



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSFORMACIONES DE
KERR-SCHILD EN RELATIVIDAD
GENERAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

EDUARDO LARA RAMÍREZ

TUTOR

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Lara
Ramírez
Eduardo
26 33 59 76
Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad de Ciencias
Física
312309350

2. Datos del tutor

Dr.
Eduardo
Nahmad
Achar

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Sahen
Hacyan
Saleryan

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Erick Leonardo
Patiño
Jaidar

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Hernando
Quevedo
Cubillos

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Miguel
Alcubierre
Moya

7. Datos del trabajo escrito

Transformaciones de Kerr-Schild en
relatividad general
107 p.
2021

Agradecimientos

A mamá y papá, esas dos maravillosas personas llenas de amor y cariño, quienes siempre han hecho hasta lo imposible por darnos todo. Nunca podría terminar de expresarles mi más profundo agradecimiento.

A mis hermanos, por todo su apoyo e incondicional cariño. Los días junto a ustedes son los mejores.

A todos mis amigos, por su incondicional apoyo, y en particular a mis amigos de la universidad, por todos esos momentos que compartimos y todas esas tardes de risas y frustración que pasamos juntos en la biblioteca. No habría disfrutado tanto la carrera sin ustedes.

A mi asesor, el Dr. Eduardo Nahmad, por su guía, paciencia y todo su apoyo en la elaboración de esta tesis, y por darme la confianza y la oportunidad de estudiar y aprender sobre aquellos temas que más atrapaban mi atención.

A mis sinodales, por tomarse el tiempo de leer mi trabajo y por sus discusiones y valiosos comentarios al respecto.

¡Muchas gracias a todos!

Índice general

Introducción	1
1. Vectores de Killing	3
1.1. Isometrías y la ecuación de Killing	3
1.2. Integrabilidad de la ecuación de Killing	11
1.3. Ejemplos	16
1.4. Cantidades conservadas	28
2. Métricas de Kerr-Schild	35
2.1. Motivación	35
2.2. El ansatz de Kerr y Schild	37
2.3. Las ecuaciones de campo	40
2.4. Vectores de Killing y la solución general	47
2.5. La métrica de Kerr	50
3. Transformaciones de Kerr-Schild	55
3.1. Introducción	55
3.2. El formalismo de Newman-Penrose	56
3.3. Propiedades geométricas de las KST	66
3.4. Energía y momento inducidos por una KST	73
3.5. Soluciones particulares	76
3.6. Perspectivas	82
Conclusiones	85
A. La derivada de Lie	89
B. Grupos y álgebras de Lie	97
Referencias	105

Índice de figuras

1.1. Rotación en el plano.	5
1.2. Flujo del campo vectorial $\xi(x, y) = (x, -y)$	7
1.3. Flujo del vector de Killing $\xi_{(1)}$	20
1.4. Flujo del vector de Killing $\xi_{(0,1)}$	22
1.5. Toro de revolución, con $a = 0.4$, $c = 1$	23
3.1. Interpretación geométrica de los escalares ópticos $\text{div}(l)$, $\text{curl}(l)$ y $\text{shear}(l)$	59

Introducción

La teoría de la relatividad general, uno de los pilares fundamentales de la física moderna, constituye hoy en día la teoría más aceptada para describir los fenómenos gravitacionales que observamos en la naturaleza. La presencia de agujeros negros a lo largo del cosmos, la existencia de radiación gravitacional, la precesión del perihelio de los planetas, la deflexión gravitacional de la luz o la expansión acelerada del universo mismo, son algunos ejemplos de predicciones formuladas por esta fascinante teoría geométrica del espacio-tiempo, todas comprobadas experimentalmente con un alto grado de precisión.

Sin embargo, dado que las ecuaciones fundamentales de la teoría de la relatividad, que son las ecuaciones de campo de Einstein, son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas no lineales, muchos aspectos de la misma aún continúan siendo una incógnita. Esto hace que el estudio de soluciones exactas a las ecuaciones de campo, el cual es el tema de estudio del presente trabajo, sea una tarea relevante, pues si bien hoy en día la capacidad de cómputo es tal que permite resolver las ecuaciones de campo de manera numérica, las soluciones exactas nos proporcionan información importante sobre el tipo de fenómenos gravitacionales que podemos observar en la naturaleza, y aun cuando muchas de estas soluciones representen condiciones idealizadas o con alto grado de simetría, siguen siendo una fuente valiosa de información, en tanto que nos dan una visión cualitativa sobre qué es lo que podría ocurrir en situaciones más realistas.

Entre el conjunto de soluciones exactas conocidas para las ecuaciones de campo, destaca la métrica de Kerr, la cual describe el exterior de un cuerpo con simetría esférica, momento angular distinto de cero y sin carga eléctrica. Dado que en la naturaleza estos últimos objetos astrofísicos son bastante abundantes, la métrica de Kerr resulta ser de particular importancia en física. Poco tiempo después de su descubrimiento, Alfred Schild y Roy Kerr encontraron que esta métrica pertenece a una familia más amplia de soluciones a las ecuaciones de campo, de la forma (asumiendo la signatura -2 de la métrica)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - n_{\mu}n_{\nu},$$

donde η es la métrica de Minkowski y n un vector nulo. Las soluciones a las ecuaciones de campo de este tipo, llamadas métricas de Kerr-Schild, poseen algunas propiedades geométricas y físicas interesantes y que facilitan su estudio,

por lo que pronto surgió el interés de estudiar esta familia de soluciones y buscar generalizaciones a la misma, siendo una de estas posibles generalizaciones las llamadas transformaciones de Kerr-Schild, las cuales tienen la forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_{\mu}n_{\nu},$$

donde n aún es un vector nulo pero la métrica g ya no es necesariamente la métrica de Minkowski.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos y tiene por objetivo estudiar las transformaciones de Kerr-Schild. Para esto, comenzamos el primer capítulo de esta obra con un estudio acerca de las simetrías en relatividad general, las cuales se formulan en términos de los llamados vectores de Killing. Las simetrías juegan un papel muy importante en todas las áreas de la física, desde los grupos puntuales en cristalografía y física de la materia condensada, pasando por las teorías físicas más antiguas y fundamentales como son la mecánica clásica y el electromagnetismo, donde las simetrías están presentes a través del teorema de Noether, hasta las teorías cuánticas de campo, donde las distintas interacciones fundamentales de la naturaleza emergen de los grupos continuos de simetrías presentes en la teoría. La teoría general de la relatividad no es una excepción a esto y más aún, dada la no linealidad de las ecuaciones de campo, las simetrías desempeñan un papel importante en el estudio de soluciones exactas en relatividad general.

El segundo capítulo está dedicado a estudiar las métricas de Kerr-Schild, y tiene por objetivo discutir algunas de las propiedades de estas métricas y resolver las ecuaciones de campo en el vacío para las mismas, mostrando a la métrica de Kerr como una solución particular de esta familia de soluciones.

Teniendo desarrolladas las herramientas de los dos primeros capítulos, en el tercer y último capítulo de este trabajo estudiamos las transformaciones de Kerr-Schild, analizando algunas de sus propiedades físicas y geométricas y cómo se relacionan estas propiedades físicas y geométricas de las soluciones obtenidas vía una transformación de Kerr-Schild con la solución a partir de la cual se originaron. Finalmente, mostramos algunos ejemplos explícitos de transformaciones de Kerr-Schild y discutimos brevemente el papel de las transformaciones de Kerr-Schild como método de generación de soluciones exactas a las ecuaciones de campo en la actualidad.

Capítulo 1

Vectores de Killing

En este capítulo desarrollamos un estudio sobre las simetrías en variedades pseudo-riemannianas, entre las cuales figura el propio espacio-tiempo, de acuerdo con la teoría general de la relatividad. Comenzamos definiendo qué entendemos por simetría y cómo es que los vectores de Killing determinan las simetrías del espacio-tiempo. En la segunda sección nos dedicamos a estudiar condiciones necesarias que deben satisfacer los vectores de Killing y cuándo la ecuación de Killing resulta ser integrable. En la tercera sección desarrollamos algunos ejemplos concretos de la teoría, para terminar en la última sección ilustrando una de las principales aplicaciones del estudio de las simetrías de un sistema físico: la existencia de cantidades conservadas asociadas a una simetría. Dado el carácter geométrico de la teoría de la relatividad general, este capítulo utiliza algunas herramientas propias de la geometría diferencial, como son la derivada de Lie, los grupos de Lie y las álgebras de Lie, las cuales cubrimos de manera breve en los apéndices **A** y **B**, respectivamente, los cuales pueden encontrarse al final de este trabajo.

En este capítulo asumimos que la signatura del espacio-tiempo es $+2$.

1.1. Isometrías y la ecuación de Killing

Recordemos que en una variedad pseudo-riemanniana (M, g) las propiedades geométricas de la variedad como son ángulos, distancias, curvatura, etc, están determinados por el tensor métrico g (en general el tensor de curvatura está determinado por la conexión, pero en una variedad pseudo-riemanniana la conexión usada es la compatible con la métrica, de modo que en este caso la métrica determina la curvatura). Además, de acuerdo con la teoría de la relatividad general, es el tensor métrico quien determina la estructura del espacio-tiempo. Así, estamos interesados en encontrar aquellas transformaciones de la variedad en sí misma que preservan el tensor métrico, es decir, isometrías. Para esto, recordemos algunas definiciones de los mapeos entre variedades, necesarios para definir lo que entenderemos por preservar el tensor métrico.

Definición 1.1 Sean M, N variedades diferenciables y sea $f \in C^\infty(M, N)$. Definimos el pullback de f como la transformación

$$(f)^* : C^\infty(N, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

$$(f)^* h = h \circ f,$$

donde $h \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ [1, cap. 9, p. 2].

Definición 1.2 Sean M, N variedades diferenciables y sea $f \in C^\infty(M, N)$. Para $p \in M$, recordamos que el espacio tangente a la variedad M en el punto p se denota como $T_p(M)$ y el espacio cotangente en p como $T_p^*(M)$. Definimos el mapeo diferencial $(f)_{*p}$ como la transformación

$$(f)_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N),$$

$$(f)_{*p} v (h) = v [(f)^* h],$$

para $v \in T_p(M)$ y $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable [2, p. 13].

Teniendo la definición del mapeo diferencial, podemos extender la definición del pullback de una función como sigue.

Definición 1.3 Dada $f : M \rightarrow N$ y $p \in M$, definimos el pull-back de f como la transformación

$$(f)_p^* : \underbrace{T_{f(p)}^*(N) \otimes \cdots \otimes T_{f(p)}^*(N)}_l \rightarrow \underbrace{T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M)}_l,$$

$$(f)_p^* S_{f(p)} [v_1, v_2, \dots, v_l] = S_{f(p)} [(f)_{*p} v_1, (f)_{*p} v_2, \dots, (f)_{*p} v_l],$$

para $v_1, \dots, v_l \in T_p(M)$ y $S_{f(p)}$ un tensor de rango $\binom{0}{l}$ en N .

Cuando se tiene un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es posible extender la definición del pull-back a tensores S de rango $\binom{k}{l}$ [3, p. 438]: dados $w^1, \dots, w^k \in T_p^*(M)$ y $v_1, \dots, v_l \in T_p(M)$ se define el pull-back como

$$(f)_p^* S_{f(p)} [w^1, \dots, w^k, v_1, \dots, v_l]$$

$$= S_{f(p)} \left[(f^{-1})_{f(p)}^* w^1, \dots, (f^{-1})_{f(p)}^* w^k, (f)_{*p} v_1, \dots, (f)_{*p} v_l \right].$$

Teniendo estos elementos, veamos la definición de isometría.

Definición 1.4 Dada una variedad pseudo-riemanniana (M, g) , se dice que el difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es una isometría si y sólo si $(f)_p^* g_{f(p)} = g_p$ para todo $p \in M$ [2, p. 72]. Denotamos al conjunto de isometrías de la variedad M como $I(M)$, es decir

$$I(M) = \{ f : M \rightarrow M \mid \forall p \in M, (f)_p^* g_{f(p)} = g_p \}.$$

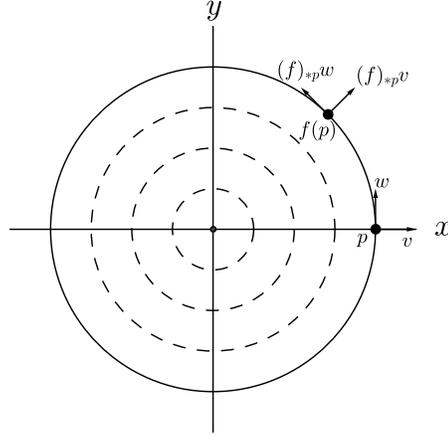


Figura 1.1: Rotación en el plano.

La idea de la definición anterior se ilustra en la figura 1.1 para una rotación en el plano. Como la rotación f es una isometría, los vectores v, w permanecen ortogonales cuando son transportados por el mapeo diferencial $(f)_{*p}$, es decir, se preserva el tensor métrico.

En general, no es fácil encontrar las isometrías de una variedad pseudo-riemanniana, sin embargo, podemos facilitar su estudio analizando los grupos de isometrías generados por campos vectoriales; como veremos más adelante, en realidad esto es suficiente para determinar a todo el conjunto de isometrías de la variedad. Para estudiar isometrías generadas por campos vectoriales, recordamos primero un teorema acerca de la existencia y unicidad de soluciones a las ecuaciones diferenciales en variedades.

Proposición 1.1 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial en M . Entonces, dado un punto $p \in M$, el problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \xi_{\alpha(t)}, \\ \alpha(0) &= p,\end{aligned}$$

tiene una única solución $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, para algún $\epsilon > 0$ [2, p. 32], donde $\alpha'(s)$ se define para funciones diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\dot{\alpha}(s)[f] = \frac{d}{dt} [f \circ \alpha]_{t=s}.$$

Demostración. Dado $p \in M$ y dado el problema de valores iniciales, sea $\varphi : U \rightarrow V$ una carta coordenada, con U un conjunto abierto en M tal que $p \in U$ y V un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Definimos a la curva γ en \mathbb{R}^n como $\gamma = \varphi \circ \alpha$, entonces al aplicar las funciones coordenadas $x^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ en ambos

lados de la igualdad que define el problema de valores iniciales, éste se traduce como

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (\xi^1_{\varphi^{-1}(\gamma(t))}, \dots, \xi^n_{\varphi^{-1}(\gamma(t))}), \\ \gamma(0) &= \varphi(p),\end{aligned}$$

por lo que aplicando la misma versión de este teorema en \mathbb{R}^n (ver, por ejemplo, [4, p. 74]) al campo vectorial $(\xi^1_{\varphi^{-1}}, \dots, \xi^n_{\varphi^{-1}}) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que existe una única solución $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ al problema de valores iniciales, para algún $\epsilon > 0$. Luego, nuestra solución buscada es $\alpha = \varphi^{-1} \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$.

Definición 1.5 Para $p \in M$, denotamos por $J(p)$ el intervalo maximal donde está definida la solución $\alpha_p : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ del teorema anterior. Definimos el conjunto $\{(t, p) : p \in M, t \in J(p)\} = I \times M$ con $I = (-\beta, \beta)$ para algún $\beta > 0$, entonces a la función $\Phi : I \times M \rightarrow M$, definida por $\Phi_t(p) = \alpha_p(t)$ se le llama flujo local de ξ . Cuando $J(p) = \mathbb{R}$ para todo $p \in M$, entonces el flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ se llama flujo global de ξ y se dice que ξ es un campo vectorial completo [2, p. 32].

De este modo, el flujo de un campo vectorial $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ consiste en un semigrupo de transformaciones de un parámetro de la variedad en sí misma, es decir, $\Phi_t : M \rightarrow M$ para todo $t \in I$, donde $\Phi_s(p)$ es la curva integral de ξ que pasa por p en $t = 0$, evaluada al tiempo $t = s$. Por ejemplo, para el campo vectorial en \mathbb{R}^2 , $\xi(x, y) = (x, -y)$, su flujo está determinado por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t),\end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^t, \\ y(t) &= c_2 e^{-t}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo del campo vectorial ξ está dado por

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\Phi_t(x, y) = (xe^t, ye^{-t}),$$

de donde notamos que éste se puede ver como un semigrupo de transformaciones del parámetro t , que a cada punto (x, y) del plano lo mapea en el punto (xe^t, ye^{-t}) , el cual pertenece a la curva integral del campo vectorial ξ que pasa por (x, y) al tiempo $t = 0$. El flujo del campo vectorial ξ se ilustra en la figura 1.2.

Así, teniendo la definición de flujo de un campo vectorial, definimos ahora lo que es un vector de Killing, es decir, un campo vectorial cuyo flujo genera isometrías.

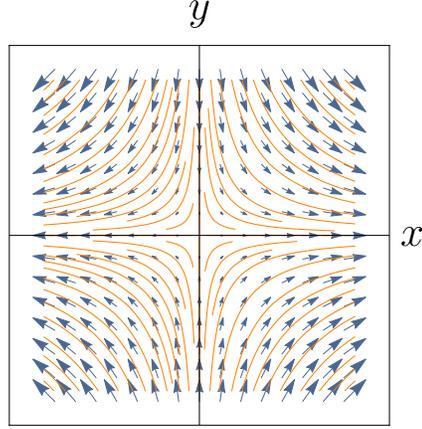


Figura 1.2: Flujo del campo vectorial $\xi(x, y) = (x, -y)$.

Definición 1.6 Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana. Decimos que un campo vectorial $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ es campo vectorial de Killing, o simplemente un vector de Killing si y sólo si el flujo $\Phi : I \times M \rightarrow M$ de ξ cumple que Φ_t es una isometría para todo $t \in I$ [5, p. 251].

Teniendo la definición de flujo de un campo vectorial, podemos definir la derivada de un tensor T a lo largo del flujo Φ de un campo vectorial ξ , conocida como la derivada de Lie, la cual se define en cada punto $p \in M$ como (definición A.1)

$$(\mathcal{L}_\xi T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)_p^* T_{\Phi_t(p)} - T_p}{t} \right].$$

Como se muestra en la siguiente proposición, la derivada de Lie nos permite caracterizar a los vectores de Killing. La demostración sigue la idea dada en [5, p. 251].

Proposición 1.2 Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana y sea $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial en M , entonces ξ es un vector de Killing si y sólo si $\mathcal{L}_\xi g = 0$ [5, p. 250].

Demostración. Supongamos que ξ es un vector de Killing, y sea $\Phi : I \times M \rightarrow M$ su flujo, entonces para todo $p \in M$ y para todo $t \in I$ se tiene que $(\Phi_t)_p^* g_{\Phi_t(p)} = g_p$ de modo que

$$(\mathcal{L}_\xi g)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)_p^* g_{\Phi_t(p)} - g_p}{t} \right] = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{L}_\xi g = 0$ es decir, $(\mathcal{L}_\xi g)_p = 0$ para todo

$p \in M$, en particular, $(\mathcal{L}_\xi g)_{\Phi_s(p)} = 0$. Dado $w \in T_{\Phi_s(p)}(M)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_\xi g)_{\Phi_s(p)}(w, w) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} g_{\Phi_t(\Phi_s(p))}(w, w) - g_{\Phi_s(p)}(w, w)}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{g_{\Phi_t(\Phi_s(p))}((\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} w, (\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} w) - g_{\Phi_s(p)}(w, w)}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{g_{\Phi_{t+s}(p)}((\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} w, (\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} w) - g_{\Phi_s(p)}(w, w)}{t} \right], \end{aligned}$$

así, dado $v \in T_p(M)$, tenemos que $w = (\Phi_s)_* v \in T_{\Phi_s(p)}(M)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_\xi g)_{\Phi_s(p)}(w, w) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{g_{\Phi_{t+s}(p)}((\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} w, (\Phi_t)^*_{\Phi_s(p)} w) - g_{\Phi_s(p)}(w, w)}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{g_{\Phi_{t+s}(p)}((\Phi_{t+s})_* v, (\Phi_{t+s})_* v) - g_{\Phi_s(p)}((\Phi_s)_* v, (\Phi_s)_* v)}{t} \right], \end{aligned}$$

es decir, la función $s \rightarrow g_{\Phi_s(p)}((\Phi_s)_* v, (\Phi_s)_* v)$ tiene derivada cero, por lo tanto es constante, de modo que para todo s , se tiene que

$$g_{\Phi_s(p)}((\Phi_s)_* v, (\Phi_s)_* v) = g_{\Phi_0(p)}((\Phi_0)_* v, (\Phi_0)_* v) = g_p(v, v),$$

para todo $v \in T_p(M)$. Así, si $v_1, v_2 \in T_p(M)$, $g_{\Phi_s(p)}((\Phi_s)_* v_1, (\Phi_s)_* v_2) = g_p(v_1, v_2)$, lo cual implica que $(\Phi_s)^*_p g_{\Phi_s(p)} = g_p$, de modo que Φ_s es una isometría para todo $s \in I$ y por lo tanto, ξ es un vector de Killing.

Para continuar nuestro desarrollo se requieren algunos resultados acerca de la derivada de Lie, los cuales se pueden consultar en el apéndice A. En particular de acuerdo con la proposición A.6, para el tensor métrico g tenemos que las componentes de su derivada de Lie con respecto a un campo vectorial ξ son

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + g_{\mu\lambda} \xi^\lambda_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{,\mu}.$$

En particular, ξ es un vector de Killing si y sólo si $\mathcal{L}_\xi g = 0$ y por tanto si y sólo $(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0$, de modo que ξ es un vector de Killing si y sólo si

$$g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + g_{\mu\lambda} \xi^\lambda_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{,\mu} = 0. \quad (1.1)$$

Esta ecuación nos permite encontrar las componentes de todos los vectores de Killing en una variedad M dada las componentes del tensor métrico en alguna base coordenada. De esta ecuación notamos en particular que dadas las componentes $g_{\mu\nu}$ de la métrica, si éstas no dependen de alguna coordenada x^{α_0} entonces $\xi = \partial_{\alpha_0} = \delta^\mu_{\alpha_0} \partial_\mu$ es un vector de Killing [6, p. 205], lo cual podemos verificar del siguiente modo: como sus componentes ξ^μ están dadas por $\xi^\mu = \delta^\mu_{\alpha_0}$ y como $g_{\mu\nu,\alpha_0} = 0$ entonces se tiene que

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + g_{\mu\lambda} \xi^\lambda_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{,\mu} = g_{\mu\nu,\lambda} \delta^\lambda_{\alpha_0} = g_{\mu\nu,\alpha_0} = 0,$$

lo que demuestra que $\xi = \partial_{\alpha_0}$ es un vector de Killing en este caso. Más aún, el recíproco de esto también es cierto: si $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ es un vector de Killing tal que para algún punto $p \in M$, $\xi_p \neq 0$, entonces sabemos (por la proposición A.2) que existe un sistema local de coordenadas tal que $\xi = \partial_1$ y como $\mathcal{L}_\xi g = 0$ entonces se tiene que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} = (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0,$$

de modo que las componentes de $g_{\mu\nu}$ no dependen de la coordenada x^1 en esta base coordenada.

Por otro lado, podemos escribir a la ecuación 1.1 de otra manera que también resulta útil, usando las componentes covariantes de ξ ; la idea de la deducción corresponde a [6, p. 204]: usando que $\xi^\mu = g^{\mu\lambda}\xi_\lambda$ se sigue que $\xi^\mu{}_{,\gamma} = g^{\mu\lambda}{}_{,\gamma}\xi_\lambda + g^{\mu\lambda}\xi_{\lambda,\gamma}$, de modo que la ecuación 1.1 se puede reescribir como

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\beta}(g^{\beta\lambda}{}_{,\nu}\xi_\lambda + g^{\beta\lambda}\xi_{\lambda,\nu}) + g_{\alpha\nu}(g^{\alpha\lambda}{}_{,\mu}\xi_\lambda + g^{\alpha\lambda}\xi_{\lambda,\mu}) + g^{\gamma\lambda}\xi_\lambda g_{\mu\nu,\gamma} \\ &= (g_{\mu\beta}g^{\beta\lambda}{}_{,\nu} + g_{\alpha\nu}g^{\alpha\lambda}{}_{,\mu} + g^{\gamma\lambda}g_{\mu\nu,\gamma})\xi_\lambda + \delta_\mu^\lambda\xi_{\lambda,\nu} + \delta_\nu^\lambda\xi_{\lambda,\mu} \\ &= (g_{\mu\beta}g^{\beta\lambda}{}_{,\nu} + g_{\alpha\nu}g^{\alpha\lambda}{}_{,\mu} + g^{\gamma\lambda}g_{\mu\nu,\gamma})\xi_\lambda + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Recordamos ahora que $g_{\mu\beta}g^{\beta\lambda} = \delta_\mu^\lambda$ entonces se tiene que

$$0 = \delta_{\mu,\nu}^\lambda = g_{\mu\beta,\nu}g^{\beta\lambda} + g_{\mu\beta}g^{\beta\lambda}{}_{,\nu},$$

y por lo tanto

$$g_{\mu\beta,\nu}g^{\beta\lambda} = -g_{\mu\beta}g^{\beta\lambda}{}_{,\nu}, \quad (1.3)$$

si ahora se considera $0 = \delta_{\nu,\mu}^\lambda$ se sigue análogamente que

$$g_{\nu\alpha,\mu}g^{\alpha\lambda} = -g_{\alpha\nu}g^{\alpha\lambda}{}_{,\mu}, \quad (1.4)$$

luego, sustituyendo 1.3 y 1.4 en el resultado obtenido en 1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} + (g^{\gamma\lambda}g_{\mu\nu,\gamma} + g_{\mu\beta}g^{\beta\lambda}{}_{,\nu} + g_{\alpha\nu}g^{\alpha\lambda}{}_{,\mu})\xi_\lambda \\ &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} + (g^{\gamma\lambda}g_{\mu\nu,\gamma} - g^{\beta\lambda}g_{\mu\beta,\nu} - g^{\alpha\lambda}g_{\nu\alpha,\mu})\xi_\lambda \\ &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} + \xi^\gamma g_{\mu\nu,\gamma} - \xi^\beta g_{\mu\beta,\nu} - \xi^\alpha g_{\nu\alpha,\mu} \\ &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} + \xi^\gamma (g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\mu\gamma,\nu} - g_{\nu\gamma,\mu}) \\ &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} + \xi_\alpha g^{\alpha\gamma} (g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\mu\gamma,\nu} - g_{\nu\gamma,\mu}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Recordamos ahora que los coeficientes de la conexión de Levi-Civita están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\gamma\mu,\nu} + g_{\nu\gamma,\mu} - g_{\mu\nu,\gamma}),$$

de modo que la ecuación 1.5 se escribe como

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - 2\xi_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0.$$

Usando ahora que $\xi_{\sigma;\rho} = \xi_{\sigma,\rho} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\alpha}\xi_{\alpha}$ notamos que la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - 2\xi_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \\ &= (\xi_{\mu,\nu} - \xi_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) + (\xi_{\nu,\mu} - \xi_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) \\ &= \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \end{aligned}$$

De este modo, hemos obtenido a partir de la ecuación 1.1 que un campo vectorial $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ es un vector de Killing sí y sólo si

$$\xi_{(\mu;\nu)} = 0. \quad (1.6)$$

La ecuación 1.6 recibe el nombre de ecuación de Killing y, como ya hemos visto, sus soluciones ξ^{α} forman las componentes en la base coordenada $\{\partial_{\alpha}\}$ de un vector de Killing, con $\xi = \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}$, que es un generador de isometrías.

Para estudiar más a detalle los vectores de Killing, definimos el siguiente conjunto.

Definición 1.7 *Definimos $i(M) = \{\xi \in \mathfrak{X}(M) : \mathcal{L}_{\xi}g = 0\}$ como el conjunto de vectores de Killing en una variedad pseudo-riemanniana. [5, p. 252].*

Una consecuencia de la linealidad de la derivada de Lie con respecto a los campos vectoriales (proposición A.7) es el siguiente resultado.

Proposición 1.3 *$i(M)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} [5, p. 252].*

Esto es, la suma de vectores de Killing es un vector de Killing y los múltiplos constantes de vectores de Killing son vectores de Killing. Más aún, en virtud de la siguiente proposición, $i(M)$ tiene estructura de álgebra de Lie sobre \mathbb{R} (definición B.2) con el corchete dado por el conmutador de campos vectoriales.

Proposición 1.4 *Si $\xi, \eta \in i(M)$ entonces $[\xi, \eta] \in i(M)$ [5, p. 253].*

Demostración. Tenemos que $[\xi, \eta] \in i(M)$ si y sólo si $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}g = 0$. Por la proposición A.8, se tiene que $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}g = \mathcal{L}_{\xi}\mathcal{L}_{\eta}g - \mathcal{L}_{\eta}\mathcal{L}_{\xi}g$, de modo que si $\xi, \eta \in i(M)$ entonces $\mathcal{L}_{\xi}g = 0$, $\mathcal{L}_{\eta}g = 0$ por lo que $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}g = \mathcal{L}_{\xi}0 - \mathcal{L}_{\eta}0 = 0$ y por lo tanto $[\xi, \eta] \in i(M)$.

Así, $i(M)$ es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de campos vectoriales en M , $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Esto nos permite obtener posiblemente nuevos vectores de Killing dados dos vectores de Killing conocidos, sin embargo, esta última proposición tiene otras consecuencias: como todo grupo de Lie (definición B.1) tiene asociada una única álgebra de Lie (salvo isomorfismos), podemos estudiar grupos de Lie a través de sus álgebras de Lie, que son objetos matemáticos mucho más sencillos que los grupos de Lie. En particular, el conjunto de isometrías de una variedad pseudo-riemanniana es un grupo de Lie y como mencionábamos al inicio de la sección, estudiar los vectores de Killing es suficiente para determinar

a todo el conjunto de isometrías de la variedad, lo cual se puede demostrar al dar un isomorfismo entre el álgebra de Lie $ci(M) = \{\xi \in i(M) : \xi \text{ es completo}\}$ [5, p. 255], donde $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial completo si su flujo es global (definición 1.5), y el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie $I(M)$ (definición B.6), pues este isomorfismo entre álgebras de Lie nos da un isomorfismo entre grupos de Lie (bajo algunas condiciones adicionales). La demostración de todo esto último se puede consultar en el apéndice B.

1.2. Integrabilidad de la ecuación de Killing

La siguiente proposición nos da una condición necesaria que cumplen los vectores de Killing.

Proposición 1.5 *Sea $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ un vector de Killing, y sean las funciones $L_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu}$, entonces las funciones $\xi_\alpha, L_{\mu\nu}$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales parciales [3, p. 443]*

$$\xi_{\mu;\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda - L_{\nu\mu} = 0, \quad (1.7)$$

$$L_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha L_{\mu\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha L_{\alpha\nu} + R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha \xi_\alpha = 0, \quad (1.8)$$

con R el tensor de curvatura de Riemann. La demostración sigue la idea de [3, p. 442].

Demostración. Notemos que la ecuación 1.7 se satisface por definición de las funciones $L_{\mu\nu}$. Por otro lado, por la identidad de Ricci se cumple que

$$\xi^\lambda{}_{;\nu\alpha} - \xi^\lambda{}_{;\alpha\nu} = \xi^\mu R^\lambda{}_{\mu\alpha\nu}.$$

De modo que se cumple también que

$$g_{\beta\lambda} \xi^\lambda{}_{;\nu\alpha} - g_{\beta\lambda} \xi^\lambda{}_{;\alpha\nu} = g_{\beta\lambda} \xi^\mu R^\lambda{}_{\mu\alpha\nu},$$

es decir,

$$\xi_{\beta;\nu\alpha} - \xi_{\beta;\alpha\nu} = g_{\beta\lambda} \xi^\mu R^\lambda{}_{\mu\alpha\nu},$$

pero $\xi^\mu = g^{\mu\gamma} \xi_\gamma$ de modo que $\xi_{\beta;\nu\alpha} - \xi_{\beta;\alpha\nu} = g_{\beta\lambda} g^{\mu\gamma} \xi_\gamma R^\lambda{}_{\mu\alpha\nu} = \xi_\gamma g^{\mu\gamma} R_{\beta\mu\alpha\nu} = \xi_\gamma g^{\mu\gamma} R_{\alpha\nu\beta\mu} = R_{\alpha\nu\beta}{}^\gamma \xi_\gamma$, esto es

$$\xi_{\beta;\nu\alpha} - \xi_{\beta;\alpha\nu} = R_{\alpha\nu\beta}{}^\gamma \xi_\gamma.$$

Ahora, como ξ es un vector de Killing entonces $\xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta} = 0$ de modo que $\xi_{\beta;\alpha} = -\xi_{\alpha;\beta}$, por lo que de la ecuación anterior se tiene $\xi_{\beta;\nu\alpha} + \xi_{\alpha;\beta\nu} = R_{\alpha\nu\beta}{}^\gamma \xi_\gamma$, o de manera equivalente, renombrando los índices $(\beta\nu\alpha) \rightarrow (\nu\mu\lambda)$ se tiene que

$$\xi_{\nu;\mu\lambda} + \xi_{\lambda;\nu\mu} = R_{\lambda\mu\nu}{}^\alpha \xi_\alpha.$$

Si en esta última ecuación cambiamos los índices $(\lambda\mu\nu) \rightarrow (\mu\nu\lambda)$, obtenemos que

$$\xi_{\lambda;\nu\mu} + \xi_{\mu;\lambda\nu} = R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha \xi_\alpha,$$

o de manera equivalente también, si renombramos ahora los índices $(\lambda\mu\nu) \rightarrow (\nu\lambda\mu)$ obtenemos

$$-\xi_{\mu;\lambda\nu} - \xi_{\nu;\mu\lambda} = -R_{\nu\lambda\mu}{}^\alpha \xi_\alpha.$$

Así, sumando estas últimas 3 ecuaciones obtenemos que

$$\xi_{\nu;\mu\lambda} - \xi_{\nu;\mu\lambda} + \xi_{\mu;\lambda\nu} - \xi_{\mu;\lambda\nu} + 2\xi_{\lambda;\nu\mu} = (R_{\lambda\mu\nu}{}^\alpha + R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha - R_{\nu\lambda\mu}{}^\alpha)\xi_\alpha,$$

es decir,

$$2\xi_{\lambda;\nu\mu} = (R_{\lambda\mu\nu\beta} + R_{\mu\nu\lambda\beta} - R_{\nu\lambda\mu\beta})g^{\beta\alpha}\xi_\alpha.$$

Ahora, usando la propiedad cíclica del tensor de Riemann, $R_{\lambda\mu\nu\beta} + R_{\lambda\beta\mu\nu} + R_{\lambda\nu\beta\mu} = 0$, se sigue que $R_{\lambda\mu\nu\beta} = -R_{\lambda\beta\mu\nu} - R_{\lambda\nu\beta\mu} = -R_{\mu\nu\lambda\beta} - R_{\nu\lambda\mu\beta}$ y por lo tanto

$$2\xi_{\lambda;\nu\mu} = (R_{\mu\nu\lambda\beta} - R_{\nu\lambda\mu\beta} - R_{\mu\nu\lambda\beta} - R_{\nu\lambda\mu\beta})g^{\beta\alpha}\xi_\alpha,$$

que equivale a

$$\xi_{\lambda;\nu\mu} = -g^{\beta\alpha}R_{\nu\lambda\mu\beta}\xi_\alpha,$$

y renombrando los índices $(\lambda\nu\mu) \rightarrow (\nu\mu\lambda)$, se obtiene que

$$L_{\mu\nu;\lambda} = \xi_{\nu;\mu\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha \xi_\alpha,$$

que es la ecuación 1.8.

