



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

*Caracterización de M -particiones de
tamaño 3×3 Mediante Obstrucciones
Mínimas*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JOSÉ JENARO FERNÁNDEZ VELÁZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



CIUDAD DE MÉXICO 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Teoría de Gráficas	5
1.1.1. Gráficas y multigráficas	5
1.1.2. Subgráficas	7
1.1.3. Digráficas	8
1.1.4. Caminos, trayectorias y ciclos	11
1.1.5. Otros conceptos importantes	14
1.1.6. Familias relevantes	17
1.1.7. Caracterización mediante obstrucciones mínimas	18
1.2. M -particiones	22
2. Obstrucciones	31
2.1. Patrones sin clanes	32
2.1.1. Triángulos	36
2.2. Obstrucciones con clanes	39
2.2.1. Gráficas escindibles completas	41
2.2.2. Triángulos	47
2.3. Patrones restantes	72
3. Necesidad y Minimalidad	87
3.1. Patrones sin clanes	87
3.1.1. Triángulos	90
3.2. Obstrucciones con clanes	94
3.2.1. Gráficas escindibles completas	95
3.2.2. Triángulos	99
3.3. Patrones restantes	110
Conclusiones	117

Capítulo 1

Introducción

1.1. Teoría de Gráficas

1.1.1. Gráficas y multigráficas

Definición. Una **gráfica** G es una terna ordenada (V, E, ψ) , donde V es un conjunto no vacío de objetos a los que llamaremos **vértices**, E es un conjunto de **aristas** cuya intersección con V es vacía, y ψ es una función llamada **función de incidencia**, $\psi : E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}$.

La mayor parte del tiempo, las gráficas no son representadas mediante sus entradas, sino por medio de dibujos. Para representar una gráfica, cada vértice se dibuja como un punto en el plano, y cada arista se dibuja como una línea cuyos extremos serán los vértices de su imagen bajo la función de incidencia. Si su imagen tiene un único vértice, la línea incidirá dos veces en él. Por comodidad, las representaciones de las aristas serán curvas simples que unen a las representaciones de sus extremos y que no intersectan a las representaciones de otros vértices. Para una gráfica G , definimos su **orden** $n(G)$ y su **tamaño** $m(G)$ como $|V|$ y $|E|$, respectivamente. Un ejemplo de gráfica es el siguiente:

Sea $G = (V, E, \psi)$, donde $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{e_1, \dots, e_5\}$, y ψ está definida en la tabla de la derecha. Dos posibles representaciones de G son los dibujos que se muestran a continuación. Nótese que, como no existe una única manera de dibujar una gráfica, a veces podemos elegir maneras que hacen más notorias ciertas propiedades que nos importan.

e	$\psi(e)$
e_1	d
e_2	$\{c, d\}$
e_3	$\{c, d\}$
e_4	$\{a, b\}$
e_5	$\{a, d\}$

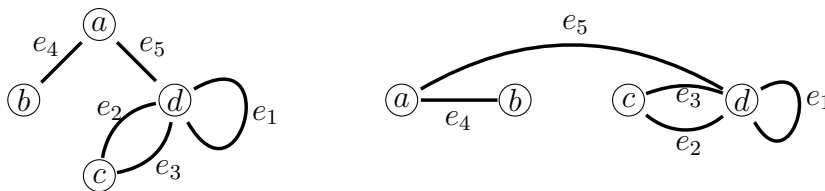


Figura 1.1: Dos representaciones para una misma gráfica.

Decimos que una arista **incide** en un vértice si dicho vértice está en su imagen, y decimos que dos vértices son **adyacentes** o **vecinos** si existe una arista cuya imagen es el conjunto formado por estos vértices. De igual manera, un vértice puede ser adyacente a sí mismo si existe una arista en cuya imagen sólo esté ese vértice. Estas aristas reciben el nombre de **lazo**, y dos aristas cuyas imágenes sean iguales reciben el nombre de **aristas paralelas**, **multiaristas**, o **aristas múltiples**; y bajo esta idea, una gráfica con lazos o multiaristas es llamada **multigráfica**. El **grado** $d(v)$ de un vértice v es el número de extremos de arista que inciden en él. Notemos que si la función ψ es inyectiva y toma como imagen únicamente conjuntos de cardinalidad 2, entonces nuestra gráfica tendrá a lo más una arista por cada pareja de vértices, y ninguna arista incidirá en un único vértice. Una gráfica con estas características conoce también como **gráfica simple**, y podemos definirla sin necesidad de la función ψ , de la siguiente manera:

*Una **gráfica simple** G es una pareja ordenada (V_G, E_G) , donde V_G es un conjunto no vacío y $E_G \subseteq \{A \in \mathcal{P}(V) : |A| = 2\}$. Bajo esta definición, el **grado** de un vértice es el número de aristas que inciden en él.*

Como primera observación, en una gráfica simple tenemos a lo más una arista por cada pareja de vértices, lo que no necesariamente sucede en una multigráfica. Notemos también que en una gráfica simple, la pareja de vértices no es la imagen de la arista bajo la función ψ , sino que la pareja *es* la arista. Sin embargo, usaremos la siguiente notación: si e es la arista $\{u, v\}$, escribiremos $e = uv$. A lo largo de este documento, por **gráfica** nos referiremos a gráfica simple con un conjunto finito de vértices, y si una gráfica tiene lazos o multiaristas la llamaremos **multigráfica**. Cuando hablemos de una sola gráfica, daremos por hecho que su conjunto de vértices es V y su conjunto de aristas E .

Como se ve en la Figura 1.2, dos gráficas pueden tener distintos conjuntos de vértices y aristas y aún así puede suceder que sus dibujos se vean iguales (o bien, que se puedan dibujar de tal forma que se vean iguales). Estrictamente hablando, estas dos gráficas no son la misma, pero serán tan similares que muchas veces no vale la pena hacer una distinción entre ellas. Es aquí donde toma importancia la siguiente definición.

Definición. *Dadas dos gráficas, G y H , un **isomorfismo** de G en H es una función biyectiva $\phi : V_G \rightarrow V_H$ que cumple que $uv \in E_G$ si y sólo si $\phi(u)\phi(v) \in E_H$.*

Decimos que dos gráficas G y H son **isomorfas**, y lo denotaremos por $G \cong H$, si existe un isomorfismo entre ellas. Las gráficas de la Figura 1.2 son isomorfas, y un isomorfismo entre ellas es $\phi(v_i) = u_i$. Es fácil ver que la relación “es isomorfa a” es una relación de equivalencia, por lo que podemos trabajar con un elemento de cada clase definida por la relación para estudiar las propiedades de todas las gráficas en dicha clase.

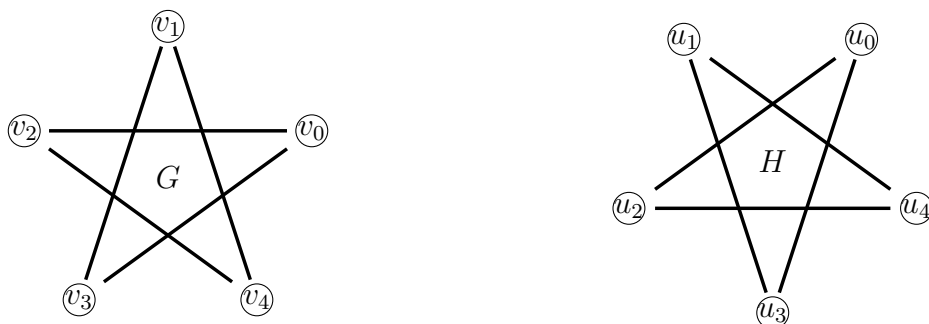


Figura 1.2: Dos gráficas isomorfas.

De manera similar, se define un **homomorfismo** [1] de una gráfica G a una gráfica H como una función $f : V_G \rightarrow V_H$ que cumple que $f(u)f(v) \in E_H$ siempre que $uv \in E_G$. Vale la pena notar que si u y v son no-adyacentes en G , entonces sus imágenes bajo f pueden ser adyacentes, no adyacentes, o iguales. Decimos que un homomorfismo f de G a H es **completo** cuando cumple que $f(u)f(v) \in E_H$ si y sólo si $uv \in E_G$. En la Figura 1.3, podemos observar que la función

$$f(v_i) = \begin{cases} u_1 & \text{si } i \text{ es impar} \\ u_2 & \text{si } i \text{ es par} \end{cases}$$

Es un homomorfismo completo de G a H , pero no es biyectiva, por lo no es un isomorfismo.

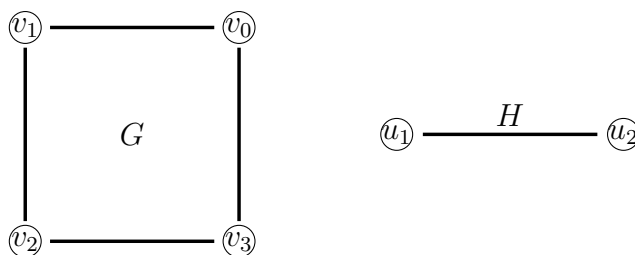


Figura 1.3: Dos gráficas, entre las cuales existe un homomorfismo.

1.1.2. Subgráficas

Si estamos modelando, por ejemplo, el sistema de carreteras de un país mediante una gráfica, nos puede interesar restringir el problema para estudiar sólo las carreteras

que hay dentro de un estado o de un conjunto de estados. En este caso, nos convendría tomar sólo la parte correspondiente de la gráfica en cuestión, y para eso tenemos el siguiente concepto.

Definición. Dada una gráfica G , una **subgráfica** de G es una gráfica H que cumple que $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$. Si H es subgráfica de G , lo denotaremos por $H \subseteq G$. Decimos que una subgráfica H de G es **propia** si $H \neq G$.

Dada una gráfica G , podemos crear subgráficas de ella borrando vértices o borrando aristas. Si borramos una sola arista e , obtenemos la gráfica $G - e$, cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas es $E - \{e\}$. Por otro lado, eliminar un vértice es un poco más complicado: como las aristas están definidas a partir de vértices, si borramos un vértice, debemos asegurarnos de quitar también todas las aristas que inciden en él. Si definimos $\partial(v)$ como el conjunto de aristas que tienen al menos un extremo en v , entonces la gráfica $G - v$ es la pareja ordenada $(V - \{v\}, E - \partial(v))$. Podemos notar que si $v \notin V$, entonces $G - v = G$. Análogamente, si $e \notin E$, entonces $G - e = G$. Partiendo de la convención de que $G - \emptyset = G$, para conjuntos $V' \subsetneq V$ y $S \subseteq E$, definimos $G - (V' \cup \{v\})$ y $G - (S \cup \{e\})$ como $(G - V') - v$ y $(G - S) - e$ respectivamente. Una gráfica que se obtiene de otra eliminando únicamente aristas recibe el nombre de **subgráfica generadora**, y una que se obtiene de otra eliminando únicamente vértices recibe el nombre de **subgráfica inducida**. Si llamamos X al conjunto de vértices de una gráfica inducida H de G , decimos que X **induce** a H , y escribimos $H = G[X]$. Si $X = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$, podemos escribir $H = G[v_0, v_1, \dots, v_k]$. Esto se ilustra en la Figura 1.4.

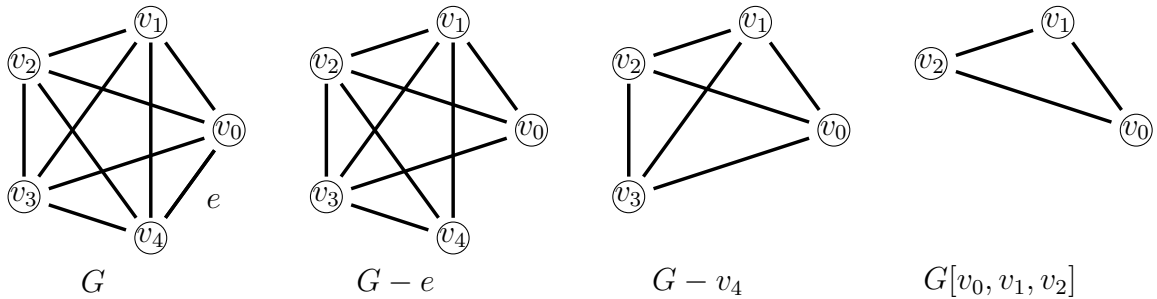


Figura 1.4: una gráfica y varias de sus subgráficas.

Si G y H son gráficas, definimos su **intersección**, $G \cap H$, como la gráfica $(V_G \cap V_H, E_G \cap E_H)$, y su **unión**, $G \cup H$, como $(V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$. Cuando los conjuntos de vértices de G y de H sean ajenos, llamaremos a la unión **ajena**, y la denotaremos como $G + H$. En concordancia con esta misma notación, la unión ajena de n gráficas isomorfas a G se denotará como nG .

1.1.3. Digráficas

Si quisiéramos modelar un problema en el que las relaciones entre nuestros objetos no fueran necesariamente simétricas, por ejemplo, para modelar una red trófica,

necesitaríamos una estructura que nos permitiera visualizar mejor dicha relación. La estructura que nos sirve en este caso sería una digráfica.

Definición ([2]). Una **digráfica estricta** es una pareja ordenada $D = (V_D, A_D)$ donde V es un conjunto no vacío y $A \subseteq V \times V - \{(u, u) : u \in V\}$. Al igual que con las gráficas, el conjunto V es llamado conjunto de vértices, pero en este caso, A es llamado conjunto de **flechas**.

A lo largo de este texto, llamaremos sólo *digráfica* a una digráfica estricta. Cuando hablemos de una sola digráfica, pensaremos que su conjunto de vértices es V y su conjunto de flechas es A . Si D es una digráfica, con $u, v \in V$ y $(u, v) \in A$, diremos que:

1. El vértice u es la cola de (u, v) y v es su cabeza. Asimismo, (u, v) incide tanto en u como en v .
2. El vértice u **domina** a v , y v es **dominado** por u .
3. El vértice u es **invecino** de v , y v es **exvecino** de u . De igual forma, la **invecindad** $N^-(v)$ de v es el conjunto de invecinos de v , mientras que la **exvecindad** $N^+(v)$ de v es el conjunto de exvecinos de v .
4. La flecha (u, v) es **simétrica** si $(v, u) \in A$. Denotaremos este hecho como $\overleftrightarrow{uv} \in A$.
5. La flecha (u, v) es **asimétrica** si $(v, u) \notin A$. Denotaremos este hecho como $\overrightarrow{uv} \in A$.
6. Si $u \in V_1$, $v \in V_2$, diremos que (u, v) es una (V_1, V_2) -flecha. En general, si $V_1, V_2 \subseteq V$ son dos conjuntos ajenos, denotaremos por (V_1, V_2) al conjunto de flechas de D con cola en V_1 y cabeza en V_2 , y diremos que V_1 **domina** a V_2 si para cualesquiera $w \in V_1$, $x \in V_2$, existe la flecha (w, x) .

Además de los puntos anteriores, por *la flecha entre u y v* nos podemos referir a (u, v) , a (v, u) o a ambas, dependiendo del contexto. Como es de esperarse, muchos de los conceptos que se estudian en gráficas tienen su versión en digráficas. Un primer ejemplo es el concepto de grado, que en este caso se divide en dos: el **ingrado** de un vértice v , denotado por $d^-(v)$, es el número de flechas de las cuales v es cabeza, y el **exgrado**, denotado por $d^+(v)$, es el número de flechas de las cuales v es cola. Diremos que un vértice es un **sumidero** si su exgrado es 0 y una **fuentes** si su ingrado es 0. Dadas dos digráficas D y H , para que una función $\phi : V_D \rightarrow V_H$ sea un **isomorfismo** de D a H , pedimos que ϕ sea biyectiva y que $(u, v) \in A_D$ si y sólo si $(\phi(u), \phi(v)) \in A_H$, y para un **homomorfismo** en digráficas pedimos que si $(u, v) \in A_D$, entonces $(\phi(u), \phi(v)) \in A_H$. De igual manera, una **subdigráfica** de una digráfica D es una digráfica H tal que $V_H \subseteq V_D$ y $A_H \subseteq A_D$.

Si D es una digráfica, podemos construir una gráfica G que sea “lo más parecida posible a D ” de la siguiente forma:

- $V_G = V_D$, y

- $uv \in E_G$ si y sólo si $(u, v) \in A_D$ o $(v, u) \in A_D$.

La gráfica G se conoce como la **gráfica subyacente** de D , y se denota por G_D o $UG(D)$.

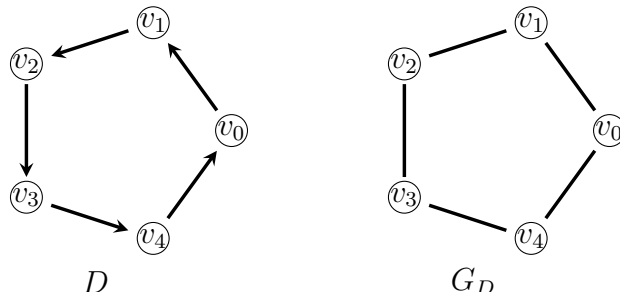


Figura 1.5: Una digráfica y su gráfica subyacente.

Por otro lado, dada cualquier gráfica G , podemos crear una digráfica D a partir de ella dándole direcciones a sus aristas: cada una de las aristas puede transformarse en una flecha simétrica o asimétrica. Si D se obtiene dando una única dirección a cada arista de G , diremos que D es una **orientación** de G . Si todas las aristas de D se obtuvieron convirtiendo las aristas de G en flechas simétricas, D será llamada una **biorientación** de G , y escribiremos $D = \overleftrightarrow{G}$. Ambos casos están englobados cuando decimos que D es una **superorientación** de G , lo que querrá decir que D se obtuvo de darle al menos una dirección a cada arista de G .

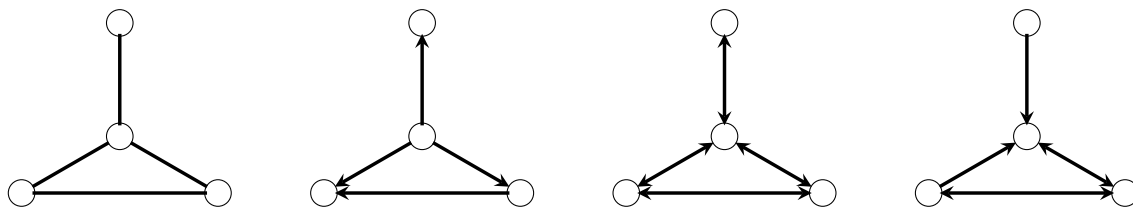


Figura 1.6: De izquierda a derecha tenemos una gráfica, una de sus orientaciones, su biorientación, y una de sus superorientaciones.

Otra manera de representar tanto a las gráficas como a las digráficas es mediante su **matriz de adyacencia**. Para generarla, numeramos los vértices como v_1, v_2, \dots, v_n en cualquier orden, y la matriz de adyacencia será una matriz de tamaño $|V| \times |V|$ con entradas en $\{0, 1\}$ en la que $M_{ij} = 1$ si y sólo si $(v_i, v_j) \in A$ en el caso de las digráficas, y $M_{ij} = 1$ si y sólo si $v_i v_j \in E$ en el caso de las gráficas. Observemos que para cualquier gráfica, la matriz de adyacencia es simétrica gracias a que el orden de los vértices está fijo. Vale la pena mencionar que las matrices de adyacencia no son únicas para cada gráfica (digráfica), pues existen tantas matrices como ordenamientos de V . Un ejemplo para digráficas se puede observar en la Figura 1.7.

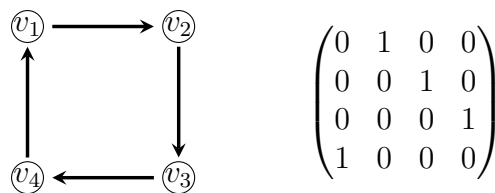


Figura 1.7: Una digráfica con su respectiva matriz de adyacencia.

1.1.4. Caminos, trayectorias y ciclos

Una propiedad que nos interesa de las gráficas es poder conectar un vértice con otro a pesar de que entre estos dos no haya arista alguna. La manera de hacer esto es mediante caminos.

Definición. Un **camino** en una gráfica es una sucesión alternante de vértices y aristas de la forma $(v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_k)$, donde cada v_i es un vértice en la gráfica y $e_j = v_j v_{j+1}$.

Si un camino inicia en u y termina en v , diremos que es un uv -camino. A veces nos importa sólo un segmento del camino, por lo que si x se recorre antes que y en el camino W , podemos referirnos al segmento entre ambos como el **subcamino** xWy . También es posible concatenar dos caminos cuando el último vértice del primer camino coincide con el primer vértice del segundo. Por ejemplo, si $W = (v_0, \dots, v_k)$ con $v_k = x$ y $P = (u_0, \dots, u_l)$ con $u_0 = x$, el camino WP corresponde a $(v_0, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l)$. Aprovechando que estamos trabajando únicamente con gráficas simples, podemos denotar los caminos usando sólo los vértices por los que pasan. Por ejemplo, en la Figura 1.8, la sucesión P dada por (u, v, x, z, x, w, u, v) es un camino. Para las digráficas, un **camino dirigido** es una sucesión $(v_0, a_0, v_1, \dots, v_k)$ donde cada $v_i \in V$ y a_i es la flecha (v_i, v_{i+1}) . Tanto en los caminos como en los caminos dirigidos, cualquier vértice v_i con $i \notin \{0, k\}$ recibe el nombre de **vértice interno**. Al igual que en las gráficas simples, podemos denotar un camino dirigido usando únicamente sus vértices. Por ejemplo, en la digráfica de la Figura 1.8, la sucesión (u', w', y', v') es un camino dirigido en D , pero la sucesión (y', z', x', v', y', x') usa dos flechas en sentido contrario, por lo que no puede ser un camino dirigido en D . Esto no restringe que la misma sucesión pueda ser un camino en G_D .

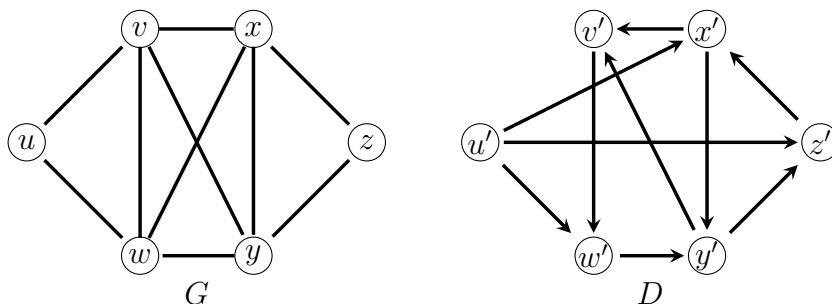


Figura 1.8: Una gráfica y una digráfica.

Como se ve en los ejemplos, un camino puede repetir tanto aristas como vértices. Si queremos restringir esto último, tenemos el siguiente concepto:

Definición. Una **trayectoria** en una gráfica G es un camino que no repite vértices. Si $u, v \in V$, una uv -trayectoria es una trayectoria que inicia en u y termina en v . Análogamente, una **trayectoria dirigida** en una digráfica es un camino dirigido que no repite vértices. Si el contexto lo permite, usaremos el término **trayectoria** en las digráficas para hablar de una trayectoria dirigida.

Si W es un camino dado por la sucesión de vértices (v_0, \dots, v_k) , diremos que su longitud, denotada por $\ell(W)$, es igual a k . Es importante mencionar que $\ell(W)$ no nos indica la cantidad de vértices que tiene el camino, sino la cantidad de transiciones que hace de un vértice a otro. Como, las aristas en las gráficas no tienen dirección, es natural pensar en recorrer un camino W en sentido contrario al que está escrito. En ese caso, tenemos un nuevo camino al cual denotaremos por \overleftarrow{W} . Si un camino termina en el mismo vértice que inició, diremos que el camino es **cerrado**, y de hecho es inmediato notar que una trayectoria no puede ser cerrada. Algunos autores ven a las trayectorias como gráficas que se pueden ordenar en una sucesión de vértices adyacentes. Usando este hecho, nos referiremos a la gráfica con forma de trayectoria de n vértices como P_n .

Definición. Un **ciclo** en una gráfica es un camino cerrado (v_0, \dots, v_k) de longitud al menos 3 que no repite aristas, en el cual $v_0 = v_k$, y para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, k\}$ sucede que $v_i = v_j$ sólo si $i = j$. Nos referiremos a un ciclo de n vértices por C_n .

Un **ciclo** en una digráfica es camino dirigido cerrado (v_0, \dots, v_k) de longitud al menos 1 en el que $v_i = v_j$ sólo cuando $i = 0 = j$. Decimos que un ciclo es **impar** si tiene un número impar de vértices, y **par** en otro caso, y decimos que es **inducido** en una gráfica G (digráfica D), si para cualesquiera dos vértices v_i, v_j del ciclo sucede que $v_i v_j \in E_G$ ($(u, v) \in A_D$) si y sólo si $j = i + 1$.

Proposición 1. En una digráfica, todo camino dirigido cerrado de longitud impar tiene como subcamino un ciclo impar.

Demostración. Por inducción sobre la longitud del camino. Sea P un camino cerrado de longitud 3, entonces P es un ciclo, así que supongamos que esta afirmación es

válida para todo número impar menor que cierta k impar. Si P tiene longitud impar, tenemos dos casos posibles. En el primer caso, P no repite vértices internos, por lo que ya es un ciclo impar. En el segundo, existe un vértice interno que aparece al menos dos veces en la sucesión de P , $v_i = v_j$ con $i < j$. De esta manera, podemos partir P en los dos caminos cerrados $v_i P v_j$ y $v_j P v_0 P v_j$. La suma de las longitudes de estos caminos es la longitud de P , por lo que uno de ellos tiene longitud impar menor que la de P . Por hipótesis de inducción, este camino contiene un ciclo impar, que también está contenido en P . \square

Este resultado tiene su versión para gráficas, y se presenta como el siguiente corolario.

Corolario 1. *Todo camino cerrado de longitud impar en una digráfica contiene como subcamino un ciclo impar.*

Demostración. Sea G una gráfica y W' un camino cerrado de longitud impar en G . Sea \overleftrightarrow{G} la biorientación de G , y W el camino dirigido en G cuya sucesión de vértices es igual a la de W' . gracias a la Proposición 1, W contiene un ciclo impar C , Para el cual existe un ciclo C' de G que cumple que su sucesión de vértices es igual a la de C . Como C es subcamino de W , entonces C' es subcamino de W' , por lo que es un ciclo contenido en W' . \square

Proposición 2. *Todo ciclo impar en una gráfica contiene un ciclo impar inducido en esa misma gráfica.*

Demostración por inducción. Sabemos que todo ciclo de longitud 3 es inducido, así que supongamos que para todo ciclo con longitud impar menor que algún número k , con k impar, se cumple la proposición.

Supongamos ahora que C es un ciclo k no inducido en una gráfica G . Al no ser inducido, existe una arista en G entre dos vértices u y v no consecutivos en C . Consideremos las trayectorias $u C v$ y $v C u$. Como la longitud del ciclo es impar y es la suma de las longitudes de estas trayectorias, entonces al menos una de las trayectorias tiene longitud par. Si a dicha trayectoria le añadimos la arista uv , tendremos un ciclo de longitud impar menor que k que es subgráfica inducida de C , por lo que podemos usar la hipótesis de inducción. \square

Una característica importante de trayectorias radica en que nos permiten llegar de un vértice a otro usando la menor cantidad de aristas. Para formalizar esto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3. *Sea G una gráfica y u y v dos de sus vértices. Si existe un uv -camino, entonces existe una uv -trayectoria de longitud menor o igual que la del uv -camino. Más aun, todos los vértices de la trayectoria estarán en el camino.*

Demostración por inducción sobre la longitud del uv -camino. Sean u, v como en la hipótesis, y sea $W = (u_0, \dots, u_l)$ un uv -camino. Si su longitud es 1, entonces W es la trayectoria buscada. Supongamos que este resultado es válido para cualquier camino de longitud menor que k . Si W tiene longitud k y no es una trayectoria, entonces

existe un vértice x en la sucesión de W que aparece dos veces, digamos en los lugares i y j con $i < j$. Así, el camino $(uWu_i)(u_jWv)$ tiene longitud menor que k , por lo que existe una uv -trayectoria de longitud a lo más k cuyos vértices son usados en $(uWu_i)(u_jWv)$. \square

Una forma más corta de enunciar el resultado anterior es decir que todo uv -camino contiene una uv -trayectoria. Otra aplicación de las trayectorias es saber qué tan *cerca* o *lejos* está un vértice de otro. Si tomamos dos vértices u y v en una gráfica G , definimos la distancia de u a v , denotada por $d_G(u, v)$, como $\min\{\ell(T) : T \text{ es } uv\text{-trayectoria}\}$. Si no existen trayectorias, diremos que esa distancia es infinita. Definimos el **diámetro** de G , $\text{Diam}(G)$ como $\max\{d_G(u, v) : u, v \in V\}$, y para cada vértice v , definimos la **excentricidad** $e(v)$ como $\max\{d(u, v) : u \in V\}$.

1.1.5. Otros conceptos importantes

Conexidad

Decimos que una gráfica G es **conexa** si entre cualesquiera dos vértices existe un camino, y gracias a la Proposición 3, es equivalente pedir que exista una trayectoria entre estos dos vértices. Incluso si G no es conexa, podemos buscar subgráficas conexas de G máximas por contención con esa propiedad.

Definición. Una **componente conexa** de una gráfica G es una subgráfica conexa y máxima por contención con esa propiedad.

Si la gráfica en cuestión es conexa, sólo tendrá una componente, ella misma. En otro caso, cada componente conexa está aislada de las demás. Por otro lado, podemos definir una relación binaria \sim sobre el conjunto de vértices de tal forma que $u \sim v$ si y sólo si existe un uv -camino. Esta relación evidentemente es reflexiva, pues un camino de longitud 0 siempre va de un vértice a si mismo, también simétrica, pues en las gráficas los caminos pueden recorrerse en ambos sentidos, y para ver que esta relación es transitiva, sólo necesitamos concatenar los caminos correspondientes. Por lo tanto, \sim induce una partición sobre el conjunto de los vértices. Las clases de equivalencia bajo esta relación resultan ser conexas, y entre vértices de clases distintas no existen caminos, por lo que es fácil ver que son justamente las componentes conexas de la gráfica.

En digráficas tenemos dos conceptos que se asemejan a la conexidad. Decimos que una digráfica D es **débilmente conexa** si su gráfica subyacente G_D es conexa, y es **fuertemente conexa** cuando entre cualesquiera dos vértices u, v existe una uv -trayectoria dirigida en D . Diremos que una digráfica H es una **componente** de una digráfica D si G_H es componente conexa de G_D .

Particiones

Dada una gráfica G , decimos que un subconjunto S de V es **independiente** si no existe arista alguna cuyos extremos estén en S , y decimos que S es un **clan** si cualesquiera dos de sus vértices son adyacentes. Para una digráfica D , un subconjunto

S de V es **independiente** si no existe flecha alguna cuyos extremos estén en S , y es un **clan** si para cualesquiera dos vértices existe alguna de las dos flechas posibles. Decimos que el clan es **fuerte** todas las flechas del clan son simétricas.

Recordemos que en la mayoría de las ramas de las matemáticas, una partición de un conjunto X es una familia de subconjuntos de X que cumple tres condiciones:

1. Ninguno de los elementos de la partición (que son subconjuntos de X) es vacío.
2. Para cualesquiera dos elementos de la partición, la intersección es vacía.
3. La unión de los elementos de la partición es X .

En teoría de gráficas, una partición no necesariamente cumple el primer punto, y aunque ahora no sea muy claro por qué, esto permite categorizar a las gráficas mediante algunas propiedades de forma más fácil.

Dada $k \in \mathbb{N}$, definimos una **k -partición de G** como una partición de V_G en k conjuntos independientes, y decimos que G es k -partita si admite una k -partición. Una gráfica es **multipartita completa** si es multipartita (es decir, k -partita para alguna $k \geq 2$) y cualesquiera dos vértices en partes distintas son adyacentes.

Complemento

Recordemos que dado un conjunto universal U , el complemento de cualquier conjunto $X \subseteq U$, $U - X$ es $\{u \in U : u \notin X\}$. En las gráficas también existe una noción de complemento, y está relacionado con el conjunto de aristas. Si $G = (V, E)$ es una gráfica, su complemento se denota \overline{G} , y corresponde a la gráfica $(V, \{A \in \mathcal{P}(V) : |A| = 2\} - E)$. Bajo esta noción, podemos observar que la unión de una gráfica con su complemento resulta siempre en una gráfica en la cual todos los vértices son adyacentes entre sí. Ésta última recibe el nombre de **gráfica completa**, y para cada entero positivo n podemos crear una gráfica completa con n vértices, a la que llamaremos K_n . El complemento de una gráfica completa es una **gráfica vacía**, y se denota por $\overline{K_n}$.

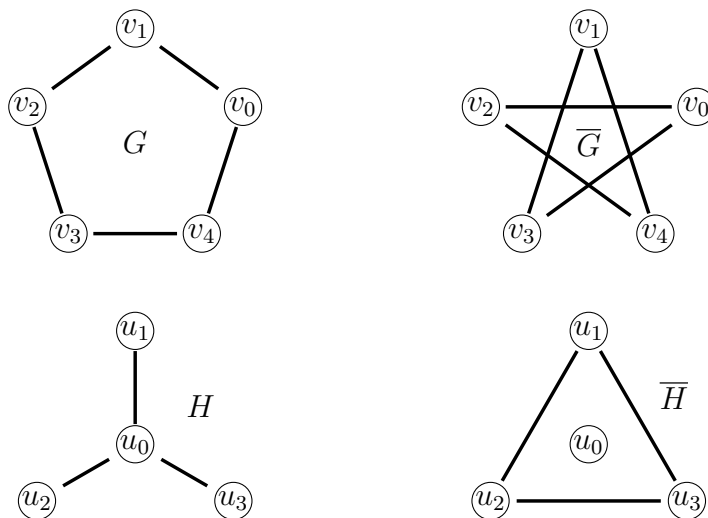


Figura 1.9: Dos gráficas y sus respectivos complementos

En las digráficas, el complemento funciona tomando cada una de las flechas que no aparecen en la digráfica original. Entonces, si entre dos vértices no existe flecha alguna en una digráfica D , en \overline{D} existirá una flecha simétrica.

Como es de esperarse, tanto para las gráficas como para las digráficas, el complemento del complemento vuelve a ser la gráfica (digráfica) original, es decir, dada cualquiera gráfica (digráfica) G , se cumple que $\overline{\overline{G}} = G$.

Inversa

Dada una digráfica D , la **inversa** \overleftarrow{D} consiste intuitivamente en la digráfica obtenida de invertir el sentido de cada una de las flechas de D . Formalmente, \overleftarrow{D} es la digráfica (V, A') , con $A' = \{(u, v) : (v, u) \in A\}$. Es importante notar que dada una digráfica D , sucederá que $G_D = G_{\overleftarrow{D}}$.

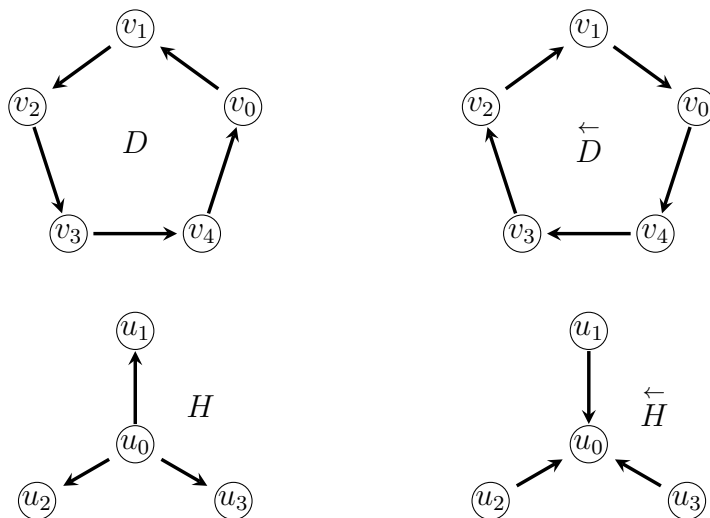


Figura 1.10: Dos digráficas y sus respectivas inversas.

Vale la pena notar que a veces una digráfica puede ser isomorfa a su inversa, un ejemplo de esto se ilustra en la Figura 1.10. De igual manera, si una digráfica D contiene a H como subdigráfica inducida, entonces \overleftarrow{H} es subdigráfica inducida de \overleftarrow{D} . Además de que este último resultado es sencillo de ver, su contrapuesta será bastante útil para el siguiente capítulo, en donde buscamos que una digráfica no contenga ciertas estructuras como subdigráficas inducidas.

1.1.6. Familias relevantes

Existen características que nos ayudan a agrupar las gráficas. Por ejemplo, sabemos que en una gráfica completa están todas las aristas posibles, y una vacía es aquella en la cual no hay aristas. A continuación se presentan las familias de gráficas que se usarán para resolver el planteamiento del problema, y en la Figura 1.11 se encuentran ejemplos de cada una de ellas.

- Una gráfica **completa** es aquella en la que cualesquiera dos vértices son adyacentes. Nos referiremos a la gráfica completa de n vértices por K_n . Además de esto, podemos referirnos a K_3 o a cualquiera de sus superiorizaciones por el nombre de **triángulo**.
- Una gráfica **vacía** es aquella en la que ninguna pareja de vértices es adyacente.
- Una gráfica es **k -partita** (multipartita) si existe una partición de su conjunto de vértices en k conjuntos independientes. En particular, una gráfica es **bipartita** si es 2-partita, **tripartita** si es 3-partita.
- Una gráfica es **k -partita completa** (multipartita completa) si es k -partita y cualesquiera dos vértices en partes distintas son adyacentes. Si una gráfica es

k -partita completa con $k \geq 2$ y sus partes tienen n_1, n_2, \dots, n_k vértices, la denotaremos por K_{n_1, n_2, \dots, n_k} .

- Una gráfica G es **escindible** si existe una partición (K, S) de su conjunto de vértices que cumpla que $G[K]$ es completa y $G[S]$ vacía.
- Una gráfica es **escindible completa** si es escindible con partición (K, S) y cada vértice de K es adyacente a todos los vértices de S .
- Un **diamante** es una gráfica de cuatro vértices con cinco aristas.

