\Omega)$ con respecto a las coordenadas canónicas x_1, y_1, x_2, y_2. Se quiere determinar que lugar ocupan las funciones $\mathbb{BC}-$holomorfas entre las funciones bicomplejas de clase C^1, es decir, funciones $\mathbb{R}-$diferenciables con derivada continua. La condición $F \in C^1(\Omega, \mathbb{BC})$ asegura que F es $\mathbb{R}-$diferenciable para cualquier $Z \in \Omega$, es decir, la matriz de derivadas parciales existe y

$$F(Z+H) - F(Z) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(Z)h_{11} + \frac{\partial F}{\partial y_1}(Z)h_{12} + \frac{\partial F}{\partial x_2}(Z)h_{21} + \frac{\partial F}{\partial y_2}(Z)h_{22} + \mathfrak{o}(H), \tag{6.42}$$

donde $Z = x_1 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}y_2, H = h_{11} + \mathbf{i}h_{12} + \mathbf{j}h_{21} + \mathbf{k}h_{22}$, donde $\mathfrak{o}(H)$ representa una función de la forma $\alpha(H)|H|$ con $\lim\limits_{H \to 0} \alpha(H) = 0$. Esta fórmula depende de que están escritas en las coordenadas euclidianas, tanto la F como la variable Z.

Será interesante analizar la estructura de dicha función con respecto a los otros sistemas de coordenadas.

Se escribirá (6.42) en términos $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejos, si $h_1 := h_{11} + \mathbf{i}h_{12}$ y $h_2 := h_{21} + \mathbf{i}h_{22}$, entonces

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{h_1 + \overline{h}_1}{2}, \quad h_{12} = \frac{h_1 - \overline{h}_1}{2\mathbf{i}}, \\ h_{21} &= \frac{h_2 + \overline{h}_2}{2}, \quad h_{22} = \frac{h_2 - \overline{h}_2}{2\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

Usando lo anterior en (6.42) y agrupando adecuadamente, se obtiene que $F(Z+H) - F(Z)$ es igual a:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z) - \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z)\right) \cdot h_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z) + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z)\right) \cdot \overline{h}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z) - \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z)\right) \cdot h_2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z) + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z)\right) \cdot \overline{h}_2 + \mathfrak{o}(H).$$

Si usamos las variables $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejas $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$ y $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$, y los operadores diferenciables complejos usuales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \\ \frac{\partial}{\partial z_2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_2}\right), \end{aligned} \tag{6.43}$$

se obtiene la fórmula

$$F(Z+H) - F(H) = \frac{\partial F}{\partial z_1}(Z) \cdot h_1 + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_1}(Z) \cdot \overline{h}_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2}(Z) \cdot h_2 + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_2}(Z) \cdot \overline{h}_2 + \mathfrak{o}(H). \tag{6.44}$$

Se enfatiza que (6.44) no expresa ninguna nueva noción, de hecho, esto solo es la condición de la diferenciabilidad real de una función C^1-bicompleja, a pesar que de que esté expresado en términos $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejos. Observe que en la Sección 6.1.1 se introdujeron los símbolos $F'_{z_1}(Z)$ y $F'_{z_2}(Z)$ en lugar de los símbolos $\frac{\partial F}{\partial z_1}(Z)$ y $\frac{\partial F}{\partial z_2}(Z)$ porque los primeros son derivadas parciales complejas, definidas, como de costumbre, como límites de cocientes de diferencia adecuados, mientras tanto los últimos indica operadores bien conocidos que actúan sobre funciones C^1. La relación entre estas dos nociones es clara mediante la siguiente definición y el teorema posterior.

Definición 6.2.1 *Una función bicompleja F de clase C^1 es $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$diferenciable si*

$$F(Z+H)-F(Z)=F'_{z_1}(Z)\cdot h_1+F'_{z_2}(Z)\cdot h_2+\mathfrak{o}(H).$$

Teorema 6.2.1 *Una función $F=f_1+\mathbf{j}f_2$ de clase C^1 es $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$diferenciable si y sólo si ambas componentes $f_1(z_1,z_2), f_2(z_1,z_2)$ son funciones holomorfas en el sentido de dos variables complejas.*

Demostración. La derivada parcial $F'_{z_1}(Z)$ existe en Ω si y sólo si el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}$ (que se puede considerar como dual del operador $\frac{\partial}{\partial z_1}$) anula a F. Es decir, si y sólo si F es holomorfa como función de z_1; esto se prueba tomando a $h_2=0$ y $h_1\neq 0$ en (6.44). Lo que queda es

$$F(Z+H)-F(Z)=F(Z+h_1)-F(Z)=\frac{\partial F}{\partial z_1}(Z)\cdot h_1+\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1}(Z)\cdot \overline{h}_1+\mathfrak{o}(H),$$

y como $\frac{\overline{h}_1}{h_1}$ no tiene límite cuando $h_1\to 0$, entonces se concluye que $F'_{z_1}(Z)$ existe si y sólo si $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1}=0$. En este caso, $F'(Z)=F'_{z_1}(Z)=\frac{\partial F}{\partial z_1}(Z)$
De manera similar, la derivada parcial $F'_{z_2}(Z)$ existe en Ω si y sólo si el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$ anula a F; esto es porque se puede tomar ahora $h_1=0, h_2\neq 0$ en (6.44). Entonces $F'_{z_2}(Z)=\frac{\partial F}{\partial z_2}(Z)=F'(Z)=-\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial z_2}(Z)$.
Finalmente, se pueden usar las dos condiciones

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1}(Z)=\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_2}(Z)=0$$

cumplirse en Ω, con (6.44) convirtiéndose en

$$F(Z+H)-F(Z)=F'_{z_1}(Z)\cdot h_1+F'_{z_2}(Z)\cdot h_2+\mathfrak{o}(H). \tag{6.45}$$

Esto concluye la prueba. ■

Observe que para funciones bicomplejas $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$diferenciables, en general, no hay relaciones entre sus derivadas parciales complejas.

Cálculos similares se pueden realizar con las otras representaciones de números bicomplejos, por ejemplo si $Z=\zeta_1+\mathbf{i}\zeta_2\in\mathbb{C}^2(\mathbf{j})$ y los $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ incrementos son, $\kappa_1:=h_{11}+\mathbf{j}h_{21}$ y $\kappa_2:=h_{12}+\mathbf{j}h_{22}$. Siguiendo los pasos anteriores eventualmente se llega al análogo de (6.44):

$$F(Z+H)-F(Z)=\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(Z)\kappa_1+\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_1}\overline{\kappa}_1+\frac{\partial F}{\partial \zeta_2}(Z)\kappa_2+\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_2}\overline{\kappa}_2+\mathfrak{o}(H), \tag{6.46}$$

donde las expresiones $\frac{\partial}{\partial \zeta_1}$ (y similares) son los operadores usuales diferenciales complejos en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$. Lo anterior representa la diferenciabilidad real de las funciones bicomplejas C^1 en términos $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$bicomplejos.

El mismo análisis de arriba se aplica a la ecuación (6.46) para llegar a que la diferenciabilidad $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$compleja de una función bicompleja es

$$F(Z+H)-F(Z)=F'_{\zeta_1}(Z)\cdot\kappa_1+F'_{\zeta_2}(Z)\cdot+\mathfrak{o}(H).$$

Note que la Observación 6.1.3. explica porque con las otras variables complejas $w_1,w_2,\omega_1,\omega_2$ se permite hacer un análisis similar del incremento de la función.

Ahora consideremos a $Z=\mathfrak{z}_1+\mathbf{i}\mathfrak{z}_2$ donde $\mathfrak{z}_1=x_1+\mathbf{k}y_2$ y $\mathfrak{z}_2=y_1+\mathbf{k}(-x_2)$ son variables hiperbólicas. Los incrementos hiperbólicos son $\mathfrak{h}_1=h_{11}+\mathbf{k}h_{22}$ y $\mathfrak{h}_2=h_{12}+\mathbf{k}(-h_{21})$. Usando las siguientes fórmulas

$$h_{11}=\frac{\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_1^\diamond}{2},\qquad h_{22}=\frac{\mathfrak{h}_1-\mathfrak{h}_1^\diamond}{2\mathbf{k}},$$
$$h_{12}=\frac{\mathfrak{h}_2+\mathfrak{h}_2^\diamond}{2},\qquad h_{21}=-\frac{\mathfrak{h}_2-\mathfrak{h}_2^\diamond}{2\mathbf{k}}.$$

Si se reagrupa el lado derecho de (6.42) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}F(Z+H)-F(Z)&=\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z)\cdot\frac{\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_1^\diamond}{2}+\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z)\cdot\frac{\mathfrak{h}_2+\mathfrak{h}_2^\diamond}{2}-\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z)\cdot\frac{\mathfrak{h}_2-\mathfrak{h}_2^\diamond}{2\mathbf{k}}+\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z)\cdot\frac{\mathfrak{h}_1-\mathfrak{h}_1^\diamond}{2\mathbf{k}}+\mathfrak{o}(H)=\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z)+\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z)\right)\mathfrak{h}_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z)-\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial y_2}(Z)\right)\mathfrak{h}_1^\diamond+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z)-\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z)\right)\mathfrak{h}_2+\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}(Z)+\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial x_2}(Z)\right)\mathfrak{h}_2^\diamond+\mathfrak{o}(H).\end{aligned}$$

Los operadores diferenciales “hiperbólicos” anteriores son consistentes con los del análisis hiperbólico. Para la variable hiperbólica $\mathfrak{z}=x+\mathbf{k}y$, las formas formales de la derivada hiperbólica están dadas por las fómulas:

$$\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}^\diamond}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

donde $\mathfrak{z}^\diamond=x-\mathbf{k}y$ es el conjugado hiperbólico de $\mathfrak{z}$. Entonces, en términos de variables hiperbólicas $\mathfrak{z}_1=x_1+\mathbf{k}y_2$ y $\mathfrak{z}_2=y_1+\mathbf{k}(-x_2)$ y los correspondientes operadores diferenciables hiperbólicos se obtiene:

$$F(Z+H)-F(Z)=\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{z}_1}(Z)\mathfrak{h}_1+\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{z}_1^\diamond}(Z)\mathfrak{h}_1^\diamond+\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{z}_2}(Z)\mathfrak{h}_2+\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{z}_2^\diamond}(Z)\mathfrak{h}_2^\diamond+\mathfrak{o}(H),\tag{6.47}$$

que es una variación de la diferenciabilidad real de funciones C^1-bicomplejas.