Este resultado nos permite extender un vector de Killing a cualquier punto q en una vecindad de un punto $p \in M$ conociendo $\xi_\alpha, L_{\mu\nu}$ sólo en el punto p del modo siguiente [3, p. 442-443]: consideremos una curva $x^\mu(\tau)$ que pase por p y q , con vector tangente V^μ (la cual siempre existe de manera local en una vecindad del punto p) entonces por las ecuaciones 1.7 y 1.8 se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi_\mu)}{d\tau} - V^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda - V^\nu L_{\nu\mu} &= 0, \\ \frac{d(L_{\mu\nu})}{d\tau} - V^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha L_{\mu\alpha} - V^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha L_{\alpha\nu} + V^\lambda R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha \xi_\alpha &= 0, \end{aligned}$$

que forman un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias) lineales de primer orden en $L_{\mu\nu}$ y ξ_α , que junto con las condiciones iniciales $\xi_\alpha, L_{\mu\nu}$ en p , permiten determinar $\xi_\alpha, L_{\mu\nu}$ en q , lo cual es cierto para todo q en una vecindad del punto p .

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.6 *Si $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ es un vector de Killing, y ocurre que las funciones $\xi_\alpha, L_{\mu\nu}$ son cero para algún punto $p \in M$, entonces $\xi = 0$ [3, p. 443].*

El siguiente resultado también es consecuencia de esta observación.

Proposición 1.7 *El número máximo de vectores de Killing linealmente independientes en una variedad de dimensión n está dado por $n(n+1)/2$ [3, p. 443].*

Demostración. Dado que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias anterior es un sistema lineal de $n(n+1)/2$ ecuaciones en $n(n+1)/2$ incógnitas, este es el número máximo de soluciones a la ecuación de Killing, pues una condición necesaria para que un vector sea de Killing es que satisfaga este sistema de ecuaciones.

Una vez obtenida esta cota superior para el número de vectores de Killing independientes, resulta natural preguntarse si es posible determinar el número exacto de vectores de Killing independientes antes de realizar la integración de la ecuación de Killing. Para responder a ésta cuestión, requerimos antes algunos resultados sobre sistemas de ecuaciones parciales. El siguiente desarrollo está basado en el desarrollo de [7, p. 1-4].

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} = \Psi_\mu^\alpha(\theta^1, \dots, \theta^m, x^1, \dots, x^n), \quad (1.9)$$

donde $\alpha = 1, \dots, m$, $\mu = 1, \dots, n$, sujeto al conjunto de m condiciones iniciales

$$c^\alpha = \theta^\alpha(x_0^1, \dots, x_0^n).$$

Notemos primero que el sistema de ecuaciones 1.9 se puede escribir como

$$d\theta^\alpha = \Psi_\mu^\alpha dx^\mu,$$

de donde notamos que, la condición para que este sistema tenga solución es que se cumpla

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\nu} \right),$$

así, usando la ecuación 1.9, tenemos que esto ocurre si y sólo si

$$\frac{\partial \Psi_\mu^\alpha}{\partial \theta^\gamma} \frac{\partial \theta^\gamma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Psi_\mu^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \Psi_\nu^\alpha}{\partial \theta^\gamma} \frac{\partial \theta^\gamma}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Psi_\nu^\alpha}{\partial x^\mu},$$

o de manera equivalente, si y sólo si

$$\Psi_\nu^\gamma \frac{\partial \Psi_\mu^\alpha}{\partial \theta^\gamma} + \frac{\partial \Psi_\mu^\alpha}{\partial x^\nu} = \Psi_\mu^\gamma \frac{\partial \Psi_\nu^\alpha}{\partial \theta^\gamma} + \frac{\partial \Psi_\nu^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (1.10)$$

Cuando se satisface la relación 1.10, entonces se dice que el sistema de ecuaciones 1.9 es completamente integrable y, en dado caso, podemos expresar la solución en una expansión en serie de potencias alrededor del punto (x_0^1, \dots, x_0^n) donde especificamos las condiciones iniciales, es decir,

$$\theta^\alpha = c^\alpha + \left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \right)_0 (x^\mu - x_0^\mu) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_0 (x^\mu - x_0^\mu)(x^\nu - x_0^\nu) + \dots,$$

donde

$$\left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \right)_0 = \Psi_\mu^\alpha(c^1, \dots, c^m, x_0^1, \dots, x_0^n),$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_0 = \left(\Psi^\gamma_\mu \frac{\partial \Psi^\alpha_\nu}{\partial \theta^\gamma} + \frac{\partial \Psi^\alpha_\nu}{\partial x^\mu} \right) (c^1, \dots, c^m, x_0^1, \dots, x_0^n),$$

y el resto de coeficientes se obtienen de manera análoga al considerar derivadas sucesivas de la ecuación 1.9 y sustituir θ^α por c^α y x^γ por x_0^γ . Así, en el dominio donde la serie anterior converge, tenemos que la solución al sistema 1.9 está determinada por m constantes arbitrarias.

Cuando la condición de integrabilidad 1.10 no se satisface, entonces esta condición constituye un conjunto F_1 de ecuaciones que establecen condiciones sobre las variables θ^α como función de las variables x^μ . Si derivamos cada una de estas ecuaciones con respecto a las variables x^μ y sustituimos $\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu}$ por Ψ^α_μ entonces el resultado es una identidad, que se sigue como consecuencia de las ecuaciones anteriores, o bien, obtenemos un nuevo conjunto de restricciones F_2 . Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de conjuntos de condiciones F_1, F_2, \dots , y para que la ecuación 1.9 admita una solución, entonces debe existir un entero N , tal que las ecuaciones del conjunto F_{N+1} sean consecuencia de las ecuaciones en los conjuntos F_1, F_2, \dots, F_N , ya que de otro modo encontraríamos más de m restricciones independientes, lo cual implicaría una dependencia entre las variables x^μ . De esto se sigue también que N debe ser menor o igual a m .

Recíprocamente, supongamos ahora que tenemos N conjuntos de ecuaciones F_1, F_2, \dots, F_N tales que todas las ecuaciones del conjunto F_{N+1} se satisfacen como consecuencia de los primeros N conjuntos. Supongamos que en los conjuntos F_1, F_2, \dots, F_N hay p ecuaciones independientes (con $p < m$), digamos $G_\gamma(\theta, x) = 0$, con $\gamma = 1, 2, \dots, p$. Como la matriz jacobiana dada por

$$\left(\frac{\partial G_\gamma}{\partial \theta^\alpha} \right)$$

tiene rango p , entonces por el teorema de la función implícita, podemos despejar p de las variables θ^α en términos de las restantes, digamos $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^p$ en términos de $\theta^{p+1}, \dots, \theta^m$, lo cual podemos escribir como

$$\theta^\sigma = \varphi^\sigma(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x), \quad (1.11)$$

con $\sigma = 1, \dots, p$. Derivando estas expresiones con respecto a x^μ obtenemos que

$$\frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x^\mu}, \quad (1.12)$$

donde $\beta = p+1, \dots, m$. Si en la expresión anterior sustituimos 1.9, entonces se tiene que

$$\Psi^\sigma_\mu = \Psi^\beta_\mu \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x^\mu}, \quad (1.13)$$

que son las ecuaciones que constituyen al conjunto F_{N+1} , y las cuales se cumplen como consecuencia de las ecuaciones en los conjuntos F_1, \dots, F_N . Así, restando las ecuaciones 1.12 y 1.13 tenemos que

$$\frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^\mu} - \Psi^\sigma_\mu = \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial \theta^\beta} \left(\frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\mu} - \Psi^\beta_\mu \right),$$

de donde notamos que si se cumple que

$$\frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\mu} = \Psi^\beta_\mu(\varphi^1(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x), \dots, \varphi^p(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x), \theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x),$$

entonces también se cumple que

$$\frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^\mu} = \Psi^\sigma_\mu,$$

esto es, si la ecuación a resolver tiene solución para $m - p$ de las ecuaciones, entonces el resto de las p ecuaciones también tienen solución. Finalmente, notamos que el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\mu} = \Psi^\beta_\mu(\varphi^1(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x), \dots, \varphi^p(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x), \theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x),$$

resulta ser completamente integrable debido a 1.12 y 1.13, y se tienen $m - p$ constantes arbitrarias de integración.

Así, hemos demostrado el siguiente teorema.

Proposición 1.8 *Para que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales 1.9 admita una solución, es condición necesaria y suficiente que exista un entero $N \leq m$ tal que las ecuaciones en los conjuntos F_1, \dots, F_N sean compatibles entre sí y las ecuaciones del conjunto F_{N+1} se cumplan todas, como consecuencia de las ecuaciones en F_1, \dots, F_N . Si p es el número de ecuaciones independientes en F_1, \dots, F_N , entonces la solución de 1.9 involucra $m - p$ constantes arbitrarias independientes [7, p. 3].*

Este teorema también es válido cuando al sistema de ecuaciones 1.9 se le imponen q restricciones adicionales de la forma

$$f^\gamma(\theta, x) = 0, \quad (1.14)$$

con $\gamma = 1, \dots, q$. Estas ecuaciones constituyen a un nuevo conjunto de restricciones F_0 [7, p. 4].

En particular, este teorema se puede aplicar a la ecuación de Killing $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$ [7, p. 214], la cual se puede escribir en la forma del sistema de ecuaciones diferenciales parciales 1.9, usando las ecuaciones 1.7 y 1.8 como

$$\xi_{\mu,\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \xi_\lambda + L_{\nu\mu}, \quad (1.15)$$

$$L_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} L_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} L_{\alpha\nu} - R_{\mu\nu\lambda}^\alpha \xi_\alpha, \quad (1.16)$$

sujeto al conjunto de restricciones F_0 dado por la ecuación de Killing, $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$, que equivale a pedir que $L_{(\mu\nu)} = 0$. En este caso, la condición de integrabilidad 1.10 para la ecuación de Killing se escribe como [8, p. 100]

$$\mathcal{L}_\xi R = 0, \quad (1.17)$$

donde R es el tensor de curvatura de Riemann. Las ecuaciones que salen de esta condición constituyen el conjunto F_1 . Cuando esta condición se satisface de manera idéntica, entonces la solución a la ecuación de Killing tiene $n(n+1) - n(n+1)/2 = n(n+1)/2$ constantes independientes (las ecuaciones 1.15 y 1.16 nos dan un total de $n(n+1)$ ecuaciones parciales y el conjunto F_0 contiene $n(n+1)/2$ restricciones), que es el mismo resultado que el de la proposición 1.7. Por otro lado, cuando 1.17 no se satisface de manera idéntica, se procede como en el teorema 1.8 para obtener los conjuntos de restricciones F_2, \dots, F_N , los cuales están dados por [8, p. 100]

$$\begin{aligned} F_2 &: \mathcal{L}_\xi(\nabla_{a_1} R) = 0, \\ F_3 &: \mathcal{L}_\xi(\nabla_{a_1} \nabla_{a_2} R) = 0, \\ &\vdots \\ F_N &: \mathcal{L}_\xi(\nabla_{a_1} \nabla_{a_2} \cdots \nabla_{a_N} R) = 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones resultan naturales en tanto que, si el tensor métrico se preserva a lo largo del flujo de ξ , entonces también se debe preservar cualquier cantidad geométrica que dependa de la métrica, como es el tensor de Riemann y sus derivadas covariantes sucesivas.

De este modo, si en los conjuntos F_0, \dots, F_N hay q ecuaciones independientes, la solución a la ecuación de Killing tiene $n(n+1) - q$ constantes arbitrarias independientes, y por lo tanto, existen $n(n+1) - q$ vectores de Killing independientes.

1.3. Ejemplos

Ejemplo. [Vectores de Killing en S^2 .] Definimos la esfera de dimensión dos de manera usual como $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, entonces la función $\Phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S^2$ dada por

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta),$$

es una parametrización para la esfera de dimensión dos, la cual induce una base de vectores tangentes $\{u_1, u_2\}$ a S^2 mediante el mapeo diferencial $\Phi_{*(\theta, \phi)} : T_{(\theta, \phi)}((0, \pi) \times (0, 2\pi)) \rightarrow T_{(x, y, z)}(S^2)$. Para calcular esta base inducida, notemos que dada una función $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos que, en términos de los vectores base de \mathbb{R}^3 restringidos a la esfera de dimensión dos, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi_{*(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) [f] &= \frac{\partial}{\partial \theta} [f \circ \Phi] = \frac{\partial}{\partial \theta} [f(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)] \\ &= \cos \phi \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \phi \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$u_1 = \Phi_{*(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z},$$

y análogamente, se sigue que

$$u_2 = \Phi_{*(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) = -\sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Luego, usando la métrica euclidiana g de \mathbb{R}^3 restringida a S^2 se sigue que

$$\begin{aligned} g(u_1, u_1) &= 1, \\ g(u_2, u_2) &= \sin^2 \theta, \\ g(u_1, u_2) &= g(u_2, u_1) = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la métrica en S^2 está dada por

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Un cálculo directo demuestra que los coeficientes distintos de cero de la conexión de Levi-Civita para esta métrica son

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \cot \theta, \end{aligned}$$

de modo que la ecuación de Killing $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$ en este caso se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_{\phi}}{\partial \phi} + \xi_{\theta} \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi_{\phi}}{\partial \theta} - 2\xi_{\phi} \cot \theta &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, notamos que $\xi_{\theta} = f(\phi)$, de modo que las ecuaciones restantes se escriben como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{\phi}}{\partial \phi} + f(\phi) \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ f'(\phi) + \frac{\partial \xi_{\phi}}{\partial \theta} - 2\xi_{\phi} \cot \theta &= 0. \end{aligned}$$

Derivando la segunda ecuación con respecto a ϕ tenemos que

$$f''(\phi) + \frac{\partial^2 \xi_{\phi}}{\partial \phi \partial \theta} - 2 \frac{\partial \xi_{\phi}}{\partial \phi} \cot \theta,$$

y derivando la primera ecuación con respecto a θ , se tiene que

$$\frac{\partial^2 \xi_{\phi}}{\partial \theta \partial \phi} = -f(\phi) \cos 2\theta,$$

y por lo tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}
f''(\phi) - f(\phi) \cos 2\theta - 2(-f(\phi) \sin \theta \cos \theta) \cot \theta &= 0 \Leftrightarrow \\
f''(\phi) - f(\phi) \cos 2\theta + 2f(\phi) \cos^2 \theta &= 0 \Leftrightarrow \\
f''(\phi) - f(\phi) [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] + 2f(\phi) \cos^2 \theta &= 0 \Leftrightarrow \\
f''(\phi) + f(\phi)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= 0 \Leftrightarrow \\
f''(\phi) + f(\phi) &= 0 \Leftrightarrow \\
f(\phi) &= A \cos \phi + B \sin \phi.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} = -f(\phi) \sin \theta \cos \theta,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\xi_\phi &= -\sin \theta \cos \theta \int f(\phi) d\phi + h(\theta) \\
&= -\sin \theta \cos \theta \int (A \cos \phi + B \sin \phi) d\phi + h(\theta) \\
&= -\sin \theta \cos \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) + h(\theta).
\end{aligned}$$

Ahora, como $f'(\phi) = -A \sin \phi + B \cos \phi$, y por lo anterior

$$\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} = h'(\theta) - (A \sin \phi - B \cos \phi)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

entonces se tiene que

$$f'(\phi) + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} - 2\xi_\phi \cot \theta = 0,$$

lo cual implica que

$$-A \sin \phi + B \cos \phi + h'(\theta) - (A \sin \phi - B \cos \phi)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2\xi_\phi \cot \theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
h'(\theta) + (-A \sin \phi + B \cos \phi)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) \\
- 2h(\theta) \cot \theta + 2 \cos^2 \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) &= 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$h'(\theta) - 2h(\theta) \cot \theta +$$

$$(-A \sin \phi + B \cos \phi)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$h'(\theta) = 2h(\theta) \cot \theta,$$

es decir,

$$\frac{d}{d\theta} [\log h(\theta)] = 2 \cot \theta,$$

por lo tanto,

$$\log h(\theta) = 2 \int \cot \theta d\theta + K = 2 \log \sin \theta + K,$$

lo cual implica que

$$\log \left[\frac{h(\theta)}{\sin^2 \theta} \right] = K,$$

o de manera equivalente

$$h(\theta) = C \sin^2 \theta.$$

Así, tenemos que la solución general a la ecuación de Killing está dada por

$$\xi_\theta(\theta, \phi) = f(\phi) = A \cos \phi + B \sin \phi,$$

$$\begin{aligned} \xi_\phi(\theta, \phi) &= -\sin \theta \cos \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) + h(\theta) \\ &= -\sin \theta \cos \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) + C \sin^2 \theta \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\xi^\theta = g^{\theta\lambda} \xi_\lambda = A \cos \phi + B \sin \phi,$$

$$\xi^\phi = g^{\phi\lambda} \xi_\lambda = C - \cot \theta (A \sin \phi - B \cos \phi).$$

Ahora, elegimos tres ternas linealmente independientes (A, B, C) para obtener una base del espacio de soluciones. La elección más sencilla es tomar (A, B, C) como $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ lo cual nos da las soluciones

$$\xi_{(1)} = \xi_{(1)}^\mu \partial_\mu = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$\xi_{(2)} = \xi_{(2)}^\mu \partial_\mu = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$\xi_{(3)} = \xi_{(3)}^\mu \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \phi},$$

que podemos escribir en términos de las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 como

$$\xi_{(1)} = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\xi_{(2)} = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\xi_{(3)} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Notamos que las curvas integrales del primero de estos vectores de Killing están dadas por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= -z(t), \end{aligned}$$

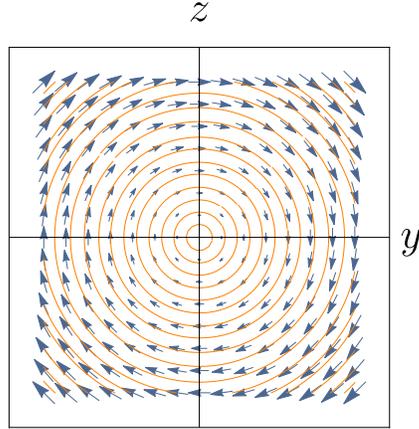


Figura 1.3: Flujo del vector de Killing $\xi_{(1)}$.

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t), \\ z(t) &= c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \end{aligned}$$

las cuales se ilustran en la figura 1.3.

Esto significa que las curvas integrales de $\xi_{(1)}$ representan rotaciones en el plano yz . Los vectores de Killing $\xi_{(2)}$ y $\xi_{(3)}$ están asociados a rotaciones en los planos zx y xy , respectivamente.

El siguiente ejemplo está basado en la discusión presentada en [6, p. 207-211].

Ejemplo. [Vectores de Killing en relatividad especial.] Es sabido que de acuerdo a los postulados de la relatividad especial, el espacio-tiempo es una variedad Lorentziana C^∞ de dimensión cuatro, donde la métrica en un sistema de referencia inercial (y en coordenadas cartesianas) se escribe como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dado que en estas coordenadas $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$ entonces los coeficientes de la conexión de Levi-Civita $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, son todos iguales a cero, de modo que la ecuación de Killing $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$ se reduce a $\xi_{(\mu,\nu)} = 0$, lo cual ocurre si y sólo si $\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = 0$. Derivando esta última ecuación tenemos que

$$\xi_{\mu,\nu\lambda} + \xi_{\nu,\mu\lambda} = 0,$$

si permutamos los índices $(\mu\nu\lambda) \rightarrow (\lambda\mu\nu)$, obtenemos que

$$\xi_{\lambda,\mu\nu} + \xi_{\mu,\lambda\nu} = 0,$$

y si permutamos ahora $(\mu\nu\lambda) \rightarrow (\nu\lambda\mu)$ se obtiene que

$$-\xi_{\nu,\lambda\mu} - \xi_{\lambda,\nu\mu} = 0.$$

Así, sumando estas 3 ecuaciones obtenemos que

$$\xi_{\mu,\nu\lambda} + \xi_{\nu,\mu\lambda} + \xi_{\lambda,\mu\nu} + \xi_{\mu,\lambda\nu} - \xi_{\nu,\lambda\mu} - \xi_{\lambda,\nu\mu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi_{\mu,\nu\lambda} + \xi_{\mu,\lambda\nu} + \xi_{\nu,\mu\lambda} - \xi_{\nu,\lambda\mu} + \xi_{\lambda,\mu\nu} - \xi_{\lambda,\nu\mu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi_{\mu,\nu\lambda} = 0,$$

lo cual implica que existen constantes $A_{\mu\nu}$ tales que

$$\xi_{\mu,\nu} = A_{\mu\nu},$$

y por lo tanto

$$\xi_{\mu} = d_{\mu} + A_{\mu\nu}x^{\nu},$$

donde d_{μ} también son constantes. Luego, de la ecuación de Killing, $\xi_{(\mu,\nu)} = 0$, lo cual implica que $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, por lo tanto $\xi_{\mu} = d_{\mu} + A_{\mu\nu}x^{\nu}$ es la solución general de la ecuación de Killing en este caso, donde $A_{\mu\nu}$ y d_{μ} son constantes tales que $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ y por lo que tenemos 10 constantes arbitrarias, $(d_0, d_1, d_2, d_3, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{23}, A_{31}, A_{12})$ y como consecuencia de esto, tenemos 10 vectores de Killing independientes, de modo que el espacio-tiempo de Minkowski tiene el número máximo de simetrías posibles en cuatro dimensiones. Para obtener una base del espacio de soluciones, elegimos la base de \mathbb{R}^{10} dada por los vectores $(1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, 1, \dots, 0), (0, 0, 0, 0, -1, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, -1)$, donde cada uno de estos vectores base de \mathbb{R}^{10} corresponde a una solución de la ecuación de Killing.

El primero de estos vectores de Killing está dado por $\xi_{(0)} = \xi_{(0)}^{\mu} \partial_{\mu} = \partial_t$ y corresponde a traslaciones en la coordenada t , mientras que los siguientes tres son de la forma $\xi_{(i)} = \partial_{x^i}$ con $i = 1, 2, 3$ y corresponden a traslaciones en las coordenadas (x, y, z) respectivamente.

Los siguientes tres vectores de Killing son de la forma $\xi_{(0,i)} = \eta^{\alpha\mu} A_{\mu\nu} x^{\nu} \partial_{\alpha} = \eta^{00} A_{0i} x^i \partial_0 + \eta^{ii} A_{i0} x^0 \partial_i = x^i \partial_0 + x^0 \partial_i$, con $i = 1, 2, 3$ y están asociados con rotaciones hiperbólicas o boost de Lorentz. Para ver esto, consideremos por ejemplo, el vector de Killing $\xi_{(0,1)} = x^1 \partial_0 + x^0 \partial_1 = x \partial_t + t \partial_x$, para el cual sus curvas integrales están descritas por el sistema de ecuaciones

$$\dot{t}(\phi) = x(\phi),$$

$$\dot{x}(\phi) = t(\phi),$$

cuyas soluciones son

$$t(\phi) = c_1 \cosh(\phi) + c_2 \sinh(\phi),$$

$$x(\phi) = c_1 \sinh(\phi) + c_2 \cosh(\phi),$$

las cuales se ilustran en la figura 1.4.

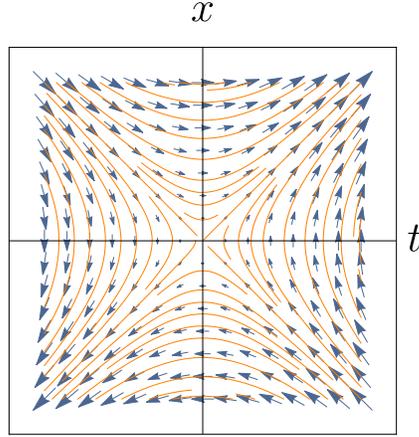


Figura 1.4: Flujo del vector de Killing $\xi_{(0,1)}$.

Si definimos $(c_1, c_2) = (t', x')$, podemos escribir estas soluciones como

$$\begin{aligned} t &= t' \cosh(\phi) + x' \sinh(\phi), \\ x &= t' \sinh(\phi) + x' \cosh(\phi), \end{aligned}$$

o de manera equivalente, despejando t' y x' :

$$\begin{aligned} t' &= t \cosh(\phi) - x \sinh(\phi), \\ x' &= -t \sinh(\phi) + x \cosh(\phi). \end{aligned}$$

Estas relaciones entre coordenadas se pueden escribir en términos de un nuevo parámetro $v = \tanh^{-1}(\phi)$ [9, p. 14] como

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t + vx), \\ x' &= \gamma(x - vt), \end{aligned}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Ésta es la expresión usual de la transformación de Lorentz y, como sabemos, corresponden a un cambio de coordenadas entre dos sistemas de referencia inerciales que se mueven a velocidad constante v uno con respecto al otro.

Los últimos tres vectores de Killing también son de la forma $\eta^{\alpha\mu} A_{\mu\nu} x^\nu \partial_\alpha$ y están asociados con rotaciones espaciales, pues estos se escriben como

$$\begin{aligned} \xi_{(2,3)} &= \eta^{22} A_{23} x^3 \partial_2 + \eta^{33} A_{32} x^2 \partial_3 = x^2 \partial_3 - x^3 \partial_2, \\ \xi_{(3,1)} &= \eta^{33} A_{31} x^1 \partial_3 + \eta^{11} A_{13} x^3 \partial_1 = x^3 \partial_1 - x^1 \partial_3, \\ \xi_{(1,2)} &= \eta^{11} A_{12} x^2 \partial_1 + \eta^{22} A_{21} x^1 \partial_2 = x^1 \partial_2 - x^2 \partial_1, \end{aligned}$$

de donde podemos notar que son los mismos tres vectores de Killing que encontramos para S^2 .

Así, hemos encontrado que los vectores de Killing del espacio-tiempo de Minkowski están asociados con traslaciones espacio-temporales, rotaciones espaciales y rotaciones hiperbólicas, o boost de Lorentz. Estos son los únicos grupos de movimientos que dejan invariante al tensor métrico del espacio de Minkowski, por lo que cualquier otro flujo generado por algún campo vectorial que no sea combinación lineal de los vectores de Killing encontrados, genera un espacio-tiempo distinto. Por ejemplo, cambiar al sistema de referencia de un observador no inercial, genera un espacio-tiempo curvo, razón por la cual se requiere de la relatividad general para trabajar en sistemas de referencia acelerados.

Cabe recalcar que lo anterior no significa que no sea posible trabajar en relatividad especial en otros sistemas de coordenadas distintos a los generados por los vectores de Killing, por ejemplo, en coordenadas polares, pues las coordenadas polares no están asociadas con ningún grupo de transformaciones del espacio-tiempo.

Ejemplo. [Vectores de Killing en T^2 .] Consideremos el toro de revolución en \mathbb{R}^3 , definido por el conjunto

$$T^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2 \right\},$$

donde a representa el radio menor del toro y c su radio mayor, con $a, c \in (0, \infty)$, $a < c$, como se ilustra en la figura 1.5.

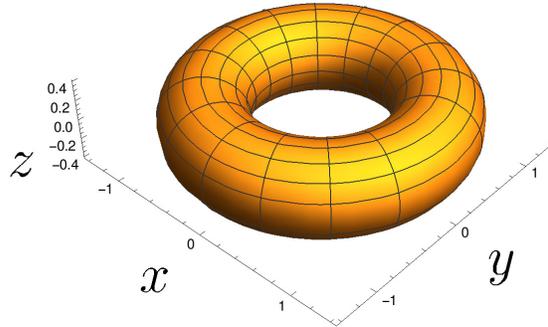


Figura 1.5: Toro de revolución, con $a = 0.4$, $c = 1$.

Usando la parametrización $\Phi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T^2$ dada por

$$\Phi(u, v) = ((c + a \cos v) \cos u, (c + a \cos v) \sin u, a \sin v),$$

se encuentra de manera análoga al ejemplo de los vectores de Killing en S^2 que para esta métrica el intervalo está dado por

$$ds^2 = (c + a \cos v)^2 du^2 + a^2 dv^2.$$

Usaremos ahora el teorema 1.8 de la sección sobre integrabilidad de la ecuación de Killing para hallar el número de vectores de Killing independientes en este espacio antes de intentar integrar la ecuación de Killing.

Para esta métrica, se obtiene que los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{uv}^u = -\frac{a \sin v}{c + a \cos v}, \quad \Gamma_{uu}^v = \frac{1}{a} \sin v (c + a \cos v),$$

así, un cálculo directo muestra que las únicas componentes no nulas del tensor de Riemann en la base coordenada $\{\partial_u, \partial_v\}$ son

$$R_{vuv}^u = \frac{a \cos v}{c + a \cos v}, \quad R_{uvv}^v = -\frac{1}{a} \cos v (c + a \cos v),$$

$$R_{vuv}^u = -R_{uvv}^v, \quad R_{uvu}^v = -R_{uvv}^v.$$

Luego, usando que las componentes de la derivada de Lie del tensor de Riemann en la base coordenada son (proposición A.6)

$$(\mathcal{L}_\xi R)^\alpha_{\beta\mu\nu} = R^\alpha_{\beta\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda - R^\lambda_{\beta\mu\nu} \xi^\alpha_{,\lambda} + R^\alpha_{\lambda\mu\nu} \xi^\lambda_{,\beta} + R^\alpha_{\beta\lambda\nu} \xi^\lambda_{,\mu} + R^\alpha_{\beta\mu\lambda} \xi^\lambda_{,\nu},$$

encontramos que las componentes distintas de cero de $\mathcal{L}_\xi R$ para esta métrica son

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi R)_{uvv}^u &= -R_{uvv}^v \xi^u_{,v} + R_{vuv}^u \xi^v_{,u}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{uvv}^u &= -R_{uvv}^v \xi^u_{,v} + R_{vuv}^u \xi^v_{,u}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{vuv}^u &= R_{vuv,v}^u \xi^v + 2R_{vuv}^u \xi^v_{,v}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{vuv}^u &= R_{vuv,v}^u \xi^v + 2R_{vuv}^u \xi^v_{,v}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{uvv}^v &= R_{uvv,v}^v \xi^v + 2R_{uvv}^v \xi^u_{,u}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{uvv}^v &= R_{uvv,v}^v \xi^v + 2R_{uvv}^v \xi^u_{,u}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{vuv}^v &= -R_{vuv}^u \xi^v_{,u} + R_{uvv}^v \xi^u_{,v}, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{vuv}^v &= -R_{vuv}^u \xi^v_{,u} + R_{uvv}^v \xi^u_{,v}. \end{aligned}$$

De este modo, la condición de integrabilidad 1.17

$$\mathcal{L}_\xi R = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{L}_\xi R)^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0,$$

nos da en el conjunto F_1 , formado en este caso por las 3 ecuaciones

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi R)_{uvv}^u &= -R_{uvv}^v \xi^u_{,v} + R_{vuv}^u \xi^v_{,u} = 0, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{vuv}^u &= R_{vuv,v}^u \xi^v + 2R_{vuv}^u \xi^v_{,v} = 0, \\ (\mathcal{L}_\xi R)_{uvv}^v &= R_{uvv,v}^v \xi^v + 2R_{uvv}^v \xi^u_{,u} = 0, \end{aligned}$$

pues de las ocho ecuaciones que nos da la condición $\mathcal{L}_\xi R = 0$, las cinco restantes se pueden obtener a partir de estas tres multiplicando por un signo menos o permutando los dos últimos índices de las componentes del tensor de Riemann. Estas tres ecuaciones se escriben de manera explícita como

$$(F1) \quad \frac{\cos v}{a(c + a \cos v)} \xi_{u,v} + \frac{\cos v}{a(c + a \cos v)} \xi_{v,u} = 0,$$

$$(F2) \quad \frac{-a \sin v(c + a \cos v) + a \cos v \sin v}{(c + a \cos v)^2} \xi_v - \frac{2 \cos v}{a(c + a \cos v)} \xi_{v,v} = 0,$$

$$(F3) \quad \frac{1}{a}(\sin v(c + a \cos v) + a \cos v \sin v) \xi_v - \frac{2 \cos v}{a(c + a \cos v)} \xi_{u,u} = 0.$$

Ahora, para aplicar el teorema 1.8, debemos considerar además de estas tres ecuaciones, las ecuaciones contenidas en el conjunto F_0 , que es la ecuación de Killing $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$, que en este caso son

$$(G1) \quad \xi_{u,u} - \frac{1}{a} \sin v(c + a \cos v) \xi_v = 0,$$

$$(G2) \quad \xi_{u,v} + \xi_{v,u} + \frac{2a \sin v}{c + a \cos v} \xi_u = 0,$$

$$(G3) \quad \xi_{v,v} = 0.$$

De la ecuación (G3) se tiene que $\xi_{v,v} = 0$ de modo que la ecuación (F2) se convierte en $\xi_v = 0$, lo cual implica que la ecuación (G1) se simplifica como $\xi_{u,u} = 0$. Ahora, la ecuación (F1) se escribe como $\xi_{u,v} + \xi_{v,u} = 0$, de modo que sustituyendo esto en la ecuación (G2) se sigue que $\xi_u = 0$. Así, la ecuación (F3) se convierte en una identidad y las cinco ecuaciones restantes se escriben como

$$\xi_{u,v} + \xi_{v,u} = 0,$$

$$\xi_v = 0,$$

$$\xi_{u,u} = 0,$$

$$\xi_u = 0,$$

$$\xi_{v,v} = 0,$$

luego, en los conjuntos F_0 y F_1 tenemos cinco ecuaciones independientes entre sí, por lo que de acuerdo con el teorema 1.8, la solución a la ecuación de Killing en este caso tiene a lo más $n(n+1) - 5 = 6 - 5 = 1$ constantes arbitrarias (pues en principio podría haber más ecuaciones independientes cuando consideramos las condiciones de integrabilidad sucesivas) es decir, sólo hay a lo más un vector de Killing independiente en esta métrica. Notamos además que en esta métrica u es una coordenada cíclica, por lo que $\xi^\mu = (1, 0)$ son las componentes de un vector de Killing, por lo tanto $\xi = \xi^\mu \partial_\mu = \partial_u$ es un vector de Killing, asociado a rotaciones en el plano xy , y del procedimiento anterior se sigue que éste es el único vector de Killing independiente para este espacio.

