



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Acción Efectiva Irreducible a 2 Partículas para el Gas
Denso de Neutrinos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Irvin Manelick Hernández Román

TUTORA

María Catalina Espinoza Hernández



Ciudad de México

2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a toda persona que de manera consiente o inconsciente, aportó y ayudó al desarrollo de esta tesis. A mi asesora, la Dra. Catalina Espinoza, por su inmensurable paciencia para con mi persona, por el conocimiento que ha compartido y por, de manera indirecta, encaminarme en el área de las altas energías. A la Dra. Myriam Mondragón por sus consejos e increíbles y certeras referencias bibliográficas en mis muchas dudas.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación en Innovación Tecnológica, por el apoyo al proyecto con clave: IN111518, bajo el nombre Astropartículas y extensión del modelo estándar, por el apoyo económico brindado.

Agradecer a mi familia, que siempre me apoyaron más allá del deber. A mis hermanos Saianit y Hanukkan, por estar siempre presentes y al pendiente de lo que pudiera necesitar. A mi madre Ana María, que nunca ha dejado de brindar su apoyo, afecto y amor sin importar lo adverso de la situación, que has hecho más allá de lo imposible porque no nos faltara nada. A mi padre Victor Hugo, tu trabajo no permitía vernos tan seguido, pero tuvimos muchos momentos felices, siempre cumpliste con tu deber y lograste sacarnos adelante, tu cumpliste conmigo y con esta tesis espero cumplir uno de varios logros que se deben a ti; nos volveremos a encontrar en algún lugar del universo.

A mis amigos de mayor antigüedad, desde secundaria: Roberto, José, Maximiliano, que es esporádico el reunirnos, pero siempre grato verlos y recordar buenos tiempos. De Bachillerato: Manuel, Luis, Daniel, Marco y Alan, que cada reencuentro es casi seguro apagar alguna sed quizá inexistente. De la carrera: Manuel, Jorge, Renato, Hugo, Alan, Erik, José Luis, Jimena, Oscar, Omar, Alejandro, David, Raúl, por compartir el desarrollo del conocimiento que culminó en esta tesis y sus respectivas, por las tardes que compartimos alimento y anécdotas que permitieron desestresar y alegrar los días; por todo esto y más, gracias.

¿Sabes de qué están hechos los sueños?

¿Hechos? Sólo son sueños.

No. No lo son. La gente cree que no son reales porque no son materia, partículas. Son reales. Están hechos de puntos de vista, imágenes, recuerdos, juegos de palabras y esperanzas perdidas...

Neil Gaiman

Índice general

1. Ecuaciones Relativistas	1
1.1. Ecuación de Klein-Gordon	1
1.1.1. Campo Escalar Complejo	3
1.2. Ecuación de Dirac	4
1.2.1. Deducción - Álgebra de Clifford	4
1.2.2. Espinores de Weyl	6
1.2.3. Campo No Masivo	7
1.2.4. Solución de la Ecuación de Dirac	8
1.2.5. Normalización y Suma de Espín	11
1.3. Propagadores	12
2. Integral de Camino	17
2.1. Deducción	17
2.2. Teorema de Abers y Lee	20
2.3. Teorema de Wick y Diagramas de Feynman	22
3. Ecuación Dyson-Schwinger	25
3.1. Introducción Esquemática	25
3.1.1. Relaciones de Dinámica	26
3.2. Diagramas a Ecuaciones Diferenciales	28
3.3. Generador de Diagramas Conectados	32
3.4. Vértices Irreducibles a una Partícula	36
3.5. Deducción Formal	38
4. Acción Efectiva Irreducible	41
4.1. Acción Efectiva y Diagramas Esqueleto	41
4.2. Generadores Como Integrales Funcionales	44
4.3. Expansión en Loop de la Acción Efectiva Irreducible a 1 Partícula	46
4.4. Acción Efectiva Irreducible a 2 Partículas	49
4.5. Expansión en Loop de la Acción Efectiva Irreducible a Dos Partículas	53
5. Teorías de Norma	57
5.1. Teoría de Yang-Mills	57
5.2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría	59

5.2.1.	Rompimiento Espontáneo de Simetrías Discretas	60
5.2.2.	Rompimiento Espontáneo de Simetrías Globales Continuas	61
5.2.3.	Mecanismo de Higgs	61
5.3.	Modelo Electro débil	62
6.	Acción Efectiva 2PI en el Gas Denso de Neutrinos	67
6.1.	Cálculo de los diagramas de vacío que contienen neutrinos	69
6.2.	Derivada funcional de los diagramas de vacío	71
6.3.	Comparación con el cálculo explícito de la auto energía	72
6.4.	Ejemplo de un diagrama de vacío con campo de fondo	73
6.5.	Comentarios	74
6.6.	Acción Efectiva para el gas denso de neutrinos	75
7.	Conclusiones	77
A.	Matrices Gamma	79
B.	Derivada Funcional	81
C.	Integración Funcional	83
D.	Variables de Grassmann	87
E.	Diagramas 2PI del Modelo Electro débil	89

Introducción

El desarrollo de la teoría cuántica de campos ha permitido grandes avances en el área de partículas y altas energías, sin embargo, desde su planteamiento se ve en la necesidad de recurrir a una expansión en serie para poder obtener resultados que involucran términos de interacción (dispersión, decaimientos, etc.). Conforme aumentan el orden estas series, la dificultad para poder resolver aumenta considerablemente. Esto ha dado pie a derivar o proponer diversos métodos para realizar y facilitar tales expansiones. A pesar de ser aproximaciones, los resultados proporcionados han sido verificados experimentalmente de manera satisfactoria.

Entre toda la familia de partículas presentes en las teorías cuánticas de campos, el neutrino resulta un caso especial. Desde su propuesta para permitir que se satisficiera la conservación de la energía en el decaimiento Beta, hasta si era una partícula masiva o no masiva. Numerosas son las ideas teorizadas alrededor de esta partícula, pero su nula carga eléctrica, así como su escasa masa, han hecho de esta partícula un caso difícil de estudiar. Pero eso no ha impedido tener avances, con vertientes bien definidas (mecanismos de generación de masas tan pequeñas, neutrinos estériles¹, etc.).

La fenomenología de neutrinos es un área con muchas incógnitas, lo que no impide sea un área muy activa. Un ejemplo es el Gas denso de Neutrinos. Este sistema se puede presentar en situaciones naturales con temperatura extrema, tales como el Universo temprano o las explosiones de supernovas de colapso de núcleo, donde un número macroscópico de neutrinos queda temporalmente "atrapado" en una región (neutrínosfera) dentro de la protoestrella de neutrones durante la explosión.

La importancia de este sistema radica en las posibles consecuencias que se desprenden de las autointeracciones de los neutrino (interacciones neutrino-neutrino) dentro de la neutrínosfera, el estudio de las cuales tiene el potencial de descubrir fenómenos colectivos observables que ofrezcan claves para entender incógnitas como la jerarquía de masas de los neutrinos. A la fecha, los fenómenos colectivos en un gas denso de neutrinos han sido estudiados con técnicas de muchos cuerpos como la técnica de la Matriz de Densidad [33], la jerarquía de ecuaciones BBGKY [34], y las ecuaciones clásica y cuántica de Boltzmann [35].

El propósito de este proyecto de tesis es introducir las bases de una técnica adicional en la cual se pretende desarrollar los conceptos básicos de Teoría Cuántica de Campos de muchos cuerpos y aplicarlos para la deducción de la Acción Efectiva Irreducible a 2 Partículas para el gas denso de neutrinos en una primera aproximación (no considerar quarks, tomar neutrinos no masivos).

¹No interactúa con otras partículas mediante las fuerzas fundamentales, salvo la gravitacional.

Capítulo 1

Ecuaciones Relativistas

En este capítulo se tratarán nociones básicas de la teoría cuántica de campo. Se trabajan la deducción, interpretación y resultados de la ecuación de Klein-Gordon, para dar una descripción de los campos escalares reales y complejos. De igual forma se hará con la ecuación de Dirac para los campos fermiónicos, así como algunas características y propiedades de los mismos. Se concluye revisando los propagadores de ambas ecuaciones y su relación directa con las funciones de Green.

1.1. Ecuación de Klein-Gordon

Deducida inicialmente por Schrödinger[7], pero descartada por su problema de probabilidad negativa, la ecuación de Klein-Gordon se utiliza para describir la dinámica de campos escalares reales o complejos. Estos se asocian con partículas caracterizadas con espín 0.

Como primer acercamiento a la teoría cuántica de campos, en la mayoría de libros introductorios se opta por la cuantización canónica ([4], [2]). Dicho proceso consta de ascender las variables (posición, momento y energía) a operadores actuando sobre vectores en un espacio de Fock; siendo $x \rightarrow \hat{x}, p \rightarrow -i\hbar\nabla$ y $E \rightarrow i\hbar\partial_t$.¹; esta asociación de hecho viene de la ecuación cuántica de Schrödinger para una partícula dependiente del tiempo. Con estos operadores, dado que en teoría del campo se trabaja mecánica cuántica junto relatividad especial, la relación de energía-momento relativista es la correcta para expresar la energía.

$$E^2 = m^2 + p^2. \quad (1.1)$$

Hay dos formas de proceder para realizar la cuantización canónica. La primera, trabajar con la relación lineal de la energía, considerando la solución con raíz positiva. Con esta relación lineal se sustituyen las variables por sus respectivos valores como operadores y posteriormente se multiplica la expresión resultante por su conjugado. La segunda, trabajar directamente con la expresión y hacer la sustitución de las variables a operadores. En ambos casos se llega al mismo resultado, solo el primero sirve para enfatizar el problema que se tiene al tratar de trabajar con una expresión lineal de la energía, razón por la que posteriormente Dirac hace la propuesta de su ecuación [7].

¹Cabe mencionar que en el presente escrito se utilizarán unidades naturales ($\hbar = c = 1$), por lo que posteriormente se omitirán dichas constantes.

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (1.2)$$

La ecuación resultante (1.2) se conoce como ecuación de Klein-Gordon. En esta se considera la signatura $(1, -1, -1, -1)$ y donde \square representa el D'Alambertiano $(\partial_t^2 - \nabla^2)$. Esta ecuación se puede ver como una onda. Agregando la masa, es imposible alcanzar la velocidad de la luz, lo que concuerda con la relatividad especial.

Para obtener su solución se trabaja con su transformada de Fourier, en el espacio de momento se tiene por solución una onda plana (Modos de Fourier).

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi(x, t) = 0 \longrightarrow (\partial_t^2 + p^2 + m^2)\phi(p, t) = (\partial_t^2 + \omega_p^2)\phi(p, t) = 0. \quad (1.3)$$

Donde $\omega_p = \sqrt{|\bar{p}|^2 + m^2}$. Así, para cada \bar{p} , $\phi(p, t)$ es solución a la ecuación, análogo al oscilador armónico. Por lo tanto, la solución a la ecuación de Klein-Gordon es un infinito de osciladores armónicos, y cuantizar Klein-Gordon es análogo a cuantizar el oscilador armónico.

Recordando de mecánica cuántica el hamiltoniano del oscilador armónico en términos de los operadores de ascenso y descenso, dado por $H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$. Escribiendo en términos de campos (donde $\Pi(x)$ es el momento canónico, $\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$, con \mathcal{L} la densidad lagrangiana, relacionada con la lagrangiana mediante $L = \int d^4x \mathcal{L}$). Satisfaciendo además el conmutador $[\phi(\bar{x}), \Pi(\bar{y})] = i\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$, para tiempos iguales y también $[\phi(\bar{x}), \phi(\bar{y})] = [\Pi(\bar{x}), \Pi(\bar{y})] = 0$.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\bar{p}}}} \left[a_{\bar{p}} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} + a_{\bar{p}}^\dagger e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} \right], \\ \Pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\bar{p}}}{2}} \left[a_{\bar{p}} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} - a_{\bar{p}}^\dagger e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Escribiendo la densidad Hamiltoniana en términos de los campos se tiene $\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + V(\phi))^2$. Así, el Hamiltoniano escrito en términos de campos está dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\bar{p}} (2a_p^\dagger a_p + [a_p, a_p^\dagger]). \quad (1.5)$$

El segundo término de la anterior expresión corresponde a una energía infinita, conocida como energía del punto cero. Lo podemos ver claramente en (1.6).

$$\hat{H} |0\rangle = E_0 |0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\bar{p}} \delta^{(3)}(0) |0\rangle \longrightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Donde $|0\rangle$ es el estado que representa al vacío.³ Aunque desconcertante, el hecho de obtener infinitos resulta común en teoría cuántica de campo. El infinito obtenido con el Hamiltoniano de Klein-Gordon se explica porque un campo asigna un valor a cada punto del espacio, y al estar

²De igual forma que la lagrangiana, la densidad Hamiltoniana se relacionan con el Hamiltoniano mediante $H = \int d^4x \mathcal{H}$.

³En teoría de campo al referirnos al vacío, hablamos de una ausencia de partículas, un vacío de partículas.

tomando la energía base del espacio, estamos sumando el valor base en cada punto del espacio, por tanto sumando un infinito de cantidades, por pequeñas que sean. Para evitar este problema, se introduce el *ordenamiento normal*. Se le suele denotar como $N\{\phi(x)\dots\phi(z)\}$ o $:\phi(x)\dots\phi(z):$. El ordenamiento normal, como su nombre indica, ordena poniendo operadores de creación del lado izquierdo y operadores de aniquilación del lado derecho. Con esto, (1.5) se reescribe como (1.7), que es la forma en que se presenta comúnmente en los textos de teoría cuántica de campo, aunque en la mayoría se omite el poner explícitamente el ordenamiento normal.

$$:\hat{H} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_p^\dagger a_p. \quad (1.7)$$

El método de cuantización canónica, como se mencionó al inicio, es el método que se utiliza para introducir a la noción de campo cuántico, esto debido a su similitud con el oscilador armónico cuántico. Posteriormente se acostumbra trabajar con Lagrangianos y, a partir del principio de mínima acción, tras notar que se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange ([3], [8], [4]), poder obtener las ecuaciones de movimiento; de igual forma se satisface el teorema de Noether, que permite encontrar cantidades conservadas a las simetrías continuas ([7], [4]). En el caso del campo escalar de Klein-Gordon, la densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (1.8)$$

Así, (1.2) es la ecuación de movimiento resultante de (1.8).

1.1.1. Campo Escalar Complejo

Podemos considerar el caso en que el campo ϕ hasta ahora empleado sea complejo, es decir $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$. Para cuantizar dicho campo se procede de igual forma, no obstante, hay un aspecto importante en cuanto a los operadores de creación y aniquilación.

Dado que ahora podemos distinguir la parte real y la imaginaria del campo, se obtienen dos ecuaciones de movimiento, ambas forman la ecuación de Klein-Gordon. Por reglas de conmutación entre los campos a tiempos iguales se tiene

$$[\phi(x), \dot{\phi}^\dagger(y)] = i\delta^{(3)}(x - y); [\phi(x), \phi(y)] = [\dot{\phi}(x), \dot{\phi}^\dagger(y)] = [\phi(x), \dot{\phi}^\dagger(y)] = [\phi(x), \dot{\phi}(y)] = 0. \quad (1.9)$$

Esto es consistente con tratar a ϕ y a ϕ^\dagger como variables independientes. Prosiguiendo como en el caso del campo escalar real, se trabaja en el espacio de Fourier, dando así

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip \cdot x} (b_p e^{-iE_p t} + c_p^\dagger e^{iE_p t}) \quad (1.10)$$

$$\phi^\dagger(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip \cdot x} (b_p^\dagger e^{iE_p t} + c_p e^{-iE_p t}). \quad (1.11)$$

Al poder distinguir entre los campos, se tienen operadores de creación y aniquilación para cada uno. Así b_p^\dagger crea partículas y c_p^\dagger crea anti partículas. Esta distinción entre partícula y anti partícula se da más claramente con la ecuación de Dirac en la sección 1.2.4.

El campo escalar complejo lleva por densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{KG^*} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 (\phi^\dagger \phi). \quad (1.12)$$

1.2. Ecuación de Dirac

Como propuesta a obtener una ecuación relativista que pudiera explicar adecuadamente la estructura fina del espectro del Hidrógeno, aunado a la posibilidad de obtener una densidad de probabilidad negativa con Klein-Gordon, Dirac se dio cuenta que el problema recaía en que se trabajaba con una ecuación que tenía una derivada temporal de segundo orden, entonces para evitar la posible parte negativa, se debía trabajar con una ecuación con derivada temporal lineal, tal como en el caso de la ecuación de Schrödinger ([7]).

Proponiendo una relación lineal tal que su cuadrado satisficiera la relación de energía-momento relativista (1.1), se tiene la conocida álgebra de Clifford, fundamental para poder construir matemáticamente el espinor, vector complejo que actúa bajo el grupo *spin*. En este contexto, lo que se busca es encontrar el operador que corresponde a la raíz cuadrada del Laplaciano. El espinor resulta ser el vector que actúa en la ecuación de Dirac y resulta un objeto más complicado de lo que parece, necesitando de la teoría de *haces fibrados* para poder ser descrito formalmente.⁴ A pesar de no seguir rigurosamente este camino, Dirac obtuvo el mismo resultado con una hipótesis muy simple; el desarrollo que presentaremos no involucrará un formalismo matemático con el espinor.

En efecto, la ecuación de Dirac logró describir de manera óptima lo que se proponía, sin embargo esta solo funciona para partículas con espín $\frac{1}{2}$. A pesar del éxito que supuso el poder explicar el espectro de estructura fina, aún tenía un problema aparentemente grave; permite soluciones con energía negativa. La interpretación de Dirac a esta posibilidad se conoce como *mar de Dirac* y la *teoría de huecos*. Supuestamente en energías por debajo de cero, hay partículas, que al obtener suficiente energía salen de este mar de energía negativa, aunque dejando un *hueco*. Estos huecos se asociaban con los posibles valores de energía negativa. Aunque incorrecta su interpretación, fue la primera noción hacia lo que serían las anti partículas.⁵

1.2.1. Deducción - Álgebra de Clifford

Proponiendo una relación lineal, tal que su cuadrado satisfaga (1.1), de la siguiente manera

$$E = \bar{\alpha} \cdot \bar{p} + \beta m = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m = p_0, \quad (1.13)$$

donde $\bar{\alpha}$ y β son operadores independientes de \bar{p} y E ; además de utilizar como notación $E = p_0$. Elevando al cuadrado la expresión anterior se obtiene

$$p_0^2 = (\alpha_i p_i)^2 + (\beta m)^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 + (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) p_1 p_3 + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3 + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m, \quad (1.14)$$

⁴Para mayores detalles de la teoría matemática del espinor se recomienda consultar Friedrich [14].

⁵El primer capítulo de Weinberg [7] habla más en detalle de la teoría de huecos de Dirac y otros temas históricos en el desarrollo de la teoría de campo.

donde $i = 1, 2, 3$. Para satisfacer (1.1) se deben cumplir las siguientes cuatro condiciones con respecto a $\bar{\alpha}$ y β

$$\begin{aligned}\alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \\ \alpha_i^2 &= 1 \\ \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 0 \quad (i \neq j)\end{aligned}\tag{1.15}$$

donde $i = 1, 2, 3$. Nombrando $\beta = \alpha_0$ podemos reescribir en solo dos condiciones, que resultan ser

$$\alpha_\mu^2 = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu),\tag{1.16}$$

donde $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$. Por último, introduciendo la notación de anticonmutador para operadores ($\{A, B\} = AB - BA$) y la delta de Kronecker $\delta_{\mu\nu}$ que es igual a cero para $\mu \neq \nu$, e igual a 1 cuando $\mu = \nu$. Así, podemos acomodar estas condiciones en una sola ecuación de la forma

$$\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}.\tag{1.17}$$

Usualmente (1.16) son las condiciones con las que se define al álgebra de Clifford, sin embargo, por comodidad se trabaja con (1.17). Para satisfacer ésta última condición se requiere que las α 's sean matrices. Un primer intento que también satisfacen estas condiciones son las matrices de Pauli. No obstante, solo son tres matrices y no es posible escribir una cuarta que sea independiente. De aquí que se deban pasar a matrices de 4x4 y son las que se conocen como matrices de Dirac, y se suelen denotar como γ^μ .

Regresando a (1.13), el tratamiento hecho se dejó explícito en términos de momento, sin embargo, y como suele hacerse en diversos textos como primer deducción de la Ecuación de Dirac [15], tal como en el caso de la ecuación de Klein-Gordon, es con cuantización canónica. Así, de (1.13) sustituyendo Energía y momento por sus respectivos operadores y sabiendo ahora las condiciones a cumplir para satisfacer (1.1) tenemos

$$H\Psi = i\partial_t\Psi = (\alpha^i p_i + \beta m)\Psi = (-i\alpha^i \partial_i + \beta m)\Psi.\tag{1.18}$$

Escribiendo $\partial_t = \partial_0$, pasando de un solo lado y multiplicando por la izquierda por β se obtiene

$$(i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i)\Psi - m\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = (i\rlap{\not{\partial}} - m)\Psi = 0.\tag{1.19}$$

Donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y hemos reescrito $\gamma^0 = -\beta = -\alpha^0$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$ y $\gamma^\mu B_\mu = \rlap{\not{B}}$. A (1.19) se le conoce como la ecuación de Dirac y Ψ es el espinor de Dirac, denotado simplemente como ψ . Definiendo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ se tiene que la cantidad $\bar{\psi}\psi$ es un escalar de Lorentz y $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un vector de Lorentz. Así, una densidad lagrangiana correcta para la ecuación de Dirac está dada por

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.\tag{1.20}$$

Un aspecto importante que servirá para ver las soluciones de la ecuación de Dirac, es que esta implica la ecuación de Klein-Gordon, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
0 &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi \\
&= (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi \\
&= \left(\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right) \psi \\
&= (\square + m^2)\psi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones pueden ser escritas como combinación lineal de ondas planas.

1.2.2. Espinores de Weyl

En base a la deducción presentada no es del todo claro que el espinor de Dirac sea reducible. Se puede considerar al espinor de Dirac como composición de dos espinores de dos entradas, el hecho de que la base del espinor de Dirac sea justamente par, recae en la construcción del grupo *Pin* y *Spin* junto al álgebra de Clifford; donde se debe considerar los casos dimensión par e impar. Por tanto, los espinores bidimensionales son la base de todos los espinores pares, y se les llama espinores de Weyl ([14]). Un argumento formal más apegado a los físicos es dado en base a la teoría de grupos y representaciones, bajo este planteamiento los espinores de Weyl son los primeros en formularse y a partir de ellos poder construir el espinor de Dirac ([4]). Con los espinores de Weyl podemos escribir el espinor de Dirac como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Los elementos ψ_L y ψ_R son llamados espinores de Weyl Zurdos (*Left-handed*) y Diestros (*Right-handed*) respectivamente. En términos de ψ_L y ψ_R , y con la representación de quiralidad de las matrices gamma (véase el apéndice A), la ecuación de Dirac está dada como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i\cancel{\partial} \\ i\cancel{\partial} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (1.22)$$

Los espinores ψ_L y ψ_R están combinados por el término de masa de la ecuación de Dirac, sin embargo, si hacemos $m = 0$, la ecuación para ψ_L y ψ_R se desacopla como

$$\begin{aligned}
i\cancel{\partial}\psi_L &= 0 \\
i\cancel{\partial}\psi_R &= 0.
\end{aligned} \quad (1.23)$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Weyl, son especialmente importantes en el tratamiento de neutrinos y en la teoría de interacción débil ([13]). En este caso, al tener ausencia de masa, los estados Diestros y Zurdos, son eigenestados del operador de helicidad, definido como

$$\hat{h} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s|\vec{P}|} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}. \quad (1.24)$$

Este operador proyecta el espín en la dirección del momento, además, satisface $\hat{h}\Psi = \pm\Psi$. La proyección del espín en la dirección de movimiento se llama *helicidad*, por lo que ψ_L y ψ_R tienen estados opuestos de helicidad en el caso no masivo.

Definiendo la matriz $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. A esta matriz se le suele llamar la *matriz de quiralidad*. Como γ^5 es una matriz hermitiana, puede ser diagonalizada mediante una transformación unitaria. De hecho, en la representación quiral, γ^5 resulta ser diagonal, dada en la forma $diag(1, 1, -1, -1)$ (véase el apéndice A). Siempre es posible separar un campo espinorial ψ en sus componentes Diestra y Zurda ([15], [3]): $\psi = \psi_L + \psi_R$, con

$$\begin{aligned}\psi_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi = P_R\psi \\ \psi_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi = P_L\psi.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Donde P_R y P_L son las matrices de proyección de quiralidad.

1.2.3. Campo No Masivo

Si bien en el modelo estándar los neutrinos se definen como no masivos [1], ante la confirmación de la oscilación de neutrinos, estos deben ser masivos [21]. Posteriormente consideraremos neutrinos no masivos por simplicidad, por lo que se presentan algunas características de la quiralidad de los fermiones no masivos. De las ecuaciones de Weyl (1.23), vemos que los campos quirales ψ_R y ψ_L están desacoplados, los campos quirales son independientes y es posible que, uno de los dos campos sea suficiente para la descripción de un fermión no masivo. Considerando $\psi(x, p)$, una solución a la ecuación no masiva de Dirac

$$i\cancel{\partial}\psi(x, p) = 0.\tag{1.26}$$

$\psi(x, p)$ también es eigen función del operador de cuadri momento $P^\mu = i\partial_\mu$ ($P^\mu\psi(x, p) = p^\mu\psi(x, p)$), con energía $p^0 = E = |\vec{p}|$. En este caso, la ecuación no masiva de Dirac puede ser escrita como

$$(\gamma^0|\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p})\psi(x, p) = 0.\tag{1.27}$$

Multiplicando por la izquierda por $\gamma^5\gamma^0$ y utilizando el resultado $\Sigma^k = \gamma^0\gamma^k\gamma^5$ ($k = 1, 2, 3$), se obtiene

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\psi(x, p) = \gamma^5\psi(x, p),\tag{1.28}$$

donde $\vec{\Sigma} = diag(\sigma^i, \sigma^i)$, y las σ^i son las matrices de Pauli. Del lado izquierdo hemos obtenido el operador de helicidad, con $P^\mu \rightarrow p^\mu$. Podemos notar de (1.28), que la quiralidad coincide con la helicidad para las eigen funciones del cuadri momento que son soluciones de la ecuación no masiva de Dirac. En particular, las eigen funciones de matriz quiralidad son eigen funciones del operador helicidad con el mismo eigen valor

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\Sigma} \cdot \bar{p}}{|\bar{p}|} \psi_D(x, p) &= \psi_D(x, p) \\ \frac{\bar{\Sigma} \cdot \bar{p}}{|\bar{p}|} \psi_Z(x, p) &= -\psi_Z(x, p).\end{aligned}\tag{1.29}$$

Por tanto, un campo quiral diestro no masivo $\psi_D(x, p)$ con cuadri momento definido, tiene helicidad positiva, mientras que un campo quiral zurdo no masivo $\psi_Z(x, p)$ con cuadri momento definido, tiene helicidad negativa. En el caso masivo, se sigue utilizando la helicidad, con la distinción que los eigen estados de helicidad ya no son los mismos que los eigen estados de quiralidad.