Se puede aplicar a la ecuación (6.47) un razonamiento similar a lo anterior. En particular, la definición de la diferenciabilidad hiperbólica de una función hiperbólica

$$F(Z+H)-F(Z)=\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{z}_1}(Z)\mathfrak{h}_1+\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{z}_2}(Z)\mathfrak{h}_2+\mathfrak{o}(H).$$

6.2.2. Diferenciabilidad real y parciales bicomplejas

La fórmula (6.42) así como (6.44),(6.46) y (6.47) expresan la diferenciabilidad real de una función bicompleja expresada en diferentes formas: la primera en el lenguaje real, las siguientes dos en lenguajes complejos $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ y $\mathbb{C}(\mathbf{j})$, respectivamente y la última en lenguaje hiperbólico. Se verá el comportamiento en lenguaje bicomplejo. Sea $H=h_1+\mathbf{j}h_2$ un incremento bicomplejo donde tenemos

$$h_1=\frac{H+H^\dagger}{2},\ h_2=\frac{H-H^\dagger}{2\mathbf{j}},$$

$$\overline{h}_1=\frac{\overline{H}+H^*}{2},\overline{h}_2=\frac{\overline{H}-H^*}{2\mathbf{j}}.\tag{6.48}$$

De esta manera (6.44) es equivalente a

$$F(Z+H)-F(Z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}-\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)(Z)\cdot H+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}+\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial z_2}(Z)\right)\cdot H^\dagger+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{z}_1}-\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial\overline{z}_2}\right)(Z)\cdot\overline{H}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{z}_1}-\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial\overline{z}_2}(Z)\right)\cdot H^*+\mathfrak{o}(H).\tag{6.49}$$

Se introducen los siguientes operadores diferenciales bicomplejos:

$$\frac{\partial}{\partial Z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}-\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right),\quad\frac{\partial}{\partial Z^\dagger}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z_2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_2}\right),\quad\frac{\partial}{\partial Z^*}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_2}\right).\tag{6.50}$$

Se obtiene la siguiete expresión intrínseca de la diferenciabilidad real de una función bicompleja F en términos de operadores diferenciales bicomplejos y variables:

$$F(Z+H)-F(Z)=\frac{\partial F}{\partial Z}(Z)H+\frac{\partial F}{\partial Z^\dagger}(Z)H^\dagger+\frac{\partial F}{\partial \overline{Z}}(Z)\overline{H}+\frac{\partial F}{\partial Z^*}(Z)H^*+\mathfrak{o}(H). \tag{6.51}$$

Mientras que la diferenciabilidad real define los coeficientes de (6.51) de manera única, se puede pensar que escribiendo a Z y a H de otra manera, entonces la fórmula (6.51) sería diferente, esto es incorrecto, pues, los operadores $\frac{\partial}{\partial Z}, \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}, \frac{\partial}{\partial^\dagger}$ y $\frac{\partial}{\partial Z^*}$ en la parte derecha de (6.51) están definidos de manera única. Esto requiere aclarar a que se refiere la “unicidad”. Estos son los mismos operadores solamente cuando actuán en funciones bicomplejas, sin tomar cualquier subestructura intrínseca en $\mathbb{BC}$. Por ejemplo, si las funciones son consideradas $\mathbb{C}^2(\mathbf{i}), \mathbb{C}^2(\mathbf{j})-$valuadas entonces los operadores son diferentes, esto es porque actúan en objetos de diferente naturaleza. Por esta razón, se debe tener cuidado con las funciones bicomplejas y los operadores.

Se escribirán operadores en diferentes posibilidades:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial w_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega_1}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \omega_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y_2}\right),
\end{aligned} \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Z^\dagger} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial w_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega_1^*}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \omega_2^*}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_1^\diamond}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_2^\diamond}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_1}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y_2}\right),
\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega_1}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \omega_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_1^\diamond}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_2^\diamond}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_1}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \overline{w}_2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y_2}\right),
\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Z^*} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2^*}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_1}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \overline{w}_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega_1^*}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \omega_2^*}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_1}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}_2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y_2}\right).
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Hay que precisar que tomar en cuenta la escritura de la función F en sus diferentes coordenadas para poder utilizar las diferentes escrituras del operador, por ejemplo si se toma una función bicompleja F y si le aplica el operador $\frac{\partial}{\partial Z^*}$; la función resultante $\frac{\partial F}{\partial Z^*}$ es una función bicompleja. Pero si consideramos a F como una función de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ a $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, digamos $F = (F_1, F_2)$, entonces el operador $\frac{\partial}{\partial Z^*}$ coincide con la acción del operador $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)$, esto es,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} & -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

pero no entenderla como la acción del operador $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2^*}\right)$.

Ahora podemos relacionar las diferentes parciales con el concepto de ser holomorfa.

Teorema 6.2.2 *Sea $F \in C^1(\Omega, \mathbb{BC})$, si F $\mathbb{BC}-$holomorfa entonces se cumplen las igualdades*

$$\frac{\partial F}{\partial Z^\dagger}(Z) = \frac{\partial F}{\partial \overline{Z}}(Z) = \frac{\partial F}{\partial Z^*}(Z) = 0, \tag{6.56}$$

para todo $Z \in \Omega$.

Demostración. Como F es $\mathbb{BC}-$holomorfa, la igualdad (6.4) se cumple para toda $H \notin \mathfrak{S}_0$. Como F es una función de clase C^1, entonces (6.51) cumple para cualquier $H \neq 0$, luego, ambas fórmulas se cumplen para elementos que no sean divisores de cero. Entonces (6.56) se sigue directamente comparando (6.4) y (6.51) además de recordar que son las únicas representaciones de F. ∎

Observación 6.2.1 *El regreso de la afirmación anterior es verdadera pero se demostrará más adelante.*

En orden de tener más consistencia con los razonamientos previos de esta sección y en analogía con los casos de funciones de variable real o compleja, se introduce la siguiente definición:

Definición 6.2.2 *Una función bicompleja $F \in C^1(\Omega, \mathbb{BC})$ es llamada $\mathbb{BC}-$diferenciable bicompleja en $Z \in \Omega$ si existe una constante bicompleja A_Z tal que,*

$$F(Z + H) - F(Z) = A_Z \cdot H + \alpha(H)H \tag{6.57}$$

con $\alpha(H) \to 0$ cuando $H \to 0$.

Note que en esta definición, H puede ser un divisor de cero pero tomando a H en (6.57) que no sea un divisor de cero, se obtiene por (6.4) que la $\mathbb{BC}-$diferenciabilidad implica la $\mathbb{BC}-$derivabilidad.

6.3. Holomorfía bicompleja vs holomorfía en dos variables

Sea F una función $\mathbb{BC}-$holomorfa, escrita como $F = f_1 + \mathbf{j}f_2$ en un domino $\Omega \subset \mathbb{BC}$ con la variable independiente escrita como $Z = z_1 + \mathbf{j}z_2$. Por el Teorema 6.2.2, y la Observación 6.2.1, esto es equivalente a decir que F satisface en Ω el sistema

$$\frac{\partial F}{\partial Z^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial \overline{Z}} = \frac{\partial F}{\partial Z^*} = 0.$$

Para los operadores involucrados se usarán las representaciones más apropiados de la tabla de la sección anterior. Usando tal representación para los operadores $\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}$ y $\frac{\partial}{\partial Z^*}$ se llega al sistema

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} - \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_2} = 0,$$

implicando que $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_2}$. Lo anterior es equivalente a la holomorfía, en el sentido de dos variables $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejas, de las funciones componentes f_1, f_2 de F. Por lo tanto F puede ser vista como una función holomorfa de $\Omega \subset \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \to \mathbb{C}^2(\mathbf{i})$. Pero se tiene más información. Como $\frac{\partial F}{\partial Z^\dagger} = 0$, entonces $F = f_1 + \mathbf{j}f_2$ verifica

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial Z^{\dagger}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z_1}\right)(f_1 + \mathbf{j}f_2)(Z) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(Z)\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(Z) + \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(Z)\right)\right) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial z_1}, \tag{6.58}$$

es decir, las derivadas parciales complejas de funciones holomorfas f_1, f_2 no son independientes; están relacionados con las condiciones de Cauchy-Riemann (6.58). Se resume este razonamiento de la siguiente manera

Proposición 6.3.1 *Una función $F = f_1 + \mathbf{j}f_2 : \Omega \subset\to \mathbb{BC}$ es $\mathbb{BC}-$holomorfa si y sólo si, visto como función de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \to \mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, es una función holomorfa con sus componentes relacionados bajo las condiciones de Cauchy-Riemann (6.58).*

En otras palabras, la teoría de funciones holomorfas bicomplejas se puede ver como la teoría de un subconjunto propio de funciones holomorfas de dos variables complejas. Cada ecuación en el Teorema 6.2.2 juega un diferente rol: dos de ellas juntas garantizan la holomorfía de los componentes $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejos y el tercero describe la relación entre ellos.

