



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIO EMERGENTE DE UNA  
CADENA DE OSCILADORES  
ARMÓNICOS CUÁNTICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**FÍSICO**

PRESENTA:

**EDUARDO LÓPEZ LIMA**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. RODOLFO PATRICIO MARTÍNEZ Y ROMERO**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Dedicado a:  
Toda aquel que me ha ayudado, tarde o temprano sabrá lo mucho que le aprecio.*



# Agradecimientos

De hacer una lista con todos los que, directa o indirectamente, me han ayudado nunca terminaría. Ya sea con una palabra, una sonrisa, una charla o su consejo lentamente me han motivado a seguir adelante.<sup>1</sup>

¡De todo corazón muchas gracias!

---

<sup>1</sup>Este trabajo se realizó sin el financiamiento de ningún proyecto de investigación



# Resumen

A partir de la interacción entre componentes de un sistema físico descrito cuánticamente, algunos autores como Jacobson [1], Carrol [2] y Raamsdonk [3] Verlinde, han descrito que la distancia entre éstos puede describirse como una función del entrelazamiento cuántico, en otras palabras el espacio emerge de manera natural como una consecuencia de la interacción. Siguiendo con este razonamiento uno se puede preguntar si el espacio-tiempo también emerge de las interacciones de un sistema físico, en este sentido las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser el caso límite de una teoría física más grande, en otras palabras la distancia tal y como la percibimos se puede interpretar como una medida cuantitativa de las interacciones entre un sistema y otro. Una de las motivaciones a esta idea proviene del trabajo de Bekenstein [4], donde la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro es función del área de su horizonte de eventos y no de su volumen, entendiendo esto último como una ley de área. Esta ley nos lleva a pensar que los grados de libertad en su frontera poseen la información de todas las interacciones del hoyo negro con sus alrededores y este intercambio de información nos describe su tamaño, a diferencia del interior en donde el intercambio con los alrededores es nulo. En este sentido se interpreta la nulidad de transferencia de información del interior hacia los alrededores como un espacio inaccesible, entendiendo que en este caso nos impide “ver” lo que hay adentro. Esto sugiere que la frontera de un sistema contiene la información de todas las interacciones con los alrededores. Lo que nos motiva a interpretar que a menor información intercambiada, más lejos se encuentra un objeto de nosotros y a mayor información intercambiada nos encontramos más cerca del objeto.

En este sentido, poder medir la información que se intercambia en la frontera nos describe como es el espacio en donde está el sistema. Para esto necesitamos mostrar una función de distancia construida a partir del entrelazamiento entre componentes de un sistema cuántico y obtener la dimensión del espacio emergente. En este trabajo se busca obtener la dimensión del espacio que emerge de una cadena de osciladores armónicos cuánticos con interacción a primeros vecinos.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Dualidad Anti-de Sitter/ Teoría conforme de campos (AdS/CFT) . . . . .	2
1.2. Espacio-tiempo y Entrelazamiento Cuántico . . . . .	3
<b>2. Oscilador Armónico Cuántico</b>	<b>9</b>
2.1. Operadores de ascenso y descenso . . . . .	12
<b>3. Espacios Emergentes</b>	<b>15</b>
3.1. Entropía de entrelazamiento . . . . .	17
3.2. Matriz densidad de probabilidad . . . . .	18
3.3. Información mutua . . . . .	21
<b>4. Espacio emergente de una cadena de osciladores cuánticos</b>	<b>31</b>
4.1. Hamiltoniano de interacción . . . . .	32
4.2. Entropía del sistema . . . . .	42
<b>5. Resultados y Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Desde el surgimiento de la teoría cuántica de campos de norma, que describe las interacciones electromagnéticas, nuclear débil y nuclear fuerte como parte de una misma teoría a través del modelo estándar de partículas, se ha buscado integrar a la gravedad desde el punto de vista de la física cuántica formando una teoría del todo (unificadora), sin éxito aparente.

dada una región del espacio-tiempo el número de grados de libertad no es proporcional al volumen de la región, caso contrario a las teorías cuánticas de campos convencionales, sino al área de la frontera de la región, entendiendo que las interacciones con esta región están definidas sobre la frontera y no con toda la región. de campo local parecería estar destinada al fracaso, ya que estas fluctuaciones locales de la geometría del espacio-tiempo no pueden ser los grados de libertad fundamentales de la misma manera en que las fluctuaciones locales del campo electromagnético representan los grados de libertad fundamentales en el electromagnetismo.

Sin embargo, las maneras más obvias de combinar física cuántica y relatividad general tales como tratar la gravedad simplemente como otro campo de partículas, conducen rápidamente a lo que se conoce como el problema de la renormalización. Esto está en contraste con la electrodinámica cuántica y las otras teorías de norma que son en general renormalizables y donde el cálculo perturbativo mediante diagramas de Feynman pueden ser acomodados para dar lugar a resultados finitos, eliminando los infinitos divergentes asociados a ciertos diagramas vía renormalización.

Un gran avance para entender la relación entre la teorías norma/gravedad viene descrito por el modelo propuesto por Maldacena en [5], donde se prueba que existe una dualidad entre la teoría de supercuerdas IIB en un espacio anti-de Sitter 5 dimensional con la 5 esfera  $AdS_5 \times S^5$  y una teoría conforme de campos  $SU(\mathcal{N})$  supersimétrica ( $\mathcal{N}$ ) en un espacio-tiempo de Minkowski 4-dimensional. En donde el espacio-tiempo de Anti-de Sitter es una solución maximalmente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica negativa; se utilizan en teorías de gravedad cuántica formuladas en algunos casos en términos de la teoría de cuerdas. Las teorías de campo conformes son teorías cuánticas de campos con invariancia bajo transformaciones que preservan los ángulos.

Otro resultado importante, descrito por Bekenstein (véase [4]) nos permite entender cómo la entropía relaciona la cantidad máxima de información que puede contener una determinada

región de espacio con el área de su frontera. Por ejemplo, dada una región compacta, digamos una esfera que contenga materia, si la energía supera una cierta densidad crítica, la teoría de la relatividad general predice el colapso de la región en un agujero negro. Éste posee una entropía  $S_{BH}$  descrita por (1.1), conocida como la entropía de Bekenstein-Hawking, en donde se demuestra que dicha entropía es directamente proporcional al área de la superficie del horizonte de eventos del agujero negro en vez de su volumen.

$$S_{BH} = \frac{k_{\beta} c^3 \pi}{2hG} A \quad (1.1)$$

done  $k_{\beta}$  la constante de Boltzmann,  $c$  la velocidad de la luz,  $h$  la constante de Planck y  $G$  la constante de gravitación universal. Así la entropía contenida en determinada región no puede ser mayor que la entropía del agujero negro más grande que pueda caber en tal volumen delimitado por la región, este límite se conoce como frontera Bekenstein, estableciendo que los agujeros negros son objetos de máxima entropía.

Otra idea que motiva este trabajo proviene de Raamsdonk (véase [3]), en donde se describe a los agujeros de gusano o puentes de Einstein-Rosen, como estados de máxima entropía cuando se tiene un entrelazamiento cuántico maximal entre estados del sistema, vía teoría norma/gravedad, que describiremos con mayor detalle en las subsecciones 1.1 y 1.2.

## 1.1. Dualidad Anti-de Sitter/ Teoría conforme de campos (AdS/CFT)

La idea básica de la correspondencia denotada como AdS/CFT, entre una teoría de supergravedad descrita por la teoría de cuerdas IIB, en un espacio asintóticamente de Anti-de Sitter (AdS) y una Teoría Conforme de Campos (CFT por sus siglas en inglés), es la equivalencia entre supergravedad definida en un espacio anti-de Sitter y una teoría conforme de campos definida en su frontera con una dimensión menor. El espacio AdS corresponde a una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa y es una teoría clásica de la gravedad; mientras que la CFT es una teoría cuántica. Esta correspondencia puede ser el camino para formular una teoría unificadora.

Considerando un sistema no gravitacional, digamos una teoría cuántica de campos con invariancia conforme, definida sobre un espacio-tiempo fijo, por ejemplo un espacio de Minkowski  $d$ -dimensional, el estado de vacío de la teoría dual corresponde a un espacio-tiempo AdS  $d + 1$  dimensional con un espacio de Minkowski como frontera, descrito por la métrica

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + dx_{\mu} dx^{\mu}) \quad (1.2)$$

Este es un espacio-tiempo de curvatura negativa máximalmente simétrico, con curvatura definida por la longitud  $l$ . La geometría espacial es un espacio hiperbólico. Para estados generales más excitados de la CFT, podemos describir la geometría de su dual como

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + \Gamma_{\mu\nu}(x, z) dx^{\mu} dx^{\nu}) \quad (1.3)$$

donde, para  $z$  pequeñas

$$\Gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(z^d)$$

con  $\eta_{\mu\nu}$  la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski. Esta descripción representa las coordenadas de Fefferman-Graham. Con esto podemos decir que la dualidad establece la equivalencia entre una supergravedad II B en 5 dimensiones a bajas energías en un espacio asintóticamente Anti-de Sitter y una Teoría Conforme de campos en 4 dimensiones a altas energías y viceversa.

## 1.2. Espacio-tiempo y Entrelazamiento Cuántico

En el trabajo de Raamsdonk véase[3], se argumenta que el espacio-tiempo está íntimamente relacionado con el entrelazamiento cuántico de los grados de libertad de la teoría CFT con su dual gravitacional; cuantificar este grado de entrelazamiento nos describe cuan separados están los espacio-tiempos correspondientes a dichos estados.

teoría de cuerdas postula que ciertas teorías gravitacionales cuánticas con comportamiento asintóticamente espacio-temporal fijo son exactamente equivalentes a una teoría cuántica de campos. Entendiendo esta correspondencia como una definición no perturbativa de la teoría de la gravedad cuántica vía teoría cuántica de campos. Sin embargo no tenemos una comprensión profunda de por qué o cómo el espacio-tiempo/gravedad emerge de los grados de libertad de la teoría de campos.

El ejemplo a tratar consiste en tomar una CFT sobre una esfera  $d$ -dimensional ( $S^d$ ) con una representación dual gravitacional con comportamiento asintóticamente AdS. Consideremos dos copias exactas no interactuantes sobre la  $S^d$ ; el espacio de Hilbert asociado a nuestro sistema será el producto tensorial

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

de los espacios de Hilbert de cada componente. En nuestro nuevo sistema, los estados cuánticos a considerar son los estados  $|\Psi_1\rangle$  y  $|\Psi_2\rangle$  en producto, es decir

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$$

Es fácil proporcionar una interpretación del dual gravitacional para tal estado. Dado que los grados de libertad de las dos CFT no interactúan de ninguna manera y que no hay entrelazamiento entre los grados de libertad de estos estado, la interpretación debe ser que tenemos dos sistemas físicos completamente separados. Si  $|\Psi_1\rangle$  es dual a un espacio-tiempo AdS y  $|\Psi_2\rangle$  es dual a algún otro espacio-tiempo (también AdS), el estado del producto es dual a un par espacio-tiempo desconectado. Ahora consideremos un estado en el cual los dos subsistemas están entrelazados, si  $|E_i\rangle$  representa el  $i$ -ésimo estado propio de energía para una CFT sobre  $S^d$ , definimos el estado

$$|\psi(\beta)\rangle = \sum_i e^{-\frac{\beta E_i}{2}} |E_i\rangle \otimes |E_i\rangle$$

Este estado es la suma del producto de estados  $|E_i\rangle \otimes |E_i\rangle$  y  $\beta$  es el inverso del producto de la temperatura por la constante de Boltzmann  $\beta = \frac{1}{k_\beta T}$ . Cada uno de estos estados

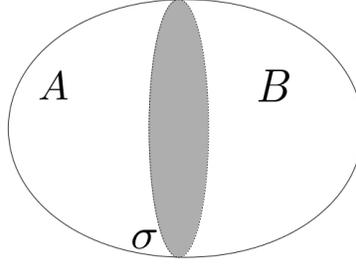


Figura 1.1: De acuerdo con Ryu y Takayanagi [6], la entropía de entrelazamiento entre las regiones  $A$  y  $B$  en la teoría de campo está relacionada al área de la superficie mínima  $\sigma$  en la geometría dual, de manera que la frontera de  $\sigma$  coincide con la frontera de  $A$  siguiendo una ley de áreas  $S(A) = \frac{Area(\sigma)}{4G}$ . En el diagrama, la geometría espacio-tiempo está representada por el interior de la esfera, mientras que la geometría en la que vive la teoría de campo se identifica con la superficie de ésta.

debe ser interpretado como un espacio-tiempo con 2 componentes separadas. Como se trata de un espacio-tiempo con dos regiones asintóticamente AdS equivalentes, sugiriendo que su descripción dual involucra dos copias de una CFT. Un observador en cualquier región asintótica ve el agujero negro del espacio-tiempo de Schwarzschild AdS, el correspondiente a un estado térmico de una teoría conforme. Trazando parcialmente sobre los grados de libertad de una de las copias, se encuentra que la matriz de densidad para la copia restante es exactamente una matriz de densidad térmica:

$$\text{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i e^{\frac{-\beta E_i}{2}} |E_i\rangle\langle E_i| = \rho_T$$

Más aún, la presencia de horizontes en el espacio-tiempo del agujero negro que prohíben la comunicación entre las dos regiones asintóticas puede estar naturalmente asociada a la ausencia de interacciones entre las dos CFTs, así el estado  $|\psi(\beta)\rangle$  tiene propiedades que son completamente consistentes con su interpretación como un agujero negro eterno de AdS. Si esta identificación es correcta, tenemos la siguiente conclusión: el estado  $|\psi(\beta)\rangle$  representa una superposición cuántica de espacios-tiempos desconectados. En este ejemplo, la conexión surge entrelazando los grados de libertad entre las dos componentes. véase la figura 1.2, más adelante explicamos como se llega a esta construcción.

Ahora intentaremos probar la idea de que el espacio-tiempo emergente en la dualidad de la teoría norma / gravedad se construye entrelazando grados de libertad. Regresando al caso de una CFT sobre  $S^d$ , realicemos un experimento mental en el que empezamos con el estado de vacío de la teoría de campo, su dual gravitacional en el espacio-tiempo de AdS y ver qué sucede con la geometría dual cuando cambiamos gradualmente el estado para desenredar algunos de los grados de libertad. Siendo específicos, dividimos nuestro espacio ( $S^d$ ) en dos regiones, digamos los hemisferios de la esfera,  $A$  y  $B$ , veamos la figura 1.1.

Dado que la CFT es una teoría cuántica de campo local, existen grados de libertad específicos asociados con regiones espaciales específicas, por lo que podemos descomponer el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Una medida cuantitativa del entrelazamiento entre las regiones  $A$  y  $B$  es la entropía de entrelazamiento  $S(A)$ , definida como la entropía de Von

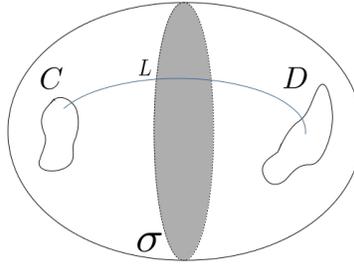


Figura 1.2: El tamaño de la geodésica  $L$  que conecta los puntos límite en  $C$  y  $D$  debe tender a infinito cuando la información mutua entre  $C$  y  $D$  va a cero.

Neumann

$$S(A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A)$$

donde la matriz de densidad restringida a la región  $A$  es

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|.$$

En general  $\rho_A$  es una cantidad divergente (tiende a infinito), pero podemos considerar a nuestra teoría definida con una cota para obtener una entropía finita. Ahora, comenzando con el estado de vacío, podemos preguntar qué sucede con el espacio-tiempo dual cuando variamos el estado cuántico de tal manera que la entropía de entrelazamiento  $S(A)$  disminuye. Utilizando la propuesta descrita por Ryu y Takayanagi [6], podemos describir lo que sucede: el área de la superficie mínima  $\sigma$  que separa a la esfera en las regiones  $A$  y  $B$  disminuye, en forma proporcional a la disminución de la entropía de entrelazamiento, so que se puede observar ilustrado en la figura 1.3. Como la superficie  $\sigma$  es una superficie divisora entre dos regiones del espacio dual, vemos que a medida que el entrelazamiento se va a cero, las dos regiones del espacio se separan entre si. Para ver este comportamiento de la geometría dual, consideremos la información mutua entre dos subsistemas cualesquiera  $C \subset A$  y  $D \subset B$ , definida como

$$I(C, D) = S(C) + S(D) - S(C \cup D),$$

la cual es una cantidad no negativa y es nula si y solo si la matriz de densidad para  $C \cup D$  es el producto tensorial de las matrices de densidad de  $C$  y  $D$ . Como el entrelazamiento entre  $A$  y  $B$  tiende a cero, la información mutua entre las dos regiones  $C$  y  $D$  también va a cero. Desde el punto de vista geométrico, la disminución en la información mutua entre  $C$  y  $D$  implica un aumento de la distancia entre las regiones correspondientes cerca de la frontera del espacio-tiempo. Primero, notemos que la información mutua proporciona una cota superior de las correlaciones en un sistema. Para esto consideremos cualesquiera operadores  $\mathcal{O}_C$  y  $\mathcal{O}_D$  actuando sólo en los subsistemas  $C$  y  $D$ , en el trabajo de Wolf [7] se demuestra el siguiente resultado

$$I(C, D) \geq \frac{(\langle \mathcal{O}_C \mathcal{O}_D \rangle - \langle \mathcal{O}_C \rangle \langle \mathcal{O}_D \rangle)^2}{2|\mathcal{O}_C|^2 |\mathcal{O}_D|^2}.$$

Por lo tanto, si nosotros variamos continuamente los estados de manera que la información mutua entre  $C$  y  $D$  vaya a cero, entonces todos los correladores también se hacen cero.

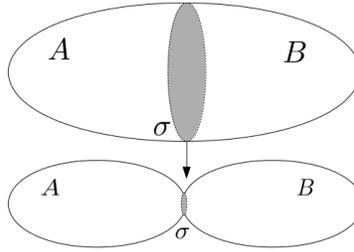


Figura 1.3: El efecto sobre la geometría debido a la disminución de entrelazamiento entre los grados de libertad de  $A$  y  $B$ . El área que separa a las regiones espaciales correspondientes disminuye mientras que la distancia entre puntos aumenta.