1.2.4. Solución de la Ecuación de Dirac

Como se mencionó en el campo escalar complejo, la ecuación de Dirac hace más clara la aparición de anti partículas, por ende, a continuación se presenta una deducción más detallada para poder cuantizar el campo de Dirac. Dado que el campo de Dirac ψ obedece la ecuación de Klein-Gordon, por solución lleva ondas planas, sea

$$\psi_s(x) = ae^{-ip \cdot x} u(p),\tag{1.30}$$

con $p^0 = E = +\sqrt{\bar{p}^2 + m^2}$, $u(p)$ un espinor de cuatro componentes y a un coeficiente constante⁶. Sustituyendo en la ecuación de Dirac (1.19) obtenemos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu (ae^{-ip \cdot x} u(p)) - m (ae^{-ip \cdot x} u(p)) = \gamma^\mu p_\mu (ae^{-ip \cdot x} u(p)) - m (ae^{-ip \cdot x} u(p)) = 0.\tag{1.31}$$

Factorizando el término $ae^{-ip \cdot x}$ y eliminándolo, obtenemos

$$(\not{p} - m) u(p) = 0.\tag{1.32}$$

A (1.32) se le conoce como ecuación de Dirac en el espacio de momentos. Para encontrar el valor específico del espinor $u(p)$ usamos la representación de Dirac de las matrices gamma (véase el apéndice A). Desarrollando $\gamma^\mu p_\mu$ tenemos

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} p_i = \begin{pmatrix} E & -\bar{\sigma} \cdot \bar{p} \\ \bar{\sigma} \cdot \bar{p} & -E \end{pmatrix}.\tag{1.33}$$

Así, la expresión (1.32) se escribe explícitamente como

$$\begin{pmatrix} E - m & -\bar{\sigma} \cdot \bar{p} \\ \bar{\sigma} \cdot \bar{p} & -E - m \end{pmatrix} u(p) = 0\tag{1.34}$$

Proponiendo $u(p) = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$, donde u_a y u_b son espinores de dos componentes (*espinores de Weyl*). Sustituyendo obtenemos las ecuaciones

⁶Como en los casos de campo escalar real y complejo, se le asociará con un operador de creación o aniquilación.

$$\begin{aligned}(E - m)u_a - (\bar{\sigma} \cdot \bar{p})u_b &= 0 \\ (\bar{\sigma} \cdot \bar{p})u_a - (E + m)u_b &= 0.\end{aligned}\tag{1.35}$$

Despejando se tienen

$$\begin{aligned}u_a &= \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{E - m}u_b \\ u_b &= \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{E + m}u_a.\end{aligned}\tag{1.36}$$

De las expresiones anteriores, la primera puede divergir cuando $E \rightarrow m$. Desarrollando el término $\bar{\sigma} \cdot \bar{p}$ tenemos

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{p} = p_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}.\tag{1.37}$$

Para obtener solo expresiones que no diverjan consideramos $u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, así

$$\begin{aligned}u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\implies u_b = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \\ u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\implies u_b = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Estas expresiones no divergen cuando $E \rightarrow m$, además, cuando $p \rightarrow 0 \implies u_b \rightarrow 0$. Ambas soluciones son para $E > 0$, por lo que para $E < 0$ también existen dos soluciones, al considerar ahora como solución la raíz negativa de la energía, $E = -\sqrt{\bar{p}^2 + m^2}$. En este caso, bajo un procedimiento análogo

$$\begin{aligned}u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\implies u_a = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \\ u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\implies u_a = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Al ser energía negativa, no diverge dado que $E \rightarrow -m$, y de igual forma, cuando $p \rightarrow 0 \implies u_a \rightarrow 0$. Por lo tanto, hemos encontrado cuatro soluciones independientes a la ecuación de Dirac en el espacio de momentos, dos para energías positivas y dos para energías negativas.

Para $E > 0$

$$u^{(1)}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1-ip_2}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \end{pmatrix}\tag{1.40}$$

Para $E < 0$

$$u^{(3)}(-p) = \begin{pmatrix} \frac{p_3}{E-m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v^{(2)}(p) \quad , \quad -u^{(4)}(-p) = \begin{pmatrix} \frac{p_1-ip_2}{E-m} \\ \frac{-p_3}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v^{(1)}(p) \quad (1.41)$$

donde por convención, se definen los espinores

$$\begin{aligned} v^{(1)}(p) &= -u^{(4)}(-p) \\ v^{(2)}(p) &= u^{(3)}(-p). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Estos espinores en el espacio de momento al tener $E \rightarrow -E$ y $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, y procediendo como en (1.31), se obtiene que satisfacen

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = (\not{p} + m)v(p) = 0. \quad (1.43)$$

Las soluciones con $E > 0$ describen partículas

$$\psi(x) = ae^{-ip \cdot x} u^{(1,2)}(p), \quad (1.44)$$

mientras que las soluciones con $E < 0$ describen anti partículas

$$\psi(x) = be^{ip \cdot x} v^{(1,2)}(p). \quad (1.45)$$

Las cuatro ecuaciones anteriores satisfacen la ecuación de Dirac, por lo que la solución más general es una combinación lineal de ellas, dada como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p^s e^{-ip \cdot x} u^s(p) + b_p^{s\dagger} e^{ip \cdot x} v^s(p)) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p^{s\dagger} e^{ip \cdot x} \bar{u}^s(p) + b_p^s e^{-ip \cdot x} \bar{v}_p^s), \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde s es el espín, $\bar{\psi}$ el conjugado dado como $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Estos son los operadores del campo de Dirac. Podemos notar que como en el caso del campo escalar complejo, hemos obtenido dos tipos de operadores distintos, esto asociado a partícula y anti partícula. En esta caso $a_p^{s\dagger}$ creará fermiones y $b_p^{s\dagger}$ anti fermiones.

En base a (1.46) y como se ha hecho con los campos escalares (salvo que ahora no son conmutadores), mediante las reglas de anti conmutación de operadores de creación y aniquilación, junto con los campos, se procede a cuantizarlo. El anti conmutador de los operadores de creación y aniquilación está dado por

$$\{a_p^r, a_q^{s\dagger}\} = \{b_p^r, b_q^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - q) \delta^{rs}, \quad (1.47)$$

el resto de combinaciones posibles resultan nulas. Las relaciones de anti conmutación a tiempos iguales para ψ y ψ^\dagger son

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), \psi_b^\dagger(y) \right\} &= \delta^{(3)}(x-y) \delta_{ab} \\ \left\{ \psi_a(x), \psi_b(y) \right\} &= \left\{ \psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

el momento conjugado asociado a $\psi(x)$ es $\pi(x) = \frac{\mathcal{L}_D}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x)$. En base a esto el Hamiltoniano puede ser escrito como

$$H = \int d^3x \left[\pi(x) \dot{\psi}(x) - \mathcal{L}_D \right] = \int d^3x \bar{\psi}(x) (-i\bar{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi = \int d^3x \psi^\dagger [-i\gamma^0 \bar{\gamma} \cdot \nabla + m\gamma^0] \psi, \quad (1.49)$$

donde $\bar{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. El Hamiltoniano obtenido coincide con el escrito en (1.18). En base al procedimiento seguido en los campos escalares, mediante el uso de (1.47) y (1.48) el Hamiltoniano se puede reescribir en términos de operadores de creación y aniquilación de la siguiente forma

$$: H := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s), \quad (1.50)$$

donde como en los casos escalares, resulta un término que nos proporciona un infinito, a partir en este caso, de un anti conmutador. Por tanto, se ha escrito el Hamiltoniano ordenado normalmente, lo que permite establecer al vacío como el estado de menor energía. Los estados de una partícula⁷ ($|p, s\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_p^{s\dagger} |0\rangle$) están definidos de tal manera que su producto interno sea invariante de Lorentz, teniendo así

$$\langle p, r | q, s \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p-q) \delta^{rs}. \quad (1.51)$$

1.2.5. Normalización y Suma de Espín

En esta sección se presentan algunos resultados que suelen emplearse en el cálculo de diagramas mediante el uso de diagramas de Feynman, estrictamente cuando se tienen estados externos. Si bien en el presente escrito se trabajan con diagramas que no tienen estados externos (diagramas de vacío), y cuando se presenten estados externos se calculan directamente de la serie de Dyson; son resultados importantes que denotan la diferencia entre los espinores $u(p)$ y $v(p)$. Calculando el producto interno entre espinores, donde tomamos γ^0 en la base Weyl, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(p) u_{s'}(p) &= u_s^\dagger(p) \gamma^0 u_{s'}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_{s'} \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})} & 0 \\ 0 & \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{s'} \\ \xi_{s'} \end{pmatrix} = 2m \delta_{ss'}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

⁷Partículas con momento bien definido y una etiqueta extra, en este caso el espín.

donde ξ_s es la componente s asociado a $u_s(p)$, en la sub sección anterior se han denotado como $u_{a,b}$ o $v_{a,b}$. Con un procedimiento análogo se puede obtener $\bar{v}_s(p)v_{s'}(p) = 2m\delta_{ss'}$. Esta es la normalización (convencional) para el producto interno espinorial para espinores masivos de Dirac. Dada la clara ortogonalidad entre $u_s(p)$ y $\bar{v}_s(p)$, el producto interno resulta nulo, es decir $\bar{v}_s(p)u_{s'}(p) = \bar{u}_s(p)v_{s'}(p) = 0$. Por otra parte, la convención de normalización para espinores de Dirac no masivos está dada por

$$u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = \left(\frac{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s}{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s} \right)^\dagger \left(\frac{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_{s'}}{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_{s'}} \right) = 2E \xi_s^\dagger \xi_{s'} = 2E \delta_{ss'}. \quad (1.53)$$

Con un procedimiento similar se tiene $v_s^\dagger(p)v_{s'}(p) = 2E \delta_{ss'}$. Por último se tiene el producto exterior espinorial, dado como

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \sum_s \left(\frac{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s}{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s} \right) (\xi_s^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \quad \xi_s^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & p \cdot \bar{\sigma} \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \gamma^\mu p + m = \not{p} + m. \end{aligned}$$

De forma similar para $v_s(p)\bar{v}_s(p)$, por lo que para la suma sobre la polarización de estados (espín) de un fermión las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \not{p} + m \\ \sum_{s=1}^2 v_s(p)\bar{v}_s(p) &= \not{p} - m \end{aligned} \quad (1.54)$$

1.3. Propagadores

Hemos visto las ecuaciones de los campos asociados a partículas con espín 0 y 1/2, así como sus soluciones y algunas características importantes, sin embargo, falta un objeto de gran importancia. La teoría cuántica de campos permite la creación (y aniquilación) espontánea de partículas, estas pueden crearse en un lugar, "propagarse" a otro y ser aniquiladas. Es de ahí el nombre, el propagador nos habla de la probabilidad de que una partícula (anti partícula) creada (aniquilada) en un punto pueda ser aniquilada (creada) en otro punto. Esto se expresa como el valor esperado en el vacío de los operadores de las partículas en cuestión. De esta manera se define el propagador más sencillo, sin embargo, sería ideal poder distinguir que proceso ocurre primero, pero dada la indistinguibilidad, debemos considerar ambos casos de acuerdo a la coordenada temporal; esto otorgará el propagador de Feynman. Iniciemos dando un repaso general de las funciones de Green y un resultado (1.55) de estas, que ayudará a asociar los propagadores de la teoría cuántica en cuestión con sus funciones de Green.

Funciones $G(r)$ que generalmente satisfacen ecuaciones de la forma

$$\Omega_r G(r) = \delta(r), \quad (1.55)$$

donde Ω_r es algún operador diferencial lineal, se dice que son funciones de Green del operador Ω_r . Las funciones de Green juegan un papel muy importante en la solución de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\Omega_r \psi(r) = s(r), \quad (1.56)$$

donde $s(r)$ es conocida como una función fuente. La solución a (1.56) se puede escribir como

$$\psi(r) = u(r) + \int G(r - r') s(r') d^3 r', \quad (1.57)$$

donde $u(r)$ es una solución de $\Omega_r u(r) = 0$. Este tipo de ecuaciones se presentan en muchos ámbitos de la física, siendo el Electromagnetismo un primer acercamiento formal, ya que (1.55) es similar a la ley de Gauss en electrostática.

Para un campo escalar real se define el propagador como

$$\Delta(x - y) = \langle 0 | \{ \phi(x), \phi(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x} - \bar{y})}. \quad (1.58)$$

El propagador es invariante de Lorentz y describe la probabilidad de crear una partícula en y y ser aniquilada en x , se anula para $(x - y)^2 < 0$. El propagador de Feynman involucra ordenamiento temporal con el propagador, pues nos interesan cosas causales y se define como

$$\Delta_F(x - y) \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | 0 \rangle, \quad (1.59)$$

donde $T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \}$ es el operador de ordenamiento temporal y está dado por

$$T \{ \phi(x_1), \phi(x_2) \} = \begin{cases} \phi(x_1) \phi(x_2) = \Delta(x_1 - x_2) & \text{si } x_1^0 > x_2^0 \\ \phi(x_2) \phi(x_1) = \Delta(x_2 - x_1) & \text{si } x_2^0 > x_1^0 \end{cases}. \quad (1.60)$$

Para más campos actuando bajo este operador, se deben considerar todos los arreglos posibles de acuerdo al orden de las coordenadas temporales. Podemos escribir ambos casos posibles en (1.59) con el uso de la función Heaviside, así tenemos

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [\Theta(x^0 - y^0) e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x} - \bar{y})} + \Theta(y^0 - x^0) e^{i\bar{p} \cdot (\bar{x} - \bar{y})}]. \quad (1.61)$$

Utilizando la forma integral de la función Heaviside, dada como $\Theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{e^{ip_0 t}}{p_0 - i\varepsilon}$, donde se ha hecho un abuso de notación al escribir en la integral p_0 , ya que buscamos una integral en términos del cuadrimento. Con esto reescribimos la expresión anterior como

$$\Delta_F(x - y) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 2E_p} \left(\frac{e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + ip_0(x^0 - y^0)}}{p_0 - i\varepsilon} + \frac{e^{i\bar{p} \cdot (\bar{x} - \bar{y}) - ip_0(x^0 - y^0)}}{p_0 - i\varepsilon} \right).$$

Sustituyendo $p_0 = p'_0 - E_p$ y cambiando el signo en la segunda integral, dado que $|p| = \pm p$, obtenemos

$$\Delta_F(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i\bar{p}\cdot(\bar{x}-\bar{y})-ip_0(x^0-y^0)} \left(\frac{1}{p_0^2 - E_p^2 + i\varepsilon} \right).$$

Por último reescribimos en términos del cuadri momento, obteniendo así

$$\Delta_F(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.62)$$

Para verificar que (1.62) sea la función de green de la ecuación de Klein-Gordon, deberá satisfacer algo de la forma de (1.55). Aplicando el operador de Klein-Gordon al propagador de Feynman se tiene

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Delta_F(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip\cdot(x-y)} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-p^2 + m^2)}{p^2 - m^2} e^{ip\cdot(x-y)}.$$

Se cancelan los términos de la segunda fracción y podemos considerar sin problema que $\varepsilon \rightarrow 0$, así solo queda la integral con las constantes y la exponencial, estos términos restantes son una delta de Dirac en forma integral, por lo tanto tenemos

$$(\square + m^2)\Delta_F(x-y) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot(x-y)} = -i\delta^4(x-y). \quad (1.63)$$

Por lo tanto, el propagador de Feynman (1.62) es la función de Green en el espacio de configuración de la ecuación de Klein-Gordon (1.2). El procedimiento aquí realizado se puede seguir para distintos campos, por lo que, con un procedimiento análogo, se puede obtener el propagador de Feynman (función de Green) para el campo de Dirac. Escribiendo los valores esperados de las campos de Dirac se tiene

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s u_a^s(p)\bar{u}_b^s(p)e^{-ip\cdot(x-y)} = (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} \\ \langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s v_a^s(p)\bar{v}_b^s(p)e^{-ip\cdot(y-x)} = -(i\not{\partial} + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(y-x)}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Se pueden juntar las expresiones anteriores en una sola, como se hizo para Klein-Gordon, con uso de la función Heaviside. Siguiendo este procedimiento se emplea el teorema de Cauchy, lo que proporcionará un factor de $1/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$. Aplicamos en ambas las respectivas derivadas ($\not{\partial} = \gamma^\mu \partial$), lo que bajará un término de la forma \not{p} . Reescribiendo (1.64) en términos del operador de orden temporal y tras haber aplicado $\not{\partial}$, se tiene

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}. \quad (1.65)$$

Así, (1.65) es el propagador de Dirac en el espacio de configuración. Como se mencionó con el caso de Klein-Gordon, se suele utilizar en su mayoría la representación en el espacio de momento; para ello basta tomar la expansión en Fourier de las expresiones. Con esto, podemos escribir los propagadores en el espacio de momento como

$$\begin{aligned} \text{Klein - Gordon} &: \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ \text{Dirac} &: \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Cabe mencionar, como se puede apreciar en (1.65), el propagador para fermiones muestra que no conmutan entre sí, al contrario que los escalares. Esto se debe tener en consideración al momento de hacer las contracciones en la expansión en serie del Hamiltoniano o Lagrangiano en cuestión.

Con esto se concluye un breve repaso a escalares y fermiones con espín 0 y 1/2 respectivamente, las ecuaciones que rigen su dinámica y su cuantización. Este último repaso a los propagadores y su relación con las funciones de Green se empleará en los siguientes capítulos, antes veremos la relación del generador funcional (integral de camino) con los valores de expectación de los campos, lo que permitirá en el capítulo 3, facilitar la obtención de la ecuación de Dyson-Schwinger. Esta ecuación solo se empleará en la deducción de la acción efectiva, sin embargo, en su respectiva deducción nos familiarizará con los generadores funcionales y la derivada funcional, haciendo más ameno el tratamiento posterior en la acción efectiva irreducible a 2 partículas y los diagramas de vacío conectados a calcular.

Capítulo 2

Integral de Camino

Hay diversas formas de trabajar en teoría de campo, como la ya vista cuantización canónica; otra es por medio de la integral de camino, método introducido por Feynman [11]. Este método en cuanto a formulación resulta más intuitivo, además que se puede formular tanto para teoría de campo como para mecánica cuántica. Para ambos casos se tiene una deducción similar, no obstante, se hará con detalle para mecánica cuántica no relativista.

2.1. Deducción

Recordando la evolución temporal de un estado en el esquema de Schrödinger, depende del operador de evolución temporal, una exponencial que involucra al Hamiltoniano (si es independiente del tiempo) $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}$. Con este operador tenemos la evolución de un estado al tiempo t_1 hacia otro estado al tiempo t_2 , considerando $t_2 > t_1$. Dada la interpretación estadística de la mecánica cuántica, no solemos detenernos a conocer la configuración del estado en tiempos intermedios, simplemente del punto A al punto B cual es la probabilidad. Sin embargo, la integral de camino se enfocará en eso, si bien no podemos saber el lugar preciso en el que se encuentra o el camino que ha seguido, si podemos conocer la trayectoria más probable, y buscaremos calcular dicho camino mediante intervalos pequeños.

Ahora bien, considerando nuestro estado inicial, llamémoslo $|q_1\rangle$ al tiempo t_1 , y el estado final $|q_2\rangle$ al tiempo t_2 , en el esquema de Heisenberg al calcular el braket entre estos dos estados se obtiene la misma expresión que la evolución temporal en el esquema de Schrödinger. Tomando $t_2 = t_1 + \Delta t$, y haciendo $\Delta t \rightarrow 0$, reescribimos la evolución temporal de estos estados como

$$\langle q_2|q_1(t_2)\rangle = \langle q_2|exp\left(-i\hat{H}\Delta t\right)|q_1\rangle \simeq exp[-i\Delta tV(q_1)]\langle q_2| -i\Delta t\frac{\hat{p}^2}{2m}|q_1\rangle. \quad (2.1)$$

Donde se ha expandido la primer exponencial en serie de Taylor y se ha tomado a orden lineal, pues $\Delta t \rightarrow 0$, por lo que se desprecian términos de orden mayor. Posteriormente se consideró el Hamiltoniano clásico, energía cinética y un potencial, con ambos términos con eigenestados de sus respectivas dependencias, es decir: $\hat{p}|p_i\rangle = p_i|p_i\rangle$ y $\hat{V}(q)|q_i\rangle = V(q_i)|q_i\rangle$. Por último, el término concerniente al potencial se vuelve a escribir como exponencial, bajo el mismo argumento de que $\Delta t \rightarrow 0$. El braket restante con el operador de momento define el propagador de partícula libre.

Se evalúa insertando dos relaciones de completéz de momento. Nombrando a este braket como I se tiene

$$I = \int dp \int dp' \langle q_2|p \rangle \langle p|exp\left(\frac{-i\Delta t \hat{p}^2}{2m}\right)|p' \rangle \langle p'|q_1 \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} exp\left[\frac{i}{\hbar}(q_2 - q_1)p - (-i)\Delta t \frac{\hat{p}^2}{2m}\right]. \quad (2.2)$$

Haciendo un cambio de variable $p = k$, $x = q_2 - q_1$, $\alpha = \frac{\hbar\Delta t}{2m}$ y $t = k - \frac{x}{2\alpha}$, con ello se procede a completar el cuadrado, obteniendo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-i\alpha k^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha} e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{x^2}{4\alpha}} = \left(\frac{me^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[\frac{im(q_2 - q_1)^2}{2\Delta t}\right], \quad (2.3)$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$. Con esto, la amplitud de probabilidad del estado q_1 al estado q_2 queda dado por

$$\langle q_2 t_2 | q_1 t_1 \rangle = \left(\frac{me^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[i\left(\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2\Delta t} - \Delta t V(q_1)\right)\right]. \quad (2.4)$$

Nombrando $\dot{q}_1 = \frac{q_2 - q_1}{\Delta t}$ reescribimos como

$$\langle q_2 t_2 | q_1 t_1 \rangle = \left(\frac{me^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[i\Delta t \left(\frac{m}{2}\dot{q}_1^2 - V(q_1)\right)\right] = \left(\frac{me^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[i \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} dt L(q_1, \dot{q}_1)\right]. \quad (2.5)$$

Increíblemente hemos obtenido una expresión en la que se involucra explícitamente la densidad Lagrangiana clásica (energía cinética menos el potencial). Esto ha sido para un solo intervalo de tiempo, sin embargo, si decidimos tomar un tiempo inicial t_i y un tiempo final t_f , dividiendo en intervalos del estilo (t_2, t_1) , por superposición podemos construir la amplitud $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ para tiempos finitos a partir de los infinitesimales. Es decir

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \langle q_f t_f | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \langle q_{n-1} t_{n-1} | q_{n-2} t_{n-2} \rangle \cdots \langle q_2 t_2 | q_1 t_1 \rangle \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle. \quad (2.6)$$

Tomando el límite $n \rightarrow \infty$, tal que $\Delta t = \frac{(t_f - t_i)}{n} \rightarrow 0$, además nombrando $|q_0 t_0 \rangle = |q_i t_i \rangle$ y $\langle q_n t_n | = \langle q_f t_f |$ se tiene

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{m=1}^{n-1} dq_m \prod_{p=0}^{n-1} \langle q_{p+1} t_{p+1} | q_p t_p \rangle. \quad (2.7)$$

Hay n intervalos con $\Delta t = \frac{(t_f - t_i)}{n}$ y $(n-1)$ integraciones intermedias. Insertando el propagador libre en los n casos escribimos

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{nme^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi(t_f - t_i)} \right]^{\frac{n}{2}} \int \cdots \int \prod_{m=1}^{n-1} dq_m \prod_{p=0}^{n-1} exp\left[i\left(\frac{nm}{2} \frac{(q_{p+1} - q_p)^2}{(t_f - t_i)} - \frac{(t_f - t_i)}{n} V(q_p)\right)\right]. \quad (2.8)$$

Insertando $1 = \frac{t_f - t_i}{t_f - t_i}$ en el término de diferencia de posición en la exponencial, y reescribiendo con $\dot{q}_p = \frac{q_{p+1} - q_p}{t_f - t_i}$, obtenemos

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{nm e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi(t_f - t_i)} \right]^{\frac{n}{2}} \int \cdots \int \prod_{m=1}^{n-1} dq_m \exp \left[i \sum_{p=0}^{n-1} \Delta t \left[\frac{m}{2} \dot{q}_p^2 - V(q) \right] \right]. \quad (2.9)$$

La expresión (2.10) define la Integral de Camino

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \equiv \int \mathcal{D}(q) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right] = \int \mathcal{D}(q) e^{iS}. \quad (2.10)$$

Se ha reescrito la última parte de la integral de la densidad Lagrangiana como la acción. En el límite $n \rightarrow \infty$, esta expresión da la amplitud de probabilidad exacta en mecánica cuántica para una partícula no relativista de masa m , a propagarse de un punto q_i al tiempo t_i , hacia un punto q_f al tiempo t_f , mientras se mueve en un potencial $V(q)$. En el caso clásico, $\hbar \rightarrow 0$ (escribiendo sin unidades naturales, una \hbar queda dividiendo a la acción), la integral de camino sufre de fuertes oscilaciones, por tanto solo se cumple para pequeñas variaciones, y se tiene

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \longrightarrow \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) = 0. \quad (2.11)$$

Resulta satisfacer el principio de Hamilton, que la variación de la acción sea nula y por tanto, poder obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange [5]. Además, dada la construcción aquí presentada, es claro que satisface el principio de superposición, por lo que podemos separarla en los intervalos de tiempo deseados. Obtenida la expresión de integral de camino veamos algunas propiedades que serán útiles posteriormente.

La deducción presentada ha sido en base a un Hamiltoniano clásico, sin embargo, es usual considerar términos de fuentes o interacción. Para ello consideremos en general la siguiente expresión

$$\langle q_f t_f | Q(t_j) Q(t_k) e^{iJ(t)Q(t)} | q_i t_i \rangle. \quad (2.12)$$

Por superposición, el término de corrientes se agrega directamente a la exponencial final de la integral de camino, es decir, se suma el término al de la acción. Por otra parte, los operadores $Q(t_j)Q(t_k)$ al ser considerados como en la deducción, eigen estados de los estados de posición; al momento de agregar las relaciones de completez, estos afectarán a los estados con su respectiva etiqueta, por tanto se deberá considerar los distintos casos posibles: $t_j < t_k$ o $t_k < t_j$. Un problema similar se tuvo en la sección 1.3 al calcular el propagador, por tanto, al igual que en esa sección, debemos involucrar al operador de ordenamiento temporal. Éste operador, como hemos mencionado, considera los posibles ordenamientos de acuerdo a la coordenada temporal. Así, (2.12) se reescribe en el caso en que $t_k < t_j$ como (2.13). Para considerar ambos casos en una sola expresión, tal como se hizo en (1.61), se utiliza la función *Heaviside*.

$$\langle q_f t_f | T \{ Q(t_j) Q(t_k) \} e^{iJ(t)Q(t)} | q_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}(q) q(t_j) q(t_k) e^{i[S + J(t)Q(t)]}. \quad (2.13)$$

Una expresión de la forma (2.13) se conoce como generador funcional. De igual forma, para otros operadores que sean eigen funciones de los estados de posición o momento, se obtendrá una

expresión similar a (2.13) ([6]). El mismo uso de ordenamiento temporal en teoría de campo, deja ver que el valor esperado en el vacío o estado base, de este operador, resulta (y algunas veces se define directamente como tal) en las funciones de Green de la teoría en cuestión. La manera en que se justifica que el valor esperado de (2.13) sea del vacío hacia el vacío es con el teorema de Abers y Lee ([8]), así, se relacionarán las funciones de Green con el generador funcional.

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\}|0\rangle \equiv G_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.14)$$

Para la ecuación de Dyson-Schwinger se trabajará por completo por medio de funcionales, por tanto mayores detalles se darán en el siguiente capítulo. De momento basta hacer notar la relación entre funcionales y funciones de Green.

2.2. Teorema de Abers y Lee

Hemos mencionado este teorema para justificar la expectación del valor esperado del operador de ordenamiento temporal, del vacío hacia el vacío (2.14), este resulta un inusual límite que permite reescribir (2.13). Se busca evolucionar el estado base del Hamiltoniano libre (H_0) $|0\rangle$ a lo que ahora llamaremos estado base del Hamiltoniano de Interacción (H_I), antes escrito como $\langle q_f t_f |$ y $|q_i t_i\rangle$, ahora denotados por $\langle \Omega |$ y $|\Omega\rangle$ ¹. Es decir, queremos calcular $\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$. Empecemos con $|0\rangle$, y como se ha mencionado, lo haremos evolucionar con el Hamiltoniano completo ($H = H_0 + H_I$).

$$e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle, \quad (2.15)$$

donde E_n son los eigen valores de H . Se debe suponer que $|\Omega\rangle$ tiene un traslape con $|0\rangle$, es decir, $\langle \Omega|0\rangle \neq 0$. Bajo esta suposición, la serie anterior contiene a $|\Omega\rangle$ y se puede escribir

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle, \quad (2.16)$$

donde $E_0 = \langle \Omega | H | \Omega \rangle$. Como $E_n > E_0$ para todo $n \neq 0$, podemos omitir el resto de términos de la serie ($n \neq 0$) mandando T a ∞ con una ligera parte imaginaria agregada: $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$. Así, el factor exponencial $e^{-iE_n T}$ desaparece lentamente para $n \neq 0$, y tenemos

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle \right)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle. \quad (2.17)$$

Como ahora T es muy grande, no hay problema en hacerle un pequeño cambio por una constante

¹Cabe mencionar que en la deducción presentada en integral de camino, no hay problema alguno en tener $\langle q_i t_f | q_i t_i \rangle$, el punto de inicio igual al final, además aquí $|\Omega\rangle$ significa el estado base que puede no necesariamente ser el vacío.

$$\begin{aligned}
|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(t_0-(-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(t_0-(-T))} e^{-iH_0(-T-t_0)} |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(t_0-(-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle
\end{aligned}$$

En la segunda línea se ocupó $H_0 |0\rangle = 0$. Esta expresión afirma que podemos obtener $|\Omega\rangle$ al evolucionar $|0\rangle$ de un tiempo $-T$ a un tiempo t_0 con el operador U . Análogamente se encuentra la expresión para $\langle \Omega|$

$$\langle \Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0| U(T, t_0) (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1}. \quad (2.18)$$

Juntando estos resultados y suponiendo $x^0 > y^0 > t_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1} \langle 0| U(T, t_0) \\
&\quad \times [U(x^0, t_0)]^\dagger \phi_I(x) U(x^0, t_0) [U(y^0, t_0)]^\dagger \phi_I(y) U(y^0, t_0) \\
&\quad \times U(t_0, -T) |0\rangle (e^{-iE_0(t_0-(-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-iE_0(2T)})^{-1} \\
&\quad \times \langle 0| U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) |0\rangle
\end{aligned}$$

Insertando un 1 de la forma

$$1 = \langle \Omega|\Omega\rangle = (|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-iE_0(2T)})^{-1} \langle 0| U(T, t_0) U(t_0, -T) |0\rangle$$

Manteniendo la suposición de que $x^0 > y^0$, entonces tenemos

$$\langle \Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0| U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) |0\rangle}{\langle 0| U(T, -T) |0\rangle} \quad (2.19)$$

Notemos que los campos en ambos lados están acomodados de forma temporal, esto debido a la suposición antes hecha ($x^0 > y^0$). De considerar el caso contrario ($y^0 > x^0$) la expresión sigue siendo correcta, por tanto, para considerar ambos casos se utiliza nuevamente el operador de ordenamiento temporal, así reescribimos

$$\langle \Omega|T \{ \phi(x)\phi(y) \} |\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle}{\langle 0|T \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle} \quad (2.20)$$

Esta expresión se cumple de igual forma para n campos. Con este resultado ahora solo debemos calcular términos del estilo $\langle 0|T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} |0\rangle$.