Ahora, sea F una función bicompleja holomorfa descrita como $F = g_1 + \mathbf{j}g_2$, donde g_1 y g_2 toman valores en $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ y escribiendo a $Z = \zeta_1 + \mathbf{j}\zeta_2$, entonces los operadores diferenciables correspondientes son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Z^{\dagger}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2^*}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{Z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial Z^*} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1^*} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \zeta_2^*}\right).\end{aligned}$$

Usando el Teorema 6.2.2 y la Observación 6.2.1 para que F sea una función holomorfa bicompleja significa que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial Z^{\dagger}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1^*} - \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial \zeta_2^*}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \overline{Z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial \zeta_2}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial Z^*} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1^*} + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial \zeta_2^*}\right) = 0.\end{aligned}$$

La primera y la tercera dan juntas, otra vez, que las componentes g_1 y g_2 de F son funciones holomorfas de variables $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$complejas ζ_1 y ζ_2, mientras que la segunda ecuación nos da

$$\frac{\partial g_1}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial g_2}{\partial \zeta_2}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial \zeta_2} = -\frac{\partial g_2}{\partial \zeta_1} \tag{6.59}$$

Proposición 6.3.2 *Una función $F = g_1 + \mathbf{i}g_2 : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ es $\mathbb{BC}-$holomorfa si y sólo si, visto como una función de $\Omega \subset \mathbb{C}^2(\mathbf{j}) \to \mathbb{C}^2(\mathbf{j})$, es una función holomorfa con sus componentes relacionados mediante las condiciones de Cauchy-Riemann (6.59).*

Finalmente, sea F una función $\mathbb{BC}-$holomorfa $F : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ escrita de la forma $F = \mathfrak{u}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{u}_2$, donde $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ toman valores en $\mathbb{D}$ y escribimos a $Z = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2$, entonces los operadores correspondientes son

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Z^{\dagger}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1^{\diamond}} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2^{\diamond}}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{Z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1^{\diamond}} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2^{\diamond}}\right), \\ \frac{\partial}{\partial Z^*} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2}\right).\end{aligned}$$

Usando el Teorema 6.2.2 y la Observación 6.2.1 se tiene que para que F sea $\mathbb{BC}-$holomorfa tiene que cumplir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial Z^\dagger} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond} - \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_2^\dagger}\right) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \overline{Z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_1^\diamond} + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_2^\diamond}\right) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial Z^*} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_1} + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}_2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

La primera y segunda ecuación implican juntas que los componentes $\mathfrak{u}_1$ y $\mathfrak{u}_2$ de F son funciones holomorfas de variable hiperbólica $\mathfrak{z}_1$ y $\mathfrak{z}_2$, mientras que la última ecuación da las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{z}_1} = \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial \mathfrak{z}_2}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{z}_2} = -\frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial \mathfrak{z}_1}. \tag{6.60}$$

Todas estas lucen como sus antecedentes en una variable compleja, pero hay una cosa diferente: se usan funciones $\mathbb{D}-$valuadas de dos variables hiperbólicas y con derivadas parciales hiperbólicas.

Teorema 6.3.3 *Una función $F = \mathfrak{u}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{u}_2 : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ es $\mathbb{BC}-$holomorfa si y sólo si, visto como una función de $\Omega \subset \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$, es una función holomorfa con sus componentes relacionadas por las condiciones de Cauchy-Riemann (6.60).*

6.4. Holomorfía bicompleja, representación idempotente.

Sea F una función bicompleja $F : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ definida en un dominio Ω. Se escribirán todas los números bicomplejos implicados en su forma $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$idempotente, por ejemplo

$$\begin{aligned}
Z &= \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger = (l_1 + \mathbf{i}m_1)\mathbf{e} + (l_2 + \mathbf{i}m_2)\mathbf{e}^\dagger,\\
F(Z) &= G_1(Z)\mathbf{e} + G_2(Z)\mathbf{e}^\dagger,\\
H &= \eta_1\mathbf{e} + \eta_2\mathbf{e}^\dagger = (u_1 + \mathbf{i}v_1)\mathbf{e} + (u_2 + \mathbf{i}v_2)\mathbf{e}^\dagger.
\end{aligned}$$

Se introducen los siguientes conjuntos que resultan ser dominios

$$\Omega_1 := \{\beta_1 \mid \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \Omega\} \subset \mathbb{C}(\mathbf{i}) \tag{6.61}$$

y

$$\Omega_2 := \{\beta_2 \mid \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \Omega\} \subset \mathbb{C}(\mathbf{i}). \tag{6.62}$$

Supongamos que $F \in C^1(\Omega)$ donde las derivadas reales son tomadas con respecto a las "variables idempotentes reales": l_1, m_1, l_2, m_2; que está relacionado con las variables cartesianas x_1, y_1, x_2, y_2 que se discutirá después. La condición $F \in C^1(\Omega)$ asegura la diferenciabilidad real de F en Ω, esto es,

$$F(Z + H) - F(Z) = \frac{\partial F}{\partial l_1}(Z)\cdot u_1 + \frac{\partial F}{\partial m_1}(Z)\cdot v_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}(Z)\cdot u_2 + \frac{\partial F}{\partial m_2}(Z)\cdot v_2 + \mathfrak{o}(H) \tag{6.63}$$

para $H \to 0$. Se seguirá la Sección 6.2 así que se omitirán algunos detalles. Primero escribiremos la fórmula (6.63) en términos $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejos como

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \overline{\eta}_1); \quad u_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 + \overline{\eta}_2);\\
v_1 &= \frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{\eta}_1 - \eta_1); \quad v_2 = \frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{\eta}_2 - \eta_2),
\end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
F(Z+H)-F(Z) = {} & \frac{\partial F}{\partial l_1}(Z)\frac{1}{2}(\eta_1+\overline{\eta}_1)+\frac{\partial F}{\partial m_1}(Z)\frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{\eta}_1-\eta_1)+\\
& +\frac{\partial F}{\partial l_2}(Z)\frac{1}{2}(\eta_2+\overline{\eta_2})+\frac{\partial F}{\partial m_2}(Z)\frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{\eta}_2-\eta_2)+\mathfrak{o}(H)=\\
& =\eta_1\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}(Z)-\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial m_1}(Z)\right)+\overline{\eta}_1\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}(Z)+\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial m_1}(Z)\right)+\\
& +\eta_2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}(Z)-\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial m_2}(Z)\right)+\overline{\eta}_2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_2}+\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial m_2}(Z)\right)+\mathfrak{o}(H)=\\
& =\eta_1\frac{\partial F}{\partial \beta_1}(Z)+\overline{\eta}_1\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_1}(Z)+\eta_2\frac{\partial F}{\partial \beta_2}(Z)+\overline{\eta}_2\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)+\mathfrak{o}(H).
\end{aligned}
$$

Observación 6.4.1 *Los cálculos anteriores muestran que una función bicompleja F de clase C^1, vista como una función de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, es holomorfa con respecto a β_q $(q=1,2)$ si y sólo si $\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_q}(Z)=0$ en Ω. Por ejemplo si F es una función bicompleja y la expresamos en coordenadas cartesianas, entonces es $\mathbb{BC}-$holomorfa si y sólo si sus componentes son holomorfas como funciones de dos variables complejas y satisfacen cada una relaciones de tipo Cauchy-Riemann entre ellas. En el caso de que se exprese a F en su forma idempotente el ser $\mathbb{BC}-$holomorfa será equivalente a que cada una de las funciones componentes sea una función holomorfa de una variable compleja y no hay relación entre ellas.*

Consideremos la identificación de $\mathbb{BC}$ y $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$

$$Z=\beta_1\mathbf{e}+\beta_2\mathbf{e}^\dagger \longleftrightarrow (\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$$

donde la base de $\mathbb{BC}$ no es la base canónica de $\{1,\mathbf{j}\}$ sino la base $\{\mathbf{e},\mathbf{e}^\dagger\}$.

Para el siguiente paso consideremos las fórmulas

$$H=\eta_1\mathbf{e}+\eta_2\mathbf{e}^\dagger,\quad H^\dagger=\eta_2\mathbf{e}+\eta_1\mathbf{e}^\dagger,\quad \overline{H}=\overline{\eta}_2\mathbf{e}+\overline{\eta}_1\mathbf{e}^\dagger,\quad H^*=\overline{\eta}_1\mathbf{e}+\overline{\eta}_2\mathbf{e}^\dagger,$$

que implica

$$\eta_1=H\mathbf{e}+H^\dagger\mathbf{e}^\dagger,\quad \overline{\eta}_1=H^*\mathbf{e}+\overline{H}\mathbf{e}^\dagger,\quad \eta_2=H^\dagger\mathbf{e}+H\mathbf{e}^\dagger,\quad \overline{\eta}_2=\overline{H}\mathbf{e}+H^*\mathbf{e}^\dagger.$$

La condición de diferenciabilidad real después de las sustituciones se convierte en

$$
\begin{aligned}
F(Z+H)-F(Z)= {} & H\left(\frac{\partial F}{\partial \beta_1}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial F}{\partial \beta_2}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+H^\dagger\left(\frac{\partial F}{\partial \beta_2}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial F}{\partial \beta_1}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+\\
& +\overline{H}\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_1}\mathbf{e}^\dagger\right)+H^*\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_1}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+\mathfrak{o}(H).
\end{aligned}
\tag{6.64}
$$

Note que las expresiones en los paréntesis no son, todavía, las formas idempotentes de nada, pues, los coeficientes de $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^\dagger$ son números bicomplejos, no números $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ complejos. Usando la fórmula $F=G_1\mathbf{e}+G_2\mathbf{e}^\dagger$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
F(Z+H)-F(Z)= {} & H\left(\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial G_2}{\partial \beta_2}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+H^\dagger\left(\frac{\partial G_1}{\partial \beta_2}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial G_2}{\partial \beta_1}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+\\
& +\overline{H}\left(\frac{\partial G_1}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial G_2}{\partial \overline{\beta}_1}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+H^*\left(\frac{\partial G_1}{\partial \overline{\beta}_1}(Z)\mathbf{e}+\frac{\partial G_2}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)\mathbf{e}^\dagger\right)+\mathfrak{o}(H).
\end{aligned}
\tag{6.65}
$$

Esta fórmula es válida para cualquier $F\in C^1(\Omega)$, entonces se analizará como las funciones $\mathbb{BC}-$holomorfas se distinguen de las de clase C^1.