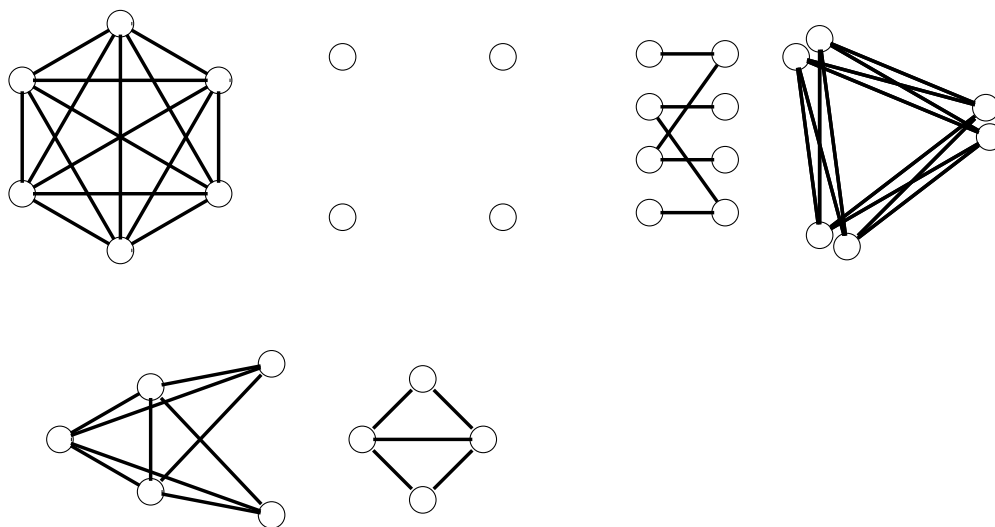


Figura 1.11: De izquierda a derecha y de arriba a abajo: la gráfica completa K_6 , la gráfica vacía \overline{K}_4 , una gráfica bipartita, la gráfica tripartita completa $K_{2,2,2}$, una gráfica escindible completa, y un diamante.

1.1.7. Caracterización mediante obstrucciones mínimas

Pensemos en la gráfica completa K_6 , cuyo dibujo se encuentra en la Figural 1.11. Si tomamos cualquier conjunto $S \subseteq V_{K_6}$, podemos notar que en $K_6[S]$, cualesquiera dos vértices son adyacentes, por lo que, al igual que K_6 , $K_6[S]$ también es completa, y de hecho es $K_{|S|}$. En general, si una propiedad en una gráfica G se cumple también para cualquier subgráfica inducida de G , decimos que esta propiedad es **hereditaria**. Las propiedades *ser completa* y *ser vacía* claramente son hereditarias, y de hecho, si pensamos en las familias anteriores como propiedades (ser multipartita, ser escindible, etc), es sencillo ver que éstas también son hereditarias. Tomemos cualquier gráfica G que cumpla alguna de estas propiedades. Sabemos que existe una partición $V' = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ que exhibe la propiedad de G , por lo que si tomamos cualquier subconjunto S de vértices de G , entonces V' restringida a S será la partición deseada para $G[S]$ que exhiba la misma propiedad.

Que las propiedades sean hereditarias nos permite caracterizar las familias de la siguiente forma. Supongamos que $P(G)$ es una propiedad hereditaria de G . Si existiera una gráfica H que no tuviera la propiedad P , entonces H no podría ser subgráfica de G . Si lográramos encontrar todas las gráficas H_1, H_2, \dots que no cumplen P , pero cuyas subgráficas propias inducidas todas cumplen P , estaríamos encontrando en cierta forma las gráficas *mínimas* para obstruir P . Para demostrar que estas subgráficas son suficientes para restringir P , bastaría suponer que tenemos una gráfica G^* en la cual ninguna de las H_i es subgráfica inducida, y demostrar que G^* cumple P . En general, si una gráfica H no es subgráfica inducida de una gráfica G , decimos que G es libre de H .

Las gráficas H_1, H_2, \dots escritas anteriormente, asociadas a una propiedad hereditaria P , se conocen como **obstrucciones mínimas** de P . A continuación, se encontrarán las obstrucciones mínimas para algunas de las familias de la sección anterior, y se demostrará que son todas. A esto se le conoce como **caracterización por obstrucciones mínimas**.

Teorema 1. *Una gráfica G es completa si y sólo si es libre de $2K_1$.*

Demostración. La gráfica $2K_1$ no es completa, pues sus únicos dos vértices son no-adyacentes. Por lo mismo, una gráfica completa G no puede tener a $2K_1$ como gráfica inducida. Por otro lado, si tomamos a G como una gráfica libre de $2K_1$ y nos fijamos en dos de sus vértices u, v , debe suceder que $uv \in E$, por lo que G es completa. Además, $2K_1$ es mínima, ya que todas sus subgráficas inducidas propias son isomorfas a K_1 , que sí es completa. \square

Teorema 2. *Una gráfica es vacía si y sólo si es libre de K_2 .*

Demostración. Que una gráfica sea libre de K_2 quiere decir que dicha gráfica no tiene arista alguna, que es la definición de que sea vacía. Por otro lado, si una gráfica es vacía, no tiene arista alguna, por lo que no podemos tomar dos vértices en ella que formen la gráfica K_2 . Además, K_2 es mínima, ya que todas sus subgráficas inducidas propias son isomorfas a K_1 , que es vacía. \square

Teorema 3. *Una gráfica es bipartita si y sólo si no contiene ciclos impares inducidos.*

Demostración. Demostremos primero que si un ciclo tiene una bipartición, entonces es par. Sea $C = (v_0, \dots, v_k)$ un ciclo y sea (X, Y) una bipartición de C . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_0 \in X$, y esto implica por la arista existente v_0v_1 que $v_1 \in Y$. Como el vértice v_{2l} es adyacente a v_{2l+1} , se sigue que estos deben estar en partes distintas de la partición. Además, $v_0 \in X$, de donde se sigue que todos los vértices de subíndice par estarán en X , y los demás estarán en Y . Como $v_0 = v_k$ y $v_k \in X$, sabemos que k es par, por lo que C tiene longitud par k .

Ahora debemos ver que si G es una gráfica sin ciclos impares inducidos, podemos encontrar una bipartitación para G . Para esto, podemos suponer que G es conexa, y generalizar posteriormente. Como se vio en la Proposición 2, G no puede tener ciclos de longitud impar. Tomando un vértice v , definimos $X = \{u \in V : d(u, v) \text{ es par}\}$ y $Y = \{u \in V : d(u, v) \text{ es impar}\}$. Como la distancia entre cualquier vértice y v es

única, X y Y son ajenos. Veamos ahora que cada conjunto es independiente. Sean $u, x \in X$, y sean P y Q una uv -trayectoria y una vx -trayectoria respectivamente, cada una de longitud mínima. Si u y x fueran adyacentes, entonces PQu sería un camino cerrado de longitud impar, que por la Proposición 1 contendría un ciclo impar, lo que sería contradicción. Por lo tanto, (X, Y) es una bipartición de G .

Si la gráfica no es conexa, podemos pensar que sus componentes son G_1, G_2, \dots, G_k para alguna $k \in \mathbb{N}$. En este caso, el argumento anterior es válido para cada una de las componentes de G , por lo que cada componente tiene su propia bipartición (X_i, Y_i) , y la partición de G está dada por $(\cup_{i=1}^k X_i, \cup_{i=1}^k Y_i)$. \square

Teorema 4. *Una gráfica es k -partita completa si y sólo si es libre de K_{k+1} y de $K_1 + K_2$.*

Demostración. Si G es k -partita completa y tomamos $k + 1$ vértices, al menos dos de ellos deben estar en la misma parte, por lo que no pueden ser adyacentes, y así no tendremos subgráficas isomorfas a K_{k+1} . Tomemos cualesquiera tres vértices de G y consideramos una k -partición de G . Si los tres están en la misma parte, tendremos una subgráfica isomorfa a $\overline{K_3}$, y si los tres están en distintas partes, tendremos K_3 . Si dos de ellos están en la misma parte y el tercero está en otra, entonces tendremos P_3 como gráfica inducida, pero en ningún caso posible se induce $K_2 + K_1$.

Por otro lado, si G es libre de K_{k+1} y $K_1 + K_2$, podemos llamar H a la subgráfica completa de G de orden más grande p . Notemos que $p \leq k$, nombremos x_1, x_2, \dots, x_p a los vértices de H , y consideremos $V_i = \{v \in V_G : vx_i \notin E\}$ para $1 \leq i \leq p$. Observemos que $x_i \in V_i$, ya que G no tiene lazos. Veamos que (V_1, \dots, V_p) es la k -partición deseada. Si hubiera dos vértices en V_i adyacentes, sabemos que éstos no son adyacentes a x_i , por lo que forman una subgráfica isomorfa a $K_1 + K_2$. Esto quiere decir que cada V_i es independiente. Tomemos ahora $v \in V_G \setminus V_H$. Por definición de H , v no puede ser adyacente a todos los vértices de H , por lo que $v \in V_i$ para algún conjunto V_i . Si un vértice v está en dos conjuntos V_i, V_j , tenemos por definición que no es adyacente a x_i ni a x_j , así que $\{v, x_i, x_j\}$ induce $K_1 + K_2$, lo que contradice las hipótesis. Esto nos dice que los conjuntos V_i son ajenos. Veamos ahora que cualesquiera dos vértices en conjuntos distintos son adyacentes. Evidentemente, si tomamos dos vértices x_i y x_j , éstos serán adyacentes por ser vértices de H , y si tomamos un vértice x_i y un vértice $v \in V_j \setminus V_H, i \neq j$, estos serán adyacentes por definición de V_i , así que basta analizar qué sucede al tomar $v \in V_i \setminus \{x_i\}, u \in V_j \setminus \{x_j\}$. Para este caso, ya sabemos que $vx_j \in E$, y si $uv \notin E$, entonces $\{u, v, x_j\}$ induciría $K_1 + K_2$.

De esta manera, los conjuntos V_i son independientes, forman una partición, y cualesquiera dos vértices en conjunto distintos son adyacentes. \square

Es importante notar que al quitar la restricción de K_{k+1} en el Teorema 4, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2. *Una gráfica G es multipartita completa si y sólo si es libre de $K_1 + K_2$.*

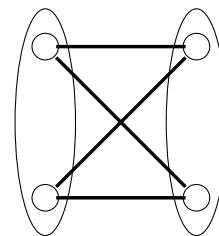
Demostración. Si una gráfica G es libre de $K_1 + K_2$, tomamos una subgráfica completa máxima por contención en G . Si dicha gráfica es isomorfa a K_ℓ para algún

$\ell \in \mathbb{N}$, entonces G es libre de $K_{\ell+1}$ y de $K_1 + K_2$, por lo que es ℓ -partita completa. En cambio, si G es multipartita completa, forzosamente es k -partita completa para algún entero $k \geq 2$, por lo que es libre de K_{k+1} y de $K_1 + K_2$. \square

Teorema 5. *Una gráfica es escindible completa si y sólo si es libre de C_4 y de $K_1 + K_2$.*

Demostración. Sea G una gráfica escindible completa con partición (K, S) . Si tomamos cualesquiera tres vértices, las posibles gráficas que inducen son K_3 si al menos dos están en el clan, $\overline{K_3}$ si los tres están en el conjunto independiente, y P_3 si sólo dos de ellos están en el conjunto independiente, pero en ningún caso es posible inducir $K_1 + K_2$. Si $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ fuera un ciclo inducido C_4 en G , entonces $v_1, v_3 \in S$, pues no son adyacentes entre sí, pero $v_0, v_2 \in S$ por la misma razón. Esto contradice que S sea independiente, por lo que C_4 no puede ser subgráfica inducida de G .

En cambio, si G es libre de C_4 y de $K_1 + K_2$, sabemos por el Corolario 2 que es multipartita completa con partición (V_1, V_2, \dots, V_k) para alguna $k \geq 2$. Como G es libre de C_4 , el cardinal de V_i es 1 para todas salvo a lo más una de las partes de la partición, pues de no ser así, tendríamos una subgráfica isomorfa a C_4 , como en la ilustración de la derecha. Si supongemos que V_1 es la parte con más de un vértice, podemos definir K como $\cup_{i=2}^k V_i$. Al ser la unión de partes unitarias distintas, K es un clan, y cada uno de sus vértices será adyacente a todos los de V_1 , dado que G era multipartita completa. Gracias a esto, (K, V_1) es una partición escindible de G .



\square

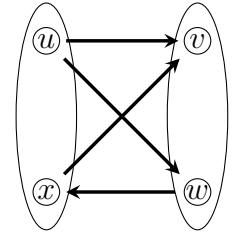
Corolario 3. *Las particiones escindibles completas son únicas para cualquier gráfica G no isomorfa a K_n .*

Demostración. Si una gráfica G es escindible completa distinta de K_n con partición (K, S) , S no puede ser unitario, pues si así fuera, G sería isomorfa a K_n . Así, cualquier conjunto independiente no unitario de G es subconjunto de S , pero si se toma un subconjunto propio $S' \subsetneq S$, entonces existirá un vértice $v \in S \setminus S'$ no adyacente a los vértices de S' , por lo que la partición puede ser escindible, pero no escindible completa. \square

Lema 1. *Sean D una digráfica multipartita completa y S_1 y S_2 dos de sus partes tales que $S_1 \neq S_2$. Si D no contiene $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$ ni $\circ \rightarrow \circ \leftrightarrow \circ$ como subdigráficas inducidas, entonces S_1 domina a S_2 o viceversa.*

Demostración. Supongamos que $u \in S_1, v \in S_2$. Si la flecha entre u y v es simétrica, entonces todas las flechas entre S_1 y S_2 deben ser simétricas para evitar cualquiera de las últimas dos obstrucciones. Veamos qué sucede si la flecha (u, v) existe pero la flecha (v, u) no.

Gracias a la primera obstrucción, sabemos que en $D[S_1 \cup S_2]$, los vértices u y v son una fuente y un sumidero respectivamente. Esto quiere decir que si existiera una flecha de S_2 a S_1 , ninguno de sus extremos puede ser u o v , ya que eso nos daría alguna de las tres obstrucciones mencionadas. Esto significa que dicha flecha está entre dos vértices w y x distintos de u y de v , como se muestra en la ilustración a la derecha. Notemos que independientemente de si la flecha (x, w) existe o no, la gráfica $D[u, w, x]$ es una de las obstrucciones mencionadas.



□

Además de estas caracterizaciones, podemos ver otros resultados importantes. En primer lugar, notemos que si G es libre de H y D es superorientación de G , entonces D es libre de todas las superorientaciones de H . Esto es particularmente útil en las caracterizaciones mediante obstrucciones mínimas, pues si G_D es libre de cierta obstrucción, entonces D es libre de las orientaciones de la obstrucción. Otro resultado se plasma en la proposición siguiente:

Proposición 4. Sean G una gráfica y H una subgráfica inducida de G . Entonces \overline{G} contiene a \overline{H} como subgráfica inducida.

Demostración. Para esto basta tomar en G al conjunto V_H y observar qué sucede con él bajo la operación del complemento. Por definición, cualesquiera dos vértices de V_H no adyacentes en G , serán adyacentes en \overline{G} , y dos vértices adyacentes en V_H en G , no lo serán en \overline{G} . Esto corresponde a la definición de complemento en H . □

La contrapositiva de esta proposición, junto con el hecho de que el complemento sea su propia operación inversa, implican que esta proposición también es válida como equivalencia. Para una caracterización por obstrucciones mínimas, nos sirve saber que G es libre de H si y sólo si \overline{G} es libre de \overline{H} , por lo que podemos caracterizar una clase de gráficas mediante su complemento.

1.2. M -particiones

Dada una digráfica D sin lazos y una matriz M de tamaño $m \times m$ con entradas en $\{0, 1, *\}$, una M -partición de D es una partición de V en m partes (V_1, \dots, V_m) en la cual:

- Cada vértice de V_i domina a todos los vértices de V_j si y sólo si la entrada $M_{ij} = 1$.
- No existen flechas que vayan de V_i a V_j si y sólo si la entrada $M_{ij} = 0$.
- Si $M_{ij} = *$, no existen restricciones entre V_i y V_j , es decir, cualquier vértice de V_i puede o no dominar vértices de V_j . Vale la pena mencionar que esta entrada de la matriz no nos da información sobre las flechas de V_j a V_i .

En el contexto teoría de gráficas, a estas matrices se les llama **patrones**. En particular, si la entrada M_{ii} es 0, entonces V_i es independiente, y si es 1, entonces es un clan fuerte. Observemos que si la matriz es simétrica, obtenemos de la definición que todas las flechas de la digráfica en cuestión serán simétricas, por lo que podemos trabajar con gráficas en lugar de digráficas. En este caso, se puede ver que las gráficas escindibles completas admiten una M -partición para la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, mientras que las gráficas que resulten de la unión ajena de dos gráficas completas admitirán una M -partición para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notemos que puede haber más de una matriz que caracterice una propiedad, por ejemplo, una digráfica bipartita completa en la que todas las flechas vayan en la misma dirección puede representarse con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si M es un patrón, definimos su **complemento** como el patrón \overline{M} en donde $\overline{M}_{ij} = 1$ cuando $M_{ij} = 0$, $\overline{M}_{ij} = 0$ cuando $M_{ij} = 1$, y $\overline{M}_{ij} = *$ cuando $M_{ij} = *$.

Proposición 5. *Dada una digráfica D y un patrón M , D admite una M -partición si y sólo si \overline{D} admite una \overline{M} -partición.*

Demostración. Sea (V_1, \dots, V_m) una M -partición de D . Se afirma que ésta es una \overline{M} -partición de \overline{D} . Analizando todos los posibles casos para las entradas de \overline{M} , tenemos que:

- Cuando $\overline{M}_{ij} = 1$, sabemos que $M_{ij} = 0$, lo que quiere decir que en D , no existen flechas de V_i a V_j , por lo que en \overline{D} , cada vértice de V_i domina a todos los de V_j .
- Si $\overline{M}_{ij} = 0$, es porque $M_{ij} = 1$, lo que indica que en D existen todas las flechas posibles de V_i a V_j , así que en \overline{D} no existe flecha alguna de V_i a V_j .
- En otro caso, $\overline{M}_{ij} = * = M_{ij}$, por lo que no hay restricciones entre V_i y V_j en ninguna de las dos digráficas.

Por otro lado, como $\overline{\overline{D}} = D$ y $\overline{\overline{M}} = M$, la otra implicación se demuestra de la misma manera. \square

Proposición 6. *Sean D una digráfica y M un patrón. Entonces D admite una M -partición sólo si \overleftarrow{D} admite una M^T -partición, donde M^T es la transpuesta de M .*

Demostración. Supongamos que D admite una M -partición, y sea (V_1, \dots, V_m) dicha partición. Afirmamos que (V_1, \dots, V_m) es una M^T -partición para \overleftarrow{D} . Para demostrar esto, consideremos $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

- Si $M_{ij} = 0$, entonces $M_{ji}^T = 0$. El conjunto de (V_i, V_j) -flechas es vacío en D , y por consecuencia \overleftarrow{D} no contiene (V_j, V_i) -flechas.

- Si $M_{ij} = 1$, entonces $(V_i, V_j)_D = V_i \times V_j$ en D , por lo que en \overleftarrow{D} tenemos que $(V_j, V_i)_{\overleftarrow{D}} = V_j \times V_i$, y $M_{ji}^T = 1$.
- Si $M_{ij} = *$, no tenemos restricciones sobre (V_i, V_j) en D , así que no tendremos restricciones sobre (V_j, V_i) en \overleftarrow{D} , y también tendremos que $M_{ji}^T = *$.

□

En la sección anterior se mencionó que si D contiene a H como subdigráfica inducida, entonces \overleftarrow{D} contiene a \overleftarrow{H} como subdigráfica inducida. Usando el hecho de que $\overleftarrow{\overleftarrow{D}} = D$, la contrapuesta de esta implicación nos dice que \overleftarrow{D} es libre de \overleftarrow{H} cuando D es libre de H . De tal suerte, si quisiéramos caracterizar una familia de matrices mediante obstrucciones mínimas, bastaría caracterizar a una sola matriz para tener el resultado para ella y para su transpuesta. A continuación, se presenta una ayuda visual para entender más a fondo las M -particiones.

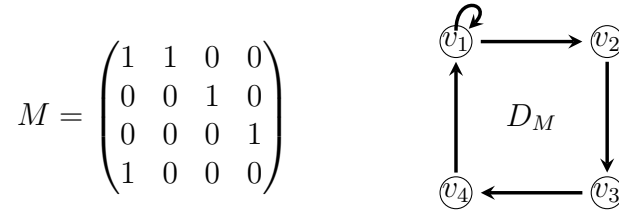


Figura 1.12: Un patrón visto como matriz de adyacencia.

Tomemos cualquier matriz M de tamaño $m \times m$ sin asteriscos. Como M es cuadrada y sus entradas son sólo ceros y unos, podemos pensarla como matriz de adyacencia de una digráfica D_M posiblemente con lazos, cuyo conjunto de vértices será $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, y en el que v_i domina a v_j si y sólo si $M_{ij} = 1$, tal como sucede en la Figura 1.12. Podemos observar que si quitáramos el lazo de v_1 , entonces $D_M - (v_1, v_1)$ admitiría una M -partición, donde cada conjunto V_i sería $\{v_i\}$.

Proposición 7. Sean D una digráfica estricta, M un patrón sin asteriscos y D_M la digráfica para la cual M es una matriz de adyacencia. La digráfica D admite una M -partición si y sólo si existe un homomorfismo completo de D a D_M .

Demostración. Sean u_1, \dots, u_n los vértices de D , sea (V_1, \dots, V_m) una M -partición de D y sean v_1, \dots, v_m los vértices de D_M . Definimos la función $f : V_D \rightarrow V_{D_M}$ dada por $f(u) = v_i$, para cada $u \in V_i$ y con $i \in \{1, \dots, m\}$. Para ver que f es un homomorfismo, tomemos $u \in V_i$ y $x \in V_j$.

- Si $(u, x) \in A_D$, entonces $M_{ij} = 1$, puesto que D admite una M -partición. Como M es matriz de adyacencia de D_M y $M_{ij} = 1$, entonces $(v_i, v_j) \in A_{D_M}$, y esto equivale a decir que $(f(u), f(x)) \in A_{D_M}$.
- Si $(u, x) \notin A_D$, tenemos que $M_{ij} = 0$, por lo que $(f(u), f(x)) \notin A_{D_M}$.

De esta forma, f es un homomorfismo completo de D a D_M .

Para demostrar la recíproca, supongamos que existe un homomorfismo completo f de D a D_M , y veamos que D admite una M -partición. Definimos V_i como $f^{-1}[\{v_i\}]$, y afirmamos que (V_1, \dots, V_m) es la M -partición deseada. Al ser f una función, sabemos que los conjuntos V_i son ajenos entre sí, así que basta ver qué sucede entre ellos:

- Supongamos que v_i domina a v_j en D_M . Como f es homomorfismo completo, $(V_i, V_j) = V_i \times V_j$, y como M es matriz de adyacencia de D_M , sabemos que $M_{ij} = 1$. Vale la pena mencionar que este argumento funciona también cuando $i = j$, resultando en un lazo en el vértice v_i .
- Si v_i no domina a v_j , entonces $(V_i, V_j) = \emptyset$ porque f respeta no-adyacencias, y $M_{ij} = 0$

□

Gracias la Proposición 7, analizar patrones es equivalente a analizar las digráficas que éstos forman. Como apoyo visual, para cada patrón M examinado en este trabajo se muestra la digráfica D_M , donde los vértices coloreados serán aquellos que tienen un lazo.

Los patrones de tamaño 2×2 sin asteriscos fueron caracterizados en 2016 [3], y en este trabajo se busca caracterizar las matrices de 3×3 sin asteriscos. Esto nos lleva al problema principal que se aborda en este escrito:

¿Cuáles son todos los patrones distintos de tamaño 3×3 sin asteriscos, y cuáles son las obstrucciones mínimas para cada uno de ellos?

Inicialmente, se tiene una lista de 2^9 matrices, pero gracias a la Proposición 7, podemos buscar todas las digráficas de tres vértices no isomorfas entre sí posiblemente con lazos, lo cual nos daría una lista más pequeña. Sin embargo, las Proposiciones 5 y 6 de este capítulo, podemos tomar la lista y cada vez que tengamos una digráfica y su complemento, nos fijamos sólo en una de las dos, y cada vez que tengamos una digráfica y su inversa, nos fijamos de nuevo sólo en una de ellas.

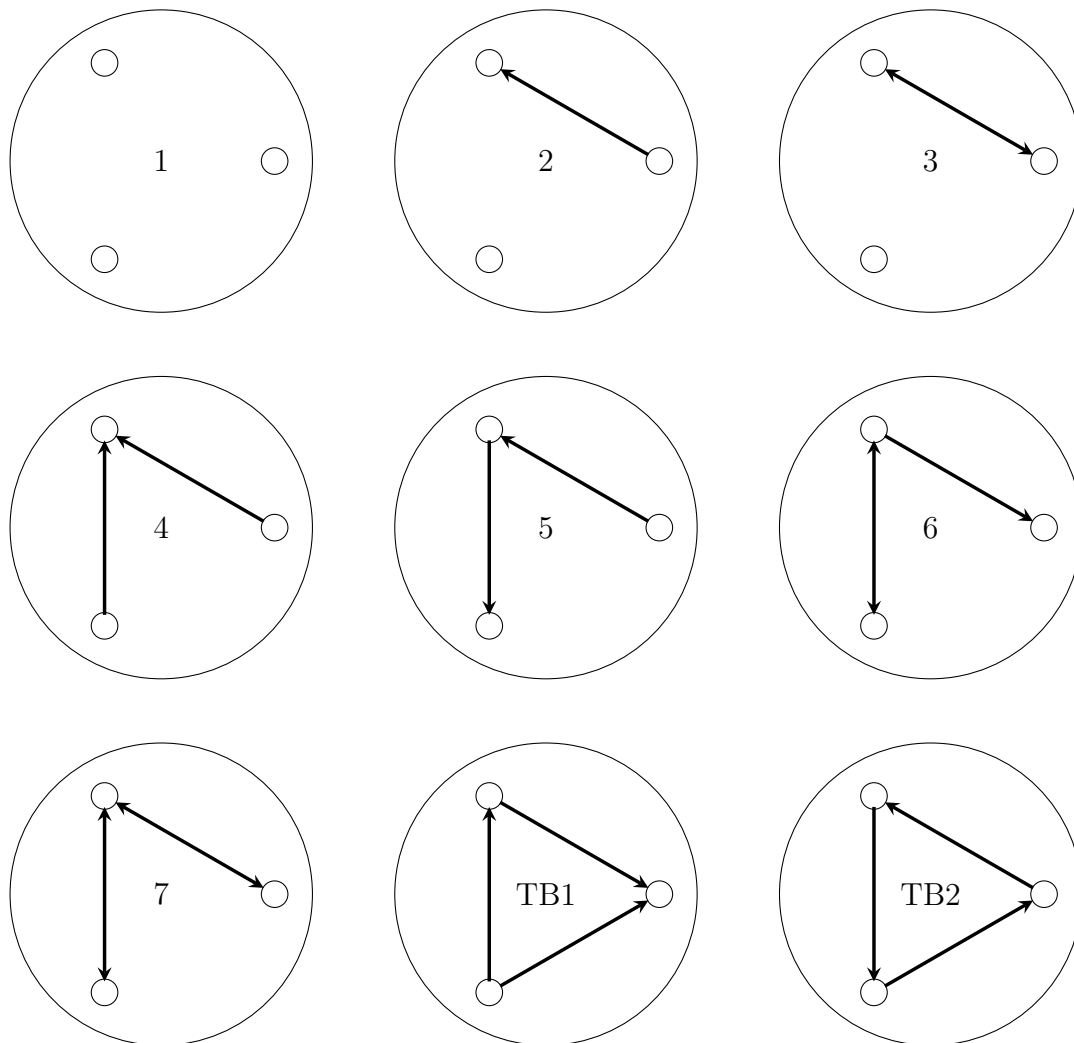
Si por otro lado, quisiéramos construir la lista, podríamos proceder de la siguiente manera:

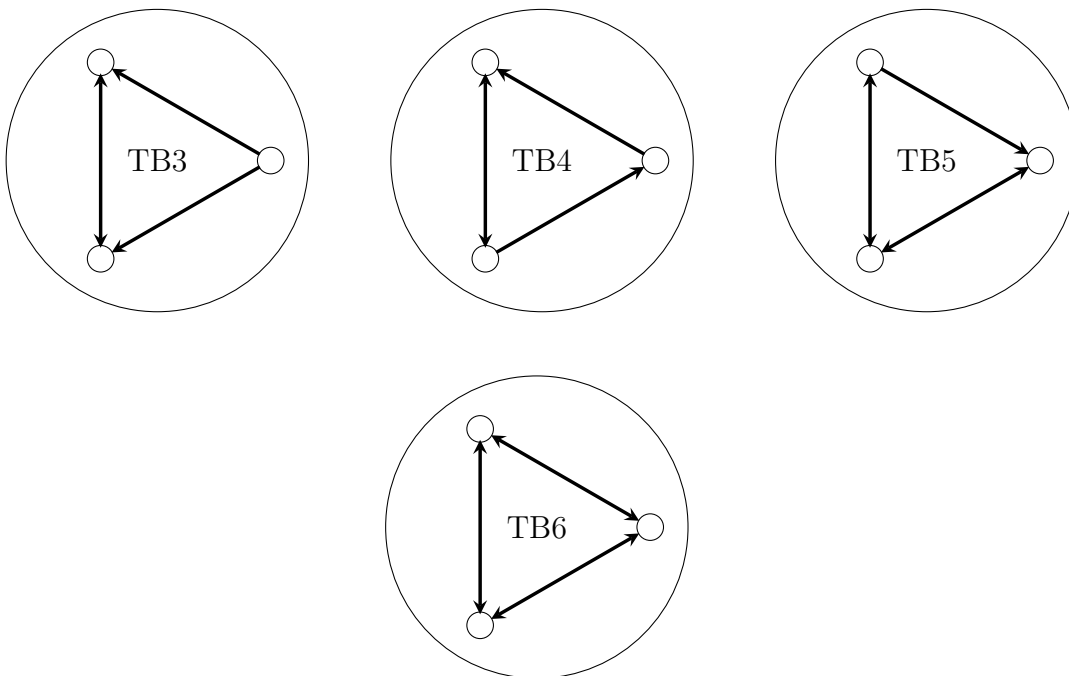
1. Tomar las cuatro gráficas no isomorfas de 3 vértices: $\overline{K_3}$, $K_1 + K_2$, P_3 y K_3 .
2. De la familia de todas las superiororientaciones posibles para las gráficas del paso 1, añadimos a la lista todas las digráficas que sean isomorfas a si inversa. Si una digráfica D no es isomorfa a su inversa \overleftarrow{D} , podemos agregar a D o a \overleftarrow{D} a la lista, pero no a las dos. Esto nos da una lista de digráficas sin lazos, que equivale a una lista de patrones que tienen únicamente ceros en la diagonal. Al restringir las parejas de la forma D, \overleftarrow{D} en la lista de digráficas, estamos garantizando que no haya parejas de patrones distintos M, M^T en la lista de matrices.

- Lo siguiente es añadir las digráficas con exactamente un lazo, que equivale a añadir los patrones con un uno en la diagonal. Para esto, tomamos cada digráfica de la lista y añadimos un lazo a un vértice de tantas maneras distintas como sea posible. De nuevo estamos buscando digráficas no isomorfas, por lo que si encontramos dos maneras de añadir un lazo que resulten dos digráficas isomorfas, añadimos a la lista sólo una de ellas.

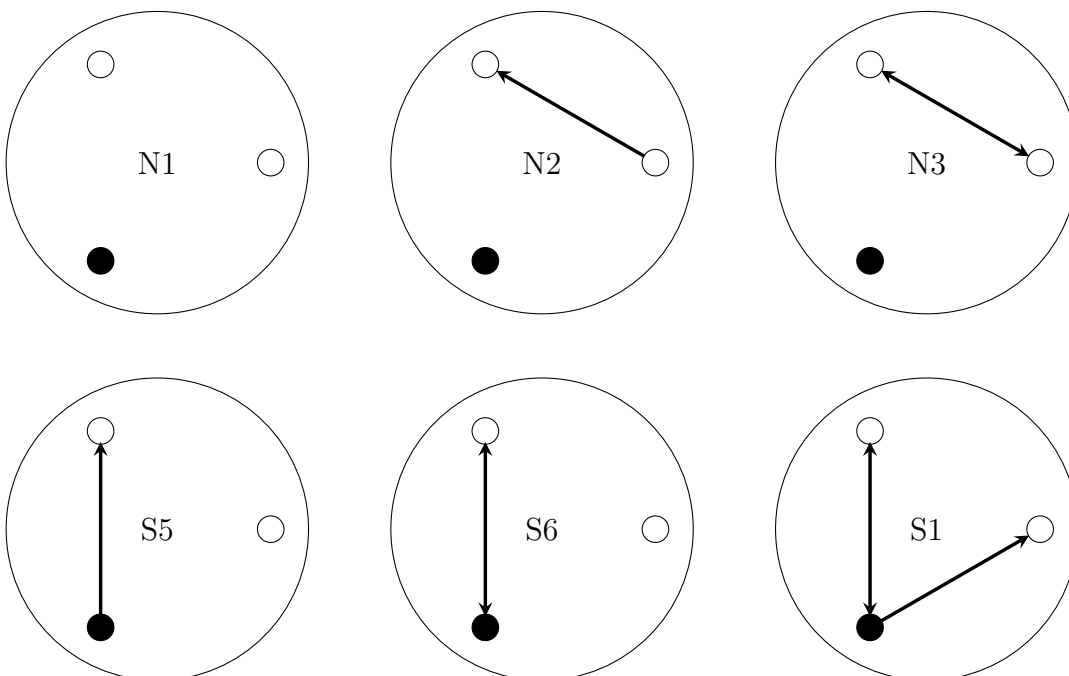
Es importante mencionar que al considerar digráficas con lazos, los complementos también consideran los lazos, por lo que si en una digráfica D un vértice tiene un lazo, entonces no lo tendrá en \overline{D} , y viceversa. Debido a esto, en ninguna digráfica es necesario colocar un lazo a más de un vértice, pues toda digráfica con dos o tres lazos es complemento de alguna con uno o cero lazos respectivamente. Para simplificar los esquemas, se usó un color distinto para el vértice con un lazo. Al final, las digráficas encontradas fueron las siguientes.

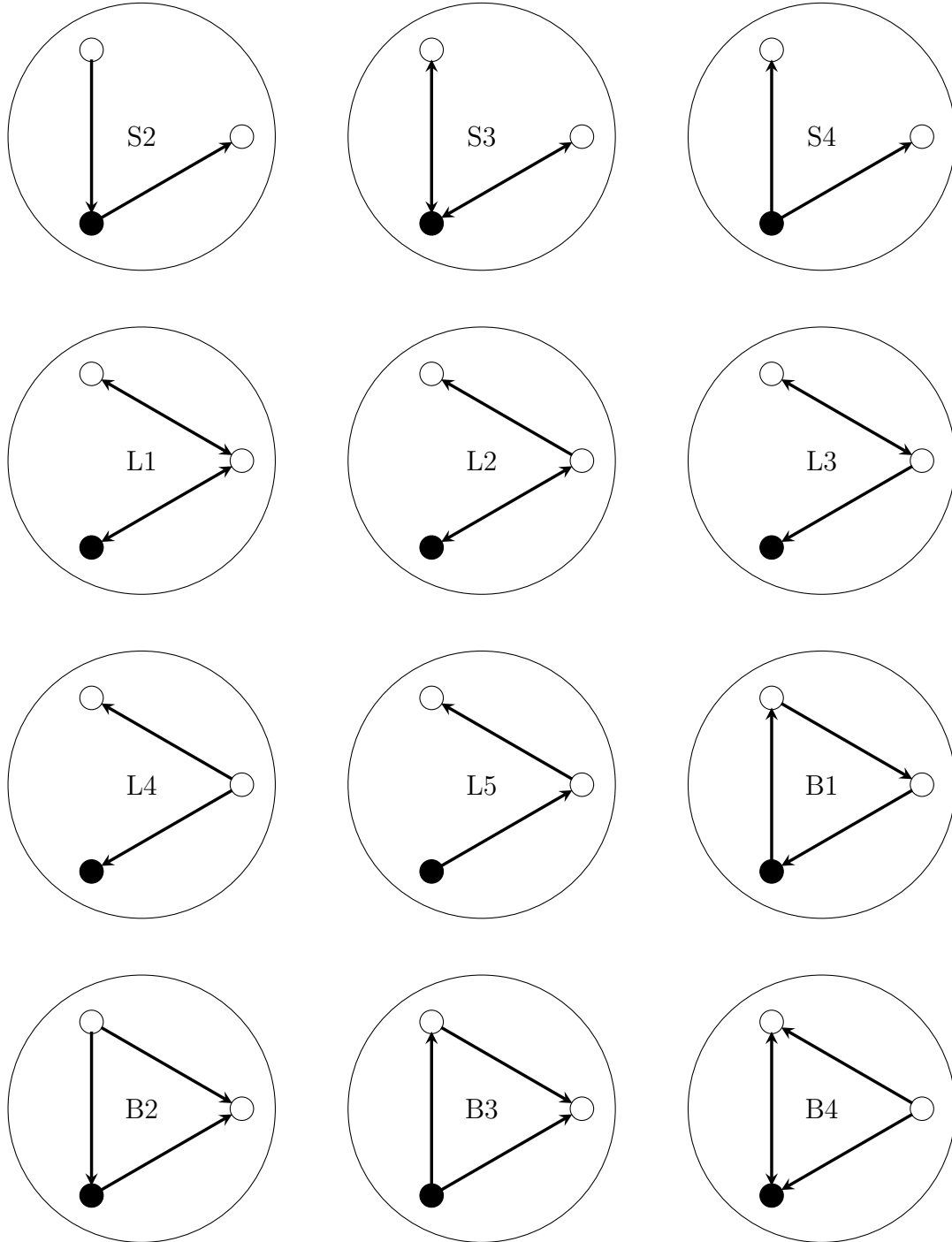
Digráficas sin colorear:

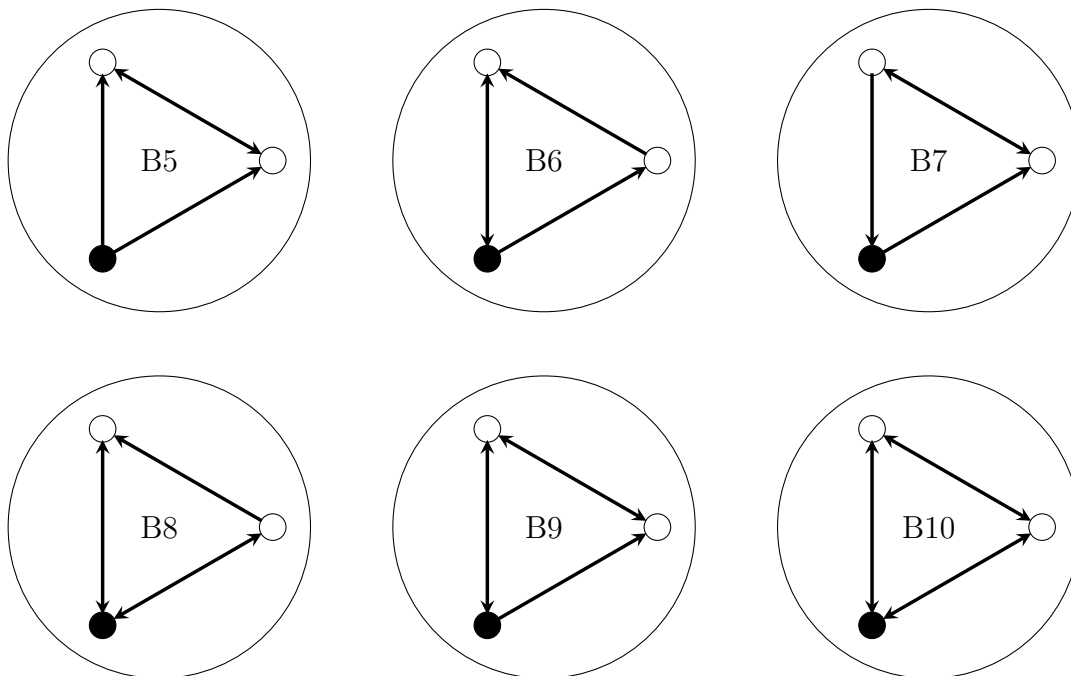




Las digráficas con un solo vértice coloreado son las siguientes:







Como se mencionó anteriormente, cada una de estas digráficas corresponde a un patrón. En el siguiente capítulo se caracterizarán estos patrones mediante obstrucciones mínimas. Algunos de los patrones que puedan verse como patrones de 2×2 sólo serán referidos al artículo [3] donde han sido caracterizados.

