Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Introducción a estructuras algebraicas reticuladas

T E S I S

que para obtener el título de:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Victor Pérez Retana

TUTOR

Dr Hugo Alberto Rincón Mejía

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Para mis tíos, que siempre han sido mi ejemplo a seguir. Para mi hermana, espero ser un buen ejemplo para ti.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor el Doctor Hugo Alberto Rincón Mejía, quien con sus conocimientos y apoyo me guió a través de cada una de las etapas de este proyecto.

Por último, quiero agradecer a mis amigos y a mi familia, por apoyarme aún cuando mi modo era el mejor. En especial, quiero hacer mención de mi madre Karen Retana Pérez y abuela María Guadalupe Hernández, que siempre estuvieron ahí para darme palabras de apoyo y un abrazo reconfortante para renovar energías.

Muchas gracias a todos.

Prólogo

Durante los cursos de álgebra superior y álgebra moderna del plan de estudios de la carrera de matemáticas, se nos presentan los conceptos de estructuras algebraicas como monoides, grupos, anillos y conceptos de relaciones de orden en un conjunto tales como orden parcial, total y buen orden. Sin embargo, los conjuntos a los que se les da dicha estructura o relación son estudiados usando sólo las propiedades derivadas de esa estructura o relación dada. Este trabajo es una introducción a la teoría de anillos ordenados reticulados donde podremos unir la estructura y la relación de orden para profundizar en el estudio del conjunto a través de la combinación de ambas. Principalmente se presentan algunos fundamentos e ideas sobre estos anillos empezando con un estudio inicial de los grupos asignados con un orden y las diferentes características de ese orden hasta llegar al caso cuyo orden sea una retícula. Al estudiar con detalle los grupos podremos hacer el salto a los anillos, los cuales son un concepto clave en el álgebra, se procederá a trabajar con estructuras conocidas en la teoría de anillos como los radicales e ideales y sus versiones resultantes de trabajar con un orden. Si bien la idea es unir la estructura y el orden, nos enfocaremos en como el orden enriquece a la estructura y poder ver el como darle orden a un anillo sin ninguna característica particular puede llegar a ser desde conmutativo hasta Artiniano. Todos los apartados serán acompañados de ejemplos que faciliten el entendimiento y comprensión de los conceptos y cada demostración será lo más detallada posible para que no queden vacíos conceptuales pero intentando no caer en un desarrollo innecesario y repetitivo en las demostraciones. Para esto se dan por sentado conocimientos básicos de grupos, anillos, espacios vectoriales y k-álgebras.

Índice general

Capítulo 1

Grupos y anillos ordenados

En este capítulo, introduciremos varios sistemas algebraicos ordenados y presentaremos algunas propiedades básicas e importantes de estos sistemas.

1.1. Retículas

Definición: Una relación $\leq$ en un conjunto no vacío A, se llama un *orden parcial* en A si las siguientes propiedades son satisfechas.

(1) (reflexividad) $a \leq a$ para toda $a \in A$,

(2) (antisimetría) $a \leq b$, $b \leq a$ implica $a = b$ para todo $a, b \in A$,

(3) (transitividad) $a \leq b$, $b \leq c$ implica $a \leq c$ para todo $a, b, c \in A$.

Definición: Un conjunto A con un orden parcial $\leq$ se llama *conjunto parcialmente ordenado.*

Uno puede escribir $b \geq a$ para denotar $a \leq b$ y $a < b$ (o $b > a$) para decir que $a \leq b$ y $a \neq b$. Si pasa que $a \leq b$ o $b \leq a$, entonces decimos que a y b son *comparables*, de lo contrario son *incomparables*.

Definición: Se dice que un orden parcial $\leq$ en un conjunto A es un *orden total* si cualesquiera dos elementos en A son comparables. En el caso de que $\leq$ sea un orden total, se dice que A es un conjunto *totalmente ordenado o una cadena.*

Definición: Supongamos que dos ordenes parciales, $\leq$ y $\preceq$, son definidos en el mismo conjunto A, entonces decimos que $\preceq$ es una *extensión de* $\leq$ si, para todo $a, b \in A$, $a \leq b$ implica que $a \preceq b$.

Un orden parcial $\leq$ en A induce un orden parcial en cualquier subconjunto no vacío B de A, esto es, para cualquier $a, b \in B$, definimos $a \leq b$ en B si $a \leq b$ con respecto al orden parcial original de A. El orden parcial inducido en B es denotado por el mismo símbolo $\leq$.

Definición: Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado A. Una *cota superior (cota inferior)* de B en A es un elemento $x \in A$ $(y \in A)$ tal que $b \leq x$

$(b \geq y)$ para cada $b \in B$. Nosotros denotaremos que $x \in A$ $(y \in A)$ es una cota superior (cota inferior) de B por $B \leq x$ $(B \geq y)$.

Definición: Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado A. Se dice que B es *acotado en* A si B tiene tanto cotas superiores como cotas inferiores en A.

El conjunto de todas las cotas superiores (inferiores) de B es denotado por $U_A(B)$ $(L_A(B))$.

Si $B = \phi$ donde ϕ denota al conjunto vacío, entonces $U_A(B) = L_A(B) = A$.

