



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA  
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

FOLIACIONES DICRÍTICAS EN LA REALIZACIÓN DE INVARIANTES ANALÍTICOS DE  
CURVAS SINGULARES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
OZIEL GÓMEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CODIRECTOR DE TESIS:  
DR. FELIPE CANO TORRES  
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID, ESPAÑA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DR. XAVIER GÓMEZ-MONT ÁVALOS  
CIMAT

DR. JAWAD SNOUSI  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO 1 DE JULIO DE 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México por la oportunidad que me brindó al realizar esta tesis.

Esta tesis no existiría sin el apoyo de Laura Ortiz; y lo que pueda decir de Laura seguro se quedará corto, los que tenemos la fortuna de conocerte seguramente coincidimos en el hecho de que eres una persona extraordinaria dentro y fuera de las matemáticas. Tengo la fortuna de conocerte hace casi 10 años y realmente estoy muy agradecido con el universo de haber podido coincidir contigo y sobre todo poder aprender de ti. Desde aquel curso de ecuaciones diferenciales III en el ya lejano 2012, quedé completamente maravillado por la pasión que imprimes en tus clases y la motivación hacia los alumnos para adentrarse a explorar cosas que en principio pueden ser complicadas pero que tú consigues transmitir de manera clara y sencilla. Pero no es únicamente en el ámbito académico en el que destacas, sino como ser humano eres una persona excepcional, gracias por brindarme tu amistad y permitirme compartir momentos gratos con tu familia y la familia académica que se ha formado alrededor tuyo. Cada enseñanza, cada momento que hemos compartido dentro y fuera de lo académico es algo que atesoro y agradezco infinitamente. Gracias por aceptar dirigir esta tesis y por confiar en mí incluso más de lo que yo confío en mí mismo. Gracias por todo el apoyo que me has brindado a lo largo de estos años y por tus valiosas observaciones hacia este trabajo y los consejos en las presentaciones que he hecho del mismo. Creo que lo único que me falta es tener un trabajo contigo y espero que no pase mucho tiempo para ello. Gracias por todo Laura.

Me gustaría agradecer también a mi otro director de tesis, y que afortunadamente puedo decir que es mi amigo, Felipe Cano. Podría decir muchas cosas de ti, pero esa forma tan singular de ser es lo que realmente te caracteriza. Gracias por cada una de las pláticas que tuvimos respecto al trabajo, por cada sugerencia y por cada exposición en la pizarra que me ayudó a darle claridad a este trabajo. Gracias Felipe por tu apoyo en la dirección de este trabajo pero sobre todo muchas gracias por tu amistad. Prácticamente sin conocerme me diste la mano y confiaste ciegamente en mí para la realización de esta tesis, que en principio parecía una piragua manejada por mí, es decir, sin rumbo alguno pero que al final se convirtió en un barco de vela con la dirección correcta. Gracias por permitirme conocer a tu familia y por los agradables momentos que pasé con ustedes el tiempo que estuve por Valladolid. Espero en un futuro no muy lejano poder trabajar contigo y sobre todo contar con tu amistad el resto de nuestras vidas.

Quiero agradecer también a los doctores Xavier Gómez-Mont, Jawad Snoussi y Miguel Fernández Duque por sus valiosos comentarios y aportaciones hacia mi trabajo. También quisiera agradecer a Ernesto Rosales por permitirme trabajar con él en los cursos que hemos impartido juntos, por sus comentarios, sus consejos y su manera de entender y transmitir las matemáticas.

Me gustaría también agradecer al grupo de investigación ECSING-AFA, en particular a Nuria Corral, Clementa Alonso, Fernando Sanz, José Cano, Jorge Mozo y Javier Sanz por todo el apoyo y la hospitalidad que me brindaron el tiempo que estuve de estancia en la Universidad de Valladolid.

Y no menos importante me gustaría agradecer a los hermanitos académicos que han estado a lo largo de este proceso y que con sus comentarios y palabras de aliento han contribuido a la realización de este trabajo. Muchas gracias Jessica, Jessie, Jesús, Gil, Gaby, Lupita y Gibrán. Y desde luego que no podía faltar mi agradecimiento a Bea por los agradables y bonitos momentos que compartimos, por todo su apoyo incondicional dentro y fuera del ámbito académico, y por ser una excelente anfitriona el tiempo

---

que estuve por Valladolid. A mis amigos Ricardo, Nef, Miriam, Irving, Dennis, Alan, Abel y Eric con los cuales he compartido momentos divertidos a lo largo de este trabajo y a lo largo de nuestra vida.

Finalmente quisiera agradecer a mis padres Silvia y Manuel por todo el amor y cariño que me han dado siempre. Por el apoyo incondicional que me han brindado durante estos años de estudio, por sus palabras de aliento en los momentos más complicados y por siempre motivarnos a mi y mis hermanos a seguir adelante a pesar de las circunstancias. A mis hermanos Alí y Azael porque, a pesar de la distancia, seguimos estando juntos a través del pensamiento. A Monse por caminar a mi lado y permitirme compartir mi vida con ella, por apoyarme incondicionalmente en los buenos y malos momentos, gracias por todo tu amor.

Agradezco a Conacyt y a los proyectos Papiit IN106217, IN110520, por el apoyo recibido durante la elaboración de la presente tesis.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1. Geometría Analítica Compleja . . . . .	14
1.2. Geometría analítica local . . . . .	16
1.2.1. Conjuntos analíticos . . . . .	20
1.3. Multiplicidad de intersección entre curvas . . . . .	30
1.4. Reducción de singularidades . . . . .	31
<b>2. Equivalencia analítica de ramas planas</b>	<b>48</b>
2.1. Clasificación analítica de ramas planas . . . . .	48
2.2. El invariante de Zariski de una rama plana . . . . .	49
2.2.1. Conjunto de valores de diferenciales de Kähler . . . . .	54
2.2.2. Ramas planas con característica $(n, m)$ . . . . .	55
<b>3. Foliaciones singulares de <math>(\mathbb{C}^2, 0)</math></b>	<b>59</b>
3.1. El orden de tangencia entre una foliación y una rama . . . . .	65
3.2. Foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales de $(\mathbb{C}^2, 0)$ . . . . .	67
3.2.1. Foliaciones dicríticas cuspidales y el invariante de Zariski de una rama . . . . .	71
<b>4. Valoraciones divisoriales y curvas jacobianas de foliaciones holomorfas</b>	<b>76</b>
4.1. Definiciones . . . . .	76
4.2. Valoraciones divisoriales . . . . .	78
4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia . . . . .	80
4.3.1. Curvas polares de foliaciones regulares . . . . .	81
<b>5. Transversalidad polar</b>	<b>88</b>
5.1. Transversalidad polar con la familia $\mathfrak{F}_\pi^C$ . . . . .	88
5.2. Degeneraciones de la familia $\mathfrak{F}_\pi$ y curvas jacobianas . . . . .	90
5.3. Foliaciones con transversalidad polar a la familia $\mathfrak{F}_\pi^C$ . . . . .	91
<b>6. Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Apéndices</b>	<b>102</b>
<b>Apéndice A. Equisingularidad de ramas planas</b>	<b>104</b>
A.0.1. El semigrupo de $\mathcal{C}$ . . . . .	106
A.0.2. La sucesión de multiplicidades de $\mathcal{C}$ . . . . .	111
A.0.3. La gráfica dual de $\mathcal{C}$ . . . . .	114
<b>Apéndice B. Reducción de singularidades de foliaciones singulares</b>	<b>118</b>

<b>Índice alfabético</b>	<b>131</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>132</b>

# Introducción

El objetivo de la presente tesis es estudiar el comportamiento del invariante de Zariski de las separatrices no aisladas de las foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . La principal característica de las foliaciones dicríticas cuspidales es que la única componente dicrítica que tienen está determinada por la clase de equisingularidad  $(n, m)$  y no hay puntos singulares o de tangencia sobre esta componente. El resultado principal de esta tesis es demostrar la existencia de una subfamilia de estas foliaciones tal que para cada foliación de esta subfamilia el invariante de Zariski de todas sus separatrices no aisladas coincide. A continuación damos un pequeño contexto histórico para dar un planteamiento formal de nuestro problema.

## Contexto Histórico

El desarrollo de la teoría de foliaciones holomorfas se remonta a los trabajos de J. C. Bouquet, C. Briot y H. Poincaré a finales del siglo XIX y principios del siglo XX; Poincaré inició el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales sin conocer explícitamente las funciones que las definen, desarrollando así un estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, que posteriormente daría origen a la teoría de foliaciones holomorfas. Alrededor de esta teoría se ha desarrollado, al paso del tiempo, una investigación intensa.

A lo largo de este trabajo estamos interesados en foliaciones holomorfas singulares dicríticas de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ ; en particular, en el estudio de sus separatrices no aisladas. Recordemos que una separatriz es una hoja de la foliación que se extiende de manera analítica al punto singular, es decir, en una vecindad del punto singular la hoja es el lugar de ceros de una serie de potencias convergente. La existencia de una separatriz para una foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es un resultado de C. Camacho y P. Sad [13] (ver también [48]). Como consecuencia de este resultado las curvas singulares aparecen de manera natural dentro del estudio de foliaciones holomorfas singulares.

El estudio topológico de las curvas singulares fue iniciado a principios del siglo XX, sin embargo Newton en 1676 ya había comenzado con el estudio de curvas singulares desde un punto de vista “analítico”, es decir, Newton demuestra que siempre existe una parametrización de una curva singular, dicha parametrización es formal. No sería sino hasta los resultados de Puiseux en 1850 en los que se demuestra que esta serie de potencias es convergente. A partir de la parametrización es posible introducir la *característica* y los *pares de Puiseux* de una rama que son invariantes de la clase de equisingularidad de ésta. Dados dos gérmenes de curvas  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  se dice que son *equisingulares* o tienen el mismo *tipo topológico* si existe un germen de homeomorfismo del espacio ambiente que aplica la curva  $\mathcal{C}$  en la curva  $\mathcal{D}$ . Los primeros trabajos con respecto a la equisingularidad de curvas planas fueron realizados a finales de 1920 y principios de 1930. Estos trabajos de clasificación topológica fueron desarrollados principalmente por K. Brauer (ver [6]), E. Kähler (ver [44]), O. Zariski (ver [56]) y W. Burau (ver [10]); en ellos se estudia la topología de la curva alrededor de la singularidad y, en el caso en el que la curva es irreducible, se introducen algunos de los invariantes de equisingularidad de la rama como son la *característica*, los *pares de Puiseux*, el *semigrupo* y la *gráfica dual* de la resolución. Esta última se obtiene a partir de la resolución minimal de la curva. Dada una curva singular existe una sucesión finita de explosiones de manera que el transformado estricto de la curva es una curva no singular. Este resultado es conocido como la reducción

de singularidades de la curva (ver [3], [8], [45],[55]).

La clasificación analítica de ramas planas fue iniciada por Oscar Zariski en los años sesenta del siglo XX. Los objetos de estudio son los gérmenes de curvas singulares irreducibles conocidos como *ramas*, pertenecientes a una misma clase de equisingularidad. El problema del moduli de una rama plana consiste en describir el espacio cociente de la clase de equisingularidad de la rama módulo la equivalencia analítica y fue establecido de manera formal por O. Zariski en 1973.

Dos de los trabajos pioneros dentro del estudio de la clasificación analítica son los trabajos desarrollados por S. Ebey (ver [30]) y O. Zariski (ver [57]). En el primer trabajo se da una descripción completa al espacio de moduli para la clase de equisingularidad (5, 9) y se introducen algunas ideas que posteriormente desarrollaría O. Zariski en un intento por dar solución a dicho problema. En [57] se da una caracterización de las curvas singulares irreducibles que son analíticamente equivalentes a la curva dada por la ecuación  $y^n - x^m = 0$ , en términos del conjunto de valores de diferenciales de Kähler. Más aún, en este trabajo se introduce el primer invariante analítico de ramas planas, que posteriormente sería conocido como el *invariante de Zariski*. En un curso impartido por O. Zariski en 1973 se establece de manera formal el problema del moduli de ramas planas y se consigue dar una descripción del espacio de moduli para una gran variedad de ramas de distintas clases de equisingularidad, sin embargo, dicho problema queda abierto aproximadamente 40 años. En ese lapso de tiempo muchos trabajos para intentar dar una solución al problema fueron realizados. Por citar algunos resultados, en 1978 C. Delorme estudió ramas con un único par de Puiseux (ver [29]) y calculó la dimensión de la componente genérica del espacio de moduli para este caso. Un año más tarde, M. Granger en [37] y posteriormente en 1988, Briançon, Granger y Mainsonobe en [7] presentan fórmulas para calcular la dimensión de la componente genérica del moduli de la rama cuasihomogénea descrita por la ecuación  $y^n - x^m = 0$ . En [37] M. Granger aborda el caso en el que  $n = m$  y posteriormente en [7] para cualesquiera par de números  $n, m$ . Estos resultados son una generalización de los resultados dados por C. Delorme en [29]. En 1998, R. Péraire en [50] retoma el estudio de ramas planas con un único par de Puiseux y exhibe un algoritmo para calcular el número de Tjurina de una curva en la componente genérica. Finalmente en 2011, A. Hefez y M.E. Hernandez en [40] (ver también [39]) dan una solución completa al problema del moduli de ramas planas. Recientemente fue publicado un trabajo por M.E. Hernandez y M.E. Rodrigues (ver [41]), en el cual se estudia el problema de clasificación analítica de curvas con varias ramas, siguiendo las ideas desarrolladas por O. Zariski en [60] y también [40].

Como mencionamos previamente, la existencia de separatrices de foliaciones holomorfas singulares relaciona de manera natural la teoría de foliaciones holomorfas singulares con la teoría de curvas singulares. Algunos de los resultados para curvas singulares tienen un equivalente en el contexto de foliaciones holomorfas singulares en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . El resultado de resolución de singularidades para foliaciones holomorfas singulares en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , es un análogo al resultado de resolución de curvas singulares. Dicho resultado establece que las singularidades de foliaciones holomorfas singulares se pueden transformar bajo una sucesión de explosiones en singularidades más “sencillas”. Este resultado fue establecido por A. Seidenberg en 1968 ver [53] (ver también [15]). Dado que siempre existen separatrices de foliaciones holomorfas singulares y del resultado de resolución de singularidades, es natural preguntarse la relación que existe entre la resolución de singularidades de las separatrices y la resolución de la foliación. En [12] se aborda esta pregunta y se demuestra que la desingularización de una foliación holomorfa singular y la desingularización de sus separatrices es la misma en el caso en el que la foliación no tiene singularidades de tipo silla-nodo. Dichas foliaciones son conocidas como *curvas generalizadas*. En ese mismo trabajo se introduce el concepto de *separatriz aislada* (ver también [17] y [26]), estas separatrices son aquellas que no forman parte de una componente dicrítica de la foliación después de la resolución minimal de singularidades de ésta. El objetivo del presente trabajo es estudiar las *separatrices no aisladas* que son precisamente las que están contenidas en un paquete dicrítico. También en [12] se introduce el *orden de tangencia* entre una curva suave y una foliación singular en el origen. Este orden de tangencia puede considerarse como una “medida” de qué tan cerca está una curva de ser una separatriz de la foliación. Puede demostrarse (ver [42]) que el orden de tangencia en el origen entre una curva suave  $C$  y una foliación holomorfa no singular  $\mathcal{F}$  es igual la multiplicidad de intersección entre la curva suave y la curva *polar* o *jacobiana* entre la foliación

$\mathcal{F}$  y la foliación dada por la diferencial de la función que define a la curva  $\mathcal{C}$ . Dadas dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  la curva *polar* o *jacobiana* entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  es el lugar de tangencias entre ambas foliaciones. Este lugar geométrico aparece de manera natural en el presente trabajo y ha sido objeto de estudio en los últimos 40 años. Por citar algunos resultados esta dirección, se tiene el trabajo de N. Corral [24] donde presenta una descomposición de la curva polar genérica de una foliación en analogía al resultado de descomposición de la curva polar genérica para curvas singulares. Este resultado fue establecido por M. Merle en [46] para el caso en el que la curva es irreducible y por E. Barroso para el caso reducible ver [5]. En [18] N. Corral, F. Cano y R. Mol estudian la relación entre algunos invariantes de foliaciones singulares no dicríticas y sus separatrices en términos de las curvas polares. Más aún, en este trabajo aparece el orden de tangencia entre una foliación singular y una rama, que es una generalización al orden de tangencia introducido en [12]. Finalmente la importancia de las curvas polares o jacobianas puede observarse en los recientes trabajos de L. Ortiz-Bobadilla y J. Jaurez-Rosas ver [43] y trabajos en proceso en los cuales las curvas jacobianas juegan un papel importante para el entendimiento de los invariantes de clasificación analítica de foliaciones singulares presentados en el trabajo de L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-González y S.M. Voronin, ver [49].

Dada la foliación  $\mathcal{F}$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definida por el campo vectorial de la forma  $v = (nx + h_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (my + h_2(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}$  o por la 1-forma holomorfa  $\omega = (my + h_2(x, y)) dx - (nx + h_1(x, y)) dy$ , con  $1 < n < m$  y el máximo común divisor es 1, se tiene cómo consecuencia del teorema de linealización de Poincaré que la foliación  $\mathcal{F}$  es analíticamente equivalente a la foliación  $\mathcal{F}_0$  definida por el campo vectorial  $v_0 = nx \frac{\partial}{\partial x} + my \frac{\partial}{\partial y}$ . Las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}_0$  son las curvas dadas por  $\mathcal{C}_k = \{y^n - kx^m = 0\}$ ,  $k \in \mathbb{C}^*$  las cuales pertenecen a la clase de equisingularidad  $(n, m)$  y de hecho todas estas curvas son analíticamente equivalentes a la curva  $y^n - x^m = 0$ , que es la curva más sencilla dentro de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ . Más aún, si  $\pi$  es la sucesión de explosiones que desingulariza a la curva  $y^n - x^m = 0$ , entonces la componente dicrítica de  $\mathcal{F}_0$  es precisamente la última componente irreducible que aparece al hacer la sucesión  $\pi$ .

En este contexto la presente tesis está encaminada al dar una respuesta a la siguientes preguntas. Dada una foliación holomorfa singular  $\mathcal{F}$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  cuya única componente dicrítica es la última componente irreducible que aparece al realizar la sucesión de explosiones determinada por  $\pi$ , ¿Bajo qué condiciones sobre la foliación  $\mathcal{F}$  se puede asegurar que todas las separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski?, en particular ¿cuándo es posible asegurar que todas las separatrices no aisladas son cuasihomogéneas?

## Objetivo y extracto de los principales resultados del trabajo de tesis

El objetivo de este trabajo de tesis es el estudio de un invariante analítico de las ramas no aisladas de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales. Recordemos que una curva plana analítica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es definida como el lugar de ceros de una función analítica  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Es un hecho conocido que, así definida,  $f$  puede ser factorizada en un número finito de series de potencias irreducibles. Cada factor irreducible define lo que es conocido como *rama* de una curva plana. El conjunto de ramas con el mismo tipo topológico es conocido como clase de equisingularidad de una *rama* dada. El concepto de rama no aislada de una foliación singular holomorfa fue introducido en [12] (ver también [17]). Una foliación dicrítica cuspidal de tipo  $(n, m)$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es cualquier foliación analíticamente equivalente a la foliación dada por  $nxdy - mydx = 0$  o por el campo de vectores  $v = nx \frac{\partial}{\partial x} + my \frac{\partial}{\partial y}$ , donde  $1 < n < m$  y m.c.d. $(n, m) = 1$ . Una foliación dicrítica pseudo-cuspidal de tipo  $(n, m)$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es cualquier foliación  $\mathcal{F}$  que tiene una única componente dicrítica en la reducción de singularidades que determina el tipo de equisingularidad  $(n, m)$  (precisamos esta definición en la sección 3.1).

En estas condiciones es conocido, por el teorema de Camacho-Sad, que para cada foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  hay al menos una separatriz para la foliación (ver [13], [48]). Entonces, una foliación holomorfa singular puede verse como la ecuación implícita de sus curvas invariantes. Para foliaciones no dicríticas sabemos que el tipo de equisingularidad de sus separatrices es finito dado que sólo hay un número finito de éstas. Cuando la foliación es dicrítica hay un número infinito de curvas invariantes, sin

embargo, como consecuencia directa del teorema de Seidenberg acerca de la reducción de singularidades de foliaciones (ver [53]), obtenemos la misma situación que en el caso de foliaciones no dicríticas, es decir, el tipo de equisingularidad de las ramas invariantes no aisladas es finito.

En 1965 O.Zariski demostró (ver [58]) que si la rama  $\mathcal{C}$  no es analíticamente equivalente a la cúspide dada por la parametrización  $\varphi(t) = (t^n, t^m)$  entonces dicha rama admite una serie de Puiseux  $\varphi$ ,

$$\varphi(t) = (t^n, t^m + t^\lambda + \sum_{j>\lambda} a_j t^j),$$

donde  $\lambda$  es un invariante analítico de la rama y es conocido como el *invariante de Zariski* de la rama  $\mathcal{C}$ . En el caso en el que la rama  $\mathcal{C}$  es analíticamente equivalente a la rama parametrizada por  $\varphi(t) = (t^n, t^m)$  el invariante de Zariski es definido como  $\lambda = \infty$ .

Un germen de foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es definido por un campo vectorial  $v = Q(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - P(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ , con  $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , o por el lugar de ceros de la 1-forma  $\omega = Pdx + Qdy$ . La foliación  $\mathcal{F}$  tiene una singularidad aislada en el origen si  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ , y  $P(x, y) \neq 0$  o  $Q(x, y) \neq 0$ , para  $(x, y) \neq (0, 0)$  en una vecindad del origen  $0 \in (\mathbb{C}^2, 0)^1$ ; en tales puntos se dice que  $\mathcal{F}$  es regular. A lo largo de este trabajo consideramos singularidades aisladas.

**Definición.** La multiplicidad de una foliación holomorfa singular  $\mathcal{F}$  en el origen de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es definida como

$$m_0(\mathcal{F}) = \min \{ \text{ord}_0(P), \text{ord}_0(Q) \}$$

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Una *separatriz* de  $\mathcal{F}$  es una hoja  $\mathcal{L} \subset (\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$  cuya cerradura  $\mathcal{L} \cup \{0\}$  es el germen de una curva analítica.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  que está dada por la ecuación  $\{\omega = 0\}$ . Sea  $\mathcal{C}$  un germen de rama plana dado por la ecuación  $\{f = 0\}$ , con  $f$  reducida. La rama  $\mathcal{C}$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  si se satisface la siguiente ecuación

$$\omega \wedge df = f\eta,$$

donde  $\eta$  es una 2-forma holomorfa.

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación holomorfa en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con singularidad aislada. Decimos que  $0$  es una *singularidad no dicrítica* de la foliación si  $\mathcal{F}$  tiene, a lo más, un número finito de separatrices. En caso contrario, decimos que  $0$  es una *singularidad dicrítica*; y respectivamente,  $\mathcal{F}$  se dice que es una foliación *no dicrítica* o *dicrítica*.

**Observación.** Si  $\mathcal{F}$  es una foliación no dicrítica, entonces cada componente irreducible del divisor excepcional  $\pi^{-1}(0)$ , donde  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es el morfismo de resolución de singularidades (ver sección 1.4), es una curva invariante del transformado estricto de  $\mathcal{F}$ . En el caso en el que  $\mathcal{F}$  es una foliación dicrítica, hay al menos una componente irreducible del divisor excepcional  $\pi^{-1}(0)$  que es transversal en cada punto a  $\mathcal{F}$  excepto para un número finito de puntos (puntos singulares o de tangencia). Tal componente será llamada *componente dicrítica*.

**Definición.** Decimos que  $\mathcal{C}$  es una *separatriz aislada* para la foliación holomorfa con singularidad aislada  $\mathcal{F}$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  si  $\mathcal{C}$  no interseca a ninguna componente dicrítica de  $\mathcal{F}$ . En caso contrario, decimos que  $\mathcal{C}$  es una separatriz no aislada.

Para aquellas ramas que no son separatrices de una foliación, es posible definir un orden de tangencia en el origen entre la foliación y la rama como sigue:

---

<sup>1</sup>A lo largo de este trabajo usaremos el símbolo de  $0$  sin distinguir si se trata de  $0 \in (\mathbb{C}^2, 0)$  o bien del número  $0 \in \mathbb{C}$ . Asumimos que el contexto permite al lector entender con claridad.

**Definición.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa con singularidad aislada de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Sea  $\mathcal{C}$  una rama plana y sea  $\varphi$  su parametrización. Definimos el *orden de tangencia* en 0, que denotamos por  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  como

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \text{ord}_0 \varphi^* \omega, \quad (1)$$

donde  $\{\omega = 0\}$  es una ecuación local para  $\mathcal{F}$ .

**Observación.** Notemos que si  $\mathcal{C}$  es una rama que es separatriz de una foliación  $\mathcal{F}$  definida por  $\{\omega = 0\}$  y  $\varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$  entonces  $\varphi^* \omega = 0$ , en este caso podemos definir el orden de tangencia en el origen como  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$ .

Fijamos un par de números naturales  $(n, m)$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m > n > 1$ ,  $\text{m.c.d}(n, m) = 1$ , y consideramos una sucesión finita de explosiones  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  determinada por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$ . Denotamos por  $E_d$  a la componente del divisor que aparece al realizar la última explosión de la sucesión. Introducimos a la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales  $\mathfrak{F}_\pi$  y a la familia de foliaciones cuspidales  $\mathfrak{F}_\pi^c$  inducidas por  $\pi$ .

**Definición.** (Foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales) Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular dicrítica  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y sea  $\pi$  una sucesión de explosiones determinadas por  $(n, m)$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  pertenece a la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales  $\mathfrak{F}_\pi$  si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen

- i) La foliación inducida  $\pi^* \mathcal{F}$  tiene una única componente dicrítica  $E_d$ . Esta componente dicrítica es la componente irreducible que aparece en la última explosión de la sucesión  $\pi$ ; la foliación  $\pi^* \mathcal{F}$  no tiene puntos singulares o de tangencia sobre esta componente;
- ii)  $\mathcal{F}$  tiene, al menos, dos curvas invariantes suaves,  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_\infty$ , tales que  $\mathcal{L}_0$  tiene contacto maximal con  $\pi$  y  $\mathcal{L}_\infty$  tiene intersección transversal con  $\mathcal{L}_0$ .

Consideramos ahora la familia de foliaciones dicríticas cuspidales:

**Definición.** (Foliaciones dicríticas cuspidales) Sea  $\mathcal{F}$  una foliación dicrítica de  $\mathfrak{F}_\pi$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  pertenece a la familia de foliaciones dicríticas cuspidales, que denotamos por  $\mathfrak{F}_\pi^c$ , si existe un campo vectorial  $v$  que define a la foliación  $\mathcal{F}$  y tal que  $D_0 v$  tiene dos valores propios distintos  $l_1, l_2 \in \mathbb{C}$ , con  $l_1 \cdot l_2 \neq 0$  y  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

Decimos que una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^c$  tiene orden de tangencia maximal con la rama  $\mathcal{C}$  de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ , si para cada foliación dicrítica cuspidal  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^c$ , se tiene,

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \leq \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}).$$

El siguiente resultado da un criterio que permite recuperar el invariante de Zariski en términos del orden de tangencia entre la rama y las foliaciones dicríticas cuspidales.

**Teorema 3.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase equisingularidad  $(n, m)$ , tal que  $\mathcal{C}$  no es  $(n, m)$ -cuasihomogénea y sea  $\mathcal{F}$  una foliación cuspidal dicrítica,  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^c$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) *El orden de tangencia en el origen entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{F}$ ,  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  es maximal;*
- ii) *el orden de tangencia satisface*

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \notin S \quad \text{y} \quad \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}; \quad (2)$$

- iii) *el valor*

$$\lambda = \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \quad (3)$$

*es el invariante de Zariski de  $\mathcal{C}$ .*

Dada una sucesión finita de exposiciones  $\pi : (M, D = \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  y  $E$  una componente irreducible de  $D$ , es posible definir una aplicación del anillo  $\mathbb{C}\{x, y\}$  en  $\mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  satisfaciendo las propiedades de una valoración. Dicha valoración es conocida como valoración divisorial y puede entenderse como el orden de anulación a lo largo de una componente irreducible  $E$  del divisor excepcional  $D = \pi^{-1}(0)$  del transformado total de nuestro objeto; en este caso, una serie convergente. Esta aplicación se extiende de forma análoga para series formales o  $k$ -formas diferenciales holomorfas. Nuestro objetivo es recobrar la información del orden de tangencia entre una rama plana y una foliación en términos de la valoración divisorial asociada a la componente dicrítica y de la multiplicidad de intersección con un objeto geométrico que surge de manera natural, la curva *polar* o *jacobiana* entre las dos foliaciones. Si  $h$  es una serie convergente,  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , la correspondiente valoración divisorial con respecto a una componente irreducible  $E$  del divisor  $D = \pi^{-1}(0)$ , es la aplicación

$$\begin{aligned} \nu_E : \mathbb{C}\{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ h &\mapsto \nu_E(h), \end{aligned}$$

donde  $\nu_E = \max \{k \in \mathbb{N} : g^k | \pi^*(h)\}$  y  $\{g = 0\}$  es una ecuación local de la componente  $E$  en un punto  $p \in E$ . La definición para las  $k$ -formas es análoga.

El siguiente teorema permite expresar el orden de tangencia entre una rama no aislada  $\mathcal{C}_\mathcal{F}$  de una foliación en  $\mathfrak{F}_\pi$  y una foliación  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ , en términos de la una valoración divisorial de las formas que generan a las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , y la multiplicidad de intersección entre la curva polar de ambas foliaciones y una curva invariante no aislada de  $\mathcal{G}$ .

**Teorema 4.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de  $\mathfrak{F}_\pi$  inducida por la ecuación  $\{\omega_\mathcal{F} = 0\}$  y sea  $\mathcal{G}$  una foliación de  $\mathfrak{F}_\pi^C$ . Sean  $\mathcal{C}_\mathcal{F}$  y  $\mathcal{C}_\mathcal{G}$  ramas invariantes no aisladas de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , respectivamente, cuyos transformados estrictos por  $\pi$ , que denotamos por  $\mathcal{C}'_\mathcal{F}$  y  $\mathcal{C}'_\mathcal{G}$  pasan por un punto  $p \in E_d$ . Si  $p$  no es un punto esquina entonces*

$$\text{ord}_p \varphi^* \omega = \text{Tan}_0(\mathcal{C}_\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_\mathcal{G}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})), \quad (4)$$

donde  $\varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  es la curva de tangencias conocida como curva jacobiana o polar de las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , y  $\iota_p$  es la correspondiente multiplicidad de intersección en el punto  $p$ .

Introducimos ahora la propiedad de *transversalidad polar* de una foliación dicrítica pseudo-cuspidal  $\mathcal{F}$  con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ .

**Definición.** Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  tiene transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$  si y sólo si para toda  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ , el transformado estricto por  $\pi$  de la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  no interseca a la componente irreducible  $E_d$ .

Denotamos por  $\mathfrak{F}_\pi^*$  a la familia de foliaciones de  $\mathfrak{F}_\pi$  con la propiedad de tener transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ .

El siguiente resultado muestra que las foliaciones de  $\mathfrak{F}_\pi$  que tienen transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$  son las foliaciones para las cuales sus separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski.

**Teorema 5.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación que tiene transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ ,  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^*$ , entonces el invariante de Zariski de todas las ramas no aisladas de  $\mathcal{F}$  es el mismo.*

Hacemos notar que el invariante de Zariski no caracteriza a la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales que tienen la propiedad de transversalidad polar con la familia de foliaciones dicríticas cuspidales. Esto lo hacemos exhibiendo un ejemplo con estas características. Finalmente, presentamos una familia explícita de foliaciones que satisfacen la propiedad de transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ .

Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $1 < n < m$  con m.c.d.( $n, m$ ) = 1, consideramos los conjuntos PZ y ZI,

$$\text{PZ} := \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : 0 \leq i \leq m-2, 0 \leq j \leq n-2 \text{ y } ni + mj > nm\}.$$

$$\text{ZI} := \{s \in \mathbb{Z}_{\geq} : s + n \notin \langle n, m \rangle \text{ y } s + m \notin \langle n, m \rangle\},$$

donde  $\langle n, m \rangle = \{ni + mj : i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ . Sea  $\mathcal{C}$  una rama plana de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  y suponemos que  $\mathcal{C}$  admite una parametrización  $\varphi$

$$\varphi(t) = (t^n, t^m + a_\lambda t^\lambda + \sum_{j>\lambda} a_j t^j),$$

donde  $a_\lambda \neq 0$ , con  $\lambda$  satisfaciendo  $\lambda \notin S$  y  $\lambda + n - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ . Si escribimos  $\lambda = m + s$  entonces  $m + s \notin S$  y más aún  $\lambda + n - m = m + s + n - m = n + s \notin S$ . Por consiguiente el conjunto ZI está en biyección con el conjunto de los invariantes de Zariski de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ . En efecto, R. Péraire en [50] demuestra el siguiente resultado

**Lema** ([50]). *Hay una biyección entre los conjuntos PZ and ZI.*

**Teorema 5.2.** *Sean  $(x, y)$  coordenadas adaptadas a  $\pi$  y  $(p, q) \in \text{PZ}$ . Consideramos a las foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  inducidas por  $\{\omega_{\mathcal{F}_1} = 0\}$  y  $\{\omega_{\mathcal{F}_2} = 0\}$  respectivamente, donde*

$$\omega_{\mathcal{F}_1} = (a_1 y^{n-q+1} + a_2 x^p y + yA(x, y)) dx + (b_1 y^{n-q} x + b_2 x^{p+1} + xB(x, y)) dy,$$

con  $na_1 + mb_1 = 0$ ,  $na_2 + mb_2 \neq 0$ ,  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  y donde las series  $A(x, y), B(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tienen orden mayor o igual que  $p + 1$  y, por otra parte

$$\omega_{\mathcal{F}_2} = (\tilde{a}_1 x^{m-p} y + \tilde{a}_2 y^{q+1} + y\tilde{A}(x, y)) dx + (\tilde{b}_1 x^{m-p+1} + \tilde{b}_2 x y^q + x\tilde{B}(x, y)) dy,$$

con  $m\tilde{a}_1 + n\tilde{b}_1 = 0$ ,  $m\tilde{a}_2 + n\tilde{b}_2 \neq 0$ ,  $\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  y donde las series  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tienen orden mayor o igual que  $\max\{q + 1, m - p\}$ . Entonces las foliaciones  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  pertenecen a  $\mathfrak{F}_\pi^*$ . Además, el invariante de Zariski de todas las ramas invariantes no aisladas de  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  es el valor  $\lambda$  asociado al punto  $(p, q) \in \text{PZ}$ .

## Organización del trabajo

Como mencionamos, el objetivo de la presente tesis es el estudio del invariante de Zariski de las separatrices no aisladas de las llamadas foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales. Para ello, el presente trabajo de tesis se divide en 5 capítulos.

El capítulo 1 está dedicado al estudio de curvas singulares en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Presentamos el resultado de desingularización de curvas.

En el capítulo 2 continuamos con el estudio de curvas singulares pero ahora desde el punto de vista analítico, es decir, presentamos los resultados de clasificación analítica; en particular, nuestro objetivo es introducir el invariante de Zariski de una rama.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de foliaciones singulares de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Introducimos el orden de tangencia entre una foliación y una rama que no es una separatriz de dicha foliación. Demostramos que es posible recuperar el invariante de Zariski de una rama por medio del orden de tangencia entre dicha rama y una foliación cuspidal.

En el capítulo 4 damos la definición de valoración para el anillo de series convergentes; en particular, estamos interesados en las llamadas las valoraciones divisoriales. El objetivo principal y uno de los resultados centrales de esta tesis es dar una relación entre el orden de tangencia entre una rama y una foliación pseudo-cuspidal en términos de la “valoración divisorial” asociada a la componente dicrítica de la foliación.

En el capítulo 5, presentamos otro de los resultados principales de la tesis. Para ello introducimos el concepto de transversalidad polar entre una foliación pseudo-cuspidal y la familia de foliaciones cuspidales. Mostramos que para cada elemento de la familia de foliaciones con la propiedad de transversalidad polar satisface que el invariante de Zariski de sus separatrices no aisladas es el mismo. Mostramos, mediante un ejemplo, que el invariante de Zariski no clasifica a la familia de foliaciones con la propiedad de transversalidad polar y finalmente exhibimos una familia de foliaciones con la propiedad de transversalidad polar.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo damos las definiciones básicas y algunos resultados conocidos de la geometría analítica compleja. Comenzamos estudiando la geometría analítica local en dimensión  $n$  para concentrarnos después únicamente en la geometría analítica local de dimensión 2. En particular, nuestro objetivo se centra en el estudio de gérmenes de curvas singulares de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . El contenido de este capítulo está basado principalmente en resultados que pueden consultarse en [2],[8],[33],[35],[55].

### 1.1. Geometría Analítica Compleja

Sea  $\mathbb{C}^n$  el producto cartesiano de  $n$  copias de  $\mathbb{C}$ . Para los puntos de este espacio consideramos la notación usual  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Dado  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$  y  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $r_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , un polidisco abierto de radio  $\mathbf{r}$ , centrado en  $\mathbf{w}$ , es el conjunto

$$\Delta(\mathbf{w}, \mathbf{r}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| < r_j, 1 \leq j \leq n\}.$$

**Definición 1.1.** Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$ , un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^n$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Se dice que  $f$  es *holomorfa* en  $U$ , si en cada punto  $\mathbf{w} \in U$  hay una vecindad abierta  $V$ ,  $\mathbf{w} \in V \subset U$ , tal que la función  $f$  tiene una serie de potencias

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} (z_2 - w_2)^{i_2} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}, \quad (1.1)$$

que converge para cada punto  $\mathbf{z} \in V$ .

**Observación 1.1.** Es un hecho conocido que una serie de potencias de la forma (1.1) es absolutamente convergente en un polidisco  $\Delta(\mathbf{w}, \mathbf{r})$  suficientemente pequeño centrado en  $\mathbf{w}$ ; como consecuencia de este hecho se sigue que la serie (1.1) puede ser reordenada de manera arbitraria y representar a la misma función  $f$ .

Dada una  $n$ -tupla de números no negativos,  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , consideramos la siguiente notación  $\mathbf{z}^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n}$ ,  $|\mathbf{i}| = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$  e  $\mathbf{i}! = i_1! i_2! \cdots i_n!$ . Una observación importante es que los coeficientes de la serie (1.1) están dados mediante la *fórmula integral de Cauchy*, es decir,

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{1}{\mathbf{i}!} \frac{\partial^{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{i}}} \int_{|z_n - \zeta_n| < r_n} \int_{|z_{n-1} - \zeta_{n-1}| < r_{n-1}} \cdots \int_{|z_1 - \zeta_1| < r_1} \frac{f(\boldsymbol{\zeta}) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n}{(z_1 - \zeta_1)^{i_1} (z_2 - \zeta_2)^{i_2} \cdots (z_n - \zeta_n)^{i_n}}.$$

Dado un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{C}^n$  denotamos por  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$  al anillo de funciones holomorfas sobre  $U$ .

Sean  $U \subset \mathbb{C}^n$  y  $U' \subset \mathbb{C}^m$  dominios<sup>1</sup>, donde las coordenadas en  $\mathbb{C}^n$  son  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  y las coordenadas en  $\mathbb{C}^m$  son  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ . Cualquier aplicación  $G : U \rightarrow U'$  puede ser descrita mediante  $m$ -funciones

$$w_i = g_i(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.2)$$

Decimos que la aplicación  $G$  es *holomorfa*, si las  $m$  funciones  $g_1, g_2, \dots, g_m$  son holomorfas en  $U$ . Si  $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$  es una función definida en  $U'$ , entonces la composición  $f(G(\mathbf{z}))$  es una función bien definida y además es holomorfa en  $U$ .

Sea  $F : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  una aplicación holomorfa, donde  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  es un dominio. Dicha aplicación es descrita por una  $m$ -tupla

$$F(\mathbf{z}) = (f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}), \dots, f_m(\mathbf{z})),$$

donde  $f_i(\mathbf{z})$  es holomorfa en  $U$  para cada  $j = 1, 2, \dots, m$ . La *matriz jacobiana* de la aplicación  $F$  en un punto  $\mathbf{w} \in U$  es la matriz dada por

$$J_F(\mathbf{w}) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(\mathbf{w}) \right), \quad (1.3)$$

para  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq m$ .

Decimos que  $F$  es no *singular* en  $\mathbf{w}$  si el rango de la matriz jacobiana es maximal; y decimos que  $F$  es *no singular* en  $U$ , si es no singular en cada punto de  $U$ .

Vamos a introducir ahora el concepto de germen de función en un punto  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ . Sea  $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función definida en un dominio  $U$ , denotamos por  $f_U$  a dicha función, haciendo énfasis en que el dominio de definición de  $f$  es  $U$ . Dado un dominio  $V \subset U$ , denotamos a la restricción de  $f$  a  $V$  como  $f_U|_V$ .

**Definición 1.2.** Sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$  y sean  $f_U$  y  $g_V$  funciones definidas en los abiertos  $U, V$  y tales que  $\mathbf{w} \in U$  y  $\mathbf{w} \in V$ . Decimos que  $f_U$  y  $g_V$  son equivalentes en  $\mathbf{w}$ , si existe una vecindad abierta  $W$  de  $\mathbf{w}$  tal que  $W \subset U \cap V$  y  $f_U|_W = g_V|_W$ ; la clase de equivalencia de tales funciones será llamada el **germen** de función en el punto  $\mathbf{w}$ .

La relación introducida en la anterior definición es una relación de equivalencia. Denotaremos por  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathbf{w}}$  a los gérmenes de funciones en el punto  $\mathbf{w}$ . Es posible dotar de una estructura de anillo al conjunto de gérmenes de funciones complejo valuadas en un punto  $\mathbf{w}$ . Para cualesquiera dos gérmenes de función  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  en el punto  $\mathbf{w}$ , seleccionamos representantes  $f_U, g_V$  respectivamente. La suma de funciones  $f_U + g_V$  y el producto de funciones  $f_U g_V$  son funciones complejo valuadas definidas en el abierto  $U \cap V$ ; y los gérmenes de esas funciones son definidas respectivamente como la suma  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  y el producto  $\mathbf{f}\mathbf{g}$  de los dos gérmenes. Es importante notar que la definición de suma y producto de gérmenes es independiente de la elección de los representantes de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$ .

Denotamos por  $\mathcal{O}_{\mathbf{w}}$  al anillo de gérmenes de funciones en el punto  $\mathbf{w}$ . Tenemos así el siguiente resultado cuya demostración puede ser consultada en [38].

**Teorema 1.1.** *El anillo  $\mathcal{O}_{\mathbf{w}}$  de gérmenes de funciones en el punto  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$  es isomorfo al anillo de series convergentes centradas en el punto  $\mathbf{w}$ .*

Dado un punto fijo  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ , el cambio de variables dado por  $\zeta_j = z_j - w_j$  produce un isomorfismo entre los anillos  $\mathcal{O}_{\mathbf{w}}$  y  $\mathcal{O}_{\mathbf{0}}$  y por lo tanto un isomorfismo entre los anillos de potencias convergentes centrados en  $\mathbf{w}$  y en el origen  $\mathbf{0}$ ; por lo que, para la teoría local es suficiente considerar el anillo  $\mathcal{O}_{\mathbf{0}}$  de gérmenes de funciones en el origen, el cual puede ser identificado con el anillo de series de potencias convergentes en el origen,  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

<sup>1</sup>Un subconjunto  $U \subset \mathbb{C}^n$  se dice que es un *dominio* si  $U$  es abierto y conexo.

## Variedades analíticas complejas

El *espacio ambiente* es el lugar natural en el que colocamos nuestros objetos de estudio, por citar algunos ejemplos, curvas, campos de vectores y foliaciones. A lo largo de este trabajo de tesis los espacios ambiente serán *variedades analíticas complejas*, que denotaremos por  $M$ . Una *variedad analítica compleja* de dimensión  $n$  es una variedad diferenciable  $M$  de dimensión real  $2n$  con un atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ , tales que las aplicaciones de transición entre las cartas

$$\phi_{ij} := \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

son aplicaciones holomorfas.

**Ejemplo 1.1.** El espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , es el conjunto de rectas vectoriales de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Considerese la aplicación

$$l : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \quad (1.4)$$

que a cada punto  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$  le hace corresponder la recta  $l(z) \subset \mathbb{C}^{n+1}$  que pasa por el origen y el punto  $z$ . Denotamos por

$$l(z) := [z_1, z_2, \dots, z_{n+1}] = [z].$$

Diremos que  $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$  son las coordenadas homogéneas de  $l(z)$ . Notemos que dos juegos de coordenadas homogéneas para un mismo punto proyectivo son proporcionales. Vamos a mostrar que el espacio proyectivo es un variedad compleja. Denotamos por

$$U_i = \{[z] : z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

tenemos así una identificación  $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$  dada por

$$\phi_i([z]) = \left( \frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right).$$

Los cambios de coordenadas  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  son funciones racionales y, de hecho, funciones holomorfas sobre el respectivo dominio de definición. Por lo tanto  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad compleja de dimensión  $n$ .

Sea  $M$  una variedad analítica compleja. Una función  $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$  es *holomorfa* si la composición  $f \circ \phi_i^{-1}$  es holomorfa para cualquier carta coordenada  $(U_i, \phi_i)$  del atlas de  $M$ .

Sean  $N, M$  variedades analíticas complejas. Una aplicación  $F : M \longrightarrow N$  se dice que es *holomorfa* si para cualquier par de cartas  $(U_i, \phi_i)$ ,  $(V_j, \psi_j)$  de  $M$  y  $N$  respectivamente, la aplicación  $\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1}$  es holomorfa en el dominio de definición respectivo. Decimos que  $M$  y  $N$  son *biholomorfas* si existe una aplicación  $F : M \longrightarrow N$  que es un homeomorfismo holomorfo.

## 1.2. Geometría analítica local

La presente sección está dedicada al estudio de algunas propiedades algebraicas del anillo de series de potencias convergentes  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

Como antes, la siguiente notación será usada para simplificar la escritura. Denotamos por

$$\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \quad \text{y} \quad \mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_n),$$

además  $|\mathbf{i}| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$  y  $\mathbf{z}^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$ . Con esta notación tenemos

$$f = \sum_{|\mathbf{i}|} a_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}} \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}.$$

Dado  $d \in \mathbb{N}$ , la parte homogénea de grado  $d$  de  $f$ , es

$$f_d = \sum_{|\mathbf{i}|=d} a_{\mathbf{i}} z^{\mathbf{i}} \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n].$$

Dadas  $f, g \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , definimos

$$f + g := \sum_{d=0}^{\infty} (f_d + g_d), \quad f \cdot g := \sum_{d=0}^{\infty} \left( \sum_{k+l=d} f_k g_l \right). \quad (1.5)$$

**Definición 1.3.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , el *orden de  $f$*  que denotamos por  $\text{ord}_{\mathbf{0}} f$  es por definición

$$\text{ord}_{\mathbf{0}} f := \begin{cases} \min \{ i \in \mathbb{Z}_{\leq 0} : f_i \neq 0 \} & \text{si } f \neq 0, \\ \infty & \text{si } f \equiv 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Observación 1.2.** Sean  $f, g \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  se tiene que

- i)  $\text{ord}_{\mathbf{0}}(f + g) \geq \min \{ \text{ord}_{\mathbf{0}} f, \text{ord}_{\mathbf{0}} g \}$ ;
- ii)  $\text{ord}_{\mathbf{0}}(f \cdot g) = \text{ord}_{\mathbf{0}} f + \text{ord}_{\mathbf{0}} g$ .

Como consecuencia de la observación previa tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.1.**  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  es un dominio entero.

*Demostración.* Sean  $f, g \in \mathbb{C}\{z\}$  tales que  $f \cdot g = 0$ . Debemos demostrar que  $f = 0$  o  $g = 0$ . Supongamos por el contrario que  $f \neq 0$  y  $g \neq 0$ . Por ii) de la observación 1.2 tenemos que

$$\infty = \text{ord}_{\mathbf{0}}(f \cdot g) = \text{ord}_{\mathbf{0}} f + \text{ord}_{\mathbf{0}} g.$$

Dado que  $f \neq 0$  y  $g \neq 0$ , el lado derecho de la igualdad es finito, pero esto es una contradicción por lo que  $f = 0$  o  $g = 0$ .  $\square$

El ideal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  definido como

$$\mathfrak{m} := \{ f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\} : \text{ord}_{\mathbf{0}} f \geq 1 \},$$

es el único ideal maximal de  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y además

$$\mathfrak{m}^k := \{ f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\} : \text{ord}_{\mathbf{0}} f \geq k \}.$$

Una serie  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  puede ser expresada en términos de la variable  $z_n$  como sigue:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{f}_j z_n^j, \quad \text{donde } \tilde{f}_j \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}.$$

**Definición 1.4.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y

$$\hat{f}(z_n) := f(0, z_n) \in \mathbb{C}\{z_n\}.$$

Decimos que  $f$  es *general en  $z_n$*  si  $\hat{f} \neq 0$ , y *general en  $z_n$  de orden  $k$*  si  $\text{ord}_{\mathbf{0}} \hat{f} = k$ , es decir,  $\hat{f} = b_k z_n^k + \dots$ , donde  $b_k \neq 0$ .

Notemos que  $\text{ord}_{\mathbf{0}} f \leq \text{ord}_{\mathbf{0}} \hat{f}$ .

**Lema 1.1.** Sea  $0 \neq f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y sea  $k = \text{ord}_0 f$ . Entonces existe un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z_i &= \tilde{z}_i + c_i \tilde{z}_n \text{ para } i \neq n \\ z_n &= \tilde{z}_n, \end{aligned}$$

tal que  $g(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) = f(z_1(\tilde{\mathbf{z}}), z_2(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, z_n(\tilde{\mathbf{z}}))$  es general en  $\tilde{z}_n$  de orden  $k$ , y donde  $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$ .

*Demostración.* Dado que  $\text{ord}_0 f = k$ ,  $f$  admite una escritura de la forma

$$f = f_k + f_{k+1} + \dots,$$

donde cada  $f_j \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]$  es un polinomio homogéneo de grado  $j$  y  $f_k$  es el primer polinomio homogéneo no idénticamente nulo. Sea

$$f_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{|\mathbf{i}|=k} a_{\mathbf{i}} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) &= f_k(\tilde{z}_1 + c_1 \tilde{z}_n, \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_n, \dots, \tilde{z}_n) \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=k} a_{\mathbf{i}} (\tilde{z}_1 + c_1 \tilde{z}_n)^{i_1} (\tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_n)^{i_2} \dots \tilde{z}_n^{i_n} \\ &= \left( \sum_{|\mathbf{i}|=k} a_{\mathbf{i}} c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots c_{n-1}^{i_{n-1}} \right) \tilde{z}_n^k + h(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n), \end{aligned}$$

donde  $h(0, 0, \dots, \tilde{z}_n) = 0$ . Dado que el coeficiente de  $\tilde{z}_n^k$  es un polinomio en  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  que no es idénticamente nulo, es posible encontrar  $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$  tal

$$\left( \sum_{|\mathbf{i}|=k} a_{\mathbf{i}} c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots c_{n-1}^{i_{n-1}} \right) \neq 0.$$

Esta última ecuación implica que  $g(0, 0, \dots, \tilde{z}_n) \neq 0$  y por lo tanto  $g(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$  es general en  $\tilde{z}_n$ .  $\square$

Un caso de especial interés surge cuando sólo aparecen un número finito de términos en la variable  $z_n$ , es decir,  $f$  es un polinomio en la variable  $z_n$ ,

$$f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n], \quad f = d_0 + d_1 z_n + \dots + d_k z_n^k.$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 1.5.** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$ ,  $f = \sum_{j=0}^k d_j z_n^j$  con  $f_k \neq 0$ . Decimos que  $f$  es un *polinomio de Weierstrass* si

$$d_0(0) = d_1(0) = \dots = d_{k-1}(0) = 0, \quad d_k = 1.$$

**Teorema 1.2. (Preparación de Weierstrass)** Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  general en  $z_n$  de orden  $k$ . Entonces  $f$  tiene una representación única de la forma:

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, \dots, z_n) &= u(z_1, z_2, \dots, z_n) P(\mathbf{z}) \\ &= u(z_1, z_2, \dots, z_n) (z_n^k + d_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) z_n^{k-1} + \dots + d_k(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})), \end{aligned}$$

donde  $u(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  es una unidad y  $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$  es un polinomio de Weierstrass de grado  $k$ .

Para la demostración del teorema 1.2, usamos el teorema de la *División de Weierstrass*

**Teorema 1.3. (*División de Weierstrass*)** Sean  $f, g \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y suponemos que  $g$  es general en  $z_n$  de orden  $k$ . Entonces existen  $q \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y  $r \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$  tales que el grado de  $r$  con respecto a la variable  $z_n$  es menor o igual a  $k - 1$  y

$$f = q \cdot g + r.$$

Más aún,  $q$  y  $r$  están determinados de manera única.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [33].

Hacemos uso del teorema de la División de Weierstrass para demostrar el teorema de Preparación de Weierstrass.

*Demostración del teorema 1.2.* Sea  $f$  general en  $z_n$  de orden  $k$  y sea  $g = z_n^k$ . Aplicando el teorema 1.3 a  $f$  y  $g$  tenemos que existen  $q \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y  $r \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$  tales que

$$z_n^k = q \cdot f + \sum_{i=1}^k d_i z_n^{k-i}, \text{ donde } d_i(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}.$$

De manera equivalente tenemos,

$$q \cdot f = z_n^k - \sum_{i=1}^k d_i z_n^{k-i}.$$

Sustituyendo  $z_1 = z_2 = \dots = z_{n-1} = 0$  tenemos,

$$q(0, 0, \dots, z_n) \cdot (c z_n^k + \dots) = z_n^k - \sum_{i=1}^k d_i(0) z_n^{k-i}, \text{ donde } c \neq 0.$$

Comparando los coeficientes de  $z_n^l$  para toda  $l \in \mathbb{N}$ , obtenemos:

$$q(0, 0, \dots, 0) = \frac{1}{c} \neq 0 \quad \text{y} \quad d_1(0) = d_2(0) = \dots = d_k(0) = 0.$$

Esto implica que  $q$  es una unidad. Considerando  $u(z_1, z_2, \dots, z_n) = q^{-1}$ , tenemos

$$f = u(z_1, z_2, \dots, z_n) \left( z_n^k - \sum_{i=1}^k d_i z_n^{k-i} \right),$$

lo cual finaliza la demostración. □

Presentamos algunos resultados acerca de la divisibilidad del anillo  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

**Lema 1.2.** Sea  $P \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  un polinomio de Weierstrass. Entonces, el polinomio  $P$  es reducible en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$  si y sólo si es  $P$  reducible en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Más aún, si  $P$  es reducible todos los factores son polinomios de Weierstrass, salvo unidades.

*Demostración.* Vamos a suponer que  $P$  es un polinomio de Weierstrass reducible en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , es decir,  $P = g_1 g_2$  donde  $g_1, g_2 \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y  $g_1, g_2$  no son unidades. Dado que  $P$  es un polinomio de Weierstrass,  $P$  es general en  $z_n$ , así  $g_1$  y  $g_2$  son generales en  $z_n$ . Por el teorema 1.2 existen  $P_1, P_2$  polinomios de Weierstrass y unidades  $u_1, u_2$ , tales que  $g_1 = u_1 P_1$  y  $g_2 = u_2 P_2$ . Por lo tanto, tenemos dos formas de descomponer el polinomio  $P$ , es decir,

$$1 \cdot P = P = (u_1 u_2) P_1 P_2.$$

Dado que dicha descomposición es única tenemos entonces que  $P = P_1P_2$ , donde  $P_1, P_2$  no son unidades pues de lo contrario  $g_1, g_2$  serían unidades. Esto prueba la afirmación en una dirección.

Para la otra dirección, si  $P = P_1P_2$  es una descomposición de  $P$  en un producto de dos no unidades  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$ , tenemos que demostrar que  $P_1, P_2$  no son unidades en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Sean  $P_1 = a_r z_n^r + a_{r-1} z_n^{r-1} + \dots + a_0$  y  $P_2 = b_s z_n^s + b_{s-1} z_n^{s-1} + \dots + b_0$ . Dado que  $P = P_1P_2$  se tiene que  $a_r b_s = 1$ . Por consiguiente, sin perder generalidad podemos suponer que  $a_r = b_s = 1$ . Supongamos que  $P_1$  es una unidad en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , entonces  $P_2 = P_1^{-1}P$ . Dado que la descomposición es única se tiene que  $P_1 = 1$  y  $P = P_2$ . Pero esto es una contradicción a la hipótesis de que  $P_1$  no es unidad en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y esto finaliza la demostración.  $\square$

**Proposición 1.2.** *El anillo  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  es un dominio de factorización única, es decir, cada elemento  $0 \neq f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  no unidad, admite una descomposición única (salvo orden y unidades) de la forma  $f = u f_1^{r_1} \cdot f_2^{r_2} \cdot \dots \cdot f_k^{r_k}$ , con  $u$  una unidad,  $f_i \neq f_j$  para toda  $i \neq j$ ,  $f_i$  irreducible para toda  $i$  y  $r_i \in \mathbb{N}^*$  para toda  $i$ .*

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre  $n$ . Es un hecho conocido que  $\mathbb{C}$  es un dominio de factorización única. El caso  $n = 1$  se sigue del hecho de que dado un elemento  $f \in \mathbb{C}\{z_1\}$ ,  $f = z_1^k u$  donde  $\text{ord}_0 f = k \in \mathbb{N}$  y  $u$  es una unidad.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para  $n - 1$  y vamos a demostrarlo para  $n$ . Sea  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  y suponemos sin perder generalidad que  $f$  es general en  $z_n$ . Por el teorema 1.2, podemos escribir a  $f = uP$ , donde  $P \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$  es un polinomio de Weierstrass. Por el lema de Gauss sabemos que si  $A$  es un dominio de factorización única, entonces el anillo de polinomio  $A[z_1]$  es un dominio de factorización única. De la hipótesis de inducción se sigue que el anillo  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  es un dominio de factorización única y entonces del lema de Gauss se sigue que  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}[z_n]$  es un dominio de factorización única. Sea  $P = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdot \dots \cdot P_k^{r_k}$  la descomposición de  $P$  en factores irreducibles. Entonces por el lema 1.2, se tiene que  $f = uP = u P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdot \dots \cdot P_k^{r_k}$  es una descomposición de  $f$  en  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , salvo orden y unidades. Esto finaliza la demostración.  $\square$

Dada  $f \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , por la proposición 1.2,  $f$  admite una descomposición de la siguiente forma

$$f = u f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdot \dots \cdot f_k^{r_k},$$

donde  $f_i$  es un elemento irreducible para toda  $i = 1, 2, \dots, k$  y  $u$  una unidad. Decimos que  $f$  es *reducida* si  $r_i = 1$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Observación 1.3.** Todos los resultados previos pueden ser llevados al contexto formal. Es decir, si consideramos el anillo de series de potencias formales,

$$\mathbb{C}[[z_1, z_2, \dots, z_n]] := \left\{ f = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdot \dots \cdot z_n^{i_n} : a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{C} \right\},$$

todos los resultados previos se satisfacen en este anillo. Más aún, tenemos una contención de anillos  $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}[[z_1, z_2, \dots, z_n]]$ .

### 1.2.1. Conjuntos analíticos

Introducimos ahora el concepto de conjunto analítico. Nuestro objetivo es estudiar conjuntos analíticos en dimensión 2, de manera más precisa, nos concentraremos en el estudio de curvas analíticas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Definición 1.6.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^n$  y sea  $X \subset U$ . Sea  $\mathbf{x} \in X$ , decimos que  $X$  es *analítico* en  $\mathbf{x}$  si existe una vecindad  $V$  de  $\mathbf{x}$  en  $U$  y un número finito de funciones holomorfas  $f_1, f_2, \dots, f_k$  en  $V$  tales que

$$X \cap V = \{ \mathbf{z} \in V : f_1(\mathbf{z}) = f_2(\mathbf{z}) = \dots = f_k(\mathbf{z}) = 0 \}.$$

Decimos que  $X$  es un *subconjunto analítico* de  $U$  si es analítico en cada punto  $\mathbf{x} \in U$ .