Capítulo 2

Obstrucciones

Como se mencionó en el capítulo anterior, una caracterización mediante obstrucciones mínimas requiere dos partes: primero, se debe verificar que la restricción de dichas obstrucciones es suficiente para garantizar que una digráfica admita la M -partición. La segunda parte consiste en comprobar que las obstrucciones en realidad son mínimas, es decir, que cada subdigráfica inducida propia de éstas admite una M -partición.

En este capítulo nos encargaremos únicamente de la primera parte. Es decir, dado un patrón M , diremos qué obstrucciones son suficientes para garantizar que una digráfica libre de estas admita la M -partición, y probaremos dicha suficiencia.

Para estas caracterizaciones, sólo en dos casos se utilizan obstrucciones con orden 6, y salvo por esos y la última sección de patrones, todas las obstrucciones tienen orden menor que cinco.

En cuanto a la manera de ordenar los resultados, cabe mencionar que algunos de los patrones comparten características entre sí, por ejemplo: sus dibujos se ven como triángulos, o no tienen clanes, o son superiororientaciones de gráficas escindibles completas. Durante este capítulo los patrones se presentan agrupados de acuerdo a alguna propiedad que, una vez analizada, permite que las caracterizaciones de los patrones que la cumplen sean muy similares.

De la lista anterior, observemos cuidadosamente los patrones 1, 4, 7, N1, S3, y S4. En cada uno de ellos, existen dos conjuntos independientes que cumplen que su unión sigue siendo independiente. Además, la relación de éstos con el conjunto restante es la misma, es decir, ambos dominan al conjunto restante o ambos son dominados por él. Como consecuencia, podemos unir estos dos conjuntos independientes y observar que en cada caso existe un patrón M de tamaño 2×2 con la propiedad de que una digráfica admite M si y sólo si admite a ese patrón de 3×3 . Gracias a este argumento, los patrones de la Figura 2.1 no serán caracterizados.

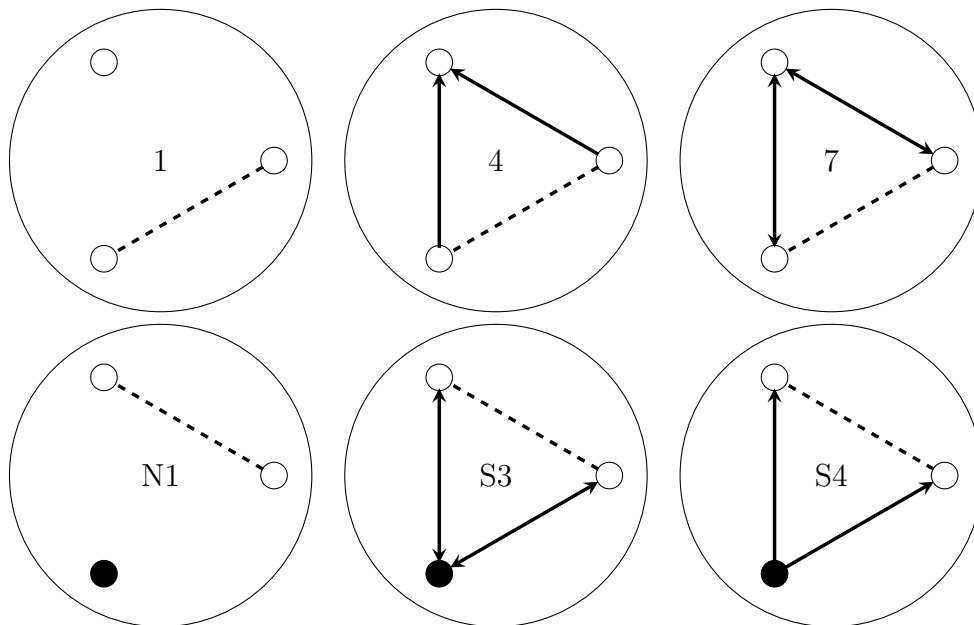


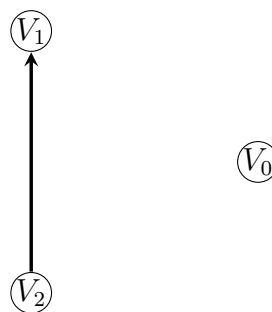
Figura 2.1: Estos patrones pueden representarse usando patrones de 2×2 uniendo los conjuntos entre los cuales existe una línea punteada.

Para caracterizar todos los demás patrones, se presenta tanto la matriz como la representación gráfica, y se entiende que tanto el i -ésimo renglón como la i -ésima columna corresponden al vértice etiquetado como V_i , empezando con $i = 0$.

2.1. Patrones sin clanes

El patrón 2 corresponde a la matriz:

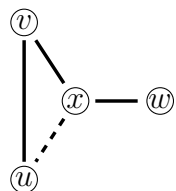
$$2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Se puede observar que si una digráfica D admite este patrón, su gráfica subyacente será isomorfa a la unión ajena de una gráfica bipartita completa con una vacía. Además, como consecuencia de la orientación de las flechas de D , ningún vértice puede tener ingrado y exgrado distinto de cero al mismo tiempo, por lo que las obstrucciones mínimas más fáciles de ver para este patrón corresponden a $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ$, y todas las orientaciones de K_3 , ya que en estas hay al menos un vértice que no es fuente ni sumidero. Vale la pena notar que estas obstrucciones eliminan

a todos los ciclos de longitud impar, pues en éstos no puede suceder que todos los vértices sean fuentes o sumideros. Las otras obstrucciones mínimas son la orientación $\circ \longrightarrow \circ \longleftarrow \circ \longrightarrow \circ$ de P_4 , y la orientación de $2K_2$. Para demostrar que estas obstrucciones mínimas son suficientes, procedemos de la siguiente manera.

Supongamos que D es una digráfica en la que ninguna de las obstrucciones mínimas mencionadas es subdigráfica inducida. Si D es inconexa, haber restringido la orientación de $2K_2$ hará que todas sus flechas estén en una misma componente H . La gráfica subyacente de H , G_H es libre de K_3 , por lo que basta demostrar que G_H es libre de $K_2 + K_1$ para que sea bipartita completa. Es útil notar que todas las superiororientaciones de P_4 están restringidas, por lo que el diámetro de G_H será a lo más 2. Supongamos que existen $u, v, w \in V_H$ tales que $G_H[u, v, w] \cong K_1 + K_2$.

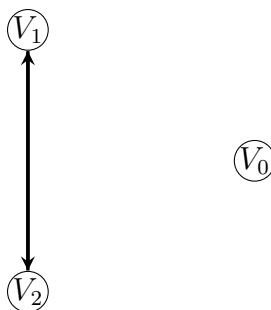


Como el diámetro de G_H es a lo más 2, entonces w y v comparten un vecino x . Si xu es una arista, tenemos una orientación de K_3 en D , y si no, tenemos una orientación de P_4 .

Gracias a esto sabemos que G_H es bipartita completa con bipartición (X, Y) y $u \in X, v \in Y$, y como tenemos las hipótesis del Lema 1 para H , podemos suponer que X domina a Y . Si definimos S como $V \setminus V_H$, entonces (S, Y, X) es la M -partición deseada.

El siguiente patrón es parecido al anterior, aunque la flecha en el dibujo es simétrica:

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

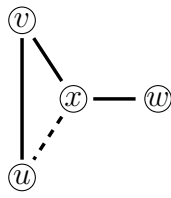


Una digráfica D que acepte esta M -partición será la unión ajena de la biorientación de una gráfica bipartita completa y una vacía.

Primero, para asegurar que todas las flechas en D sean simétricas, se debe prohibir la orientación de K_2 . A diferencia del segundo patrón, es necesario prohibir $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} K_3$ explícitamente, y también se prohíben $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} P_4$ y $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} 2K_2$. Esta última nos garantiza que todas las flechas de D estarán en una componente conexa. Veamos ahora que si D es una digráfica libre de estas cuatro digráficas, entonces tiene una M -partición.

Sea D como en las hipótesis del enunciado anterior y sea G su gráfica subyacente. Sabemos que todas las aristas de G están en una misma componente H , por lo que basta demostrar que H es bipartita completa. Dicha componente ya es libre de K_3 , así que sólo necesitamos ver que no contenga a $K_1 + K_2$ como subgráfica inducida. Para esto, es importante notar que gracias a la ausencia de P_4 , el diámetro de H es

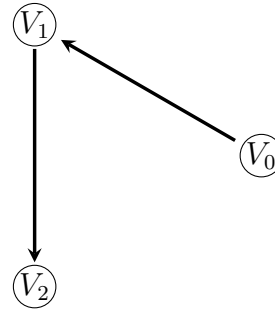
a lo más 2.



Supongamos que existen $u, v, w \in V_H$ que inducen $K_1 + K_2$. Como el diámetro de H es a lo más 2, entonces w y v comparten un vecino x . En caso de que xu sea una arista tenemos la biorientación de K_3 , y en otro caso tendríamos la de P_4 por lo que H también es libre de $K_1 + K_2$. Así, H es bipartita completa, y D , al ser la biorientación de G , admite una M -partición.

El siguiente patrón es el primero con más de una flecha en su representación gráfica:

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

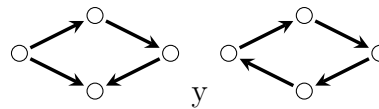


Las obstrucciones mínimas para dicho patrón son las presentadas a continuación:

5.1 Cualquier orientación de K_3 .

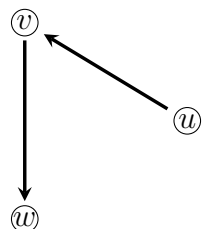
5.2 $\overset{\leftrightarrow}{K_2}$.

5.3 La orientación de $K_1 + K_2$.

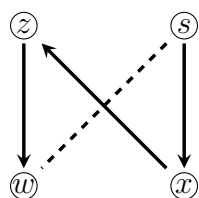


5.4 Las siguientes orientaciones de C_4 :

Evidentemente, cualquier digráfica D libre de estas obstrucciones es bipartita completa sin flechas simétricas. con biartición (S_1, S_2) . Si la digráfica $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ tampoco es subdigráfica inducida de D , el Lema 1 nos dice que sólo una de las partes domina a la otra, por lo que podemos encontrar la M -partición añadiendo una parte vacía. Supongamos ahora que $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ sí es subdigráfica de D , dada por los vértices u, v, w de la siguiente forma.



Si $u, w \in S_2$ y $v \in S_1$, entonces u domina a S_1 , y w es dominado por S_1 , pues de otro modo tendríamos alguna orientación restringida de C_4 .

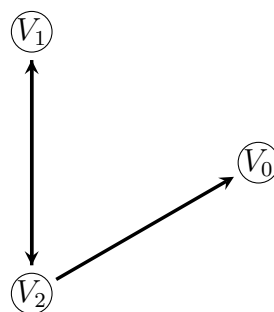


Para concluir, debemos mostrar que cualquier vértice $x \in S_2$ domina a S_1 o es dominado por S_1 . Supongamos que x no domina a S_1 . Al ser D bipartita, existe $s \in S_1$ tal que $(x, s) \notin A$, por lo que $(s, x) \in A$, y si existiera $z \in S_1$ con $(z, x) \in A$, tendríamos un esquema como el de la ilustración de la izquierda, pero en ese caso, cualquier superorientación que se le dé a la flecha entre w y s genera una orientación restringida de C_4 .

De esta forma, y gracias a que no hay flechas simétricas, basta definir los conjuntos V_1 y V_2 como $\{x \in S_2 : \overrightarrow{xv} \in A\}$ y $\{x \in S_2 : \overrightarrow{vx} \in A\}$, respectivamente para que (V_1, S_1, V_2) sea la partición que buscábamos.

El sexto patrón corresponde a la matriz

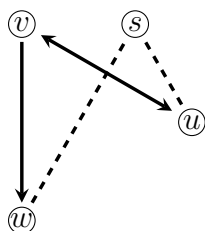
$$6. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



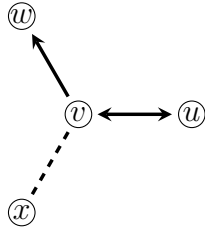
Las obstrucciones para éste son:

- 6.1 Si un vértice es la cabeza de una flecha asimétrica, queremos que este vértice no sea cola de otras flechas, por lo que restringimos la superorientaciones de P_3 correspondientes a $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ y a $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$.
- 6.2 Las superorientaciones de $K_1 + K_2$.
- 6.3 Todas las superorientaciones de K_3 .

Ahora veamos que estas son las únicas obstrucciones mínimas. Sea D una digráfica en la cual ninguna de estas digráficas esté presente. Sabemos por 6.2 y 6.3 que D es bipartita completa, así que sólo falta saber en qué sentidos están las flechas. Si D es libre de la superorientación de P_3 que aparece en la representación gráfica del patrón, podemos notar que cumple las hipótesis del Lema 1, por lo que es una biorientación, o sólo una de sus partes domina a la otra. En cambio, si dicha superorientación sí aparece, podemos pensar que la bipartición de D es (S_1, S_2) , y tomamos la superorientación de la siguiente manera.



Supongamos que $u, w \in S_2$ y $v \in S_1$. Si existiera otro vértice $s \in S_1$ como en la ilustración de la izquierda, entonces \overrightarrow{sv} sería la única flecha entre s y w cuya presencia no implicaría la existencia de una superorientación restringida de P_3 . De igual forma, si la flecha entre s y u no fuera simétrica, entonces o bien $D[w, s, u]$ sería una superorientación restringida de P_3 o bien $D[s, u, v]$ lo sería. Estos argumentos nos ayudan a notar que S_1 domina tanto a w como a u , y es dominado por v .



Tomemos ahora $x \in S_2$ distinto de u y de w , como se observa en la ilustración de la izquierda. Podemos notar que la flecha entre x y v no puede ser \overrightarrow{xv} , pues $D[x, v, w]$ sería $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, por lo que sólo puede ser \overrightarrow{vx} o \overleftarrow{xv} . Si $\overrightarrow{vx} \in A$, $D[x, u, v]$ sería isomorfa a la $D[u, v, w]$, por lo que podemos usar el argumento del párrafo anterior para descubrir que S_1 dominaría a x .

Por otro lado, si $\overleftarrow{xv} \in A$, tomamos $D[x, v, w]$ para encontrar que x comparte flechas simétricas con todo S_1 , y siguiendo la caracterización anterior, definimos los conjuntos: X y Y como $\{x \in S_2 : \overrightarrow{vx} \in A\}$ y $\{x \in S_2 : \overleftarrow{xv} \in A\}$ respectivamente, para que (X, Y, S_1) sea nuestra partición.

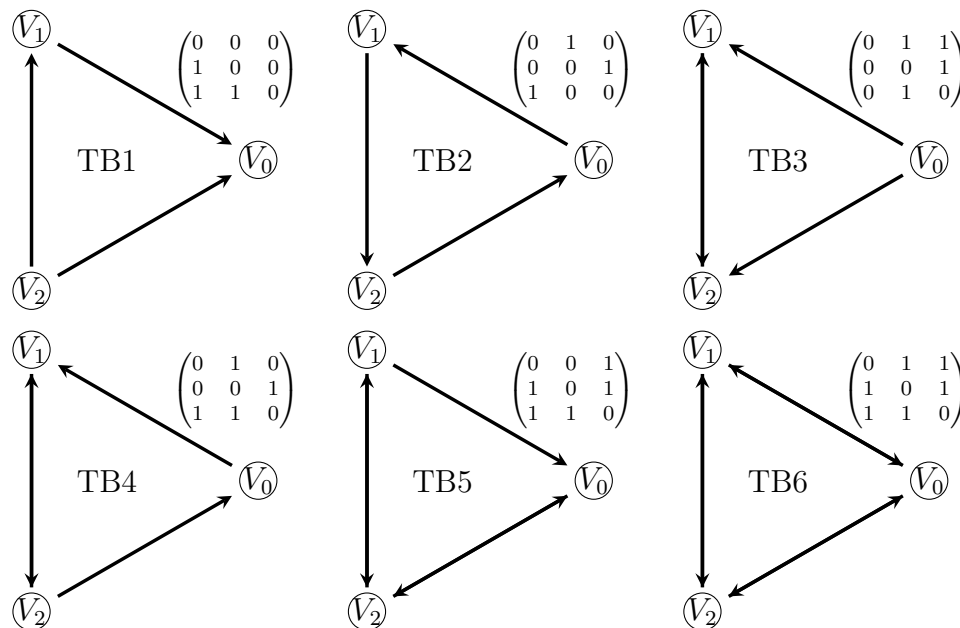
2.1.1. Triángulos

Algunos de los dibujos de los patrones se ven como triángulos con vértices blancos o negros. Todos éstos comparten las siguientes obstrucciones:

(Δ .1) Las superorientaciones de P_3 correspondientes a $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$.

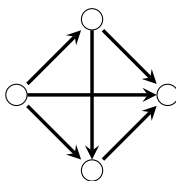
(Δ .2) Todas las superorientaciones de $K_1 + K_2$.

Estas obstrucciones no necesariamente son mínimas, por ejemplo, si una digráfica no tiene flechas simétricas, la única obstrucción mínima de Δ .1 será $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$. Si todos los vértices del dibujo del patrón son blancos, las digráficas que lo admitan serán tripartitas completas. Esto significa que todas las superorientaciones de K_4 estarán prohibidas. Dichos patrones son los siguientes, y las letras en sus nombres significan *triángulo blanco*.

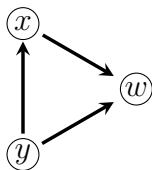


Para cada demostración de estos seis patrones, se pensará que la digráfica con la que se trabaja es débilmente conexa, pues de otra forma, la restricción $\Delta.2$ implicará que la digráfica es vacía, y en ese caso ya admite cualquiera de los patrones mencionados. En cada caso, si la digráfica D con la que se trabaja no contiene triángulos, haber prohibido las superorientaciones de $K_1 + K_2$ garantizará que D sea bipartita completa $D(X, Y)$, y el Lema 1 nos dirá que todas las flechas irán de X a Y , todas de Y a X o que todas serán simétricas. Más aún, los únicos triángulos que D puede tener son los que se asemejan al dibujo del patrón correspondiente. Procedamos a caracterizar los patrones.

Patrón TB1: Como el patrón no tiene flechas simétricas, debemos restringir la biorientación de K_2 . Como la orientación fuertemente conexa de K_3 está prohibida, la única orientación de K_4 prohibida explícitamente es la siguiente.



Sea D una digráfica en la cual ninguna de las obstrucciones anteriores está presente. En particular, D es libre de la orientación de $K_1 + K_2$ y de cualquier superorientación de K_4 , por lo que es tripartita completa. Sea (W, X, Y) la tripartición de D . Si tomamos vértices $w \in W, x \in X$ y $y \in Y$, obtendremos sin pérdida de generalidad la siguiente subdigráfica.



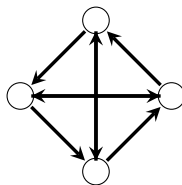
En este momento, podemos notar que el Lema 1 nos dice que todas las flechas de D van de Y a $X \cup W$ y de X a W , por lo que la partición (W, X, Y) es una TB1-partición para D .

Patrón TB2: Si además de las digráficas mencionadas en Δ restringimos $\overleftrightarrow{K_2}$ y la orientación de K_3 que no es fuertemente conexa, entonces todas las superorientaciones de K_4 quedan restringidas. Si una digráfica D es libre de las digráficas mencionadas, entonces es tripartita completa con tripartición (A, B, C) . Si tomamos un vértice en cada conjunto, obtendremos un triángulo dirigido fuertemente conexo. Sin pérdida de generalidad, podemos pensar que las flechas en ese triángulo van de A a B , de B a C y de C a A . Así, el Lema 1 nos dice que cada flecha de D cae en alguno de los casos anteriores, por lo que se tiene la M -partición deseada.

Patrón TB3: En este caso se restringe cualquier superorientación de K_3 distinta la de la representación gráfica del patrón. Esto a su vez restringe cualquier superorientación de K_4 .

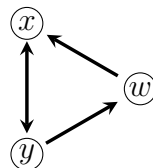
Si tomamos una digráfica D que no contenga obstrucción alguna de las antes mencionadas, entonces D es tripartita completa con tripartición (X, Y, W) . De nuevo, tomando un vértice de cada conjunto tenemos un triángulo con una flecha simétrica y una fuente, y podemos suponer que la flecha simétrica está, sin pérdida de generalidad, entre los vértices de X y Y . Una vez que notamos esto, el Lema 1 indica que el conjunto de flechas de D es en realidad conjunto $(X \times Y) \cup (Y \times X) \cup (W \times X) \cup (W \times Y)$, por lo que la partición (W, X, Y) de D .

Patrón TB4: A las obstrucciones mencionadas se les agrega cualquier superorientación de K_3 distinta a la de la representación gráfica del patrón TB4 y la siguiente superorientación de K_4 :



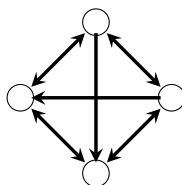
Cualquier otra superorientación de K_4 contiene al menos una superorientación prohibida de K_3 , por lo que no es necesario prohibirlas explícitamente.

Si tenemos una digráfica D libre de las digráficas mencionadas, tenemos de nuevo una tripartita completa con tripartición (W, X, Y) . Tomando un vértice de cada conjunto, obtenemos, sin pérdida de generalidad, la siguiente digráfica.



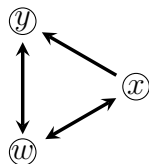
Gracias a esto, del Lema 1 podemos concluir que el conjunto de flechas de D es $(Y \times X) \cup (X \times Y) \cup (W \times X) \cup (Y \times W)$ por lo que (W, X, Y) es la TB4-partición que buscábamos.

Patrón TB5: Se restringe cualquier superorientación de K_3 distinta a la de la representación gráfica del patrón TB5, y la siguiente superorientación de K_4 .



Esto hace que todas las superorientaciones de K_4 queden prohibidas.

Si ninguna de estas obstrucciones es subdigráfica inducida de una digráfica D , entonces D es tripartita completa con tripartición (W, X, Y) . Tomando un vértice de cada conjunto tendremos la digráfica



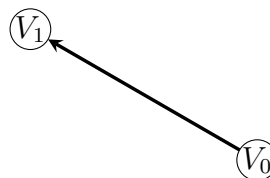
Una vez más, el Lema 1 implica que en D todas las flechas simétricas inciden en W , y las asimétricas van de X a Y , por lo que (W, X, Y) es la TB5-partición deseada.

Patrón TB4: Para este patrón basta restringir \overleftrightarrow{K}_4 y la orientación de K_2 . Si tenemos una digráfica D donde ninguna de las digráficas restringidas esté presente, es claro que es la biorientación de una tripartita completa.

2.2. Obstrucciones con clanes

El primer patrón con un clan es el patrón N1, que corresponde a una matriz de 2×2 como se vio en la sección anterior, y por lo cual no será caracterizado. La siguiente matriz corresponde a

$$\text{N2. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Se puede ver que si una digráfica D acepta este patrón y tiene flechas asimétricas, entonces tiene a lo más dos componentes. Las obstrucciones mínimas para este patrón son:

N2.1 Las superorientaciones de P_3 distintas de $\circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$.

N2.2 Cualquier superorientación de K_3 distinta de \overleftrightarrow{K}_3 .

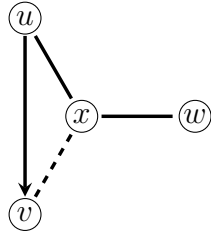
N2.3 La orientación y la biorientación de $2K_2$.

N2.4 Para que las flechas asimétricas formen una digráfica bipartita completa, falta restringir esta orientación de P_4 : $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$.

N2.5 Por último, para que D no tenga más vértices aislados de los permitidos, prohibiremos la orientación de $K_2 + 2K_1$.

Sea D una digráfica no vacía libre de todas estas obstrucciones y sea G su gráfica subyacente. Gracias a la ausencia de las digráficas mencionadas en N2.1 y N2.4, G es libre de P_4 , por lo que el diámetro de cada componente en G es a lo más 2. Esto nos ayudará si procedemos por casos, dependiendo de la conexidad de G .

Caso A. Si G es conexa, sabemos por los primeros dos incisos que las flechas de D son todas simétricas o todas asimétricas. Si las flechas son simétricas, D es libre de \overleftrightarrow{P}_3 , por lo que es la biorientación de una gráfica completa. En cambio, si todas son asimétricas, basta ver que D es libre de la orientación de $K_1 + K_2$ para probar que es bipartita completa.



Supongamos por el contrario que existen tres vértices u, v y w que inducen dicha digráfica, como se aprecia en la ilustración de la izquierda. como G tiene un diámetro menor que 3, los vértices u y w deben compartir un vecino, al que llamaremos x . Observemos si existe una arista en G entre v y x , entonces D tiene una orientación de K_3 , pero si no existe dicha arista, entonces $D[u, v, w, x]$ es la orientación restringida de P_4 o contiene alguna de las orientaciones restringidas de P_3 .

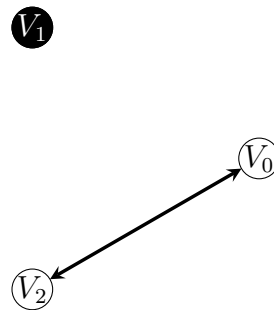
Como en todos los casos llegamos a una contradicción, D es libre de la orientación de $K_1 + K_2$, por lo que es bipartita completa, y gracias al Lema 1, sabemos que sólo una de las partes domina a la otra.

Caso B. Si G es inconexa, veamos qué sucede si más de una de sus componentes tiene flechas. Notemos que haber prohibido la orientación y la biorientación de $2K_2$ nos asegura que a lo más dos de sus componentes tienen flechas. Este razonamiento y el caso A nos hacen ver que una de las componentes tiene únicamente flechas asimétricas, y la otra únicamente flechas simétricas. De nuevo, aplicando el caso A a cada componente podemos observar que la componente con flechas simétricas es la biorientación de una gráfica completa, mientras que la otra es una orientación de una digráfica bipartita completa, en la que solo una de las partes domina a la otra.

Por último, si G es inconexa pero sus flechas están en una única componente conexa, es fácil ver que si dicha componente tiene flechas asimétricas, la última obstrucción nos garantiza que existe un único vértice aislado, que podemos ver como una gráfica completa. En cambio, si las flechas de la componente son simétricas, puede haber más de un vértice aislado, y el conjunto de estos vértices puede verse como una digráfica bipartita completa con una parte vacía.

Para el patrón N3 tenemos a la biorientación de la unión ajena entre una gráfica vacía y una bipartita completa.

$$\text{N3. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Esto quiere decir que la orientación de K_2 es una obstrucción mínima. Gracias a esto, durante la caracterización de este patrón trabajaremos únicamente con las


biorientaciones de las siguientes gráficas:

N3.1 P_4

N3.2 $2K_2 + K_1$

N3.3 $2K_1 + P_3$

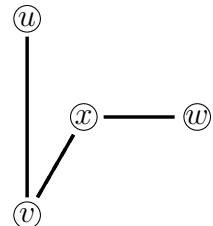
N3.4 $2K_3$

N3.5 La digráfica , que corresponde a $\overline{K_1 + P_3}$.

N3.6 El diamante, que fue definido en la Subsección 1.1.6

Sea D una digráfica con al menos tres vértices en la cual ninguna de las restricciones está presente, y sea G su gráfica subyacente. Por la primera restricción de la lista, sabemos que cada componente de G tiene diámetro menor que tres. De nuevo es conveniente dividir esta demostración en casos.

Caso A. Si G es conexa, tenemos que demostrar que es completa o bipartita completa. En caso de que G tenga un triángulo, las últimas dos obstrucciones nos garantizan que es completa, y en caso de que no tenga triángulos, solo debemos verificar que es libre de $K_1 + K_2$. De manera similar a lo que sucedió con el patrón anterior, vamos a ver qué sucede si existen vértices u, v y w que induzcan $K_1 + K_2$ en G .



Como G tiene diámetro 2, w y u tienen un vecino en común x . Notemos que si $xv \in E_G$, entonces $G[u, v, w, x]$ es isomorfa a $\overline{K_1 + P_3}$, pero si dicha arista no existe en G , entonces $G[u, v, w, x]$ es isomorfa a $\overleftrightarrow{P_4}$. Como ninguna de estas opciones es posible, G es bipartita completa.

En particular, esto nos dice que si es G inconexa, cada una de sus componentes es completa o bipartita completa.

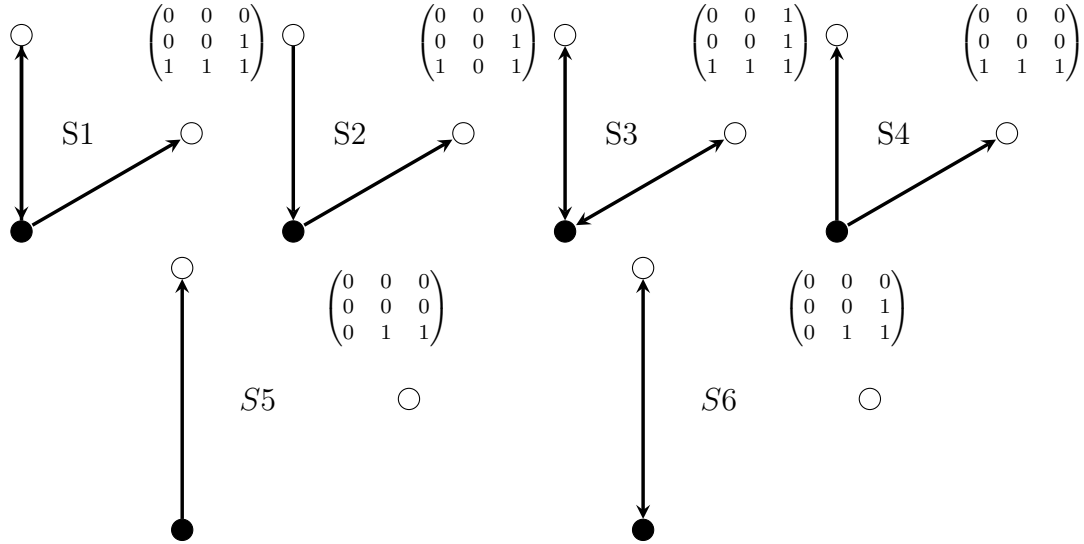
Caso B. Si G es inconexa, veamos qué sucede cuando hay aristas en al menos dos de sus componentes. En este caso, haber prohibido $2K_2 + K_1$ nos garantiza que G tiene únicamente dos componentes. Si una de ellas tiene P_3 como subgráfica inducida, la otra es completa gracias a la obstrucción de $2K_1 + P_3$, y si una de ellas tiene un triángulo, haber prohibido $2K_3$ nos indica que la otra no tiene triángulos, y usando uno de los argumentos del caso anterior, podemos ver ésta última componente es bipartita completa.

Por último, si sólo una de las componentes de G tiene aristas pero G es inconexa, quiere decir que hay vértices aislados. Si hay más de un vértice aislado, haber prohibido $2K_1 + P_3$ nos garantiza que la componente con aristas es completa, mientras que si el vértice aislado es el único con esta propiedad, la componente con aristas puede ser bipartita completa o completa, y en todos los casos podemos dar un N3-partición.

2.2.1. Gráficas escindibles completas

Los patrones S1, S2, S3 y S4 corresponden a superiororientaciones de gráficas escindibles completas, en las cuales el clan siempre se convierte en una digráfica completa

biorientada. Además de éstos, los patrones S5 y S6 cumplen que sus componentes con flechas son superorientaciones de gráficas escindibles completas. Estos patrones se muestran a continuación.



Los patrones S3 y S4 corresponden a patrones de 2×2 , por lo que no se caracterizarán en esta lista.

Para el patrón **S1**, restringimos:

S1.1 ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$,

S1.2 las superorientaciones de P_3 : $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ y $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$.

S1.3 $\overset{\leftarrow}{C}_4$

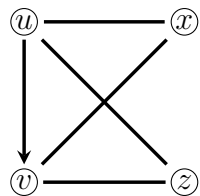
S1.4 Todas las superorientaciones de K_3 distintas de $\overset{\leftarrow}{K}_3$ y de aquella con una flecha simétrica y un sumidero.

Veamos que si una digráfica es libre de las digráficas mencionadas en la lista anterior, entonces admite una S1-partición.

Sea D una digráfica con al menos cuatro vértices en la cual ninguna de las digráficas mencionadas está presente como subdigráfica inducida. Notemos que todas las superorientaciones de C_4 y de $K_1 + K_2$ están restringidas, por lo que D es escindible completa con partición (K, S) . Así mismo, haber restringido ciertas superorientaciones de P_3 y de K_3 nos hace ver que si un vértice es cabeza de una flecha asimétrica, entonces es un sumidero. Observemos también que si D no tiene flechas asimétricas, (\emptyset, S, K) es una S1-partición, pero si sí las tiene, debemos revisar cada caso con más cuidado.

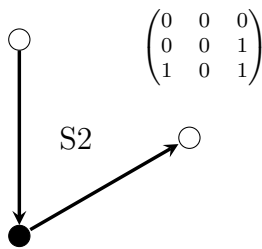
En caso de que K sea unitario, D es una estrella, y las únicas superorientaciones permitidas de P_3 nos hacen ver que cada vértice de S es un sumidero o extremo de una flecha simétrica. Si esto sucede, podemos definir S' como $\{v \in S: \delta^+(v) = 0\}$, y de este modo, $(S', S - S', K)$ es una S1-partición.

Por otro lado, si K no es unitario, veamos primero qué sucede en el caso en el que G_D es completa. Como estamos pensando que D tiene flechas asimétricas, el inciso S1.4 implica que para cualquier $n \geq 3$, la única superorientación de K_n posible distinta de $\overleftrightarrow{K_n}$ es aquella en la que existe un único sumidero que es dominado por todos los demás vértices, y entre cualesquiera dos vértices distintos a éste existe una flecha simétrica. Llamando x a dicho sumidero, podemos ver que $(\{x\}, \emptyset, V - \{x\})$ es una S1-partición.



Por último, si G_D no es completa, tenemos que verificar que todos los sumideros de D están en S . Supongamos por el contrario, que existe un sumidero v en K . Gracias a las superorientaciones de P_3 restringidas, esto es equivalente a suponer que v es dominado por otro vértice $u \in K$, como se muestra en la ilustración. Si tomamos dos vértices $x, z \in S$, la única manera de orientar los triángulos resultantes es haciendo que x y z dominen a v es mediante una flecha asimétrica, pero esto nos indica que $D[v, x, z]$ una de las superorientaciones de P_3 restringidas.

Como todos los sumideros de D están en S , podemos definir S_1 como el conjunto $\{v \in V : v \text{ es sumidero}\}$, y de este modo, $(S_1, S - S_1, K)$ es la partición que buscábamos.



Patrón S2 y su representación gráfica.

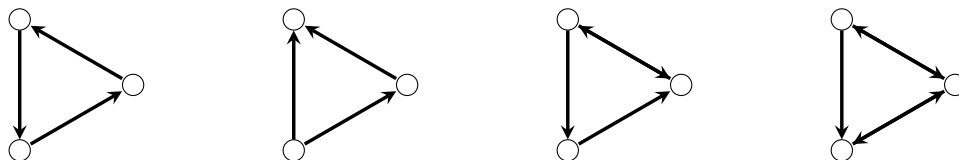
Para el patrón **S2** restringimos:

S2.1 Ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$.