Ejemplo. [Vectores de Killing en la métrica de Schwarzschild.] Consideremos el intervalo de Schwarzschild, el cual constituye una solución en el vacío para las ecuaciones de Einstein y modela el exterior de un cuerpo de masa m sin carga ni momento angular. El intervalo en coordenadas esféricas está dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Un cálculo directo muestra que los coeficientes no nulos de la conexión de Levi-Civita para esta métrica están dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \\ \Gamma^r_{rr} &= -\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sin^2 \theta, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \cot \theta. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de Killing da lugar al siguiente sistema de ecuaciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_t}{\partial t} - \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \xi_r &= 0, \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial t} - \frac{2m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \xi_t &= 0, \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \xi_r &= 0, \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r} \xi_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r} - \frac{2}{r} \xi_\phi &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + r \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \xi_r &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} - 2 \cot \theta \xi_\phi &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} + r \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sin^2 \theta \xi_r + \sin \theta \cos \theta \xi_\theta &= 0. \end{aligned}$$

Notamos que si hacemos $\xi_t = \xi_r = 0$, entonces el sistema anterior se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\phi}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r} \xi_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r} - \frac{2}{r} \xi_\phi &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} - 2 \cot \theta \xi_\phi &= 0, \\ \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} + \sin \theta \cos \theta \xi_\theta &= 0.\end{aligned}$$

Así, de las primeras cuatro ecuaciones se sigue que $\xi_\theta = r^2 g_1(\theta, \phi)$ y $\xi_\phi = r^2 g_2(\theta, \phi)$, donde las funciones g_1, g_2 deben cumplir que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial \phi} + \frac{\partial g_2}{\partial \theta} - 2 \cot \theta g_2 &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \phi} + \sin \theta \cos \theta g_1 &= 0.\end{aligned}$$

Luego, notamos que este sistema de ecuaciones es el mismo que el sistema de ecuaciones proveniente de la ecuación de Killing para S^2 , por lo tanto sus soluciones son

$$\begin{aligned}g_1(\theta, \phi) &= A \cos \phi + B \sin \phi \\ g_2(\theta, \phi) &= -\sin \theta \cos \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) + C \sin^2 \theta\end{aligned}$$

por lo que la solución para ξ_θ, ξ_ϕ está dada por

$$\begin{aligned}\xi_\theta &= r^2 (A \cos \phi + B \sin \phi), \\ \xi_\phi &= -r^2 (\sin \theta \cos \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) + C \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$\begin{aligned}\xi^\theta &= g^{\theta\lambda} \xi_\lambda = A \cos \phi + B \sin \phi, \\ \xi^\phi &= g^{\phi\lambda} \xi_\lambda = C - \cot \theta (A \sin \phi - B \cos \phi).\end{aligned}$$

Así, elegimos tres ternas linealmente independientes (A, B, C) . La elección más sencilla es tomar (A, B, C) como $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, lo cual nos da

las soluciones

$$\begin{aligned}\xi_{(1)} &= \xi_{(1)}^\mu \partial_\mu = \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \\ \xi_{(2)} &= \xi_{(2)}^\mu \partial_\mu = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \\ \xi_{(3)} &= \xi_{(3)}^\mu \partial_\mu = \partial_\phi,\end{aligned}$$

que son los mismos tres vectores de Killing que encontramos para S^2 , es decir, la métrica de Schwarzschild tiene simetría esférica.

Por otro lado, notamos que la métrica de Schwarzschild no depende de la coordenada t , es decir, t es una coordenada cíclica por lo tanto $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ son las componentes de un vector de Killing, de modo que $\xi_{(4)} = \partial_t$ es un vector de Killing para esta métrica: el espacio-tiempo de Schwarzschild es estacionario.

Mediante el método ilustrado en el ejemplo de los campos de Killing para T^2 es posible demostrar que estos son los únicos vectores de Killing independientes para la métrica de Schwarzschild, sin embargo, podemos demostrar esto último de una manera alternativa: como la métrica de Schwarzschild contiene a la métrica de Minkowski como caso límite cuando $m = 0$, entonces cualquier vector de Killing de la métrica de Schwarzschild debe ser un vector de Killing de la métrica de Minkowski. Ahora, las simetrías del espacio-tiempo plano de Minkowski que no tiene el de Schwarzschild son las traslaciones en las tres direcciones espaciales y los boost de Lorentz. Es fácil verificar que estos seis vectores no satisfacen la ecuación de Killing para la métrica de Schwarzschild, y esto tiene una interpretación física: debido a que el espacio-tiempo de Schwarzschild tiene un punto distinguido (una singularidad) ésta no puede ser invariante ante traslaciones espaciales. Por otro lado, recordamos que los boost de Lorentz están asociados a sistemas de referencia que se alejan a velocidad constante, por lo que al aplicar un boost a la métrica de Schwarzschild ésta ya no podría ser estacionaria: al alejarse a velocidad constante de la fuente del campo gravitacional el campo gravitacional cada vez es más débil, es decir, el tensor métrico, el cual codifica el campo gravitacional, cambia con el tiempo.

1.4. Cantidades conservadas

Recordemos que en mecánica clásica el espacio de configuración M de un sistema físico tiene estructura de variedad diferenciable, de dimensión n , con n es el número de grados de libertad del sistema [10, p. 77-80]. Consideremos un sistema de coordenadas q^1, q^2, \dots, q^n para este espacio de configuración.

Supongamos que el sistema físico anterior está descrito en términos de un lagrangiano puramente cinético, de la forma

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad (1.18)$$

el cual podría corresponder por ejemplo, al lagrangiano de una partícula libre

en el espacio-tiempo. Para este tipo de sistemas físicos, las ecuaciones de movimiento, dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^\nu},$$

se escriben como [1, cap. 15, p. 17]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (g_{\nu\lambda} \dot{q}^\lambda) &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Leftrightarrow \\ g_{\nu\lambda} \ddot{q}^\lambda + g_{\nu\lambda,\gamma} \dot{q}^\gamma \dot{q}^\lambda - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ g_{\nu\lambda} \ddot{q}^\lambda + g_{\nu\alpha,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ g_{\nu\lambda} \ddot{q}^\lambda + \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\nu,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ g_{\nu\lambda} \ddot{q}^\lambda + \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{1}{2} g_{\beta\nu,\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ g_{\nu\lambda} \ddot{q}^\lambda + \frac{1}{2} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} \ddot{q}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ \delta^\mu_\lambda \ddot{q}^\lambda + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0 \Leftrightarrow \\ \ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta &= 0, \end{aligned}$$

que es la ecuación de las geodésicas en M , es decir, los sistemas físicos que no están sujetos a ningún potencial siguen geodésicas en el espacio de configuración y resolver las ecuaciones de movimiento es equivalente a resolver la ecuación de las geodésicas. Más aún, si el lagrangiano no es puramente cinético, como el de la ecuación 1.18, el problema puede reescribirse de modo que el sistema físico aún se describa por geodésicas en un espacio extendido y de dimensión mayor (ver, por ejemplo [11, p. 2]).

Una de las principales aplicaciones en física de los vectores de Killing es que estos proporcionan cantidades conservadas a lo largo de geodésicas (lo cual permite integrar con mayor facilidad ecuaciones de movimiento) como se muestra a continuación.

Proposición 1.9 (Lema de conservación) *Sea $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ un vector de Killing y $x^\mu(\lambda)$ las coordenadas de una geodésica, entonces a lo largo de $x^\mu(\lambda)$, $\xi_\mu U^\mu$ es constante, donde $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ [3, p. 444]*

Demostración. Tenemos que por la regla del producto

$$\frac{d}{d\lambda} (\xi_\mu U^\mu) = \frac{d\xi_\mu}{d\lambda} U^\mu + \xi_\mu \frac{dU^\mu}{d\lambda} = \xi_{\mu,\nu} U^\nu U^\mu + \xi_\mu \frac{dU^\mu}{d\lambda}.$$

Ahora, $x^\mu(\lambda)$ es una geodésica entonces $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$ y por lo tanto $\frac{dU^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0$, de modo que

$$\frac{d}{d\lambda} (\xi_\mu U^\mu) = \xi_{\mu,\nu} U^\nu U^\mu - \xi_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = U^\mu U^\nu (\xi_{\mu,\nu} - \xi_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = U^\mu U^\nu \xi_{\mu;\nu}.$$

Luego, permutando los índices μ y ν tenemos también que $\frac{d}{d\lambda} (\xi_\mu U^\mu) = U^\mu U^\nu \xi_{\nu;\mu}$, por lo tanto

$$2 \frac{d}{d\lambda} (\xi_\mu U^\mu) = U^\mu U^\nu \xi_{\mu;\nu} + U^\mu U^\nu \xi_{\nu;\mu} = 2U^\mu U^\nu \xi_{(\mu;\nu)},$$

de este modo, si ξ es un vector de Killing entonces $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$ y por lo tanto $\frac{d}{d\lambda} (\xi_\mu U^\mu) = 0$.

La proposición anterior es un caso particular del teorema de Noether (ver por ejemplo, [10, p. 88]) cuando el lagrangiano del sistema es de la forma 1.18 pues en este caso, como ξ es un vector de Killing, entonces su flujo preserva el tensor métrico, pero dado que el lagrangiano es de la forma de la ecuación 1.18, entonces el flujo de ξ preserva el lagrangiano y por tanto, tenemos una constante de movimiento a lo largo de soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange, es decir, a lo largo de las geodésicas.

Veamos a continuación un ejemplo de las ideas anteriores, basado en el desarrollo presentado en [6, p. 255-256].

Ejemplo. Consideremos el intervalo de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Sabemos que una partícula de masa m en este espacio-tiempo se mueve a lo largo de una geodésica, por lo que usaremos el Lema de conservación para hallar información sobre el movimiento de la partícula, en lugar de intentar integrar directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes.

Sean $x^\mu(\tau)$ las coordenadas de la geodésica que sigue nuestra partícula de masa $m = 1$ (hacemos $m = 1$ por simplicidad), donde τ es el tiempo propio, y sean $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ las componentes de su 4-velocidad. Como la geodésica es tipo tiempo entonces sabemos que $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$, es decir

$$\begin{aligned} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \\ + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ahora, sabemos que la métrica de Schwarzschild tiene tres vectores de Killing asociados a la simetría esférica, los cuales están dados por

$$\begin{aligned}\xi_{(1)} &= \xi_{(1)}^\mu \partial_\mu = \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \\ \xi_{(2)} &= \xi_{(2)}^\mu \partial_\mu = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \\ \xi_{(3)} &= \xi_{(3)}^\mu \partial_\mu = \partial_\phi.\end{aligned}$$

Así, por el Lema de conservación, tenemos que existen k_i constantes, $i = 1, 2, 3$, tales que $g_{\mu\nu} \xi_{(i)}^\mu U^\nu = k_i$, es decir

$$\begin{aligned}r^2 \cos \phi \frac{d\theta}{d\tau} - r^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi \frac{d\phi}{d\tau} &= k_1, \\ r^2 \sin \phi \frac{d\theta}{d\tau} + r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \frac{d\phi}{d\tau} &= k_2, \\ r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} &= k_3,\end{aligned}$$

que son las tres componentes del momento angular \vec{L} de la partícula, escritas en coordenadas esféricas. Así, el momento angular de la partícula es constante, por lo que el movimiento ocurre en un plano, el cual podemos elegir sin pérdida de generalidad como el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Luego, la ecuación 1.19 se simplifica como

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -1, \quad (1.20)$$

y de este modo, el momento angular \vec{L} es igual a $(0, 0, l)$, donde $l = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$ es una constante de movimiento. Además la métrica de Schwarzschild es estacionaria, por lo que ésta posee otro vector de Killing dado por $\xi = \partial_t$, por lo tanto existe otra constante de movimiento ϵ dada por

$$\xi_\mu U^\mu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = -\epsilon,$$

así, sustituyendo las constantes de movimiento en 1.20 tenemos que

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \epsilon^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = -1,$$

o de manera equivalente

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r) = E,$$

donde $E = \frac{1}{2}(\epsilon^2 - 1)$ es la energía total de la partícula y $V(r)$ es el potencial efectivo, dado por

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r} - \frac{Ml^2}{r^3}.$$

Notamos que los primeros dos términos de la expresión anterior son el potencial efectivo del problema de Kepler (ver, por ejemplo [10, p. 38]), mientras que el tercer término se puede considerar una corrección relativista, que es relevante cuando r es pequeño. En este punto podemos considerar resuelto el problema, pues usando el Lema de conservación hemos reducido el problema de encontrar la trayectoria de nuestra partícula a una sola ecuación diferencial de primer orden, la cual se puede resolver numéricamente.

Veamos ahora una generalización al concepto de vector de Killing, que es el de tensor de Killing.

Definición 1.8 Sea $K = K_{\nu_1 \dots \nu_m} dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_m}$ un tensor simétrico, es decir, tal que $K_{\nu_1 \dots \nu_m} = K_{(\nu_1 \dots \nu_m)}$. Entonces K es un tensor de Killing de orden m si se cumple [3, p. 444]

$$K_{(\nu_1 \dots \nu_m; \lambda)} = 0.$$

Notamos que en particular un vector de Killing es un tensor de Killing de orden uno, sin embargo, los tensores de Killing no tienen una interpretación geométrica en términos de isometrías. Pese a esto, los tensores de Killing son relevantes en tanto que nos dan también cantidades conservadas a lo largo de geodésicas, como se demuestra a continuación.

Proposición 1.10 Si $K = K_{\nu_1 \dots \nu_m} dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_m}$ es un tensor de Killing de orden m y $x^\mu(\lambda)$ son las coordenadas de una geodésica, entonces a lo largo de $x^\mu(\lambda)$, $K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}$ es constante, donde $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ [3, p. 444].

Demostración. Tenemos que por la regla del producto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}) &= \frac{dK_{\nu_1 \dots \nu_m}}{d\lambda} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m} \\ &+ K_{\nu_1 \dots \nu_m} \left[\frac{dU^{\nu_1}}{d\lambda} U^{\nu_2} \dots U^{\nu_m} + \dots + U^{\nu_1} \dots U^{\nu_{m-1}} \frac{dU^{\nu_m}}{d\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Como $x^\mu(\lambda)$ es una geodésica entonces $\frac{dU^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\gamma\beta} U^\gamma U^\beta$ de modo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}) &= K_{\nu_1 \dots \nu_m, \gamma} U^\gamma U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m} \\ &- K_{\nu_1 \dots \nu_m} \left[\Gamma^\nu_{\gamma\beta} U^\gamma U^\beta U^{\nu_2} \dots U^{\nu_m} + \dots + \Gamma^\nu_{\gamma\beta} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_{m-1}} U^\gamma U^\beta \right] \\ &= U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m} U^\lambda \left[K_{\nu_1 \dots \nu_m, \lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu_1 \lambda} K_{\alpha \nu_2 \dots \nu_m} - \dots - \Gamma^\alpha_{\nu_m \lambda} K_{\nu_1 \dots \nu_{m-1} \alpha} \right] \\ &= U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m} U^\lambda K_{\nu_1 \dots \nu_m; \lambda}, \end{aligned}$$

así, tenemos que

$$\begin{aligned} &U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m} U^\lambda K_{(\nu_1 \dots \nu_m; \lambda)} = \\ &= U^{\nu_1} \dots U^\lambda \left[\frac{1}{(m+1)!} (K_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m; \lambda} + K_{\nu_2 \nu_1 \dots \nu_m; \lambda} + \dots + K_{\nu_1 \dots \nu_{m-1} \lambda; \nu_m}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(m+1)!} \left[\frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}) + \dots + \frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}) \right] \\
&= \frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}),
\end{aligned}$$

es decir, $\frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}) = U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m} U^\lambda K_{(\nu_1 \dots \nu_m; \lambda)}$, por lo tanto, si K es un tensor de Killing entonces $K_{(\nu_1 \dots \nu_m; \lambda)} = 0$ y por lo tanto

$$\frac{d}{d\lambda} (K_{\nu_1 \dots \nu_m} U^{\nu_1} \dots U^{\nu_m}) = 0,$$

como queríamos demostrar.

El siguiente ejemplo basado en [9, p. 344-345] muestra una aplicación de esta última proposición.

Ejemplo. De acuerdo con el principio cosmológico, el universo a grandes escalas es homogéneo e isotrópico a cada instante del tiempo. Esto se traduce en que la métrica que describe el universo como un todo a grandes escalas debe ser de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

donde k puede tomar los valores $-1, 0, 1$ y $a(t)$ recibe el nombre de factor de escala y es quien determina la evolución del universo; su dinámica se determina a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. La métrica anterior se conoce como la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, o métrica FLRW, de manera breve.

Una de las particularidades de esta métrica es que posee un tensor de Killing de orden dos [9, p. 344], el cual está dado por

$$K_{\mu\nu} = a^2(t)(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu),$$

donde $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la 4-velocidad de un observador (en reposo en el sistema de coordenadas dado). Así, de acuerdo a la proposición anterior, si $x^\mu(\lambda)$ son las coordenadas de una geodésica y V^μ las componentes de su vector tangente, entonces la cantidad $K_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ es constante a lo largo de las mismas. En particular, para la luz, la cual se mueve en geodésicas nulas, se tiene que existe una constante α tal que

$$K_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = a^2 (U_\mu V^\mu)^2 = \alpha.$$

Ahora, como la frecuencia ω de la luz medida por el observador con 4-velocidad U es $-U_\mu V^\mu$, podemos relacionar la frecuencia medida en dos instantes de tiempo distintos t_1, t_2 a partir de la ecuación anterior como

$$\frac{\omega(t_2)}{\omega(t_1)} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)},$$

es decir, la frecuencia que mide el observador a un tiempo t_2 es distinta a la frecuencia que tenía la luz al ser emitida a un tiempo t_1 , y la proporción de cambio está dada en términos del factor de escala. En particular, sabiendo que actualmente nuestro universo está en expansión, $a(t_2) > a(t_1)$, por lo que la frecuencia medida al tiempo t_2 será menor que la frecuencia de la luz al ser emitida al tiempo t_1 , razón por la cual la ecuación anterior es conocida como la expresión del corrimiento al rojo para la métrica FLRW.

Capítulo 2

Métricas de Kerr-Schild

Este capítulo está dedicado a estudiar las métricas de Kerr-Schild. Comenzamos la primera sección motivando la forma que toman las métricas de Kerr-Schild al notar que la métrica de Schwarzschild pertenece a esta familia de soluciones. Posteriormente, analizamos algunas de las propiedades que tienen estas métricas, las cuales nos ayudan a simplificar las ecuaciones de campo. En la tercera sección procedemos a realizar la integración de las ecuaciones de campo en el vacío para las métricas de Kerr-Schild, usando el formalismo de tétradas o bases de vectores nulos, el cual se explica en la misma sección. Seguido de esto, mostramos que las métricas de Kerr-Schild poseen un vector de Killing y cómo esto nos simplifica la solución a las ecuaciones de campo, para finalizar la última sección mostrando a la métrica de Kerr como un caso particular dentro de las métricas de Kerr-Schild y discutiendo algunas propiedades de esta métrica.

A lo largo de este capítulo asumimos que la signatura del espacio-tiempo es $+2$.

2.1. Motivación

Consideremos el intervalo de Schwarzschild en coordenadas esféricas

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt'^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr'^2 + r'^2(d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi'^2).$$

Si realizamos el cambio de coordenadas [12, p. 237]

$$\begin{aligned} t = t' + 2m \log \left[\frac{r'}{2m} - 1 \right] &\Leftrightarrow dt' = dt + \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{-1} dr, \\ r = r' &\Leftrightarrow dr' = dr, \\ \theta = \theta' &\Leftrightarrow d\theta' = d\theta, \\ \phi = \phi' &\Leftrightarrow d\phi' = d\phi, \end{aligned}$$

entonces se tiene que el intervalo de Schwarzschild se puede reescribir en términos de estas coordenadas como

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2m}{r'}\right) dt'^2 + \left(1 - \frac{2m}{r'}\right)^{-1} dr'^2 + r'^2(d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi'^2) \\
&= - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(dt^2 + 2 \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{-1} dt dr + \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{-2} dr^2\right) \\
&\quad + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\
&= - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{4m}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\
&= -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{2m}{r} (dr^2 + 2dr dt + dt^2),
\end{aligned}$$

es decir,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{2m}{r} (dt + dr)^2,$$

o en coordenadas cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2m}{r} \left(dt + \frac{xdx + ydy + zdz}{r}\right)^2. \quad (2.1)$$

Se puede verificar de manera directa que la métrica que da lugar al intervalo anterior toma la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.2)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$ es la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas y las componentes del vector n están dadas por

$$n_\mu = \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right).$$

Notemos que con respecto a la métrica de Minkowski el vector n es un vector nulo, pues tenemos que

$$\eta^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = \frac{2m}{r} \left(-1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right) = 0.$$

Por otro lado, notemos que en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) , las componentes de n se escriben como

$$n_\mu = \sqrt{\frac{2m}{r}} (1, 1, 0, 0),$$

por lo tanto, en coordenadas esféricas (t', r', θ', ϕ') se tiene que

$$n_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} n_\mu = \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1, \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, 0, 0\right),$$

de modo que

$$g^{\mu'\nu'} n_{\nu'} = \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(- \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, 1, 0, 0 \right),$$

y por lo tanto, se tiene que

$$g^{\mu\nu} n_{\mu} n_{\nu} = g^{\mu'\nu'} n_{\mu'} n_{\nu'} = 0,$$

es decir, se sigue que n es un vector nulo también con respecto a la métrica de Schwarzschild.

2.2. El ansatz de Kerr y Schild

Dado que la métrica de Schwarzschild es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y puede escribirse de la forma mostrada en 2.2, esto motiva a la búsqueda de soluciones en el vacío de dicha forma, es decir métricas del tipo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + n_{\mu} n_{\nu},$$

con n un vector nulo con respecto a la métrica de Minkowski, es decir, tal que $\eta^{\mu\nu} n_{\mu} n_{\nu} = 0$ y que cumplan $R_{\mu\nu} = 0$ [13, p. 2487]. A estas métricas se les conoce como métricas de Kerr-Schild.

Notemos primero que el tensor métrico inverso para g está dado por $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} n_{\alpha} n_{\beta}$ pues tenemos que

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) g_{\nu\gamma} &= (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) (\eta_{\nu\gamma} + n_{\nu} n_{\gamma}) \\ &= \delta^{\mu}_{\gamma} + \eta^{\mu\nu} n_{\nu} n_{\gamma} - \eta^{\mu\alpha} n_{\alpha} n_{\gamma} - \eta^{\mu\alpha} n_{\alpha} n_{\gamma} (\eta^{\nu\beta} n_{\nu} n_{\beta}) = \delta^{\mu}_{\gamma}. \end{aligned}$$

Luego, de esto también se sigue que $g^{\mu\nu} n_{\nu} = (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) n_{\nu} = \eta^{\mu\nu} n_{\nu}$, de modo que podemos escribir $n^{\mu} = g^{\mu\nu} n_{\nu} = \eta^{\mu\nu} n_{\nu}$ sin ninguna ambigüedad con respecto al tensor métrico que estamos utilizando. Además también tenemos que n es un vector nulo con respecto a la nueva métrica, como vimos en el caso de la métrica de Schwarzschild, pues se tiene que

$$g^{\mu\nu} n_{\mu} n_{\nu} = (\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) n_{\mu} n_{\nu} = 0.$$

Por otro lado, notamos ahora que como $n^{\mu} n_{\mu} = 0$ entonces se tiene que

$$n^{\mu}_{,\alpha} n_{\mu} + n^{\mu} n_{\mu,\alpha} = 0,$$

y por lo tanto

$$n^{\mu} n_{\mu,\alpha} = -n^{\mu}_{,\alpha} n_{\mu},$$

pero

$$n^{\mu}_{,\alpha} n_{\mu} = \eta^{\mu\beta} n_{\beta,\alpha} \eta_{\mu\gamma} n^{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} n^{\gamma} n_{\beta,\alpha} = n^{\beta} n_{\beta,\alpha} = n^{\mu} n_{\mu,\alpha}$$

es decir, $n^\mu n_{\mu,\alpha} = -n^\mu n_{\mu,\alpha}$ y por lo tanto se tiene que [12, p. 239]

$$n_\mu n^\mu{}_{,\alpha} = n^\mu n_{\mu,\alpha} = 0, \quad (2.3)$$

y usando esto, tenemos que la expresión de los símbolos de Christoffel para estas métricas es

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\lambda}n_\mu n_{\lambda,\nu} + \eta^{\alpha\lambda}n_\nu n_{\lambda,\mu} + \eta^{\alpha\lambda}n_\nu n_{\mu,\lambda} + \eta^{\alpha\lambda}n_\mu n_{\nu,\lambda} + n^\alpha n_{\mu,\nu} + n^\alpha n_{\nu,\mu} - n^\alpha n^\lambda n_\mu n_{\nu,\lambda} - n^\alpha n^\lambda n_\nu n_{\mu,\lambda}).$$

Ahora, se puede verificar que $g = \det(g_{\mu\nu}) = -1$ del modo siguiente [12, p. 239]: como n es un vector nulo con la métrica de Minkowski, entonces n se puede escribir como $n^\mu = (|\vec{w}|, \vec{w})$, con \vec{w} un vector en \mathbb{R}^3 . Luego, si realizamos una rotación espacial de modo que el nuevo vector base e'_1 sea $\vec{w}/|\vec{w}|$, entonces la métrica de Minkowski se escribe del mismo modo y el vector n se escribe como $n^{\mu'} = (d, d, 0, 0)$, con $d = |\vec{w}|$. Así, se tiene que

$$g' = \det(g_{\mu'\nu'}) = \begin{vmatrix} -1 + d^2 & d^2 & 0 & 0 \\ d^2 & 1 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

y como las rotaciones espaciales son transformaciones rígidas, se sigue que $g = \det(g_{\mu\nu}) = g' = -1$. Luego, tenemos que

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \log \sqrt{-g} = 0,$$

y por tanto, las ecuaciones de campo en el vacío, $R_{\mu\nu} = 0$ se simplifican como

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} = 0.$$

En particular, una condición necesaria para que $R_{\mu\nu} = 0$ es $R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$ [13, p. 2489], es decir

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}n^\mu n^\nu - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}n^\mu n^\nu = 0. \quad (2.4)$$

Notamos ahora que

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \frac{1}{2}(n^\alpha n_{\mu,\nu}n^\mu n^\nu + n^\alpha n_{\nu,\mu}n^\mu n^\nu) = n^\alpha n_{\mu,\nu}n^\mu n^\nu = 0,$$

de modo que

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}n^\mu n^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}n^\mu{}_{,\alpha}n^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}n^\mu n^\nu{}_{,\alpha} = 0,$$

y por lo tanto

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}n^\mu n^\nu = -2\Gamma^\alpha_{\mu\nu}n^\mu n^\nu{}_{,\alpha}.$$

Luego, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} n^{\mu} n^{\nu}_{,\alpha} = \frac{1}{2} n^{\alpha} n_{\nu,\mu} n^{\mu} n^{\nu}_{,\alpha}$ y por lo tanto

$$\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} n^{\mu} n^{\nu} = -2\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} n^{\mu} n^{\nu}_{,\alpha} = -n^{\alpha} n^{\mu} n_{\nu,\mu} n^{\nu}_{,\alpha}. \quad (2.5)$$

Por último, notemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} n^{\mu} n^{\nu} &= (\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} n^{\mu}) (\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} n^{\nu}) = \\ \frac{1}{4} (\eta^{\beta\lambda} n_{\alpha} n_{\lambda,\mu} n^{\mu} + n^{\beta} n_{\alpha,\mu} n^{\mu}) (\eta^{\alpha\lambda} n_{\beta} n_{\lambda,\nu} n^{\nu} + n^{\alpha} n_{\beta,\nu} n^{\nu}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Así, sustituyendo 2.5 y 2.2 en la ecuación 2.4 obtenemos que

$$R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 0 \Leftrightarrow n_{\mu,\nu} n^{\nu} n^{\mu}_{,\alpha} n^{\alpha} = 0,$$

es decir, $R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 0$ si y sólo si $v^{\mu} = n^{\mu}_{,\alpha} n^{\alpha}$ es un vector nulo con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$. Además, usando 2.3 tenemos que $n^{\mu}_{,\alpha} n^{\alpha} n_{\mu} = 0$ es decir, los vectores v^{μ} y n^{μ} son ortogonales [13, p. 2489]. Notamos que el vector v^{μ} es también nulo con respecto a la métrica de Minkowski, por lo tanto, podemos escribir a v^{μ} y a n^{μ} como [12, p. 241]

$$v^{\mu} = (|\vec{u}|, \vec{u}), \quad n^{\mu} = (|\vec{w}|, \vec{w}),$$

con \vec{u} y \vec{w} vectores en \mathbb{R}^3 . Así, tenemos que $n_{\mu} = (-|\vec{w}|, \vec{w})$ y por lo tanto

$$0 = v^{\mu} n_{\mu} = -|\vec{u}||\vec{w}|(1 - \cos\theta),$$

donde $\theta = 0$ es el ángulo entre \vec{u} y \vec{w} , de modo que en cada punto v^{μ} y l^{μ} son paralelos, por lo que podemos escribir

$$v^{\mu} = n^{\mu}_{,\alpha} n^{\alpha} = b(x^{\mu}) n^{\mu},$$

con $b(x^{\mu})$ un campo escalar. Ahora, notamos que se cumple que $n^{\mu}_{;\alpha} n^{\alpha} = n^{\mu}_{,\alpha} n^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} n^{\beta} n^{\alpha} = n^{\mu}_{,\alpha} n^{\alpha}$, por lo que la ecuación anterior se puede escribir como

$$(\nabla_n n)^{\mu} = n^{\mu}_{;\alpha} n^{\alpha} = b n^{\mu},$$

es decir, para que se cumpla $R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 0$ el vector n debe de ser un vector geodésico (ver, por ejemplo [8, p. 33]). A modo de simplificación, podemos definir un nuevo campo vectorial nulo $k^{\mu} = n^{\mu}/\sqrt{2H}$ de modo que $k^{\mu}_{;\alpha} k^{\alpha} = 0$ [13, p. 2489], lo cual se consigue siempre que la función escalar H sea tal que

$$H_{,\alpha} n^{\alpha} = 2bH,$$

pues en dado caso, se tiene que

$$k^{\mu}_{;\alpha} k^{\alpha} = \frac{n^{\mu}_{;\alpha} n^{\alpha} - \frac{H_{,\alpha} n^{\alpha} n^{\mu}}{2H}}{2H} = \frac{bn^{\mu} - bn^{\mu}}{2H} = 0.$$

Así, en términos de este nuevo campo vectorial nulo k , podemos reescribir la forma de las métricas de Kerr-Schild como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + 2Hk_\mu k_\nu, \\ g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - 2Hk^\mu k^\nu, \end{aligned} \quad (2.7)$$

con $k^\mu k_\mu = 0$, $k_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu = \eta_{\mu\nu} k^\nu$, $k^\mu{}_{;\alpha} k^\alpha = k^\mu{}_{;\alpha} k^\alpha = 0$. En lo sucesivo, utilizaremos esta simplificación.

Así, los símbolos de Christoffel ahora se escriben como

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} &= H_{,\nu} k^\alpha k_\mu + H k^\alpha{}_{,\nu} k_\mu + H k^\alpha k_{\mu,\nu} + H_{,\mu} k_\nu k^\alpha + H k_{\nu,\mu} k^\alpha \\ &\quad + H k_\nu k^\alpha{}_{,\mu} - \eta^{\alpha\lambda} H_{,\lambda} k_\mu k_\nu - \eta^{\alpha\lambda} H k_{\mu,\lambda} k_\nu - \eta^{\alpha\lambda} H k_\mu k_{\nu,\lambda} \\ &\quad - 2H H_{,\lambda} k^\alpha k^\lambda k_\mu k_\nu. \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} k^\beta k^\nu &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} k^\beta k^\nu - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} k^\beta k^\nu + \Gamma^\gamma{}_{\beta\nu} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} k^\beta k^\nu - \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\nu} k^\beta k^\nu \\ &= -2\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} k^\beta k^\nu{}_{,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} k^\beta k^\nu - (\Gamma^\gamma{}_{\beta\mu} k^\beta)(\Gamma^\alpha{}_{\gamma\nu} k^\nu) \\ &= -\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta,\nu} k^\beta k^\nu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} k^\beta k^\nu{}_{,\nu} - (\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} k^\beta k^\nu)_{,\nu} \\ &= -H_{,\beta\nu} k^\alpha k_\mu k^\beta k^\nu, \end{aligned}$$

así, $k_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} k^\beta k^\nu - k_\alpha R_{\lambda\beta\mu\nu} k^\beta k^\nu = -H_{,\beta\nu} k_\alpha k_\mu k^\beta k^\nu k_\lambda + H_{,\beta\nu} k_\lambda k_\mu k^\beta k^\nu k_\alpha$ es decir [13, p. 2489]

$$k_{[\lambda} R_{\alpha]\beta\mu\nu} k^\beta k^\nu = 0. \quad (2.8)$$

Por otro lado, consideremos ahora el tensor conforme de Weyl $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, el cual se define (en cuatro dimensiones) como [3, p. 40]

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu} R_{\mu\beta} + g_{\mu\beta} R_{\nu\alpha} - g_{\alpha\mu} R_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha}) \\ &\quad + \frac{1}{6}(g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) R. \end{aligned}$$

En particular, en el vacío $R_{\mu\nu} = 0$ y por lo tanto el tensor Riemann y el tensor conforme de Weyl coinciden, por lo que la ecuación 2.8 se escribe como

$$k_{[\lambda} C_{\alpha]\beta\mu\nu} k^\beta k^\nu = 0, \quad (2.9)$$

por lo tanto, como se muestra en la sección 3.2, esto significa que las métricas de Kerr-Schild son algebraicamente especiales, siendo k una dirección principal nula repetida [13, p. 2490].

2.3. Las ecuaciones de campo

Usando la forma 2.7 de las métricas de Kerr-Schild, podemos escribir el elemento de línea correspondiente como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2H(k_\mu dx^\mu)^2. \quad (2.10)$$

Si realizamos la transformación de coordenadas [14, p. 1848]

$$\begin{aligned} x &= \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\sqrt{2}}, & y &= \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i\sqrt{2}}, \\ z &= \frac{u + v}{\sqrt{2}}, & t &= \frac{u - v}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

entonces 2.10 se escribe como

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv + 2H (k_\mu dx^\mu)^2, \quad (2.11)$$

donde podemos considerar a $\bar{\zeta}, \zeta, v, u$ como cuatro coordenadas complejas independientes. En términos de la base coordenada $\{\partial_{\bar{\zeta}}, \partial_\zeta, \partial_v, \partial_u\}$ dada por

$$\begin{aligned} \partial_u &= \frac{\partial_z + \partial_t}{\sqrt{2}}, & \partial_v &= \frac{\partial_z - \partial_t}{\sqrt{2}}, \\ \partial_\zeta &= \frac{\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}}, & \partial_{\bar{\zeta}} &= \frac{\partial_x - i\partial_y}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski se escribe como

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos ahora introducir en este espacio una nueva base de vectores nulos en la cual el tensor métrico g se escriba exactamente de este modo y que k sea una de las 1-formas de la base dual [13, p. 2490]. Denotamos por $\{e_a\}$ dicha base y por $\{e^a\}$ su base dual, con e^3 y e^4 vectores reales, $e^3 = k$ y $e^2 = \bar{e}^1$. Para conseguir esta base de vectores nulos, definimos ahora los escalares σ, κ como [8, p. 86]

$$\sigma = k_{\alpha;\beta} e_2^\alpha e_2^\beta, \quad \kappa = k_{\alpha;\beta} e_2^\alpha k^\beta.$$

En la sección 3.2 discutimos más a fondo el significado geométrico de estas cantidades. Por lo pronto, podemos afirmar que como se cumple la ecuación 2.9, es decir, se cumple que el vector k es una dirección principal nula repetida, entonces en virtud del teorema de Golberg y Sachs (sección 3.2) se sigue que $\kappa = \sigma = 0$, donde $k = 0$ significa que $k_{\alpha;\beta} k^\beta = 0$, es decir, que el vector k es geodésico, como ya sabíamos. Luego, por el teorema de Kerr (ver, por ejemplo [8, p. 491]), la forma más general que podemos elegir para el vector nulo k , siendo que $\sigma = \kappa = 0$ está dada por

$$k = k_\mu dx^\mu = du + Y d\bar{\zeta} + \bar{Y} d\zeta - Y\bar{Y} dv,$$

donde Y es una función compleja arbitraria de las coordenadas. Así, el elemento de línea 2.11 se escribe como

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv + 2H (du + Y d\bar{\zeta} + \bar{Y} d\zeta - Y\bar{Y} dv)^2, \quad (2.12)$$

y podemos completar la base de 1-formas $\{e^a\}$ como [14, p. 1848]

$$\begin{aligned} e^1 &= e^1{}_\mu dx^\mu = d\zeta - Y dv, \\ e^2 &= e^2{}_\mu dx^\mu = d\bar{\zeta} - \bar{Y} dv, \\ e^3 &= e^3{}_\mu dx^\mu = du + Y d\bar{\zeta} + \bar{Y} d\zeta - Y\bar{Y} dv, \\ e^4 &= e^4{}_\mu dx^\mu = (1 - HY\bar{Y})dv + H du + HY d\bar{\zeta} + H\bar{Y} d\zeta, \end{aligned}$$

de modo que la base dual $\{e_a\}$ está dada por [14, p. 1848]

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1{}^\mu \partial_\mu = \partial_\zeta - \bar{Y} \partial_u, \\ e_2 &= e_2{}^\mu \partial_\mu = \partial_{\bar{\zeta}} - Y \partial_u, \\ e_3 &= e_3{}^\mu \partial_\mu = (1 + HY\bar{Y})\partial_u - H\partial_v - HY\partial_\zeta - H\bar{Y}\partial_{\bar{\zeta}}, \\ e_4 &= e_4{}^\mu \partial_\mu = \partial_v + Y\partial_\zeta + \bar{Y}\partial_{\bar{\zeta}} - Y\bar{Y}\partial_u. \end{aligned}$$

Observando que en la base coordenada $\{\partial_{\bar{\zeta}}, \partial_\zeta, \partial_v, \partial_u\}$ el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que origina el elemento de línea de la ecuación 2.12 se escribe como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2HY^2 & 1 + 2HY\bar{Y} & -2HY^2\bar{Y} & 2HY \\ 1 + 2HY\bar{Y} & 2H\bar{Y}^2 & -2HY\bar{Y}^2 & 2H\bar{Y} \\ -2HY^2\bar{Y} & -2HY\bar{Y}^2 & 2HY^2\bar{Y}^2 & 1 - 2HY\bar{Y} \\ 2HY & 2H\bar{Y} & 1 - 2HY\bar{Y} & 2H \end{pmatrix},$$

entonces se verifica de manera directa que en la base $\{e_a\}$ el tensor métrico toma la forma

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = g^{ab} = g^{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu,$$

que es una matriz de permutación, por lo que bajar y subir índices numéricos equivale a la permutación $(1234) \rightarrow (2143)$. El complejo conjugado de cualquier objeto geométrico se obtiene al realizar la permutación $(1234) \rightarrow (2134)$ [14, p. 1843].