2.3. Teorema de Wick y Diagramas de Feynman

Como se mencionó en (2.14), la operación $\langle 0|T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} |0\rangle$ está relacionada con las funciones de Green de la teoría. Es justo de este resultado que se desarrolla el teorema de Wick². Dicho teorema establece lo siguiente

$$T \{ \phi(x_1)\phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} = N \{ \phi(x_1)\phi(x_2) \dots \phi(x_n) + \text{Toda posible contracción} \}, \quad (2.21)$$

donde $N \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \}$ es el ordenamiento normal, ya utilizado en (1.7); y donde la contracción se define como

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{si } x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

para campos escalares, y resulta ser el propagador de Feynman (1.62). Además de escribir a cada campo en frecuencia positiva y negativa, es decir $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$. Por tanto la contracción se tiene como $\overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x - y)$.

A partir del teorema de Wick, tras los términos de interacción en serie de potencia, se encuentra que términos del estilo de (2.14) equivalen precisamente a las funciones de Green. Tomemos un ejemplo sencillo más allá del trivial (solo dos campos), el ordenamiento temporal con cuatro campos, dado por el siguiente braket $\langle 0|T \{ \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \} |0\rangle$. Aplicando el teorema de Wick, obtenemos ordenamientos normales de los términos y las contracciones posibles, sin embargo, al tomar el valor esperado con el vacío, al tener orden temporal se colocarán operadores de aniquilación del lado derecho, aniquilando así dichos estados. Por lo tanto, los únicos términos que aportan son los que están completamente contraídos, con lo que, solo los términos con una cantidad par de campos aportan.

$$\begin{aligned} \langle 0|T \{ \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \} |0\rangle &= \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \\ &\quad \overline{\phi(x_1)\phi(x_4)\phi(x_2)\phi(x_3)} \pm \overline{\phi(x_1)\phi(x_3)\phi(x_2)\phi(x_4)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En el último término se ha colocado \pm para incluir el caso en que los campos no conmuten, como resultará si se trabaja con fermiones. El propagador de Feynman en el espacio de posiciones está dado en (1.62), sin embargo, es más común utilizar la forma en el espacio de momentos. Para ello basta tomar la expansión de Fourier de la expresión y así, obtener

$$D_F(x - y) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.24)$$

Este propagador representa la probabilidad de crear una partícula en x y ser aniquilada en y , o de igual forma, la creación de una anti partícula en y y ser aniquilada en x .³ Calcular cantidades

²Solo tomaremos el resultado del teorema, sin embargo se recomienda consultar [3], donde se hace una demostración formal del teorema y su relación con los diagramas de Feynman. En este mismo texto se justifica el teorema de Abers y Lee desde el punto de vista diagramático.

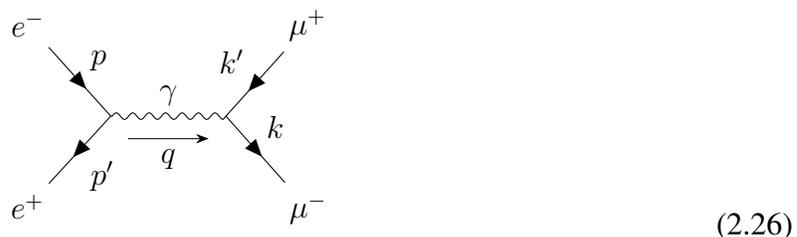
³Esta concepción indistinta del propagador para partícula de antipartícula fue introducida por Feynman [13].

que involucren términos de interacción y posteriormente amplitudes de probabilidad llega a ser un desafío, por lo que gracias al ingenio de Feynman, esto se redujo bastante al introducir sus diagramas ([3], [7]). De esta forma (2.23) puede verse como

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} x_1 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} x_1 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} x_1 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_4 \\ \bullet \end{array} \\
 \begin{array}{c} x_3 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_4 \\ \bullet \end{array} \pm & \begin{array}{c} x_2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_4 \\ \bullet \end{array} + & \begin{array}{c} x_3 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ \bullet \end{array} = \\
 & \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) \pm \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta(x_2 - x_4) \\
 & + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_3 - x_2)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

al ser solo propagación libre (sin términos de interacción) se ven como líneas que unen las posiciones hacia las que se propagan⁴. El uso de los diagramas de Feynman facilita el cálculo de amplitudes u otros procesos, por lo que para cada tipo de partícula (escalar, fermión, etc.) se tiene una representación, y cada parte de un diagrama posible aporte un término a la amplitud. En (2.26) se muestra un diagrama a nivel árbol del proceso de dispersión $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$, comúnmente los diagramas a nivel árbol representan la mayor aportación a la amplitud, mientras que los diagramas de vacío se consideran como correcciones (dada su poca aportación, reiterando, en la mayoría de los casos)⁵, así como los diagramas que contienen loops [3].

La propuesta de Feynman de los diagramas fue un tanto informal [22], siendo Wick y Dyson quienes posteriormente demostraron formalmente que este tratamiento en efecto, era correcto [4]. La asignación de “valores” a cada parte del diagrama se le conoce como *Reglas de Feynman*, y los valores dependen de la teoría en cuestión (QED, QCD, etc.) [2]. Nos basta tener noción que en teoría de campo se puede trabajar de manera esquemática, dado que para la deducción de la ecuación de Dyson-Schwinger y las relaciones partículas irreducibles, se hará uso de diagramas. Los diagramas a emplear no serán necesariamente los usuales en QED, pero representan algún tipo de proceso; al hacer uso de diagramas nos facilita el entender y poder desarrollar con facilidad la deducción de alguna proceso/ecuación.



Como convención si las flechas apuntan en la dirección temporal se trata de partículas, mientras que para antipartículas la dirección es la opuesta. Al igual que con la posición, no se debe considerar como tal la dirección del flujo temporal en una dirección del diagrama, este sirve solo para considerar un proceso posible.

Cabe mencionar que si bien los diagramas facilitan obtener amplitudes, estos siguen siendo parte de una serie infinita de términos (serie de Dyson (2.27)). Los diagramas que se emplearan serán

⁴Se debe aclarar que la posición como tal no influye, solo es referencia a la posición de propagación, no se deben considerar como coordenadas.

⁵Un diagrama de vacío es aquel que no tiene estados externos.

de funcionales (2.13), donde se engloban todos los procesos posibles, pero siguen una analogía en cuanto asignar valor a cada parte del mismo.

$$U(t, t') \equiv T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\}. \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) presenta la serie de Dyson⁶, donde H_I es la parte de interacción del Hamiltoniano total. En la deducción formal de esta ecuación se requiere separar al Hamiltoniano en libre e interacción, y considerar en el de interacción como pequeño para proceder a hacer una expansión en serie, mediante un cambio de límites de integración se obtiene la expansión de una exponencial. Por la expansión en serie que se puede hacer de la exponencial, cada término de mayor potencia tiene más "componentes", lo que permite relacionarlo con diagramas de Feynman más complejos, aunque de igual forma, como se avanza en tal serie, se incluye un factor $g^n/n!$ (g la constante de acoplamiento, que tan "fuerte" es la interacción), razón por la que como se mencionó anteriormente, su aportación va siendo menor.

Teniendo la relación clara entre funciones de Green, generadores funcionales y valores de expectación del vacío, se facilita la comprensión de la deducción presentada en el siguiente capítulo de la ecuación de Dyson-Schwinger. Una breve descripción de los diagrama de Feynman, que si bien, a continuación se emplearán los diagramas conocidos como *blobs*, es útil para cuando se calculen los diagramas de vacío conectados.

⁶Se omite la deducción de la ecuación, una deducción detallada se presenta en el capítulo 4 de Peskin [3], mismo donde se presenta la deducción de el teorema de Wick.

Capítulo 3

Ecuación Dyson-Schwinger

Se puede resolver una teoría cuántica de campos al determinar las funciones de Green de la teoría, dado que las funciones de Green describen la propagación e interacción de los campos presentes en la teoría. Diferentes funciones de Green de la misma teoría están conectadas por ciertas ecuaciones de movimiento, la *Ecuación de Dyson-Schwinger*. Al ser derivada de la invariancia traslacional de la integral de camino, es completamente no perturbativa y describe la física de sistemas en todas las escalas [16].

Al describir la propagación e interacción, se les suele llamar las ecuaciones de Euler-Lagrange de teoría cuántica de campo. Además, proporcionan una familia infinita de ecuaciones diferenciales [10]. En este capítulo se dará una introducción a esta ecuación, se realizará una deducción diagramática para tener mayor noción de lo que representa. Se introduce la relación entre el generador de diagramas conectados y la acción efectiva por medio de los vértices Irreducibles a una Partícula. Concluimos con una derivación formal de la deducción de ecuación de Dyson-Schwinger para mostrar un contraste de la información que se oculta en todo el desarrollo hecho anteriormente.

3.1. Introducción Esquemática

El uso de diagramas por parte de Feynman facilita la noción de interacción en las teorías cuánticas, por tal motivo, se realizará la deducción de la ecuación de Dyson-Schwinger a partir de diagramas. La regla principal será la de interactuar o no interactuar, similar a la empleada en la matriz de dispersión S ; cuando se le resta la identidad se asegura considerar eventos con interacción, no obstante, aquí dejaremos interacción y propagación libre (interactuar o no interactuar). Iniciamos presentando al propagador libre o función de Green y su inverso

$$\begin{array}{c} 1 \\ \bullet \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \end{array} = G_{12}^{(0)} \quad y \quad \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 1' \\ \bullet \end{array} = (G_0^{-1})_{11'} \quad (3.1)$$

ambos términos son similares, ya que $G_{12}^{(0)} = G_{21}^{(0)}$ y $(G_0^{-1})_{11'} = (G_0^{-1})_{1'1}$. El primer término es equivalente al propagador de Feynman mostrado al final del primer capítulo. Además satisfacen la relación

$$(G_0^{-1})_{11'} G_{1'2}^{(0)} = \delta_{12} = G_{11'}^{(0)} (G_0^{-1})_{1'2}. \quad (3.2)$$

En seguida tenemos la representación de los vértices

$$g_{123} = \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \text{ --- } \bullet \\ | \\ 3 \end{array} \quad , \quad g_{1234} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \quad (3.3)$$

Los vértices describen las posibles interacciones permitidas a tomar lugar. El valor numérico del vértice y la amplitud para el proceso es especificado por g (la constante de acoplamiento o carga), esto da la fuerza del proceso. Sin pérdida de generalidad, el tratamiento aquí hecho abarcará solo casos para vértices con tres líneas, aunque en la teoría a emplear (modelo electrodébil) se tengan casos de vértices con 4 líneas, como el caso del vértice del gluón, del Higgs, etc. [9], [3]. Ahora, considerando una amplitud $A_{1,2,\dots,N}$ especificada por N-estados externos, la llamamos una amplitud de N-estados, esta amplitud puede describir

1. Amplitud de probabilidad de transición para colisión de 2 partículas en 2 estados (1 y 2), a terminar en una configuración descrita por los estados 3, 4, ..., N .
2. El decaimiento de partículas en el estado 1 a partículas en los estados 2, 3, ..., N .

Estas amplitudes de probabilidad de condición general, se representan por el diagrama de N-estados

$$A_{12\dots N} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad N \end{array} \quad (3.4)$$

El diagrama anterior especifica cualquier amplitud que se siga de la regla de interactuar o no. La amplitud de probabilidad para un proceso dado, es construido como representación de los diferentes diagramas posibles a construir con distinta topología, es decir, todos los diagramas topológicamente diferentes que permitan los propagadores y vértices.

3.1.1. Relaciones de Dinámica

Consideraremos por separado los casos en que puede ocurrir el proceso en cuestión, mediante los diagramas. Primero, una partícula que no tiene permitido interactuar, su única opción es propagarse libremente al estado final. El estado final al que llegue puede ser cualquiera, cada uno con su respectiva amplitud. El respectivo diagrama y ecuaciones se tienen como

$$= G_{12}^{(0)} A_{34\dots N} + \dots + G_{1N}^{(0)} A_{234\dots(N-1)}$$

(3.5)

Para una amplitud de 4 estados con partículas idénticas y sin interacción, se tiene un resultado similar al mostrado en (2.25), con la diferencia de como se representa su diagrama de amplitud.

$$= G_{23}^{(0)} G_{14}^{(0)} \pm G_{24}^{(0)} G_{13}^{(0)} + G_{12}^{(0)} G_{34}^{(0)},$$

(3.6)

nuevamente \pm se mantiene positivo para bosones y negativo para fermiones. Considerando ahora solo el caso en que la partícula interactúa, la amplitud del N-ésimo estado para una teoría con vértices de 3 y 4 líneas¹ está dado como

$$= \frac{1}{2!} G_{11}^{(0)} g_{123} A_{23\dots N} + \frac{1}{3!} G_{11}^{(0)} g_{1234} A_{234\dots N}.$$

(3.7)

Por lo tanto, la ecuación general para una partícula, es considerar ambos casos, interactuar o no interactuar. Así, la expresión general es la suma de los diagramas de (3.5) y (3.7). En base a los diagramas anteriores, deduzcamos un diagrama que será útil más adelante. Para la amplitud de 2 estados, en una teoría de vértices de 3 líneas se tiene solo propagación libre a un estado más el diagrama de interacción con un estado externo, esto se expresa como

$$+ \frac{1}{2} \dots$$

(3.8)

El primer diagrama del lado derecho implica el propagador por, la amplitud resultante de la suma de todos los diagramas de vacío. El segundo diagrama del lado derecho corresponde a la interacción, este se puede escribir nuevamente con la opción de interactuar o no.

¹En cuestiones del factor de combinación, se tiene la convención: "Un vértice de N-líneas lleva un factor explícito de $\frac{1}{(N-1)!}$ "

$$\text{tadpole} = \text{self-energy loop} + \frac{1}{2} \text{tadpole on propagator} + \frac{1}{2} \text{vertex correction} \quad (3.9)$$

Los primeros 2 diagramas del lado derecho corresponden a no interactuar (propagarse libremente al vértice o al estado externo). El tercer diagrama implica interactuar, exponiendo un 2° vértice con 3 líneas. Con esto podemos reescribir el "tadpole" o "renacuajo" como

$$\text{tadpole} = \frac{1}{2} \text{tadpole on propagator} = \frac{1}{2} \text{self-energy loop} + \frac{1}{4} \text{vertex correction} \quad (3.10)$$

Hemos contraído en (3.8) la propagación del lado derecho; de los 2 términos de (3.8), el primero se anula pues ya no habría propagación. En base a este razonamiento, se tiene análogo para (3.9), que su 2° diagrama se anula, así llegamos a escribir (3.10).

3.2. Diagramas a Ecuaciones Diferenciales

Tras una breve introducción al uso de notación diagramática, podemos pasar a trabajar con el funcional para deducir la ecuación de Dyson-Schwinger. Al funcional generador $Z[J]$, que es el conjunto completo de todas las amplitudes posibles en una teoría dada, le asociaremos el siguiente diagrama

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} A_{12\dots N} J_1 J_2 \cdots J_N = \text{diagram with } Z \text{ in a circle} \quad (3.11)$$

En base a lo presentado en la sección anterior, esto se puede escribir como

$$\text{diagram with } Z \text{ in a circle} = \text{diagram with } Z \text{ in a circle} + \text{diagram with } Z \text{ in a circle and one source} + \frac{1}{2!} \text{diagram with } Z \text{ in a circle and two sources} + \frac{1}{3!} \text{diagram with } Z \text{ in a circle and three sources} + \dots, \quad (3.12)$$

donde $\text{---}\otimes = J$ son las corrientes o fuentes. Por medio de la derivada funcional (véase apéndice B) podemos obtener la amplitud en presencia de la fuente

$$A_{12\dots N}[J] = \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \cdots \delta J_N} \Big|_{J=0}. \quad (3.13)$$

Formalmente como se muestra en el apéndice B, debe haber un factor de i , sin embargo, por el resto de la deducción se omitirá. Para teorías sin interacción en presencia de la fuente, la propagación de un estado "libre" a uno con fuente se representa como

$$\text{diagram with } 1 \text{ and } 2 \text{ sources} = G_{12}^{(0)} J_2. \quad (3.14)$$

Tras realizar una derivada funcional respecto a J_1 en (3.12), se puede ver como

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} &= \frac{\delta}{\delta J_1} \left[1 + A_1 J_1 + \frac{1}{2!} A_{1\bar{2}} J_1 J_2 + \cdots + \frac{1}{N!} A_{1\bar{2}\dots\bar{N}} J_1 J_2 \cdots J_N \right] \\ &= A_1 + \frac{1}{(2-1)!} A_{1\bar{2}} J_2 + \cdots + \frac{1}{(N-1)!} A_{1\bar{2}\dots\bar{N}} J_2 J_3 \cdots J_N \\ &= \text{1} \text{---} \text{Z} \end{aligned}$$

Hemos obtenido el tadpole del funcional $Z[J]$, por lo que, realizar la derivada funcional expone, tras remover la fuente respecto a la que se deriva, el estado correspondiente. Es decir, derivamos respecto a J_1 y esto exhibió el estado 1. Diagramáticamente se tiene

$$\text{1} \text{---} \text{Z} = \text{1} \text{---} \text{Z} + \text{1} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{2} + \frac{1}{2} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \end{matrix} + \cdots \quad (3.15)$$

Considerando una teoría de vértices con 3 líneas, el segundo diagrama del lado derecho se puede escribir como (3.8), solo basta agregar una fuente

$$\text{1} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{2} = \text{1} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{2} + \frac{1}{2} \text{1} \text{---} \text{Z} \text{---} \text{2} \quad (3.16)$$

Estos diagramas representan la propagación libre hacia la fuente, multiplicando a la suma de los diagramas de vacío, por parte del primero, y el segundo representa los diagramas de vértice expuesto. Bajo esta analogía, para cada diagrama de (3.15) se obtiene

$$\frac{1}{2} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \end{matrix} = \frac{1}{2!} 2 \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \end{matrix} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \end{matrix} \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{3!} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \\ \text{4} \end{matrix} = \frac{1}{3!} 3 \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \\ \text{4} \end{matrix} + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \\ \text{4} \end{matrix} \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{N!} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \vdots \\ \text{N} \end{matrix} = \frac{1}{N!} N \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \vdots \\ \text{N} \end{matrix} + \frac{1}{N!} \frac{1}{2} \text{1} \text{---} \text{Z} \begin{matrix} \text{2} \\ \vdots \\ \text{N} \end{matrix} \quad (3.19)$$

En los diagramas del lado derecho se tienen dos factores, el factorial proveniente de la derivada funcional; el factor en los primeros diagramas del lado derecho es un término de simetría, pensando que de las N tienen probabilidad de propagarse libremente y por tanto se consideran los N casos.

En el segundo término el factor de $1/2$ es también factor de simetría. Todos los diagramas se pueden escribir en dos tipos de diagramas, interacción libre y con vértices, así (3.15) se reescribe como

$$\begin{aligned} \bullet \text{---} \textcircled{Z} &= \frac{1}{2} \left(\bullet \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{Z} + \bullet \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{Z} \otimes + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{Z} \otimes \otimes + \dots \right) + \\ &+ \bullet \text{---} \otimes \left(\textcircled{Z} + \textcircled{Z} \text{---} \otimes + \frac{1}{2} \textcircled{Z} \otimes \otimes + \frac{1}{3!} \textcircled{Z} \otimes \otimes \otimes + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

La parte en paréntesis de propagación libre (la segunda línea de la expresión anterior) resulta ser el desarrollo diagramático de el funcional generador $Z[J]$, con eso podemos reescribir

$$\bullet \text{---} \textcircled{Z} = \bullet \text{---} \otimes \textcircled{Z} + \frac{1}{2} \left[\bullet \text{---} \bullet \text{---} \left(\textcircled{Z} + \textcircled{Z} \text{---} \otimes + \frac{1}{2} \textcircled{Z} \otimes \otimes + \dots \right) \right] \quad (3.21)$$

Para la otra parte de la expresión es menos intuitivo, pero se ha factorizando la primer parte del diagrama, la que concierne al propagador libre y el vértice. Nuevamente en esta expresión se ha obtenido el desarrollo diagramático de $Z[J]$, por lo que se tiene

$$\bullet \text{---} \textcircled{Z} = \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{Z} + \bullet \text{---} \otimes \textcircled{Z} \quad (3.22)$$

En (3.22) se presenta la ecuación diagramática fundamental para la amplitud de un estado en presencia de fuentes, para una teoría de tres vértices. Ahora buscaremos la expresión analítica para el primer diagrama del lado derecho de (3.22). Para ello, realizamos la segunda derivada del generador funcional

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_3 \delta J_2} &= \frac{\delta}{\delta J_3} \left(A_2 + A_{2\bar{2}} J_{\bar{2}} + \frac{1}{2} A_{2\bar{2}\bar{3}} J_{\bar{2}} J_{\bar{3}} + \frac{1}{3!} A_{2\bar{2}\bar{3}\bar{4}} J_{\bar{2}} J_{\bar{3}} J_{\bar{4}} + \dots \right) \\ \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_3 \delta J_2} &= A_{23} + A_{23\bar{3}} J_{\bar{3}} + \frac{1}{2} A_{23\bar{3}\bar{4}} J_{\bar{3}} J_{\bar{4}} + \frac{1}{3!} A_{23\bar{3}\bar{4}\bar{5}} J_{\bar{3}} J_{\bar{4}} J_{\bar{5}} + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diferenciar el funcional expone la correspondiente etiqueta de estado de las amplitudes, y si contraemos el vértice, es decir, los estados expuestos los "juntamos" en un vértice, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_{1\bar{1}}^{(0)} g_{\bar{1}23} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_3 \delta J_2} &= \frac{1}{2} G_{1\bar{1}}^{(0)} g_{\bar{1}23} A_{23} + \frac{1}{2} G_{1\bar{1}}^{(0)} g_{\bar{1}23} A_{23\bar{3}} J_{\bar{3}} + \frac{1}{2} G_{1\bar{1}}^{(0)} g_{\bar{1}23} \frac{1}{2} A_{23\bar{3}\bar{4}} J_{\bar{3}} J_{\bar{4}} + \\ &+ \frac{1}{2} G_{1\bar{1}}^{(0)} g_{\bar{1}23} \frac{1}{3!} A_{23\bar{3}\bar{4}\bar{5}} J_{\bar{3}} J_{\bar{4}} J_{\bar{5}} + \dots \end{aligned}$$

Para construirlo, veamos (3.23) de forma diagramática, dado como

$$\begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{Z} = \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{} \textcircled{\bar{3}} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{} \begin{array}{c} \bar{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{4} \end{array} + \dots \quad (3.24)$$

Comparando esto con el desarrollo en la parte con vértice de (3.21), agregando a mano los términos necesario, es decir, multiplicar un medio, un propagador libre por la izquierda y un término de vértice de 3 líneas $\left(\frac{1}{2}G_{1\bar{1}}^{(0)}g_{\bar{1}23}\right)$

$$\frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{Z} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{} \textcircled{\bar{3}} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \textcircled{} \begin{array}{c} \bar{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{4} \end{array} + \dots \right), \quad (3.25)$$

esta expresión se escribe como

$$\frac{1}{2}G_{1\bar{1}}^{(0)}g_{\bar{1}23}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_3 \delta J_2} = \frac{1}{2}G_{1\bar{1}}^{(0)}g_{\bar{1}23}\left(A_{23} + A_{23\bar{3}}J_{\bar{3}} + \frac{1}{2}A_{233\bar{4}} + \dots\right). \quad (3.26)$$

Por lo tanto, podemos escribir algebraicamente a (3.22) como

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} = \frac{1}{2}G_{1\bar{1}}^{(0)}g_{\bar{1}23}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_3 \delta J_2} + G_{1\bar{1}}^{(0)}J_{\bar{1}}Z[J] \quad (3.27)$$

Así hemos derivado diagramáticamente bajo la regla de interactuar o no, la ecuación analítica fundamental, la ecuación de Dyson-Schwinger (3.28) para una teoría de vértices de 3 líneas

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} = G_{1\bar{1}}^{(0)}\left(\frac{1}{2}g_{\bar{1}23}\frac{\delta^2}{\delta J_3 \delta J_2} + J_{\bar{1}}\right)Z[J] \quad (3.28)$$

Veamos el ejemplo de la ecuación para encontrar la amplitud de 2 estados en una teoría de vértices de 3 líneas. Por un lado sabemos

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J_1 \delta J_{1'}} = \frac{\delta}{\delta J_{1'}}A_{12}J_2 = A_{11'}.$$

Mientras que por Dyson-Schwinger sabemos que

$$\frac{\delta}{\delta J_{1'}}\frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} = \frac{\delta}{\delta J_{1'}}G_{1\bar{1}}^{(0)}\left(\frac{1}{2}g_{\bar{1}23}\frac{\delta^2}{\delta J_3 \delta J_2} + J_{\bar{1}}\right)Z[J],$$

donde tras derivar se debe tomar $J = 0$. Así obtenemos

$$A_{11'} = G_{1\bar{1}}\left(\frac{1}{2}g_{\bar{1}23}\frac{\delta^3}{\delta J_3 \delta J_2 \delta J_{1'}} + \delta_{1\bar{1}'}\right)Z[J]. \quad (3.29)$$

Desde (3.28), y un tanto más claro con el ejemplo, podemos ver el porque se dice que se obtiene una familia infinita de ecuaciones diferenciales. Para cada amplitud se obtiene una ecuación diferencial, el grado de la ecuación aumenta conforme aumenta la cantidad de estados a considerar en la amplitud. Además, las ecuaciones están acopladas, lo que dificulta aún más su solución analítica.