Teorema 6.4.1 *La función de clase C^1, $F : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ es $\mathbb{BC}-$holomorfa en Ω si y sólo si los tres coeficientes bicomplejos de $H^\dagger, \overline{H}$ y H^* en (6.65) son todos cero para cualquier $Z \in \Omega$.*

Demostración. La parte necesaria se justifica como en el Teorema 6.2.2, debido a que F es $\mathbb{BC}-$holomorfa, la fórmula (6.4) se cumple para toda $H \notin \mathfrak{S}_0$. Pero F es una función de clase C^1, por lo tanto (6.65) también se cumple para $H \neq 0$, por lo que ambas fórmulas se cumplen para elementos no divisores de cero. Entonces el resultado se sigue de (6.4) y (6.65) son las únicas representaciones dada una función F.

Para probar la suficiencia, ayuda escribir explícitamente el significado de la desaparición de estos coeficientes, a saber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_1}{\partial \beta_2}(Z)\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \beta_1}(Z)\mathbf{e}^\dagger &= 0,\\ \frac{\partial G_1}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \overline{\beta}_1}(Z)\mathbf{e}^\dagger &= 0,\\ \frac{\partial G_1}{\partial \overline{\beta}_1}(Z)\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \overline{\beta}_2}(Z)\mathbf{e}^\dagger &= 0. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Ahora observe que la segunda y la tercera ecuación, debido a la independencia de $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^\dagger$, imponen que G_1 y G_2 son funciones holomorfas $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ valuadas de las variables complejas β_1, β_2 entonces tienen derivadas parciales complejas auténticas. Es más, la primera ecuación en (6.66) dice que una de las derivadas parciales de cada G_1 y G_2 son idénticamente cero: $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_2}(Z) = 0$, $\frac{\partial G_2}{\partial \beta_1}(Z) = 0$ para cualquier $Z \in \Omega$. Por lo tanto usando (6.61) y (6.62), G_1 es una función holomorfa de una variable $\beta_1 \in \Omega_1$ y G_2 es una función holomorfa de una variable $\beta_2 \in \Omega_2$. Se demostrará que estas tres ecuaciones implican que F es $\mathbb{BC}-$holomorfa. De hecho, debido a estas tres ecuaciones, tenemos que para cualquier $H = \eta_1\mathbf{e} + \eta_2\mathbf{e}^\dagger$ invertible se cumple:

$$\frac{F(Z+H) - F(Z)}{H} = \frac{G_1(\beta_1 + \eta_1) - G_1(\beta_1)}{\eta_1}\mathbf{e} + \frac{G_2(\beta_2 + \eta_2) - G_2(\beta_2)}{\eta_2}\mathbf{e}^\dagger$$

donde Z es un punto arbitrario de Ω.

Ahora, por las propiedades de G_1 y G_2 se deduce que el lado derecho tiene límite $G_1'(\beta_1)\mathbf{e} + G_2'(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger$ para $H \notin \mathfrak{S}_0$ cuando $H \to 0$, por lo que el límite en el lado izquierdo existe también para $Z \in \Omega$ con $H \notin \mathfrak{S}_0$ cuando $H \to 0$ y será la derivada $F'(Z)$, haciendo a F una función $\mathbb{BC}-$holomorfa en Ω. ■

La prueba permite hacer una caracterización más precisa de las funciones de clase C^1 que son $\mathbb{BC}-$holomorfas.

Teorema 6.4.2 *Una función bicompleja $F = G_1\mathbf{e} + G_2\mathbf{e}^\dagger : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ de clase C^1 es $\mathbb{BC}-$holomorfa si y sólo si las siguientes dos condiciones se cumplen:*

(I) *La componente G_1, vista como una función $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$valuada de dos variables complejas (β_1, β_2) es holomorfa; más aun, como no depende de la variable β_2 y por lo tanto G_1 es una función holomorfa de variable β_1.*

(II) *La componentes G_2, vista como una función $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$valuada de dos variables complejas (β_1, β_2) es holomorfa: además, no depende la variable β_1 y entonces G_2 es una función holomorfa de variable β_2.*

Observación 6.4.2 *Las funciones G_1 y G_2 son independientes en el sentido de que no existen "condiciones de tipo Cauchy-Riemann" que las relacionen.*

Se puede probar ahora el "regreso" del Teorema 6.2.2.

Teorema 6.4.3 *Dada una función $F \in C^1(\Omega, \mathbb{BC})$, entonces la condición (6.56) implica que F es $\mathbb{BC}-$holomorfa.*

Demostración. Si (6.56) se cumple, entonces todas las tres fórmulas de (6.66) son verdaderas, y por el Teorema 6.4.1 F es $\mathbb{BC}-$ holomorfa.

■

Corolario 6.4.1 *Sea F sea una función $\mathbb{BC}-$holomorfa en Ω, de la forma $F(Z) = G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger$ con $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \Omega$, entonces su derivada está dada por*

$$F'(Z) = G_1'(\beta_1)\mathbf{e} + G_1'(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Tomando en cuenta la relación entre β_1, β_2 y las componentes cartesianas z_1, z_2, se tiene también que

$$\begin{aligned} F'(z_1 + \mathbf{j}z_2) = &\quad G_1'(z_1 - \mathbf{i}z_2)\mathbf{e} + G_2'(z_1 + \mathbf{i}z_2)\mathbf{e}^\dagger \\ F'(Z) = &\quad G_1'(Z\mathbf{e} + Z^\dagger\mathbf{e}^\dagger)\mathbf{e} + G_2'(Z^\dagger\mathbf{e} + Z\mathbf{e}^\dagger)\mathbf{e}^\dagger. \end{aligned}$$

Esto implica que una función $\mathbb{BC}-$holomorfa tiene derivadas de cualquier orden y

$$\begin{aligned} F^{(n)}(Z) = &\quad G_1^{(n)}(\beta_1)\mathbf{e} + G_2^{(n)}(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger \\ = &\quad G_1^{(n)}(Z\mathbf{e} + Z^\dagger\mathbf{e}^\dagger)\mathbf{e} + G_2^{(n)}(Z^\dagger\mathbf{e} + Z\mathbf{e}^\dagger)\mathbf{e}^\dagger. \end{aligned}$$

Observación 6.4.3 *A pesar de que la fórmula (6.65) es parecida a la fórmula (6.51) sus consecuencias para la función F son diferentes: mientras que la fórmula (6.51) deja concluir que que las componentes cartesianas f_1, f_2 son funciones holomorfas de dos variables complejas que no son independientes. La fórmula (6.65) explica que las componentes idempotentes G_1, G_2 son funciones holomorfas de una variable compleja que son independientes.*

Observación 6.4.4 *Si $F = G_1\mathbf{e} + G_2\mathbf{e}^\dagger : \Omega \subset \mathbb{BC} \to \mathbb{BC}$ es $\mathbb{BC}-$holomorfa entonces la podemos extender de la siguiente manera, como para cualquier $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \Omega$ se tiene*

$$F(Z) = G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger.$$

Pero el lado derecho de la igualdad está bien definido para el conjunto $\tilde{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e} + \Omega_2\mathbf{e}^\dagger \supset \Omega$ con notaciones como en (6.61) y (6.62). Por el Teorema 6.4.2 la función $\tilde{F}$ definida por

$$\tilde{F}(Z) := G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger,\ Z \in \tilde{\Omega},$$

es $\mathbb{BC}-$holomorfa en $\tilde{\Omega}$ y como $\tilde{F}\mid_\Omega \equiv F$ es una extensión de F.