Introducimos ahora la definición de *germen de conjunto analítico*.

**Definición 1.7.** Sean  $U, U' \subseteq \mathbb{C}^n$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{C}^n$ , y sean  $X \subset U$ ,  $X' \subset U'$  subconjuntos analíticos. Decimos que  $X$  y  $X'$  definen el mismo *germen de conjunto analítico* en  $\mathbf{x} \in X \cap X'$  si existe una vecindad abierta  $V \subset U \cap U'$  de  $\mathbf{x}$  tal que

$$X \cap V = X' \cap V.$$

Denotamos por  $(X, \mathbf{x})$  al germen de conjunto analítico en el punto  $\mathbf{x}$ .

A partir de este momento nos concentramos exclusivamente en la dimensión 2; para ello consideramos una notación más usual. Denotamos por  $\mathbb{C}\{x, y\}$  al anillo de series de potencias convergentes en dos variables.

Un *germen de curva analítica* en el origen de  $\mathbb{C}^2$ , es por definición, un germen  $(\mathcal{C}, 0)$  de subconjunto analítico de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  dado por el lugar de ceros de una serie  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , es decir,

$$\mathcal{C} = \{(w_1, w_2) \in (\mathbb{C}^2, 0) : f(w_1, w_2) = 0\}.$$

Por simplicidad, a lo largo de este trabajo escribimos

$$\mathcal{C} = \{f = 0\}.$$

Notemos que si  $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$  es una unidad, entonces  $g = uf$  define el mismo germen de curva analítica que  $f$ . Por el teorema 1.2, es posible suponer que la curva  $\mathcal{C}$  está dada por el lugar de ceros de un polinomio de Weierstrass,

$$P(x, y) = y^k + a_1(x)y^{k-1} + \cdots + a_k(x),$$

donde el orden en el origen de  $a_i(x)$  es mayor o igual que  $i$ . Denotamos por  $\text{In}^i(a_i)$  a la parte de grado  $i$  de  $a_i$ , es decir,  $\text{In}^i(a_i) = \lambda_i x^i$ . La *parte inicial* de  $P$  es por definición,

$$\text{In}(P) := y^k + \lambda_1 x y^{k-1} + \cdots + \lambda_k x^k.$$

**Definición 1.8.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva analítica y supongamos que  $\mathcal{C} = \{P = 0\}$ , donde  $P$  es un polinomio de Weierstrass. El *cono tangente* de  $\mathcal{C}$ , que denotamos por  $\text{CT}(\mathcal{C})$ , es por definición el lugar de ceros de la parte inicial de  $P$ ,

$$\text{CT}(\mathcal{C}) := \{\text{In}(P) = 0\}.$$

Dado que  $\text{In}(P)$  es un polinomio homogéneo, se tiene que el cono tangente de  $\mathcal{C}$  es un conjunto de rectas pasando a través el origen.

Por el teorema 1.2, sabemos que  $f$  admite una descomposición de la forma  $f = u f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k}$ , donde cada  $f_i$  es un elemento irreducible del anillo de serie de potencias convergentes para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Consideremos  $f$  reducida, es decir,  $f = u f_1 f_2 \cdots f_k$ , entonces el germen de curva  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  admite una descomposición en curvas,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k,$$

donde  $\mathcal{C}_i = \{f_i = 0\}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**Definición 1.9.** Decimos que un germen de curva analítica  $\mathcal{C}$  es una *rama plana* si  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  donde  $f$  es un elemento irreducible de  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento geométrico alrededor de puntos singulares de curvas analíticas.

**Definición 1.10.** Decimos que un punto  $p \in \mathbb{C}^2$  es un punto *singular* de  $\mathcal{C}$  si  $\nabla_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) = (0, 0)$ ; en caso contrario, decimos que el punto  $p$  es un *punto no singular o regular*. Respectivamente decimos que la curva  $\mathcal{C}$  es *singular* o *regular (suave)* en  $p$ .

Definimos la multiplicidad en el origen de  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.11.** Sea  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  un germen de curva analítica, donde  $f$  es reducida. Definimos la *multiplicidad* de  $\mathcal{C}$ , que denotamos por  $m_0(\mathcal{C})$ , como

$$m_0(\mathcal{C}) := \text{ord}_0 f.$$

Notemos que es equivalente que el punto 0 sea un punto singular de  $\mathcal{C}$  a que  $m_0(\mathcal{C}) \geq 2$ .

En el caso en el que la curva  $\mathcal{C}$  es no singular el cono tangente es una recta, llamaremos a esta recta la *recta o línea tangente*.

**Definición 1.12.** Sea  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  una curva analítica definida por una serie de potencias convergente  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , con  $f(0, 0) = 0$ . El par  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ , donde  $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{C}\{t\}$  es llamado una *parametrización* de  $\mathcal{C}$  si  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \not\equiv (0, 0)$ ,  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$  y

$$f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \equiv 0.$$

Si  $p = (0, 0)$  es un punto no singular de  $\mathcal{C}$ , es posible suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$ . Aplicando el teorema 1.2,  $f(x, y) = u(x, y)l(x, y)$  donde  $l(x, y) = y + a_0(x)$ . Por consiguiente, tenemos que la curva es dada por  $\mathcal{C} = \{l = 0\}$ . Si consideramos

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ t &\longmapsto \varphi(t) := (t, -a_0(t)), \end{aligned}$$

entonces

$$f \circ \varphi(t) = f(t, -a_0(t)) = v(t)(-a_0(t) + a_0(t)) = 0.$$

La igualdad previa implica que  $\mathcal{C}$  es parametrizada por  $\varphi$ . Por ende, hemos demostrado que dado un germen de curva no singular  $\mathcal{C}$  siempre existe una parametrización de la curva  $\mathcal{C}$ .

Cuando el punto  $p = (0, 0)$  es un punto singular, no es posible usar los argumentos previos, sin embargo el teorema de Puiseux asegura la existencia de una parametrización para ramas planas.

**Teorema 1.4. (Teorema de Puiseux)** Sea  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  una curva analítica. Supongamos que  $f$  es general en  $y$  de orden  $k$ . Entonces existe un número natural  $n \geq 1$  y  $\psi \in \mathbb{C}\{t\}$  tal que  $\psi(0) = 0$  y  $f(t^n, \psi(t)) = 0$ , es decir,  $\varphi(t) = (t^n, \psi(t))$  parametriza a la curva  $\mathcal{C}$ .

La demostración del teorema es dada en dos partes y será presentada posteriormente. La primera parte consiste en la construcción de una solución formal mediante un proceso de iteración; la segunda parte consiste en demostrar que dicha construcción formal es convergente. Para la construcción de la parametrización hacemos uso del *polígono de Newton* de  $f$ .

Dada  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , donde  $f = \sum a_{ij}x^i y^j$ , definimos la *nube de puntos* de  $f$  o el *soporte* de  $f$  como,

$$\text{Sop}(f; x, y) := \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : a_{ij} \neq 0\}.$$

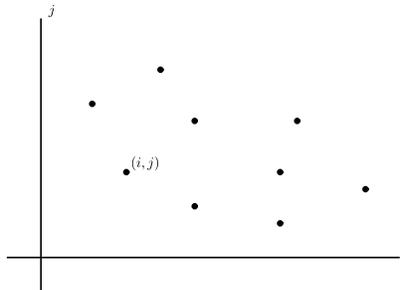


Figura 1.1: Nube de puntos de  $f$

**Definición 1.13.** El *polígono de Newton* de  $f$  con respecto a las coordenadas  $(x, y)$ , que denotamos por  $\mathcal{N}(f; x, y)$  es, por definición, la envolvente convexa de  $\text{Sop}(f; x, y) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ .

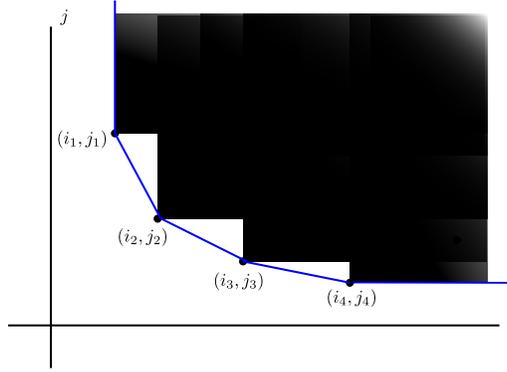


Figura 1.2: Polígono de Newton de  $f$

**Definición 1.14.** Un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  es llamado *cuasihomogéneo* si existen  $p, q, l \in \mathbb{N}^*$  tales que

$$f = \sum_{qi+pj=l} a_{ij}x^i y^j.$$

Los valores  $p, q$  son llamados los *pesos* del polinomio.

Notemos que la nube de puntos de un polinomio cuasihomogéneo  $f$  vive sobre la línea cuya ecuación está dada por  $qi + pj = l$ , esta ecuación tiene pendiente  $-\frac{q}{p}$ . Si  $q = p = 1$  el polinomio es homogéneo y la nube de puntos en este caso vive sobre una línea de pendiente  $-1$ .

Si suponemos que  $f$  es un polinomio cuasihomogéneo de pesos  $p, q$  y general en  $y$  de orden  $k$ , entonces la nube de puntos de  $f$  vive en una línea que pasa a través del punto  $(0, k)$ , y en este caso la ecuación de la línea es  $qi + pj = pk$ . En particular, tenemos  $p \neq 0$ .

### Proceso de iteración

Dada una serie  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , dicha serie admite una descomposición en componentes homogéneas, donde el polinomio homogéneo inicial de  $f$  es de grado  $n = \text{ord}_0 f$ . Para una serie que es general en  $y$  de orden  $k$  sabemos que  $n \leq k$ , es decir, el polinomio inicial homogéneo no necesariamente es general en  $y$ . Nuestro objetivo es construir una parametrización de la curva. Para ello, el lema 1.3 proporciona el paso inicial del proceso de iteración que nos permite construir dicha parametrización. Para el paso base es necesario remplazar el polinomio inicial homogéneo  $f_n$  por un polinomio inicial cuasihomogéneo  $\tilde{f}$  que es general en  $y$ . Siguiendo las ideas de Newton, este polinomio cuasihomogéneo se obtiene de la siguiente manera: Consideremos la nube de puntos de una serie  $f$  general en  $y$ ; colocamos una regla a lo largo del eje  $x = 0$ , rotamos dicha regla alrededor del punto  $(0, k)$  en sentido contrario a las manecillas del reloj y seguimos rotando hasta que la regla toque por primera vez la nube de puntos de  $f$ . Los puntos en la nube de puntos de  $f$  que viven sobre dicha línea determinan al polinomio  $\tilde{f}$ .

**Observación 1.4.** El segmento de línea que describimos en el párrafo anterior, coincide con el lado del polígono de Newton que comienza en el punto  $(0, k)$ .

Sea  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  general en  $y$  de orden  $k$ . Tenemos una representación de  $f$  de la siguiente forma,

$$f = \tilde{f} + h, \text{ donde } h = \sum_{qi+pj \geq pk+1} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\},$$

y  $\tilde{f}$  es el polinomio cuasihomogéneo de  $f$  asociado al lado del polígono de Newton con punto extremo  $(0, k)$ .

Vamos a construir la parametrización de la curva  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  a través de un proceso de iteración. Comenzamos dando una parametrización para el caso en el que tenemos un polinomio cuasihomogéneo.

**Lema 1.3.** *Sea  $f$  un polinomio cuasihomogéneo,  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  con pesos  $p, q$  y general en  $y$  de orden  $k \geq 1$ , entonces existe al menos un  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $f(t^q, \lambda t^p) = 0$ . Más aún, si la nube de puntos de  $f$  tiene al menos dos puntos es posible elegir  $\lambda \neq 0$ .*

*Demostración.* Consideremos  $x = t^q$ ,  $y = \lambda t^p$ . Haciendo la sustitución tenemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(t^q, \lambda t^p) = \sum_{qi+pj=kp} a_{ij} t^{qi} \lambda^j t^{pj} \\ &= t^{kp} \sum_{qi+pj=kp} a_{ij} \lambda^j =: t^{kp} g(\lambda). \end{aligned}$$

El polinomio  $g(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$  tiene grado  $r \geq 1$ , por lo que existe al menos un  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $g(\lambda) = 0$ . Si además  $\text{Sop}(f; x, y)$  tiene un punto  $(i_0, j_0)$  con  $j_0 < k$ , entonces  $g$  tiene un cero  $\lambda \neq 0$ .  $\square$

Sea  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  general en  $y$  de orden  $k$ , supongamos que  $y^k$  no es divisor de  $f$  y consideremos la descomposición de  $f$  como antes  $f = \tilde{f} + h$ . Sean  $p, q$  los pesos del polinomio cuasihomogéneo  $\tilde{f}$ , y consideremos  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Haciendo  $\tilde{y} = \lambda x^{\frac{p}{q}}$  y  $s = \frac{kp}{q}$ , tenemos

$$\tilde{f}(x, \tilde{y}) = x^s \sum_{qi+pj=pk} a_{ij} \lambda^j = x^s g(\lambda).$$

Por el lema 1.3 existe  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $g(\lambda_0) = 0$ , el cual nos da una solución  $\tilde{y}$  que resuelve el problema para  $\{\tilde{f} = 0\}$ . Dicha solución  $\tilde{y}$  puede considerarse como una aproximación a la parametrización de la curva  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$ . Este es el paso base del proceso de iteración.

Definamos ahora

$$x = x_1^q, \quad y = \tilde{y} + x_1^p y_1 = x_1^p (\lambda_0 + y_1), \quad (1.7)$$

sustituyendo (1.7) en  $f$  obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \tilde{f}(x, y) + h(x, y) = x_1^{kp} \left( g(\lambda_0 + y_1) + x_1 \tilde{h}(x_1, y_1) \right) \\ &= x_1^{kp} f_1(x_1, y_1). \end{aligned}$$

El objetivo es encontrar condiciones para que resolver  $f_1(x_1, y_1)$ . Notemos que en particular  $f_1(0, y_1) = g(\lambda_0 + y_1)$ . El siguiente lema es crucial para la convergencia formal de la iteración.

**Lema 1.4.** *Sean  $f$  y  $f_1$  como antes. Tenemos entonces,*

- i)  $f_1$  es general en  $y_1$  de orden  $k_1$ , donde  $1 \leq k_1 \leq k$ .
- ii) Si  $k_1 = k$ , entonces  $q = 1$

*Demostración.* 1. Definimos  $r(y_1) := g(\lambda_0 + y_1) \in \mathbb{C}[y_1]$ , donde  $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$  y  $g(\lambda_0) = 0$ . Entonces

$$k_1 = \text{ord}_0 r = \text{multiplicidad del cero } \lambda_0 \text{ de } g \leq \text{grado } g = k.$$

Por lo tanto,  $f_1$  es general en  $y_1$  de grado menor o igual a  $k$ .

2. Si  $k_1 = k$ , entonces por i) existe  $c \in \mathbb{C}^*$  tal que

$$g(\lambda) = c(\lambda - \lambda_0)^k = \sum_{qi+pj=k} a_{ij} \lambda^j = a_{0k} \lambda^k + a_{i,k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_{j,0}.$$

Por la fórmula binomial tenemos que  $(\lambda - \lambda_0)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \lambda^{k-m} \lambda_0^m$ . Por consiguiente, existe  $i_0$  tal que  $a_{i_0, k-1} = -c(k-1)\lambda_0$  y  $qi_0 + p(k-1) = pk$ . Esto último implica que la nube de puntos de  $f$  tiene un punto sobre la línea  $j = k-1$ . Como  $qi_0 + p(k-1) = pk$  esto implica que  $qi_0 = p$ , es decir,  $q$  divide a  $p$ , pero  $p, q$  son primos relativos por lo que  $q = 1$ .  $\square$

Vamos a definir el proceso de iteración en general. El paso base del proceso de iteración está dado por considerar

$$f_0 = f, \quad x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad k_0 = k,$$

y la solución dada por el lema 1.3.

Para ir del paso  $i$  al  $i+1$  hacemos lo siguiente:

Si  $y_i^{k_i}$  divide a  $f_i$ , entonces  $y_i = 0$  es solución de  $f_i(x_i, y_i) = 0$  y terminamos el proceso. En este caso la serie consta de un número finito de términos.

Si  $y_i^{k_i}$  no divide a  $f_i$  tenemos, por el lema 1.4, que  $f_i$  es general en  $y_i$  de orden  $k_i$ . Consideremos una escritura de  $f_i$  de la forma  $f_i = \tilde{f}_i + h_i$ , donde  $\tilde{f}_i$  es un polinomio cuasihomogéneo de pesos  $p_i, q_i$ . La ecuación del segmento más inclinado del polígono de Newton de  $f_i$  es  $q_i x_i + p_i y_i = k_i p_i$ . Dado que  $\text{Sop}(f_i; x_i, y_i)$  tiene al menos dos puntos, por el lema 1.3, sabemos que existe  $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$  y una solución  $\tilde{y}_i = \lambda_i x_i^{\frac{p_i}{q_i}}$  de  $\tilde{f}_i(x_i, y_i) = 0$ . Haciendo

$$x_i = x_{i+1}^{q_i}, \quad y_i = \tilde{y}_i + x_{i+1}^{p_i} y_{i+1} = x_{i+1}^{p_i} (\lambda_i + y_{i+1}),$$

tenemos que

$$f_i(x_i, y_i) = x_{i+1}^{p_i k_i} f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

y  $f_{i+1}$  es general en  $y_{i+1}$  de orden  $k_{i+1}$ . Por i) del lema 1.4 tenemos que

$$1 \leq \cdots \leq k_{i+1} \leq k_i \leq \cdots \leq k_1 \leq k_0 = k.$$

Luego, por ii) del lema 1.4, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $q_j = 1$  para todo  $j > N$ . Entonces,

$$x = x_0 = x_1^{q_0} = x_2^{q_0 q_1} = \cdots = x_j^{q_0 q_1 \cdots q_N} = x_j^n$$

con  $n = q_0 q_1 \cdots q_N$  y  $j > N$ . Esto último prueba que los denominadores no pueden crecer indefinidamente; es decir, a partir de  $N$  los denominadores están acotados. Escribiendo  $y$  en términos de  $x = x_0$  tenemos,

$$\begin{aligned} y = y_0 &= \tilde{y}_0 + x_1^{p_0} y_1 = \tilde{y}_0 + x_1^{p_0} (\tilde{y}_1 + x_2^{p_1} y_2) \\ &= \tilde{y}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_1^{p_0} \cdots x_i^{p_{i-1}} \tilde{y}_i \\ &= \lambda_0 x_0^{\frac{p_0}{q_0}} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_1^{p_0} \cdots x_i^{p_{i-1} + \frac{p_i}{q_i}} \\ &= \lambda_0 x_0^{\frac{p_0}{q_0}} + \lambda_1 x_1^{p_0 + \frac{p_1}{q_1}} + \lambda_2 x_1^{p_0} x_2^{p_1 + \frac{p_2}{q_2}} + \cdots + \lambda_N x_1^{p_0} x_2^{p_1} \cdots x_N^{p_{N-1} + \frac{p_N}{q_N}} + \cdots \\ &= \lambda_0 x_0^{\frac{p_0}{q_0}} + \lambda_1 x_0^{\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_0 q_1}} + \lambda_2 x_0^{\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_0 q_1} + \frac{p_2}{q_0 q_1 q_2}} + \cdots + \lambda_N x_0^{\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_0 q_1} + \frac{p_2}{q_0 q_1 q_2} + \cdots + \frac{p_N}{q_0 q_1 \cdots q_N}} + \cdots \end{aligned}$$

Si consideramos  $x_0^{\frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_N}} = t$  tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \lambda_0 t^{p_0 q_1 \cdots q_N} + \lambda_1 t^{p_0 q_1 \cdots q_N + p_1 q_2 \cdots q_N} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i t^{m_i}, \end{aligned}$$

donde  $m_0 = p_0 q_1 \cdots q_N$  y  $m_{i+1} = m_i + p_{i+1} \prod_{j>i+1} q_j$ . Dado que cada  $p_i \geq 1$ , hemos demostrado que, bajo

la iteración, las potencias de  $t = x^{\frac{1}{n}}$  incrementan en cada paso. En otras palabras, la construcción de  $y$  converge al menos formalmente. Notemos que no necesariamente todas las potencias de  $t$  aparecen en la serie. Escribimos

$$y(t) = \varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x^{\frac{j}{n}} = \varphi(x^{\frac{1}{n}}),$$

donde  $c_j \in \mathbb{C}$ .

Queda demostrar que la serie de Puiseux resuelve el problema, es decir,  $f(t^n, \varphi(t)) = 0$  en  $\mathbb{C}\{t\}$ . Demostrar esto es equivalente a demostrar que  $f(t^n, \varphi(t)) \in \mathfrak{m}^r \subset \mathbb{C}\{t\}$  para toda  $r \in \mathbb{N}$ , puesto que  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^k = \{0\}$ . Recordemos que, por construcción,  $f_i$  es divisible por  $x_i^{p_i k_i}$ . Entonces,  $f = f_0$  es divisible por

$$x_1^{p_0 k_0} \cdot x_2^{p_1 k_1} \cdots x_i^{p_i k_i} = t^r,$$

dado que  $x^{\frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_N}} = t$ , donde  $r = k_0 p_0 q_1 \cdots q_N + k_1 p_1 q_2 \cdots q_N + \cdots + k_{N-1} p_{N-1} q_N + \sum_{j=N}^i k_j p_j$ . Pero  $k_j, p_j \geq 1$ , entonces  $r > i$  y por lo tanto  $r$  es arbitrariamente grande. Lo anterior demuestra que  $f(t^n, \varphi(t)) = 0$ .

Usando el algoritmo previo siempre obtenemos una parametrización de la forma

$$t \mapsto (t^n, \varphi(t)).$$

Antes de demostrar la convergencia de la serie  $\varphi(t)$ , tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.5.** *Sea  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  general en  $y$  de orden  $k > 0$  y supongamos que  $f$  es irreducible. Entonces existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , hay un  $\delta > 0$  tal que si*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \Delta_{\delta, \epsilon} : f(x, y) = 0\},$$

es el lugar de ceros de  $f$  donde  $\Delta_{\delta, \epsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \delta, |y| < \epsilon\}$ , entonces hay una serie de potencias convergente  $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ , para la cual la aplicación  $\psi : D \rightarrow \mathbb{C}^2$ , donde  $D := \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta^{\frac{1}{n}}\}$ , con  $\psi(t) = (t^n, y(t))$ , es holomorfa y sobreyectiva en  $\mathcal{C}$ . La restricción  $\psi|_{D \setminus \{0\}} : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  es un biholomorfismo y  $\psi^{-1}(0) = \{0\}$ .

*Demostración.* Por el teorema 1.2, es posible suponer que  $f$  es un polinomio de Weierstrass

$$f(x, y) = y^k + a_1(x)y^{k-1} + \cdots + a_k(x).$$

Dado que las raíces de un polinomio dependen continuamente de los coeficientes, sabemos que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño hay un  $\delta > 0$ , tal que si  $x_0 \in D_\delta = \{x \in \mathbb{C} : |x| < \delta\}$ , el polinomio  $f(x_0, y)$  tiene exactamente  $k$  ceros (contados con multiplicidad) en el polidisco  $\Delta_{\delta, \epsilon}$ . Dado que  $f$  es irreducible,  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son primos relativos como polinomios de Weierstrass y por lo tanto son primos relativos en el anillo  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Esto implica que el lugar de ceros de  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  consiste únicamente de puntos aislados.

Por consiguiente, si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño y si  $x_0 \in D_\delta \setminus \{0\}$ , entonces tenemos que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es no cero sobre el conjuntos de ceros de  $f(x_0, y)$ , es decir, la ecuación  $f(x_0, y)$  tiene  $k$  ceros simples. Si  $y_0$

es un cero simple, entonces por el teorema de la función implícita existen vecindades  $U, V$  de los puntos  $x_0$  y  $y_0$  respectivamente y una función analítica  $\tilde{y} : U \rightarrow V$  tal que  $\tilde{y}(x) = y$  en  $V$ . Por lo tanto, existe una vecindad  $\Delta_{\delta, \epsilon_0}$  del punto  $(x_0, y_0)$  en la cual la aplicación  $(x, \tilde{y}(x))$  parametriza a  $\mathcal{C}$ .

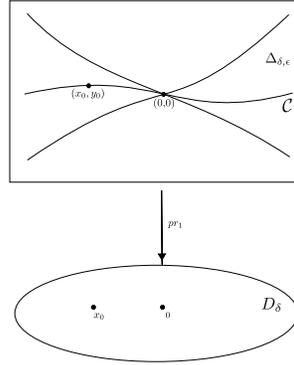


Figura 1.3: Proyección

De esta manera,  $\mathcal{C}$  es localmente una variedad alrededor del punto  $(x_0, y_0)$  y la proyección sobre la primera coordenada,

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : \mathcal{C} &\longrightarrow D_\delta \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

es un biholomorfismo alrededor del punto  $(x_0, y_0)$ . Por lo tanto, la proyección  $\text{pr}_1 : D \setminus \{0\} \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}$  es un cubriente<sup>2</sup> en el sentido topológico. El único posible punto singular de  $\mathcal{C}$  es 0; y además  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  es conexo. Es un hecho conocido de topología que un cubriente de  $D_\delta \setminus \{0\}$  se ve como el cubriente del disco agujerado dado por,

$$\begin{aligned} \rho : D \setminus \{0\} &\longrightarrow D_\delta \setminus \{0\} \\ t &\longmapsto t^k. \end{aligned}$$

Precisando, si elegimos  $t_0 \in D \setminus \{0\}$  e  $y_0 \in \mathbb{C}$  con  $f(t_0^n, y_0) = 0$ , entonces hay un único homeomorfismo  $\psi : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  con la propiedad de que  $\psi(t_0) = (t_0^n, y_0)$  y hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} t \in D \setminus \{0\} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C} \setminus \{0\} \ni (x, y) \\ & \searrow & \swarrow \\ & t^k \in D_\delta \setminus \{0\} \ni x & \end{array}$$

El homeomorfismo  $\psi$  tiene la forma  $\psi(t) = (t^n, y(t))$ , donde  $y(t)$  una función continua definida sobre  $D \setminus \{0\}$ . Por lo tanto  $y(t)$  es holomorfa, pues coincide localmente con la composición de la aplicación  $\rho$  y la solución  $\tilde{y}$  dada por el teorema de la función implícita. La aplicación  $\psi$  es un biholomorfismo de  $D \setminus \{0\}$  a  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  dado que la función inversa está dada por  $\psi^{-1}(x, y) = x^{\frac{1}{k}}$ , eligiendo una rama adecuada de la  $k$ -ésima raíz.

<sup>2</sup>Sean  $\tilde{X}$  y  $X$  espacios topológicos. Una aplicación  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  es llamada una aplicación cubriente (o simplemente cubriente) si para cualquier punto  $x \in X$ , existe una vecindad abierta  $V \subset X$  del punto  $x$ , tal que

$$\rho^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

es una unión de subconjuntos abiertos disjuntos por pares  $U_\alpha$  tales que, para cada  $\alpha \in A$ , la restricción  $\rho|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$  es un homeomorfismo.

Dado que los ceros de un polinomio dependen continuamente de los coeficientes,  $y(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende 0, puesto que  $y(t)$  es la solución de la ecuación  $f(t^n, y(t)) = 0$ . La función  $y(t)$  es entonces holomorfa en  $D \setminus \{0\}$  y dado que  $y(0) = 0$  es continua en 0. Por lo tanto es una función holomorfa sobre  $D$ . Por consiguiente,  $\psi(x) = (t^n, y(t))$  es la parametrización deseada de  $\mathcal{C}$ .  $\square$

A continuación damos la demostración del teorema 1.4.

*Demostración del teorema 1.4.* Sea  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Sin perder generalidad, podemos suponer que  $f$  es un polinomio de Weierstrass de grado  $k$ . Si  $f$  es irreducible, entonces el teorema 1.5 proporciona una aplicación  $\psi(t) = (t^k, y(t))$  que satisface la ecuación  $f(t^k, y(t)) = 0$ . Considerando  $t = x^{\frac{1}{k}}$  tenemos que  $f(x, y(x^{\frac{1}{k}})) = 0$ . Notemos que las series dadas por

$$y(x^{\frac{1}{k}}), y(\xi x^{\frac{1}{k}}), \dots, y(\xi^{k-1} x^{\frac{1}{k}}), \quad \xi^k = 1, \xi \in \mathbb{C}, \quad (1.8)$$

también satisfacen la ecuación. Lo anterior implica que tenemos  $k$  distintas raíces del polinomio de Weierstrass y además todas ellas son convergentes. Pero la serie obtenida por el proceso de iteración también satisface la ecuación  $f(x, y) = 0$ . Dado que cualquier polinomio de grado  $k$  tiene a lo más  $k$  raíces, la serie construida por el algoritmo debe coincidir con una de las series dadas por (1.8); en particular ésta es convergente.

El caso en el que  $f$  no es irreducible, dado que  $f$  tiene una descomposición en factores irreducibles  $f = u f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k}$ , la serie encontrada por el algoritmo de Puiseux satisface alguna de las ecuaciones  $f_i(x, y) = 0$  para alguna  $i = 1, 2, \dots, k$ , y entonces, por el mismo argumento que en el caso irreducible la serie es convergente.  $\square$

Hemos visto que cada curva irreducible con ecuación  $f(x, y) = 0$  admite un solución  $y(x) = 0$  descrita por una serie de potencias de  $x^{\frac{1}{n}}$ , determinada de manera única salvo la elección de la rama de  $x^{\frac{1}{k}}$ , donde  $k$  es el grado del polinomio. En la otra dirección, una parametrización  $t \rightarrow (t^k, y(t))$  define una curva analítica como lo muestra el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.** *Sea  $k$  un número natural, y sean  $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$  una serie de potencias convergente y  $\xi_i$  las raíces  $k$ -ésimas de la unidad,  $i = 1, 2, \dots, k$ . La imagen de la aplicación  $t \mapsto (t^k, y(t))$  es el lugar de ceros de la función analítica*

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^k \left( y - y(\xi_i x^{\frac{1}{k}}) \right),$$

en una vecindad del origen  $0 \in \mathbb{C}^2$

*Demostración.* Sea  $U$  una vecindad suficientemente pequeña del origen 0. Sobre el conjunto

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x \neq 0\} \cap U$$

,  $f$  es una función holomorfa y acotada bien definida, la cual puede ser extendida de manera continua sobre el eje  $y$ . Por consiguiente,  $f$  es holomorfa y la imagen de la aplicación es el lugar de ceros de  $f$ .  $\square$

**Ejemplo 1.2.** Consideremos la curva dada por  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$ , donde

$$f = y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^5y - x^7 = (y^2 - x^3)^2 - 4x^5y - x^7.$$

Notemos que  $f$  ya es general en  $y$  de orden 4. La nube de puntos  $\text{Sop}(f; x, y)$  es la que se muestra en la figura 1.4,

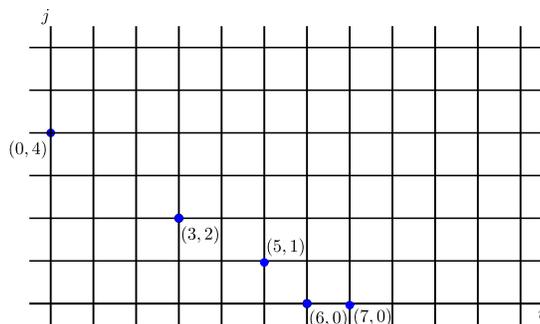


Figura 1.4: Nube de puntos de  $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^5y - x^7$

El polinomio cuasihomogéneo inicial de  $f$  es  $\tilde{f} = y^4 - 2x^3y^2 + x^6$ , donde  $p = 3, q = 2$  y  $l = 12$ . De acuerdo con el lema 1.3, si  $x = x_0$  y  $y = y_0 = \lambda x_0^{\frac{3}{2}}$ , entonces

$$\tilde{f}(x_0, y_0) = \left(\lambda x_0^{\frac{3}{2}}\right)^4 - 2x_0^3 \left(\lambda x_0^{\frac{3}{2}}\right)^2 + x_0^6 = x_0^6 (\lambda^2 - 1)^2.$$

Buscamos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $g(\lambda) = 0$ , donde  $g(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$ . Notemos que  $\lambda = 1$  es solución. Por lo tanto una solución está dada por  $y_0 = x_0^{\frac{3}{2}}$ . Consideremos ahora

$$x_0 = x_1^2, \quad y_0 = x_1^3(1 + y_1).$$

Vamos a calcular

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f(x_1^2, x_1^3(1 + y_1)) = \left( (x_1^3(1 + y_1))^2 - (x_1^2)^3 \right)^2 - 4x_1^{10}x_1^3(1 + y_1) - x_1^{14} \\ &= x_1^{12} \left( (1 + y_1)^4 - 2(1 + y_1)^2 + 1 - 4x_1(1 + y_1) - x_1^2 \right) \\ &= x_1^{12} (y_1^4 + 4y_1^3 + 6y_1^2 + 4y_1 - 4y_1 - 2y_1^2 - 4x_1 - 4x_1y_1 - x_1^2) = x_1^{12} f_1(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Notemos que  $f_1(x_1, y_1)$  es general en  $y_1$  de orden 2. La parte cuasihomogénea de  $\tilde{f}_1$  es  $4y_1^2 - 4x_1$ . Si  $x_1 = x_2^2$  e  $y_1 = \lambda x_2$ , entonces

$$\tilde{f}_1(x_2, y_2) = 4\lambda^2 x_2^2 - 4x_2^2 = 4x_2^2(\lambda^2 - 1).$$

Buscamos  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $g_1(\lambda_1) = 0$ , donde  $g_1(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Eligiendo  $\lambda_1 = 1$  tenemos que  $x_1 = x_2^2, y_1 = x_2$ . Sustituyendo tenemos que  $x = x_2^4$  y  $y = x_2^6(1 + x_2) = x_2^6 + x_2^7$ . Si  $x_2 = t$ , la parametrización de  $\mathcal{C}$  es entonces dada por  $\varphi(t) = (t^4, t^6 + t^7)$ .

A continuación mostramos que cualquier parametrización de  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  puede ser llevada a una parametrización de la forma  $\varphi(t) = (t^n, \varphi_2(t))$ .

**Proposición 1.3.** *Sea  $(\varphi_1, \varphi_2)$  una parametrización de  $\mathcal{C} := \{f = 0\}$  tal que el  $\text{ord}_0 \varphi_1 = k < \infty$ . Entonces existe una serie  $\beta \in \mathbb{C}\{t\}$  tal que  $\text{ord}_0 \beta = 1$  y*

$$\varphi_1(\beta(t)) = t^k.$$

Por lo tanto, la nueva parametrización está dada por  $(t^k, \varphi_2(\beta(t)))$ . Si  $\psi_2(t) := \varphi_2(\beta(t))$ , tenemos que  $\text{ord}_0 \psi_2 = \text{ord}_0 \varphi_2$ .

*Demostración.* Sea

$$\varphi_1(t) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j t^j,$$

donde  $a_k \neq 0$ . Consideremos la serie dada por  $f(x, y) := x - \varphi_1(y)$ . Notemos que dicha serie es general en  $y$  de orden  $k$ . Por el teorema 1.4, existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $\beta \in \mathbb{C}\{t\}$  tales que

$$0 = f(t^n, \beta(t)) = t^n - \varphi_1(\beta(t)).$$

Para ver que  $n = k$ , tenemos que estudiar el paso base en el proceso de iteración. Con la misma notación usada en la descripción del algoritmo tenemos que la parte principal cuasihomogénea de  $f$  es  $\tilde{f} = x - a_k y^k$ , con  $p = 1, q = k$  entonces  $\tilde{y} = \lambda x^{\frac{1}{k}}$  donde  $\lambda^k = \frac{1}{a_k}$ . Esto implica que

$$r(y_1) = g(\lambda + y_1) = 1 - a_k(\lambda + y_1)^k = -ka_k \lambda^{k-1} y_1 + \dots.$$

Por consiguiente,  $f_1(x_1, y_1)$  es general en  $y_1$  de orden 1. Como  $k_1 = 1$ , entonces  $q_i = 1$  para todo  $i \geq 1$ , y  $n = k$ . Dado que  $p = 1$  y  $\lambda \neq 0$ , tenemos finalmente que  $\text{ord}_0 \beta = 1$ .  $\square$

En el teorema 1.4 no se menciona alguna relación entre el número  $k$  y el orden en el origen de  $f$ . En el caso en el que  $f$  es irreducible tenemos el siguiente resultado cuya demostración puede ser consultada en [33].

**Proposición 1.4.** *Si la serie  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  es irreducible y general en  $y$  de orden  $n$ , entonces hay una serie  $\varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$  tal que*

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0 \in \mathbb{C}\{t\}.$$

### 1.3. Multiplicidad de intersección entre curvas

En esta sección introducimos la multiplicidad de intersección de gérmenes de curvas en 0. La multiplicidad de intersección es un invariante numérico de la pareja de gérmenes, que “mide” qué tan cerca están las ramas de uno de los gérmenes con respecto a las ramas del otro. La multiplicidad de intersección juega un rol importante en el estudio de las singularidades como veremos más adelante. Definimos primero la multiplicidad de intersección para series de potencias convergentes.

**Definición 1.15.** Sean  $f, g$  series de potencias convergentes. Definimos la *multiplicidad de intersección* entre  $f$  y  $g$  en el punto  $p = 0$ , y que denotamos por  $\iota_0(f, g)$ , como

$$\iota_0(f, g) := \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, g \rangle}, \quad (1.9)$$

donde  $\langle f, g \rangle$  representa el ideal generado por  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

Tenemos así el siguiente resultado.

**Teorema 1.7.** *Sean  $f, g, h$  series de potencias convergentes,  $\Phi$  un automorfismo de  $\mathbb{C}\{x, y\}$  y  $u, v \in \mathbb{C}\{x, y\}$  unidades. La multiplicidad de intersección tiene las siguientes propiedades:*

i)  $\iota_0(f, g) < \infty$  si y sólo si  $f$  y  $g$  son primos relativos en el anillo  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

ii)  $\iota_0(f, g) = \iota_0(g, f)$ .

iii)  $\iota_0(\Phi(f), \Phi(g)) = \iota_0(uf, vg) = \iota_0(f, g)$ .

iv)  $\iota_0(f, gh) = \iota_0(f, g) + \iota_0(f, h)$ .

v)  $\iota_0(f, g) = 1$  si y sólo si  $\text{ord}_0 f = \text{ord}_0 g = 1$  e  $\text{In}(f) \neq \text{In}(g)$ .

$$vi) \iota_0(f, g + hf) = \iota_0(f, g).$$

La demostración del teorema puede ser consultada en [35].

Como consecuencia de la propiedad iii) del teorema 1.7, es posible definir la multiplicidad de intersección para gérmenes de curvas.

**Definición 1.16.** Sean  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  y  $\mathcal{D} = \{g = 0\}$  gérmenes de curvas analíticas. Definimos la *multiplicidad de intersección* entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  en el punto  $p = 0$ , y que denotamos por  $\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , como

$$\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, g \rangle}, \quad (1.10)$$

donde  $\langle f, g \rangle$  representa el ideal generado por  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

**Definición 1.17.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  curvas planas. Decimos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son *transversales* si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son no singulares y sus respectivas líneas tangentes son distintas.

Tenemos la siguiente proposición que relaciona la multiplicidad de intersección entre dos curvas con la multiplicidad en el origen de las curvas.

**Proposición 1.5.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  curvas planas. Se tiene que

$$\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq m_0(\mathcal{C})m_0(\mathcal{D}),$$

donde  $m_0(\mathcal{C})$  y  $m_0(\mathcal{D})$  son las multiplicidades en el origen de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  respectivamente.

Cuando una de las curvas es una rama es posible calcular la multiplicidad de intersección por medio de la parametrización de dicha rama.

**Lema 1.5.** Sea  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  una rama y  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ . Sea  $\mathcal{D} = \{g = 0\}$  un germen de curva en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Entonces  $\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \text{ord}_0(g \circ \varphi)$

La demostración del lema puede ser consultada en [42].

## 1.4. Reducción de singularidades

Vamos a definir el morfismo de explosión en un punto  $p \in \mathbb{C}^2$ . Sin perder generalidad vamos a suponer que el punto  $p = (0, 0)$  es el origen de  $\mathbb{C}^2$ . Consideremos el conjunto de líneas  $\ell$  de  $\mathbb{C}^2$ , pasando por el punto  $p$ , es decir,

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \{\ell : \ell \text{ es una línea pasando por el punto } p\}.$$

Sea  $\tilde{M} := \{(q, \ell) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) : q \in \ell\}$ . Notemos que  $\tilde{M}$  es el cierre de la gráfica de la aplicación que a cada punto  $q$  le asocia la recta pasando por los puntos  $p$  y  $q$ . Si  $q \neq p$  entonces existe una única línea pasando por  $q$  y el punto  $p$ . Si  $x = p$  entonces todas las líneas de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  pasan por el punto  $p$ . La proyección sobre la primera coordenada

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{M} &\longrightarrow M \\ (q, \ell) &\longmapsto q \end{aligned}$$

es un homeomorfismo sobre  $M \setminus \{p\}$  y además la fibra  $\pi^{-1}(p) = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Más aún,  $\pi$  es una aplicación propia, es decir, la preimagen  $\pi^{-1}(X) = Y$  de un subconjunto compacto  $X \subset M$  es un subconjunto compacto. Vamos a estudiar con más detalle el conjunto  $\tilde{M}$  y la proyección  $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ . Para ser más precisos vamos a demostrar que  $\tilde{M}$  tiene estructura de subvariedad compleja de  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ .

Recordemos que  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  es una variedad compleja. Sean  $[z, w]$  coordenadas homogéneas de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Notemos que  $\tilde{M}$  está descrita por la ecuación

$$\tilde{M} = \{(x, y; [z, w]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) : xw - zy = 0\}.$$

Consideremos los conjuntos abiertos  $U_1 = \{[z, w] : z \neq 0\}$  y  $U_2 = \{[z, w] : w \neq 0\}$ . Cada  $U_i$  es homeomorfo a un abierto  $V_i \subset \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$  mediante

$$\varphi_i : \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ [z, w] & \longmapsto & \frac{w}{z}, \end{array} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ [z, w] & \longmapsto & \frac{z}{w}. \end{array}$$

Estas relaciones permiten introducir coordenadas para  $\tilde{M}$ :

$$\tilde{U}_1 := \left\{ (x, y; [z, w]) \in \tilde{M} : x \neq 0 \right\}, \quad (1.11)$$

$$\tilde{U}_2 := \left\{ (x, y; [z, w]) \in \tilde{M} : y \neq 0 \right\}, \quad (1.12)$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 = x, & y_1 = \frac{w}{z} \\ y_2 = y, & x_2 = \frac{z}{w}. \end{array}$$

Por consiguiente, tenemos que  $\tilde{U}_1$  es biholomorfo a  $\mathbb{C}^2$  mediante

$$\tilde{\varphi}_1 : \begin{array}{ccc} \tilde{U}_1 & \longrightarrow & \tilde{V}_1 \\ (x, y; [z, w]) & \longmapsto & (x, \frac{w}{z}), \end{array}$$

y  $\tilde{U}_2$  es biholomorfo a  $\mathbb{C}^2$  mediante

$$\tilde{\varphi}_2 : \begin{array}{ccc} \tilde{U}_2 & \longrightarrow & \tilde{V}_2 \\ (x, y; [z, w]) & \longmapsto & (y, \frac{z}{w}). \end{array}$$

Además, el cambio de coordenadas entre  $\tilde{U}_1$  y  $\tilde{U}_2$  está dado por

$$x_2 = y_1^{-1}, \quad y_2 = y_1 x_1.$$

Para los cálculos, usamos la descripción de  $\pi$  en coordenadas locales  $\pi : \tilde{M} = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2 \longrightarrow M$ , donde la proyección sobre  $\tilde{U}_1$  está dada por

$$\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1), \quad (1.13)$$

y sobre  $\tilde{U}_2$  por

$$\pi(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2). \quad (1.14)$$

**Definición 1.18.** El proceso descrito arriba es conocido como el *proceso  $\sigma$*  con centro en  $p \in M$ , *transformación cuadrática* en  $p$  o *explosión* con centro en el punto  $p$ .

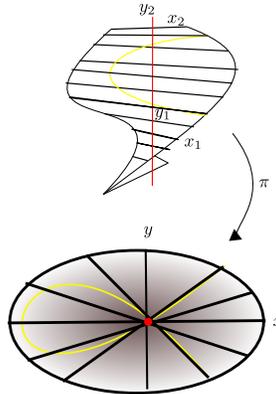


Figura 1.5: Explosión del origen de  $(\mathbb{C}^2, 0)$

La línea  $\pi^{-1}(p) = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  es llamada la *línea excepcional*. La explosión en el punto  $p = (0,0)$  es un proceso de naturaleza local y por esta razón es posible generalizar la explosión del punto  $0 \in \mathbb{C}^2$ , a cualquier punto  $p$  sobre un variedad compleja de dimensión 2. A continuación explicamos cómo hacer esto:

Sea  $p \in M$ , donde  $M$  es una variedad compleja de dimensión 2. Sea  $\phi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{C}^2$  una carta coordenada donde  $U$  es una vecindad abierta de  $p$  y  $V \subset \mathbb{C}^2$  una vecindad abierta del punto  $\phi(p)$ . Sin perder generalidad podemos suponer que  $\phi(p) = 0 \in \mathbb{C}^2$ . Sea  $\tilde{V}$  la variedad compleja  $\tilde{V} = \pi^{-1}(V)$ . De manera intuitiva, la explosión de un punto en una variedad compleja de dimensión 2, consiste en remplazar la vecindad  $U$  del punto  $p$  por la variedad  $\tilde{V}$ . El objetivo es definir una variedad compleja  $\tilde{M}$ , dicha variedad es obtenida mediante la identificación de  $M \setminus \{p\}$  con  $\tilde{V}$  usando la equivalencia de  $U \setminus \{p\}$  con  $\tilde{V} \setminus \pi^{-1}(0)$ , a través de la equivalencia de ambos con  $V \setminus \{0\}$ ; por medio del biholomorfismo  $\pi^{-1} \circ \phi : U \setminus \{p\} \rightarrow \tilde{V} \setminus \pi^{-1}(0)$ . Tenemos así una aplicación holomorfa  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$  dada por  $\tilde{\pi} = \text{Id}$  sobre  $\tilde{M} \setminus \tilde{V}$  y  $\phi^{-1} \circ \pi$  sobre  $\tilde{V}$ . La aplicación  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$  es el  $\sigma$  proceso en  $p$  sobre  $M$ .

Si  $\psi$  es otra carta coordenada sobre el punto  $p$ , y realizamos el proceso de explosión centrado en  $p$  con respecto a la carta coordenada  $\psi$ , obtenemos una nueva aplicación y una nueva variedad  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$ . Es posible demostrar que hay un biholomorfismo entre  $H : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$  tal que se satisface  $\tilde{\pi} = H \circ \hat{\pi}$ , es decir, la aplicación  $\hat{\pi}$  factoriza a través de  $\tilde{\pi}$ . Lo anterior muestra que en esencia la variedad  $\tilde{M}$  es única. Dicha propiedad es conocida como la *propiedad universal* de la explosión con centro en  $p$ .

Notemos que dado que la nueva variedad que construimos es nuevamente una variedad compleja de dimensión 2, es posible repetir el proceso de explosión en puntos de esta nueva variedad.

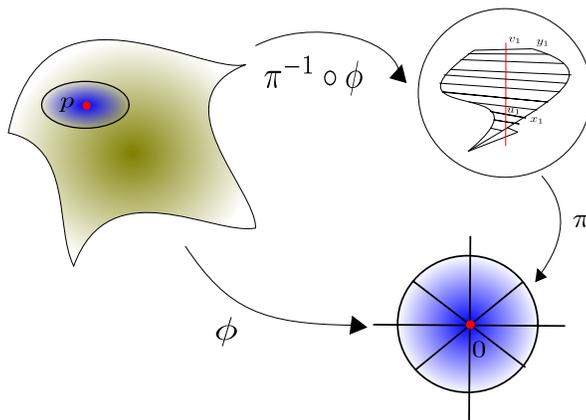


Figura 1.6: Explosión del punto  $p \in M$

El objetivo de esta sección es ver cómo se modifican los gérmenes de curvas mediante el proceso de explosión de un punto  $p$ .

Sea  $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de curva singular. Vamos a efectuar la explosión  $\pi : M_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$  con centro en  $p = 0$ . Como mencionamos previamente, el divisor excepcional  $\pi^{-1}(0) = E$  es una línea proyectiva  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ . Vamos a demostrar que  $\pi^{-1}(\mathcal{C})$  es una curva analítica en  $M_1$ . Dado que  $0 \in \mathcal{C}$  entonces  $E \subset \pi^{-1}(\mathcal{C})$ . De hecho, vamos a mostrar que hay una descomposición única  $\pi^{-1}(\mathcal{C}) = E \cup \mathcal{C}_1$  donde  $\mathcal{C}_1$  es una curva analítica que no contiene a  $E$ . Decimos que  $\pi^{-1}(\mathcal{C})$  es el *transformado total* de  $\mathcal{C}$  por  $\pi$  y el *transformado estricto* de  $\mathcal{C}$  es  $\mathcal{C}_1$ . Para demostrar que el transformado total  $\pi^{-1}(\mathcal{C})$  es una curva analítica de  $M_1$  debemos verificarlo en los puntos del divisor excepcional  $E$ , pues fuera de los puntos del divisor excepcional  $\pi$  es un biholomorfismo, es decir, ya sabemos que

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}) \setminus E \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\},$$

es una curva analítica.

Supongamos que  $\mathcal{C}$  está dada por  $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , con  $f(0, 0) = 0$ . Escribimos

$$f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \cdots,$$

donde  $f_i(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  son polinomios homogéneos de grado  $i$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$  y  $n = \text{ord}_0 f$ . Recordemos que  $M_1$  está cubierta por dos cartas coordenadas,  $M_1 = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ . En  $\tilde{U}_1$  consideramos las coordenadas  $(x_1, y_1)$ , en dichas coordenadas  $\pi$  está definido por  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$ . Sea  $m_0(\mathcal{C}) = \text{ord}_0 f$  entonces  $\pi^{-1}(\mathcal{C}) \cap \tilde{U}_1$  está dado por

$$\begin{aligned} 0 = f \circ \pi(x_1, y_1) &= (f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \cdots) \circ \pi(x_1, y_1) = f_n(x_1, x_1 y_1) + f_{n+1}(x_1, x_1 y_1) + \cdots \\ &= x_1^n (f_n(1, y_1) + x_1 f_{n+1}(1, y_1)) = x_1^n \tilde{f}_1. \end{aligned}$$

En  $\tilde{U}_2$  consideramos las coordenadas dadas por  $(x_2, y_2)$ , recordemos que en estas coordenadas  $\pi$  está definido por  $\pi(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2)$ . De manera análoga obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = f \circ \pi(x_2, y_2) &= (f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \cdots) \circ \pi(x_2, y_2) = f_n(x_2 y_2, y_2) + f_{n+1}(x_2 y_2, y_2) + \cdots \\ &= y_2^n (f_n(x_2, 1) + y_2 f_{n+1}(x_2, 1)) = y_2^n \tilde{f}_2. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $\pi^{-1}(\mathcal{C})$  define un germen de curva analítica.

Como mencionamos anteriormente, estamos interesados en estudiar el comportamiento de curvas singulares bajo el morfismo de explosión de un punto  $p$ . Para ser más precisos, queremos demostrar que después de un número finito de explosiones el transformado estricto de la curva singular es una curva suave.

Para ello, consideramos primero el caso de curvas suaves. Como ya hemos mencionado anteriormente, un germen de curva analítica  $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  se dice que es *regular* o *suave* si  $m_0(\mathcal{C}) = 1$ . La primera observación es que el transformado estricto por la explosión de un punto  $p$  de una curva no singular, es nuevamente una curva no singular.

**Proposición 1.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  un germen de curva analítica y supongamos que el punto  $p = 0$  no es singular para  $\mathcal{C}$ . Consideremos la explosión del punto  $p = 0$ ,  $\pi : (M_1, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , donde  $E := \pi^{-1}(0)$  y sea  $\mathcal{C}_1$  el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  por  $\pi$ . Entonces:*

- i) *Existe un único punto  $p_1 \in \mathcal{C}_1 \cap E$ .*
- ii) *El germen de curva  $\mathcal{C}_1$  es no singular.*
- iii) *El transformado estricto  $\mathcal{C}_1$  y el divisor excepcional  $E$  son transversales en el punto  $p_1$ , es decir, el cono tangente de  $\mathcal{C}_1 \cup E$  consiste de dos rectas distintas.*

*Demostración.* Sin perder generalidad suponemos que  $\mathcal{C}$  está descrita por la ecuación  $\mathcal{C} = \{f(x, y) = 0\}$  donde  $f(x, y) = y - a_1 x + f_2(x, y) + \cdots$

- i) Consideremos la explosión del origen,  $\pi : (M_1, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Recordemos que tenemos dos cartas, analizamos primero  $\pi(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2)$ , calculando

$$\begin{aligned} f \circ \pi(x_2, y_2) &= y_2 - a_1 x_2 y_2 + f_2(x_2 y_2, y_2) + \cdots \\ &= y_2 (1 - a_1 x_2 + y_2 f_2(x_2, 1) + \cdots). \end{aligned}$$

En este sistema de coordenadas el divisor excepcional está dado por  $E = \{y_2 = 0\}$  y entonces el transformado estricto no pasa por el punto  $(x_2, y_2) = (0, 0)$ .

Ahora consideremos  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$

$$\begin{aligned} f \circ \pi(x_1, y_1) &= x_1 y_1 - a_1 x_1 + x_1^2 f_2(1, y_1) + \cdots \\ &= x_1 (y_1 - a_1 + x_1 f_2(1, y_1) + \cdots). \end{aligned}$$

En este sistema de coordenadas el divisor excepcional está descrito por la ecuación  $E = \{x_1 = 0\}$ , por consiguiente la intersección del transformado estricto  $\mathcal{C}_1$  y  $E$  se da cuando  $y_1 - a_1 = 0$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}_1 \cap E = \{(0, a_1)\}$ .

ii) Consideremos el cambio de coordenadas

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{y}_1 = y_1 - a_1.$$

Tenemos que el transformado estricto está definido por

$$\tilde{y}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{f}_2(1, \tilde{y}) = 0.$$

Esto demuestra que  $\mathcal{C}_1$  es no singular.

iii) Como el transformado estricto  $\mathcal{C}_1$  está definido por

$$\tilde{y}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{f}_2(1, \tilde{y}) = 0,$$

la recta tangente está dada por  $\tilde{y}_1 + \lambda \tilde{x}_1 = 0$ . Esta es distinta a la recta tangente del divisor excepcional  $E$  que está dada por  $x_1 = 0$ .

□

El siguiente lema describe el comportamiento de la multiplicidad de una curva analítica bajo el morfismo de explosión. En particular demostramos que dicha multiplicidad es estable bajo el morfismo de explosión, es decir, la multiplicidad del transformado estricto de la curva no se incrementa.

**Proposición 1.7.** *Sea  $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de curva singular. Sea  $\pi : (M_1, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  el morfismo de explosión con centro en 0 y  $E := \pi^{-1}(0)$ . Sea  $\mathcal{C}_1$  el transformado estricto bajo  $\pi$  de  $\mathcal{C}$  y  $p_1, p_2, \dots, p_r$  los puntos del transformado estricto de  $\mathcal{C}_1$  sobre el divisor excepcional  $E$ . Entonces:*

$$i) \sum_{i=1}^r \iota_{p_i}(\mathcal{C}_1, E) = m_0(\mathcal{C}).$$

$$ii) \sum_{i=1}^r m_{p_i}(\mathcal{C}_1) \leq m_0(\mathcal{C}). \text{ En particular, } m_{p_i}(\mathcal{C}_1) \leq m_0(\mathcal{C}) \text{ para toda } i.$$

iii) Si  $m_{p_i}(\mathcal{C}_1) = m_0(\mathcal{C})$  para algún  $p_i$ , entonces  $r = 1$ , es decir,  $p_i$  es el único punto de  $\mathcal{C}_1 \cap E$ .

*Demostración.* i) Supongamos que elegimos coordenadas  $(x, y)$  de manera que ninguno de los ejes coordenados es tangente a  $\mathcal{C}$  en 0. Sea  $f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \dots$ , donde  $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$  y  $m_0(\mathcal{C}) = n$ . En el origen de  $U_1$  tenemos,

$$\begin{aligned} f \circ \pi(x_1, y_1) &= f(x_1, x_1 y_1) = f_n(x_1, x_1 y_1) + f_{n+1}(x_1, x_1 y_1) + \dots \\ &= x_1^n (f_n(1, y_1) + x_1 f_{n+1} + \dots). \end{aligned}$$

En la otra carta coordenada,  $f \circ \pi(x_2, y_2) = y_2^n (f_n(x_2, 1) + y_2 f_{n+1}(x_2, 1) + \dots)$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{C}_1 \cap E = \{(0, y_1) \mid f_n(1, y_1) = 0\} \cup \{(x_2, 0) \mid f_n(x_2, 1) = 0\}$$

. Como  $y_2 = 0$  no es cero de  $f_n(x_2, 1)$ . Por la elección de coordenadas, todos los ceros de  $f_n(x_2, 1)$  están sobre  $\tilde{U}_1$ , es decir,  $\mathcal{C}_1 \cap \pi^{-1}(0)$  es el conjunto de ceros de  $f_n(1, y_1)$ . Dado que  $f_n(1, y_1)$  es un polinomio de grado  $n$ , la suma de las multiplicidades de los ceros  $p_1, p_2, \dots, p_r$  de  $f_n(1, x_1)$  es precisamente  $n$ , además  $\iota_{p_i}(\mathcal{C}_1, E)$  es la multiplicidad del cero  $p_i$ , por lo tanto tenemos i).

ii) De la proposición 1.5 tenemos  $\iota_{p_i}(\mathcal{C}_1, E) \geq m_{p_i}(\mathcal{C}_1) \cdot m_{p_i}(E) = m_{p_i}(\mathcal{C}_1)$ , así

$$\sum_{i=1}^r m_{p_i}(\mathcal{C}_1) \leq \sum_{i=1}^r \iota_{p_i}(\mathcal{C}_1, E) = m_0(\mathcal{C}).$$

iii) Por ii) tenemos que  $\sum_{i=1}^r m_{p_i}(\mathcal{C}_1) \leq \sum_{i=1}^r \iota_{p_i}(\mathcal{C}_1, E) = m_0(\mathcal{C})$ . Si  $i \geq 2$ , entonces  $m_{p_i}(\mathcal{C}_1) < m_0(\mathcal{C})$ . Por consiguiente si, para algún  $p_i$  se tiene que  $m_{p_i}(\mathcal{C}_1) = m_0(\mathcal{C})$ , entonces  $r = 1$ .  $\square$

El siguiente resultado relaciona la multiplicidad de intersección en el origen entre dos curvas analíticas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  y su transformado estricto bajo el morfismo de explosión.

**Proposición 1.8.** *Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  curvas analíticas. Sea  $\pi : (M_1, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  el morfismo de explosión con centro en 0. Denotamos por  $\mathcal{C}'$  y  $\mathcal{D}'$  los transformados de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  por  $\pi$  respectivamente. Entonces*

$$\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = m_0(\mathcal{C})m_0(\mathcal{D}) + \sum_{q \in E} \iota_q(\mathcal{C}', \mathcal{D}'),$$

donde  $\iota_q$  denota la multiplicidad de intersección en el punto  $q \in E$ .