En el contexto de AdS/CFT, estos correladores, para dos puntos con operadores locales, proporcionan una medida directa de la distancia propia a través del espacio-tiempo entre los puntos de cada región. Específicamente, tenemos

$$\langle \mathcal{O}_C(x_C) \mathcal{O}_D(x_D) \rangle \sim e^{-L}$$

donde  $L$  la longitud de la geodésica más corta que une a  $x_C$  con  $x_D$ , véase la figura 1.2. Con esto vemos que a medida que el entrelazamiento entre los grados de libertad en la región  $A$  y la región  $B$  (y por tanto, la información mutua  $I(C, D)$ ) va a cero, la longitud de las geodésicas entre los puntos  $x_C$  y  $x_D$  debe ir a infinito. A medida que el entrelazamiento entre dos conjuntos de grados de libertad tiende a cero, la distancia entre las regiones espacio-tiempo correspondientes tiende a infinito, mientras que el área de la superficie mínima que separa a las regiones va a cero. En términos generales, las dos regiones se separan entre sí, como se muestra en la figura 1.3.

## Espacio Emergente

En este trabajo se busca encontrar la dimensión que emerge de una cadena de osciladores armónicos cuánticos con interacción a primeros vecinos. Como un ejemplo burdo, para vislumbrar el alcance e importancia que tienen la entropía de entrelazamiento e información mutua para calcular el espacio emergente del sistema, consideremos lo siguiente:

- Consideremos una vecindad en donde hay  $N$  inquilinos.
- Solo conocemos los nombres de estas personas y con las relaciones que tienen con sus vecinos.
- Con esta información somos capaces de describir en qué habitación vive cada vecino.

Conociendo la información debida a la interacción nos permite conocer describir el estado del sistema, al menos se puede describir la distancia entre componentes pero, nos puede dar una interpretación de la geometría del sistema mas aún el grado de interacción nos

describe diferentes geometrías o hace emerger un espacio métrico con el cuál describimos en su totalidad la forma del espacio donde se encuentra el sistema.

Este comportamiento también se aprecia en CFT, Ryu y Takayanagi [6] muestran que la entropía de enredamiento de una región está relacionada con su área y no con la región encerrada por la misma, al igual que Cao, Carroll y Michalakis [2], en donde se discute que la entropía de entrelazamiento satisface una ley de áreas, además de dar un método para calcular el espacio métrico, producto de las interacciones del sistema, a partir de particiones del mismo de forma adecuada y considerando la información mutua entre subsistemas, el cual consiste en:

- Descomponer el espacio de Hilbert asociado al sistema cuántico en los factores que lo componen,  $\mathcal{H} = \bigotimes_i^N \mathcal{H}_i$ , donde cada  $\mathcal{H}_i$  es de dimensión finita.
- Considerar los estados  $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$  constreñidos por redundancia (una generalización de estados en el cual la entropía de una región obedece una ley de áreas).
- Calcular la información mutua entre componentes  $I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B)$ , la cual define una métrica entre caminos que conectan los factores  $\mathcal{H}_i$ . Intuitivamente, entre menos información comparten los subsistemas, más separados se encuentran.

Con esto podemos concluir, en primera instancia por conocer la métrica que emerge de calcular la información mutua, que la dimensión (espacial por el momento) surge de que tan entrelazado este un conjunto de partículas con otro, es decir, si el sistema, digamos  $\mathcal{H}_1$ , esta débilmente entrelazado con  $\mathcal{H}_2$ , en su mundo  $\mathcal{H}_1$  ve muy lejos a  $\mathcal{H}_2$ , pero si estuvieran fuertemente entrelazados se *verían* muy cerca, tanto que estarían juntos o, dado el caso, están conectados con un puente de Einstein-Rosen.

En este trabajo se busca replicar los cálculos para una cadena de osciladores armónicos cuánticos con interacción a primeros vecinos, para encontrar la dimensión que emerge de dicho sistema, por tal motivo solo nos quedaremos con estos tres pasos. En el capítulo 2 se describen algunas propiedades del oscilador armónico cuántico que nos sirven para calcular el espacio emergente de una cadena de osciladores. En el capítulo 3 describimos el método propuesto por Carrol, al menos las herramientas que se usan en este trabajo, salvo por la sección 3.3, que se propone un método para calcular la matriz densidad de probabilidad junto con su evolución temporal. En el capítulo 4 calculamos la dimensión del espacio emergente, describiendo la construcción de la matriz densidad de probabilidad, la información mutua entre subsistemas. En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos, en nuestro caso la dimensión emergente de la cadena de osciladores es  $d = 1$ .

Con esto podemos comprender la importancia que tiene la entropía y la información de un sistema, llegando a construir un puente para obtener una teoría unificadora entre Gravitación y Mecánica Cuántica; por ejemplo, Jacobson [1] muestra la relación entre el entrelazamiento de un sistema cuando llega al equilibrio térmico y las ecuaciones de campo de Einstein, dando a entender que la Relatividad General es una teoría límite de una teoría más grande.



# Capítulo 2

## Oscilador Armónico Cuántico

A partir de la ecuación de Schrödinger (2.1), que describe la dinámica de un sistema cuántico, podemos describir un sistema compuesto por un oscilador armónico cuántico.

$$\mathcal{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle, \quad (2.1)$$

con  $\mathcal{H}$  el operador Hamiltoniano que está definido como:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r). \quad (2.2)$$

Esto en el caso tridimensional, con  $V(r)$  el potencial. Para nuestros fines usaremos la forma unidimensional e independiente del tiempo, resultando:

$$\mathcal{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle,$$

donde podemos notar que tenemos una ecuación diferencial de vectores (funciones) propios a valores propios

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} |\psi\rangle + V(x) |\psi\rangle = E |\psi\rangle.$$

Ahora considerando el potencial de un oscilador armónico unidimensional  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} |\psi\rangle + \frac{1}{2}kx^2 |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (2.3)$$

recordando de mecánica clásica, y puesto que el oscilador armónico cuántico es el símil cuántico del oscilador armónico simple, la relación entre la constante  $k$  del resorte con la frecuencia de oscilación  $\omega$  es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

sustituyendo en la ecuación (2.3)

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} |\psi\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (2.4)$$

Dado que la derivada de la función de onda ( $\psi$ ) debe devolver el cuadrado de  $x$  más una constante multiplicativa por la función original

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E\right)|\psi\rangle = 0,$$

proponemos la siguiente forma de la solución

$$\psi(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}. \quad (2.5)$$

Nótese que la forma obtenida (una gaussiana) satisface el requisito de ir a cero en el infinito, por lo que es posible normalizar la función de onda, véanse de la Peña [8] y Griffiths [9]. Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= -C\alpha x e^{-\alpha x^2/2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= -C\alpha e^{-\alpha x^2/2} + C\alpha^2 x^2 e^{-\alpha x^2/2} \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(-\alpha + \alpha^2 x^2)\psi + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi &= E\psi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para que esto sea una solución a la ecuación de Schrödinger los coeficientes de cada potencia de  $x$  deben ser iguales entre si

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}.$$

Y con los términos constantes

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega}{\hbar} = E_0 \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (2.7)$$

La cual es la energía mínima del oscilador, un hecho muy importante, ya que no existe el estado de energía cero para el sistema, también se le conoce como energía base. Para mostrar dicho resultado se procede utilizando el principio de incertidumbre de Heisenberg (2.8)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.8)$$

Tomando el límite inferior y expresando la energía en términos de los operadores de posición y momento, tenemos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2 \\ \Delta p &= \frac{\hbar}{2\Delta x} \\ \Rightarrow E &= \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Después minimizamos la expresión anterior, para esto derivamos la energía respecto de la posición

$$-\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega^2\Delta x = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

Sustituyendo en la expresión de la energía, nos da el valor mínimo permitido.

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (2.10)$$

Procedemos a calcular la constante de normalización de (2.5)

$$1 = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} dx = |C|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}},$$

despejando  $C$ , nos queda

$$C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.11)$$

Hasta el momento solo conocemos una solución a la ecuación diferencial planteada, para resolver de forma general la ecuación debemos notar que (2.5) a lo más admite una solución polinómica que no contradiga la convergencia de la solución en el infinito, es decir

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} u(x) \quad (2.12)$$

con  $u(x)$  una función polinómica de  $x$ . Sustituyendo (2.12) en (2.3) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{2\hbar}{m\omega}x \frac{du(x)}{dx} + \left(\frac{2mE}{\hbar} - \frac{\hbar}{m\omega}\right)u(x) = 0. \quad (2.13)$$

Tomando  $y = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x$ , la (2.13) queda

$$\frac{d^2u}{dy^2} - 2y \frac{du}{dy} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)u = 0, \quad (2.14)$$

tiene solución si se satisface la condición  $\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n$ , donde solución a (2.14) son los polinomios de Hermite  $H_n(y)$  (normalizados), obteniendo como solución general la siguiente ecuación de onda

$$\psi_n(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y) e^{-y^2/2} \quad (2.15)$$

Para una deducción más formal de ésta puede consultar en de la Peña, Griffiths, Arfken [8, 9, 10]. De las condiciones que debe satisfacer la  $\lambda$  se obtiene que las energías del oscilador armónico cuántico es:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.16)$$

Lo cual es algo completamente ajeno al oscilador clásico, que tiene un espectro continuo de energía, pues se entiende que los niveles energéticos permitidos del sistema están discretizados por una energía de transición  $\hbar\omega$ .

Hasta el momento el método seguido no muestra una diferencia respecto a los usados en mecánica clásica, para esto usaremos una descripción más natural, en el sentido discreto de las energías, para describir el sistema con ayuda de los operadores de creación y aniquilación, también llamados operadores de escalera.

## 2.1. Operadores de ascenso y descenso

Consiste en describir el Hamiltoniano del oscilador armónico en términos de unos nuevos operadores, que forman un álgebra de Lie, satisfaciendo relaciones de conmutación y que nos permiten rescribir la ecuación (2.4), razón por la cual satisfacen el problema del oscilador armónico cuántico. A continuación planteamos su desarrollo y relaciones que satisfacen con la función de onda.

Viendo la expresión (2.4) y recordando un poco el álgebra de los números complejos

$$z^2 + w^2 = (z - w)(z + w),$$

aunado a esto, el hecho de identificar el operador de momento  $p = -i\hbar\frac{d}{dx} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ , en el caso unidimensional. Nos permite definir los operadores de escalera como:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip)$$

Veamos que estos operadores reproducen la ecuación(2.4).

$$\begin{aligned} (a^\dagger a)f(x) &= \frac{1}{2m\hbar\omega}(m\omega x - ip)(m\omega x + ip)f(x) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}(m\omega x - ip)(m\omega x f(x) + ipf(x)) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}((m\omega x)^2 f(x) + im\omega x p f(x) - im\omega p(x f(x)) + p^2 f(x)) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}((m\omega x)^2 f(x) + im\omega x p f(x) - im\omega x p f(x) - m\hbar\omega f(x) + p^2 f(x)) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega}(p^2 - m\hbar\omega + (m\omega x)^2)f(x) \\ \Rightarrow a^\dagger a &= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + (m\omega x)^2\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos

$$aa^\dagger = \frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + (m\omega x)^2 \right) + \frac{1}{2}.$$

De aquí concluimos que su relación de conmutación es

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (2.17)$$

Cabe señalar que no es la única forma de construir los operadores de creación y aniquilación, algunos libros usan por notación  $a_+, a_-$  [9]. Notemos que podemos escribir la ecuación (2.3) en términos de  $a$  y  $a^\dagger$

$$\hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \psi = E\psi \quad (2.18)$$

En algunos textos se refieren al término  $aa^\dagger$  como el operador de número  $n$ , considerando las siguientes condiciones:

- 1.-  $a^\dagger \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}$
- 2.-  $a \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$
- 3.-  $a^\dagger \psi_0 = \sqrt{1} \psi_1 \dots (a^\dagger)^n \psi_0 = \sqrt{n!} \psi_n$  o bien  $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \psi_0$
- 4.-  $a \psi_0 = 0$
- 5.-  $a^\dagger a \psi_n = \sqrt{n} a^\dagger \psi_{n-1} = n \psi_n$

Con las cuales podemos reescribimos la ecuación de Schrödinger para el oscilador en la base de los operadores de escalera, también conocida como la base de energías propias

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$E = \langle n | \mathcal{H} | n \rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.19)$$

Con estas ecuaciones definimos el oscilador, cuyo estado base (o de vacío) es  $|0\rangle$ . Es importante señalar que estas ecuaciones no hacen referencia a la naturaleza del oscilador, solo a su dinámica y son aplicables a cualquier oscilador cuántico, resultando en un sin número de aplicaciones en la mecánica cuántica, por algo algunos profesores le llaman el caballito de batalla. Cuando se aplica este método para cuantizar campos se le llama *segunda cuantización*, la cual nos permite describir al sistema en su espacio de Fock, que nos servirá más adelante.



# Capítulo 3

## Espacios Emergentes

Como ya se mencionó en la primer parte del trabajo, buscamos describir por medio de la entropía de entrelazamiento un método que nos permita calcular una métrica que satisfice el sistema, si bien Carroll [2] nos da un camino a seguir, el cual es general, en el presente se busca definir un camino semejante, relativamente más sencillo, que sea capaz de reproducirse, a priori, con los conocimientos de un estudiante de licenciatura. Para esto necesitamos retomar las ideas propuestas por Carrol [2] y Jacobson [1] para construir un espacio emergente, pero más aterrizado. Empezamos con la descripción de nuestro sistema con un hamiltoniano, el cual codifica toda la información de la dinámica. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que lo podemos expresar por componentes, es decir,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (3.1)$$

donde, no necesariamente,  $\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B \neq \emptyset$ . Esto lo podemos entender como una región de interacción entre subsistemas, en un sentido más estadístico, que tienen grados de libertad en común. Considerando esto, describimos a cada espacio de Hilbert en su base de Fock tomando una base de vectores en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  descritos por  $|\psi_n\rangle_A, |\phi_m\rangle_B$  respectivamente. Escribimos el estado total del sistema como una superposición de estados de cada base

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m} C_{nm} |\psi_n\rangle_A \otimes |\phi_m\rangle_B, \quad (3.2)$$

en donde los elementos de matriz  $C_{nm}$  están dados y representan el entrelazamiento del sistema. En general, no siempre es posible describir los estados de cada subsistema de forma independiente a menos que se traten de estados puros (sin entrelazamiento), descrito por

$$C_{nm} = C_{A,n} C_{B,m} \quad \forall n, m \quad (3.3)$$

donde los coeficientes  $C_{A,n}$  y  $C_{B,m}$  satisfacen

$$\sum_n |C_{A,n}|^2 = \sum_m |C_{B,m}|^2 = 1.$$

Reescribiendo el estado total del sistema (3.2)

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_{A,n} |\psi_n\rangle_A \otimes \sum_m C_{B,m} |\phi_m\rangle_B \quad (3.4)$$

Donde podemos expresar el estado  $|\Psi\rangle$  como un producto tensorial entre dos estados puros, cada uno describe uno de los subsistemas y esta restringido al correspondiente espacio de Hilbert. Ahora consideramos la matriz densidad de probabilidad dada por

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (3.5)$$

Más adelante explicaremos los detalles de este operador. Podemos describir, con ayuda de las trazas parciales  $\text{Tr}_A, \text{Tr}_B$  a los operadores de densidad restringidos

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho, \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho.$$

Con ayuda de éstas, calculamos la entropía de entrelazamiento entre subsistemas definido por

$$S(A) = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A, \quad S(B) = -\text{Tr}_B \rho_B \log \rho_B \quad (3.6)$$

A su vez definimos la información mutua por

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B) \quad (3.7)$$

Donde  $S(A \cup B)$  lo podemos entender como la interacción entre los subsistemas. A priori, si nuestro sistema corresponde a una colección más grande de subsistemas, digamos  $N$ , tendremos

$$I(A_i, A_j); \quad \forall i, j = \{1, \dots, N\},$$

de los cuales existe una información máxima ( $I_{max}$ ) con la cual podemos normalizar a todas la informaciones mutuas, de tal modo que podemos construir una pseudométrica de la siguiente forma

$$\Omega(A_i, A_j) = -\ln \left( \frac{I(A_i, A_j)}{I_{max}} \right) \quad (3.8)$$

Se puede probar que  $\Omega$  esta bien definida, pues  $\frac{I(A_i, A_j)}{I_{max}} \in [0, 1]$ , y por definición de  $\ln$  obtenemos que  $\Omega \rightarrow [0, \infty]$  lo que nos da una noción de distancia positiva. Notemos que hemos construido una matriz de “distancias”; para convertirla en una métrica, en el sentido estricto, debemos encontrar los caminos mínimos que nos permiten unir cualesquiera dos puntos de nuestro espacio y satisfacer las propiedades de una métrica. En general volveremos a obtener una matriz, cuyos valores propios  $\lambda_k$  con  $k \in \{1, \dots, N\}$ , obtenidos de diagonalizar la matriz sus valores propios nos permitirán calcular la dimensión del espacio emergente. Por último los  $\lambda_k$  corresponden a una distribución no normalizada, que, al realizar el límite térmico del sistema  $N \rightarrow \infty$  obtenemos

$$\lambda_r \rightarrow 0 \quad \lambda_d \neq 0,$$

donde  $r = k - d$ , con  $d$  la dimensión del espacio que emerge debido al intercambio de información entre componentes del sistema.

### 3.1. Entropía de entrelazamiento

El concepto entropía es usado en termodinámica, mecánica estadística y teoría de la información. En todos los casos la entropía se concibe como una “medida del desorden” (una idea que no es del todo cierta, pero llega a ser ilustrativo para los estudiantes) o la “peculiaridad de que ocurran ciertas combinaciones” (por ejemplo, en una partida de poker una flor imperial es menos probable de salir en una mano que un par). La entropía puede ser considerada como una medida de la incertidumbre y de la información necesaria para poder acotar, reducir o eliminar la incertidumbre en un evento, entendiendo que los estados de máxima entropía son aquellos eventos con mayor probabilidad de ocurrir. Resulta que el concepto de información y el de entropía están básicamente relacionados entre si, aunque se necesitaron años de desarrollo de la mecánica estadística y de la teoría de la información antes de que esto fuera percibido Ash [11] describe la teoría de la información desde un punto de vista matemático, Brillouin [12] encuentra una relación entre información y entropía para sistemas físicos y Vedral [13] da una solución a la paradoja del demonio de Maxwell con estas ideas.