En base a esto se puede inferir lo siguiente, en el primer diagrama del lado derecho se pueden separar los diagramas desconectados. Mientras que para el segundo diagrama, ocupamos (3.31) para juntar el blob intermedio con el último blob, el que va a dar a la fuente. Así, reescribimos la ecuación anterior como

$$\bullet \text{---} \text{---} \text{---} \otimes = \bullet \text{---} \omega \text{---} \otimes \text{---} \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \omega \text{---} \text{---} \otimes \text{---} \otimes \quad (3.33)$$

En base a los argumentos presentados para poder reescribir (3.16), podemos reescribir (3.17) - (3.19).

$$\bullet \text{---} \text{---} \otimes = \bullet \text{---} \mathcal{C} \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \omega \text{---} \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \omega \text{---} \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \omega \text{---} \text{---} \otimes \quad (3.34)$$

El primer diagrama del lado derecho contiene todos los diagramas con caminos del estado externo hacia ambas fuentes. El segundo diagrama contiene los diagramas sin caminos del estado externo hacia las fuente. Los últimos diagramas aportan igual y son indiferentes; estos son diagramas con caminos hacia una sola fuente. Al igual que para el tadpole, en los diagramas de camino podemos separar los diagramas de vacío, mientras que en el último (habiendo sumado los dos originales) se utiliza (3.31), así obtenemos

$$\bullet \text{---} \text{---} \otimes = \bullet \text{---} \omega \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \omega \text{---} \text{---} \otimes + 2 \text{---} \omega \text{---} \otimes \quad (3.35)$$

Para (3.18) se tiene

$$\bullet \text{---} \text{---} \otimes = \bullet \text{---} \omega \text{---} \otimes + 3 \text{---} \omega \text{---} \otimes + 3 \text{---} \omega \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \omega \text{---} \text{---} \otimes \quad (3.36)$$

Para el resto de diagramas se procede de manera análoga. Así, la amplitud de 1 estado en presencia de una fuente lleva como ecuación

$$\begin{aligned}
\bullet \text{---} \textcircled{Z} &= \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \left(\textcircled{\omega} + \textcircled{\omega} \text{---} \otimes + \frac{1}{2!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + \frac{1}{3!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \end{array} + \dots \right) \\
&+ \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \otimes \left(\textcircled{\omega} + \textcircled{\omega} \text{---} \otimes + \frac{1}{2!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + \frac{1}{3!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \end{array} + \dots \right) \\
&+ \frac{1}{2!} \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} \left(\textcircled{\omega} + \textcircled{\omega} \text{---} \otimes + \frac{1}{2!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + \frac{1}{3!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \end{array} + \dots \right) \\
&+ \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \end{array} \left(\textcircled{\omega} + \textcircled{\omega} \text{---} \otimes + \frac{1}{2!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + \frac{1}{3!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \end{array} + \dots \right) + \dots \\
\bullet \text{---} \textcircled{Z} &= \textcircled{Z} \left(\bullet \text{---} \textcircled{\omega} + \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \text{---} \otimes + \frac{1}{2!} \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes \end{array} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Introduciendo el generador de diagramas conectados en presencia de la fuente

$$\textcircled{W} = \textcircled{\omega} + \textcircled{\omega} \text{---} \otimes + \frac{1}{2!} \textcircled{\omega} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ \otimes \quad \otimes \end{array} + \dots = W[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} G_{12\dots N} J_1 J_2 \dots J_N \tag{3.38}$$

En base a este nuevo generador obtenemos una relación similar a (3.31), salvo que ahora lo que antes eran consideradas amplitudes, resultan ser los funcionales $Z[J]$ y $W[J]$.

$$\bullet \text{---} \textcircled{Z} = \bullet \text{---} \textcircled{W} \textcircled{Z} \implies \frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} = Z[J] \frac{\delta W[J]}{\delta J_1} \tag{3.39}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver fácilmente, teniendo como solución

$$Z[J] = e^{W[J]} \iff W[J] = \ln Z[J]. \tag{3.40}$$

La deducción presentada del funcional de diagramas conectados se basó en el hecho de tener posibles diagramas desconectados en el funcional completo ($Z[J]$), y por tanto, poder separarlos del resto de diagramas. Esta deducción parece engorrosa cuando se consulta la deducción en textos avanzados, sin embargo, deja más claro la parte de diagramas desconectados. Como contraste se tiene a *Rivers*, quien en su segundo capítulo procede a introducir el funcional de (como el le llama) Funciones de Green conectadas: “Diferenciando la serie de $Z[J]$ respecto a $j(\alpha)$. Esto da pie a un campo A externo en α , permitiendo una expansión de funciones de Green. Si seguimos esta línea, cada función de Green puede ser separada en dos partes, la parte conectada a α y el resto. El resto, por sí mismo desconectado, solamente puede ser $Z[J]$ ” [10].

Por construcción, $W[J]$ es el generador de las amplitudes conectadas o funciones de Green. Al igual que $Z[J]$ satisfase

$$G_{12\dots N} = \frac{\delta^N W[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \dots \delta J_N} \Big|_{J=0}. \quad (3.41)$$

Para la primera derivada del generador de amplitudes conectadas se tiene

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_1} = G_{\bar{1}} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} G_{\bar{1}12\dots N} J_1 J_2 \dots J_N, \quad (3.42)$$

de manera diagramática se puede representar como

$$\bullet \text{---} \textcircled{W} = \bullet \text{---} \textcircled{w} + \bullet \text{---} \textcircled{w} \otimes + \frac{1}{2!} \bullet \text{---} \textcircled{w} \begin{array}{l} \diagup \otimes \\ \diagdown \otimes \end{array} + \dots \quad (3.43)$$

La ecuación (3.42) no tiene referencia al contenido de la teoría en cuestión, solo expresa la estructura polinomial del generador, en términos de la fuente. Para introducir la teoría usaremos la ecuación de Dyson-Schwinger para $Z[J]$ (3.28) y la relación entre $Z[J]$ y $W[J]$ (3.40). Insertando esta última en la ecuación de Dyson-Schwinger se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} &= \frac{1}{2} G_{\bar{1}\bar{1}}^{(0)} \left(g_{\bar{1}23} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_3 \delta J_2} + J_{\bar{1}} Z[J] \right) \\ \frac{\delta e^{W[J]}}{\delta J_1} &= G_{\bar{1}\bar{1}}^{(0)} \left(g_{\bar{1}23} \frac{\delta^2 e^{W[J]}}{\delta J_3 \delta J_2} + J_{\bar{1}} e^{W[J]} \right). \end{aligned}$$

Realizando las correspondientes derivadas, factorizando y eliminando la exponencial se obtiene

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_1} = G_{\bar{1}\bar{1}}^{(0)} \left[J_2 + \frac{1}{2} g_{234} \left(\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_4 \delta J_3} + \frac{\delta W[J]}{\delta J_3} \frac{\delta W[J]}{\delta J_4} \right) \right]. \quad (3.44)$$

Hemos obtenido la ecuación diferencial funcional fundamental para el generador de amplitudes conectadas (3.44). Su representación diagramática está dada por

$$\bullet \text{---} \textcircled{W} = \bullet \text{---} \textcircled{W} \otimes + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \textcircled{W} \begin{array}{l} \diagup \textcircled{W} \\ \diagdown \textcircled{W} \end{array} + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \textcircled{W} \begin{array}{l} \diagup \textcircled{W} \\ \diagdown \textcircled{W} \end{array}. \quad (3.45)$$

Lo que hasta ahora se ha tomado como amplitudes, se definieron en términos de los diagramas, por lo que para teoría cuántica de campo se tienen como los valores esperados de productos de campos cuánticos. Por ejemplo, la amplitud conectada de 2-estados es la función de Green de 2 puntos.

3.4. Vértices Irreducibles a una Partícula

Se ha explorado el funcional a partir de las amplitudes de los procesos posibles, ahora, para poder encargarse de la totalidad de diagramas conectados se debe explotar su topología por clasificación. Para el funcional de diagramas conectados hemos hecho uso de los diagramas que tienen un camino que conecta el estado exterior hacia la fuente. Ahora, nos fijaremos en los diagramas Irreducibles a una Partícula (1PI)³.

Todos los diagramas pueden ser clasificados únicamente por esta propiedad topológica:

1. Pueden ser cortados en dos, cortando cero (1PI), uno, dos etc., líneas internas.

Bajo esta propiedad, los diagramas de 1PI son aquellos que no se pueden dividir en sub diagramas al cortar una línea interna. Esto conducirá a la aparición de vértices irreducibles a una partícula. Considerando la función de Green de 1-estado conectado en presencia de la fuente, es decir, la derivada del generador de funciones de Green conectadas

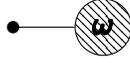
$$\varphi_1 = \frac{\delta W[J]}{\delta J_1} - \text{El Campo.} \tag{3.46}$$

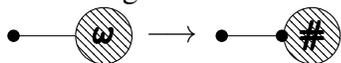
Además de ser función del estado expuesto por diferenciación, el campo es también un funcional de la fuente. De manera diagramática, "El Campo"⁴ está dado como

$$\varphi_1 = \varphi_1[J] = \bullet \text{---} \textcircled{W}, \tag{3.47}$$

que es justo (3.45), de esta misma expresión se puede ver que el estado expuesto al derivar $W[J]$, del campo, arroja un propagador libre, que en su posterior propagación tiene dos opciones

1. Propagarse directamente a la fuente (1^{er} diagrama de 3.45).
2. Interactúa, sus diagramas se dividen topológicamente como
 - a) El estado expuesto donde es arrojado un propagador, puede entrar en la estructura de diagramas conectados, que tienen la propiedad de no poder ser cortados en 2 al cortar una sola línea interna de propagación, excepto el propagador arrojado.

Por definición, dichos diagramas no deben terminar en la fuente; así, estos diagramas son subconjunto del conjunto de diagramas de .

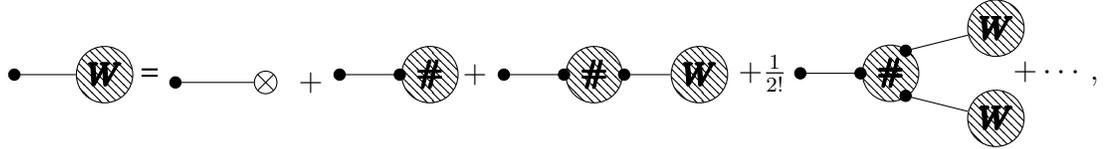
A los diagramas obtenidos se les llama: "Diagramas Irreducibles a una Partícula". Los diagramas 1PI se representan como .

³Si bien las siglas serían IIP, se opta por mantener durante el resto del texto las siglas en inglés 1PI.

⁴También llamado campo promedio, medio o clásico. Interpretando la teoría diagramática como una teoría de campo, la amplitud de 1-estado es el valor promedio de el campo cuántico (en presencia de la fuente).

b) El propagador arrojado entra en la parte diagramática irreducible de una partícula y emerge en una parte diagramática, tal que el diagrama total se puede cortar en 2 al cortar una línea interna, en exactamente 1 o 2, o 3, ... lugares. Todas estas líneas emergen en una función de Green de 1-estado conectado en presencia de la fuente, el campo.

Las funciones de Green de 1-estado conectado (tadpole), se representa en términos de los vértices irreducibles de una partícula con tadpoles unidos:



donde se han introducido las funciones vértice 1PI, $\Gamma_{1,2,\dots,N}$

$$\Gamma_{12\dots N} = \text{diagram of a circle with '#', N external lines labeled 1, 2, \dots, N} \quad (3.48)$$

De acuerdo a la construcción topológica, los vértices 1PI no dependen de la fuente J . Con ayuda de estos vértices, el campo (φ_1) se puede escribir como

$$\varphi_1 = G_{12}^{(0)} \left(J_2 + \Gamma_2 + \Gamma_{23}\varphi_3 + \frac{1}{2!}\Gamma_{234}\varphi_3\varphi_4 + \frac{1}{3!}\Gamma_{2345}\varphi_3\varphi_4\varphi_5 + \dots \right). \quad (3.49)$$

Juntando los vértices 1PI en un generador, la acción efectiva se tiene como

$$\Gamma[\varphi] = \sum_N \frac{1}{N!} \Gamma_{12\dots N} \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_N. \quad (3.50)$$

Así, los vértices 1PI se obtienen mediante

$$\Gamma_{12\dots N} = \frac{\delta^N \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2 \dots \delta \varphi_N} \Big|_{\varphi=0}, \quad (3.51)$$

con lo cual se reescribe el campo como

$$\varphi_1 = G_{12}^{(0)} \left(J_2 + \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_2} \right). \quad (3.52)$$

Introducimos la notación diagramática para la acción efectiva. El generador de vértices 1PI

$$\Gamma[\varphi] = \text{diagram of a circle with '\varphi'} \longrightarrow \frac{\Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_1} = \frac{1}{\delta \varphi_1} \text{diagram of a circle with '\varphi'} \quad (3.53)$$

Aplicando la función de Green inversa $\left((G_0^{-1})_{1\bar{1}} G_{12}^{(0)} = \delta_{12} \right)$ en (3.49), podemos reescribir

$$\begin{aligned}
(G_0^{-1})_{12}\varphi_2 &= J_1 + \Gamma_1 + \Gamma_{12}\varphi_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{123}\varphi_2\varphi_3 + \dots \\
0 &= J_1 + \Gamma_1 + (-G_0^{-1})_{12}\varphi_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{123}\varphi_2\varphi_3 + \dots
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Absorbiendo el propagador libre inverso en la definición del vértice irreducible de 2 estados: $(\Gamma - G_0^{-1})_{12} \rightarrow \Gamma_{12}$, se puede reescribir

$$0 = J_1 + \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_1} = -\otimes + \text{diagrama con } \psi \tag{3.55}$$

El contenido de (3.46) y (3.55), es que, salvo una constante, la acción efectiva es la transformada de Legendre⁵, del generador de funciones de Green conectadas.

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - J\varphi. \tag{3.56}$$

En ausencia de fuentes $J = 0 \rightarrow \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_1} = 0$: "La acción efectiva es estacionaria con respecto al campo". Esto establece que los posibles valores del campo se pueden buscar entre los que hacen que la acción efectiva sea cero.

Con esto concluimos la deducción esquemática de la ecuación de Dyson-Schwinger, que como se pudo notar, abarcó pequeños temas más allá del funcional completo, como los diagramas completamente conectados, vértices 1PI y sus respectivos diagramas; esto con el hecho de que al presentar la derivación formal, sean más accesible estos temas. No obstante, la siguiente deducción solo abarca hasta la relación entre el funcional completo y el de diagramas conectados.

3.5. Deducción Formal

El aspecto primordial para la derivación de las ecuaciones de Dyson-Schwinger es el hecho de que la integral funcional de una derivada total es cero [17], por lo que

$$\int \mathcal{D}[\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi} \equiv 0. \tag{3.57}$$

Considerando una teoría escalar, en base a lo anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}[\phi] \frac{\delta}{\delta\phi_k} e^{iS[\phi] + iJ_i\phi_i} = \int \mathcal{D}[\phi] \left(i \frac{\delta S}{\delta\phi_k}[\phi] + iJ_k \right) e^{iS[\phi] + iJ_i\phi_i} \\
&= i \left(\frac{\delta S}{\delta\phi_k} \left[\frac{\delta}{\delta iJ} \right] + J_k \right) \int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi] + iJ_i\phi_i} = i \left(\frac{\delta S}{\delta\phi_k} \left[\frac{\delta}{\delta iJ} \right] + J_k \right) Z[J].
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Para transformar expresiones formuladas en términos de Z a las correspondientes formuladas en términos de W, podemos usar la identidad

⁵Escribiendo explícitamente $\varphi_1 = \frac{\delta W[J]}{\delta J_1}$ y $\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_1} = -J_1$, podemos ver que son las ecuaciones de Hamilton.

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta(iJ_i)} (Z[J]f[J]) = \frac{1}{Z[J]} \left(\frac{\delta W}{\delta(iJ_i)} e^{W[J]} f[J] + Z[J] \frac{\delta f[J]}{\delta(iJ_j)} \right) = \frac{\delta W[J]}{\delta(iJ_i)} f[J] + \frac{\delta f[J]}{\delta(iJ_i)}, \quad (3.59)$$

que se cumple para una función arbitraria f de las fuentes, y puede así, ser reescrita como una ecuación de operador

$$\frac{1}{Z} \frac{\delta}{\delta(iJ_i)} Z = \frac{\delta W}{\delta(iJ_i)} + \frac{\delta}{\delta(iJ_i)}, \quad (3.60)$$

con este resultados podemos reescribir (3.58), con lo que obtenemos

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi_k} \left[\frac{\delta W}{\delta(iJ)} + \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] + J_k \right) = 0. \quad (3.61)$$

Expresando J como $-\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi}$, reconociendo $\frac{\delta W}{\delta(iJ)}$ como el campo clásico se tiene

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_k} = \frac{\delta S}{\delta \phi_k} \left[\phi + i \frac{\delta^2 W}{\delta(iJ) \delta(iJ_j)} \frac{\delta}{\delta \phi_j} \right]. \quad (3.62)$$

El estilo de esta derivación está basada en la presentada por Lichtenegger [16]. A pesar de ser formal, emplea resultados presentados previamente en su respectiva derivación diagramática (breve comparada a la aquí presentada) para poder reescribir la expresión.

En otros casos como con Alkofer [19] y Huber [18], se presentan deducciones en las que parten de conocer la relación entre el funcional completo ($Z[J]$) con el generador de funciones de green conectadas ($W[J]$), así como tener la transformada de Legendre respecto a la acción efectiva de esta última, equivalente a las funciones de green irreducible de una partícula ($\Gamma[\Phi]$). Claro estas últimas referencias ya son artículos y lo que interesa en dichos casos es el obtener información nueva, más que el trasfondo de su deducción; incluso Alkofer muestra una forma de calcular la ecuación de Dyson-Schwinger mediante cálculo computacional.

El desarrollo detallado para llegar a la acción efectiva y los vértices 1PI es necesario para el siguiente capítulo y el resto del trabajo. Se prosigue a ver el método de acción efectiva irreducible a 1 y 2 partículas, lo que finalmente nos otorgará el método a emplear para obtener los resultados deseados.

Capítulo 4

Acción Efectiva Irreducible

De manera general a la acción se le define como la integral de la Lagrangiana. Clásicamente, a partir del principio de Hamilton se pueden obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange y con estas encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema en cuestión. Dadas condiciones de frontera, esto nos propicia una sola trayectoria posible. Puesto que en cuántica hablamos de probabilidad, se consideran todos los caminos (integral de camino) y ante el tratamiento clásico, no necesariamente se satisface el principio de Hamilton.

Con acción efectiva nos referimos a una acción reescrita que, en caso de campos cuánticos al hacer una variación esta sea nula. Es sabido que con la acción clásica en campos no resulta ser nula dicha variación, entonces, esta nueva acción (con los términos agregados) se le llama acción efectiva [20]. La derivación aquí tratada se basa en la presentada por Rammer [6]. Para una deducción formal se recomienda consultar el artículo de Cornwall, Jackiw y Tomboulis [23].

Lo presentado hasta el momento considera implícitamente sistemas con temperatura cero, dado que se aplicarán estas ideas al caso particular de neutrinos solares (capítulo 6), es claro que debemos considerar un sistema con temperatura, o dicho de otra forma, fuera de equilibrio. Emplearemos la representación Irreducible a 2 partículas (2PI)¹, para ello es necesario trabajar con integral funcional. En secciones pasadas ya hemos utilizado la derivada funcional, la integración funcional puede verse como su contra parte. Para detalles formales de este tratamiento se recomienda consultar el apéndice C.

Iniciamos obteniendo una relación de la acción con la ecuación de Dyson-Schwinger, para poder obtener la ecuación diagramática de esqueleto que satisfacen los vértices 1PI. Posteriormente veremos a los generadores como integrales funcionales para obtener las expresiones 1PI e 2PI de la acción efectiva. El caso 2PI será el adecuado para trabajar sistemas fuera del equilibrio.

4.1. Acción Efectiva y Diagramas Esqueleto

Introducimos la acción, definida en términos del inverso del propagador libre y los vértices de la teoría, dado como

¹Al igual que con Irreducible a 1 Partícula (1PI), se mantendrán las siglas en inglés.

$$S[\phi] \equiv -\frac{1}{2}\phi_1 (G_0^{-1})_{12} \phi_2 + \sum_N \frac{1}{N!} g_{12\dots N} \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_N. \quad (4.1)$$

Empleando la ecuación de Dyson-Schwinger (3.28), que expresa la dinámica de la teoría en cuestión, puede ser escrita de la forma (podemos verlo de la derivación formal)

$$\left(\frac{\delta S \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1} + J_1 \right) Z[J] = 0, \quad (4.2)$$

por definición se tiene

$$\frac{\delta S \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1} = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_1} \Big|_{\phi \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}}. \quad (4.3)$$

La acción es diferenciada y la derivada de la fuente se sustituye por el campo. Dada la relación entre el generador completo y el de diagramas conectados (Z y W respectivamente), usando (3.59) podemos escribir para N fuentes

$$\frac{\delta^N}{\delta J_1 \cdots \delta J_N} Z[J] = Z[J] \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J_1} + \frac{\delta}{\delta J_1} \right) \cdots \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J_N} + \frac{\delta}{\delta J_N} \right). \quad (4.4)$$

Por como se ha escrito la acción (suma de polinomios), en base a la ecuación anterior podemos escribir

$$\frac{\delta S \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1} Z[J] = Z[J] \frac{\delta S \left[\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1}. \quad (4.5)$$

Así, la ecuación de Dyson-Schwinger, de la forma (4.2) se puede escribir como

$$\frac{\delta S \left[\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1} + J_1 = 0. \quad (4.6)$$

Empleando la forma explícita de la acción para una teoría arbitraria, se tiene

$$\frac{\delta S \left[\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1} = -(G^{(0)})_{12}^{-1} \left(\frac{\delta W}{\delta J_2} + \frac{\delta}{\delta J_2} \right) + \sum_N \frac{1}{(N-1)!} g_{12\dots N} \left(\frac{\delta W}{\delta J_2} + \frac{\delta}{\delta J_2} \right) \cdots \left(\frac{\delta W}{\delta J_N} + \frac{\delta}{\delta J_N} \right). \quad (4.7)$$

A partir de esta expresión se puede recuperar (3.44) para una teoría de 3 vértices, por lo que esta perspectiva de la acción resulta más general y sencilla de manejar, en cuanto a teorías con más vértices. Con ayuda de este último resultado, volveremos a la transformada de Legendre entre el funcional $W[J]$ y la acción efectiva $\Gamma[\varphi]$. Buscamos reemplazar las derivadas de fuentes por derivadas de campos, para así, obtener las ecuaciones que satisfacen la acción efectiva. Además, al establecer el campo como nulo $\varphi = 0$, se obtienen la ecuación diagramática de esqueleto que satisfacen los vértices 1PI.

Por medio de la siguiente igualdad, resultado de emplear la regla de la cadena y la relación (3.46)

$$\frac{\delta}{\delta J_1} = \frac{\delta \varphi_2}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta \varphi_2} = \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \frac{\delta}{\delta \varphi_2}, \quad (4.8)$$

con lo que reescribimos (4.7) como

$$\frac{\delta S \left[\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \phi_1} = -(G^{(0)})_{12}^{-1} \left(\varphi_2 + \frac{\delta^2 W}{\delta J_2 \delta J_2'} \frac{\delta}{\delta \varphi_2'} \right) + \sum_N \frac{1}{(N-1)!} g_{12 \dots N} \left(\varphi_2 + \frac{\delta^2 W}{\delta J_2 \delta J_2'} \frac{\delta}{\delta \varphi_2'} \right) \dots \left(\varphi_N + \frac{\delta^2 W}{\delta J_N \delta J_N'} \frac{\delta}{\delta \varphi_N'} \right). \quad (4.9)$$

Insertando (4.6) en (3.46) y (3.55), obtenemos la relación entre la acción y la acción efectiva

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_1} = - \frac{\delta S \left[\varphi + W''[J] \frac{\delta}{\delta J} \right]}{\delta \varphi_1}, \quad (4.10)$$

el lado derecho es la abreviación de (4.9). Para una teoría de 3 vértices se tiene

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_1} = -(G_0^{-1})_{12} \varphi_2 + \frac{1}{2} g_{123} \varphi_2 \varphi_3 + \frac{1}{2} g_{123} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_2 \delta J_3}, \quad (4.11)$$

diagramáticamente se tiene

$$\text{---} \bigcirc \varphi \text{---} = - \text{---} \bullet \text{---} / \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc W \text{---} + \frac{1}{2} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bigcirc W \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc W \text{---} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{---} \bullet \text{---} \bigcirc W \text{---} \right) \quad (4.12)$$

El porque se ha llamado a $\Gamma[\varphi]$ la *acción efectiva* recae aquí: de omitir las fluctuaciones térmicas y cuánticas, nos deja solo los primeros dos términos de la figura anterior, la *acción efectiva* se reduce a la acción. Esto corresponde a omitir el término W'' (En el caso de una teoría con 4 vértices resultan más términos de este tipo.). Es decir, la ecuación de movimiento exacta para el campo (3.55), se puede obtener de la ecuación que determina el campo clásico

$$J_1 + \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_1} = 0, \quad (4.13)$$

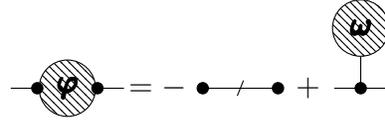
al sustituir los vértices 1PI en la acción S . Notando que en ausencia de fuentes, $J = 0$, el campo hace estacionaria a la acción efectiva. La teoría clásica está dada por el campo especificado al hacer a la acción estacionaria

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1} = 0, \quad (4.14)$$

la ecuación de movimiento clásica. El hecho de que estas simplificaciones permiten retornar a la teoría clásica es una gran ventaja de manejar generadores funcionales:

Nos otorga ecuaciones que contienen solo propagadores y vértices completos, es decir, las ecuaciones derivadas corresponden a las ecuaciones de los diagramas esqueleto.

Para la segunda derivada de la acción efectiva, podemos notar que un tadpole es el campo, y la derivada respecto a φ lo remueve, por lo que la derivada reduce el número de tadpoles presentes (en cada término) en uno. Con esto tenemos diagramáticamente a la segunda derivada de la acción efectiva (en teoría de 3 vértices) como



$$\text{Diagram with } \psi \text{ and } \phi \text{ labels} = - \text{Diagram with slash} + \text{Diagram with } \phi \text{ label} \quad (4.15)$$

Tomando más derivadas, obtenemos las ecuaciones que cumplen las derivadas de mayor orden de la acción efectiva, y haciendo el campo cero, $\varphi = 0$, obtenemos los diagramas esqueleto para los vértices 1PI.

4.2. Generadores Como Integrales Funcionales

Los generadores capturan situaciones fuera del equilibrio y correcciones cuánticas, expresando toda la teoría en términos de ecuaciones diferenciales. Las funciones de Green se obtienen al diferenciar el generador funcional, por tanto, se obtienen las ecuaciones de movimiento para todas las funciones de Green. Al introducir la expresión integral funcional para el generador funcional, se obtienen representaciones integrales explícitas para las funciones de Green, es decir, soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales.

Ahora buscaremos hacer notar explícitamente que la integral de camino (2.13) es una integral funcional, y por tanto, su argumento es un generador. Para el caso de un generador funcional con interacciones operamos un propagador inverso en la ecuación de Dyson-Schwinger (3.28), con lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$(G_0^{-1})_{12} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_2} = \left(\sum_N \frac{1}{(N-1)!} g_{12\dots N} \left(\frac{1}{i}\right)^{N-1} \frac{\delta^{N-1}}{\delta J_N \dots \delta J_3 \delta J_2} + J_1 \right) Z[J], \quad (4.16)$$

por el momento se ha considerado una teoría con un número arbitrario de vértices, además, se ha hecho el debido cambio para teoría de campo en el factor $\delta/\delta J \rightarrow \delta/i\delta J$. Introduciendo la representación integral funcional de Fourier del generador funcional como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi Z[\phi] e^{i\phi J}. \quad (4.17)$$

Usamos a ϕ como variable de integración para no confundirla con φ , empleado anteriormente para denotar el campo promedio. Empleando la transformada de Fourier funcional, la ecuación de Dyson-Schwinger está dada por

$$-i \frac{\delta Z[\phi]}{\delta \phi_1} = \left(-(G_0^{-1})_{12} \phi_2 + \sum_N \frac{1}{(N-1)!} g_{12\dots N} \phi_2 \dots \phi_N \right) Z[\phi]. \quad (4.18)$$

Nos referimos a ϕ también como *campo*. Empleando la acción dada en (4.1), podemos reescribir (4.16) como

$$\frac{\delta Z[\phi]}{\delta \phi_1} = i \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_1} Z[\phi] \longrightarrow Z[\phi] = e^{iS[\phi]}, \quad (4.19)$$

con lo que tenemos la representación de integral de camino del generador funcional (salvo un factor de normalización independiente)

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i\phi J}. \quad (4.20)$$

En la formulación de integral de camino (primera sección del capítulo 2), la ecuación de Dyson-Schwinger (4.16) se puede establecer en términos del teorema de integración: *la integral de una derivada se anula* (sección 3.5), con lo que

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi} e^{iS[\phi] + i\phi J} = 0. \quad (4.21)$$

En el tratamiento de estados fuera del equilibrio, la acción es especificada solo en términos de propagadores (libres y sus inversos) y de vértices, capturando toda la información de la teoría de acuerdo a (4.16), expresada como (4.20). Mientras que las amplitudes de la teoría se obtienen al diferenciar el funcional generador con respecto a la fuente, y aparece ahora en términos de integrales funcionales

$$A_{12\dots N} = \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_N e^{iS[\phi]}. \quad (4.22)$$

Para el generador de funciones conectadas de Green, por su relación con el generador completo, se tiene

$$e^{iW[J]} = N^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} e^{i\phi J}, \quad (4.23)$$

donde N denota el factor de normalización que garantiza que $W[J]$ se anula para una fuente nula, $W[J=0]$. De la transformada de Legendre entre W y Γ (3.55), y la representación de integral funcional del generador funcional (4.20), una representación integral funcional de la acción efectiva, el generador de los vértices 1PI, se obtiene

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi] + (\phi - \varphi)J)}, \quad (4.24)$$

donde el factor de normalización ha sido absorbido en la definición de la integral funcional. Buscamos mostrar que el generador de funciones conectadas de Green se puede expresar en términos de la acción efectiva y una integral funcional restringida (IFR)². La reinterpretación topológica para escribir el tadpole de W , presenta solo diagramas de árbol en su expansión, es decir, tadpoles atados a vértices 1PI.