*Demostración.* Hacemos la demostración para el caso en el que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son ramas. El caso general se sigue de las propiedades de la multiplicidad de intersección dadas en el teorema 1.7. Dado que  $\mathcal{C}$  es una rama, por el teorema 1.4, existe una parametrización de  $\mathcal{C}$ , de la forma  $\varphi(t) = (t^n, \psi(t))$ , donde  $n = m_0(\mathcal{C})$ . El transformado de  $\mathcal{C}$  por  $\pi$  es parametrizado entonces por  $\tilde{\varphi}(t) = \pi^{-1} \circ \varphi(t)$ . Si  $\mathcal{D} = \{g = 0\}$ , entonces el transformado estricto de  $\mathcal{D}$  por  $\pi$  está dado por  $\tilde{g} = \frac{g \circ \pi}{x_1^{m_0(\mathcal{D})}}$ . Sea  $q$  el punto por el cual pasan el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  por  $\pi$ . Se sigue del lema 1.5 que

$$\begin{aligned} \iota_q(\mathcal{C}', \mathcal{D}') &= \text{ord}_0(\tilde{g} \circ \tilde{\varphi}(t)) = \text{ord}_0 \frac{(g \circ \pi \circ \pi^{-1} \varphi)}{(t^n)^{m_0(\mathcal{D})}} = \text{ord}_0 \frac{(g \circ \varphi(t))}{(t^n)^{m_0(\mathcal{D})}} \\ &= \iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}) - m_0(\mathcal{C})m_0(\mathcal{D}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

La igualdad previa finaliza la demostración de la proposición.  $\square$

Recordemos que el objetivo de esta sección es demostrar que después de un número finito de explosiones el transformado estricto de una curva singular es no singular. Para demostrar esto, es suficiente mostrar que la multiplicidad del transformado estricto de  $\mathcal{C}$  decrece tras alguna sucesión finita de explosiones.

Consideremos un germen de curva plana  $\mathcal{C}$  y sea  $\pi_1 : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión con centro en  $p_0 = 0$ . El conjunto finito de puntos  $p_1, p_2, \dots, p_{l_1}$  de  $E_1$  por los cuales pasa el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  corresponde a conjunto de las tangentes de  $\mathcal{C}$  en 0. Estos puntos son llamados *puntos infinitamente próximos* de  $\mathcal{C}$  de orden 1. Realizamos explosiones simultáneas en los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_{l_1}$  para obtener  $\pi_2 : (M_2, \pi_2^{-1}(E_1) = E_2) \rightarrow (M_1, E_1)$  donde  $\pi_2 = \sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_1-1} \circ \dots \circ \sigma_1$  es la composición de las explosiones puntuales en cada uno de los puntos  $p_i$  con  $i \in \{1, 2, \dots, l_1\}$ . Notemos que  $E_2$  es una unión de líneas proyectivas que se intersecan dos a dos transversalmente en, a lo sumo, un punto; precisando, si  $E_p^2$  es el transformado estricto de  $E_1$  por  $\pi_1$  y escribimos  $E_{p_i}^2 = \pi_1^{-1}(p_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, l_1$ , entonces tenemos

$$E_2 = E_p^2 \cup E_{p_1}^2 \cup E_{p_2}^2 \cup \dots \cup E_{p_{l_1}}^2.$$

El conjunto finito  $\{p_{i_1, i_2}\}$  de puntos sobre  $E_2$  por los cuales pasa el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  por  $\pi_1 \circ \pi_2$  es el conjunto de puntos infinitamente próximos de segundo orden de  $\mathcal{C}$ . Los índices son organizados de manera que  $\pi_k(p_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k}) = p_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}$ . Este proceso puede iterarse de manera indefinida, construyendo así una sucesión de morfismos de explosión

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, E_1) \xleftarrow{\pi_2} (M_2, E_2) \xleftarrow{\dots} \dots$$

El morfismo  $\pi^k : (M_k, E_k) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es una composición de explosiones y en  $E_k$  seleccionamos los puntos por donde pasa el transformado estricto de  $\mathcal{C}$ , que llamaremos *puntos infinitamente próximos* de

orden  $k$  de  $\mathcal{C}$ . Estos sirven de centro de explosión para  $\pi_{k+1}$  teniendo así  $\pi^{k+1} := \pi^k \circ \pi_{k+1}$ . Recordemos que

$$\pi_{k+1}(p_{l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}}) = p_{l_1, l_2, \dots, l_k}.$$

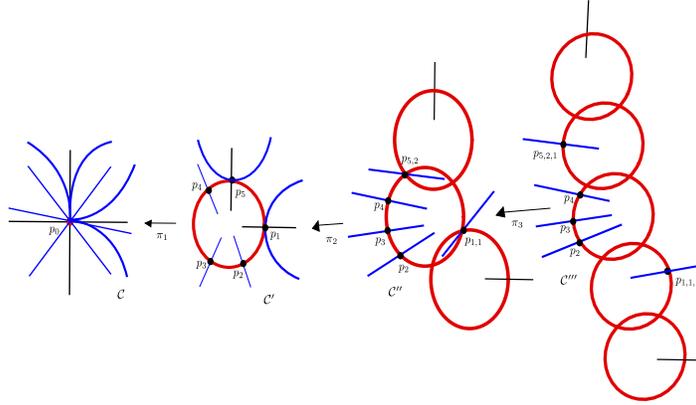


Figura 1.7: Puntos infinitamente próximos.

Por otro lado, el divisor  $E_k$  se descompone como

$$E_k = E_p^k \cup \bigcup_{j=1}^k \left\{ \bigcup_{l_1, l_2, \dots, l_j} E_{p_{l_1, l_2, \dots, l_j}}^k \right\}.$$

Si fijamos uno de ellos, a decir,  $p_{l_1, l_2, \dots, l_k}$ , y consideramos el germen del morfismo  $\pi^k$  en dicho punto, obtenemos una sucesión de explosiones locales

$$\pi_{p_{l_1, l_2, \dots, l_j, j}} : (M_j, p_{l_1, l_2, \dots, l_j}) \longrightarrow (M_{j-1}, p_{l_1, l_2, \dots, l_{j-1}}), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

de manera que  $\pi_{p_{l_1, l_2, \dots, l_k}}^k = \pi \circ \pi_{p_{l_1, 1}} \circ \pi_{p_{l_1, l_2, 2}} \circ \dots \circ \pi_{p_{l_1, l_2, \dots, l_k, k}}$ . Observemos que en cada punto infinitamente próximo  $p = p_{l_1, l_2, \dots, l_k}$  de  $\mathcal{C}$  tenemos el germen de divisor  $(E_k, p)$  que puede ser de dos tipos:

- i) Hay una única componente de  $E_k$  pasando por  $p$ . En este caso, el germen  $(E_k, p)$  es el germen de curva suave en  $p$ . Este tipo de puntos es conocido como puntos de *tipo traza*.
- ii) Hay dos componentes de  $E_k$  pasando por  $p$ . Dichas componentes son suaves y transversales. Llamaremos a estos puntos infinitamente próximos de *tipo esquina*.

Por cada punto infinitamente próximo  $p = p_{l_1, l_2, \dots, l_k}$  de  $\mathcal{C}$  pasa el transformado estricto, que denotaremos por  $\mathcal{C}_p$ . Notemos que tenemos la igualdad de germen  $((\pi^k)^{-1}(\mathcal{C}), p) = (\mathcal{C}_p \cup E_k, p)$ .

**Definición 1.19.** Decimos que  $p$  es un punto infinitamente próximo de *cruzamientos normales* para  $\mathcal{C}$  si  $p$  es un punto de tipo traza y además  $\mathcal{C}_p$  es no singular y transversal a  $E_k$  en  $p$ .

Como consecuencia de la proposición 1.6, se sigue que cada uno de los puntos de cruzamientos normales  $q$  tiene la propiedad de que hay únicamente un punto infinitamente próximo inmediatamente sobre  $q$  y éste a su vez es un punto de cruzamientos normales. Ahora enunciaremos el teorema de *reducción de singularidades*.

**Teorema 1.8 (Reducción de singularidades de curvas planas).** *Sea  $\mathcal{C}$  un germen de curva analítica. Existe una sucesión finita de explosiones  $\pi^k : (M_k, E_k) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , tal que todo punto  $p$  infinitamente próximo de orden  $k$ ,  $p \in E_k$  es un punto infinitamente próximo de cruzamientos normales.*

Previo a dar la demostración del teorema 1.8 daremos algunos conceptos y resultados que serán de utilidad en la demostración de este resultado.

**Definición 1.20.** Sea  $p := p_{s_1 s_2 \dots s_k}$  un punto infinitamente próximo de  $\mathcal{C}$  de orden  $k$  y sea  $\mathcal{C}_p$  el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  pasando por  $p$ . Decimos que  $p$  es un *punto infinitamente próximo  $n$ -multiple* si  $m_p(\mathcal{C}_p) = m_0(\mathcal{C}) = n$ .

Por la proposición 1.7, cada  $M_j$  contiene a lo más un punto infinitamente próximo  $n$ -multiple de 0. Así los puntos infinitamente próximos  $n$ -multiples de 0 constituyen una sucesión de puntos bien definida. Para demostrar que la multiplicidad del transformado estricto de  $\mathcal{C}$  decrece después de un número finito de sucesiones de explosiones, debemos demostrar que la sucesión de puntos  $n$ -multiples es finita.

La idea para demostrar esta afirmación es la siguiente: vamos a construir una curva suave  $\mathcal{L}$  que tenga el mejor contacto posible con  $\mathcal{C}$  bajo el proceso de explosión hasta que la multiplicidad en un punto infinitamente próximo de 0 decrece. Después de cada explosión, elegiremos al transformado estricto de  $\mathcal{L}$  y el divisor excepcional creado como ejes coordenados, y consideraremos el polígono de Newton de la curva relativo a esas coordenadas. Las pendientes del polígono de Newton medirán cómo la singularidad ha mejorado.

**Lema 1.6.** *Para cada germen de curva irreducible  $(\mathcal{C}, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ , diferente de los ejes coordenados, el polígono de Newton de  $\mathcal{C}$  consiste de un único segmento.*

La demostración del lema 1.6 puede ser consultada en [8]. Como consecuencia del lema 1.6 tenemos

**Corolario 1.1.**  *$\mathcal{C}$  tiene al menos tantas ramas como segmentos tiene su polígono de Newton.*

**Lema 1.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  un germen de curva en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , con componentes irreducibles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_r$  (todas diferentes de los ejes coordenados). Sea  $\ell_i$  el lado compacto del polígono de Newton de  $\mathcal{C}_i$ . Enumeramos las componentes de manera que para  $i > k$  la pendiente  $\ell_i$  sea mayor o igual que la pendiente de  $\ell_k$ . Entonces el polígono de Newton de  $\mathcal{C}$  resulta de unir los diferentes lados compactos  $\ell_i$  de la siguiente manera: Si  $\ell_i$  tiene punto inicial  $(0, p_i)$  y punto final  $(q_i, 0)$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ , entonces el polígono de Newton de  $\mathcal{C}$  que consiste de los lados compactos que resultan de unir los segmentos  $\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_r$ , donde  $\ell'_i$  es el segmento de punto inicial  $(\sum_{k < i} q_k, \sum_{j \geq i} p_j)$  y puntos finales  $(\sum_{k \leq i} q_k, \sum_{j > i} p_j)$ .*

La demostración del lema puede ser consultada en [8].

**Ejemplo 1.3.** Consideremos  $\mathcal{C}$  la curva analítica cuyas componentes irreducibles son  $\mathcal{C}_1 = \{y - x = 0\}$ ,  $\mathcal{C}_2 = \{y + x = 0\}$  y  $\mathcal{C}_3 = \{y^2 - x^3 = 0\}$ . De acuerdo con el lema 1.7, el polígono de Newton de  $\mathcal{C}$  es el dado por la figura 1.8.

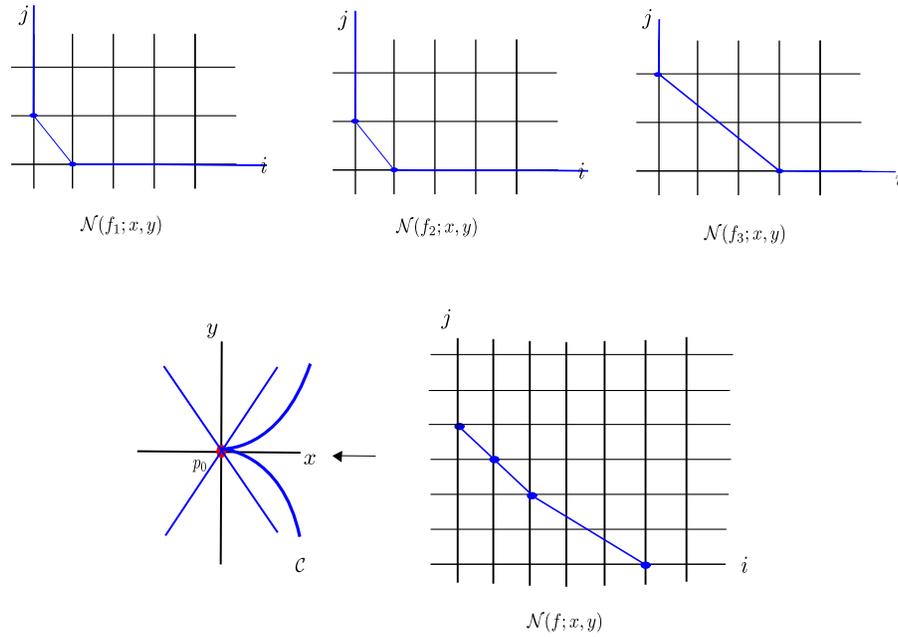


Figura 1.8: Polígono de Newton

Recordemos que nuestro objetivo es construir un curva suave  $\mathcal{L}$  que tenga el mejor contacto posible con la curva  $\mathcal{C}$  hasta el momento en el que la multiplicidad del transformado estricto de la rama  $\mathcal{C}$  disminuya. Para ello vamos a introducir algunas conceptos.

**Definición 1.21.** Sea  $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de curva analítica. Sean  $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, \dots, k$  las componentes irreducibles de  $\mathcal{C}$  en 0.

- i) Si  $\mathcal{L} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  es una curva suave a través del 0. El *exponente de contacto* entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{C}$  en 0 es el número racional

$$\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) = \min_{1 \leq i \leq k} \frac{\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i)}{m_0(\mathcal{C}_i)}.$$

- ii) El primer exponente característico de  $\mathcal{C}$  en 0 es

$$\delta_0(\mathcal{C}) := \sup_{\mathcal{L}} \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}),$$

donde el supremo es tomado sobre todas las curvas  $\mathcal{L} \neq \mathcal{C}_i$  a través del 0.

- iii) Una curva suave  $\mathcal{L}$  a través del 0 tiene *contacto maximal* con  $\mathcal{C}$  en 0 cuando

$$\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) = \delta_0(\mathcal{C}).$$

A continuación mostraremos que para cada curva singular  $\mathcal{C}$  el primer exponente característico  $\delta_0(\mathcal{C})$  es finito y por lo tanto un número racional. Describimos el comportamiento del exponente  $\delta_0(\mathcal{C})$  bajo explosiones y calculamos el número de puntos infinitamente próximos  $n$ -múltiples, donde  $n = m_0(\mathcal{C})$  a partir de la parte entera de  $\delta_0(\mathcal{C})$ . Para ello primero calculamos el exponente de contacto  $\delta_0(\mathcal{C}, \mathcal{L})$  donde  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$  a partir del polígono de Newton en unas coordenadas adecuadas; esto describe una relación entre los exponentes de contacto y los polígonos de Newton.

Sea  $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de curva analítica dado por la ecuación  $\{f = 0\}$  donde  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ .

Suponemos sin perder generalidad que  $f$  es general en  $y$  de orden  $n = m_0(\mathcal{C})$ , es decir, el eje  $y$  no es tangente a  $\mathcal{C}$ . Más aún, podemos suponer que las coordenadas han sido elegidas de manera que la curva suave  $\mathcal{L}$  que queremos comparar con  $\mathcal{C}$  es precisamente el eje  $x$ , es decir,  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$ .

**Lema 1.8.** *La pendiente del segmento más inclinado<sup>3</sup> del polígono de Newton de  $\mathcal{C}$  es  $-\frac{1}{\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})}$ .*

*Demostración.* Sea  $f = f_1 f_2 \cdots f_r$  la descomposición de  $f$  en factores irreducibles,  $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{C}_i$  la descomposición asociada de  $\mathcal{C}$  en ramas. Dado que cada  $f_i$  es irreducible, sabemos por el lema 1.7 que el polígono de Newton de  $f$  resulta de la unión de los polígonos de Newton para  $f_i$ . Cada  $f_i$  es irreducible por lo que, en virtud del lema 1.6, el polígono de  $\mathcal{C}_i$  consiste de un único lado. Supongamos que las pendientes de dichos lados son  $-\frac{1}{\delta_i}$ . La pendiente del segmento más inclinado del polígono de Newton para  $f$  es entonces igual a  $-\frac{1}{\delta}$  donde  $\delta = \min_{1 \leq i \leq r} \delta_i$ . Por otro lado,  $\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) = \min_{1 \leq i \leq r} \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i)$ , por lo que debemos demostrar que  $\delta_i = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Dado que  $f$  es general en  $y$ , cada  $f_i$  es general en  $y$  de orden  $n_i = m_0(f_i)$  para  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Queremos calcular  $\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(y, f_i)}$ , donde  $(y, f_i)$  es el ideal generado por  $y$  y  $f_i$  en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Notemos que  $f_i(x, y) - f_i(x, 0)$  es una serie de potencias divisible por  $y$  y por lo tanto vive en el ideal  $(y, f_i)$ . Por lo anterior,  $y$  y  $f_i(x, 0)$  también generan el ideal. Ahora,  $f_i(x, 0) = x^{n_i \delta_i} h(x)$  con  $h(0) \neq 0$ . Por consiguiente,  $h$  es invertible en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , entonces  $(y, f_i) = (y, f_i(x, 0)) = (y, x^{n_i \delta_i})$ . Por lo tanto tenemos que  $\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(y, f_i)} = n_i \delta_i$ . Por definición  $\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i) = \frac{\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}_i)}{m_0(\mathcal{C}_i)} = \frac{n_i \delta_i}{n_i} = \delta_i$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Daremos un criterio para saber cuando  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$  tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$ . Sea  $\ell_1$  el segmento más inclinado del polígono de Newton. Consideramos la descomposición de  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x, y) = F(x, y) + \sum_{i+\delta j > n\delta} a_{ij} x^i y^j,$$

donde  $F(x, y) = \sum_{i+\delta j = \delta n} a_{ij} x^i y^j$  es la parte cuasihomogénea de orden más pequeño relativo al peso dado por  $\ell_1$ .

**Lema 1.9.** *La curva  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$  no tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $F(x, y)$  tiene la forma*

$$F(x, y) = c(y - \lambda x^\delta)^n \quad (m \in \mathbb{N}, c \neq 0).$$

*Demostración.* Supongamos que  $F(x, y) = c(y - \lambda x^\delta)^n$  y consideremos la curva  $\mathcal{V} = \{y - \lambda x^\delta = 0\}$ . Notemos que  $\mathcal{V}$  es una curva suave a través del origen. Consideramos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= y - \lambda x^\delta \\ \tilde{x} &= x. \end{aligned}$$

En las nuevas coordenadas  $\mathcal{V}$  tiene la ecuación dada por  $\tilde{y} = 0$ . Ahora veamos como se ve  $f$  en este sistema de coordenadas. Notemos que cada monomio  $a_{ij} x^i y^j$  bajo este cambio de coordenadas se convierte en  $a_{ij} \tilde{x}^i (\tilde{y} + \lambda \tilde{x}^\delta)^j$ . Entonces el transformado de la serie es de la forma

$$\tilde{f} = c\tilde{y}^n + \sum_{i+\delta j > n\delta} a_{ij} \tilde{x}^i (\tilde{y} + \lambda \tilde{x}^\delta)^j.$$

<sup>3</sup>Usaremos la expresión segmento más inclinado o primer segmento del polígono de Newton para hacer referencia del segmento de menor pendiente del polígono de Newton.

En particular,  $\tilde{f}$  es general en  $\tilde{y}$  de orden  $n$ . Los puntos de la nube de puntos de  $\tilde{f}$ , los cuales corresponden a los términos  $a_{ij}\tilde{x}^i(\tilde{y} + \lambda\tilde{x}^\delta)^j$  con  $i + \delta j > \delta n$ , están por arriba de la línea  $\ell_1$  a través del punto  $(0, n)$  con pendiente  $-\frac{1}{\delta}$ . Es decir, dichos términos únicamente producen puntos de la forma  $(i + k\delta, j - k)$  en la nube de puntos de  $\tilde{f}$ , además todos estos puntos están en la línea a través del punto  $(i, j)$  de pendiente  $-\frac{1}{\delta}$ . Dado que el punto  $(i, j)$  está por arriba de la línea  $\ell_1$  entonces todos los puntos de la nube de punto creados por  $a_{ij}\tilde{x}^i(\tilde{y} + \lambda\tilde{x}^\delta)^j$ , están por arriba de esa línea. Por lo tanto la línea  $\ell_1$  interseca a la envolvente convexa de la nube de puntos de  $\tilde{f}$  únicamente en el punto  $(0, n)$ ; es decir, la pendiente del segmento del polígono de Newton es menos inclinada que  $-\frac{1}{\delta}$ . Entonces por el lema 1.8 tenemos que  $\delta_0(\mathcal{V}, \mathcal{C}) > \delta = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$  y por lo tanto  $\mathcal{L}$  no tiene contacto maximal. Esto demuestra la afirmación en una dirección.

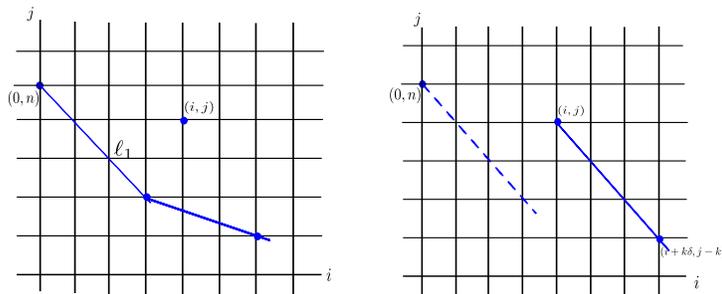


Figura 1.9: Polígono de Newton bajo el cambio de coordenadas

Para la otra dirección supongamos que  $\mathcal{L}$  no tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$ , entonces existe una curva suave  $\mathcal{V}$  tal que  $\delta_0(\mathcal{V}, \mathcal{C}) > \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ . Tenemos que  $\mathcal{V}$  no es tangente al eje  $y$ , por que de lo contrario  $\delta_0(\mathcal{C}, \mathcal{V}) = 1$ , dado que  $\mathcal{C}$  no es tangente al eje  $y$ . Por el teorema de la función implícita, tenemos que  $\mathcal{V}$  es descrita por una ecuación de la forma

$$y - \sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r = 0.$$

Del polígono de Newton de  $\mathcal{V}$  tenemos que  $b_r = 0$  para  $r < \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{V}) := d$  y  $b_{\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{V})} \neq 0$ . Vamos a demostrar que  $d = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{V}) = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ .

Supongamos primero que  $d := \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{V}) < \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ . Consideramos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y - \sum_{r=d}^{\infty} b_r x^r. \end{aligned}$$

En este sistema de coordenadas la curva  $\mathcal{V}$  está dada por la ecuación  $\mathcal{V} = \{\tilde{y} = 0\}$ . Vamos a considerar el efecto del cambio de coordenadas en el polígono de Newton. Un monomio de la forma  $x^i y^j$  es transformado en  $\tilde{x}^i \left( \tilde{y} + \sum_{r=d}^{\infty} b_r x^r \right)^j$ . Los monomios  $a_{ij} x^i y^j$  generan series de potencias en  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  de la

forma  $a_{ij}\tilde{x}^i \left( \tilde{y} + \sum_{r=d}^{\infty} b_r x^r \right)^j$  los cuales están sobre la línea que paso por el punto  $(i, j)$  con pendiente  $-\frac{1}{d}$ , o por encima esta línea. Por esta razón, el monomio  $\tilde{x}^{nd}\tilde{y}^0$  aparece en la expresión, ésta resulta de la transformación de  $y^n$ , con el coeficiente  $b_d^n \neq 0$ . Por consiguiente, el polígono de Newton de  $\tilde{f}$  es el segmento que conecta el punto  $(0, n)$  y  $(nd, 0)$ , y este segmento tiene pendiente  $-\frac{1}{d}$ . Entonces por el lema 1.9, tenemos que  $\delta_0(\mathcal{V}, \mathcal{C}) = d < \delta_0(\mathcal{W}, \mathcal{C})$ , lo cual es una contradicción a la hipótesis.

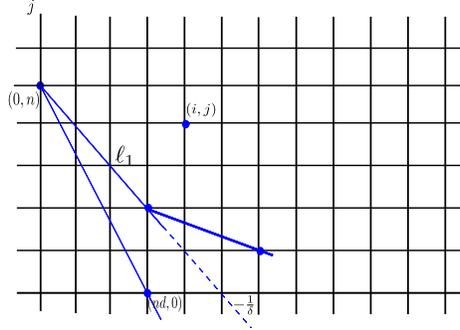


Figura 1.10: Polígono de Newton bajo el cambio de coordenadas

Ahora vamos a suponer que  $d > \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ . De nuevo, considerando el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y - \sum_{i=d}^{\infty} b_i x^i, \end{aligned} \tag{1.16}$$

tenemos que los puntos de la línea de puntos de  $\tilde{f}$  vive sobre o arriba de la línea  $(i, j)$  con pendiente  $-\frac{1}{d}$ . Pero ahora estas líneas son menos inclinadas que el primer segmento del polígono de Newton de  $f$ . Los puntos de la nube de puntos de  $f$  sobre la pendiente del segmento más inclinado del polígono de Newton de  $f$  también viven en la nube de puntos de  $\tilde{f}$ , entonces la pendiente del polígono de Newton para  $\tilde{f}$  es igual a  $-\frac{1}{\delta}$ . Por el lema 1.9 esto implica que  $\delta_0(\mathcal{V}, \mathcal{C}) = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ , lo cual es una contradicción a la hipótesis  $\delta_0(\mathcal{V}, \mathcal{C}) > \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ . Por lo tanto, hemos demostrado que  $\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{V}) = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ .

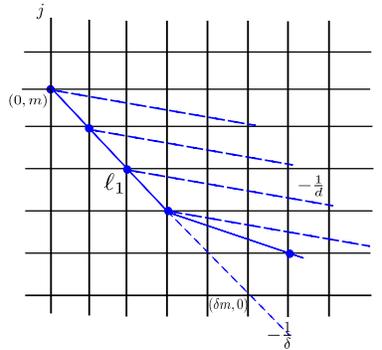


Figura 1.11: Polígono de Newton bajo el cambio de coordenadas

Dado que  $m_0(\mathcal{V}) = 1$ , entonces  $\delta$  es un número entero. Vamos a ver qué implica esto para el cambio de coordenadas (1.16). Bajo este cambio de coordenadas, los monomios  $a_{i,j}$  producen puntos en la nube de puntos de  $\tilde{f}$  los cuales viven sobre o arriba de la línea que pasa por el punto  $(i, j)$  con pendiente  $-\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{\delta}$ . Dado que  $\delta_0(\mathcal{V}, \mathcal{C}) > \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ , el segmento más inclinado del polígono de Newton de  $\tilde{f}$  es menos inclinado que  $\ell_1$ . Así, el cambio de coordenadas hace que todos los puntos de la nube de puntos de  $f$  sobre  $\ell_1$  desaparezcan. Esto implica que

$$\tilde{f}(x, y) = c\tilde{y}^n + \dots,$$

donde los puntos suspensivos representan términos de orden superior relativos al peso dado por  $\ell_1$ . Sea  $F(x, y)$  la parte cuasihomogénea de  $f(\tilde{x}, \tilde{y} + b_\delta \tilde{x}^\delta) + \dots$ ,  $F(x, y)$  es un polinomio de orden  $m$  relativo a los pesos  $1, \delta$ . Por lo tanto  $F(x, y) = cy^n$  o  $F(x, y) = c(y - x^\delta)^n$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Ahora vamos a analizar el comportamiento del exponente de contacto bajo el morfismo de explosión.

**Lema 1.10.** *Sea  $\mathcal{C}$  un germen de curva singular y supongamos que  $\mathcal{L}$  tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$  en 0. Sea  $\pi : (M_1, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  el morfismo de explosión de  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Sean  $\mathcal{L}'$  y  $\mathcal{C}'$  los transformados estrictos de  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{C}$  por  $\pi$  respectivamente. Si  $\delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) \geq 2$  entonces existe un punto  $p_1 \in \mathcal{C}' \cap E$  tal que  $m_{p_1}(\mathcal{C}') = m_0(\mathcal{C}) = n$ . En este caso  $p_1 \in \mathcal{L}'$  y  $\mathcal{L}'$  tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}'$  en  $p_1$ . Más aún  $\delta_{p_1}(\mathcal{L}', \mathcal{C}') = \delta_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) - 1$ .*

*Demostración.* Sin perder generalidad, vamos a suponer que  $\mathcal{L}$  es el eje  $x$  es decir  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$  y suponemos que la ecuación de  $\mathcal{C}$  es general en  $y$  de orden  $n = m_0(\mathcal{C})$ . El morfismo de explosión está definido por  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1) = (x, y)$  en una vecindad del punto infinitamente próximo  $p_1$  de 0, donde  $p_1 = (0, 0)$ . Entonces

$$f \circ \pi(x_1, y_1) = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i y_1^j \circ (x_1, x_1 y_1),$$

el transformado estricto  $\mathcal{C}'$  está descrito por  $\tilde{f} = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^{i+j-n} y_1^j$ . El grado del monomio  $x_1^{i+j-n} y_1^j$  es

$i + 2j - n$ , entonces  $\tilde{f}$  tiene multiplicidad  $m$  en  $p_1$  si  $a_{ij} = 0$  para toda  $i, j$  tal que  $i + 2j < 2m$  y esto sucede cuando la pendiente del lado más inclinado del polígono de Newton para  $f$  es mayor o igual que  $-\frac{1}{2}$ . Ahora notemos cómo se ve el transformado del polígono de Newton en este caso. Un segmento a través de los puntos  $(0, n)$  y  $(i, j)$  en la nube de puntos de  $f$  bajo la transformación va al segmento entre  $(0, n)$  y  $(i + j - m, j)$ . El segmento entre  $(0, n)$  y  $(i, j)$  tiene pendiente  $-\frac{1}{\frac{i}{n-j}}$  y el segmento entre  $(0, n)$  y  $(i + j - m, j)$  tiene pendiente  $-\frac{1}{\frac{i+j-n}{n-j}} = \frac{-1}{\frac{i}{n-j}-1}$ . Si  $-\frac{1}{\delta}$  es la pendiente del segmento más inclinado del polígono de Newton de  $f$ , entonces la pendiente del segmento más inclinado de  $f_1$  es  $-\frac{1}{\delta-1}$ . Por el lema 1.9 tenemos que  $\delta(\mathcal{L}', \mathcal{C}') = \delta(\mathcal{L}, \mathcal{C}) - 1$ . Queda entonces por demostrar que  $\mathcal{L}'$  tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}'$ . Se sigue de la discusión anterior que la parte cuasihomogénea es calculada del segmento más inclinado del polígono de Newton de  $f_1$  como sigue:

$$F_1(x_1, y_1) := \frac{F(x_1, y_1)}{x_1^n}.$$

Si  $\mathcal{L}'$  no tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}'$  entonces por el lema 1.9,  $F_1(x_1, y_1)$  es binomial. Por consiguiente  $F(x_1, y_1) = (y_1 - \lambda x_1^\delta)^n$ . Entonces

$$F(x, y) = x^n \left( \frac{y}{x} - \lambda x^\delta \right)^n = (y - \lambda x^{\delta+1})^n,$$

también es monomial, y por lo tanto  $\mathcal{L}$  no tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$ , pero esto es una contradicción a la hipótesis. Esto finaliza la demostración.  $\square$

**Lema 1.11.** *Si  $\delta_0(\mathcal{C}) = \infty$ , entonces  $\mathcal{C}$  es una curva suave.*

*Demostración.* Supongamos que  $\delta_0(\mathcal{C}) = \infty$ . Vamos a mostrar que  $\mathcal{C}$  es una curva suave en 0. Sea  $\mathcal{L}_0$  cualquier curva suave a través del 0. Elegimos coordenadas  $(x, y)$  de manera que  $\mathcal{L}_0 = \{y = 0\}$  y  $f(x, y)$  es un polinomio de Weierstrass en  $y$  de grado  $n$ . La nube de puntos de  $f$  entonces vive enteramente con la excepción del punto  $(0, n)$  abajo de la línea  $y = n - 1$ . Si  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{C}$  terminamos. Si  $\mathcal{C} \neq \mathcal{L}_0$ , entonces  $\mathcal{L}_0$  no tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$ , se sigue del lema 1.9 que  $f$  tiene la forma

$$f(x, y) = a_{0,n} (y - b_0 x^{\delta_0})^n + \sum_{i+\delta_0 j > \delta_0 n} a_{ij} x^i y^j.$$

En la demostración del lema 1.9 vimos que  $\mathcal{L}_1 = \{y - b_0 x^{\delta_0} = 0\}$  tiene un mejor contacto con  $\mathcal{C}$ . Hacemos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y - b_0 x^{\delta_0} \end{aligned}$$

Notemos que en estas coordenadas  $\mathcal{L}_1 = \{y_1 = 0\}$ . Notemos que la nube de puntos de  $f_1 = f(x_1, y_1)$  se queda por abajo de la línea  $y_1 = n - 1$  al igual que la nube de puntos de  $f$ . Si  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{C}$  entonces terminamos. Si  $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{C}$  tenemos que  $f$  en las nuevas coordenadas es de la forma

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (y_1 - b_1 x_1^{\delta_1})^n + \sum_{i+\delta_1 j > \delta_1 n} a_{ij}^1 x_1^i y_1^j \\ &= (y - b_0 x^{\delta_0} - b_1 x^{\delta_1})^n + \sum_{i+\delta_1 j > \delta_1 n} a_{ij}^1 x_1^i y_1^j, \end{aligned}$$

con  $\delta_1 > \delta_0$  por el lema 1.9, y  $\delta_1 \in \mathbb{N}$ . De nueva cuenta  $W_2 = \{y_1 - b_1 x_1^{\delta_1} = 0\}$  tiene mejor contacto. Repitiendo el mismo argumento e iterando tenemos lo siguiente: Si el proceso termina, es decir, si  $\mathcal{L}_i = \mathcal{C}$  para alguna  $i$ , entonces no hay nada que demostrar. Si no es así tenemos, para cada  $r \in \mathbb{N}$ , la siguiente representación

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{0,n} (y_r - b_r x_r^{\delta_r})^n + \sum_{i+\delta_r j > \delta_r n} a_{ij}^r x_r^i y_r^j \\ &= a_{0,n} (y - b_0 x^{\delta_0} - b_1 x^{\delta_1} - \dots - b_r x^{\delta_r})^n + \sum_{i+\delta_r j > \delta_r n} a_{ij}^r x_r^i y_r^j \end{aligned}$$

Los puntos de la nube de puntos del término  $\sum_{i+\delta_r j > \delta_r n} a_{ij}^r x_r^i y_r^j$  viven todos por arriba de la línea a través del punto  $(0, n)$  con pendiente  $-\frac{1}{\delta_r}$  y por debajo de la línea  $y_r = n - 1$ . La sucesión de  $\delta_i$  es una sucesión monótonamente creciente, entonces los términos del residuo se vuelven divisibles por una potencia suficientemente grande de  $x$  cuando  $r$  es suficientemente grande. Entonces la sucesión de términos de residuo tiende a cero y entonces

$$f(x, y) = a_{0,n} \left( y - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{\delta_i} \right)^n,$$

y por lo tanto la curva es regular en 0. □

**Observación 1.5.** La prueba anterior es, en esencia, la implementación del algoritmo para calcular la serie de Puiseux de  $f$ .

Vamos a demostrar ahora el siguiente resultado:

**Teorema 1.9.** *Sea  $\mathcal{C}$  un germen de curva y sea  $0 \in \mathcal{C}$  con multiplicidad  $m_0(\mathcal{C}) = n$ . Entonces el número de puntos infinitamente próximos  $n$ -múltiples es igual a la parte entera  $\lfloor \delta_0 \rfloor$ , del primer exponente característico de  $\mathcal{C}$  en 0.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{C}$  es regular, es decir  $n = 1$ , tenemos que  $\delta_0(\mathcal{C}) = \infty$ , entonces iterando la explosión obtenemos gérmenes de curvas regulares y por tanto la afirmación en este caso se sigue. Si  $\mathcal{C}$  es singular, entonces por el lema 1.11 hay una curva suave  $\mathcal{L}$  la cual tiene contacto maximal con  $\mathcal{C}$ . El lema 1.10 muestra que después de realizar la explosión del origen obtenemos una curva singular  $\mathcal{C}'$  de multiplicidad  $n$ , cuyo exponente de contacto es menor que 2, en  $[\delta_0(\mathcal{C})] - 1$  explosiones. Esto también muestra que singularidades las cuales resultan de la explosión  $\mathcal{C}'$  tiene multiplicidad menor que  $n$ . Así por el lema 1.11 el número de puntos infinitamente próximos  $n$ -múltiples es exactamente igual a  $[\delta_0(\mathcal{C})]$ .  $\square$

Estamos ahora en posición de demostrar el resultado de reducción de singularidades para curvas analíticas.

*Demostración del teorema 1.8.* Queremos demostrar que existe una sucesión finita de explosiones bajo las cuales todos los puntos infinitamente próximos de  $k$ -ésimo nivel son puntos de cruzamientos normales. Para ello debemos garantizar que la multiplicidad baja después de número finito de explosiones. Vamos a demostrar por inducción sobre la multiplicidad, que existe una sucesión finita de explosiones para la cual todos los puntos de  $k$ -ésimo nivel son 1-múltiples. El paso base se da cuando la multiplicidad de la rama  $\mathcal{C}$  es 1, el resultado se sigue de la proposición 1.6.

Supongamos que el resultado es cierto para cualquier curva cuya multiplicidad es  $n$  y sea  $\mathcal{C}$  una curva de multiplicidad  $n + 1$ . Sabemos por el lema 1.9 que después de una sucesión finita de explosiones de tamaño  $[\delta_0]$  la multiplicidad del transformado estricto de la de la curva baja. Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción existe una sucesión finita de explosiones para la cual todos los puntos infinitamente próximos de  $k$ -ésimo nivel son puntos 1-múltiples. Para demostrar que existe una sucesión finita con la propiedad de que todos los puntos infinitamente próximos de  $k$ -ésimo nivel son puntos de cruzamientos normales basta demostrar que los puntos de tangencia entre el divisor excepcional y la curva desaparecen después de un número finito de explosiones. Esto se sigue de la proposición 1.8. Queda así demostrado el teorema 1.8.  $\square$

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la curva dada por  $\mathcal{C} = \{y^2 - x^3 = 0\}$ . Notemos que la curva está dada por un polinomio cuasihomogéneo  $f(x, y) = y^2 - x^3$ . Por el lema 1.9 sabemos que  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$  tiene contacto maximal. El exponente de contacto  $\delta_0(\mathcal{C}) = \frac{\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{L})}{\text{m}_0(\mathcal{C})} = \frac{3}{2}$ . Por lo tanto, después de una explosión la multiplicidad baja. Sea  $\pi_1 : (M_1, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen. La explosión es descrita por dos cartas coordenadas  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  y  $\pi_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (\tilde{x}_1 \tilde{y}_1, \tilde{y}_1)$ . El transformado total  $\pi^{-1}(\mathcal{C})$  en la primera coordenada está dado por

$$\pi_1^*(f(x, y)) = f \circ \pi(x_1, y_1) = f(x_1, x_1 y_1) = x_1^2 y_1^2 - x_1^3 = x_1^2 (y_1^2 - x_1). \quad (1.17)$$

En este sistema de coordenadas el divisor excepcional está dado por  $\{x_1 = 0\}$ , por lo que el transformado estricto es  $\mathcal{C}' = \{y_1^2 - x_1 = 0\}$ . En el otro sistema de coordenadas tenemos

$$\pi_1^*(f(x, y)) = f \circ \pi_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = f(\tilde{x}_1 \tilde{y}_1, \tilde{y}_1) = \tilde{y}_1^2 - \tilde{x}_1^3 \tilde{y}_1^3 = \tilde{y}_1^2 (1 - \tilde{x}_1^3 \tilde{y}_1). \quad (1.18)$$

En este sistema de coordenadas el divisor excepcional está dado por  $E_1 = \{y_1 = 0\}$ , notemos que el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  no pasa por el origen de este sistema de coordenadas. El transformado estricto  $\mathcal{C}'$  es un curva suave, sin embargo el punto  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  no es un punto infinitamente próximo de cruzamientos normales. Consideremos la explosión del punto  $p_1 = (0, 0)$ ; la explosión está descrita por dos cartas de coordenadas  $\pi_2(x_2, y_2) = (x_2, x_2 y_2)$  y por  $\pi_2(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (\tilde{x}_2 \tilde{y}_2, \tilde{x}_2)$ . El transformado estricto en la primera carta coordenada está dado por

$$\pi_2^*(f_1(x_1, y_1)) = f_1 \circ \pi_2(x_2, y_2) = f_1(x_2, x_2 y_2) = x_2^2 y_2^2 - x_2 = x_2 (x_2 y_2^2 - 1),$$

entonces el transformado estricto de  $\mathcal{C}'$  no pasa por el origen de esta carta coordenada. Miremos en el origen de la otra carta coordenda

$$\pi_2^*(f_1(x_1, y_1)) = f_1(\tilde{x}_2 \tilde{y}_2, \tilde{y}_2) = \tilde{y}_2^2 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 = \tilde{y}_2 (\tilde{y}_2 - \tilde{x}_2).$$

En esta carta coordenada el transformado estricto de  $\mathcal{C}'$ , que denotamos por  $\mathcal{C}''$ , está dado por  $\mathcal{C}'' = \{\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2 = 0\}$ . Notemos que la curva es no singular sin embargo el punto  $(0,0)$  no es un punto de cruzamientos normales. Hacemos la explosión de ese punto, donde la explosión es descrita por dos cartas coordenadas  $\pi_3(x_3, y_3) = (x_3, x_3y_3)$  y  $\pi_3(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (\tilde{x}_3\tilde{y}_3, \tilde{y}_3)$ . Hacemos la explosión

$$\pi_3^*(f_2(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)) = f_2 \circ \pi_3(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = \tilde{x}_3\tilde{y}_3 - \tilde{y}_3.$$

Por lo tanto, en este sistema de coordenadas el transformado estricto de la curva de denotamos por  $\mathcal{C}'''$  pasa por el punto  $p = (1,0)$  y este punto es un punto infinitamente próximo de cruzamientos normales.

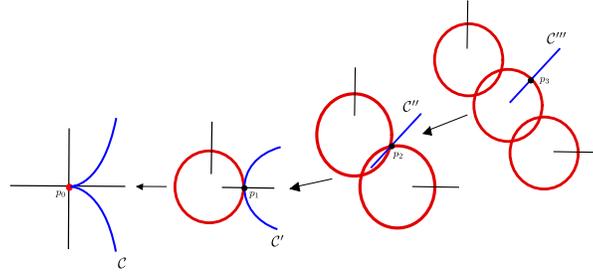


Figura 1.12: Reducción de singularidades de la curva  $\mathcal{C} = \{y^2 - x^3 = 0\}$



## Capítulo 2

# Equivalencia analítica de ramas planas

En el presente capítulo continuamos el estudio de curvas singulares desde el punto de vista de la equivalencia analítica. Nuestro objetivo es presentar los resultados de clasificación analítica de ramas planas. La exposición de los resultados se basa en [40] y [60].

### 2.1. Clasificación analítica de ramas planas

**Definición 2.1.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas. Decimos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son *analíticamente equivalentes* si existe un germen de biholomorfismo  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que

$$H(\mathcal{C}) = \mathcal{D}. \quad (2.1)$$

Si en la definición 2.1 relajamos la condición de que  $H$  sea un biholomorfismo y pedimos únicamente que  $H$  sea un homeomorfismo del espacio ambiente en sí mismo, recuperamos la noción de equisingularidad. En este caso, decimos que las ramas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  tienen el mismo *tipo topológico* o son *equisingulares*. Presentamos algunos resultados acerca de la equisingularidad de ramas en el apéndice A.

La expresión en términos algebraicos que describe la equivalencia analítica está dada de la siguiente manera. Si  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  y  $\mathcal{D} = \{g = 0\}$ , entonces la ecuación (2.1) está dada por la siguiente igualdad

$$f \circ H^{-1} = ug,$$

donde  $u$  es una unidad en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

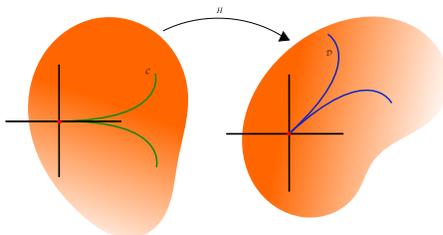


Figura 2.1: Equivalencia analítica

El problema de clasificación analítica de ramas planas fue inicialmente abordado por O. Zariski (ver [58],[60]) y S. Ebey (ver [30]) entre 1960 y 1970. Su trabajo está basado en estudiar la equivalencia de las parametrizaciones de las curvas bajo cambios de coordenadas analíticas y cambios de parámetro. Para precisar lo anterior introducimos el concepto de  $\mathcal{A}$ -equivalencia.

**Definición 2.2.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas y sean  $\varphi, \psi$  sus respectivas parametrizaciones. Decimos que  $\varphi, \psi$  son  $\mathcal{A}$ -equivalentes si existen un germen de biholomorfismo  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  y un automorfismo  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tales que

$$H \circ \varphi \circ \tau^{-1} = \psi.$$

El siguiente lema permite estudiar el problema de clasificación analítica de ramas planas en términos de la  $\mathcal{A}$ -equivalencia de sus parametrizaciones.

**Lema 2.1** ([9]). Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas donde  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  y  $\mathcal{D} = \{g = 0\}$  y sean  $\varphi$  y  $\psi$  sus respectivas parametrizaciones. Entonces  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes si y sólo si  $\varphi$  y  $\psi$  son  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

*Demostración.* Supongamos que  $\varphi$  y  $\psi$  son  $\mathcal{A}$ -equivalentes, entonces existen  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  un biholomorfismo y  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un automorfismo, tales que  $H \circ \varphi \circ \tau^{-1} = \psi$ . Esta última igualdad implica que las imágenes de  $\psi$  y  $\varphi$  son preservadas por  $H$  y por lo tanto el lugar de ceros de  $f$  y  $g$ . Por lo que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes.

Ahora supongamos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes. Entonces existe  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , un germen de biholomorfismo, tal que  $H(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ . Vamos a mostrar que  $H \circ \varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{D}$ . Dado que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes, se tiene que  $f \circ H^{-1} = ug$ , componiendo con  $H \circ \varphi$  tenemos que

$$f \circ \varphi = f \circ H^{-1} \circ H \circ \varphi = u(H \circ \varphi)g(H \circ \varphi).$$

Dado que  $f \circ \varphi \equiv 0$  entonces  $u(H \circ \varphi)g(H \circ \varphi) \equiv 0$ . Como  $u$  es una unidad, entonces  $g(H \circ \varphi) \equiv 0$  por lo que  $H \circ \varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{D}$ . Entonces existe  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tal que  $H \circ \varphi \circ \tau^{-1} = \psi$  y con esto concluimos la demostración del lema.  $\square$

## 2.2. El invariante de Zariski de una rama plana

En esta sección vamos a introducir el *invariante de Zariski*, para ello seguimos las ideas desarrolladas por O. Zariski en [60]. Como consecuencia del lema 2.1 es posible estudiar la clasificación analítica de ramas planas mediante la  $\mathcal{A}$ -equivalencia de las parametrizaciones; vamos a presentar dos criterios para determinar cuándo una parametrización de una rama es  $\mathcal{A}$ -equivalente a la parametrización de una rama “más sencilla”. Dichos criterios son llamados *criterios de eliminación* en [40].

### Criterios de eliminación

Introducimos ahora el semigrupo y la característica de una rama. El semigrupo tiene un papel importante dentro de la clasificación analítica de ramas planas. A lo largo de esta sección consideramos una rama  $\mathcal{C} = \{f = 0\}$  y una parametrización de  $\mathcal{C}$  dada por

$$\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0} a_j t^j \right),$$

donde  $\beta_0 = m_0(\mathcal{C})$ .

**Definición 2.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama plana. Definimos el *semigrupo* de  $\mathcal{C}$  que denotamos por  $S_{\mathcal{C}}$  como:

$$S_{\mathcal{C}} = \{j = \iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}) : \text{donde } \mathcal{D} = \{g = 0\}, g \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}\}, \quad (2.2)$$

donde  $\iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  representa la multiplicidad de intersección en el origen entre la rama  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ .

**Observación 2.1.** Dada una rama  $\mathcal{C}$ , el semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$  es un semigrupo numérico.<sup>1</sup> Más aún, existe  $c \in S_{\mathcal{C}}$ , tal que para todo  $i \in \mathbb{Z}_{>0}$  con  $i \geq c$  entonces  $i \in S_{\mathcal{C}}$ . El mínimo  $c$  con esta propiedad es conocido como el *conductor* del semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$ .

**Definición 2.4.** La *característica* de una rama  $\mathcal{C}$  es el conjunto  $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ , donde  $\beta_i$  es definido de manera recursiva como sigue:

- 1)  $\beta_0 = m_0(\mathcal{C})$ ;
- 2)  $\beta_1 = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_0, a_j \neq 0 \text{ y } \beta_0 \nmid j\}$ . Sea  $e_1 = \text{m.c.d.}(\beta_0, \beta_1)$ . Si  $e_1 = 1$  el proceso termina; en caso contrario continuamos y definimos  $\beta_2$  como:
- 3)  $\beta_2 = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_1, a_j \neq 0 \text{ y } e_1 \nmid j\}$ . Sea  $e_2 = \text{m.c.d.}(e_1, \beta_2)$ . Si  $e_2 = 1$  el proceso termina; en caso contrario continuamos y definimos  $\beta_3$  como:
- 4)  $\beta_3 = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_2, a_j \neq 0 \text{ y } e_2 \nmid j\}$  y continuamos con el proceso
- ⋮
- g+1)  $\beta_g = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_{g-1}, a_j \neq 0 \text{ y } e_{g-1} \nmid j\}$  y  $e_g = 1$ .

Tanto el semigrupo como la característica son invariantes de la equisingularidad de una rama  $\mathcal{C}$  (ver apéndice A), y de hecho caracterizan completamente la equisingularidad de la rama  $\mathcal{C}$ .

Tenemos como consecuencia de la equivalencia analítica el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas y  $\varphi$  y  $\psi$  sus respectivas parametrizaciones. Si las ramas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes, entonces los semigrupos coinciden,  $S_{\mathcal{C}} = S_{\mathcal{D}}$ .

*Demostración.* Sea  $j \in S_{\mathcal{C}}$ . Entonces existe  $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$  tal que  $\text{ord}_0 \varphi^*(h) = j$ . Dado que  $\mathcal{C}$  es analíticamente equivalente a  $\mathcal{D}$ , entonces por el lema 2.1 sabemos que existen  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  germen de biholomorfismo y un automorfismo  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , tales que  $\varphi = H \circ \psi \circ \tau^{-1}$ . Así

$$\varphi^*(g) = (H \circ \psi \circ \tau^{-1})^*(g) = (\tau^{-1})^* \psi^* H^*(g) = (\tau^{-1})^* \psi^*(g \circ H).$$

Como  $\tau$  es un automorfismo, entonces  $\text{ord}_0(\varphi^*(g)) = \text{ord}_0(\psi^*(g \circ H))$ , y por lo tanto  $j \in S_{\mathcal{D}}$ . □

Tenemos así el siguiente lema

**Lema 2.2** ([60]). Sea  $\mathcal{C}$  una rama plana y  $\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0} a_j t^j \right)$  su parametrización. Entonces  $\mathcal{C}$  es analíticamente equivalente a una rama  $\tilde{\mathcal{C}}$  cuya parametrización es de la forma

$$\tilde{\varphi}(t) = \left( t^{\beta_0}, a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1} a_j t^j \right),$$

donde  $\beta_1 > \beta_0$  y  $\beta_0 \nmid \beta_1$ .

---

<sup>1</sup>Sea  $\mathbb{N}$  el conjunto de números enteros. Un subconjunto  $S \subset \mathbb{N}$  es un *semigrupo numérico* si satisface las siguientes propiedades:

- i)  $0 \in S$ ;
- ii)  $\mathbb{N} \setminus S$  es un conjunto finito;
- iii) Si  $x, y \in S$  entonces  $x + y \in S$ .

*Demostración.* Sea  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\beta_0 \leq l < \beta_1$  y  $a_l \neq 0$ . Dado que  $l$  es divisible por  $\beta_0$ , entonces existe  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $l = k\beta_0$ . Si consideramos el biholomorfismo definido por  $H(x, y) = (x, y - c_k x^k)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= H \circ \varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0}^{\infty} a_j t^j - c_k t^{k\beta_0} \right) \\ &= \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0}^{l-1} a_j t^j + a_l t^l + \sum_{j > l}^{\infty} a_j t^j - c_k t^{k\beta_0} \right) = \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0}^{l-1} a_j t^j + (a_l - c_k) t^l + \sum_{j > l}^{\infty} a_j t^j \right). \end{aligned}$$

Así, eligiendo  $c_k = -a_l$  tenemos que  $\varphi$  es  $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\tilde{\varphi}(t) = \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0}^{l-1} a_j t^j + \sum_{j > l}^{\infty} a_j t^j \right).$$

Dado que el número de exponentes entre  $\beta_0$  y  $\beta_1$  es un número finito, podemos repetir el argumento un número finito de veces para obtener  $\tilde{\varphi}(t) = \left( t^{\beta_0}, a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1}^{\infty} a_j t^j \right)$ .  $\square$

A partir de este momento suponemos que la parametrización de  $\mathcal{C}$  es de la forma

$$\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1}^{\infty} a_j t^j \right). \quad (2.3)$$

Dado que para la  $\mathcal{A}$ -equivalencia de parametrizaciones es necesario usar biholomorfismos de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , requerimos de un lema que relacione el orden en el origen de una serie  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  con el orden en el origen de  $\varphi^*(g) = g \circ \varphi(t)$ . El siguiente lema provee dicha relación.

**Lema 2.3** ([60]). *Sean  $\mathcal{C}$  una rama y  $\varphi$  su parametrización. Dada  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , con  $g(x, y) = ax + by + h(x, y)$ , donde  $\text{ord}_0 h \geq 2$  y  $\varphi^*(g) = g \circ \varphi \neq 0$ , se tiene*

- i)  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) = \beta_0$  si y sólo si  $a \neq 0$ ;
- ii)  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) = \beta_1$  entonces  $a = 0$  y  $b \neq 0$ ;
- iii)  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) < \beta_1$  si y sólo si  $\text{ord}_0 \varphi^* g = l\beta_0$  con  $l \leq \lfloor \frac{\beta_1}{\beta_0} \rfloor$ ;
- iv)  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) > \beta_1$  implica que  $\text{ord}_0 g \geq 2$ .

*Demostración.* i) Dado que

$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi(t) = at^{\beta_0} + b \left( t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1}^{\infty} a_j t^j \right) + h \circ \varphi(t),$$

entonces  $\text{ord}_0 \varphi^* g = \beta_0$  si y sólo si  $a \neq 0$ .

- ii) Supongamos que  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) = \beta_1$ . Por el inciso i) tenemos que  $a = 0$ . Supongamos que  $\text{ord}_0 g \geq 2$ , escribiendo  $g(x, y) = g_1(x) + yg_2(x, y)$ , donde  $\text{ord}_0 \varphi^*(yg_2(x, y)) > \beta_1$ . Entonces se tiene que  $\text{ord}_0 \varphi^* g = \text{ord}_0 \varphi^*(g_1(x)) = \beta_1$  pero esto es una contradicción pues  $\beta_0 \nmid \beta_1$ .
- iii) Escribimos  $g$  en la forma  $g(x, y) = g_1(x) + yg_2(x, y)$ . Notemos que  $\text{ord}_0 \varphi^*(yg_2(x, y)) \geq \beta_1$ . Por lo tanto  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) = \text{ord}_0 \varphi^*(g_1(x)) = l\beta_0$  con  $l \leq \lfloor \frac{\beta_1}{\beta_0} \rfloor$ .

iv) Supongamos que  $\text{ord}_0\varphi^*(g) > \beta_1$ , entonces por i) sabemos que  $a = 0$ . Si suponemos que  $b \neq 0$  escribimos  $g = by + g_1(x) + yg_2(x, y)$  con  $\text{ord}_0\varphi^*(yg_2(x, y)) > \beta_1$ , dado que  $\text{ord}_0g_2(x, y) \geq 1$ . Por otro lado, sabemos que  $\text{ord}_0\varphi^*g_1(x) = l\beta_0$  con  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Dado que  $\beta_0 \nmid \beta_1$  tenemos que  $\text{ord}_0\varphi^*(by) \neq \text{ord}_0\varphi^*(g_1(x))$ , por lo tanto  $\text{ord}_0\varphi^*(g) = \min\{\beta_1, l\beta_0\} \geq \beta_1$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 2.2** ([60]). *Sean  $v_1 < v_2 < \dots < v_q$  los enteros del conjunto  $\{\beta_1 + 1, \beta_1 + 2, \dots, c\}$  que no pertenecen al semigrupo  $S_C$  y donde  $c$  es el conductor del semigrupo  $S_C$ . Entonces existe una rama  $\tilde{C}$  analíticamente equivalente a  $C$  con parametrización dada por*

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= t^{\beta_0} \\ \tilde{y} &= t^{\beta_1} + \sum_{i=1}^q \tilde{a}_i t^{v_i},\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde  $\tilde{y}$  es un polinomio en  $t$ .

**Observación 2.2.** Una parametrización de la rama  $C$  como la dada por (2.4) es llamada una *parametrización corta*.

*Demostración.* Sea  $\varphi(t)$  la parametrización de  $C$  dada por,

$$\varphi(t) = (t^{\beta_0}, a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \dots + a_l t^l + \dots)$$

donde  $a_l \neq 0$  y  $l$  es el entero más pequeño del conjunto  $\{\beta_1, \beta_1 + 1, \dots, c\}$  que pertenece al semigrupo  $S_C$ . Dado que  $l \in S_C$ , existe  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  con  $\varphi^*(h) \neq 0$  tal que  $\text{ord}_0\varphi^*(h) = l$ . Por el lema 2.3, tenemos que  $\text{ord}_0h \geq 2$ . Vamos a definir el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\ y_1 &= y - \alpha h(x, y),\end{aligned}$$

donde  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  es una constante. Notemos que el determinante de la matriz jacobiana de esta transformación es 1 por lo que define un cambio de coordenadas analítico. Sea  $\mathcal{C}_1$  la curva definida por la parametrización,

$$\begin{aligned}x_1 &= t^{\beta_0} \\ y_1 &= a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \dots + a_l t^l + \dots - \alpha (b_l t^l + b_{l+1} t^{l+1} + \dots) \\ &= a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \dots + (a_l + b_l \alpha) t^l + \dots.\end{aligned}$$

Elijiendo  $\alpha$  de manera que  $a_l + b_l \alpha = 0$ , tenemos que la serie  $y_1$  coincide con  $y$  hasta el término  $l - 1$  y el término  $t^l$  ya no aparece en  $y_1$ . Repitiendo el mismo argumento un número finito de veces, obtenemos una rama  $\mathcal{C}_r$  analíticamente equivalente a  $C$  que está parametrizada por

$$\begin{aligned}x_r &= t^{\beta_0} \\ y_r &= a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{i=1}^q \hat{a}_i t^{v_i} + g(t),\end{aligned}$$

donde  $v_1, v_2, \dots, v_q$  son los enteros del conjunto que  $\{\beta_1, \beta_1 + 1, \dots, c\}$  que no pertenecen al semigrupo  $S_C$  y  $g(t)$  es una serie de orden al menos  $c$ . Dado que el orden en el origen de la serie  $g(t)$  es al menos  $c$ , existe  $g_1 \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tal que  $\varphi^*(g_1) = g(t)$ . Entonces si consideramos el biholomorfismo dado por

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x_r \\ \tilde{y} &= \frac{1}{a_{\beta_1}} (y_r - g_1),\end{aligned}$$

tenemos el resultado. Notemos que el determinante de la matriz jacobiana de esta aplicación es  $\frac{1}{a_{\beta_1}}$  y por lo tanto el biholomorfismo está bien definido.  $\square$

Como consecuencia de la proposición 2.2 tenemos el primer criterio de eliminación. Si  $a_j t^j$  es un término que aparece en la parametrización con  $j > \beta_1$  y  $j \in S_C$ , entonces es posible eliminar este término de la parametrización.