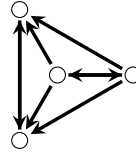
S2.2 Las siguientes superorientaciones de P_3 : $\circ \leftrightarrow \circ \leftrightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$.

S2.3 Cualquier orientación de C_4

S2.4 Las siguientes superorientaciones de K_3 :



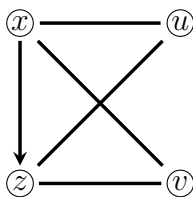
S2.5 La siguiente superorientación de K_4 :



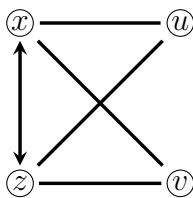
Veamos ahora que las digráficas mencionadas en los incisos S2.1, ... , S2.5 son las únicas obstrucciones del patrón S2. Sea D una digráfica de orden mayor que 3 tal que ninguna de las digráficas mencionadas es subdigráfica inducida suya. Gracias a los incisos S2.2 y S2.3, D es libre de cualquier superorientación de C_4 , y gracias también a S2.1, podemos ver que la digráfica es escindible completa con partición (K, S) .

Caso 1. Supongamos que S tiene un único vértice s . Si D es la biorientación de una gráfica completa, sabemos que admite la S2-partición. Por otro lado, si D es completa, pero no una biorientación, sabemos gracias a los incisos S2.4 y S2.5 que las únicas superorientaciones permitidas de gráficas completas son aquellas en las que existe un único vértice v que domina a todos los demás o es dominado por todos, y entre cualesquiera dos vértices distintos de v existe una flecha simétrica. En ambos casos, los conjuntos \emptyset , $\{v\}$ y $V - \{v\}$ formarán una S2-partición cuyo orden depende de si v es fuente o sumidero, así que podemos ver qué sucede si D no es completa.

Caso 2. Si D no es completa, entonces S tiene más de un vértice. Si el clan tiene un único vértice, las obstrucciones mencionadas en S2.2 nos dicen que entre K y S no existen flechas simétricas, por lo que podemos definir los conjuntos V_0 y V_1 como $\{v \in S: d^+(v) = 0\}$ y $\{v \in S: d^-(v) = 0\}$ respectivamente, y de este modo (V_0, V_1, K) es la S2-partición deseada. Veamos qué sucede, en cambio, si el clan tiene más de un vértice.



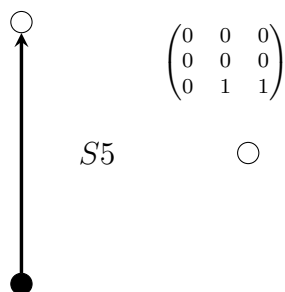
Supongamos que existe una flecha asimétrica (x, z) con ambos extremos en K . Podemos tomar dos vértices $u, v \in S$, y observar que las únicas formas de dar dirección a las flechas de los triángulos $D[u, x, z]$ y $D[v, x, z]$ hacen que la trayectorias $D[u, v, z]$ o $D[u, v, x]$ pertenezcan a la lista de obstrucciones. Esto significa que la flecha entre x y z es simétrica, por lo que cualquier flecha que tenga ambos extremos en K también lo será.



Ahora que sabemos que la flecha es simétrica, podemos ver que si la flecha entre u y x es simétrica, entonces $D[u, v, x]$ es una de las superorientaciones de P_3 restringidas. Haciendo el mismo análisis para v , infirimos que todas las flechas que inciden tanto en u como en v son asimétricas. Más aun, si u no fuera un sumidero o una fuente, existirían vértices $t, w \in K$ tales que $D[t, u, w]$ sería una de las superorientaciones restringidas de K_3 , por lo que podemos concluir que cada vértice de S es una fuente o un sumidero.

Si definimos V_0 como el conjunto de los sumideros de S y V_1 como el conjunto de fuentes de S , entonces (V_0, V_1, K) es la S2-partición buscada, lo que concluye la demostración.

Como se mencionó, los patrones S3 y S4 corresponden a matrices de 2×2 , por lo que se pasará a hacer las caracterizaciones de los patrones S5 y S6. Dichas caracterizaciones serán un poco distintas, ya que las digráficas que admitan estos patrones no necesariamente son escindibles completas, aunque sí lo son sus componentes con flechas.



Patrón S5 y su representación gráfica.

Para el patrón S5, restringiremos:

S5.1 Todas las superorientaciones de K_3 distintas de $\overleftrightarrow{K_3}$ y de la superorientación con una flecha simétrica y un sumidero.

S5.2 Las superorientaciones de P_3 distintas de $\circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$. Esto restringe a su vez todas las superorientaciones de P_4 y de C_4 .

S5.3 cualquier superorientación de $2K_2$.

Pasemos a comprobar que las digráficas mencionadas en los incisos S5.1, S5.2 y S5.3 son las únicas obstrucciones para el patrón S5.

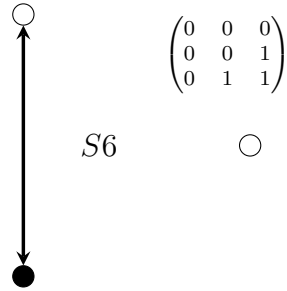
Supongamos que D es una digráfica libre de las obstrucciones mencionadas en la lista anterior. Como D es libre de todas las superorientaciones de C_4 , veamos qué sucede en caso de que también sea libre de las superorientaciones de $K_1 + K_2$.

Caso A. Como D es libre de ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$, es escindible completa con partición (K, S) . Notemos que si G_D es completa, para cualquier $n \geq 3$, la única superorientación de K_n posible distinta de $\overleftrightarrow{K_n}$ es aquella en la que existe un único sumidero que es dominado por todos los demás vértices, y entre cualesquiera dos vértices distintos a éste existe una flecha simétrica. Llamando x a dicho sumidero, podemos ver que $(\emptyset, \{x\}, V - \{x\})$ es una S5-partición de D .

Por otro lado, si G_D no es completa, S tiene más de un vértice, y podemos notar, gracias a las superorientaciones restringidas de P_3 , que K domina a S pero S no domina a K . Sabiendo esto y usando el argumento del párrafo anterior, podemos ver que cualesquiera dos vértices de K están unidos mediante una flecha simétrica, por lo que (\emptyset, S, K) es una S5-partición de D .

Caso B. Si existe alguna superorientación de $K_1 + K_2$ inducida en D , podemos suponer que se forma con vértices u, v, w , y de los cuales w es el vértice aislado en dicha sudigráfica. Notemos que al haber prohibido todas las superorientaciones de

$2K_2$, el vértice w está aislado en D , y la componente a la que pertenecen u y v tiene todas las flechas de D . Aplicando el razonamiento del caso A a dicha componente, obtenemos una partición escindible completa (K, S) para la misma. Definiendo X como $V - (K \cup S)$, podemos ver que (X, S, K) es una S5-partición para D .



Patrón S6 y su representación gráfica.

Al no tener flechas asimétricas, el último patrón es más sencillo de caracterizar. Para S6, restringimos las siguientes digráficas.

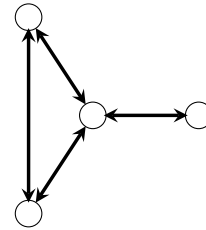
S6.1 La orientación de K_2

S6.5 la biorientación de $\overline{K_1 + P_3}$

S6.2 $\overleftrightarrow{C_4}$

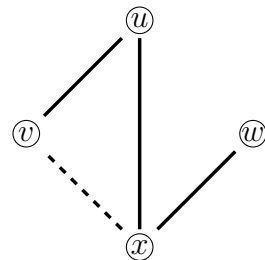
S6.3 $\overleftrightarrow{P_4}$

S6.4 $\overleftrightarrow{2K_2}$



Veamos ahora que si una digráfica es libre de las estructuras mencionadas en la lista anterior, entonces admite una S6-partición.

Demostración. Si D es libre de estas digráficas, podemos ver que D es la biorientación de alguna gráfica G con la que trabajaremos. Si G es inconexa, todas sus aristas están en una misma componente H , que además es libre de C_4 y de P_4 , por lo que su diámetro es menor a 3. Pensemos de nuevo que H tiene más de tres vértices, y veamos que H también es libre de $K_1 + K_2$. Para esto, supongamos por el contrario que existen vértices u, v, w tales que $H[u, v, w] \cong K_1 + K_2$.

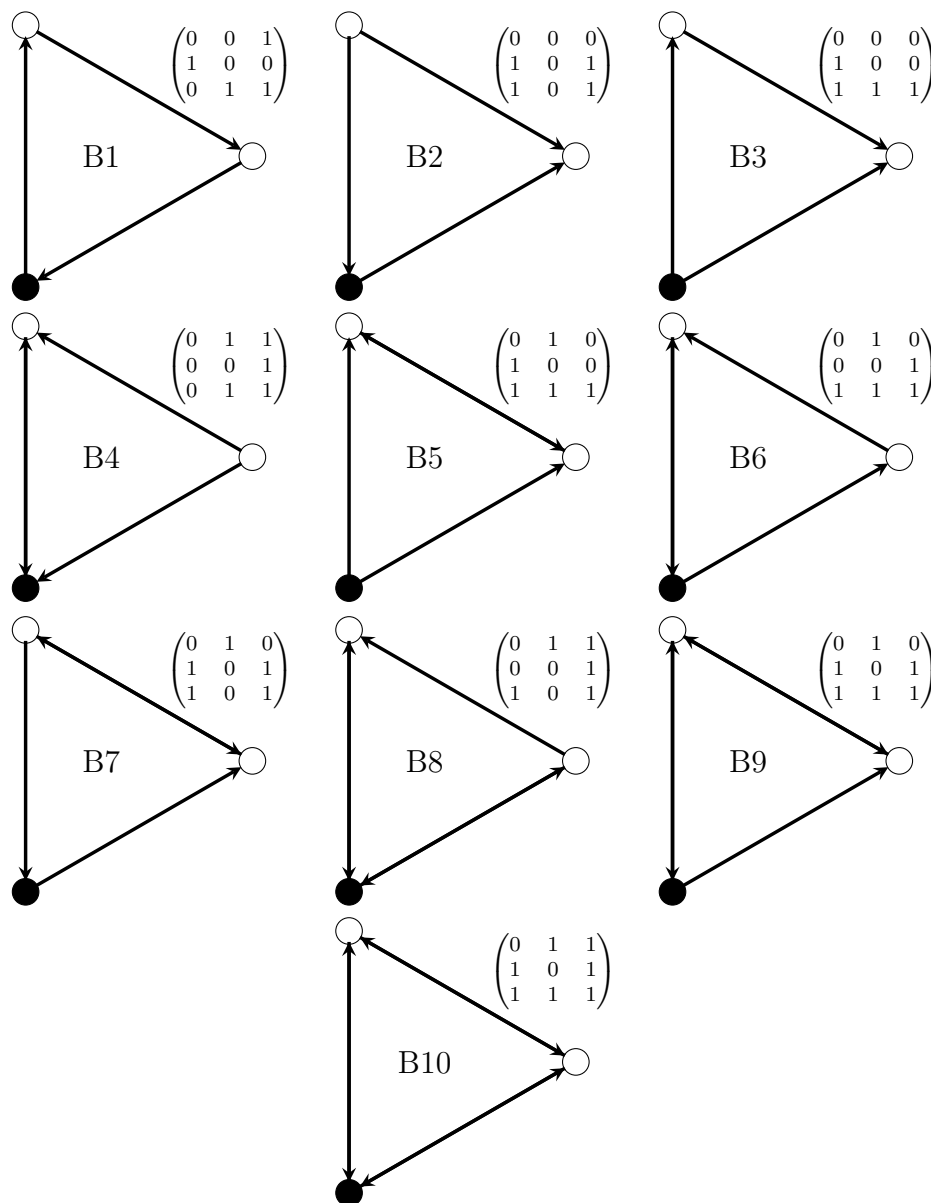


Suponiendo sin pérdida de generalidad que u y w no son adyacentes, existe un vértice $x \in V_H$ que es vecino común de u y de w . Si x no fuera adyacente a v , tendríamos una subgráfica isomorfa a P_4 , y si $xv \in E_H$, entonces los cuatro vértices inducirían $\overline{K_1 + P_3}$. Gracias a esto, sabemos que H es libre de $K_1 + K_2$ y como también es libre de C_4 , es escindible completa con partición (S, K) . Si definimos a X como el conjunto de vértices aislados de D , entonces (X, S, K) es la S6-partición que buscábamos.

□

2.2.2. Triángulos

Lo siguiente es trabajar con las versiones de los triángulos anteriores que tienen exactamente un vértice negro:



Si una digráfica D admite alguno de estos patrones, y el clan de la partición no es el conjunto vacío, entonces contiene la biorientación de una gráfica completa que cumple que cada uno de sus vértices es adyacente a todos los demás de la digráfica. Al colocar cada vértice de dicha biorientación en un su propio conjunto, podemos observar que D es multipartita completa. Por otro lado, como la biorientación de una gráfica completa admite cualquiera de estos patrones, daremos por hecho en las demostraciones que las digráficas con las que se trabaja no son biorientaciones

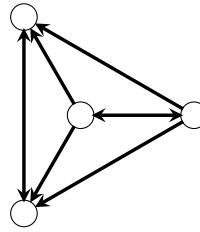
de completas. De igual manera que con los patrones en forma de triángulo que no tenían clanes, el patrón que contiene únicamente flechas simétricas es el más fácil de caracterizar.

Patrón B10. Para este patrón basta prohibir la orientación de K_2 y las biorientaciones de $K_{2,2,2}$ y de $K_1 + K_2$.

Si D es una digráfica sin flechas simétricas que no contiene a $\overleftrightarrow{K}_{2,2,2}$ ni a $K_1 + \overleftrightarrow{K}_2$ como subdigráficas inducidas, sabemos que es una multipartita completa con partición (V_1, \dots, V_k) , para algún entero k mayor o igual que 2, y gracias a $K_{2,2,2}$ sabemos que a lo más dos de las partes tienen más de un vértice. Si D es bipartita, (V_1, V_2, \emptyset) es una B10-partición, y en otro caso, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los conjuntos V_3, \dots, V_k son unitarios, así que $D[\bigcup_{i=3}^k V_i] \cong \overleftrightarrow{K}_{k-2}$. De este modo, si $V_i = \{v_i\}$, definimos el conjunto S como $\{v_i\}_{i=3}^k$, y podemos ver que la partición (V_1, V_2, S) es una B10-partición.

Para todos los demás patrones debemos restringir:

- ▲ Las superorientaciones de P_3 : $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$,
- ▲ ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$
- ▲ Para los patrones B1, B2, y B7, la siguiente superorientación de K_4 .



Cabe mencionar que ésta digráfica tampoco admite una M -partición para los patrones B3, B6, B8, y B9, aunque para esos casos no será obstrucción mínima.

Al igual que con los patrones anteriores, si tomamos una digráfica bipartita libre de las superorientaciones de P_3 mencionadas, el Lema 1 garantizará que la digráfica admita el patrón correspondiente. Debido a esto, trabajaremos con digráficas multipartitas completas con al menos tres partes. En cada uno de los siguientes patrones se restringirán ciertas superorientaciones de K_3 , por lo que si la digráfica con la que se trabaja tiene únicamente tres vértices, será una superorientación de K_3 que sí admite el patrón correspondiente. Gracias a esto, pediremos que la digráfica con la que se trabaje en cada caso tenga al menos cuatro vértices.

Primeros tres patrones

Para los patrones B1, B2, y B3 restringimos las siguientes superorientaciones de K_3 :



y $\overleftrightarrow{P_3}$. Consideremos una digráfica D libre de estas obstrucciones, así como de las mencionadas en \blacktriangle . Si D no tiene flechas asimétricas, haber obstruido $K_1 + \overleftrightarrow{K_2}$ y $\overleftrightarrow{P_3}$ nos deja dos opciones: que D sea vacía o que sea la biorientación de una gráfica completa. En ambos casos es fácil ver que D admite cualquiera de los patrones B1, B2 y B3, por lo que, para estas tres caracterizaciones, supondremos que la digráfica con la que trabajamos siempre tiene flechas asimétricas.

Si observamos las representaciones gráficas de estos tres patrones, nos daremos cuenta de que las únicas flechas simétricas de las digráficas que los admiten tienen ambos extremos en el clan, y los vértice en este son adyacentes a todos los demás vértices de la digráfica. Para demostrar que las digráficas cumplen esto, tenemos dos proposiciones.

Proposición 8. *Sea D una digráfica libre de las obstrucciones de \blacktriangle , de $\overleftrightarrow{P_3}$ y de las superorientaciones de K_3 mencionadas anteriormente. Si un vértice v es extremo de una flecha simétrica, entonces es adyacente a cualquier otro vértice de D . Más aun, si definimos S como el conjunto de vértices en los cuáles incide una flecha simétrica, entonces para cualquier vértice $x \in V - S$, sucederá que x domina a S o viceversa.*

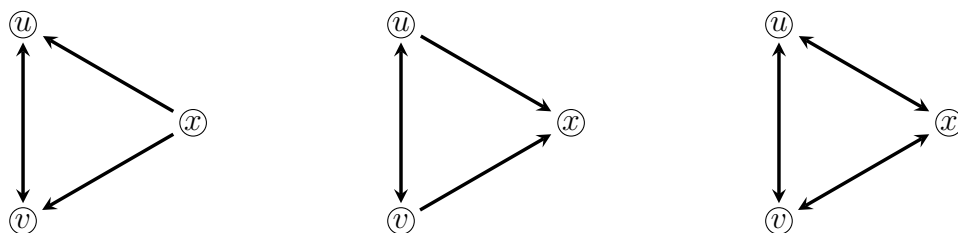


Figura 2.2: Posibles configuraciones para la prueba de la Proposición 8.

Demostración. Sean u y v extremos de una misma flecha simétrica, y $x \in V - \{u, v\}$. Para evitar que se induzca la digráfica $K_1 + \overleftrightarrow{K_2}$, al menos uno de los vértices u o v debe ser adyacente a x , sin embargo, al estar prohibidas todas las superorientaciones de P_3 con flechas simétricas, sucede que ambos son adyacentes a x . Esto prueba la primera parte de la proposición. Quitando las configuraciones que resulten en superorientaciones restringidas de K_3 , nos quedan las opciones que aparecen en la Figura 2.2, y cada una de ellas es un caso particular de la segunda parte de la proposición. \square

Proposición 9. *Bajo las mismas hipótesis que la Proposición 8, si u y v son extremos de flechas simétricas distintas, entonces entre u y v existe una flecha simétrica.*

Demostración. Caso 1. Si u y v son adyacentes a un mismo vértice mediante una flecha simétrica, entonces u y v también deben estar conectados mediante una flecha simétrica, pues $\overleftrightarrow{P_3}$ está restringida.

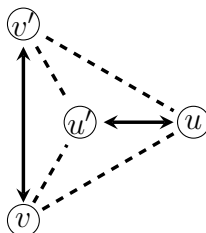


Figura 2.3: Dos flechas sin extremos comunes

Caso 2. Si u y v son extremos de flechas simétricas no adyacentes, entonces tendremos un esquema como en la Figura 2.3. En este caso, para que u, v , y v' no formen una biorientación de $K_1 + K_2$, necesitamos que u sea adyacente a v o a v' . Notemos que si fuera adyacente sólo a uno de ellos, se formaría alguna superiorización restringida de P_3 , por lo que u es adyacente tanto a v como a v' . Bajo el mismo razonamiento, u' también debe ser adyacente tanto a v como a v' .

Si alguna de las flechas fuera asimétrica, digamos (u, v) , la única forma de orientar las flechas para no generar las superiorizaciones de K_3 restringidas para estos tres patrones es la presentada en la Figura 2.4, sin embargo, dicha superiorización de K_4 está prohibida para los patrones B1 y B2, y contiene una superiorización de K_3 que será restringida para el patrón B3.

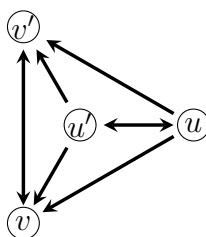


Figura 2.4: La flecha (u, v) nos da una obstrucción, aunque esta no siempre es mínima.

Por lo tanto, todas las flechas en la Figura 2.4 deberían ser simétricas. \square

La verdadera importancia de la Proposición 9 es que nos dice que para estos tres patrones, las flechas simétricas siempre formarán una digráfica completa biorientada, lo que facilita las caracterizaciones. En estas caracterizaciones, usaremos este hecho para dividir las demostraciones en dos casos: cuando la digráfica en cuestión tiene flechas asimétricas y cuando no.

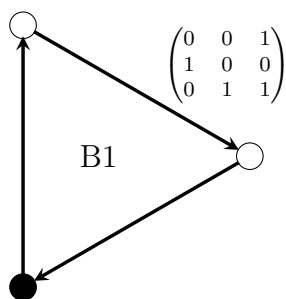
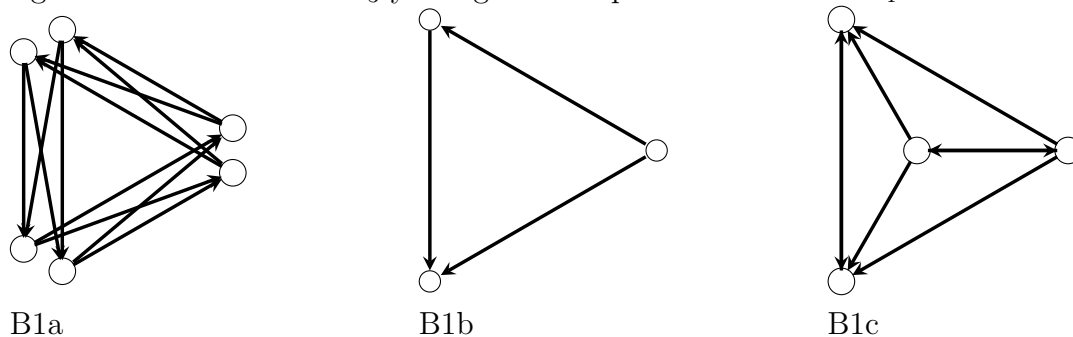


Figura 2.5: Patrón B1 con su respectiva representación gráfica.

Patrón B1. Para este patrón se restringe la siguiente orientación de $K_{2,2,2}$, la siguiente orientación de K_3 y la siguiente superiorización de K_4 :



Sea D una digráfica multipartita completa en la cual ninguna de las obstrucciones anteriores esté presente:

Caso 1. Supongamos que D no tiene flechas simétricas. Como se comentó al inicio de la sección, supondremos que D es k -partita para algún entero $k \geq 3$, y que sus partes son V_1, V_2, \dots, V_k . Lo siguiente que hacemos es tomar $u \in V_1, v \in V_2$, y $w \in V_3$. Como D no tiene flechas simétricas y hay una única orientación permitida de K_3 , podemos suponer sin pérdida de generalidad que la digráfica $D[u, v, w]$ se verá como en la Figura 2.6.

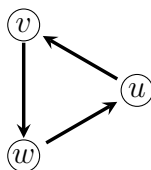


Figura 2.6: $D[u, v, w]$ para el caso 1 del patrón B1.

Al haber restringido la digráfica B1a, sabemos que a lo más dos de las partes V_1, V_2, V_3 tienen más de un vértice, por lo que es seguro suponer que V_1 sólo tiene a u . Veamos ahora qué sucede si D tiene más de tres partes. Si así fuera, tomamos un vértice $x \in V - (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$. Al ser D una digráfica multipartita completa,

deberíamos poder darle una orientación a la Figura 2.7, pero esto siempre resultaría en una aparición de B1b, por lo que el vértice x no puede existir.

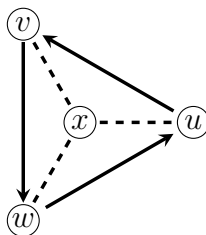


Figura 2.7: $D[u, v, w, x]$ para el caso 1 del patrón B1.

De esta forma, D es tripartita con partición (V_1, V_2, V_3) , y la partición (V_3, V_2, V_1) exhibe que D admite el patrón B1.

Caso 2. Si D sí tiene flechas simétricas, llamemos S al conjunto de vértices en los cuales incide una flecha simétrica. Gracias a la Proposición 9, sabemos que S es un clan fuerte, y la segunda parte de la Proposición 8 nos dice que podemos definir los conjuntos

- $V_1 = \{v \in V - S : v \text{ es dominado por todos los vértices de } S\}$
- $V_2 = \{v \in V - S : v \text{ domina a todos los vértices de } S\}$.

De nuevo, gracias a las Proposiciones 8 y 9, sabemos que los conjuntos V_1, V_2 y S abarcan todos los vértices de D , así que (S, V_1, V_2) ya es una partición. Si alguno de los conjuntos fuera vacío, entonces (V_2, V_1, S) sería la B1-partición. Veamos ahora que tanto V_1 como V_2 son independientes. Para esto, supongamos que existen $u, v \in V_1$ adyacentes. Al no estar en S , la flecha entre ellos debe ser asimétrica, así que podemos suponer que es (u, v) . Tomando cualquier $s \in S$, podemos ver que $D[s, u, v]$ forma la digráfica B1b, por lo que u y v no pueden ser adyacentes, y haciendo el mismo análisis, podemos ver que V_2 es independiente. Para concluir, sólo necesitamos ver que V_1 domina a V_2 . Para esto, basta con tomar $u \in V_1, v \in V_2, s \in S$, y notar que la digráfica $D[s, u, v]$ sólo puede verse como el triángulo de la figura 2.5, lo que significa que (V_1, V_2, S) es la B1-partición que buscábamos.

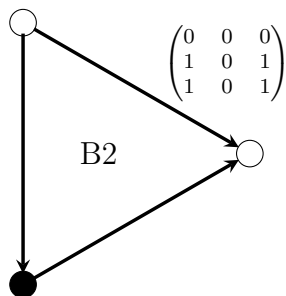
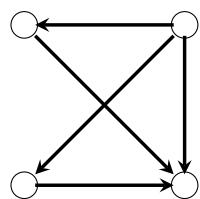
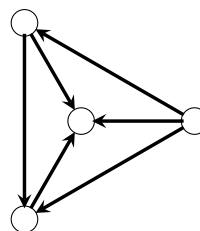


Figura 2.8: Patrón B2 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B2. Además de las obstrucciones mencionadas en \blacktriangle y de las digráficas mencionadas para los primeros tres patrones, restringimos la orientación cíclica de K_3 , además de las siguientes digráficas:



B2.1



B2.2

Sea D una digráfica libre de las obstrucciones mencionadas en \blacktriangle . En virtud de las digráficas mencionadas en \blacktriangle sabemos que D es multipartita completa con partición (V_1, \dots, V_k) para algún entero $k \geq 3$, y podemos partir la demostración en casos.

Caso 1. Supongamos que D no tiene flechas simétricas, y tomemos tres vértices $u \in V_1, v \in V_2$ y $w \in V_3$. Sin pérdida de generalidad, $D[u, v, w]$ se vería como la Figura 2.9.

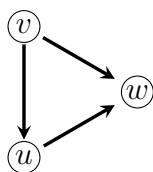


Figura 2.9: Digráfica $D[u, v, w]$ para el primer caso del patrón B2.

Notemos que para evitar la formación de B2.1, el conjunto V_1 sólo puede contener a u . Si D tuviera más de tres partes, deberíamos ser capaces de tomar un vértice x en una parte distinta y poder terminar de orientar la Figura 2.10, pero ésta siempre nos dará una orientación cíclica de K_3 o la digráfica B2.2, por lo que x no puede existir.

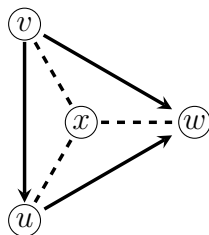


Figura 2.10: La digráfica $D[u, v, w, x]$ contiene alguna de las obstrucciones mínimas.

De este modo, y gracias al 1, la digráfica D tiene como partición (V_1, V_2, V_3) , y la partición (V_3, V_2, V_1) es una B2-partición.

Caso 2. Supongamos que D sí tiene flechas simétricas, y definamos S como el conjunto de vértices que son extremos de una flecha simétrica. Como sucedió con el patrón anterior, $D[S]$ es una gráfica completa biorientada. De la misma manera, definimos los conjuntos

- $V_1 = \{v \in V - S : v \text{ es dominado por todos los vértices de } S\}$
- $V_2 = \{v \in V - S : v \text{ domina a todos los vértices de } S\}$.

De igual forma, las Proposiciones 8 y 9 aseguran que (S, V_1, V_2) es una partición. Si tomamos $s \in S, u \in V_1, v \in V_2$, es fácil ver que $(v, u) \in A$, pues de otra forma tendríamos la orientación cíclica de K_3 , y la flecha entre ambos vértices no puede ser simétrica, porque ninguno de ellos está en S . Se sigue de este hecho y del Lema 1, que V_2 domina a V_1 . Para ver que V_1 es independiente, supongamos que existen dos vértices $u, v \in V_1$ tales que $\overrightarrow{uv} \in A$. Si volvemos a tomar dos vértices $s \in S$ y $w \in V_2$, tendríamos que terminar de orientar la figura 2.11, pero eso nos daría una orientación cíclica de K_3 o la digráfica B2.2

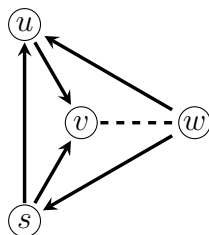


Figura 2.11: la flecha que falta generará una obstrucción.

Demostrar que V_2 es independiente es análogo, por lo que (V_1, V_2, S) exhibe que D admite el patrón B2.

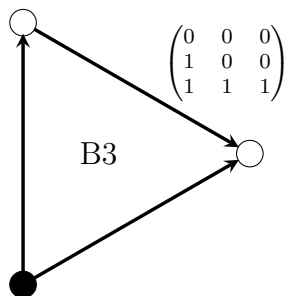
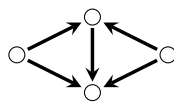
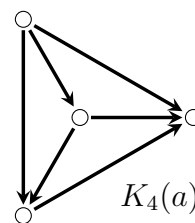
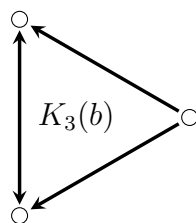
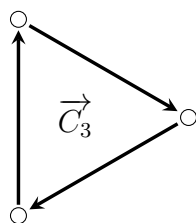


Figura 2.12: Patrón B3 y su respectiva representación gráfica.

Para el **Patrón B3** se prohíben, además de las digráficas mencionadas en **▲** y de aquellas mencionadas para los primeros tres patrones, las siguientes digráficas.



- la siguiente orientación del diamante:
- Las superiorizaciones de K_3 y K_4 siguientes:



Si D es una digráfica libre de estas obstrucciones, así como de las mencionadas anteriormente, las obstrucciones de **▲** nos indican que D es multipartita completa, y como se comentó anteriormente, podemos pensar que su partición es (V_1, \dots, V_k) para alguna $k \geq 3$. Sabemos también que D cumple con las hipótesis del Lema 1, así que de nuevo, partamos la demostración por casos.

Caso 1. Supongamos que D no tiene flechas simétricas. Si es bipartita, el Lema 1 garantiza que D admitirá el patrón B3. Si tiene k partes V_1, \dots, V_k , con $k \geq 3$ podemos tomar tres vértices $u \in V_1, v \in V_2, w \in V_3$, y sin pérdida de generalidad, la digráfica $D[u, v, w]$ debe verse como la Figura 2.13

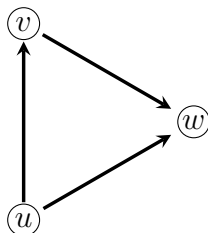


Figura 2.13: $D[u, v, w]$ para el caso 1 del patrón B3.

Notemos que si V_1 tuviera otro vértice u' , el Lema 1 implicaría que $D[u, u', v, w]$ fuera la primera obstrucción de la lista, así que $V_1 = \{u\}$. Por otro lado, si tuviéramos más partes, podríamos tomar cualquier vértice x en una de las partes restantes, y $D[u, v, w, x]$ contendría la orientación restringida de K_3 o sería isomorfa a $K_4(a)$. Entonces, como V_1 es unitario y sólo hay tres partes, la partición (V_3, V_2, V_1) es una B3-partición.

Caso 2. Supongamos que D sí tiene flechas simétricas. Definimos el conjunto S de igual forma que para los dos patrones anteriores, y notamos que gracias a la Proposición 9, $D[S]$ es la biorientación de una gráfica completa. Debido a la restricción de \vec{C}_3 y a la Proposición 8, los vértices restantes son dominados por los vértices de S . Ahora definimos los conjuntos

- $V_1 = \{v \in V - S : d^+(v) > 0\}$
- $V_2 = \{v \in V - S : d^+(v) = 0\}$.

Notemos que (V_2, V_1, S) es una partición para D , pues cualquier vértice que no esté en S tiene un exgrado positivo o cero. En caso de que V_1 sea vacío, esta partición es la S2-partición buscada, así que podemos ver qué sucede si V_1 no es vacío. Como V_2 es independiente, basta mostrar que V_1 también lo es y que V_1 domina a V_2 . Para esto, supongamos por el contrario que existen dos vértices $u, v \in V_1$ tales que $\vec{uv} \in A$. Al tener exgrado positivo, v debe dominar a algún otro vértice x . Si x estuviera en S , podríamos ver al tomar cualquier otro vértice $s \in S$, y notar $D[s, v, x]$ es alguna de las superiororientaciones de K_3 prohibidas. Ahora que sabemos que $x \notin S$, podemos ver que los tres vértices u, v, x son dominados por cualquier vértice $s \in S$. Si intentamos dibujar esto, tendríamos que terminar de orientar la Figura 2.14. Si no existiera flecha alguna entre u y x , tendríamos una trayectoria P_3 en la digráfica, pero si existiera, se formaría la digráfica \vec{C}_3 o $K_4(a)$, por lo que x no puede existir, lo que a su vez quiere decir que V_1 es independiente. De esa forma, las flechas que tienen como cola vértices de V_1 , deben tener como cabeza vértices de V_2 , y si existieran dos vértices $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ tales que v_1 no domina a v_2 , entonces v_1, v_2 y el vértice de V_2 dominado por v_1 formarían la orientación de $K_1 + K_2$, por lo que V_1 domina a V_2 , lo que nos asegura que (V_2, V_1, S) es una B3-partición.

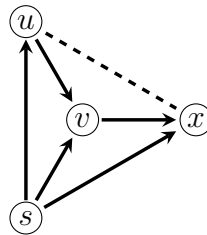


Figura 2.14: Digráfica $D[s, u, v, x]$ para el caso 2 del patrón B3.

Patrones restantes

En caso de los otros seis patrones, es fácil ver que ambas orientaciones de K_3 son obstrucciones mínimas.

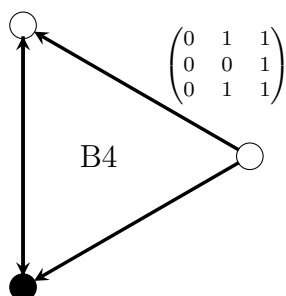


Figura 2.15: Patrón B4 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B4. Para este patrón se restringen, además de las digráficas mencionadas en **▲** y de ambas orientaciones de K_3 , las siguientes estructuras.

- $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} C_4$
- Las superorientaciones de K_3 distintas de $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} K_3$ y de aquella con una flecha simétrica y una fuente.

Si D es una digráfica libre de estas obstrucciones, sabemos por **▲.2** que es multipartita completa, y por **▲.1** que cumple las hipótesis del Lema 1. Observemos que si D es bipartita, haber restringido $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} C_4$ nos garantiza que, en caso de tener flechas simétricas, D sólo puede ser la biorientación de una estrella con partición (K, S) , por lo que (\emptyset, S, K) es la B4-partición que buscamos. En caso de no tener flechas simétricas, el Lema 1 nos indica que podemos encontrar una B4-partición para D . Gracias a esto, podemos pensar que D es multipartita con partición (V_1, \dots, V_k) para algún entero k mayor o igual que 3. A partir de este momento, es conveniente proceder por casos.

Caso 1. Si el triángulo de la Figura 2.15 no es subdigráfica inducida de D , veamos que D no tiene flechas asimétricas. Para esto, supongamos que existen dos vértices u y v en partes distintas V_i y V_j respectivamente para los cuales existe (u, v) pero no (v, u) . Como la partición tiene al menos tres partes, si tomamos un vértice x que esté en una parte distinta, el triángulo $D[u, v, x]$ inducirá una superorientación restringida de K_3 o el triángulo de la representación gráfica del patrón, por lo que la flecha asimétrica (u, v) no puede existir en primer lugar.

Ahora que sabemos que D no tiene flechas asimétricas, podemos usar que es libre de $\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} C_4$ y de $K_1 + \overset{\leftarrow}{\rightleftarrows} K_2$ para notar que D es la biorientación de una gráfica escindible completa con partición (K, S) , por lo que (\emptyset, S, K) es una B4-partición para D .

Caso 2. Si el triángulo de la Figura 2.15 sí es subdigráfica inducida de D , podemos pensar que es inducido los vértices $v \in V_1, u \in V_2, w \in V_3$ y que la flecha simétrica

está entre u y w . Gracias al Lema 1 y a que D es libre de \overleftrightarrow{C}_4 , no puede suceder que V_2 y V_3 tengan ambos más de un vértice al mismo tiempo, por lo que podemos suponer que $V_3 = \{w\}$. Si la partición de D tiene sólo tres partes, hemos terminado, y si no, tomamos algún vértice arbitrario $x \in V_4$ para tener la estructura que aparece ilustrada en la Figura 2.16:

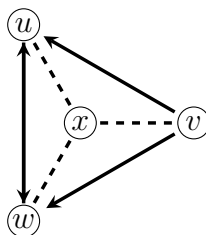


Figura 2.16: $D[u, v, w, x]$ para el caso 2 del Patrón B4.

Notemos que si la flecha entre w y x fuera asimétrica, el triángulo $D[v, w, x]$ sería una de las superiororientaciones de K_3 restringidas, y si la flecha entre u y x fuera asimétrica, podríamos notar que el triángulo $D[u, w, x]$ también estaría prohibido. Esto quiere decir que $\overleftrightarrow{xw}, \overleftrightarrow{ux} \in A$, lo que implica a su vez que v domina a x mediante una flecha asimétrica. Para concluir la prueba, tenemos las siguientes afirmaciones.