Otra idea aceptada en termodinámica es la medida de constreñimiento de las variables del sistema con los alrededores, o bien el grado de accesibilidad entre los grados de libertad del sistema y los alrededores, en ambos casos se contempla la idea de que la entropía cuantifica el intercambio de energía entre las componentes del sistema termodinámico.

Para poder describir en su totalidad nuestro método, hace falta definir con que tipo de herramientas trabajaremos. En mecánica cuántica hay una discusión de cuál entropía debe de usarse para calcular la entropía de entrelazamiento, siendo la más aceptada (3.9), definida por von Neumann

$$S = -\text{Tr} \rho \ln \rho, \quad (3.9)$$

donde  $\rho$  es la matriz densidad de probabilidad, entendiendo a ésta como el grado de información a la que podemos acceder cuando el sistema se encuentra entrelazado. Análogamente al caso clásico, la matriz de densidad codifica si el sistema se encuentra en una descripción de estados puros o mixtos, permitiéndonos asegurar la medida de interacción entre componentes del sistema. Cabe señalar que, para las Teorías Conforme de Campos, Cuántica de Campos, Holográfica de Campos, Cuerdas e Información Cuántica suelen ocuparse otras definiciones como

$$S_{Sh} = - \sum_i p_i \log_2(p_i). \quad (3.10)$$

La definición (3.10) es conocida como entropía de Shannon, mide la incertidumbre de enviar información entre dos puntos, donde  $p_i$  corresponde a la probabilidad de que el evento ocurra, para más detalles consulte Ash [11]. Muchas veces es considerada como la generalización de la entropía de Boltzmann (3.11), la diferencia radica en la interpretación física de la información y su relación con la neguentropía, definida por Brillouin [12], además de su importancia como ente físico que nos ayuda a resolver la paradoja del demonio de Maxwell, cuya solución e interpretación la puede consultar en Vedral [13].

$$S = k_\beta \log \Omega \quad (3.11)$$

Recordando que  $\Omega$  representa a todos los estados accesibles del sistema físico, la ecuación (3.11) muestra la relación entre la entropía y el número de formas en que se pueden organizar los átomos en los estados accesibles de un sistema termodinámico.

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \rho^\alpha \quad (3.12)$$

La entropía de Rènyi (3.12) de orden  $\alpha$  se utiliza en Teoría Holográfica para construir el hamiltoniano modular. Se considera la generalización de la entropía de Shannon, basta notar que

$$S = \lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha.$$

En Teoría Conforme de Campos es muy usada para encontrar la entropía de entrelazamiento entre subsistemas. En primer lugar, el conjunto de todas las entropías de Rènyi es la descripción independiente de la base más completa de la matriz de densidad, ya que son los momentos de su distribución de valores propios. En segundo lugar, el cálculo de la entropía de entrelazamiento suele ser difícil en la Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés), pero se puede evitar este problema mediante el uso del truco de réplica, veanse los trabajos de Alcaraz [14], Belin [15], Calabrese [16], Headrick [17] y Yang [18, 19].

## 3.2. Matriz densidad de probabilidad

Hasta el momento hemos hecho mención de la matriz densidad de probabilidad pero aún no la definimos. Conceptualmente hablando es el operador que contiene toda la información del sistema y que nos permite describir de forma completa los estados de éste. Algunas veces llamada operador estadístico, es el análogo cuántico a una medida de probabilidad en el sentido de considerar estados  $|\psi\rangle = c|n\rangle$  puros, entendiendo que están descritos en una base diagonal, como una superposición de estados posibles. Supongamos un fotón con estados de polarización circular izquierda ( $\mathcal{L}$ ) y polarización circular derecha ( $\mathcal{R}$ ), su vector propio sería:

$$|\psi\rangle = \alpha|\mathcal{R}\rangle + \beta|\mathcal{L}\rangle,$$

donde  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Se define como

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (3.13)$$

donde los  $w_i$  cumplen la condición

$$\sum_i w_i = 1$$

por ser, en general, una función peso. Con esto es posible calcular el valor esperado de cualquier operador de forma natural. Para una mayor generalidad tomaremos  $|\psi_i\rangle$  en una base arbitraria  $|n\rangle$ ,

$$|\psi_i\rangle = \sum_n a_{in} |n\rangle, \quad (3.14)$$

donde los coeficientes  $a_{in}$  se miden de forma experimental y están dados por la relación

$$a_{in} = \langle n|i \rangle$$

Nótese que los estados  $|i\rangle$  y  $|n\rangle$  los consideraremos ortogonales, aunque se puede hacer un desarrollo en una base no ortogonal, como la representación de estados coherentes utilizada en óptica cuántica. Sea  $\mathcal{O}$  un operador cualquiera, al cual queremos calcular su valor de expectación,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_i w_i \langle i|\mathcal{O}|i \rangle = \sum_i \sum_{n,m} w_i \langle n|a_{in}^* \mathcal{O} a_{im}|m \rangle = \sum_i \sum_{n,m} w_i a_{in}^* a_{im} \langle n|\mathcal{O}|m \rangle.$$

Ahora reescribimos el coeficiente que acompaña al término  $\langle n|\mathcal{O}|m \rangle$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_i w_i a_{in}^* a_{im} &= \sum_i w_i \langle m|i \rangle \langle i|n \rangle \\ &= \langle m| \left( \sum_i w_i |i\rangle\langle i| \right) |n \rangle = \langle m|\rho|n \rangle = \rho_{mn}, \end{aligned}$$

donde  $\rho$  está descrita por sus elementos de matriz. Sustituyendo este resultado en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &= \sum_{m,n} \rho_{mn} \mathcal{O}_{nm} = \sum_{m,n} \langle m|\rho|n \rangle \langle n|\mathcal{O}|m \rangle \\ &= \sum_{m,n} \langle m|\rho \delta_n \mathcal{O}|m \rangle = \sum_m \rho \mathcal{O} = \text{Tr } \rho \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Con  $\delta$  la delta de Kronecker. Con esto concluimos que la matriz densidad de probabilidad es la descripción más completa de un sistema cuántico y nos permite conocer toda la información que queramos del mismo, solo necesitamos conocer un sistema de operadores independientes entre si para tener todos los valores de expectación.

Ahora, si consideramos que nuestro sistema cuántico lo podemos dividir en sus componentes, cosa que se puede hacer en general, solo basta dar una descripción adecuada. Digamos que

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (3.15)$$

Se quiere conocer la entropía de entrelazamiento en solo uno de estos subsistemas, para ello necesitamos definir la matriz de densidad reducida

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho = \sum_B \rho \quad (3.16)$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho = \sum_A \rho \quad (3.17)$$

Entendiendo  $\text{Tr}_B$  ( $\text{Tr}_A$ ) como la suma en los grados de libertad de cada subsistema. De esta forma si queremos conocer la entropía de entrelazamiento de  $A$  o  $B$  será:

$$S(A) = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A), \quad S(B) = -\text{Tr}_B(\rho_B \log \rho_B). \quad (3.18)$$

En caso de poderse definir una región de interacción en el hamiltoniano, sería

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{Int}$$

la cual posee toda la información de las interacciones entre los grados de libertad de ambas regiones. Podemos definir una matriz densidad de probabilidad para la parte de interacción, lo que nos facilita calcular la información mutua (3.7) cuando no se tiene bien definida la región de interacción.

Algunas de las propiedades de la matriz densidad de probabilidad son las siguientes. Recordando que  $\sum_i w_i = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho &= \text{Tr} \sum_i w_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i,j} \langle j| (w_i |i\rangle\langle i|) |j\rangle = \sum_{i,j} w_i \langle j|i\rangle \langle i|j\rangle \\ &= \sum_{i,j} w_i \langle j|i\rangle \delta_i = \sum_j w_j \langle j|j\rangle = \sum_j w_j = 1 \\ \therefore \text{Tr } \rho &= 1. \end{aligned}$$

Como los pesos son valores positivos, reales  $w_i \geq 0$  y  $w_i^* = w_i$ , se concluye que  $\rho$  es su autoadjunta

$$\rho^\dagger = \left( \sum_i w_i |i\rangle\langle i| \right) = \sum_i w_i |i\rangle\langle i| = \rho$$

Al tratarse de un operador cuántico, debe satisfacer una ecuación de evolución de la forma

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (3.19)$$

conocida como la ecuación de Liouville cuántica, donde el operador de Liouville se define por  $\mathcal{L} = [\mathcal{H}, \cdot]$ . Rescribiendo (3.19)

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{L}\rho$$

Cabe señalar que la evolución se da en el espacio de Hilbert, a diferencia de su contraparte clásica, la cual se da en el espacio fase.

Si describimos al sistema de forma estadística podemos ver que la matriz densidad de probabilidad nos permite hacer la descripción más general y completa conocida de un sistema cuántico abierto, y que en particular puede considerarse como la contraparte cuántica de la función de distribución clásica. Consideremos un sistema de dimensiones macroscópicas compuesto de un gran número de microsistemas, por ejemplo un gas de bosones o fermiones. Si el macrosistema se encuentra en equilibrio a temperatura  $T$ , fija, y  $E_n$  representa los valores propios del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  de uno de sus componentes, la probabilidad de que éste se encuentre en un estado de energía  $E_n$  esta dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$w_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

con  $\beta = 1/k_B T$  y  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  la función de partición, que nos garantiza  $\sum_n w_n = 1$ . De esta manera la matriz de densidad se describe de la siguiente forma

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle\langle n|, \quad (3.20)$$

donde  $|n\rangle$  representa los estados propios del sistema hamiltoniano. Si escribimos esta última de forma independiente de la representación obtenemos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta \mathcal{H}} |n\rangle\langle n| = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}} \sum_n |n\rangle\langle n| \\ \Rightarrow \rho &= \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

tomando en cuenta que  $|n\rangle$  es ortogonal. El ensamble de sistemas descritos con esta matriz de densidad corresponde a un ensamble canónico. Como  $\rho$  depende sólo del hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , que es una integral de movimiento, concluimos que es un ensamble en equilibrio, cuyas propiedades termodinámicas quedan determinadas por la función de partición  $Z = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$ . Con este resultado podemos reescribir (3.9) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S &= -\text{Tr} \left( \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \ln \left( \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \right) \right) = -\text{Tr} \left( -\beta \mathcal{H} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} - \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \ln Z \right) \\ &= \beta \text{Tr} \left( \mathcal{H} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \right) + \frac{\text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \ln Z = -\beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \ln Z \end{aligned} \quad (3.22)$$

La cual es solo válida para ensambles térmicos.

### 3.3. Información mutua

En la teoría de la Información, vease Ash [11], se define a la información mutua como una medida de correlación entre dos caracteres que componen un mensaje; por ejemplo, en el caso de enviar un msm a nuestro contacto de preferencia, podríamos pensar, en general, que los caracteres que componen al mensaje no tienen una relación en especial, salvo formar palabras inteligibles. A priori esto es lo que hacemos, sin embargo cada lenguaje es único y responde a un conjunto de reglas ortográficas y gramaticales, permitiéndonos una mayor comprensión del texto escrito, pero... ¿Qué relación tiene con la información mutua? Entendiendo que las cadenas de caracteres enviados en el mensaje de texto deben cumplir con estas reglas (bajo el supuesto de que se respeten cada vez que uno los escribe), se puede ver que los caracteres no son tan aleatorios, incluso la elección de palabras depende de cada persona y dicha elección contiene información del individuo, tanto social como cultural.

Para simplificar las cosas supongamos que hay dos tipos de condiciones entre caracteres las que dependen de la ortografía y las impuestas por el remitente. Podemos asegurar que existe una correlación entre caracteres y palabras que no solo dependen del idioma u ortografía, sino de usos y costumbres. Algo que nos es completamente natural, pero aun no entendemos él

punto del ejemplo anterior. Para hacerlo más evidente, supongamos que el medio por donde enviamos un mensaje de texto cuenta con una aplicación de corrección ortográfica, la cual nos remarca los errores gramaticales. Con un uso constante (dependiendo de la configuración) nos muestra un texto predictivo basado en la frecuencia de uso y encadenación de caracteres y/o palabras, digamos que después de un hola nos propone continuar el mensaje con un ¿Cómo estas? o el nombre del destinatario, la duda (para algunos) es, ¿Por qué nos predice estas palabras?, sencillamente la aplicación tiene un histograma de frecuencias por palabra, entiende que la predisposición por usarlas esta relacionada con ciertas cadenas de caracteres, encontrando una correlación entre ellos, digamos que en un 80 % de las veces donde se usa Ho se dispone la palabra Hola en lugar de Hoy. Esta medida en la predisposición de palabras por texto predictivo es una aplicación de la información mutua, aunque claramente no siempre esta bien implementada en nuestros dispositivos.

En el caso físico debemos entender la información mutua como una medida de correlación entre eventos condicionados por medio de la incertidumbre de aparición. Con esto entendemos lo siguiente, si la entropía de los eventos no cumple una condición de entrelazamiento, la información entre eventos, descrita en (3.7), es cero. En otras palabras, si las regiones descritas por  $A$  y  $B$  no están entrelazadas, la medida en el intercambio de información entre las regiones y el total es la misma, entonces la matriz densidad de probabilidad de todo el sistema se puede escribir como un producto tensorial de las matrices restringidas de cada región.

Para visualizar esta idea consideremos el estado  $|\psi\rangle$  para el cual existe una descomposición en el espacio de Hilbert, tal que  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H} = \otimes_j^N \mathcal{H}_j$ , es decir un producto tensorial de los  $N$  espacios de Hilbert ( $\mathcal{H}_j$ ). Tal estado define, de forma natural, un grafo con  $N$  vértices, en donde cada arista que va de la región  $i$  a la región  $k$ , descrita por sus respectivos vértices, esta ponderado por la información mutua entre estas  $I(A_i : A_j)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dicho grafo es conexo, véase la figura 3.1.

Como la información mutua entre regiones es una medida de cuán correlacionadas están, proporciona una forma útil de caracterizar la distancia entre tales regiones debido a su relación con las funciones de correlación entre operadores. Esperamos que en el estado fundamental de una teoría de campo los correladores de los operadores decaigan exponencialmente (para campos masivos), o como leyes de potencias (para campos sin masa). La información mutua puede reflejar este comportamiento, ya que proporcionan una cota superior en la función de correlación entre dos operadores, véase Wolf [7]. Para la información mutua entre las regiones  $A$  y  $B$  tenemos

$$\begin{aligned}
I(A : B) &= S(\rho \parallel \rho_A \otimes \rho_B) \\
&\geq \frac{1}{2} |\rho - \rho_A \otimes \rho_B|^2 \\
&\geq \frac{(\text{Tr}(\rho - \rho_A \otimes \rho_B)(\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B))^2}{2|\mathcal{O}_A|^2 |\mathcal{O}_B|^2} \\
&= \frac{(\langle \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \rangle - \langle \mathcal{O}_A \rangle \langle \mathcal{O}_B \rangle)^2}{2|\mathcal{O}_A|^2 |\mathcal{O}_B|^2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Donde  $S(\rho \parallel \rho_A \otimes \rho_B)$  es la entropía total restringida a las regiones  $A$  y  $B$ , es decir, la entropía

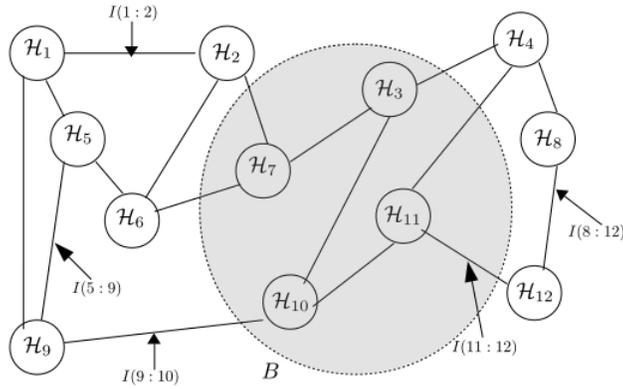


Figura 3.1: Cada vértice del grafo está representado por un componente del espacio de Hilbert, las aristas están ponderadas por la información mutua entre estos factores. Si consideramos una región ( $B$ ) como un conjunto de factores, su entropía puede calcularse sumando sobre todas las aristas que corta la región.

debida a la interacción entre  $A$  y  $B$ . Por lo tanto, la información mutua nos da una forma de caracterizar la distancia emergente independiente a la elección de los operadores.

Si se considera una colección de subregiones que no se traslapen ( $A_i$ ) dentro de una región más grande, digamos  $B$  y su complemento  $B^c$ , véase la figura 3.1. Conociendo el entrelazamiento de sus respectivos estados, la entropía de entrelazamiento de la región  $B$  se puede calcular mediante la función de corte

$$S(B) = \frac{1}{2} \sum_{i \in B, j \in B^c} I(A_i : A_j) \quad (3.24)$$

Para encontrar aproximadamente el entrelazamiento de la región  $B$  basta con sumar sobre todas las aristas que conectan la región  $B$  con su complemento  $B^c$ , obedeciendo una ley de áreas, véanse Bao [20, 21]. El grado de cada vértice  $A_i$  (el número de aristas que emergen de él) esta acotado por

$$\text{grad}(A_i) = \sum_j I(A_i : A_j) \leq 2S_{\max}(A_i) \leq 2 \log D_i. \quad (3.25)$$

donde  $D_i = \dim \mathcal{H}_{A_i}$

A partir del grafo podemos construir una noción de distancia. En otras palabras, un grafo de distancias. Para esto cada arista tendrá un peso definido por su correspondiente información mutua  $I(A_i : A_j)$ , así, a mayor información mutua entre subregiones menor distancia y viceversa. Definimos el peso de cada arista como sigue

$$\Omega(i, j) = \begin{cases} -l \ln \frac{I(A_i : A_j)}{I_{\max}} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.26)$$

donde  $l$  es un patrón de distancia (bien puede ser la longitud de Planck). Notemos que  $\Omega(i, j)$  está bien definida siempre que  $I(A_i : A_j) \neq 0$ . En el caso en que la dimensión del espacio de Hilbert es constante para toda subregión, tenemos  $I_{max} = 2S(A_i)_{max} = 2 \log(\dim \mathcal{H}_i)$ . Ahora construyamos un espacio métrico de la siguiente forma: considerando a  $\Omega(i, j)$  como la distancia  $d(i, j)$ , para vértices conectados por más de una arista la métrica  $d(i, j)$  está dada por el camino más corto que conecta el vértice  $i$  con el vértice  $j$ . Sea  $\gamma$  el camino que va de  $i$  a  $j$  definido por la secuencia de vértices  $\gamma = \{i = i_0, i_1, \dots, i_k = j\}$ . La métrica queda como

$$d(i, j) = \min_{\gamma} \sum_{n=0}^{k-1} \Omega(i_n, i_{n+1}) \quad (3.27)$$

para todo camino conexo  $\gamma$ . Con esta definición es fácil ver que  $d(i, j)$  satisface las propiedades de una métrica,  $d(i, j) = d(j, i)$ ,  $d(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j$ , y la desigualdad del triángulo  $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$ .