Tenemos ahora la siguiente proposición.

**Proposición 2.3** ([60]). *Sea  $C$  una rama con parametrización corta*

$$\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, t^{\beta_1} + \sum_{i=1}^q a_{v_i} t^{v_i} \right).$$

*Sea  $v_l \in \mathbb{Z}_{>0}$ , y  $a_{v_l} \neq 0$ ,  $v_l > \beta_1$  y tal que  $v_l + \beta_0 = (k+1)\beta_1$  para algún  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Entonces  $C$  es analíticamente equivalente a una rama  $\tilde{C}$  cuya parametrización está dada por*

$$\tilde{\varphi}(t) = \left( t^{\beta_0}, t^{\beta_1} + \sum_{1 < i < l} a_{v_i} t^{v_i} + \sum_{l < i < q} \tilde{a}_{v_i} t^{v_i} \right).$$

*Demostración.* Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \alpha y^k \\ \tilde{y} &= y. \end{aligned}$$

Ahora

$$\psi(t) = \tilde{x} \circ \varphi = t^{\beta_0} + \alpha \left( t^{\beta_1} + \sum_{i=1}^q a_{v_i} t^{v_i} \right)^k = t^{\beta_0} + \alpha t^{k\beta_1} + \dots = t^{\beta_0} (1 + \alpha t^{k\beta_1 - \beta_0} + \dots).$$

Después de algunos cálculos tenemos que

$$u(t) = t + \frac{\alpha}{\beta_0} t^{k\beta_1 - \beta_0 + 1} + \dots,$$

es tal que  $(u(t))^{\beta_0} = \psi(t)$ . Denotemos por  $\tau = t + \frac{\alpha}{\beta_0} t^{k\beta_1 - \beta_0 + 1} + \dots$ , entonces  $t = \tau - \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{k\beta_1 - \beta_0 + 1} + \dots$ . Sustituyendo en  $y$  tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= y\left(\tau - \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{v_l - \beta_1 + 1} + \dots\right) \\ &= \left(\tau - \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{v_l - \beta_1 + 1} + \dots\right)^{\beta_1} + \sum_{1 \leq i < l} a_{v_i} \left(\tau - \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{v_l - \beta_1 + 1} + \dots\right)^{v_i} \\ &\quad + a_{v_l} \left(\tau - \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{k\beta_1 - \beta_0 + 1} + \dots\right)^{v_l} + \sum_{l < i \leq q} a_{v_i} \left(\tau - \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{v_l - \beta_1 + 1} + \dots\right)^{v_i} \\ &= \tau^{\beta_1} - \beta_1 \frac{\alpha}{\beta_0} \tau^{v_l} + \sum_{\beta_1 < i < l} a_{v_i} \tau^{v_i} + a_{v_l} \tau^{v_l} + \dots \end{aligned}$$

Por consiguiente, eligiendo  $\alpha$  tal que  $a_{v_l} - \beta_1 \frac{\alpha}{\beta_0} = 0$ , tenemos la parametrización de la forma

$$\hat{\varphi}(t) = \left( t^{\beta_0}, t^{\beta_1} + \sum_{\beta_1 < i < l} a_{v_i} t^i + \dots \right).$$

Aplicando de forma iterada la proposición 2.2 obtenemos el resultado. □

Como consecuencia de la proposición 2.3 tenemos el segundo criterio de eliminación. Si  $a_j t^j$  es un término que aparece en la parametrización con  $j > \beta_1$ ,  $j \notin S_C$  y  $j + \beta_0 - \beta_1 \in \beta_1 \mathbb{Z}_{>0}$ , entonces es posible eliminar este término de la parametrización.

Combinando la proposición 2.2 y la proposición 2.3 podemos definir un invariante de clasificación analítica, dicho invariante es conocido como el *invariante de Zariski*.

**Definición 2.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama y  $\varphi(t)$  la parametrización de  $\mathcal{C}$ . Supongamos que  $\varphi$  es de la forma

$$\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, t^{\beta_1} + a_\lambda t^\lambda + \sum_{\lambda < i < c} a_i t^i \right),$$

con  $\lambda$  satisfaciendo las siguientes dos propiedades

$$\lambda \notin S_C \text{ y } \lambda + \beta_0 - \beta_1 \notin \beta_1 \mathbb{Z}_{>0}.$$

Entonces  $\lambda$  es un invariante analítico conocido como el *invariante de Zariski*.

El hecho de que  $\lambda$  sea un invariante analítico se sigue de que este término siempre aparece para cualquier parametrización  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\varphi$ .

### 2.2.1. Conjunto de valores de diferenciales de Kähler

En esta sección introducimos el conjunto de valores diferenciales de Kähler y presentamos el *invariante de Zariski* a través de este conjunto. El conjunto de valores diferenciales de Kähler es introducido de manera formal por A. Hefez y M. E. Hernandez aunque estaba de manera implícita en los trabajos de O. Zariski. Dicho conjunto es parte fundamental en la solución del problema de clasificación analítica.

Introducimos el conjunto de valores diferenciales de Kähler. Sean

$$\Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 = \{\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy : a(x, y), b(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}\}$$

y

$$\Omega_{(\mathbb{C}, 0)}^1 = \{\eta = c(t)dt : c(t) \in \mathbb{C}\{t\}\},$$

el módulo de gérmenes de 1-formas diferenciales holomorfas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y el módulo de gérmenes de diferenciales holomorfas en  $(\mathbb{C}, 0)$ , respectivamente. Una parametrización  $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  de la rama  $\mathcal{C}$ , con  $\varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ , induce de manera natural un homomorfismo de módulos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi^* : \quad \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 & \longrightarrow \Omega_{(\mathbb{C}, 0)}^1 \\ \omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy & \longmapsto \varphi^* \omega = (\varphi^*(a(x, y)))\varphi_1'(t) + \varphi^*(b(x, y))\varphi_2'(t)dt, \end{aligned}$$

donde  $\varphi_i'(t)$  denota la derivada de  $\varphi_i(t)$  con respecto a  $t$  para  $i = 1, 2$ . Asociada a  $\varphi$  tenemos una aplicación de  $\Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 \setminus \ker(\varphi^*)$ , donde  $\ker(\varphi^*) = \{\omega \in \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 : \varphi^*(\omega) \equiv 0\}$ , en el conjunto de enteros positivos dada por

$$\begin{aligned} \nu_\varphi : \quad \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 \setminus \ker(\varphi^*) & \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \omega & \longmapsto \nu(\omega) = \text{ord}_0 c(t) + 1, \end{aligned}$$

donde  $c(t) \in \mathbb{C}\{t\}$  es tal que  $\varphi^* \omega = c(t)dt$ .

**Definición 2.6.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama y  $\varphi$  su respectiva parametrización. El conjunto de *valores diferenciales de Kähler* de  $\mathcal{C}$  es el conjunto

$$\Lambda_{\mathcal{C}} = \nu_\varphi \left( \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 \setminus \ker(\varphi^*) \right).$$

**Proposición 2.4.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas planas y sean  $\varphi$  y  $\psi$  sus respectivas parametrizaciones. Si las ramas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes, entonces sus conjuntos de valores de diferenciales de Kähler coinciden,  $\Lambda_{\mathcal{C}} = \Lambda_{\mathcal{D}}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes. Entonces existen  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  un germe de biholomorfismo y  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un automorfismo, tales que  $\psi = H \circ \varphi \circ \tau^{-1}$ . Sea  $j \in \Lambda_{\varphi}$ , entonces existe  $\omega \in \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1$  tal que  $\varphi^*\omega = a(t)dt$  y  $\text{ord}_0(a(t)) = j - 1$ . Afirmamos que  $(H^{-1})^*\omega$  es tal que  $\text{ord}_t\psi^*((H^{-1})^*\omega) = j - 1$ . Como  $\psi = H \circ \varphi \circ \tau^{-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi^*((H^{-1})^*\omega) &= (H \circ \varphi \circ \tau^{-1})^*(H^{-1})^*\omega = ((\tau^{-1})^*\varphi^*H^*)(H^{-1})^*\omega \\ &= (\tau^{-1})^*\varphi^*(H^{-1} \circ H)^*\omega = (\tau^{-1})^*\varphi^*(\omega). \end{aligned}$$

Dado que  $\tau$  es un automorfismo, se tiene que  $\text{ord}_0(\tau^{-1})^*\varphi^*(\omega) = \text{ord}_0(\varphi^*(\omega))$ . Por lo que  $j \in \Lambda_{\psi}$ .  $\square$

El conjunto de valores diferenciales es una extensión del semigrupo como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama y  $\varphi$  su parametrización. Entonces tenemos que  $S_{\mathcal{C}} \setminus \{0\} \subseteq \Lambda_{\mathcal{C}}$ .

*Demostración.* Sea  $0 < j \in S_{\mathcal{C}}$ , entonces existe  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tal que  $\text{ord}_0\varphi^*(h) = j$ . Sea

$$\omega = dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy,$$

notemos que  $\omega \in \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1$ . Dado que  $\varphi^*(\omega) = \varphi^*(dh) = d(\varphi^*(h))$ , se tiene que  $\text{ord}_0(d(\varphi^*(h))) = \text{ord}_0\varphi^*(h) - 1$ . Por lo tanto, si  $\varphi^*\omega = a(t)dt$ , entonces  $\text{ord}_0a(t) + 1 = \text{ord}_0\varphi^*(h) - 1 + 1 = \text{ord}_0\varphi^*(h) = j$ . Por lo tanto  $S_{\mathcal{C}} \setminus \{0\} \subseteq \Lambda_{\mathcal{C}}$ .  $\square$

De la proposición 2.5 sabemos que el semigrupo está contenido en el conjunto de valores de diferenciales de Kähler. Dado que el semigrupo tiene conductor se sigue que en el caso de que el conjunto  $\Lambda_{\mathcal{C}} \setminus S_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ , es un conjunto finito. Por otro lado, se sigue de la proposición 2.1 y de la proposición 2.4 que si  $\Lambda_{\mathcal{C}} \setminus S_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$  entonces  $\lambda = \min(\Lambda_{\mathcal{C}} \setminus S_{\mathcal{C}}) - \beta_0$  es un invariante analítico bajo la  $\mathcal{A}$ -equivalencia. Dicho invariante es el *invariante de Zariski* introducido previamente.

### 2.2.2. Ramas planas con característica $(n, m)$

En esta sección estudiamos el caso de ramas planas cuya característica es  $(n, m)$  con  $1 < n < m$  y  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ , donde  $n = m_0(\mathcal{C})$  y  $m = \beta_1$ .

**Definición 2.7.** Decimos que  $\mathcal{C}$  es  $(n, m)$ -cuasihomogénea si  $\mathcal{C}$  es analíticamente equivalente a la curva descrita por la ecuación  $\{y^n - x^m = 0\}$ .

**Observación 2.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama y  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ , si  $\mathcal{C}$  es  $(n, m)$ -cuasihomogénea, entonces por el lema 2.1 su parametrización  $\varphi$  es  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $(t^n, t^m)$ .

En [58], O. Zariski demostró el siguiente resultado, que caracteriza a las ramas de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  que son  $(n, m)$ -cuasihomogéneas en términos del conjunto de valores  $\Lambda_{\mathcal{C}}$ .

**Teorema 2.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama. Entonces  $\Lambda_{\varphi} \setminus S_{\mathcal{C}} = \emptyset$  si y sólo si la rama  $\mathcal{C}$  es  $(n, m)$ -cuasi-homogénea.

En caso de que  $\Lambda_{\mathcal{C}} \setminus S_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ , en el mismo artículo (ver [58]) es demostrado que  $\mathcal{C}$  admite una parametrización de la siguiente forma

$$\varphi(t) = \left( t^n, t^m + t^\lambda + \sum_{j>\lambda} a_j t^j \right),$$

donde  $\lambda = \min(\Lambda_{\mathcal{C}} \setminus S_{\mathcal{C}}) - n$  es el *invariante de Zariski*.

Dada una clase de equisingularidad  $(n, m)$  el número de posibles invariantes de Zariski para dicha clase de equisingularidad es un número finito. A continuación seguimos las ideas descritas por R. Peraire en [50] para dar una biyección entre este conjunto y un subconjunto finito de  $\mathbb{R}^2$ .

Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , con  $1 < n < m$  y  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ , consideramos el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\text{PZ} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : 0 \leq i \leq m-2, 0 \leq j \leq n-2, ni + mj > mn\}.$$

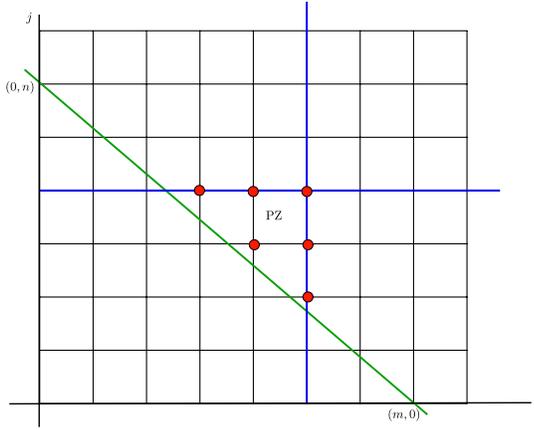


Figura 2.2: El conjunto PZ

**Observación 2.4.** De acuerdo con [30],[58],[60], si tenemos una parametrización del tipo

$$\varphi(t) = \left( t^n, t^m + a_\lambda t^\lambda + \sum_{j>\lambda} a_j t^j \right),$$

con  $a_\lambda \neq 0$  y  $\lambda$  satisface lo siguiente

$$\lambda \notin S_{\mathcal{C}} \text{ y } \lambda + m - n \notin m\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

entonces  $\lambda$  es el invariante de Zariski de  $\mathcal{C}$ .

Por otro lado, dados  $n, m \in \mathbb{N}$  como antes, podemos considerar el siguiente subconjunto de enteros positivos,

$$\text{ZI} = \{s \in \mathbb{Z}_{>0} : s + m \notin \langle n, m \rangle \text{ y } s + n \notin \langle n, m \rangle\},$$

donde  $\langle n, m \rangle = \{ni + mj : i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ , y supongamos que la rama  $\mathcal{C}$  no es  $(n, m)$ -cuasihomogénea. Sea  $\lambda$  el invariante de Zariski de  $\mathcal{C}$ . Escribiendo  $\lambda = m + s$  con algún  $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ , dado que  $\lambda$  satisface que  $\lambda \notin S_{\mathcal{C}}$ , entonces  $m + s \notin \langle n, m \rangle$ . Puesto que  $\lambda$  también satisface que  $\lambda + n - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ , tenemos que  $\lambda + n - m = m + s + n - m = n + s$ . Por lo tanto,  $n + s \notin m\mathbb{Z}_{>0}$  y en particular  $n + s \notin \langle n, m \rangle$ . Hemos demostrado que el conjunto de posibles invariantes de Zariski de una clase de equisingularidad  $(n, m)$  está en biyección con el conjunto ZI.

El siguiente lema da una relación entre los conjuntos PZ y ZI

**Lema 2.4.** *Hay una biyección entre el conjunto PZ y el conjunto ZI.*

Más aún, en [50] (ver también [60]) se demuestra el siguiente resultado

**Teorema 2.2.** *Si la rama  $\mathcal{C}$  no es  $(m, n)$ -cuasihomogénea y  $\lambda$  es su invariante de Zariski. Entonces, bajo un cambio de coordenadas,  $\mathcal{C}$  tiene una ecuación del tipo*

$$\left\{ y^n - x^m + x^p y^q + \sum_{\substack{(i,j) \in \text{PZ} \\ ni+mj > np+mq}} a_{i,j} x^i y^j = 0 \right\},$$

donde  $(p, q) \in \text{PZ}$  es el punto asociado a  $\lambda$  bajo la biyección.



## Capítulo 3

# Foliaciones singulares de $(\mathbb{C}^2, 0)$

En este capítulo presentamos algunos resultados conocidos acerca de teoría de foliaciones holomorfas en dimensión 2, así como algunos resultados principales de esta tesis. La exposición se basa principalmente en los trabajos [16],[36],[42].

Antes de dar la definición de foliación, vamos a enunciar el resultado de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales.

Sea  $U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  un dominio y sea  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación holomorfa. Una ecuación diferencial ordinaria holomorfa definida por  $v$  sobre  $U$  es una ecuación de la forma,

$$\frac{dz}{dt} = v(t, z), \quad (t, z) \in U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n. \quad (3.1)$$

Una solución de la ecuación (3.1) es una curva holomorfa parametrizada por una aplicación holomorfa  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ , definida en un subconjunto abierto  $V \subseteq \mathbb{C}$ , cuya gráfica  $W = \{(t, \varphi(t)) \mid t \in V\}$  pertenece a  $U$ , y además en cada punto  $t \in V$  se cumple que,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = v(t, \varphi(t)); \quad (3.2)$$

es decir, el vector velocidad  $\frac{d\varphi}{dt} = (\frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_n}{dt})$  de  $\varphi$  coincide en cada punto  $t \in V$  con  $v(t, \varphi(t))$ . La gráfica de  $\varphi$  en  $U$  es llamada la *curva integral*. Decimos que la ecuación es *autónoma*, si  $v$  no depende de la variable  $t$ . En este caso la imagen  $\varphi(V) \subset \mathbb{C}^n$  es llamada la *curva de las fases*. Es importante notar que cualquier ecuación (3.1) se puede convertir en una ecuación autónoma considerando una variable "ficticia",  $x \in \mathbb{C}$  que satisface la ecuación  $\frac{dx}{dt} = 1$ .

Si  $(t_0, z_0) = (t_0, z_{0,1}, z_{0,2}, \dots, z_{0,n}) \in U$  es un punto específico, entonces el problema de valor inicial, conocido también como *problema de Cauchy*, consiste en encontrar una curva integral de la ecuación diferencial (3.1) pasando por el punto  $(t_0, z_0)$ , es decir, una solución que satisfaga la condición

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi(t_0) = z_0 \in \mathbb{C}^n. \quad (3.3)$$

**Teorema 3.1 (De existencia y unicidad de soluciones).** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  un dominio. Consideremos la ecuación diferencial (3.1),*

$$\frac{dz}{dt} = v(t, z), \quad (t, z) \in U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$$

*y un punto  $(t_0, z_0) \in U$ . Entonces existe un polidisco suficientemente pequeño*

$$\Delta_\epsilon = \{(t, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n : |t - t_0| < \epsilon, |z_j - z_{j,0}| < \epsilon \ j = 1, 2, \dots, n\} \subseteq U$$

*tal que la solución del problema de valor inicial existe y es única en este polidisco. Esta solución depende de manera holomorfa de la condición inicial  $z_0 \in \mathbb{C}^n$  y sobre cualesquiera parámetros adicionales, siempre que  $v$  dependa de manera holomorfa de dichos parámetros.*

La demostración de dicho resultado puede ser consultada en [42].

A partir de este momento únicamente trabajaremos con ecuaciones diferenciales autónomas en  $\mathbb{C}^n$ .

Un *flujo complejo* asociado a la ecuación diferencial (3.1) es una aplicación  $\Phi : V \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$ , donde  $V \times U$  es una vecindad abierta de  $\{t_0\} \times U$ ,  $V$  es una vecindad suficientemente pequeña de  $t_0$  y  $\varphi(t, \mathbf{w}) := \Phi(t, \mathbf{w})$  es la solución de (3.1) que satisface que  $\varphi(t_0, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$  para todo  $\mathbf{w} \in U$ .

**Definición 3.1.** Sean

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = v(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in U \subseteq \mathbb{C}^n, \quad (3.4)$$

y

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \tilde{v}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^n, \quad (3.5)$$

dos ecuaciones diferenciales definidas en  $U$  y  $\tilde{U}$  respectivamente. Decimos que las ecuaciones son *analíticamente equivalentes* o *biholomorfamente equivalentes* si existe un biholomorfismo  $H : U \rightarrow \tilde{U}$  tal que se satisface lo siguiente, si  $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$  es la solución de (3.4) que al tiempo  $t = 0$  pasa por  $\mathbf{z}_0 \in U$  y  $\psi(t, \mathbf{z}_1)$  la solución de (3.5) que al tiempo  $t = 0$  pasa por  $\mathbf{z}_1 \in \tilde{U}$ , entonces

$$H \circ \varphi(t, \mathbf{z}_0) = \psi(t, H(\mathbf{z}_0)). \quad (3.6)$$

Derivando la identidad (3.6) con respecto a  $t$  y evaluando en  $t = 0$ ,

$$\left. \frac{d(H \circ \varphi(t, \mathbf{z}_0))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\psi(t, H(\mathbf{z}_0)))}{dt} \right|_{t=0},$$

se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \cdot v(\varphi(t, \mathbf{z}_0))|_{t=0} = \tilde{v}(\psi(t, H(\mathbf{z}_0)))|_{t=0}$$

y entonces

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \cdot v(\mathbf{z}_0) = \tilde{v}(H(\mathbf{z}_0)). \quad (3.7)$$

Donde  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}$  es la matriz jacobiana del biholomorfismo  $H$ . Más adelante retomaremos esta ecuación.

## Campos vectoriales

Sea  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio. Denotamos por  $\mathfrak{D}(U)$  al espacio de campos vectoriales definidos sobre  $U$ .

**Definición 3.2.** Sean  $v$  y  $\tilde{v}$  campos vectoriales holomorfos definidos en dominios  $U$  y  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{C}^n$  respectivamente,  $F \in \mathfrak{D}(U)$ ,  $\tilde{F} \in \mathfrak{D}(\tilde{U})$ . Decimos que los campos vectoriales holomorfos  $F$  y  $\tilde{F}$  son *analíticamente* o *biholomorfamente equivalentes* si existe un biholomorfismo  $H : U \rightarrow \tilde{U}$  tal que

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot v(z) = \tilde{v}(H(z)) \quad (3.8)$$

**Definición 3.3.** Sean  $v$  y  $\tilde{v}$  campos vectoriales holomorfos definidos en dominios  $U$  y  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{C}^n$  respectivamente,  $v \in \mathfrak{D}(U)$ ,  $\tilde{v} \in \mathfrak{D}(\tilde{U})$ . Decimos que los campos vectoriales holomorfos  $F$  y  $\tilde{F}$  son *orbitalmente analíticamente* o *biholomorfamente equivalentes* si existen un biholomorfismo  $H : U \rightarrow \tilde{U}$  y una función no idénticamente nula  $g \in \mathcal{O}(\tilde{U})$  tal que

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot v(z) = g(z)\tilde{v}(H(z)). \quad (3.9)$$

Si la parte lineal del biholomorfismo  $H$  es la identidad y  $g(0) = 1$ , decimos que los campos vectoriales  $v, \tilde{v}$  son *estrictamente orbitalmente analíticamente equivalentes*.

**Definición 3.4.** Un punto  $z_0 \in U$ , es un punto *singular* de un campo vectorial  $v \in \mathfrak{D}(U)$ , si  $v(z_0) = 0$ . En caso contrario decimos que el punto es *no singular*. Decimos que un punto singular  $z_0$ , es un punto singular *aislado*, si existe una vecindad  $U_{z_0}$  del punto  $z_0$ , tal que para todo punto  $z \in U_{z_0}$ ,  $v(z) \neq 0$ .

El siguiente teorema describe el comportamiento de campos vectoriales alrededor de puntos no singulares.

**Teorema 3.2 (Teorema de rectificación).** *Un campo vectorial  $v$  es biholomorfamente equivalente al campo vectorial constante  $\tilde{v}(\tilde{z}) = (0, 0, \dots, 0, 1)$  en una vecindad suficientemente pequeña de cualquier punto no singular del campo.*

*Demostración.* Sea  $z_0 \in U$ , tal que  $v(z_0) \neq 0$ . Consideremos  $A$  un hiperplano pasando por el punto  $z_0$  que sea transversal al vector  $v(z_0) \neq 0$ . Vamos a construir un biholomorfismo que lleve a una vecindad del punto  $z_0$  en un conjunto abierto del producto  $\mathbb{C} \times A$  y tal que transforme las soluciones de  $\frac{dz}{dt} = v(z)$  en curvas de la forma  $\mathbb{C} \times (k_2, k_3 \dots, k_n)$ . Si para cada punto  $w \in A \cap U$  se considera la solución de la ecuación diferencial que pasa por  $w$ , tenemos definida una aplicación  $\Phi(t, w)$  de una vecindad  $V$  de  $(t_0, z_0) \in A \times \mathbb{C}$  en  $U$  que satisface la ecuación

$$\frac{d\Phi}{dt}(t, w) = v(\Phi(t, w)), \quad \Phi(t_0, w) = w$$

Dado que las soluciones dependen holomorfamente de las condiciones iniciales, se tiene que  $\Phi$  es una aplicación holomorfa. Escribiendo  $\Phi(t, w) = (\Phi_1(t, w), \Phi_2(t, w), \dots, \Phi_n(t, w))$ , entonces la derivada de  $\Phi$  en  $(t_0, z_0)$  es de la forma

$$D\Phi|_{(t_0, z_0)} = \begin{pmatrix} \frac{d\Phi_1}{dt}(t_0, z_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d\Phi_2}{dt}(t_0, z_0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ \frac{d\Phi_n}{dt}(t_0, z_0) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(\Phi(t_0, z_0)) & 0 & \dots & 0 \\ v_2(\Phi(t_0, z_0)) & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ v_n(\Phi(t_0, z_0)) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

Notemos que el determinante es distinto de 0, por consiguiente del teorema de la función inversa se sigue que  $\Phi$  es un biholomorfismo de una vecindad de  $\mathbb{C} \times A$  en un abierto de  $U$ . Si consideramos la aplicación  $\Phi^{-1}$ , se tiene que ésta manda soluciones de la ecuación  $\frac{dz}{dt} = v(z)$  en curvas de la forma  $\mathbb{C} \times (k_2, k_3 \dots, k_n)$ , quedando demostrado el teorema.  $\square$

## Foliaciones

Por el teorema 3.1, cualquier dominio  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  con un campo vectorial  $v$  definido sobre éste, puede ser representado como la unión disjunta de las curvas de las fases de la ecuación diferencial inducida por  $v$ . El teorema 3.2 provee un modelo local para el objeto geométrico llamado *espacio foliado* o simplemente *foliación*. De manera breve, una foliación de un dominio  $U$  es una partición de  $U$  en un continuo de conjuntos conexos llamados *hojas*, las cuales se ven localmente como una familia de subespacios afines paralelos de codimensión  $n - 1$ .

Precisamos ahora la definición de foliación holomorfa estándar

**Definición 3.5.** La *foliación holomorfa estándar* de dimensión  $n$  (respectivamente de codimensión  $m$ ) de un polidisco  $\Delta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : |z| < 1, |w| < 1\}$  es la representación de  $\Delta$  como la unión disjunta de  $n$ -discos, llamados *placas*,

$$\Delta = \bigsqcup_{|y| < 1} \Delta_y, \quad \Delta_y = \{|x| < 1\} \times \{y\} \subseteq \Delta \quad (3.11)$$

**Definición 3.6.** Una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión  $n$ , de un dominio  $U \subset \mathbb{C}^{n+m}$  es la partición de  $U = \bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}$  en una unión disjunta de subconjuntos conexos  $\Delta_{\alpha}$ , llamados *hojas*, los cuales son biholomorfa-mente equivalentes a la foliación holomorfa estándar por placas de dimensión  $n$ . Es decir, para cada punto  $z_0 \in U$ , existe una vecindad abierta  $V$  y un biholomorfismo  $H : V \rightarrow \Delta$ , que manda las hojas locales, es decir, las componentes conexas de la intersección  $\Delta_{\alpha} \cap V$ , en placas de la foliación estándar.

Si  $M$  es una variedad compleja de dimensión  $n + m$ , la definición de foliación de dimensión  $n$  se satisface, sin embargo es posible dar una definición en términos de cartas coordenadas.

**Definición 3.7.** Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$  y sea  $0 < m < n$ . Una foliación holomorfa no singular  $\mathcal{F}$  de codimensión  $m$  (o dimensión compleja  $n - m$ ) sobre  $M$  está dada por un atlas maximal  $\mathfrak{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $M$  con las siguientes propiedades:

- i) Para cada  $i \in I$ ,  $\phi_i$  es un biholomorfismo,  $\phi_i : U_i \rightarrow \Delta_{n-m} \times \Delta_m$  donde  $\Delta_{n-m}$  y  $\Delta_m$  son polidiscos abiertos en  $\mathbb{C}^{n-m}$  y  $\mathbb{C}^m$ , respectivamente.
- ii) Si  $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j) \in \mathfrak{A}$  y son tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi(U_i \cap U_j)$$

es de la siguiente forma

$$\phi_{ij}(z, w) = (\zeta_{ij}(z, w), \eta_{ij}(w)), \quad (3.12)$$

donde  $(z, w) \in \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ , y  $\zeta_{ij}$  y  $\eta_{ij}$  son aplicaciones holomorfas de  $\mathbb{C}^{n-m}$  y  $\mathbb{C}^m$ , respectivamente.

**Observación 3.1.** Notemos que la condición ii) de la definición se puede expresar de la siguiente forma: Si  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  son coordenadas de  $\mathbb{C}^n$ , la aplicación

$$\phi_{ij} : (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (\phi_{ij}^1, \phi_{ij}^2, \dots, \phi_{ij}^n),$$

satisface que  $\frac{\partial \phi_{ij}^k}{\partial z_l} = 0$  para  $n - m + 1 \leq k \leq n$  y  $1 \leq l \leq n - m$ .

**Definición 3.8.** Se dice que dos foliaciones holomorfas  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  definidas sobre los dominios  $U, U' \subseteq \mathbb{C}^n$  respectivamente son *analíticamente equivalentes* (o *topológicamente equivalentes*), si existe un biholomorfismo  $H : U \rightarrow U'$  (respectivamente un homeomorfismo) que aplica las hojas de la foliación  $\mathcal{F}$  en las hojas de la foliación  $\mathcal{F}'$

Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$  es un dominio, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** Para cualquier campo vectorial  $v$  sobre  $U$ ,  $v \in \mathfrak{D}(U)$  sin singularidades en  $U$ , la partición de  $U$  en curvas integrales de  $v$  define una foliación  $\mathcal{F}_v$  de dimensión compleja 1 y codimensión  $n - 1$ .

Decimos que la foliación  $\mathcal{F}_v$  es generada por el campo vectorial  $v$ . Cuando consideramos foliaciones generadas por campos vectoriales estamos pensando en la partición dada por las curvas de las fases y no en la parametrización de las soluciones por el tiempo complejo.

**Proposición 3.2.** Dos campos vectoriales  $v \in \mathfrak{D}(U)$  y  $\tilde{v} \in \mathfrak{D}(\tilde{U})$  sin singularidades en  $U$  y  $\tilde{U}$  respectivamente, analíticamente equivalentes generan foliaciones holomorfas de dimensión 1 analíticamente equivalentes. De manera recíproca, si las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  generadas por dos campos vectoriales no singulares, son analíticamente equivalentes por un biholomorfismo  $H : U \rightarrow \tilde{U}$ , entonces existe una función  $f \in \mathcal{O}(U)$  tal que

$$f(z) \frac{\partial H}{\partial z} \cdot v(z) = \tilde{v}(H(z)), \quad f(z) \neq 0, \quad z \in U. \quad (3.13)$$

La demostración de este resultado puede ser consultada en [42]. A partir de este momento únicamente consideramos foliaciones de dimensión 1.

**Definición 3.9.** Una foliación holomorfa singular en un dominio  $U$  es una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  cuyas hojas de dimensión 1 están en el conjunto  $U \setminus \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual a 2, el cual es llamado el *lugar singular*

Un campo vectorial  $v \in \mathfrak{D}(U)$  define una foliación holomorfa no singular sobre el complemento de su lugar singular que denotamos por  $\Sigma_v = \{z \in U : v(z) = 0\}$ . Este lugar singular es un subconjunto analítico de  $U$ . Sin embargo muchas veces la foliación puede extenderse de  $U$  a un subconjunto abierto más grande que contenga a parte del conjunto  $\Sigma_v$ .

Si  $U \subset \tilde{U}$  son dominios y  $\tilde{\mathcal{F}}$  es una foliación sobre  $\tilde{U}$ , es posible restringir  $\tilde{\mathcal{F}}$  sobre  $U$ , es decir, las hojas de la foliación sobre  $U$  son las componente conexas de la intersección  $\tilde{L}_\alpha \cap U$  para todas las hojas  $\tilde{L}_\alpha$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Tenemos así el siguiente teorema

**Teorema 3.3.** Sean  $U \subset \mathbb{C}^n$  un dominio y  $v$  un campo vectorial holomorfo no nulo sobre  $U$ ,  $v \in \mathfrak{D}(U)$ , con lugar singular  $\Sigma_v$ . Entonces existe un subconjunto analítico de  $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma_v$  de codimensión compleja mayor o igual a 2 en  $U$  y una foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  sobre  $U \setminus \tilde{\Sigma}$  cuya restricción sobre  $U \setminus \Sigma_v$  coincide con la foliación generada por el campo vectorial  $v$ .

La demostración de este resultado puede ser consultada en [42].

Si  $U$  es un dominio de dimensión compleja 2, es posible reemplazar el campo vectorial holomorfo  $v$  por la distribución generada por una 1-forma apropiada  $\omega \in \Omega_U^1$  junto con el lugar singular  $\Sigma$  de ésta, el cual consiste únicamente de puntos aislados (el lugar singular de la 1-forma es el cero común de sus coeficientes).

El teorema 3.3 implica que cuando estamos trabajando con foliaciones holomorfas con singularidades, generadas por campos vectoriales holomorfos, es posible suponer que el lugar singular tiene codimensión mayor o igual a 2; en particular, singularidades de foliaciones holomorfas en el plano son puntos aislados. El regreso de esta afirmación también es cierto como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.** Supongamos que  $\Sigma \subset U \subseteq \mathbb{C}^n$  es un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual a 2 y sea  $\mathcal{F}$  una foliación no singular de dimensión 1 sobre  $U \setminus \Sigma$  que no se extiende a cualquier parte de  $\Sigma$ . Entonces alrededor de cada punto  $a \in \Sigma$  la foliación  $\mathcal{F}$  es generada por un campo vectorial holomorfo  $v$  con lugar singular  $\Sigma$ .

La demostración puede ser consultada en [42].

Suponemos a lo largo de este trabajo que el lugar singular  $\Sigma$  es maximal, es decir, la foliación no se puede extender de manera analítica sobre cualquier conjunto más grande que  $U \setminus \Sigma$ .

### Reducción de singularidades y curvas invariantes de foliaciones

Al igual que en el caso de curvas singulares existe un resultado de reducción de singularidades para foliaciones singulares. En esta sección establecemos dicho resultado y en el apéndice B presentamos una demostración siguiendo las ideas de Felipe Cano en [15]. Para ello, introducimos el concepto de singularidad simple en dimensión dos.

Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , dada en coordenadas por la ecuación  $\{\omega = 0\}$ , donde  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , y supongamos que el origen es una singularidad de  $\mathcal{F}$ . Sea

$$v = Q(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - P(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

un campo de vectores que genera a  $\mathcal{F}$ . Denotamos por  $J_v$  a la parte lineal de  $v$ , es decir,  $J_v$  es la matriz jacobiana de  $v$  en punto  $p = (0, 0)$ , es decir:

$$J_v = Dv|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0) \\ -\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) & -\frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}.$$

**Definición 3.10.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Decimos que 0 es una *singularidad presimple* para  $\mathcal{F}$  si  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  donde  $\lambda, \mu$  son los valores propios de  $J_v$ . Más aún decimos que 0 es una *singularidad simple* si  $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ . Si 0 es una singularidad simple y  $\lambda\mu = 0$ , decimos que 0 es una singularidad de tipo *silla-nodo*

La reducción de singularidades fue demostrada por A. Seidenberg (ver [53]) y establece:

**Teorema 3.5.** *Sea  $M$  un espacio ambiente de dimensión compleja dos y sea  $v$  un germen de campo vectorial en  $p \in M$ . Denotamos por  $\mathcal{F}$  al germen de foliación inducido por  $v$ . Entonces existe una sucesión finita de explosiones*

$$M \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N; \pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N \quad (3.14)$$

*cada una centrada en un punto  $p_i \in \pi_i^{-1}(p_{i-1})$ , con  $p = p_0$ , tal que para cualquier  $q \in \pi^{-1}(p)$  el germen de  $\mathcal{F}_N$  en cada  $q$  es generado por un germen de campo vectorial  $\hat{v}$ , con  $q$  un punto que es no singular o es simple y donde  $\mathcal{F}_N$  es el transformado de  $\mathcal{F}$  en  $M_N$ .*

**Definición 3.11.** Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Una *separatriz* de  $\mathcal{F}$  es una hoja  $\mathcal{L} \subset (\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$  cuya cerradura  $\mathcal{L} \cup \{0\}$  es el germen de una curva analítica.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  que está dada por la ecuación  $\{\omega = 0\}$ . Sea  $\mathcal{C}$  un germen de rama plana dado por la ecuación  $\{f = 0\}$ , con  $f$  reducida. La rama  $\mathcal{C}$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  si se satisface la siguiente relación

$$\omega \wedge df = f\eta,$$

donde  $\eta$  es una 2-forma holomorfa.

**Definición 3.12.** Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación holomorfa de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con singularidad aislada 0. Decimos que 0 es una singularidad *no dicrítica* de la foliación si  $\mathcal{F}$  tiene, a lo más, un número finito separatrices. En caso contrario decimos que 0 es una singularidad *dicrítica*. Decimos que la foliación  $\mathcal{F}$  es *no dicrítica* en el primer caso, en el segundo caso decimos que  $\mathcal{F}$  es *dicrítica*.

Tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.** *Sean  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular dada por la ecuación  $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ ,  $\mathcal{C}$  una rama y sea  $\varphi$  su parametrización de  $\mathcal{C}$ . Entonces son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{C}$  es separatriz de la foliación  $\mathcal{F}$ ;
- ii)  $\varphi^*\omega \equiv 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  y que  $\mathcal{C}$  es dada por la ecuación  $\{f = 0\}$ , donde  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  es una ecuación reducida. Dado que  $\mathcal{C}$  es una separatriz se tiene que

$$\omega \wedge df = f(x, y)a(x, y)dx \wedge dy.$$

Igualando los coeficientes tenemos que  $P(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} - Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y)a(x, y)$ . Entonces

$$\varphi^* \left( P(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} - Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \varphi^* (f(x, y)a(x, y)) = 0,$$

y esto implica que

$$0 = \varphi^*(P)\varphi^* \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \varphi^*(Q)\varphi^* \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = (\varphi^*(P), \varphi^*(Q)) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi, -\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \right). \quad (3.15)$$

Por otro lado, como  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  es parametrización de  $\mathcal{C}$  entonces  $\varphi^*(f) \equiv 0$ ; derivando esta expresión con respecto a  $t$  tenemos

$$0 = \frac{\partial(f \circ \varphi(t))}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \right) \frac{d\varphi_1}{dt} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \right) \frac{d\varphi_2}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi, \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \right) \cdot \left( \frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt} \right). \quad (3.16)$$

De (3.15) y (3.16) se sigue que

$$0 = (\varphi^*(P), \varphi^*(Q)) \cdot \left( \frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt} \right) = \varphi^*\omega. \quad (3.17)$$

Esto finaliza la demostración en una dirección.

Vamos a demostrar ahora la otra implicación. Por hipótesis tenemos que  $\varphi^*\omega \equiv 0$ . Dado que el gradiente de  $f$  es ortogonal a las curvas de nivel determinadas por  $f$ , tenemos que

$$\left( \varphi^* \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \varphi^* \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) \cdot \left( \frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Así de la ecuación (3.17) y (3.18) se tiene que  $\varphi^* \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (-Q(x, y), P(x, y)) = 0$ . Notemos que  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (-Q(x, y), P(x, y))$  corresponde al coeficiente de la 2-forma  $df \wedge \omega$ , por lo que  $df \wedge \omega = f\eta$ , donde  $\eta$  es una 2-forma. Lo cual finaliza la demostración.  $\square$

En 1982 fue demostrado por C. Camacho y P. Sad que dada una foliación holomorfa singular  $\mathcal{F}$ , siempre existe al menos una separatriz  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 3.6** (Camacho-Sad, ver [13],[48]). *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , entonces existe al menos una separatriz de  $\mathcal{F}$ .*

Sea  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen en  $\mathbb{C}^2$  que fue introducida en capítulo 1. El transformado de una foliación  $\mathcal{F}$  por  $\pi$  que denotamos por  $\pi^*\mathcal{F}$  es localmente generado por el pullback  $\pi^*\omega$ , donde  $\mathcal{F}$  es generada localmente por  $\{\omega = 0\}$ .

**Observación 3.2.** Si  $\mathcal{F}$  es una foliación singular no dicrítica, entonces cada componente irreducible del divisor excepcional  $D = \pi^{-1}(0)$ , donde  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es el morfismo de reducción de singularidades (ver apéndice B), es una curva invariante del transformado estricto de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  es dicrítica hay al menos una componente del divisor excepcional  $D$  que es transversal en cada punto a  $\mathcal{F}$  excepto en un número finito de puntos (puntos singulares o de tangencia). En este caso decimos que la componente es dicrítica.

### 3.1. El orden de tangencia entre una foliación y una rama

Vamos ahora a definir el orden de tangencia entre una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  y una rama  $\mathcal{C}$ .

**Definición 3.13.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Sea  $\mathcal{C}$  una rama y  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ . Definimos el orden de tangencia entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{C}$ , que denotamos por  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  como

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \text{ord}_0 \varphi^*\omega,$$

donde  $\{\omega = 0\}$  es una ecuación local de  $\mathcal{F}$ .

**Observación 3.3.** Por la proposición 3.3 tenemos que si  $\mathcal{C}$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  entonces  $\varphi^*\omega = 0$ ; podemos definir en este caso el orden de tangencia entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{C}$  como  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$

**Ejemplo 3.1.** Consideremos la foliación generada por  $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ , donde  $\omega = 2xdx - dy$ . Sea  $\mathcal{C}$  la curva  $\{x = 0\}$ . Notemos que  $\mathcal{C}$  es parametrizada por  $\varphi(t) = (0, t)$ , por lo tanto

$$\varphi^*\omega = dt,$$

y entonces  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = 0$ .

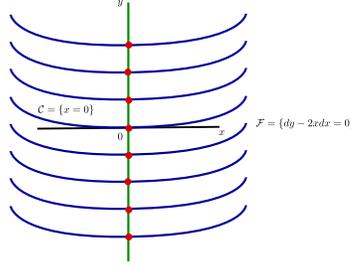


Figura 3.1: Orden de tangencia

El siguiente lema demuestra la invariancia del orden de tangencia entre una foliación y una rama, bajo biholomorfismos.

**Lema 3.1.** Sean  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  ramas planas. Consideremos la foliación  $\mathcal{F}$  dada por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$ . Supongamos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes y sea  $\mathcal{G}$  la foliación dada por la ecuación  $\{(H^{-1})^*\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$  donde  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es el biholomorfismo tal que  $H(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ . Entonces,

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \text{Tan}_0(\mathcal{D}, \mathcal{G}). \quad (3.19)$$

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas y sean  $\varphi$  y  $\psi$  sus respectivas parametrizaciones. Dado que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son analíticamente equivalentes, existen  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  biholomorfismo y  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  automorfismo tales que  $\psi = H \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) &= \text{ord}_0(\varphi^*\omega_{\mathcal{F}}) = \text{ord}_0(H^{-1} \circ \psi \circ \sigma)^*\omega_{\mathcal{F}} = \text{ord}_0(\sigma^* \circ \varphi^* \circ (H^{-1})^*\omega_{\mathcal{F}}) \\ &= \text{ord}_0(\sigma^* \circ \psi^* \circ \omega_{\mathcal{G}}) = \text{ord}_0(\psi^*\omega_{\mathcal{G}}) \\ &= \text{Tan}_0(\mathcal{D}, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe a que  $\text{ord}_0\sigma = 1$  □

La siguiente proposición nos da un comportamiento del orden de tangencia bajo el morfismo de explosión.

**Proposición 3.4.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , sea  $\mathcal{C}$  una rama y sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen de  $\mathbb{C}^2$  y donde  $D = \pi^{-1}(0)$ . Denotamos por  $\mathcal{C}'$  el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  bajo  $\pi$ . Entonces,

i)  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = m_0(\mathcal{F})m_0(\mathcal{C}) + \text{Tan}_{p_1}(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ , si  $D = \pi^{-1}(0)$  es una componente no dicrítica;

ii)  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = (m_0(\mathcal{F}) + 1)m_0(\mathcal{C}) + \text{Tan}_{p_1}(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ , si  $D = \pi^{-1}(0)$  es dicrítica,

con  $p_1 \in D$ , donde  $D = \pi^{-1}(0)$  es el divisor excepcional y  $p_1 = D \cap \mathcal{C}'$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular dada por  $\{\omega = 0\}$ . Si  $\mathcal{C}$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  se tiene que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \text{Tan}_{p_1}(\mathcal{C}', \mathcal{F}') = \infty$ , pues  $\mathcal{C}'$  es invariante para  $\mathcal{F}'$  y por consiguiente se satisface la igualdad. Supongamos que  $\mathcal{C}$  no es separatriz de  $\mathcal{F}$ . Sabemos que el transformado estricto de la foliación  $\mathcal{F}'$  es generado por  $\{\omega' = 0\}$ , donde  $\omega' = \frac{\pi^*\omega}{x_1^*}$ , y localmente tenemos que  $D = \{x_1 = 0\}$  y  $\pi^*\omega$  corresponde al transformado (pullback) de  $\omega$  por  $\pi$ . Si  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  es la parametrización de  $\mathcal{C}$ , la parametrización del transformado estricto de la rama  $\mathcal{C}'$  está dada por  $\varphi'(t) = \pi^{-1} \circ \varphi = \left(\varphi_1(t), \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\right)$ . Entonces tenemos

$$\text{Tan}_{p_1}(\mathcal{C}', \mathcal{F}') = \text{ord}_0 \varphi'^* \tilde{\omega}.$$

Tenemos así los dos casos:

- i) En el caso en el que la singularidad es no dicrítica, tenemos que  $r = m_0(\mathcal{F})$ . Entonces

$$\varphi'^* \omega' = \varphi'^* \left( \frac{\pi^* \omega}{x_1^{m_0(\mathcal{F})}} \right) = \frac{\varphi'^* \pi^* \omega}{\varphi_1^{m_0(\mathcal{F})}} = \frac{(\pi^{-1} \circ \varphi)^* \pi^* \omega}{\varphi_1^{m_0(\mathcal{F})}} = \frac{\varphi^* (\pi^{-1})^* \pi^* \omega}{\varphi_1^{m_0(\mathcal{F})}} = \frac{\varphi^* \omega}{\varphi_1^{m_0(\mathcal{F})}}.$$

Esto implica que  $\text{ord}_0 \varphi'^* \omega' = \text{ord}_0 \varphi^* \omega - (\text{ord}_0 \varphi_1) m_0(\mathcal{F})$ . Dado que es posible considerar una parametrización de  $\mathcal{C}$  de manera que  $\text{ord}_0 \varphi_1 = m_0(\mathcal{C})$ , entonces tenemos que

$$\text{ord}_0 \varphi'^* \omega' = \text{ord}_0 \varphi^* \omega - m_0(\mathcal{C}) m_0(\mathcal{F}).$$

Lo cual demuestra el resultado para el caso no dicrítico.

- ii) En el caso de que la singularidad sea dicrítica tenemos que  $r = m_0(\mathcal{F}) + 1$ . Repitiendo los mismos argumentos tenemos que

$$\text{ord}_t \varphi'^* \omega' = \text{ord}_t \varphi^* \omega - m_0(\mathcal{C}) (m_0(\mathcal{F}) + 1),$$

lo cual finaliza la prueba. □

## 3.2. Foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales de $(\mathbb{C}^2, 0)$

En esta sección vamos a introducir la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  que estudiaremos en esta tesis. Recordemos que la explosión de un punto  $p \in M$  es una variedad compleja de dimensión 2 y puede ser descrita por medio de dos cartas coordenadas

$$\begin{aligned} \pi_1 : \tilde{M} &\rightarrow U \subset M & \pi_1 : \tilde{M} &\rightarrow U \subset M \\ (x_1, y_1) &\mapsto \pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1), & (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) &\mapsto \pi_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (\tilde{x}_1 \tilde{y}_1, \tilde{y}_1), \end{aligned}$$

donde  $U$  es una vecindad abierta de  $p$ . Decimos que el  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  es el origen en la primera carta coordenada y  $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (0, 0)$  es el origen de la segunda carta coordenada.

Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones puntuales, donde  $D = \pi^{-1}(0)$  es el divisor excepcional. Dado un punto  $p \in D$  denotamos por  $e_p(D)$  al número de componentes irreducibles de  $D$  pasando por  $p$ , así  $e_p(D) \in \{1, 2\}$ .

Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones puntuales, determinada por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$ ,  $1 < n < m$  y  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ . La sucesión  $\pi$  está determinada por el

algoritmo como describimos a continuación:

$$\begin{aligned}
 m &= \alpha_0 n + r_0, & 1 \leq r_0 \leq n - 1 \\
 n &= \alpha_1 r_0 + r_1, & 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1 \\
 r_0 &= \alpha_2 r_1 + r_2, & 0 \leq r_2 \leq r_1 - 1 \\
 &\vdots \\
 r_{k-1} &= \alpha_{k+1} r_k + 1, \\
 r_k &= \alpha_{k+2} 1, & \text{donde } \alpha_{k+2} = r_k.
 \end{aligned}$$

Sean  $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_j\}$  los centros de cada explosión, con  $p_0 = 0 \in \mathbb{C}^2$ . Cada punto  $p_i$  satisface lo siguiente.

- i)  $p_i \in E_i = \pi_i^{-1}(p_{i-1})$ , para todo  $i \in \left\{1, 2, \dots, \sum_{i=0}^{k+2} \alpha_i\right\}$ ,
- ii)  $e_{p_i}(E^i) = 1$  si  $i \in \{1, 2, \dots, \alpha_0\}$ , donde  $E^i = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_i$  y  $p_i$  no es el origen de la segunda carta para todo  $i \in \{1, 2, \dots, \alpha_0\}$ ,
- iii)  $e_{p_i}(E^i) = 2$  si  $i \in \left\{\alpha_0 + 1, \alpha_0 + 2, \dots, \sum_{i=0}^{k+2} \alpha_i\right\}$ , donde  $E^i = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_i$ ,
- iv)  $p_i$  es el origen de la segunda carta coordenada para  $i \in \{\alpha_l + 1, \alpha_l + 2, \dots, \alpha_l + \alpha_{l+1}\}$  con  $l \in \{0, 2, 4, \dots\}$  y  $p_i$  es el origen de la primera carta coordenada para  $i \in \{\alpha_l + 1, \alpha_l + 2, \dots, \alpha_l + \alpha_{l+1}\}$  con  $l \in \{1, 3, \dots\}$ .

**Definición 3.14.** Sea  $\mathcal{L}$  una curva suave de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Decimos que la curva  $\mathcal{L}$  tiene *contacto maximal* con  $\pi$  si  $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_{\alpha_0}\} \subseteq \{\text{Puntos infinitamente próximos de } \mathcal{L}\}$ .

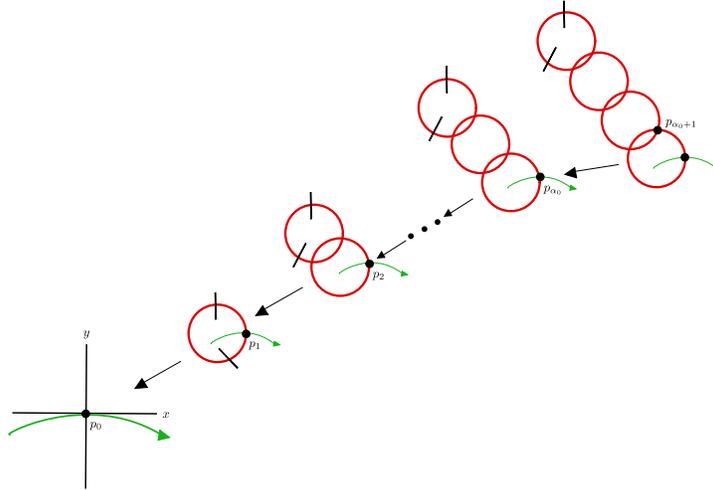


Figura 3.2: Curva de contacto maximal

**Lema 3.2.** Sea  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones determinada por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$ . Entonces, existe un sistema de coordenadas  $(x, y)$  para  $\mathbb{C}^2$  tal que la curva  $\mathcal{L} = \{y = 0\}$  tiene contacto maximal con  $\pi$ .

*Demostración.* Sean  $p_0, p_1, \dots, p_{\alpha_0}$  los centros de explosión de las explosiones  $\pi_i : (M_i, \pi_{-1}(p_{i-1})) \rightarrow (M_{i-1}, p_{i-1})$  para  $i = 1, 2, \dots, \alpha_0$ . Por hipótesis tenemos que  $e_{p_i}(E_i) = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, \alpha_0$ . Dado que  $p_1$  no es el origen de la segunda carta, la explosión  $\pi_1$ , en el punto  $p_1$  está dada en coordenadas locales  $x_1, y_1$  en el punto  $p_1$  por la ecuación  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1(y_1 + c_1))$ . La explosión  $\pi_2$  está dada en coordenadas locales  $x_2, y_2$  en el punto  $p_2$  por una de las siguientes ecuaciones

$$T_{1,c_2}(x_2, y_2) = (x_2, x_2(y_2 + c_2)) \quad \circ \quad T_2(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2).$$

Si tenemos  $T_{1,c_2}$ , el divisor  $E_2$  en el punto  $p_2$  está dado localmente por  $\{x_2 = 0\}$ . Si tenemos  $T_2$  entonces el divisor  $E_2$  está dado en  $p_2$  por  $\{x_2 y_2 = 0\}$ , pero  $e_{p_2}(E^2) = 1$  por lo que sólo tenemos el caso  $T_{1,c_2}$ . Usando el mismo argumento de manera recursiva en cada punto  $p_i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, \alpha_0\}$ , obtenemos coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_{\alpha_0}$ . En el punto  $p_{\alpha_0}$  tenemos coordenadas  $x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0}$ , y haciendo la explosión en ese punto tenemos que  $T_{1,c_{\alpha_0}}(x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0}) = (x_{\alpha_0}, x_{\alpha_0}(y_{\alpha_0} + c_{\alpha_0}))$ . Consideremos la curva dada por  $\mathcal{L}' = \{y_{\alpha_0} + c_{\alpha_0} = 0\}$ .

Proyectando esta curva al punto  $p_0$  se tiene la curva dada por  $\mathcal{L} = \left\{ y + \sum_{i=1}^{\alpha_0} c_i x^i = 0 \right\}$ . Definiendo el cambio de coordenadas  $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y - \sum_{i=1}^{\alpha_0} c_i x^i$ , se sigue el resultado. □

A partir de este momento y a lo largo de esta sección suponemos que las coordenadas  $x, y$  son adaptadas a  $\pi$ . Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones descrita por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$ , donde  $D = \pi^{-1}(0)$  es el divisor excepcional.

**Definición 3.15.** (Foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales) Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular dicrítica con singularidad aislada de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y sea  $\pi$  una sucesión finita de explosiones inducida por el par  $(n, m)$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  pertenece a la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales  $\mathfrak{F}_\pi$  si y sólo si satisface las siguientes propiedades:

- i) La foliación inducida  $\pi^* \mathcal{F}$  tiene una única componente dicrítica  $E_d$ . Esta componente dicrítica es la componente irreducible que aparece en la última explosión de la sucesión  $\pi$  y no hay puntos singulares, ni puntos de tangencia de  $\pi^* \mathcal{F}$  en esta componente;
- ii)  $\mathcal{F}$  no tiene singularidades de tipo silla-nodo;
- iii)  $\mathcal{F}$  tiene al menos dos curvas invariantes,  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_\infty$ , tales que  $\mathcal{L}_0$  tiene contacto maximal con  $\pi$  y  $\mathcal{L}_\infty$  tiene intersección transversal con  $\mathcal{L}_0$ .

En esta sección estamos interesados en una subfamilia de  $\mathfrak{F}_\pi$  y en la relación entre las foliaciones de esta familia y el invariante de Zariski de una rama plana. De manera más específica vamos a introducir la siguiente familia

**Definición 3.16.** (Foliaciones dicríticas cuspidales) Sea  $\mathcal{F}$  una foliación pseudo-cuspidal dicrítica,  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  pertenece a la familia de foliaciones dicríticas cuspidales, que denotamos por  $\mathfrak{F}_\pi^c$  si existe un campo vectorial tangente a la foliación  $v$  tal que la matriz jacobiana de la parte lineal de  $v$ ,  $J_v = Dv|_{(0,0)}$  tiene dos valores propios distintos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  con  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  y  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

Tenemos el siguiente lema,

**Lema 3.3.** Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^c$ , entonces existe un generador de la foliación  $\mathcal{F}$  de la forma

$$\omega = (my + h_1(x, y))dx - (nx + cy + h_2(x, y))dy,$$

donde  $c \in \mathbb{C}$ ,  $h_i(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ ,  $\text{ord}_0 h_i \geq 2$  para  $i = 1, 2$  y  $\text{ord}_0 h_1(x, 0) \geq \lfloor \frac{m}{n} \rfloor + 1$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  una foliación dicrítica cuspidal, por definición existe un campo de vectores que genera a la foliación  $\mathcal{F}$  y cuya parte lineal tiene dos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  tales que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n}{m}$ . Supongamos que el campo vectorial es de la forma

$$v = (nx + h_2(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (my + cx + h_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde  $\text{ord}_0 h_i(x, y) \geq 2$ . Considerando la 1-forma

$$\omega = (my + c_1x + h_1(x, y)) dx - (nx + h_2(x, y)) dy,$$

tenemos que  $\omega(v) = 0$  y por ende genera a la foliación  $\mathcal{F}$ .