Recordamos ahora que los coeficientes de la conexión, o coeficientes de rotación de Ricci se definen en términos de la base $\{e_a\}$ como [8, p. 25]

$$\nabla_{e_a} e_b = \Gamma^c{}_{ba} e_c.$$

Notemos que la derivada covariante de la métrica en esta base es

$$g_{ab|c} = g_{ab|c} - \Gamma^d{}_{bc} g_{da} - \Gamma^e{}_{ac} g_{eb} = g_{ab|c} - \Gamma_{abc} - \Gamma_{bac} = g_{ab|c} - 2\Gamma_{(ab)c},$$

donde $\varphi|_b = e_b(\varphi) = e_b{}^\mu \partial_\mu \varphi = \varphi_{,\mu} e_b{}^\mu$. Como la conexión es compatible con la métrica entonces $g_{ab|c} = 0$, es decir

$$\Gamma_{(ab)c} = \frac{1}{2} g_{ab|c},$$

de modo que si g_{ab} es constante, como en este caso, entonces $\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}$.

Ahora, podemos calcular los coeficientes de rotación de Ricci en términos de la base $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$ como [13, p. 2490]

$$\Gamma_{bc}^a = -e_{\mu;\nu}^a e_b^\mu e_c^\nu, \quad (2.13)$$

sin embargo, una manera más eficiente para calcular los coeficientes de rotación de Ricci consiste en tomar la derivada exterior de las 1-formas base [8, p. 86], pues usando la ecuación 2.13 se obtiene que

$$\begin{aligned} de^a &= d(e_\mu^a dx^\mu) = d(e_\mu^a) \wedge dx^\mu = e_{\mu;\nu}^a dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= e_{\mu;\nu}^a dx^\nu \wedge dx^\mu = e_{\mu;\nu}^a e_b^\mu e_c^\nu e^c \wedge e^b \\ &= -\Gamma_{bc}^a e^c \wedge e^b = \Gamma_{bc}^a e^b \wedge e^c, \end{aligned}$$

lo cual también se puede escribir en términos las 1-formas de conexión $\Gamma_b^a = \Gamma_{bc}^a e^c$ como

$$de^a = e^b \wedge \Gamma_b^a,$$

o de manera equivalente

$$e_{\mu|b}^a e_c^\mu e^b \wedge e^c = \Gamma_{bc}^a e^b \wedge e^c.$$

Con esto es posible determinar toda la parte antisimétrica $\Gamma_{[bc]}^a$ de los coeficientes de rotación de Ricci, como

$$2\Gamma_{[bc]}^a = e_{\mu|b}^a e_c^\mu - e_{\mu|c}^a e_b^\mu, \quad (2.14)$$

y por la propiedad $\Gamma_{(ab)c} = 0$ es posible obtener todos los coeficientes de rotación de Ricci como [14, p. 1843]

$$\Gamma_{abc} = \Gamma_{a[bc]} + \Gamma_{b[ac]} - \Gamma_{c[ab]}. \quad (2.15)$$

Por otro lado, las componentes del tensor de curvatura de Riemann en la base $\{e_a\}$ se escriben como

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd|c}^a - \Gamma_{bc|d}^a + \Gamma_{bd}^f \Gamma_{fc}^a - \Gamma_{bc}^f \Gamma_{fd}^a - D_{cd}^f \Gamma_{bf}^a, \quad (2.16)$$

donde $D_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c$. Si definimos las 2-formas de curvatura Θ_b^a como [8, p. 26]

$$\Theta_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a e^c \wedge e^d,$$

entonces se verifica que la ecuación 2.16 implica que

$$d\Gamma_b^a + \Gamma_f^a \wedge \Gamma_b^f = \Theta_b^a. \quad (2.17)$$

Ahora, notamos que $R_{abcd} = -R_{bacd}$ de modo que $\Theta_{ab} = -\Theta_{ba}$. Además, conocer las 2-formas Θ_{42} , $\Theta_{12} + \Theta_{34}$ y Θ_{31} nos determina, por conjugación compleja, las 2-formas Θ_{41} , $-\Theta_{12} + \Theta_{34}$ y Θ_{32} . Luego, con la condición de antisimetría y las seis 2-formas independientes anteriores podemos determinar por

completo todas las 2-formas de curvatura Θ_{ab} y con ello, todas las componentes R_{abcd} del tensor de Riemann. De manera análoga, como $\Gamma_{abc} = \Gamma_{bac}$ entonces $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$, lo cual, junto con las 1-formas de conexión $\Gamma_{42}, \Gamma_{12} + \Gamma_{34}$ y Γ_{31} nos permite determinar por completo todas las 1-formas Γ_{ab} [14, p. 1844]. En particular, como estamos buscando resolver las ecuaciones de campo en el vacío, $R_{ab} = 0$, nos basta con conocer el tensor de Ricci $R_{ab} = R^d{}_{adb}$. Dado que el tensor de Riemann tiene las propiedades de simetría usuales, es decir,

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{abdc}, \\ R_{abcd} &= -R_{bacd}, \\ R_{abcd} &= R_{cdab}, \\ R_{a[bcd]} &= 0, \end{aligned}$$

entonces se encuentra que las componentes independientes del tensor de Ricci están dadas por

$$\begin{aligned} R_{22} &= -2R_{4223}, \\ R_{24} &= R_{4234} - R_{4212}, \\ R_{44} &= -2R_{4214}, \\ R_{12} &= 2R_{4231} - R_{3412} - R_{1212}, \\ R_{34} &= 2R_{4231} - R_{1234} - R_{3434}, \\ R_{33} &= 2R_{3132}, \\ R_{23} &= -R_{1232} - R_{3432}, \end{aligned}$$

de donde notamos que para conocer las ecuaciones de campo no es necesario calcular toda la 2-forma Θ_{31} , pues sólo necesitamos conocerla componente R_{3132} , la cual está dada por la ecuación 2.16. Dicho lo anterior, procedemos a hacer los cálculos en particular para la base $\{e_a\}$ que se tiene.

Usando las ecuaciones 2.14 y 2.15, encontramos que las 1-formas de conexión $\Gamma_{42}, \Gamma_{12} + \Gamma_{34}$ y Γ_{31} están dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{42} &= -Y_{|1}e^1 - Y_{|2}e^2 - (Y_{|3} + HY_{|4})e^3 - Y_{|4}e^4, \\ \Gamma_{31} &= HY_{|1}e^1 + HY_{|1}e^2 + (H_{|1} - HY_{|3})e^3, \\ \Gamma_{12} + \Gamma_{34} &= HY_{|4}e^1 + HY_{|4}e^2 + (H_{|4} + HY_{|2} - HY_{|1})e^3. \end{aligned}$$

Retomando a los escalares σ, κ , se puede verificar usando la ecuación 2.13 que $\sigma = -\Gamma_{422}, \kappa = -\Gamma_{424}$, por lo tanto, como $\sigma = \kappa = 0$ entonces se cumple que

$$\Gamma_{422} = \Gamma_{424} = 0,$$

luego, se encuentra que $\Gamma_{424} = \Gamma_{422} = 0$ si y sólo si

$$\bar{Y}_{|4} = Y_{|4} = \bar{Y}_{|2} = Y_{|1} = 0,$$

por tanto, las 1-formas de conexión Γ_{42} , $\Gamma_{12} + \Gamma_{34}$ y Γ_{31} se simplifican como

$$\begin{aligned}\Gamma_{42} &= -Y_{|1}e^1 - Y_{|3}e^3, \\ \Gamma_{31} &= HY_{|1}e^2 + (H_{|1} - H\bar{Y}_{|3})e^3, \\ \Gamma_{12} + \Gamma_{34} &= (H_{|4} + H\bar{Y}_{|2} - HY_{|1})e^3.\end{aligned}$$

Antes de calcular el tensor de Riemann, resulta útil tener los conmutadores $[e_a, e_b] = D^c_{ab}e_c = (\Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab})e_c$, los cuales están dados por

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= (\bar{Y}_{|2} - Y_{|1})e_3 + H(\bar{Y}_{|2} - Y_{|1})e_4, \\ [e_1, e_3] &= -HY_{|1}e_1 + \bar{Y}_{|3}e_3 + (H\bar{Y}_{|3} - H_{|1})e_4, \\ [e_1, e_4] &= Y_{|1}e_1, \\ [e_3, e_4] &= Y_{|3}e_1 + \bar{Y}_{|3}e_2 + H_{|4}e_4.\end{aligned}$$

Ahora, usando la ecuación 2.17 se encuentran las 2-formas de curvatura Θ_{42} , Θ_{12} y Θ_{34} , las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}\Theta_{42} &= -Y_{|1}[H_{|4} + H(\bar{Y}_{|2} - Y_{|1})]e^1 \wedge e^3, \\ \Theta_{12} &= 2H(-Y_{|1}Y_{|1} + Y_{|1}\bar{Y}_{|2} - \bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|2})e^1 \wedge e^2 \\ &\quad + (H_{|1}\bar{Y}_{|2} - 2H_{|1}Y_{|1} + HY_{|1}\bar{Y}_{|3} - H\bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|3} - HY_{|11})e^1 \wedge e^3 \\ &\quad + (-H_{|2}Y_{|1} + 2H_{|2}\bar{Y}_{|2} + HY_{|1}Y_{|3} - H\bar{Y}_{|2}Y_{|3} + H\bar{Y}_{|22})e^2 \wedge e^3 \\ &\quad + (H\bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|2} - H_{|4}\bar{Y}_{|2} - HY_{|1}Y_{|1} + H_{|4}Y_{|1})e^3 \wedge e^4, \\ \Theta_{34} &= (H_{|4}Y_{|1} - H_{|4}\bar{Y}_{|2} - HY_{|1}Y_{|1} + H\bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|2})e^1 \wedge e^2 \\ &\quad + (H_{|14} - H_{|4}\bar{Y}_{|3} + HY_{|1}\bar{Y}_{|3} + H\bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|3})e^1 \wedge e^3 \\ &\quad + (H_{|24} - H_{|4}Y_{|3} + HY_{|1}Y_{|3} + H\bar{Y}_{|2}Y_{|3})e^2 \wedge e^3 \\ &\quad - H_{|44}e^3 \wedge e^4,\end{aligned}$$

mientras que la componente R_{3132} , de acuerdo con la ecuación 2.16, es igual a

$$\begin{aligned}R_{3132} &= -(HY_{|1})_{|3} + \bar{Y}_{|2}Y_{|1}H^2 + (H_{|1} - H\bar{Y}_{|3})_{|2} \\ &\quad - (H_{|1} - H\bar{Y}_{|3})_{|3} - HY_{|1}[H_{|4} + H(\bar{Y}_{|2} - Y_{|1})].\end{aligned}$$

De este modo, se encuentra que las ecuaciones de campo resultantes distintas de cero son

$$\begin{aligned}R_{12} &= H_{|4}Y_{|1} + H_{|4}\bar{Y}_{|2} + HY_{|1}Y_{|1} + H\bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|2} = 0, \\ R_{34} &= H_{|44} + H_{|4}Y_{|1} + H_{|4}\bar{Y}_{|2} + 2HY_{|1}\bar{Y}_{|2} - HY_{|1}Y_{|1} - H\bar{Y}_{|2}\bar{Y}_{|2} = 0, \\ R_{23} &= H_{|42} + 2HY_{|1}Y_{|3} - H_{|4}Y_{|3} + H_{|2}\bar{Y}_{|2} - H_{|2}Y_{|1} + H\bar{Y}_{|22} = 0, \\ R_{33} &= -2(HY_{|1})_{|3} + 2\bar{Y}_{|2}Y_{|1}H^2 + 2(H_{|1} - H\bar{Y}_{|3})_{|2} \\ &\quad - 2(H_{|1} - H\bar{Y}_{|3})_{|3} - 2HY_{|1}[H_{|4} + H(\bar{Y}_{|2} - Y_{|1})] = 0.\end{aligned}$$

Notamos que la primera de estas ecuaciones es lineal en H , por lo que basta encontrar una solución particular para encontrar todas sus soluciones. Como

$Y_{|1} + \bar{Y}_{|2}$ es una solución [14, p. 1850], entonces se tiene que todas las soluciones a esta ecuación están dadas por

$$H = \frac{1}{2}M(Y_{|1} + \bar{Y}_{|2}), \quad M_{|4} = 0,$$

con M una función real de las coordenadas. Usando esta solución, se encuentra que la ecuación $R_{34} = 0$ se convierte en una identidad, mientras que las ecuaciones $R_{23} = 0$ y $R_{33} = 0$ ahora se escriben respectivamente como

$$\begin{aligned} M_{|2} - 3Z^{-1}\bar{Z}Y_{|3}M &= 0, \\ M_{|3} - Z^{-1}Y_{|3}M_{|1} - \bar{Z}^{-1}\bar{Y}_{|3}M_{|2} &= 0, \end{aligned}$$

donde $Z = Y_{|1}$, $\bar{Z} = \bar{Y}_{|2}$. De la segunda ecuación, encontramos que la solución más general está dada por $M = M(Y, \bar{Y})$, de modo que la primera ecuación se escribe como

$$-Z^{-1}Y_{|3} = M^{\frac{1}{3}}(M^{-\frac{1}{3}})_{\bar{Y}},$$

así, hacemos $M = mP^{-3}$ [14, p. 1851], donde m es un número real y $P = P(Y, \bar{Y})$ una función real, y de este modo, la ecuación anterior se escribe como

$$P_{\bar{Y}} = -Z^{-1}Y_{|3}P, \quad (2.18)$$

y por lo tanto, se encuentra que $Z^{-1}Y_{|3}$ es también una función de Y y \bar{Y} , por lo que se obtiene

$$(Z^{-1}Y_{|3})_{|2} = \bar{Z}(Z^{-1}Y_{|3})_{\bar{Y}} = \bar{Z}Z^{-2}Y_{|3}Y_{|3},$$

así, se sigue que $P_{\bar{Y}\bar{Y}} = 0$ y como P es una función real entonces $P_{Y\bar{Y}} = 0$, es decir, P es de la forma

$$P = pY\bar{Y} + qY + \bar{q}\bar{Y} + c, \quad (2.19)$$

con p, c números reales y q un número complejo.

Ahora, recordamos que $Y_{|2} = Y_{|4} = 0$, por lo que

$$dY = Ze^1 + Y_{|3}e^3,$$

luego, usando la ecuación 2.18 se obtiene

$$dY = P^{-1}Z(Pe^1 - P_{\bar{Y}}e^3),$$

y recordando que $e^a = e^a_{\mu}dx^{\mu}$, podemos escribir la expresión anterior como

$$dY = P^{-1}Z[(qY + c)(d\zeta - Ydv) - (pY + \bar{q})(du + Yd\bar{\zeta})],$$

o de manera equivalente

$$\begin{aligned} dY = Y_{,\mu}dx^{\mu} &= -P^{-1}Z(pY^2 + \bar{q}Y)d\bar{\zeta} + P^{-1}Z(qY + c)d\zeta \\ &\quad - P^{-1}Z(qY^2 + cY)dv - P^{-1}Z(\bar{q} + pY)du, \end{aligned} \quad (2.20)$$

cuya solución general está dada de manera implícita por la ecuación [14, p. 1851]

$$F = 0, \quad F = \phi + (qY + c)(\zeta - Yv) - (pY + \bar{q})(u + Y\bar{\zeta}), \quad (2.21)$$

donde $\phi = \phi(Y)$. Al derivar la expresión anterior con respecto a Y obtenemos que [14, p. 1851]

$$Z = -PF_Y^{-1}. \quad (2.22)$$

De este modo, hemos encontrado que el intervalo descrito en la ecuación 2.12 toma la forma

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv + mP^{-3}(Z + \bar{Z})(du + Yd\bar{\zeta} + \bar{Y}d\zeta - Y\bar{Y}dv)^2,$$

donde P está dado por la ecuación 2.19, Y está definida de manera implícita por la ecuación 2.21 y Z se puede obtener usando la ecuación 2.22

2.4. Vectores de Killing y la solución general

Si definimos el siguiente campo vectorial [14, p. 1851]

$$\xi = \xi^\mu \partial_\mu = q\partial_\zeta + \bar{q}\partial_{\bar{\zeta}} - p\partial_v + c\partial_u, \quad (2.23)$$

entonces utilizando la ecuación 2.20 podemos verificar directamente que

$$\begin{aligned} \xi(Y) &= \xi^\mu Y_{,\mu} = -P^{-1}Z(pY^2 + \bar{q}Y)(q) + P^{-1}Z(qY + c)(\bar{q}) \\ &\quad - P^{-1}Z(qY^2 + cY)(-p) - P^{-1}Z(\bar{q} + pY)(c) \\ &= P^{-1}Z(-qpY^2 - q\bar{q}Y + q\bar{q}Y + c\bar{q}) \\ &\quad + P^{-1}Z(qpY^2 + cpY - c\bar{q} - cpY) = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\xi^\mu Y_{,\mu} = 0,$$

y como el vector ξ es real, se verifica también que

$$\xi^\mu \bar{Y}_{,\mu} = 0.$$

Ahora, como el vector e_1 está dado por

$$e_1 = e_1^\mu \partial_\mu = \partial_\zeta - \bar{Y}\partial_u,$$

entonces sus componentes en la base coordenada son

$$(0, 1, 0, -\bar{Y}),$$

y podemos verificar que $[e_1, \xi] = 0$, pues se tiene que

$$[e_1, \xi]^\mu = e_1^\nu \xi^\mu_{,\nu} - e_1^\mu_{,\nu} \xi^\nu = -e_1^\mu_{,\nu} \xi^\nu,$$

de modo que las primeras tres componentes de $[e_1, \xi]^\mu$ son cero porque las primeras tres componentes de e_1 son constantes, mientras que

$$[e_1, \xi]^u = -e_1^u{}_{,\nu} \xi^\nu = \xi^\nu \bar{Y}_{,\nu} = 0,$$

así, se tiene que $[e_1, \xi]^\mu = 0$ y por lo tanto se verifica que $[e_1, \xi] = 0$. Así, usando este resultado tenemos que también se cumple que

$$\xi(Z) = \xi(Y_{|1}) = \xi(e_1(Y)) = e_1(\xi(Y)) = e_1(0) = 0,$$

esto es,

$$\xi^\mu Z_{,\mu} = 0,$$

y nuevamente, como el vector ξ es real, también se cumple que

$$\xi^\mu \bar{Z}_{,\mu} = 0.$$

Por otro lado, tenemos que la derivada de Lie de g con respecto a ξ es

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda + g_{\mu\lambda} \xi^\lambda{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda{}_{,\mu} = g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda \\ &= (\eta_{\mu\nu} + 2Hk_\mu k_\nu)_{,\lambda} \xi^\lambda = 2(Hk_\mu k_\nu)_{,\lambda} \xi^\lambda \\ &= 2H_{,\lambda} k_\mu k_\nu \xi^\lambda + 2Hk_{\mu,\lambda} k_\nu \xi^\lambda + 2Hk_\mu k_{\nu,\lambda} \xi^\lambda. \end{aligned}$$

Para calcular esta derivada de Lie, usando que $H = mP^{-3}(Z + \bar{Z})$ se tiene que

$$H_{,\lambda} = (mP^{-3}(Z + \bar{Z}))_{,\lambda} = m(-3P^{-4}P_{,\lambda}(Z + \bar{Z}) + P^{-3}(Z_{,\lambda} + \bar{Z}_{,\lambda})),$$

donde $P_{,\lambda} = pY\bar{Y}_{,\lambda} + pY_{,\lambda}\bar{Y} + qY_{,\lambda} + \bar{q}\bar{Y}_{,\lambda}$, por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} H_{,\lambda} \xi^\lambda &= m(-3P^{-4}P_{,\lambda}(Z + \bar{Z}) + P^{-3}(Z_{,\lambda} + \bar{Z}_{,\lambda})) \xi^\lambda \\ &= -3mP^{-4}P_{,\lambda} \xi^\lambda (Z + \bar{Z}) + P^{-3}(Z_{,\lambda} \xi^\lambda + \bar{Z}_{,\lambda} \xi^\lambda) \\ &= -3mP^{-4}(pY\bar{Y}_{,\lambda} \xi^\lambda + pY_{,\lambda} \bar{Y} \xi^\lambda + qY_{,\lambda} \xi^\lambda + \bar{q}\bar{Y}_{,\lambda} \xi^\lambda)(Z + \bar{Z}) = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$H_{,\lambda} \xi^\lambda = 0, \quad (2.24)$$

y por otro lado, como $k_\alpha dx^\alpha = du + Yd\bar{\zeta} + \bar{Y}d\zeta - Y\bar{Y}dv$ entonces se sigue que

$$k_{\alpha,\lambda} \xi^\lambda = Y_{,\lambda} \xi^\lambda + \bar{Y}_{,\lambda} \xi^\lambda - Y_{,\lambda} \bar{Y} \xi^\lambda - Y\bar{Y}_{,\lambda} \xi^\lambda = 0, \quad (2.25)$$

de este modo, usando las ecuaciones 2.24 y 2.25 se sigue que

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 2H_{,\lambda} k_\mu k_\nu \xi^\lambda + 2Hk_{\mu,\lambda} k_\nu \xi^\lambda + 2Hk_\mu k_{\nu,\lambda} \xi^\lambda = 0,$$

es decir, el campo vectorial ξ definido en la ecuación 2.23 es un vector de Killing para las métricas de Kerr-Schild. Además, como las componentes de ξ son constantes, ξ es también un vector de Killing de la métrica de Minkowski [14, p. 1851].

Tenemos que, con respecto a la métrica de Minkowski, el vector ξ puede ser tipo tiempo, tipo espacio o nulo, por lo que podemos considerar cada caso por separado. Más aún, en cada caso podemos realizar una transformación de Lorentz para hacer que el vector ξ apunte en la dirección t , en la dirección z o en la dirección $t + z$, respectivamente, por lo que podemos considerar sin pérdida de generalidad sólo estos 3 casos [14, p. 1852].

1. $\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu < 0$: en este caso podemos suponer que ξ apunta en la dirección de t , por lo tanto

$$\xi = \partial_t = \frac{\partial_u - \partial_v}{\sqrt{2}},$$

es decir, $q = 0$, $p = c = 2^{-\frac{1}{2}}$. En este caso, la función P toma la forma $P = 2^{-\frac{1}{2}}(1 + Y\bar{Y})$. Por otro lado, Y queda definida por

$$F = 0, \quad F = \phi + 2^{-\frac{1}{2}}(\zeta - Yv) - 2^{-\frac{1}{2}}Y(u + Y\bar{\zeta}),$$

mientras que $Z = -PF_Y^{-1} = -2^{-\frac{1}{2}}(1 + Y\bar{Y})/F_Y$, de modo que

$$Z + \bar{Z} = -2^{\frac{1}{2}}(1 + Y\bar{Y}) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{F_Y} \right],$$

luego, en este caso la métrica se escribe como

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv - 4m \operatorname{Re} \left[\frac{1}{F_Y} \right] \left[\frac{du + Yd\bar{\zeta} + \bar{Y}d\zeta - Y\bar{Y}dv}{1 + Y\bar{Y}} \right]^2.$$

2. $\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu > 0$: ahora hacemos coincidir al vector de Killing ξ con la dirección z , es decir

$$\xi = \partial_z = \frac{\partial_u + \partial_v}{\sqrt{2}},$$

y en este caso, $q = 0$, $c = -p = 2^{-\frac{1}{2}}$, $P = 2^{-\frac{1}{2}}(1 - Y\bar{Y})$ y la función Y queda definida por

$$F = 0, \quad F = \phi + 2^{-\frac{1}{2}}(\zeta - Yv) + 2^{-\frac{1}{2}}Y(u + Y\bar{\zeta}),$$

y análogamente al caso anterior, se encuentra que la métrica se escribe como

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv - 4m \operatorname{Re} \left[\frac{1}{F_Y} \right] \left[\frac{du + Yd\bar{\zeta} + \bar{Y}d\zeta - Y\bar{Y}dv}{1 - Y\bar{Y}} \right]^2.$$

3. $\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0$: en este caso, el vector ξ apunta en la dirección $t + z$, por lo que podemos hacer $\xi = \partial_u$, es decir, $p = q = 0$, $c = 1$. Ahora, $P = 1$ y Y está dada por

$$F = 0, \quad F = \phi + \zeta - Yv,$$

mientras que la métrica se escribe como

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv - 2m \operatorname{Re} \left[\frac{1}{F_Y} \right] (du + Yd\bar{\zeta} + \bar{Y}d\zeta - Y\bar{Y}dv)^2.$$

2.5. La métrica de Kerr

Consideremos la solución particular dada por [14, p. 1853]

$$P = 2^{-\frac{1}{2}}(1 + Y\bar{Y}), \quad \phi(Y) = -iaY,$$

es decir, una solución tal que ∂_t es un vector de Killing, donde a una constante real positiva. Usando los resultados de la sección anterior, tenemos que la métrica se escribe como

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv - 4m \operatorname{Re} \left[\frac{1}{F_Y} \right] \left[\frac{du + Yd\bar{\zeta} + \bar{Y}d\zeta - Y\bar{Y}dv}{1 + Y\bar{Y}} \right]^2,$$

con Y definida implícitamente por

$$F = 0, \quad F = -iaY + 2^{-\frac{1}{2}}(\zeta - Yv) - 2^{-\frac{1}{2}}Y(u + Y\bar{\zeta}).$$

Así, expresando F en coordenadas cartesianas, encontramos que $F = 0$ si y sólo si

$$Y^2(x - iy) + 2(z + ia)Y - (x + iy) = 0. \quad (2.26)$$

Si definimos a la función real r de manera implícita como

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

entonces podemos expresar una solución de la ecuación 2.26 como

$$Y = \frac{(r - z)(r - ia)}{r(x - iy)},$$

de modo que

$$Y\bar{Y} = \frac{r - z}{r + z}.$$

Finalmente, encontramos que

$$F_Y = Y(x - iy) - (z + ia) = \frac{-(r^2 + ia z)}{r}.$$

Así, sustituyendo estos resultados en la expresión para la métrica, se obtiene que

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[dt + \frac{z}{r} dz + \frac{r}{r^2 + a^2} (x dx + y dy) - \frac{a}{r^2 + a^2} (x dy - y dx) \right]^2.$$

Ésta es la métrica de Kerr, obtenida por primera vez en 1963 por Roy Kerr al estudiar métricas algebraicamente especiales (en [15] se muestra la deducción original de Kerr). Para entender el significado físico de esta métrica, notamos

que cuando el parámetro $a = 0$ entonces $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, y la métrica se escribe como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2m}{r} \left(dt + \frac{xdx + ydy + zdz}{r} \right)^2,$$

que es la expresión de la ecuación 2.1, es decir, es la métrica de Schwarzschild en su forma de Kerr-Schild, la cual modela el campo gravitacional en el exterior de un cuerpo de masa m con simetría esférica. Ahora, para entender el significado físico del parámetro a , conviene expresar la métrica de Kerr en un nuevo sistema de coordenadas. Realizando la transformación de coordenadas [16, p. 11]

$$x + iy = (r' - ia)e^{i\phi'} \sin \theta', \quad z = r' \cos \theta', \quad r' = r, \quad t' = t,$$

encontramos que la métrica de Kerr se escribe como

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + 2a \sin^2 \theta' dr' d\phi' + (r'^2 + a^2 \cos^2 \theta') d\theta'^2 \\ + (r'^2 + a^2) \sin^2 \theta' d\phi'^2 + \frac{2mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'} (dt' + dr' + a \sin^2 \theta' d\phi')^2.$$

Si ahora hacemos el cambio de coordenadas [16, p. 14]

$$t' = t + 2m \int \frac{r dr}{r^2 - 2mr + a^2}, \quad \phi' = -\phi - a \int \frac{dr}{r^2 - 2mr + a^2}, \\ r' = r, \quad \theta' = \theta,$$

entonces la métrica de Kerr se escribe como

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] dt^2 - \frac{4mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \\ + \left[\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} \right] dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ + \left[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\phi^2,$$

que es la expresión de la métrica en las coordenadas de Boyer y Lindquist. Si ahora tomamos la aproximación $r \gg 1$, es fácil verificar que la expresión anterior se escribe como

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2m}{r} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2m}{r} \right]^{-1} dr^2 \\ + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{4ma \sin^2 \theta}{r} dt d\phi,$$

que es la métrica de Lense-Thirring, la cual describe el exterior de un cuerpo con simetría esférica y masa m que gira alrededor del eje z con momento angular $J = ma$, en la aproximación de campo gravitacional débil o lejano (ver,

por ejemplo, [17, p. 303]). Así, encontramos que la métrica de Kerr describe el campo gravitacional exterior de un cuerpo simétricamente esférico de masa m y momento angular por unidad de masa a . Más aún, así como el teorema de Birkhoff nos asegura que la solución de Schwarzschild es la única solución a las ecuaciones de campo en el vacío, con simetría esférica, estática y asintóticamente plana (ver, por ejemplo, [2, p. 250]), en la década de los setentas se demostró que la métrica de Kerr (con $m > a$) es la única solución estacionaria y asintóticamente plana a las ecuaciones de Einstein con un horizonte de eventos no degenerado [18]. Aunque el caso más estudiado de la métrica de Kerr es justo cuando $m > a$, el caso $m = a$ ha adquirido relevancia recientemente, principalmente en el contexto de la conjetura Kerr/CFT (ver, por ejemplo, [19]), y en este caso, también ha sido demostrado que la única solución a las ecuaciones de Einstein estacionaria, con momento angular distinto de cero y asintóticamente plana (en cuatro dimensiones) con un horizonte de eventos degenerado es justo la métrica de Kerr, cuando $m = a$ [20].

Notamos que la métrica de Kerr además de ser estacionaria es axisimétrica, pues en las coordenadas de Boyer-Lindquist la métrica no depende explícitamente de la coordenada ϕ por lo que $\xi = \partial_\phi$ es también un vector de Killing para esta métrica, es decir, la métrica de Kerr es invariante bajo traslaciones en la coordenada ϕ , o de manera equivalente, ante rotaciones en el plano xy alrededor del eje z .

Resulta natural preguntarse si la métrica de Kerr posee más vectores de Killing independientes además de ∂_t y ∂_ϕ . Para responder, recordamos que la métrica de Kerr contiene como caso límite a la métrica de Schwarzschild, por lo que cualquier vector de Killing de la métrica de Kerr debe ser también un vector de Killing de la métrica de Schwarzschild. Luego, los vectores de Killing de la métrica de Schwarzschild que falta por analizar son los dos vectores de Killing correspondientes a rotaciones en los planos xy y yz . Por otro lado, se sabe que el escalar de curvatura de Kretschmann para la métrica de Kerr en las coordenadas de Boyer y Lindquist está dado por [16, p. 16]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48m^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)[(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6},$$

de modo que la métrica de Kerr es singular cuando $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, es decir, cuando $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, o de manera equivalente, cuando $z = 0$ y $x^2 + y^2 = a^2$. Así, la métrica de Kerr tiene todo un anillo en el plano xy donde es singular, es decir, tiene una región distinguida en el plano xy por lo que se concluye que esta métrica no puede ser invariante ante rotaciones en los planos coordenados restantes y por tanto, sus únicos vectores de Killing son ∂_t y ∂_ϕ .

Recordamos de la sección 1.4 que para encontrar el movimiento de partículas masivas en la métrica de Schwarzschild, la simetría esférica nos redujo un grado de libertad (la coordenada θ), restando tres grados de libertad, que fue posible reducir a uno usando los vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ . Así, en el caso de la métrica de Kerr, la ausencia de simetría esférica resulta un problema para encontrar las ecuaciones de movimiento de partículas en este espacio-tiempo, pues sólo

podemos reducir el problema en dos grados de libertad. Sin embargo, la métrica de Kerr posee un tensor de Killing de orden dos (definición 1.8), el cual está dado en las coordenadas de Boyer y Lindquist por [9, p. 263]

$$K_{\mu\nu} = 2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 t_{(\mu} s_{\nu)} - r^2 g_{\mu\nu},$$

donde t está dado por

$$t^\mu = \frac{1}{r^2 - 2mr + a^2} (r^2 + a^2, r^2 - 2mr + a^2, 0, a),$$

y s es igual a

$$s^\mu = \frac{1}{2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} (r^2 + a^2, -r^2 + 2mr - a^2, 0, a).$$

De este modo, usando la proposición 1.10 obtenemos otra cantidad conservada a lo largo de las geodésicas, también conocida como constante de Carter, en honor a Brandon Carter, quien la descubrió en 1968 a partir de la teoría de Hamilton-Jacobi, como se muestra en [21]. Esta cantidad conservada nos reduce el problema de las orbitas en la métrica de Kerr en un grado de libertad más, haciendo que el problema sea completamente integrable.