- V_1 es un conjunto independiente cuyos vértices dominan a todos los demás de la digráfica.
- V_2 es independiente
- El conjunto S , definido como $\bigcup_{i=3}^k V_i$ induce una digráfica completa biorientada, y
- $D[S \cup V_2]$ es la biorientación de una escindible completa.

De esta forma, (V_1, V_2, S) es una B4-partición para D .

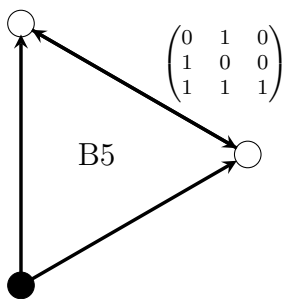
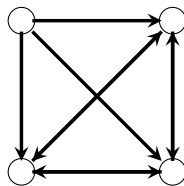
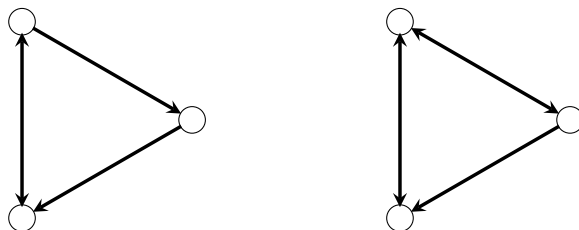


Figura 2.17: Patrón B5 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B5. Para este patrón, restringimos las digráficas mencionadas en \blacktriangle , así como la orientación de P_3 con dos fuentes y un sumidero, la biorientación del diamante, la siguiente superiororientación de K_4 :



y las siguientes superorientaciones de K_3 :



Al igual que en las caracterizaciones anteriores, cualquier digráfica D libre de estas obstrucciones es multipartita completa. Si D es bipartita, el Lema 1 nos garantiza que D admite una B5-partición, por lo que podemos pensar que la partición de D es (V_1, \dots, V_k) para algún entero k mayor que 2. De nuevo, es conveniente proceder por casos.

Caso 1. Si D no contiene al triángulo de la Figura 2.17, la única superorientación permitida de C_4 es $\overleftrightarrow{C_4}$, por lo que basta demostrar que D es libre del $\overleftrightarrow{C_4}$ para que, en virtud del Teorema 5, D sea escindible completa.

Al ser D multipartita completa con partición (V_1, \dots, V_k) para algún entero k mayor que 2, este ciclo sólo podría formarse tomando dos vértices en una parte de la partición y otros dos en otra. Supongamos que dicho ciclo existe, como D no es bipartita, existe un vértice x en una parte distinta de estas dos, por lo que tenemos alguna de las digráficas representadas por la Figura 2.18:

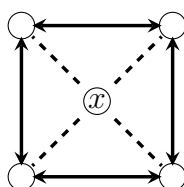
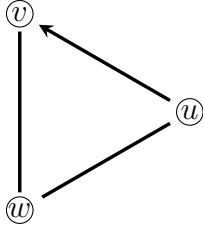


Figura 2.18: El ciclo $\overleftrightarrow{C_4}$ con un vértice x adyacente a todos sus vértices.

Si alguna de las flechas punteadas fuera simétrica, todas tendrían que serlo para evitar la superorientación de K_3 que tiene una única flecha asimétrica, pero en ese caso tendríamos la biorientación del diamante, por lo que todas las flechas en cuestión deben ser asimétricas. Por otro lado, si alguna flecha asimétrica tuviera a x como cola, todas tendrían a x como cola para evitar superorientaciones prohibidas de K_3 , pero aparecería el triángulo de la Figura 2.17, que no pertenece a este caso. Por lo tanto, todas las flechas deben tener a x como cabeza, sin embargo, esto causa que x , junto con dos vértices no adyacentes de la Figura 2.18, induzca la orientación de P_3

con dos fuentes y un sumidero. Como siempre obtenemos una estructura restringida, \overleftrightarrow{C}_4 no puede ser subdigráfica inducida de D , por lo que D es escindible completa con partición (K, S) . En este momento pueden suceder dos cosas.

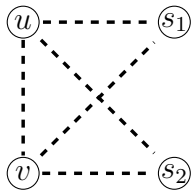


Caso 1.1: Si S es unitario, entonces G_D es completa. Como sabíamos por hipótesis general que D no era una gráfica completa biorientada, existe al menos una flecha asimétrica (u, v) , y como G_D es completa con más de tres vértices, cualquier otro vértice w es adyacente a ambos, como se muestra en la ilustración de la izquierda.

En este momento, no puede suceder que las flechas restantes sean \overleftarrow{wv} y \overrightarrow{uw} , pues el triángulo resultante no pertenece a este caso, por lo que las flechas adecuadas son \overleftarrow{wu} y \overrightarrow{wv} . Esto significa que v es dominado por todos los demás vértices. Por otro lado, si tomamos cualquier otro vértice w' , el triángulo $D[u, w, w']$ estará permitido sólo cuando la flecha entre w y w' es simétrica, así que entre cualesquiera dos vértices distintos de v existe una flecha simétrica.

En particular, esto nos dice que podemos tomar al conjunto independiente S de tal forma que (\emptyset, S, K) sea la B5-partición. Este caso será útil también para los patrones B6 y B9.

Caso 1.2:



En este caso estamos suponiendo que S no es unitario. Observemos que si K es unitario, D es bipartita, y ese caso ya fue analizado. Gracias a esto, podemos tomar dos vértices s_1, s_2 en S y dos vértices u, v en K . Notemos que para evitar la biorientación del diamante, alguna de las flechas debe ser asimétrica. Si (u, v) es una flecha simétrica, la única forma de orientar esta figura sin tener triángulos restringidos sería con las flechas $\overleftrightarrow{us_1}, \overleftrightarrow{us_2}, \overleftrightarrow{s_1v}, \overleftrightarrow{s_2v}$, pero en este caso $D[s_1, v, s_2]$ induce una orientación restringida de P_3 .

Entonces, todas las flechas con ambos extremos en K son simétricas, por lo que todas las flechas ente K y S deben ser asimétricas. Sin embargo, la única manera de lograr esto sin contradecir las hipótesis, es que todas las flechas vayan de K a S , y en ese caso la partición buscada es (\emptyset, S, K) .

Caso 2. Si el triángulo de la representación gráfica del patrón es inducido por vértices $u \in V_1, v \in V_2, w \in V_3$ como en la Figura 2.19 entonces V_3 debe tener un único elemento para no inducir una de las orientaciones restringidas de P_3 . Notemos que si la partición de D tiene sólo tres partes, sólo necesitamos ordenarlas para encontrar la B5-partición. Por otro lado, si la partición de tiene k partes para algún entero k con $k \geq 4$, tenemos que acomodar estos vértices. Sea $x \in V_i$, para algún $i \in \{4, \dots, k\}$.

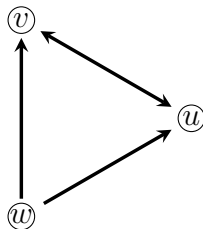
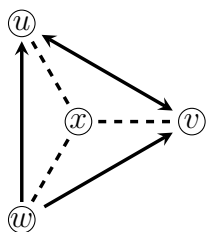


Figura 2.19: Este triángulo se asemeja al dibujo del patrón B5.



Notemos que si la flecha (w, x) es asimétrica, entonces las flechas entre x y v y entre u y x son simétricas gracias a los triángulos correspondientes, pero en ese caso, $D[u, v, w, x]$ es la superiorización de K_4 que corresponde a una obstrucción mínima. Por otro lado, si la flecha (x, w) es simétrica, entonces el triángulo $D[v, w, x]$ es otra obstrucción mínima. De esa forma, la opción viable es que la flecha entre w y x sea simétrica, por lo que las flechas (x, v) y (x, u) deben ser asimétricas.

Como consecuencia, el conjunto V_i debe ser unitario, pues si tuviera otro vértice s , la digráfica $D[s, v, x]$ sería una orientación restringida de P_3 . Por tanto, podemos definir el conjunto S como $\bigcup_{i=3}^k V_i$, y sucede que $D[S]$ es la biorientación de una gráfica completa, S domina a V_1 y a V_2 , y entre estos dos existen todas las flechas simétricas posibles, por lo que (V_1, V_2, S) es una B5-partición para D .

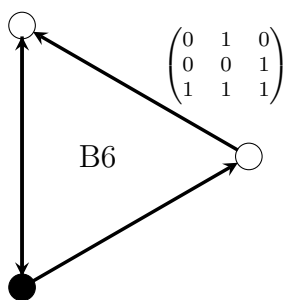
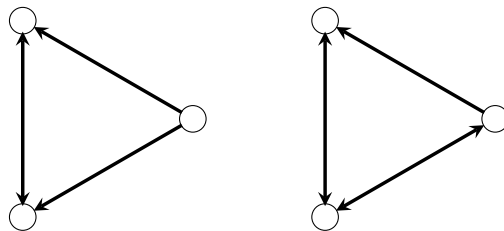
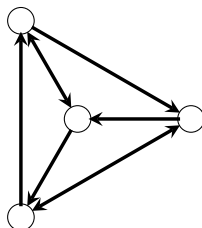


Figura 2.20: Patrón B6 y su respectiva representación matricial.

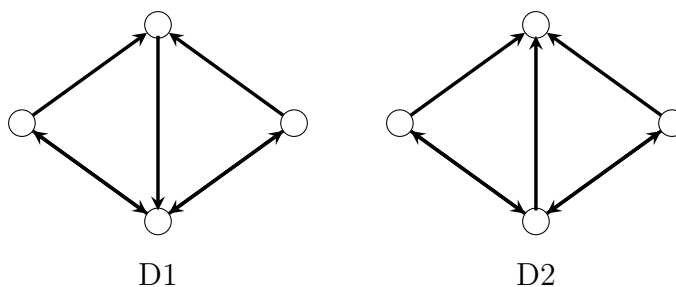
Patrón B6. Las únicas superiorizaciones prohibidas de K_3 además de las generales para esta sección son las siguientes:



Se restringe también la siguiente superorientación de K_4 :



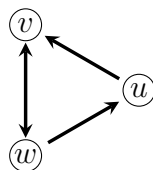
y las siguientes superorientaciones del diamante:



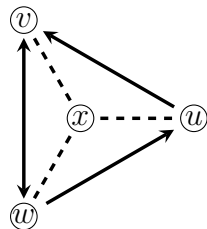
y por último restringimos \overleftrightarrow{C}_4 .

Supongamos que D es una digráfica en la que ninguna de las digráficas anteriores está presente. De nuevo, gracias a las obstrucciones mencionadas en \blacktriangle , sabemos que D es multipartita completa y que cumple las hipótesis del Lema 1. Pensemos que la partición de D es (V_1, \dots, V_k) para algún entero $k \geq 1$. Como el procedimiento para corroborar que estas obstrucciones mínimas son suficientes es similar a los anteriores, de igual forma nos conviene tomar casos.

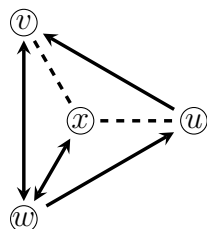
Caso 1. Supongamos que los vértices $u \in V_1, v \in V_2$ y $w \in V_3$ forman el triángulo que aparece en el dibujo del patrón de la siguiente forma:



sabemos por la obstrucción D1 y por el Lema 1 que V_3 no puede tener más vértices, por lo que, de no haber más partes en la partición, (V_1, V_2, V_3) también sería la B6-partición. En cambio, si hay 4 o más partes en la partición, tomamos un vértice $x \in V_i$ para cualquier $i \in \{4, \dots, k\}$ para formar la estructura siguiente.



Observemos que si la flecha (w, x) es asimétrica, entonces el triángulo $D[u, w, x]$ es una obstrucción mínima, y si (x, w) , fuera asimétrica, la flecha entre u y x debería ser simétrica para evitar que $D[u, w, x]$ fuera una orientación de K_3 . De ser así, tendríamos la flecha \overrightarrow{vx} , lo que nos daría la superiorización restringida de K_4 . Gracias a lo anterior, sabemos que la flecha entre w y x debe ser simétrica.

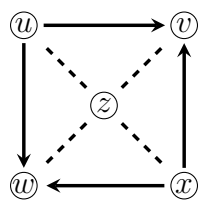


Consideremos ahora la ilustración de la izquierda. Para que el triángulo formado por los vértices x, v y w esté permitido, es necesario que la flecha entre x y v sea simétrica, y en ese caso, debe suceder que x domine a u mediante una flecha asimétrica, pues de otra manera, el triángulo $D[u, v, x]$ sería una de las obstrucciones mínimas.

Debido a lo anterior, el triángulo $D[u, v, x]$ también se asemeja al triángulo del patrón B6, lo que nos dice que V_i debe tener solo un vértice. Como i fue arbitraria, podemos definir el conjunto S como $\bigcup_{i=3}^k V_i$, y sabremos que $D[S]$ es la biorientación de una gráfica completa. Además, cada vértice de S domina a todos los de V_1 y comparte una flecha simétrica con todos los de V_2 , por lo que (V_1, V_2, S) es una B6-partición para D .

Caso 2. Si el triángulo de la representación gráfica del patrón B6 no aparece en D , hay que demostrar que D es escindible completa. Si D no tiene flechas asimétricas, esto es inmediato al haber prohibido $K_1 + K_2$ y C_4 . Si hay flechas simétricas en D y su gráfica subyacente se ve como una gráfica completa, tenemos todas las restricciones relevantes para el Caso 1.1 del patrón B5, por lo que podemos llegar al mismo resultado.

Por otro lado, si la gráfica subyacente de D no es completa, veamos que no contiene a la única superiorización de C_4 que no ha sido restringida. Supongamos que existen cuatro vértices, dos en una parte de la partición de D y dos en otra, que forman dicha orientación de C_4 . Como D no es bipartita, existe un vértice z en otra parte de la partición, por lo que tenemos la estructura siguiente.



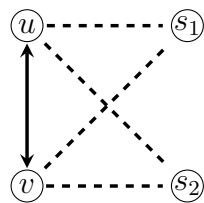
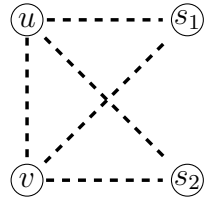
Si todas las flechas con extremo en z fueran simétricas cada triángulo sería una obstrucción mínima, lo mismo pasaría si todas fueran asimétricas, por lo que hay tanto simétricas como asimétricas. Asimismo, para evitar las superiorizaciones restringidas de P_3 , sólo puede ocurrir que dos flechas simétricas formen la biorientación de P_3 , y las dos restantes sean asimétricas de tal forma que ambas tengan cola en z o ambas tengan cabeza en z .

Si los vértices u, x, z formarían la digráfica $\overleftrightarrow{P_3}$, las flechas restantes incidentes en z formarían siempre alguna de las orientaciones restringidas del diamante. De esto se sigue que los vértices v, z, w son los que forman dicha biorientación, pero ahora el triángulo $D[w, x, z]$ es una obstrucción mínima o el triángulo que no está en este caso.

Así, dicha orientación de C_4 no puede existir, por lo que D es escindible completa con partición (K, S) . Como su gráfica subyacente no es completa, entonces S tiene

más de un vértice, y como no es bipartita, K también tiene más de un vértice. Tomemos dos vértices u, v en K y otros dos s_1, s_2 en S .

Supongamos que (u, v) es asimétrica. De ser así, no puede suceder que (u, s_2) sea asimétrica, ya que $D[u, v, s_2]$ sería una obstrucción mínima, y si (s_2, u) fuera asimétrica, entonces $D[u, v, s_2]$ sería una obstrucción mínima o el triángulo que no pertenece a este caso. Esto significa que la flecha entre u y s_2 es simétrica, y usando un razonamiento análogo, podemos ver que la flecha entre u y s_1 también debe serlo, pero la superiorización del diamante que obtendremos al hacer esto contendrá forzosamente alguna de las obstrucciones mínimas, o el triángulo de la representación gráfica del patrón.



Esto significa que la flecha ente u y v es simétrica, por lo que K es un clan fuerte. Como habíamos dicho que D no era una biorientación, las flechas entre K y S deben ser asimétricas, y la única manera de lograr esto sin inducir una obstrucción mínima o el triángulo de la representación del patrón, es que todas las flechas vayan de K a S . De esta forma, (S, \emptyset, K) es una B6-partición para D .

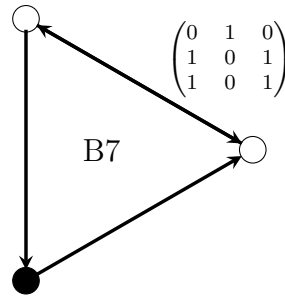
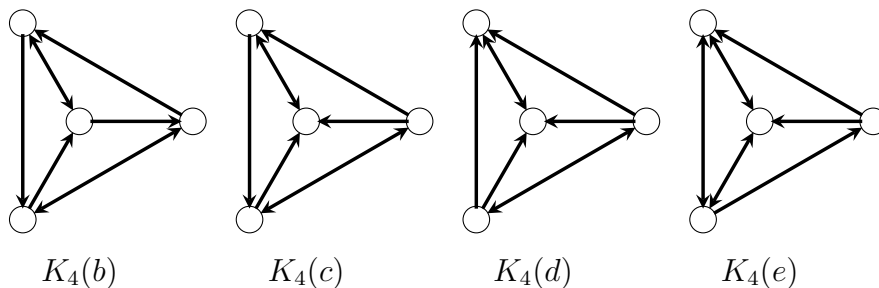
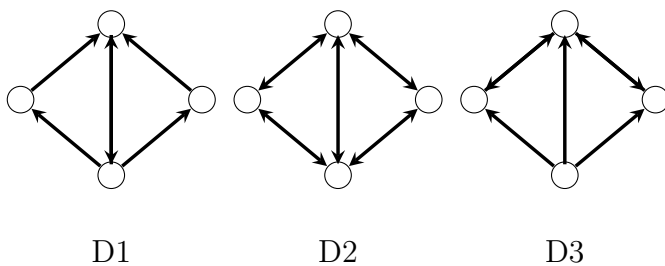


Figura 2.21: Patrón B7 y su respectiva representación gráfica.

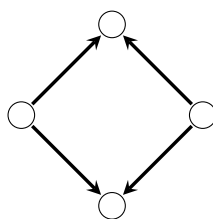
Patrón B7. A pesar de que la matriz de este patrón no es simétrica, la Figura 2.21 nos hace ver que si invertimos las flechas, el patrón resultante es isomorfo al original. Como consecuencia, para cualquier obstrucción en esta lista debe estar también su inversa. Para este patrón prohibimos la superiorización de K_3 con dos flechas simétricas. De K_4 restringimos las siguientes superiorizaciones y sus inversas:



También restringimos estas superorientaciones del diamante, así como sus inversas:



por último, se prohíbe la siguiente orientación de C_4 :



Sea D una digráfica multipartita completa con partición (V_1, \dots, V_k) para algún entero k mayor que 2. Si ninguna de las digráficas anteriores es subdigráfica inducida de D , pensemos en los siguientes casos:

Caso 1. Supongamos que el triángulo de la Figura 2.21 está formado por los vértices $u \in V_1, v \in V_2, w \in V_3$ como en la Figura 2.22

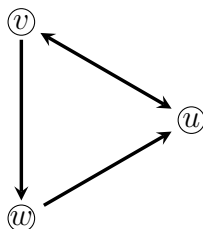


Figura 2.22: $D[u, v, w]$ es el triángulo de la representación gráfica del patrón.

Gracias al Lema 1, y a que la digráfica D1 está prohibida, sabemos que el conjunto V_3 no puede tener otros vértices además de w . Si (V_1, V_2, V_3) es la partición de D , también es la B7-partición que buscamos, por lo que hemos terminado. De no ser así, podemos tomar $x \in V_i$ para algún $i \in \{4, \dots, k\}$ y ver cómo se comporta con el triángulo $D[u, v, w]$.

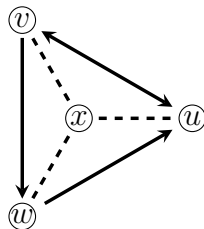


Figura 2.23: Esquema de $D[u, v, w, x]$ para el caso 1 del patrón B7.

Notemos que en la Figura 2.23, la flecha entre x y v no puede ser simétrica, pues si lo fuera, el triángulo $D[x, u, v]$ tendría sólo dos flechas simétricas, o $D[u, v, w, x]$ sería la digráfica $K_4(e)$ o la inversa de la misma. Ahora que sabemos que la flecha entre x y v es asimétrica, debe suceder que $\overleftarrow{wx} \in A$, para evitar orientaciones de K_3 , por lo que la digráfica de la Figura 2.23 en realidad se ve como en la Figura 2.24

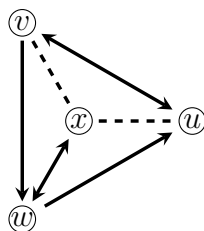


Figura 2.24: Esquema de $D[u, v, w, x]$ con la información obtenida.

Las flechas restantes deben ser asimétricas, pero la única manera de darles dirección sin obtener $K_4(b)$ o $K_4(c)$ es si las flechas (x, u) y (v, x) son asimétricas. Como el triángulo $D[u, v, x]$ corresponde al de la representación gráfica del patrón, podemos usar un razonamiento similar al que usamos con V_3 para comprobar que V_i es unitario, y x se comporta de la misma manera que w . Esto nos dice que si definimos el conjunto S como $\bigcup_{i=3}^k V_i$, S será un clan fuerte que dominará a V_1 y será dominado por V_2 , por lo que la partición (V_1, V_2, S) exhibe que D admite el patrón B7.

Caso 2. Si el triángulo de la Figura 2.21 no es subdigráfica inducida de D , veamos que D es escindible completa. Notemos que $\overleftrightarrow{C_4}$ es la única superorientación permitida de C_4 , por lo que basta demostrar que ésta no es subdigráfica inducida de D . Supongamos por el contrario que existen $u, v \in V_1$ y $w, x \in V_2$ que inducen $\overleftrightarrow{C_4}$. Como D es multipartita con más de dos partes, podemos tomar $z \in V_3$ y tener la Figura 2.25:

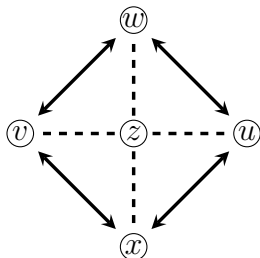


Figura 2.25: Esquema de $D[u, v, w, x, z]$ para el caso 2 del patrón B7.

Si alguna de las flechas punteadas fuera simétrica, tendríamos un triángulo con dos flechas simétricas, o la biorientación del diamante. En cambio, si todas las flechas fueran asimétricas, la única manera de darles dirección sin inducir alguna orientación prohibida del diamante, o de P_3 sería con las flechas (w, z) , (z, x) , (z, v) , (z, u) , o con la inversa de cada una de ellas. De ser así, la digráfica $D[u, w, z]$ es isomorfa al triángulo de la Figura 2.21, por lo que tenemos una contradicción. Esto indica que D es libre de \overleftrightarrow{C}_4 , y por lo tanto D es escindible completa con partición (K, S) . Podemos suponer que K tiene al menos dos vértices, pues si fuera unitario, D sería bipartita completa. Si S tiene al menos dos vértices, podemos tomar $s_1, s_2 \in S$ y $u, v \in K$ de la siguiente manera.

Si todas las flechas fueran asimétricas, tendríamos orientaciones de K_3 , las cuales fueron restringidas para los patrones B4, B5, B6, B7, B8 y B9. Por otro lado, si todas fueran simétricas, tendríamos la biorientación del diamante. Si la flecha entre u y v fuera asimétrica, cada triángulo tendría que tener exactamente una flecha simétrica. En particular, si la flecha simétrica del triángulo $D[u, v, s_1]$ fuera $\overleftrightarrow{us_1}$, entonces la flecha entre u y s_2 también debería ser simétrica, pero cualquier orientación de las flechas restantes resultaría en una superiorización restringida del diamante, o del triángulo del patrón B7, que no está presente en este caso. Si $\overleftrightarrow{vs_1} \in A$ llegaríamos a una situación similar. Al no poder darle orientaciones a los triángulos, se concluye que la flecha entre u y v debe ser simétrica, como se muestra en la Figura 2.26.

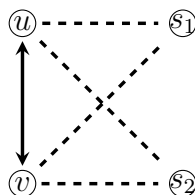
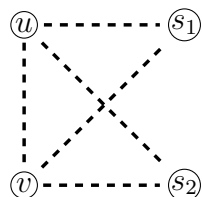
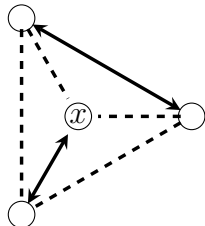


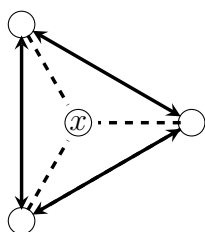
Figura 2.26: La flecha entre u y v es simétrica.

En este momento, y las flechas restantes deben ser asimétricas, pero la única manera de darles dirección sin crear superiorizaciones prohibidas del diamante o de

P_3 es que ambos vértices de K dominen a ambos vértices de S o viceversa. Entonces K es un clan fuerte que domina a S o es dominado por S , por lo que D admite el patrón B7 usando la partición (\emptyset, S, K) o (S, \emptyset, K) dependiendo del caso. En caso de que S sea unitario, la gráfica subyacente de D es completa, y podemos tomar cuatro vértices u, v, w, x que no induzcan \overleftrightarrow{K}_4 , pues D no es una completa biorientada. En cada uno de los triángulos formados por estos cuatro vértices debe haber una o tres flechas simétricas, por lo que en total deberíamos tener al menos dos flechas simétricas. Veamos qué pasa si existieran dos flechas simétricas que no compartieran extremos.



En este caso, todas las demás flechas deben ser asimétricas, pero cualquier orientación que les demos nos dará alguna superiorización prohibida de K_4 o el triángulo de la representación del patrón. por lo que todas las flechas simétricas deben compartir extremos. Para evitar la superiorización de K_3 que tiene dos flechas simétricas, debe haber una biorientación de K_3 en la digráfica $D[u, v, w, x]$.



En este momento, la única manera de completar la digráfica es orientando todas las flechas restantes hacia x o todas desde x . Si tomamos cualquier otro vértice $z \in V$, éste debe ser adyacente a los cuatro primeros, puesto que D es completa, y la única forma de lograr eso sin generar estructuras prohibidas es si z comparte flechas simétricas con los vértices del triángulo y domina a x (cuando x es dominado por los vértices del triángulo) o es dominado por x (cuando x domina a los vértices del triángulo). Esto quiere decir que en x es la única cabeza o la única cola en las flechas asimétricas, por lo que $(V - \{x\}, \{x\})$ es la partición escindible de D que muestra que D admite el patrón B7.

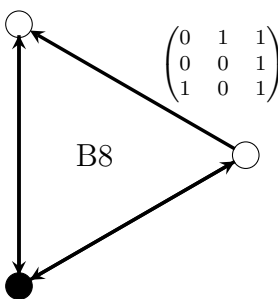
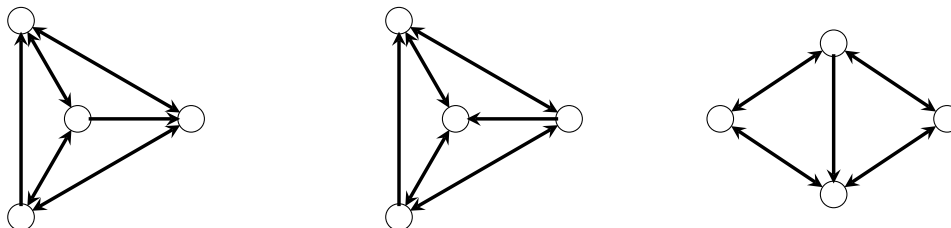


Figura 2.27: Patrón B8 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B8. Para este patrón, las únicas superiorizaciones permitidas de K_3 son la biorientación \overleftrightarrow{K}_3 y la superiorización con exactamente dos flechas simétricas. Por otro lado, se prohíbe la digráfica \overleftrightarrow{C}_4 , así como la siguientes superiorizaciones de K_4 y del diamante.

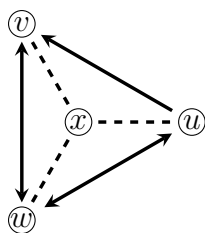


Si ninguna de las digráficas restringidas es subdigráfica inducida de una digráfica D , veamos qué pasa si ningún triángulo de D corresponde al de la Figura 2.27.

Gracias a que D es libre de las digráficas mencionadas en \blacktriangle , sabemos que D es multipartita completa y que cumple las hipótesis del Lema 1. Si D es bipartita y cada parte tiene más de un vértice, haber restringido \overleftrightarrow{C}_4 garantiza que sólo una de las partes domine a la otra. En cambio, si una de las partes es unitaria, sí puede haber flechas simétricas, y en ambos casos, D admitirá el patrón deseado.

Por otro lado, si D no es bipartita, sabemos que cada una de sus flechas pertenece a al menos un triángulo. Así, en caso de que D no contenga al triángulo de la Figura 2.27, estamos garantizando que todas las flechas de D son simétricas. Como $K_1 + \overleftrightarrow{K}_2$ y \overleftrightarrow{C}_4 están prohibidas, D es la biorientación de una gráfica escindible completa con partición (K, S) , por lo que (\emptyset, S, K) es una B8-partición para D .

En caso de que el triángulo de la Figura 2.27 sea subdigráfica inducida de D , podemos pensar que D tiene partición (V_1, V_2, \dots, V_k) para algún $k \geq 3$, que dicho triángulo es inducido por $u \in V_1, v \in V_2, w \in V_3$, y que la flecha asimétrica va de u a v . Observemos que gracias al Lema 1, y a que restringimos cierta superiorización del diamante, el conjunto V_3 no puede tener más vértices además de w . Para concluir, basta demostrar que cualquier otro vértice de $V - (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$ es adyacente a éstos tres vértices mediante flechas simétricas. Sea $x \in V - (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$, la digráfica resultante se muestra a continuación.



Es fácil ver que las flechas entre x y v y entre u y x son simétricas, pues de otra forma el triángulo $D[u, v, x]$ sería una superiorización restringida de K_3 . De igual forma, si la flecha entre w y x es asimétrica, se induce alguna de las superiorizaciones prohibidas de K_4 . Como x se comporta idénticamente al vértice w , deducimos que V_i es unitario, así que si definimos K como $\cup_{i=3}^k V_i$, podremos ver que K es un clan fuerte, y que cada vértice de K es adyacente a todos los de $V - K$ mediante una flecha simétrica, por lo que (V_1, V_2, K) es la B8-partición que buscamos para D .

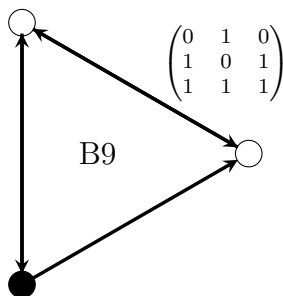
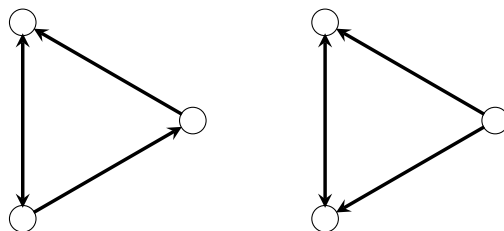
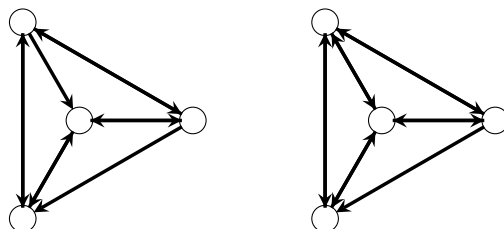


Figura 2.28: Patrón B9 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B9. Para este patrón se prohíbe la orientación de P_3 con dos fuentes y un sumidero. También se obstruyen las siguientes superorientaciones de K_3



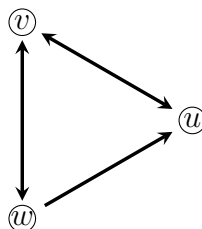
así como ambas orientaciones de la misma gráfica, que de hecho fueron restringidas para los patrones anteriores. Además se prohíben las siguientes superorientaciones de K_4 .



Así como la biorientación de $K_{2,2,1}$.

Una vez más, tomamos una digráfica D en la cual ninguna de las digráficas anteriores sea subdigráfica inducida. Como sucedió en los casos anteriores, las obstrucciones mencionadas en \blacktriangle nos dirán que D es multipartita completa, y podemos pensar que su partición es (V_1, V_2, \dots, V_k) para algún $k \geq 3$.

Caso 1. Supongamos que el triángulo de la Figura 2.28 es inducido por $u \in V_1, v \in V_2, w \in V_3$:



Al haber prohibido la orientación de P_3 mencionada y gracias al Lema 1, sabemos que V_3 es unitario. Si D es tripartita, entonces (V_1, V_2, V_3) es la B9-partición, y en caso de haber más partes en la partición, podemos tomar un vértice $x \in V_i$ para cualquier $i \in \{4, \dots, k\}$ y tener la estructura de la Figura 2.29.

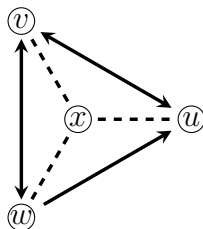
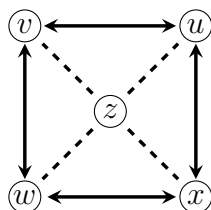


Figura 2.29: $D[u, v, w, x]$ para el Caso 1 del Patrón B9.

Notemos que la flecha entre w y x debe ser simétrica, pues de otra forma el triángulo $D[x, u, w]$ sería una obstrucción mínima. En cambio, si la flecha entre u y x también fuera simétrica, la flecha entre v y x completaría alguna de las superorientaciones prohibidas de K_4 , y esto quiere decir que las flechas \overrightarrow{xu} y \overleftarrow{vx} están en la digráfica. Observemos que si el conjunto V_i del cual tomamos a x tuviera además otro vértice x' , el Lema 1 nos asegura que la digráfica $D[u, x, x']$ será una de las orientaciones prohibidas de P_3 , por lo que V_i es unitario. Así, el conjunto S definido como $\bigcup_{i=3}^k V_i$ es un clan fuerte que domina a V_1 y cada vértice de S comparte una flecha simétrica con todos los vértices de V_2 , por lo que la partición (V_1, V_2, S) es una B9-partición.

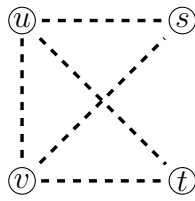
Caso 2. Si el triángulo con exactamente dos flechas simétricas no es subdigráfica inducida de D , veamos que D es escindible completa. Como la única superorientación permitida de C_4 es $\overleftrightarrow{C_4}$, basta ver que ésta no está en D . Supongamos que existen cuatro vértices $u, v \in V_1, w, x \in V_2$ que lo inducen. Como D no es bipartita, podemos tomar un vértice z en otra parte de la partición de D .



Observemos que si todas las flechas restantes fueran asimétricas, se formaría alguna de las superorientaciones restringidas de K_3 , o de P_3 . En cambio, si todas fueran simétricas, se tendría la biorientación de $K_{2,2,1}$. Esto quiere decir que en z inciden flechas tanto simétricas como asimétricas. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que la flecha entre z y u es simétrica. Para evitar las superorientaciones de P_3 que fueron prohibidas en \blacktriangle , la flecha entre z y w también debe ser simétrica, y por último, las flechas restantes ser asimétricas y tener a z como cola.

Sin embargo, esto implica que $D[u, v, z]$ sea el triángulo del patrón B9, pero supusimos que dicho triángulo no era subdigráfica inducida de D , por lo que el vértice z no puede existir. Esto a su vez nos dice que D es libre de $\overleftrightarrow{C_4}$, así que G_D también lo es. Ahora que sabemos esto, pueden pasar dos cosas. Si la gráfica subyacente G_D es completa, tenemos las mismas obstrucciones que en el Caso 1.1 del patrón B5, por

lo que D tiene una partición escindible completa (K, S) en la que el único vértice de S es un sumidero, y K es un clan fuerte. Si el conjunto independiente de la partición escindible tiene más de un vértice, tomamos $u, v \in K$ y $s, t \in S$.

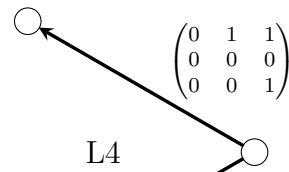
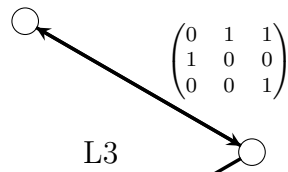
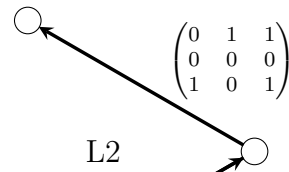
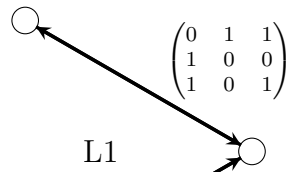


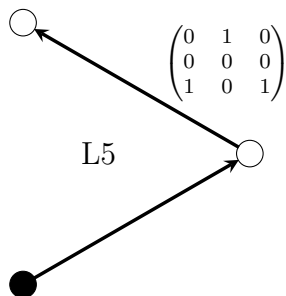
Si la flecha (u, v) es asimétrica, el triángulo $D[u, v, t]$ debe orientarse con las flechas \overleftarrow{ut} y \overrightarrow{tv} , puesto que en este punto de la demostración, ésta es la única superiororientación de K_3 permitida con flechas asimétricas. Bajo el mismo argumento, el triángulo $D[u, v, s]$ debe tener las flechas \overrightarrow{sv} y \overleftarrow{us} , pero si esto sucede, los vértices s, t, v inducen una orientación prohibida de P_3 .

Debido a esto, la flecha entre u y v debe ser simétrica, y para no formar obstrucciones mínimas, las demás flechas deben ir de K hacia S . Por la elección de los vértices, esto significa que K es un clan fuerte que domina a S , por lo que (S, \emptyset, K) es una B9-partición para D .