Sea  $\pi_1 : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen con  $D = \pi^{-1}(0)$ , mirando en el origen de la primera carta  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  tenemos,

$$\frac{\pi_1^* \omega}{x_1} = \left( (m-n)y_1 + c_1 + x_1 \tilde{h}_2(x_1, y_1) \right) dx_1 - \left( nx_1 + x_1 \tilde{h}_1(x_1, y_1) \right) dy_1. \quad (3.20)$$

Si  $x_1 = 0$  tenemos que el punto  $(x_1, y_1) = (0, -\frac{c_1}{m-n})$ , es un punto singular del transformado estricto de la foliación. Dado que el eje  $x$  es adaptado a  $\pi$ , el origen de la primera carta es el punto que debemos explotar, sin embargo si  $c_1 \neq 0$  el punto singular no es origen de la primera carta. Por lo tanto  $c_1 = 0$ . Por un argumento similar se demuestra que la parte lineal del campo vectorial puede ser de la forma  $v_1 = (nx + cy) \frac{\partial}{\partial x} + my \frac{\partial}{\partial y}$ , con  $c \in \mathbb{C}$ . Vamos a escribir  $\omega$  de la forma

$$\omega = (my + g_1(x) + yg_2(x, y)) dx - (nx + cy + h_2(x, y)) dy,$$

donde  $h_1(x, y) = g_1(x) + yg_2(x, y)$ , con  $\text{ord}_0 g_1(x) = l \geq 2$  y  $\text{ord}_0 g_2(x, y) \geq 1$ . Dado que  $\text{ord}_0 g_1(x) \geq l$ , podemos escribir  $g_1(x) = x^l u(x)$ , donde  $u(0) = a \neq 0$ . Denotamos por  $\alpha_0$  a la parte entera de  $\frac{m}{n}$ . Consideremos el morfismo determinado por  $\pi_l(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \tilde{x}^l \tilde{y})$ , tenemos así

$$\frac{\pi_l^* \omega}{\tilde{x}^l} = \left( (m-ln)\tilde{y} + u(\tilde{x}) + \tilde{x}\tilde{y} \left( \tilde{g}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) - cl\tilde{x}^{l-2} - l\tilde{h}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) \right) d\tilde{x} - (n\tilde{x} + c\tilde{x}^l \tilde{y} + h_2(\tilde{x}, \tilde{x}^l \tilde{y})) d\tilde{y}, \quad (3.21)$$

donde  $\tilde{g}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{g_2(\tilde{x}, \tilde{x}^l \tilde{y})}{\tilde{x}^2}$  y  $\tilde{h}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{h_2(\tilde{x}, \tilde{x}^l \tilde{y})}{\tilde{x}^2}$ . Si  $\tilde{x} = 0$ , entonces el punto  $(0, \tilde{y} = -\frac{a}{m-ln})$  es un punto singular de  $\mathcal{F}$ . Dado que elegimos coordenadas de manera que el eje  $x$  tenga contacto maximal con  $\pi$  el punto que debemos explotar es el punto  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ . Por lo tanto para que esto ocurra se debe cumplir que  $l \geq \alpha_0 + 1$ .  $\square$

**Observación 3.4.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación cuspidal dicrítica. De la definición sabemos que existe un campo de vectores  $v$  que genera a la foliación  $\mathcal{F}$ , cuya parte lineal tiene dos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  distintos de cero, tales que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n}{m}$ . Dado que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{R}_{>0}$  los valores propios son no resonantes<sup>1</sup>. Más aún dichos valores propios pertenecen al *dominio de Poincaré*<sup>2</sup>, y entonces se sigue del teorema de linealización de Poincaré (ver [42]) que  $\mathcal{F}$  es analíticamente equivalente a la foliación  $\mathcal{F}_0$  generada por el campo de vectores  $v_0 = nx \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y}$  o equivalentemente por la 1-forma  $\omega_0 = mydx - nxdy$ .

<sup>1</sup>Una  $n$ -tupla de números complejos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  es *resonante*, si existen enteros no negativos  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que  $|a| = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2$  y la identidad de resonancia ocurre

$$\lambda_j = \langle \lambda, a \rangle, \quad |a| \geq 2$$

donde  $\langle \lambda, a \rangle = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n$ .

<sup>2</sup>El dominio de Poincaré  $\mathfrak{P} \subset \mathbb{C}^n$  es el conjunto de las  $n$ -tuplas  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  tal que la envolvente convexa del conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , no contiene al origen dentro o en la frontera de ésta.

### 3.2.1. Foliaciones dicríticas cuspidales y el invariante de Zariski de una rama

Recordemos que una rama  $\mathcal{C}$  perteneciente a la clase de equisingularidad  $(n, m)$ , se dice que es  $(n, m)$ -cuasihomogénea si es analíticamente equivalente a la rama descrita por la ecuación  $\{y^n - x^m = 0\}$ . Si  $\varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$  entonces  $\varphi$  es  $\mathcal{A}$ -equivalente a la parametrización dada por  $\psi(t) = (t^n, t^m)$ . Vamos a caracterizar las curvas cuasi-homogéneas en términos del orden de tangencia con foliaciones de la familia  $\mathfrak{F}_\pi^{\mathcal{C}}$ .

**Proposición 3.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ . Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones,*

- i)  $\mathcal{C}$  es una rama  $(n, m)$ -cuasihomogénea.
- ii) Existe  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^{\mathcal{C}}$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$ .

*Demostración.* Supongamos que la rama  $\mathcal{C}$  es  $(n, m)$ -cuasihomogénea y sea  $\varphi$  su parametrización. Por el lema 2.1 sabemos que existen  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  gérmenes de biholomorfismo y automorfismo respectivamente, tales que  $\varphi = H \circ \psi \circ \tau^{-1}$ , donde  $\psi(t) = (t^n, t^m)$ . Sea  $\mathcal{F}$  la foliación dada por la ecuación  $\{(H^{-1})^*\omega = 0\}$ , donde  $\omega = mydx - nxdy$ . Vamos a calcular el orden de tangencia en 0 entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{F}$ . Por definición

$$\begin{aligned} \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) &= \text{ord}_0 \varphi^*((H^{-1})^*\omega) = \text{ord}_0(H \circ \psi \circ \tau^{-1})^*(H^{-1})^*\omega = \text{ord}_0(\tau^{-1})^*\psi^*H^*(H^{-1})^*\omega \\ &= \text{ord}_0(\tau^{-1})^*\psi^*(H^{-1} \circ H)^*\omega = \text{ord}_0(\tau^{-1})^*\psi^*\text{Id}^*\omega = \text{ord}_0(\tau^{-1})^*\psi^*\omega = \infty, \end{aligned}$$

pues  $\psi^*\omega = 0$ . Así,  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$ .

Ahora vamos a suponer que existe  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^{\mathcal{C}}$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$ . Así mismo, supongamos que  $\mathcal{F}$  está dada por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$ . Por otro lado, sabemos que  $\mathcal{F}$  es analíticamente equivalente a la foliación  $\mathcal{G}$  dada por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{G}} = 0\}$  donde  $\omega_{\mathcal{G}} = mydx - nxdy$ . Sea  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  el biholomorfismo que realiza dicha equivalencia,  $H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$ , es decir  $H^*\omega_{\mathcal{G}} = \omega_{\mathcal{F}}$ . Dado que  $H_1(x, y) = x + cy + h_1(x, y)$  con  $\text{ord}_0 h_1(x, y) \geq 2$  tenemos que  $H_1 \circ \varphi = t^n u(t)$  con  $u(0) \neq 0$ . Sea  $\rho := H_1(x, y) \circ \varphi$  y sea  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un automorfismo tal que  $\tau^n = \rho$ . Consideremos la parametrización  $\psi := H \circ \varphi \circ \tau^{-1}$ . Por construcción,  $\psi$  es  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\varphi$ . Vamos a calcular

$$\psi^*\omega_{\mathcal{G}} = (H \circ \varphi \circ \tau^{-1})^*\omega_{\mathcal{G}} = (\tau^{-1})^*\varphi^*H^*\omega_{\mathcal{G}} = (\tau^{-1})^*\varphi^*\omega_{\mathcal{F}}.$$

Como  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$ , entonces  $\text{ord}_0 \psi^*\omega_{\mathcal{G}} = \infty$  lo que implica que  $\psi^*\omega_{\mathcal{G}} = 0$ . Entonces, bajo un cambio de parámetro, tenemos que  $\psi(t) = (t^n, t^m)$  es decir,  $\mathcal{C}$  es  $(n, m)$ -cuasihomogénea.  $\square$

Como consecuencia directa de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 3.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ . Si  $\mathcal{C}$  no es  $(n, m)$ -cuasihomogénea, entonces para toda  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^{\mathcal{C}}$ , se tiene que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) < \infty$ .*

**Definición 3.17.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ . Decimos que una foliación dicrítica cuspidal  $\mathcal{F}$  tiene orden de *tangencia maximal* con  $\mathcal{C}$ , si para cualquier otra foliación dicrítica cuspidal  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^{\mathcal{C}}$  se cumple que

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \leq \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}). \quad (3.22)$$

El objetivo en esta sección es demostrar el siguiente resultado

**Teorema 3.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase equisingularidad  $(n, m)$ , tal que  $\mathcal{C}$  no es  $(n, m)$ -cuasihomogénea y sea  $\mathcal{F}$  una foliación cuspidal dicrítica,  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^{\mathcal{C}}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) El orden de tangencia en el origen entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{F}$ ,  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  es maximal;
- ii) el orden de tangencia satisface

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \notin S_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}; \quad (3.23)$$

iii) el valor

$$\lambda = \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \quad (3.24)$$

es el invariante de Zariski de  $\mathcal{C}$ .

Recordemos que en el caso de que la rama  $\mathcal{C}$  no sea  $(n, m)$ -cuasihomogénea,  $\mathcal{C}$  admite una parametrización de la forma

$$\varphi(t) = \left( t^n, t^m + t^\lambda + \sum_{j>\lambda} a_j t^j \right),$$

donde  $\lambda$  es el invariante de Zariski; es decir  $\lambda$  satisface

$$\lambda \notin S_{\mathcal{C}} \text{ y } \lambda + n - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}. \quad (3.25)$$

En el caso de un único par de Puiseux el semigrupo es generado por la pareja  $(n, m)$ :

$$S_{\mathcal{C}} = \{ \alpha n + \beta m : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}.$$

**Observación 3.5.** Dada una rama  $\mathcal{C}$  con una parametrización de la forma  $\varphi(t) = (t^n, t^m + g(t))$  con  $\text{ord}_0 g(t) > m$  y una foliación cuspidal  $\mathcal{F}$  generada por una 1-forma como en el lema 3.3, se tiene que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n > m$  o  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n = ln$ .

El siguiente lema caracteriza la maximalidad del orden de tangencia entre una rama  $\mathcal{C}$  de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  con una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\pi}^{\mathcal{C}}$ .

**Lema 3.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  que no es  $(n, m)$ -cuasihomogénea. Sea  $\mathcal{F}$  una foliación dicrítica cuspidal  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\pi}^{\mathcal{C}}$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  es finito y maximal, entonces se tiene que

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \notin S_{\mathcal{C}} \text{ y } \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}. \quad (3.26)$$

*Demostración.* Supongamos que existe  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\pi}^{\mathcal{C}}$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) < \infty$  y maximal. Sea

$$\omega_{\mathcal{F}} = (my + h_1(x, y))dx - (nx + cy + h_2(x, y))dy,$$

con  $\text{ord}_0 h_i \geq 2$  para  $i = 1, 2$ , un generador de la foliación  $\mathcal{F}$ . Vamos a suponer, por contradicción, que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \in S_{\mathcal{C}}$ . Entonces existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n = \alpha n + \beta m, \quad (3.27)$$

es decir,  $\varphi^* \omega_{\mathcal{F}} = at^{(\alpha+1)n+\beta m-1} + g(t)$ , donde  $\varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$  y  $g(t) \in \mathbb{C}\{t\}$  es tal que  $\text{ord}_0 g(t) > (\alpha+1)n + \beta m - 1$ .

Vamos a considerar el cambio de coordenadas dado por  $H(x, y) = (x, y + kx^{\alpha}y^{\beta}) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ . Afirmamos que existe  $k \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) > \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ , y donde  $\tilde{\mathcal{F}}$  es la foliación descrita por la ecuación  $\{H^* \tilde{\omega}_{\tilde{\mathcal{F}}} = 0\}$ , donde

$$\tilde{\omega}_{\tilde{\mathcal{F}}} = (m\tilde{y} + h_1(\tilde{x}, \tilde{y}))d\tilde{x} - (n\tilde{x} + c\tilde{y} + h_2(\tilde{x}, \tilde{y}))d\tilde{y}.$$

En otras palabras,  $\tilde{\omega}_{\tilde{\mathcal{F}}}$  es la expresión de  $\omega_{\mathcal{F}}$  en las coordenadas  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Vamos a dar la expresión de  $H^* \tilde{\omega}_{\tilde{\mathcal{F}}}$

$$\begin{aligned} H^* \tilde{\omega}_{\tilde{\mathcal{F}}} &= (m(y + kx^{\alpha}y^{\beta}) + h_1(x, y + kx^{\alpha}y^{\beta})) dx \\ &\quad - (nx + c(y + kx^{\alpha}y^{\beta}) + h_2(x, y + kx^{\alpha}y^{\beta})) d(y + kx^{\alpha}y^{\beta}) \\ &= \omega_{\mathcal{F}} + (mk - nk\alpha) x^{\alpha}y^{\beta} dx - nk\beta x^{\alpha+1}y^{\beta-1} dy + (kx^{\alpha}y^{\beta} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \dots) dx \\ &\quad + \left( kx^{\alpha}y^{\beta} \frac{\partial h_2}{\partial y} + \dots \right) dy - (cy + ckx^{\alpha}y^{\beta} + h_2(x, y + kx^{\alpha}y^{\beta})) (k\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}) dx \\ &\quad - (cy + kcx^{\alpha}y^{\beta} + h_2(x, y + kx^{\alpha}y^{\beta})) k\beta x^{\alpha}y^{\beta-1} dy. \end{aligned}$$

Realizando algunos cálculos se tiene que,

$$\varphi^* H^* \tilde{\omega}_{\tilde{\mathcal{F}}} = \left( at^{(\alpha+1)n+\beta m-1} + (mnk - kn^2\alpha - nm\beta k)t^{(\alpha+1)n+\beta m-1} + \dots \right) dt. \quad (3.28)$$

Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que existe  $k \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) > \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ . Entonces, si queremos eliminar el monomio de grado  $(\alpha+1)n + \beta m - 1$  debemos encontrar  $k \in \mathbb{C}^*$  tal que  $a + mnk - kn^2\alpha - nm\beta k = 0$  o, equivalentemente,

$$\frac{a}{n} = k(n\alpha + m(\beta - 1)). \quad (3.29)$$

Esta última ecuación tiene una solución si  $(n\alpha + m(\beta - 1)) \neq 0$ . Entonces tenemos 3 casos

- i) Si  $\beta > 1$ , entonces  $n\alpha + m(\beta - 1) \neq 0$  y en este caso terminamos.
- ii) Si  $\beta = 1$  y  $n\alpha = 0$ , entonces  $\alpha = 0$ . Esto implica que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n = m$ . De la observación 3.5 tenemos que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n > m$  o  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n = ln$  con  $l \leq \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ . El primer caso implica inmediatamente que  $\beta = 1$  y  $\alpha = 0$  no puede suceder. Si  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n = ln$  esto implicaría que  $ln = m$  lo cual es una contradicción pues  $\text{m.c.d}(n, m) = 1$ . Por lo tanto ambos casos implican que  $\beta = 1$  y  $\alpha = 0$  no puede ocurrir.
- iii) Si  $\beta = 0$  y  $n\alpha + m(\beta - 1) = 0$ , entonces  $n\alpha = m$ , pero esto no puede pasar pues  $\text{m.c.d}(n, m) = 1$ . Así si  $\beta = 0$ , entonces  $n\alpha + m(\beta - 1) \neq 0$ .

Por consiguiente, la ecuación (3.29) siempre tiene solución  $k \neq 0$  y por lo tanto tenemos que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) > \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ , pero esto es una contradicción pues  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  es maximal.

De manera similar, si suponemos que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m \in m\mathbb{Z}_{>0}$ , entonces existe  $\tilde{\beta} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m = \tilde{\beta}m,$$

por lo que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = (\tilde{\beta} + 1)m - 1$ . Consideremos el cambio de coordenadas dado por  $H(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + \tilde{k}\tilde{y}^{\tilde{\beta}}, \tilde{y})$  y la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  dada por la ecuación  $H^*\tilde{\omega} = 0$ , donde  $\tilde{\omega}$  es la expresión de  $\omega$  en las coordenadas  $\tilde{x}, \tilde{y}$ . Afirmamos que existe  $\tilde{k} \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) > \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ . Siguiendo los mismos argumentos y cálculos anteriormente desarrollados es posible encontrar  $k \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) > \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ , sin embargo esto es una contradicción a la maximalidad del orden de tangencia por lo que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ .  $\square$

Con los lemas previos estamos en posición de demostrar el teorema 3.7.

*Demostración del teorema 3.7.* Nótese que por el corolario 3.1 para todas las foliaciones cuspidales dicríticas  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^c$  se tiene que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) < \infty$ . Del lema 3.4 se tiene que i) implica ii). Ahora vamos a demostrar que ii) implica iii). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación cuspidal dicrítica  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^c$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n \notin S_{\mathcal{C}}$  y  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ . Sabemos que existe un biholomorfismo  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\omega = H^*\omega_0$ , donde  $\omega_0 = mydx - nxdy$ . Sea  $\psi = H \circ \varphi \circ \tau^{-1}$  donde  $\tau = (H_1 \circ \varphi)$ , es decir,  $\tau$  es una raíz  $n$ -ésima de la serie  $H \circ \varphi(t)$ . Entonces tenemos que

$$\varphi^*\omega = (H^{-1} \circ \psi \circ \tau)^*\omega = \tau^*\psi^*(H^{-1})^*\omega = \tau^*\psi^*\omega_0,$$

o equivalentemente  $\text{ord}_t \varphi^*\omega = \text{ord}_t \tau^*\psi^*\omega_0$ . Esto implica que  $\text{ord}_t \tau^*\psi^*\omega_0 + 1 - n \notin S_{\mathcal{C}}$  y  $\text{ord}_t \tau^*\psi^*\omega_0 + 1 - n + n - m = \text{ord}_t \tau^*\psi^*\omega_0 + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ . Así, salvo por una reparametrización, es posible suponer que  $\psi = (t^n, t^m + t^l + g(t))$ , con  $g(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ , entonces se tiene que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n = l$  no satisface los criterios (3.25) y por lo tanto es el invariante de Zariski.

Ahora vamos a demostrar la implicación iii) hacia i). Sea  $\mathcal{G}$  una foliación cuspidal dicrítica  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^c$ . Sea  $\mathcal{F}_0$  la foliación dada por la ecuación  $\{\omega_0 = 0\}$  donde  $\omega_0 = nxdy - mydx$ . Por hipótesis tenemos que

$\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) + 1 - n$  es el invariante de Zariski de la rama  $\mathcal{C}$ . Sea  $\psi = H \circ \varphi \circ \tau^{-1}$  una parametrización  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\varphi$ , con  $H$  y  $\tau$  como en la demostración de la proposición 3.5. Denotamos por  $\mathcal{C}_0$  la curva cuya parametrización es dada por  $\psi$  se tiene entonces que  $\text{ord}_0 \psi^*(\omega_0) = \text{ord}_0 \varphi^*(\omega)$ . Así  $\text{ord}_0 \psi^*(\omega_0) + 1 - n$  es el invariante de Zariski de  $\mathcal{C}$ . Más aún, dado que  $\mathcal{G}$  es una foliación cuspidal dicrítica,  $\mathcal{G}$  es analíticamente equivalente a  $\mathcal{F}_0$ , entonces existe  $\tilde{H} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  biholomorfismo,  $\tilde{H} = (\tilde{H}_1(x, y), \tilde{H}_2(x, y))$  tal que  $(\tilde{H}^{-1})^* \omega = \omega_0$ . Siguiendo las mismas ideas dadas en la demostración de la proposición 3.5, sea  $\tilde{\tau} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  el automorfismo tal que  $\tilde{\tau}^n = \tilde{H}_1 \circ \varphi$ . Sea  $\tilde{\psi}$  definida por la composición  $\tilde{\psi} := \tilde{H} \circ \varphi \circ \tilde{\tau}^{-1}$ . Nótese que  $\tilde{\psi}$  es una parametrización  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\varphi$  y por consiguiente es  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\psi$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \omega_0 & \xleftarrow{H} & \omega_{\mathcal{F}} \\
 (\mathbb{C}^2, 0) & & (\mathbb{C}^2, 0) \\
 \uparrow \psi & & \uparrow \varphi \\
 (\mathbb{C}, 0) & \xleftarrow{\tau} & (\mathbb{C}, 0)
 \end{array} & & 
 \begin{array}{ccc}
 \omega_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\tilde{H}} & \omega_0 \\
 (\mathbb{C}^2, 0) & & (\mathbb{C}^2, 0) \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \tilde{\psi} \\
 (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & (\mathbb{C}, 0)
 \end{array}
 \end{array}$$

Vamos a calcular  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}}$ ,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \text{ord}_0 (\tilde{H}^{-1} \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\tau})^* \omega_{\mathcal{G}} = \text{ord}_0 \tau^* \tilde{\psi}^* (\tilde{H}^{-1})^* (\omega_{\mathcal{G}}) = \text{ord}_0 \tau^* \tilde{\psi}^* \omega_0 = \text{ord}_0 \tilde{\psi}^* \omega_0.$$

Salvo reparametrización podemos suponer que  $\psi(t) = (t^n, t^m + t^\lambda + g(t))$  y que  $\tilde{\psi}(t) = (t^n, t^m + t^l + \tilde{g}(t))$ , con  $g(t), \tilde{g}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ . Nótese que  $\varphi, \psi$  y  $\tilde{\psi}$  son  $\mathcal{A}$ -equivalentes. Dado que el  $\text{ord}_0 \psi^* \omega_0 + 1 - n = \lambda$  es el invariante de Zariski de  $\mathcal{C}$  entonces  $l = \text{ord}_0 \tilde{\psi}^* \omega_0 + 1 - n \leq \text{ord}_0 \psi^* \omega_0 + 1 - n = \lambda$  pues de lo contrario  $\lambda$  no sería el invariante de Zariski. De manera equivalente se tiene  $\text{ord}_0 \tilde{\psi}^* \omega_0 \leq \text{ord}_0 \psi^* \omega_0$ . Entonces  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \leq \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ . Esto demuestra el teorema 3.7.  $\square$

**Observación 3.6.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama plana de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  y sea  $\varphi$  su parametrización. Podemos recuperar el invariante de Zariski como sigue. Consideramos la foliación cuspidal dicrítica  $\mathcal{F}_0$ , definida por la ecuación  $\{\omega_0 = 0\}$ , donde  $\omega_0 = mydx - nxdy$ . Calculamos  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}_0)$ . Si  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}_0) + 1 - n \notin S_{\mathcal{C}}$  y  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}_0) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ , entonces por el teorema 3.7 terminamos. Si  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}_0) + 1 - n \in S_{\mathcal{C}}$  o  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}_0) + 1 - m \in m\mathbb{Z}_{>0}$  entonces aplicamos uno de los cambios de coordenadas dados en la demostración del lema 3.4 para encontrar una foliación dicrítica cuspidal  $\tilde{\mathcal{F}}$  con  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) > \text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}_0)$ . Ahora verificamos si alguna de las condiciones  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) + 1 - n \in S_{\mathcal{C}}$  o  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) + 1 - m \in m\mathbb{Z}_{>0}$  se satisface. Si alguna de las condiciones se satisface aplicamos el cambio de coordenadas dado en la demostración del lema 3.4. Si por el contrario  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) + 1 - n \notin S_{\mathcal{C}}$  o  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{F}}) + 1 - m \notin m\mathbb{Z}_{>0}$ , entonces el proceso termina. Si el proceso no se detiene, entonces encontraremos  $\mathcal{F}$  tal que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = \infty$ .



## Capítulo 4

# Valoraciones divisoriales y curvas jacobianas de foliaciones holomorfas

### 4.1. Definiciones

El objetivo de este capítulo es presentar una relación entre el orden de tangencia en el origen entre una rama invariante no aislada  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  de una foliación dicrítica pseudo-cuspidal  $\mathcal{F}$ , y una foliación dicrítica cuspidal  $\mathcal{G}$  en términos de una aplicación asociada a la componente dicrítica común para ambas foliaciones. Dicha relación es uno de los resultados principales de esta tesis. Es importante agregar que la presencia de la curva jacobiana entre las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , quedará de manifiesto en dicha relación.

Las singularidades de curvas pueden ser analizadas a través de una sucesión finita de explosiones puntuales como vimos en el capítulo 1, donde demostramos que bajo una sucesión finita de explosiones es posible desingularizar dichas curvas. También es posible estudiar las singularidades mediante el orden de anulación del transformado total a lo largo de las componentes irreducibles del divisor excepcional. Esos órdenes de anulación definen aplicaciones del anillo  $\mathbb{C}\{x, y\}$  en los números enteros, llamadas *valoraciones divisoriales*. Algunos de los resultados que presentamos en este capítulo pueden ser encontrados en [14], [32] y [54].

Comenzamos definiendo el concepto de valoración en general. Más adelante estaremos interesados sólo en el anillo de series de potencias convergentes. Sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad.

**Definición 4.1.** Una *valoración* sobre  $R$  es una aplicación no constante,

$$\nu : R \longrightarrow \Gamma_{\infty} := \Gamma \cup \{\infty\},$$

donde  $\Gamma$  es un grupo abeliano ordenado (donde la suma y el orden con respecto al infinito se satisface como de costumbre), que satisface las siguientes propiedades:

- i)  $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$ , para toda  $f, g \in R$ ,
- ii)  $\nu(f + g) = \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ , para todo  $f, g \in R$ ,
- iii)  $\nu(1) = 0$ ,
- iv)  $\nu(f) = \infty$ , si  $f = 0$ .

**Definición 4.2.** Sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad. Una valoración sobre  $\nu : R \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$  se dice que es una *valoración de Krull* si  $\nu^{-1}(\infty) = \{0\}$

Es posible demostrar que si  $R$  admite una valoración de Krull  $\nu$ , entonces  $R$  es un dominio y es posible extender  $\nu$  al campo de fracciones de  $R$  que denotamos por  $F(R)$ , definiendo  $\nu$  sobre  $F(R)$  como

4.1. Definiciones

$\nu(\frac{f}{g}) = \nu(f) - \nu(g)$ . Sea  $\nu : R \rightarrow \Gamma_\infty$  una valoración. El subgrupo de  $\Gamma$  generado por los valores que toma el anillo, con la excepción del infinito

$$\nu_R := \{\nu(f) : f \in R, \nu(f) \neq \infty\},$$

es llamado el *grupo de valores* de  $\nu$ . Decimos que la valoración es *trivial* si  $\nu_R = \{0\}$ . El conjunto  $\mathfrak{p}_\nu$  definido como

$$\mathfrak{p}_\nu = \{f \in R : \nu(f) = \infty\},$$

es un ideal primo de  $R$ , llamado el *soporte* de  $\nu$ . Dada una valoración  $\nu : R \rightarrow \Gamma_\infty$  sobre  $R$  es posible definir una valoración sobre el anillo cociente

$$\tilde{\nu} : R/\mathfrak{p}_\nu \rightarrow \Gamma_\infty,$$

definida por  $\tilde{\nu}(\bar{f}) := \nu(f)$ , donde  $\bar{f} = f + \mathfrak{p}_\nu$ . El dominio local definido como

$$\mathcal{O}_\nu := \{\bar{f} \in F(R/\mathfrak{p}_\nu) : \bar{\nu}(\bar{f}) \geq 0\},$$

junto con el ideal maximal

$$\mathfrak{m}_\nu := \{\bar{f} \in F(R/\mathfrak{p}_\nu) : \overline{\text{line}}\nu(\bar{f}) > 0\},$$

es llamado el *anillo de valoración* de  $\nu$ .

A continuación damos algunos ejemplos de valoraciones considerando el anillo de series de potencias convergentes  $R = \mathbb{C}\{x, y\}$ .

**Ejemplos 1.** i) Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{C}\{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ f &\longmapsto \nu(f) := \max \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : f \in \mathfrak{m}^k\}. \end{aligned}$$

Esta aplicación define una valoración sobre el anillo de series de potencias convergentes, llamada la *valoración multiplicidad*. Notemos que en el caso en el que  $f$  sea reducida se tiene que  $\nu(f) = m_0(\mathcal{C})$  donde  $\mathcal{C}$  es la curva definida por el lugar de ceros de  $f$ .

ii) Sean  $R = \mathbb{C}\{x, y\}$  y  $\alpha \geq 1$ . Definimos la aplicación  $\nu_{y, \alpha}$  para  $x$  e  $y$  de la siguiente manera  $\nu_{y, \alpha}(x) = 1$ ,  $\nu_{y, \alpha}(y) = \alpha$ . Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \nu_{y, \alpha} : \mathbb{C}\{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ f &\longmapsto \nu_{y, \alpha}(f) := \min \{i + \alpha j : a_{ij} \neq 0\}, \end{aligned}$$

donde  $f = \sum_{i, j} a_{ij} x^i y^j$ . Dicha valoración es conocida como *valoración monomial* en las coordenadas  $(x, y)$ . Notemos que si  $\alpha = 1$ , entonces  $\nu_{y, 1} = \nu_m$ ; es decir para  $\alpha = 1$  recuperamos la valoración multiplicidad.

iii) Cualquier curva irreducible  $\mathcal{C}$  define una valoración sobre el anillo  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , que no es una valoración de Krull. De manera más precisa, sea  $\mathcal{C}$  una curva irreducible y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \nu_{\mathcal{C}} : \mathbb{C}\{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ g &\longmapsto \nu_{\mathcal{C}}(g) := \iota_0(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{D}$  es la curva dada por el lugar de ceros de  $g$ , e  $\iota_0$  representa la multiplicidad de intersección en el origen entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ .

## 4.2. Valoraciones divisoriales

Vamos a introducir ahora el concepto de valoración divisorial para el anillo de series de potencias convergentes  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

**Definición 4.3.** Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones puntuales. Denotamos al divisor excepcional por  $D = \pi^{-1}(0)$ . Sea  $E$  una componente irreducible de  $D$  y sea  $\{g = 0\}$  una ecuación local reducida de  $E$  en un punto  $p \in E$ . La valoración divisorial con respecto a  $E$ , que denotamos por  $\nu_E^\pi$ , es la aplicación dada por

$$\begin{aligned} \nu_E^\pi : \mathbb{C}\{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ h &\longmapsto \nu_E^\pi(h), \end{aligned}$$

donde  $\nu_E^\pi(h) = \max \{k \in \mathbb{N} : g^k | \pi^*(h)\}$ , y la ecuación  $\{g = 0\}$  es una ecuación en un punto  $p \in E$  de la componente  $E$ , es decir,  $E = \{g = 0\}$  y  $\pi^*(h)$  es la función inducida por  $h$  a través de  $\pi$  (pullback de  $h$  por  $\pi$ ).

Las valoraciones divisoriales pueden ser interpretadas como sigue: Si  $E$  es una componente irreducible del divisor y  $h$  una función holomorfa, entonces  $\nu_E^\pi(h)$  es el orden de anulación de  $\pi^*(h)$  en un punto genérico de  $E$ .

**Ejemplo 4.1.** Sea  $h$  una serie de potencias convergente,  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tal que

$$h(x, y) = h_n(x, y) + h_{n+1}(x, y) + h_{n+2}(x, y) + \cdots \quad (4.1)$$

donde  $h_i \in \mathbb{C}[x, y]$  son polinomios homogéneos de grado  $i$  y  $h_n$  es el primer polinomio no idénticamente nulo. Sea  $\pi : (M, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen en  $\mathbb{C}^2$  y  $E_1 = \pi^{-1}(0)$ . Sea  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  una carta local de la explosión del origen. En esta carta tenemos

$$\begin{aligned} \pi^*(h) &= h \circ \pi_1(x_1, y_1) = h_n(x_1, x_1 y_1) + h_{n+1}(x_1, x_1 y_1) + \cdots \\ &= x_1^n (h_n(1, y_1) + x_1 h_{n+1}(1, y_1) + \cdots). \end{aligned}$$

Dado que el divisor excepcional está dado en esta carta coordenada por la ecuación  $\{x_1 = 0\}$ , entonces  $\nu_E^\pi(h) = n$ , que coincide con la multiplicidad en el origen de  $h$ .

**Observación 4.1.** En el ejemplo 4.1, si  $\mathcal{L}$  es una línea a través del origen de  $\mathbb{C}^2$  cuyo transformado estricto por la explosión del origen  $\pi : (M, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  no interseca al transformado estricto de la curva  $\mathcal{H}$  dada por el lugar de ceros de  $h$ , es decir,  $\mathcal{H} = \{h = 0\}$ , entonces tenemos que la multiplicidad de intersección en el origen entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{H}$  es igual a la valoración de  $h$  con respecto a  $E$ , es decir  $\nu_E^\pi(h) = n = \iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ .

La observación 4.1 muestra que la valoración divisorial de una serie de potencias convergente  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  asociada al divisor excepcional que aparece al hacer la explosión del origen puede verse como la multiplicidad de intersección en el origen entre la curva dada por el lugar de ceros de  $h$  y una curva suave  $\mathcal{L}$ . Esto puede ser generalizado como sigue. Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones, donde  $D = \pi^{-1}(0)$  denota al divisor excepcional y sea  $E$  una componente irreducible de  $D$ . Denotamos por  $\mathcal{E}_E^\pi$  al conjunto de ramas equisingulares  $\mathcal{S}$  tales que el transformado estricto de  $\mathcal{S}$  por  $\pi$  es suave e interseca transversalmente a la componente  $E$  en un punto  $p$  que no es un punto esquina. Denotamos por  $\hat{\mathcal{S}}$  al transformado estricto de  $\mathcal{S}$  por  $\pi$ .

**Lema 4.1.** Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones, donde  $D = \pi^{-1}(0)$  denota al divisor excepcional. Sea  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$  donde  $\pi : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es la sucesión de explosiones y  $\sigma : (M, D) \rightarrow (M_1, p_1)$  el resto de la sucesión de explosiones, con  $p_1$  el origen de la primera carta. Tenemos entonces

$$\nu_E^\pi(h) = m_0(h) \nu_{E_1}^\sigma(x_1) + \nu_{E_1}^\sigma(\hat{h}), \quad (4.2)$$

donde  $(x_1, y_1)$  son coordenadas en  $p_1$  y  $\hat{h}$  denota el transformado estricto de  $h$  por  $\pi_1$ .

4.2. Valoraciones divisoriales

*Demostración.* Sea  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  y descomponemos  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$  como en el enunciado del lema. Entonces

$$(\pi \circ \sigma)^*(h) = \sigma^*(\pi^*(h)) = \sigma^*(x_1^{m_0(h)} \hat{h}), \quad (4.3)$$

donde  $\hat{h}$  es el transformado estricto de  $h$  por  $\pi_1$ . Se sigue entonces de la ecuación 4.3 que

$$\nu_E^\pi(h) = \nu_E^\sigma(x_1^{m_0(h)} \hat{h}) = m_0(h) \nu_E^\sigma(x_1) + \nu_E^\sigma(\hat{h}).$$

Quedando demostrado el lema.  $\square$

**Observación 4.2.** Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones, donde  $D = \pi^{-1}(0)$  denota al divisor excepcional y sea  $E$  una componente irreducible de  $D$ . Sea  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$  donde  $\pi : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es la sucesión de explosiones y  $\sigma : (M, D) \rightarrow (M_1, p_1)$  el resto de la sucesión de explosiones, con  $p_1$  el origen de la primera carta. Sean  $\mathcal{E}_E^\sigma$  al conjunto de gérmenes en  $(M_1, p_1)$  de ramas equisingulares  $\mathcal{S}_1$  tales que el transformado estricto de  $\mathcal{S}_1$  por  $\sigma$  es suave e interseca transversalmente a la componente  $E$  en un punto  $p$  que no es un punto esquina. Entonces tenemos que  $\mathcal{E}_E^\sigma$  son los transformados estrictos por  $\pi$  de los gérmenes de ramas planas en  $\mathcal{E}_E^\pi$ . En efecto, sea  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_E^\pi$ , por definición, el transformado estricto por  $\pi$  de  $\mathcal{S}$  es suave e interseca transversalmente a la componente  $E$ . Denotamos por  $\hat{\mathcal{S}}$  al transformado estricto de  $\mathcal{S}$  por  $\pi_1$ . Dado que  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$  entonces el transformado estricto por  $\sigma$  de  $\hat{\mathcal{S}}$  coincide con el transformado estricto de  $\mathcal{S}$  por  $\pi$ , así el transformado estricto de  $\hat{\mathcal{S}}$  por  $\sigma$  es suave e interseca transversalmente a  $E$ .

Tenemos así el siguiente resultado.

**Lema 4.2.** Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones y sea  $E$  una componente irreducible del divisor excepcional  $D = \pi^{-1}(0)$ . Entonces

$$\nu_E^\pi(h) = \min \{ \iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \mathcal{E}_E \}, \quad (4.4)$$

donde  $\mathcal{H}$  es la curva dada por el lugar de ceros de  $h$ .

La demostración del lema puede ser encontrada en [54], sin embargo por completitud presentamos una demostración aquí.

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre el número de explosiones. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$  es un elemento irreducible de  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

Vamos a demostrar el paso base  $n = 1$ . Sea  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen, donde  $E = \pi^{-1}(0)$  y sea  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Escribimos  $h(x, y) = h_n(x, y) + h_{n+1}(x, y) + \dots$ , donde  $h_i \in \mathbb{C}[x, y]$  son polinomios homogéneos de grado  $i$  y  $h_n$  es el primer polinomio no idénticamente nulo. Sea  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  una carta local. En esta carta tenemos

$$\begin{aligned} \pi^*(h) &= h \circ \pi(x_1, y_1) = h_n(x_1, x_1 y_1) + h_{n+1}(x_1, x_1 y_1) + \dots \\ &= x_1^n (h_n(1, y_1) + x_1 h_{n+1}(1, y_1) + \dots). \end{aligned}$$

Entonces,  $\nu_E^\pi(h) = n$ . Más aún, dado que  $h$  es irreducible, el cono tangente de  $h$  es  $h_n(x, y) = c(y + \alpha x)^n$ . Sea  $\mathcal{L}$  una línea a través del origen distinta a la línea  $\{y + \alpha x = 0\}$ . Entonces

$$\iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{L}) = m_0(\mathcal{H})m_0(\mathcal{L}) = n. \quad (4.5)$$

Por otro lado, sabemos que si  $\mathcal{D}$  es una curva plana, entonces

$$\iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{D}) \geq m_0(\mathcal{H})m_0(\mathcal{D}).$$

Dado que  $\mathcal{L}$  es suave e interseca transversalmente a  $E$ , tenemos que

$$\nu_E^\pi(h) = \min \{ \iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{L}) : \mathcal{L} \in \mathcal{E}_E \}.$$

4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

Esto demuestra el paso base de la inducción.

Ahora suponemos que la afirmación es cierta para una sucesión finita de explosiones de tamaño  $n$ . Sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones de tamaño  $n + 1$  y sea  $E$  una componente irreducible del divisor excepcional  $D = \pi^{-1}(0)$ . Es posible descomponer  $\pi$  de la siguiente manera,  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$ , donde  $\pi_1$  es la explosión del origen en  $\mathbb{C}^2$  y  $\sigma$  es el resto de la sucesión de explosiones determinada por  $\pi$ . Sea  $p_1$  el origen de la primer carta y sean  $(x_1, y_1)$  coordenadas en  $p_1$ . Tenemos que  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$ , así

$$\pi^*(h) = (\pi_1 \circ \sigma)^*(h) = \sigma^*(\pi_1^*(h)) = \sigma^*(x_1^{m_0(h)} \hat{h}) = \sigma^*(x_1^{m_0(h)} \sigma^*(\hat{h})), \quad (4.6)$$

donde  $\hat{h}$  representa el transformado estricto de  $h$  por  $\pi_1$ . Por el lema 4.1 tenemos que,

$$\nu_E^\pi(h) = \nu_E^\sigma(x_1^{m_0(h)} \hat{h}) = m_0(h) \nu_E^\sigma(x_1) + \nu_E^\sigma(\hat{h}). \quad (4.7)$$

Dado que el tamaño de la sucesión  $\sigma$  es  $n$ , por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\nu_E^\sigma(\hat{h}) = \min \left\{ \iota_{p_1}(\hat{\mathcal{H}}, \mathcal{S}_1) : \mathcal{S}_1 \in \mathcal{E}_E^\sigma \right\} \quad (4.8)$$

donde  $\hat{\mathcal{H}}$  es el transformado estricto de  $\mathcal{H}$  por  $\pi_1$ . Por la fórmula de M. Noether (ver [22]) sabemos que para cada curva plana  $\mathcal{D}$  tenemos

$$\iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{D}) = m_0(\mathcal{H})m_0(\mathcal{D}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{D}}). \quad (4.9)$$

Vamos a calcular  $\nu_E^\sigma(x_1)$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_E^\sigma(x_1) &= \min \{ \iota_{p_1}(E_1, \mathcal{S}_1) : \mathcal{S}_1 \in \mathcal{E}_E^\sigma \} \\ &= \min \{ \iota_{p_1}(E_1, \hat{\mathcal{S}}) : \mathcal{S} \in \mathcal{E}_E^\pi \} = \min \{ m_0(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \in \mathcal{E}_E^\pi \}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $\hat{\mathcal{S}}$  representa al transformado estricto de  $\mathcal{S}$  por  $\pi_1$ . Más aún, dado que todas las ramas en  $\mathcal{E}_E^\pi$  tienen la misma multiplicidad se tiene  $\nu_E^\sigma(x_1) = m_0(\mathcal{S})$ . Sea  $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{E}_E^\pi$  tal que se cumple  $\iota_{p_1}(E_1, \hat{\mathcal{S}}_0) = \min \{ \iota_{p_1}(E_1, \mathcal{S}_1) | \mathcal{S}_1 \in \mathcal{E}_E^\sigma \}$ , donde  $\hat{\mathcal{S}}_0$  es el transformado estricto de  $\mathcal{S}_0$  por  $\pi$ . De (4.6), (4.7) and (4.8) tenemos

$$\nu_E^\pi(h) = m_0(\mathcal{H})m_0(\mathcal{S}_0) + \iota_p(\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{S}}_0) = \iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{S}_0). \quad (4.11)$$

Esto finalmente implica que  $\nu_E^\pi(h) = \min \{ \iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{S}) : \mathcal{S} \in \mathcal{E}_E^\pi \}$ . El lema queda demostrado.  $\square$

### 4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

El objetivo de esta sección es calcular el orden de tangencia de una rama invariante no aislada  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  de una foliación  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$  y una foliación  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^c$  en términos de la valoración divisorial asociada a la componente dicrítica  $E_d$ .

Sean  $\Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1$  y  $\Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^2$  los módulos de 1-formas y 2-formas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  respectivamente. Vamos a definir aplicaciones de estos módulos en  $\mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  que llamaremos por analogía valoraciones divisoriales pero que en estricto sentido no son una valoración.

**Definición 4.4.** Sea  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones puntuales. Denotamos al divisor excepcional por  $D = \pi^{-1}(0)$ . Sea  $E$  una componente irreducible de  $D$  y sea  $\{g = 0\}$  una ecuación local reducida de  $E$  en un punto  $p \in E$ . La valoración divisorial con respecto a  $E$  sobre  $\Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1$ , que denotamos por  $\nu_E$ , es la aplicación dada por

$$\begin{aligned} \nu_E^\pi : \Omega_{(\mathbb{C}^2, 0)}^1 &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \omega &\longmapsto \nu_E^\pi(\omega), \end{aligned}$$

donde  $\nu_E^\pi(\omega) = \max \{ k \in \mathbb{N} : g^k | \pi^*(\omega) \}$ , y  $\pi^*(\omega)$  es la 1-forma inducida por  $\omega$  a través de  $\pi$ .

4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

La definición para el módulo de 2-formas es análoga.

El objetivo es demostrar el siguiente resultado, que es el resultado principal de esta sección y uno de los resultados relevantes de la tesis.

**Teorema 4.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de  $\mathfrak{F}_\pi$  inducida por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$  y  $\mathcal{G}$  una foliación de  $\mathfrak{F}_\pi^C$ . Sean  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  las ramas invariantes no aisladas de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , respectivamente, y sean  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}$  sus correspondientes transformados estrictos por  $\pi$ . Sea  $p$  el punto de intersección de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  con la componente dicrítica  $E_d$ , donde  $p$  no es un punto esquina, entonces*

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \text{Tan}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}, \mathcal{G}) = \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})), \quad (4.12)$$

donde  $\varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ , y  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  es la curva de tangencias (curva jacobiana o polar) de las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ ,  $\tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  representa el transformado estricto de la curva  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  por  $\pi$  e  $\iota_p$  es la correspondiente multiplicidad de intersección en  $p$ .

Antes de demostrar el resultado principal de esta sección, estudiaremos las curvas jacobianas o polares de foliaciones regulares.

### 4.3.1. Curvas polares de foliaciones regulares

Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  gérmenes de foliaciones holomorfas regulares de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , dadas por las ecuaciones  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$  y  $\{\omega_{\mathcal{G}} = 0\}$  respectivamente. El lugar de tangencias entre las dos foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  es el lugar de ceros del coeficiente de la 2-forma dada por  $\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}$ , dicho lugar de tangencias es conocido como la *curva jacobiana* o *curva polar* entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ . Denotamos por  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  a la curva jacobiana entre ambas foliaciones.

Sea  $\mathcal{L} = \{x = 0\}$ , definimos el valor  $\nu_{\mathcal{L}}$  con respecto a  $\mathcal{L}$  de la siguiente manera: consideramos  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , definimos  $\nu_{\mathcal{L}}(g) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : x^k | g\}$ . De manera análoga podemos definir el valor con respecto a  $\mathcal{L}$  para 1 formas diferenciales holomorfas y 2-formas diferenciales holomorfas.

**Proposición 4.1.** *Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  foliaciones no singulares de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , inducidas por  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$  y  $\{\omega_{\mathcal{G}} = 0\}$ . Vamos a suponer que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son transversales a  $\mathcal{L} = \{x = 0\}$ . Sea  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  la curva invariante de  $\mathcal{F}$  a través del origen,  $0 \in \mathbb{C}^2$ , y sea  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  la curva invariante de  $\mathcal{G}$  a través del origen también. Entonces, para cualquier parametrización  $\varphi$  de  $\mathcal{C}$  la siguiente ecuación se satisface,*

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{\mathcal{L}}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) + \iota_0(\mathcal{C}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})), \quad (4.13)$$

donde  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{p = 0\}$  con  $\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}} = p(x, y)dx \wedge dy$ , y  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{\hat{p} = 0\}$  donde  $\hat{p}$  satisface  $p = x^r \hat{p}$  para  $r = \nu_{\mathcal{L}}(p)$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  foliaciones no singulares intersecando transversalmente a  $\mathcal{L}$ . Entonces existen  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tales que  $\mathcal{F} = \{df = 0\}$  y  $\mathcal{G} = \{dg = 0\}$ . Salvo por un cambio de coordenadas analítico, es posible suponer que  $\mathcal{G} = \{dy = 0\}$  (este cambio de coordenadas no modifica la transversalidad de  $\mathcal{F}$  con  $\mathcal{L}$ ). Escribimos  $f(x, y) = u(x, y)y + h(x)$  donde  $u(0, 0) \neq 0$ . Vamos a calcular  $df \wedge dy$

$$df \wedge dy = \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} y + h'(x) \right) dx + \left( \frac{\partial u}{\partial y} y + u(x, y) \right) dy \right) \wedge dy \quad (4.14)$$

$$= (v(x, y)y + h'(x)) dx \wedge dy = p(x, y)dx \wedge dy, \quad (4.15)$$

donde  $v(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ . Notemos que la única curva invariante de  $\mathcal{F}$  a través de 0 es  $\mathcal{C} = \{f(x, y) = 0\}$ , entonces la parametrización de  $\mathcal{C}$  está dada por  $\varphi(t) = (t, ct^{\text{ord}_0 h(x)} + \dots)$  con  $c \in \mathbb{C}^*$ . Entonces,

$$\varphi^* dy = (c(\text{ord}_0 h(x))t^{\text{ord}_0 h(x)-1} + \dots) dt,$$

y  $\text{ord}_0 \varphi^* dy = \text{ord}_0 h(x) - 1$ . Sea  $r = \nu_{\mathcal{L}}(p)$  y  $\hat{p}(x, y) = \frac{v(x, y)}{x^r} y + \frac{h'(x)}{x^r}$ . Dado que  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  es la curva  $\{y = 0\}$ ; tenemos que

$$\iota_0(\mathcal{C}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \text{ord}_0 h'(x) - r = \text{ord}_0 h(x) - 1 - r.$$

4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

Por lo tanto,

$$\text{ord}_0 \varphi^* dy = \text{ord}_0 h(x) - 1 = r + \iota_0(\mathcal{C}_G, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})). \quad (4.16)$$

Finalmente,

$$\text{ord}_0 \varphi^* dy = \nu_L(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) + \iota_0(\mathcal{C}_G, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

□

Antes de proceder con la demostración del teorema 4.1 requerimos de un lema que será de utilidad en los cálculos que más adelante realizaremos.

**Lema 4.3.** Sean  $\omega_{\mathcal{F}}$  y  $\omega_{\mathcal{G}}$  1-formas que definen las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  respectivamente, y sea  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de  $n$  explosiones. Consideremos la explosión del origen  $\pi_1 : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  y escribimos  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$ . Dada  $E$  una componente irreducible de  $D = \pi^{-1}(0)$ , tenemos

$$\nu_E^\sigma(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) = \nu_E^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) - \rho(E)(\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \delta_{\mathcal{F}}), \quad (4.17)$$

donde

$$\delta_{\mathcal{F}} := \begin{cases} 1, & \text{si } \pi_1 \text{ es dicrítica para } \mathcal{F}, \\ 0, & \text{si } \pi_1 \text{ es no dicrítica para } \mathcal{F}. \end{cases}$$

Para el caso de 2-formas tenemos

$$\nu_E^\sigma(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) = \nu_E^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \rho(E)(\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \delta), \quad (4.18)$$

donde

$$\delta := \begin{cases} 2, & \text{si } \pi_1 \text{ es dicrítica para } \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{G}, \\ 1, & \text{si } \pi_1 \text{ es no dicrítica para } \mathcal{F} \text{ pero no para } \mathcal{G}, \\ 0, & \text{si } \pi_1 \text{ no es dicrítica para } \mathcal{F} \text{ ni para } \mathcal{G}, \end{cases}$$

y en ambos casos  $\rho(E)$  es la multiplicidad en el origen de una curva en  $\mathcal{E}_E^\pi$ , es decir, si  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_E^\pi$ ,  $\mathfrak{m}_0(\mathcal{C}) = \rho(E)$ .

*Demostración.* Consideremos la descomposición de la sucesión  $\pi : (M; D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  como  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$ , con  $\sigma : (M, D) \rightarrow (M_1, p_1)$  y  $\pi_1 : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen. Calculando

$$\pi^* \omega_{\mathcal{F}} = (\pi_1 \circ \sigma)^* \omega_{\mathcal{F}} = \sigma^* \circ \pi_1^* \omega_{\mathcal{F}} = \sigma^*(x_1^{\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \delta_{\mathcal{F}}} \omega_{\mathcal{F}}^{(1)}), \quad (4.19)$$

donde

$$\delta_{\mathcal{F}} := \begin{cases} 1, & \text{si } \pi_1 \text{ es dicrítica para } \mathcal{F}, \\ 0, & \text{si } \pi_1 \text{ es no dicrítica para } \mathcal{F}. \end{cases}$$

De la ecuación 4.19 tenemos que,

$$\nu_E^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) = \nu_E^\sigma(x_1^{\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \delta_{\mathcal{F}}} \omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) = (\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \delta_{\mathcal{F}}) \nu_E^\sigma(x_1) + \nu_E^\sigma(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}). \quad (4.20)$$

Vamos a calcular ahora  $\nu_E^\sigma(x_1)$ . Sabemos que  $\nu_E^\sigma(x_1) = \nu_E^\pi(x)$  y por el lema 4.2 tenemos que  $\nu_E^\pi(x) = \min\{\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \mathcal{E}_E^\pi\}$ , donde  $\mathcal{L} = \{x = 0\}$ . Por la fórmula de Noether tenemos que

$$\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) = \mathfrak{m}_0(\mathcal{L})\mathfrak{m}_0(\mathcal{C}) + \iota_p(\mathcal{L}', \mathcal{C}')$$

donde  $\mathcal{L}', \mathcal{C}'$  son los transformados estrictos de  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{C}$  por  $\pi$ . Dado que el transformado de  $\mathcal{L}$  no pasa por el origen de la primera carta se tiene que

$$\iota_0(\mathcal{L}, \mathcal{C}) = \mathfrak{m}_0(\mathcal{L})\mathfrak{m}_0(\mathcal{C}) = \mathfrak{m}_0(\mathcal{C}).$$

4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

Por lo tanto  $\nu_E^\sigma(x_1) = m_0(\mathcal{C})$ , con lo que el lema queda demostrado en el caso de 1-formas.

Para el caso de 2-formas se tiene

$$\pi^*(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) = (\pi_1 \circ \sigma)^*(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) = \sigma^* \circ \pi_1^*(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) = \sigma^*(x_1^{m_0(\omega_{\mathcal{F}}) + m_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \delta} \omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}), \quad (4.21)$$

donde

$$\delta := \begin{cases} 2, & \text{si } \pi_1 \text{ es dicrítica para } \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{G}, \\ 1, & \text{si } \pi_1 \text{ es no dicrítica para } \mathcal{F} \text{ pero no para } \mathcal{G}, \\ 0, & \text{si } \pi_1 \text{ no es dicrítica para } \mathcal{F} \text{ ni para } \mathcal{G}. \end{cases}$$

De la ecuación 4.21 se sigue que

$$\begin{aligned} \nu_E^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) &= \nu_E^\sigma(x_1^{m_0(\omega_{\mathcal{F}}) + m_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \delta} \omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) \\ &= (m_0(\omega_{\mathcal{F}}) + m_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \delta) \nu_E^\sigma(x_1) + \nu_E^\sigma(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}). \end{aligned}$$

Siguiendo los mismos argumentos previamente mencionados se tiene que  $\nu_E^\pi(x_1) = m_0(\mathcal{C})$ , donde  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_E^\pi$ . Queda demostrado así el lema.  $\square$

Para demostrar el teorema 4.1 procedemos en dos partes, demostraremos primero el caso  $(n, n+1)$  y posteriormente el caso general. Vamos a considerar  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión de explosiones descrita por el algoritmo de Euclides por el par  $(n, n+1)$ . A continuación demostraremos el teorema 4.1 para este caso.

El siguiente lema será de gran ayuda en la demostración del teorema 4.1 para la clase de equisingularidad  $(n, n+1)$ .

**Lema 4.4.** *Sea  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones de tamaño  $n$ , donde cada centro de explosión  $p_i \in M_i$  para  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  es el origen de la segunda carta coordenada  $\pi_{i+1} : (M_{i+1}, \pi_{i+1}^{-1}(0)) \rightarrow (M_i, \pi_i^{-1}(p_i))$ . Denotamos por  $E_n$  a la última componente irreducible de  $\pi^{-1}(0)$ . Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular holomorfa tal que  $\mathcal{F}$  no tiene singularidades de tipo silla-nodo y la componente  $E_n$  es la única componente dicrítica (sin puntos de tangencia o puntos singulares) para el transformado estricto de  $\mathcal{F}$  por  $\pi$ . Sea  $\mathcal{G}$  una foliación singular generada por el campo vectorial  $v$  tal que la parte lineal del campo  $v$  tiene como valores propios  $\lambda_1 = n$  y  $\lambda_2 = 1$  y la componente  $E_n$  es la única componente dicrítica para  $\mathcal{G}$ . Sean  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  ramas invariantes no aisladas de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , cuyos transformados estrictos por  $\pi_n$  que denotamos por  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}$  pasan por el mismo punto  $p \in E_n$ , donde  $E_n$  es la componente dicrítica, entonces*

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}, \mathcal{C}_{\mathcal{G}}) = \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_n}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_n}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})), \quad (4.22)$$

donde  $\varphi$  es una parametrización de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  es el transformado estricto por  $\pi$  de la curva jacobiana entre las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , e  $\iota_p$  denota la multiplicidad de intersección en el punto  $p$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre  $n$ . Demostramos el caso base  $n = 1$ . En este caso  $\pi : (M, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es la explosión del origen. Nótese que la foliación  $\pi^* \mathcal{F}$  no tiene puntos singulares o puntos de tangencia sobre  $\pi^{-1}(0) = E_1$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es generado por  $\omega_{\mathcal{F}} = (y + \dots) dx - (x + \dots) dy$ , donde los puntos suspensivos representan términos de orden mayor o igual a 2. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que  $\mathcal{G}$  es generada por  $\omega_{\mathcal{G}} = y dx - x dy$ . Por la proposición 3.4 para el caso en el que la componente  $E_1$  es dicrítica tenemos que,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = m_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})(m_0(\omega_{\mathcal{G}}) + 1) + \text{ord}_p(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}, \quad (4.23)$$

donde  $\varphi^{(1)}$  es la parametrización del transformado estricto por  $\pi_1$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y  $\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}$  es un generador del transformado estricto de la foliación  $\pi^* \mathcal{G}$  en el punto  $p$ . Por la proposición 4.1 tenemos,

$$\text{ord}_p(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)} = \nu_{E_1}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})), \quad (4.24)$$

donde  $\mathcal{J}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}) = \{p = 0\}$  con  $\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)} = p(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)d\tilde{x}_1 \wedge d\tilde{y}_1$  y  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}) = \{\hat{p} = 0\}$  donde  $p(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \tilde{y}_1^k \hat{p}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$  con  $k$  el entero positivo más grande posible y  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}$  es el transformado estricto por  $\pi$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ . Tenemos del lema 4.3 que,

$$\nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) = \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - (\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + 1) - (\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + 1). \quad (4.25)$$

Se sigue entonces de las ecuaciones (4.23), (4.24), (4.25), del lema 4.3 y que  $\mathfrak{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) = 1$ , que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} &= \mathfrak{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})(\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + 1) + \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &= \mathfrak{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})(\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + 1) + \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - (\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + 1) - (\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + 1) \\ &\quad + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &= \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - (\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + 1) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &= \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})). \end{aligned}$$

Dado que el transformado estricto de la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  por  $\pi_1$  pasando por  $p$  es igual a la curva  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  pasando por el punto  $p$  se tiene que

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_1}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$$

Esto demuestra la afirmación para el caso  $n = 1$ .