Procederemos a incrustar nuestro grafo en un espacio euclidiano de dimensión  $D \ll N$ , con  $N$  el número de vértices del grafo. Considerando el grafo de distancias  $G(V, D)$  (es el mismo que el grafo de información, salvo que las aristas están dadas por la función de distancia descrita anteriormente). Las distancias entre vértices nos definen un espacio métrico  $(V, d)$ . Lo primero que haremos es definir la dimensión del espacio emergente de este espacio discreto. Tomemos un subconjunto de vértices,  $X = \{v_0, v_1, \dots, v_r\} \subseteq G$ , equipado con la métrica inducida  $d(v_i, v_r)$ .  $X$  es un subespacio métrico y un  $r$ -simplejo de  $V$  (el conjunto de todos los vértices). Ahora construimos la matriz

$$R_{ij} = \frac{1}{2} (d(v_i, v_0)^2 + d(v_j, v_0)^2 - d(v_i, v_j)^2) \quad (3.28)$$

Dado que el determinante  $\det(R)$  es una función simétrica, definimos el volumen simplicial

$$vol_r(X) = \frac{1}{r!} \sqrt{\det(R)} \quad (3.29)$$

que es el volumen espacial del  $r$ -simplejo si  $X$  es un subconjunto del espacio euclidiano equipado con la métrica inducida. La dimensión del espacio métrico, si existe, es el número natural más grande  $k$  para el que existe un  $D$ -simplejo con un volumen positivo.

En [2] se propone el siguiente método a partir del Escalamiento Multi-Dimensional (MDS por sus siglas en inglés). Se define la matriz  $B$  de tamaño  $N \times N$ , la cual se construye a partir de las distancias (3.27). La llamaremos matriz de encaje [2].

$$B_{ij} = -\frac{1}{2} \left( d(i, j)^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d(i, k)^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d(k, j)^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{k, l=1}^N d(k, l)^2 \right) \quad (3.30)$$

La cual al diagonalizarla deja

$$B = Q\Lambda Q^t \quad (3.31)$$

Donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal con valores propios  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ , no negativos. Como  $B$  es de rango  $D$ , por el encaje, escogemos los  $d$  valores propios no nulos correspondientes a la dimensión del espacio emergente. Este encaje se realiza sobre un espacio euclidiano que contenga al grafo.

## Termodinámica Cuántica

Para tratar un sistema cuántico abierto debemos entender como separar al sistema, digamos dos subsistemas que interactúan entre si  $A$ ,  $B$  y otra parte que codifique todas las interacciones entre los subsistemas  $Int$ , en nuestro caso:

$$H_{Tot} = H_A + H_B + H_{Int} \quad (3.32)$$

De igual manera, podemos describir la dinámica de cada observable del sistema con la matriz densidad de probabilidad y el teorema de Ehrenfest. Tomando  $c = \hbar = 1$  y  $H$  independiente del tiempo.

$$\begin{aligned} d\rho(\tau) &= -i[H, \rho(\tau)]d\tau \\ dU(\tau) &= -i d \operatorname{tr}(\rho(\tau)H)d\tau = -i \operatorname{tr} dH\rho(\tau)d\tau - i \operatorname{tr} H d\rho(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Con  $U(\tau) = \operatorname{tr} \rho(\tau)H$ , debemos identificar las siguientes cantidades para obtener un análogo cuántico a la primera ley de la termodinámica. En este sentido el trabajo se puede entender como los cambios relacionados a los cambios en los parámetros del hamiltoniano, mientras que el calor corresponde a los cambios en las probabilidades.

$$\begin{aligned} dW(\tau) &= -i \operatorname{tr} \rho(\tau)dH \\ dQ(\tau) &= -i \operatorname{tr} d\rho(\tau)H \\ \Rightarrow dU(\tau) &= dW(\tau) + dQ(\tau) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con esto en mente, procedemos a encontrar una descripción de nuestro sistema a partir de sus componentes

$$\rho(\tau) = \rho_A \otimes \rho_B + \rho_{Int} \quad (3.34)$$

Cabe recalcar que la parte de interacción tiene grados de libertad comunes a cada región del sistema, más adelante buscaremos una descripción más independiente. Haciendo uso de las trazas parciales

$$\rho_A(\tau) = \operatorname{tr}_B \rho(\tau), \quad \rho_B = \operatorname{tr}_A \rho(\tau) \quad (3.35)$$

calculamos la dinámica de cada matriz reducida.

$$\begin{aligned} d\rho_A(\tau) &= -i \operatorname{tr}_B [H, \rho(\tau)]d\tau = -i \operatorname{tr}_B [H_A + H_B + H_{Int}, \rho(\tau)]d\tau \\ &= -i \operatorname{tr}_B [H_A, \rho(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho(\tau)]d\tau \\ &= -i[H_A, \rho_A(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

Recordando que el término  $\operatorname{tr}_B [H_B, \rho(\tau)]$  se anula al no tener grados de libertad en B.

De manera análoga, se reproduce el cálculo para

$$d\rho_B(\tau) = -i[H_B, \rho_B(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_A [H_{Int}, \rho(\tau)]d\tau$$

Otra forma de visualizar el resultado de conmutación es el siguiente. Basta reescribir el hamiltoniano y la matriz reducida como productos tensoriales:

$$\begin{aligned} H &= H_A \otimes H_B + H_{Int} \\ \rho_A &= \rho_A \otimes I_B & \rho_B &= I_A \otimes \rho_B \\ \Rightarrow [H_A \otimes H_B, \rho_A \otimes I_B] &= [H_A, \rho_A] & [H_A \otimes H_B, I_A \otimes \rho_B] &= [H_B, \rho_B] \end{aligned}$$

Retomando (3.34) en las ecuaciones dinámicas que acabamos de obtener, resulta

$$\begin{aligned} d\rho_A(\tau) &= -i[H_A, \rho_A(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) + \rho_{Int}]d\tau \\ &= -i[H_A, \rho_A(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

Revisando el segundo conmutador del miembro de la segunda expresión

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)] &= \operatorname{tr}_B (H_{Int}\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) - \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int}) \\ &= \operatorname{tr}_B H_{Int}\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) - \rho_A(\tau) \otimes \operatorname{tr}_B \rho_B(\tau)H_{Int} \\ &= [\operatorname{tr}_B H_{Int} I_A \otimes \rho_B(\tau), \rho_A \otimes I_B] \end{aligned}$$

Redefinimos a nuestro hamiltoniano, considerando los términos de correlación como

$$H'_{A,B} = H_{A,B} + \operatorname{tr}_{B,A} \rho_{B,A}(\tau)H_{Int} \quad (3.36)$$

con la cual se quitan los grados de libertad compatibles con la región  $B$  (o  $A$ ) al describir la dinámica de cada matriz restringida

$$\begin{aligned} d\rho_A(\tau) &= -i[H_A, \rho_A(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]d\tau \\ &= -i[H_A, \rho_A(\tau)]d\tau - i[\operatorname{tr}_B H_{Int} I_A \otimes \rho_B(\tau), \rho_A \otimes I_B]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]d\tau \\ &= -i[H_A + \operatorname{tr}_B \rho_B(\tau)H_{Int}, \rho_A(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]d\tau \\ &= -i[H'_A, \rho_A(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_B [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]d\tau \end{aligned} \quad (3.37)$$

De forma análoga para  $\rho_B(\tau)$

$$d\rho_B(\tau) = -i[H'_B, \rho_B(\tau)]d\tau - i \operatorname{tr}_A [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]d\tau \quad (3.38)$$

Ahora, reescribiremos el hamiltoniano total en término de sus componentes primadas

$$\begin{aligned} H &= H_A + H_B + H_{Int} \pm \operatorname{tr}_B \rho_B(\tau)H_{Int} \pm \operatorname{tr}_A \rho_A(\tau)H_{Int} \\ &= H'_A + H'_B + H_{Int} - \operatorname{tr}_B \rho_B(\tau)H_{Int} - \operatorname{tr}_A \rho_A(\tau)H_{Int} \\ &= H'_A + H'_B + H'_{Int} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Definiendo la interacción primada como

$$H'_{Int} = H_{Int} - \operatorname{tr}_B \rho_B(\tau)H_{Int} - \operatorname{tr}_A \rho_A(\tau)H_{Int} \quad (3.40)$$

Cabe señalar que estos nuevos hamiltonianos tienen una dependencia explícita con el tiempo, dada su definición, sin importar que el primer hamiltoniano no la tenga. Más aún, nos permite calcular algunas propiedades de forma sencilla.

$$\begin{aligned}
\text{tr}_A \rho_A(\tau) H'_{Int} &= \text{tr}_A \rho_A(\tau) H_{Int} - \text{tr}_A \rho_A(\tau) (\text{tr}_B \rho_B(\tau) H_{Int}) - \text{tr}_A \rho_A(\tau) (\text{tr}_A \rho_A(\tau) H_{Int}) \\
&= \text{tr}_A \rho_A(\tau) H_{Int} - \text{tr}_A \text{tr}_B \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} - \text{tr}_A \rho_A(\tau) H_{Int} \\
&= -\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
\text{tr}_B \rho_B(\tau) H'_{Int} &= \text{tr}_B \rho_B(\tau) H_{Int} - \text{tr}_B \rho_B(\tau) (\text{tr}_B \rho_B(\tau) H_{Int}) - \text{tr}_B \rho_B(\tau) (\text{tr}_A \rho_A(\tau) H_{Int}) \\
&= \text{tr}_B \rho_B(\tau) H_{Int} - \text{tr}_B \rho_B(\tau) H_{Int} - \text{tr}_B \text{tr}_A \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
&= -\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
\therefore \text{tr}_A \rho_A(\tau) H'_{Int} &= \text{tr}_B \rho_B(\tau) H'_{Int}
\end{aligned}$$

Entendiendo que la energía en la región  $A$  debida a la interacción es la misma que la energía en la región  $B$  producto de la interacción.

Consideremos que  $\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int}$  es un número entre  $[0, 1]$ . Podemos diferenciar con un par de coeficientes, sean  $\alpha_A$  y  $\alpha_B$  tales que  $\alpha_A = 1 - \alpha_B$ . Con esto aseguramos que podemos eliminar todas las correlaciones entre regiones, obteniendo un hamiltoniano efectivo para cada región.

$$\begin{aligned}
H_A^{ef}(\tau) &= H'_A(\tau) - \alpha_A \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
H_B^{ef}(\tau) &= H'_B(\tau) - \alpha_B \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
H_{Int}^{ef}(\tau) &= H'_{Int} + \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int}
\end{aligned}$$

Para ver que las regiones son independientes entre si, basta ver las trazas parciales de cada matriz reducida con el hamiltoniano efectivo de interacción

$$\begin{aligned}
\text{tr}_A \rho_A(\tau) H_{Int}^{ef}(\tau) &= \text{tr}_A \rho_A(\tau) H'_{Int} + \text{tr}_A \rho_A(\tau) (\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int}) \\
&= -\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} + \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
&= 0 \\
\text{tr}_B \rho_B(\tau) H_{Int}^{ef}(\tau) &= \text{tr}_B \rho_B(\tau) H'_{Int} + \text{tr}_B \rho_B(\tau) (\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int}) \\
&= -\text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} + \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) H_{Int} \\
&= 0
\end{aligned}$$

No es necesario calcular los otros dos, ya que son regiones independientes por definición. Con esto comprobamos que los hamiltonianos efectivos son independientes entre si, siendo esta

una buena base para calcular la dinámica de cada región.

$$H = H_A^{ef}(\tau) + H_B^{ef}(\tau) + H_{Int}^{ef}(\tau) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} d\rho_A(\tau) &= -\imath[H, \rho_A(\tau)]d\tau = -\imath\left[H_A^{ef}(\tau) + H_B^{ef}(\tau) + H_{Int}^{ef}(\tau), \rho_A(\tau)\right]d\tau \\ &= -\imath\left[H_A^{ef}(\tau), \rho_A(\tau)\right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$d\rho_B(\tau) = -\imath\left[H_B^{ef}(\tau), \rho_B(\tau)\right] \quad (3.43)$$

$$U_A(\tau) = \text{tr}\rho_A(\tau)H_A^{ef}(\tau) \quad U_B(\tau) = \text{tr}\rho_B(\tau)H_B^{ef}(\tau) \quad U_{Int}(\tau) = \text{tr}\rho_{Int}(\tau)H_{Int}^{ef}(\tau) \quad (3.44)$$

Ahora, una vez conocida esta descripción calculemos los trabajos y los calores respectivos a cada región.

$$\begin{aligned} dW_A(\tau) &= \text{tr}_A \rho_A(\tau)dH_A^{ef}(\tau) \\ &= \text{tr}_A \rho_A(\tau)(dH_A'(\tau) - \alpha_A \text{tr} d\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int} - \alpha_A \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes d\rho_B(\tau)H_{Int}) \\ &= \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes d\rho_B(\tau)H_{Int} - \alpha_A \text{tr} d\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int} - \alpha_A \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes d\rho_B(\tau)H_{Int} \\ &= -\alpha_A \text{tr} d\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int} + \alpha_B \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes d\rho_B(\tau)H_{Int} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} dW_B(\tau) &= \text{tr}_B \rho_B(\tau)dH_B^{ef}(\tau) \\ &= \text{tr} d\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int} - \alpha_B \text{tr} d\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int} - \alpha_B \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes d\rho_B(\tau)H_{Int} \\ &= -\alpha_B \text{tr} \rho_A(\tau) \otimes d\rho_B(\tau)H_{Int} + \alpha_A \text{tr} d\rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau)H_{Int} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Cabe señalar que estamos considerando que nuestro hamiltoniano (inicial) es independiente del tiempo, de aquí se sigue  $dH_{Int} = 0$ . Además, para este caso el diferencial de trabajo realizado en  $A$  es menos el trabajo de  $B$

$$dW_A(\tau) + dW_B(\tau) = 0 \quad (3.47)$$

Para el calor

$$\begin{aligned} dQ_A(\tau) &= \text{tr}_A d\rho_A(\tau)H_A^{ef}(\tau) \\ &= -\imath \text{tr}_A [H_A'(\tau), \rho_A(\tau)]H_A^{ef}(\tau)d\tau - \imath \text{tr} [H_{Int}, \rho_{Int}(\tau)]H_A^{ef}(\tau)d\tau \\ &= \text{tr}_A \left[ H_A'(\tau), H_A^{ef}(\tau) \right] \rho_A(\tau)d\tau - \imath \text{tr} \rho_{Int}(\tau) \left[ H_A^{ef}(\tau), H_{Int} \right] d\tau \\ &= -\imath \text{tr} \rho_{Int}(\tau) \left[ H_A^{ef}(\tau), H_{Int} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.48)$$

De forma análoga, para  $B$

$$dQ_B(\tau) = -\imath \text{tr} \rho_{Int}(\tau) \left[ H_B^{ef}(\tau), H_{Int} \right] d\tau \quad (3.49)$$

Considerando la energía total, tomamos su diferencial, que es igual a cero y aplicamos 3.47

$$\begin{aligned} dU(\tau) &= dU_A(\tau) + dU_B(\tau) + dU_{Int}(\tau) \\ &= dQ_A(\tau) + dW_A(\tau) + dQ_B(\tau) + dW_B(\tau) + dU_{Int}(\tau) \\ &= dQ_A(\tau) + dQ_B(\tau) + dU_{Int}(\tau) \\ \Rightarrow \quad -dU_{Int}(\tau) &= dQ_A(\tau) + dQ_B(\tau) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Notemos que  $\text{tr } \rho_{Int}(\tau) dH_{Int}^{ef}(\tau) = 0$ , aún cuando consideramos un hamiltoniano dependiente del tiempo, entonces  $dU_{Int}(\tau) = dQ_{Int}(\tau)$ . De aquí concluimos que el único cambio que surgen de considerar la dependencia explícita temporal del sistema, en los calores y trabajos será

$$dQ_A(\tau) + dQ_B(\tau) = -dQ_{Int}(\tau) \quad (3.51)$$

$$dW_A(\tau) + dW_B(\tau) = \text{tr } \rho_A(\tau) \otimes \rho_B(\tau) dH_{Int}(\tau) \quad (3.52)$$

Una vez conocidas nuestras ecuaciones dinámicas para nuestra primera ley, resulta necesario hacer una revisión a la segunda ley termodinámica. En este caso con la entropía de von Neumann debemos de encontrar su relación con el calor cuántico. Nuevamente consideremos el caso independiente del tiempo para el sistema y su propiedad extensiva, esto para definir la entropía de cada región.

$$\begin{aligned} S(\tau) &= -\text{tr } \rho(\tau) \ln \rho(\tau) \\ S(\tau) &= S_A(\tau) + S_B(\tau) - S_{Int}(\tau) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tomando la constante de Boltzmann  $k_\beta = 1$ . De la ecuación (3.53), al despejar la entropía debida a la interacción obtenemos

$$S_{Int}(\tau) = S_A(\tau) + S_B(\tau) - S(\tau) \quad (3.54)$$

También conocida como información mutua, la cual se caracteriza por ser no negativa. Si consideramos que nuestro sistema es cerrado, podemos garantizar que  $dS(\tau) = 0$ , pues las correlaciones son entre los subsistemas que lo componen y no con los alrededores, por ende

$$dS_{Int}(\tau) = dS_A(\tau) + dS_B(\tau) \quad (3.55)$$

En adición, si calculamos el intercambio de entropía en un tiempo entre  $[0, \tau]$ , y considerando que en el estado inicial no hay correlaciones ( $S_{Int}(0) = 0$ )

$$\Delta S_A + \Delta S_B = S_{Int} \geq 0$$

lo que muestra la no negatividad de la información mutua. Conocida la dinámica de la energía interna y la entropía, definimos la temperatura fuera del equilibrio o pseudotemperatura, para fines prácticos es función del tiempo en un sistema cuántico. De modo análogo a las relaciones de Maxwell, considerando un “volumen” fijo y un número de partículas invariante

$$\frac{1}{T(\tau)} = \frac{dS(\tau)}{dU(\tau)} \quad (3.56)$$

Como tenemos una descripción para cada subsistema, esta nos permite calcular una pseudotemperatura asociada a cada región, quedando

$$\frac{dU_A(\tau)}{T_A(\tau)} + \frac{dU_B(\tau)}{T_B(\tau)} = \frac{dU_{Int}(\tau)}{T_{Int}(\tau)}, \quad (3.57)$$

considerando el caso en que  $dU_{Int}(\tau) = 0$  tenemos dos opciones:

a)  $dS_{Int}(\tau) = 0$  y  $T_{Int}(\tau) \neq 0$ , la energía  $dU_A(\tau) = -dU_B(\tau)$ , entonces los subsistemas tienen la misma pseudotemperatura en todo tiempo  $T_A(\tau) = T_B(\tau)$ , es decir, siempre están en equilibrio térmico.

b)  $dS_{Int}(\tau) \neq 0$  y  $T_{Int}(\tau) = 0$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-dU_B(\tau)}{T_A(\tau)} + \frac{dU_B(\tau)}{T_B(\tau)} &= dS_{Int}(\tau) \\ \Rightarrow dU_B(\tau) &= \frac{T_A(\tau)T_B(\tau)}{T_A(\tau) - T_B(\tau)} dS_{Int}(\tau) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Un equivalente a la representación  $dU = TdS$ .