²Integral funcional interpretada en términos de su expansión perturbativa o de manera equivalente, sus diagramas de Feynman correspondientes, y solo se conservan los diagramas de cierta clase de topología.

Esto significa que el generador $W[J]$ en sí mismo, está dado por los vértices irreducibles atados a tadpoles, lo que sugiere que el generador $W[J]$, puede ser especificado en términos de la acción efectiva, $\Gamma[\phi]$; omitiremos dicha demostración y emplearemos directamente el resultado, dado por

$$iW[J] = \int_{DAC} \mathcal{D}\phi \exp(i\Gamma[\phi] + i\phi J), \quad (4.25)$$

donde *DAC* indica que: Diagramas de Árbol Conectados deben mantenerse de entre todos los diagramas generados por expansión perturbativa de la integral funcional. Diagramáticamente se tiene

$$W = \# \cdot W + \frac{1}{2!} \# \begin{matrix} W \\ W \end{matrix} + \dots \quad (4.26)$$

La suma de todos los diagramas de vacío conectados en presencia de la fuente está contenida al mantener solo diagramas de árbol, si al mismo tiempo los vértices se intercambian por los vértices 1PI. La acción efectiva $\Gamma[\phi_a]$, tomando para un campo arbitrario ϕ_a , también se puede expresar en términos de una integral funcional restringida, mediante

$$\Gamma[\phi_a] = \int_{DVC1PI} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi+\phi_a]}, \quad (4.27)$$

donde *DVC1PI* indica que en la expansión perturbativa, solo los Diagramas de Vacío Conectados en vértices Irreducibles a una Partícula, deben mantenerse de los diagramas conectados generados por la expansión perturbativa de la integral de camino.

Dada la relación entre Γ y W , se tiene que $\Gamma[0] = W[J]$ para el valor de la fuente con el que el campo $\delta W[J]/\delta J_1$ se anula. El hecho de que esto se anule, es equivalente a que $\delta Z[J]/\delta J_1$ se anule, por lo que podemos establecer

$$W[J] \Big|_{\frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} = 0} = \text{Suma de los Diagramas de Vacío Conectados en vértices 1PI (DVC1PI)} \quad (4.28)$$

4.3. Expansión en Loop de la Acción Efectiva Irreducible a 1 Partícula

Se busca obtener una expresión útil para la acción efectiva en términos de los DVC1PI. Considerando una teoría especificada por la acción $S[\phi]$ y su correspondiente expresión de integral de camino para el funcional generador

$$Z[f] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]+if\phi}, \quad (4.29)$$

donde f representa la fuente de una partícula. La integral de camino es invariante ante un desplazamiento arbitrario del campo $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, donde el funcional generador resulta

$$Z[f] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{iS[\phi+\phi_0]+if(\phi+\phi_0)} = e^{iS[\phi_0]+if\phi_0} Z_1[f], \quad (4.30)$$

con $Z_1[f] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{i(S[\phi+\phi_0]-S[\phi_0])+if\phi}$, con esto el generador de funciones conectadas de Green se vuelve

$$W[f] = -i \ln(Z[f]) = S[\phi_0] + f\phi_0 + W_1[f], \quad (4.31)$$

donde $iW_1[f] = \ln(\int \mathcal{D}\phi \ exp[i(S[\phi+\phi_0]-S[\phi_0])+if\phi])$. Para hacer ϕ función arbitraria, un funcional de f , elegimos $\bar{\phi}$ el campo promedio que afecta la transformada de Legendre de la acción efectiva, $\Gamma[\bar{\phi}]$, es decir

$$\phi_0 \equiv \bar{\phi} = \frac{\delta W[f]}{\delta f}, \quad (4.32)$$

donde la barra especifica el campo promedio ($\bar{\phi} = \varphi$). Esto implícitamente da f como funcional de $\bar{\phi}$, $f = f[\bar{\phi}]$, con lo que tenemos

$$\left(\frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + f + \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \frac{\delta \bar{\phi}}{\delta f} = 0. \quad (4.33)$$

Puesto que el término fuera del paréntesis, son las funciones de Green completas, se tiene

$$\frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + f + \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} = 0. \quad (4.34)$$

La acción efectiva de acuerdo a (4.31) y (4.34) puede expresarse como

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[f] - \bar{\phi}f = S[\bar{\phi}] + W_1[f] = S[\bar{\phi}] + W_1[\bar{\phi}]. \quad (4.35)$$

Utilizando (4.34) y el equivalente de W_1 , podemos eliminar la dependencia explícita en f , y obtener la expresión para W_1 como funcional del campo promedio, $\bar{\phi}$, especificado por

$$iW_1[\bar{\phi}] = \ln \int \mathcal{D}\phi \ exp \left\{ i(S[\bar{\phi} + \phi] - S[\bar{\phi}]) - i\phi \left(\frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\}. \quad (4.36)$$

El objetivo ahora es calcular $W_1[\bar{\phi}]$, para mostrar que pueda ser expresado en términos de DVC1PI, para esto introducimos el funcional generador

$$\tilde{Z}[\bar{\phi}; J] = \int \mathcal{D}\phi \ \left\{ i(S[\bar{\phi} + \phi] - S[\bar{\phi}]) - i\phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + iJ\phi \right\} \quad (4.37)$$

para la teoría gobernada por la acción $\tilde{S}[\bar{\phi}, \phi] = S[\bar{\phi}, \phi] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}}$. Es decir, la acción para la teoría original expandida alrededor del campo promedio, pero manteniendo solo términos de 2° o mayor orden.

Las funciones de Green en esta teoría están dadas por la relación entre el el generador de funciones conectadas y el generador completo, similar a como se ha venido tratando, $i\tilde{W}[\bar{\phi}; J] = \ln \tilde{Z}[\bar{\phi}; J]$. Comparando (4.36) y (4.37), se tiene que

$$W_1[\bar{\phi}] = \widetilde{W}[\bar{\phi}; J]|_{J=-\frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}}}, \quad (4.38)$$

con esta elección, $J = -\delta W_1/\delta \bar{\phi}$, el campo promedio ($\varphi = \delta \widetilde{W}[\bar{\phi}; J]/\delta J$) se anula para la teoría gobernada por la acción \widetilde{S} por el valor de la fuente J . Por (4.38) es equivalente decir que $W_1[\bar{\phi}]$ es idéntico a la acción efectiva para la teoría gobernada por $\widetilde{S}[\bar{\phi}, \phi]$ para un campo promedio nulo, $\widetilde{\Gamma}[\bar{\phi}; \varphi = 0]$.

Puesto que en general $\Gamma[\varphi = 0]$ está dado por los *DVC1PI*, o de manera equivalente para el generador de funciones de Green conectadas mediante (4.28) ($W[f]|_{\delta W/\delta f=0}$), consiste de la suma de todos los *DVC1PI*. El funcional W_1 así, en términos diagramáticos, solo consiste de la suma de todos los *DVC1PI* para la teoría gobernada por $\widetilde{S}[\bar{\phi}, \phi]$.

Para establecer la validez de (4.38), diferenciamos (4.36) con respecto al campo promedio $\bar{\phi}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} = \frac{\delta \ln Z_1}{\delta \bar{\phi}} &= \frac{1}{Z_1} \int \mathcal{D}\phi \left(\frac{\delta S[\phi + \bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta^2}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}} (S[\bar{\phi}] + W_1[\bar{\phi}]) \right) \\ &\times \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

el primer término del lado derecho dentro del paréntesis se puede reescribir como

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta S[\phi + \bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\} = \\ &-i \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi} \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\} + \\ &+ \int \mathcal{D}\phi \left(\frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

el primer término al ser derivada total se anula, con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} &= \frac{1}{Z_1} \int \mathcal{D}\phi \left\{ \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta^2}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}} (S[\bar{\phi}] + W_1[\bar{\phi}]) \right\} \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\} \\ \implies 0 &= \left(\frac{\delta^2 (S[\bar{\phi}] + W_1[\bar{\phi}])}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}} \right) \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

El primer factor $\frac{\delta^2}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}} (S[\bar{\phi}] + W_1[\bar{\phi}]) = \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}}$ de acuerdo a (4.8) la función de Green inversa, y por lo tanto distinto de cero, así, tenemos

$$\int \mathcal{D}\phi \phi \exp \left\{ i \left(S[\phi + \bar{\phi}] - S[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\} = 0, \quad (4.39)$$

con lo que se muestra que

$$W_1[\bar{\phi}] = \text{suma de todos los DVC1PI para la teoría definida por la acción } \tilde{S}[\bar{\phi}, \phi]. \quad (4.40)$$

Dividiendo la acción $\tilde{S}[\bar{\phi}, \phi]$ en su parte cuadrática y de interacción: $\tilde{S}[\bar{\phi}, \phi] = \tilde{S}_0[\bar{\phi}, \phi] + \tilde{S}_{int}[\bar{\phi}, \phi]$, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0[\bar{\phi}, \phi] &= \frac{1}{2} \phi \frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta \phi \delta \phi} \phi \equiv \frac{1}{2} \phi D^{-1}[\bar{\phi}] \phi \\ \tilde{S}_{int}[\bar{\phi}, \phi] &= \sum_{N=3}^{\infty} \frac{1}{N!} \frac{\delta^N S[\bar{\phi}]}{\phi_1 \cdots \phi_N} \phi_1 \cdots \phi_N. \end{aligned}$$

En la expresión de integral de camino para el generador \tilde{Z} (4.37), el factor de normalización $\int \mathcal{D}\phi \exp^{\frac{i}{2} \phi D^{-1} \phi} = \sqrt{i \text{Det} \bar{\phi}}$, se ha mantenido implícito, pero exponiéndolo en la expresión para la acción efectiva (4.36), podemos escribir

$$\Gamma[\bar{\phi}] = S[\bar{\phi}] - \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln(iD^{-1}[\bar{\phi}])] - i \ln \langle e^{i\tilde{S}_{int}[\bar{\phi}, \phi]} \rangle_{DVC1PI}, \quad (4.41)$$

donde el último término debe interpretarse como

$$\langle e^{i\tilde{S}_{int}[\bar{\phi}, \phi]} \rangle_{DVC1PI} = \int_{DVC1PI} \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}_0[\bar{\phi}, \phi]} e^{i\tilde{S}_{int}[\bar{\phi}, \phi]}. \quad (4.42)$$

Hemos desplegado explícitamente la contribución a un loop, el segundo término de (4.41), y en consecuencia tenemos la normalización: $\langle 1 \rangle_{DVC1PI} = 1$. El primer término por otra parte, es sin loop's o conocida como aproximación a nivel árbol; especifica el límite clásico determinado por lo estacionario de la acción, y el segundo término da las contribuciones de las fluctuaciones Gaussianas. El último término, la contribución de mayores loop's, dan las correcciones cuánticas debido a las interacciones, correcciones radiativas.

La anterior evaluación funcional de la acción efectiva genera la expansión de loop irreducible a 1 partícula (1PI) en términos de los diagramas esqueleto, y así, se ha hecho una suma parcial infinita de los diagramas simples de la teoría de perturbación.

4.4. Acción Efectiva Irreducible a 2 Partículas

Se tomará la acción en irreducibilidad donde solo aparezcan vértices Irreducibles a 2 Partículas (2PI). Introducimos una fuente de dos partículas K_{12} , además de la fuente ya manejada de una partícula J_1 , así como un generador de funciones de Green, donde las funciones de Green conectadas de la teoría estén contraídas a ambos tipos de fuentes. Definido de acuerdo a las expansión diagramática en términos de las dos fuentes, viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Diagrama con } J_1, K_{12} &= \text{Diagrama con } \omega \text{ y } \otimes + \frac{1}{2} \text{Diagrama con } \omega \text{ y } \otimes \otimes + \cdots + \frac{1}{2} \text{Diagrama con } \omega \text{ y } \otimes \otimes \otimes + \frac{1}{2} \text{Diagrama con } \omega \text{ y } \otimes \otimes \otimes \otimes + \cdots \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$+\frac{1}{2} \text{diagrama}_1 + \text{diagrama}_2 + \frac{1}{2} \text{diagrama}_3 + \frac{1}{2} \text{diagrama}_4 + \dots = W[J, K]$$

La notación diagramática para el generador hace explícito el hecho de que depende de ambas fuentes, una y dos partículas, como se ha hecho notar en la última igualdad. La notación diagramática para la fuente de dos partículas es

$$K_{12} = \text{diagrama}_K$$

El generador consiste de los mismos términos de fuente de una partícula, y por lo tanto genera las amplitudes conectadas (o funciones de Green) de la teoría de acuerdo a

$$G_{12\dots N} = \frac{\delta^N W[J, K]}{\delta J_1 \dots \delta J_N} \Big|_{J=0, K=0}, \quad (4.44)$$

además, el generador contiene términos de fuente de dos partículas y términos mixtos. La presencia de la fuente de dos partículas, al diferenciar el generador, puede llevar a la aparición de diagramas desconectados, por ejemplo

$$2 \frac{\delta W[J, K]}{\delta K_{12}} \Big|_{J=K=0} = \text{diagrama}_1 + \text{diagrama}_2 \quad (4.45)$$

Tomando la derivada con respecto a la fuente de una partícula: $\varphi_1 = \delta W[J, K]/\delta J_1$, podemos hacer un procedimiento análogo al de la sección 3.4 (*Vértices Irreducibles a una Partícula*), explotando características topológicas de los diagramas para construir la expansión diagramática en términos de vértices Irreducibles a 2 Partículas (2PI).

Dichos argumentos son:

1. El estado de una partícula expuesto puede propagarse directamente a una fuente irreducible a una o dos partículas. En el caso de dos partículas, su otro estado puede terminar en cualquier cosa conectada; estas dos clases de diagramas son como se muestran en los primeros diagramas de (4.46).
2. El estado expuesto puede entrar en un diagrama irreducible a dos partículas. Tercer diagrama de (4.46), o en un diagrama reducible a dos partículas.
3. Un vértice irreducible a dos partículas, por definición es un diagrama de vértice que no se puede dividir en dos cortando solo dos líneas, de lo contrario es reducible a dos partículas. En el caso de entrar en un diagrama reducible a dos partículas, el estado expuesto puede entrar en un vértice reducible a dos partículas que emerge por una línea en cualquier cosa conectada, representado por el cuarto diagrama de (4.46); que contiene la auto energía en la representación esquelética donde es irreducible a dos partículas.

4. Puede entrar en un vértice irreducible a dos partículas que emerge por dos líneas en cualquier cosa conectada, lo que se puede hacer de las dos maneras mostradas en el quinto y sexto diagrama de (4.46); o tres o cuatro, etc. líneas.

$$\bullet \text{---} \textcircled{W} = \bullet \text{---} \otimes + \bullet \text{---} \ast \textcircled{W} + \bullet \text{---} \textcircled{\phi} + \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} + \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} + \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} + \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} + \bullet \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} + \dots$$

(4.46)

Analíticamente (4.46) está dado como

$$\varphi_1 = G_{12}^{(0)} (J_2 + K_{23}\varphi_3 + \Gamma_2 + \Sigma_{23}\varphi_3 + \Gamma_{2(34)}G_{34} + \frac{1}{2}\Gamma_{234}\varphi_3\varphi_4 + \frac{1}{3!}\Gamma_{2345}\varphi_3\varphi_4\varphi_5 + \Gamma_{23(45)}\varphi_3G_{45}^{(0)} + \Gamma_{2(34)(56)}G_{34}G_{56} + \dots)$$

(4.47)

Operando un propagador inverso como se hizo en (3.49) para obtener (3.55), se obtiene

$$0 = (J_1 + K_{12}\varphi_2 + \Gamma_1 + (-G_0^{-1} + \Sigma)_{12}\varphi_2 + \Gamma_{1(23)}G_{23} + \frac{1}{2}\Gamma_{123}\varphi_2\varphi_3 + \frac{1}{3!}\Gamma_{1234}\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \Gamma_{12(34)}\varphi_2G_{34} + \Gamma_{1(23)(45)}G_{23}G_{45} + \dots)$$

(4.48)

que diagramáticamente está dado como

$$0 = \otimes + \ast \textcircled{W} + \textcircled{\phi} + \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} + \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} + \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} + \frac{1}{2} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{\phi} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \textcircled{W} + \dots$$

$$\equiv \frac{1}{\otimes} + \frac{1}{\ast \textcircled{W}} + \frac{\delta\Gamma[\phi, G]}{\delta\phi_1}$$

(4.49)

La última igualdad define la derivada de campo de la acción efectiva Irreducible a 2 Partículas. Juntando las funciones de vértice 2PI con la acción efectiva 2PI

$$\Gamma[\varphi, G] \equiv \sum_N \frac{1}{N!} \Gamma_{12\dots N} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_N + \Gamma_{1(23)} \varphi_1 G_{23} + \Gamma_{1(23)(45)} \varphi_1 G_{23} G_{45} + \cdots, \quad (4.50)$$

que además del campo, es funcional de los propagadores completos. En la acción 2PI, encontramos 2 tipos diferente de vértices, los vértices adjuntos al campo

$$\Gamma_{12\dots N} = \frac{\delta^N \Gamma[\varphi, G]}{\delta \varphi_1 \cdots \delta \varphi_N} \Big|_{\phi=0, G=0}, \quad (4.51)$$

que son 2PI, y para las cuales se tiene la notación diagramática

$$\Gamma_{12\dots N} = \text{diagrama} \quad (4.52)$$

Además se tienen los vértices adjuntos con propagadores, tal es el caso de

$$\Gamma_{1(23)4(56)} = \frac{\delta}{\delta \varphi_1} \frac{\delta}{\delta G_{23}} \frac{\delta}{\delta \varphi_4} \frac{\delta}{\delta G_{56}} \Gamma[\varphi, G] \Big|_{\phi=0, G=0}, \quad (4.53)$$

para los cuales se tiene introduce la siguiente notación diagramática

$$\Gamma_{1(23)4(56)} = \text{diagrama} \quad (4.54)$$

En términos de la acción efectiva Irreducible a 2 partículas, podemos representar (4.49), tras haber redefinido $\Gamma_{12} \equiv (-G_0^{-1} + \Sigma)_{12}$, con lo que se tiene

$$0 = \otimes + \text{diagrama} + \text{diagrama} \longrightarrow \frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta \varphi_1} = -J_1 - K_{12} \varphi_2. \quad (4.55)$$

Por construcción diagramática, se tiene la analogía con el caso Irreducible a una Partícula

$$G_1 \equiv \varphi_1 = \frac{\delta W[J, K]}{\delta J_1}, \quad \frac{\delta W[J, K]}{\delta K_{12}} = \frac{1}{2} (G_{12} + \varphi_1 \varphi_2). \quad (4.56)$$

Estas dos relaciones dan implícitamente las fuentes como funciones del campo y las funciones de Green completas

$$J = J[\varphi, G] \quad K = K[\varphi, G]. \quad (4.57)$$

Puesto que las fuentes son independientes, también lo son φ y G entre sí. Tenemos entonces dos generadores relacionados por la doble transformada de Legendre, es decir, con respecto a dos fuentes

$$\Gamma[\varphi, G] = \left(W[J, K] - \varphi J - \frac{1}{2} \varphi K \varphi - \frac{1}{2} G K \right) \Big|_{J=J[\varphi, K], K=K[\varphi, K]}, \quad (4.58)$$

y obtenemos la segunda relación para la acción efectiva Irreducible a 2 Partículas y las fuentes

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta G_{12}} = -\frac{1}{2} K_{12}. \quad (4.59)$$

Para $K = 0$ se tiene la transformada de Legendre y la acción efectiva usuales, es decir, $\Gamma[\varphi] = \Gamma[\varphi, G^{(0)}]$ para el valor de las funciones de Green para las cuales $\frac{\delta \Gamma[\varphi, G^{(0)}]}{\delta G_{12}} = 0$. Por construcción $\Gamma[\varphi, G]$ es el generador, en el campo variable φ , de los vértices 2PI con líneas representando las funciones de Green completas, G , y $\Gamma[\varphi = 0, G]$ resulta así, la suma de todos los Diagramas de Vacío Conectados Irreducibles a dos Partículas (DVC2PI).³

Usando (4.58) y (4.59) se puede obtener

$$\Gamma[0, G] = Tr \left(G \frac{\delta \Gamma[0, G]}{\delta G} \right) - i \ln \int \mathcal{D}\phi \phi \exp \left\{ i \left(S[\phi] + \phi J^{(0)} - \phi \frac{\delta \Gamma[0, G]}{\delta G} \right) \right\} + i \ln \int \mathcal{D}\phi \phi \exp(i S_0[\phi]), \quad (4.60)$$

donde $J^{(0)}$ es el valor de la fuente para el cual $\delta W[J, K]/\delta J$ se anula, es decir, el tadpole se anula. Por construcción $\Gamma[\varphi, G]$ es el generador con respecto al campo φ , de funciones de vértice 2PI.

4.5. Expansión en Loop de la Acción Efectiva Irreducible a Dos Partículas

Buscamos la expresión de la acción efectiva en términos de los Diagramas de Vacío Irreducibles a 2 Partículas (DV2PI). Mediante la representación de integral de camino de los generadores, el funcional con una y dos fuentes es

$$Z[f, K] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i S[\phi] + i \phi f + \frac{i}{2} \phi K \phi \right\} = e^{i W[f, K]}. \quad (4.61)$$

Las derivadas del funcional generador proporcional al campo promedio ($\delta W/\delta f_1 = \bar{\phi}_1$), y las funciones de Green de 2 estados, de acuerdo a

$$\frac{\delta W}{\delta K_{12}} = \frac{1}{2} (\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + i G_{12}), \quad (4.62)$$

donde $i G_{12} = \overline{\phi_1 \phi_2} - \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2$ y abreviamos $\overline{\phi_1 \phi_2} = \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \phi_2 \exp \left\{ i S[\phi] + i \phi f + \frac{i}{2} \phi K \phi \right\}$ para la amplitud A_{12} . La acción efectiva irreducible a 2 partículas, la doble transformada de Legendre del funcional generador de las funciones de Green conectadas $\Gamma[\bar{\phi}, G] = W[f, K] - f \bar{\phi} - \frac{1}{2} \bar{\phi} K \bar{\phi} - \frac{i}{2} G K$, que satisface

³Recordar que se preservan las siglas en inglés para Irreducible a 2 Partículas (2 Particle Irreducible).

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\phi}} = -f - K\bar{\phi} \quad \text{y} \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta G} = \frac{-i}{2}K. \quad (4.63)$$

La doble transformada de Legendre se puede hacer de forma secuencial, para ello primero definimos para una K fija

$$\Gamma^K[\bar{\phi}] = (W[f, K] - \bar{\phi}f) \Big|_{\frac{\delta W[f, K]}{\delta f} = \bar{\phi}} \quad (4.64)$$

entonces definimos G de acuerdo a

$$\frac{\delta\Gamma^K[\bar{\phi}]}{\delta K} = \frac{1}{2}(\bar{\phi}\bar{\phi} + iG), \quad (4.65)$$

y a la acción efectiva de acuerdo a

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = \Gamma^K[\bar{\phi}] - \frac{1}{2}\bar{\phi}K\bar{\phi} - \frac{i}{2}GK. \quad (4.66)$$

El hecho de que las definiciones de las funciones de Green y la acción efectiva sean idénticas, se sigue de la identidad

$$\frac{\delta\Gamma^K[\bar{\phi}]}{\delta K} = \left(\frac{\delta W[f, K]}{\delta f} \frac{\delta f}{\delta K} + \frac{\delta W[f, K]}{\delta K} - \bar{\phi} \frac{\delta f}{\delta K} \right) \Big|_{\frac{\delta W[f, K]}{\delta f} = \bar{\phi}} = \frac{\delta W[f, K]}{\delta K} \Big|_{\frac{\delta W[f, K]}{\delta f} = \bar{\phi}}. \quad (4.67)$$

Considerando K fijo, $\Gamma^K[\bar{\phi}]$ es la acción efectiva para la teoría gobernada por la acción $S^K[\phi] = S[\phi] + \frac{1}{2}\phi K\phi$; entonces, consideramos el generador funcional

$$Z^K[f] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS^K[\phi] + i\phi f}. \quad (4.68)$$

El generador de las funciones de Green conectadas, para un K fijo y la acción efectiva son respectivamente

$$W^K[f] = -i \ln Z^K[f] \quad \text{y} \quad \Gamma^K[\bar{\phi}] = W^K[f] - \bar{\phi}f. \quad (4.69)$$

Usando el método de evaluación funcional de la acción efectiva se puede obtener

$$\Gamma^K[\bar{\phi}] = S^K[\bar{\phi}] + W_1^K[\bar{\phi}], \quad (4.70)$$

donde

$$W_1^K[\bar{\phi}] = -i \ln \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left(S^K[\phi + \bar{\phi}] - S^K[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\}. \quad (4.71)$$

Introduciendo el funcional Γ_2 de acuerdo a $\Gamma[\bar{\phi}, G] = S[\bar{\phi}] + \frac{i}{2}Tr \ln G^{-1} + \frac{i}{2}Tr D^{-1}[\bar{\phi}]G + \Gamma_2[\bar{\phi}, G] - \frac{i}{2}Tr 1$, con el inverso del propagador D definido como $D^{-1} \equiv \frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}}$. Usando (4.66) y (4.70) se tiene

$$\Gamma_2[\bar{\phi}, G] = -\frac{1}{2}Tr(iD^{-1}[\bar{\phi}] + K)G - \frac{i}{2}Tr \ln G^{-1} + W_1^K[\bar{\phi}] + \frac{i}{2}Tr 1. \quad (4.72)$$

Por último queremos mostrar que Γ_2 es la suma de todos los diagramas de vacío irreducible a 2 partículas, en una teoría con vértices determinados por la acción

$$S_{int}[\phi; \bar{\phi}] = \sum_{N=3}^{\infty} \frac{1}{N!} \frac{\delta^N S[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_1 \cdots \delta \bar{\phi}_N} \phi_1 \cdots \phi_N, \quad (4.73)$$

y las líneas de propagador por las funciones de Green G . Primero se elimina la fuente de dos partículas K

$$K = 2i \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G} = G^{-1} - D^{-1}[\bar{\phi}] + 2i \frac{\delta \Gamma_2[\bar{\phi}, K]}{\delta G}, \quad (4.74)$$

empleando (4.66), (4.70) y (4.71), la acción efectiva $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ puede reescribirse como una integral funcional

$$e^{i\Gamma[\bar{\phi}, \phi]} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left(S^K[\phi + \bar{\phi}] - S^K[\phi] - \phi \frac{\delta S^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} - \phi \frac{\delta W_1^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} \right) \right\} \times \quad (4.75)$$

$$\times e^{i(S^K[\bar{\phi}] - \frac{1}{2}\bar{\phi}K\bar{\phi} - \frac{i}{2}GK)} \equiv e^{i(S^K[\bar{\phi}] - \frac{1}{2}\bar{\phi}K\bar{\phi} - \frac{i}{2}GK)} Z_1^K[\bar{\phi}].$$

Introduciendo el generador $\tilde{Z}^K[\bar{\phi}, J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i(S^K[\phi + \bar{\phi}] - S^K[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + \phi J) \right\}$, mediante el método de evaluación funcional se obtiene $\delta \tilde{Z}[\bar{\phi}, J] / \delta J|_{J=-\delta W_1^K / \delta \bar{\phi}} = 0$. El valor promedio de ϕ se anula en la teoría gobernada por la acción

$$S^K[\bar{\phi}, \phi] = S^K[\phi + \bar{\phi}] - S^K[\bar{\phi}] - \phi \frac{\delta S^K}{\delta \bar{\phi}}, \quad (4.76)$$

cuando la fuente toma el valor $J = -\delta W_1^K / \delta \bar{\phi}$. Usando (4.63), (4.66) y (4.70) se obtiene

$$f + \frac{\delta S^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} + \frac{\delta W_1^K[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} = 0, \quad (4.77)$$

así, la expresión en integral funcional para la acción efectiva irreducible a 2 partículas es

$$e^{i\Gamma[\bar{\phi}, G]} = e^{-\frac{i}{2}\bar{\phi}K\bar{\phi} + \frac{1}{2}GK} \int \mathcal{D}\phi e^{i(S^K[\phi + \bar{\phi}] + f\phi)}, \quad (4.78)$$

usando (4.63) para eliminar la fuente $f = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\phi}} - 2i \frac{\delta \Gamma}{\delta G} \bar{\phi}$, se obtiene

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] - G \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G} = -i \ln \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\bar{\phi}, G; \phi]}, \quad (4.79)$$

donde

$$S[\bar{\phi}, G; \phi] = S[\bar{\phi} + \phi] - \phi \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}} + i\phi \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G}. \quad (4.80)$$

Diferenciando (4.79) con respecto a G se tiene

$$0 = \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G \delta G} G - \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G \delta \bar{\phi}} \langle \phi \rangle - \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G \delta G} i \langle \phi \phi \rangle, \quad (4.81)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota el promedio con respecto a la acción $S[\bar{\phi}, G; \phi]$. La acción en (4.76) con el término $-\delta W_1^K / \delta \bar{\phi}$, agregado a la acción en (4.80), difiere por una constante $-S[\bar{\phi}]$, con lo que se puede concluir que el valor promedio es cero para la acción $S[\bar{\phi}, G; \phi]$, es decir, $\langle \phi \rangle = 0$, con lo que podemos simplificar

$$G = -i \langle \phi \phi \rangle, \quad (4.82)$$

es decir, G es la función de Green completa para la teoría gobernada por la acción $S[\bar{\phi}, G; \phi]$. Finalmente reescribimos (4.74) como

$$G^{-1} = D^{-1}[\bar{\phi}] + K - \Sigma[\bar{\phi}, G] = G_0^{-1} - \Sigma[\bar{\phi}, G], \quad (4.83)$$

donde

$$\Sigma[\bar{\phi}, G] = 2i \frac{\delta \Gamma_2[\bar{\phi}, G]}{\delta G}. \quad (4.84)$$

Puesto que $D^{-1}[\bar{\phi}] + K$ es el inverso de la función de Green libre, y G^{-1} es el inverso de las funciones de Green completas gobernada por la acción en (4.80), con lo que se puede concluir que Σ es la auto energía, y (4.83) es por tanto, la ecuación de Dyson. Dado que la auto energía Σ es la suma de los *DVC1PI*, podemos concluir finalmente que Γ_2 está dado por la suma de los *DVC2PI*.