2.3. Patrones restantes

Por último, los patrones restantes son aquellos cuyos dibujos no tienen forma de triángulo, y tienen exactamente un vértice negro.





Por tener únicamente flechas simétricas, el primer patrón se puede trabajar como si fuera una gráfica. En ese caso, nos fijamos en el complemento del patrón, que se ve como la unión ajena de dos gráficas: una de ellas es una escindible completa y la otra es completa.

Patrón L1. Trabajemos con la gráfica subyacente del complemento del patrón. Para ésta, debemos prohibir $C_4, \overline{P_3 + K_1}, 2K_1 + P_3, 2K_2 + K_1$ y P_4 .

Supongamos que G es una gráfica libre de estas cinco obstrucciones. En caso de ser inconexa, el hecho de no tener a $2K_2 + K_1$ como subgráfica inducida garantiza que si hay más de dos componentes, sólo una de ellas tiene aristas. En este caso, haber prohibido $2K_1 + P_3$ nos dice que la componente conexa con aristas es completa, por lo que G es la unión de una gráfica completa $G[K]$ y una vacía $G[S]$, admitiendo así el complemento del patrón L1 bajo la partición (S, K, \emptyset) .

Si G tiene dos componentes conexas con aristas G_1 y G_2 , cada una de ellas es libre de $K_1 + K_2$. Si G_1 no es completa, tiene una copia de $2K_1$, por lo que G_2 será libre de P_3 , lo que significa que G_2 es completa. Sabemos además que G es libre de C_4 , por lo que G_1 tampoco tiene a C_4 como subgráfica inducida, así que es escindible completa con partición (K, S) . De este modo, (V_{G_2}, K, S) es la $\overline{L1}$ -partición.

En caso de que G sea inconexa, con sólo dos componentes G_1 y G_2 , pero G_1 sea un vértice aislado, debemos verificar que G_2 es completa o escindible completa. Para esto, supongamos que G_2 no es completa. Sea a el único vértice de G_1 , y por consecuencia, el único vértice aislado de G . Como G_2 es conexa pero no completa, existen tres vértice u, v, w que inducen una copia de P_3 en G . Si G_2 sólo tiene estos vértices, entonces es escindible completa, y en caso de tener más vértices, tomamos otro vértice $x \in V_{G_2}$, para tener esquema con el de la Figura 2.30.

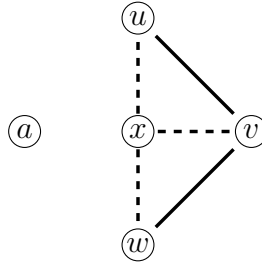
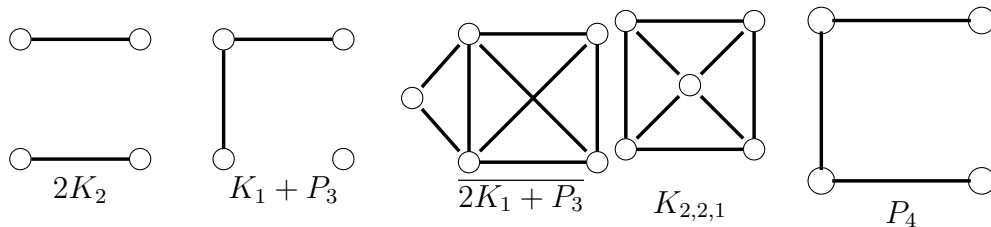


Figura 2.30: Esquema de $G[a, u, v, w, x]$ para un caso en la caracterización del Patrón L1. Las aristas punteadas indican aristas que pueden o no existir en la gráfica.

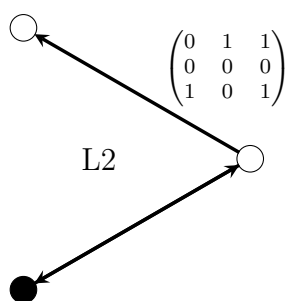
Observemos que x debe ser adyacente a alguno de los tres vértices de G_2 , pues de otra forma tendríamos una copia de $2K_1 + P_3$. Si x fuera adyacente sólo a u o a w , $G[u, v, w, x]$ sería una copia de P_4 , y si fuera adyacente únicamente a u y a w , la gráfica $G[u, v, w, x]$ sería isomorfa a C_4 . En cambio, si x fuera adyacente a v pero sólo a uno de los vértices u o w , tendríamos una copia de $\overline{K_1 + P_3}$. De esta forma, las únicas dos opciones son que x sea adyacente a los tres vértices u, v, w , o que sólo sea adyacente a v . Diremos que un vértice $s \in V_{G_2} - \{u, v, w\}$ es el tipo 1 si es adyacente sólo a v , y del tipo 2 si es adyacente a u, v y a w . Es fácil notar que dos vértices s y t del tipo 1 no pueden ser adyacentes, pues si lo fueran, $G[s, t, u, v]$ sería isomorfa a $\overline{K_1 + P_3}$. Similarmente, si dos vértices s y t del tipo 2 fueran no-adyacentes, entonces $G[s, t, u, w]$ sería una copia de C_4 . Por último, si s fuera del tipo 1, t del tipo 2, y s y t no fueran adyacentes, entonces $G[s, t, u, v]$ sería isomorfa a $\overline{K_1 + P_3}$, por lo que ahora sabemos que los vértices del tipo 2 inducen una gráfica completa $G[K]$, los del tipo 1 una gráfica vacía $G[S]$, y cada uno del tipo 2 es adyacente a todos los del tipo 1, por lo que $(\{a\}, K, S)$ es una $\overline{L1}$ -partición.

Pensemos ahora que G es conexa. Al ser libre de C_4 , basta mostrar que también es libre de $K_1 + K_2$ para demostrar que G es escindible completa. Supongamos por el contrario que existen tres vértices $u, v, w \in V$ que inducen dicha gráfica, como en la ilustración de la izquierda. Como G es conexa, existe una uv -trayectoria T de longitud mínima. Si $\ell(T) > 2$, tenemos una copia de P_4 , lo que contradice las hipótesis. En cambio, si $\ell(T) = 2$, entonces $T = (u, x, v)$ para algún vértice x , pero $D[u, x, v, w]$ isomorfa a P_4 o a $\overline{P_3 + K_1}$.

De esta forma, las obstrucciones mínimas del patrón L1 son las biorientaciones de



Como los cinco patrones L tienen la misma gráfica subyacente, todas las superorientaciones de las gráficas mencionadas serán obstrucciones de los demás patrones, aunque no necesariamente serán mínimas. Una manera de caracterizar los siguientes cuatro patrones es buscar que las gráficas subyacentes de las digráficas en cuestión admitan la versión para gráficas del patrón L1, y para lograr esto basta con que ninguna de las gráficas de la lista anterior sea subgráfica inducida de ellas. Después de lograr esto, sólo faltaría verificar que las flechas estén orientadas de manera correcta. Además, para todos los demás patrones, la digráfica $\overleftrightarrow{2K_2}$ y la orientación de $K_1 + K_2$ son obstrucciones mínimas.



Patrón L2 y su representación gráfica.

Para este patrón restringimos:

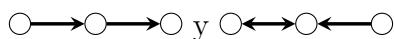
L2.a La orientación de $K_1 + K_2$.

L2.f $\overleftrightarrow{P_4}$

L2.b $\overleftrightarrow{2K_2}$

L2.c Las orientaciones de P_3

L2.g $\overleftrightarrow{C_4}$

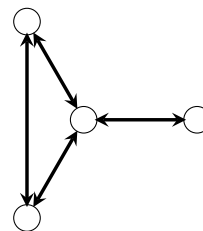
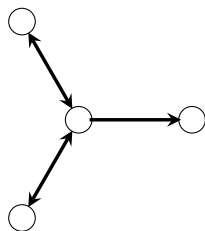


L2.d Cualquier superorientación de K_3 distinta de $\overleftrightarrow{K_3}$.

L2.h $K_1 + \overleftrightarrow{P_3}$

L2.e La siguiente superorientación de $K_{1,3}$:

L2.i La biorientación de $\overline{K_1 + P_3}$:



Llamemos P_{3*} a la superorientación de P_3 que corresponde a la de la representación gráfica el Patrón L2. Para demostrar que estas obstrucciones son suficientes

para caracterizar al patrón, supongamos que cierta digráfica D es libre de estas obstrucciones. Como primer caso, veamos que si D contiene una copia de P_3^* , entonces D admite al patrón L2. Supongamos que dicha copia es inducida por los vértices u, v, w , con (u, v) como flecha simétrica y (v, w) como flecha asimétrica. Si D no tiene más vértices, $(\{u\}, \{v\}, \{w\})$ es la L2-partición buscada, y si sí, podemos tomar un vértice x distinto de estos tres, y la digráfica $D[u, v, w, x]$ se verá como alguna de las siguientes.

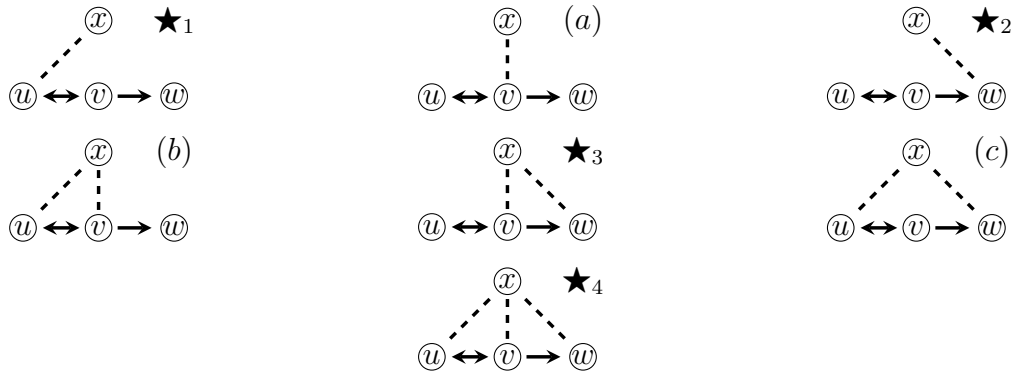


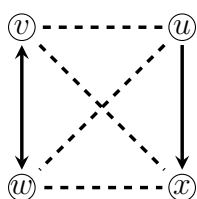
Figura 2.31: Posibles casos para la digráfica $D[u, v, w, x]$ en la caracterización del Patrón L2.

Observemos qué sucede en cada uno de los casos marcados con \star . Para \star_1 , tenemos que $D[x, v, w]$ es la orientación de $K_1 + K_2$. En la digráfica \star_2 podemos notar que si la flecha entre x y w es asimétrica, entonces $D[u, x, w]$ es la orientación de $K_1 + K_2$, pero si es simétrica, entonces $D[x, v, w]$ es una superiororientación restringida de P_3 . Por último, las digráficas \star_3 y \star_4 tienen un triángulo con al menos una flecha asimétrica, por lo que tampoco pueden existir en D . Gracias a esto, podemos fijarnos únicamente en los otros tres casos. Para dar la L2-partición creamos tres conjuntos llamados V_1 , V_2 y V_3 que contengan a los vértices u, v y w respectivamente, y acomodaremos a x en alguno de estos conjuntos según sus adyacencias. En el caso (a) sólo puede suceder que la flecha (v, x) sea asimétrica, por lo que colocaremos a x en V_3 , y definiremos V_3 como el conjunto de vértices que caen en el caso (a). Si dos vértices $s, t \in V_3$ fueran adyacentes, entonces la digráfica $D[s, t, v]$ sería una superiororientación no permitida de K_3 . En el caso (b), las flechas restantes deben ser simétricas, así que colocaremos a x en V_1 , y definiremos V_1 como el conjunto de vértices que caen en el caso (b). Notemos que si dos vértices $s, t \in V_1$ no fueran adyacentes entre sí mediante una flecha simétrica, entonces $D[s, t, v, w]$ tendría una superiororientación de K_3 distinta de $\overleftarrow{K_3}$ o sería la superiororientación prohibida de $K_{1,3}$. En el caso (c), la flecha entre x y w sólo puede ir de x a w , y la flecha entre u y x debe ser simétrica, por lo que colocaremos a x en V_2 , y definiremos V_2 como el conjunto de vértices que caen en el caso (c). De igual forma, si dos vértices $s, t \in V_2$ fueran adyacentes, entonces $D[s, t, w]$ sería una superiororientación prohibida de K_3 .

Estos tres conjuntos nos darán una partición en la que V_1 es un clan fuerte, tanto V_2 como V_3 son independientes, V_2 domina a V_3 , y entre V_1 y V_2 existen todas las

flechas simétricas posibles, por lo que (V_2, V_3, V_1) es una L2-partición para D .

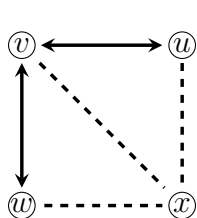
Por otro lado, si D no contiene a P_3^* hay que ver que D es bipartita completa, escindible completa, o la unión ajena de una digráfica completa y una vacía. Para lograrlo, comprobemos que D no puede contener flechas simétricas y asimétricas a la vez. Por el caso en el que estamos, ninguna trayectoria de tres vértices en D puede tener flechas asimétricas y simétricas, así que basta ver que estas flechas no pueden existir al mismo tiempo, aun estas no sean adyacentes. Para esto, tomaremos dos vértices v, w entre los cuales haya una flecha simétrica y otros dos u, x entre los cuales haya una flecha asimétrica.



Si ninguna de las flechas punteadas existiera, $D[v, u, x]$ sería la orientación de $K_1 + K_2$, y si tuviéramos sólo una o dos flechas, alguna de las copias de P_3 sería P_3^* o una obstrucción mínima. Por otro lado, Cuando hay más de dos flechas, u y x pertenecen a un mismo triángulo, lo que también es una contradicción, pues no tenemos triángulos con flechas asimétricas.

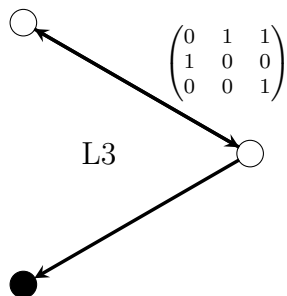
En virtud de lo anterior, sabemos que las flechas simétricas y asimétricas no pueden existir al mismo tiempo. Gracias a esto, podemos asegurar que D es una orientación o una biorientación. Si D no tiene flechas simétricas, entonces su gráfica subyacente G es libre de $K_1 + K_2$ y de K_3 , por lo que es bipartita completa con partición (X, Y) . Por la primera obstrucción mencionada en L2.c, X domina a Y o viceversa, así que (X, Y, \emptyset) o (Y, X, \emptyset) es la L2-partición que buscábamos, según el caso.

Por otro lado, si D no tiene flechas asimétricas y es inconexa, haber prohibido L2.b implica que sólo una de las componentes tiene flechas. Dicha componente es libre de $\overleftrightarrow{P_3}$ por L2.h, por lo que G_D es la unión de una gráfica completa G_1 y una vacía G_2 , así que $(\emptyset, V_{G_2}, V_{G_1})$ es una L2-partición. En caso de ser conexa y no contener a $\overleftrightarrow{P_3}$, D es la biorientación de una completa, y si contiene $\overleftrightarrow{P_3}$, podemos acomodar los demás vértices de la siguiente manera.



Supongamos que dicha copia de $\overleftrightarrow{P_3}$ se forma por los vértices u, v y w , y coloquemos a v en un conjunto V_1 y a u y a w en otro conjunto V_2 . Al tomar cualquier otro vértice x , podemos notar que debido a las obstrucciones L2.f, L2.g, L2.h, y L2.i, sólo puede suceder que x sea adyacente a los tres vértices o únicamente a v . En el primer caso, colocaremos a x en V_1 , y en el segundo en V_2 .

De esta forma, V_1 contiene a todos los vértices que caen en el primer caso, y V_2 a todos los vértices que caen en el segundo caso. Observemos que si dos vértices s, z de V_1 no fueran adyacentes, entonces $D[s, z, u, v]$ es isomorfa a $\overleftrightarrow{C_4}$, lo que contradice las hipótesis, y si dos vértices en s, z de V_2 fueran adyacentes, entonces $D[s, z, u, w]$ sería isomorfa a la biorientación de $\overline{K_1 + P_3}$. Esto quiere decir que V_1 es un clan fuerte, V_2 es un conjunto independiente, D es la biorientación de una digráfica escindible completa, y (V_2, \emptyset, V_1) es una L2-partición.



Patrón L3 y su representación gráfica.

Para este patrón prohibimos:

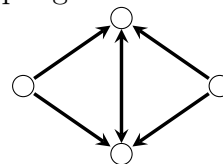
L3.a La orientación de $K_1 + K_2$

L3.b $2K_2$

L3.c Las siguientes superorientaciones de P_3 : $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \leftrightarrow \circ$, $\circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$.

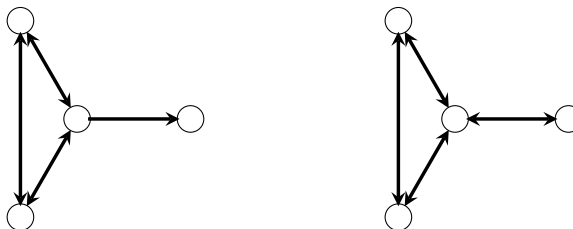
L3.d Cualquier superorientación de K_3 distinta de $\overset{\leftrightarrow}{K_3}$ y de $\begin{matrix} \circ & & \circ \\ \updownarrow & \nearrow & \\ \circ & & \circ \end{matrix}$

L3.e La biorientación del diamante. Vale la pena notar que gracias a L3.c y L3.d,



la única superorientación permitida del diamante es

L3.f Las siguientes superorientaciones de $\overline{K_1 + P_3}$

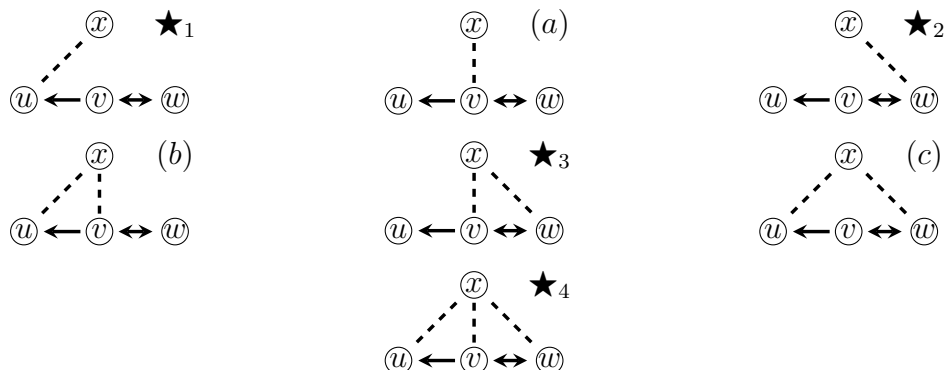


L3.g $\overset{\leftrightarrow}{P_4}$

L3.h $K_1 + \overset{\leftrightarrow}{P_3}$

Supongamos que D es una digráfica libre de estas obstrucciones mínimas y que G es su gráfica subyacente. De nuevo, podemos definir P_3^* como la superorientación de P_3 con una flecha simétrica y un sumidero, y ver que si D contiene una copia de P_3^* , entonces D admite el patrón L3. Para esto, podemos suponer que P_3^* está formada por los vértices u, v y w . Si D sólo tiene estos tres vértices, la partición buscada es

fácil de ver, y si hubiera otro vértice x , podemos suponer que la flecha simétrica es (v, w) y observar qué opciones tiene x en cuanto a sus adyacencias.



Como sucedió con el patrón anterior, demostraremos que los casos marcados con \star inducen siempre una obstrucción, por lo que trabajaremos sólo con los tres restantes. Para la digráfica marcada con \star_1 , si la flecha restante es asimétrica, entonces $D[u, w, x]$ es la orientación de $K_1 + K_2$, y si es simétrica, entonces $D[u, v, x]$ es una superiorización restringida de P_3 . En \star_2 , $D[u, v, x]$ siempre es la orientación de $K_1 + K_2$, mientras que cualquier superiorización que se le dé a las aristas punteadas en \star_3 resultará en una superiorización restringida de K_3 o de $\overline{K_1} + P_3$. Por último, notamos que la única superiorización permitida del diamante es distinta a todas las superiorizaciones posibles de \star_4 , por lo que este caso tampoco puede suceder.

Ahora que sabemos que sólo trabajaremos con tres casos, podemos analizar cada uno de ellos. Para el caso (a), la flecha restante sólo puede ser la flecha simétrica (v, x) . En este caso colocaremos a x en V_3 , y definiremos V_3 como $\{s \in V : s = w \text{ o } s \text{ cae en el caso (a)}\}$. Notemos que si dos vértices de V_3 fueran adyacentes, tendríamos la primera digráfica mostrada en L3.f o una superiorización prohibida de K_3 . Si sucede el caso (b), el triángulo sólo puede orientarse con las flechas (v, x) asimétrica y (u, x) simétrica. En virtud de esto, definiremos el conjunto V_1 como $\{s \in V : s = u \text{ o } s \text{ cae en el caso (b)}\}$. Observemos que si dos vértices $s, t \in V_1$ no fueran adyacentes mediante una flecha simétrica, entonces $D[s, v, t]$ sería una superiorización prohibida de P_3 o de K_3 . Esto último implica que V_1 es un clan fuerte. Por otro lado, en el caso (c), la flecha entre x y u debe ser la flecha asimétrica (x, u) , por lo que la flecha entre x y w será simétrica, y x pertenecerá a V_2 . Si definiremos V_2 como $\{s \in V : s = v \text{ o } s \text{ cae en el caso (c)}\}$, podemos observar que si hubiera dos vértices $s, t \in V_2$ adyacentes, entonces $D[s, t, u]$ sería una superiorización prohibida de K_3 .

De esta forma, los conjuntos V_2 y V_3 son independientes, V_2 domina a V_1 y entre V_2 y V_3 existen todas las flechas simétricas posibles, por lo que la partición (V_1, V_2, V_3) es una L3-partición para D .

Si D no contiene la digráfica P_3^* , tenemos que ver que D es escindible completa, bipartita completa, completa, o la unión de una completa y una vacía. Supongamos primero que todas las flechas de D son simétricas y trabajemos con su gráfica subyacente G . Si G es inconexa, la obstrucción L3.b hará que a lo más una componente tenga flechas, y haber prohibido L3.h implicará que esta componente sea la biorientación de una gráfica completa, por lo que G será la unión de una gráfica completa y una vacía. En caso de ser conexa y tener sólo flechas simétricas, podemos ver que

la ausencia de L3.g implica que $\text{diam}(G) \leq 2$. Si el diámetro es 1 entonces D es la biorientación de una completa, y si $\text{diam}(G) = 2$, podemos tres vértices u, v, w que induzcan P_3 y proceder como sigue.

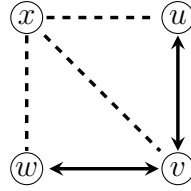


Figura 2.32: La digráfica $\overleftrightarrow{P_3}$ y un vértice x . En este caso, las aristas punteadas corresponden a flechas que no sabemos si existan.

Notemos que si x no es adyacente a vértice alguno en la Figura 2.32, tendremos una copia de $K_1 + \overleftrightarrow{P_3}$, mientras que si es adyacente sólo a u o a w , obtendremos una copia de $\overleftrightarrow{P_4}$. Si x es adyacente sólo a dos de los vértices, y no de ellos es v , entonces obtenemos una copia del complemento de $\overleftrightarrow{K_1 + P_3}$, y si es adyacente a los tres vértices, obtenemos una biorientación del diamante.

De esta forma, los únicos casos permitidos son cuando x es adyacente a ambos extremos de $\overleftrightarrow{P_3}$ o sólo a v . Notemos que si dos vértices s y s' caen en el primer caso, no pueden ser adyacentes entre sí, pues de serlo, $D[s, s', u, w]$ es la biorientación del diamante. Por otro lado, si s y s' son ambos adyacentes sólo a v , tampoco pueden ser adyacentes, pues de serlo, $D[s, s', v, w]$ sería la biorientación de $\overleftrightarrow{K_1 + P_3}$.

Por último, si s es adyacente a ambos extremo de $\overleftrightarrow{P_3}$ y s' sólo es adyacente a v , entonces deben ser adyacentes entre sí, o sucedería que $D[s, s', v, w]$ fuera una copia de P_4 .

De esta manera, podemos ver que D es bipartita con bipartición (V_1, V_2) , así que (\emptyset, V_1, V_2) es una L3-partición para D .

Analicemos el caso en el que D no tiene flechas simétricas para concluir que es una estrella. Al haber prohibido la orientación de $K_1 + K_2$, D es multipartita completa, pero ambas orientaciones de K_3 están restringidas, por lo que D es bipartita completa con bipartición (V_1, V_2) . Como D sólo tiene flechas asimétricas, cumple las hipótesis del Lema 1, así que podemos suponer que V_1 domina a V_2 . Si V_2 tuviera más de un vértice, podríamos tomar $u \in V_1$, $v, w \in V_2$ y notar que $D[u, v, w]$ es una orientación prohibida de P_3 , por lo que en realidad D es una estrella con un sumidero y posiblemente varias fuentes.

Para concluir, falta ver qué sucede si D tiene flechas tanto simétricas como asimétricas. Para esto, tomemos dos vértices u y v tales que (u, v) es una flecha asimétrica, y veamos qué pasa con cualquier otro vértice.

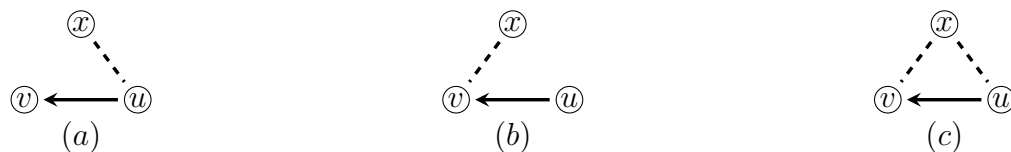
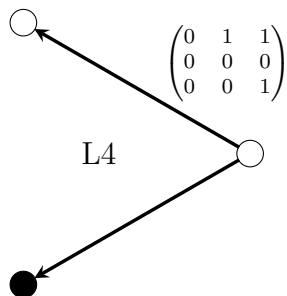


Figura 2.33: la flecha asimétrica de u a v , y cualquier otro vértice x .

El vértice x debe caer en alguno de estos casos para evitar formar la orientación de $K_1 + K_2$, pero el primer caso (a) da una obstrucción mínima o la digráfica P_3^* , que fue analizada en la primera parte de la demostración. Definimos a V'_1 como el conjunto de vértices que se comportan como en la Figura 2.33(b) y V'_2 como el conjunto de vértices que se comportan como en la Figura 2.33(c). Para evitar obstrucciones mínimas, V'_1 domina a v , y para cada $s \in V'_2$ tenemos que (u, s) es asimétrica, pero (s, v) es simétrica. Notemos que si hubiera dos vértices en V'_2 no adyacentes entre sí, éstos y u formarían una orientación prohibida de P_3 , y si la flecha entre estos dos vértices no fuera simétrica, estos dos y v formarían una superiorización de K_3 con sólo dos flechas simétricas. De igual forma, entre cualesquiera $t \in V'_1$ y $s \in V'_2$ debe existir la flecha asimétrica (s, t) , pues de no ser así, $D[s, t, v]$ sería una superiorización prohibida de K_3 o de P_3 , como se muestra en la digráfica (a) de la Figura 2.34. Como última observación, si dos vértices $s, t \in V'_1$ fueran adyacentes, formarían una superiorización prohibida de K_3 como se muestra en la digráfica (b) de la Figura 2.34. Para concluir, definimos V_1 y V_2 como $V'_1 \cup \{v\}$ y $V'_2 \cup \{u\}$ respectivamente, y tenemos que $D[V_1]$ es completa, y V_2 domina a V_1 , y V_2 es independiente, por lo que (V_1, V_2, \emptyset) es una L3-partición para D .



Figura 2.34: Subdigráficas de D con obstrucciones mínimas.



Patrón L4 y su representación gráfica.

Para este patrón se prohíben:

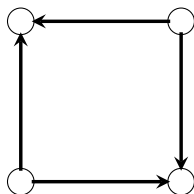
L4.a $\overset{\leftrightarrow}{2K_2}$

L4.b La orientación de $K_1 + K_2$

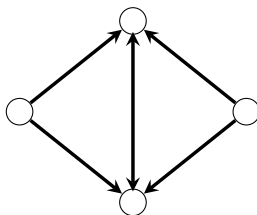
L4.c Todas las superorientaciones de P_3 con más de una flecha simétrica, además de $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$.

L4.d Las superorientaciones de K_3 distintas de $\overset{\leftrightarrow}{K_3}$ y de aquella con una flecha simétrica y una fuente.

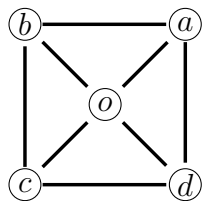
Gracias a estas restricciones, la única superorientación de C_4 permitida es:



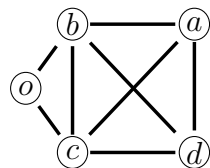
y la única superorientación permitida del diamante es



Sea D una digráfica libre de estas obstrucciones y sea G su gráfica subyacente. Debido a las primeras dos prohibiciones y a haber prohibido $\overset{\leftrightarrow}{P_3}$, G es libre de $2K_2$ y de $K_1 + P_3$. Como las digráficas mencionadas en L4.b y L4.c tampoco están presentes, G tampoco contiene a P_4 como gráfica inducida. Veamos que G es libre de $K_{2,2,1}$ y de $\overline{2K_1 + P_3}$. Para esto, supongamos que existen ciertos vértices que las inducen.



La subgráfica $G[b, a, d, o]$ es un diamante, así que la flecha (o, a) es simétrica. Como $G[b, o, d, c]$ también es un diamante, se sigue que la flecha entre o y c también es simétrica, por lo que $D[o, c, a] \cong \overleftrightarrow{P_3}$, lo que contradice las hipótesis.



Como $G[b, o, c, a]$ y $G[b, o, c, d]$ son diamantes, entonces (a, b) y (d, b) son asimétricas, pero en ese caso el triángulo $D[b, a, d]$ es una obstrucción mínima.

Ahora que sabemos que G también es libre de $K_{2,2,1}$ y de $\overline{2K_1 + P_3}$, podemos notar que gracias a la caracterización del Patrón L1, G tiene una partición (S_1, S_2, K) en la que K es un clan, los conjuntos S_1 y S_2 son independientes, y cada vértice de S_1 es adyacente a todos los de $K \cup S_2$.

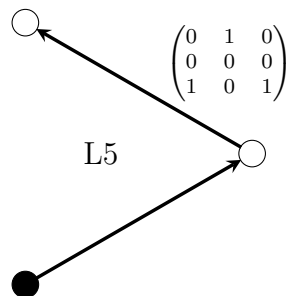
Notemos que si solo K es vacío, entonces G es bipartita completa, y cumple las hipótesis del Lema 1, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que S_1 domina a S_2 , así que (S_1, S_2, K) es una L4-partición para D .

Si únicamente S_1 es vacío, G es la unión de una gráfica completa y una vacía, y como D es libre de la orientación de $K_1 + K_2$, entonces K es un clan fuerte, por lo que (S_1, S_2, K) es la L4-partición que buscábamos.

Si solamente S_2 es vacío, G es escindible completa, y podemos suponer que K no es unitario para no caer en el primer caso. Si S_1 es unitario, puede existir una fuente $v \in K \cup S_1$ que domine a todos los demás vértices de G , y entre cualesquiera dos vértices distintos de v existirá una flecha simétrica. En este caso, definimos S' como $\{v\}$ y K' como $V - \{v\}$ para que (S, K', \emptyset) sea una L4-partición para D . Si S_1 no es unitario, podemos tomar dos vértices $u, v \in K$ y dos vértices $s, t \in S_1$ para notar que $G[u, v, s, t]$ es un diamante, por lo que (u, v) es simétrica en D , y s y t son fuentes. Esto significa que K es un clan fuerte y es dominado por S_1 , así que (S_1, S_2, K) es la L4-partición que buscábamos.

En cambio, si ninguna parte de la partición es vacía, podemos pensar que K no es unitario, pues de serlo, $K \cup S_2$ es independiente, por lo que estamos de nuevo en el primer caso. Notemos que si alguna de las flechas con extremo en S_1 fuera simétrica, podríamos formar una superiorización restringida de P_3 , así que todas deben ser asimétricas. Como K no es unitario, entonces S_1 domina a K , y por lo mismo también domina a S_2 . A su vez, esto nos dice que K es un clan fuerte, así que (S_1, S_2, K) es una L4-partición para D .

Por último, en caso de que dos de las partes sean vacías, G sólo puede ser vacía o completa.



Patrón L5 y su representación gráfica.

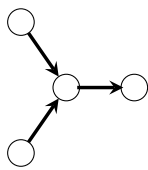
En este caso, las obstrucciones son:

L5.a la orientación de $K_1 + K_2$

L5.b $2\overleftrightarrow{K_2}$

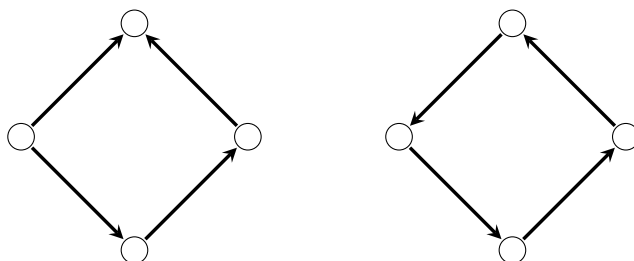
L5.c Las superorientaciones de P_3 con al menos una flecha simétrica.

L5.d Todas las superorientaciones de K_3 distintas de $\overleftrightarrow{K_3}$ y de la superorientación con una flecha simétrica y un sumidero.

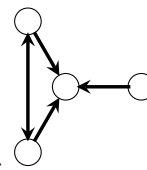


L5.e La orientación de $K_{1,3}$:

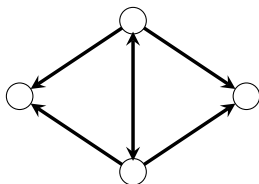
L5.f Restringimos también estas superorientaciones de C_4 :



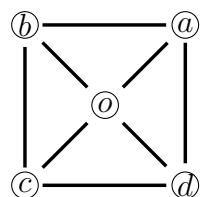
L5.g Por último, restringimos la siguiente superorientación de $\overline{K_1 + P_3}$.



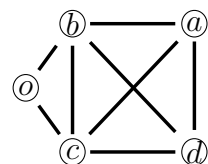
Supongamos que D es una digráfica en la cual ninguna de las estructuras anteriores está presente. Notemos que todas las superorientaciones de P_4 contienen a alguna superorientación restringida de P_3 o a la orientación de $K_1 + K_2$, por lo que G_D es libre de P_4 . De igual forma, por L5.a y L5.b, G_D no contiene a $2K_2$, y por L5.a y L5.c tampoco contiene a $K_1 + P_3$. Además, es importante mencionar que al haber obstruido las digráficas mencionadas en L5.c y en L5.d, la única superorientación permitida del diamante es la siguiente:



Para comenzar, veamos que G_D no contiene copias de $K_{2,2,1}$ ni de $\overline{2K_1 + P_3}$.



Supongamos que existen vértices a, b, c, d, o que cuya subgráfica inducida $G[a, b, c, d, o]$ es isomorfa a $K_{2,2,1}$. En ese caso, la subgráfica $G[b, a, d, o]$ es un diamante, del cual la única superiororientación permitida tiene a (o, a) como flecha simétrica. Como la gráfica $G[b, o, d, c]$ también es un diamante, se sigue que (o, c) también es simétrica, por lo que $D[o, c, a]$ es isomorfa a $\overleftarrow{P_3}$, lo que contradice las hipótesis.



Por otro lado, si los vértices a, b, c, d, o formaran una copia de $\overline{2K_1 + P_3}$, las gráficas $G[b, o, c, a]$ y $G[b, o, c, d]$ serían diamantes, y así las flechas (b, a) y (b, d) serían asimétricas, pero en ese caso el triángulo $D[b, a, d]$ sería una obstrucción mínima.

Ahora sabemos que el conjunto de vértices de G_D admite una M -partición para la versión para gráficas del patrón L1, lo que significa que (S_1, S_2, K) es una partición en la que S_1 y S_2 son independientes, K es un clan, y cada vértice de S_1 es adyacente a todos los vértices de $K \cup S_2$. En este punto, sólo falta verificar que en D , las flechas vayan como lo indica el dibujo del patrón L5, y para eso es conveniente dividir la demostración por casos:

Si solo el conjunto S_1 es vacío, entonces G es la unión ajena de una gráfica completa $G[K]$ y una vacía $G[S_2]$. como D es libre de la orientación de $K_1 + K_2$, K es un clan fuerte, así que (\emptyset, S_2, K) es una L5-partición para D .

Si únicamente K es vacío, G es bipartita completa con bipartición (S_1, S_2) . Notemos que si ambos conjuntos tienen más de un vértice, entonces necesariamente uno domina al otro mediante flechas asimétricas, pues de otra forma tendríamos una superiororientación restringida de C_4 . En caso de que solo uno de ellos sea unitario, podemos suponer que es S_1 , y observamos que para evitar la orientación prohibida de $K_{1,3}$, S_1 es dominado por a lo más un vértice de S_2 , pero domina a todos los demás. También podemos notar que todas las flechas en cuestión deben ser asimétricas. Nombrando x al vértice que domina a S_1 , que podemos redefinir K como $\{x\}$ y $S'_2 = S_2 - \{x\}$, para que de este modo, (S_1, S'_2, K) sea una L5-partición para D .

Por otro lado, si solo S_2 es vacío, G es escindible completa. En caso de que S_1 sea unitario, G será completa, así que puede existir un único sumidero x , y entre cualesquiera dos vértices distintos de x existe una flecha simétrica. Cuando esto sucede $(\{x\}, \emptyset, V - \{x\})$ es una L5-partición para D , y si dicho sumidero no existe, entonces $(\emptyset, \emptyset, K)$ es una L5-partición. Si S_1 no es unitario, podemos pensar que K tampoco lo es para evitar el caso en el que G es bipartita completa. De ser así, al tomar cualesquiera vértices $u, v \in K$ y $s, t \in S_1$ podemos observar que estos inducen un diamante, por lo que K es un clan fuerte que domina a S_1 mediante flechas asimétricas, así que (\emptyset, S_1, K) es una L5-partición para D .