Considerando un hamiltoniano dependiente del tiempo se obtiene  $dU(\tau) \neq 0$ , de forma que se modifican estas ecuaciones como:

a)  $dS_{Int}(\tau) = 0$  y  $T_{Int} \neq 0$ . Notemos que  $dU_A(\tau) = dU(\tau) - dU_B(\tau)$ , por lo que no se alcanza un equilibrio entre las pseudotemperaturas

$$dU(\tau) = dU_B(\tau) \left( 1 - \frac{T_A(\tau)}{T_B(\tau)} \right). \quad (3.59)$$

En caso de llegar al equilibrio, recuperamos el hecho  $dU(\tau) = 0$ .

b)  $dS_{Int}(\tau) \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dU(\tau) - dU_B(\tau)}{T_A(\tau)} + \frac{dU_B(\tau)}{T_B(\tau)} &= dS_{Int}(\tau) \\ \frac{T_A(\tau) - T_B(\tau)}{T_A(\tau)T_B(\tau)} dU_B(\tau) &= dS_{Int}(\tau) - \frac{dU(\tau)}{T_A(\tau)} \\ \Rightarrow dU_B(\tau) &= \frac{T_A(\tau)T_B(\tau)}{T_A(\tau) - T_B(\tau)} \left( dS_{Int}(\tau) - \frac{dU(\tau)}{T_A(\tau)} \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Recordando (3.56) e introduciendo la primera ley, obtenemos

$$dS_{A,B}(\tau) = \frac{dQ_{A,B}(\tau)}{T_{A,B}(\tau)} + \frac{dW_{A,B}(\tau)}{T_{A,B}(\tau)}. \quad (3.61)$$

Entonces, definiendo la producción de entropía infinitesimal como

$$d\Sigma_{A,B}(\tau) = dS_{A,B}(\tau) - \frac{dQ_{A,B}(\tau)}{T_{A,B}(\tau)} = \frac{dW_{A,B}(\tau)}{T_{A,B}(\tau)}, \quad (3.62)$$

concluimos con una segunda ley de la termodinámica de la forma

$$dS_{A,B}(\tau) = \frac{dQ_{A,B}(\tau)}{T_{A,B}(\tau)} + d\Sigma_{A,B}(\tau) \quad (3.63)$$

para cada región del sistema.

# Capítulo 4

## Espacio emergente de una cadena de osciladores cuánticos

Conocidas las herramientas a utilizar en el presente, solo nos falta describir, de forma adecuada, al sistema mediante una función hamiltoniana, al igual que la metodología a seguir. Para esto consideremos lo siguiente.

- Una vez que conocemos la descripción hamiltoniana de cada oscilador armónico cuántico (2.3), consideremos una colección finita de ellos con lo que tenemos algo de la siguiente forma

$$\mathcal{H} = \sum_j^N \left( \frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{k_j x_j^2}{2} \right). \quad (4.1)$$

Como nos podemos dar cuenta, la misma forma nos permite describir como regiones del sistema, a cada oscilador o colecciones de estos de forma independiente, pero a su vez nos dice que la información mutua entre cada componente es cero. Por simplicidad los  $k_j, m_j$  son iguales para cada oscilador.

- Introducimos un término de interacción, completamente análogo al caso clásico

$$\frac{\gamma}{2}(x_j - x_{j+1})^2,$$

entendiendo a este último como una interacción a primeros vecinos. Nótese que ya no es posible describir a cada par consecutivo de osciladores de manera independiente, dando regiones de interacción.

- Debemos construir un álgebra equivalente a los operadores de escalera para describir el espacio de Fock de cada oscilador.
- Calcular la matriz densidad de probabilidad con las funciones propias del sistema, reconocer los componentes necesarios para calcular las matrices restringidas, facilitando el cálculo de la entropía de entrelazamiento.

- Cuantificar la información mutua, entendiendo que la máxima información mutua es la que se intercambia con la misma región. Es decir, la distancia en este caso es cero. De cierta forma si un sistema esta muy entrelazado con otro hasta el punto en que no se pueden distinguir, no se encuentran separadas. Esto es una solución, aparente, para la paradoja EPR=PR.
- Construir la matriz de distancias, obtener sus valores propios y concluir la dimensionalidad del espacio con el límite térmico.

## 4.1. Hamiltoniano de interacción

Una vez descrito el hamiltoniano del sistema y el término de interacción a primeros vecinos, tenemos lo siguiente

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{p_j^2}{2m} + \frac{k}{2} x_j^2 + \frac{\gamma}{2} (x_j - x_{j+1})^2 \right). \quad (4.2)$$

Como ya se ha mencionado, nos importa describir el espacio de Fock de nuestro sistema, para esto promovemos una descripción basada en los operadores de escalera, sin embargo, esta debe preservar la información de la interacción a primeros vecinos. Recordemos que el término  $\gamma$  se puede interpretar como una constante del resorte debida al acoplamiento. Además de que nuestro sistema cumple con ser entrelazado, basta notar que la descripción del término interacción se puede describir como una superposición de dos sistemas.

Procedemos a describir los operadores de posición y momento de la siguiente forma

$$x_j = \mu \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( a_j + a_j^\dagger + \alpha(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger) \right), \quad (4.3)$$

$$p_j = -i \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \left( a_j - a_j^\dagger - \alpha(a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger) \right), \quad (4.4)$$

donde  $\mu$  y  $\alpha$  son números desconocidos. Nótese que la parte dimensional sigue perteneciendo a las variables usuales. Por completez veamos que estas definiciones satisfacen la relación de conmutación entre los operadores  $x$  y  $p$ , a saber  $[x, p] = i\hbar$ :

$$\begin{aligned} [x_j, p_j] &= -\frac{i\hbar}{2} [a_j + a_j^\dagger + \alpha(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger), a_j - a_j^\dagger - \alpha(a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger)] \\ &= -\frac{i\hbar}{2} \left( [a_j + a_j^\dagger, a_j - a_j^\dagger] - \alpha[a_j + a_j^\dagger, a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger] \quad + \right. \\ &\quad \left. + \alpha[a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger, a_j - a_j^\dagger] - \alpha^2[a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger, a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger] \right) \\ &= -\frac{i\hbar}{2} \left( -[a_j, a_j^\dagger] + [a_j^\dagger, a_j] \right) = i\hbar[a_j, a_j^\dagger] = i\hbar. \end{aligned}$$

Donde los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de ascenso y descenso descritos en la sección 2.1. Una vez comprobada el álgebra, en general  $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}$ ,  $[a_j, a_k] = [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0$ . Ahora usando (4.3) y (4.4) en (4.2), obtenemos para cada término

$$\begin{aligned} \frac{p_j^2}{2m} &= -\frac{\hbar\omega}{4\mu^2} \left( (a_j - a_j^\dagger)^2 - 2\alpha(a_j - a_j^\dagger)(a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger) + \alpha^2 (a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger)^2 \right) \\ \frac{kx_j^2}{2} &= \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} \left( (a_j + a_j^\dagger)^2 + 2\alpha(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger) + \alpha^2 (a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger)^2 \right) \\ \frac{\gamma}{2}(x_j - x_{j+1})^2 &= \frac{\hbar\gamma\mu^2}{4m\omega} \left( (a_j + a_j^\dagger)^2 + (\alpha - 1)^2(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger)^2 + \alpha^2 (a_{j+2} + a_{j+2}^\dagger)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(\alpha - 1)(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger) - 2\alpha(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+2} + a_{j+2}^\dagger) \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha(\alpha - 1)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger)(a_{j+2} + a_{j+2}^\dagger) \right). \end{aligned}$$

Note que, a pesar de considerar una interacción a primeros vecinos, obtenemos una interacción adicional ¡con segundos vecinos!, mostrando una diferencia con su símil clásico. También se debe considerar la construcción del sistema y el entrelazamiento que presenta entre componentes. Observando que cada componente tiene términos  $\alpha^2$ , hacemos nuestro primer supuesto. Para simplificar las cuentas hagamos

$$\alpha \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \approx 0$$

Esto para trabajar con las interacciones entre el oscilador  $j$ -ésimo con sus vecinos inmediatos  $j \pm 1$ , a pesar de esto se preserva una interacción entre sus dos vecinos consecuentes  $j + 1$  con  $j + 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{p_j^2}{2m} &= -\frac{\hbar\omega}{4\mu^2} \left( (a_j - a_j^\dagger)^2 - 2\alpha(a_j - a_j^\dagger)(a_{j-1} - a_{j-1}^\dagger) \right) \\ \frac{kx_j^2}{2} &= \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} \left( (a_j + a_j^\dagger)^2 + 2\alpha(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger) \right) \\ \frac{\gamma}{2}(x_j - x_{j+1})^2 &= \frac{\hbar\gamma\mu^2}{4m\omega} \left( (a_j + a_j^\dagger)^2 + (1 - 2\alpha)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger)^2 + 2(\alpha - 1)(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger) \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+2} + a_{j+2}^\dagger) + 2\alpha(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger)(a_{j+2} + a_{j+2}^\dagger) \right). \end{aligned}$$

Antes de escribir el hamiltoniano cuantizado hace falta considerar algunas restricciones sobre las variables  $\gamma$ ,  $k$  y  $\omega$ , de tal modo que nos conduzca a una descripción autoconsistente y que en el límite sin interacción ( $\gamma \rightarrow 0$ ) se recupera (2.3). Para esto separemos los coeficientes que acompañan a los operadores de la siguiente forma: suponiendo que el vecino siguiente al  $N$ -ésimo sea el primer oscilador y de igual forma el oscilador anterior al primero sea el último oscilador, es decir que tenemos una cadena cerrada de osciladores.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_k^N \left( A(a_k a_k + a_k^\dagger a_k^\dagger) + B(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) + C(a_k a_{k+1} + a_k^\dagger a_{k+1}^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + D(a_k a_{k+1}^\dagger + a_k^\dagger a_{k+1}) + E(a_k a_{k+2} + a_k^\dagger a_{k+2}^\dagger) + F(a_k a_{k+2}^\dagger + a_k^\dagger a_{k+2}) \right). \end{aligned}$$

Al sumar sobre todos los osciladores, para cada coeficiente se pueden agrupar aquellos que cumplen una diferencia en número de ocupación ( $j$ ), recordemos que el subíndice  $j$  denota lugar y no nivel energético, tipo

- Sin diferencia;  $A$  y  $B$ , en nuestro caso

$$A = -\frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma\mu^2}{4m\omega}2(1-\alpha)$$

$$B = \frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma\mu^2}{4m\omega}2(1-\alpha)$$

- Con diferencia de 1 entre subíndices;  $C$  y  $D$ , para el sistema

$$C = 2\alpha \left( \frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma\mu^2}{2m\omega} \right) - \frac{\hbar\gamma\mu^2}{2m\omega}$$

$$D = 2\alpha \left( -\frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma\mu^2}{2m\omega} \right) - \frac{\hbar\gamma\mu^2}{2m\omega}$$

- Términos de interacción a segundos vecinos;  $E$  y  $F$ , igualando

$$E = -\alpha \frac{\hbar\gamma\mu^2}{2m\omega}$$

$$F = -\alpha \frac{\hbar\gamma\mu^2}{2m\omega}$$

Si pedimos que  $A = 0$  tenemos

$$\frac{\hbar\omega}{4\mu^2} = \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma\mu^2}{4m\omega}2(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\mu^4}{m}(k + 2\gamma(1-\alpha)) \quad (4.5)$$

Nótese que se recupera la interpretación de la frecuencia de oscilación, en este caso es proporcional a  $\frac{k}{m}$  más un término de interacción, lo que es un buen indicio para continuar con esta suposición, veamos si recuperamos la descripción del estado base en algún momento, la cual no debe estar acompañada por ningún término de interacción. Para comprobarlo sustituimos (4.5) en  $B$

$$B = \frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar k\mu^2}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma\mu^2}{4m\omega}2(1-\alpha)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar\mu^2}{4\omega} \left( \frac{k}{m} + 2(1-\alpha)\frac{\gamma}{m} \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4\mu^2} + \frac{\hbar\omega}{4\mu^2} = \frac{\hbar\omega}{2\mu^2} \quad (4.6)$$

De aquí podemos concluir que  $\mu = 1$ , al sustituirlo en (4.5) nos queda

$$m\omega^2 = k + 2(1-\alpha)\gamma \quad (4.7)$$

o bien

$$k = m\omega^2 + 2(\alpha - 1)\gamma. \quad (4.8)$$

Haciendo algo semejante para  $C = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\alpha}{2} \left( \omega + \frac{k}{m\omega} + \frac{2\gamma}{m\omega} \right) &= \frac{\hbar\gamma}{2m\omega} \\ \alpha(k + 2\gamma(1 - \alpha) + k + 2\gamma) &= \gamma \\ 2\alpha k + 4\alpha\gamma &= \gamma \\ \Rightarrow \quad \gamma &= \frac{2\alpha}{1 - 4\alpha}k \end{aligned} \quad (4.9)$$

No olvidemos que  $\alpha^2 = 0$ . Ahora, sustituyendo (4.8) en (4.9), nos permite conocer  $\gamma$  en términos de  $\omega^2$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\alpha}{1 - 4\alpha}(m\omega^2 + 2(\alpha - 1)\gamma) \\ \left(1 + \frac{4\alpha}{1 - 4\alpha}\right)\gamma &= \frac{2\alpha m\omega^2}{1 - 4\alpha} \\ \left(\frac{1}{1 - 4\alpha}\right)\gamma &= \frac{2\alpha m\omega^2}{1 - 4\alpha} \\ \Rightarrow \quad \gamma &= 2\alpha m\omega^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si sustituimos (4.10) en (4.8), conocemos el valor de  $k$  como

$$k = (1 - 4\alpha)m\omega^2 \quad (4.11)$$

De igual forma (4.7) nos queda

$$m\omega^2 = k + 2\gamma \quad (4.12)$$

Con (4.10) consideramos  $\alpha\gamma \approx 0$  lo que nos ayuda con los coeficientes  $E = F = 0$ . Finalmente, calculando  $D$

$$\begin{aligned} D &= 2\alpha \left( -\frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar}{4m\omega}(k + 2\gamma) \right) - \frac{\hbar\gamma}{2m\omega} \\ &= 2\alpha \left( -\frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} \right) - \alpha\hbar\omega \\ &= -\alpha\hbar\omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

Esta descripción nos favorece al momento de usar una función de onda general, descrita en la base  $|n_1 n_2 \dots n_N\rangle$ . Tomando el hamiltoniano resultante.