Observación 6.4.5 *El mismo análisis se puede hacer para la representación idempotente con coeficientes $\mathbb{C}(\mathbf{j})$.*

Observación 6.4.6 *Al principio del capítulo se trabajo con la representación cartesiana de números bicomplejos y se buscaron muchas propiedades de la derivada de funciones bicomplejas. En particular, dichas funciones tuvieron las derivadas parciales complejas con respecto a z_1 y z_2. Este enfoque falla inmediatamente cuando se trabaja con la representación idempotente: esto es debido que a que la definición de derivada excluye los valores de H que son necesarios para las derivadas parciales complejas con respecto a β_1, β_2. Pero en la prueba del Teorema 6.2.2 se demostró que tales derivadas parciales de funciones $\mathbb{BC}-$holomorfas existen, además, $\frac{\partial F}{\partial \beta_1}(Z) = G_1'(\beta_1)\mathbf{e}$ y $\frac{\partial F}{\partial \beta_2}(Z) = G_2'(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger$.*

Observación 6.4.7 *Usando los resultados de esta sección, se pueden dar varias pruebas al Teorema 6.1.4 en términos de la escritura idempotente de funciones bicomplejas elementales. Por ejemplo, para probar que la función exponencial bicompleja $F(Z) = e^Z$ es $\mathbb{BC}-$holomorfa, se puede escribir:*

$$F(Z) = e^Z = e^{\beta_1}\mathbf{e} + e^{\beta_2}\mathbf{e}^\dagger = G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger,$$

para toda $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \mathbb{BC}$. Pero G_1 es una función compleja holomorfa que depende de β_1, similarmente para G_2, entonces el Teorema 6.4.2 garantiza que F es una función bicompleja holomorfa. Además

$$(e^Z)' = (e^{\beta_1})'\mathbf{e} + (e^{\beta_2})'\mathbf{e}^\dagger = e^{\beta_1}\mathbf{e} + e^{\beta_2}\mathbf{e}^\dagger = e^Z.$$

6.5. Holomorfía bicompleja, cartesiana vs idempotente

En las secciones anteriores se trabajó en $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, en esta sección con las coordenadas estándares $\vec{x} := (x_1, y_1, x_2, y_2)$, se denotará como $\mathbb{R}^4_{\vec{x}}$, y si usamos las coordenadas idempotentes $\vec{l} := (l_1, m_1, l_2, m_2)$ lo denotaremos como $\mathbb{R}^4_{\vec{l}}$. La relación entre estás dos coordenadas está dado por

$$l_1 = x_1 + y_2, \quad m_1 = y_1 - x_2, \quad l_2 = x_1 - y_2, \quad m_2 = y_1 + x_2, \tag{6.67}$$

o de manera equivalente, por

$$(l_1, m_1, l_2, m_2)^t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x_1, y_1, x_2, y_2)^t. \tag{6.68}$$

La matriz de 4×4 de (6.68) tiene determinante igual a 4, por lo que es invertible, luego el inverso del cambio de variable anterior es

$$(x_1, y_1, x_2, y_2)^t := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (l_1, m_1, l_2, m_2)^t, \tag{6.69}$$

es decir,

$$x_1 = \frac{l_2 + l_2}{2}, \quad y_1 = \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad x_2 = \frac{m_1 - m_1}{2}, \quad y_2 = \frac{l_1 - l_2}{2}. \tag{6.70}$$

Por lo tanto tenemos una transformación invertible de espacios vectoriales $\phi : \mathbb{R}^4_{\vec{x}} \to \mathbb{R}^4_{\vec{l}}$ dado por

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \overset{\phi}{\mapsto} (l_1, m_1, l_2, m_2) \tag{6.71}$$

con inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R}^4_{\vec{l}} \to \mathbb{R}^4_{\vec{x}}$ dada por (6.69). Debido a que ϕ es invertible, a la matriz Jacobiana de ϕ, se le denotará por $J_{\vec{x}}[\phi]$. Observe que considerando la matriz transpuesta de (6.68) se puede escribir lo siguiente

$$\vec{l} = \vec{x} \cdot J_{\vec{x}}[\phi]^t.$$

De manera similar, si se denota a la matriz de 4×4 del lado derecho de (6.69) por $J_{\vec{l}}[\phi^{-1}]$, que es la inversa de $J_{\vec{x}}[\phi]$, (recuerde que tiene determinante $\frac{1}{4}$). Por lo tanto (6.69) se puede escribir como

$$\vec{x} = \vec{l} \cdot J_{\vec{l}}[\phi^{-1}]^t.$$

Observación 6.5.1 *Debido a que el determinante de $J_{\vec{x}}[\phi]$ es 4, entonces ϕ no es isometría entre $\mathbb{R}^4_{\vec{x}}$ y $\mathbb{R}^4_{\vec{l}}$. Además, si la norma Euclidiana de $\vec{x}$ es 1, entonces la norma Euclidiana de $\vec{l}$ es*

$$|\,\vec{l}\,| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + l_2^2 + m_2^2} = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{2}\,|\,\vec{x}\,| = \sqrt{2}.$$

Se denotará por $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ a cualquier módulo de funciones $\mathbb{BC}-$valuadas definidas en $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^4_{\vec{l}}$. Es decir, $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ es un $\mathbb{BC}-$módulo con las operaciones usuales de suma y multiplicación por una constante. Se define el operador de cambio de variable W_ϕ por

$$W_\phi : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V}), \quad W_\phi[g](\vec{x}) := (g \circ \phi)(\vec{x}) = g(\phi(\vec{x})), \tag{6.72}$$

donde $\mathcal{U} := \phi^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^4_{\vec{x}}$.
Como ϕ es un isomorfismo lineal, W_ϕ es un operador lineal (se abusa de la notación porque en realidad es un morfismo de $\mathbb{BC}-$módulos) bien definido. Es decir, para todas $\lambda, \eta \in \mathbb{BC}$ y para todas $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ se tiene:

$$W_\phi[\lambda g_1 + \eta g_2] = \lambda W_\phi[g_1] + \eta W_\phi[g_2].$$

El operador W_ϕ tiene inverso definido por

$$W_\phi^{-1} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V}), \quad W_\phi^{-1}[f](\vec{l}) := (f \circ \phi^{-1})(\vec{l}) = f(\phi^{-1}(\vec{l})), \tag{6.73}$$

como $(W_\phi \circ W_\phi^{-1})[f] = f$ y $(W_\phi^{-1} \circ W_\phi)[g] = g$. Por lo tanto W_ϕ es un isomorfismo lineal entre $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ y $\mathcal{F}(\mathcal{U})$. Establecido un isomorfismo entre los $\mathbb{BC}-$módulos se pueden establecer un isomorfismo entre las correspondientes $\mathbb{BC}-$álgebras de operadores lineales actuando en estos $\mathbb{BC}-$módulos. De hecho, dado un operador B actuando en $\mathcal{F}(\mathcal{V})$, se define la función

$$B \to A := W_\phi \circ B \circ W_\phi^{-1},$$

donde A es un operador actuando en $\mathcal{F}(\mathcal{U})$. Entonces cualquier combinación lineal o composición de operadores se preserva bajo la función anterior: si B_1 y B_2 son dos operadores actuando en $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ y Λ_1 y Λ_2 son dos números bicomplejos, entonces

$$\begin{aligned} W_\phi \circ (\Lambda_1 B_1 + \Lambda_2 B_2) \circ W_\phi^{-1} &= \Lambda_1(W_\phi \circ B_1 \circ W_\phi^{-1}) + \Lambda_2(W_\phi \circ B_2 \circ W_\phi^{-1}) \\ &= \Lambda_1 A_1 + \Lambda_2 A_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W_\phi \circ (B_1 \circ B_2) \circ W_\phi^{-1} &= (W_\phi \circ B_1 \circ W_\phi^{-1}) \circ (W_\phi \circ B_2 \circ W_\phi^{-1}) \\ &= A_1 \circ A_2. \end{aligned}$$

El razonamiento general anterior se especifica ahora para el caso de interés, para $\mathcal{F}(\mathcal{V}) = C^\infty(\mathcal{U})$ donde los operadores de las derivadas parciales actúan respecto a las correspondientes variables.
Sea g una función en $C^\infty(\mathcal{V})$, entonces $g(\phi(\vec{x}))$ está en $C^\infty(\mathcal{U})$. Ahora la regla de la cadena da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(W_\phi[g])}{\partial x_1}(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[g(\phi(\vec{x}))] \\ &= \frac{\partial g}{\partial l_1}(\phi(\vec{x})) \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial m_1}(\phi(\vec{x})) \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial l_2}(\phi(\vec{x})) \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial m_2}(\phi(\vec{x})) \cdot \frac{\partial m_2}{\partial x_1} \\ &= W_\phi\left[\frac{\partial g}{\partial l_1}\right](\vec{x}) + W_\phi\left[\frac{\partial g}{\partial l_2}\right](\vec{x}) \\ &= W_\phi\left[\frac{\partial g}{\partial l_1} + \frac{\partial g}{\partial l_2}\right](\vec{x}). \end{aligned}$$

Como la función g y la variable $\vec{x}$ son arbitrarias, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \circ W_\phi = W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial l_1} + \frac{\partial}{\partial l_2}\right).$$

Manipulando de manera similar las otras variables obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial l_1} + \frac{\partial}{\partial l_2}\right) \circ W_\phi^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial y_1} &= W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial m_1} + \frac{\partial}{\partial m_2}\right) \circ W_\phi^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial m_2} - \frac{\partial}{\partial m_1}\right) \circ W_\phi^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \frac{\partial}{\partial l_2}\right) \circ W_\phi^{-1}. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Brevemente, hemos establecido con la ayuda del cambio de variables, una relación entre las derivadas parciales con respecto a las coordenadas cartesianas canónicas y las derivadas parciales con respecto a las coordenadas idempotentes.
Considerando los operadores gradiente usuales en $\mathbb{R}^4_{\vec{x}}$ y $\mathbb{R}^4_{\vec{l}}$,

$$\nabla_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \text{ y } \nabla_{\vec{l}} = \left(\frac{\partial}{\partial l_1}, \frac{\partial}{\partial m_1}, \frac{\partial}{\partial l_2}, \frac{\partial}{\partial m_2}\right)$$

respectivamente, lo anterior se escribirá en su forma condensada:

$$\nabla_{\vec{x}} = W_\phi \circ (\nabla_{\vec{l}} \cdot J_{\vec{x}}[\phi]) \circ W_\phi^{-1}. \tag{6.75}$$