Vamos a suponer que el resultado es cierto para  $n$  y vamos a demostrar para  $n + 1$ . Es posible descomponer la sucesión de explosiones  $\pi_n = \pi_1 \circ \sigma$ , donde  $\pi_1$  es la explosión del origen. Sea  $\mathcal{F}$  generada por  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$  y sea  $\mathcal{G}$  generado por  $\{\omega_{\mathcal{G}} = 0\}$  y  $\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}$  y  $\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}$  son los transformados estrictos de  $\omega_{\mathcal{F}}$  y  $\omega_{\mathcal{G}}$  por  $\pi_1$ . Por la proposición 3.4 tenemos,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \mathfrak{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})\mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \text{ord}_{p_1}(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}. \quad (4.26)$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\text{ord}_0(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)} = \nu_{E_n}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) - \nu_{E_n}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})), \quad (4.27)$$

donde  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  son los transformados estrictos de  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}^{(1)}$  y  $\mathcal{J}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  por  $\sigma$ . Del lema 4.3 se sigue que,

$$\nu_{E_n}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) = \mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}})\nu_{E_n}^{\sigma}(\tilde{y}_1) + \mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}})\nu_{E_n}^{\sigma}(\tilde{y}_1) + \nu_{E_n}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}), \quad (4.28)$$

donde  $\{\tilde{y}_1 = 0\}$  es una ecuación del divisor. De las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.28), se sigue que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} &= \nu_{E_n}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_n}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) - \mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}})\nu_{E_n}^{\sigma}(\tilde{y}_1) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &\quad (\mathfrak{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - \mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}))\nu_{E_n}^{\sigma}(\tilde{y}_1) \end{aligned}$$

Dado que  $\mathfrak{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) = 1$ , tenemos que

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_n}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \mathfrak{m}_0(\omega_{\mathcal{F}})\nu_{E_n}^{\sigma}(\tilde{y}_1) - \nu_{E_n}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}))$$

Dado que los transformados estrictos de  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  y  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  por  $\pi$  pasando por el punto  $p$  coinciden con las curvas  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  pasando por  $p$ , se tiene entonces

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_n}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_n}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Quedando demostrado el lema.  $\square$

4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

*Demostración del teorema 4.1 para el caso  $m = n + 1$ .* Sea  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la sucesión de explosiones descrita por el algoritmo de Euclides del par  $(n, n + 1)$ . Sean  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  como en el teorema 4.1 y sea  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  una rama invariante no aislada de  $\mathcal{F}$  y  $\varphi$  su respectiva parametrización. Escribiendo a la sucesión de explosiones  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$  donde  $\pi_1$  es la explosión del origen y  $\sigma$  es resto de sucesiones de explosiones. Por la proposición 3.4 tenemos que,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = m_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) m_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \text{ord}_t(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}, \quad (4.29)$$

donde  $\varphi^{(1)}$  es la parametrización del transformado por  $\pi_1$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y  $\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}$  es un generador de la foliación  $\pi_1^* \mathcal{G}$ . Por el lema 4.4, aplicado a los gérmenes de foliación  $\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}$  y  $\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}$  tenemos que,

$$\text{ord}_0(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)} = \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})). \quad (4.30)$$

Del lema 4.3 tenemos,

$$\nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) = \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) m_0(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) m_0(\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) \quad (4.31)$$

De las ecuaciones (4.29), (4.30) y (4.31) se sigue que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} &= \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) m_0(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &\quad - m_0(\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) (m_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1)) \end{aligned}$$

Del lema 4.2 sabemos que  $\nu_{E_d}(h) = \min \{\iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{E}_{E_d}\}$ , donde  $\mathcal{H} = \{h = 0\}$ . Dado que estamos mirando la explosión en la carta  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  entonces,  $\nu_{E_d}(x) = \nu_{E_d}(x_1)$  por lo que necesitamos calcular  $\nu_{E_d}(x) = \min \{\iota_0(\{x = 0\}, \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{E}_{E_d}\}$ . Como cada rama  $\mathcal{C}$  de la clase de equisingularidad  $(n, n + 1)$  admite una parametrización de la forma  $\varphi(t) = (t^n, t^{n+1} + \sum_{j>n+2} a_j t^j)$ , entonces

$$\iota_0(\{x = 0\}, \mathcal{C}) = \text{ord}_0 \varphi^*(x) = \text{ord}_t t^n = n = m_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}).$$

Esto implica que,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})).$$

Dado que los transformados estrictos de  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  y  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  por  $\pi$  pasando por  $p$  son iguales a las curvas  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  pasando por  $p$  se tiene que,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\pi}(\mathcal{F}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Esto termina la demostración para el caso  $m = n + 1$ . □

Procedemos ahora con la demostración del teorema 4.1 en el caso general.

*Demostración.* [Demostración del teorema 4.1] Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $1 < n < m$  y  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ . La demostración es por inducción sobre el número  $n + m$ . Así, el caso base es cuando  $(n, m) = (2, 3)$ ,  $n + m = 5$ . Este caso se sigue de la demostración para el caso  $(n, n + 1)$  cuando  $n = 2$ . Sean  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\pi}$  y  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_{\pi}^c$  y sean  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  las ramas invariantes no aisladas de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  respectivamente. Sea  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ .

Vamos a suponer que el resultado es cierto para todos los pares  $(n', m')$ ,  $1 < n' < m'$  y  $\text{m.c.d.}(n', m') = 1$  con  $n' + m' < n + m$  y también suponemos que  $m \neq n + 1$ . Sean  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\pi}$  y  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_{\pi}^c$ . Sea  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  una rama invariante no aislada de  $\mathcal{F}$ . Sea  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  y la foliación  $\mathcal{G}$  inducida por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{G}} = 0\}$ . De nuevo, la sucesión  $\pi$  puede descomponerse como  $\pi = \pi_1 \circ \sigma$  donde  $\pi_1$  es la explosión del origen. Entonces, por la proposición 3.4,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = m_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) m_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \text{ord}_{p_1}(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}, \quad (4.32)$$

4.3. Valoraciones divisoriales y el orden de tangencia

donde  $\omega_{\mathcal{G}}^{(1)}$  es un generador en el  $p_1$  del transformado estricto de la foliación  $\pi_1^*\mathcal{G}$ . Esta foliación tiene una única componente dicrítica que aparece después de realizar la sucesión de explosiones descrita por el par  $(n, m - n)$ . Dado que  $m - n > 1$ , por la hipótesis de inducción tenemos,

$$\begin{aligned} \text{ord}_t \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} &= \text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \text{ord}_t(\varphi^{(1)})^* \omega_{\mathcal{G}}^{(1)} \\ &= \text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})), \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  son los transformados estrictos de la curva  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}^{(1)}$  y la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$  por  $\sigma$ . Se sigue del lema 4.3 que,

$$\nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) = (\text{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}})) \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) + \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\mathcal{G}}^{(1)}) \quad (4.34)$$

Sustituyendo (4.34) en (4.33) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} &= \text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - (\text{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) + \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}})) \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) - \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &= (\text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1)) \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \text{m}_0(\omega_{\mathcal{F}}) \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) - \nu_{E_d}^{\sigma}(\omega_{\mathcal{F}}^{(1)}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})) \\ &= (\text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - \nu_{E_d}^{\sigma}(x_1)) \text{m}_0(\omega_{\mathcal{G}}) + \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})). \end{aligned}$$

Del lema 4.2 sabemos que  $\nu_{E_d}(h) = \min \{ \iota_0(\mathcal{H}, \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{E}_{E_d} \}$ , donde  $\mathcal{H} = \{h = 0\}$ . Dado que la explosión del origen es descrita por  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$  en el origen de la primera carta; entonces  $\nu_{E_d}(x) = \nu_{E_d}(x_1)$ . Por consiguiente, necesitamos calcular  $\nu_{E_d}(x) = \min \{ \iota_0(\{x = 0\}, \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{E}_{E_d} \}$ . Dado que cada rama  $\mathcal{C}$  de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  admite una parametrización de la forma

$$\varphi(t) = (t^n, t^m + \sum_{j>m} a_j t^j),$$

entonces

$$\iota_0(\{x = 0\}, \mathcal{C}) = \text{ord}_0 \varphi^* x = \text{ord}_0 t^n = n = \text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}).$$

Esto implica que  $\nu_{E_d}^{\sigma}(x_1) = \text{m}_0(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})$  entonces,

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})).$$

Dado que los transformados estrictos de las curvas  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$  y  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  por  $\pi$  pasando por el punto  $p$  coinciden con las curvas  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}^{(1)}$ ,  $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$ , entonces tenemos

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^{\pi}(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Esto finaliza la demostración del teorema.



# Capítulo 5

## Transversalidad polar

### 5.1. Transversalidad polar con la familia $\mathfrak{F}_\pi^C$

En este capítulo presentamos otros resultados principales de la tesis. Nuestro objetivo es el estudio del invariante de Zariski para las separatrices no aisladas de las foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales. Para ello en este capítulo introducimos la subfamilia de foliaciones pseudo-cuspidales dicríticas que tienen transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ . Mostramos que para cualquier elemento  $\mathcal{F}$  de esta subfamilia, se tiene que el invariante de Zariski de sus separatrices no aisladas coincide. Para introducir la noción de transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$  usamos el hecho de que el transformado estricto de la curva jacobiana entre una foliación en  $\mathfrak{F}_\pi$  y toda foliación en  $\mathfrak{F}_\pi^C$  no interseca transversalmente a la componente dicrítica  $E_d$ .

**Definición 5.1.** (Transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ ) Decimos que una foliación pseudo-cuspidal dicrítica  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$  tiene *transversalidad polar* con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$  si y sólo si para toda  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  el transformado estricto de la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  no interseca a la componente dicrítica  $E_d$ .

Denotaremos por  $\mathfrak{F}_\pi^*$  a la familia de foliaciones con transversalidad polar con respecto a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ . Como mencionamos en la introducción, el objetivo es estudiar las separatrices no aisladas de foliaciones en  $\mathfrak{F}_\pi$ . El siguiente teorema que es el resultado principal de este capítulo, nos dice que los elementos de  $\mathfrak{F}_\pi^*$  son foliaciones cuyas separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski.

**Teorema 5.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación con transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ , entonces todas las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}$  tienen el mismo invariante de Zariski.*

**Observación 5.1.** Nótese que si  $\mathcal{F}$  es una foliación cuspidal entonces todas sus separatrices no aisladas son  $(n, m)$ -cuasihomogéneas.

*Demostración.* Sean  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi^*$  que no es cuspidal,  $\mathcal{C}_\mathcal{F}$  una separatriz no aislada de  $\mathcal{F}$  y  $\varphi$  una parametrización  $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ . Si existe  $\mathcal{G}$  tal que  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_\mathcal{G} = \infty$ , entonces por el teorema 4.1

$$\infty = \text{ord}_0 \varphi^* \omega_\mathcal{G} = \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_\mathcal{G}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F}). \quad (5.1)$$

Dado que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F}) < \infty$  tenemos que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_\mathcal{G}) = \infty$ , y esto sucede si y sólo si  $\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_\mathcal{G} \equiv 0$ , pero esta última igualdad implica que  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ . Esto es una contradicción dado que supusimos que  $\mathcal{F}$  no es cuspidal. Tenemos entonces que para todo  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ ,  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_\mathcal{G} < \infty$ . Consideramos una foliación dicrítica cuspidal  $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  tal que  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}$  es maximal. Por el teorema 4.1

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} = \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F}). \quad (5.2)$$

Dado que  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}$  es maximal

$$\nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_\mathcal{G}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F}) = \text{ord}_0 \varphi^* \omega_\mathcal{G} \leq \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} = \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_\mathcal{F}),$$

para todo  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ . Entonces

$$\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) \leq \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) \text{ para toda } \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C. \quad (5.3)$$

Esto implica que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}})$  es maximal. Más aún, sabemos por el teorema 3.7, que el invariante de Zariski de la rama  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  es

$$\lambda = \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} + 1 - n. \quad (5.4)$$

Si  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$  es otra separatriz no aislada y  $\tilde{\varphi}$  es su parametrización, entonces por el teorema 4.1,

$$\text{ord}_0 \tilde{\varphi}^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} = \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}). \quad (5.5)$$

Este valor es maximal en virtud de la desigualdad (5.3) entonces,

$$\text{ord}_0 \tilde{\varphi}^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} + 1 - n = \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + 1 - n \quad (5.6)$$

es el invariante de Zariski  $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$ . Este invariante coincide precisamente con el invariante de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ . Por consiguiente, hemos demostrado que todas las separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski. Con esto finalizamos la demostración del teorema 5.1.  $\square$

**Ejemplo 5.1.** Consideremos la foliación  $\mathcal{F}$  generada por

$$\omega_{\mathcal{F}} = (8y^3 + 5x^3y^2 + 2x^6y) dx - (3xy^2 + 2x^4y + x^7) dy.$$

Las separatrices no aisladas de la foliación son las curvas dadas por  $\mathcal{C}_k = \{y^3 - kx^8 + x^3y^2 + x^6y = 0\}$ , con  $k \in \mathbb{C}^*$ . Estas curvas pertenecen a la clase de equisingularidad (3, 8). Consideremos ahora la foliación  $\mathcal{G}_0$  dada por  $\omega_{\mathcal{G}_0} = 8ydx - 3xdy$  y calculemos

$$\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_0} = (x^4y^2 + 2x^7y) dx \wedge dy.$$

Nótese que la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0) = \mathcal{J}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0) \cup \mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0) \cup \mathcal{J}_3(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)$  donde las curvas  $\mathcal{J}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0) = \{x = 0\}$ ,  $\mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0) = \{y = 0\}$  y  $\mathcal{J}_3(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0) = \{y + x^3 = 0\}$ . Más aún el transformado estricto por  $\pi$  de estas curvas no interseca a la componente dicrítica.

Después de algunos cálculos tenemos que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_0}) = 38$  y  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) = 27$ . Sea  $\mathcal{C}_k$  con  $k$  fijo una separatriz no aislada de  $\mathcal{F}$ . Por la fórmula del teorema 4.1 tenemos,

$$\begin{aligned} \text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_0) &= \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_0}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_k, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)) \\ &= 38 - 27 = 11. \end{aligned}$$

Nótese que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_0) + 1 - 3 = 9 \in S_C$ , y por lo tanto 11 no es el invariante de Zariski.

Consideremos ahora la foliación  $\mathcal{G}_\alpha$ , dada por  $\omega_{\mathcal{G}_\alpha} = (8y - \alpha x^3) dx - 3xdy$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Calculando

$$\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_\alpha} = ((1 - 3\alpha)x^4y^2 + (2 - 2\alpha)x^7y - \alpha x^{10}) dx \wedge dy$$

Después de algunos cálculos tenemos, que si  $1 - 3\alpha \neq 0$  entonces  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_\alpha}) = 38$ .

Por otro lado si  $\alpha_0 = \frac{1}{3}$ , entonces  $1 - 3\alpha_0 = 0$  y se tiene,

$$\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_{\alpha_0}} = \left( \frac{4}{3}x^7y - \frac{1}{3}x^{10} \right) dx \wedge dy.$$

Nótese que la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha_0}) = \mathcal{J}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha_0}) \cup \mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha_0})$  donde  $\mathcal{J}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha_0}) = \{x = 0\}$  y  $\mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha_0}) = \{\frac{4}{3}y - \frac{1}{3}x^3 = 0\}$ . Más aún el transformado estricto de la curva jacobiana no interseca la componente dicrítica. Después de algunos cálculos tenemos que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_{\alpha_0}}) = 39$ . Sea  $\mathcal{C}_k$  con  $k$  fijo una separatriz no aislada de  $\mathcal{F}$ . Por la fórmula dada en el teorema 4.1 tenemos,

$$\begin{aligned} \text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_{\alpha_0}) &= \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_{\alpha_0}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}_{\alpha_0}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)) \\ &= 39 - 27 = 12. \end{aligned}$$

Dado que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_{\alpha_0}) + 1 - 3 = 12 + 1 - 3 = 10 \notin S_C$  y  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_{\alpha_0}) + 1 - 3 + 3 - 8 = 5 \notin 8\mathbb{Z}_{>0}$  se sigue del teorema 3.7 que 10 es el invariante de Zariski.

## 5.2. Degeneraciones de la familia $\mathfrak{F}_\pi$ y curvas jacobianas

Es importante hacer notar que el teorema 5.1 muestra que si  $\mathcal{F}$  pertenece a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$  todas las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}$  tienen el mismo invariante de Zariski, sin embargo el invariante de Zariski no caracteriza a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$ . El siguiente ejemplo muestra la existencia de una foliación cuyas separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski pero dicha foliación no pertenece a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$ . Es un trabajo a futuro dar una descripción de un conjunto de invariantes que caracterice a las foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales que tienen la propiedad de transversalidad polar con la familia  $\mathfrak{F}_\pi^C$ .

**Ejemplo 5.2.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación inducida por  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$  donde

$$\omega_{\mathcal{F}} = (x^6y - 7y^6)dx + (6y^5x - x^7)dy.$$

Las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}$  están dadas por  $\mathcal{C}_k = \{y^6 - kx^7 - x^6y = 0\}$  para  $k \in \mathbb{C}^*$ . Para cada  $k \in \mathbb{C}^*$  la rama  $\mathcal{C}_k$  pertenece a la clase de equisingularidad (6, 7). Después de algunos cálculos podemos verificar que el invariante de Zariski de la  $\mathcal{C}_k$  es 9 para toda  $k \in \mathbb{C}^*$ . La foliación  $\mathcal{F}$  pertenece a la familia  $\mathfrak{F}_\pi$ , sin embargo no pertenece a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$ . Vamos a considerar la foliación  $\mathcal{G}_\alpha$  inducida por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{G}_\alpha} = 0\}$ , donde  $\omega_{\mathcal{G}_\alpha} = 7ydx - (6x + \alpha y)dy$  con  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_\alpha} &= ((x^6y - 7y^6)dx + (6y^5x - x^7)dy) \wedge (7ydx - (6x + \alpha y)dy) \\ &= -(x^6y - 7y^6)(6x + \alpha y) - (6y^5x - x^7)7y \, dx \wedge dy \\ &= [7\alpha y^7 + x^7y - \alpha x^6y^2] \, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Notemos que la curva jacobiana tiene dos ramas  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{J}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_\alpha) \cup \mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_\alpha)$ , donde  $\mathcal{J}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_\alpha) = \{y = 0\}$  y  $\mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_\alpha) = \{7\alpha y^6 + x^7 - \alpha x^6y = 0\}$ . El transformado estricto de  $\mathcal{J}_2(\mathcal{F}, \mathcal{G}_\alpha)$  por  $\pi$  interseca a la componente  $E_d$  en un punto no esquina. Por esta razón,  $\mathcal{F}$  no pertenece a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$ .

Vamos a calcular el invariante de Zariski para cada separatriz no aislada de la foliación  $\mathcal{F}$  en términos de la fórmula dada en el teorema 4.1. Sea  $\mathcal{C}_k$  una separatriz no aislada de  $\mathcal{F}$ . Para cada  $k$  fija existe  $\alpha(k)$  tal que el transformado estricto de la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha(k)})$  por  $\pi$ , pasa por el mismo punto  $p \in E_d$  que el transformado estricto de la separatriz  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}_{\alpha(k)}}$ . Después de algunos cálculos tenemos

$$\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_{\alpha(k)}) = \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_{\alpha(k)}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}_{\alpha(k)}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_{\alpha(k)})) \quad (5.7)$$

$$= 61 - 48 + 1 = 14. \quad (5.8)$$

Se tiene así que  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_{\alpha(k)}) + 1 - 6 = 14 + 1 - 6 = 9$  y  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_{\alpha(k)}) + 1 - 7 = 14 + 1 - 7 = 8$ , dado que  $9 \notin S_{\mathcal{C}}$  y  $8 \notin 7\mathbb{Z}_{>0}$  se sigue del teorema 3.7 que 9 es el invariante de Zariski.

**Ejemplo 5.3.** Consideremos la foliación  $\mathcal{F}$  generada por

$$\omega_{\mathcal{F}} = (y^5 + 2x^9y - 2x^9y^2 - 9x^2y^4)dx + (4y^3x^3 - x^{10} + 2x^{10}y - 3xy^4 - x^8y^2)dy.$$

Las curvas invariantes de la foliación son  $\mathcal{C}_k = \{y^4 - kx^9 + (k-1)x^7y + x^7y^2 = 0\}$ ,  $k \in \mathbb{C}^*$ . Para todo  $k \in \mathbb{C}^*$  con excepción de  $k = 1$  las separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski. Consideremos ahora la foliación  $\mathcal{G}_0$  dada por  $\omega_0 = 9ydx - 4xdy$ , calculando

$$\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_0} = -xy(y^4 - x^9 + 10x^9y - 9x^7y^2) \, dx \wedge dy.$$

Después de algunos cálculos tenemos que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_0) = 61$  y  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) = 48$ . Nótese que la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)$  es la unión de las curvas  $\mathcal{J}_1 = \{x = 0\}$ ,  $\mathcal{J}_2 = \{y = 0\}$  y  $\mathcal{J}_3 = \{y^4 - x^9 + 10x^9y - 9x^7y^2 = 0\}$ . Además el transformado estricto de la curva  $\mathcal{J}_3$  por  $\pi$  si interseca la componente dicrítica. Vamos a calcular el invariante de Zariski usando la fórmula del teorema 4.1. Sea  $\mathcal{C}_k$  con  $k \neq 1$  fijo entonces por la fórmula del teorema 4.1 tenemos,

$$\begin{aligned} \text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_0) &= \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_0}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}_0}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)) \\ &= 61 - 48 = 13. \end{aligned}$$

Así  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_0) + 1 - 4 = 10 \notin S_C$  y  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_k, \mathcal{G}_0) + 1 - 4 + 4 - 9 = 14 - 9 = 5 \notin 9\mathbb{Z}_{>0}$ . Por lo tanto 10 es el invariante de Zariski.

Para  $k = 1$ , después de algunos cálculos tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tan}_0(\mathcal{C}_1, \mathcal{G}_0) &= \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}_0}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}_0}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)) \\ &= 61 - 48 + 9 = 22. \end{aligned}$$

Así  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_1, \mathcal{G}_0) + 1 - 4 = 23 - 4 = 19 \notin S_C$  y además  $\text{Tan}_0(\mathcal{C}_1, \mathcal{G}_0) + 1 - 4 + 4 - 9 = 23 - 9 = 14 \notin 9\mathbb{Z}_{>0}$ . Por lo tanto para la separatriz  $\mathcal{C}_1$  el invariante de Zariski es 19.

El siguiente resultado da una condición que asegura cuándo todas las separatrices no aisladas son cuasihomogéneas.

**Proposición 5.1.** *Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$  la foliación inducida por  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$ . Si existe  $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  tal que*

$$\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) \geq m(n-1), \quad (5.9)$$

entonces todas las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}$  son  $(n, m)$ -cuasihomogéneas.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  una separatriz no aislada de la foliación  $\mathcal{F}$  y sea  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ . Por el teorema 4.1

$$\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\mathcal{G}} = \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\mathcal{G}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})), \quad (5.10)$$

para cualquier  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ . Dado que por hipótesis existe  $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  tal que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) \geq m(n-1)$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} &= \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathcal{G}}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}})) \\ &\geq m(n-1) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathcal{G}}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}})) \geq m(n-1). \end{aligned}$$

Esto implica que  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} + 1 - n \geq m(n-1) + 1 - n = (m-1)(n-1)$ . Dado que el conductor del semigrupo  $S_C$  de la rama es  $c = (m-1)(n-1)$ , entonces  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  es analíticamente equivalente a la rama cuasihomogénea. El mismo argumento funciona para cualquier otra separatriz no aislada.  $\square$

En la sección 5.3 vamos a dar un resultado más refinado de esta proposición

### 5.3. Foliaciones con transversalidad polar a la familia $\mathfrak{F}_\pi^C$

En la presente subsección vamos a demostrar que la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$  no es vacía y más aún exhibimos una familia de foliaciones pseudo-cuspidales con la propiedad de transversalidad polar. Vamos a recordar algunos de los resultados presentados al final del capítulo 2.

Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $1 < n < m$  con  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ , consideramos

$$\text{ZI} := \{s \in \mathbb{Z}_{\geq} : s + n \notin \langle n, m \rangle \text{ y } s + m \notin \langle n, m \rangle\}, \quad (5.11)$$

donde  $\langle n, m \rangle = \{ni + mj : i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ . Consideremos ahora el conjunto,

$$\text{PZ} := \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : 0 \leq i \leq m-2, 0 \leq j \leq n-2 \text{ y } ni + mj > nm\}. \quad (5.12)$$

Recordemos que el conjunto ZI está en biyección con el conjunto de los invariantes de Zariski de la clase de equisingularidad  $(n, m)$ . El siguiente lema es demostrado en [50] y da una relación entre los conjuntos ZI y PZ.

**Lema 2.4.** *Hay una biyección entre los conjuntos PZ y ZI.*

La biyección entre estos dos conjuntos está dada por

$$\begin{array}{ccc} \text{PZ} & \longrightarrow & \text{ZI} \\ (p, q) & \mapsto & \lambda = np + mq - nm + m \end{array}$$

En el mismo artículo es demostrado el siguiente resultado ([50],[60])

**Teorema 2.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama que pertenece a la clase de equisingularidad  $(n, m)$  y que no es  $(n, m)$ -cuasihomogénea, y sea  $\lambda$  su invariante de Zariski. Entonces, después de un cambio de coordenadas analítico,  $\mathcal{C}$  admite una ecuación de la siguiente forma*

$$\left\{ y^n - x^m + x^p y^q + \sum_{\substack{(i,j) \in \text{PZ} \\ ni+mj > np+mq}} a_{ij} x^i y^j = 0 \right\}, \quad (5.13)$$

donde  $(p, q) \in \text{PZ}$  es el punto asociado a  $\lambda$  por medio de la biyección entre PZ y ZI.

Haciendo uso del lema 2.4 es posible profundizar el resultado enunciado en la proposición 5.1.

**Proposición 5.2.** *Sea  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$  la foliación inducida por  $\{\omega_{\mathcal{F}} = 0\}$ . Si existe  $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  tal que*

$$\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) \geq c - 1, \quad (5.14)$$

donde  $c$  es el conductor, entonces todas las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}$  son cuasihomogéneas.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$  una separatriz no aislada de la foliación  $\mathcal{F}$  y sea  $\varphi$  una parametrización de  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ . Dado que por hipótesis existe  $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  tal que  $\nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) \geq c - 1$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} &= \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}} \wedge \omega_{\tilde{\mathcal{G}}}) - \nu_{E_d}^\pi(\omega_{\mathcal{F}}) + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathcal{G}}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}})) \\ &\geq c - 1 + \iota_p(\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathcal{G}}}, \tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}})) \geq c - 1. \end{aligned}$$

Esto implica que  $\text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} + 1 - n \geq c - 1 + 1 - n = c - n$ . Dado que el conductor del semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$  de la rama es  $c = (m - 1)(n - 1)$  tenemos que  $c - n = (m - 1)(n - 1) - n = mn - 2n - m + 1$ . Denotamos por  $k = \text{ord}_0 \varphi^* \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} + 1 - n > m(n - 1) - 2n$ . Dado que  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ , tenemos que el conjunto  $\{im : i = 0, 1, \dots, n - 1\}$  es un sistema completo de residuos módulo  $n$ . Entonces existen únicos  $0 \leq i \leq n - 1$  y  $j \in \mathbb{Z}$  tales que  $k = im + jn$ . Tenemos así  $im + jn = k > m(n - 1) - 2n$  o equivalentemente  $(j + 2)n > (n - 1 - i)m \geq 0$ . Si  $j \geq 0$  entonces  $k \in S_{\mathcal{C}}$  y por lo tanto no es el invariante de Zariski. Supongamos que  $j < 0$  entonces  $j = -1$  e  $i = n - 1$ . Entonces  $k + n - m = (n - 1)m - n + n - m = (n - 2)m \in m\mathbb{Z}_{>0}$ . Por lo tanto no puede ser el invariante de Zariski. Hemos demostrado por lo tanto que cualquier número  $k > m(n - 1) - 2n$  satiface algunos de los criterios y por ende no puede ser el invariante de Zariski. El mismo argumento funciona para cualquier otra separatriz no aislada.  $\square$

**Observación 5.2.** El mismo resultado se obtiene haciendo uso del lema 2.4, notando que el valor asociado al punto  $(n - 2, m - 2)$  mediante las biyección es el último de los posibles invariantes de Zariski para la clase de equisingularidad  $(n, m)$ .

Nótese que dado que el conductor del semigrupo para una rama de la clase de equisingularidad  $(n, m)$  es  $c = (m - 1)(n - 1)$ , entonces la cota inferior dada en la proposición 5.2 es más fina que la cota dada en 5.1.

Si consideramos las foliaciones inducidas por las ecuaciones

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ d \left( \frac{y^n - x^p y^q}{x^m} \right) = 0 \right\} \text{ y } \mathcal{F}_2 = \left\{ d \left( \frac{y^n}{x^m - x^p y^q} \right) = 0 \right\}, \quad (5.15)$$

las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  están dadas por  $\mathcal{C}_{k,1} = \{y^n - x^p y^q - kx^m = 0\}$  y  $\mathcal{C}_{k,2} = \{y^n - k(x^m - x^p y^q) = 0\}$ ,  $k \in \mathbb{C}^*$ . De acuerdo con el teorema 2.2 todas las separatrices no aisladas de  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  tienen el mismo invariante de Zariski; más aún, éste es el asociado al punto  $(p, q) \in \text{PZ}$ . De hecho es posible demostrar que ambas foliaciones pertenecen a la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales con la propiedad de transversalidad polar. Más aún demostraremos que hay toda una familia de foliaciones dicríticas con la propiedad de transversalidad polar, como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.** Sean  $(x, y)$  coordenadas adaptadas a  $\pi$  y  $(p, q) \in \text{PZ}$ . Consideramos  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  foliaciones inducidas por  $\{\omega_{\mathcal{F}_1} = 0\}$  y  $\{\omega_{\mathcal{F}_2} = 0\}$  respectivamente, donde

$$\omega_{\mathcal{F}_1} = (a_1 y^{n-q+1} + a_2 x^p y + yA(x, y)) dx + (b_1 y^{n-q} x + b_2 x^{p+1} + xB(x, y)) dy,$$

con  $na_1 + mb_1 = 0$ ,  $na_2 + mb_2 \neq 0$ ,  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  y  $A(x, y), B(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  tienen orden mayor o igual a  $p+1$ ,  $y$

$$\omega_{\mathcal{F}_2} = (\tilde{a}_1 x^{m-p} y + \tilde{a}_2 y^{q+1} + y\tilde{A}(x, y)) dx + (\tilde{b}_1 x^{m-p+1} + \tilde{b}_2 x y^q + x\tilde{B}(x, y)) dy,$$

con  $m\tilde{a}_1 + n\tilde{b}_1 = 0$ ,  $m\tilde{a}_2 + n\tilde{b}_2 \neq 0$ ,  $\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  y  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  con orden mayor o igual que  $\max\{q+1, m-p\}$ . Entonces las foliaciones  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  pertenecen a la familia  $\mathfrak{F}_\pi^*$  con  $i = 1, 2$ . Además, el invariante de Zariski de todas las ramas invariantes no aisladas de  $\mathcal{F}_i$  para  $i = 1, 2$  es el valor  $\lambda$  asociado al punto  $(p, q)$  en el conjunto  $\text{PZ}$ .

Previo a demostrar el teorema requerimos de algunos resultados preliminares. La siguiente proposición nos da una familia de foliaciones dicríticas que pertenece a  $\mathfrak{F}_\pi$ .

**Proposición 5.3.** Sean  $(x, y)$  coordenadas adaptadas a  $\pi$  y  $(p, q) \in \text{PZ}$ . Sean  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  foliaciones inducidas por  $\{\omega_{\mathcal{F}_1} = 0\}$  y  $\{\omega_{\mathcal{F}_2} = 0\}$  respectivamente, donde

$$\omega_{\mathcal{F}_1} = (a_1 y^{n-q+1} + a_2 x^p y + yA(x, y)) dx + (b_1 y^{n-q} x + b_2 x^{p+1} + xB(x, y)) dy,$$

con  $na_1 + mb_1 = 0$ ,  $na_2 + mb_2 \neq 0$ ,  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  y  $A(x, y), B(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  de orden mayor o igual a  $p+1$ ,  $y$

$$\omega_{\mathcal{F}_2} = (\tilde{a}_1 x^{m-p} y + \tilde{a}_2 y^{q+1} + y\tilde{A}(x, y)) dx + (\tilde{b}_1 x^{m-p+1} + \tilde{b}_2 x y^q + x\tilde{B}(x, y)) dy,$$

con  $m\tilde{a}_1 + n\tilde{b}_1 = 0$ ,  $m\tilde{a}_2 + n\tilde{b}_2 \neq 0$ ,  $\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  y  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  con orden mayor o igual que  $\max\{q+1, m-p\}$ . Entonces las foliaciones  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  pertenecen a  $\mathfrak{F}_\pi$ .

Para la demostración de esta proposición requerimos un lema técnico.

**Lema 5.1.** Sea  $(p, q) \in \text{PZ}$  y sean  $t, l \in \mathbb{N}^*$  tales que  $tn - lm = 1$ ,  $t < m$  y  $l < n$ . Entonces tenemos que  $\frac{p}{n-q} \geq \frac{t}{l}$ .

*Demostración.* Primero notemos que cualquier otra solución  $(\tilde{t}, \tilde{l})$  de la ecuación  $nx - my = 1$  está dada por  $\tilde{t} = t + k_0 m$  y  $\tilde{l} = l + k_0 n$  para algún  $k_0 \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado, como  $(p, q) \in \text{PZ}$ , entonces  $np - m(n - q) > 0$ . Sea  $s \in \mathbb{N}^*$  tal que  $np - m(n - q) = s$ . Dado que  $s > 0$ , entonces las soluciones de la ecuación  $nx - my = s$  están dadas por  $x = st + k_0 m$  y  $y = sl + k_0 n$  para  $k_0 \in \mathbb{Z}$ . Como  $(p, q)$  pertenece al conjunto  $\text{PZ}$ , entonces  $(p, n - q)$  es una solución; así, existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $p = st + k_0 m$  y  $n - q = sl + k_0 n$ .

Si  $k_0 \geq 1$ , entonces  $p > m$  y  $n - q > n$  pero esto es una contradicción.

Si  $k_0 = 0$  entonces  $\frac{p}{n-q} = \frac{st}{sl} = \frac{t}{l}$  y finalizamos la demostración en este caso.

Finalmente, si  $k_0 \in \mathbb{Z}_{<0}$  entonces

$$pt - (n - q)t = stl + k_0 ml - (lst + k_0 nt) = k_0 (lm - nt) = -k_0.$$

Dado que  $k_0 < 0$ , entonces  $-k_0 > 0$  y esto implica que  $\frac{p}{n-q} > \frac{t}{l}$ .  $\square$

*Demostración de la proposición 5.3.* Debemos demostrar que  $\mathcal{F}_1$  satisface las 3 propiedades de la familia  $\mathfrak{F}_\pi$  (ver definición 3.15). Dado que el sistema de coordenadas  $(x, y)$  es adaptado a  $\pi$ , la propiedad iii) se satisface pues la curva  $\mathcal{L}_0 = \{y = 0\}$  tiene contacto maximal con  $\pi$  y es invariante por  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{L}_\infty = \{x = 0\}$  también es invariante y transversal a  $\mathcal{L}_0$ .

Ahora vamos a demostrar que se cumple la propiedad ii). Sea  $\sigma$  la sucesión de explosiones determinada por  $(p, n - q)$ . Vamos a demostrar que hay un número finito de puntos singulares de  $\sigma^*\mathcal{F}_1$  en la última componente irreducible de  $\sigma^{-1}(0)$ , cada uno de estos puntos es una singularidad simple, y con la posible excepción de uno de esos puntos, no hay singularidades de tipo silla-nodo. Por la identidad de Bézout existen  $r, s \in \mathbb{N}^*$ , con  $r \leq s$  y tales que  $rp - s(n - q) = \rho$  donde  $\rho := \text{m.c.d.}(p, n - q)$ . Vamos a considerar el siguiente morfismo

$$\sigma(u, v) = (u^r v^{\frac{n-q}{\rho}}, u^s v^{\frac{p}{\rho}}).$$

Calculemos ahora  $\sigma^*\omega_{\mathcal{F}_1}$

$$\begin{aligned} \sigma^*\omega_{\mathcal{F}_1} = & u^{s(n-q+1)+r-1} v^{\frac{n-q}{\rho}(p+1)+\frac{p}{\rho}-1} \left[ \left( (ra_1 + sb_1)v + (ra_2 + sb_2)u^\rho v + u^{\rho+r} v^{\frac{n-q}{\rho}+1} (rA_1 + sB_1) \right) du \right. \\ & \left. + \left( \left( \frac{n-q}{\rho}a_1 + \frac{p}{\rho}b_1 \right) u + \left( \frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2 \right) u^{\rho+1} + u^{\rho+r+1} v^{\frac{n-q}{\rho}} \left( \frac{n-q}{\rho}A_1 + \frac{p}{\rho}B_1 \right) \right) dv \right], \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde  $(u^{r(p+1)} v^{\frac{n-q}{\rho}(p+1)}) A_1 = A \circ \sigma$ ,  $(u^{r(p+1)} v^{\frac{n-q}{\rho}(p+1)}) B_1 = B \circ \sigma$ .

Los puntos singulares están dados por  $v = 0$  y las soluciones de la ecuación

$$\left( \frac{n-q}{\rho}a_1 + \frac{p}{\rho}b_1 \right) u + \left( \frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2 \right) u^{\rho+1} = 0.$$

Notemos que  $u = 0$  es una solución de la ecuación previa. Si  $u \neq 0$ , dado que  $\frac{a_2}{b_2} \notin \mathbb{Q}$ , entonces tenemos que

$$u^\rho = -\frac{(n-q)a_1 + pb_1}{(n-q)a_2 + pb_2}. \quad (5.17)$$

Sean  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \rho$  las soluciones de la ecuación (5.17). Consideremos el cambio de variables

$$u_i = u - \xi_i, \quad v_i = v,$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, \rho\}$ . Analicemos la restricción de la forma  $\sigma^*\omega_{\mathcal{F}_1}$  a cada punto singular  $z_i = (\xi_i, 0)$  y demostremos que bajo las condiciones de la proposición 5.3 los puntos singulares son simples. En el punto  $z_i = (\xi_i, 0)$  la ecuación (5.16) toma la forma,

$$\begin{aligned} \sigma^*\omega_{\mathcal{F}_1}|_{z_i} = & \left( (ra_1 + sb_1 + (ra_2 + sb_2)\xi_i^\rho) v_i + v_i h_1(u_i) + v_i^{\frac{n-q}{\rho}+1} g_1 \right) du_i \\ & + \left( \left( \frac{n-q}{\rho}a_1 + \frac{p}{\rho}b_1 + (\rho+1)\xi_i^\rho \left( \frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2 \right) \right) u_i + h_2(u_i) + v_i^{\frac{n-q}{\rho}} g_2 \right) dv_i, \end{aligned}$$

donde  $h_1(u_i) = \sum_{j=1}^{\rho} c_j u_i^j \xi_i^{\rho-j}$ , con  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $g_1 = (u_i + \xi_i)^{\rho+r} (rA_1(u_i + \xi_i, v_i) + sB_1(u_i + \xi_i, v_i))$ ,

$h_2(u_i) = \sum_{j=2}^{\rho+1} d_j u_i^j \xi_i^{\rho+1-j}$ , con  $d_j \in \mathbb{C}$  y  $g_2 = (u_i + \xi_i)^{\rho+r-1} \left( \frac{n-q}{\rho}A_1(u_i + \xi_i, v_i) + \frac{p}{\rho}B_1(u_i + \xi_i, v_i) \right)$ .

Consideremos un campo vectorial  $v_{\mathcal{F}_1}$  que genere la misma foliación en el punto  $z_i$ . La parte lineal de dicho campo vectorial, es de la forma

$$Dv_{\mathcal{F}_1}|_{z_i} = \begin{pmatrix} -((n-q)a_1 + pb_1) & \zeta \\ 0 & (ra_1 + sb_1 + (ra_2 + sb_2)\xi_i^\rho) \end{pmatrix}.$$

Dado que  $na_1 + mb_1 = 0$ , entonces  $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{m}{n}$  y además dado que  $np - m(n - q) > 0$  tenemos que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{rm - sn}{np - m(n - q)} + \frac{ra_2 + sb_2}{(n - q)a_2 + pb_2}.$$

Si  $\varrho := \frac{ra_2 + sb_2}{(n - q)a_2 + pb_2} \in \mathbb{Q}$ , entonces  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ , lo cual es una contradicción a la hipótesis  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ . Por lo tanto  $\varrho \notin \mathbb{Q}$ ; y en particular,  $\varrho \neq 0$ . Esto implica que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$  y esto demuestra que cada punto  $z_i = (\xi_i, 0)$  para  $i = 1, 2, \dots, \rho$  es una singularidad simple no silla-nodo.

Ahora analizamos el punto singular  $(u, v) = (0, 0)$ . Consideremos un campo vectorial  $\tilde{v}_{\mathcal{F}_1}$  que genere a la foliación  $\mathcal{F}_1$  en el punto  $(u, v) = (0, 0)$ . La parte lineal de  $\tilde{v}_{\mathcal{F}_1}$  en el punto  $(0, 0)$  está dada por

$$D\tilde{v}_{\mathcal{F}_1}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n-q}{\rho}a_1 + \frac{p}{\rho}b_1\right) & 0 \\ 0 & -(ra_1 + sb_1) \end{pmatrix}.$$

El cociente de los valores propios está dado por

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{(n - q)a_1 + pb_1}{ra_1 + sb_1} \right).$$

Por hipótesis  $na_1 + mb_1 = 0$ , entonces  $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{m}{n}$  y por tanto el cociente es

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{np + mq - mn}{ns - rm} \right).$$

Dado que  $(p, q) \in \text{PZ}$ , tenemos que  $np + mq - mn > 0$ . Si  $ns - rm > 0$  entonces este punto es un punto simple no silla-nodo y terminamos la demostración. Si  $ns - rm < 0$ , entonces  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_{>0}$  y este punto guía a la única componente dicrítica.

En el origen de la carta  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , donde  $\tilde{v} = \frac{1}{u} y \tilde{v} = uv$ , el único punto singular es  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0, 0)$ . La ecuación en este punto está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mathcal{F}_1} &= \left( \left( \frac{n-q}{\rho}a_1 + \frac{p}{\rho}b_1 \right) \tilde{v}^{\rho+1} + \left( \frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2 \right) \tilde{v} + \tilde{u}^{\frac{n-q}{\rho}} \tilde{v}^{\frac{n-q}{\rho}-r+1} \left( \frac{n-q}{\rho}A_2 + \frac{p}{\rho}B_2 \right) \right) d\tilde{u} \\ &+ \left( \left( \frac{n-q}{\rho}a_1 + \frac{p}{\rho}b_1 - ra_1 - sb_1 \right) \tilde{u}\tilde{v}^\rho + \left( \frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2 - ra_2 - sb_2 \right) \tilde{u} \right) d\tilde{v} \\ &+ \left( \tilde{u}^{\frac{n-q}{\rho}+1} \tilde{v}^{\frac{n-q}{\rho}-r} \left( \left( \frac{n-q}{\rho} - r \right) A_2 + \left( \frac{p}{\rho} - s \right) B_2 \right) \right) d\tilde{v}. \end{aligned}$$

Si  $\tilde{v}_{\mathcal{F}_1}$  es un campo vectorial que genera a la misma foliación en una vecindad del punto  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0, 0)$ , la parte lineal de dicho campo vectorial está dada por

$$D\tilde{v}_{\mathcal{F}_1}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2 - ra_2 - sb_2\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{n-q}{\rho}a_2 + \frac{p}{\rho}b_2\right) \end{pmatrix}.$$

El cociente de los valores propios es

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1 + \rho \frac{ra_2 + sb_2}{(n - q)a_2 + pb_2}.$$

Si  $\frac{ra_2 + sb_2}{(n - q)a_2 + pb_2} \in \mathbb{Q}$  entonces  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ , pero esto es una contradicción dado que  $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ ; entonces  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ .

Queda por demostrar la propiedad i), es decir, que la foliación  $\mathcal{F}_1$  tiene una única componente dicrítica. Como  $\text{m.c.d}(n, m) = 1$ , por la identidad de Bézout existen  $t, l \in \mathbb{N}^*$  tales que  $nt - lm = 1$ . Consideramos  $t, l \in \mathbb{N}^*$  tales que  $l < n$  y  $t < m$ . Después de algunos cálculos tenemos que  $n - l \leq m - t$  y  $l < t$ .

Consideramos el siguiente morfismo

$$\hat{\pi}(u, v) = (u^{n-l}v^l, u^{m-t}v^t) = (x, y),$$

que codifica la sucesión de explosiones determinada por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$  hasta la penúltima explosión. Vamos a calcular  $\hat{\pi}^*\omega_{\mathcal{F}_1}$ . Para esto denotamos por  $\alpha = (m-t)(n-q+1) + n-l$ ,  $\beta = t(n-q+1) + l$ ,  $\gamma = (n-l)(p+2) + m-t$  y  $\delta = l(p+2) + t$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^*\omega_{\mathcal{F}_1} &= \left( c_1 u^{\alpha-1} v^\beta + c_2 u^{\gamma-1} v^\delta + u^{\gamma-1} v^\delta \left( (n-l)\hat{A}_1 + (m-t)\hat{B}_1 \right) \right) du \\ &\quad + \left( d_1 u^\alpha v^{\beta-1} + d_2 u^\gamma v^{\delta-1} + u^\gamma v^{\delta-1} \left( l\hat{A}_1 + t\hat{B}_1 \right) \right) dv, \end{aligned}$$

donde  $c_1 = a_1(n-l) + b_1(m-t)$ ,  $c_2 = a_2(n-l) + b_2(m-t)$ ,  $d_1 = la_1 + tb_1$ ,  $d_2 = la_2 + tb_2$  y  $\hat{A}_1 u^{(p+1)(n-1)} v^{l(p+1)} = A \circ \hat{\pi}$  y  $\hat{B}_1 u^{(p+1)(n-1)} v^{l(p+1)} = B \circ \hat{\pi}$ . Notemos que por la condición  $na_1 + mb_1 = 0$  se tiene que  $c_1 = -d_1$ . Por otro lado, tenemos que  $\frac{p}{n-q} > \frac{m}{n} > \frac{m-t}{n-t}$ . Esto implica que  $p(n-l) - (m-t)(n-q) > 0$ , por consiguiente  $\gamma - \alpha = (p+1)(n-l) - (m-t)(n-q) > 0$ . Entonces, por el lema 5.1 tenemos que  $(p+1)l - t(n-q) > 0$ , esto implica que  $\delta - \beta > 0$ . Entonces, diviendo por  $u^{\alpha-1}v^{\beta-1}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mathcal{F}_1} &= \left( -c_1 v + c_2 u^{\gamma-\alpha} v^{\delta-\beta+1} + u^{\gamma-\alpha} v^{\delta-\beta+1} \left( (n-l)\hat{A}_1 + (m-t)\hat{B}_1 \right) \right) du \\ &\quad + \left( c_1 u + d_2 u^{\gamma-\alpha+1} v^{\delta-\beta} + u^{\gamma-\alpha+1} v^{\delta-\beta} \left( l\hat{A}_1 + t\hat{B}_1 \right) \right) dv. \end{aligned}$$

Nótese que el punto  $(u, v) = (0, 0)$  es un punto singular y que el grado de los monomios  $u^{\gamma-\alpha}v^{\delta-\beta+1}$ ,  $u^{\gamma-\alpha+1}v^{\delta-\beta}$  es mayor o igual que 2, al hacer la explosión de este punto y mirar en cualquiera de las dos cartas obtenemos la componente dicrítica puesto que se cumple que  $-c_1 uv + c_1 uv = 0$ . Dado que la composición del morfismo  $\hat{\pi}$  con la explosión del punto  $(u, v) = (0, 0)$  es la sucesión descrita por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$ . Siguiendo un razonamiento análogo se demuestra que  $\mathcal{F}_2$  pertenece a  $\mathfrak{F}_\pi$ . Con esto finalizamos la demostración.  $\square$

El siguiente lema provee un procedimiento que permite determinar la intersección de la curva polar entre dos foliaciones, donde una de ellas pertenece a  $\mathfrak{F}_\pi$  y la otra a  $\mathfrak{F}_\pi^C$  y la componente irreducible del divisor  $E_d$ , en términos del polígono de Newton de la curva jacobiana.

Recordemos que dada una serie  $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , con  $h = \sum h_{ij}x^i y^j$ , el soporte de  $h$ , es por definición,

$$\text{Sop}(h; x, y) := \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid h_{ij} \neq 0\}. \quad (5.18)$$

El polígono de Newton de  $h$  que denotamos por  $\mathcal{N}(h; x, y)$  con respecto a las coordenadas  $x, y$ , es por definición la envolvente convexa del conjunto  $\text{Sop}(h; x, y) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ . Dada la curva definida por el lugar de ceros de  $h$ ,  $\mathcal{H} = \{h = 0\}$  el polígono de Newton de  $\mathcal{H}$ , es  $\mathcal{N}(h; x, y)$ .

**Lema 5.2.** *Sea  $\pi : (M, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una sucesión finita de explosiones, descrita por el algoritmo de Euclides del par  $(n, m)$ . Sea  $E_d$  la componente irreducible del divisor  $D = \pi^{-1}(0)$  que aparece al realizar la última explosión de la sucesión  $\pi$ . Sea  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  la curva jacobiana entre las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  con  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_\pi$  y  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ . Denotamos por  $\tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  al transformado estricto de  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  por  $\pi$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) *El transformado estricto de la curva jacobiana interseca a la componente  $E_d$  en un punto  $p$  que no es esquina  $\tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cap E_d \neq \emptyset$ .*
- ii) *Existe un sistema de coordenadas  $(x, y)$  adaptado a  $\pi$ , tal que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x, y)$  tiene un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$ .*

iii) Para todo sistema de coordenadas  $(x, y)$  adaptado a  $\pi$ , el polígono de Newton  $\mathcal{N}(\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x, y)$  tiene un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$ .

*Demostración del lema 5.2.* La implicación iii) hacia ii) es inmediata. Ahora vamos a demostrar que i) si y sólo si ii). Sea  $(x, y)$  un sistema de coordenadas adaptado a  $\pi$ . Vamos a recordar que  $\pi$  es una sucesión finita de explosiones puntuales. Denotamos por  $k$  a la longitud de la sucesión de explosiones puntuales. Sea  $p_i$  para  $i = 0, 1, \dots, k-1$  el centro de explosión  $\pi_i : (M_i, \pi_i^{-1}(0)) \rightarrow (M_{i-1}, p_{i-1})$  donde  $p_0 = (0, 0)$  es el origen de  $M_0 = \mathbb{C}^2$ . Para cada  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$  consideramos  $(x_l, y_l)$  un sistema de coordenadas adaptado a  $p_l$ . Notemos que la explosión  $\pi_l$  está dada en el punto  $p_{l-1}$  por una de las siguientes ecuaciones

$$\sigma_{l,1}(x_l, y_l) = (x_l, x_l y_l), \quad \circ \quad \sigma_{l,2}(x_l, y_l) = (x_l y_l, y_l), \quad (5.19)$$

y asociadas a esas ecuaciones tenemos dos transformaciones afines  $T_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , para  $s = 1, 2$ , dadas por,

$$T_1(i, j) = (i + j, j), \quad \circ \quad T_2(i, j) = (i, i + j). \quad (5.20)$$

Para cada  $l = 1, 2, \dots, k$ , el polígono de Newton  $\mathcal{N}(\mathcal{J}^{(l)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x_l, y_l)$ , donde  $\mathcal{J}^{(l)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  es el transformado por  $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_l$ , es la envolvente convexa del conjunto  $T_s(\text{Sop}((\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_{l-1})^* \mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x_{l-1}, y_{l-1}) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2)$  para  $l = 1, 2, \dots, k$  y  $s \in \{1, 2\}$ , donde  $x_0 = x$ ,  $y_0 = y$  y  $\pi_0$  es la identidad. Después de algunos cálculos se demuestra que  $\mathcal{N}(\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x, y)$  tiene un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$  si y sólo si el polígono  $\mathcal{N}(\mathcal{J}^{(k-1)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x_{k-1}, y_{k-1})$  tiene un lado de pendiente  $-1$ . Sea  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{h = 0\}$  la curva jacobiana entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ . Vamos a considerar la composición  $\sigma = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_{k-1}$ . Entonces  $h \circ \sigma = x_{k-1}^\alpha y_{k-1}^\beta \tilde{h}(x_{k-1}, y_{k-1})$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$  y donde  $\tilde{h}(0, y_{k-1}) \neq 0 \neq \tilde{h}(x_{k-1}, 0)$ . Escribimos  $\tilde{h} = \tilde{h}_r + \tilde{h}_{r+1} + \dots$ , donde  $\tilde{h}_i \in \mathbb{C}[x_{k-1}, y_{k-1}]$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$  para  $i = r, r+1, \dots$ , y  $\tilde{h}_r$  es el primer polinomio no idénticamente nulo. Escribimos  $\tilde{h}_r = x_{k-1}^\gamma y_{k-1}^\delta g$ , con  $\gamma, \delta < r$  con  $g$  un polinomio de grado  $r - \gamma - \delta$ . Sea  $\pi_k$  la explosión del punto  $p_{k-1}$ ,  $\pi_k(x_k, y_k) = (x_k, x_k y_k)$ . El transformado por  $\pi_k$  de  $h$  es,

$$\begin{aligned} \pi_k^*(\tilde{h}) &= \tilde{h}_r(x_k, x_k y_k) + \tilde{h}_{r+1}(x_k, x_k y_k) + \dots = x_k^{\gamma+\delta} y_k^\delta x_k^{r-\delta-\gamma} g(1, y_k) + x_k^{r+1} \tilde{p}_{r+1} \dots \\ &= x_k^r (y_k^\delta g(1, y_k) + x_k \tilde{p}_{r+1} + \dots), \end{aligned}$$

donde los puntos representan términos de orden mayor que 2. Notemos que el divisor en esta carta está dado por  $x_k = 0$ , así con excepción de los puntos esquina,  $\tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cap E_d \neq \emptyset$  si y sólo si existe  $\xi \in \mathbb{C}^*$  tal que  $g(1, \xi) = 0$ . Entonces es suficiente demostrar que existe  $\xi \in \mathbb{C}^*$  tal que  $g(1, \xi) = 0$ . Recordemos que dado un polinomio  $q \in \mathbb{C}[T]$ , existe  $\xi \in \mathbb{C}$  tal que  $q(\xi) = 0$  si y sólo si el grado de  $q$  es mayor o igual a 1. Vamos a demostrar así que el grado de  $g$  es mayor o igual a 1. Si el grado de  $g$  es menor que 1, es decir, si  $g$  es constante, entonces el polígono de Newton  $\mathcal{N}(\mathcal{J}^{(k-1)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x_{k-1}, y_{k-1})$  consiste de un único punto y por lo tanto dicho polígono no tiene un lado de pendiente  $-1$  pero esto sería una contradicción a que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x, y)$  tenga un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$ . Por lo tanto el grado de  $g$  es mayor o igual a 1. Dado que el polígono  $\mathcal{N}_{k-1}(\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}); x_{k-1}, y_{k-1})$  tiene un lado de pendiente  $-1$ , es posible encontrar  $\xi \in \mathbb{C}^*$  tal que  $g(1, \xi) = 0$ .

Ahora vamos a demostrar que ii) implica iii). Sean  $(x, y)$  y  $(x', y')$  sistemas de coordenadas adaptados a  $\pi$ . Si  $x = x'$  e  $y = y'$  terminamos, entonces basta suponer que algunas de las coordenadas son distintas. Así supongamos que  $y = u(x', y')y'$  con  $u(0, 0) \neq 0$ . Escribiendo  $z = x = x'$  y  $w = y$  y  $w' = y'$  tenemos dos representaciones de  $h$ , donde  $\mathcal{J}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{h = 0\}$ .

$$h(x, y) = \sum h_{ij} x^i y^j = \sum h_{ij} z^i w^j = \sum h'_{ij} z^i w'^j.$$

Nuestro objetivo es determinar quienes son los coeficientes  $h'_{ij}$ . Dado  $i \in \mathbb{Z}$ , sea  $G_i = \frac{\partial^i f}{\partial z^i}$ , nótese que  $G_i|_{z=0} = \sum_{j \geq 0} h_{ij} w^j = \sum_{j \geq 0} h'_{ij} w'^j$ . Por la fórmula de Faa di Bruno para la  $j$ -ésima derivada de una

composición de funciones tenemos

$$\frac{\partial^j G_i}{\partial (w')^j} = \sum_{\mathbf{k} \in [j]} N_{\mathbf{k}} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} G_i}{\partial (w')^{|\mathbf{k}|}} \prod_{l=1}^j \frac{1}{l!} \left( \frac{\partial^l w}{\partial (w')^l} \right)^{k_l}, \quad (5.21)$$

donde  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^j$ ,  $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_j$ ,  $[j] = \{(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^j : k_1 + 2k_2 + \dots + jk_j = j\}$  y

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{j!}{k_1! k_2! \dots k_j!}.$$

Nótese por otro lado que

$$\frac{\partial^l w}{\partial (w')^l} = \frac{\partial^l u}{\partial (w')^l} w' + l \frac{\partial^{l-1} u}{\partial (w')^{l-1}} \quad \text{con} \quad \frac{\partial^0 u}{\partial (w')^0} = u.$$

Así

$$h'_{ij} = \frac{\partial^j G_i}{\partial (w')^j} \Big|_{(z, w')=(0,0)} = \sum_{\mathbf{k} \in [j]} N_{\mathbf{k}} h_{i|\mathbf{k}|} \prod_{l=1}^j \frac{1}{l!} \left( l \frac{\partial^{l-1} u}{\partial (w')^{l-1}}(0,0) \right)^{k_l}.$$

Denotamos por  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(h; x, y)$  y por  $\mathcal{N}' = \mathcal{N}(h; x', y')$ . Si  $(i, j)$  está en la frontera topológica de  $\mathcal{N}$  entonces  $h_{il} = 0$  para todo  $l < j$ . Dado que  $\mathbf{k} \in [j]$  entonces  $k_1 = j$  y  $k_2 = k_3 = \dots = k_j = 0$ . Por lo tanto se tiene que

$$h_{ij} = N_{j,0,0,\dots,0} h_{ij}(u(0,0))^j.$$

Más aún si  $h_{ij} \neq 0$  entonces  $h'_{ij} \neq 0$  y por lo tanto todos los vértices de  $\mathcal{N}$  son vértices de  $\mathcal{N}'$  y dado que el polígono está determinado por sus vértices se tiene que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ . Repitiendo el mismo argumento, intercambiando las variables  $w$  y  $w'$  obtenemos la otra contención. Hemos demostrado que  $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$  y por lo tanto si hay un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$  en  $\mathcal{N}$ , también hay un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$  en  $\mathcal{N}'$ . Queda así demostrado el lema.  $\square$

*Demostración del teorema 5.2.* Recordemos que la foliación  $\mathcal{F}_1$  es inducida por la ecuación  $\{\omega_{\mathcal{F}_1} = 0\}$ , donde

$$\omega_{\mathcal{F}_1} = (a_1 y^{n-q+1} + a_2 x^p y + yA(x, y)) dx + (b_1 y^{n-q} x + b_2 x^{p+1} + xB(x, y)) dy.$$

Sea  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$  inducida por la ecuación

$$\omega_{\mathcal{G}} = (my + h_1(x, y)) dx - (nx + cy + h_2(x, y)) dy,$$

donde  $\text{ord}_0 h_i(x, y) \geq 2$  para  $i = 1, 2$  y  $\text{ord}_0 h_1(x, 0) \geq \lfloor \frac{m}{n} \rfloor + 1$ . Vamos a demostrar que para cada  $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_\pi^C$ , el polígono de Newton de la curva jacobiana  $\mathcal{J}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \{p = 0\}$  no tiene un lado cuya pendiente es  $-\frac{n}{m}$ . Así, por el lema 5.2 concluimos que  $\mathcal{F}$  no pertenece a  $\mathfrak{F}_\pi^*$ .

Calculamos

$$\omega_{\mathcal{F}_1} \wedge \omega_{\mathcal{G}} = h(x, y) dx \wedge dy.$$

Después de algunos cálculos tenemos

$$\omega_{\mathcal{F}_1} \wedge \omega_{\mathcal{G}} = - [kx^{p+1}y + ca_1y^{n-q+2} + ca_2x^p y^2 + H_0(x, y) + H_1(x, y) + H_2(x, y)] dx \wedge dy,$$

donde  $k = na_2 + mb_2 \neq 0$ , y

$$\begin{aligned} H_0(x, y) &= xy(nA(x, y) + mB(x, y)), \\ H_1(x, y) &= h_1(x, y)(b_1 y^{n-q} x + b_2 x^{p+1} + xB(x, y)), \\ H_2(x, y) &= h_2(x, y)(a_1 y^{n-q+1} + a_2 x^p y + yA(x, y)). \end{aligned}$$

Vamos a analizar  $\mathcal{N}(h; x, y)$ . Nótese que el punto  $(p+1, 1)$  siempre aparece en la nube de puntos de  $h$ . Escribimos  $\text{ord}_x h_1(x, 0) = \alpha_0 + k$ , con  $\alpha_0$  es la parte entera de  $\frac{m}{n}$  y  $k \geq 1$ . Analizamos el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$ ; para ello debemos considerar cuatro casos:

- i) Vamos a suponer que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  tiene un lado  $\ell$  cuya pendiente es  $-\frac{n}{m}$  y  $(\alpha, \beta)$ ,  $(p + s, 0)$  sus puntos extremos, donde  $\alpha < p + 1$  y  $s = \alpha_0 + k + 1$ . La ecuación de este lado está dada por

$$j = -\frac{\beta}{p + s - \alpha}i + \frac{\beta}{p + s - \alpha}(p + s).$$

Supongamos que para  $i = p + 1$  se tiene  $j \leq 1$  –pues de lo contrario ese lado no podría pertenecer al polígono de Newton–, esto implica que

$$-\frac{\beta}{p + s - \alpha}(p + 1) + \frac{\beta}{p + s - \alpha}(p + s) \leq 1 \quad (5.22)$$

Dado que estamos suponiendo que el lado es de pendiente  $-\frac{n}{m}$  tenemos que  $-\frac{\beta}{p + s - \alpha} = -\frac{n}{m}$  entonces de la ecuación (5.22) se tiene,

$$-\frac{n}{m}(p + 1) + \frac{n}{m}(p + s) \leq 1$$

o equivalentemente,

$$n(s - 1) \leq m.$$

Más aún, dado que  $s \geq \alpha_0 + 2$ , entonces  $s - 1 \geq \alpha_0 + 1$ . Esto implica que

$$m \geq n(s - 1) \geq n(\alpha_0 + 1).$$

Esto es una contradicción, pues  $m = \alpha_0 n + r_0$  con  $r_0 < n$ . Entonces el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  no tiene un lado con extremos  $(\alpha, \beta)$ ,  $(p + s, 0)$  y pendiente  $-\frac{n}{m}$ .