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar\omega}{2} \left( (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) - 2\alpha \left( a_j (a_{j+1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger) + a_j^\dagger (a_{j+1} + a_{j-1}) \right) \right) \quad (4.14)$$

Ahora tomemos un vector de la forma

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |n_1 \dots n_N\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_N^\dagger)^{n_N}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_N!}} |0_1 0_2 \dots 0_N\rangle \\ &\equiv \prod_{j=1}^N \frac{(a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |0_1 0_2 \dots 0_N\rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Antes de actuar el hamiltoniano en este vector, escribamos unas relaciones útiles y su notación correspondiente. Recordando la relación de conmutación entre los operadores de escalera

$$a_j a_k^\dagger = [a_j, a_k^\dagger] + a_k^\dagger a_j = \delta_{jk} + a_k^\dagger a_j.$$

Hagamos algunas generalizaciones útiles para facilitar las cuentas

$$\begin{aligned} a_j (a_k^\dagger)^n &= (\delta_{jk} + a_k^\dagger a_j) (a_k^\dagger)^{n-1} \\ &= \delta_{jk} (a_k^\dagger)^{n-1} + a_k^\dagger (\delta_{jk} + a_k^\dagger a_j) (a_k^\dagger)^{n-2} \\ &= 2\delta_{jk} (a_k^\dagger)^{n-1} + (a_k^\dagger)^2 a_j (a_k^\dagger)^{n-3} \\ &\vdots \\ &= n\delta_{jk} (a_k^\dagger)^{n-1} + (a_k^\dagger)^n a_j. \end{aligned}$$

O de forma equivalente

$$a_j (a_k^\dagger)^n = \frac{\partial}{\partial a_k^\dagger} (a_j^\dagger)^n + (a_j^\dagger)^n a_j \quad (4.16)$$

Y ante un producto de operadores de ascenso

$$\begin{aligned} a_j \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n &= (n\delta_{j1} (a_1^\dagger)^{n-1} + (a_1^\dagger)^n a_j) \prod_{k=2}^N (a_k^\dagger)^n \\ &= n\delta_{j1} (a_1^\dagger)^{n-1} \prod_{k=2}^N (a_k^\dagger)^n + n\delta_{j2} (a_1^\dagger)^n (a_2^\dagger)^{n-1} \prod_{k=3}^N (a_k^\dagger)^n + \dots + n \prod_{k=1}^{N-1} (a_k^\dagger)^n \delta_{jN} (a_N^\dagger)^{n-1} + \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n a_j \\ &= n \prod_{j \neq k=1}^N (a_j^\dagger)^{n-1} (a_k^\dagger)^n + \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n a_j. \end{aligned}$$

Con ayuda de la derivada, queda

$$\begin{aligned} a_j \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n &= \frac{\partial}{\partial a_j^\dagger} \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n + \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n a_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left( n\delta_{jk} (a_j^\dagger)^{n-1} \prod_{j \neq k=1}^N (a_k^\dagger)^n \right) + \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n a_j \\ &= n \prod_{j \neq k=1}^N (a_j^\dagger)^{n-1} (a_k^\dagger)^n + \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^n a_j \end{aligned}$$

Como podemos notar, esto sigue siendo válido para una colección de índices  $n_k$ , denotando el nivel energético  $n$  de la partícula  $k$ -ésima

$$a_j \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^{n_k} = n_j \prod_{j \neq k=1}^N (a_j^\dagger)^{n_j-1} (a_k^\dagger)^{n_k} + \prod_{k=1}^N (a_k^\dagger)^{n_k} a_j \quad (4.17)$$

La simplicidad de esta última nos permite actuar los operadores de (4.14) en la descripción del espacio de Fock para el sistema de osciladores armónicos (4.15),

$$\begin{aligned} a_j^\dagger a_j |\Psi\rangle &= a_j^\dagger \left( \prod_{j \neq k=1}^N \frac{n_j (a_j^\dagger)^{n_j-1} (a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_j! n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle + \prod_{k=1}^N \frac{(a_k^\dagger)^{n_k} a_j}{\sqrt{n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle \right) \\ &= \prod_{j \neq k=1}^N \frac{n_j (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_j! n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle \\ &= n_j \prod_{k=1}^N \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle = n_j |n_1 \dots n_N\rangle = n_j |\Psi\rangle \end{aligned}$$

Recuperando el operador de número para nuestro estado propio

$$\begin{aligned} a_{j\uparrow}^\dagger a_{j+1} |\Psi\rangle &= a_{j\uparrow}^\dagger \left( \prod_{j+1 \neq k=1}^N \frac{n_{j+1} (a_{j+1}^\dagger)^{n_{j+1}-1} (a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_{j+1}! n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle + \prod_{k=1}^N \frac{(a_k^\dagger)^{n_k} a_{j+1}}{\sqrt{n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle \right) \\ &= \prod_{j, j+1 \neq k=1}^N \frac{n_{j+1} (a_{j+1}^\dagger)^{n_{j+1}-1} (a_k^\dagger)^{n_k} (a_j^\dagger)^{n_{j+1}}}{\sqrt{n_{j+1}! n_j! n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle \\ &= n_{j+1} |\Psi_{j\uparrow j+1\downarrow}\rangle \end{aligned}$$

Aquí el subíndice  $j \uparrow$  indica que el  $j$ -ésimo oscilador gana energía y los vecinos  $j+1 \downarrow$  pierden energía, el resultado es análogo para  $a_{j\uparrow}^\dagger a_{j-1}$

$$\begin{aligned} a_{j+1}^\dagger a_j |\Psi\rangle &= a_{j+1}^\dagger \left( \prod_{j \neq k=1}^N \frac{n_j (a_j^\dagger)^{n_j-1} (a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_j! n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle + \prod_{k=1}^N \frac{(a_k^\dagger)^{n_k} a_j}{\sqrt{n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle \right) \\ &= \prod_{j, j+1 \neq k=1}^N \frac{n_j (a_j^\dagger)^{n_j-1} (a_k^\dagger)^{n_k} (a_{j+1}^\dagger)^{n_{j+1}+1}}{\sqrt{n_{j+1}! n_j! n_k!}} |0_1 \dots 0_N\rangle \\ &= n_j |\Psi_{j+1\uparrow j\downarrow}\rangle \end{aligned}$$

Aquí el subíndice  $j \downarrow$  indica que el  $j$ -ésimo oscilador pierde energía y los vecinos  $j+1 \uparrow$  ganan energía, análogo para  $a_{j-i}^\dagger a_j$ . Reemplazando en (4.14) nos queda

$$\mathcal{H} |\Psi\rangle = \sum_{j=1}^N \hbar\omega \left( \left( n_j + \frac{1}{2} \right) |\Psi\rangle - \alpha (n_{j+1} |\Psi_{j\uparrow j+1\downarrow}\rangle + n_{j-1} |\Psi_{j\uparrow j-1\downarrow}\rangle + n_j (|\Psi_{j+1\uparrow j\downarrow}\rangle + |\Psi_{j-1\uparrow j\downarrow}\rangle)) \right) \quad (4.18)$$

Se quiere encontrar una descripción en donde nuestro hamiltoniano sea diagonal, para eso busque una base que satisfaga esta condición

$$|\Psi'\rangle = C_1 |\Psi\rangle + C_2 |\Psi_{j\uparrow j+1\downarrow}\rangle + C_3 |\Psi_{j\uparrow j-1\downarrow}\rangle + C_4 |\Psi_{j+1\uparrow j\downarrow}\rangle + C_5 |\Psi_{j-1\uparrow j\downarrow}\rangle$$

Lo cual consiste en encontrar la matriz de cambio de base para la siguiente matriz. Por simplicidad se hace para 3 estados

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + n_j & -\alpha n_{j+1} & 0 \\ -\alpha n_j & \frac{1}{2} + n_{j+1} & -\alpha n_{j+2} \\ 0 & -\alpha n_{j+1} & \frac{1}{2} + n_{j+2} \end{pmatrix}$$

Restando  $\lambda$  veces la identidad y tomando el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} + n_j - \lambda & -\alpha n_{j+1} & 0 \\ -\alpha n_j & \frac{1}{2} + n_{j+1} - \lambda & -\alpha n_{j+2} \\ 0 & -\alpha n_{j+1} & \frac{1}{2} + n_{j+2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} + n_j - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + n_{j+1} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + n_{j+2} - \lambda\right) = 0$$

Nota: Habiendo terminado la tesis el Dr. Patiño nos hizo notar que esta manera de indexar la matriz es incorrecta e incompleta y un calculo alternativo a primer orden en teoría de perturbaciones nos muestra que las energías a calcular son más complicadas a lo aquí expuesto. Más adelante regresaremos este punto en las conclusiones.

Recordemos que  $\alpha^2 \approx 0$ . Notemos que la solución nos dice que ¡ya estamos en la base diagonal!, en orden a nuestra aproximación. Es decir que a orden  $\alpha^2$  tenemos, en analogía a la teoría de perturbaciones que los vectores propios son los mismos al término no perturbado

$$|\Psi'\rangle \approx |n_1 \dots n_N\rangle + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (4.19)$$

Recordando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo  $\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$E|\Psi'\rangle \approx \sum_{j=1}^N \hbar\omega \left[ \left(n_j + \frac{1}{2}\right) - \alpha(n_{j+1} + n_{j-1} + 2n_j) \right] |n_1 \dots n_N\rangle + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (4.20)$$

Regresando a nuestro sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\hbar\omega}{4} \left( (a_j^\dagger a_j + a_j a_j^\dagger) - 2\alpha(a_j a_{j-1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger a_j) \right) + \frac{\hbar k}{4m\omega} (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) \right. \\ \left. + \frac{\hbar k}{2m\omega} \alpha (a_j a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_j) + \frac{\hbar\gamma}{4m\omega} \left( a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j + a_{j+1} a_{j+1}^\dagger - 2(a_j a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_j) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Agrupando términos semejantes

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \left\{ \left( \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar k}{4m\omega} + \frac{\hbar\gamma}{4m\omega} \right) (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) + \frac{\hbar\gamma}{4m\omega} (a_{j+1} a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_{j+1}) \right. \\ \left. - \frac{\hbar\omega}{2} \alpha (a_j a_{j-1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger a_j) + \left( \frac{\hbar k}{2m\omega} \alpha - \frac{\hbar\gamma}{2m\omega} \right) (a_j a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_j) \right\} \end{aligned}$$

Con el primer coeficiente hacemos

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar(k+2\gamma)}{4m\omega} - \frac{\hbar\gamma}{4m\omega} &= \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} - \frac{\hbar\omega}{2}\alpha \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(1-\alpha) \end{aligned}$$

Con el cuarto

$$\frac{\hbar k}{2m\omega}\alpha - \frac{\hbar\gamma}{2m\omega} = \frac{\hbar\omega}{2}\alpha - \hbar\omega\alpha = -\frac{\hbar\omega}{2}\alpha$$

Sustituyendo en el hamiltoniano junto con los valores de  $k$  y  $\gamma$  respectivos. Obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ (1-\alpha)(a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) + \alpha(a_{j+1} a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_{j+1}) \right. \\ \left. - \alpha(a_j a_{j-1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger a_j) - \alpha(a_j a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_j) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si suponemos que el oscilador  $N+1$  es el primero y el oscilador 0 es el último, es decir tenemos una cadena cerrada, entonces un hamiltoniano parecido a (4.14), el cual ya conocemos sus energía propias.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} |\Psi\rangle = \sum_{j=1}^N \hbar\omega \left\{ \left( \frac{1}{2} + n_j \right) |\Psi\rangle - \frac{\alpha}{2} n_j ( |\Psi_{j\downarrow j-1\uparrow}\rangle + |\Psi_{j\downarrow j+1\uparrow}\rangle ) \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{2} ( n_{j+1} |\Psi_{j\uparrow j+1\downarrow}\rangle + n_{j-1} |\Psi_{j\uparrow j-1\downarrow}\rangle ) \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Diagonalizando tenemos algo de la forma

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} + n_j - \lambda & -\frac{\alpha}{2} n_{j+1} & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} n_{j-1} \\ -\frac{\alpha}{2} n_j & \frac{1}{2} + n_{j+1} - \lambda & -\frac{\alpha}{2} n_{j+2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} n_{j+1} & \frac{1}{2} + n_{j+2} - \lambda & -\frac{\alpha}{2} n_{j+3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} n_{j+2} & \frac{1}{2} + n_{j+3} - \lambda & -\frac{\alpha}{2} n_{j+4} \\ -\frac{\alpha}{2} n_{j+5} & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} n_{j+3} & \frac{1}{2} + n_{j+4} - \lambda \end{vmatrix} = \\ = \left( \frac{1}{2} + n_j - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} + n_{j+1} - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} + n_{j+2} - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} + n_{j+3} - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} + n_{j+4} - \lambda \right) = 0 \end{aligned}$$

concluyendo que estamos en la base diagonal. Donde las energías a  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  tienen la forma

$$E |n_1 \dots n_N\rangle = \sum_{j=1}^N \hbar\omega \left\{ \left( \frac{1}{2} + n_j \right) - \alpha n_j - \frac{\alpha}{2} ( n_{j+1} + n_{j-1} ) \right\} |n_1 \dots n_N\rangle$$

Ahora consideramos el caso cadena abierta, es decir, que no hay oscilador  $N+1$  ni oscilador 0. Entonces nuestro hamiltoniano queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ (1-\alpha)(a_1 a_1^\dagger + a_1^\dagger a_1) + \sum_{j=2}^N (1-\alpha)(a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha(a_{j+1} a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_{j+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=2}^N \alpha(a_j a_{j-1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger a_j) - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha(a_j a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}^\dagger a_j) \right\} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ (1-\alpha)(a_1 a_1^\dagger + a_1^\dagger a_1) + \sum_{j=2}^N (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) - \sum_{j=2}^N 2\alpha(a_j a_{j-1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger a_j) \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aplicándolo a  $|\Psi\rangle$

$$\mathcal{H}' |\Psi\rangle = \hbar\omega \left\{ (1-\alpha) \left( \frac{1}{2} + n_1 \right) |\Psi\rangle + \sum_{j=2}^N \left( \left( \frac{1}{2} + n_j \right) |\Psi\rangle - \alpha(n_j |\Psi_{j\downarrow j-1\uparrow}\rangle + n_{j-1} |\Psi_{j\uparrow j-1\downarrow}\rangle) \right) \right\} \quad (4.25)$$

Nuevamente, diagonalizando (usamos los 3 primeros por comodidad)

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (1-\alpha)\left(\frac{1}{2} + n_1\right) - \lambda & -\alpha n_2 & 0 \\ -\alpha n_1 & \frac{1}{2} + n_2 - \lambda & -\alpha n_3 \\ 0 & -\alpha n_2 & \frac{1}{2} + n_2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \left( (1-\alpha)\left(\frac{1}{2} + n_1\right) - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} + n_2 - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} + n_3 - \lambda \right) \end{aligned}$$

Concluyendo que estamos en la base diagonal. Obteniendo las energías a orden  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  siguientes

$$E' |n_1 \dots n_N\rangle = \hbar\omega \left\{ (1-\alpha)\left(\frac{1}{2} + n_1\right) + \sum_{j=2}^N \left( \left(\frac{1}{2} + n_j\right) - \alpha(n_j + n_{j-1}) \right) \right\} |n_1 \dots n_N\rangle \quad (4.26)$$

Considerando un estado más general

$$|\Psi_G\rangle = \sum_{\{n_j\}} \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} \prod_{k=1}^N \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0_k\rangle = \sum_{\{n_j\}} \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |n_1 \dots n_N\rangle, \quad (4.27)$$

donde  $\Phi_{n_1 n_2 \dots n_N}$  es la amplitud de probabilidad del sistema entrelazado. Notemos que los operadores de escalera no actúan sobre  $\Phi_{n_1 n_2 \dots n_N}$ . Aplicándolo a (4.18) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} |\Psi_G\rangle &= \sum_{\{n_j\}, j=1}^N \hbar\omega \left\{ \left( \frac{1}{2} + n_j \right) \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi\rangle - \alpha \left\{ n_{j+1} \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi_{j\uparrow j+1\downarrow}\rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n_{j-1} \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi_{j\uparrow j-1\downarrow}\rangle + n_j \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} (|\Psi_{j+1\uparrow j\downarrow}\rangle + |\Psi_{j-1\uparrow j\downarrow}\rangle) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Queremos que todos los estados sean el mismo, para esto podemos mover los subíndices de

$$\begin{aligned}\Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi_{j\uparrow j-1\downarrow}\rangle &= \frac{\Phi_{n_1 n_2 \dots n_N}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_N!}} |n_1 \dots (n_{j-1} - 1) (n_j + 1) \dots n_N\rangle \\ &= \frac{\Phi_{n_1 \dots (n_{j-1}+1)(n_j-1) \dots n_N}}{\sqrt{n_1! \dots (n_{j-1} + 1)! (n_j - 1)! \dots n_N!}} |n_1 \dots n_{j-1} n_j \dots n_N\rangle \\ &\equiv \phi_{n_1 \dots (n_{j-1}+1)(n_j-1) \dots n_N} |n_1 \dots n_{j-1} n_j \dots n_N\rangle\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}\Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi_{j\uparrow j+1\downarrow}\rangle &\equiv \phi_{n_1 \dots (n_j-1) (n_{j+1}+1) \dots n_N} |n_1 \dots n_j n_{j+1} \dots n_N\rangle \\ \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi_{j\downarrow j-1\uparrow}\rangle &\equiv \phi_{n_1 \dots (n_{j-1}-1) (n_j+1) \dots n_N} |n_1 \dots n_{j-1} n_j \dots n_N\rangle \\ \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi_{j\downarrow j+1\uparrow}\rangle &\equiv \phi_{n_1 \dots (n_j+1) (n_{j+1}-1) \dots n_N} |n_1 \dots n_j n_{j+1} \dots n_N\rangle \\ \Phi_{n_1 n_2 \dots n_N} |\Psi\rangle &\equiv \phi_{n_1 \dots n_N} |n_1 \dots n_N\rangle\end{aligned}$$

Ahora reescribimos (4.28)

$$\begin{aligned}\mathcal{H} |\Psi_G\rangle &= \sum_{\{n_j\}, j=1}^N \hbar\omega \left\{ \left( \frac{1}{2} + n_j \right) \phi_{n_1 \dots n_N} - \alpha \left\{ (n_{j+1} + 1) \phi_{n_1 \dots (n_j-1) (n_{j+1}+1) \dots n_N} \right. \right. \\ &\quad + (n_{j-1} + 1) \phi_{n_1 \dots (n_j-1) (n_{j+1}+1) \dots n_N} + (n_j + 1) \phi_{n_1 \dots (n_{j-1}-1) (n_j+1) \dots n_N} \\ &\quad \left. \left. + (n_j + 1) \phi_{n_1 \dots (n_j+1) (n_{j+1}-1) \dots n_N} \right\} \right\} |n_1 \dots n_j n_{j+1} \dots n_N\rangle\end{aligned}\quad (4.29)$$

Nuevamente estamos en un estado propio del sistema, pero nos gustaría poder identificarlo como un campo escalar cuantizado, para esto supongamos que  $\phi_{n_1 \dots (n_j+1) (n_{j+1}-1) \dots n_N} = \phi_{n_1 \dots (n_{j-1}-1) (n_j+1) \dots n_N}$ . Ya que ambos contienen la energía que gana el  $j$ -ésimo oscilador debido a sus vecinos, renombremos el término

$$n_j \phi_{n_1 \dots (n_{j-1}-1) (n_j+1) \dots n_N} \equiv \phi'_{n_j}.$$

De forma semejante para

$$n_{j-1} \phi_{n_1 \dots (n_j-1); (n_{j+1}+1) \dots n_N} \equiv -\phi'_{n_{j-1}} \quad n_{j+1} \phi_{n_1 \dots (n_j-1) (n_{j+1}+1) \dots n_N} \equiv -\phi'_{n_{j+1}}$$

Ambos representan la energía que cede el  $j$ -ésimo oscilador a sus vecinos. Con esto (4.29) queda

$$\mathcal{H} |\Psi_G\rangle = \sum_{\{n_j\}, j=1}^N \hbar\omega \left\{ \left( \frac{1}{2} + n_j \right) \phi_{n_1 \dots n_N} + \alpha \left( \phi'_{n_{j+1}} - 2\phi'_{n_j} + \phi'_{n_{j-1}} \right) \right\} |n_1 \dots n_N\rangle \quad (4.30)$$

Identificamos que las amplitudes debidas a la interacción con los vecinos son una segunda derivada discreta  $\frac{d^2 \phi'}{dx^2} = \phi'_{n_{j+1}} - 2\phi'_{n_j} + \phi'_{n_{j-1}}$ . Además, la energía del sistema se puede ver como

$$E |\Psi_G\rangle = \left( E_0 + \alpha \hbar\omega \frac{d^2 \phi'}{dx^2} \right) |n_1 \dots n_N\rangle \quad (4.31)$$

donde  $E_0$  es la energía de los osciladores sin interacción. En adición esta ecuación resulta ser un campo escalar cuantizado no relativista.