Por otro lado, la cuestión más interesante que surge después de haber obtenido la solución general de las métricas de Kerr-Schild en el vacío y encontrar entre estas soluciones la métrica de Kerr, es qué significado físico tienen todas las demás métricas obtenidas. Como vimos en la sección 2.4, las métricas de Kerr-Schild se pueden clasificar de acuerdo al vector de Killing que (al menos) éstas tienen. El caso más interesante es sin duda, cuando el vector de Killing es tipo tiempo, pues en este caso la métrica de Kerr-Schild correspondiente es estacionaria. Y es en este caso donde más se ha investigado al respecto: se sabe que todas las métricas de Kerr-Schild poseen al menos una singularidad [8, p. 494] y está demostrado que la única métrica de Kerr-Schild estacionaria cuyas singularidades están confinadas en una región acotada es justo la métrica de Kerr [22], por lo que la única métrica que da lugar a soluciones de agujeros negros es la métrica de Kerr (más aún, esto tampoco ocurre en la métrica de Kerr salvo en el caso $m > a$ [9, p. 263]), mientras que el resto de las soluciones corresponden a singularidades desnudas.

Capítulo 3

Transformaciones de Kerr-Schild

En este capítulo nos dedicamos a estudiar las transformaciones de Kerr-Schild. Comenzamos la primera sección ilustrando cómo es que se generalizan las métricas de Kerr-Schild a las transformaciones de Kerr-Schild y mencionando algunas propiedades básicas de estas transformaciones. En la segunda sección desarrollamos el formalismo de Newman-Penrose, que es el formalismo utilizado en las secciones siguientes. Teniendo la herramienta del formalismo de Newman-Penrose, en la tercera sección estudiamos la manera en la cual se relacionan la conexión y la curvatura entre una métrica y su respectiva transformación de Kerr-Schild, y usando estos resultados, en la siguiente sección estudiamos cómo se relacionan los tensores de energía momento entre una métrica y su transformación. Terminamos el capítulo desarrollando algunos ejemplos concretos de los resultados obtenidos en las secciones anteriores y discutiendo brevemente el papel actual de las transformaciones de Kerr-Schild como un método de generación de soluciones exactas.

En este capítulo asumimos que la signatura del espacio-tiempo es -2 , de modo que la métrica de Minkowski ahora se escribe en coordenadas cartesianas como $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$. Este cambio en la signatura se hace únicamente para tener compatibilidad con el formalismo de Newman-Penrose.

3.1. Introducción

En el capítulo anterior resolvimos las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío para las métricas de Kerr-Schild, que son métricas de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + n_{\mu}n_{\nu},$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas y n un vector nulo con respecto a η (y consecuentemente con respecto

a g). Como vimos en el capítulo anterior, entre estas métricas está la métrica de Kerr, que describe el exterior de un cuerpo de masa m con simetría esférica que gira alrededor del eje z con momento angular $J = ma$.

Podemos pensar a las soluciones que encontramos en el capítulo anterior como transformaciones del espacio-tiempo plano de Minkowski en un espacio-tiempo distinto. Siguiendo esta idea, podemos generalizar lo que hemos hecho y quitar la restricción de partir de la métrica de Minkowski [23, p. 1879]: dado un tensor métrico g , podemos construir un nuevo espacio-tiempo \hat{g} como

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu,$$

donde n es un vector tal que $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0$, es decir, un vector nulo con respecto a g . El signo negativo es debido a nuestra elección de la signatura para recuperar algunos de los resultados anteriores, por ejemplo, la métrica de Schwarzschild, que ahora se escribe en su forma de Kerr-Schild como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2m}{r} \left(dt + \frac{xdx + ydy + zdz}{r} \right)^2.$$

A las transformaciones que nos llevan del tensor métrico g al tensor métrico \hat{g} se le conoce como transformaciones de Kerr-Schild, o KST de manera breve.

Análogamente al caso en el que el tensor métrico g es la métrica de Minkowski, podemos recuperar algunas propiedades básicas, por ejemplo, el tensor métrico inverso para \hat{g} está dado por $\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} n_\alpha n_\beta$, pues tenemos que

$$\begin{aligned} (g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} n_\alpha n_\beta) \hat{g}_{\nu\gamma} &= (g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} n_\alpha n_\beta) (g_{\nu\gamma} - n_\nu n_\gamma) \\ &= \delta^\mu_\gamma - g^{\mu\nu} n_\nu n_\gamma + g^{\mu\alpha} n_\alpha n_\gamma - g^{\mu\alpha} n_\alpha n_\gamma (g^{\nu\beta} n_\nu n_\beta) = \delta^\mu_\gamma, \end{aligned}$$

luego, de esto se sigue que $\hat{g}^{\mu\nu} n_\nu = (g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} n_\alpha n_\beta) n_\nu = g^{\mu\nu} n_\nu$. Además también tenemos que n es un vector nulo con respecto a la nueva métrica, pues se tiene que

$$\hat{g}^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = (g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} n_\alpha n_\beta) n_\mu n_\nu = 0.$$

Para estudiar más a fondo las propiedades de una KST introducimos ahora el formalismo de Newman-Penrose, el cual está basado en el formalismo de las bases de vectores nulos usado en la sección 2.3.

3.2. El formalismo de Newman-Penrose

Dado el tensor métrico g , elegimos una base de vectores nulos o tétrada nula $\{e_a\}$, con e_1, e_2 vectores reales y e_3, e_4 vectores complejos, con $\bar{e}_3 = e_4$, tales que en esta base el tensor métrico se escriba como [24, p. 567]

$$g_{ab} = g(e_a, e_b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = g^{ab} = g(e^a, e^b),$$

que es una matriz de permutación, por lo que bajar y subir índices numéricos equivale a la permutación $(1234) \rightarrow (2143)$, agregando un signo menos al permutar 3 o 4, por ejemplo, se tiene que $\{e^1, e^2, e^3, e^4\} = \{e_2, e_1, -e_4, -e_3\}$. El complejo conjugado de cualquier objeto geométrico se obtiene al realizar la permutación $(1234) \rightarrow (1243)$. En este formalismo, los vectores base se denotan por $\{e_a\} = \{l, n, m, \bar{m}\}$ [24, p. 566]. Suponiendo que se tiene una base coordenada $\{\partial_\mu\}$, podemos calcular la derivada intrínseca de una función escalar φ con respecto a los vectores base como $\varphi|_b = e_b(\varphi) = e_b^\mu \partial_\mu \varphi = \varphi_{,\mu} e_b^\mu$. Denotamos a estas derivadas intrínsecas como [25, p. 42]

$$\begin{aligned}\varphi|_1 &= \varphi_{,\mu} e_1^\mu = \varphi_{,\mu} l^\mu = D\varphi, \\ \varphi|_2 &= \varphi_{,\mu} e_2^\mu = \varphi_{,\mu} n^\mu = \Delta\varphi, \\ \varphi|_3 &= \varphi_{,\mu} e_3^\mu = \varphi_{,\mu} m^\mu = \delta\varphi, \\ \varphi|_4 &= \varphi_{,\mu} e_4^\mu = \varphi_{,\mu} \bar{m}^\mu = \bar{\delta}\varphi.\end{aligned}$$

Como podemos notar, en realidad las derivadas intrínsecas $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ son otra manera para denotar a los vectores base l, n, m, \bar{m} , haciendo énfasis en su carácter de operadores diferenciales. Cabe recalcar que estas dos maneras de denotar a los vectores base no deben mezclarse entre sí, además de que nunca se encontrarán expresiones como D^μ o Δ^ν : siempre que queramos referirnos a las componentes de los vectores $\{e_a\}$ en la base coordenada, denotaremos a éstos como $\{e_a\} = \{l, n, m, \bar{m}\}$.

Recordamos ahora de la sección 2.3 que los coeficientes de rotación de Ricci, que son los coeficientes de la conexión en la base $\{e_a\}$, se pueden escribir como

$$\Gamma_{bc}^a = -e_{\mu;\nu}^a e_b^\mu e_c^\nu.$$

Definimos a los 12 coeficientes de spin en términos de los coeficientes de rotación de Ricci como [25, p. 42]

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(\Gamma_{214} + \Gamma_{344}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu), \\ \beta &= \frac{1}{2}(\Gamma_{213} + \Gamma_{343}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu), \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\Gamma_{212} + \Gamma_{342}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu), \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(\Gamma_{211} + \Gamma_{341}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu), \\ \lambda &= \Gamma_{244} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu, \\ \mu &= \Gamma_{243} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu, \\ \nu &= \Gamma_{242} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu, \\ \pi &= \Gamma_{241} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu, \\ \rho &= \Gamma_{314} = l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \\ \sigma &= \Gamma_{313} = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu, \\ \tau &= \Gamma_{312} = l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu, \\ \kappa &= \Gamma_{311} = l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu.\end{aligned}$$

Es fácil ver que conocer los coeficientes de spin es suficiente para determinar toda la conexión, pues recordando de la sección 2.3 que las 1-formas de conexión Γ_{ab} se definen como $\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc}e^c$, podemos escribir a las 1-formas de conexión $\Gamma_{24}, \Gamma_{31}, \Gamma_{21} + \Gamma_{34}$ en términos de éstos coeficientes como

$$\begin{aligned}\Gamma_{24} &= \pi e^1 + \nu e^2 + \mu e^3 + \lambda e^4, \\ \Gamma_{31} &= \kappa e^1 + \tau e^2 + \sigma e^3 + \rho e^4, \\ \Gamma_{21} + \Gamma_{34} &= 2\epsilon e^1 + 2\gamma e^2 + 2\beta e^3 + 2\alpha e^4,\end{aligned}$$

y por conjugación compleja y usando la propiedad de antisimetría $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$ podemos determinar el resto de las 1-formas de conexión faltantes y por tanto, conocer toda la conexión. Recíprocamente, se pueden encontrar los coeficientes de spin al calcular las 1-formas de conexión $\Gamma_{24}, \Gamma_{31}, \Gamma_{21} + \Gamma_{34}$, lo cual en particular se puede hacer usando las ecuaciones 2.14 y 2.15, tal como hicimos en el capítulo anterior.

Antes de continuar veamos la interpretación geométrica que tienen los coeficientes de spin. Notemos primero que podemos escribir a la base coordenada en términos de la base de vectores nulos como $\partial_\mu = e^a_\mu e_a$, de modo que el tensor métrico en la base coordenada se puede escribir como [26, p.124]

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g(e^a_\mu e_a, e^b_\nu e_b) = e^a_\mu e^b_\nu g(e_a, e_b) = e^a_\mu e^b_\nu g_{ab} \\ &= e^1_\mu e^2_\nu + e^2_\mu e^1_\nu - e^3_\mu e^4_\nu - e^4_\mu e^3_\nu \\ &= n_\mu l_\nu + l_\mu n_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu,\end{aligned}$$

y por lo tanto también tenemos que

$$\delta^\mu_\nu = n^\mu l_\nu + l^\mu n_\nu - \bar{m}^\mu m_\nu - m^\mu \bar{m}_\nu,$$

así, usando la ecuación anterior se tiene que [26, p.144]

$$\begin{aligned}l_{\mu;\nu}l^\nu &= \delta^\alpha_\mu l_{\alpha;\nu}l^\nu = (n^\alpha l_\mu + l^\alpha n_\mu - \bar{m}^\alpha m_\mu - m^\alpha \bar{m}_\mu)l_{\alpha;\nu}l^\nu \\ &= l_{\alpha;\nu}n^\alpha l^\nu l_\mu - l_{\alpha;\nu}\bar{m}^\alpha l^\nu m_\mu - l_{\alpha;\nu}m^\alpha l^\nu \bar{m}_\mu \\ &= (\epsilon + \bar{\epsilon})l_\mu - \bar{\kappa}m_\mu - \kappa\bar{m}_\mu,\end{aligned}$$

así, cuando $\kappa = 0$ se tiene que $(\nabla_l l)_\mu = l_{\mu;\nu}l^\nu \propto l_\mu$ es decir, en este caso l es un vector geodésico. Además, del mismo modo que en la sección 2.2, podemos hacer un reescalamiento del vector l de modo que $\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$ [24, p. 571] y por lo tanto $l_{\mu;\nu}l^\nu = 0$. Análogamente podemos verificar que que

$$n_{\mu;\nu}n^\nu = -(\gamma + \bar{\gamma})n_\mu + \nu m_\mu + \bar{\nu}\bar{m}_\mu,$$

por lo que si $\nu = 0$ entonces n es geodésico y también podemos reescalar el vector n de modo que $\gamma + \bar{\gamma} = 0$.

Por otro lado, podemos entender el significado físico de los coeficientes ρ y σ con el siguiente experimento [27, p. 317]: como el vector nulo l es geodésico, entonces su flujo representa trayectorias de rayos de luz; supongamos que estos rayos de luz se encuentran ortogonalmente con un objeto plano, entonces

si colocamos una pantalla, también ortogonal a los rayos de luz, a una distancia infinitesimal del objeto, veremos su sombra, la cual estará posiblemente expandida, rotada y deformada. Como se demuestra en [27, p. 318], podemos cuantificar esta expansión, rotación y deformación de nuestro objeto por las tres cantidades $\text{div}(l)$, $\text{curl}(l)$, $\text{shear}(l)$ respectivamente, también llamadas escalares ópticos, las cuales se ilustran en la figura 3.1 y se definen como

$$\begin{aligned}\text{div}(l) &= l^\mu{}_{;\mu}, \\ \text{curl}(l) &= (l_{[\mu;\nu]}l^{\mu;\nu})^{\frac{1}{2}}, \\ |\text{shear}(l)|^2 &= \frac{1}{2} \left[l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} - \frac{1}{2} (l^\mu{}_{;\mu})^2 \right].\end{aligned}$$

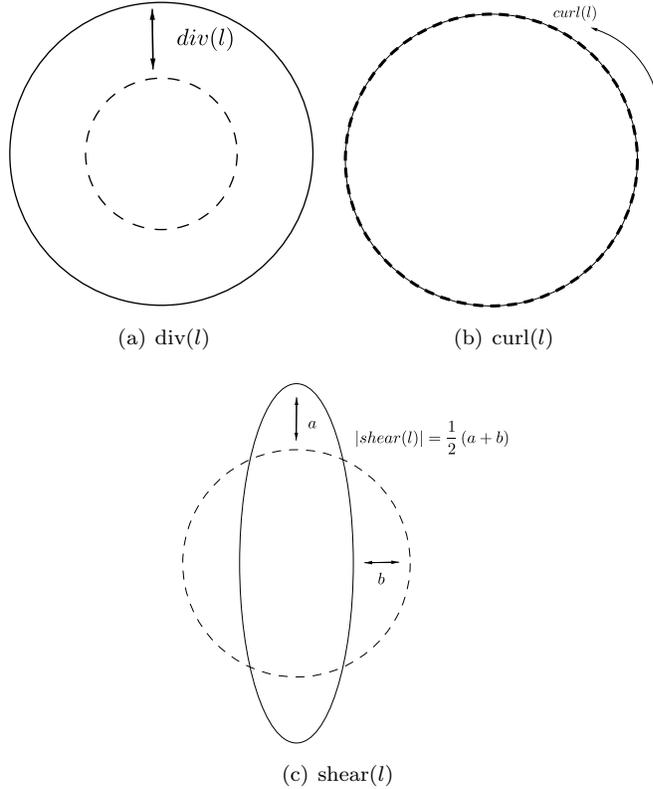


Figura 3.1: Interpretación geométrica de los escalares ópticos $\text{div}(l)$, $\text{curl}(l)$ y $\text{shear}(l)$.

De este modo, resulta que ρ y σ se relacionan con los escalares ópticos por

medio de [26, p. 144]

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2} [-\operatorname{div}(l) + i \operatorname{curl}(l)], \\ \sigma\bar{\sigma} &= |\operatorname{shear}(l)|^2,\end{aligned}$$

siempre que $\kappa = \epsilon + \bar{\epsilon} = 0$. Los coeficientes de spin μ, λ juegan el mismo papel para el campo vectorial nulo n que los coeficientes $-\rho, -\sigma$ para el campo vectorial l , siempre que $\nu = \gamma + \bar{\gamma} = 0$ [24, p. 571].

Por otro lado, el coeficiente de spin τ nos cuantifica el cambio del vector l cuando nos movemos paralelamente a lo largo de la dirección n [24, p. 571], pues se tiene que

$$\begin{aligned}l_{\mu;\nu}n^\nu &= \delta_\mu^\alpha l_{\alpha;\nu}n^\nu = (n^\alpha l_\mu + l^\alpha n_\mu - \bar{m}^\alpha m_\mu - m^\alpha \bar{m}_\mu)l_{\alpha;\nu}n^\nu \\ &= l_{\alpha;\nu}n^\alpha n^\nu l_\mu - l_{\alpha;\nu}\bar{m}^\alpha n^\nu m_\mu - l_{\alpha;\nu}m^\alpha n^\nu \bar{m}_\mu \\ &= (\gamma + \bar{\gamma})l_\mu - \bar{\tau}m_\mu - \tau\bar{m}_\mu,\end{aligned}$$

de modo que si $\gamma + \bar{\gamma} = 0$ (lo cual podemos conseguir haciendo un reescalamiento en n , como ya hemos visto) entonces $l_{\mu;\nu}n^\nu = -(\bar{\tau}m_\mu + \tau\bar{m}_\mu)$. El coeficiente de spin π juega un papel análogo para el vector n , cuando $\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$ [24, p. 571]. Además cuando $\kappa = \epsilon = \pi = 0$, toda la base de vectores nulos se transporta paralelamente a lo largo de la dirección l y cuando $\nu = \gamma = \tau = 0$ la base de vectores nulos se transporta paralelamente a lo largo de la dirección n [24, p. 571]. Esto resulta ser relevante en tanto que las perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas se propagan en la dirección de vectores nulos, de modo que si la dirección de alguna de estas perturbaciones coincide por ejemplo, con el vector n , y $\nu = \gamma = \tau = 0$, entonces toda la base se propaga paralelamente en la misma dirección, y por lo tanto cualquier cantidad definida en términos de la base, por ejemplo, el tensor de curvatura, también se propaga paralelamente en esa dirección nula.

Por otro lado, tenemos que l es un vector ortogonal a una hipersuperficie (es decir, proporcional al gradiente de alguna función) si y sólo si $\rho = \bar{\rho}$ [24, p. 571], pues usando que $l_{\mu;\nu} = -\Gamma_{1ab}e_\mu^a e_\nu^b$ [25, p. 56] y suponiendo que $\kappa = \epsilon + \bar{\epsilon} = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}l_{\mu;\nu} &= (\gamma + \bar{\gamma})l_\mu l_\nu - (\bar{\alpha} + \beta)l_\mu \bar{m}_\nu - (\alpha + \bar{\beta})l_\mu m_\nu - \tau\bar{m}_\mu l_\nu \\ &\quad + \sigma\bar{m}_\mu \bar{m}_\nu + \bar{\sigma}m_\mu m_\nu + \rho\bar{m}_\mu m_\nu + \bar{\rho}m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{\tau}m_\mu l_\nu,\end{aligned}$$

y por lo tanto se sigue que [25, p. 57]

$$l_{[\mu;\nu}l_{\alpha]} = (\rho - \bar{\rho})\bar{m}_{[\mu}m_\nu l_{\alpha]},$$

de modo que por el teorema de Frobenius, l es proporcional al gradiente de una función si y sólo si $l_{[\mu;\nu}l_{\alpha]} = 0$ [26, p. 146] y por lo tanto si y sólo si $\rho = \bar{\rho}$. Análogamente se demuestra que n es ortogonal a una hipersuperficie si y sólo si $\mu = \bar{\mu}$ [26, p. 146].

Veamos ahora cómo se expresa en este formalismo el tensor de curvatura. De la sección 2.3 recordamos que las 2-formas de curvatura Θ_{ab} se definen como

$$\Theta_{ab} = \frac{1}{2} R_{abcd} e^c \wedge e^d,$$

por lo que conocer las 2-formas de curvatura equivale a conocer el tensor de curvatura de Riemann. En particular para calcular la curvatura nos basta determinar las 2-formas de curvatura Θ_{24} , Θ_{31} y $\Theta_{21} + \Theta_{34}$, pues por conjugación compleja se obtienen las 2-formas Θ_{23} , Θ_{41} y $\Theta_{21} + \Theta_{43}$ y usando la propiedad de antisimetría $\Theta_{ab} = -\Theta_{ba}$ podemos determinar a todas las 2-formas de curvatura.

Recordamos ahora que podemos escribir al tensor de Riemann en términos del tensor de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci como

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= C_{abcd} - \frac{1}{2} (g_{ac} R_{bd} - g_{bc} R_{ad} - g_{ad} R_{bc} + g_{bd} R_{ac}) \\ &\quad + \frac{1}{6} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) R, \end{aligned}$$

donde el tensor de Weyl tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann [8, p. 37], las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} C_{abcd} &= -C_{abdc}, \\ C_{abcd} &= -C_{bacd}, \\ C_{abcd} &= C_{cdab}, \\ C_{a[bcd]} &= 0, \end{aligned}$$

y además, la traza del tensor de Weyl es cero [8, p. 37], es decir

$$C^a{}_{bad} = 0.$$

Estas simetrías nos permiten escribir las 2-formas de curvatura Θ_{24} , Θ_{31} y $\Theta_{21} + \Theta_{34}$ en términos del tensor de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, lo cual resulta más natural en relatividad que usar el tensor de curvatura de Riemann, pues son el tensor de Ricci y el escalar de Ricci las cantidades geométricas involucradas directamente en las ecuaciones de campo. Por ejemplo, para la 2-forma Θ_{24} tenemos que [25, p. 43]

$$\begin{aligned} \Theta_{24} &= R_{2412} e^1 \wedge e^2 + R_{2413} e^1 \wedge e^3 + R_{2414} e^1 \wedge e^4 \\ &\quad + R_{2423} e^2 \wedge e^3 + R_{2424} e^2 \wedge e^4 + R_{2434} e^3 \wedge e^4 \\ &= (C_{2412} - \frac{1}{2} R_{24}) e^1 \wedge e^2 + (C_{2413} + \frac{1}{12} R) e^1 \wedge e^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} R_{44} e^1 \wedge e^4 + \frac{1}{2} R_{22} e^2 \wedge e^3 + C_{2424} e^2 \wedge e^4 \\ &\quad + (C_{2434} - \frac{1}{2} R_{24}) e^3 \wedge e^4. \end{aligned}$$

Para simplificar estas expresiones escribimos a las cinco componentes (complejas) independientes del tensor de Weyl como [25, p. 43]

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}l^\alpha m^\beta l^\mu m^\nu, \\ \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}l^\alpha n^\beta l^\mu m^\nu, \\ \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}l^\alpha m^\beta \bar{m}^\mu n^\nu, \\ \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}l^\alpha n^\beta \bar{m}^\mu n^\nu, \\ \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{\alpha\beta\mu\nu}n^\alpha \bar{m}^\beta n^\mu \bar{m}^\nu.\end{aligned}$$

También escribimos las componentes del tensor de Ricci y al escalar de Ricci como [25, p. 44]

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, \Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13}, \\ \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, \Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14}, \\ \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, \Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}, \\ \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24}, \Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}, \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), \\ \Lambda &= \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}).\end{aligned}$$

De este modo, podemos reescribir a la 2-forma Θ_{24} como

$$\begin{aligned}\Theta_{24} &= (\Psi_3 + \Phi_{21})e^1 \wedge e^2 + (\Psi_2 + 2\Lambda)e^1 \wedge e^3 \\ &\quad + \Phi_{20}e^1 \wedge e^4 - \Phi_{22}e^2 \wedge e^3 - \Psi_4e^2 \wedge e^4 \\ &\quad + (-\Psi_3 + \Phi_{21})e^3 \wedge e^4.\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos cómo obtener las 2-formas de curvatura a partir de la conexión, pues de la sección 2.3 sabemos que

$$\Theta_{ab} = d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma^c_b,$$

en particular, las ecuaciones para determinar a las 2-formas de curvatura Θ_{24} , Θ_{31} y $\Theta_{21} + \Theta_{34}$ son

$$\begin{aligned}\Theta_{24} &= d\Gamma_{24} - \Gamma_{24} \wedge (\Gamma_{21} + \Gamma_{34}), \\ \Theta_{31} &= d\Gamma_{31} + \Gamma_{31} \wedge (\Gamma_{21} + \Gamma_{34}), \\ \Theta_{21} + \Theta_{34} &= d(\Gamma_{21} + \Gamma_{34}) + 2\Gamma_{31} \wedge \Gamma_{24},\end{aligned}$$

por ejemplo, las ecuaciones para la 2-forma de curvatura Θ_{24} en términos de los coeficientes de spin se escriben como [24, p. 569-570]

$$D\nu - \Delta\pi = (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3 + \Phi_{21}, \quad (3.1)$$

$$D\mu - \delta\pi = (\bar{\rho}\mu + \sigma\lambda) + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - (\bar{\alpha} - \beta)\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad (3.2)$$

$$D\lambda - \bar{\delta}\pi = (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi^2 + (\alpha - \beta)\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda + \Phi_{20}, \quad (3.3)$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \Phi_{22}, \quad (3.4)$$

$$\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4, \quad (3.5)$$

$$\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \Psi_3 + \Phi_{21}, \quad (3.6)$$

las cuales corresponden a las componentes $R_{2412}, R_{2413}, R_{2414}, R_{2423}, R_{2424}$ y R_{2434} respectivamente [25, p. 46-47]. Las ecuaciones para las otras 2-formas de curvatura restantes están dadas por [24, p. 569-570]

$$D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01}, \quad (3.7)$$

$$D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0, \quad (3.8)$$

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}, \quad (3.9)$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}, \quad (3.10)$$

$$\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \quad (3.11)$$

$$\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01}, \quad (3.12)$$

que corresponden a las componentes $R_{3112}, R_{3113}, R_{3114}, R_{3123}, R_{3124}$ y R_{3134} del tensor de Riemann respectivamente [25, p. 46-47], mientras que las ecuaciones para las componentes $R_{2112} + R_{3412}, R_{2113} + R_{3413}, R_{2114} + R_{3414}, R_{2123} + R_{2423}, R_{2124} + R_{3424}$ y $R_{2134} + R_{3434}$ están dadas respectivamente [25, p. 46-47] por las ecuaciones [24, p. 569-570]

$$D\gamma - \Delta\epsilon = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11}, \quad (3.13)$$

$$D\beta - \delta\epsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1, \quad (3.14)$$

$$D\alpha - \bar{\delta}\epsilon = (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi + \Phi_{10}, \quad (3.15)$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\beta + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12}, \quad (3.16)$$

$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \Psi_3, \quad (3.17)$$

$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11}. \quad (3.18)$$

A las 18 ecuaciones anteriores se les conoce como las ecuaciones de Newman-Penrose y como hemos visto, son la expresión del tensor de curvatura de Riemann calculado a partir de las 1-formas de conexión, en términos de los coeficientes de spin, el tensor de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

Por otro lado, aunque pareciera que el tensor de Weyl juega un papel secundario en relatividad, pues sólo el tensor de Ricci y el escalar de Ricci están involucrados directamente en las ecuaciones de campo, éste es de gran importancia en la clasificación de las distintas soluciones a las ecuaciones de campo de

Einstein. Para ver esto, lo primero que debemos notar es que dada una métrica g , la base de vectores nulos necesaria para desarrollar el formalismo de Newman-Penrose no es única. En particular, dada una tétrada nula $\{l, n, m, \bar{m}\}$, para cada $b \in \mathbb{C}$ podemos obtener una nueva tétrada dada por [25, p. 53]

$$\begin{aligned} l' &= l + b\bar{m}n + \bar{b}m + b\bar{m} \\ n' &= n \\ m' &= m + bn \\ \bar{m}' &= \bar{m}' + \bar{b}n, \end{aligned}$$

y en esta nueva base, las componentes independientes del tensor de Weyl se escriben como [25, p. 54]

$$\begin{aligned} \Psi'_0 &= \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 \\ \Psi'_1 &= \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4 \\ \Psi'_2 &= \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4 \\ \Psi'_3 &= \Psi_3 + b\Psi_4 \\ \Psi'_4 &= \Psi_4. \end{aligned}$$

Así, estamos interesados en hacer que la componente Ψ'_0 se anule, esto es

$$\Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 = 0. \quad (3.19)$$

Notamos que esta es una ecuación algebraica de cuarto grado en b , y cada una de las soluciones está asociada con un vector nulo, a saber

$$l + b\bar{m}n + \bar{b}m + b\bar{m}.$$

A los vectores nulos anteriores se les conoce como direcciones nulas principales, y es posible que varias de estas direcciones nulas coincidan. Los espacios en los cuales ésto ocurre reciben el nombre de espacios algebraicamente especiales [25, p. 58]. Dependiendo de la cantidad de direcciones nulas principales coincidentes, podemos clasificar a los distintos espacios-tiempo. Este esquema de clasificación recibe el nombre de clasificación de Petrov, y los espacios-tiempo se pueden clasificar del siguiente modo

- **Tipo I.** En este caso, todas las raíces de la ecuación 3.19 son distintas, por lo que tenemos cuatro direcciones principales l distintas, cada una de las cuales satisface la ecuación [8, p. 55]

$$l_{[\mu}C_{\alpha]\beta\gamma}l_{\lambda]}l^{\beta}l^{\gamma} = 0,$$

y en este caso, es posible hacer también cero la componente Ψ'_4 , de modo que Ψ'_1 , Ψ'_2 y Ψ'_3 son las únicas componentes del tensor de Weyl distintas de cero [25, p. 59].

- **Tipo II.** En este caso dos de las direcciones nulas principales coinciden y las dos restantes son distintas entre sí. La dirección principal repetida l en este caso satisface la expresión [8, p. 55]

$$C_{\alpha\beta\gamma[\lambda}l_{\nu]}l^{\beta}l^{\gamma} = 0,$$

y ahora Ψ'_2 y Ψ'_3 son las componentes no nulas del tensor de Weyl [25, p. 59].

- **Tipo III.** En los espacios tiempo que caen dentro de esta clasificación, tres de las direcciones nulas principales coinciden y la restante es distinta. En este caso, las direcciones nulas repetidas l satisfacen la ecuación[8, p. 55]

$$C_{\alpha\beta\gamma[\lambda}l_{\nu]}l^{\gamma} = 0,$$

y en este caso, siempre es posible elegir una tétrada nula tal que Ψ'_3 sea la única componente distinta de cero del tensor de Weyl [25, p. 60].

- **Tipo D.** En este caso, de las cuatro raíces b_1, b_2, b_3, b_4 de la ecuación 3.19, se cumple que $b_1 = b_2, b_3 = b_4, b_1 \neq b_3$, es decir, tenemos dos direcciones nulas principales dobles, y cada una de estas cumple con la misma ecuación que para el tipo III. En este caso, es posible encontrar una tétrada nula tal que Ψ'_2 sea la única componente distinta de cero del tensor de Weyl [25, p. 60].

- **Tipo N.** Cuando un espacio-tiempo es tipo N, las cuatro raíces de la ecuación 3.19 coinciden en una sola, y por lo tanto tenemos una única dirección principal nula l , la cual cumple la ecuación [8, p. 55]

$$C_{\alpha\beta\gamma\lambda}l^{\gamma} = 0,$$

y en este caso, es posible encontrar una tétrada nula tal que Ψ'_4 sea la única componente no nula del tensor de Weyl [25, p. 61].

- **Tipo O.** En este caso el tensor de Weyl es nulo (el espacio-tiempo es conformemente plano) y no hay ninguna dirección principal nula [8, p. 56].

De lo anterior notamos que en general, si $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ entonces el espacio-tiempo es algebraicamente especial, siendo l una dirección principal nula repetida (análogamente si $\Psi_4 = \Psi_3 = 0$, siendo ahora n la dirección principal nula repetida). Gran parte de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo conocidas son algebraicamente especiales, y como vimos en la sección 2.2, las métricas de Kerr-Schild son algebraicamente especiales, y por lo tanto también lo son las métricas de Schwarzschild y Kerr (aunque estas dos soluciones son tipo D, en general las métricas de Kerr-Schild son tipo II [26, p. 157]).

El siguiente importante resultado nos da una caracterización de las métricas algebraicamente especiales en el vacío, el cual resulta particularmente útil en la integración de las ecuaciones de campo, como vimos en la sección 2.2. Una demostración de este resultado usando el formalismo de Newman-Penrose, se puede consultar por ejemplo en [25, p. 62-63].

Proposición 3.1 (Goldberg y Sachs) *Sea (M, g) un espacio-tiempo solución a las ecuaciones de campo en el vacío. Entonces (M, g) es algebraicamente especial, con $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ si y sólo si existe un campo vectorial nulo l tal que los coeficientes de spin κ y σ son cero. En dado caso, l es una dirección principal nula repetida [8, p. 88].*

El teorema de Goldberg y Sachs se puede formular de manera análoga cuando n es una dirección principal nula repetida, y en este caso los coeficientes de spin nulos son ν y λ , si y sólo si $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$ [26, p. 150].

Finalmente, cabe mencionar que la clasificación de Petrov y el otro gran esquema de clasificación de soluciones exactas, las isometrías, guardan una estrecha relación. Por ejemplo, se sabe que las soluciones tipo II y tipo N admiten a lo más dos vectores de Killing independientes, mientras que el tipo III admite a lo más tres vectores de Killing independientes y el tipo D admite a lo más cuatro vectores de Killing independientes [8, p. 607], como es el caso de la métrica de Schwarzschild, y a lo menos dos vectores de Killing independientes [26, p. 151], como la métrica de Kerr. Recíprocamente, dado un espacio-tiempo con ciertas simetrías, se conocen algunos resultados con respecto a su clasificación de Petrov, por ejemplo, se sabe que las soluciones estáticas necesariamente son tipo I, D u O, y se sabe también que las soluciones estacionarias y axisimétricas en el vacío no pueden ser tipo III [8, p. 606]. El panorama completo de la relación entre estos dos esquemas de clasificación se puede consultar, por ejemplo, en [8, p. 606-609].