Con esto se muestra que la acción efectiva se puede escribir de la forma

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = S[\bar{\phi}] + \frac{i}{2} Tr \ln G^{-1} + \frac{i}{2} Tr \mathcal{D}^{-1}[\bar{\phi}] G + \Gamma_2[\bar{\phi}, G] - \frac{i}{2} Tr 1, \quad (4.85)$$

donde $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ como se vió, es la suma de los *DVC2PI* en la teoría con la acción $\phi G^{-1} \phi / 2 + S_{int}[\phi : \bar{\phi}]$. $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ se determina por la usual expansión Feynman-Dyson-Wick, y solo los diagramas de vacío se mantienen, que al abrir una línea proporcionan diagramas de auto energía [23], como veremos más adelante, esta será la forma de verificar los resultados de los diagramas de vacío.

Se ha abarcado en general la ecuación que describe fermiones, así como el método a emplear para determinar la acción efectiva mediante los diagramas de vacío, solo resta establecer la teoría donde se trabajarán los neutrinos, que será el caso del modelo electrodébil.

Capítulo 5

Teorías de Norma

Las teorías modernas usadas hoy en día en el modelo estándar de la física de partículas, para la descripción de la interacción de partículas, son todas teorías de norma. El término norma (traducido del inglés gauge) se relaciona con una característica particular de estas teorías, simetría de norma (gauge symmetry) [24]. En cuanto a simetría tenemos una noción más clara, efectuar alguna operación (transformación) al sistema y que este sea indistinguible a como era originalmente, nos referimos a que las leyes físicas sean invariantes. Dichas transformaciones usualmente se conocen como invariancia de las leyes. Se tienen dos tipos de invariancias, global y local. La primera implica aplicar la transformación a todos los puntos espacio-temporales de manera simultánea. Mientras que en la local, diferentes transformaciones se efectúan en distintos puntos espacio-temporales [13].

5.1. Teoría de Yang-Mills

Para introducir las teorías de Yang-Mills, primero consideremos la Electrodinámica Cuántica (que no es una de ellas). Considerando su lagrangiano libre (lagrangiano de Dirac) $\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi$, este es invariante bajo la transformación de fase $\psi(x) \rightarrow \exp(-iq\Lambda)\psi(x)$, con $\Lambda \in \mathbb{R}$. Esta simetría global de $U(1)$ se generaliza a una local haciendo $\Lambda \rightarrow \Lambda(x)$, es decir, tenemos una transformación de fase independiente para cada punto; a esto se le llama invariancia de norma Abelianas.¹ No obstante \mathcal{L}_D no es invariante ante esta simetría, para ello se deben agregar más términos al lagrangiano. La derivada se reemplaza por una derivada covariante D_μ definida por

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi, \quad (5.1)$$

donde A_μ es un campo vectorial llamado "Campo de Norma". El campo vectorial debe tener la transformación

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda \implies D_\mu\psi \rightarrow \exp(-iq\Lambda)D_\mu\psi. \quad (5.2)$$

Con lo que el lagrangiano $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ es invariante de norma. Considerando los términos invariantes de A_μ , se agrega el término $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La densidad lagrangiana

¹Una teoría se dice es abeliana cuando sus generadores conmutan, en el caso de teoría de norma, implica que las transformaciones de norma pueden efectuarse en cualquier orden. Por el contrario, en una teoría no abeliana no conmutan.

resultante (5.3) describe un campo vectorial no masivo, no se le puede dar masa a A_μ dado que el término de masa $A_\mu A^\mu$ no es invariante ante $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ [25].

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi. \quad (5.3)$$

Las teorías de Yang-Mills son una generalización de la Electrodinámica Cuántica, con múltiples partículas no masivas de espín 1 que pueden interactuar entre sí. Los lagrangianos para teorías de Yang-Mills están constreñidos por una generalización llamada "invariancia de norma no abeliana" [4]. Ahora bien, considerando a ϕ invariante bajo la simetría global $SU(2)$, entonces $\phi \rightarrow U\phi$, con U una matriz especial unitaria de 2×2 . En general U siempre puede ser escrita como

$$U = \exp[i(\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \alpha_3\tau_3)] = \exp(i\alpha^a\tau_a), \quad (5.4)$$

donde τ_a son las matrices de Pauli. De manera infinitesimal se tiene $\phi \rightarrow \phi + i\alpha^a\tau_a\phi$. Como en el caso de QED con $U(1)$, ahora se promueve la simetría global $SU(2)$ a una simetría local, ascendiendo α^a a funciones reales del espacio-tiempo $\alpha^a(x)$. Para hacer los términos cinéticos invariantes bajo la simetría local, se asciende la derivada ordinaria a una covariante

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a\tau_a)\phi. \quad (5.5)$$

La debida transformación de los campos de norma está dada por

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a(x) - f^{abc}\alpha_b(x)\alpha_c(x), \quad (5.6)$$

donde g es la constante de acoplamiento y f^{abc} las constantes de estructura del grupo $SU(2)$. El único término cinético invariante de norma para A_μ^a está dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sum_a(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2 = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2. \quad (5.7)$$

Sabemos que los generadores del grupo (τ^a) no conmutan, por lo que se tiene una simetría de norma No Abeliana. Las constantes de estructura en cada simetría son distintos, pues como veremos más adelante en el modelo electrodébil al considerar el grupo $SU(2) \times U(1)$, las constantes de acoplamiento se distinguen, en general denotadas por g y g' respectivamente [13]. A pesar de ello, el lagrangiano que se suele presentar como el de Yang-Mills es (5.3), pero considerando la $F_{\mu\nu}^a$ de (5.7) [3], así, el lagrangiano de Yang-Mills es

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi. \quad (5.8)$$

En su artículo, Yang & Mills realizaron la invariancia para el isospin ($SU(2)$), definiendo la "isotopic gauge" como una elección arbitraria de elegir la orientación de los ejes de espín isotópico en todos los puntos del espacio-tiempo (una fase), justo como en el caso electromagnético. Aunque entonces se decía que los bosones de norma debían ser no masivos (al igual que el fotón siendo el bosón de norma en $U(1)$) [26].

En la mayoría de textos introductorios a teoría de campo, se suele optar por la norma de Feynman ($\xi = 1$), esto con el fin de facilitar los cálculos. Este término aparece por ejemplo en el

propagador del fotón (5.9) (calculado aquí omitido), donde con la anterior elección, se reducen los términos.

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right). \quad (5.9)$$

En la deducción formal del anterior propagador, es necesario introducir un multiplicador de Lagrange en el lagrangiano, de la forma $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2$. Para el cálculo del propagador de bosones de norma en una teoría no abeliana, mediante integral de camino, se requiere agregar un término; dicho término es de la forma $\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu$. Faddeev y Popov optaron por representar el determinante como una integral funcional sobre un nuevo conjunto de campos anti conmutativos

$$\det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[i \int d^4x \bar{c} (-\partial^\mu D_\mu) c \right]. \quad (5.10)$$

Donde c y \bar{c} son escalares de Lorentz que anti conmutan, llamados “fantasmas” (ghosts) y “anti fantasmas” de Faddeev-Popov, y hay un par para cada campo de norma. Las excitaciones cuánticas de estos campos tienen una relación errónea entre espín y estadística, por lo que no pueden ser partículas físicas [3]. Los ghosts son necesarios para tener la respuesta correcta en teoría de perturbación, al menos en normas covariantes, a pesar de ser objetos no físicos. Surgiendo como un artefacto de insistir en una norma en la que el propagador de los bosones de norma (5.11) sea covariante de Lorentz [4].

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}. \quad (5.11)$$

El lagrangiano para los ghosts está dado por

$$\mathcal{L}_{ghost} = \bar{c}^a \left(-\partial^2 \delta^{ac} - g \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b \right) c^c. \quad (5.12)$$

5.2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría

Hemos visto que la invariancia de norma local en QED requiere que el campo de norma $A_\mu(x)$ sea no masivo. Este campo de norma determina el campo electromagnético, cuyo cuanto, el fotón, es justamente no masivo. Para implementar la invariancia de norma en las interacciones débiles debemos encontrar un método de generar bosones de norma masivos, sin embargo, cualquier término de masa rompe la simetría. El único método conocido de lograrlo de manera renormalizable², es el Rompimiento Espontáneo de la Simetría (RES).

La inspiración de este método se basa en el comportamiento colectivo de algunos sistemas de muchos cuerpos. Considerando un material ferromagnético con campo magnético externo cero. Mediante el modelo de interacción espín-espín de vecinos cercanos de Heisenberg, cuyo Hamiltoniano es

²Se han absorbido las divergencias en una redefinición de las magnitudes físicas o mediante la adición de contra términos al Lagrangiano [27].

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}J \sum_{i,j} \sigma_i \cdot \sigma_j. \quad (5.13)$$

\mathcal{H} es invariante bajo rotaciones, por lo que el operador unitario $U(R)$ que describe la rotación R , conmuta con $\mathcal{H} \implies [\mathcal{H}, U(R)] = 0$. Sin embargo los eigen estados no siempre son invariantes rotacionalmente. Además, debajo de la temperatura de Curie (T_C), el estado base del sistema tiene una magnetización distinta de cero M , que no es invariante bajo rotación. Entonces el estado base $|M\rangle$ y el estado $|M'\rangle$ se relacionan mediante $M'_i = R_{ij}M_j$ (son degenerados, tienen la misma energía).

Del estado base subiendo la temperatura por encima de la de Curie (M se desvanece), volviendo a disminuir por debajo de T_C en general el estado base tendrá una magnetización $M' \neq M$. Así, la simetría reside en la degeneración del estado base; cualquier estado base no es simétrico, puesto que los puntos de magnetización están en una dirección definida. Esta dirección es elegida "espontáneamente" por el sistema conforme se enfría [25].

5.2.1. Rompimiento Espontáneo de Simetrías Discretas

El análogo del estado base de un sistema de muchos cuerpos en física de partículas es el vacío. Se debe considerar el Hamiltoniano de la teoría invariante bajo la simetría, pero que el vacío este caracterizado por algún campo que no sea invariante bajo la transformación de simetría. El vacío es invariante rotacionalmente, entonces la simetría interna que nos interesa, debe estar rota por un campo escalar que tiene un valor distinto de cero en el vacío. Este campo escalar es llamado *Campo de Higgs*; se postula su existencia para romper espontáneamente la simetría interna [25].

El Lagrangiano más simple para tal campo escalar está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (5.14)$$

El operador de campo $\hat{\phi}(x)$ tiene un valor de expectación en el vacío distinto de cero, y al ser el vacío invariante ante rotaciones, tal valor no depende de las coordenadas, es decir

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \phi_c(x) = \phi_c \neq 0, \quad (5.15)$$

donde ϕ_c se determina al minimizar el potencial efectivo, que en este caso está dado por los últimos dos términos de (5.14). La única simetría en este modelo es que es invariante bajo la transformación discreta $\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) \equiv -\phi(x)$. V tendrá un mínimo absoluto si $\lambda \geq 0$. Cuando μ^2 es positivo, V solo tiene un mínimo en $\phi = 0$, y μ es la masa del campo. V tiene un mínimo con ϕ distinto de cero dado por $\mu^2 < 0 \implies \phi_c = \pm(-6\mu^2/\lambda)^{1/2}$; sin importar el signo a tomar, se rompe la simetría.

Definiendo un nuevo campo con un valor de expectación en el vacío (VEV) nulo: $\tilde{\phi} \equiv \hat{\phi} - \phi_c \implies \langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle = 0$. Con este valor de ϕ_c el lagrangiano se reescribe como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \tilde{\phi})^2 + 2\mu^2 \tilde{\phi}^2] - \frac{\lambda}{4!} (\tilde{\phi}^4 + 4\tilde{\phi}^3 \phi_c) - \frac{1}{4}\mu^2 \phi_c^2. \quad (5.16)$$

El término $\tilde{\phi}^3$ muestra que la simetría está rota "espontáneamente", como se esperaba [4].

5.2.2. Rompimiento Espontáneo de Simetrías Globales Continuas

La teoría de campo escalar complejo es el caso más sencillo, es invariante bajo las transformación de norma global $U(1) : \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\phi(x)$ y $\phi(x)^* \longrightarrow \phi'(x)^* = e^{i1\Lambda(x)}\phi(x)^*$, con $q, \Lambda \in \mathbb{R}$. Restringiendo a teorías renormalizables, el lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda}{4} (\phi \phi^*)^2. \quad (5.17)$$

Pidiendo que $\lambda > 0$, vemos los casos posibles para μ^2 . De ser $\mu^2 > 0$ el potencial absoluto en $\phi = 0$, en cambio, cuando $\mu^2 < 0$ el potencial tiene un mínimo $\phi_c \neq 0$; que satisface $|\phi_c|^2 = 2\mu^2/\lambda$. Sin embargo, en este caso se tiene un círculo de mínimos degenerados, pues esta condición no fija la fase de ϕ_c , debido a la invariancia de norma.

Cualquier elección particular de ϕ_c rompe la simetría espontáneamente, puesto que bajo la transformación de norma, el estado base $|\phi_c\rangle$ se transforma en un diferente estado base $|e^{-iq\Lambda}\phi_c\rangle$. Definiendo un nuevo campo con un VEV nulo; sea δ la fase de ϕ_c , entonces $\phi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}ve^{i\delta}$, con $v = (-4\mu^2/\lambda)^{1/2}$, similar a $\hat{\phi}$ [4].

Expresando ϕ en términos de dos campos reales ϕ_1 y ϕ_2 , mediante $\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)e^{i\delta}$. Dado que $\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = \phi_c$, solo $\hat{\phi}_1$ tiene un VEV $\neq 0$: $\langle 0 | \hat{\phi}_i | 0 \rangle = v\delta_{i1}$ ($i = 1, 2$). $\tilde{\phi}_1$ y $\tilde{\phi}_2$ miden desviaciones del punto asimétrico P en las direcciones radial y tangencial del círculo de mínimos degenerados que pasa por P . Con esta nuevas variables el lagrangiano se expresa como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \tilde{\phi}_1)^2 + (\partial_\mu \tilde{\phi}_2)^2 + 2\mu^2(\tilde{\phi}_1)^2 \right] - \frac{\lambda}{16} \left[(\tilde{\phi}_1)^2 + (\tilde{\phi}_2)^2 \right]^2 - \frac{\lambda v \tilde{\phi}_1}{4} \left[(\tilde{\phi}_1)^2 + (\tilde{\phi}_2)^2 \right] - \frac{\mu^2 v^2}{4}. \quad (5.18)$$

La simetría se rompe espontáneamente, el campo $\tilde{\phi}_1$ tiene una masa cuadrada de $-2\mu^2$, esto debido a que el potencial tiene un mínimo en P , en el plano $\tilde{\phi}_2 = 0$. La nueva característica es que el campo $\tilde{\phi}_2$ es no masivo. Dado que $\tilde{\phi}_2$ mide desviaciones en la dirección en la que el potencial es plano, debido a la simetría de norma.

Dichos modos no masivos, que surgen de la degeneración del estado base después del rompimiento espontáneo de la simetría, son llamados "Bosones de Goldstone". Tales bosones son una consecuencia general del rompimiento espontáneo de la simetría global continua. Además, las masas de los nuevos campos a definir en el proceso (los que satisfacen VEV=0), son los eigenvalores de la matriz de masa $(\mu^2)_{ij} \equiv \partial_{\phi_i \phi_j}^2 V|_{\phi=v}$ [25].

5.2.3. Mecanismo de Higgs

El rompimiento espontáneo en simetrías globales continuas genera bosones de Goldstone, sin embargo, si hay un bosón de norma asociado con la simetría rota, este causa que el bosón de Goldstone desaparezca y el bosón de norma se vuelve masivo mediante un procedimiento conocido como mecanismo de Higgs [4].

Considerando el caso de QED escalar, se tiene el lagrangiano dado por

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)(D^\mu \varphi^*) - \mu^2 \varphi \varphi^* - \frac{\lambda}{4} (\varphi \varphi^*)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.19)$$

donde $D_\mu\varphi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\varphi$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Cuando $\mu^2 > 0$ la invariancia de $U(1)$ no está rota y el lagrangiano describe partículas escalares de masa μ y carga q , interactuando con un campo electromagnético no masivo.

En el caso $\mu^2 < 0$ la simetría se rompe espontáneamente y $\hat{\varphi}$ adquiere como VEV $\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}ve^{i\delta}$ (δ arbitrario). En términos de los campos $\tilde{\varphi}_i$ ($i = 1, 2$), la derivada covariante se vuelve

$$D_\mu\tilde{\varphi} = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}} [\partial_\mu\tilde{\varphi}_1 + i(\partial_\mu\tilde{\varphi}_2 + qvA_\mu) + iqA_\mu(\tilde{\varphi}_1 + i\tilde{\varphi}_2)]. \quad (5.20)$$

El antiguo bosón de Goldstone $\tilde{\varphi}_2$ está atado al campo de norma no masivo A_μ . A parte de los términos de interacción, $\tilde{\varphi}$ y A_μ entran en el lagrangiano solo con la combinación $A'_\mu \equiv A_\mu + \frac{1}{qv}\partial_\mu\tilde{\varphi}_2$. Es decir, debido al RES el campo de norma está combinado con un modo de Goldstone ($\tilde{\varphi}_2$). Esto sugiere que el campo A_μ tiene masa distinta de cero. De eliminar A_μ en favor de A'_μ , se encuentra el término de masa para el campo A'_μ como $m(A') = qv$.

Mediante la transformación de norma particular $\Lambda(x) = \frac{1}{qv}\tilde{\varphi}_2(x)$, A'_μ puede obtenerse de A_μ . Por tanto, toda la dependencia de \mathcal{L} sobre $\tilde{\varphi}_2$ puede ser absorbida en una transformación de norma diferente. Tomando $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \tilde{\varphi}_1 + i\tilde{\varphi}_2)e^{i\delta}$, bajo la transformación de norma $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-iq\Lambda}\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \tilde{\varphi}'_1 + i\tilde{\varphi}'_2)e^{i\delta}$. Entonces eligiendo $q\Lambda = \tan^{-1}[\tilde{\varphi}_2/(v + \tilde{\varphi}_1)]$, se puede hacer que $\tilde{\varphi}'_2 = 0$. A esta elección se le llama "Norma Unitaria".

En esta norma se denota $\tilde{\varphi}$ por H , entonces $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + H(x)]$, lo que otorga como derivada covariante a $D_\mu\varphi \rightarrow (D_\mu\varphi)' = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}}(\partial_\mu H + iqvA'_\mu + iqA'_\mu H)$, donde ahora A'_μ es el campo A_μ con la transformación de norma. Dada la invariancia de norma de la densidad lagrangiana, con esta norma y reescritura de campos se tiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}q^2 A'_\mu A'^\mu (v + H)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{\lambda}{16}\lambda(v + H)^4 - F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}. \quad (5.21)$$

El modo de Goldstone ha sido completamente "comido" por el bosón de norma transformado A'_μ , que tiene masa qv . Queda un campo escalar H , el campo de Higgs, que es real y con masa $(-2\mu^2)^{1/2}$. Antes se tenía un bosón de norma no masivo con dos modos y un campo complejo φ compuesto de 2 campos reales. Ahora se tiene un campo vectorial masivo A'_μ con 3 modos y un campo escalar real H [25]. Con esto se concluye una breve introducción del rompimiento espontáneo de la simetría, solo resta ver en concreto el modelo electrodébil, que será donde se empleará la acción efectiva.

5.3. Modelo Electrodébil

El modelo estándar describe las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles de partículas elementales en el tratamiento de teoría de campo. Es una teoría de norma basada en el grupo de simetría local $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ³. El grupo de norma únicamente determina las interacciones y el número de bosones de norma vectoriales que corresponden a los generadores del grupo. En el modelo estándar las interacciones electrodébiles se pueden estudiar de manera separada a las

³Los subíndices denotan Color, quiralidad Zurda (Left-handed) e hipercarga débil respectivamente.

interacciones fuertes, debido a que la simetría bajo el grupo de color $SU(3)_C$ no está rota y no hay combinación con el resto de sectores. Mientras que las interacciones electromagnéticas y débiles deben ser tratadas juntas dado que puede haber una combinación entre los bosones de norma neutrales de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ [1].

La unificación electrodébil se basa en el rompimiento de simetría de $SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}$. La simetría de alta energía $U(1)_Y$ es distinta de la de baja energía $U(1)_{EM}$, asociada con el electromagnetismo. Esta simetría está rota debido a un valor de expectación del vacío de un doblete complejo de H con hipercarga $1/2$, llamado doblete de Higgs [4].

Se puede agrupar a las partículas que sienten la interacción débil en estados de un multiplete con propiedades similares a las del espín. Dado que la interacción débil solo actúa en partículas izquierdas, estas se encuentran en una representación diferente a las partículas derechas⁴.

$$E_{lL} \equiv \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L, \quad (5.22)$$

donde $l = e, \mu, \tau$, mientras que la parte Derecha transforma como singulete, es decir

$$l_R \quad y \quad \nu_{lR}. \quad (5.23)$$

Expresiones similares se tienen para los quarks, que a pesar de formar parte del modelo electrodébil, no serán tomados en cuenta con el fin de facilitar los posteriores cálculos. Se define el operador de isospín débil

$$\bar{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3) = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad (5.24)$$

donde σ^i son las matrices de Pauli. Las partículas en el doblete de la forma de (5.22) son eigen estados de del operador τ^3 . Para poder tener invariancia de norma local, se deben introducir tres campos vectoriales bosónicos de norma W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) asociados con los tres generadores τ^a del grupo $SU(2)_L$, y un campo vectorial bosónico de norma B_μ asociado con el generador Y del grupo $U(1)_Y$. La derivada covariante se da por

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} W_\mu^a \tau^a + \frac{ig'}{2} B_\mu Y. \quad (5.25)$$

Esta derivada covariante contiene dos constantes de acoplamiento independientes: g asociada con el grupo $SU(2)_L$ y g' asociada con el grupo $U(1)_Y$. El lagrangiano del modelo electrodébil es aquel renormalizable e invariante bajo la simetría local de grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, escrito en términos de los campos fermiónicos, los campos bosónicos de norma y un doblete de Higgs

$$\mathcal{L} = \sum_l (\bar{E}_{lL} i \not{D} E_{lL} + \bar{l}_R i \not{D} l_R) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{4} \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2. \quad (5.26)$$

Las derivadas covariantes corresponden a las mostradas en (5.25), salvo el término con leptones derechos, en cuyo caso se tiene $D_\mu l_R = (\partial_\mu - ig B_\mu) l_R$. Además $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a -$

⁴El hecho de que los leptones se presenten en espinores de Majorana y solo con la parte *Left* se derivó fenomenológicamente de procesos débiles. Además, para antifermiones es al revés, los dobletes se componen de partículas derechas, mientras que los singuletes de izquierdas [28].

$g\varepsilon^{abc}W_\mu^bW_\nu^c$, $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ y $\varphi^\dagger(x) = (G^-, \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - iG^0))$. Al lagrangiano presentado anteriormente se pueden agregar términos de Yukawa⁵, así como ghost (Faddeev-Popov) que de igual forma sean invariantes de $SU(2) \times U(1)$, estos dados como

$$\mathcal{L} = - \sum_l G_l (\bar{E}_{lL}\varphi l_R + \bar{l}_R\varphi^\dagger E_{lL}) - \partial_\mu \eta_a^* \partial^\mu \eta^a - g f^{abc} (\partial_\mu \eta_a^*) \eta^b W_\mu^c - \xi \eta_a^* \eta^b (\langle \varphi \rangle^T T^a T^b \varphi + \varphi^\dagger T^b T^a \langle \varphi \rangle), \quad (5.27)$$

donde $\langle \varphi \rangle^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, v)$, $T^i = \frac{g}{2}\sigma^i$ y $T^1 = \frac{g'}{2}\mathbb{1}$. Se definen los campos W_μ^\pm como

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2). \quad (5.28)$$

Se suele escribir el campo electromagnético A_μ como una combinación lineal de W_μ^3 y B_μ , a través de una rotación por medio del ángulo θ_W , mientras que su ortogonal se asocia a Z_μ

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W - W_\mu^3 \sin \theta_W \quad , \quad Z_\mu = B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W. \quad (5.29)$$

Invirtiendo las relaciones anteriores, se suele reescribir el lagrangiano. Las expresiones inversas están dadas por

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ + W_\mu^-) \quad , \quad W_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ - W_\mu^-) \quad (5.30)$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W \quad , \quad W_\mu^3 = A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W. \quad (5.31)$$

Mientras que para los ghost, sus relaciones inversas son

$$\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta^+ + \eta^-) \quad , \quad \eta^3 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\eta^+ - \eta^-) \quad (5.32)$$

$$\eta^1 = \eta^\gamma \cos \theta_W - \eta^Z \sin \theta_W \quad , \quad \eta^4 = \eta^\gamma \sin \theta_W + \eta^Z \cos \theta_W. \quad (5.33)$$

Con estas expresiones se puede reescribir el lagrangiano del modelo estándar (5.26, 5.27) para obtener explícitamente los términos que involucran Higgs, se tiene para la parte escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Esc} &= \left| \partial^\mu G^+ + ieA^\mu G^+ + \frac{ig \cos(2\theta_W)}{2 \cos \theta_W} Z^\mu G^+ + \frac{ig}{2} W^{+\mu} (v + H + iG^0) \right|^2 + \\ &+ \left| \frac{ig}{\sqrt{2}} W^{-\mu} G^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} W^{-\mu} G^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu (H + iG^0) - \frac{ig}{2\sqrt{2} \cos \theta_W} Z^\mu (v + H + iG^0) \right|^2 + \\ &- \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \lambda v H \left[G^+ G^- + \frac{1}{2} (G^{02} + H^2) \right] - \frac{\lambda}{4} \left[G^+ G^- + \frac{1}{2} (G^{02} + H^2) \right]^2 \end{aligned}$$

⁵Términos de interacción entre campos escalares y espinores.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Esc}(H) &= \frac{eg}{2} A_\mu H (G^- W_\mu^+ + G^+ W_\mu^-) + \frac{ig}{2} H (W_\mu^+ \partial_\mu G^- - W_\mu^- \partial_\mu G^+) + \\
&+ \frac{ig}{2} (\partial_\mu H) (W_\mu^- G^+ - W_\mu^+ G^-) + \frac{g^2 \cos(2\theta_W)}{4 \cos \theta_W} H Z_\mu (G^+ W_\mu^- + G^- W_\mu) + \\
&- \frac{g^2}{4 \cos \theta_W} H Z_\mu (W_\mu^+ G^- + W_\mu^- G^+) + \frac{g^2}{4} (2vH + H^2) \left(W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{\sec^2 \theta_W}{2} Z_\mu Z^\mu \right) + \\
&- \frac{\lambda v}{2} H \left[G^+ G^- + \frac{1}{2} (G^0)^2 \right] - \frac{\lambda v}{4} H^3 - \frac{\lambda}{16} H^4 - \frac{\lambda}{4} H^2 \left[G^+ G^- + \frac{1}{2} (G^0)^2 \right] + \\
&+ \frac{g}{2\sqrt{2} \cos \theta_W} Z_\mu (G^0 \partial_\mu H - H \partial_\mu G^0).
\end{aligned}$$

Para el término de Yukawa se puede obtener

$$\mathcal{L}_Y = \sum_l \frac{(-gm_l)}{\sqrt{2}m_W} (\bar{\nu}_l G^+ P_R l + \bar{l} G^- P_L \nu_l) - m_l \bar{l} l - \frac{gm_l}{2m_W} \bar{l} H l - \frac{igm_l}{2m_W} \bar{l} G^0 \gamma^5 l \quad (5.34)$$

$$\mathcal{L}_Y(H) = -\frac{gm_l}{2m_W} \bar{l} H l. \quad (5.35)$$

Por último, la parte de Faddeev-Popov se reescribe como

$$\mathcal{L}_{FP}(H) = -\frac{\xi m_Z^2}{v} H \eta^{*Z} \eta^Z - \frac{\xi m_W^2}{v} H \eta^{*\pm} \eta^\pm. \quad (5.36)$$

Los términos de masa están dados por

$$m_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2, \quad m_Z^2 = \frac{1}{4} \sec^2 \theta_W g^2 v^2, \quad m_H^2 = -2\mu^2 = \frac{1}{2} \lambda v^2. \quad (5.37)$$

Mientras que las constantes de acoplamiento se relacionan mediante

$$g \sin \theta_w = e = g' \cos \theta_W. \quad (5.38)$$

El motivo de fijarnos en los términos con Higgs será que al emplear el método de acción efectiva, el factor de corrimiento en la acción $S[\phi + \bar{\phi}]$, será justo el VEV del campo de Higgs, es decir $\bar{\phi} = \langle H \rangle$.