## 4.2. Entropía del sistema

En esta sección estudiaremos los casos para un sistema con energía

$$\text{a) } E = \sum_{j=1}^N \hbar\omega \left\{ \left( \frac{1}{2} + n_j \right) - \alpha n_j - \frac{\alpha}{2} (n_{j+1} + n_{j-1}) \right\}. \text{ Cadena cerrada}$$

$$\text{b) } E = \hbar\omega \left\{ (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2} + n_1 \right) + \sum_{j=2}^N \left( \left( \frac{1}{2} + n_j \right) - \alpha (n_j + n_{j-1}) \right) \right\}. \text{ Cadena abierta}$$

Obtenidas en la sección anterior con la indexación ahí supuesta. Procedemos con el cálculo de la matriz densidad de probabilidad para cada caso, de igual forma con sus entropías. En el artículo [22] se discute que la entropía de entrelazamiento del sistema (en el exterior a nuestra región de estudio) es la misma que la obtenida mediante un ensamble térmico. Bajo esta circunstancia supongamos que nuestro sistema, la matriz densidad de probabilidad, está descrita completamente por un ensamble térmico.

Procederemos con el cálculo para caso cadena cerrada, de forma análoga se hará para la cadena abierta. Calculando la función de partición para (4.24), cabe señalar que en los cálculos de la entropía e información mutua los obtendremos sin considerar  $\alpha^2 \approx 0$ , una vez obtenidas tomamos el límite de nuestra aproximación para ver si son consistentes.

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\beta \hbar \omega \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} + (1-\alpha)n_j - \frac{\alpha}{2}(n_{j-1} + n_{j+1}) \right)} \\ &= \text{Tr} \prod_{j=1}^N e^{-\beta \frac{\hbar \omega}{2}} e^{-\beta \hbar \omega \left( (1-\alpha)n_j - \frac{\alpha}{2}(n_{j-1} + n_{j+1}) \right)} \\ &= \frac{e^{-\beta \frac{\hbar \omega}{2} N}}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega (1-\alpha)})^N \left(1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}\right)^N \left(1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}\right)^N} \\ &= \frac{1}{\left(e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega (\frac{1}{2} - \alpha)}\right)^N \left(1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}\right)^{2N}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Cabe señalar que el sistema a) sigue una distribución de Bose-Einstein. Procedemos a conocer la entropía del sistema, para esto haremos uso de (3.22)

$$\begin{aligned} S &= -\beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \ln Z \\ &= N\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega (\frac{1}{2} - \alpha)} \right) + 2 \ln \left( 1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha} \right) \right\} \\ &\quad - N \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega (\frac{1}{2} - \alpha)} \right) - 2N \ln \left( 1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha} \right) \\ &= \beta \frac{\hbar \omega}{2} N \left\{ \frac{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} + (1 - 2\alpha)e^{-\beta \hbar \omega (\frac{1}{2} - \alpha)}}{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega (\frac{1}{2} - \alpha)}} - \frac{2\alpha e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}}{1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}} \right\} \\ &\quad - N \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega (\frac{1}{2} - \alpha)} \right) - 2N \ln \left( 1 - e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

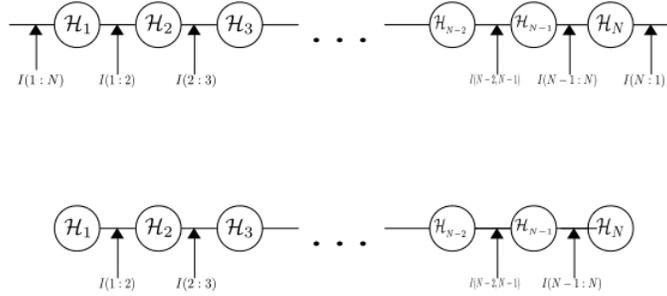


Figura 4.1: En la parte superior vemos el grafo correspondiente al caso a), mientras el caso b) se muestra en la parte inferior. Por facilidad se acomodan los vértices siguiendo una línea recta, en general puede acomodarse como una retícula, por dar un ejemplo, siempre que cada vértice tenga a lo más 2 aristas, salvo en el caso b), donde el primer y último vértice tienen una sola arista y el resto tiene 2.

Para construir nuestra matriz de distancias necesitamos definir nuestro grafo de información, para esto consideraremos que cada vértice del grafo representa a cada oscilador, véase la figura (4.1), de esta forma la entropía debida a la interacción define la información mutua. Para esto consideremos el siguiente caso.

Tomemos el  $j$ -ésimo oscilador, el cual sólo interactúa con el  $j+1$ -ésimo y  $j-1$ -ésimo oscilador. Su función de partición es

$$Z_j = \frac{1}{\left(e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}\right) (1 - e^{\beta \hbar\omega\alpha})^2}.$$

De forma equivalente para las funciones de partición de los otros osciladores, pero al hacer la unión de dos vértices con sus respectivas aristas ( $j \cup j+1$ ), notamos que la función de partición tiene la forma

$$Z_{j \cup j+1} = \frac{1}{\left(e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}\right)^2 (1 - e^{\beta \hbar\omega\alpha})^3}$$

Conviene ver que la energía debida al vértice está contenida en el primer paréntesis del cociente, mientras la información de la interacción viene en el segundo, el número de aristas. De modo que la información mutua tiene la forma

$$I(j : j+1) = S(j) + S(j+1) - S(j \cup j+1) \quad (4.34)$$

con  $S(j) = S(j+1)$ , pero  $S(j \cup j+1)$  es

$$\beta \hbar\omega \left\{ \frac{e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} + (1 - 2\alpha)e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}}{e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}} - \frac{3\alpha e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha}}{1 - e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha}} \right\} - 2 \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)} \right) - 3 \ln \left( 1 - e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha} \right)$$

y como

$$S(j) = \beta \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ \frac{e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} + (1 - 2\alpha)e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}}{e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}} - \frac{2\alpha e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha}}{1 - e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha}} \right\} - \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)} \right) - 2 \ln \left( 1 - e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha} \right)$$

la información mutua queda

$$I(j : j + 1) = -\frac{\alpha e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha}}{1 - e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha}} + \ln \left( 1 - e^{\beta \frac{\hbar\omega}{2}\alpha} \right) \quad (4.35)$$

Considerando la aproximación  $\alpha^2 \approx 0$  en la ecuación (4.35), obtenemos

$$I(i : j) = \frac{1 + \alpha\beta \frac{\hbar\omega}{2}}{\beta \frac{\hbar\omega}{2}} + \ln \left( \alpha\beta \frac{\hbar\omega}{2} \right) \quad (4.36)$$

De forma similar la entropía  $S(j)$  es

$$S(j) = \frac{\beta\hbar\omega}{2} \left[ \frac{1 + (1 + \alpha(\beta\hbar\omega - 2))e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - (1 + \alpha\beta\hbar\omega)e^{-\beta\hbar\omega}} + \frac{4 + 2\alpha\beta\hbar\omega}{\beta\hbar\omega} - \ln(1 - (1 + \alpha\beta\hbar\omega)e^{-\beta\hbar\omega}) \right] - 2 \ln \left( \alpha\beta \frac{\hbar\omega}{2} \right) \quad (4.37)$$

Por las condiciones de nuestro problema, la información mutua es la misma para cualesquiera dos vértices subsecuentes. En caso de tomar vértices separados por 2 o más vértices, podemos ver que no tienen región de interacción, en otras palabras, la información mutua es nula. Si normalizamos y construimos la matriz de distancias necesitamos construir el camino más corto que una al vértice  $i$  con el vértice  $j$ , al tener la condición de cuerda cerrada, a lo más la distancia máxima será  $[\frac{N}{2}]$ , con  $[x]$  la función sótano. Notemos que solo hay tres valores de información mutua

$$I(i, k) = \begin{cases} S(j) & si \quad k = j \\ \frac{2 + \alpha\beta\hbar\omega}{\beta\hbar\omega} + \ln(\alpha\beta \frac{\hbar\omega}{2}) & si \quad k = j + 1 \\ 0 & si \quad |j - k| \geq 2 \end{cases} \quad (4.38)$$

De aquí, la matriz de predistancias tiene los siguientes valores

$$\Omega(j, k) = \begin{cases} 0 & si \quad k = j \\ l_p & si \quad |j - k| = 1 \\ \infty & si \quad |j - k| \geq 2 \end{cases} \quad (4.39)$$

Con esto construimos la matriz de distancias

$$d(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & [\frac{N}{2}] - 1 & [\frac{N}{2}] & [\frac{N}{2} - 1] & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & [\frac{N}{2}] - 2 & [\frac{N}{2}] - 1 & [\frac{N}{2}] & \dots & 2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & [\frac{N}{2}] & [\frac{N}{2}] - 1 & [\frac{N}{2}] - 2 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

salvo el factor de longitud propia ( $l_p$ ), que tomaremos como la unidad. Notemos las siguientes propiedades

- $d(i, j)^2 = d(j, i)^2$  por simetría de la matriz de distancias.
- $\sum_j^N d(1, j)^2 = \sum_j^N d(2, j)^2 = \dots = \sum_j^N d(N, j)^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,j}^N d(i, j)^2 = N \sum_j^N d(1, j)^2$

Quedando la matriz de encaje (3.30) como

$$B(i, j) = -\frac{1}{2} \left( d(i, j)^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d(1, j)^2 \right) \quad (4.41)$$

La cual se calcula de forma numérica junto a sus valores propios. Calculamos para el caso cadena abierta (4.26). Nuevamente la función de partición del sistema total

$$\begin{aligned} Z' &= \text{Tr} e^{-\beta \hbar \omega \left\{ (1-\alpha) \left( \frac{1}{2} + n_1 \right) + \sum_{j=2}^N \left( \left( \frac{1}{2} + n_j \right) - \alpha (n_j + n_{j-1}) \right) \right\}} \\ &= \text{Tr} e^{-\beta \hbar \omega \left\{ \frac{1-\alpha}{2} + \sum_{j=1}^N (1-\alpha) n_j + \sum_{j=2}^N \left( \frac{1}{2} - \alpha n_{j-1} \right) \right\}} \\ &= \left( \frac{e^{-\beta \frac{\hbar \omega}{2} (1-\alpha)}}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega (1-\alpha)})^N} \right) \left( \frac{e^{-\beta \frac{\hbar \omega}{2} (N-1)}}{(1 - e^{\beta \hbar \omega \alpha})^{N-1}} \right) \\ &= \frac{e^{-\beta \frac{\hbar \omega}{2} (N-\alpha)}}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega (1-\alpha)})^N (1 - e^{\beta \hbar \omega \alpha})^{N-1}} \\ &= \frac{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}}{\left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)} \right)^N \left( 1 - e^{\beta \hbar \omega \alpha} \right)^{N-1}} \end{aligned}$$

Donde podemos interpretar que tenemos  $N$  vértices y  $N - 1$  aristas, véase la figura 4.1. Haciendo un cálculo análogo para conocer la función de partición restringida al  $j$ -ésimo oscilador, en esta descripción podemos entender que la interacción se da con el vértice  $j - 1$ , concluyendo que el primer y último vértice no están conectados.

$$Z'_j = \frac{e^{\beta \hbar \omega \alpha}}{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)}}$$

Donde  $Z'_j = Z'_{j+1}$ , y en la unión de estos

$$Z'_{j \cup j+1} = \frac{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2} \alpha}}{\left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)} \right)^2 \left( 1 - e^{\beta \hbar \omega \alpha} \right)}$$

Calculando las entropías correspondientes

$$\begin{aligned} S(j) &= -\beta \left[ \hbar \omega \alpha - \hbar \omega \frac{\frac{1}{2} e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)}}{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)}} \right] + \beta \hbar \omega \alpha - \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)} \right) \\ &= \beta \hbar \omega \left[ \frac{\frac{1}{2} e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)}}{e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)}} \right] - \ln \left( e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} - e^{-\beta \hbar \omega \left( \frac{1}{2} - \alpha \right)} \right) \end{aligned}$$

para la unión tenemos

$$\begin{aligned}
S(j \cup j + 1) &= -\beta \left[ \hbar\omega\alpha - 2\hbar\omega \frac{\frac{1}{2}e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} + (\frac{1}{2} - \alpha)e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}}{e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}} + \hbar\omega\alpha \frac{e^{\beta\hbar\omega\alpha}}{1 - e^{\beta\hbar\omega\alpha}} \right] \\
&\quad + \beta\hbar\omega\alpha - 2 \ln \left( e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)} \right) - \ln \left( 1 - e^{\beta\hbar\omega\alpha} \right) \\
&= \beta\hbar\omega \left[ \frac{e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} + (1 - 2\alpha)e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}}{e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)}} - \alpha \frac{e^{\beta\hbar\omega\alpha}}{1 - e^{\beta\hbar\omega\alpha}} \right] \\
&\quad - 2 \ln \left( e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} - e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}-\alpha)} \right) - \ln \left( 1 - e^{\beta\hbar\omega\alpha} \right)
\end{aligned}$$

con estos valor podemos calcular la información mutua, obteniendo

$$I'(j : j + 1) = \frac{e^{\beta\hbar\omega\alpha}}{1 - e^{\beta\hbar\omega\alpha}} \beta\hbar\omega\alpha + \ln \left( 1 - e^{\beta\hbar\omega\alpha} \right) \quad (4.42)$$

Como podemos notar, volvemos a tener un caso en donde la información mutua es igual para todos los vértices subsecuentes, salvo el primero con el último, pues no están conectados. De esta forma podemos conocer nuestra matriz de distancias, donde la mayor distancia será recorrer del primer oscilador hasta el último, pasando por todos, como muestra la figura 4.1. El procedimiento es análogo al caso cadena cerrada.

$$d(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & N-2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ N-1 & N-2 & N-3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

El cálculo los respectivos valores propios y espacios emergentes se muestran en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Resultados y Conclusiones

A pesar del error cometido en la indexación de la matriz hamiltoniana, la cual no representa completamente a nuestro hamiltoniano, las energías para los casos a) y b) representan una cadena de osciladores abierta y cerrada respectivamente, por lo cual mostramos que el método expuesto por Carroll describe el espacio emergente para estos casos. Como trabajo a futuro proponemos el cálculo de energía para este sistema hamiltoniano y obtener su espacio emergente.

En el cálculo de los valores propios de la matriz de encaje que resulta del caso de la cadena cerrada se presentan algunas interrogantes respecto al método utilizado por Carroll en el Escalamiento multidimensional: en general los valores propios de una matriz cuadrada de tamaño  $N$ , de existir, pueden ser números complejos y además se tiene la posibilidad de obtener multiplicidad mayor a uno. Si la multiplicidad de los valores propios es mayor a uno se obtienen vectores propios degenerados, los cuales generan el mismo subespacio vectorial asociado a estos. ¿Pero qué ocurre cuando los valores propios dominantes tienen multiplicidad mayor a uno, generan el mismo espacio emergente o generan un espacio más grande? Discutamos esto con detalle.

Revisando el algoritmo (véase Torgerson [26]), se establece que el número de valores propios positivos grandes nos da la dimensionalidad del espacio (no se especifica cuánto es suficientemente grande), mientras que el resto de valores propios, tanto negativos como complejos, se consideran como un error debido al encaje en torno al origen. Podemos entender que la multiplicidad toma relevancia si se presenta en los valores propios más grandes. Los espacios generados por sus respectivos vectores propios corresponden a rectas (valores propios reales), espirales (valores propios complejos con parte real no nula) y círculos (imaginarios puros), en analogía al estudio del espacio fase de sistemas dinámicos, con esto nos podemos ayudar a visualizar el tipo de espacio emergente resultante del encaje.

Considerando que todos los valores propios tienen información del espacio emergente no descartamos los valores negativos ni complejos que se obtienen, para esto construimos una distribución de valores propios de la siguiente manera:

- 1 Se toma el módulo (complejo) de todos los valores propios.
- 2 Se busca el máximo valor propio,  $\lambda_{Max}$ .

- 3 Se normalizan todos los valores propios, obteniendo una cantidad finita de valores cercanos a la unidad, a estos les llamaremos valores propios dominantes de la distribución, los cuales nos dan la dimensionalidad del espacio emergente.
- 4 Por comodidad, se grafican en orden descendente.

En la figura 5.1 se muestran las distribuciones obtenidas para los casos: 4, 10, 50, 100, 120, 150, 180, 200 y 500 osciladores. Se puede notar que tenemos 2 valores propios dominantes desde los 4 hasta los 500 osciladores, estos son debidos a la multiplicidad en los valores propios, como se puede apreciar en los gráficos, la multiplicidad no desaparece a mayor número de osciladores, esta cualidad se atribuye a la simetría en las conexiones del grafo, véase figura 4.1 y a su matriz de distancias (4.40), entendiendo que hay una simetría de traslación. Por este motivo se considera que tenemos un valor propio dominante, concluyendo que la dimensión del espacio emergente para la cadena cerrada de osciladores es  $d = 1$ . Otra interpretación es debida al encaje que se realiza en el escalamiento multidimensional; al estar en un espacio Euclidiano se necesita de 2 dimensiones para encajar un lazo cerrado, pues este habita en el plano, sin embargo solo se necesita de un parámetro para describirlo, pensando en el lazo cerrado como un círculo (bajo homeomorfismos son lo mismo), y en el límite de muchas partículas  $N \rightarrow \infty$ , el círculo se convierte en recta, obteniendo nuevamente, que la dimensión es  $d = 1$ . Claramente 500 osciladores no son un buen límite térmico, por lo que sigue siendo un resultado válido. Otra consideración son los valores complejos, bajo el módulo son equivalentes y podemos entender esta multiplicidad en la figura 5.1. Además de la interpretación del espacio propio generado por un vector propio complejo se entiende que hay un giro involucrado, de esta forma obtenemos que la cadena cerrada es invariante ante rotaciones.