3.3. Propiedades geométricas de las KST

Dada la transformación de Kerr-Schild

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu,$$

elegimos una tétrada nula $\{e_a\} = \{l, n, m, \bar{m}\}$ para g , de modo que podemos construir una tétrada nula para \hat{g} como $\{\hat{e}_a\} = \{\hat{l}, \hat{n}, \hat{m}, \hat{\bar{m}}\} = \{l + \frac{1}{2}n, n, m, \bar{m}\}$ [23, p. 1879], de modo que en esta base se verifica directamente que

$$\hat{g}_{ab} = \hat{g}(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = (g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) \hat{e}_a^\mu \hat{e}_b^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que los coeficientes de spin para \hat{g} se pueden calcular directamente de la base $\{\hat{e}_a\}$, sin embargo, queremos relacionar los coeficientes de spin de \hat{g} con los coeficientes de spin de g , para lo cual lo más sencillo es utilizar las relaciones de conmutación de la base de vectores nulos $[e_a, e_b] = (\Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c) e_c$ [23, p. 1880], las cuales están dadas en términos de los coeficientes de spin por

[24, p.570]

$$\begin{aligned} [\Delta, D] &= (\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi)\delta, \\ [\delta, D] &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta, \\ [\delta, \Delta] &= -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta, \\ [\bar{\delta}, \delta] &= (\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta} - \alpha)\delta. \end{aligned}$$

Usando por ejemplo, la primera de estas relaciones se tiene que

$$\begin{aligned} [\hat{\Delta}, \hat{D}] &= (\hat{\gamma} + \bar{\gamma})\hat{D} + (\hat{\epsilon} + \bar{\epsilon})\hat{\Delta} - (\hat{\tau} + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \hat{\pi})\hat{\delta} \\ &= (\hat{\gamma} + \bar{\gamma})D + [(\hat{\epsilon} + \bar{\epsilon}) + \frac{1}{2}(\hat{\gamma} + \bar{\gamma})]\Delta - (\hat{\tau} + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \hat{\pi})\delta, \end{aligned}$$

mientras que por otro lado

$$\begin{aligned} [\hat{\Delta}, \hat{D}] &= \left[\Delta, D + \frac{1}{2}\Delta \right] = [\Delta, D] = \\ &= (\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi)\delta, \end{aligned}$$

luego, se sigue que

$$\begin{aligned} (\hat{\gamma} + \bar{\gamma}) &= (\gamma + \bar{\gamma}), \\ (\hat{\tau} + \bar{\pi}) &= (\tau + \bar{\pi}), \\ (\bar{\tau} + \hat{\pi}) &= (\bar{\tau} + \pi), \\ (\hat{\epsilon} + \bar{\epsilon}) + \frac{1}{2}(\hat{\gamma} + \bar{\gamma}) &= (\epsilon + \bar{\epsilon}). \end{aligned}$$

Análogamente, usando la relación de conmutación $[\bar{\delta}, \hat{\delta}]$ encontramos que

$$\begin{aligned} (\bar{\hat{\mu}} - \hat{\mu}) &= (\bar{\mu} - \mu), \\ (\bar{\hat{\alpha}} - \hat{\beta}) &= (\bar{\alpha} - \beta), \\ (\bar{\hat{\beta}} - \hat{\alpha}) &= (\bar{\beta} - \alpha), \\ (\bar{\hat{\rho}} - \hat{\rho}) + \frac{1}{2}(\bar{\hat{\mu}} - \hat{\mu}) &= (\bar{\rho} - \rho). \end{aligned}$$

Mientras que de la relación $[\hat{\delta}, \hat{D}]$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\bar{\hat{\alpha}} + \hat{\beta} - \bar{\hat{\pi}}) &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) - \frac{1}{2}\bar{\nu}, \\ \hat{\kappa} + \frac{1}{2}(\bar{\hat{\alpha}} + \hat{\beta} - \bar{\hat{\pi}}) &= \kappa + \frac{1}{2}(\tau - \bar{\alpha} - \beta), \\ (\bar{\hat{\rho}} + \hat{\epsilon} - \bar{\hat{\epsilon}}) &= (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon}) - \frac{1}{2}(\mu - \gamma + \bar{\gamma}), \\ \hat{\sigma} &= \sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Y finalmente, de $[\hat{\delta}, \hat{\Delta}]$ se sigue que

$$\begin{aligned}\bar{\nu} &= \bar{\nu}, \\ \bar{\lambda} &= \bar{\lambda}, \\ (\hat{\mu} - \hat{\gamma} + \bar{\gamma}) &= (\mu - \gamma + \bar{\gamma}), \\ (\hat{\tau} - \bar{\alpha} - \hat{\beta}) - \frac{1}{2}\bar{\nu} &= (\tau - \bar{\alpha} - \beta).\end{aligned}$$

Notamos que de estas 16 ecuaciones, dos de ellas se obtienen por conjugación compleja, por lo que tenemos un sistema de 14 ecuaciones en 14 incógnitas, el cual tiene por soluciones

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} + \bar{\gamma} &= \gamma + \bar{\gamma}, \\ \hat{\tau} + \bar{\pi} &= \tau + \bar{\pi}, \\ \hat{\epsilon} + \bar{\epsilon} &= \epsilon + \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}), \\ \bar{\hat{\mu}} - \hat{\mu} &= \bar{\mu} - \mu, \\ \bar{\hat{\alpha}} - \hat{\beta} &= \bar{\alpha} - \beta, \\ \bar{\hat{\rho}} - \hat{\rho} &= \bar{\rho} - \rho - \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \mu), \\ \bar{\hat{\alpha}} + \hat{\beta} - \bar{\pi} &= \bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \frac{1}{2}\bar{\nu}, \\ \bar{\hat{\rho}} + \hat{\epsilon} - \bar{\epsilon} &= \bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\mu - \gamma + \bar{\gamma}), \\ \hat{\mu} - \hat{\gamma} + \bar{\gamma} &= \mu - \gamma + \bar{\gamma}, \\ \hat{\tau} - \bar{\alpha} - \hat{\beta} &= \tau - \bar{\alpha} - \beta + \frac{1}{2}\bar{\nu}, \\ \bar{\nu} &= \bar{\nu}, \\ \bar{\lambda} &= \bar{\lambda}, \\ \hat{\sigma} &= \sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}, \\ \hat{\kappa} &= \kappa + \frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta) + \frac{1}{4}\bar{\nu},\end{aligned}$$

de donde obtenemos directamente cuatro coeficientes de spin (como podemos ver de las últimas cuatro ecuaciones anteriores) y nos restan por determinar ocho. Ahora, usando las ecuaciones

$$\begin{aligned}\hat{\tau} + \bar{\pi} &= \tau + \bar{\pi}, \\ \bar{\hat{\alpha}} - \hat{\beta} &= \bar{\alpha} - \beta, \\ \bar{\hat{\alpha}} + \hat{\beta} - \bar{\pi} &= \bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \frac{1}{2}\bar{\nu}, \\ \hat{\tau} - \bar{\alpha} - \hat{\beta} &= \tau - \bar{\alpha} - \beta + \frac{1}{2}\bar{\nu},\end{aligned}$$

se sigue que $\hat{\tau} = \tau$, $\hat{\pi} = \pi$, $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{1}{4}\nu$ y $\hat{\beta} = \beta - \frac{1}{4}\bar{\nu}$. Por otro lado, de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} + \bar{\gamma} &= \gamma + \bar{\gamma}, \\ \bar{\mu} - \hat{\mu} &= \bar{\mu} - \mu, \\ \hat{\mu} - \hat{\gamma} + \bar{\gamma} &= \mu - \gamma + \bar{\gamma}, \\ \bar{\mu} - \bar{\gamma} + \hat{\gamma} &= \bar{\mu} - \bar{\gamma} + \gamma,\end{aligned}$$

se obtiene que $\hat{\gamma} = \gamma$ y $\hat{\mu} = \mu$, donde la última ecuación la obtuvimos por conjugación compleja para cerrar el sistema de ecuaciones. Análogamente, de las ecuaciones restantes

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon} + \bar{\epsilon} &= \epsilon + \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}), \\ \bar{\rho} - \hat{\rho} &= \bar{\rho} - \rho - \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \mu), \\ \bar{\rho} + \hat{\epsilon} - \bar{\epsilon} &= \bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\mu - \gamma + \bar{\gamma}), \\ \hat{\rho} + \bar{\epsilon} - \hat{\epsilon} &= \rho + \bar{\epsilon} - \epsilon - \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \bar{\gamma} + \gamma),\end{aligned}$$

se sigue que $\hat{\rho} = \rho - \frac{1}{2}\mu$ y $\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{1}{2}\bar{\gamma} - \frac{1}{4}(\mu - \bar{\mu})$.

Así, hemos obtenido todos los coeficientes de spin de \hat{g} con respecto a los coeficientes de spin de g , que están dados por

$$\begin{aligned}\hat{\nu} &= \nu, \quad \hat{\lambda} = \lambda, \quad \hat{\mu} = \mu, \quad \hat{\pi} = \pi, \quad \hat{\tau} = \tau, \quad \hat{\gamma} = \gamma, \\ \hat{\alpha} &= \alpha - \frac{1}{4}\nu, \quad \hat{\beta} = \beta - \frac{1}{4}\bar{\nu}, \quad \hat{\sigma} = \sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}, \quad \hat{\rho} = \rho - \frac{1}{2}\mu, \\ \hat{\epsilon} &= \epsilon - \frac{1}{2}\bar{\gamma} - \frac{1}{4}(\mu - \bar{\mu}), \quad \hat{\kappa} = \kappa + \frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta) + \frac{1}{4}\bar{\nu}.\end{aligned}$$

A partir de esto, podemos notar que si $\nu = \gamma = \tau = 0$, que de acuerdo con lo visto en la sección anterior, significa que la base de vectores nulos $\{e_a\}$ se transporta paralelamente en la dirección n , entonces $\hat{\nu} = \hat{\gamma} = \hat{\tau} = 0$, de modo que la base $\{\hat{e}_a\}$ también se transportará paralelamente en la dirección $\hat{n} = n$ en el nuevo espacio-tiempo. Además, si n es ortogonal a una hipersuperficie entonces $\mu = \bar{\mu}$ y por lo tanto $\hat{\mu} = \bar{\mu}$, de modo que \hat{n} continua siendo ortogonal a una hipersuperficie en el nuevo espacio-tiempo [23, p. 1880].

Una vez relacionados los coeficientes de spin entre ambas métricas el siguiente paso es relacionar sus tensores de curvatura. En particular, la identificación más sencilla y natural que podemos hacer es pedir que la componente del tensor de Ricci a lo largo de vector nulo n sea igual en ambos espacios tiempo [23, p. 1880], es decir

$$\hat{R}_{22} = \hat{R}_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = R_{22}, \quad (3.20)$$

pues esto es sólo una ecuación que además involucra al vector n que es el que juega un papel relevante en la KST. Más aún, veremos más adelante que esta

es una consecuencia de pedir que n sea geodésico [23, p. 1880], justo como en la sección 2.2. En lo sucesivo asumiremos que la ecuación anterior se satisface para las KST que estudiaremos.

Para estudiar cuales son las consecuencias sobre los coeficientes de spin al pedir que se cumpla la ecuación 3.20, usaremos las ecuaciones de Newman-Penrose [23, p. 1880] obtenidas en la sección anterior, pues recordando que

$$\Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22},$$

entonces podemos usar la ecuación de Newman-Penrose 3.4 dada por

$$\hat{\delta}\hat{\nu} - \hat{\Delta}\hat{\mu} = (\hat{\mu}^2 + \hat{\lambda}\hat{\lambda}) + (\hat{\gamma} + \hat{\bar{\gamma}})\hat{\mu} - \hat{\nu}\hat{\pi} + (\hat{\tau} - 3\hat{\beta} - \hat{\alpha})\hat{\nu} + \hat{\Phi}_{22},$$

y usando que $\hat{\delta} = \delta$, $\hat{\Delta} = \Delta$ y las relaciones que encontramos entre los coeficientes de spin de ambas métricas, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta\nu - \Delta\mu &= \hat{\delta}\hat{\nu} - \hat{\Delta}\hat{\mu} = (\hat{\mu}^2 + \hat{\lambda}\hat{\lambda}) + (\hat{\gamma} + \hat{\bar{\gamma}})\hat{\mu} - \hat{\nu}\hat{\pi} + (\hat{\tau} - 3\hat{\beta} - \hat{\alpha})\hat{\nu} + \hat{\Phi}_{22} \\ &= (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \hat{\Phi}_{22} + \frac{3}{4}\bar{\nu}\nu + \frac{1}{4}\bar{\nu}\nu, \end{aligned}$$

y como la métrica g también cumple la ecuación de Newman-Penrose 3.4 entonces se tiene que

$$\Phi_{22} = \hat{\Phi}_{22} + \bar{\nu}\nu,$$

así, al pedir que se cumpla la condición 3.20 tenemos que

$$\bar{\nu}\nu = 0,$$

de donde se sigue que, como consecuencia de pedir la condición 3.20 $\nu = 0$, y recíprocamente. Además, dadas las relaciones entre los coeficientes de spin que encontramos, también se tiene en este caso que $\hat{\nu} = 0$. Luego, recordamos de la sección anterior que si $\nu = 0$ entonces el vector n es geodésico. Así, para que la nueva métrica sea una solución a las ecuaciones de campo de Einstein, tal que satisfaga la condición 3.20, entonces debemos elegir un vector nulo n que sea geodésico, de modo que $\nu = 0$ [23, p. 1880] (y por tanto $\hat{\nu} = 0$, de modo que n seguirá siendo geodésico en el nuevo espacio-tiempo). Así como hicimos en el capítulo anterior, podemos reescalar el vector n de modo que $\nabla_n n = 0$, lo cual simplifica algunas expresiones, sin embargo continuaremos sin realizar esta simplificación.

Así, asumiendo que se satisface la condición 3.20 y por tanto $\nu = 0$, las relaciones entre los coeficientes de spin de nuestras métricas se simplifican como [23, p. 1880]

$$\hat{\nu} = \nu = 0, \quad \hat{\lambda} = \lambda, \quad \hat{\mu} = \mu, \quad \hat{\pi} = \pi, \quad \hat{\tau} = \tau, \quad \hat{\gamma} = \gamma,$$

$$\hat{\alpha} = \alpha, \quad \hat{\beta} = \beta, \quad \hat{\sigma} = \sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}, \quad \hat{\rho} = \rho - \frac{1}{2}\mu,$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{1}{2}\bar{\gamma} - \frac{1}{4}(\mu - \bar{\mu}), \quad \hat{\kappa} = \kappa + \frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta),$$

de donde notamos que los coeficientes de spin asociados a l son los únicos que cambian, lo cual es de esperarse pues éste es el único vector nulo distinto entre las bases $\{e_a\}$ y $\{\hat{e}_a\}$

Ahora, análogamente a lo que hicimos con la ecuación 3.4 podemos utilizar las 17 ecuaciones de Newman-Penrose restantes para relacionar el tensor de curvatura de la métrica \hat{g} y la métrica g , usando las nuevas relaciones entre los coeficientes de spin que acabamos de obtener al pedir la condición 3.20. Más aún, como sólo hay 12 cantidades independientes con las que podemos caracterizar al tensor de Riemann, sólo necesitamos 11 de las ecuaciones restantes. Como resultado obtenemos las siguientes relaciones, las cuales son de autoría propia (igual que los resultados subsecuentes), aunque en [28], por ejemplo, se obtienen relaciones similares para los tensores curvatura, sin embargo como se advierte en [8, p. 500], la publicación contiene varios errores

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{00} &= \Phi_{00} - \frac{1}{2}D\mu + \frac{1}{2}\Delta\left(\rho - \frac{1}{2}\mu\right) - \bar{\delta}\left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right) \\ &\quad + \rho\mu + \frac{1}{2}(\sigma\lambda + \bar{\sigma}\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})\rho \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\epsilon + \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})\right)\mu + \left(\frac{1}{2}(\bar{\tau} + \pi) - (\alpha + \bar{\beta})\right)\tau \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right)(3\alpha + \bar{\beta} - \pi), \\ \hat{\Phi}_{10} &= \Phi_{10} + \frac{1}{2}\Delta\alpha + \frac{1}{2}\bar{\delta}\left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})\right)\bar{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2}\beta\lambda + \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{4}\bar{\mu} - \frac{1}{4}\mu - \bar{\gamma}\right)\alpha + \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right)\lambda \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(\bar{\tau} + \pi) - (\alpha + \bar{\beta})\right)\gamma + \left(\frac{1}{2}\bar{\gamma} + \frac{3}{4}\mu - \frac{1}{4}\bar{\mu}\right)\pi, \\ \hat{\Psi}_0 &= \Psi_0 - \frac{1}{2}D\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\Delta\left(\sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\right) - \delta\left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(3\bar{\gamma} - \gamma + 3\mu - \bar{\mu})\left(\sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\right) + \frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon})\bar{\lambda} \\ &\quad + (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right), \\ \hat{\Psi}_1 &= \Psi_1 + \frac{1}{2}\Delta\beta + \frac{1}{2}\delta\left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})\right) + \frac{1}{2}(\alpha + \pi)\bar{\lambda} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right)(\mu + \gamma) - \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu})\right)\beta \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})\right)(\bar{\alpha} - \bar{\pi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\hat{\Psi}_2 + \hat{\Phi}_{11} + \hat{\Lambda} &= -\Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda\bar{\lambda}), \\
\hat{\Psi}_2 + \hat{\Phi}_{11} - \hat{\Lambda} &= \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda + \frac{1}{2}\Delta \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}) \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right), \\
\hat{\Psi}_2 + 2\hat{\Lambda} &= \Psi_2 + 2\Lambda + \frac{1}{2}\Delta\mu + \frac{1}{2}(\mu\bar{\mu} + \lambda\bar{\lambda}) - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})\mu, \\
\hat{\Phi}_{20} &= \Phi_{20} + \frac{1}{2}\Delta\lambda + \lambda\bar{\mu} - \frac{1}{2}(3\bar{\gamma} - \gamma)\lambda, \\
\hat{\Phi}_{12} &= \Phi_{12}, \\
\hat{\Psi}_3 &= \Psi_3, \\
\hat{\Psi}_4 &= \Psi_4.
\end{aligned}$$

Así, los tensores de Ricci de g y \hat{g} están relacionados por

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{00} &= \Phi_{00} - \frac{1}{2}D\mu + \frac{1}{2}\Delta \left(\rho - \frac{1}{2}\mu \right) - \bar{\delta} \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta) \right) \\
&\quad + \rho\mu + \frac{1}{2}(\sigma\lambda + \bar{\sigma}\bar{\lambda}) - \frac{1}{4}(\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})\rho \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\epsilon + \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}) \right) \mu + \left(\frac{1}{2}(\bar{\tau} + \pi) - (\alpha + \bar{\beta}) \right) \tau \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta) \right) (3\alpha + \bar{\beta} - \pi), \\
\hat{\Phi}_{10} &= \Phi_{10} + \frac{1}{2}\Delta\alpha + \frac{1}{2}\bar{\delta} \left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) - \frac{1}{2} \left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) \bar{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta\lambda + \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{4}\bar{\mu} - \frac{1}{4}\mu - \bar{\gamma} \right) \alpha + \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta) \right) \lambda \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(\bar{\tau} + \pi) - (\alpha + \bar{\beta}) \right) \gamma + \left(\frac{1}{2}\bar{\gamma} + \frac{3}{4}\mu - \frac{1}{4}\bar{\mu} \right) \pi, \\
\hat{\Lambda} &= \Lambda - \frac{1}{12}\Delta \left(\gamma + \bar{\gamma} - \frac{1}{2}(3\mu + \bar{\mu}) \right) + \frac{1}{12}(3\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) \\
&\quad + \frac{1}{12} \left(\gamma + \bar{\gamma} - \frac{1}{2}(3\mu + \bar{\mu}) \right) ((\gamma + \bar{\gamma}) + (\mu - \bar{\mu})), \\
\hat{\Phi}_{11} &= \Phi_{11} + \frac{1}{4}\Delta \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) + \frac{1}{4}(\mu^2 - \lambda\bar{\lambda}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) ((\mu - \bar{\mu}) - (\gamma + \bar{\gamma})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{20} &= \Phi_{20} + \frac{1}{2}\Delta\lambda + \lambda\bar{\mu} - \frac{1}{2}(3\bar{\gamma} - \gamma)\lambda, \\ \hat{\Phi}_{12} &= \Phi_{12}, \\ \hat{\Phi}_{22} &= \Phi_{22},\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida a la condición 3.20. Por otro lado, las componentes del tensor de Weyl están relacionadas por

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_0 &= \Psi_0 - \frac{1}{2}D\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\Delta\left(\sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\right) - \delta\left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(3\bar{\gamma} - \gamma + 3\mu - \bar{\mu})\left(\sigma - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\right) + \frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon})\bar{\lambda} \\ &\quad + (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right), \\ \hat{\Psi}_1 &= \Psi_1 + \frac{1}{2}\Delta\beta + \frac{1}{2}\delta\left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})\right) + \frac{1}{2}(\alpha + \pi)\bar{\lambda} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(\tau + \bar{\pi}) - (\bar{\alpha} + \beta)\right)(\mu + \gamma) - \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu})\right)\beta \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})\right)(\bar{\alpha} - \bar{\pi}), \\ \hat{\Psi}_2 &= \Psi_2 + \frac{1}{6}\Delta\left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(3\mu - \bar{\mu})\right) + \frac{1}{3}\lambda\bar{\lambda} \\ &\quad - \frac{1}{6}\left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(3\mu - \bar{\mu})\right)((\gamma + \bar{\gamma}) + (\mu - \bar{\mu})), \\ \hat{\Psi}_3 &= \Psi_3, \\ \hat{\Psi}_4 &= \Psi_4.\end{aligned}$$

Una consecuencia directa de las últimas dos ecuaciones, es que si el espacio-tiempo (M, g) es algebraicamente especial, siendo n una dirección principal nula repetida, entonces $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$ y por lo tanto, el nuevo espacio-tiempo (M, \hat{g}) también será algebraicamente especial, con n una dirección principal nula repetida.

3.4. Energía y momento inducidos por una KST

Ahora que hemos relacionado los coeficientes de spin de los dos espacios-tiempo que estamos estudiando y sus tensores de curvatura, nos gustaría relacionar también sus tensores de energía momento. De las relaciones anteriores entre los tensores de Ricci de g y \hat{g} notamos que en general no sucede que $\hat{\Phi}_{ij} = \Phi_{ij}$, es decir, no ocurre que la métrica \hat{g} sea solución a las ecuaciones de campo con el mismo tensor de energía momento que g . Sin embargo, podemos interpretar las diferencias entre $\hat{\Phi}_{ij}$ y Φ_{ij} como un tensor de energía momento L_{ab} inducido

por la KST [23, p. 1880], de modo que el tensor de energía momento \hat{T}_{ab} para la métrica \hat{g} está dado por [23, p. 1880]

$$\hat{T}_{ab} = T_{ab} + L_{ab},$$

más aún, como g es solución a las ecuaciones de campo con el tensor de energía momento T_{ab} y exigiendo que \hat{g} sea solución a las ecuaciones de campo con el tensor \hat{T}_{ab} , podemos obtener la forma explícita de L_{ab} a partir de las relaciones de la sección anterior y de las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = -8\pi T_{ab},$$

donde el signo negativo en el lado derecho de las ecuaciones se debe a la signatura elegida para la métrica [25, p. 34]. Recordando cómo están definidas las cantidades Φ_{ij} y Λ

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, \quad \Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13}, \\ \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, \quad \Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14}, \\ \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, \quad \Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}, \\ \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24}, \quad \Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}, \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), \\ \Lambda &= \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}),\end{aligned}$$

podemos escribir las siete ecuaciones de campo independientes para g como

$$\begin{aligned}8\pi T_{22} &= 2\Phi_{22}, \\ 8\pi T_{23} &= 2\Phi_{12}, \\ 8\pi T_{11} &= 2\Phi_{00}, \\ 8\pi T_{14} &= 2\Phi_{10}, \\ 8\pi T_{44} &= 2\Phi_{20}, \\ 4\pi(T_{12} + T_{34}) &= 2\Phi_{11}, \\ 4\pi(T_{12} - T_{34}) &= 6\Lambda,\end{aligned}$$

y análogamente para \hat{g} . Así, imponiendo que $\hat{T}_{ab} = T_{ab} + L_{ab}$ y usando esta forma para las ecuaciones de campo obtenemos las siguientes relaciones para el

tensor de energía momento inducido L_{ab} :

$$\begin{aligned}
8\pi L_{22} &= 2(\hat{\Phi}_{22} - \Phi_{22}), \\
8\pi L_{23} &= 2(\hat{\Phi}_{12} - \Phi_{12}), \\
8\pi L_{11} &= 2(\hat{\Phi}_{00} - \Phi_{00}), \\
8\pi L_{14} &= 2(\hat{\Phi}_{10} - \Phi_{10}), \\
8\pi L_{44} &= 2(\hat{\Phi}_{20} - \Phi_{20}), \\
4\pi(L_{12} + L_{34}) &= 2(\hat{\Phi}_{11} - \Phi_{11}), \\
4\pi(L_{12} - L_{34}) &= 6(\hat{\Lambda} - \Lambda),
\end{aligned}$$

o de manera explícita usando las relaciones de la sección anterior:

$$\begin{aligned}
8\pi L_{11} &= -D\mu + \Delta \left(\rho - \frac{1}{2}\mu \right) - \bar{\delta} (\tau + \bar{\pi} - 2(\bar{\alpha} + \beta)) \\
&\quad + 2\rho\mu + \sigma\lambda + \bar{\sigma}\bar{\lambda} - \frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma + \bar{\gamma})\rho \\
&\quad + \left(\epsilon + \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}) \right) \mu + (\bar{\tau} + \pi - 2(\alpha + \bar{\beta})) \tau \\
&\quad + (\tau + \bar{\pi} - 2(\bar{\alpha} + \beta)) (3\alpha + \bar{\beta} - \pi), \\
8\pi L_{14} &= \Delta\alpha + \bar{\delta} \left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) - \left(\bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) \bar{\beta} + \beta\lambda \\
&\quad + \left(\gamma + \frac{3}{2}\bar{\mu} - \frac{1}{2}\mu - 2\bar{\gamma} \right) \alpha + (\tau + \bar{\pi} - 2(\bar{\alpha} + \beta)) \lambda \\
&\quad + (\bar{\tau} + \pi - 2(\alpha + \bar{\beta})) \gamma + \left(\bar{\gamma} + \frac{3}{2}\mu - \frac{1}{2}\bar{\mu} \right) \pi, \\
4\pi(L_{12} + L_{34}) &= \frac{1}{2}\Delta \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) + \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda\bar{\lambda}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\gamma + \bar{\gamma} + \frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu}) \right) ((\mu - \bar{\mu}) - (\gamma + \bar{\gamma})), \\
4\pi(L_{12} - L_{34}) &= -\frac{1}{2}\Delta \left(\gamma + \bar{\gamma} - \frac{1}{2}(3\mu + \bar{\mu}) \right) + \frac{1}{2}(3\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\gamma + \bar{\gamma} - \frac{1}{2}(3\mu + \bar{\mu}) \right) ((\gamma + \bar{\gamma}) + (\mu - \bar{\mu})), \\
8\pi L_{44} &= \Delta\lambda + 2\lambda\bar{\mu} - (3\bar{\gamma} - \gamma)\lambda, \\
L_{22} &= 0, \\
L_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

En [23], por ejemplo, se pueden encontrar relaciones similares, obtenidas usando bases coordenadas. Retomando nuestra discusión, recordamos que para

que el tensor $\hat{T}_{\mu\nu}$ pueda ser un tensor de energía momento debe satisfacer la ley de conservación $\hat{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ (donde la derivada covariante es con respecto a la métrica \hat{g}) lo cual equivale a que la métrica \hat{g} satisfaga las identidades de Bianchi $\hat{R}_{\alpha\beta[\mu\nu;\lambda]} = 0$, pues sabemos que si esto ocurre entonces $\hat{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = \hat{G}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ [6, p. 201-202]. El procedimiento para verificar que la nueva métrica cumple las identidades de Bianchi es análogo al que hemos usado para relacionar los tensores de curvatura entre g y \hat{g} ; el cálculo es directo sin embargo es muy extenso. Como ejemplo ilustrativo del procedimiento a seguir, consideremos alguna de las once identidades de Bianchi independientes escritas en el formalismo de Newman-Penrose que queremos verificar, por ejemplo

$$\begin{aligned} -\hat{\Delta}\hat{\Psi}_3 + \hat{\delta}\hat{\Psi}_4 - \hat{\Delta}\hat{\Phi}_{21} + \hat{\delta}\hat{\Phi}_{22} &= 2(\hat{\gamma} + 2\hat{\mu})\hat{\Psi}_3 + (\hat{\tau} - 4\hat{\beta})\hat{\Psi}_4 \\ &\quad - 2(\hat{\mu} + \hat{\gamma})\hat{\Phi}_{21} - 2\hat{\lambda}\hat{\Phi}_{12} - (\hat{\tau} - 2\hat{\alpha} - 2\hat{\beta})\hat{\Phi}_{22}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

la cual hemos simplificado considerando que $\hat{\nu} = 0$. Ahora, usando las relaciones que tenemos entre la base de vectores nulos y los tensores de curvatura de ambas métricas por un lado tenemos que

$$-\hat{\Delta}\hat{\Psi}_3 + \hat{\delta}\hat{\Psi}_4 - \hat{\Delta}\hat{\Phi}_{21} + \hat{\delta}\hat{\Phi}_{22} = -\Delta\Psi_3 + \delta\Psi_4 - \Delta\Phi_{21} + \bar{\delta}\Phi_{22},$$

y por otro lado, usando también las relaciones entre los coeficientes de spin se tiene que

$$\begin{aligned} 2(\hat{\gamma} + 2\hat{\mu})\hat{\Psi}_3 + (\hat{\tau} - 4\hat{\beta})\hat{\Psi}_4 - 2(\hat{\mu} + \hat{\gamma})\hat{\Phi}_{21} - 2\hat{\lambda}\hat{\Phi}_{12} - (\hat{\tau} - 2\hat{\alpha} - 2\hat{\beta})\hat{\Phi}_{22} \\ = 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 + (\tau - 4\beta)\Psi_4 - 2(\bar{\mu} + \gamma)\Phi_{21} - 2\lambda\Phi_{12} - (\bar{\tau} - 2\alpha - 2\bar{\beta})\Phi_{22}, \end{aligned}$$

luego, como se cumple la ecuación 3.21 para la métrica g , se sigue que también se cumple para la métrica \hat{g} , como queríamos verificar. El resto de las diez identidades de Bianchi independientes para la métrica \hat{g} se pueden verificar de manera análoga (aunque recalamos que el cálculo es muy extenso y poco ilustrativo), con lo cual se demuestra que $\hat{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

3.5. Soluciones particulares

A lo largo de este capítulo hemos estudiado las transformaciones de Kerr-Schild y hemos hallado las relaciones entre los coeficientes de spin, los tensores de curvatura y el tensor de energía momento inducido. Esto nos permite en principio, obtener nuevas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein a partir de soluciones conocidas, aunque como hemos visto, las nuevas soluciones así obtenidas satisfacen las ecuaciones de campo para un tensor de energía momento distinto al original. Es importante notar que tanto el tensor de curvatura de la nueva métrica, como el tensor de energía momento inducido por la transformación dependen únicamente de la base de vectores nulos elegida para el espacio-tiempo original (y de los coeficientes de spin, pero estos a su vez dependen de la base), de modo que dada una métrica g y una tétrada nula para la

métrica g , la nueva métrica \hat{g} y el tensor de energía momento al cual esta métrica es solución quedan completamente determinados. En particular, la solución más sencilla de todas consiste en tomar la métrica g como la del espacio-tiempo de Minkowski junto con la base de vectores nulos

$$\begin{aligned} l_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \\ n_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \\ m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, -i), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la métrica

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y el intervalo para esta métrica se escribe como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{1}{2}(dt + dx)^2.$$

Notemos que al ser la base de vectores nulos constante, el tensor de energía momento inducido es cero (igual que todo el tensor de curvatura), es decir, esta métrica es solución a las ecuaciones de campo en el vacío. Dado que el tensor de curvatura es cero, se tiene que la ecuación 1.17 dada por

$$\mathcal{L}_\xi R = 0,$$

se satisface de manera idéntica, de modo que por lo visto en la sección 1.2, esta solución posee el máximo número de simetrías posibles. Esto es un caso excepcional, pues en general las métricas obtenidas por una transformación de Kerr-Schild poseen menos simetrías que las métricas a partir de las cuales se obtuvieron, como podemos corroborar con la métrica de Kerr, que se obtiene por una KST a partir de la métrica de Minkowski. Más aún, que esta métrica posea el número máximo de simetrías posibles no es coincidencia pues en realidad esta métrica no es muy distinta a la métrica de Minkowski, ya que mediante un cambio de coordenadas, la métrica se puede escribir en forma diagonal como

$$\hat{g}_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que es esencialmente la métrica de Minkowski.

Como mencionabamos antes, dada una métrica que sea solución a las ecuaciones de campo y una base de vectores nulos se obtiene una nueva solución a

las ecuaciones de campo, para un nuevo tensor de energía momento. Dado que este nuevo tensor de energía momento se obtiene a partir de la base de vectores nulos, en principio podría no tener ningún significado físico y no corresponder a ningún campo físico observable en la naturaleza. Una posibilidad para evitar esto es imponer una forma para el nuevo tensor de energía momento e integrar las ecuaciones resultantes para hallar la tétrada nula que sea solución a tales ecuaciones. El primer ejemplo no trivial de esto es lo realizado en el capítulo 2, donde partiendo de la métrica de Minkowski, encontramos la solución más general a las ecuaciones de campo en el vacío del tipo Kerr-Schild. Siguiendo un procedimiento muy similar, se puede encontrar la solución más general de tipo Kerr-Schild a las ecuaciones de Einstein-Maxwell [14], entre las que destaca la solución de Kerr-Newman, para un cuerpo con simetría esférica y carga total Q que gira alrededor del eje z con momento angular por unidad de masa a ; el intervalo de esta métrica está dado por [14, p. 1854]

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2mr^3 - Q^2r^2}{r^4 + a^2z^2} \left[dt + \frac{z}{r} dz + \frac{r}{r^2 + a^2} (xdx + ydy) - \frac{a}{r^2 + a^2} (xdy - ydx) \right]^2.$$

Otra familia interesante de soluciones obtenidas via una KST son soluciones para un fluido perfecto partiendo de una métrica conformemente plana, que también sea solución a las ecuaciones de campo para un fluido perfecto (ver, por ejemplo [29, 30]), pues el que la métrica de la cual se parte sea conformemente plana permite reutilizar algunos de los principales resultados para integrar las ecuaciones de campo en el caso de la métrica de Minkowski, por ejemplo, la forma más general que se tiene para un vector nulo geodésico en un espacio-tiempo algebraicamente especial, dada por el teorema de Kerr, como se muestra en el capítulo 2.

Como hemos visto en el capítulo anterior, imponer una forma para el tensor de energía momento inducido por una KST e integrar las ecuaciones correspondientes no es una tarea sencilla. Una posibilidad distinta para obtener soluciones vía una KST que sean plausibles a tener una interpretación física es pedir que éstas posean alguna simetría, heredada de una simetría en la métrica original: supongamos que tenemos una base coordenada para el espacio-tiempo y supongamos que el vector ξ es un vector de Killing para la métrica g . Así, ξ es un vector de Killing para la nueva métrica $\hat{g} = g - n \otimes n$ si y sólo si

$$0 = \mathcal{L}_\xi \hat{g} = \mathcal{L}_\xi (g - n \otimes n) = \mathcal{L}_\xi g - \mathcal{L}_\xi (n \otimes n) = -\mathcal{L}_\xi (n \otimes n),$$

donde la última igualdad ocurre porque al ser ξ un vector de Killing de g entonces $\mathcal{L}_\xi g = 0$. Así, ξ es un vector de Killing para la nueva métrica \hat{g} si y sólo si

$$n_{\mu,\lambda} n_\nu \xi^\lambda + n_\mu n_{\nu,\lambda} \xi^\lambda + n_\mu n_\lambda \xi^\lambda_{,\nu} + n_\lambda n_\nu \xi^\lambda_{,\mu} = 0.$$

En particular, debido a la regla del producto de Leibniz, tenemos que una condición suficiente para que ξ sea un vector de Killing de \hat{g} es

$$\mathcal{L}_\xi n = 0 \Leftrightarrow n_{\mu,\lambda} \xi^\lambda + n_\lambda \xi^\lambda_{,\mu} = 0,$$

de donde podemos notar que si la coordenada x^α es una coordenada cíclica en la métrica g entonces $\xi = \partial_\alpha$ es un vector de Killing de g y de acuerdo con la ecuación anterior, es también un vector de Killing para \hat{g} si $n_{\mu,\alpha} = 0$, esto es, si el vector nulo n no depende explícitamente de la coordenada α .