Con esto se concluye una breve introducción al modelo electrodébil, en el siguiente capítulo se escribirá la acción efectiva de este modelo, los nuevos términos resultantes, así como sus reglas y diagramas de Feynman.

Capítulo 6

Acción Efectiva 2PI en el Gas Denso de Neutrinos

Retomando los resultados presentados en el capítulo 4, nos interesa calcular los vértices de la acción reescrita en términos del campo de fondo \bar{H} . Estos vértices junto con los propagadores completos, permitirán evaluar los diagramas de vacío a 2 loops que describen la parte de la acción efectiva necesaria para calcular la ecuación de Dyson que relaciona el propagador completo con la auto energía a 1 loop.

Dicha ecuación integro-diferencial aplicada a la descripción de la dinámica de neutrinos contendrá en principio, información sobre aspectos no perturbativos presentes en ambientes extremos, tales como la neutrinosfera, formada durante la explosión de una supernova de colapso de núcleo. En lo restante del texto, todos los diagramas presentados y escritos en las ecuaciones correspondientes serán propagadores completos (no libres como ha venido siendo), a menos que se diga explícitamente.

Se ha establecido todo lo necesario para proceder a calcular la acción efectiva. Si bien se busca aplicar en el gas denso de neutrinos, el tratamiento no será tan específico, dadas las simplificaciones a realizar, tales como neutrinos no masivos y no considerar quarks. Iniciamos calculando los nuevos términos de interacción al aplicar un corrimiento a la acción, con el campo de fondo \bar{H} . De los lagrangianos desarrollados al final del capítulo anterior (Escalar, Yukawa y Faddeev-Popov), hacemos la sustitución $H \rightarrow H + \bar{H}$.

Puesto que $\bar{H} = \langle H \rangle^1$ es un escalar, algunos de los nuevos términos podrán ya no ser de interacción, pues pasarán a ser términos de solo dos campos. Mientras que otros términos serán similares a los originales. Por tanto, los únicos nuevos términos de interacción con su respectivo diagrama y regla de Feynman son

¹Estamos suponiendo que el rompimiento de la simetría electrodébil ya se ha dado por lo que no se debe confundir este valor de expectación con el del modelo estándar responsable de las masas de las partículas. En otras palabras estamos trabajando ya en la fase rota del modelo electrodébil.

$$\frac{g^2}{2} \bar{H} H W_\mu^- W_\mu^+ \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^\pm \\ \\ W_\nu^\mp \end{array} : \frac{ig^2}{2} g_{\mu\nu} \bar{H} \quad (6.1)$$

$$\frac{g^2}{4} \sec^2 \theta_W \bar{H} H Z_\mu Z^\mu \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \end{array} \begin{array}{c} Z_\mu \\ \\ Z_\nu \end{array} : \frac{ig^2}{2} \sec^2 \theta_W \bar{H} \quad (6.2)$$

$$\frac{g^2 \sin^2 \theta_W}{2 \cos \theta_W} \bar{H} Z_\mu G^\pm W_\mu^\mp \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ G^\pm \end{array} \begin{array}{c} Z_\mu \\ \\ W_\nu^\mp \end{array} : -\frac{ig^2 \sin^2 \theta_W}{2 \cos \theta_W} \bar{H} \quad (6.3)$$

$$\frac{eg}{2} \bar{H} A_\mu G^\pm W_\mu^\mp \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ G^\pm \end{array} \begin{array}{c} A_\mu \\ \\ W_\nu^\mp \end{array} : -\frac{ieg}{2} \bar{H} \quad (6.4)$$

$$-\frac{\lambda}{2} \bar{H} H G^+ G^- \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \end{array} \begin{array}{c} G^+ \\ \\ G^- \end{array} : -\frac{g^2}{4} \frac{m_H^2}{m_W^2} \bar{H} \quad (6.5)$$

$$-\frac{\lambda}{4} \bar{H} H G^0 G^0 \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \end{array} \begin{array}{c} G^0 \\ \\ G^0 \end{array} : -\frac{ig^2}{4} \frac{m_H^2}{m_W^2} \bar{H} \quad (6.6)$$

$$-\frac{\lambda}{4}\bar{H}H^3 \longrightarrow \begin{array}{c} \bar{H} \otimes \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \quad H \end{array} : -\frac{3g^2}{4} \frac{m_H^2}{m_W^2} \bar{H} \quad (6.7)$$

El resto de términos son idénticos a los de la teoría original, o como se mencionó, no presentan nuevas interacciones. Cabe distinguir que la notación empleada para el término \bar{H} , es la misma empleada para denotar términos de fuentes en capítulos anteriores. Por tanto, cuando se trate de \bar{H} siempre irá etiquetado.

6.1. Cálculo de los diagramas de vacío que contienen neutrinos

Ahora se calculará el término nombrado Γ_2 , que como se vio en 4.84, es equivalente a la suma de los diagramas de vacío 2PI. Al interesarnos el gas denso de neutrinos, solo nos fijaremos en los diagramas que contengan por lo menos un propagador de los mismos, por lo que le llamaremos Γ_2^ν . Como se verá, la ecuación de movimiento para el propagador exacto del neutrino involucra propagadores exactos de otras partículas, por lo que se obtendría un sistema de ecuaciones integro diferenciales acopladas.

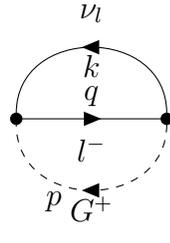
Los diagramas 2PI que incluyen neutrinos se presentan a continuación, donde $l = (e, \mu, \tau)$. Todos los diagramas 2PI del modelo electrodébil (sin incluir quarks) se presentan en el Apéndice E

$$\begin{array}{c} \nu_l \\ \curvearrowright \\ k \\ q \\ \curvearrowleft \\ l^- \\ \curvearrowright \\ p \\ G^+ \end{array}, \begin{array}{c} \bar{\nu}_l \\ \curvearrowright \\ k \\ q \\ \curvearrowleft \\ \nu_l \\ \curvearrowright \\ p \\ Z \end{array}, \begin{array}{c} \nu_l \\ \curvearrowright \\ k \\ q \\ \curvearrowleft \\ l^- \\ \curvearrowright \\ p \\ W^+ \end{array} \quad (6.8)$$

Calcularemos la amplitud de estos diagramas, que al no tener estados externos, son valores de expectación del vacío al vacío sin campos extra, solo los términos de interacción. Empleando la serie de Dyson a segundo orden (se tienen dos vértices) se tiene para el primer tipo de diagrama una interacción conforme al primer término de (5.34)

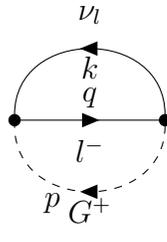
$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \exp[-iH_{Int}] \} | 0 \rangle &= \langle 0 | T \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4y \int d^4x H_I(x) H_I(y) \right\} | 0 \rangle \\ &= -\frac{g^2 m_l^2}{4m_W^2} \langle 0 | T \left\{ \int d^4y \int d^4x [\bar{\nu}_l(x) G^+(x) P_R l(x) \bar{l}(y) G^-(y) P_L \nu_l(y) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{l}(x) G^-(x) P_L \nu_l(x) \bar{\nu}_l(y) G^+(y) P_R l(y)] \right\} | 0 \rangle \end{aligned}$$

Empleando el teorema de Wick, se hacen las contracciones posibles obteniendo los propagadores, posteriormente se exhiben los índices de espino y reescribimos. En este caso se obtienen términos que se reescriben como trazas.



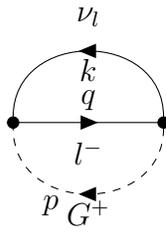
$$= \frac{g^2 m_l^2}{4m_W^2} \int d^4 y \int d^4 x \{ Tr[\Delta_{\nu_l}(y-x) P_R \Delta_l(x-y) P_L] + Tr[\Delta_{\nu_l}(y-x) P_R \Delta_l(y-x) P_L] \} D_G(x-y) \quad (6.9)$$

De (1.65) vemos que para fermiones no podemos conmutar la dependencia de los propagadores, por tanto, escribimos los propagadores en espacio de momento (transformada de Fourier), solo entonces ambos términos de trazas serán iguales y podemos factorizarlo



$$= \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr[\Delta_{\nu_l}(k) P_R \Delta_l(q) P_L] D_G(p) \times \int d^4 y \int d^4 x e^{-ix \cdot (q+p-k)} e^{-iy \cdot (k-q-p)} \quad (6.10)$$

Las integrales respecto a x y y otorgan deltas de Dirac. Una delta se utiliza para integrar sobre una variable de momento, y la otra, al ser un diagrama de vacío, contiene la suma de momento igual a cero.



$$= \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) Tr[\Delta_{\nu_l}(k) P_R \Delta_l(q) P_L] D_G(q-k). \quad (6.11)$$

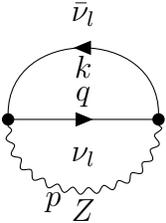
Para los diagramas restantes, que involucran bosones Z_μ y W_μ^\pm los términos de interacción correspondientes se obtienen de los primeros términos de (5.26), siendo estos

$$L_I = \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\bar{\nu}_l \gamma^\mu P_L \nu_l Z_\mu) \quad \text{y} \quad L_I = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_l \gamma^\mu P_L l W_\mu^+ + W_\mu^- \bar{l} \gamma^\mu P_L \nu_l). \quad (6.12)$$

Procediendo de igual forma que el diagrama 2PI con neutrino y un modo de Goldstone G , se proceden a calcular el resto de diagramas, para el involucrado con el bosón Z se tiene

$$\langle 0 | T \{ \exp[-i H_{Int}] \} | 0 \rangle = \frac{-g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \int d^4 y \int d^4 x Tr[\Delta_{\bar{\nu}_l}(y-x) \gamma^\mu P_L \Delta_{\nu_l}(x-y) \gamma^\rho P_L] D_Z^{\mu\rho}(x-y).$$

En este caso se presenta un factor 2 por simetría, ya que son las formas posibles a contraer los términos. Nuevamente, pasando a espacio de momento y utilizando las deltas de Dirac se obtiene



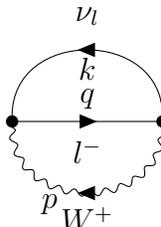
$$= \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(q) \gamma^\mu P_L \Delta_{\bar{\nu}_l}(k) \gamma^\rho P_L] D_Z^{\mu\rho}(q-k) \cdot k$$

(6.13)

Por último el diagrama que involucra un bosón W_μ , está dado por

$$\langle 0 | T \{ \exp[-iH_{Int}] \} | 0 \rangle = \frac{g^2}{4} \int d^4 y \int d^4 x \{ \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(y-x) \gamma^\mu P_L \Delta_l(x-y) \gamma^\rho P_L] + \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(x-y) \gamma^\rho P_L \Delta_l(x-y) \gamma^\mu P_L] \} D_W^{\mu\rho}(x-y).$$

Al pasar a espacio de momento y empleando las deltas se obtiene



$$= \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(k) \gamma^\mu P_L \Delta_l(q) \gamma^\rho P_L] D_W^{\mu\rho}(q-k).$$

(6.14)

6.2. Derivada funcional de los diagramas de vacío

De la ecuación (4.84), vemos que al realizar la derivada funcional a Γ_2 (suma de diagramas de vacío 2PI), se obtiene una relación con la auto energía (término de segundo orden en un desarrollo perturbativo de la autoenergía). Realizando una derivada funcional respecto al propagador del neutrino en (6.11) se obtiene

$$\frac{\delta}{\delta \Delta_{\nu_l}^{op}(k)} \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(k') P_R \Delta_l(q) P_L] D_G(q-k')$$

Se ha renombrado el momento del neutrino en el diagrama original, para considerar un caso general. Ahora se exhiben los índices espinoriales con lo que obtendremos deltas tanto de Kronecker como de Dirac, empleando esta última para quitar la integral sobre el momento k'

$$\begin{aligned}
&= \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \frac{\delta}{\delta \Delta_{\nu_l}^{op}(k)} \Delta_{\nu_l}^{ab}(k') P_R^{bc} \Delta_l^{cd}(q) P_L^{da}(q-k') D_G(q-k') \\
&= \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \delta^{ao} \delta^{pb} \delta(k-k') P_R^{bc} \Delta_l^{cd}(q) P_L^{da} D_G(q-k') \\
&= \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k-k') \right) \delta^{(4)}(0) P_R \Delta_l(q) P_L D_G(q-k') \\
&= \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(0) P_R \Delta_l(q) P_L D_G(q-k). \tag{6.15}
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene para el diagrama con Z

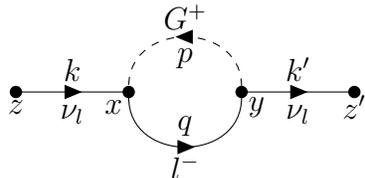
$$= \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(0) \gamma^\mu P_L \Delta_{\bar{\nu}_l}(q) \gamma^\rho P_L D_Z^{\mu\rho}(q-k). \tag{6.16}$$

Mientras que para el diagrama con W se tiene

$$= \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(0) \gamma^\mu P_L \Delta_l(q) \gamma^\rho P_L D_W^{\mu\rho}(q-k). \tag{6.17}$$

6.3. Comparación con el cálculo explícito de la auto energía

Para verificar estos últimos resultados (6.15, 6.16, 6.17) calculamos explícitamente el diagrama de la auto energía a 1 loop del neutrino, para esto “abrimos” el propagador del neutrino en los diagramas (6.8), de forma que los estados externos sean los neutrinos y los otros términos queden justo como el loop. Para el primer diagrama se tiene



$$\tag{6.18}$$

Dado que ahora tenemos estados externos, se deben agregar dichos campos (los neutrinos) a la amplitud, por lo que se debe calcular

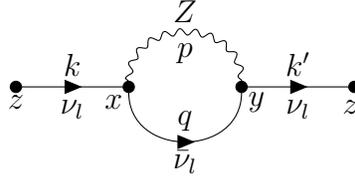
$$\langle 0 | T \{ \nu_l(z) \bar{\nu}_l(z') \exp[-iH_I] \} | 0 \rangle. \tag{6.19}$$

El Hamiltoniano de interacción se mantiene igual, así como el procedimiento hecho en los diagramas 2PI. Por lo que para el diagrama en (6.18) se tiene

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (z' - z)} \Delta_{\nu_l}(k) \left[\frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} P_R \Delta_l(q) P_L D_G(q-k) \right] \Delta_{\nu_l}(k). \tag{6.20}$$

Como podemos ver, el término entre corchetes resulta muy similar al obtenido en (6.15), donde se calculó la autoenergía mediante la derivada funcional del correspondiente diagrama 2PI. La diferencia es que mediante derivada obtenemos una $\delta^{(4)}(0)$ adicional. Los propagadores de neutrino en este último resultado equivalen a los estados externos, por lo que es un resultado adecuado.

El diagrama con bosón Z_μ está dado como

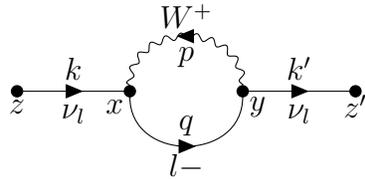


(6.21)

cuya amplitud corresponde a

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (z' - z)} \Delta_{\nu_l}(k) \left[\frac{g^2}{4\cos^2\theta_w} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu P_L \Delta_{\bar{\nu}_l}(q) \gamma^\nu P_L D_Z^{\mu\nu}(q - k) \right] \Delta_{\nu_l}(k). \quad (6.22)$$

Nuevamente el término entre corchetes corresponde al obtenido en su respectiva autoenergía calculada mediante derivada funcional (6.16), salvo nuevamente el término $\delta^{(4)}(0)$. Por último, el diagrama con bosón W_μ dado por



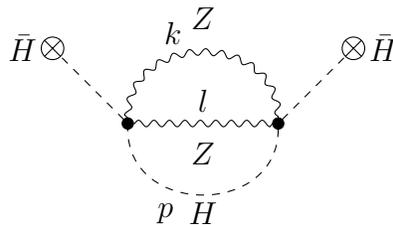
(6.23)

La amplitud de este último diagrama es

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (z' - z)} \Delta_{\nu_l}(k) \left[\frac{g^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu P_L \Delta_l(q) \gamma^\nu P_L D_W^{\mu\nu}(q - k) \right] \Delta_{\nu_l}(k) \quad (6.24)$$

6.4. Ejemplo de un diagrama de vacío con campo de fondo

Por último se hace un procedimiento similar para un diagrama 2PI que incluya el nuevo término \bar{H} . Considerando el diagrama $ZZH\bar{H}$, cuyo término de interacción se presenta en (6.2). El diagrama 2PI con este término corresponde a



(6.25)

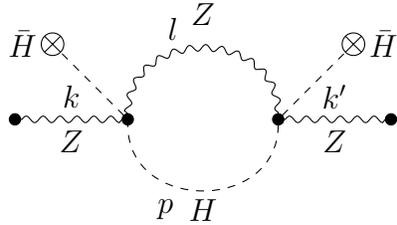
La amplitud correspondiente a este diagrama es

$$= \frac{-g^4 \bar{H}^2}{16 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) D_Z^{\mu\rho}(k) D_Z^{\nu\rho}(l) D_H(k-l). \quad (6.26)$$

Haciendo derivada funcional respecto un propagador de bosón Z en el diagrama (6.25) se tiene

$$= \frac{-g^4 \bar{H}^2}{8 \cos^4 \theta_W} g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(0) D_Z^{\nu\rho}(l) D_H(k-l). \quad (6.27)$$

Por último el diagrama de autoenergía



$$(6.28)$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_Z^{\alpha\mu}(k) \left[\frac{-g^4 \bar{H}^2}{4 \cos^4 \theta_W} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} D_Z^{\nu\rho}(l) D_H(l-k) \right] D_Z^{\sigma\beta}(k). \quad (6.29)$$

Nuevamente el término entre corchetes difiere del obtenido mediante derivada funcional, por el término $\delta^{(4)}(0)$.

6.5. Comentarios

Nótese que el resultado de la autoenergía a partir de la derivada funcional de Γ_2 según (4.84), se tiene un factor de $2i$. La discrepancia de la teoría a los resultados obtenidos anteriormente entendemos se deben a que el desarrollo en la teoría se ha hecho para una teoría con un solo "tipo" de campo, es decir, bosones o fermiones, mientras que se ha trabajado con el modelo electrodébil, donde se tienen ambos.

Incluso Cornwall [23] en el desarrollo de la teoría, realiza el tratamiento para bosones, y al final de dicho tratamiento, menciona que para fermiones es un proceso similar, pero en ningún momento se habla de un tratamiento simultáneo. Ante esta discrepancia definimos

$$\Sigma[\bar{\phi}, G] \delta^{(4)}(0) \equiv C 2i \frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G}, \quad (6.30)$$

donde C es un término constante a determinar, además agregamos el término de la delta a la sigma, que si bien es proveniente de la conservación de momento (en diagramas de vacío la suma de momento es nula) esta es proporcional al "volumen" del espacio-tiempo [2], el cual no es finito, provocando divergencias. Por lo que al realizar la derivada funcional, se tendría que hacer por unidad de volumen de espacio-tiempo.

En la literatura se reconoce que la acción efectiva es una cantidad extensiva (en el sentido termodinámico) [3]. Siendo la autoenergía una cantidad intensiva, es natural definir la relación entre ella y la acción efectiva como en la última ecuación.

6.6. Acción Efectiva para el gas denso de neutrinos

Del desarrollo y resultados del presente capítulo obtenemos la acción irreducible a 2 partículas para el gas denso de neutrinos, dada por

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^\nu = & \sum_{l=e,\mu,\tau} \frac{g^2 m_l^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(k) P_R \Delta_l(q) P_L] D_G(q-k) \\
& + \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(q) \gamma^\mu P_L \Delta_{\bar{\nu}_l}(k) \gamma^\rho P_L] D_Z^{\mu\rho}(q-k) \\
& + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \text{Tr}[\Delta_{\nu_l}(k) \gamma^\mu P_L \Delta_l(q) \gamma^\rho P_L] D_W^{\mu\rho}(q-k).
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Capítulo 7

Conclusiones

Se ha dado un tratamiento introductorio a la teoría de campos cuánticos, haciendo énfasis en lo necesario para el propio desarrollo del presente texto. Se expusieron las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, para obtener posteriormente los propagadores libres correspondientes. Se dio una introducción a la integral de camino, a manera de poder relacionarla con funcionales, funciones de Green y los propagadores antes mencionados.

A pesar de no haber empleado directamente la ecuación de Dyson-Schwinger, se le dio un lugar especial en el texto, pues en base a la deducción de la misma, se introdujeron relaciones tanto algebraicas como esquemáticas que se emplearon por el resto del trabajo; como fue el caso de la acción efectiva. Posteriormente se vio la expansión de la acción efectiva por medio de los diagramas irreducibles, llegando a segundo orden.

Mediante la expansión diagramática de los diagramas irreducibles a 2 partículas, se calcularon los diagramas permitidos en el modelo electrodébil que involucraran neutrinos, con el fin de obtener el diagrama de vacío a 2 loops de la acción efectiva que involucra campos de neutrinos. Posteriormente se calculó la autoenergía a modo de verificación del método empleado, obteniendo discrepancias por alguna constante. Esto debido a que la teoría en la bibliografía se plantea para un solo tipo de partícula (fermión o bosón), mientras que el modelo aquí empleado (electrodébil) considera ambos.

Me gustaría agregar algunos comentarios adicionales pertinentes al trabajo presentado en esta tesis. Ante el resultado principal (diagrama de vacío a 2 loops para neutrinos), mediante diferenciación funcional es posible calcular la autoenergía del neutrino (Σ^ν) a 1 loop, con los propagadores completos de las partículas involucradas. De hecho, podemos emplear la ecuación de Dyson ($G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma^\nu$) para obtener una ecuación integro diferencial auto consistente para el propagador (inverso) completo del neutrino G^{-1} .

Estas ecuaciones son auto consistentes dado que Σ^ν depende de los propagadores completos de los neutrinos y de las partículas con las que interactúa. Formalmente es necesario incluir la ecuación de Dyson para los propagadores de las otras partículas que pueden interactuar con el neutrino. Esto convierte a las ecuaciones en un sistema de ecuaciones integro diferenciales acopladas. Dada la complejidad, estas ecuaciones deben ser aproximadas mediante todo tipo de aproximaciones analíticas o numéricas.

Por ejemplo en [29] además de ir a 3 loops en los diagramas de vacío (por ende la autoenergía a 2 loops), utilizan el formalismo de Camino de Tiempo Cerrado (CTC o CTP por sus siglas en

inglés) para incluir efectos de temperatura finita. Los autores suponen un límite de baja energía en el que los bosones de norma no son dinámicos y sus propagadores son reemplazados por interacciones de contacto efectivas. También aproximan los propagadores completos de los leptones cargados mediante sus propagadores libres, esto desacopla las ecuaciones de la función de Green del neutrino de las ecuaciones del resto de partículas. A pesar de todas estas simplificaciones, los autores logran demostrar que la ecuación de Dyson resultante para la función de Green exacta del neutrino *contiene* las ecuaciones que describen las transformaciones de sabor colectivo debido a los términos de auto-acoplamiento del neutrino (las interacciones neutrino-neutrino). Estos fenómenos se presentan a detalle en [33], con su descripción basada en las ecuaciones de Sigl y Raffelt [31], empleando el formalismo de matriz de densidad. Así, incluso con considerables simplificaciones, el formalismo 2PI contiene las descripciones teóricas previas de dichos fenómenos.

Cabe mencionar que dado que el modelo electrodébil es una teoría cuántica de norma, es sabido que este tipo de teorías son renormalizables. Esto es una buena característica del modelo, pero por otro lado implica que trabajar a nivel de loop's, las expresiones matemáticas necesitan ser regularizadas apropiadamente. En el formalismo 2PI los métodos para calcular contra términos para la renormalización de las ecuaciones, se dan por ejemplo en [32]. Sin embargo, el cálculo de este tipo de contra términos está fuera del alcance de esta tesis.

Finalmente me gustaría concluir que el trabajo desarrollado en esta tesis representa una base sólida que apoyará futuros proyectos de investigación, en particular aquellos centrados en el estudio de la fenomenología de neutrinos desde primeros principios.

Apéndice A

Matrices Gamma

En la ecuación de Dirac se obtienen objetos que deben satisfacer la regla de anti conmutación $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, estas son conocidas como las matrices gamma. Con estas matrices se trabajan las soluciones a la ecuación y tienen diversas representaciones. Principalmente hay cuatro bases: la de Dirac, de Quiralidad, de Weyl y la de Majorana. Cada base tiene ventajas en resolver algunos casos específicos, por lo que se considera apto presentar las antes mencionada de manera explícita. También se presenta la matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ en cada representación. Presentada en la sección 1.2.2 como la matriz de quiralidad.

Base de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Base de Quiralidad

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Base de Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Base de Majorana

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Donde se ha empleado $i = 1, 2, 3$ y σ^i son las matrices de Pauli para espín 1/2, dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B

Derivada Funcional

Sea $W(f)$ un funcional (que por dominio lleva funciones y como contra dominio \mathbb{R} o \mathbb{C}). Sea $\eta(x)$ una función arbitraria de x y λ infinitesimal. La derivada funcional (o variacional) de $W(f)$ se define a través de

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{W(f + \lambda\eta) - W(f)}{\lambda} \equiv \int \frac{\delta W(f)}{\delta f(x)} \eta(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Puesto que $\eta(x)$ es arbitraria, tomando $\eta(x) = \delta(x - y)$ tal que la variación de $f(x)$ se localice en el punto y . Así se obtiene la expresión para la derivada variacional

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{W[f + \lambda\delta(x - y)] - W(f)}{\lambda} = \frac{\delta W(f)}{\delta f(y)}, \quad (\text{B.2})$$

donde x es la variable de integración en el funcional. Tomemos el siguiente ejemplo

$$W_z(f) = \int dx K(z, x) f(x); \quad \frac{\delta W_z(f)}{\delta f(y)} = K(z, x). \quad (\text{B.3})$$

Para generalizar lo anterior, si $K_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un funcional totalmente simétrico en sus argumentos, entonces se tiene

$$W(f) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n K_n f(x_1) \dots f(x_n) \quad (\text{B.4})$$
$$\frac{\delta^n W(f)}{\delta f(x_1) \dots \delta f(x_n)} = n! K_n(x_1, \dots, x_n).$$

Aunque menos evidente a primera vista, el siguiente resultado es muy útil para trabajar con funcionales.

$$\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \exp \left\{ i \int dt J(t) q(t) \right\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{i\lambda} \left[e^{i \int dt J(t) q(t)} e^{i\lambda q(t_1)} - e^{i \int dt J(t) q(t)} \right] \quad (\text{B.5})$$
$$= q(t_1) \exp \left\{ i \int dt J(t) q(t) \right\}.$$

La derivada funcional respecto a $J(t_1)$ implica bajar un factor $q(t_1)$. Repitiendo $n - veces$ el proceso anterior al funcional $W(J)$, y haciendo la fuente $J = 0$ después de realizar las derivadas, se obtiene

$$\frac{\delta^n W(J)}{i\delta J(t_1) \cdots i\delta J(t_n)} \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}(q) q(t_1) \cdots q(t_n) e^{iS(q)}. \quad (\text{B.6})$$

En el capítulo 2 se trata la ecuación del lado derecho (2.14), teniendo que equivale al valor esperado en el vacío del ordenamiento temporal de los operadores $\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)$, y esto es justo las funciones de Green de la teoría, por lo tanto

$$\frac{\delta^n W(J)}{i\delta J(t_1) \cdots i\delta J(t_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0|T \{ \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) \} |0 \rangle, \quad (\text{B.7})$$

a partir de la derivada variacional hacia un funcional, se pueden obtener las funciones de Green de la teoría.