- ii) Supongamos que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  tiene un lado  $\ell$  con extremos  $(p + 1, 1)$ ,  $(p + s, 0)$  y pendiente  $-\frac{n}{m}$ . Dado que la pendiente de este lado es  $-\frac{1}{s-1}$ , tenemos que  $-\frac{n}{m} = -\frac{1}{s-1}$ , o equivalentemente,  $n(s - 1) = m$ . Esto es una contradicción pues  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$ , entonces el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  no puede tener un lado de pendiente  $-\frac{n}{m}$ , con extremos  $(p + 1, 1)$ ,  $(p + s, 0)$ .
- iii) Supongamos que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  tiene un lado  $\ell$  con puntos extremos  $(\alpha, \beta)$ ,  $(p + 1, 1)$  y pendiente  $-\frac{n}{m}$ . La pendiente de este lado es  $-\frac{\beta-1}{p+1-\alpha}$ . Tenemos así que  $-\frac{\beta-1}{p+1-\alpha} = -\frac{n}{m}$ . Esto implica que

$$m(\beta - 1) = n(p + 1 - \alpha). \quad (5.23)$$

Más aún, como  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$  entonces  $n|\beta - 1$ , es decir,  $\beta - 1 = tn > 0$  para algún  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Sustituyendo en la ecuación (5.23) se tiene que  $tnm = n(p + 1 - \alpha)$  y entonces  $p = tm + \alpha - 1$ . Si  $\alpha \geq 0$ , entonces  $p \geq tm - 1$ , dado que de la desigualdad  $t \geq 1$  se sigue que  $p \geq m - 1$ , pero esto es una contradicción pues  $p \leq m - 2$ .

Entonces el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  no tiene un lado con pendiente  $-\frac{n}{m}$  y puntos extremos  $(\alpha, \beta)$ ,  $(p + 1, 1)$ .

- iv) Supongamos que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  tiene un lado  $\ell$  con puntos extremos  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  con  $\alpha_1 < \alpha_2 < p + 1$  y pendiente  $-\frac{n}{m}$ . La pendiente del lado  $\ell$  está dada por  $-\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$ . Por hipótesis  $-\frac{n}{m} = -\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$  y esto implica que  $n(\alpha_2 - \alpha_1) = m(\beta_1 - \beta_2)$ . Dado que  $\text{m.c.d.}(n, m) = 1$  se tiene que  $n|(\beta_1 - \beta_2)$ , así  $\beta_2 - \beta_1 = tn$  y por tanto  $n(\alpha_2 - \alpha_1) = mtn$  o equivalentemente  $(\alpha_2 - \alpha_1) = mt$ . Dado que  $t \geq 1$  entonces  $(\alpha_2 - \alpha_1) \geq m$ . Por otro lado  $(\alpha_2 - \alpha_1) < p + 1$ . Entonces,

$$p + 1 > \alpha_2 - \alpha_1 \geq m.$$

Esta última ecuación implica que  $p > m - 1$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto el polígono de Newton  $\mathcal{N}(h; x, y)$  no tiene un lado  $\ell$  con puntos extremos  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  con  $\alpha_1, \alpha_2 < p + 1$  y pendiente  $-\frac{n}{m}$ .

Después de analizar los casos, por el lema 5.2 no existe una curva polar intersectando transversalmente la componente  $E_d$ . Esto demuestra que  $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_\pi^*$ . De manera análoga se demuestra el resultado para  $\mathcal{F}_2$ .  $\square$



## Capítulo 6

# Conclusiones

El objetivo de esta tesis se centró en el estudio del invariante de Zariski de las separatrices no aisladas de las foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales. Demostramos que cada elemento  $\mathcal{F}$  en la familia de foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales que tiene la propiedad de tener transversalidad polar con la familia de foliaciones dicríticas cuspidales, satisface que todas sus separatrices no aisladas tienen el mismo invariante de Zariski. Como mencionamos en el capítulo 2, el invariante de Zariski es el primer invariante analítico dentro de la clasificación de ramas planas, dado que la clasificación analítica de ramas planas está completamente determinada. Un problema interesante sería dar una clasificación analítica de las separatrices no aisladas de las foliaciones dicríticas cuspidales con la propiedad de transversalidad polar.

Como se muestra también en este trabajo, el invariante de Zariski no clasifica a la familia de foliaciones con la propiedad de transversalidad polar. Un trabajo a futuro es proporcionar un conjunto de invariantes que den la clasificación completa de estas foliaciones. Recordemos que la propiedad de transversalidad polar de una foliación dicrítica pseudo-cuspidal  $\mathcal{F}$  con la familia de foliaciones dicríticas cuspidales está expresada en términos de la curva jacobiana entre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , donde  $\mathcal{G}$  es una foliación dicrítica cuspidal. Para abordar este problema requerimos del estudio de la curva jacobiana entre las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ , para ser más precisos determinar bajo que condiciones el transformado estricto de ésta por  $\pi$  no interseca la componente dicrítica.

Finalmente, otra línea de trabajo es la de explorar una posible extensión de los resultados aquí presentados a un tipo de foliaciones con menos restricciones. Recordemos que una propiedad que satisfacen las foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales es que su transformado estricto no tenga puntos de tangencia o puntos singulares sobre la componente dicrítica  $E_d$ . Si relajamos esta propiedad permitiendo la existencia de puntos de tangencia sobre esta componente es posible preguntarse acerca del comportamiento del invariante de Zariski tanto de las separatrices no aisladas como de las separatrices que pasan por esos puntos de tangencia, notando que éstas curvas ya no pertenecen a la clase de equisingularidad  $(n, m)$ .

# Apéndices



# Apéndice A

## Equisingularidad de ramas planas

En este apéndice presentamos algunos de los invariantes de la equisingularidad de ramas planas, así como las relaciones que entre ellos se presentan.

Comenzamos recordando el concepto de homeomorfismo de parejas. Dadas dos parejas  $(X, A)$  y  $(Y, B)$  donde  $X, Y$  son espacios topológicos y  $A \subset X, B \subset Y$  son subespacios topológicos de  $X$  y  $Y$  respectivamente, decimos que dichas parejas son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo  $H : X \rightarrow Y$  tal que la restricción de  $H$  al subespacio  $A$ , que denotamos por  $H|_A : A \rightarrow B$ , es un homeomorfismo.

**Definición A.1.** (Equisingularidad) Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  curvas singulares. Decimos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  tienen el mismo *tipo topológico* o son *equisingulares* si y sólo si existe un germen de homeomorfismo  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que

$$H(\mathcal{C}) = \mathcal{D},$$

es decir,  $H$  manda la curva  $\mathcal{C}$  en la curva  $\mathcal{D}$ .

La anterior definición nos dice que dos curvas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son equisingulares si las parejas  $(\mathbb{C}^2, \mathcal{C})$  y  $(\mathbb{C}^2, \mathcal{D})$  son topológicamente equivalentes como gérmenes en el origen.

A partir de este momento nos enfocamos únicamente en el caso de ramas planas. Veremos a lo largo de este apéndice que el tipo topológico de una rama  $\mathcal{C}$  está completamente determinado por un conjunto de invariantes numéricos.

Sea  $\mathcal{C}$  un germen de curva analítica de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definida por la ecuación  $\{f = 0\}$  con  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  y  $f$  está bien definida en un dominio  $U \subset \mathbb{C}^2$  que contiene al origen de  $\mathbb{C}^2$ . Para cada  $\epsilon > 0$  consideramos la 3-esfera

$$\mathbb{S}_\epsilon^3 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = \epsilon\},$$

la frontera en  $\mathbb{C}^2$  de la bola de radio  $\epsilon$ ,  $B_\epsilon$ . Sea  $\epsilon > 0$  de manera que  $B_\epsilon \subset U$ . Vamos a describir la intersección  $\mathcal{C} \cap B_\epsilon$ , y en particular la intersección  $\mathcal{C} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$ . El lema A.1 muestra que el tipo topológico de la pareja  $(\mathbb{C}^2, \mathcal{C})$  está completamente determinado por la intersección  $\mathcal{C} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$ , dicha intersección es conocida como el *enlace* (*link*) de la singularidad.

**Lema A.1.** Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña,  $\mathcal{C} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$  es una variedad diferenciable de dimensión 1, encajada en  $\mathbb{S}_\epsilon^3$ . Más aún, existe un homeomorfismo del par  $(B_\epsilon, \mathcal{C} \cap B_\epsilon)$  al cono sobre la pareja  $(\mathbb{S}_\epsilon, \mathcal{C} \cap \mathbb{S}_\epsilon)$ .

*Demostración.* Daremos una idea de la demostración, para consultar los detalles técnicos referimos a [47], [55]. La demostración se basa en la construcción de un campo de vectores  $\xi$  de clase  $C^\infty$  definido en  $B_\epsilon \setminus \{0\}$ , cuya integración nos dará el homeomorfismo deseado. Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño queremos construir un campo  $\xi$  de clase  $C^\infty$  definido en  $B_\epsilon \setminus \{0\}$  que satisfaga las siguientes propiedades:

- i) El producto interior entre  $\xi$  y el vector posición  $(x, y)$  en todos los puntos de  $B_\epsilon \setminus \{0\}$  es igual a 1;

ii) el campo vectorial  $\xi$  sea tangente a  $\mathcal{C}$ .

Para hacer esto hacemos la construcción de dicho campo en cada abierto de una cubierta abierta de  $B_\epsilon \setminus \{0\}$  y mediante particiones de la unidad construimos un campo sobre  $B_\epsilon$   $\square$

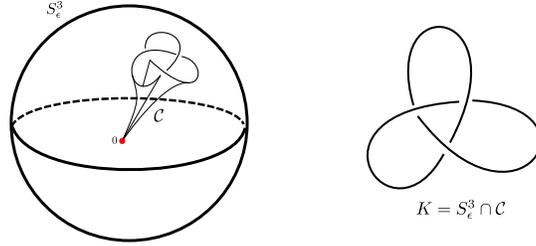


Figura A.1: Estructura cónica y nudo de la singularidad  $\mathcal{C} = \{y^2 - x^3 = 0\}$

Por el lema A.1 sabemos que la intersección  $K := \mathcal{C} \cap S_\epsilon^3$  es una variedad diferenciable de dimensión 1 y compacta por lo que  $K$  es un *nudo* o una unión disjunta de nudos. Para describir a la pareja  $(B_\epsilon, \mathcal{C} \cap S_\epsilon^3)$  es suficiente describir la intersección  $\mathcal{C} \cap S_\epsilon^3$ .

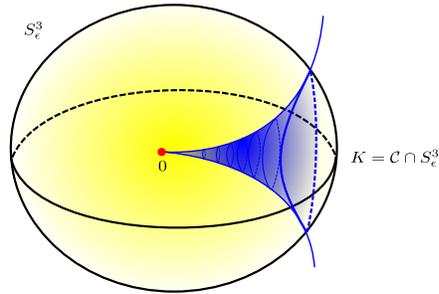


Figura A.2: El enlace de la singularidad  $K := \mathcal{C} \cap S_\epsilon^3$

Vamos a introducir ahora un conjunto finito de números obtenidos a partir de la parametrización de la rama  $\mathcal{C}$ . Este conjunto es un invariante de la isotopía del nudo  $K := \mathcal{C} \cap S_\epsilon^3$  y por ende un invariante de la clase de equisingularidad.

Sea  $\mathcal{C}$  una rama de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , dada por la ecuación  $\{f = 0\}$  donde  $f$  es irreducible y general de orden  $n$ . Por el lema 1.4 sabemos que existe una parametrización de  $\mathcal{C}$  de la forma

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \left( t^n, \sum_{i \geq n} a_i t^i \right). \end{aligned}$$

**Definición A.2.** La *característica* de  $\mathcal{C}$  es el conjunto  $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ , donde  $\beta_i$  para cada  $i$  es definido de manera recursiva como sigue:

- 1)  $\beta_0 = m_0(\mathcal{C})$ ;
- 2)  $\beta_1 = \min \{j \in \mathbb{N} : a_j \neq 0 \text{ y } \beta_0 \nmid j\}$ . Sea  $e_1 = \text{m.c.d.}(\beta_0, \beta_1)$ . Si  $e_1 = 1$  el proceso termina; en caso contrario continuamos y definimos  $\beta_2$  como:
- 3)  $\beta_2 = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_1, a_j \neq 0 \text{ y } e_1 \nmid j\}$ . Sea  $e_2 = \text{m.c.d.}(e_1, \beta_2)$ . Si  $e_2 = 1$  el proceso termina; en caso contrario continuamos y definimos  $\beta_3$  como;
- 4)  $\beta_3 = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_2, a_j \neq 0 \text{ y } e_2 \nmid j\}$  y continuamos con el proceso
- ⋮
- g+1)  $\beta_g = \min \{j \in \mathbb{N} : j > \beta_{g-1}, a_j \neq 0 \text{ y } e_{g-1} \nmid j\}$  y  $e_g = 1$ .

A continuación damos la definición de *isotopía suave*.

**Definición A.3.** Sean  $N, M$  variedades diferenciables. Una *isotopía suave* de  $N$  a  $M$ , es un encaje suave  $F : N \times I \rightarrow M \times I$ , de la forma  $F(x, t) = (f_t(x), t)$ , de manera que  $f_t$  es un encaje suave para cada  $t \in I$ . Decimos que los encajes  $f_0$  y  $f_1$  son *isotópicos*.

El siguiente resultado muestra que la clase de isotopía del nudo está determinada por la característica de  $\mathcal{C}$ . De manera más precisa tenemos el siguiente resultado

**Proposición A.1.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  ramas con la misma característica, entonces los nudos  $K^{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$ ,  $K^{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$  son isotópicos.

La demostración de este resultado puede ser consultada en [55].

A partir de la característica de la rama podemos definir el conjunto de *pares de Puiseux* que al igual que la característica son un invariante de la clase de equisingularidad.

Sea  $e_0 = \beta_0$ , y definimos  $n_i := \frac{e_{i-1}}{e_i}$  para  $i = 1, 2, \dots, g$  y sean  $m_i := \frac{\beta_i}{e_i}$  para  $i = 1, 2, \dots, g$ .

**Definición A.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama. Los *pares de Puiseux* de  $\mathcal{C}$  son el conjunto de pares

$$\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^g.$$

**Lema A.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama. Dada la característica de  $\mathcal{C}$  es posible conocer los pares de Puiseux y viceversa, dados los pares de Puiseux es posible recuperar la característica de  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Sean  $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^g$  los pares de Puiseux de  $\mathcal{C}$ , entonces  $\beta_0 = n = n_1 n_2 \cdots n_g$  y  $\beta_i = m_i n_i n_{i+1} \cdots n_g$ . □

### A.0.1. El semigrupo de $\mathcal{C}$

Sea  $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  una rama. Vamos a definir el semigrupo de la rama y vamos a demostrar que este semigrupo está completamente determinado por la característica de  $\mathcal{C}$ ; por lo que es un invariante de la clase de equisingularidad de  $\mathcal{C}$ . Recordemos primero el concepto de semigrupo numérico.

**Definición A.5.** Sea  $\mathbb{N}$  el conjunto de números naturales. Un subconjunto  $S \subset \mathbb{N}$  es un *semigrupo numérico* si satisface las siguientes propiedades:

- i)  $0 \in S$ ;
- ii)  $\mathbb{N} \setminus S$  es un conjunto finito;
- iii) Si  $x, y \in S$  entonces  $x + y \in S$ .

Por el lema 1.4 sabemos que existe una parametrización  $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  de  $\mathcal{C}$ . Dicha parametrización define un homomorfismo  $\varphi^*$  entre los anillos  $\mathbb{C}\{x, y\}$  y  $\mathbb{C}\{t\}$ , dado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathbb{C}\{x, y\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{t\} \\ g &\longmapsto \varphi^*(g) = g \circ \varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}. \end{aligned}$$

El kernel del homomorfismo  $\varphi^*$  es el ideal de funciones que se anulan sobre  $\mathcal{C}$ ; si  $\mathcal{C}$  es generada por la ecuación  $\{f = 0\}$  entonces el kernel de  $\varphi^*$  es precisamente el ideal  $\langle f \rangle$  generado por  $f$  en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . El anillo cociente que denotamos por  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}} := \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f \rangle}$  es llamado el *anillo local* de  $\mathcal{C}$ . Denotamos por  $X := \bar{x}$  e  $Y := \bar{y}$ , la clase de  $x$  e  $y$  en el anillo cociente respectivamente. Por el primer teorema de isomorfismo, es posible identificar el anillo local  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$  con su imagen bajo  $\varphi^*$ , como un subanillo de  $\mathbb{C}\{t\}$ , es decir  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}} \equiv \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}) \subset \mathbb{C}\{t\}$ .

**Definición A.6.** Definimos el *semigrupo* de  $\mathcal{C}$  que denotamos por  $S_{\mathcal{C}}$  como:

$$S_{\mathcal{C}} = \{j \in \mathbb{N} : j = \text{ord}_0 \varphi^*(g), g \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}\}. \quad (\text{A.1})$$

**Proposición A.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama. El semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$  es un semigrupo numérico.

*Demostración.* Veremos que el conjunto  $S_{\mathcal{C}}$  satisface las propiedades descritas en la definición A.5

- i) Sea  $u(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$  una unidad, entonces  $\varphi^*(u) = v(t)$  con  $v(0) \neq 0$ , así  $\text{ord}_t u(t) = 0$  y por lo tanto  $0 \in S_{\mathcal{C}}$ .
- ii) Es una consecuencia del lema A.5 que demostraremos más adelante.
- iii) Sean  $j, l \in S_{\mathcal{C}}$ , entonces existen  $g, h \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$  tales que  $\text{ord}_0 \varphi^*(g) = j$  y  $\text{ord}_0 \varphi^*(h) = l$ . Sea  $p = gh \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$  entonces  $\varphi^*(p) = \varphi^*(gh) = \varphi^*(g)\varphi^*(h)$  y entonces  $\text{ord}_0 \varphi^*(p) = j + l$ .

□

Dado que  $S_{\mathcal{C}}$  es un semigrupo numérico el conjunto  $\kappa = \mathbb{N} \setminus S_{\mathcal{C}}$  es finito, llamamos a este conjunto los *huecos* del semigrupo. Denotamos por  $\delta(\mathcal{C})$  a la cardinalidad del conjunto  $\kappa$ .

**Observación A.1.** Nótese que como consecuencia de lema 1.5 se tiene que el semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$  es el conjunto de multiplicades de intersección entre  $\mathcal{C}$  con cualquier curva analítica en 0, que no tenga como componente irreducible a  $\mathcal{C}$ .

En el capítulo 1 fue introducida la parametrización de Puiseux de una rama plana. Sea

$$\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, \sum_{j \geq \beta_0} a_j t^j \right),$$

una parametrización de Puiseux de la rama  $\mathcal{C}$ . Bajo un cambio de coordenadas polinomial (ver capítulo 2), podemos suponer que la parametrización es de la forma

$$\varphi(t) = \left( t^{\beta_0}, t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1} a_j t^j \right).$$

Vamos a denotar por  $h_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  el entero positivo más grande tal que  $\beta_q + h_q e_q < \beta_{q+1}$  para  $q \in \{1, 2, \dots, g\}$  y donde  $\beta_{g+1} = \infty$ . Entonces la serie puede ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y &= a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1} a_j t^j \\ &= a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{0 < j \leq h_1} a_{j,1} t^{\beta_1 + j e_1} + a_{\beta_2} t^{\beta_2} + \sum_{0 < j \leq h_2} a_{j,2} t^{\beta_2 + j e_2} + a_{\beta_g} t^{\beta_g} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,g} t^{\beta_g + j}, \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

donde  $a_{\beta_q} \neq 0$  para toda  $q \in \{1, 2, \dots, g\}$  y  $a_i = 0$  para todo  $i$  con  $\beta_q < i < \beta_{q+1}$  tal que  $e_q \mid i$ . Vamos a denotar por  $n = \beta_0 = m_0(\mathcal{C})$  y consideremos  $U_n$ ,

$$U_n = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^n = 1\},$$

es decir,  $U_n$  es el grupo de las  $n$  raíces de la unidad. Para  $j = 0, 1, 2, \dots, g$ , consideramos

$$G_j := U_{e_j} = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^{e_j} = 1\}, \quad (\text{A.3})$$

tenemos así  $U_n =: G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_g = \{1\}$ . Dada  $\xi \in U_n$ , consideremos  $\tau_\xi(y(t)) := y(\xi t)$ .

**Lema A.3.** *Sea  $\varphi$  una parametrización de Puiseux de la rama  $\mathcal{C}$  y sea  $\xi \in \mathbb{C}$  una raíz  $n$ -ésima de la unidad. Entonces si  $y(t) \neq y(\xi t)$  y  $\text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) > \frac{\beta_q}{n}$  se tiene que  $\text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) \geq \frac{\beta_{q+1}}{n}$ , para toda  $q \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ .*

*Demostración.* Vamos a demostrar por recurrencia sobre  $i$ . Notemos que

$$y(\xi t) = a_{\beta_1} \xi^{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1} a_j \xi^j t^j$$

Para  $i = 1$ , dado que  $\text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) > \beta_1$  tenemos que  $a_{\beta_1}(1 - \xi^{\beta_1}) = 0$ . Como  $e_1 = \text{m.c.d.}(n, \beta_1)$  existen  $r, s \in \mathbb{Z}$  tales que  $e_1 = rn + s\beta_1$  y dado que  $\xi^n = \xi^{\beta_1} = 1$  se tiene que  $\xi^{e_1} = 1$ . Entonces de la ecuación (A.2) tenemos que si  $\text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) > \beta_1$  entonces  $\text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) \geq \beta_2$ .

Supongamos que el resultado es cierto para  $i$  y vamos a demostrar que es cierto para  $i + 1$ .

Si  $\text{ord}_t(y(t) - y(\omega t)) > \beta_i$  se tiene que  $\omega^{\beta_j} = 1$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, i\}$ .

Como  $e_i = \text{m.c.d.}(n, \beta_1, \dots, \beta_i)$  se tienen que existe  $r, s_1, \dots, s_i \in \mathbb{Z}$  tales que  $e_i = rn + s_1\beta_1 + \dots + s_i\beta_i$ . Dado que  $\xi^n = \xi^{\beta_1} = \dots = \xi^{\beta_i} = 1$  se tiene que  $\xi^{e_i} = 1$ . Así de la ecuación (A.2) tenemos que  $\text{ord}_t(y(t) - y(\omega t)) \geq \beta_{i+1}$ . □

**Corolario A.1.** *Sea  $\varphi$  una parametrización de Puiseux de la rama  $\mathcal{C}$ ,  $q \in \{1, 2, \dots, g\}$  y sea  $\xi \in \mathbb{C}$  una raíz  $n$ -ésima de la unidad. Tenemos entonces que*

1.  $|\{\xi \in U_n : y(t) \neq y(\xi t) \text{ y } \text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) \geq \beta_q\}| = e_{q-1} - 1$ .
2.  $|\{\xi \in U_n : \text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) = \beta_q\}| = (n_q - 1)n_{q+1} \cdots n_g$ ,

donde  $|\cdot|$  denota la cardinalidad del conjunto.

*Demostración.* Del lema A.3, se sigue

1.

$$\begin{aligned} |\{\xi \in U_n : y(t) \neq y(\xi t) \text{ y } \text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) \geq \beta_q\}| &= |\{\xi \in U_n : \xi^n = \xi^{\beta_1} = \dots = \xi^{\beta_{q-1}}\}| - 1 \\ &= |\{\xi \in U_n : \omega \in U_n \cap U_{\beta_1} \cap U_{\beta_{q-1}}\}| - 1 \\ &= |\{\xi \in U_n : \xi \in U_{\text{m.c.d.}(n, \beta_1, \dots, \beta_{q-1})}\}| - 1 \\ &= \text{m.c.d.}(n, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}) - 1 \\ &= e_{q-1} - 1. \end{aligned}$$

2. Denotamos por

$$B_q = \{\xi \in U_n : y(t) \neq y(\xi t) \text{ y } \text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) \geq \beta_q\},$$

y

$$\overline{B}_q = \{\xi \in U_n : y(t) \neq y(\xi t) \text{ y } \text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) > \beta_q\}$$

$$\begin{aligned} |\{\xi \in U_n : y(t) \neq y(\xi t) \text{ y } \text{ord}_t(y(t) - y(\xi t)) \geq \beta_q\}| &= B_q - \overline{B}_q = B_q - B_{q+1} = e_{q-1} - e_q \\ &= (n_q - 1)n_{q+1} \cdots n_g. \end{aligned}$$

□

Para  $q \in \{2, 3, \dots, g\}$  vamos considerar las funciones dadas por las sumas parciales

$$\begin{aligned} y_q(t) &= \sum_{\beta_1 \leq i \leq \beta_q} a_i t^i \\ &= a_{\beta_1} t^{\beta_1} + \sum_{0 < j < h_1} a_{j,1} t^{\beta_1 + j e_1} + \dots + a_{\beta_{q-1}} t^{\beta_{q-1}} + \sum_{0 < j \leq h_{q-1}} a_{j,q-1} t^{\beta_{q-1} + j e_{q-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por comodidad definimos  $\beta_{g+1} = \infty$ , así

$$y_{g+1}(t) = \sum_{\beta_1 \leq i \leq \beta_{g+1}} a_i t^i = y.$$

**Lema A.4.** Sean  $\xi, \eta \in U_n$  y sea  $q \in \{2, 3, \dots, g\}$ . Tenemos que

$$\tau_\xi(y_q(t)) = \tau_\eta(y_q(t)) \quad \text{si y sólo si} \quad \xi \eta^{-1} \in G_{q-1}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\tau_\xi(y_q(t)) = \tau_\eta(y_q(t))$ , es decir

$$\sum_{\beta_1 \leq i < \beta_q} a_i \xi^i t^i = \sum_{\beta_1 \leq i < \beta_q} a_i \eta^i t^i.$$

Tenemos que,  $\xi^i = \eta^i$  para  $i = n, \beta_1, \dots, \beta_{j-1}$ , y entonces  $(\xi \eta^{-1})^i = 1$  para  $i = \text{m.c.d.}(n, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}) = e_{q-1}$ . Por lo tanto  $\xi \eta^{-1} \in G_{q-1}$  ver A.3. Para la otra dirección supongamos que  $\xi^{e_{q-1}} = \eta^{e_{q-1}}$ . Sabemos que  $e_{q-1}$  divide a todo los exponentes  $i$  tales que  $\beta_{q-1} \leq i < \beta_q$ , para los cuales  $a_i \neq 0$ . Dado que  $e_{q-1}$  divide a  $e_l$  para todo  $l \leq q-1$ , se sigue que  $e_q$  divide a todos los exponentes  $i$  con  $\beta_1 \leq i < \beta_q$  para los cuales  $a_i \neq 0$ . Entonces tenemos que  $\xi^i = \eta^i$  para toda  $i = \beta_1, \beta_1 + 1, \dots, \beta_q - 1$ , demostrando así que  $\tau_\xi(y_q(t)) = \tau_\eta(y_q(t))$ . □

Consideremos  $G_{q-1}$  como en A.3, notemos que éste es un subgrupo normal de  $G_0$ , podemos considerar el grupo cociente  $G_0/G_{q-1}$ . Sea  $\xi \in G_0 = U_n$  denotamos por  $[\xi]$  a la clase de  $\xi$  en grupo cociente  $G_0/G_{q-1}$ .

Dado  $\xi \in U_n$ , definimos

$$y_q([\xi] t) = y_q(\xi t),$$

el cual está bien definido por el lema A.4. Consideramos ahora

$$f_q(x, y) = \prod_{[\xi] \in G_0/G_{q-1}} \left( y - y_q([\xi] x^{\frac{1}{n}}) \right) \in \mathbb{C}\{x\}[y],$$

dicho polinomio es un polinomio de grado  $\frac{n}{e_q} = n_1 n_2 \dots n_{q-1}$ . Tenemos así que  $\bar{f}_q = f_q(X, Y) \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ .

Para cada  $q \in \{2, 3, \dots, g\}$  consideramos  $g_q = f_q \circ \varphi(t)$ . Sean  $\bar{\beta}_0 = \beta_0, \bar{\beta}_1 = \beta_1$  y  $\bar{\beta}_q = \text{ord}_t g_q$  para  $q \in \{2, 3, \dots, g\}$ . Entonces por definición los enteros  $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g$  pertenecen al semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$ . El siguiente teorema que se debe a O.Zariski, muestra que el semigrupo  $S_{\mathcal{C}}$  es generado por el conjunto  $\{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g\}$ .

Establecemos la notación que usaremos para establecer dicho resultado. Denotamos por  $X$  a la clase de  $x$  e  $Y$  a la clase de  $y$  en el anillo local de la rama  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ . Para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , definimos

$$M_k = \mathbb{C}\{X\} + \mathbb{C}\{X\}Y + \mathbb{C}\{X\}Y^2 + \dots + \mathbb{C}\{X\}Y^k \subset \mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $n = m_0(\mathcal{C})$ . Del teorema de la división de Weierstrass se sigue que  $M_{n-1} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ .

**Teorema A.1.** Sea  $q \in \{2, 3, \dots, g\}$ ,

i) Se tiene que

$$\bar{\beta}_q = (n_1 - 1)n_2 \cdots n_{q-1}\beta_1 + (n_2 - 1)n_3 \cdots n_{q-1}\beta_2 + \cdots + (n_{q-1} - 1)\beta_{q-1} + \beta_q,$$

y como resultado obtenemos las siguiente relaciones de recurrencia:

$$\bar{\beta}_q = n_{q-1}\bar{\beta}_{q-1} - \beta_{q-1} + \beta_q, \quad q \in \{2, 3, \dots, g\}.$$

ii) Sea  $p \in M_k$  y sea  $d < n_1 n_2 \cdots n_q$  el grado del polinomio  $p(y)$  con coeficientes en  $\mathbb{C}\{x\}$ , entonces  $\text{ord}_t p \circ \varphi(t) \in \sum_{j=0}^q \bar{\beta}_j \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . En particular tenemos que  $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g$  generan el semigrupo  $S_C$ .

*Demostración.* i) Por definición de los  $\bar{\beta}_i$  tenemos que

$$\bar{\beta}_q = \text{ord}_t f_q \circ \varphi = \text{ord}_t \left( \prod_{i=1}^{n_1 n_2 \cdots n_{q-1}} (y - y_q([\eta_i]t)) \right) = \sum_{i=1}^{n_1 n_2 \cdots n_{q-1}} \text{ord}_t (y - y_q([\eta_i]t)).$$

Del corolario A.1 se sigue que el número de factores tales que  $\text{ord}_t(y - z_{q,\eta}) = \beta_1$  es igual a  $(n_1 n_2 \cdots n_{q-1}) - (n_2 n_3 \cdots n_{q-1})$ . Entonces tenemos así

$$\bar{\beta}_q = (n_1 - 1)n_2 \cdots n_{q-1}\beta_1 + \sum_{i=1} \text{ord}_t (y - y_q[\xi_i(t)]).$$

De manera análoga del corolario A.1, se sigue que el número de factores tales que  $\text{ord}_t(y - z_{q,\eta}) = \beta_2$  es igual a  $(n_2 n_3 \cdots n_{q-1}) - (n_3 n_3 \cdots n_{q-1})$  y de manera recursiva se obtiene el resultado.

ii) Hacemos la demostración por inducción sobre  $q$ . El paso base es  $q = 1$ . Sea  $p(Y) = A_0(X) + Y A_1(X) + \cdots + Y^d A_d(X)$ , con  $d < n_1$ . Notemos que  $\text{ord}_t(Y^i A_i(C) \circ \varphi(t)) = i\beta_1 + ns$  entonces  $\text{ord}_t(Y^i A_i(X) \circ \varphi(t)) \equiv i\beta_1 \pmod{n}$ . Saen  $i \neq j$ , tales que  $i, j < n_1$ , entonces necesariamente  $(i - j)m \not\equiv 0 \pmod{n}$ . Así,  $\text{ord}_t(y^i A_i(x) \circ \varphi(t)) \neq \text{ord}_t(y^j A_j(x) \circ \varphi(t))$  si  $i \neq j$  y  $i, j < d$ . Por lo tanto  $\text{ord}_t p(y) = \text{ord}_t(y^i A_i(x) \circ \varphi(t))$  para algún  $i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$ , lo cual muestra que

$$\text{ord}_t p(y) \circ \varphi(t) = \bar{\beta}_0 \mathbb{Z}_{\geq 0} + \bar{\beta}_1 \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Supongamos que es cierto el resultado para  $q - 1$ . Sea  $\eta \in M_k \subset \mathcal{O}_C$  con  $k < n_1 n_2 \cdots n_{q-1}$ . Supongamos que  $p = \overline{p(x, y)}$ , donde  $p(x, y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  de grado menor o igual  $k$ . Escribiendo  $p$  en terminos de las potencias de  $f_q(x, y)$ , es posible escribir al polinomio como

$$p(x, y) = A_0(x, y) + A_1(x, y)f_q(x, y) + \cdots + A_s(x, y)(f_q(x, y))^s,$$

con  $s < n_q$  y  $A_0, A_1, \dots, A_s$  polinomios de grado menor que  $n_1 n_2 \cdots n_{q-1}$  con coeficientes en  $\mathbb{C}\{x\}$ . Así  $\bar{h} = A_0(X, Y) + A_1(X, Y)f_q + \cdots + A_s(X, Y)(f_q)^s$ , donde cada  $A_i(X, Y) \in M_{\bar{k}}$  con  $k < n_1 n_2 \cdots n_{q-1}$ , para  $i = 0, 1, \dots, s$ . De la hipótesis de inducción tenemos que para  $i = 0, 1, \dots, s$ ,

$$\text{ord}_t(A_i \circ \varphi) \in \sum_{j=0}^{q-1} \bar{\beta}_j \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (\text{A.6})$$

En particular de (A.6), se sigue que  $\text{ord}_t(A_i \circ \varphi) \equiv 0 \pmod{e_{q-1}}$ . Se sigue así que  $\text{ord}_t(A_i f_q^i \circ \varphi) \equiv i\bar{\beta}_q \equiv i\beta_q \pmod{e_{q-1}}$ . Si  $l, r < n_q$  y  $l \neq r$  se tiene que  $(l - r)\beta_q \not\equiv 0 \pmod{e_{q-1}}$ , pues de lo contrario se tendría que  $n_q$  divide a  $r - l$ . lo cual es una contradicción pues  $|r - l| < n_q$ .

$$\eta = A_0 \circ \varphi(t) + A_1 \circ (\varphi(t))g_q + \cdots + A_s \circ \varphi(t)g_q^s, \quad s < n_q.$$

Esto muestra que  $\text{ord}_t(A_i f_q^i \circ \varphi)$  son distintos para  $i = 0, 1, \dots, s$ . Entonces usando A.6 se tiene que  $\text{ord}_p \circ \varphi = \text{ord}_t(A_k \circ \varphi) + r\bar{\beta}_g \in \sum_{l=0}^g \bar{\beta}_l$ . La hipótesis de inducción muestra que  $\text{ord}_t A_i \circ \varphi(t) \in \sum_{l=0}^{q-1} \bar{\beta}_l \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . En particular  $\text{ord}_t A_i \circ \varphi(t) \equiv 0 \pmod{e_{q-1}}$ . De esto se sigue que  $\text{ord}_t A_i \circ \varphi(t) \equiv i\bar{\beta}_q \pmod{e_{q-1}}$ . Si  $i < n_q, j < n_q$ , y  $i \neq j$ , entonces  $i - j\bar{\beta}_q \not\equiv 0 \pmod{e_{q-1}}$ , dado que  $e_{q-1} = n_q e_q$ , y m.c.d.  $(\bar{\beta}_q, e_{q-1}) = e_q$ . Entonces concluimos que  $\text{ord}_t A_i \circ \varphi(t) \neq \text{ord}_t A_j \circ \varphi(t)$  y entonces  $\text{ord}_t p(y) \circ \varphi = \text{ord}(A_i \circ \varphi(t) g_q^i)$  para alguna  $i \in \{0, 1, 2, \dots, s\}$  y  $\text{ord}_t \eta = \sum_{l=0}^q \bar{\beta}_l \mathbb{Z}_{\geq}$  y esto completa la demostración.  $\square$

**Lema A.5.** Para cualquier rama  $\mathcal{C}$ ,  $\delta(\mathcal{C})$  es finito.

*Demostración.* Por el teorema A.1 sabemos que  $\bar{\beta}_i \in S_{\mathcal{C}}$ . Vamos a demostrar que el máximo común divisor del conjunto  $\{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g\}$  es el mismo que el del conjunto  $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ . Hacemos la demostración por inducción sobre  $g$ . El paso base  $g = 1$  se sigue de la definición de  $\bar{\beta}_i$ , es decir, se tiene que  $\text{m.c.d.}(\beta_0, \beta_1) = \text{m.c.d.}(\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1)$ . Supongamos que el resultado es cierto para  $g - 1$ , es decir,  $\text{m.c.d.}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{g-1}) = \text{m.c.d.}(\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{g-1})$ , de ii) del teorema A.1 se sigue que el máximo común divisor de  $\bar{\beta}_g$  es igual al máximo común divisor de  $\beta_g$ . Por lo tanto el m.c.d.  $(\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g) = 1$ . Como antes sea  $n := \bar{\beta}_0$ . Por la identidad de Bézout, existen  $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, \dots, g$  tales que  $1 = \sum_{i=0}^g a_i \bar{\beta}_i$ ; más aún,

es posible suponer que  $a_i \geq 0$  para toda  $i > 0$ . Así si  $c := \sum_{i=1}^g a_i \bar{\beta}_i$  tenemos que  $c \in S_{\mathcal{C}}$  y  $c \equiv 1 \pmod{n}$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$  entonces es posible escribir  $k = nt + r$  con  $0 \leq r < n$  y entonces si  $k \geq c(n - 1)$  tenemos que  $k - rc \geq c(n - 1) - c(n - 1) \geq 0$  y  $k - rc = nt + r(1 - c)$ . Por lo tanto  $k - rc$  es divisible por  $n$ , es decir,  $k - rc = ln$  para algún  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Esto implica que  $k = rc + ln$  pertenece al semigrupo generado por  $n = \bar{\beta}_0$  y  $c$ , por lo tanto  $k \in S_{\mathcal{C}}$ .  $\square$

## A.0.2. La sucesión de multiplicidades de $\mathcal{C}$

A continuación introducimos la sucesión de multiplicidades de una rama  $\mathcal{C}$ . Para ello retomamos la notación y algunos de los resultados presentados en la sección 1.4 del capítulo 1. Recordemos que dada una curva singular  $\mathcal{C}$ , el teorema 1.8 asegura que existe una sucesión finita de explosiones puntuales  $\pi^k : (M_k, E_k) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  de manera que todos los puntos infinitamente próximos de nivel  $k$  son puntos de cruzamientos normales.

Cuando  $\mathcal{C}$  es una rama, hay un único punto  $p_{l_1, l_2, \dots, l_j}$  infinitamente próximo de nivel  $j$  para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Dado que sólo hay un único punto infinitamente próximo de nivel  $j$ , denotamos dicho punto por  $p_j$  para  $j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ , donde  $p_0 = 0$ .

**Definición A.7.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama y sea  $\pi^k = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_k$  la sucesión de explosiones que desingulariza a  $\mathcal{C}$ . Denotamos por  $\mathcal{C}^i$  al transformado estricto de  $\mathcal{C}^{i-1}$  por  $\pi_i$ , donde  $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}$ . La *sucesión de multiplicidades* de  $\mathcal{C}$  es por definición

$$(m_0(\mathcal{C}), m_{p_1}(\mathcal{C}^1), m_{p_2}(\mathcal{C}^2), \dots, m_{p_k}(\mathcal{C}^k)).$$

El siguiente teorema demuestra que la característica y la sucesión de multiplicidades son datos equivalentes en el sentido de que si conocemos uno de ellos podemos recuperar el otro y viceversa.

**Teorema A.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una rama y sea  $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}$  la característica de  $\mathcal{C}$ . Entonces la sucesión de multiplicidades de  $\mathcal{C}$  puede ser calculada por medio del siguiente algoritmo: Si  $g = 0$  la sucesión es vacía pues  $\mathcal{C}$  es una curva suave. Si  $g > 0$ , calculamos los siguientes algoritmos de Euclides: Para  $i = 1$ , consideramos  $\chi_1 := \beta_1$  y  $m_{1,1} := \beta_0$ . Para  $i = 2, 3, \dots, g$ , sea  $\chi_i := \beta_i - \beta_{i-1}$  y definimos inductivamente

$m_{i,1} = m_{i-1,\sigma(i-1)}$  y calculamos el algoritmo de Euclides entre  $\chi_i$  y  $m_{i,1}$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}\chi_i &= \alpha_{i,1}m_{i,1} + m_{i,2} \\ m_{i,1} &= \alpha_{i,2}m_{i,2} + m_{i,3} \\ &\vdots \\ m_{i,\sigma(i)-1} &= \alpha_{i,\sigma(i)}m_{i,\sigma(i)}\end{aligned}$$

Entonces la sucesión de multiplicidades de  $\mathcal{C}$  está formada por  $\alpha_{i,j}$  veces la multiplicidad  $m_{i,j}$ . En particular, los exponentes característicos determinan esta sucesión de multiplicidades. Inversamente si nosotros conocemos la sucesión de multiplicidades podemos calcular inductivamente la característica.

**Observación A.2.** Notemos que  $m_{i-1,\sigma(i-1)} = m_{i,1}$  ocurre dos algoritmos y por tanto debe ser contada dos veces.

Antes de demostrar dicho teorema veamos cómo se comporta la característica de la rama bajo el morfismo de explosión. Sea  $S \subset \mathbb{N}$  un semigrupo numérico. Sea  $S_0 \subset \mathbb{N}$  un subconjunto tal que si  $s = s_1 + s_2$  con  $s \in S_0$  y  $s_1, s_2 \in S$  entonces  $s_1 = 0$  o  $s_2 = 0$ . Denotamos por

$$A_S = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j \in \mathbb{C}\{t\} : a_j = 0 \text{ para todo } j \notin S \right\}$$

y

$$A_S^* = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j \in \mathbb{C}\{t\} : a_j = 0 \text{ para todo } j \notin S \text{ y } a_j \neq 0 \text{ para todo } j \in S_0 \right\}.$$

**Lema A.6.** *i) Sea  $(t\alpha(t))^m = t^m\gamma(t)$  con  $\alpha(0) \neq 0$ . Entonces  $\alpha \in A_S$  si y sólo si  $\gamma \in A_S$ , y  $\alpha \in A_S^*$  si y sólo si  $\gamma \in A_S^*$ .*

*ii) Sea  $\alpha$  una serie de potencias con  $\alpha(0) \neq 0$ , y sea  $\beta$  tal que  $t = u\beta(u)$  es una solución de  $u = t\alpha(t)$ . Entonces  $\alpha \in A_S$  si y sólo si  $\beta \in A_S$ , y  $\alpha \in A_S^*$  si y sólo si  $\beta \in A_S^*$ .*

La demostración del lema puede ser consultada en [55].

**Proposición A.3.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama y  $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}$  la característica de  $\mathcal{C}$ . Entonces la característica de  $\mathcal{C}'$ , donde  $\mathcal{C}'$  es el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  por  $\pi$ , donde  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es el morfismo de explosión del origen, está dada por:*

- i)  $\{n, \beta_1 - n, \dots, \beta_g - n\}$  si  $\beta_1 > 2n$ ,*
- ii)  $\{\beta_1 - n, n, \beta_2 - \beta_1 + n, \dots, \beta_g - \beta_1 + n\}$  si  $\beta_1 < 2n$  y  $\beta_1 - n \nmid n$ ,*
- iii)  $\{\beta_1 - n, \beta_2 - \beta_1 + n, \dots, \beta_g - \beta_1 + n\}$  si  $\beta_1 < 2n$  y  $\beta_1 - n \mid n$*

*Demostración.* Por el lema 1.4 sabemos que  $\mathcal{C}$  tiene una parametrización  $\varphi(t) = \left( t^n, \sum_{j \geq n} a_j t^j \right)$ . Bajo un cambio de coordenadas polinomial podemos suponer que la parametrización es de la forma  $\varphi(t) = \left( t^n, t^{\beta_1} + \sum_{j > \beta_1} a_j t^j \right)$ . Consideremos la explosión en el origen dada por  $\pi(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$ . Tenemos

así que la curva  $\mathcal{C}'$  es parametrizada por  $\varphi'(t) = \left( t^n, t^{\beta_1 - n} + \sum_{j > \beta_1} a_j t^{j-n} \right)$ . Analicemos 3 casos.

- i) Si  $\beta_1 > 2n$ , tenemos que  $\beta_1 - n > n$ , es claro que  $n \nmid \beta_1 - n$  y más aún  $\text{m.c.d}(n, \beta_1 - n) = e_1$ .*

- ii) Si  $\beta_1 - n < n$  entonces al explotar la curva tenemos que  $y_1 = t^{\beta_1 - n} + \sum_{j > \beta_1} a_j t^{j - n} = t^{\beta_1 - n} h(t)$  donde  $h(0) \neq 0$ . Aplicando el lema A.6 a los semigrupos

$$S := \{r \in \mathbb{N} : \text{para algún } q \geq 1, r \geq \beta_q - \beta_1 \text{ y } e_q | r\}$$

y  $S_0 := \{\beta_q - \beta_1 \mid q \geq 1\}$ . Por hipótesis tenemos que  $y_1 = t^{\beta_1 - \beta_0} h(t)$  con  $h \in A_S^*$ . Entonces  $y_1 = (tg(t))^{\beta_1 - \beta_0}$ , con  $g \in A_S^*$ . Así  $x_1 = t^n = (u\alpha(u))^n = u^n \beta(u)$  con  $\beta(u) \in A_S^*$ . En este caso sabemos que  $n$  no es divisible por  $\beta_1 - n$ , entonces  $n$  es el primer exponente característico, ahora el m.c.d.  $(\beta_1 - n, n) = e_1$  y los exponentes se pueden recuperar de  $\beta(u)$ .

- iii) El último caso corresponde al caso cuando  $\beta_1 - n \mid n$ , entonces  $\beta_1 - n = e_1$ , entonces el siguiente exponente que no es divisible por  $e_1 = \beta_1 - n$  es  $\beta_2 - \beta_1 + m$ . Lo anterior finaliza la demostración  $\square$

*Demostración del Teorema A.2.* La demostración la hacemos por inducción sobre la longitud de la resolución de singularidades. Sea  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión del origen, y sea  $\mathcal{C}'$  el transformado estricto de  $\mathcal{C}$  por  $\pi$ . Por la proposición A.3 sabemos que la característica de  $\mathcal{C}'$  está dada por,

- i)  $\{\beta_0, \beta_1 - \beta_0, \dots, \beta_g - \beta_0\}$  si  $\beta_1 > 2\beta_0$ ,
- ii)  $\{\beta_1 - \beta_0, \beta_0, \beta_2 - \beta_1 + \beta_0, \dots, \beta_g - \beta_1 + \beta_0\}$  si  $\beta_1 < 2n$  y  $\beta_1 - \beta_0 \nmid \beta_0$ ,
- iii)  $\{\beta_1 - \beta_0, \beta_2 - \beta_1 + \beta_0, \dots, \beta_g - \beta_1 + \beta_0\}$  si  $\beta_1 < 2n$  y  $\beta_1 - \beta_0 \mid \beta_0$

Analicemos cada uno de los casos.

- i) En este caso el primer algoritmo de Euclides está dado por  $\chi_1 := \beta_1 - \beta_0$  y  $m_{1,1} = \beta_0$ , entonces se tiene que  $\beta_1 - \beta_0 = (\alpha_{1,1} - 1)m_{1,1}$  y  $m_{i,2}$  no cambia. Más aún,  $\xi_i = \beta_i - \beta_{i-1}$  para  $i = 2, 3, \dots, g$  no se modifican y por lo tanto los algoritmos tampoco se modifican. Entonces la sucesión de multiplicidades de  $\mathcal{C}'$  está dada por el algoritmo y por lo tanto la de  $\mathcal{C}$ .
- ii) En el caso  $\beta_1 - \beta_0 < \beta_0$ , la multiplicidad  $\beta_0$  ocurre una vez en la sucesión de multiplicidades de  $\mathcal{C}$ , es decir,  $\alpha_{1,1} = 1$  y por tanto en el primer renglón del algoritmo tenemos  $\beta_1 = \beta_0 + m_{1,2}$ . Más aún la multiplicidad de  $\mathcal{C}'$  es más pequeña y es  $\beta_1 - \beta_0$ . Entonces  $\bar{\beta}_0 = \beta_1 - \beta_0$  y  $\bar{\beta}_1 = \beta_0$ . Con esto el primer renglón del algoritmo de los pares de Puiseux de  $\mathcal{C}'$  comienza por  $m_{1,1} = \alpha_{1,2}m_{1,2} + m_{1,3}$  y de nuevo  $\bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1} = \beta_i - \beta_{i-1}$  para  $i = 2, 3, \dots, g$  y los otros algoritmos de Euclides no cambian. Por hipótesis de inducción tenemos que la sucesión de multiplicidades de  $\mathcal{C}'$  está dada por el teorema y entonces la de  $\mathcal{C}$ .
- iii) En este caso, por hipótesis sobre los exponentes característicos, tenemos que  $m_{1,2} = \beta_1 - \beta_0 \mid \beta_0 = m_{1,1}$ . Entonces el algoritmo para después de dos divisiones. Así  $\beta_1 = m_{1,1} + m_{1,2}$  y  $\beta_0 = m_{1,1} = \alpha_{1,2}m_{1,2}$ . Como  $m_{1,2} = m_{2,1}$  el primer renglón del segundo algoritmo de Euclides comienza como  $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_{2,1}m_{1,2} + m_{2,2}$ . Vamos a demostrar que la sucesión de multiplicidades de  $\mathcal{C}$  comienza con  $\beta_0$  y luego  $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}$  veces la multiplicidad  $m_{1,2} = \beta_1 - \beta_0$ . Ahora  $\bar{\beta}_1 = \beta_2 + \beta_0 - \beta_1 = \beta_2 - m_{1,2}$  y  $\bar{\beta}_0 = \beta_1 - \beta_0 = m_{1,2}$  Entonces

$$\beta_2 - \beta_1 + \beta_0 = \alpha_{2,1}m_{1,2} + \beta_0 + m_{2,2} = (\alpha_{2,1} + \alpha_{1,2})m_{1,2} + m_{2,2},$$

Y el resto del algoritmo continúa de la misma manera que el algoritmo de  $\mathcal{C}$ . Como  $\beta_{i+1} - \beta_i$ , los demás cálculos no cambian y entonces la inducción tiene lugar.  $\square$

### A.0.3. La gráfica dual de $\mathcal{C}$

Vamos a introducir ahora la gráfica de resolución de  $\mathcal{C}$ . Sea  $\pi^k : (M_k, E) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la resolución de singularidades de la curva  $\mathcal{C}$ . Sea  $\pi^{-1}(0) = E = \bigcup_{i=1}^k E_i$  el divisor excepcional y sea  $\mathcal{C}^{(k)}$  el transformado estricto de  $\mathcal{C}$ . La *gráfica dual* o *gráfica de la resolución* que denotamos por  $\text{GD}(\mathcal{C})$  es una gráfica pesada, no orientada y flechada. La construcción es dada de la siguiente manera:

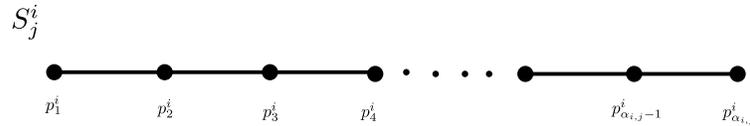
- i) El conjunto de vértices  $V_{\mathcal{C}}$  de la gráfica dual se identifica con el conjunto de componentes irreducibles del divisor  $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ .
- ii) Dos componentes  $E_i$  y  $E_j$  están conectadas por una arista si y sólo si  $E_i \neq E_j$  y  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ . Dado que dos componentes distintas del divisor se intersecan a lo más en un punto podemos identificar al conjunto de aristas con dichos puntos de intersección.
- iii) A cada vértice se le asigna el peso, que será un número negativo correspondiente al número de auto-intersección de la correspondiente componente irreducible del divisor.

El siguiente teorema muestra que la gráfica dual está completamente determinada por la característica de la rama y por consiguiente es un invariante de la clase de la clase de equisingularidad

**Teorema A.3.** *Sea  $\mathcal{C}$  una rama y sea  $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}$ . Consideremos los siguientes algoritmos de Euclides: Para  $i = 1$ , sea  $\chi_1 := \beta_1$  y  $m_{1,1} := \beta_0$ . Para  $i = 2, 3, \dots, g$ , sea  $\chi_i := \beta_i - \beta_{i-1}$  y definimos inductivamente  $m_{i,1} = m_{i-1, \sigma(i-1)}$  y calculamos el algoritmo de Euclides entre  $\chi_i$  y  $m_{i,1}$ , obteniendo:*

$$\begin{aligned} \chi_i &= \alpha_{i,1} m_{i,1} + m_{i,2} \\ m_{i,1} &= \alpha_{i,2} m_{i,2} + m_{i,3} \\ &\vdots \\ m_{i, \sigma(i)-1} &= \alpha_{i, \sigma(i)} m_{i, \sigma(i)}. \end{aligned}$$

La gráfica de resolución  $\text{GD}(\mathcal{C})$  consiste de  $g$  cadenas de Puiseux  $P_i(\mathcal{C})$  para  $i = 1, 2, \dots, g$ . Dichas cadenas son construidas de  $\sigma(i)$  bloques que denotamos por  $S_j^i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, g$  y  $j = 1, 2, \dots, \sigma(i)$ . Las cadenas de Puiseux son construidas conectando el punto final de  $S_k^i$  con el punto inicial de  $S_{k+2}^i$ , donde  $1 \leq k \leq \sigma(i) - 2$ . El punto final de  $S_{\sigma(i)-1}^i$  conectado al punto final de  $S_{\sigma(i)}^i$ .



Esto finaliza la construcción de la cadena  $P_i$ . Las cadenas forman una única gráfica conectando el punto final de  $S_{\sigma(i)}^i$  de la siguiente manera:

- i) con el punto final de  $S_1^{i+1}$  si  $\alpha_{i+1,1} \neq 0$ , o
- ii) con el punto inicial de  $S_3^{i+1}$  si  $\alpha_{i+1,1} = 0$  y  $\sigma(i+1) \geq 3$ , o
- iii) con el punto final de  $S_2^{i+1}$  si  $\alpha_{i+1,1} = 0$  y  $\sigma(i+1) = 2$ .

Finalmente colocamos una flecha en el punto final de  $S_{\sigma(g)}^g$ . Asociamos el peso  $P : V \rightarrow \mathbb{Z}$  a cada vértice de la siguiente forma. Para toda  $1 \leq j \leq \sigma(i) - 1$  tenemos

$$P(p_l^i) = \begin{cases} -2 & \text{si } l = 1, 2, \dots, \alpha_{i,j} - 1 \\ -1 - \alpha_{i,j+1} & \text{si } l = \alpha_{i,j} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

En el caso en el que  $j = \sigma(i)$  tenemos que  $P(p_l^i) = -2$  si  $l = 1, 2, \dots, \alpha_{i,\sigma(i)} - 1$  y

$$P(p_{\alpha_{i,\sigma(i)}}) = \begin{cases} -2 & \text{si } \alpha_{i+1,1} \neq 0 \\ -2 - \alpha_{i+1,2} & \text{si } \alpha_{i+1,1} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

La demostración del teorema puede ser consultada en [27] o [55]

**Ejemplo A.1.** Vamos a considerar la curva del ejemplo 1.2, dada por  $\mathbb{C} = \{f = 0\}$  donde  $f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^5 - x^7$ . Una parametrización de la curva es  $\varphi(t) = (t^4, t^6 + t^7)$ , así los exponentes característicos son  $\{4, 6, 7\}$ . Vamos a calcular los algoritmos donde  $\chi_1 = 6$  and  $\chi_2 = 7 - 6 = 1$

$$\begin{aligned} \chi_1 = 6 &= 1(4) + 2 & \chi_2 = 1 &= 0(2) + 1 \\ 4 &= 2(2) & 2 &= 2(1). \end{aligned}$$

La primera cadena de Puiseux  $P_1$  está formada por la unión de  $S_1^1$  y  $S_2^1$ .

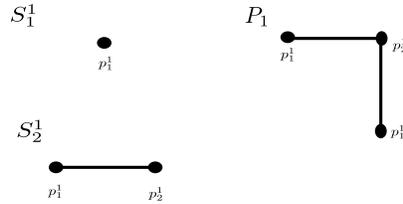


Figura A.3: Cadena  $P_1$

La segunda cadena está dada por la unión de  $S_1^2 = \emptyset$  y  $S_2^2$

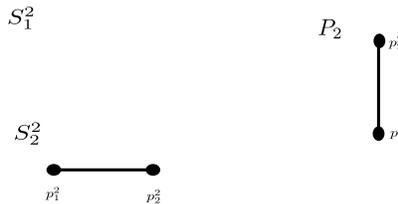


Figura A.4: Cadena  $P_2$

Finalmente la gráfica dual de la resolución de  $\mathcal{C}$  está dada por

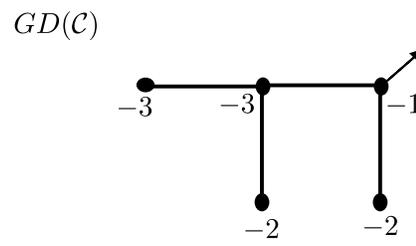


Figura A.5: Gráfica dual de la resolución de  $\mathcal{C}$



## Apéndice B

# Reducción de singularidades de foliaciones singulares

Al igual que en el caso de curvas singulares existe un análogo del resultado de reducción de singularidades para foliaciones singulares. En esta sección establecemos dicho resultado; para ello introducimos el concepto de singularidad simple en dimensión dos. Seguimos las ideas desarrolladas por Felipe Cano en [15].

Sea  $\mathcal{F}$  un germen de foliación holomorfa singular, dada en coordenadas por la ecuación  $\{\omega = 0\}$ , donde  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , y supongamos que el origen es una singularidad de  $\mathcal{F}$ . Sea  $v = Q(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - P(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$  un campo de vectores que genera a  $\mathcal{F}$ . Denotamos por  $J_v$  a la parte lineal de  $v$ , es decir, *operatorname* $J_v$  es la matriz jacobiana de  $v$ ;

$$J_v = Dv|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) \\ -\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) & -\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}$$

**Definición B.1.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Decimos que 0 es una *singularidad presimple* para  $\mathcal{F}$  si  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  donde  $\lambda, \mu$  son los valores propios de  $Dv|_{(0,0)}$ . Más aún decimos que 0 es una *singularidad simple* si  $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ . Si 0 es una singularidad presimple y  $\lambda\mu = 0$  decimos que 0 es una singularidad de tipo *silla-nodo*

La siguiente proposición muestra que las singularidades simples son estables bajo el morfismo de explosión.