Aprovecharemos esto último para construir una solución a las ecuaciones de campo: consideremos la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas, dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

entonces una base de vectores nulos para esta métrica está dada por [25, p.134-135]

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{r^2 - 2Mr} (r^2, r^2 - 2Mr, 0, 0), \\ n^\mu &= \frac{1}{2r^2} (r^2, -r^2 + 2Mr, 0, 0), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, 1, i \csc \theta), \end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$\begin{aligned} l_\mu &= \frac{1}{r^2 - 2Mr} (r^2 - 2Mr, -r^2, 0, 0), \\ n_\mu &= \frac{1}{2r^2} (r^2 - 2Mr, r^2, 0, 0), \\ m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, -r^2, -ir^2 \sin \theta), \end{aligned}$$

de donde notamos que el vector n no depende de las coordenadas t y ϕ , y como $\partial_t, \partial_\phi$ son vectores de Killing para la métrica de Schwarzschild, entonces $\partial_t, \partial_\phi$ también serán vectores de Killing para la nueva métrica $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, la cual está dada en coordenadas esféricas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &\quad - \frac{1}{4r^2} (rdt + r dr - 2M dt)^2. \end{aligned}$$

Notamos que la nueva solución continúa siendo estacionaria pero no estática, y además, dado que la métrica de Schwarzschild es tipo D, entonces $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$ y por lo que hemos visto, esto significa que la nueva métrica es algebraicamente especial. Ahora, para hallar el tensor de energía momento inducido por esta KST, debemos calcular primero los coeficientes de spin; se encuentra que estos están dados por [25, p.134-135]

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \epsilon = \pi = \tau = 0,$$

$$\rho = -\frac{1}{r}, \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\cot \theta}{r}, \quad \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\cot \theta}{r},$$

$$\mu = -\frac{r-2M}{2r^2}, \quad \gamma = \frac{M}{2r^2},$$

de donde podemos ver que $\mu = \bar{\mu}$, de modo que n es ortogonal a una hipersuperficie, y de acuerdo a lo que hemos visto, sucede lo mismo para n en la nueva métrica. Ahora, considerando los coeficientes de spin que son cero y que todos los coeficientes de spin son reales, podemos simplificar nuestras expresiones para el tensor de energía momento inducido como

$$8\pi L_{11} = -D\mu + \Delta \left(\rho - \frac{1}{2}\mu \right) + 2\bar{\delta}(\alpha + \beta) + 2\rho\mu$$

$$- \frac{1}{2}\mu^2 + 2\gamma \left(\rho - \frac{1}{2}\mu \right) - 2(\alpha + \beta)(3\alpha + \beta),$$

$$8\pi L_{14} = \Delta\alpha + \bar{\delta}\gamma - \gamma\beta + (\mu - \gamma)\alpha - 2(\alpha + \beta)\gamma,$$

$$4\pi(L_{12} + L_{34}) = \Delta\gamma + \frac{1}{2}\mu^2 - 2\gamma^2,$$

$$4\pi(L_{12} - L_{34}) = -\Delta(\gamma - \mu) + \frac{3}{2}\mu^2 + 2(\gamma - \mu)\gamma,$$

$$L_{44} = 0,$$

$$L_{22} = 0,$$

$$L_{23} = 0.$$

Más aún, como $\alpha = -\beta$, las ecuaciones anteriores se pueden reducir más y estas quedan expresadas ahora como

$$8\pi L_{11} = -D\mu + \Delta \left(\rho - \frac{1}{2}\mu \right) + 2\rho\mu - \frac{1}{2}\mu^2 + 2\gamma \left(\rho - \frac{1}{2}\mu \right),$$

$$8\pi L_{14} = \Delta\alpha + \bar{\delta}\gamma + \mu\alpha,$$

$$4\pi(L_{12} + L_{34}) = \Delta\gamma + \frac{1}{2}\mu^2 - 2\gamma^2,$$

$$4\pi(L_{12} - L_{34}) = -\Delta(\gamma - \mu) + \frac{3}{2}\mu^2 + 2(\gamma - \mu)\gamma,$$

$$L_{44} = 0,$$

$$L_{22} = 0,$$

$$L_{23} = 0.$$

Finalmente, recordamos que $D = l^\mu \partial_\mu$, $\Delta = n^\mu \partial_\mu$ y $\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu$, de modo que encontramos que las expresiones para el tensor de energía momento inducido son

$$8\pi L_{11} = \frac{4M-r}{2r^3} + \frac{(3r+4M)(-r+2M)}{8r^4} + \frac{r-2M}{r^3}$$

$$- \frac{(r-2M)^2}{8r^4} - \frac{3Mr+2M^2}{4r^4},$$

$$\begin{aligned}
8\pi L_{14} &= \frac{(-r+2M)\cot\theta}{4\sqrt{2}r^3} + \frac{(r-2M)\cot\theta}{4\sqrt{2}r^3}, \\
4\pi(L_{12} + L_{34}) &= \frac{Mr - 2M^2}{2r^4} + \frac{(r-2M)^2}{8r^4} - \frac{M^2}{2r^4}, \\
4\pi(L_{12} - L_{34}) &= -\frac{(2M-r)^2}{4r^4} + \frac{3(r-2M)^2}{8r^4} + \frac{Mr - M^2}{2r^4}, \\
L_{44} &= 0, \\
L_{22} &= 0, \\
L_{23} &= 0,
\end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
8\pi L_{12} &= \frac{r^2 - 4M^2}{4r^4}, \\
8\pi L_{34} &= \frac{-M^2}{r^4}, \\
L_{11} &= 0, \\
L_{14} &= 0, \\
L_{44} &= 0, \\
L_{22} &= 0, \\
L_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, para expresar este tensor de energía momento en la base coordenada, recordamos que

$$L_{\mu\nu} = L_{ab}\hat{e}^a{}_{\mu}\hat{e}^b{}_{\nu},$$

y por lo tanto

$$L_{\mu\nu} = L_{12}\hat{e}^1{}_{\mu}\hat{e}^2{}_{\nu} + L_{21}\hat{e}^2{}_{\mu}\hat{e}^1{}_{\nu} + L_{34}\hat{e}^3{}_{\mu}\hat{e}^4{}_{\nu} + L_{43}\hat{e}^4{}_{\mu}\hat{e}^3{}_{\nu},$$

o de manera equivalente, usando que $\{\hat{e}^a{}_{\mu}\} = \{n_{\mu}, l_{\mu} - \frac{1}{2}n_{\mu}, -\bar{m}_{\mu}, -m_{\mu}\}$

$$L_{\mu\nu} = L_{12}(n_{\mu}l_{\nu} + l_{\mu}n_{\nu} - n_{\mu}n_{\nu}) + L_{34}(\bar{m}_{\mu}m_{\nu} + m_{\mu}\bar{m}_{\nu}).$$

Así, en la base coordenada el tensor de energía momento inducido está dado por

$$8\pi L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(r-2M)^2(r+2M)(3r+2M)}{16r^6} & -\frac{(r-2M)^2(r+2M)}{16r^5} & 0 & 0 \\ -\frac{(r-2M)^2(r+2M)}{16r^5} & \frac{(r+2M)(-5r+2M)}{16r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M^2\sin^2\theta}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Dado que la métrica de Schwarzschild es una solución en el vacío, entonces la métrica que construimos es solución al tensor de energía momento $L_{\mu\nu}$, como puede verificarse al calcular el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ para la métrica en la base coordenada.

Para estudiar un poco más este tensor de energía momento inducido, notemos que sus componentes contravariantes se escriben como

$$8\pi L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(-5r+2M)(r+2M)}{16r^4} & -\frac{(r-2M)^2(r+2M)}{16r^5} & 0 & 0 \\ -\frac{(r-2M)^2(r+2M)}{16r^5} & -\frac{(r-2M)^2(r+2M)(3r+2M)}{16r^6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M^2}{r^6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M^2 \csc^2 \theta}{r^6} \end{pmatrix},$$

de donde podemos notar que la densidad de energía, dada por la componente L^{00} , es negativa a menos que $-5r + 2M$ sea menor que cero, es decir, para que este tensor de energía momento sea físicamente admisible, debemos pedir que r sea mayor o igual que $\frac{2M}{5}$. También podemos observar que este tensor de energía momento es un tanto peculiar en tanto que nos da lugar a presiones negativas, visto como el tensor de energía momento de un fluido. Por otro lado, en la región asintótica cuando r es muy grande (o equivalentemente cuando M es despreciable con respecto a r) el tensor de energía momento inducido toma la forma

$$8\pi L^{\mu\nu} = \frac{1}{16r^2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que en esta región el hipotético campo físico correspondiente a este tensor de energía momento sólo ejerce presión (negativa) en la dirección radial y conduce energía, en la dirección contraria en la que crece r .

Finalmente vale la pena mencionar que, aunque esta métrica no posea una interpretación física directa, ilustra adecuadamente el método a seguir con el cual se podrían obtener nuevas soluciones de tipo Kerr-Schild que posean simetrías, en contraste con la integración de las ecuaciones para el tensor de energía momento inducido.

3.6. Perspectivas

En este capítulo estudiamos a las transformaciones de Kerr-Schild principalmente como un método de generación de soluciones exactas, tomando como punto de partida diversos trabajos publicados en la década de los ochentas y noventas, siendo [23] el más relevante para el presente trabajo. El tema de la presente tesis continua siendo parte de investigaciones contemporáneas, como

se puede ver, por ejemplo, en [31]. Sin embargo, vale la pena mencionar que las transformaciones de Kerr-Schild como un método de generación de soluciones exactas ya han sido ampliamente estudiadas, por ejemplo, en [32] se muestra un estudio de las métricas de Kerr-Schild como una perturbación a la métrica de Minkowski, es decir, de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\epsilon H k_\mu k_\nu,$$

y aunque se recuperan los resultados que obtuvimos en el capítulo 2 resolviendo las ecuaciones de campo para cada orden de la perturbación ϵ , no se obtienen nuevas soluciones a las ecuaciones de campo. Aunado a esto, actualmente se prefieren otros métodos de generación de soluciones exactas, algunos de los cuales hablaremos brevemente a continuación.

Uno de los métodos más importantes para generar soluciones exactas es el algoritmo de Newman-Janis. En su formulación original, este método nos permite obtener la métrica de Kerr a partir de la métrica de Schwarzschild mediante una complejificación de las coordenadas. Para esto, partimos de la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

y realizamos la transformación de coordenadas $u = t - r - 2m \log(r - 2m)$ [33, p. 915], de modo que la métrica de Schwarzschild ahora se escribe como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Así, tenemos que una tétrada nula para esta métrica está dada por [33, p. 916]

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, 1, 0, 0), \\ n^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0\right), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, 1, i \csc \theta). \end{aligned}$$

Ahora, permitimos que la coordenada r tome valores complejos, por lo que la tétrada nula ahora se escribe como [33, p. 916]

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, 1, 0, 0), \\ n^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\bar{r}}\right), 0, 0\right), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} (0, 0, 1, i \csc \theta). \end{aligned}$$

Posteriormente, realizamos la transformación de coordenadas [33, p. 916]

$$r' = r + ia \cos \theta, \quad u' = u - ia \cos \theta,$$

y obtenemos la nueva tétrada $e'_a{}^\mu = e_a{}^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$, la cual está dada por [33, p. 916]

$$\begin{aligned} l'^\mu &= (0, 1, 0, 0), \\ n'^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right), 0, 0 \right), \\ m'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta)} (ia \sin \theta, -ia \sin \theta, 1, i \csc \theta). \end{aligned}$$

De este modo, la métrica resultante

$$g'^{\mu\nu} = n'^\mu l'^\nu + l'^\mu n'^\nu - \bar{m}'^\mu m'^\nu - m'^\mu \bar{m}'^\nu,$$

es justo la métrica de Kerr.

Algunas cuestiones surgen de manera inmediata con respecto al algoritmo de Newman-Janis, entre ellas en qué casos la métrica resultante será una solución a las ecuaciones de campo. Y respecto a esto, se sabe que una condición suficiente para obtener una solución a las ecuaciones de campo es que la métrica de la cual se parte sea una métrica de Kerr-Schild [33, p. 916], como es el caso de la métrica de Schwarzschild.

Desde su publicación, el algoritmo de Newman-Janis ha sido ampliamente estudiado, tanto en su interpretación (ver, por ejemplo, [26, p. 263-268]), como en posibles extensiones del mismo (ver, por ejemplo [34]) y actualmente continua siendo un importante método de generación de soluciones exactas.

Por último, mencionamos dos métodos de generación de soluciones exactas de gran relevancia: las transformaciones HKX y las transformaciones de Bäcklund. Las transformaciones HKX son transformaciones que nos permiten generar soluciones estacionarias y axialmente simétricas en el vacío [35] a partir de soluciones ya conocidas con las mismas características.

Por otro lado, las transformaciones de Bäcklund son un método general para resolver ecuaciones diferenciales parciales, pero en el contexto de relatividad, su papel más relevante es que estas transformaciones nos permiten integrar las ecuaciones de campo en el vacío cuando la solución admite dos vectores de Killing independientes y que conmutan, partiendo de soluciones ya conocidas [36]. De este modo, estas transformaciones pueden aplicarse para el caso estacionario y axisimétrico o para el caso de simetría cilíndrica, por ejemplo.

Aunque la revisión de los detalles de ambos métodos van más allá del alcance de este trabajo, vale la pena mencionar a estos dos métodos de generación por su gran potencial para encontrar soluciones (con simetrías) a las ecuaciones de campo, y como contraste al método que desarrollamos en el presente trabajo, que es el de las transformaciones de Kerr-Schild. Una revisión detallada de las transformaciones HKX, las transformaciones de Bäcklund y otros métodos de generación de soluciones exactas se puede consultar, por ejemplo, en el capítulo 34 de [8].

Conclusiones

Haciendo una recapitulación del presente trabajo, comenzamos esta obra estudiando simetrías en variedades pseudo-riemannianas a través de la herramienta de los vectores de Killing, y como se demuestra en el apéndice B, esto es suficiente para estudiar a todo el conjunto de isometrías de una variedad, siempre que éste sea simplemente conexo y los vectores de Killing sean completos. Habiendo formulado la definición de vector de Killing y de la ecuación de Killing, estudiamos la integrabilidad de dicha ecuación, encontrando condiciones necesarias que debe satisfacer un campo vectorial para ser un vector de Killing, y planteamos una condición necesaria y suficiente para calcular el número de vectores de Killing independientes en una variedad, usando la derivada de Lie del tensor de curvatura de Riemann y sus derivadas covariantes sucesivas. Posteriormente desarrollamos algunos ejemplos donde encontramos los vectores de Killing para distintos espacios, entre los que destaca el espacio-tiempo de Minkowski, donde vimos cómo surgen las transformaciones de Lorentz a partir de los vectores de Killing y de suponer únicamente la forma que toma el intervalo para un observador inercial. Finalmente, vimos una formulación particular del teorema de Noether, la cual nos permite obtener cantidades conservadas para un sistema de una partícula, a partir de sus vectores de Killing, y vimos como esto puede ayudarnos a integrar las ecuaciones de movimiento de partículas en relatividad general, estudiando el caso particular de la trayectoria de partículas masivas en la métrica de Schwarzschild. Terminamos mostrando el concepto de tensor de Killing y un teorema análogo al teorema de Noether para obtener cantidades conservadas cuando se dispone de un tensor de Killing.

Posteriormente, en el segundo capítulo estudiamos las métricas de Kerr-Schild como soluciones en el vacío de las ecuaciones de campo. Encontramos algunas propiedades que ayudan a simplificar las ecuaciones de campo en el vacío, cómo es que las métricas de Kerr-Schild sean algebraicamente especiales, lo cual permite usar el teorema de Kerr para encontrar la forma más general que tiene un vector nulo geodésico en el vacío, y con esto formar una tétrada nula para integrar las ecuaciones de campo. Usando el formalismo de las tétradas nulas, obtuvimos la solución más general para las métricas de Kerr-Schild en el vacío y posteriormente, encontramos que éstas tienen un vector de Killing, lo cual ayuda a clasificar y simplificar la solución general anteriormente obtenida. Finalmente, mostramos cómo es que se obtiene la métrica de Kerr como una solución particular a las métricas de Kerr-Schild con un vector de Killing tipo

tiempo. Además, encontramos otro vector de Killing para la métrica de Kerr y mostramos que dicha métrica no posee más vectores de Killing, aunque ésta tiene un tensor de Killing, lo cual permite integrar las ecuaciones de movimiento de partículas en la métrica de Kerr, mediante el resultado análogo al teorema de Noether para tensores de Killing que vimos en el primer capítulo. Culminamos este capítulo discutiendo la posible interpretación física de las demás métricas de Kerr-Schild, siendo la métrica de Kerr la única solución de agujeros negros (sólo cuando $m > a$) y el resto soluciones de singularidades desnudas.

En el último capítulo nos dedicamos a estudiar las transformaciones de Kerr-Schild, como una generalización a las métricas de Kerr-Schild. Vimos cómo es que algunos resultados simples se mantienen en este caso general, como es la forma del tensor métrico inverso. Posteriormente estudiamos el formalismo de Newman-Penrose y vimos la interpretación geométrica que tienen los coeficientes de spin, que son las componentes de la conexión en una tétrada o base de vectores nulos dada, y revisamos también la definición de un espacio-tiempo algebraicamente especial y la clasificación de Petrov, que es uno de los esquemas de clasificación de soluciones exactas más importantes que se tiene, junto con las isometrías. Teniendo el formalismo de Newman-Penrose, vimos cómo están relacionados los coeficientes de spin entre una métrica y su transformación de Kerr-Schild, y cómo es que se preservan algunas propiedades geométricas, por ejemplo, que el vector nulo que induce la transformación sea geodésico. Posteriormente, usando las ecuaciones de Newman-Penrose, encontramos cómo están relacionados los tensores de curvatura entre una métrica y su transformación de Kerr-Schild, vimos que si el espacio-tiempo del cual se parte es algebraicamente especial, con n una dirección principal nula repetida, esta propiedad se preserva bajo una KST, y usando las ecuaciones de campo, encontramos la forma del tensor de energía momento inducido por una transformación de Kerr-Schild. Posterior a esto, mostramos algunos ejemplos explícitos de transformaciones de Kerr-Schild, y derivamos un resultado acerca de cuándo los vectores de Killing se preservan bajo una KST, el cual nos permitió encontrar una transformación con algunas simetrías, a partir de la métrica de Schwarzschild, para la cual calculamos explícitamente su tensor de energía momento inducido. Finalmente, discutimos de manera breve el papel de las transformaciones de Kerr-Schild como un método de generación de soluciones exactas en la actualidad.

Los últimos resultados que obtuvimos dan lugar a investigaciones posteriores, por ejemplo, se puede intentar realizar la integración de las expresiones del tensor de energía momento inducido para algunos casos particulares, tal como hicimos en el segundo capítulo. En este sentido, se deben buscar métricas en las cuales se pueda encontrar una tétrada nula caracterizada por algunas cuantas funciones de las coordenadas, como son la métrica de Minkowski, las métricas conformemente planas, o las métricas algebraicamente especiales, donde estas últimas simplifican algunas de las expresiones que obtuvimos para el tensor conforme de Weyl. Otra posible ruta de investigación posterior es usar el resultado que obtuvimos respecto a los vectores de Killing para las transformaciones de Kerr-Schild para hallar métricas que preserven simetrías de las métricas originales, aunque como se ilustra en el último ejemplo realizado, las

métricas obtenidas por esta vía no corresponden necesariamente a un tensor de energía momento observable en la naturaleza, aunque tampoco son soluciones arbitrarias en tanto que poseen simetrías. En cualquiera de los casos, recalcamos la importancia de que las métricas obtenidas por medio de una transformación de Kerr-Schild no sean soluciones arbitrarias, pues la búsqueda de soluciones exactas a las ecuaciones de campo debe tener como fin último encontrar soluciones que sean físicamente aceptables o que permitan extraer información valiosa sobre los fenómenos gravitacionales observables en la naturaleza.

Apéndice A

La derivada de Lie

Definición A.1 Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial en M y T un tensor de rango $\binom{k}{l}$ en M . Para $p \in M$ definimos la derivada de Lie de T respecto a X en p como [3, p. 439]

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)_p^* T_{\Phi_t(p)} - T_p}{t} \right],$$

donde Φ es el flujo asociado al campo vectorial X (definición 1.5).

La siguiente proposición caracteriza la acción de la derivada de Lie sobre funciones diferenciables.

Proposición A.1 Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, entonces se tiene que para todo $p \in M$, $(\mathcal{L}_X f)_p = X_p[f]$ [3, p. 439].

Demostración. Por definición tenemos que

$$(\mathcal{L}_X f)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)_p^* f - f(p)}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\Phi_t(p)) - f(p)}{t} \right],$$

ahora, recordamos que dado $p \in M$, el flujo de X , $\Phi(p) : J(P) \rightarrow M$ tiene como vector tangente en p a X_p , de modo que

$$X_p[f] = \frac{d}{dt} [f \circ \Phi(p)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [f(\Phi_t(p))]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\Phi_t(p)) - f(p)}{t} \right],$$

por lo tanto, $(\mathcal{L}_X f)_p = X_p[f]$.

Para caracterizar la derivada de Lie de un campo vectorial, requerimos del siguiente resultado. La demostración sigue la idea dada en [5, p. 30-31].

Proposición A.2 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para algún punto $p \in M$, $X_p \neq 0$, entonces existe una vecindad

W del punto p tal que su sistema de coordenadas asociado $\{y^1, \dots, y^n\}$ satisfice que

$$X_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_q,$$

para todo punto $q \in W$ [5, p. 30].

Demostración. Si $X_p \neq 0$ entonces por continuidad existe una vecindad U de p tal que para todo $q \in U$, $X_q \neq 0$. Sea $\Phi : I \times M \rightarrow M$ el flujo de X y sea S una hipersuperficie que pasa por p tal que $S \subset U$ y $X_p \notin T_p(S)$. Consideremos entonces la restricción del flujo a S , es decir, $\Phi : I \times S \rightarrow M$. Notamos que $\Phi_{*(0,p)} : T_0(I) \times T_p(S) \rightarrow T_p(M)$ es un isomorfismo pues es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión, que además mapea una base de $T_{(0,p)}(I \times S)$ en una base de $T_p(M)$, ya que $\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(0,p)} = X_p \notin T_p(S)$. Así, de acuerdo al teorema de la función inversa en variedades, existe una vecindad $J \times V$ de $(0, p)$, con $V \subset S$, tal que en dicha vecindad $\Phi : J \times V \rightarrow W$ es un difeomorfismo, donde W es la imagen de Φ y es una vecindad de p . Así, dado un sistema de coordenadas $\{x_2, \dots, x_n\}$ en V y la coordenada natural x_1 en $J = (-\beta, \beta)$, tenemos el sistema coordenado $\{x_1, \dots, x_n\}$ en $J \times V$, asociado al alguna carta φ , por lo que $\varphi \circ \Psi^{-1}$ es una carta para W , la cual induce el sistema coordenado $\{y_1, \dots, y_n\}$, para el cual se cumple que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_q = \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,q)} = X_q,$$

para todo $q \in W$.

Ahora, tenemos la siguiente proposición que nos caracteriza la derivada de Lie para campos vectoriales. La demostración sigue la idea dada en [1, cap. 11, p. 5].

Proposición A.3 *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$, se tiene que $(\mathcal{L}_X Y)_p = [X, Y]_p$ [3, p. 439].*

Demostración. Supongamos que $X_p \neq 0$, entonces por la proposición A.2 existe una carta coordenada φ , con un sistema coordenado $\{y^1, \dots, y^n\}$ asociado a la carta φ tal que $X = \frac{\partial}{\partial y^1}$ en una vecindad del punto p . Usando este sistema de coordenadas tenemos que

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = (\mathcal{L}_X Y)_p^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \right)_p,$$

donde

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)_p^\mu &= (\mathcal{L}_X Y)_p [y^\mu] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)_p^* Y_{\Phi_t(p)} - Y_p}{t} \right] [y^\mu] = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)} - Y_p}{t} \right] [y^\mu] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{Y_{\Phi_t(p)} [y^\mu \circ \Phi_{-t}] - Y_p^\mu}{t} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{Y_{\Phi_t(p)}^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_{\Phi_t(p)} [y^\mu \circ \Phi_{-t}] - Y_p^\mu}{t} \right].
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_{\Phi_t(p)} [y^\mu \circ \Phi_{-t}] = \frac{\partial}{\partial u^\nu} [y^\mu \circ \Phi_{-t} \circ \varphi^{-1}]_{\varphi(\Phi_t(p))} = \delta^\mu_\nu,$$

donde $\{u^1, \dots, u^n\}$ son las proyecciones coordenadas en \mathbb{R}^n . Para ver que esto es cierto, notemos que $\varphi(\Phi_t(p))$ son las coordenadas del punto $\Phi_t(p)$, es decir, $\varphi(\Phi_t(p)) = (y_p^1 + t, y_p^2, \dots, y_p^n)$. Así, para $\nu = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^1} [y^\mu \circ \Phi_{-t} \circ \varphi^{-1}]_{\varphi(\Phi_t(p))} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^\mu(\Phi_{-t}(\varphi^{-1}(y_p^1 + t + s, y_p^2, \dots, y_p^n))) - y_p^\mu}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^\mu(\Phi_{-t}(\Phi_{t+s}(p))) - y_p^\mu}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^\mu(\Phi_s(p)) - y_p^\mu}{s} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p [y^\mu] = \delta^\mu_1,
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se verifica porque Φ es el flujo del campo vectorial $X = \frac{\partial}{\partial y^1}$. Por otro lado, para $\nu \neq 1$, digamos $\nu = 2$ por ejemplo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^2} [y^\mu \circ \Phi_{-t} \circ \varphi^{-1}]_{\varphi(\Phi_t(p))} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^\mu(\Phi_{-t}(\varphi^{-1}(y_p^1 + t, y_p^2 + s, \dots, y_p^n))) - y_p^\mu}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^\mu(\Phi_{-t}(\Psi_s \circ \Phi_t(p))) - y_p^\mu}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y^\mu(\Psi_s(p)) - y_p^\mu}{s} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_p [y^\mu] = \delta^\mu_2,
\end{aligned}$$

donde Ψ es el flujo asociado al campo vectorial $\frac{\partial}{\partial y^2}$. Así, tenemos que en general

$\left(\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)_{\Phi_t(p)} [y^\mu \circ \Phi_{-t}] = \frac{\partial}{\partial u^\nu} [y^\mu \circ \Phi_{-t} \circ \varphi^{-1}]_{\varphi(\Phi_t(p))} = \delta^\mu_\nu$ por lo que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p^\mu &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{Y_{\Phi_t(p)}^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)_{\Phi_t(p)} [y^\mu \circ \Phi_{-t}] - Y_p^\mu}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{Y_{\Phi_t(p)}^\nu \delta^\mu_\nu - Y_p^\mu}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{Y_{\Phi_t(p)}^\mu - Y_p^\mu}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{Y^\mu(\Phi_t(p)) - Y^\mu(p)}{t} \right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p [Y^\mu] = X_p [Y^\mu]. \end{aligned}$$

Por otro lado, $X^\mu = \delta^\mu_1$ de modo que $Y_p [X^\mu] = Y_p [\delta^\mu_1] = 0$, por lo tanto $(\mathcal{L}_X Y)_p^\mu = X_p [Y^\mu] = X_p [Y^\mu] - Y_p [X^\mu] = [X, Y]_p^\mu$, que es una expresión válida en cualquier sistema coordenado, por lo tanto se cumple que

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = [X, Y]_p,$$

como se quería demostrar.

Observación A.1 De acuerdo con la proposición anterior, sabemos que la derivada de Lie de Y con respecto a X , $\mathcal{L}_X Y$, es igual al conmutador de los dos campos, $[X, Y]$, y un cálculo directo demuestra que dicho conmutador satisface [5, p. 13]

1. Anticonmutatividad: $[X, Y] = -[Y, X]$,
2. Identidad de Jacobi: $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$.

Ahora, para caracterizar la derivada de Lie de tensores de cualquier rango, utilizamos el siguiente resultado. La demostración sigue la idea de [3, p. 439-440].

Proposición A.4 Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y sean S, T tensores de rango $\binom{k}{l}$ y $\binom{m}{n}$ en M respectivamente, entonces se cumple que [5, p. 43]

$$\mathcal{L}_X (T \otimes S)_p = T_p \otimes (\mathcal{L}_X S)_p + (\mathcal{L}_X T)_p \otimes S_p.$$

Demostración. En la demostración de la proposición anterior obtuvimos que en el sistema de coordenadas adaptado al campo vectorial X , se tiene que

$$(\mathcal{L}_X Y)_p^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p Y^\mu.$$

Mediante un procedimiento totalmente análogo al de la proposición anterior, es posible demostrar que en este mismo sistema de coordenadas, esto se cumple

para tensores de rango arbitrario, es decir, dado un tensor G de rango $\binom{k}{l}$, se tiene en el sistema de coordenadas adaptado al campo vectorial X

$$(\mathcal{L}_X G)_p^{\mu_1, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \dots, \nu_l} = \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_p G^{\mu_1, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \dots, \nu_l},$$

así, en este sistema coordenado se verifica directamente que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(T \otimes S)_p^{\mu_1, \dots, \mu_{k+m}}_{\nu_1, \dots, \nu_{l+n}} = \\ (T_p \otimes (\mathcal{L}_X S)_p)^{\mu_1, \dots, \mu_{k+m}}_{\nu_1, \dots, \nu_{l+n}} + ((\mathcal{L}_X T)_p \otimes S_p)^{\mu_1, \dots, \mu_{k+m}}_{\nu_1, \dots, \nu_{l+n}}, \end{aligned}$$

luego, como ésta es una expresión tensorial válida en cualquier sistema de coordenadas, se sigue que $\mathcal{L}_X(T \otimes S)_p = T_p \otimes (\mathcal{L}_X S)_p + (\mathcal{L}_X T)_p \otimes S_p$.

Estos resultados nos permiten caracterizar la derivada de Lie de tensores de rango $\binom{0}{1}$, como muestra el siguiente resultado, cuyo enunciado y demostración se basan en [1, cap. 11, p. 6].

Proposición A.5 *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ un campo de 1-formas, entonces se tiene que*

$$\mathcal{L}_X \omega = (\omega_{\mu, \nu} X^\nu + \omega_\nu X^\nu_{, \mu}) dx^\mu.$$

Demostración. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial arbitrario, entonces por la regla del producto de Leibniz

$$\mathcal{L}_X(\omega \otimes Y) = \omega \otimes (\mathcal{L}_X Y) + (\mathcal{L}_X \omega) \otimes Y,$$

es decir, en el sistema coordenado $\{x^1, \dots, x^n\}$ se tiene que

$$(\mathcal{L}_X(\omega \otimes Y))^\mu_\nu = \omega_\nu (\mathcal{L}_X Y)^\mu + (\mathcal{L}_X \omega)_\nu Y^\mu.$$

Ahora, tomando $\nu = \mu$ en la igualdad anterior tenemos que

$$\mathcal{L}_X((\omega \otimes Y)^\mu_\mu) = \mathcal{L}_X(\omega_\mu Y^\mu) = \omega_\mu (\mathcal{L}_X Y)^\mu + (\mathcal{L}_X \omega)_\mu Y^\mu,$$

pero $\omega_\mu Y^\mu$ es una función escalar, por lo tanto

$$\mathcal{L}_X(\omega_\mu Y^\mu) = X[\omega_\mu Y^\mu] = X^\nu \partial_\nu [\omega_\mu Y^\mu] = X^\nu (\omega_{\mu, \nu} Y^\mu + \omega_\mu Y^\mu_{, \nu}),$$

mientras que, por la proposición A.3, sabemos que

$$(\mathcal{L}_X Y)^\mu = [X, Y]^\mu = X^\nu \partial_\nu [Y^\mu] - Y^\nu \partial_\nu [X^\mu] = X^\nu Y^\mu_{, \nu} - Y^\nu X^\mu_{, \nu},$$

de modo que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)_\mu Y^\mu &= \mathcal{L}_X(\omega_\mu Y^\mu) - \omega_\mu (\mathcal{L}_X Y)^\mu \\ &= X^\nu (\omega_{\mu, \nu} Y^\mu + \omega_\mu Y^\mu_{, \nu}) - \omega_\mu (X^\nu Y^\mu_{, \nu} - Y^\nu X^\mu_{, \nu}) \\ &= \omega_{\mu, \nu} X^\nu Y^\mu + \omega_\mu X^\nu Y^\mu_{, \nu} - \omega_\mu X^\nu Y^\mu_{, \nu} + \omega_\mu X^\mu_{, \nu} Y^\nu \\ &= \omega_{\mu, \nu} X^\nu Y^\mu + \omega_\nu X^\nu_{, \mu} Y^\mu \\ &= (\omega_{\mu, \nu} X^\nu + \omega_\nu X^\nu_{, \mu}) Y^\mu, \end{aligned}$$

Luego, como el campo vectorial Y fue arbitrario, se sigue que $(\mathcal{L}_X \omega)_\mu = \omega_{\mu,\nu} X^\nu + \omega_\nu X^\nu_{,\mu}$ y por tanto

$$\mathcal{L}_X \omega = (\omega_{\mu,\nu} X^\nu + \omega_\nu X^\nu_{,\mu}) dx^\mu,$$

como se quería demostrar.

Esto se puede generalizar a tensores de rango $\binom{0}{2}$ como se muestra a continuación.

Proposición A.6 *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ un tensor de rango $\binom{0}{2}$, entonces se tiene que*

$$\mathcal{L}_X \omega = (\omega_{\mu\nu,\lambda} X^\lambda + \omega_{\mu\lambda} X^\lambda_{,\nu} + \omega_{\lambda\nu} X^\lambda_{,\mu}) dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

La demostración es análoga a la de la proposición A.5. Más aún, esto se puede generalizar del mismo modo para tensores de mayor rango, por ejemplo, si T es ahora un tensor de rango $\binom{1}{3}$ entonces las componentes respecto a una base coordenada de su derivada de Lie con respecto al campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ son

$$(\mathcal{L}_X T)^\alpha_{\beta\mu\nu} = T^\alpha_{\beta\mu\nu,\lambda} X^\lambda - T^\lambda_{\beta\mu\nu} X^\alpha_{,\lambda} + T^\alpha_{\lambda\mu\nu} X^\lambda_{,\beta} + T^\alpha_{\beta\lambda\nu} X^\lambda_{,\mu} + T^\alpha_{\beta\mu\lambda} X^\lambda_{,\nu}.$$

Una consecuencia directa de la proposición A.6 es la linealidad en el primer argumento de la derivada de Lie para tensores de rango $\binom{0}{2}$, como se enuncia a continuación.