Apéndice C

Integración Funcional

Se puede ver como la contra parte a la derivada funcional. En una analogía a la construcción de la integral "común/normal" para una función $\varphi(x, t)$ de variables continuas, éstas deben ser discretizadas (divididas en un pequeño conjunto de volúmenes de tamaño delta Δ que cubran la parte relevante a tratar del espacio-tiempo). El valor de la función φ es especificado en cada pequeño volumen, o de manera equivalente, la malla/celda correspondiente de N sitios, φ_M , $M = 1, 2, \dots, N$.

La integral funcional de un funcional $F[\varphi]$, de una función real φ , se define como el límite

$$\int \mathcal{D}\varphi F[\varphi] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{M=1}^N d\varphi_M F(\varphi_1, \dots, \varphi_N). \quad (\text{C.1})$$

Describe una suma sobre todas las configuraciones del campo. Resulta ser invariante ante un cambio de coordenadas por una constante, es decir, tomando $\varphi_M \rightarrow \varphi_M + \varphi_M^{(0)}$, no hay cambio, por lo que

$$\int \mathcal{D}\varphi F[\varphi] \equiv \int \mathcal{D}\varphi F[\varphi + \varphi_0]. \quad (\text{C.2})$$

La transformada de Fourier (TF) resulta una herramienta muy útil para la integración funcional. Recordando que la TF de funciones es equivalente a la representación integral de la función delta de Dirac en términos de la función exponencial. La delta funcional para cualquier funcional F

$$F[J^{(1)}] = \int \mathcal{D}J^{(2)} F[J^{(2)}] \delta[J^{(1)} - J^{(2)}], \quad (\text{C.3})$$

se construye como un producto de funciones delta sobre todas las mallas, y se construye como el límite de un producto de funciones delta, cada una de las cuales, puede ser representada en términos de su expresión integral usual.

$$\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^N \prod_{M=1}^N \delta(J_M^{(1)} - J_M^{(2)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{M=1}^N d\varphi_M e^{i\Delta\varphi_M (J_M^{(1)} - J_M^{(2)})}. \quad (\text{C.4})$$

Para la integración sobre el espacio y contorno de tiempo, introducimos la notación

$$\varphi J \equiv \int dx dt \varphi(x, t) J(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{M=1}^N \Delta \varphi_M J_M. \quad (\text{C.5})$$

Con lo que obtenemos la siguiente representación de integración funcional de la delta funcional

$$\delta [J^{(1)} - J^{(2)}] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i\varphi(J^{(1)} - J^{(2)})}, \quad (\text{C.6})$$

el factor de normalización $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^N$ ha sido incorporado a la definición de integral funcional. Con la representación del funcional delta en (C.6), tenemos para la transformada de Fourier funcional (TFF) y su respectiva relación inversa

$$F[\varphi] = \int \mathcal{D}J e^{i\varphi J} F[J] \quad \text{y} \quad F[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{iJ\varphi} F[\varphi]. \quad (\text{C.7})$$

La TFF resulta ser el producto de Transformadas de Fourier ordinarias sobre cada malla. La TFF cambia, ahora funcionales, ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Recordando las integrales gaussianas unidimensionales dadas por

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{ax^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 \pm bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}} \quad (\text{C.8})$$

La integral funcional es tratada como el límite de una integral multi-dimensional, y consideramos la integral gaussiana N-dimensional

$$I(A; b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_N e^{-C(x_1, \dots, x_N)}, \quad (\text{C.9})$$

especificado por la forma cuadrática $C(x) = \frac{1}{2} \sum_{M, M'=1}^N x_M A_{M, M'} x_{M'} \pm \sum_M b_M x_M = \frac{1}{2} x^T A x \pm$

$b^T x$, donde x^T denota el renglón $x^T = (x_1, \dots, x_N)$ y x la correspondiente columna. Suponemos que la matriz A es real, simétrica, $A^T = A$, y positiva, tal que puede ser diagonalizada por una matriz ortogonal S ; $S^{-1} = S^T$ y $D = S^T A S$ tiene solo entradas positivas en la diagonal d_M . El Jacobiano $|\det S|$, para la transformación $x = S y$ es así uno, y la integral se vuelve de la forma de (C.8), solo que N-veces

$$\begin{aligned} I(A; b) &= \prod_{M=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dy_M e^{-\frac{1}{2} d_M y_M^2 \pm y_M (S^T b)_M} = \prod_{M=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{d_M}} e^{\frac{1}{2d_M} (S^T b)_M^2} \\ &= \sqrt{\det(2\pi D^{-1})} \exp \left[\sum_{M=1}^N \frac{1}{2d_M} (S^T b)_M^2 \right]. \end{aligned}$$

Usando $(S^T A S)^{-1} = D^{-1}$ para expresar $A^{-1} = S D^{-1} S^T$, que en términos de elementos de matriz $(A^{-1})_{MM'} = \sum_{M_1} S_{MM_1} \frac{1}{d_{M_1}} (S^T)_{M_1 M'}$, y usando que $\det A = \det D$ se tiene

$$I(A; b) = \left[\det \left(\frac{A}{2\pi} \right) \right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} b^T A^{-1} b}. \quad (\text{C.10})$$

La integral funcional gaussiana es lo percibido en el límite de (C.1), con lo que se tiene

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{2}\varphi A \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\det A}}. \quad (\text{C.11})$$

Usando la identidad $\ln(\det A) = \text{Tr}[\ln(A)]$ se reescribe

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{2}\varphi A \varphi} = e^{-\frac{1}{2}\text{Tr} \ln(A)}. \quad (\text{C.12})$$

Con un proceso análogo se puede obtener

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{2}\varphi A \varphi + i\varphi J} = e^{-\frac{1}{2}\text{Tr} \ln(A)} e^{-\frac{i}{2} J A^{-1} J}. \quad (\text{C.13})$$

Para un tratamiento de integral funcional sobre una función compleja, se debe considerar integración sobre la parte real e imaginaria de N tuplas con entradas complejas, con lo que se tiene para la integral gaussiana multiple

$$\int dz^\dagger dz e^{-\frac{1}{2} z^\dagger A z} = \left(\det \left(\frac{A}{2\pi} \right) \right)^{-1}, \quad (\text{C.14})$$

donde \dagger denota el transpuesto conjugado. Para el caso de función compleja la integral funcional se vuelve

$$\int \mathcal{D}\psi^*(x, t) \mathcal{D}\psi(x, t) F[\psi^*(x, t), \psi(x, t)] = \lim_{N, N' \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{M, M'=1}^{N, N'} d\psi_M^* d\psi_{M'} F[\psi_1^*, \dots, \psi_N], \quad (\text{C.15})$$

y para la integral gaussiana

$$\int \mathcal{D}\psi^*(x, t) \mathcal{D}\psi(x, t) e^{-\frac{i}{2} \psi^* A^{-1} \psi} = \frac{1}{\text{Det} A}, \quad (\text{C.16})$$

donde A es una matriz hermitiana y definida positiva.

Apéndice D

Variables de Grassmann

Bosones y Fermiones se distinguen principalmente por su respectiva estadística, esta implica que los primeros conmutan y los segundos anti conmutan. Cuando se trabaja bajo la integral de camino, y querer especificar con que tipo de partícula se está trabajando se debe considerar estos resultados. Para bosones es intuitivo y obvio tener objetos que conmuten, y es de hecho la formulación presentada en el capítulo 2. Mientras que para los fermiones, de esta propiedad de anticonmutación resultan los números o variables de Grassmann.

En teoría del campo nos interesan álgebras de Grassmann que consisten de un número par de generadores

$$\{\eta_\alpha, \eta_\beta\} = 0, \quad (\text{D.1})$$

donde $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2n$. Todos los productos posibles, el conjunto $\{1, \eta_\alpha, \eta_\alpha\eta_\beta, \dots, \eta_\alpha \dots \eta_\nu\}$, constituyen una base para el álgebra de Grassmann, que además es un espacio vectorial sobre los números complejos de 2^{2n} dimensiones. Dado que estamos considerando un número par de generadores, estos pueden ser agrupados en pares, llamados conjugados, y renombrarlos como η_α y η_α^* , es decir, ahora $\alpha = 1, 2, \dots, n$. La conjugación está dotada con las propiedades: $(c\eta_\alpha^*)^* = c^*\eta_\alpha$ y $(\eta_\alpha \dots \eta_\beta)^* = \eta_\beta^* \dots \eta_\alpha^*$.

Cada una de las variables satisface el álgebra de Grassmann o álgebra exterior, por lo que debido a la regla de anticonmutación se tiene que $\eta^2 = 0$, en consecuencia el polinomio de mayor grado a construir es lineal

$$f(\eta) = c_0 + c_1\eta, \quad (\text{D.2})$$

donde las constantes c_0 y c_1 son números complejos arbitrarios. De manera análoga se tiene para un par η y η^*

$$f(\eta, \eta^*) = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^* + c_3\eta\eta^*. \quad (\text{D.3})$$

De igual forma se tiene

$$e^{\eta+\eta^*} = 1 + \eta + \eta^*. \quad (\text{D.4})$$

El operador de diferenciación actúa sobre la variable seguida a este, por lo que en ocasiones se requiere anti conmutar y otorgará un signo menos

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^* \eta) = -\frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \eta^*) = -\eta^*. \quad (\text{D.5})$$

Por ejemplo, para la expresión D.3 las derivadas respecto a las distintas variables están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta, \eta^*) &= c_1 + c_3 \eta^* \\ \frac{\partial}{\partial \eta^*} f(\eta, \eta^*) &= c_2 - c_3 \eta, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

mientras que por segunda derivada se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta, \eta^*) = c_3 = -\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta^*} f(\eta, \eta^*), \quad (\text{D.7})$$

por lo que la diferenciación respecto a dos variables de Grassmann anti conmuta.

En cuanto a integración, considerando el monomio (D.2), su integración con respecto a una variable de Grassmann se define como la operación lineal

$$\int d\eta f(\eta) = c_1, \quad (\text{D.8})$$

o de otra manera

$$\begin{aligned} \int d\eta c_0 &= 0 \\ \int d\eta \eta &= 1. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Por lo que integración respecto a una variable de Grassmann es equivalente a su diferenciación. Para un funcional general de dos variables conjugadas de Grassmann (D.3) tenemos

$$-\int d\eta d\eta^* f(\eta, \eta^*) = \int d\eta^* d\eta f(\eta, \eta^*) = c_3. \quad (\text{D.10})$$

Para la integral Gaussiana básica para campos de Grassmann se tiene

$$\int d\eta^* d\eta e^{i\eta^* A \eta} = \text{Det}(iA), \quad (\text{D.11})$$

después de transformar a su forma diagonal se puede escribir

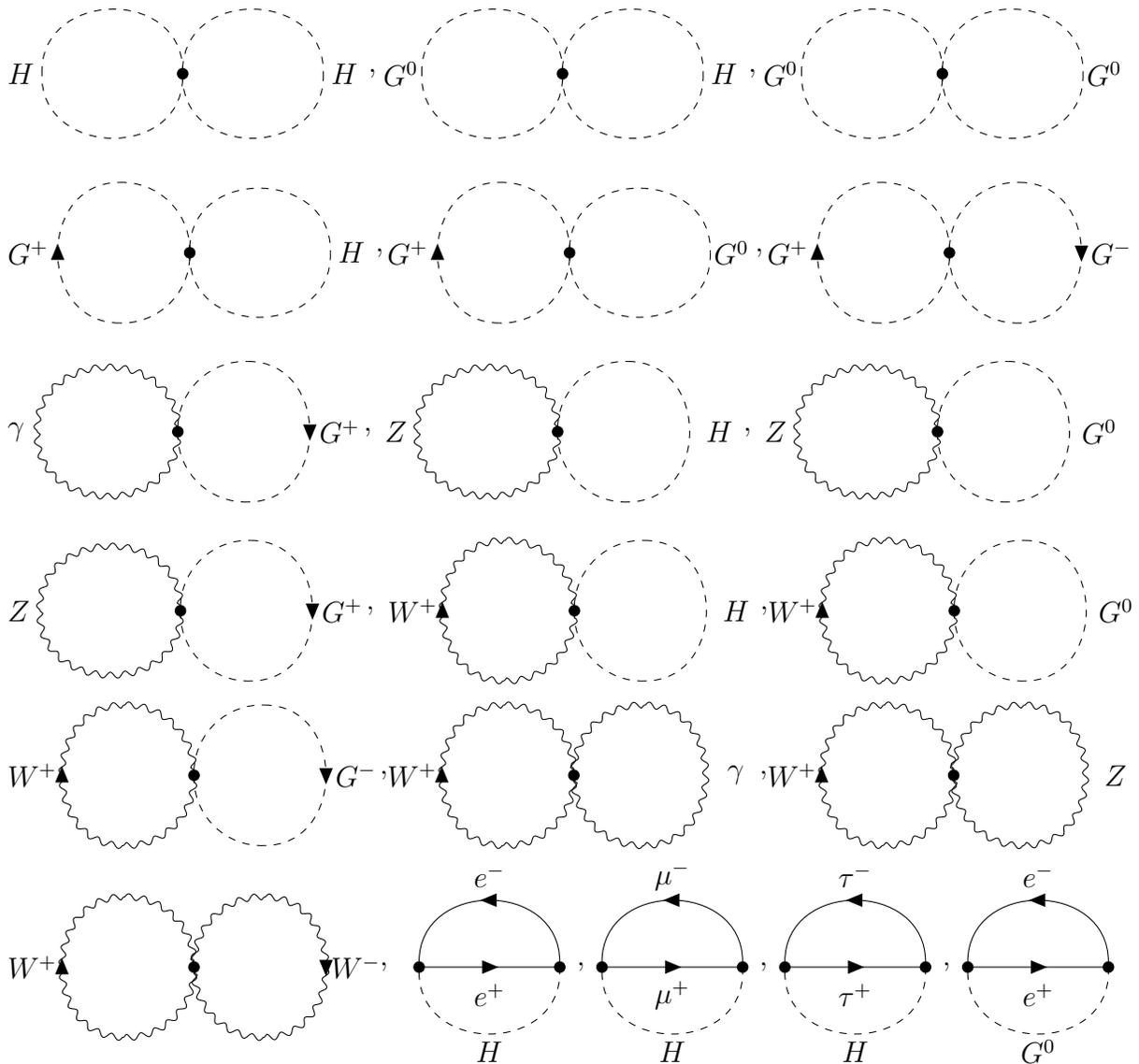
$$\int \prod_M d\eta_M^* d\eta_M e^{i \sum_M \eta_M^* A_{MM} \eta_M} = \int \prod_M d\eta_M^* d\eta_M \left(1 + i \sum_M \eta_M^* A_{MM} \eta_M \right) = \prod_M i A_{MM} = \text{Det}(iA), \quad (\text{D.12})$$

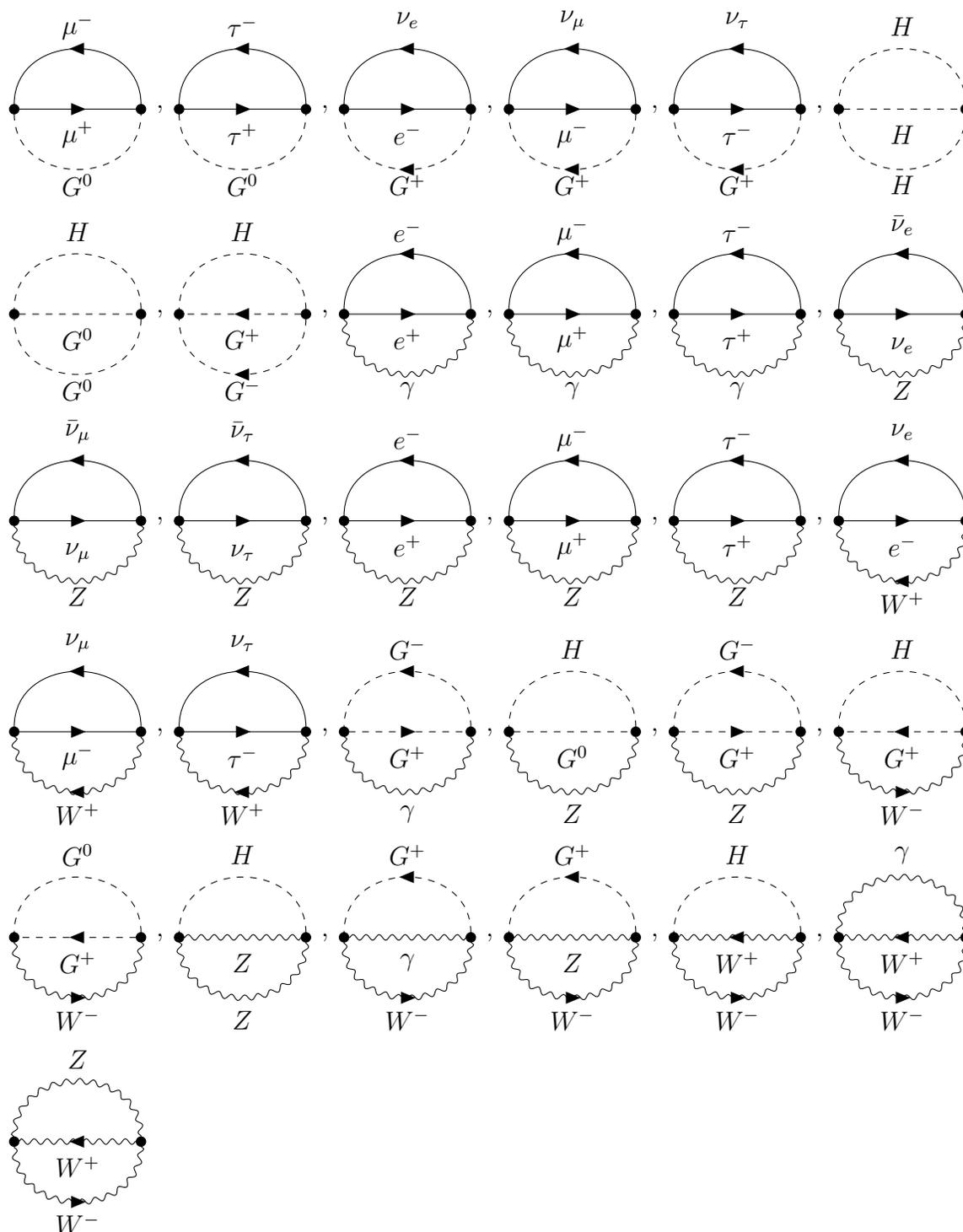
donde en la primera igualdad se ha expandido la exponencial en su forma de serie se ha utilizado el hecho de que $(\eta^* \eta)^2 = 0$, mientras que para la segunda utilizamos la definición de integración respecto a variables de Grassmann.

Apéndice E

Diagramas 2PI del Modelo Electrodébil

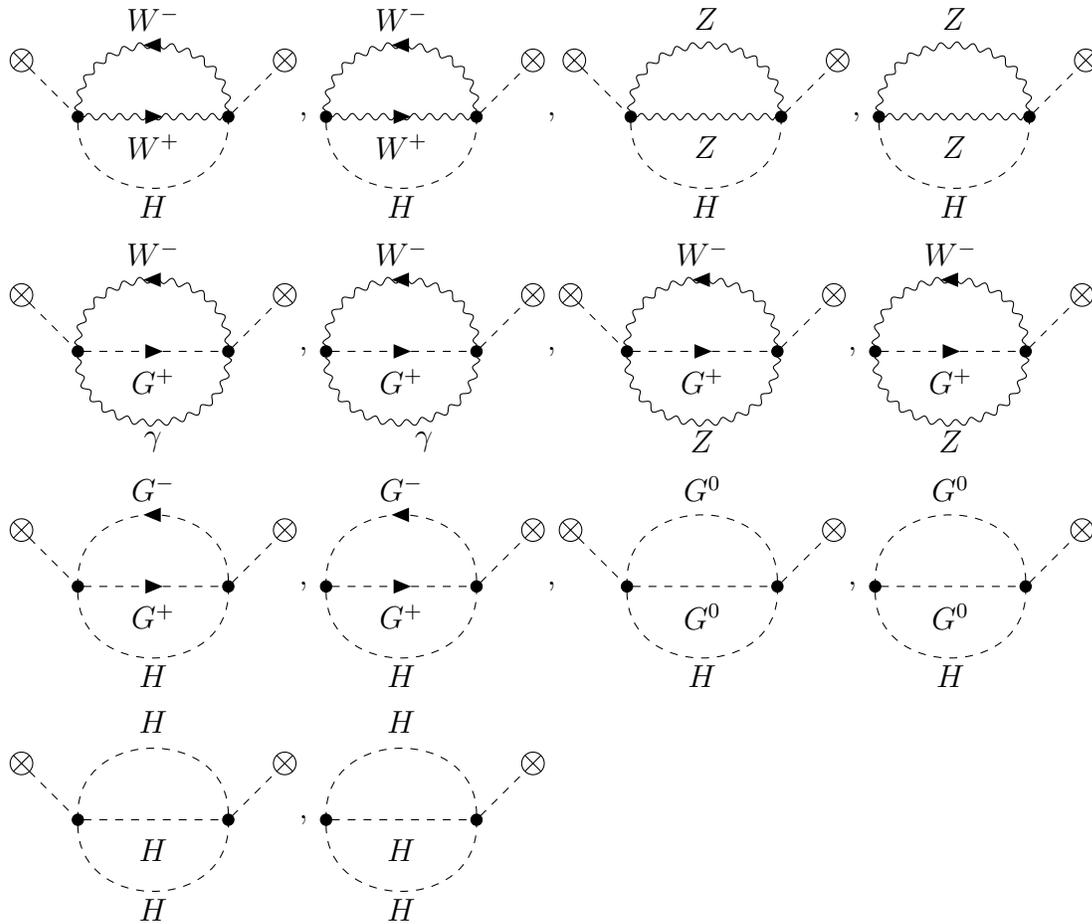
Vértices Irreducibles a 2 Partículas de la teoría electrodébil, los aquí enlistados coinciden con la teoría donde se agrega el campo de fondo \bar{H} . Los nuevos diagramas de tal adición se enlistan en el capítulo 6.





Además de los diagramas aquí enlistados, se deben considerar aquellos en los que la flecha se invierte y las partículas se sustituyen por antipartículas.

Nuevos vértices Irreducibles a 2 Partículas en el modelo electrodébil tras agregar el campo de fondo \bar{H}



Bibliografía

- [1] GIUNTI, C., & KIM, C. W. (2007). *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press.
- [2] SREDNICKI, M. (2007). *Quantum field theory*. Cambridge University Press.
- [3] PESKIN, M. E., & SCHROEDER, D. V. (1995). *Quantum field theory*. The Advanced Book Program.
- [4] SCHWARTZ, M. D. (2014). *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press.
- [5] FEYNMAN, R. P., HIBBS, A. R. (1965). *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill.
- [6] RAMMER, J. (2007). *Quantum field theory of non-equilibrium states*. Cambridge University Press.
- [7] WEINBERG, S. (1995). *The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press.
- [8] WALECKA, J. D. (2010). *Advanced modern physics: theoretical foundations*. World Scientific Publishing Company.
- [9] MÜLLER-KIRSTEN, H. J. (2006). *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral*. World Scientific Publishing Company.
- [10] RIVERS, R. J. (1988). *Path integral methods in quantum field theory*. Cambridge University Press.
- [11] FEYNMAN, R. P. (1998). *Statistical Mechanics: a Set of Lectures*. CRC Press.
- [12] FELSAGER, B. (2012). *Geometry, particles, and fields*. Springer Science & Business Media.
- [13] AITCHISON, I. J. R., & HEY, A. J. (2002). *Gauge Theories in Particle Physics: Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. CRC Press.
- [14] FRIEDRICH, T. (2000). *Dirac operators in Riemannian geometry* (Vol. 25). American Mathematical Soc..

- [15] DE LA PEÑA, L. (2014). *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica.
- [16] LICHTENEGGER K.G., (2010). *Aspects of confinement in a functional approach to coulomb gauge QCD*, Graz University, <http://unipub.uni-graz.at/download/pdf/215377>.
- [17] WILLIAMS, R. (2007). *Schwinger-Dyson equations in QED and QCD: The Calculation of fermion-antifermion condensates*.
- [18] HUBER M., (2018) *Derivation Of Dyson-Schwinger Equations*. Text based on a series of talks given at the TPI in Jena in July 2010. <https://physik.uni-graz.at/mqh/notes/DerivationDSEs.pdf>.
- [19] ALKOEFER R., HUBER M., SCHWENZER K., (2008) *Algorithmic derivation of Dyson-Schwinger Equations*. <https://inspirehep.net/literature/793572>
- [20] TOMS D. J., (2007) *The Schwinger Action Principle and Effective Action*. .
- [21] TAKA AKI KAJITA, et al., Super-Kamiokande and Kamiokande collaborations., *Atmospheric neutrino results from Super-Kamiokande and Kamiokande Evidence for ν_μ oscillations*, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Volume 77, Issues 13, 1999, Pages 123-132, ISSN 0920-5632, [https://doi.org/10.1016/S0920-5632\(99\)00407-7](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(99)00407-7).
- [22] FEYNMAN R. P. (1949) *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev., **76**(6), 769-789. doi: 10.1103/PhysRev.76.769
- [23] CORNWALL J. M., JACKIW R. Y TOMBOULIS E. (1974) *Effective action for composite operators*, Phys. Rev., **10**(8), 2428-2445. doi: 10.1103/PhysRevD.10.2428
- [24] Nobel Media AB (2021. Wed. 24 Feb 2021) *Press release: The 1999 Nobel Prize in Physics*. NobelPrize.org. <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1999/press-release/>>
- [25] BAILIN, D., & LOVE, A. (1993). *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. CRC Press.
- [26] YANG C. N., MILLS R. L., (1954) *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev., **96**(1), 191-195. doi: 10.1103/PhysRev.96.191
- [27] D. SOBRAL, C. BARRIUSO, (2018) *Introducción a la teoría de renormalización*, doi: 10.13140/RG.2.2.17295.02721
- [28] BAILIN, D. (1982) *Weak Interactions*. United Kingdom.
- [29] VLASENKO A., FULLER G.M., CIRIGLIANO V., (2014) *Neutrino Quantum Kinetics*, Phys. Rev. D **89**(10), 105004, doi:10.1103/PhysRevD.89.105004
- [30] DUAN H., FULLER G.M., QIAN Y.Z., (2010) *Collective Neutrino Oscillations*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **60**, 569-594, doi:10.1146/annurev.nucl.012809.104524
- [31] SIGL G., RAFFELT G., (1993) *General kinetic description of relativistic mixed neutrinos*, Nucl. Phys. B **406**, 423-451, doi:10.1016/0550-3213(93)90175-O

-
- [32] BERGES J., BORSANYI S., REINOSA U., SERREAU J., (2005) *Nonperturbative renormalization for 2PI effective action techniques*, *Annals Phys.* **320**, 344-398, doi:10.1016/j.aop.2005.06.001
- [33] DUAN H., FULLER M., CARLSON J. Y QIAN Y.Z., (2006) *Coherent Development of Neutrino Flavor in the Supernova Environment*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 241101, doi:10.1103/PhysRevLett.97.241101
- [34] VOLPE C., VÄÄNÄNEN D. ESPINOZA C., (2013) *Extended evolution equations for neutrino propagation in astrophysical and cosmological environments*, *Phys. Rev. D* **87** (11), 113010, doi:10.1103/PhysRevD.87.113010
- [35] PRAKASH M., LATTIMER J.M., SAWYER R.F., VOLKAS R.R., (2001) *Neutrino propagation in dense astrophysical systems*, *Ann. Rev. Nuc. Part. Sci.* **51**, 295-334, doi:10.1146/annurev.nucl.51.101701.132514