Si F es una función bicompleja, vista como función de $\mathbb{R}^4_{\vec{x}}$ a $\mathbb{R}^4_{\vec{x}}$ $F = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$, entonces se obtiene la relación entre las matrices Jacobianas de F en los dos sistemas coordenados considerados:

$$J_{\vec{x}}[F] = J_{\vec{l}}\left[W_\phi^{-1}[F]\right] \cdot J_{\vec{x}}[\phi]. \tag{6.76}$$

Es útil tener las relaciones inversas explícitamente. De (6.74) se obtiene:

$$\begin{aligned} W_\phi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_1} \circ W_\phi &= \frac{\partial}{\partial l_1} + \frac{\partial}{\partial l_2}, \\ W_\phi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial y_2} \circ W_\phi &= \frac{\partial}{\partial l_1} - \frac{\partial}{\partial l_2}, \end{aligned}$$

que da pie a

$$\frac{\partial}{\partial l_1} = W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \circ W_\phi, \tag{6.77}$$

$$\frac{\partial}{\partial l_2} = W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \circ W_\phi. \tag{6.78}$$

De manera similar se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial m_1} = W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \circ W_\phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial m_2} = W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \circ W_\phi. \tag{6.79}$$

Si utilizamos la notación de gradiente las fórmulas anteriores son:

$$\nabla_{\vec{l}} = W_\phi^{-1} \circ (\nabla_{\vec{x}} \cdot J_{\vec{l}}[\phi^{-1}]) \circ W_\phi. \tag{6.80}$$

Ahora para una función bicompleja G, vista com una función de $\mathbb{R}^4_{\vec{l}}$ a $\mathbb{R}^4_{\vec{l}}$, se obtiene:

$$J_{\vec{l}}[G] = J_{\vec{x}}[W_\phi[G]] \cdot J_{\vec{l}}[\phi^{-1}]. \tag{6.81}$$

Se puede observar que la fórmula anterior es consistente con (6.76) para $F = W_\phi[G]$ y usando el hecho de que $J_{\vec{x}}[\phi]$ y $J_{\vec{l}}[\phi^{-1}]$ son matrices inversas una de la otra.

Se puede concluir que si se quiere cambiar una expresión diferencial escrita en coordenadas cartesianas (x_1, y_1, x_2, y_2) en una expresión con las coordenadas idempotentes (l_1, m_1, l_2, m_2), entonces se usan las fórmulas (6.74); si se empieza con una expresión dada en coordenadas idempotentes, entonces (6.77),(6.78) y (6.79) da su equivalente en coordenadas cartesianas. Es decir, se obtienen relaciones directas entre los operadores diferenciales actuando en dos copias de $\mathbb{R}^4$, una copia con las coordenadas cartesianas y otra con las idempotentes.

Se pretende extender las ideas anteriores en los operadores diferenciales $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejos (6.43) en las variables z_1 y z_2. Escribiendo ahora las coordenadas idempotentes $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejas $\beta_1 := l_1 - \mathbf{i}m_1$ y $\beta_2 := l_2 + \mathbf{i}m_2$, los operadores diferenciales $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejos usuales asociados son:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_1}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \beta_2} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_1} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_1}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_2} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_2} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_2}\right). \tag{6.82}$$

Introduciendo el operador gradiente $\mathbb{C}(\mathbf{i})-$complejo

$$\nabla_{\vec{z}} := \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right),$$

y similarmente $\nabla_{\vec{\beta}}$, se resumen todas estas fórmulas de la manera siguiente:

$$\nabla_{\vec{x}} = \nabla_{\vec{z}} \cdot M, \qquad \nabla_{\vec{z}} = \nabla_{\vec{x}} \cdot M^{-1},$$

$$\nabla_{\vec{l}} = \nabla_{\vec{\beta}} \cdot M, \qquad \nabla_{\vec{\beta}} = \nabla_{\vec{l}} \cdot M^{-1}, \tag{6.83}$$

donde

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 1 & -\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \qquad M^{-1} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Ahora, si se quiere derivar las fórmulas relacionando, por decir, los operadores diferenciales en $\vec{z}$ con los de $\vec{l}$, solo se tienen que combinar las relaciones (6.83) anterior con las fórmulas (6.75) y (6.80):

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{z}} = \nabla_{\vec{x}} \cdot M^{-1} &= (W_\phi \circ (\nabla_{\vec{l}} \cdot J_{\vec{x}}[\phi]) \circ W_\phi^{-1}) \cdot M^{-1} \\ &= W_\phi \circ (\nabla_{\vec{l}} \cdot J_{\vec{x}}[\phi] \cdot M^{-1}) \circ W_\phi^{-1}. \end{aligned} \tag{6.84}$$

Una simple multiplicación matricial produce que la matriz $J_{\vec{x}}[\phi]^t \cdot M^{-1}$ sea igual a

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí se puede deducir, por decir, la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = W_\phi \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_1} + \frac{\partial}{\partial l_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_2}\right) \circ W_\phi^{-1}.$$

Si se quiere ahora expresar los operadores en $\vec{z}$ en términos de los de $\vec{\beta}$, se incorpora en (6.84) la relación entre el gradiente en $\vec{l}$ y el de $\vec{\beta}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{z}} &= W_\phi \circ \left(\nabla_{\vec{l}} \cdot J_{\vec{x}}[\phi] \cdot M^{-1}\right) \circ W_\phi^{-1} \\ &= W_\phi \circ \left(\nabla_{\vec{\beta}} \cdot M \cdot J_{\vec{x}}[\phi] \cdot M^{-1}\right) \circ W_\phi^{-1}. \end{aligned}$$

Para obtener experiencia con las manipulaciones anteriores, se puede escribir directamente de (6.74):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_1}\right) \\ &= W_\phi \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} + \frac{\partial}{\partial l_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_2}\right) \circ W_\phi^{-1} \\ &= W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} + \frac{\partial}{\partial \beta_2}\right) \circ W_\phi^{-1}. \end{aligned} \tag{6.85}$$

De manera similar, se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_2} &= W_\phi \circ (-\mathbf{i})\left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} - \frac{\partial}{\partial \beta_2}\right) \circ W_\phi^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} &= W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_1} + \frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_2}\right) \circ W_\phi^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} &= W_\phi \circ \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_1} - \frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_2}\right) W_\phi^{-1}. \end{aligned} \tag{6.86}$$

Operaciones similares nos llevan a las transformaciones recíprocas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_1} &= W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial z_2}\right) \circ W_\phi, \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2} &= W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial z_2}\right) \circ W_\phi, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{\beta}_1} &= W_\phi^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right) \circ W_\phi, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\beta}_2} = W_{\phi}^{-1} \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_2}\right) \circ W_{\phi}. \tag{6.87}$$

Se pueden escribir las fórmulas anteriores en términos de multiplicaciones matriciales:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial\overline{z}_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial\overline{z}_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{i} \\ 1 & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}, \frac{\partial}{\partial\overline{\beta}_1}, \frac{\partial}{\partial\beta_2}, \frac{\partial}{\overline{\beta}_2}\right),$$

donde la matriz de 4×4 anterior es $M \cdot J_{\vec{x}}[\phi^{-1}] \cdot M^{-1}$. La transformación recíproca está dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}, \frac{\partial}{\partial\overline{\beta}_1}, \frac{\partial}{\partial\beta_2}, \frac{\partial}{\partial\overline{\beta}_2}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{i} & 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} & 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial\overline{z}_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\overline{z}_2}\right),$$

En conclusión, se ha obtenido las relaciones directas entre los operadores diferenciales complejos actuando en dos copias de $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$, una es con las coordenadas cartesianas (z_1, z_2) y la otra es con las coordenadas idempotentes (β_1, β_2).

Observación 6.5.2 *Se pudo haber empezado estos cálculos desde la representación $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$idempotente de números bicomplejos, $Z = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^{\dagger}$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ están dadas por*

$$\gamma_1 = l_1 + \mathbf{j}(-m_1),\ \gamma_2 = l_2 + \mathbf{j}m_2.$$

Note que estos cálculos no producen las mismas fórmulas, como una empieza con un isomorfismo lineal diferente ϕ, para el cual la matriz definida es obtenida de (6.68) multiplicando la segunda columna por (-1). Por ejemplo, las fórmulas para los operadores diferenciales bicomplejos en términos de operadores $\mathbb{C}(\mathbf{j})-$idempotentes son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Z} &= W_{\phi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial\gamma_2}\mathbf{e}^{\dagger}\right) \circ W_{\phi}^{-1}, \\
\frac{\partial}{\partial Z^{\dagger}} &= W_{\phi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_1^*}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial\gamma_2^*}\mathbf{e}^{\dagger}\right) \circ W_{\phi}^{-1}, \\
\frac{\partial}{\partial\overline{Z}} &= W_{\phi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\mathbf{e}^{\dagger}\right) \circ W_{\phi}^{-1}, \\
\frac{\partial}{\partial Z^*} &= W_{\phi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_2^*}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial\gamma_1^*}\mathbf{e}^{\dagger}\right) \circ W_{\phi}^{-1}.
\end{aligned}$$

Regresando, ahora, a los operadores bicomplejos diferenciales (bicomplejos análogos de los conjugados complejos Cauchy-Riemann). Los cuales fueron definidos por (6.50) y se observo que no depende de la representación de la variable bicompleja Z. Se comentará lo anterior con más detalle.
Introduciendo le operador gradiente bicomplejo

$$\nabla_Z := \left(\frac{\partial}{\partial Z}, \frac{\partial}{\partial Z^{\dagger}}, \frac{\partial}{\partial\overline{Z}}, \frac{\partial}{\partial Z^*}\right).$$

En las coordenadas reales estándar $\vec{x}$, se tiene $\nabla_Z = \nabla_{\vec{x}} \cdot T$, donde

$$T := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & -\mathbf{i} & \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -\mathbf{j} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} \\ \mathbf{k} & -\mathbf{k} & -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{pmatrix}. \tag{6.88}$$

Si se quiere escribir ∇_Z en términos de operadores diferenciales $\vec{z}$, se combinan las fórmulas de los gradientes en cuestión:

$$\nabla_Z = \nabla_{\vec{x}} \cdot T = \nabla_{\vec{z}} \cdot M \cdot T,$$

donde

$$M \cdot T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\mathbf{j} & \mathbf{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{j} & \mathbf{j} \end{pmatrix}. \tag{6.89}$$

Es decir, se obtiene exactamente las fórmulas (6.50) que expresan los operadores diferenciales bicomplejos en términos de los operadores diferenciales complejos z_1 y z_2.