Proposición A.7 *Sea ω un tensor de rango $\binom{0}{2}$ en M , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que*

$$\mathcal{L}_{aX+Y} \omega = a\mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_Y \omega.$$

Por otro lado, recordamos que la derivada de Lie satisface la identidad de Jacobi, $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$, con $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, la cual se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} Z = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y Z - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X Z.$$

Esta identidad puede generalizarse a tensores de mayor rango, como se muestra en la proposición siguiente, para tensores de rango $\binom{0}{2}$

Proposición A.8 *Sean ω un tensor de rango $\binom{0}{2}$ en M , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces se cumple que*

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} \omega = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega.$$

Demostración. Dada una base coordenada $\{\partial_\mu\}$, las componentes de $\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega$ están dadas por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega)_{\mu\nu} &= \omega_{\mu\nu,\lambda}[X,Y]^\lambda + \omega_{\mu\lambda}[X,Y]^\lambda_{,\nu} + \omega_{\lambda\nu}[X,Y]^\lambda_{,\mu} \\ &= \omega_{\mu\nu,\lambda}(X^\gamma Y^\lambda_{,\gamma} - Y^\gamma X^\lambda_{,\gamma}) \\ &\quad + \omega_{\mu\lambda}(X^\gamma_{,\nu} Y^\lambda_{,\gamma} + X^\gamma Y^\lambda_{,\gamma,\nu} - Y^\gamma_{,\nu} X^\lambda_{,\gamma} - Y^\gamma X^\lambda_{,\gamma,\nu}) \\ &\quad + \omega_{\lambda\nu}(X^\gamma_{,\mu} Y^\lambda_{,\gamma} + X^\gamma Y^\lambda_{,\gamma,\mu} - Y^\gamma_{,\mu} X^\lambda_{,\gamma} - Y^\gamma X^\lambda_{,\gamma,\mu}). \end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega = \mathcal{L}_X[(\omega_{\mu\nu,\lambda} Y^\lambda + \omega_{\mu\lambda} Y^\lambda_{,\nu} + \omega_{\lambda\nu} Y^\lambda_{,\mu}) dx^\mu \otimes dx^\nu]$, por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega)_{\mu\nu} &= (\omega_{\mu\nu,\lambda} Y^\lambda)_{,\gamma} X^\gamma + (\omega_{\mu\gamma,\lambda} Y^\lambda) X^\gamma_{,\nu} + (\omega_{\gamma\nu,\lambda} Y^\lambda) X^\gamma_{,\mu} \\ &\quad + (\omega_{\mu\lambda} Y^\lambda_{,\nu})_{,\gamma} X^\gamma + (\omega_{\mu\lambda} Y^\lambda_{,\gamma}) X^\gamma_{,\nu} + (\omega_{\gamma\lambda} Y^\lambda_{,\nu}) X^\gamma_{,\mu} \\ &\quad + (\omega_{\lambda\nu} Y^\lambda_{,\mu})_{,\gamma} X^\gamma + (\omega_{\lambda\gamma} Y^\lambda_{,\mu}) X^\gamma_{,\nu} + (\omega_{\lambda\gamma} Y^\lambda_{,\gamma}) X^\gamma_{,\mu}, \end{aligned}$$

de este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega)_{\mu\nu} &= (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega)_{\mu\nu} - (\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega)_{\mu\nu} = \\ &= \omega_{\mu\nu,\lambda,\gamma} Y^\lambda X^\gamma + \omega_{\mu\nu,\lambda} Y^\lambda_{,\gamma} X^\gamma + \omega_{\mu\gamma,\lambda} Y^\lambda X^\gamma_{,\nu} + \omega_{\gamma\nu,\lambda} Y^\lambda X^\gamma_{,\mu} \\ &\quad + \omega_{\mu\lambda,\gamma} Y^\lambda_{,\nu} X^\gamma + \omega_{\mu\lambda} Y^\lambda_{,\nu,\gamma} X^\gamma + \omega_{\mu\lambda} Y^\lambda_{,\gamma} X^\gamma_{,\nu} + \omega_{\gamma\lambda} Y^\lambda_{,\nu} X^\gamma_{,\mu} \\ &\quad + \omega_{\lambda\nu,\gamma} Y^\lambda_{,\mu} X^\gamma + \omega_{\lambda\nu} Y^\lambda_{,\mu,\gamma} X^\gamma + \omega_{\lambda\gamma} Y^\lambda_{,\mu} X^\gamma_{,\nu} + \omega_{\lambda\gamma} Y^\lambda_{,\gamma} X^\gamma_{,\mu} \\ &\quad - \omega_{\mu\nu,\lambda,\gamma} X^\lambda Y^\gamma - \omega_{\mu\nu,\lambda} X^\lambda_{,\gamma} Y^\gamma - \omega_{\mu\gamma,\lambda} X^\lambda Y^\gamma_{,\nu} - \omega_{\gamma\nu,\lambda} X^\lambda Y^\gamma_{,\mu} \\ &\quad - \omega_{\mu\lambda,\gamma} X^\lambda_{,\nu} Y^\gamma - \omega_{\mu\lambda} X^\lambda_{,\nu,\gamma} Y^\gamma - \omega_{\mu\lambda} X^\lambda_{,\gamma} Y^\gamma_{,\nu} - \omega_{\gamma\lambda} X^\lambda_{,\nu} Y^\gamma_{,\mu} \\ &\quad - \omega_{\lambda\nu,\gamma} X^\lambda_{,\mu} Y^\gamma - \omega_{\lambda\nu} X^\lambda_{,\mu,\gamma} Y^\gamma - \omega_{\lambda\gamma} X^\lambda_{,\mu} Y^\gamma_{,\nu} - \omega_{\lambda\gamma} X^\lambda_{,\gamma} Y^\gamma_{,\mu} \\ &= \omega_{\mu\nu,\lambda}(X^\gamma Y^\lambda_{,\gamma} - Y^\gamma X^\lambda_{,\gamma}) \\ &\quad + \omega_{\mu\lambda}(X^\gamma_{,\nu} Y^\lambda_{,\gamma} + X^\gamma Y^\lambda_{,\gamma,\nu} - Y^\gamma_{,\nu} X^\lambda_{,\gamma} - Y^\gamma X^\lambda_{,\gamma,\nu}) \\ &\quad + \omega_{\lambda\nu}(X^\gamma_{,\mu} Y^\lambda_{,\gamma} + X^\gamma Y^\lambda_{,\gamma,\mu} - Y^\gamma_{,\mu} X^\lambda_{,\gamma} - Y^\gamma X^\lambda_{,\gamma,\mu}) \\ &= (\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega)_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

es decir, $(\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega)_{\mu\nu} = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega)_{\mu\nu}$, que es una expresión tensorial válida en cualquier sistema coordenado, por lo tanto, $\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega$, como queríamos demostrar.

Apéndice B

Grupos y álgebras de Lie

Definición B.1 (Grupo de Lie) Sea (G, \cdot) un grupo. Decimos que G es un grupo de Lie si G tiene estructura de variedad diferenciable y la transformación $\mu : G \times G \rightarrow G$ dada por $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es diferenciable [2, p. 44].

Ejemplo. Notemos que el conjunto de matrices cuadradas de dimensión n sobre los reales, $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, al ser un espacio vectorial, tiene estructura de variedad diferenciable (de dimensión n^2), sin embargo no es un grupo (con la multiplicación usual de matrices), pues no toda matriz cuadrada es invertible. Así, si consideramos el conjunto de las matrices reales cuadradas invertibles de dimensión n , $GL(n, \mathbb{R})$, como la función determinante

$$\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

es una función polinomial, esta resulta ser continua, de modo que el conjunto $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = GL(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto en $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y por lo tanto tiene estructura de variedad diferenciable, de la misma dimensión que $M_{n \times n}(\mathbb{R})$; además, como las entradas de la multiplicación de matrices son polinomios y por la regla de Cramer, la inversa de una matriz es una función diferenciable [37, p. 151], entonces la función AB^{-1} resulta ser diferenciable. Luego, se sigue que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Ejemplo. Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana. Consideremos al conjunto de isometrías de la variedad $I(M) = \{\Phi : M \rightarrow M \mid \forall p \in M, (\Phi)_p^* g_{\Phi(p)} = g_p\}$ (definición 1.4). Es fácil ver que $I(M)$ es un grupo bajo la composición de funciones y además es posible dar a $I(M)$ una estructura de grupo de Lie, sin embargo la demostración de esto requiere más elementos de geometría diferencial para ser desarrollada aquí. Dicha demostración puede consultarse, por ejemplo, en [38, p. 39-41].

Al ser los grupos de Lie objetos matemáticos bastante complicados, un concepto que emerge naturalmente de los grupos de Lie es de álgebra de Lie, el cual se define a continuación.

Definición B.2 (Álgebra de Lie) *Sea g un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , dotado con la función bilineal $\{\cdot, \cdot\} : g \times g \rightarrow g$ tal que para todo $X, Y, Z \in g$ se tiene que*

1. $\{X, Y\} = -\{Y, X\}$,
2. $\{\{X, Y\}, Z\} + \{\{Z, X\}, Y\} + \{\{Y, Z\}, X\} = 0$,

entonces se dice que la pareja $(g, \{\cdot, \cdot\})$ es un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} y a la operación $\{\cdot, \cdot\}$ se le llama corchete [5, p. 447].

Ejemplo. Consideremos al conjunto de campos vectoriales sobre una variedad diferenciable M , $\mathfrak{X}(M)$ dotado con la función $\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por $\{X, Y\} = \mathcal{L}_X Y$, entonces por la proposición A.3 sabemos que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ y en virtud de la observación A.1, se tiene que el conmutador satisface las propiedades de la definición anterior, por lo tanto $(\mathfrak{X}(M), \mathcal{L}_{(\cdot)}(\cdot))$ es un álgebra de Lie.

Esto proporciona una manera de asociar un álgebra de Lie a una variedad M . Cuando la variedad también es un grupo de Lie, existe otra álgebra de Lie asociada a esta variedad, la cual se construye a continuación.

Definición B.3 *Sea G un grupo de Lie y sea $a \in G$, definimos los mapeos $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$ como $L_a(g) = ag$ y $R_a(g) = ga$ respectivamente, donde $g \in G$ [5, p. 447].*

Definición B.4 *Sea G un grupo de Lie. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice invariante por la izquierda si y sólo si $(L_a)_* X_g = X_{ag}$, para todo $a, g \in G$. Denotamos al conjunto de campos vectoriales en G invariantes por la izquierda como \mathfrak{g} , es decir, $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) : (L_a)_* X_g = X_{ag}, \forall a, g \in G\}$ [5, p. 448].*

Notamos que \mathfrak{g} es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$, y más aún, una subálgebra de Lie (es decir, un subespacio vectorial de un álgebra de Lie que es cerrado bajo el corchete) de $(\mathfrak{X}(G), [\cdot, \cdot])$ como muestra la siguiente proposición.

Proposición B.1 *Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ [5, p. 448].*

La demostración de esta proposición requiere de la siguiente definición y las dos proposiciones siguientes.

Definición B.5 *Sean M, N variedades diferenciables, $\Phi : M \rightarrow N$ diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Decimos que X, Y están Φ -relacionados si y sólo si $(\Phi)_* X_p = Y_{\Phi(p)}$ para todo $p \in M$ [5, p. 14].*

Notemos que de acuerdo con la definición anterior, para $X \in \mathfrak{X}(G)$, $X \in \mathfrak{g}$ si y sólo si X está L_a -relacionado consigo mismo, para todo $a \in G$.

Proposición B.2 Sean M, N variedades diferenciables, $\Phi : M \rightarrow N$ diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Entonces X, Y están Φ -relacionados si y sólo si para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, $X[f \circ \Phi] = (Yf) \circ \Phi$ [5, p. 14].

Demostración. Tenemos que $X[f \circ \Phi] = (Yf) \circ \Phi$ para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si $X_p[f \circ \Phi] = Y_{\Phi(p)}f$ para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $p \in M$, lo cual ocurre si y sólo si $\Phi_{*p}X_p(f) = Y_{\Phi(p)}f$ para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in M$, y esto pasa si y sólo si $\Phi_{*p}X_p = Y_{\Phi(p)}$ para todo $p \in M$, es decir, si y sólo si X, Y están Φ -relacionados.

Proposición B.3 Sean M, N variedades diferenciables, $\Phi : M \rightarrow N$ diferenciable, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Si X_1, Y_1 están Φ -relacionados y X_2, Y_2 están Φ -relacionados, entonces $[X_1, X_2], [Y_1, Y_2]$ están Φ -relacionados [5, p. 14].

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que $[X_1, X_2], [Y_1, Y_2]$ están Φ -relacionados si y sólo si para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, $[X_1, X_2](f \circ \Phi) = ([Y_1, Y_2]f) \circ \Phi$, lo cual ocurre si y sólo si para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $p \in M$, $[X_1, X_2]_p(f \circ \Phi) = [Y_1, Y_2]_{\Phi(p)}f$, pero se tiene que

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]_p(f \circ \Phi) &= X_{1p}[X_2(f \circ \Phi)] - X_{2p}[X_1(f \circ \Phi)] \\ &= X_{1p}[(Y_2f) \circ \Phi] - X_{2p}[(Y_1f) \circ \Phi], \end{aligned}$$

porque X_1, Y_1 están Φ -relacionados y también lo están X_2, Y_2 . Por otro lado,

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2]_{\Phi(p)}f &= Y_{1\Phi(p)}[Y_2f] - Y_{2\Phi(p)}[Y_1f] \\ &= X_{1p}[(Y_2f) \circ \Phi] - X_{2p}[(Y_1f) \circ \Phi], \end{aligned}$$

Nuevamente, porque X_1, Y_1 están Φ -relacionados y también lo están X_2, Y_2 . Luego, tenemos que para toda $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $p \in M$, $[X_1, X_2]_p(f \circ \Phi) = [Y_1, Y_2]_{\Phi(p)}f$ y por lo tanto $[X_1, X_2], [Y_1, Y_2]$ están Φ -relacionados, como se quería demostrar.

Así, retomando la proposición B.1, si $X \in \mathfrak{g}$ y $Y \in \mathfrak{g}$ entonces X está L_a -relacionado consigo mismo para todo $a \in G$, y Y está L_a -relacionado consigo mismo para todo $a \in G$, de modo que por la proposición anterior, $[X, Y]$ está L_a -relacionado consigo mismo, para todo $a \in G$ y por lo tanto, $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, es decir, \mathfrak{g} es una subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(G), [\cdot, \cdot])$.

Definición B.6 Al álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ se le conoce como el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G [5, p. 448].

Existe una caracterización útil del álgebra de Lie asociada a G , como el espacio $T_e(G)$ donde e denota el elemento neutro del grupo de Lie G , como se muestra a continuación.

Proposición B.4 La función $T : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$ definida por $T(X) = X_e$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales [5, p. 448].

Demostración. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathbb{R}$, tenemos que $T(aX + Y) = (aX + Y)_e = aX_e + Y_e = aT(X) + T(Y)$ por lo que T es una transformación lineal.

Ahora, T es inyectiva pues si $T(X) = 0$ entonces $X_e = 0$ pero para todo $b \in G$, $X_b = X_{eb}$, y como $X \in \mathfrak{g}$ entonces $X_{eb} = (L_b)_* X_e = 0$ lo cual implica que para todo $b \in G$, $X_b = X_{eb} = 0$, es decir, si $T(X) = 0$ entonces $X = 0$. Por otro lado, dado $Y \in T_e(G)$, definimos $X \in \mathfrak{X}(G)$ como $X_b = (L_b)_* Y$ para $b \in G$, entonces $X \in \mathfrak{g}$ ya que dados $a, g \in G$

$$(L_a)_* X_g = (L_a)_* (L_g)_* Y = (L_a \circ L_g)_* Y = (L_{ag})_* Y = X_{ag},$$

por lo tanto $X \in \mathfrak{g}$, y además $T(X) = X_e = (L_e)_* Y = Y$ ya que para $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $(L_e)_* Y(f) = Y[f \circ L_e]$, pero $(f \circ L_e)(b) = f(L_e(b)) = f(eb) = f(b)$, para todo $b \in G$ por lo tanto $(L_e)_* Y(f) = Y[f \circ L_e] = Y[f]$, para toda $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ lo cual implica que $(L_e)_* Y = Y$, de modo que $T(X) = Y$ y por lo tanto T es suprayectiva.

Luego, T es un isomorfismo, como se quería demostrar.

Ademas, podemos inducir en $T_e(G)$ un corchete del siguiente modo: dados $v, w \in T_e(G)$ sabemos que existen únicos $X, Y \in \mathfrak{g}$ tales que $T(X) = v$, $T(Y) = w$ por lo que definimos el corchete $\{\cdot, \cdot\} : T_e(G) \times T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ como $\{v, w\} = [X, Y]_e$. De este modo, $T_e(G)$ con el corchete que acabamos de definir es un álgebra de Lie, el cual podemos pensar como el álgebra de Lie asociada a G , gracias al isomorfismo que existe entre $T_e(G)$ y \mathfrak{g} , el cual preserva el corchete, es decir, $T([X, Y]) = \{T(X), T(Y)\}$.

Teniendo todas estas definiciones presentes, veamos ahora la demostración de la existencia de un isomorfismo entre entre el conjunto $ci(M)$ (el cual se define al final de la sección 1.1) y el álgebra de Lie asociada al grupo de isometrías, $\mathfrak{J}(M)$.

Definición B.7 Para $p \in M$, definimos el mapeo $\Pi_p : I(M) \rightarrow M$ como $\Pi_p(\Phi) = \Phi(p)$ para $\Phi \in I(M)$ [5, p. 255].

Definición B.8 Dado $p \in M$, definimos la transformación $T : \mathfrak{J}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ como $T(X)(p) = (\Pi_p)_* X_e$, donde e denota al elemento neutro del grupo de Lie $I(M)$ [5, p. 256].

Como se muestra en la siguiente proposición, la imagen de T está contenida en $ci(M)$.

Proposición B.5 Para todo $X \in \mathfrak{J}(M)$, $T(X) \in ci(M)$ [5, p. 256].

Demostración. Sea $\Psi : J \times I(M) \rightarrow I(M)$ el flujo de X , como los grupos de un parámetro están definidos en toda la recta real [5, p. 255], la función $t \rightarrow \Psi_t(e)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, donde e es el elemento neutro de $I(M)$; veamos que esta función es el flujo (global) de $T(X)$: dado $p \in M$, tenemos que $\Psi(e)(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ cumple que $\Psi_0(e)(p) = e(p) = p$, por lo que resta ver que

$(\Psi(e)(p))'_s = T(X)_{\Psi_s(e)(p)}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} T(X)_{\Psi_s(e)(p)}[f] &= (\Pi_{\Psi_s(e)(p)})_{*e}(X_e)[f] = X_e[f \circ \Pi_{\Psi_s(e)(p)}] \\ &= \frac{d}{dt} [f \circ \Pi_{\Psi_s(e)(p)} \circ \Psi(e)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [f(\Pi_{\Psi_s(e)(p)}(\Psi_t(e)))]_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [f(\Psi_t(e)(\Psi_s(e)(p)))]_{t=0} = \frac{d}{dt} [f(\Psi_{t+s}(e)(p))]_{t=0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Psi_{t+s}(e)(p)) - f(\Psi_s(e)(p))}{t}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} (\Psi(e)(p))'_s[f] &= \frac{d}{dt} [f \circ \Psi(e)(p)]_{t=s} = \frac{d}{dt} [f(\Psi_t(e)(p))]_{t=s} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Psi_{t+s}(e)(p)) - f(\Psi_s(e)(p))}{t}, \end{aligned}$$

luego, para todo $p \in M$ se tiene que $\Psi_0(e)(p) = p$ y $(\Psi(e)(p))'_s = T(X)_{\Psi_s(e)(p)}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\Psi(e)$ es el flujo de $T(X)$, el cual está definido en $\mathbb{R} \times M$, por lo tanto $T(X)$ es completo, y además para todo $t \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(e) \in I(M)$ por lo tanto $T(X)$ es un vector de Killing. Luego, $T(X) \in ci(M)$.

Así, redefinimos $T : \mathfrak{J}(M) \rightarrow ci(M)$, entonces T cumple lo siguiente.

Proposición B.6 $T : \mathfrak{J}(M) \rightarrow ci(M)$ es una transformación lineal y biyectiva [5, p. 256].

Demostración.

1. T es lineal: Dados $X, Y \in \mathfrak{J}(M)$, $a \in \mathbb{R}$, para $p \in M$ se tiene que $T(aX + Y)(p) = (\Pi_p)_{*e}((aX + Y)_e) = (\Pi_p)_{*e}(aX_e + Y_e) = a(\Pi_p)_{*e}(X_e) + (\Pi_p)_{*e}(Y_e) = aT(X)(p) + T(Y)(p)$, lo cual es cierto para todo $p \in M$, por lo tanto $T(aX + Y) = aT(X) + T(Y)$, es decir, T es lineal.
2. T es inyectiva: Supongamos que $T(X) = 0$ entonces $(\Pi_p)_{*e}(X_e) = 0$ para todo $p \in M$, entonces si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$0 = (\Pi_p)_{*e}(X_e)(f) = X_e[f \circ \Pi_p] = \frac{d}{dt} [f(\Pi_p(\Psi_t(e)))]_{t=0},$$

donde $\Psi(e) : \mathbb{R} \rightarrow I(M)$ es la curva integral de X que en $t = 0$ pasa por e . Luego,

$$0 = \frac{d}{dt} [f(\Pi_p(\Psi_t(e)))]_{t=0} = \frac{d}{dt} [f(\Psi_t(e)(p))]_{t=0}.$$

En particular, podemos tomar $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como las funciones coordenadas $\{x^\mu\}$ de modo que

$$0 = \frac{d}{dt} [f(\Pi_p(\Psi_t(e)))]_{t=0} = \frac{d}{dt} [x^\mu(\Psi_t(e)(p))]_{t=0}, \quad \forall \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Así, como las funciones $t \rightarrow x^\mu(\Psi_t(e)(p))$ son constantes $x^\mu(\Psi_t(e)(p)) = x^\mu(\Psi_0(e)(p)) = x^\mu(e(p)) = x^\mu(p)$ lo cual implica que $\Psi_t(e)(p) = p$ y por lo tanto $\Psi_t(e) = e$, es decir, el flujo de X es el mapeo identidad en $I(M)$, por lo tanto $X = 0$, lo cual implica que T es inyectiva.

3. T es suprayectiva: Sea $X \in ci(M)$, entonces como X es un vector de Killing completo, podemos ver el flujo (global) $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ de X como una función $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow I(M)$ de modo que $Y = (\Phi)_{*0} \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \in T_e(I(M))$ y usando la construcción de la demostración para la proposición B.4, definimos $X \in \mathfrak{J}(M)$ como $X_a = (L_a)_{*e}(Y)$ para $a \in I(M)$, entonces

$$T(X)(p) = (\Pi_p)_{*e}[X_e] = (\Pi_p)_{*e}[(L_e)_{*e}(Y)],$$

de modo que si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(X)(p)[f] &= (\Pi_p)_{*e}[(L_e)_{*e}(Y)](f) = (L_e)_{*e}(Y)[f \circ \Pi_p] \\ &= Y[f \circ \Pi_p \circ L_e] = (\Phi)_{*0} \left(\frac{d}{dt} \right)_0 [f \circ \Pi_p \circ L_e] \\ &= \frac{d}{dt}[f \circ \Pi_p \circ L_e \circ \Phi]_{t=0}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $L_e \circ \Phi = e \circ \Phi = \Phi$, pues e es el mapeo identidad en M . Así, tenemos que

$$T(X)(p)[f] = \frac{d}{dt}[f \circ \Pi_p \circ \Phi]_{t=0} = \frac{d}{dt}[f(\Phi_t(p))]_{t=0} = X_p[f],$$

lo cual es cierto para toda $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, por tanto $T(X)(p) = X_p$ para todo $p \in M$, lo cual implica que $T(X) = X$, es decir, el mapeo T es suprayectivo.

Así, se concluye que T es lineal y biyectiva.

Como consecuencia de esta proposición tenemos ahora lo siguiente.

Proposición B.7 *El conjunto $ci(M)$ tiene estructura de espacio vectorial*

Demostración. Como $T : \mathfrak{J}(M) \rightarrow ci(M)$ es suprayectiva entonces la imagen de T es $ci(M)$ y como T es una transformación lineal entonces su imagen es un espacio vectorial.

Y la proposición B.6 se puede traducir del siguiente modo.

Proposición B.8 *$T : \mathfrak{J}(M) \rightarrow ci(M)$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales.*

Veamos ahora que además el isomorfismo $T : \mathfrak{J}(M) \rightarrow ci(M)$ se comporta bien respecto al conmutador.

Proposición B.9 *Si $X, Y \in \mathfrak{J}(M)$, entonces $[T(X), T(Y)] = -T([X, Y])$ [5, p. 256].*

La demostración sigue la ruta trazada en [5, p. 256].

Demostración. Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ el flujo de $T(X)$ y sea $p \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned} [T(X), T(Y)]_p &= (\mathcal{L}_{T(X)}T(Y))_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_t)_p^* T(Y)_{\Phi_t(p)} - T(Y)_p}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_{-t})_{\Phi_t(p)}^* T(Y)_{\Phi_t(p)} - T(Y)_p}{t} \right]. \end{aligned}$$

Sea $q = \Phi_t(p)$, entonces se verifica de manera directa que

$$\Phi_{-t} \circ \Pi_q = \Pi_p \circ R_{\Phi_t} \circ L_{\Phi_{-t}},$$

por lo tanto,

$$(\Phi_{-t})_{*q} (\Pi_q)_{*e} Y_e = (\Pi_p)_{*e} (R_{\Phi_t})_{*\Phi_{-t}} Y_{\Phi_{-t}},$$

así, se tiene que

$$\begin{aligned} [T(X), T(Y)]_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Phi_{-t})_{*q} (\Pi_q)_{*e} Y_e - T(Y)_p}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Pi_p)_{*e} (R_{\Phi_t})_{*\Phi_{-t}} Y_{\Phi_{-t}} - (\Pi_p)_{*e} Y_e}{t} \right] \\ &= (\Pi_p)_{*e} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(R_{\Phi_t})_{*\Phi_{-t}} Y_{\Phi_{-t}} - Y_e}{t} \right] \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$[-X, Y]_e = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Psi_t)_e^* Y_{\Psi_t(e)} - Y_e}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\Psi_{-t})_{*\Psi_t(e)} Y_{\Psi_t(e)} - Y_e}{t} \right],$$

donde Ψ es el flujo de $-X \in \mathfrak{X}(I(M))$, por lo que la función $\varphi : \mathbb{R} \times I(M) \rightarrow I(M)$, definida por $\varphi_t = \Psi_{-t}$, es el flujo de X . Así, podemos reescribir la expresión anterior como

$$[-X, Y]_e = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\varphi_t)_{*\varphi_{-t}(e)} Y_{\varphi_{-t}(e)} - Y_e}{t} \right].$$

Consideremos ahora a un elemento $g \in I(M)$ y a la curva $L_g \varphi(e) : \mathbb{R} \rightarrow I(M)$, entonces $L_g \varphi(e)$ es la curva integral del campo $(L_g)_* X$ que empieza en g , ya que $L_g \varphi_0(e) = L_g e = g e = g$, y además, dado $s \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (L_g \varphi(e))'_s &= (L_g \varphi(e))_{*s} \left(\frac{d}{dt} \right)_s = (L_g)_{*\varphi_s(e)} (\varphi(e))_{*s} \left(\frac{d}{dt} \right)_s \\ &= (L_g)_{*\varphi_s(e)} (\varphi(e))'_s, \end{aligned}$$

pero $\varphi(e)$ es una curva integral de X entonces $(\varphi(e))'_s = X_{\varphi_s(e)}$, por tanto

$$(L_g \varphi(e))'_s = (L_g)_{*\varphi_s(e)} X_{\varphi_s(e)} = X_{g\varphi_s(e)},$$

donde la última igualdad se cumple porque $X \in \mathfrak{J}(M)$. Ahora, notemos que $L_g \varphi(e) = g\varphi(e) = R_{\varphi(e)}g$, entonces la igualdad anterior se escribe como

$$(R_{\varphi(e)}g)'_s = X_{R_{\varphi(e)}g},$$

así, $R_{\varphi(e)}g$ es la curva integral de X que empieza en g , por lo tanto $R_{\varphi(e)}$ es el flujo de X , lo cual implica que $R_{\varphi(e)} = \varphi$, y además como $\varphi(e)$ es la curva integral de X que pasa por e , entonces dicha curva es el flujo de $T(X)$, es decir, $\varphi(e) = \Phi$, de modo que $\varphi = R_\Phi$ y por tanto

$$[-X, Y]_e = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(\varphi_t)_{*\varphi^{-t}(e)} Y_{\varphi^{-t}(e)} - Y_e}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(R_{\Phi_t})_{*\Phi^{-t}} Y_{\Phi^{-t}} - Y_e}{t} \right],$$

luego, se sigue que

$$\begin{aligned} [T(X), T(Y)]_p &= (\Pi_p)_{*e} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(R_{\Phi_t})_{*\Phi^{-t}} Y_{\Phi^{-t}} - Y_e}{t} \right] \right] \\ &= (\Pi_p)_{*e}([-X, Y]_e) = -(\Pi_p)_{*e}([X, Y]_e) \\ &= -T([X, Y])_p, \end{aligned}$$

lo cual es cierto para todo $p \in M$, por lo tanto $[T(X), T(Y)] = -T([X, Y])$, como se quería demostrar.

De esto, se sigue que $ci(M)$ tiene también estructura de álgebra de Lie, pues si $Z, W \in ci(M)$, como T es biyectiva entonces existen únicos $X, Y \in \mathfrak{J}(M)$ tales que $T(X) = Z$, $T(Y) = W$, y entonces se tiene que

$$[Z, W] = [T(X), T(Y)] = -T([X, Y]) \in ci(M).$$

Así, de acuerdo con la proposición B.8 y la proposición B.9, existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre las álgebras de Lie $\mathfrak{J}(M)$ y $ci(M)$ que además preserva el corchete (salvo un signo menos), por lo que estas dos álgebras de Lie son esencialmente las mismas.

Si además el grupo de isometrías de la variedad $I(M)$ es simplemente conexo, entonces podemos asegurar que existe un isomorfismo de grupos entre $I(M)$ y el grupo de Lie asociado a $ci(M)$ (ver, por ejemplo, [37, p. 531]) es decir, el grupo de transformaciones de M en sí mismas generado por el flujo de los vectores de Killing completos. Así, en este caso el flujo de los vectores de Killing completos determina por completo al grupo de isometrías de la variedad.

Referencias

- [1] Nahmad-Achar, E. (2018). *Differential Topology and Geometry with Applications to Physics*. Bristol: IOP Publishing.
- [2] Sánchez-Morgado, H. y Palmas-Velasco, O. A. (2007). *Geometría riemanniana*. Ciudad de México: Las Prensas de Ciencias.
- [3] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press.
- [4] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3ª ed.). Nueva York: Springer.
- [5] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Londres: Academic Press.
- [6] Ramos-Sánchez, S. (2018). *Relatividad para futuros físicos*. Ciudad de México: Las Prensas de Ciencias.
- [7] Eisenhart, L. P. (1961). *Continuous Groups of Transformations* (2ª ed.). Londres: Dover Publications Inc.
- [8] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C. y Herlt, E. (2003). *Exact Solutions to Einstein's Field Equations* (2ª ed.). Nueva York: Cambridge University Press.
- [9] Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley.
- [10] Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (traducción de Vogtman, K. y Weinstein A., 2ª ed.). Nueva York: Springer.
- [11] Houri, T., Tomoda, K. y Yasui, Y. (2018). On integrability of the Killing equation. *Classical and Quantum Gravity*, **35**(7), 10.1088/1361-6382/aaa4e7.
- [12] Adler, R., Bazin, M. y Schiffer, M. (1965). *Introduction to General Relativity* (2ª ed.). Tokio: McGraw-Hill.

- [13] Kerr, R. P. y Schild, A. (2009). Republication of: A New Class of Vacuum Solutions of the Einstein Field Equations. *General Relativity and Gravitation*, **41**(10), 2485-2499, 10.1007/s10714-009-0857-z.
- [14] Debney, G. C., Kerr, R. P. y Schild, A. (1969). Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **10**(10), 1842-1854, 10.1063/1.1664769.
- [15] Kerr, R. P. (1963). Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, **11**(5), 237-238, 10.1103/PhysRevLett.11.237.
- [16] Visser, M. (2009). The Kerr Spacetime: A Brief Introduction. En Wiltshire, D. L., Visser, M. y Scott, S. M. (Eds.). *The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity*. (pp. 3-37). Nueva York: Cambridge University Press.
- [17] Hartle, J. B. (2003). *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley.
- [18] Robinson, D. C. (1975). Uniqueness of the Kerr Black Hole. *Physical Review Letters*, **34**(14), 905-906, 10.1103/PhysRevLett.34.905.
- [19] Amsel, A. J., Horowitz, G. T., Marolf, D. y Roberts, M. M. (2009). No dynamics in the extremal Kerr throat. *Journal of High Energy Physics*, **2009**(9), 10.1088/1126-6708/2009/09/044.
- [20] Amsel, A. J., Horowitz, G. T., Marolf, D. y Roberts, M. M. (2010). Uniqueness of extremal Kerr and Kerr-Newman black holes. *Physical Review D*, **81**(2), 10.1103/PhysRevD.81.024033.
- [21] Carter, B. (1968). Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Physical Review (Series I)*, **174**(5), 1559-1571, 10.1103/physrev.174.1559.
- [22] Kerr, R. P. y Wilson, W. B. (1979). Singularities in the Kerr-Schild Metrics. *General Relativity and Gravitation*, **10**(4), 273-281, 10.1007/bf00759485.
- [23] Nahmad-Achar, E. (1988). On Generalized Kerr-Schild Transformations. *Journal of Mathematical Physics*, **29**(8), 1879-1884, 10.1063/1.527891.
- [24] Newnam, E. T. y Penrose, R. (1962). An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, **3**(3), 566-578, 10.1063/1.1724257.
- [25] Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford: Clarendon Press.
- [26] Flaherty, E. J. (1976). *Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity*. Berlin: Springer.

- [27] Sachs, R. (1961). Gravitational Waves in General Relativity VI. The Outgoing Radiation Condition. *Proceedings of the Royal Society of London*, **264**(1318), 309-338, 10.2307/2414993.
- [28] Bilge, A. H. y Gürses, M. (1982). Generalized Kerr-Schild transformation. En M. Serdaroğlu y E. İnönü (Eds.). *Group Theoretical Methods in Physics: Proceedings of the XIth International Colloquium held at Boğaziçi University, Istanbul, Turkey, August 23-28, 1982*. (pp. 252-255). Berlin: Springer.
- [29] Martín-Pascual, F. y Senovilla, J. M. M. (1988). Petrov types D and II perfectfluid solutions in generalized Kerr-Schild form. *Journal of Mathematical Physics*, **29**(4), 937-944, 10.1063/1.527991.
- [30] Sopena, C. F. (1998). Stationary generalized Kerr-Schild spacetimes. *Journal of Mathematical Physics*, **39**(2), 1024-1039, 10.1063/1.532368.
- [31] Berman, D. S., Kim, K. y Lee, K. (2021) The classical double copy for M-theory from a Kerr-Schild ansatz for exceptional field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2021**(4), 10.1007/JHEP04(2021)071.
- [32] Bini, D., Geralico, A. y Kerr, R. P. (2010) The Kerr-Schild Ansatz Revised. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **7**(4), 693-703, 10.1142/S0219887810004518.
- [33] Newnam, E. T. y Janis, A. I. (1965). Note on the Kerr Spinning Particle Metric. *Journal of Mathematical Physics*, **6**(6), 915-917, 10.1063/1.1704350.
- [34] Mazza, J., Franzin, E. y Liberati, S. (2021). A novel family of rotating black hole mimickers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2021**(4), 10.1088/1475-7516/2021/04/082.
- [35] Hoenselaers, C., Kinnersley, W. y Xanthopoulos B. C. (1979). Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell equations. VI. Transformations which generate asymptotically flat spacetimes with arbitrary multipole moments. *Journal of Mathematical Physics*, **20**(12), 2530-2536, 10.1063/1.524058.
- [36] Chinea, F. J. (1982). Bäcklund Transformations in General Relativity. En Wolf, K. B. (Ed.). *Nonlinear Phenomena: Proceedings of the CIFMO School and Workshop held at Oaxtepec, México, November 29 - December 17, 1982*. (pp. 342-353). Berlin: Springer.
- [37] Lee, J. M. (2013). *Introduction to Smooth Manifolds* (2^a ed.). Nueva York: Springer.
- [38] Kobayashi, S. (1995). *Transformation Groups in Differential Geometry* (republicación de la edición de 1972). Berlin: Springer.