Por último, veamos qué sucede si ninguna de las partes es vacía. Podemos suponer que K tiene al menos dos vértices, pues si fuera unitaria, G sería bipartita completa. Como D es libre de la orientación de $K_1 + K_2$, entonces K es un clan fuerte, y para evitar las superorientaciones prohibidas de P_3 , debe suceder que todas las flechas con extremos en S_1 sean asimétricas. Esto también nos dice que K domina a S_1 , y para evitar la última de las obstrucciones mínimas, S_1 domina a S_2 . De esta manera, sabemos que (S_1, S_2, K) es una L5-partición para D .

Como sucedió para el Patrón L4, en caso de que más de un conjunto sea vacío, la gráfica en cuestión será completa o vacía, por lo que de la misma forma podemos encontrar una L5-partición.

Capítulo 3

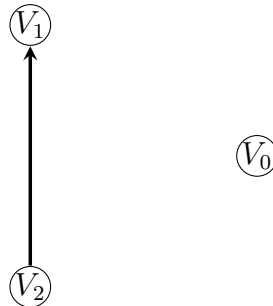
Necesidad y Minimalidad

Como se mencionó anteriormente, para terminar de caracterizar un patrón M , es necesario constatar que las digráficas propuestas como obstrucciones realmente sean obstrucciones, y que cada subdigráfica inducida de estas admita una M -partición. Ambas demostraciones se harán para cada patrón en este capítulo, y de igual forma que en el anterior, los patrones se acomodarán bajo características similares.

3.1. Patrones sin clanes

El patrón 2 corresponde a la matriz:

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Cuyas obstrucciones propuestas son:

2.1 $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$

2.2 $\overset{\leftarrow}{\circ} \overset{\rightarrow}{\circ}$

2.3 todas las orientaciones de K_3

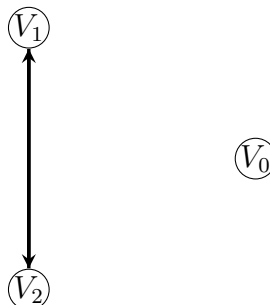
2.4 La siguiente orientación de P_4 : $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$

Ninguna de estas digráficas admite una M -partición para el patrón 2 porque todas ellas tienen al menos un vértice que no es fuente ni sumidero. Por otro lado, si tomamos cualquiera de las primeras tres obstrucciones y le quitamos un vértice, lo que resta es una digráfica bipartita completa con a lo más una flecha, así que estas tres son mínimas. Para la cuarta obstrucción, remover cualquier vértice de los extremos

nos deja una digráfica bipartita completa, y remover cualquier vértice del centro nos deja una digráfica idéntica a la ilustración del Patrón 2.

El patrón 3 es la matriz:

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Cuyas obstrucciones propuestas en el capítulo anterior fueron:

3.1 la orientación de K_2 .

3.2 \overleftrightarrow{K}_3 .

3.3 \overleftrightarrow{P}_4

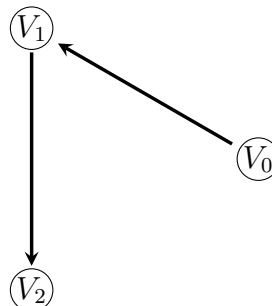
3.4 $\overleftrightarrow{2K}_2$

De estas, sólo la orientación de K_2 tiene flechas asimétricas, pero podemos observar que el patrón no admite ninguna, pero si quitamos un vértice, obtenemos K_1 , que admite cualquier patrón. Las otras digráficas no son bipartitas completas, ni vacías, ni uniones de estas, por lo que tampoco admiten el patrón 3.

Por otro lado, si quitamos un vértice a \overleftrightarrow{K}_3 , obtenemos \overleftrightarrow{K}_2 , que es la biorientación de una gráfica bipartita completa, y si quitamos un vértice terminal de \overleftrightarrow{P}_4 , obtenemos \overleftrightarrow{P}_3 , que también es la biorientación de una gráfica bipartita completa. Observemos que si quitamos un vértice de $\overleftrightarrow{2K}_2$ o un vértice intermedio de \overleftrightarrow{P}_4 , obtenemos la digráfica del dibujo del patrón 3.

Para el Patrón 5, procedemos de la siguiente manera:

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

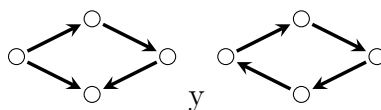


y las obstrucciones mínimas propuestas para dicho patrón fueron las siguientes.

5.1 Cualquier orientación de K_3

5.2 $\overset{\leftrightarrow}{K_2}$

5.3 La orientación de $K_1 + K_2$



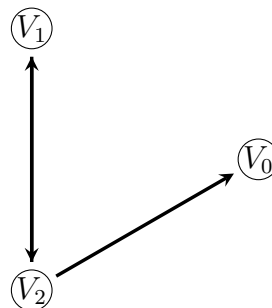
5.4 Las siguientes orientaciones de C_4 :

Como el patrón admite sólo digráficas bipartitas completas sin flechas simétricas, sabemos que 5.1, 5.2, y 5.3 no pueden admitir una partición para dicho patrón. Por otro lado, si quisiéramos encontrar una partición para cualquiera de las orientaciones de C_4 mencionadas, forzosamente dos vértices no adyacentes deberían pertenecer a un mismo conjunto independiente. Esto siempre genera un problema, pues la relación entre estos dos vértices es distinta siempre para al menos uno de los restantes.

Para mostrar minimalidad, sabemos que al remover algún vértice de cualquier orientación de K_3 obtenemos la orientación de una gráfica bipartita completa. Al remover algún vértice de $\overset{\leftrightarrow}{K_2}$ obtenemos K_1 , y al quitar cualquier vértice de la orientación de $K_1 + K_2$ obtenemos, de nuevo, la orientación de una gráfica bipartita completa. Por otro lado, al eliminar un vértice de cualquiera de las orientaciones de C_4 mencionadas, podemos volver a obtener la orientación de una gráfica bipartita completa, u obtener una digráfica que se asemeje al dibujo del Patrón 5.

El patrón 6 es la matriz:

$$6. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



y las obstrucciones propuestas fueron:

6.1 $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ y $\circ \rightarrow \circ \leftrightarrow \circ$.

6.2 La orientación y la biorientación de $K_1 + K_2$.

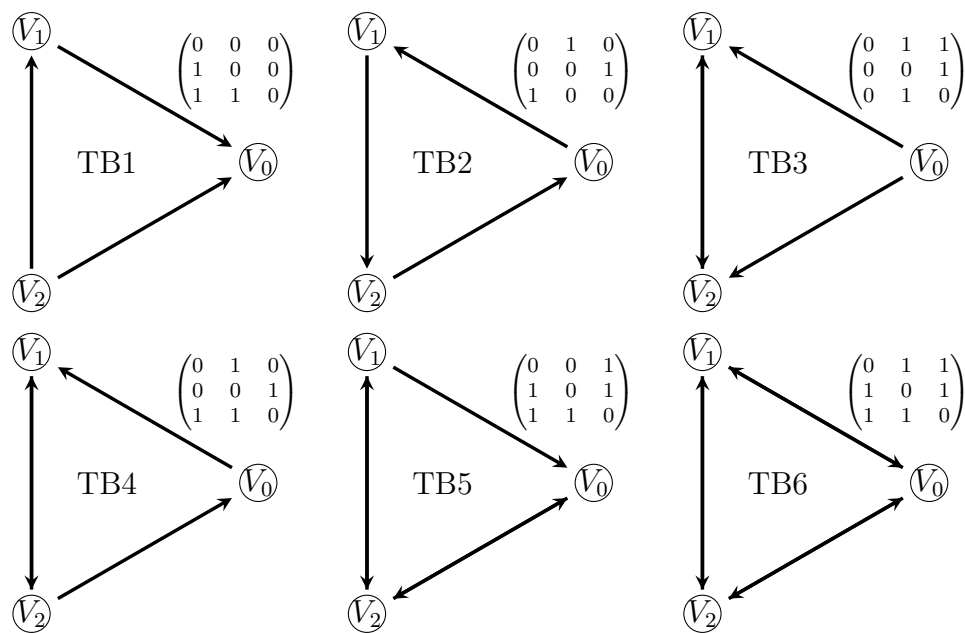
6.3 Todas las superiororientaciones de K_3 .

Como se puede observar en el dibujo del patrón, la gráfica subyacente de cualquier gráfica que admite a dicho patrón es bipartita completa, por lo que 6.2 y 6.3 no admiten dicho patrón. Por otro lado, si quisiéramos dar una partición para las digráficas mencionadas en 6.1, los vértices no adyacentes entre sí tendrían que estar en distintos conjuntos, pues su relación con el vértice restante es distinta. El problema con esto es que los sentidos de las flechas hacen que las partes de la partición no se relacionen como deberían.

Ahora bien, las superorientaciones de K_3 y de $K_1 + K_2$ son mínimas porque al quitar un vértice, siempre obtenemos una superorientación conveniente de una gráfica bipartita completa o una gráfica vacía, mientras que las digráficas mencionadas en 6.1 son mínimas por la misma razón.

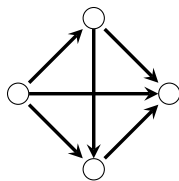
3.1.1. Triángulos

Como se observa en los dibujos de todos estos patrones, las digráficas que representan son tripartitas completas, por lo que la orientación de $P_3 \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ y ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$ son obstrucciones para todas ellas, aunque no necesariamente son mínimas.



Patrón TB1. En este caso, las digráficas propuestas como obstrucciones mínimas fueron

1. $\overset{\leftarrow}{\rightarrow} K_2$
2. la orientación cíclica de K_3

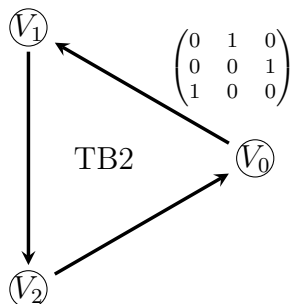


3. La siguiente orientación de K_4 :

Al observar que en el dibujo del Patrón TB1 todas las flechas son asimétricas, es claro que $\overset{\leftarrow}{\rightarrow} K_2$ debe ser una obstrucción, y que la única orientación permitida de K_3 debe ser la que no es fuertemente conexa. Por otro lado, una digráfica que admita

una partición para el patrón TB1 debe ser tripartita completa, por lo que todas las superorientaciones de K_4 están restringidas, en particular la mencionada en la lista.

Para convencernos de la minimalidad de la orientación prohibida de K_4 , basta notar que al remover cualquier vértice, obtenemos la orientación de K_3 que se asemeja al dibujo del patrón en cuestión, y para convencernos de la minimalidad de la orientación cíclica de K_3 , sólo necesitamos ver que al quitar cualquier vértice, el resultado es la orientación de K_2 , que evidentemente admite la partición deseada.



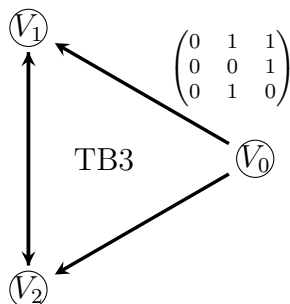
Patrón TB2 y su representación gráfica.

Patrón TB2. En este caso, sólo fue necesario restringir:

1. $\overleftrightarrow{K_2}$.
2. la orientación de K_3 que no es fuertemente conexas.

La primera obstrucción se debe a que no hay flechas simétricas en el patrón, y la segunda se debe a que, como se observa en el dibujo, cualquier triángulo en una digráfica que admita el patrón debe ser cíclico.

La minimalidad de estas se debe a que al quitar un vértice de cada una, obtenemos K_1 y la orientación de K_2 respectivamente.



Patrón TB3 y su representación gráfica.

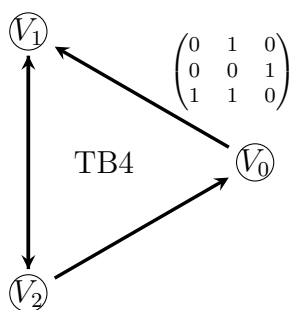
Patrón TB3. En este caso se restringen:

1. las superorientaciones de P_3 siguientes: $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$

2. cualquier superorientación de K_3 distinta a la del dibujo del Patrón TB3.

En este caso, las superorientaciones de P_3 son obstrucciones porque al querer encontrar una partición para ellas, observamos que los vértices no adyacentes se relacionan de manera distinta con el vértice intermedio, por lo que no pueden ir en el mismo conjunto independiente, y de este modo no pueden aceptar una partición para el Patrón TB3. Por otro lado, podemos ver en el dibujo si una digráfica admite el patrón, todos sus triángulos deben verse como los del dibujo mismo, por lo que cualquier otro triángulo está restringido.

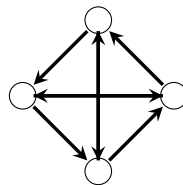
Para demostrar la minimalidad de los triángulos prohibidos, podemos observar que al quitar cualquier vértice obtenemos una superorientación de K_2 , que en cualquier caso admite el patrón. Asimismo, si quitamos cualquier vértice en un extremo de las superorientaciones de P_3 restringidas, obtenemos de nuevo una superorientación de K_2 , pero si quitamos el vértice central, obtenemos una gráfica vacía de dos vértices, que evidentemente admite el patrón.



Patrón TB4 y su representación gráfica.

Patrón TB4. En este caso se prohíben:

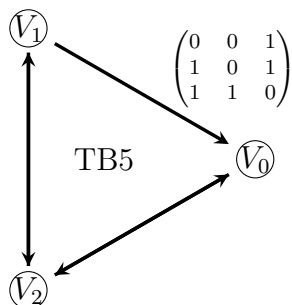
1. las superorientaciones de P_3 siguientes: $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$
2. cualquier superorientación de K_3 distinta a la del dibujo del Patrón TB4.



3. La siguiente superorientación de K_4 :

En este caso, podemos ver que las superorientaciones de P_3 son obstrucciones mínimas usando el mismo argumento que con el patrón anterior, y como se ve en el dibujo del Patrón TB4, todos los triángulos de una digráfica que admita el patrón deben verse como los del dibujo mismo. Por su parte, la superorientación mencionada de K_4 es una obstrucción porque las digráficas que queremos caracterizar con tripartitas completas.

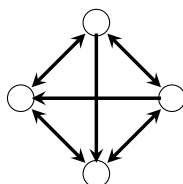
Para comprobar la minimalidad de las superorientaciones de K_3 , sólo necesitamos remover cualquier vértice de cada una y notar que el resultado es una superorientación de K_2 , que siempre admitirá el patrón TB4. En cambio, para comprobar la minimalidad de la superorientación de K_4 , basta notar que todos sus triángulos son idénticos a los del dibujo del Patrón TB4.



Patrón TB5 y su representación gráfica.

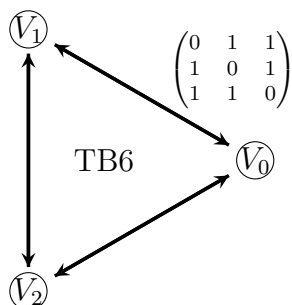
Patrón TB5. En este caso se prohíben:

1. las superorientaciones de P_3 mencionadas en el Patrón TB3
2. cualquier orientación de K_3 distinta a la del dibujo del Patrón TB5.



3. La siguiente superorientación de K_4 :

Los argumentos que muestran que estas digráficas en realidad son obstrucciones mínimas son idénticos a los que se exponen en el patrón anterior para cada digráfica correspondiente.



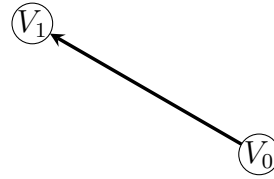
Patrón TB6 y su representación gráfica.

Patrón TB6. Es fácil notar que este patrón caracteriza a las biorientaciones de las digráficas tripartitas completas, por lo que sus sus obstrucciones mínimas corresponden a la orientación de K_2 , además de a las biorientaciones de K_4 y de $K_1 + K_2$.

3.2. Obstrucciones con clanes

El primer patrón analizado en esta sección es N2, que corresponde a

$$\text{N2. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



y cuyas obstrucciones son:

N2.1 Las superorientaciones de P_3 : $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ y $\overleftarrow{P_3}$.

N2.2 Cualquier superorientación de K_3 distinta de $\overleftarrow{K_3}$.

N2.3 La orientación y la biorientación de $2K_2$.

N2.4 La siguiente orientación de P_4 : $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$.

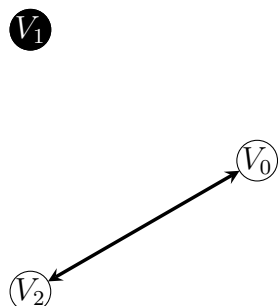
N2.5 La orientación de $K_2 + 2K_1$.

En el dibujo, podemos observar que las únicas superorientaciones permitidas de P_3 son aquellas que no son mencionadas en N2.1, y que los únicos triángulos permitidos son de la forma $\overleftarrow{K_3}$. De igual forma, tanto la orientación como la biorientación de K_2 tienen dos componentes con el mismo tipo de flechas, lo que no está permitido por el patrón. Por su parte, la digráfica mencionada en N2.4 no es bipartita completa ni completa, por lo que no está permitida, y la orientación de $K_2 + 2K_1$ cumple que tiene una componente bipartita completa, pero además tiene dos vértices no adyacentes, por lo que no puede admitir una partición para el patrón N2.

En cuanto a la minimalidad, podemos observar que si eliminamos cualquier vértice de alguna de las digráficas mencionadas en N2.1, obtenemos una digráfica vacía, o cualquier superorientación de K_2 , y en todos los casos, las digráficas restantes admiten el patrón. Por otro lado, al eliminar cualquier vértice de las digráficas mencionadas en N2.2, volvemos a obtener una superorientación de K_2 , y si quitamos un vértice de las digráficas de N2.3, obtenemos una superorientación de $K_1 + K_2$, y podemos dar la partición deseada. Esto mismo sucede al remover un vértice intermedio de la orientación de P_4 mencionada en N2.4, y al remover un vértice en sus extremos, obtenemos una bipartita completa. Para finalizar, podemos ver que al quitar cualquier vértice de la última restricción, obtendremos $\overleftarrow{K_3}$ o la orientación de $K_1 + K_2$, y en ambos casos, el resultado admite al patrón N2.

Para el patrón N3 tenemos a matriz:

$$\text{N3. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



y como se vio con anterioridad, la orientación de K_2 es una obstrucción mínima. A continuación, se mostrará que las demás obstrucciones mínimas son las biorientaciones de las siguientes gráficas.

N3.1 P_4

N3.4 $2K_3$

N3.2 $2K_2 + K_1$

N3.5 $\overline{K_1 + P_3}$.

N3.3 $2K_1 + P_3$

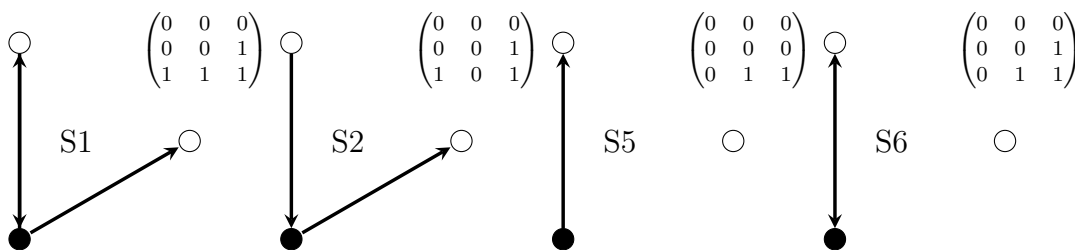
N3.6 El diamante.

De estas gráficas, P_4 , el diamante, y $\overline{K_1 + P_3}$ son conexas, pero no son ni bipartitas completas ni completas, por lo que no admiten al patrón N3. Las otras tres gráficas son inconexas, pero sus conjuntos de vértices no pueden partirse en dos componentes que cumplan que uno de ellos sea un clan y el otro induzca una gráfica bipartita completa.

Si a la gráfica P_4 le quitamos un vértice, obtenemos P_3 o $K_1 + K_2$, y en ambos podemos encontrar una N3-partición para el resultado, Haciendo lo mismo con $2K_2 + K_1$ podemos obtener $\overline{K_2} + K_2$ o $2K_2$, en ambos casos, la gráfica resultante es la unión ajena de una bipartita completa y una completa, y algo similar ocurre con $2K_3$ y con $2K_1 + P_3$. En cuanto a $\overline{K_1 + P_3}$, si quitamos un vértice y la gráfica sigue siendo conexa, entonces obtenemos una bipartita completa o una completa, mientras que si desconectamos la gráfica, el resultado es una gráfica idéntica a la del dibujo del patrón N3. Por último, si quitamos un vértice del diamante, sólo podemos obtener K_3 o P_3 , por lo que todas las obstrucciones son mínimas.

3.2.1. Gráficas escindibles completas

Recordemos que los patrones analizados en esta categoría fueron los siguientes.



Para el **Patrón S1**, restringimos las siguientes digráficas.

S1.1 ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$,

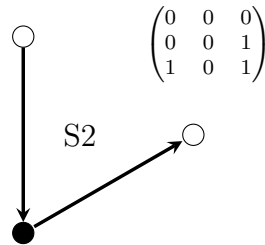
S1.2 las superorientaciones de P_3 : $\circ \rightarrow \circ \leftrightarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$ y $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$.

S1.3 $\overset{\leftrightarrow}{C_4}$

S1.4 Las superorientaciones de K_3 distintas de $\overset{\leftrightarrow}{K_3}$ y de la superorientación con una flecha simétrica y un sumidero.

Como las digráficas que admitan el patrón S1 serán escindibles completas, ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$ son obstrucciones mínimas, mientras que las superorientaciones mencionadas de P_3 sí son escindibles completas, pero sus flechas no tienen la orientación adecuada. Sabemos también que C_4 es una obstrucción mínima para una gráfica escindible completa, por lo que $\overset{\leftrightarrow}{C_4}$ será una obstrucción para el patrón S1. Además de esto, podemos observar que para este patrón, los únicos triángulos permitidos son $\overset{\leftrightarrow}{K_3}$ y aquel con una flecha simétrica y un sumidero.

Para comprobar la minimalidad de las superorientaciones mencionadas de P_3 , podemos ver que al quitar cualquier vértice obtenemos una gráfica vacía o cualquier orientación de K_2 , y esto último también sucede con las superorientaciones restringidas de K_3 . De igual forma, al quitar cualquier vértice de $\overset{\leftrightarrow}{C_4}$ obtenemos $\overset{\leftrightarrow}{P_3}$, que es la biorientación de una escindible completa, por lo que todas las obstrucciones mencionadas en efecto son mínimas.



Patrón S2 y su representación gráfica.

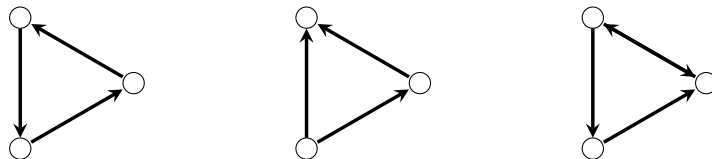
Para el **patrón S2** restringimos:

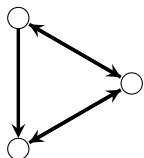
S2.1 Las superorientaciones de $K_1 + K_2$.

S2.2 Las siguientes superorientaciones de P_3 : $\circ \leftrightarrow \circ \leftrightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$.

S2.3 Cualquier orientación de C_4

S2.4 Las siguientes superorientaciones de K_3 :



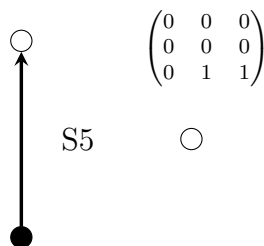


S2.5 Las siguientes superorientaciones de K_4 :



Al aceptar sólo ciertas digráficas escindibles completas con flechas tanto simétricas como asimétricas, ambas superorientaciones de $K_1 + K_2$ obstrucciones mínimas, y lo mismo sucede para las orientaciones de C_4 . A pesar de que las superorientaciones restringidas de P_3 son escindibles completas, éstas no tienen la orientación adecuada para admitir el patrón S2. Por otro lado, podemos notar que cualquier triángulo que admita al patrón S2 debe ser \overleftrightarrow{K}_3 , o uno con una flecha simétrica y una fuente, o bien uno con una flecha simétrica y un sumidero. Por último, notemos cualesquiera extremos de dos flechas simétricas distintas deben estar relacionados por una flecha simétrica. Como esto no sucede en las digráficas mencionadas en el inciso S2.5, éstas tampoco admiten el patrón S2.

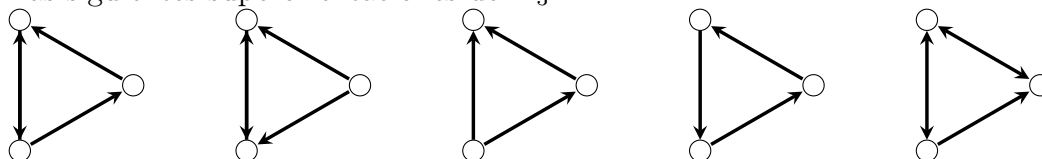
Para ver que las superorientaciones de P_3 mencionadas son mínimas, vemos que quitando cualquier vértice obtenemos una gráfica vacía o una superorientación de K_2 , y esto último también sucede con las superorientaciones de K_3 . Al remover un vértice de cualquier orientación de C_4 obtenemos una orientación permitida de P_3 , y por su parte, todos los triángulos de las digráficas mencionadas en S2.5 son superorientaciones permitidas de C_3 , por lo que todas las obstrucciones mencionadas son mínimas.



Patrón S5 y su representación gráfica

Para el **patrón S5**, se restringieron las siguientes digráficas:

S5.1 Las siguientes superorientaciones de K_3 :

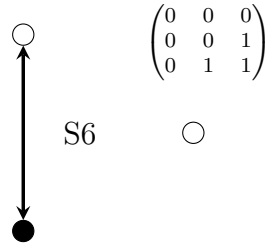


S5.2 Las superorientaciones de P_3 distintas de $\circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$.

S5.3 cualquier superorientación de $2K_2$.

Notemos que cualquier triángulo permitido por el patrón debe ser una biorientación o bien tener una flecha simétrica y un sumidero, por lo que todos los demás están restringidos, y de igual forma, si encontramos una superorientación de P_3 en una digráfica que admita el patrón, esta debe tomar un vértice del clan y dos de la parte independiente que no consta de vértices aislados, por lo que no puede verse distinta de $\circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$. Por último, el patrón nos deja ver que sólo una de las componentes puede tener flechas, por lo que cualquier superorientación de $2K_2$ está prohibida.

Para verificar la minimalidad de las obstrucciones, notemos que al eliminar cualquier vértice de alguna de las superorientaciones P_3 restringidas obtenemos una gráfica vacía o una superorientación de K_2 , y al eliminar cualquier vértice de alguno de los triángulos obtenemos de nuevo una superorientación de K_2 . Para terminar, notamos que al quitar cualquier vértice de una superorientación de $2K_2$, obtenemos una superorientación de $K_1 + K_2$, y en ambos casos podemos hallar la partición deseada. Esto nos indica que todas las obstrucciones son mínimas.



Patrón S6 y su representación gráfica.

Para finalizar esta subsección, procedemos a verificar que todas las digráficas propuestas como obstrucciones del **patrón S6** en realidad son obstrucciones mínimas. estas digráficas corresponden a las biorientaciones de las siguientes gráficas.

- S6.1 la orientación de K_2 .
- S6.2 \overleftrightarrow{C}_4
- S6.3 \overleftrightarrow{P}_4
- S6.4 $\overleftrightarrow{2K_2}$
- S6.5 la biorientación de $\overline{K_1 + P_3}$

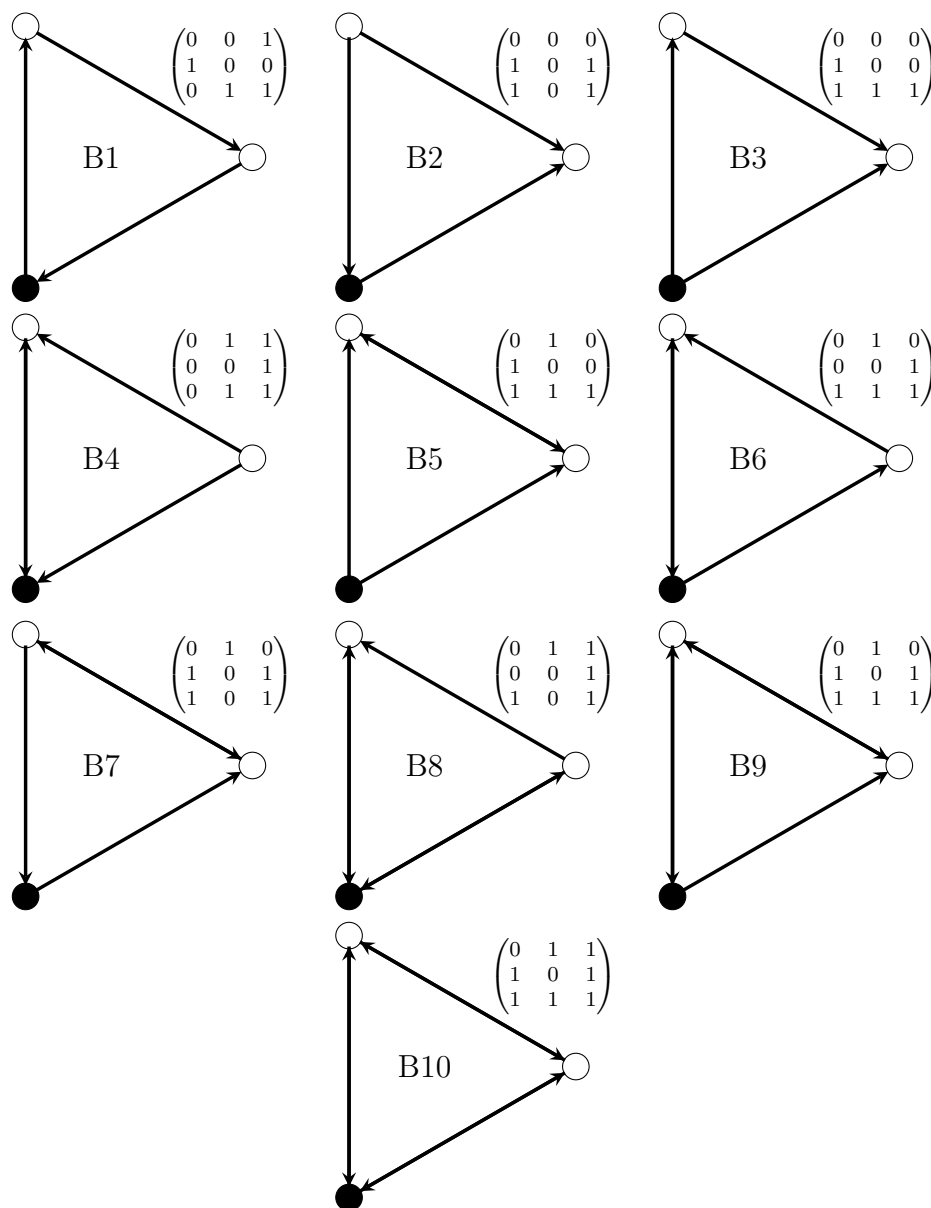
Como se observa en el dibujo del patrón, si una digráfica admite el patrón S6, su única componente con flechas es la biorientación de una gráfica escindible completa. Ninguna de las digráficas mencionadas en la lista es la biorientación de una escindible completa, por lo que ninguna admite el patrón S6.

Por otro lado, si removemos un vértice de \overleftrightarrow{C}_4 o un vértice extremo de \overleftrightarrow{P}_4 obtenemos \overleftrightarrow{P}_3 , que es escindible completa, y si removemos un vértice intermedio de \overleftrightarrow{P}_4 o

cualquier vértice de $2\overleftrightarrow{K}_2$ obtenemos la biorientación de $K_1 + K_2$, que es idéntica a la representación gráfica del patrón S6. Esto mismo sucede si desconectamos la biororientación de $\overline{K_1 + P_3}$ quitando un vértice, aunque podemos obtener $\overleftrightarrow{P_3}$ o $\overleftrightarrow{K_3}$ quitando cualquier otro vértice, y en todos los casos, el resultado admite una S6-partición, por lo que las obstrucciones son mínimas.

3.2.2. Triángulos

Posteriormente, se analizan los patrones cuyo dibujo se ve como un triángulo con un único vértice negro.



Para analizar los patrones en el mismo orden que en el capítulo anterior, iniciaremos con el **patrón B10**. En este caso, las digráficas propuestas como obstrucciones mínimas fueron las siguientes.

B10.1 la orientación de K_2 .

B10.3 $K_{2,2,2}^{\leftrightarrow}$.

B10.2 la biorientación de $K_1 + K_2$.

Es fácil notar que las primeras dos digráficas mencionadas son obstrucciones mínimas para el patrón, ya éste admite únicamente biorientaciones de gráficas multipartitas. Por su parte, la última digráfica mencionada es tripartita completa, pero sus tres partes tienen más de un vértice, por lo que no es posible encontrar una B10-partición. A pesar de eso, al quitar cualquier vértice de esta digráfica, obtenemos $K_{2,2,1}^{\leftrightarrow}$, que sí admite el patrón deseado.

Como se menciona en el capítulo anterior, todos los demás patrones tienen como obstrucciones las superorientaciones de $K_1 + K_2$, y las superorientaciones de P_3 correspondientes a $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \rightarrow \circ \leftrightarrow \circ$ y $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$, por lo que éstas no serán mencionadas en las listas de obstrucciones de cada caso. Procedamos ahora con los demás patrones.

Primeros tres patrones

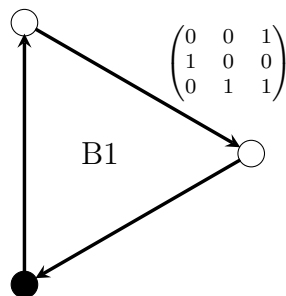
Para los patrones B1, B2 y B3 se restringió la digráfica P_3^{\leftrightarrow} , además de las siguientes superorientaciones de K_3 :



Como se aprecia en los dibujos de los patrones, no existen flechas simétricas entre las partes de las particiones, por lo que P_3^{\leftrightarrow} no puede estar en una digráfica que admita alguno de estos tres patrones. Además de esto, ningún triángulo distinto de K_3^{\leftrightarrow} puede tener más de una flecha simétrica, y los triángulos con exactamente una flecha simétrica tienen siempre una fuente o un sumidero, por lo que las superorientaciones de K_3 mencionadas en efecto son obstrucciones.

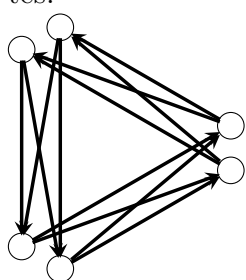
Por otro lado, su minimalidad se debe a que siempre que eliminemos un vértice de ellas obtendremos una superorientación de K_2 , y podemos encontrar una partición para cualquiera de los tres patrones. La minimalidad de la biorientación de P_3 se debe a que al quitar un vértice podemos obtener K_2^{\leftrightarrow} o $\overline{K_2}$, y de igual manera podemos encontrar una partición para dichas digráficas.

Para cada uno de los primeros tres patrones, el resto de las obstrucciones mínimas se muestra a continuación.

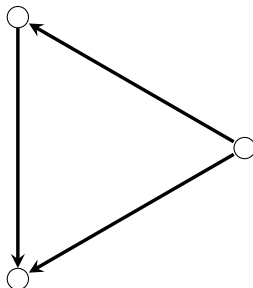


Patrón B1 con su respectiva representación gráfica.

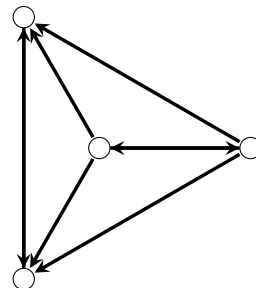
Patrón B1. Para este patrón, las demás obstrucciones propuestas fueron las siguientes.



B1a

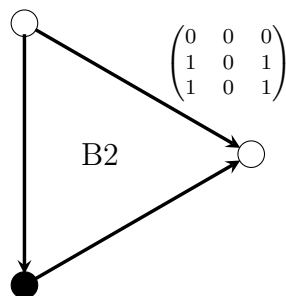


B1b



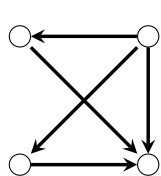
B1c

La digráfica B1a es tripartita completa, pero sus tres partes tienen más de un vértice, por lo que no es posible encontrar una B1-partición para ella, pero si quitamos cualquier vértice, obtenemos una orientación de $K_{2,2,1}$ para la que sí existe una B1-partición. Por otro lado, el dibujo del patrón B1 nos hace ver que la única orientación de K_3 permitida es distinta a B1b, aunque quitando cualquier vértice obtenemos una orientación de K_2 . El dibujo también nos indica que cualesquiera dos flechas simétricas son adyacentes entre sí, por lo que B1c tampoco puede admitir el patrón, sin embargo, al eliminar cualquier vértice, obtenemos una digráfica $\overleftrightarrow{K_2}$ cuyos vértices dominan (o son dominados) a un tercer vértice, y es posible exhibir una B1-partición, por lo que las tres digráficas son obstrucciones mínimas.

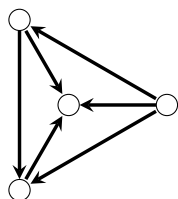


Patrón B2 y su respectiva representación gráfica.

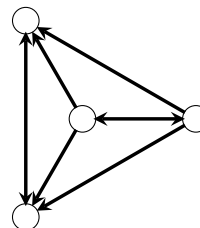
Patrón B2. En este caso, se obstruyó la orientación cíclica de K_3 , además de las digráficas siguientes.