Por otra parte en el cálculo del espacio emergente que realiza Carrol en [2] para una cadena antiferromagnética de Heisenberg, se utilizan los correladores para medir la información mutua y muestra que para el estado base la dimensión emergente es  $d = 1$ , nos da a pensar que en niveles arbitrarios la cadena tendría una dimensión diferente al estado base. En el caso de nuestra cadena cerrada, se obtiene la dimensionalidad para cualquier nivel, salvo por la condición en que los primeros vecinos, con los que se cede la energía no estén en el estado base para que exista un intercambio energético, bajo la aproximación  $\alpha^2 \approx 0$ . Por ende, si todos los osciladores de la cadena están en el estado base no hay interacción entre vecinos y por consecuencia obtenemos que todos los valores propios de la matriz de encaje son cero, del mismo modo se concluye que la dimensión es nula para este caso.

También podemos hacer uso de los estados ligados por redundancia, configuraciones del sistema en donde la información mutua entre componentes del sistema se ven equivalentes a otra, por ejemplo: en el caso de la cadena cerrada, tomando los osciladores  $j$  y  $j + 1$ , al unirlos la información mutua resultante corresponde a las aristas que conectan a  $j$  con  $j - 1$  y  $j + 1$  con  $j + 2$ , al ser la misma información construimos un nuevo estado, digamos  $k = j \cup j + 1$ , cuya información mutua con sus vecinos no cambia respecto a la configuración anterior  $I(k : j + 2) = I(j + 1 : j + 2)$ . Se puede considerar como un invariante de escala si la constricción por redundancia se presenta para todas las subregiones del sistema. A la construcción de estas nuevas subregiones se le llama como granulado. Con esto podemos ver,

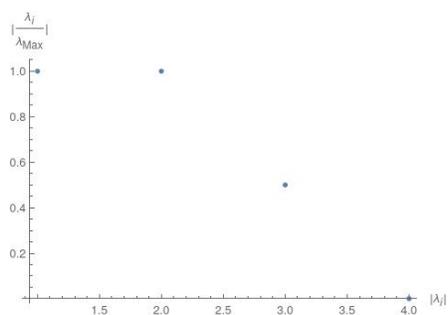
de forma sencilla, que esta invariancia se cumple en nuestro sistema, siempre que se realice con segmentos subsecuentes de la cadena. Es decir, tomando  $k_1 = \cup_{j=1}^r j$  y  $k_2 = \cup_{j=r+1}^s j$ , con  $\{1, \dots, r, \dots, s, \dots, N\}$ , entonces la información mutua  $I(k_1 : k_2) = I(r : r+1)$ . Gráficamente se considera que una colección subsecuentes de osciladores se puede tomar como un nuevo oscilador. Esta invarianza puede explicar el surgimiento de los valores propios a partir de los 10 osciladores con valor de 0.25 interpretando que corresponden a puntos fijos de la distribución.

Retomando la ecuación (4.31), al considerar el vector propio más general para diagonalizar al sistema hamiltoniano e imponer un par de condiciones respecto a la energía cedida y ganada por el  $j$ -ésimo oscilador se concluye que la amplitud de probabilidad debe satisfacer una ecuación de un campo escalar no relativista, la cual es de dimensión 1, resultado independiente a las condiciones de frontera (cadena abierta y cadena cerrada).

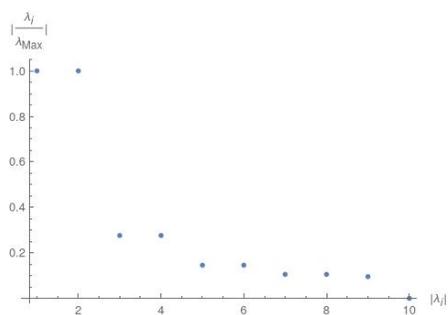
Como podemos notar en la figura 5.1, para la cadena cerrada tenemos un par de valores propios dominantes, los cuales cumplen con tener multiplicidad dos, como se muestra en los gráficos. Sin embargo podemos notar una tendencia de comportamiento a partir de los 10 osciladores, pues el(los) siguiente(s) valor propio en magnitud es un cuarto de la magnitud del valor propio dominante dominante puede interpretarse como un tipo de invariancia conforme que tiene el sistema, por ejemplo en la constricción por redundancia que satisface la cadena cerrada. Junto a esto en el límite térmico  $N \rightarrow \infty$  la distribución cumple con tener un valor propio dominante, salvo por su multiplicidad. Debemos recordar que estos resultados se han obtenido con la aproximación  $\alpha^2 \approx 0$ , por lo que no podemos garantizar este resultado en un caso general, por ejemplo para encontrar una base diagonal que nos permita expresar las energías de forma sencilla y así obtener su función de partición. De hecho el poder calcular esto nos facilitaría en gran medida, la obtención de la información mutua y la matriz de distancias.

Ahora revisamos el caso de la cadena abierta (véase la figura 5.2), podemos notar que a diferencia del caso de cadena cerrada, tenemos un solo valor propio dominante concluyendo que la dimensión del espacio emergente debido a la cadena abierta de osciladores es 1, esto nos ayuda a inferir una diferencia geométrica entre los casos cadena abierta y cerrada, ambos espacios corresponden a un objeto de dimensión 1, la diferencia radica en el espacio en donde se encajan estos espacios para poder visualizarlos, en la cadena cerrada se necesita un espacio 2-dimensional para encajar la cadena, en tanto que para la cadena abierta solo se necesita un espacio 1-dimensional.

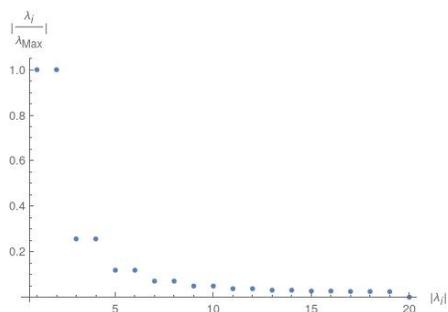
Un método alternativo, al aquí expuestuesto se pone en la Sección 3.3, el cual nos da un juego de ecuaciones diferenciales, tipo operadores de Lindblad, para calcular las matrices densidad de probabilidad restringidas sólo con conocer la descripción por componentes del Hamiltoniano, incluso nos propone una evolución temporal para cada matriz e información mutua, con la que se espera que el tiempo emerja del sistema. Más aún, en Alipour [27] se muestran dos casos en donde se obtiene, no solo las matrices restringidas, sino una *termodinámica cuántica* para los sistemas hamiltonianos de Jaynes-Cummings y una cadena de qubits desfasados haciendo uso de las ecuaciones maestras de Markov y considerando el desplazamiento de Lamb. Se deja como un trabajo a futuro el usar este método, esperando que el tiempo emerja de forma natural. Una primer hipótesis para esto es considerar un parámetro



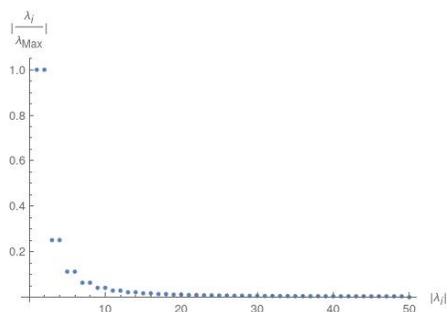
(a) 4 Osciladores



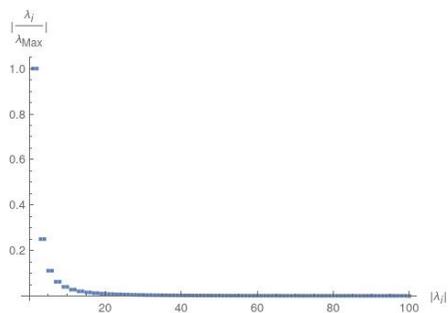
(b) 10 Osciladores



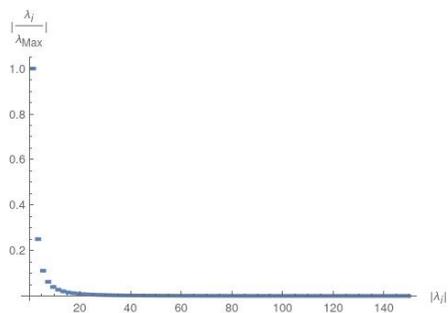
(c) 20 Osciladores



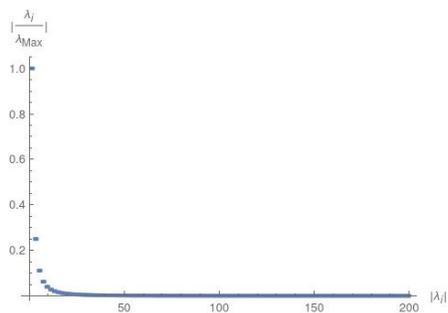
(d) 50 Osciladores



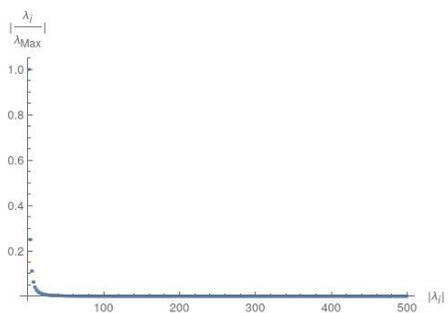
(e) 100 Osciladores



(f) 150 Osciladores

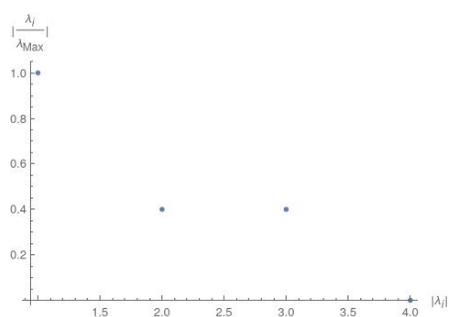


(g) 200 Osciladores

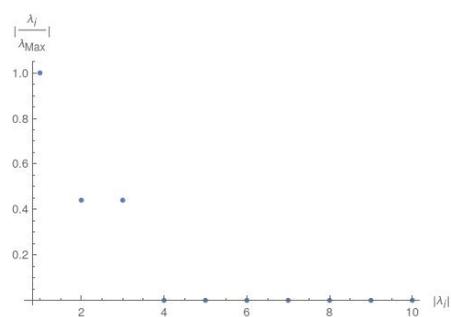


(h) 500 Osciladores

Figura 5.1: Gráficos de la distribución obtenida para los casos 4, 10, 50, 100, 120, 150, 180, 200 y 500 osciladores, respectivamente caso cadena cerrada. Notamos que hay multiplicidad en los valores propios (2), se atribuye a la simetría de la cadena cerrada, salvo ese detalle se obtiene un valor propio dominante para estos casos, de aquí se concluye que la dimensión emergente es 1.



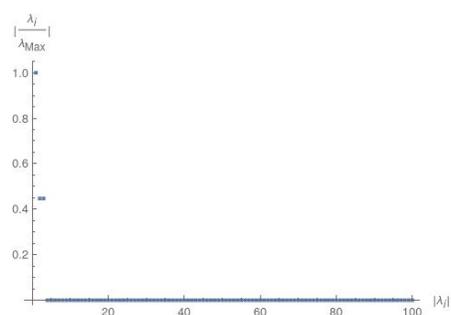
(a) 4 Osciladores



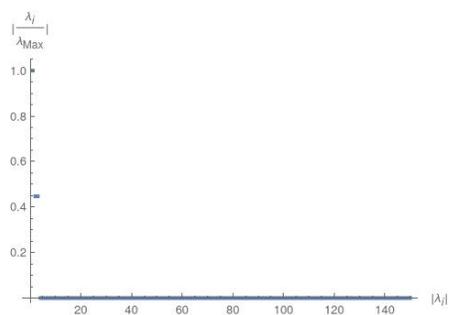
(b) 10 Osciladores



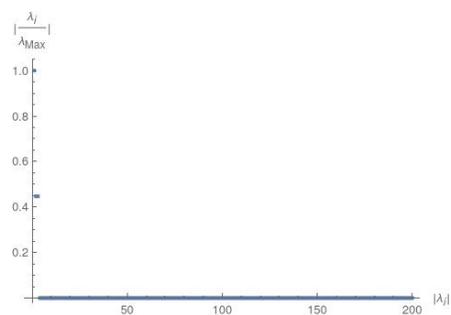
(c) 50 Osciladores



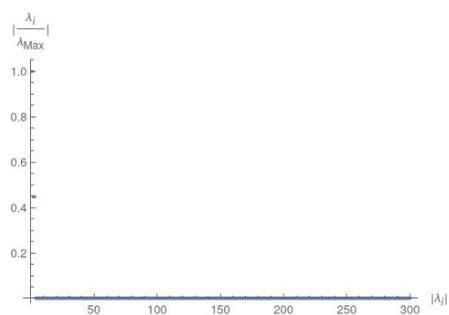
(d) 100 Osciladores



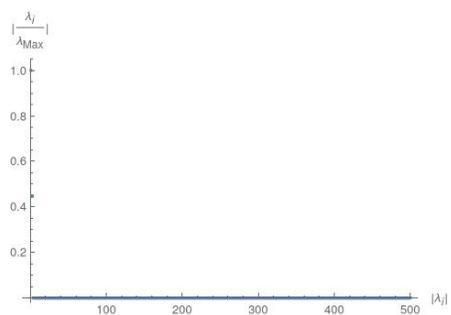
(e) 150 Osciladores



(f) 200 Osciladores



(g) 300 Osciladores



(h) 500 Osciladores

Figura 5.2: Gráficos de la distribución obtenida para los casos 4, 10, 50, 100, 150, 200, 300 y 500 osciladores, respectivamente caso cadena abierta. Notamos que no hay multiplicidad en el valor propio dominante, salvo por dos valores cercanos a 0.4 que suponemos son debidos a la invarianza ante traslaciones excepto por el primer y último oscilador, de aquí se concluye que la dimensión emergente es 1.

de fase descrito desde la representación de Heisenberg.

# Bibliografía

- [1] Ted Jacobson. Entanglement equilibrium and the einstein equation. *Physical Review Letters*, 116(20), May 2016.
- [2] ChunJun Cao, Sean M. Carroll, and Spyridon Michalakis. Space from hilbert space: Recovering geometry from bulk entanglement. *Physical Review D*, 95(2), Jan 2017.
- [3] Mark Van Raamsdonk. Building up spacetime with quantum entanglement. *Springer Science+Business Media, LLC 2010*, (42), June 2010.
- [4] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, Apr 1973.
- [5] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [6] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence. *Physical Review Letters*, 96(18), May 2006.
- [7] Michael M. Wolf, Frank Verstraete, Matthew B. Hastings, and J. Ignacio Cirac. Area laws in quantum systems: Mutual information and correlations. *Physical Review Letters*, 100(7), Feb 2008.
- [8] Luis de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica, UNAM, 2012.
- [9] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1994.
- [10] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1981.
- [11] Robert B. Ash. *Information theory*. Courier Corporation, 1990.
- [12] Leon Brillouin. *Science and Information Theory*. Dover Publications, 2013.
- [13] Koji Maruyama, Franco Nori, and Vlatko Vedral. Colloquium: The physics of maxwell’s demon and information. *Reviews of Modern Physics*, 81(1):1–23, Jan 2009.
- [14] Francisco Castilho Alcaraz, Miguel Ibáñez Berganza, and Germán Sierra. Entanglement of low-energy excitations in conformal field theory. *Physical Review Letters*, 106(20), May 2011.

- [15] Alexandre Belin, Nabil Iqbal, and Sagar F. Lokhande. Bulk entanglement entropy in perturbative excited states. *SciPost Physics*, 5(3), Sep 2018.
- [16] Pasquale Calabrese and John Cardy. Entanglement entropy and conformal field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504005, Dec 2009.
- [17] Matthew Headrick. Entanglement rényi entropies in holographic theories. *Physical Review D*, 82(12), Dec 2010.
- [18] Jianhao Michael Yang. Quantum Entanglement Induced by Mutual Gravitational Interaction. 2019.
- [19] Run-Qiu Yang. Complexity for quantum field theory states and applications to thermo-field double states. *Phys. Rev.*, D97(6):066004, 2018.
- [20] Ning Bao, ChunJun Cao, Michael Walter, and Zitao Wang. Holographic entropy inequalities and gapped phases of matter. *Journal of High Energy Physics*, 2015(9), Sep 2015.
- [21] Ning Bao, Sepehr Nezami, Hirosi Ooguri, Bogdan Stoica, James Sully, and Michael Walter. The holographic entropy cone. *Journal of High Energy Physics*, 2015(9), Sep 2015.
- [22] Mark Srednicki. Entropy and area. *Physical Review Letters*, 71(5):666–669, Aug 1993.
- [23] Ning Bao, ChunJun Cao, Sebastian Fischetti, and Cynthia Keeler. Towards Bulk Metric Reconstruction from Extremal Area Variations. 2019.
- [24] Alexandre Belin, Nabil Iqbal, and Sagar F. Lokhande. Bulk entanglement entropy in perturbative excited states. 2018.
- [25] M. Jonker. Entanglement entropy of coupled harmonic oscillators: an approach in fock space. 2016.
- [26] Warren S. Torgerson. Multidimensional scaling: I. theory and method. *Psychometrika*, 17, Dec 1952.
- [27] S. Alipour, F. Benatti, F. Bakhshinezhad, M. Afsary, S. Marcantoni, and A. T. Rezakhani. Correlations in quantum thermodynamics: Heat, work, and entropy production. *Scientific Reports*, 6(1), Oct 2016.
- [28] R. C. Ball, M. Diakonova, and R. S. MacKay. Quantifying Emergence in terms of Persistent Mutual Information. *arXiv e-prints*, page arXiv:1003.3028, Mar 2010.