**Proposición B.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular y supongamos que 0 una singularidad simple para la foliación  $\mathcal{F}$ . Consideramos la explosión del origen  $\pi : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Entonces*

- i) *La explosión es no dicrítica.*
- ii) *Hay exactamente dos puntos singulares  $p_1, p_2$  para el transformado de la foliación, sobre el divisor excepcional  $E_1 = \pi^{-1}(0)$ . Más aún  $p_1, p_2$  son singularidades simples.*

*Demostración.* Dado que el punto singular es simple podemos suponer, bajo un cambio de coordenadas lineales, que el campo vectorial  $v$  que genera a la foliación es de la forma

$$v = \left(\lambda x + \tilde{P}(x, y)\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\mu y + \tilde{Q}(x, y)\right) \frac{\partial}{\partial y}; \tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{C}\{x, y\},$$

y  $\text{ord}_0 \tilde{P}, \text{ord}_0 \tilde{Q} \geq 2$ . Vamos a hacer la explosión en la primera carta considerando  $x = x_1, y = x_1 y_1$ . Entonces

$$\hat{v} = \left(\lambda + x_1 \hat{P}\right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left((\mu - \lambda)y_1 + x_1 \left(\hat{Q} - y_1 \hat{P}\right)\right) \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\hat{P} = \frac{\tilde{P}}{x_1}, \hat{Q} = \frac{\tilde{Q}}{y_1}$ . Notemos que el divisor excepcional  $E_1$  está dado en este sistema de coordenadas por la ecuación  $E_1 = \{x_1 = 0\}$ , así de la ecuación (B.1) tenemos que  $E_1$  es una curva invariante. Más aún, el único punto singular en esta carta coordenada es  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ . La parte lineal de  $\hat{v}$  en el punto  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  está dada por

$$J_{\hat{v}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \eta & \mu - \lambda \end{pmatrix}.$$

Entonces el cociente de los valores propios es  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ . De manera análoga, haciendo la explosión en la otra carta coordenada  $(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2)$  tenemos que el cociente de los valores propios es  $\frac{\lambda - \mu}{\mu} \notin \mathbb{Q}_{>0}$ .  $\square$

Como consecuencia de la demostración, tenemos una afirmación más general dada por:

**Proposición B.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular y supongamos que 0 una singularidad pre-simple para la foliación  $\mathcal{F}$ . Consideramos la explosión del origen  $\pi_1 : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Sean  $\lambda, \mu$  los valores propios de  $J_v$  con  $\mu \neq 0$ .*

i) Si  $\lambda \neq \mu$  tenemos que:

- a) La explosión  $\pi$  es no dicrítica.
- b) Hay dos puntos singulares  $p_1, p_2$  para el transformado estricto de la foliación en el divisor excepcional  $E_1 = \pi^{-1}(0)$ . Más aún, la foliación tiene como valores propios  $\lambda, \mu - \lambda$  en  $p_1$  y  $\lambda - \mu, \mu$  en  $p_2$ . En particular, uno de los dos puntos es un punto singular simple.

ii) Si  $\lambda = \mu$  tenemos:

- a) Si la parte lineal  $J_v$  es diagonal, entonces  $\pi$  es una explosión dicrítica y el transformado estricto de la foliación no tiene puntos singulares sobre el divisor excepcional.
- b) Si la parte lineal  $J_v$  no es diagonal, entonces  $\pi$  es no dicrítica y hay exactamente un punto singular  $p_1$  para el transformado estricto de la foliación en  $E_1$ . Más aún,  $p_1$  es una singularidad de tipo silla-nodo, es decir los valores propios son  $\mu, 0$ .

*Demostración.* Las afirmaciones i.a) y i.b) se siguen de la proposición anterior. Para ii), sea

$$v = \left( \lambda x + cy + \tilde{P}(x, y) \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \lambda y + \tilde{Q}(x, y) \right) \frac{\partial}{\partial y}; \tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{C}\{x, y\},$$

donde  $\text{ord}_0 \tilde{P}, \text{ord}_0 \tilde{Q} \geq 2$ . Haciendo la explosión en la primera carta  $x = x_1, y = x_1 y_1$ , tenemos:

$$\hat{v} = \left( \lambda + x_1 \hat{P} \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( -cy_1^2 + x_1 \left( \hat{Q} - y_1 \hat{P} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Si  $c = 0$  entonces  $\hat{v} = x_1 \tilde{v}$  donde  $\tilde{v}$  es un campo vectorial no singular en esta carta y transversal a  $E_1$ . De manera análoga se verifica en la otra carta  $(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2)$ . Si  $c \neq 0$ , tenemos que  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  es singularidad simple con valores propios  $\lambda, 0$  y mirando la explosión del origen desde la otra carta coordenada vemos que  $(x_2, y_2) = (0, 0)$  es un punto no singular.  $\square$

**Corolario B.1.** *Sea 0 una singularidad pre-simple para una foliación singular  $\mathcal{C}$ . Entonces existe una sucesión finita de explosiones*

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \xleftarrow{\pi_3} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N,$$

*centrada en puntos  $p_i \in \pi^{-1}(p_{i-1})$  donde  $p_0 = 0$ , tal que todas los puntos singulares de los transformados escritos de  $\mathcal{F}$  en  $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N)^{-1}(0)$  son singularidades simples.*

*Demostración.* Si no hemos terminado, por la proposición anterior sabemos que hay un único punto singular que no es un punto singular simple. Sea  $p_{i+1}$  el único punto singular sobre la explosión del punto  $p_i$ . Sea  $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$  el cociente de los valores propios en el punto  $p_i$ . Sin perder generalidad vamos a suponer que  $\mu_i > \lambda_i$ . El cociente de los nuevos valores propios es  $\frac{\mu_i - \lambda_i}{\lambda_i}$ . Si consideramos el invariante dado por el  $\lambda_i + \mu_i$  entonces al hacer una explosión decrece estrictamente. De esta manera al hacer una sucesión finita de explosiones obtenemos dos valores propios iguales y entonces al hacer una explosión más terminamos.  $\square$

La reducción de singularidades de campos vectoriales en dimensión 2 y por consiguiente de foliaciones fue probada por Seidenberg en 1968 (ver [53]). A continuación presentamos el resultado de reducción de singularidades para campos vectoriales en la versión presentada por Felipe Cano en [15].

**Teorema B.1** (Reducción de singularidades para campos vectoriales en dimensión 2). *Sea  $M$  un espacio ambiente de dimensión compleja dos y sea  $v$  un germen de campo vectorial en  $p \in M$ . Denotamos por  $\mathcal{F}$  el germen de foliación dado por  $v$ . Entonces existe una sucesión finita de explosiones*

$$M \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N; \pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N \quad (\text{B.2})$$

*cada una centrada en un punto  $p_i \in \pi_i^{-1}(p_{i-1})$ , con  $p = p_0$ , tal que para cualquier  $q \in \pi^{-1}(p)$ ; el germen de  $\mathcal{F}_N$  en cada  $q$  es generado por un germen de campo vectorial  $\hat{v}$  con  $q$  un punto que es no singular o es simple y donde  $\mathcal{F}_N$  es el transformado de  $\mathcal{F}$  en  $M_N$ .*

Establecemos la notación que usaremos para demostrar este resultado. Nuestro espacio ambiente es una variedad compleja de dimensión 2 y sea un punto  $p \in M$ . Vamos a realizar una sucesión finita de explosiones puntuales,

$$S^N : M \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N; \sigma_i = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_i \quad (\text{B.3})$$

cada una centrada en un punto  $p_i \in \sigma_i^{-1}(p)$ , con  $p_0 = p$ . Hay un divisor total excepcional  $D_i = \sigma_i^{-1}(p)$  en cada nivel  $M_i$ . Más aún  $D_i$  admite una descomposición en componentes irreducibles  $D_i = D_{i1} \cup D_{i2} \cup \dots \cup D_{ii}$ , donde  $D_{ii} = \pi_i^{-1}(p_{i-1})$  y  $D_{i,j}$  es el transformado estricto de  $D_{i-1,j}$  por  $\pi_i$ . Cada una de las componentes  $D_{ij}$  es isomorfa a una línea proyectiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ . Además, las componentes  $D_{i,j}, D_{ik}$  no se intersecan o se intersecan transversalmente en un único punto. Un *divisor con cruzamientos normales*  $E$  en  $M$  es un subconjunto  $E \subset M$  que es una unión finita

$$E = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$$

de hipersuperficies cerradas e irreducibles  $E^j$  (dado que  $M$  es de dimensión dos, cada  $E^j$  es una curva) sin singularidades tal que cada dos  $E^i, E^j$  se intersecan en un punto y de manera transversal.

**Definición B.2.** Un *espacio ambiente logarítmico* es un par  $(M, E)$ , donde  $E \subset M$  es un divisor con cruzamientos normales. Un germen  $(M, E)_p$  de un espacio ambiente logarítmico en  $p \in M$  es el germen de los pares  $(U, U \cap E)$ , donde  $U \subset M$  son conjuntos abiertos con  $p \in U$ .

Consideremos una sucesión finita de explosiones  $S^N$ . Sea  $(M, E)$  un espacio ambiente logarítmico. Obtenemos espacios logarítmicos ambiente  $(M_i, E_i)$  comenzando con  $E_0$  y

$$E_i = \sigma_i^{-1}(\{p_i\} \cup E_{i-1}).$$

Denotamos por

$$S^N[E] : (M_0, E_0) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, E_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} (M_N, E_N).$$

Vamos a definir el árbol de puntos infinitamente próximos asociado a  $S^N[E]$ . El árbol de puntos infinitamente próximos de  $S^N[E]$  es una gráfica orientada cuyos vértices son los puntos  $p_i$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Dados dos vértices  $p_i, p_j$ , con  $i < j$ , hay una flecha  $p_j \rightarrow p_i$ , si las siguientes propiedades se satisfacen

- i)  $\pi_i \circ \pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_{j-1}(p_j) = p_i$ .
- ii) No existe  $k$  con  $i < k < j$  tal que  $\pi_i \circ \pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_{k-1}(p_k) = p_i$ .

Notemos que si  $j \rightarrow i$  tenemos un morfismo

$$\sigma_{ji} : (M_j, E_j)_{p_j} \rightarrow (M_i, E_i)_{p_i}$$

que corresponde, salvo un isomorfismo, a la explosión  $\pi_i$  restringida al germen  $(M_j, E_j)_{p_j}$ . La discusión previa puede llevarse sin problema al caso de una sucesión infinita de explosiones

$$S^\infty[E] : (M_0, E_0) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, E_1) \xleftarrow{\pi_2} \cdots ,$$

donde  $S^N[E]$  corresponde a la truncación de  $S^\infty[E]$  al nivel  $N$ .

**Definición B.3.** Decimos que  $S^\infty[E]$  es *discreto* si el árbol de puntos infinitamente próximos  $\mathcal{T}_S^\infty[E]$  no tiene infinitos puntos de bifurcación.

**Observación B.1.** Que el árbol  $\mathcal{T}_S^\infty[E]$  no tenga infinitos puntos de bifurcación es equivalente a que los conjuntos  $\{\pi_k \circ \pi_{k+1} \circ \cdots \circ \pi_j(p_{j+1}); j \geq k\}$  son finitos para cada  $k \geq 0$

La siguiente proposición es la clave en la demostración del resultado de reducción de singularidades.

**Proposición B.3** (Lema de Koenigs). *Si  $S^\infty[E]$  es discreto, entonces el árbol  $\mathcal{T}_S^\infty[E]$  tiene al una rama infinita.*

Por una rama infinita, o un *bambú*, entendemos una subgráfica que es totalmente ordenada. Vamos a dar una demostración de la proposición.

*Demostración.* El árbol  $\mathcal{T}_S^\infty[E]$  tiene una infinidad de vértices. Consideremos  $v_0$  la raíz del árbol. Sobre  $v_0$  hay un árbol infinito pero solo un número finito de vértices sobre  $v_0$ . Entonces al menos uno de ellos  $v_1$  soporta una rama infinita. Repetimos el argumento y encontramos  $v_2$  y repetimos el argumento para crear una rama infinita

$$v_0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \cdots ,$$

lo cual finaliza la demostración. □

A continuación describimos la estrategia que vamos a seguir para resolver el problema. El objetivo es usar la proposición B.3 de la siguiente manera:

Sea  $v$  un germen de campo vectorial en  $p \in M$  y sea  $\mathcal{F}$  el germen de foliación reducida dado por  $v$ . Vamos a construir una sucesión de explosiones de la siguiente manera. Sea

$$M = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1$$

la explosión con centro en el punto  $p$ . Si todos los puntos en  $E_1 = \pi^{-1}(p)$  son puntos simples o no singulares de la foliación para el transformado estricto  $\mathcal{F}_1$  de  $\mathcal{F}$ , el proceso termina. En otro caso, elegimos un punto singular que no es simple  $p_1 \in \pi_1^{-1}(p)$  y hacemos la explosión

$$M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2$$

con centro en  $p_1$ . Denotamos por  $\sigma_2 = \pi_1 \circ \pi_2$ . Si todos los puntos en  $\sigma_2^{-1}(p)$  son simples terminamos el proceso. En caso contrario elegimos  $p_2 \in \sigma_2^{-1}(p)$  y repetimos el argumento. Entonces tenemos dos posibilidades, una de ellas es que el proceso termine en un número finito de pasos, en cuyo caso hemos demostrado el resultado de Seidenberg. La otra posibilidad es que el proceso no termine. El objetivo es demostrar que esta última situación no sucede. Procedemos por contradicción, vamos a suponer que existe una sucesión finita de explosiones puntuales

$$S^\infty : M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_2 \xleftarrow{\pi_2} M_3 \xleftarrow{\pi_3} \cdots$$

como la construimos anteriormente.

**Observación B.2.** El árbol de puntos infinitamente próximos  $\mathcal{T}_S^\infty$  para un germen de campo de vectores  $v$  es discreto. Esto es una consecuencia del hecho de que los puntos singulares no simples son puntos aislados y entonces un número finito sobre un conjunto compacto.

Por la proposición B.3, hay un bambú infinito que denotamos por  $\mathcal{B}_S^\infty$  en el árbol  $\mathcal{T}_S^\infty$ ; este corresponde a una sucesión infinita de explosiones puntuales. Notemos que es posible suponer que hay un divisor de cruzamientos normales  $E \subset M$  dado en el punto inicial, este puede ser  $E = \emptyset$ . Repitiendo los argumentos, podemos obtener un bambú infinito

$$\mathcal{B}_S^\infty : (M_0, E_0)_p \xleftarrow{\pi_1} (M_1, E_1)_{q_1} \xleftarrow{\pi_2} (M_2, E_2)_{q_2} \xleftarrow{\pi_3} \dots,$$

Conservamos la notación  $\pi$ , sabiendo que los índices han sido alterados, como los hicimos anteriormente. El objetivo es demostrar que  $\mathcal{B}_S^\infty$  no puede existir bajo la hipótesis de que todos los puntos  $q_i$  son puntos singulares no simples para  $\mathcal{F}$ .

**Observación B.3.** Por el corolario B.1 podemos suponer que todos los puntos son puntos singulares presimples, pues si algún  $q_i$  es presimple sabemos que después de un número finito de explosiones obtenemos un punto singular simple.

Vamos a considerar tres tipos de posibles bambúes, dichos bambúes están definidos por su comportamiento en el infinito

- i) (Tipo combinatorio) Hay un índice  $N$ , tal que para cualquier  $i \geq N$ , el punto  $q_i$  es un punto de tipo esquina del divisor  $E_i$ .
- ii) (Tipo curva formal) Hay un índice  $N$ , tal que para cualquier  $i \geq N$ , el punto  $q_i$  no es un punto esquina del divisor  $E_i$ .
- iii) (Tipo salvaje) Para cualquier  $N \geq 0$  existen  $i, j$  con  $N \leq i, j$ , tales que  $q_i$  es un punto esquina de  $E_i$  y  $q_j$  no es un punto esquina de  $E_j$ .

Analizamos primero el *tipo combinatorio*.

Supongamos que  $\mathcal{B}_S^\infty$  es un bambú de tipo combinatorio. Salvo cortar a un nivel finito, podemos suponer que cada punto  $q_i$  es un punto esquina de  $E_i$ . Vamos a demostrar que  $\mathcal{B}_S^\infty[E]$  no puede existir bajo la hipótesis de que todos los puntos  $q_i$  no son presimples. El argumento de la demostración está basado en el control de lo que denominamos el *polígono de Newton*. A continuación introducimos el polígono de Newton.

Seleccionamos coordenadas  $(x, y)$  en el punto  $q_0$  tales que  $E_0 = \{xy = 0\}$  localmente en el punto  $q_0$ . Sea  $\mathcal{F}_0$  generada por un germen de campo vectorial en  $q_0$  que tiene una forma logarítmica

$$v_0 = P(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)y \frac{\partial}{\partial y},$$

donde  $P, Q$  no tienen factores comunes. Para ver esto, es suficiente multiplicar un generador no logarítmico de  $\mathcal{F}_0$  por  $x, y$  o  $xy$  si la curva  $\mathcal{L}_\infty = \{x = 0\}$  no es invariante, respectivamente si la curva  $\mathcal{L}_0 = \{y = 0\}$  no es invariante o la curva  $\mathcal{L} = \{xy = 0\}$  no es invariante. Vamos a notar que si  $P(0, 0) \neq 0$  o  $Q(0, 0) \neq 0$ , entonces el punto  $p$  es presimple (la parte lineal no es nilpotente). Entonces podemos suponer que  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ .

Vamos a introducir el *polígono de Newton*. Escribiendo

$$P(x, y) = \sum_{i,j} P_{ij} x^i y^j; \quad Q(x, y) = \sum_{i,j} Q_{ij} x^i y^j.$$

Definimos el polígono de Newton  $\mathcal{N}(v_0; x, y) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  como la envolvente convexa de la nube de puntos  $\Delta(v_0; x, y) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ , donde la nube de puntos está definida como

$$\Delta(v_0; x, y) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2; (P_{ij}, Q_{ij}) \neq (0, 0)\}.$$

El polígono de Newton tiene la siguiente propiedad:

**Proposición B.4.** *Si  $\mathcal{N}(v_0; x, y)$  tiene un único vértice, entonces  $\mathcal{F}$  es no singular o  $p$  es una singularidad presimple.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{N}(v_0; x, y)$  tiene un único vértice  $(r, s)$ , entonces  $x^r y^s$  divide a los coeficientes de  $v_0$  y entonces  $\mathcal{N}(x^{-r} y^{-s} v_0; x, y)$  tiene un único vértice  $(0, 0)$ . Esto implica que uno de los coeficientes es  $P, Q$  es una unidad.  $\square$

Describimos a continuación la estrategia a seguir. Explotamos el punto  $p$ ; elegimos un punto  $q_1$  que es no es simple y consideramos coordenadas centradas en  $q_1$ , la idea se basa en describir la relación entre  $\mathcal{N}(v_0; x, y)$  y  $\mathcal{N}(v'_0; x_1, y_1)$ . De dicha relación veremos que después de un número finito de pasos el polígono de Newton tendrá un único vértice. Sabemos que  $q_1$  es una esquina de  $E_1$ . Esto implica que  $q_1$  es el origen de una de las dos cartas coordenadas de la explosión expresadas en las coordenadas  $x, y$ . Para precisar, nosotros obtenemos coordenadas locales  $x_1, y_1$  en  $q_1$  por una de las siguientes transformaciones:

$$T_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1), \quad \text{o} \quad T_2(x_1, y_1) = (x_1 y_1, y_1). \quad (\text{B.4})$$

Sin perder generalidad podemos suponer que tenemos la transformación  $T_1$ . Entonces tenemos

$$v'_0 = P_1(x_1, y_1) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + Q_1(x_1, y_1) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1},$$

donde

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) &= P(x_1, x_1 y_1) \\ Q_1(x_1, y_1) &= P(x_1, x_1 y_1) - Q(x_1, x_1 y_1). \end{aligned}$$

**Lema B.1.** *Sea  $(i, j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ . Entonces  $(i, j) \in \mathcal{N}(v_0; x, y)$  si y sólo si  $(i, j) \in \mathcal{N}(v'_0; x_1, y_1)$ .*

Como consecuencia del lema B.1 tenemos que el polígono de Newton  $\mathcal{N}(v'_0; x_1, y_1)$  es la envolvente convexa de  $\tau_1(\Delta(v_0; x, y)) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ , donde  $\tau_1$  es la transformación afín asociada a  $T_1$  por

$$\tau_1(i, j) = (i + j, j).$$

En el caso en el que estamos en la segunda carta, es decir, que aplicamos la transformación  $T_2$ , tenemos asociada de igual manera una transformación afín  $\tau_2$  dada por

$$\tau_2(i, j) = (i, i + j).$$

El problema de reducción de singularidades en el caso combinatorio se reduce a dar una respuesta positiva al siguiente juego, conocido como el *juego combinatorio de desingularización*:

*Sea  $N_0 \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  un conjunto positivamente convexo. Supongamos que  $N_0$  tiene únicamente vértices con coordenadas enteras. Consideramos una sucesión infinita  $\epsilon_n; n = 1, 2, \dots$  donde  $\epsilon_n \in \{1, 2\}$ . Definimos inductivamente  $N_k$  la envolvente convexa de  $\tau_{\epsilon_n}(N_{k-1})$ . Entonces existe un índice  $n_0$  tal que  $N_k$  tiene un único vértice para todo  $k \geq n_0$ .*

Vamos a mostrar cómo dar una respuesta positiva a este juego. Del lema B.1 se sigue que  $N_l$  no tiene más vértices que  $N_{l-1}$ . Entonces vamos a argumentar por inducción sobre el número de vértices. Consideramos un par de vértices  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  de  $N_0$ , donde  $\alpha_1 < \alpha_2$  y  $\beta_2 < \beta_1$ . Definimos  $I_0$  como la suma  $I_0 = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2) \in \mathbb{N}$ . Si aplicamos  $T_1$ , los nuevos vértices están dados por  $(\alpha_1 + \beta_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2 + \beta_2, \beta_2)$ ; entonces,

$$I_1 = \alpha_2 + \beta_2 - (\alpha_1 + \beta_1) + \beta_1 - \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 < I_0.$$

Tenemos así una sucesión estrictamente decreciente

$$I_0 > I_1 > \dots > I_k > I_{k+1} > \dots$$

Si el número de vértices no decrece, entonces la sucesión es infinita y acotada inferiormente pero no es cero, esto es una contradicción.

Analizamos el caso de *tipo curva formal*.

Supongamos que  $\mathcal{B}_S^\infty[E]$  es de tipo curva formal. Salvo cortar la primera parte del bambú podemos suponer que cada  $q_i$  está contenido en una única componente irreducible de  $E_i$  para todo  $i \geq 0$ . Vamos a interpretar en términos de coordenadas la propiedad antes mencionada. Vamos a elegir coordenadas locales  $x, y$  en el punto  $p = q_0$  tales que  $E_0 = \{x = 0\}$  localmente en  $q_0$ . La explosión  $\pi_1$  es dada en coordenadas locales  $x_1, y_1$  en  $q_1$  por una de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} T_{1,c_1}(x_1, y_1) &= (x_1, x_1(y_1 - c_1)) \\ &\quad \circ \\ T_2(x_1, y_1) &= (x_1 y_1, y = y_1). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Si tenemos  $T_{1,c_1}$ , entonces el divisor  $E_1$  en  $q_1$  está dado por  $\{x_1 = 0\}$ . Si tenemos  $T_2$  entonces  $E_1$  localmente está dado por  $\{x_1 y_1 = 0\}$ . Por lo tanto, únicamente sucede el caso  $T_1 - c_1$ . Podemos repetir el mismo argumento y en cada paso obtenemos  $c_1, c_2, \dots$  y, por construcción, todos los puntos  $q_i$  están en el transformado estricto de la curva no singular formal

$$\hat{C} = \left\{ y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i \right\}.$$

Ahora podemos usar los mismos argumentos que en el caso combinatorio de la siguiente manera. Consideramos el nuevo divisor con cruzamientos normales  $\tilde{E} = E_0 \cup \hat{C}$  en  $p = q_0$ . Posiblemente este nuevo divisor es un divisor formal (no necesariamente convergente), pero esto no es importante para el argumento. Todos los puntos  $q_i$  son ahora puntos esquina con respecto a  $\tilde{E}$  y podemos aplicar los argumentos del caso combinatorio.

Analizamos ahora el caso del *tipo bambú salvaje*.

El caso más difícil es el que corresponde al caso del bambú salvaje. La demostración que presentamos aquí está inspirada en el método usual para obtener series de Puiseux a partir del polígono de Newton que presentamos en el capítulo 1.

Introducimos ahora los *Paquetes de Puiseux*. Denotamos por  $e_i = e_i(E_i, q_i)$  al número de componentes de  $E_i$  a través del punto  $q_i$ . Salvo el primer paso del bambú, tenemos que  $e_i = 1$  o  $e_i = 2$ ; si  $e_i = 2$  diremos que tenemos un *punto esquina*, si  $e_i = 1$  tenemos un punto que llamaremos *punto traza*. Ahora cortaremos el bambú por medio de sucesiones finitas que llamaremos *paquetes de Puiseux*. Sea  $i < j$ . Decimos que

$$\mathcal{P}_{ij} : (M_i, E_i)_{q_i} \xleftarrow{\pi_{i+1}} (M_{i+1}, E_{i+1})_{q_{i+1}} \xleftarrow{\pi_{i+2}} \dots \xleftarrow{\pi_j} (M_j, E_j)_{q_j}$$

es un paquete de Puiseux del bambú  $\mathcal{B}_S^\infty[E]$  comenzando en el índice  $i$ , si y sólo si las siguientes propiedades se satisfacen:

- i)  $e_i = 1$  y  $e_j = 1$ .
- ii)  $e_k = 2$  para cada  $k$  con  $i < k < j$ .

Notemos que dado  $i$  con  $e_i = 1$ , hay un único paquete de Puiseux  $\mathcal{P}_{ij}$ . Vamos a suponer sin perder generalidad que  $e_0 = 1$ . El bambú completo puede partirse en una única manera en paquetes de Puiseux

$$\mathcal{P}_{i_0 j_0}, \mathcal{P}_{i_1 j_1}, \mathcal{P}_{i_2 j_2}, \dots,$$

donde  $i_{s+1} = j_s$ .

**Definición B.4.** El paquete de Puiseux  $\mathcal{P}_{ij}$  es llamado *esencial* si y sólo si  $j \geq i + 2$ . Esto es, equivalente a decir que existe  $k$  con  $i < k < j$  y  $e_k = 2$ .

**Observación B.4.** Dado que estamos en el caso del tipo bambú salvaje, hay una infinidad de paquetes de Puiseux.

La estrategia en este caso es la siguiente. Vamos a asociar un número no negativo  $H_s$  a cada paquete de Puiseux  $\mathcal{P}_{i_s j_s}$ , con la propiedad de que  $H_s \geq H_{s+1}$  y, en el caso de que el paquete sea esencial, entonces  $H_s > H_{s+1}$ . Obviamente esto permite obtener la contradicción deseada, dado que tendríamos una sucesión decreciente  $H_s \geq H_{s+1} \geq \dots H_k \geq \dots$  acotada inferiormente, lo cual no es posible. El invariante  $H_s$  será obtenido a partir del *polígono de Newton-Puiseux* que vamos a introducir continuación. Primero necesitamos elegir coordenadas locales  $x_k, y_k$  en cada punto  $q_k$ . Comenzamos con coordenadas  $x, y$  en  $p = q_0$  tal que  $x = 0$  es una ecuación del divisor excepcional. De (B.5) tenemos que las coordenadas  $x_k, y_k$  las obtenemos a partir de las coordenadas  $x_{k-1}, y_{k-1}$  por una de las transformaciones  $T_{1,\lambda}, T_2$ . Tenemos las siguientes observaciones

- i) Si  $e_k = 1$ , entonces el divisor  $E_k$  está localmente dado por  $x_k = 0$  en  $q_k$ .
- ii) Si  $e_k = 2$ , entonces el divisor  $E_k$  está localmente dada por  $x_k y_k = 0$  en  $q_k$ .
- iii) Si hacemos  $T_{1,\lambda}(x_1, y_1) = (x_1, x_1(y_1 + \lambda))$  con  $\lambda \neq 0$ , entonces  $e_k = 1$ .
- iv) Si hacemos  $T_2$ , entonces  $e_k = 2$ .
- v) Si hacemos  $T_{1,\lambda}$  con  $\lambda = 0$ , entonces  $e_k = e_{k-1}$ .

Vamos a elegir un elemento generador de la foliación  $\mathcal{F}$  de la forma

$$v = P(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

con la propiedad de que los coeficientes no tienen factores en común excepto eventualmente potencias de  $x$ . Vamos a considerar el transformado total de  $v$  en el último paso de los paquetes de Puiseux y de esto describiremos el control de los invariantes  $H_s$ . Escribiendo  $v = \sum_{s=-1}^{\infty} y^s v_s$ , donde cada  $v_s$  tiene la forma

$$v_s = P_s(x)x \frac{\partial}{\partial x} + Q_s(x)y \frac{\partial}{\partial y}.$$

En otras palabras, estamos diciendo que

$$P(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} P_s y^s; \quad Q(x, y) = \sum_{s=-1}^{\infty} Q_s(x) y^{s+1}.$$

Ahora, vamos a definir  $\alpha_s = \min \{\text{ord}_0 P_s(x), \text{ord}_0 Q_s(x)\}$ . En el caso en el  $f_s$  y  $g_s$  son idénticamente cero ponemos  $\alpha_s = +\infty$ . El polígono de Newton-Puiseux que denotamos por

$$\mathcal{NP}(v; x, y) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq -1},$$

es, por definición, la envolvente convexa de

$$\text{Sop}(v; x, y) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$$

donde  $\text{Sop}(v; x, y) = \{(\alpha_s, s) : s = -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . El *vértice principal* es el vértice con abscisa más pequeña. La *altura principal*  $H(v; x, y)$  es la ordenada del vértice principal. Es decir, el vértice principal tiene coordenadas

$$(\alpha_{H(v; x, y)}, H(v; x, y))$$

donde cualquier otro vértice  $(\alpha_\mu, \mu)$  del polígono de Newton-Puiseux es tal que  $\alpha_\mu > \alpha_{H(v; x, y)}$  y a priori  $\mu < H(v; x, y)$ .

**Definición B.5.** Dado un paquete de Puiseux  $\mathcal{P}_{i_s j_s}$ , definimos  $H_s = H(v; x_s, y_s)$ .

**Observación B.5.** Supongamos que  $H(v; x, y) \leq 0$ . Salvo dividir  $v$  por una potencia de  $x$  podemos suponer que  $\alpha = 0$ . Así, tenemos que uno de los vértices  $(0, 0)$  o  $(0, -1)$  está en el polígono de Newton. Consideremos los dos casos

- i) Si tenemos el vértice  $(0, -1)$ , en este caso el campo vectorial  $v$  es no singular.
- ii) Si tenemos el vértice  $(0, 0)$  pero no el vértice  $(0, -1)$ , la parte lineal de  $v$  es triangular con diagonal no nula, entonces es no nilpotente y tenemos una singularidad presimple.

Así de la observación previa, tenemos que  $H_s \geq 1$  para toda  $s$ . Analicemos el caso del paquete no esencial de Puiseux. Sea  $\mathcal{P}_{ij}$  un paquete no esencial; sabemos que en ese caso  $j = i + 1$ . Denotamos por  $x, y$  las coordenadas locales en  $q_i$  y por  $\tilde{x}, \tilde{y}$  las coordenadas locales en  $q_{i+1}$ . Tenemos así que

$$x = \tilde{x}; \quad y = \tilde{y}\tilde{x} + \lambda\tilde{x},$$

donde  $\lambda$  puede ser cero o no. El control de la altura principal en este caso está dado por los siguientes lemas

**Lema B.2.** Si  $\hat{x} = x$  y  $\hat{y} = y + \lambda$  entonces  $H(v; x, y) = H(v; \hat{x}, \hat{y})$ .

*Demostración.* Se sigue del hecho de que  $v_s = P_s(\hat{x})\hat{x}\frac{\partial}{\partial \hat{x}} + Q_s(\hat{x})(\hat{y} - \lambda)\frac{\partial}{\partial \hat{y}}$ . □

**Lema B.3.** Si  $\lambda = 0$ , entonces  $H(v; \tilde{x}, \tilde{y}) \leq H(v; x, y)$ .

*Demostración.* Si  $\lambda = 0$ , entonces  $\tilde{x} = x$  y  $y = \tilde{x}\tilde{y}$ . Vamos a escribir  $v = \sum_{s=-1}^{\infty} y^s v_s$ , donde

$$v_s = P_s(x)x\frac{\partial}{\partial x} + Q_s(x)y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Al calcular el transformado de  $v_s$  tenemos que  $\tilde{v}_s = P_s(\tilde{x})\tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (Q_s(\tilde{x}) - P_s(\tilde{x}))\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$ . Por consiguiente, el transformado de  $v$  por la explosión del punto  $q_i$  es  $\tilde{v} = \sum_{s=-1}^{\infty} \tilde{y}^s \tilde{v}_s$ , donde

$$\tilde{v}_s = \tilde{x}^s \left\{ P_s(\tilde{x})\tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (Q_s(\tilde{x}) - P_s(\tilde{x}))\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\}.$$

Esto implica que  $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s + s$ . Si aplicamos este movimiento al polígono de Newton-Puiseux, obtenemos que  $H(v; \tilde{x}, \tilde{y}) \leq H(v; x, y)$  □

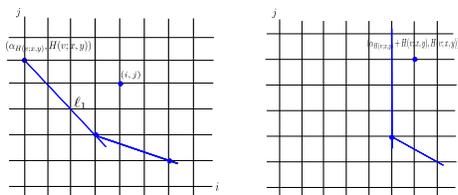


Figura B.1: Movimiento del polígono de Newton-Puiseux

Vamos a estudiar ahora el caso de los paquetes esenciales de Puiseux. Consideremos  $\mathcal{P}_{i_s j_s}$  un paquete esencial de Puiseux. Denotamos por  $x, y$  a las coordenadas locales en el punto  $q_{i_s}$ , y por  $\tilde{x}, \tilde{y}$  a las coordenadas en  $q_{j_s}$ . Vamos a denotar por  $(x_i, y_i)$  las coordenadas en  $q_i$ , para  $i_s < i < j_s$ , donde  $(x, y) = (x_{i_s}, y_{i_s})$  y  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_{j_s}, y_{j_s})$ . Sabemos que

- i) Para  $i = i_s + 1$  tenemos que  $x_{i-1} = x_i y_i$  y  $y_{i-1} = y_i$ .
- ii) Para cualquier  $i_s < i < j_s$  tenemos la transformación  $T_{1,0}$  o  $T_2$ , donde

$$T_{1,0}(x_i, y_i) = (x_i, x_i y_i), \text{ y } T_2(x_i, y_i) = (x_i y_i, y_i).$$

- iii) La última transformación está dada por  $T_{1,\lambda}$ , con  $\lambda \neq 0$ . Es decir, tenemos que  $x_{j_s-1} = \tilde{x}$  y  $y_{j_s-1} = \tilde{x}\tilde{y} + \lambda\tilde{x}$

El siguiente lema da una relación entre las coordenadas  $x, y$  y  $\tilde{x}, \tilde{y}$ .

**Lema B.4.** *Hay un único par de números enteros positivos  $p, d$  con  $d \geq 2$  y  $\text{m.c.d.}(p, d) = 1$  y un escalar  $\lambda \neq 0$  tales que*

$$\tilde{y} + \lambda = \frac{y^d}{x^p}.$$

Más aún, si  $\Phi := \frac{y^d}{x^p}$ , hay enteros no negativos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  con  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  tales que  $x = \tilde{x}^\alpha \Phi^\beta$ ;  $y = \tilde{x}^\gamma \Phi^\delta$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción inversa comenzando sobre  $j_s$ . Sabemos que  $\tilde{y} + \lambda = \frac{y_{j_s-1}}{x_{j_s-1}}$ . Tenemos respectivamente

$$\frac{y_{j_s-1}}{x_{j_s-1}} = \frac{y_{j_s-2}}{x_{j_s-2}^2}, \text{ o } \frac{y_{j_s-1}}{x_{j_s-1}} = \frac{y_{j_s-2}^2}{x_{j_s-2}},$$

si la transformación está dada por  $T_{1,0}$  o por  $T_2$  respectivamente.

Supongamos que  $\frac{y_{j_s-1}}{x_{j_s-1}} = \frac{y_i^{d_i}}{x_i^{p_i}}$ , donde  $d_i, p_i$  no tienen factores comunes. Entonces

$$\frac{y_{j_s-1}}{x_{j_s-1}} = \frac{y_{i-1}^{d_{i-1}}}{x_{i-1}^{p_{i-1}}},$$

donde  $(d_{i-1}, p_{i-1}) = (d_i, p_i + d_i)$  en el caso de la transformación  $T_{1,0}$  y  $(d_{i-1}, p_{i-1}) = (d_i + d_i, p_i)$  en el caso de la transformación  $T_2$ . Notemos que  $\text{m.c.d.}(d_{i-1}, p_{i-1}) = 1$ , más aún,  $d_{i-1} \geq d_i$ . Además,  $d_{i-1} > d_i$  en el caso de la transformación  $T_2$ . Esto demuestra la primera parte del lema. Para la segunda parte, procedemos por inducción suponiendo que  $x = x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i}$ ;  $y = x_i^{\gamma_i} y_i^{\delta_i}$ , con  $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$ , para  $i_s \leq i \leq j_s - 1$ . Entonces

$$x = x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} y_{i+1}^{\beta_{i+1}}, \text{ y } y = x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} y_{i+1}^{\delta_{i+1}}, \tag{B.6}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i+1} & \beta_{i+1} \\ \gamma_{i+1} & \delta_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i + \beta_i & \beta_i \\ \gamma_i + \delta_i & \delta_i \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i+1} & \beta_{i+1} \\ \gamma_{i+1} & \delta_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_i + \beta_i \\ \gamma_i & \gamma_i + \delta_i \end{pmatrix},$$

si tenemos, respectivamente, la transformación  $T_{1,0}$  o  $T_2$ . La expresión (B.6) se satisface para  $i = j_s - 1$ . Entonces tenemos así

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{j_s-1} + \beta_{j_s-1} & \beta_{j_s-1} \\ \gamma_{j_s-1} + \delta_{j_s-1} & \delta_{j_s-1} \end{pmatrix}.$$

Lo cual finaliza la demostración.  $\square$

Vamos a describir el efecto de un paquete esencial de Puiseux sobre el polígono de Newton Puiseux. Como antes, sea  $v = \sum_{s=-1}^{\infty} y^s v_s$ , donde cada  $v_s$  tiene la forma

$$v_s = P_s(x)x \frac{\partial}{\partial x} + Q_s(x)y \frac{\partial}{\partial y},$$

y el polígono de Newton Puiseux  $\mathcal{NP}(v; x, y)$  es la envolvente convexa del conjunto,  $\text{Sop}(v) = \{(\alpha_s, s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq -1} : s = -1, 0, 1, \dots\}$ , donde  $\alpha_s = \min \{\text{ord}_0 P_s, \text{ord}_0 Q_s\}$  para cada nivel  $s \geq -1$ .

Vamos a ver el contacto del polígono de Newton-Puiseux con las líneas de pendiente  $-\frac{d}{p}$ . Para cada nivel  $s$ , vamos a denotar por  $\varrho_s := \alpha_s + s(\frac{p}{d})$ .

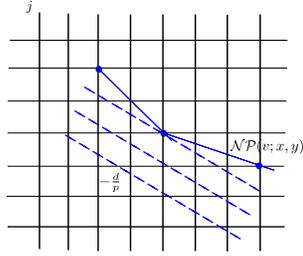


Figura B.2: Contacto con las líneas de pendiente  $-\frac{d}{p}$

Denotamos por  $\varrho(v; x, y)$  al mínimo  $\varrho_s$  y por  $\ell_c(v; x, y)$  al segmento crítico, que es el conjunto de los niveles  $s$  tales que  $\varrho_s = \varrho(v; x, y)$ . La altura crítica  $\chi(v; x, y)$  es el máximo de los índices tal que el nivel  $s$  está en el segmento crítico. El vértice crítico es  $(\alpha_{\chi(v; x, y)}, \chi(v; x, y))$ . Una observación es que la altura crítica es siempre menor o igual que la altura principal,

$$\chi(v; x, y) \leq H(v; x, y).$$

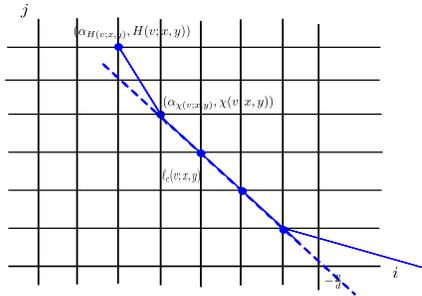


Figura B.3: Segmento crítico

Denotamos por  $\alpha(v; x, y)$  al mínimo de los  $\alpha_s$  para  $s \geq -1$ . Este mínimo corresponde a la abscisa mínima en el polígono de Newton-Puiseux. Escribimos el campo vectorial en dos partes, la parte inicial correspondiente al segmento crítico y el resto. De manera más precisa escribimos

$$(P_s, Q_s) = (\rho_s, \mu_s)x^{q-s(\frac{p}{d})} + (\tilde{P}_s, \tilde{Q}_s),$$

donde  $\varrho = \varrho(v; x, y)$  y  $(\tilde{P}_s, \tilde{Q}_s)$  tienen orden estrictamente mayor que  $\varrho - s \left(\frac{p}{d}\right)$ . Entonces, podemos escribir el campo vectorial como

$$v = \text{In}(v; x, y) + \tilde{v},$$

donde  $\text{In}(v; x, y)$  es la parte inicial del campo vectorial, es decir,

$$\text{In}(v; x, y) = \sum_{s=-1}^{\chi(v; x, y)} y^s x^{\varrho - s \left(\frac{p}{d}\right)} \left\{ \rho_s x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_s y \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

Nótese que  $\varrho(\tilde{v}; x, y) > \varrho$ , por construcción.

**Observación B.6.** Nótese que si  $(\rho_s, \mu_s) \neq (0, 0)$ , entonces  $\varrho - s \left(\frac{p}{d}\right)$  es un número entero. Más aún, en el caso  $s = \chi$ , donde  $\chi = \chi(v; x, y) \in \mathbb{Z}$ , sabemos que  $(\rho_\chi, \mu_\chi) \neq (0, 0)$ . Entonces,  $\tilde{\alpha} = \varrho - \chi \left(\frac{p}{d}\right) \in \mathbb{Z}$  y podemos escribir

$$\begin{aligned} \text{In}(v; x, y) &= \sum_{s=-1}^{\chi} y^s x^{\varrho - s \left(\frac{p}{d}\right)} \left\{ \rho_s x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_s y \frac{\partial}{\partial y} \right\} \\ &= x^{\tilde{\alpha}} \sum_{s=-1}^{\chi} y^s x^{(\chi - s) \left(\frac{p}{d}\right)} \left\{ \rho_s x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_s y \frac{\partial}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Más aún, si ponemos  $d\tau = \chi - s$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \text{In}(v; x, y) &= x^{\tilde{\alpha}} \sum_{\tau=0}^{\kappa} y^{\chi - d\tau} x^{p\tau} \left\{ \tilde{\rho}_\tau x \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\mu}_\tau y \frac{\partial}{\partial y} \right\} \\ &= x^{\tilde{\alpha}} y^\chi \left(\frac{1}{\Phi}\right)^\kappa \sum_{\tau=0}^{\kappa} \Phi^{\kappa - \tau} \left\{ \tilde{\rho}_\tau x \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\mu}_\tau y \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\kappa$  es la parte entera de  $\frac{\chi+1}{d}$  y  $\tilde{\rho}_\tau = \rho_{\chi - d\tau}$ ,  $\tilde{\mu}_\tau = \mu_{\chi - d\tau}$ . Vamos ver como es la evolución de la altura principal bajo un paquete esencial de Puiseux. Recordemos que las ecuaciones están dadas por  $x = \tilde{x}^d \Phi^\beta$ ,  $y = \tilde{y}^p \Phi^\delta$ , donde

$$\Phi = \frac{y^d}{x^p} = \tilde{y} + \lambda,$$

y  $d\delta - p\beta = 1$ . Después de unos cálculos tenemos

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x} &= \delta \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - p(\tilde{y} + \lambda) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ y \frac{\partial}{\partial y} &= -\beta \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + d(\tilde{y} + \lambda) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}. \end{aligned}$$

**Lema B.5.** *Tenemos que  $\alpha(\tilde{v}; x, y) > d\varrho$ .*

*Demostración.* Basta con hacer la demostración para  $\tilde{v}$  de la forma

$$\tilde{v} = x^a y^b \left\{ \rho x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

donde  $a + b \left(\frac{p}{d}\right) > \varrho$ , dado que  $\tilde{v}$  es una combinación de ese tipo de campos vectoriales monomiales y la correspondiente  $\alpha$  sólo puede incrementar. Después de una cuenta tenemos que

$$\tilde{v} = \tilde{x}^{ad+bp} \Phi^{a\beta+b\delta} \left\{ (p\delta - \mu\beta) \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (\mu d - \rho p) (\tilde{y} + \lambda) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\},$$

y entonces  $\alpha(\tilde{\xi}; x, y) = ad + bp > d\varrho$ . □

Ahora vamos a escribir  $\text{In}(v; x, y)$  en las coordenadas  $\tilde{x}, \tilde{y}$ . Recordando la expresión (B.6), tenemos que

$$\text{In}(v; x, y) = \tilde{x}^{\tilde{\alpha}d + \chi p} \Phi^{\tilde{\alpha}\beta + \chi\delta - \kappa} \sum_{\tau=0}^{\kappa} \Phi^{\kappa - \tau} \left\{ \hat{\rho}_t \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \hat{\mu}_\tau \Phi \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\}, \quad (\text{B.7})$$

donde  $\hat{\rho}_\tau = \tilde{\rho}_\tau \delta - \tilde{\mu}_\tau \beta$  y  $\hat{\mu}_\tau = \tilde{\mu}_\tau d - \tilde{\rho}_\tau p$ . Recordemos que  $\Phi = \tilde{y} + \lambda$ . Notemos también que

$$\tilde{\alpha}d + \chi p = d \left( \varrho - \chi \left( \frac{p}{d} \right) \right) + \chi p = d\varrho.$$

De esto nosotros deducimos que

$$\alpha(\text{In}(\xi; \tilde{x}, \tilde{y})) = d\varrho.$$

De (B.7) podemos escribir  $v^* = \Phi^{-(\tilde{\alpha}\beta + \chi\delta - \kappa)} \tilde{x}^{-d\varrho} \text{In}(v; x, y)$  como

$$v^* = \sum_{t=0}^{\kappa} \Phi^{\kappa - t} \left\{ \hat{\rho}_t \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \hat{\mu}_t \Phi \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\} = \sum_{r=-1}^{\kappa} \tilde{y}^r \left\{ \rho_r^* \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \mu_r^* \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\}.$$

**Observación B.7.** Notemos que  $(\rho_\kappa^*, \mu_\kappa^*) = (\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_0) \neq 0$

**Lema B.6.** La altura principal  $H(v; \tilde{x}, \tilde{y})$  es el mínimo de los índices  $r$  tales que  $(\rho_r^*, \mu_r^*) \neq (0, 0)$ .

*Demostración.* El vértice crítico del polígono de Newton-Puiseux aparece en  $\text{In}(v; x, y)$ , dado que  $\alpha(\text{In}(v, x, y); \tilde{x}, \tilde{y}) = d\varrho$  y además  $\alpha(\tilde{v}; \tilde{x}, \tilde{y}) > d\varrho$ . Más aún,  $v^*$  es obtenida de multiplicar  $\text{In}(v; x, y)$  por  $\tilde{x}^{-d\varrho}$  y por una unidad que depende solo de  $\tilde{y}$ . Así la altura principal  $H(\xi; \tilde{x}, \tilde{y})$  es la altura principal de  $v^*$ . Lo cual finaliza la demostración.  $\square$

En vista de la observación (B.7), tenemos que  $H(v; \tilde{x}, \tilde{y}) \leq \kappa$ . Recordando que  $\kappa$  es la parte entera de  $\frac{\chi+1}{d}$ ,  $d \geq 2$  y que  $\chi \leq H(v; x, y)$ , con  $1 \leq H(v; x, y)$ , tenemos que

1. Si  $H(v; x, y) \geq 2$ , entonces  $H(v, \tilde{x}, \tilde{y}) < H(v; x, y)$ .
2. Si  $H(v; x, y) = 1$  y  $\chi < 1$  entonces  $H(v; \tilde{x}, \tilde{y}) < 1$ .
3. Si  $H(v; x, y) = 1 = \chi$  entonces  $H(v, \tilde{x}, \tilde{y}) \leq 1$ .

Vamos a analizar el último caso  $H(v; x, y) = 1 = \chi$  y suponemos que  $H(v; \tilde{x}, \tilde{y})$  para obtener una contradicción. Notemos que  $d = 2$ . Entonces

$$v^* = \Phi \left\{ \hat{\rho}_0 \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\mu}_0 \Phi \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\} + \left\{ \hat{\rho}_1 \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \hat{\mu}_1 \Phi \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\}.$$

Poniendo  $\Phi = \tilde{y} + \lambda$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (\rho_1^*, \mu_1^*) &= (\hat{\rho}_0, \hat{\mu}_0) \\ (\rho_0^*, \mu_0^*) &= (\lambda \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1, \lambda \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1) \\ (\rho_{-1}^*, \mu_{-1}^*) &= (0, \lambda(\lambda \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1)) \end{aligned}$$

La hipótesis implica que

$$0 = \lambda \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 = 2\lambda \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 = \lambda \hat{\rho} + \hat{\rho}_1.$$

En particular tenemos que  $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1$ . Ahora, vamos a recordar que  $(\rho_1, \mu_{-1}) = (0, \mu_{-1})$  y que por otro lado  $(\tilde{\rho}_1, \tilde{\mu}_1) = (\rho_{-1}, \mu_{-1})$ . Así  $\hat{\rho}_1 = -\mu_{-1}\beta$  y  $\hat{\mu}_1 = \mu_{-1}d$ . Entonces implica que  $\hat{\mu}_1 = 0$  implica que  $\mu_{-1} = 0$  y  $\hat{\rho}_1 = 0$ . Finalmente tenemos que todos los coeficientes  $\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_1, \hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1$  son cero. Pero esto es una contradicción a nuestra hipótesis. Entonces el caso del tipo bambú salvaje tampoco puede ocurrir, por lo que tenemos entonces el resultado de desingularización.

# Índice alfabético

- $\mathcal{A}$ -equivalencia, 48
- Anillo local de la rama, 103
- Aplicación holomorfa, 14
- Característica de una rama, 49
- Conjunto de valores diferenciales de Kähler, 54
- Cono tangente, 20
- Curva de contacto maximal, 38
- Curva integral, 58
- Curva singular, 20
- Curvas transversales, 30
- Divisor con cruzamientos normales, 116
- Enlace de la singularidad, 100
- Equisingularidad, 100
- Explosión de un punto, 31
- Exponente de contacto, 38
- Flujo complejo, 59
- Foliaciones dicríticas cuspidales, 68
- Foliaciones dicríticas pseudo-cuspidales, 68
- Función holomorfa, 13
- Germen de conjunto analítico, 20
- Germen de curva analítica, 20
- Germen de función, 14
- Gráfica de resolución, 110
- Gráfica dual, 110
- Invariante de Zariski, 53
- Isotopía, 102
- Línea tangente, 21
- Matriz jacobiana, 14
- Multiplicidad de intersección, 30
- Multiplicidad de la curva, 21
- Nube de puntos, 21
- Nudo, 101
- Orden, 16
- Parametrización, 21
- Parametrización corta, 51
- Pares de Puiseux, 102
- Polígono de Newton, 22
- Polinomio de Weierstrass, 17
- Punto singular, 20
- Puntos de cruzamientos normales, 36
- Puntos infinitamente próximos, 35
- Rama plana, 20
- Semigrupo, 49
- Singularidad presimple, 114
- Singularidad simple, 114
- Subconjunto analítico, 20
- Sucesión de multiplicidades, 107
- Transformado estricto de una curva, 32
- Transversalidad polar, 86
- Valoración de Krull, 74
- Valoración divisorial, 76
- Variedad analítica compleja, 15

# Bibliografía

- [1] M. Abate. *Local dynamics of singular holomorphic foliations*. ETS, 2009.
- [2] S.S. Abhyankar. *Local analytic geometry*. Volume 14. World Scientific, 2001.
- [3] J.M. Aroca, H. Hironaka and J.L.V. Córdoba. *Complex Analytic Desingularization*. Volume 450. Springer 2018.
- [4] M. Atiyah. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.
- [5] E. Garcia-Barroso. *Un théorème de décomposition pour les polaires génériques d'une courbe plane*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 326(1):5692, 1998.
- [6] K. Brauner. *Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher: II. Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen; III. Klassifikation der Singularitäten algebroider Kurven; IV. Die Verzweigungsgruppen*. Abhandlungen Hamburg, 1928.
- [7] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe. *Le nombre de modules du germe de courbe plane  $x^a + y^b = 0$* . Mathematische Annalen, 279(3):535-551, 1998.
- [8] E. Brieskorn, H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves: Translated by John Stillwell*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] J.W. Bruce, T.J. Gaffney. *Simple singularities of mappings  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$* . Journal of the London Mathematical Society, 2(3):465-474, 1982.
- [10] W. Burau. *Kennzeichnung der schlauchknoten*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, volume 9, pages 125-133. Springer, 1933.
- [11] C. Camacho, A. Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad. *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. Journal of differential geometry, 20(1):143-174, 1984.
- [13] C. Camacho, P. Sad. *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Annals of mathematics, 115(3):579-595, 1982.
- [14] A. Campillo, F.V. Kuhlmann, B. Teissier. *Valuation theory in interaction*. 2014.
- [15] F. Cano. *Blowings-Up of Vector Fields*. Lecture Notes on O-Minimal Structures and Real Analytic Geometry, pages 1-41. Springer New York, NY, 2012.
- [16] F. Cano, D. Cerveau, J. Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Belin Education-Echelles, 2013.
- [17] F. Cano, N. Corral. *Dicritical logarithmic foliations*. Publicacions matemàtiques, pág. 87-102, 2006.

- [18] F. Cano, N. Corral, R. Mol. *Local polar invariants for plane singular foliations*. *Expositiones Mathematicae*, 37(2):145-164, 2019.
- [19] F. Cano. *Introducción a la Geometría Analítica Local*. Pontificia Universidad Católica del Perú. Departamento de Ciencias. 2011.
- [20] Casas-Alvero, E. *On the singularities of polar curves*. *Manuscripta mathematica*, 43(2-3):167-190, 1983.
- [21] Casas-Alvero, E. *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*. *Mathematische Annalen*, 287(1):429-454, 1990.
- [22] Casas-Alvero, E. *Singularities of plane curves*. Volume 276. Cambridge University Press, 2000.
- [23] A. Chenciner. *Courbes algébriques planes*. Springer, 2018.
- [24] N. Corral. *Courbes polaires d'un feuilletage singulier* *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 331(1):51-54, 2000.
- [25] N. Corral. *Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers*. *Annales de l'institut Fourier*, volume 53, pages 787-814, 2003.
- [26] N. Corral, P. Fernández-Sánchez. *Isolated invariant curves of a foliation* *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(4):1125-1132, 2006.
- [27] T. De Jong, G. Pfister. *Local analytic geometry: Basic theory and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] P. Deligne, D. Mumford. *The irreducibility of the space of curves of given genus*. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 36(1):75-109, 1969.
- [29] C. Delorme *Sur les modules des singularités des courbes planes* *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 106:417-446, 1978.
- [30] S. Ebey *The classification of singular points of algebraic curves*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 118:454-471, 1965.
- [31] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry*. Volume 150. Springer Science & Business Media, 2013.
- [32] C. Favre, M. Jonsson. *The valuative tree*. Springer, 2004.
- [33] G. Fischer *Plane algebraic curves.*, volume 15. American Mathematical Society, 2001.
- [34] K. Fritzsche, H. Grauert *From holomorphic functions to complex manifolds*, volume 213. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] W. Fulton. *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*. Addison-Wesley, 1989.
- [36] X. Gomez-Mont, L. Ortiz-Bobadilla. *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, volume 3. Sociedad Matemática Mexicana, 1989.
- [37] J.M. Granger. *Sur un espace de modules de germe de courbe plane*. *Bull. Sc. math*, 2:3-16, 1979.
- [38] R. C. Gunning, H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*, volume 368. American Mathematical Society, 2009.
- [39] A. Hefez, M. E. Hernandez *Analytic classification of plane branches up to multiplicity 4*. *Journal of Symbolic Computation*, 44(6):626-634, 2009.

- [40] A. Hefez, M. E. Hernandez. *The analytic classification of plane branches* Bulletin of the London Mathematical Society, 43(2):289-298, 2011.
- [41] M.E. Hernandez, M.E. Rodrigues Hernandez. *The Analytic Classification of Plane Curves* arXiv preprint arXiv:2010.04874, 2020.
- [42] Y. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*. Volume 86. American Mathematical Society, 2008.
- [43] J. Jaurez-Rosas, L. Ortiz-Bobadilla *Realization of singular curves in dicritic foliations with prescribed involutions* Bulletin des Sciences Mathématiques, 163:102896, 2020.
- [44] E. Kähler. *Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle*. Mathematische Zeitschrift, 30(1):188-204, 1929.
- [45] J. Kollár. *Lectures on resolution of singularities (AM-166)*, volume 166. Princeton University Press, 2009.
- [46] M. Merle. *Invariants polaires des courbes planes*. Inventiones mathematicae, 41(2):103-111, 1977.
- [47] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Number 61. Princeton University Press, 1968.
- [48] L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-González, S.M. Voronin *On Camacho-Sad's Theorem about the existence of a separatrix*. International Journal of Mathematics, 21(11):1413-1420, 2010.
- [49] L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-González, S.M. Voronin *Formal and analytic normal forms of germs of holomorphic nondicritic foliations*. Journal of Singularities, 9:168-192, 2014.
- [50] R. Peraire *Moduli of plane curve singularities with a single characteristic exponent* Proceedings of the American Mathematical Society, 126(1):25-34, 1998.
- [51] F. Pham. *Singularités des courbes planes: une introduction à la géométrie analytique complexe*. Centre de mathématiques de l'École de polytechnique, 1972.
- [52] J.C. Rebelo, H. Reis *Local theory of holomorphic foliations and vector fields* arXiv preprint arXiv:1101.4309, 2011.
- [53] A. Seidenberg *Reduction of singularities of the differential equation  $Ady = Bdx$*  American Journal of Mathematics, 90(1):248-269, 1968.
- [54] M. Spivakosky *Valuations in function fields of surfaces* American Journal of Mathematics, 112(1):107-156, 1990.
- [55] C.T.C Wall *Singular points of plane curves*, volume 63. Cambridge University Press, 2004.
- [56] O. Zariski. *On the topology of algebroid singularities*. American Journal of Mathematics, 54(3):453-465, 1932.
- [57] O. Zariski. *Studies in Equisingularity I Equivalent Singularities of Plane Algebroid Curves*. American Journal of Mathematics, 87(2): 507-536, 1965.
- [58] O. Zariski. *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 56(3):781, 1966.
- [59] O. Zariski. *Studies in Equisingularity III: Saturation of Local Rings and Equisingularity*. American Journal of Mathematics, 90(3):961-1023, 1968.
- [60] O. Zariski. *The moduli problem for plane branches*. American Mathematical Society, 2006.