B2.1



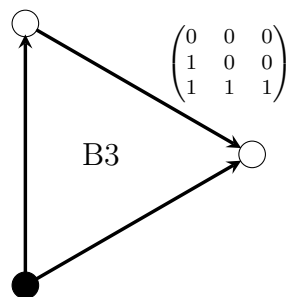
B2.2



B2.3

Si quisieramos dar una B2-partición para la digráfica B2.1, los vértices independientes deberían estar en un mismo conjunto, pero eso colocaría a los dos restatantes en un clan, lo que nos da un problema, pues la flecha entre ellos no es simétrica. Por su parte, la digráfica B2.2 es 4-partita completa, pero no tiene flechas simétricas, por lo que no podemos un clan fuerte en ella, y de este modo no existe una B2-partición, y el argumento correspondiente a B2.3 es el idéntico al de B1c, tanto para ver que es obstrucción como para comprobar su minimalidad.

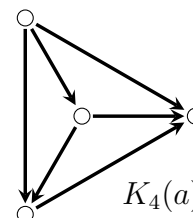
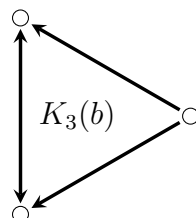
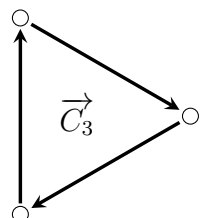
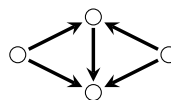
La minimalidad de B2.1 surge de notar que si quitamos un vértice, sólo podemos obtener una orientación de P_3 o la orientación de K_3 que se ve como el dibujo del patrón B2, mientras que la minimalidad de B2.2 se obtiene viendo que todos sus triángulos son como los del dibujo del patrón.



Patrón B3 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B3. Para este patrón fueron propuestas las digráficas siguientes como obstrucciones mínimas:

- la siguiente orientación del diamante:
- Las superiororientaciones de K_3 y K_4 siguientes:

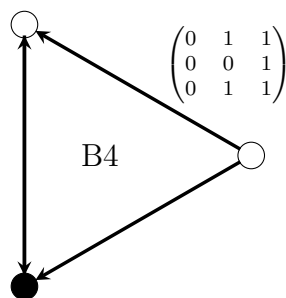


Observemos que si quisiéramos encontrar una B3-partición para la orientación mencionada del diamante, los vértices no adyacentes deberían estar en la misma parte, y los otros dos en partes distintas cada uno. Si observamos el dibujo del patrón, podemos ver que la parte correspondiente a un clan fuerte en este caso es independiente, por lo que dicha partición no existe. Por otro lado, el dibujo del patrón nos hace ver que la única orientación permitida de K_3 es distinta a la digráfica \vec{C}_3 , por lo que esta tampoco admite una B3-partición, y en caso de tener una superiorización con una flecha simétrica, sus extremos deberían dominar al vértice restante, por lo que $K_3(b)$ tampoco admite una B3-partición. Finalmente, si la digráfica $K_4(a)$ admitiera una B3-partición, entonces dos de sus vértices deberían estar conectados mediante una flecha simétrica, pero sabemos que este no es el caso.

Notemos que al quitar cualquier vértice de $K_4(a)$ obtenemos un triángulo idéntico al del dibujo del patrón, y si hacemos lo mismo con la orientación del diamante podemos obtener dicho triángulo o una orientación de P_3 para la cual podemos obtener una B3-partición. Por su parte, las minimalidades de \vec{C}_3 y de $K_3(b)$ son fáciles de ver, por lo que todas las obstrucciones mencionadas son mínimas.

Patrones restantes

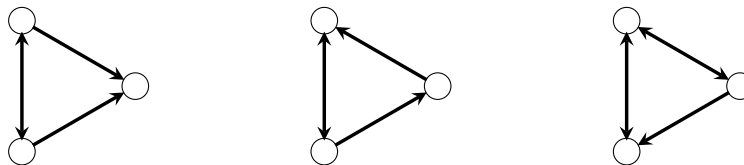
En caso de los otros seis patrones, es fácil ver que ambas orientaciones de K_3 son obstrucciones mínimas, pues en los dibujos de dichos patrones se observa que ningún triángulo admitido puede tener todas sus flechas asimétricas. Sin más observaciones que hacer, iniciemos con los últimos seis patrones en forma de triángulo.



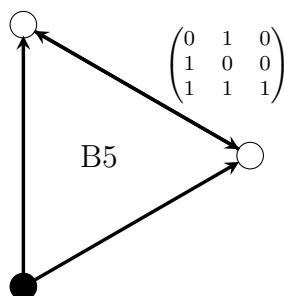
Patrón B4 y su respectiva representación gráfica.

Para este patrón se restringieron, además de las digráficas generales, las siguientes estructuras:

- \overleftrightarrow{C}_4
- Las siguientes superiorizaciones de K_3 :

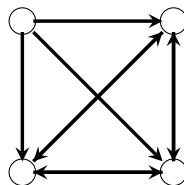


Observemos que en una digráfica que admita el patrón B4, todas las flechas simétricas están contenidas en la biorientación de una gráfica escindible completa, por lo que $\overleftrightarrow{C_4}$ es una obstrucción mínima. Por otro lado, cualquier triángulo debe ser la biorientación de K_3 o el triángulo que aparece en el dibujo del patrón, así que las demás superorientaciones, y entre ellas las mencionadas en la lista, serían obstrucciones mínimas.

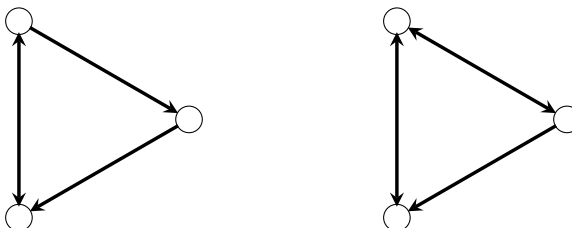


Patrón B5 y su respectiva representación gráfica.

Para este patrón se restringió la orientación de P_3 $\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$, la biorientación del diamante, la siguiente superorientación de K_4 :



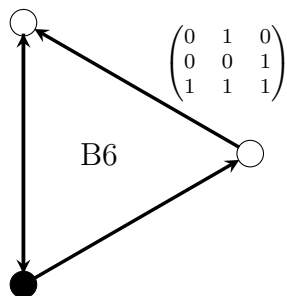
y las siguientes superorientaciones de K_3 :



La representación gráfica del patrón nos indica que la única orientación permitida de P_3 es la inversa de la mencionada, y que si tomamos vértices entre los cuáles existen sólo flechas simétricas, estos deberían formar una bipartita completa o un clan, pero no pueden formar un diamante. En cuanto a la superorientación mencionada de K_4 ,

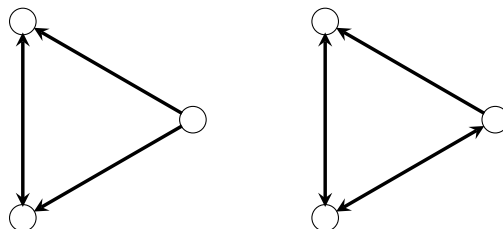
podemos notar que a pesar de que tres de sus vértices forman un clan, el vértice restante los domina, lo que nos impide dar una B4-partición para esta digráfica. Por otro lado, las únicas superorientaciones de K_3 permitidas con flechas simétricas son la que aparece en el dibujo del patrón y su inversa, pero ninguna de las dos que fueron propuestas como obstrucciones.

Como las minimalidades de las superorientaciones mencionadas de K_3 y P_3 son sencillas de ver, nos enfocaremos en las dos restantes. Notemos que si quitamos un vértice de la biorientación del diamante, podemos obtener $\overleftrightarrow{K_3}$ o $\overleftrightarrow{P_3}$, y ambos resultados admiten una B5-partición. En cambio, si quitamos un vértice de la orientación restringida de K_4 podemos obtener $\overleftrightarrow{K_3}$ o el triángulo del dibujo del patrón, por lo que esta obstrucción también es mínima.

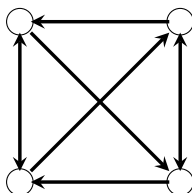


Patrón B6 y su respectiva representación matricial.

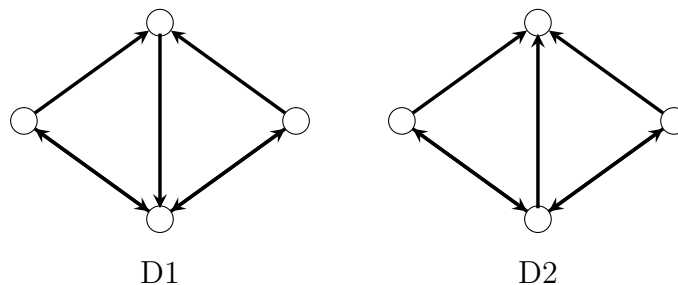
Patrón B6. Las digráficas propuestas como obstrucciones mínimas para este caso, además de las generales, son las siguientes. La digráfica $\overleftrightarrow{C_4}$, las siguientes superorientaciones de K_3 :



La siguiente superorientación de K_4 :

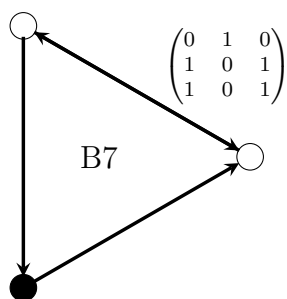


y las siguientes superorientaciones del diamante:



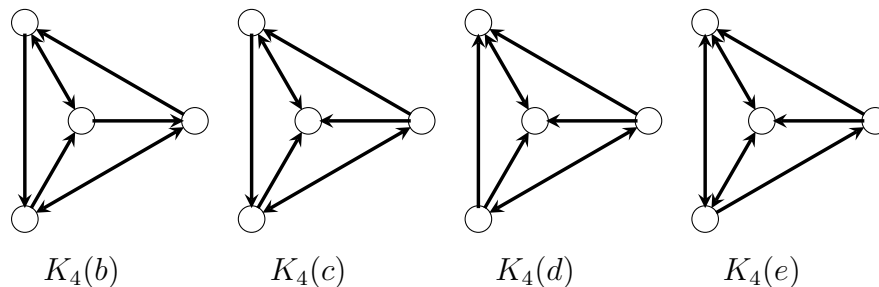
Del dibujo podemos observar que las flechas simétricas están contenidas en la biorientación de una gráfica escidible completa, por lo que $\overleftrightarrow{C_4}$ es una obstrucción mínima, y notamos que todos los triángulos permitidos distintos de $\overleftrightarrow{K_3}$ tienen una única flecha simétrica, pero no tienen fuentes. Si quisiéramos encontrar una B6-partición para la superorientación de K_4 enlistada, deberíamos meter extremos de una misma flecha simétrica a un mismo conjunto, pero gracias a la orientación de las demás flechas, los demás vértices no pueden acomodarse. De igual forma, en las superorientaciones del diamante, los vértices independientes deben ir en un mismo conjunto, pero al hacer esto, las flechas nos impiden encontrar una orientación adecuada para dichos conjuntos.

Analicemos ahora las minimalidades de las últimas tres obstrucciones. Podemos ver que todos los triángulos de la superorientación de K_4 son idénticos al de la representación gráfica del patrón B6, por lo que esta es mínima. De igual manera, si quitáramos un vértice de alguna de las superorientaciones del diamante restringidas, obtenemos un triángulo que admite el patrón o una superorientación de P_3 que también lo admite.

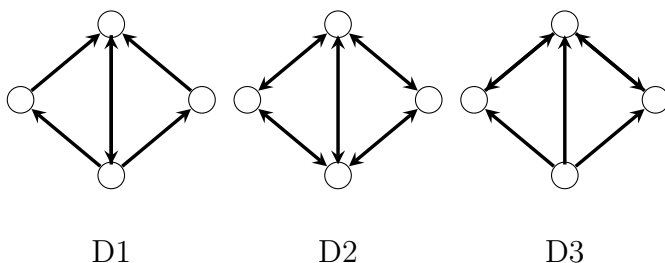


Patrón B7 y su respectiva representación matricial.

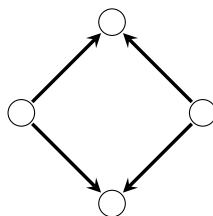
Patrón B7. Para este patrón prohibimos la superorientación de K_3 con dos flechas simétricas. De K_4 restringimos las siguientes superorientaciones y sus inversas:



También restringimos estas superiororientaciones del diamante, así como sus inversas:



por último, se prohíbe la siguiente orientación de C_4 :

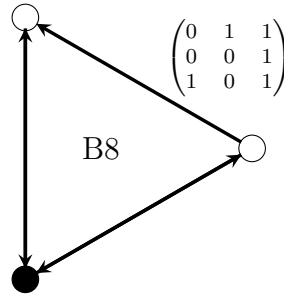


Si quisiéramos encontrar una B7-partición para las primeras dos superiororientaciones de K_4 mencionadas, dos extremos de una misma flecha simétrica deberían estar en un mismo conjunto. En ambos casos existe un tercer vértice para el cual las relaciones con estos dos primeros es distinta, por lo que no podemos colocar a este último vértice en conjunto alguno. Si buscáramos la partición para $K_4(d)$, de nuevo colocaríamos dos extremos de una misma flecha simétrica en un mismo conjunto, pero esto hace que los dos vértices restantes estén relacionados de la misma forma con los primeros dos, por lo que la orientación de la partición no puede alcanzarse. Para $K_4(e)$ es necesario colocar tres de los vértices en el clan, pero de ser así, notamos que el vértice restante no es fuente ni sumidero con respecto a los otros tres, por lo que no podemos colocarlo en conjunto alguno.

Por otro lado, para encontrar una partición para alguno de los diamantes, debemos colocar los dos vértices independientes en un mismo conjunto. En el diamante D1, esto significa que los dos extremos de la flecha simétrica deben ir en conjuntos separados, pero de esta manera obtenemos una orientación distinta a la del triángulo de la representación gráfica del patrón. En el diamante D2, tenemos la biorientación de una gráfica escindible completa, pero el dibujo del patrón nos hace ver que para dicha digráfica no existe una B7-partición. En el diamante D3, volvemos a obtener un triángulo distinto al del dibujo del patrón.

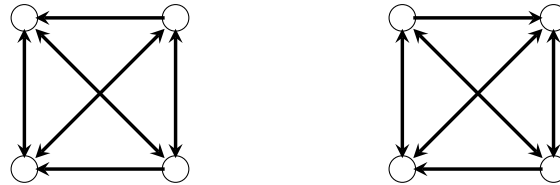
Por otro lado, la orientación mencionada de C_4 no admite el patrón ya que éste no admite dos conjuntos independientes no unitarios entre los cuales existan flechas asimétricas.

Las superorientaciones de K_4 son obstrucciones mínimas ya que todos sus triángulos están permitidos, y la superorientación de C_4 es mínima ya que todas sus superorientaciones de P_3 inducidas están permitidas. las superorientaciones del diamante son mínimas por ambas razones.



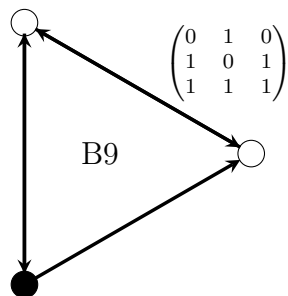
Patrón B8 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B8. Para este patrón se prohibieron todas las superorientaciones de K_3 distintas de $\overleftrightarrow{K_3}$ y de la superorientación con exactamente dos flechas simétricas. Se prohibió además la digráfica $\overleftrightarrow{C_4}$, así como las siguientes superorientaciones de K_4 :



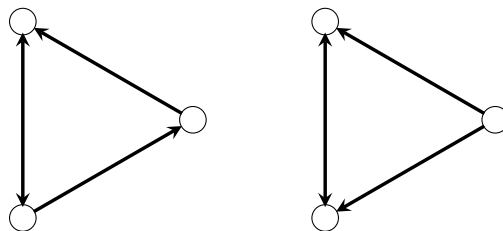
Gracias a la representación gráfica del patrón, podemos notar que ningún triángulo con menos de dos flechas admite este patrón, y también vemos que entre los conjuntos independientes no puede haber flechas simétricas, por lo que $\overleftrightarrow{C_4}$ también es una obstrucción. Por otro lado, si quisiéramos dar una B8-partición para alguna de las superorientaciones mencionadas de K_4 , los extremos de alguna de las flechas simétricas deberían estar en un mismo conjunto. Esto último siempre nos dará problemas, pues las relaciones con los demás vértices son en sentidos distintos.

La minimalidad de $\overleftrightarrow{C_4}$ se debe a que al quitar cualquier vértice obtenemos $\overleftrightarrow{P_3}$, y esta digráfica sí admite el patrón B8, y la minimalidad de las superorientaciones de K_4 se debe a que todos sus triángulos están permitidos.

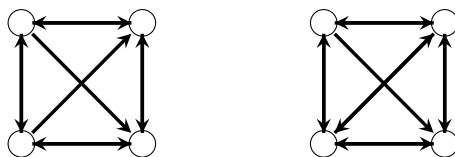


Patrón B9 y su respectiva representación gráfica.

Patrón B9. Para este patrón se prohibió la orientación de P_3 con dos fuentes y un sumidero. También se prohibieron las siguientes superorientaciones de K_3 :



la siguiente superorientaciones de K_4 :



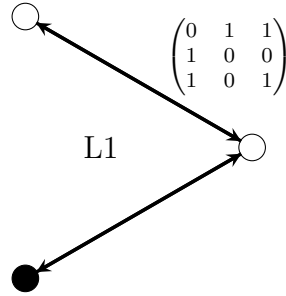
y la biorientación de $K_{2,2,1}$.

De nuevo, gracias al dibujo podemos notar que ni la orientación de P_3 ni los triángulos mencionados aceptan el patrón B9. Por otro lado, si quisiéramos dar una B9-partición para alguna de las superorientaciones de K_4 , los extremos de alguna de las flechas simétricas deberían estar en un mismo conjunto, y de igual manera que con el patrón anterior, esto nos da un problema porque la relación con los vértices restantes no siempre es la misma. Por su parte, la biorientación de $K_{2,2,1}$ no es bipartita completa ni escindible completa, por lo que no puede acomodarse en la parte del patrón que contiene sólo flechas simétricas.

Comprobemos ahora la minimalidad de las últimas tres obstrucciones. Las superorientaciones mencionadas de K_4 tienen como triángulos únicamente a aquellos permitidos, mientras que si quitamos cualquier vértice de $K_{2,2,1}$ podemos obtener \overleftrightarrow{C}_4 , o la biorientación del diamante, y en ambos casos es posible encontrar una B9-partición, por lo que todas las obstrucciones son mínimas.

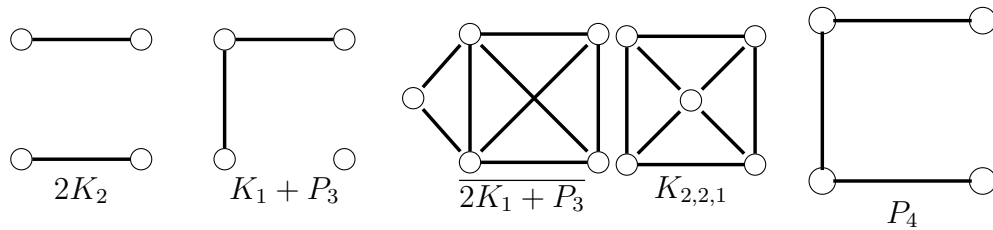
3.3. Patrones restantes

Por último, exhibiremos por qué las digráficas mencionadas en los patrones L son obstrucciones mínimas.



Patrón L1 y su representación gráfica.

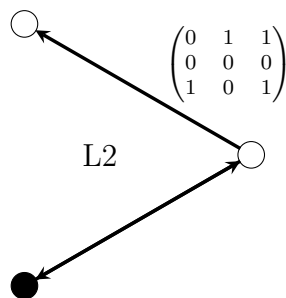
Patrón L1. las digráficas propuestas como obstrucciones mínimas para este patrón son la orientación de K_2 y las biorientaciones de las siguientes gráficas.



Como podemos observar en la representación del patrón, para cualesquiera dos flechas simétricas existe al menos otra flecha que une dos de sus extremos, por lo que $\overleftrightarrow{2K_2}$ no puede admitir el patrón. De igual forma, si quisiéramos encontrar una L1-partición para la biorientación $\overleftrightarrow{K_1 + P_3}$, necesitaríamos colocar los dos extremos de la subdigráfica $\overleftrightarrow{P_3}$ en el mismo conjunto independiente, pero esto nos da un problema con el vértice aislado. Por su parte, si quisiéramos encontrar dicha partición para la biorientación de $\overleftrightarrow{2K_1 + P_3}$, deberíamos incluir todos los vértices de alguno de los triángulos en el clan. Si elegimos uno de los triángulos de la subdigráfica $\overleftrightarrow{K_4}$, el vértice que no pertenece a $\overleftrightarrow{K_4}$ no puede ser acomodado en alguno de los conjuntos, y si elegimos el triángulo que contiene a dicho vértice, este vértice no será adyacente a dos de los demás vértices, por lo que no puede pertenecer al clan. Para el caso de la biorientación $\overleftrightarrow{K_{2,2,1}}$, podemos ver que los vértices adyacentes de la subdigráfica inducida $\overleftrightarrow{C_4}$ deberían ir en dos conjuntos distintos, pero esto hace que el vértice restante tampoco pueda ser acomodado. Por último, para la digráfica $\overleftrightarrow{P_4}$, podemos ver que al intentar dar una L1-partición, debemos colocar un extremo y un vértice intermedio en un mismo conjunto, pero en este caso, no tener flecha alguna entre los extremos hará que los conjuntos independientes no se dominen entre sí.

Ahora comprobemos la minimalidad de estas obstrucciones. Si quitamos cualquier vértice de $\overleftrightarrow{2K_2}$ obtenemos la biorientación de $K_1 + K_2$, y podemos encontrar

una partición para el resultado. Si quitamos un vértice de la biorientación de $K_1 + P_3$ obtenemos $\overleftarrow{P_3}$, $K_1 + \overleftarrow{K_2}$ o $\overleftarrow{K_3}$, así que esta obstrucción también es mínima. Al remover cualquier vértice de la biorientación de $\overleftarrow{2K_1 + P_3}$ podemos obtener $\overleftarrow{K_4}$, la biorientación del diamante, o la biorientación de $\overleftarrow{K_1 + P_3}$, y al remover un vértice de $\overleftarrow{P_4}$, podemos obtener las biorientaciones de $K_1 + K_2$ o de P_3 , por lo que todas las obstrucciones son mínimas.



Patrón L2 y su representación gráfica.

Patrón L2. Para este patrón fueron restringidas las siguientes digráficas.

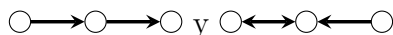
L2.a La orientación de $K_1 + K_2$.

L2.f $\overleftarrow{P_4}$

L2.b $\overleftarrow{2K_2}$

L2.g $\overleftarrow{C_4}$

L2.c Las orientaciones de P_3

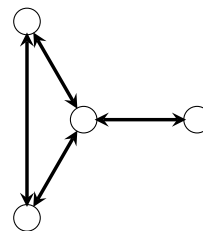
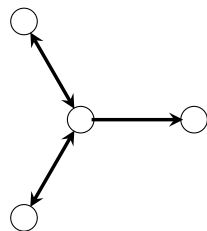


L2.d Cualquier superiorización de K_3 distinta de $\overleftarrow{K_3}$.

L2.h $K_1 + \overleftarrow{P_3}$

L2.e La siguiente superiorización de $K_{1,3}$:

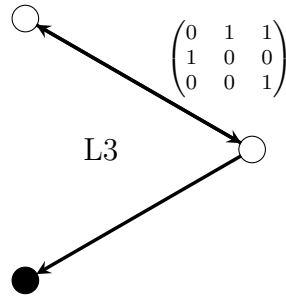
L2.i La biorientación de $\overleftarrow{K_1 + P_3}$:



Consideremos una digráfica D que con un L2-partición (S_1, S_2, K) y veamos que es libre de estas digráficas. Si D tiene flechas asimétricas, sabemos que las colas de estas flechas están en S_1 , por lo que en realidad dichos vértices dominan a todos los vértices de D , así que la orientación de $K_1 + K_2$ no está permitida. Para el caso de la superiorización de $K_{1,3}$, esto quiere decir que el vértice del centro está en S_1 , pero de ser así, hay dos vértices en K no adyacentes, por lo que esta superiorización de

$K_{1,3}$ está prohibida. De igual manera, podemos notar que las flechas simétricas están contenidas en la digráfica escindible completa $D[K, S_1]$, por lo que $2\overleftrightarrow{K}_2$ tampoco está permitida. Podemos observar además que las flechas asimétricas de D pertenecen a la digráfica bipartita completa $D[S_1, S_2]$, por lo que la orientación mencionada de P_3 está prohibida. Además, la superorientación de P_3 con una flecha simétrica está prohibida gracias a la orientación de la flecha asimétrica. Sabemos también que todos los triángulos de D estarán en la subdigráfica escindible completa, por lo que cualquier triángulo debe estar formado por flechas simétricas, y como ninguna de las digráficas $\overleftrightarrow{P}_4, \overleftrightarrow{C}_4, K_1 + \overleftrightarrow{P}_3$ ni la biorientación de $\overline{K_1 + P_3}$ son escindibles completas, entonces ninguna de ellas puede ser subdigráfica de D .

La minimalidad de las últimas cuatro digráficas mencionadas se debe a que todas sus subdigráficas inducidas que resultan de remover un solo vértice son biorientaciones de escindibles completas o uniones ajenas de biorientaciones de gráficas completas con gráficas vacías, y lo mismo sucede para $2\overleftrightarrow{K}_2$. Si quitamos un vértice de la superorientación mencionada de $K_{1,3}$ obtenemos una gráfica vacía o una superorientación permitida de P_3 , por lo que ésta también es mínima, y las superorientaciones de P_3 cumplen que al eliminar un vértice de cada una de ellas podemos obtener digráfica vacía o una alguna superorientación de K_2 . Por último, la orientación de $K_1 + K_2$ es mínima porque al eliminar un vértice de ella obtenemos una digráfica vacía o una bipartita completa.



Patrón L3 y su representación gráfica.

Para este patrón se propusieron las siguientes digráficas como obstrucciones mínimas:

L3.a La orientación de $K_1 + K_2$

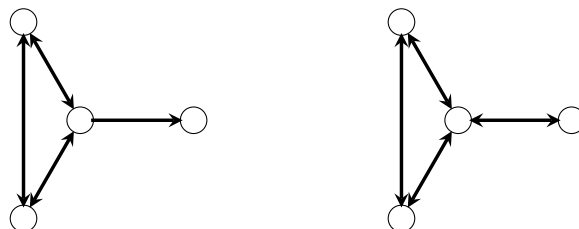
L3.b $2\overleftrightarrow{K}_2$

L3.c Las siguientes superorientaciones de P_3 : $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ, \circ \rightarrow \circ \leftrightarrow \circ, \circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ$.

L3.d Cualquier superorientación de K_3 distinta de \overleftrightarrow{K}_3 y de aquella con una flecha simétrica y una fuente.

L3.e La biorientación del diamante.

L3.f Las siguientes superiororientaciones de $\overline{K_1 + P_3}$

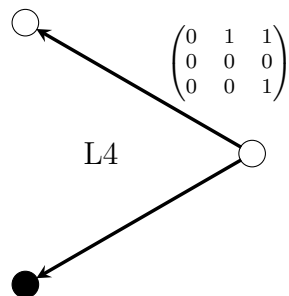


L3.g $\overleftrightarrow{P_4}$

L3.h $K_1 + \overleftrightarrow{P_3}$

Para ver que son obstrucciones, supongamos que D es una digráfica con una L3-partición (S_1, S_2, K) y veamos que ninguna de las digráficas anteriores puede ser subdigráfica inducida de D . Notemos que los argumentos para ver que la orientación de $K_1 + K_2$ y la digráfica $\overleftrightarrow{2K_2}$ son obstrucciones son los mismos que en el patrón anterior, así podemos proceder con los demás incisos. Para las superiororientaciones de P_3 , todos los vértices que son colas de flechas asimétricas deben ir en S_1 . Para la primera superiororientación, el conjunto S_1 no es independiente, para el a tercera, el conjunto K tiene dos vértices no adyacentes, mientras que en el segundo caso, el vértice de S_1 no domina a uno de los extremos de la flecha simétrica. Podemos observar que si D tiene triángulos, éstos están en $D[K, S_1]$, por lo que sólo pueden ser biorientaciones o tener una flecha simétrica y una fuente. En esa misma subdigráfica podemos observar que S_1 domina a K , pero lo opuesto no sucede, por lo que la biorientación del diamante tampoco es subdigráfica inducida de D . Al observar las digráficas mencionadas en L3.f, podemos notar que el vértice de ingrado 1 debe ir en S_2 , y a su vez, los vértices del triángulo que no están relacionados con él deben ir en K . En ambos casos, el vértice restante pertenece a S_1 , pero las direcciones de las flechas no son las adecuadas. Por último, resulta sencillo notar que ninguna de las digráficas $\overleftrightarrow{P_4}$ o $K_1 + \overleftrightarrow{P_3}$ es completa ni bipartita completa, por lo que no pueden ser subdigráficas inducidas de D .

Como las minimalidades de las digráficas mencionadas en los primeros cuatro incisos son sencillas de ver, pasaremos directamente a los siguientes cuatro. Notemos que al quitar cualquier vértice de la biorientación del diamante podemos obtener $\overleftrightarrow{P_3}$ o $\overleftrightarrow{K_3}$, por lo que esta digráfica es obstrucción mínima. Para las superiororientaciones de $\overline{K_1 + P_3}$ podemos obtener $\overleftrightarrow{K_3}$, $K_1 + \overleftrightarrow{K_2}$, o alguna superiororientación permitida de P_3 , así que dicha obstrucción también es mínima. Los dos últimos resultados también los podemos obtener removiendo cualquier vértice de $\overleftrightarrow{P_4}$, y al remover cualquier vértice de $K_1 + \overleftrightarrow{P_3}$ obtenemos $K_1 + \overleftrightarrow{K_2}$, $\overleftrightarrow{P_3}$, o $\overline{K_3}$, que también admiten el patrón L3.



Patrón L4 y su representación gráfica.

Para este patrón fueron prohibidas las digráficas siguientes.

L4.a $2\overleftrightarrow{K}_2$

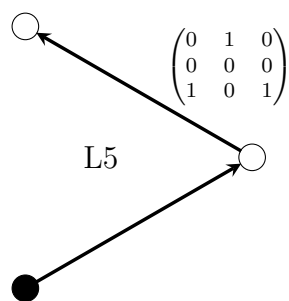
L4.b La orientación de $K_1 + K_2$

L4.c Estas cuatro superorientaciones de P_3 : \overleftrightarrow{P}_3 , $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$, y $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$

L4.d Las superorientaciones de K_3 distintas de \overleftrightarrow{K}_3 y de aquella con una flecha simétrica y una fuente.

En este patrón, podemos observar que todas las flechas simétricas están en una digráfica completa, por lo que $2\overleftrightarrow{K}_2$ no puede admitir el patrón. Además, las colas de las flechas asimétricas dominan a todos los vértices, por lo que la orientación de $K_1 + K_2$ tampoco lo admite. Para las superorientaciones mencionadas de P_3 , podemos ver que en todos los casos distintos de \overleftrightarrow{P}_3 , debe suceder que cada vértice esté en su propio conjunto independiente, incluso si eso sucede, las orientaciones de las flechas no son las adecuadas para el patrón L4. Por último, podemos notar que todos los triángulos están en la subdigráfica escindible completa, por lo que sólo pueden ser \overleftrightarrow{K}_3 o una superorientación con una flecha simétrica y una fuente.

En todos los casos, los argumentos para demostrar la minimalidad de las obstrucciones son análogos a los que se realizaron para dichas digráficas en los patrones anteriores.



Patrón L5 y su representación gráfica.

Para este patrón, se propusieron las siguientes digráficas como obstrucciones mínimas.

L5.a la orientación de $K_1 + K_2$

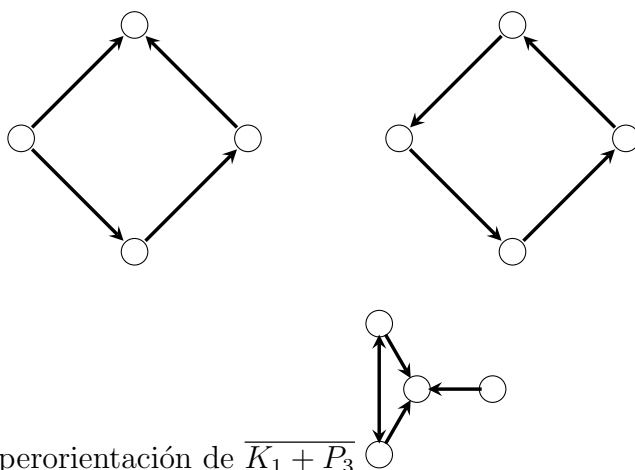
L5.b $\overleftrightarrow{2K_2}$

L5.c $\overleftrightarrow{P_3}$, $\circ \leftrightarrow \circ \rightarrow \circ$, $\circ \leftrightarrow \circ \leftarrow \circ$

L5.d Prohibimos las superorientaciones de K_3 distintas de $\overleftrightarrow{K_3}$ y de la superorientación con una flecha simétrica y un sumidero.

L5.e La orientación de $K_{1,3}$ con dos fuentes y un sumidero.

L5.f estas superorientaciones de C_4 :



L5.g La siguiente superorientación de $\overline{K_1 + P_3}$

De nuevo, los argumentos para las primeras dos digráficas mencionadas es el mismo que para los patrones anteriores, así que iniciaremos a partir del tercer inciso. Supogamos que D es una digráfica con una L5-partición (S_1, S_2, K) . Al observar la representación gráfica del patrón, podemos ver que todas las flechas entre partes distintas de la partición son asimétricas, por lo que ninguna de las tres superorientaciones de P_3 admite este patrón. Esta representación también nos indica que los únicos triángulos de D están en $D[K, S_1]$, por lo que sólo pueden ser isomorfos a $\overleftrightarrow{K_3}$ o a un triángulo con una flecha simétrica y un sumidero, y de este modo, todos los demás triángulos están prohibidos. Además, si un vértice es cabeza y cola de flechas asimétricas, los vértices que lo dominan deben estar conectados mediante una flecha simétrica, así que la orientación mencionada de $K_{1,3}$ también es una obstrucción. Para dar una L5-partición para las orientaciones de C_4 enlistadas, podemos notar que en cada una, al menos una pareja de vértices no adyacentes pertenece a un mismo conjunto. Esto quiere decir, sin embargo, que no sucederá que dicho conjunto domine a otro o viceversa, pues los sentidos de las flechas varían en relación a los vértices restantes. Por último, para la superorientación de $\overline{K_1 + P_3}$, podemos notar que los extremos de la flecha simétrica deben ir en K , y de ser así, el sumidero del centro

debe ir en S_1 , pues no es extremo de flecha simétrica alguna. El problema ahora es que el vértice restante debe ir en S_2 , pero esto nos da una flecha asimétrica de S_2 a S_2 , lo que difiere de la estructura que buscamos.

Como los argumentos de minimalidad de los primeros cuatro incisos se realizan de manera análoga a como se hicieron en patrones anteriores, nos enfocaremos sólo en los últimos tres. Para la orientación de $K_{1,3}$, podemos notar que al quitar cualquier vértice obtenemos una gráfica vacía o una orientación permitida de P_3 , y al remover cualquier vértice de cada una de las superiororientaciones de C_4 obtenemos de nuevo una superiororientación permitida de P_3 . Por último, podemos notar que el único triángulo en la superiororientación restringida de $\overline{K_1 + P_3}$ está permitido, al igual que todas sus orientaciones inducidas de P_3 , y la biorientación de $K_1 + K_2$. De este modo, todas las obstrucciones mencionadas son mínimas.

Conclusiones

Una de las observaciones que resulta evidente desde el inicio de las caracterizaciones es que cuando el dibujo del patrón muestra una digráfica inconexa, la parte aislada hace que la caracterización del patrón resulte distinta a la caracterización del patrón que se obtiene al tomar las partes no aisladas. Esto sucedió en el patrón 3, ya que sus obstrucciones mínimas fueron $\overrightarrow{K_2}$, $\overleftrightarrow{K_3}$, $\overleftrightarrow{P_4}$ y $\overleftrightarrow{2K_2}$, pero si quitáramos el conjunto aislado, las obstrucciones serían sólo $\overrightarrow{K_2}$, $\overleftrightarrow{K_1 + K_2}$ y $\overleftrightarrow{K_3}$, sin mencionar que en ese caso la caracterización resulta más sencilla de plantear.

Como se vio en la Sección 1.2, los patrones vistos como digráficas proporcionan un apoyo visual al momento de querer caracterizarlos, y dicho apoyo visual hace que sea posible agrupar los patrones para que la caracterización sea más sencilla, pues algunos patrones parecidos tienen obstrucciones mínimas similares por tener la misma digráfica subyacente. Al final se tuvieron seis categorías de patrones, lo que fue más fácil que ir caracterizando patrón por patrón.

Además de tener similitudes entre patrones de la misma categoría, surgió una propiedad que se cumple en cualquier patrón en el cual $\overrightarrow{P_3}$ no es una subdigráfica (inducida o no), a la que se nombró Lema 1. La utilidad de este resultado radicó en poder concluir rápidamente cuando un conjunto dominaba a otro, que fue una parte fundamental en cada caracterización. Por si fuera poco, el uso de las digráficas para representar patrones convierte el tedioso problema de buscar qué matrices son esencialmente distintas en el problema de buscar todas las digráficas de tres vértices con a lo más un lazo, para el cual tenemos un procedimiento sencillo, como el que se muestra al final de la Sección 1.2.

Bibliografía

- [1] Hell P, Nešetřil J. Graphs and Homomorphisms. Oxford lecture series in mathematics and its applications 28. Oxford University Press; 2004.
- [2] Bondy JA, Murty USR. Graph Theory. Springer Publishing Company, Incorporated; 2008.
- [3] Hell P, Hernández-Cruz C. Minimal digraph obstructions for small matrices. ArXiv. 2016; Available from: <https://arxiv.org/pdf/1605.09587>.