Si se quiere obtener ∇_Z en las coordenadas idempotentes $\vec{\beta}$, se calcula:

$$\begin{aligned} \nabla_Z \quad &= \nabla_{\vec{x}} \cdot T = \left(W_\phi \circ \left(\nabla_{\vec{l}} \cdot J_{\vec{x}}[\phi]\right) \circ W_\phi^{-1}\right) \cdot T \\ &= W_\phi \circ \left(\nabla_{\vec{l}} \cdot J_{\vec{x}}[\phi] \cdot T\right) \circ W_\phi^{-1}, \end{aligned}$$

donde la matriz $J_{\vec{x}}[\phi] \cdot T$ está dado por

$$J_{\vec{x}}[\phi] \cdot T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\mathbf{k} & 1-\mathbf{k} & 1-\mathbf{k} & 1+\mathbf{k} \\ -\mathbf{i}+\mathbf{j} & -\mathbf{i}-\mathbf{j} & \mathbf{i}+\mathbf{j} & \mathbf{i}-\mathbf{j} \\ 1-\mathbf{k} & 1+\mathbf{k} & 1+\mathbf{k} & 1-\mathbf{k} \\ -\mathbf{i}-\mathbf{j} & -\mathbf{i}+\mathbf{j} & \mathbf{i}-\mathbf{j} & \mathbf{i}+\mathbf{j} \end{pmatrix}. \tag{6.90}$$

Como

$$\mathbf{e} = \frac{1+\mathbf{k}}{2}, \qquad \mathbf{e}^\dagger = \frac{1-\mathbf{k}}{2},$$

$$\mathbf{i}+\mathbf{j} = 2\mathbf{i}\mathbf{e}^\dagger, \qquad \mathbf{i}-\mathbf{j} = 2\mathbf{i}\mathbf{e},$$

se obtiene:

$$J_{\vec{x}}[\phi] \cdot T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{e}^\dagger & \mathbf{e}^\dagger & \mathbf{e} \\ -\mathbf{ie} & -\mathbf{ie}^\dagger & \mathbf{ie}^\dagger & \mathbf{ie} \\ \mathbf{e}^\dagger & \mathbf{e} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^\dagger \\ -\mathbf{ie}^\dagger & -\mathbf{ie} & \mathbf{ie} & \mathbf{ie}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{6.91}$$

Por ejemplo, si se quiere escribir $\frac{\partial}{\partial Z}$ en las coordenadas reales idempotentes, se obtiene de lo previamente visto:

$$\frac{\partial}{\partial Z} = W_\phi \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_1}\mathbf{e} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_1}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial l_2}\mathbf{e}^\dagger - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_2}\mathbf{e}^\dagger\right) \circ W_\phi^{-1},$$

donde la matriz $M \cdot J_{\vec{x}}[\phi] \cdot T$ está dado por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{e}^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^\dagger & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^\dagger & \mathbf{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e} & \mathbf{e}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{6.92}$$

Sea F una función holomorfa bicompleja, entonces

$$\nabla_Z[F] = \left(\frac{\partial F}{\partial Z}, 0, 0, 0\right).$$

Escribiendo F en la forma idempotente $F = G_1\mathbf{e} + G_2\mathbf{e}^\dagger$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Z} \quad &= \frac{\partial F}{\partial \beta_1}\mathbf{e} + \frac{\partial F}{\partial \beta_2}\mathbf{e}^\dagger = \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1}\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \beta_2}\mathbf{e}^\dagger, \\ 0 \quad &= \frac{\partial F}{\partial \beta_1}\mathbf{e}^\dagger + \frac{\partial F}{\partial \beta_2}\mathbf{e} = \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2}\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \beta_1}\mathbf{e}^\dagger, \\ 0 \quad &= \frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_1}\mathbf{e}^\dagger + \frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_2}\mathbf{e} = \frac{\partial G_1}{\partial \overline{\beta}_2}\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \overline{\beta}_1}\mathbf{e}^\dagger, \\ 0 \quad &= \frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_1}\mathbf{e} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\beta}_2}\mathbf{e}^\dagger = \frac{\partial G_1}{\partial \overline{\beta}_1}\mathbf{e} + \frac{\partial G_2}{\partial \overline{\beta}_2}\mathbf{e}^\dagger, \end{aligned}$$

que reproduce otra vez la conclusión del Teorema 6.4.2.

Observación 6.5.3 *Bajo las mismas hipótesis de que $F = f_{11} + \mathbf{i}f_{12} + \mathbf{j}f_{21} + \mathbf{k}f_{22}$ es una función holomorfa bicompleja escritas en las coordenadas estándar $\vec{x}$, la derivada de F está dada por*

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

donde a, b, c, d son derivadas parciales reales de las funciones f_{kl} relacionadas por (6.18)-(6.21). Escritas en las coordenadas idempotentes $\vec{l}$, la expresión anterior es equivalente a

$$W_\phi^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial Z}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial l_1}\mathbf{e} - \mathbf{i}\frac{\partial \hat{F}}{\partial m_1}\mathbf{e} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial l_2}\mathbf{e}^\dagger - \mathbf{i}\frac{\partial \hat{F}}{\partial m_2}\mathbf{e}^\dagger\right),$$

donde $\hat{F} = W_\phi^{-1}[F]$.

Observación 6.5.4 *Se analizará en mejor detalle la crucial diferencia entre los operadores diferenciales complejos en las variables $\vec{z}$ y $\vec{\beta}$. Por ejemplo, si observados lado a lado a las siguientes fórmulas:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial Z^\dagger}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} &= W_\phi^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial Z}\cdot \mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial Z^\dagger}\cdot \mathbf{e}^\dagger\right) \circ W_\phi, \end{aligned}$$

se da cuenta uno de que hay una gran diferencia entre ellas: la primera mezcla los operadores bicomplejos uni-dimensionales en Z y $Z^\dagger$, mientras que la segunda las deja separadas. Por ejemplo, considere la función bicompleja $F(Z) = (Z - Z^\dagger)^2$; entonces

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}(Z) = 0, \text{ pero } \frac{\partial F}{\partial \beta_1}(Z) = 2(\beta_1 - \beta_2),$$

para toda $Z \in \mathbb{BC}$, por lo tanto F es constante con respecto a z_1, pero no con respecto a β_1.

Esto está estrechamente relacionado con el hecho de que una función $\mathbb{BC}-$holomorfa cuando es vista como una función de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}^2$ con las coordenadas cartesianas es un par de funciones holomorfas que dependen de dos variables complejas y que tienen una relación del tipo Cauchy-Riemann, mientras que la misma función escrita en coordenadas idempotentes se convierte en un par de funciones holomorfas de una variable que además son independientes una de la otra.

Observación 6.5.5 *Se verá la relación entre los operadores diferenciales bicomplejos y la representación idempotente de números hiperbólicos. Recordemos la fórmula para $\frac{\partial}{\partial Z}$, agrupando los términos en diferente manera:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} &= W_\phi \circ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_1}\right)\mathbf{e} + \left(\frac{\partial}{\partial l_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial m_2}\right)\mathbf{e}^\dagger\right) \circ W_\phi^{-1} \\ &= W_\phi \circ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial l_1}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial l_2}\mathbf{e}^\dagger\right) - \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial m_1}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial m_2}\mathbf{e}^\dagger\right)\right) \circ W_\phi^{-1}. \end{aligned} \tag{6.93}$$

Pero si se escribe $Z = \mathfrak{z}_1 + \mathbf{i}\mathfrak{z}_2$, donde

$$\mathfrak{z}_1 = x_1 + \mathbf{k}y_2,\ \mathfrak{z}_2 = y_1 - \mathbf{k}x_2,$$

y si se usa las representaciones idempotentes hiperbólicas intrínsecas

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= (x_1 + y_2)\mathbf{e} + (x_1 - y_2)\mathbf{e}^\dagger = l_1\mathbf{e} + l_2\mathbf{e}^\dagger, \\ \mathfrak{z}_2 &= (y_1 - x_2)\mathbf{e} + (y_1 + x_2)\mathbf{e}^\dagger = m_1\mathbf{e} + m_2\mathbf{e}^\dagger, \end{aligned}$$

entonces los operadores diferenciales hiperbólicos tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y_2}\right) = W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial l_1}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial l_2}\mathbf{e}^\dagger\right) \circ W_\phi^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = W_\phi \circ \left(\frac{\partial}{\partial m_1}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial m_2}\mathbf{e}^\dagger\right) \circ W_\phi^{-1}. \end{aligned}$$

Regresando a la fórmula (6.93), se obtiene la siguiente formulación de los operadores diferenciales bicomplejos con respecto a Z, en términos de las derivadas hiperbólicas:

$$\frac{\partial}{\partial Z} = W_\phi \circ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_2}\right) \circ W_\phi^{-1},$$

y de manera similar para los otros operadores.

Observación 6.5.6 *Cálculos análogos pueden ser hechos para todos los operadores diferenciales, empezando con cualesquiera de las escrituras en términos de $\mathbb{C}(\mathbf{j})$ u operadores hiperbólicos. Todas las fórmulas son consistentes desde todos los puntos de vista. La abundancia de fórmulas en diferentes escrituras, coordenadas o cambio de bases de $\mathbb{BC}$, todas concuerdan con una y otra, esto es un fenómeno muy específico de la organización de los bicomplejos.*

6.6. Ceros de funciones bicomplejas holomorfas.

En está sección se estudiarán funciones bicomplejas holomorfas definidas en un conjunto Ω que es de la siguiente manera

$$\Omega = \Omega_1\mathbf{e} + \Omega_2\mathbf{e}^\dagger := \{\beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \mid \beta_1 \in \Omega_1, \beta_2 \in \Omega_2\}$$

con Ω_1 y Ω_2 dominios, es decir, son conjuntos abiertos y conexos, en $\mathbb{C}(\mathbf{i})$. Se les llamará a estos Ω "dominio tipo producto" en $\mathbb{BC}$.

Sea F una función bicompleja definida en Ω escrita en su forma idempotente

$$F(Z) = G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger,$$

para toda $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \Omega$.

Supongamos que F no es idénticamente cero, entonces G_1 y G_2 no son cero simultáneamente cero. Debido a que G_1 es holomorfa (en el sentido complejo) en β_1 y G_2 en β_2 es holomorfa, cada un de ellas tiene ceros aislados. Esto quiere decir que si $G_1(\beta_{1,0}) = 0$ entonces existe un disco B_1 de centro $\beta_{1,0}$ y radio r_1 tal que $G_1(\beta_{1,0}) \neq 0$, para toda $\beta_1 \in B_1 \setminus \{\beta_{1,0}\}$. De manera similar con G_2. Entonces en el conjunto abierto $B = B_1\mathbf{e} + B_2\mathbf{e}^\dagger$, en único cero de F es $Z_0 = \beta_{1,0}\mathbf{e} + \beta_{2,0}\mathbf{e}^\dagger$. Por lo tanto F tiene ceros aislados en Ω.

Si $G_2 \equiv 0$ pero G_1 no es identicamente cero, entonces F es de la forma $F(Z) = G_1(\beta_1)\mathbf{e}$, $F(Z) = 0$ si y sólo si $Z = \beta_{1,0}\mathbf{e} + \lambda\mathbf{e}^\dagger$, donde $\lambda \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ es arbitrario. Por lo que el conjunto de ceros de F es una unión numerable (o finita) de porciones de rectas paralelas a la línea $L_{\mathbf{e}^\dagger} = \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$; en este caso la recta pasa por $\beta_{1,0}\mathbf{e}$ y es paralela a $\mathbb{BC}_{\mathbf{e}}$. De manera similar con $G_1 \equiv 0$. En resumen se acaba de probar el siguiente

Teorema 6.6.1 *Considere una función bicompleja holomorfa $F : \Omega \to \mathbb{BC}$ que no es idénticamente cero, entonces*

1. *Si F toma al menos un valor invertible, entonces su conjunto de ceros es el conjunto vacío o un conjunto aislado de puntos en Ω.*

2. *Si $F(Z) \in \mathbb{BC}_{\mathbf{e}}$ para toda $Z \in \Omega$, su conjunto de ceros es una unión numerable (o finito) de segmentos de una recta paralela a la recta $L_{\mathbf{e}^\dagger}$;*

3. *Si $F(Z) \in \mathbb{BC}_{\mathbf{e}^\dagger}$ para toda $Z \in \Omega$, su conjunto de ceros es una unión numerable (o finito) de porciones de una recta paralela a la recta $L_{\mathbf{e}}$.*

Ejemplo 6.6.1 *Considere la función bicompleja holomorfa* $F(Z) = Z^2 = f_1(Z) + \mathbf{j}f_2$, *con* $f_1 = 2z_1z_2$ *y* $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^2$, *que están definidas en* $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$ *y son holomorfas en ese conjunto. Sus conjuntos de ceros son:*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\, z_1 = 0\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\; z_2 = 0\}, \\ V_2 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\, z_1 = z_2\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\, z_1 = -z_2\}, \end{aligned}$$

respectivamente, observe que $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0)\}$ *que es el único cero de* F.

Una manipulación directa muestra que usando las variables idempotentes $\beta_1 = z_1 - \mathbf{i}z_2$ *y* $\beta_2 = z_1 + \mathbf{i}z_2$ *se obtiene la siguiente representación de* F:

$$F(Z) = \beta_1^2\mathbf{e} + \beta_2^2\mathbf{e}^\dagger =: G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger,$$

por lo tanto las funciones G_1 *y* G_2 *que son holomorfas de* $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ *en* $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ *respecto a* β_1 *o* β_2, *respectivamente. Además estas tienen un cero en* $\beta_1 = 0$ *o* $\beta_2 = 0$, *respectivamente.*

Ejemplo 6.6.2 *Considere ahora la función exponencial bicompleja* $F(Z) = e^Z$, *que es* $\mathbb{BC}-$*holomorfa y toma valores invertibles para toda* $Z \in \mathbb{BC}$. *Las funciones coordenadas* $f_1(z_1, z_2) = e^{z_1}\cos z_2$ *y* $f_2(z_1, z_2) = e^{z_1}\operatorname{sen} z_2$ *tienen los siguientes conjuntos de ceros*

$$V_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\, \cos z_2 = 0\} = \left\{ \left(z_1, \tfrac{(2n+1)\pi}{2}\right) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$V_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\, \operatorname{sen} z_2 = 0\} = \{(z_1, n\pi) \in \mathbb{C}^2(\mathbf{i}) \,|\, n \in \mathbb{Z}\},$$

que son conjuntos no compactos en $\mathbb{C}^2(\mathbf{i})$. *Pero como* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, *entonces* F *no tiene ceros.*

Si $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger$ *entonces*

$$F(Z) = e^{\beta_1}\mathbf{e} + e^{\beta_2}\mathbf{e}^\dagger =: G_1(\beta_1)\mathbf{e} + G_2(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger,$$

entonces G_1 *y* G_2 *son funciones holomorfas en* $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ *respecto a* β_1 *o* β_2 *y ninguna tiene ceros.*

Lo que da pie al siguiente

Teorema 6.6.2 *Sea* $F : \Omega \to \mathbb{BC}$ *una función* $\mathbb{BC}-$*holomorfa definida en un dominio tipo producto* Ω. *Entonces* $F'(Z) = 0$ *para toda* $Z \in \Omega$ *si y sólo si* F *es constante.*

Demostración.
Si F es una función constante su derivada es cero en Ω.
Ahora si $F'(Z) = 0$ para toda $Z \in \Omega$ y usando la notación y el resultado del Corolario 6.4.1 se puede asegurar que

$$0 = F'(Z) = G_1'(\beta_1)\mathbf{e} + G_2'(\beta_2)\mathbf{e}^\dagger,$$

para toda $Z = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\dagger \in \Omega$. Esto es equivalente a $G'(\beta_1) = 0$ en Ω_1 y $G_2'(\beta_2) = 0$ en Ω_2. Debido a que Ω_1 y Ω_2 son dominios en el plano complejo, esto implica que G_1 es una función constante con respecto a la variable β_1 y G_2 también es constante pero respecto a la variable β_2, es decir, $G_1(\beta_1) = a_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ para toda $\beta_1 \in \Omega_1$ y $G_2(\beta_2) = a_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ para toda $\beta_2 \in \Omega_2$, por lo que $F(Z) = a_1\mathbf{e} + a_2\mathbf{e}^\dagger$, una constante bicompleja para toda $Z \in \Omega$. ∎

Bibliografía

[1] Luna-Elizarrarás, M., Shapiro, M., Struppa, D., Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions: The Algebra, Geometry and Analysis of Bicomplex Numbers.* Birkhäuser. (2015)

[2] Luna–Elizarrarás, M., Shapiro, M., Struppa, D., Vajiac, A. *Bicomplex numbers and their elementary functions.* Cubo A Mathematical Journal v. 14. No. 2 (2012), 61-80.

[3] Rudin, W. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill. (1987)

[4] Lascurain-Orive, A. *Curso básico de variable compleja.* Las prensas de ciencias. (2013)

[5] Cárdenas-Trigos, H., Lluis-Riera, E. *Módulos Semisimples y Representación de Grupos Finitos.* Editorial Trillas, (1970)

[6] Remmert, R. *Theory of Complex Functions.* Springer, (1990)

[7] Marsden E. J., Hoffman J. M. *Análisis básico de variable compleja.* Editorial Trillas (2012)

[8] Pogorui, A., Rodriguez-Dagnino, R. *On the set of zeros of bicomplex polynomials. Complex Variables and Elliptic Equations*, v. 51, No. 7 (2006).

[9] Price, G.B. *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, **140** Marcel Dekker, Inc., New York, (1991).

[10] Zorich, V.A. *Mathematical Analysis*, Volumes I and II. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004).