Definición: Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado A. Se dice que un elemento $u \in B$ es el *menor elemento (mayor elemento)* de B si $u \leq b$ $(u \geq b)$ para cada $b \in B$.

Un subconjunto B de un conjunto parcialmente ordenado puede no tener elemento menor (mayor), pero de existir, entonces este sería único debido a la antisimetría de los órdenes parciales.

Definición: Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado A. Se dice que un elemento $w \in B$ es un *elemento máximo (mínimo)* de B si para cualquier $b \in B$, $b \geq w$ $(b \leq w)$ implica que $b = w$, es decir, no hay elementos de B estrictamente mayores (menores) que w.

Un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado puede tener más de un elemento mínimo (máximo).

Definición: Sea L un conjunto parcialmente ordenado con orden parcial $\leq$. Se dice que $\leq$ es un *orden reticular* y que L es una *retícula* bajo $\leq$ si para cualquier $a, b \in L$ el conjunto $U_L(\{a, b\})$ tiene elemento menor y el conjunto $L_L(\{a, b\})$ tiene elemento mayor. Es decir, para cualesquiera $a, b \in L$ el subconjunto $\{a, b\}$ tiene una menor cota superior y una mayor cota inferior las cuales son denotadas de la siguiente manera

$$a \vee b \text{ y } a \wedge b,$$

respectivamente.

$a \vee b$ es llamado el *supremo* de a y b, y $a \wedge b$ es llamado el *ínfimo* de a y b.

Definición: Un subconjunto no vacío B de una retícula L es llamado una *subretícula* de L si para cualesquiera $a, b \in B$, $a \vee b, a \wedge b \in B$.

Definición: Sea L una retícula, se dice que:

(1) L es *distributiva* si para cualesquiera $a, b, c \in L$,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

y

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

(2) L es *completa* si cada subconjunto de L tiene tanto supremo como ínfimo.

En una retícula L, para cualesquiera $a, b, c \in L$, por la definición de retícula, de cota superior y de mayor cota inferior, tenemos que

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

y

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Esto es cierto para cualquier cantidad finita de elementos de L, por lo que sólo usamos $a_1 \vee ... \vee a_n$ y $a_1 \wedge ... \wedge a_n$ para denotar el supremo e ínfimo de $\{a_1, ..., a_n\}$ respectivamente.

El siguiente es un ejemplo que ilustra algunos conceptos definidos arriba.

Ejemplo 1.1.

(1) Para un conjunto dado A, sea $P_A = \{B|B \text{ es un subconjunto de } A\}$, el conjunto potencia de A. Para dos subconjuntos B, C de A, definimos $B \leq C$ si $B \subseteq C$, donde "$B \subseteq C$"significa que B es un subconjunto de C. Entonces $\leq$ es un orden reticular y para todo B, $C \in P_A$, $B \wedge C = B \cap C$ y $B \vee C = B \cup C$. Más aún, P_A es una retícula completa y distributiva.

Es claro que $\subseteq$ es un orden parcial por lo que sólo veremos que es reticular, completo y distributivo.

Para todo B, $C \in P_A$ es claro que B, $C \subseteq B \cup C$, entonces por definición B, $C \leq B \cup C$. Sea $D \in P_A$ tal que B,$C \leq D$, entonces B, $C \subseteq D$. Es decir, si $b \in B$, entonces $b \in D$ y de manera similar si $c \in C$, entonces $c \in D$ por lo que $B \cup C \subseteq D$, lo que quiere decir que $B \cup C \leq D$. En efecto, se tiene que $B \vee C = B \cup C$.

De igual manera es claro que $B \cap C \subseteq B$, C por lo que $B \cap C \leq B$, C. Sea $F \in P_A$ tal que $F \leq B$, C, entonces $F \subseteq B$, C. Es decir, para todo $x \in F$ se tiene que $x \in B$ y $x \in C$ por lo que $x \in B \cap C$, luego $F \subseteq B \cap C$ y por tanto $F \leq B \cap C$. En efecto, $B \wedge C = B \cap C$ y P_A con $\leq$ es un orden reticular.

Dado que la intersección y la unión siempre están definidas y pueden extenderse para familias arbitrarias de dos conjuntos, se tiene que el orden también es completo. P_A también es una retícula distributiva.

Si A tiene más de un elemento, entonces P_A no es un conjunto totalmente ordenado dado que para dos elementos diferentes a, $b \in A$, los elementos $\{a\}$ y $\{b\}$ de P_A no son comparables.

(2) Sea A un conjunto no vacío. Definamos $\leq$ en A por $a \leq b$ si $a = b$, para todas $a, b \in A$. Entonces $\leq$ es un orden parcial en A y si A tiene más de un elemento entonces no es un orden reticular.

Sean a, b, $c \in A$. Es claro que $a = a$ por lo que $\leq$ es reflexivo. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, es decir, $a = b$ y $b = a$ entonces es claro que $a = b$ por lo que $\leq$ es antisimétrico. Por último, si $a \leq b \leq c$, entonces $a = b = c$ por lo que $a = c$. Por lo tanto $\leq$ también es transitivo y así A es un conjunto parcialmente ordenado.

Supongamos que $a, b \in A$ son elementos distintos, entonces $U_A(a) = \{a\}$ y $U_A(b) = \{b\}$, por lo que $U_A(a) \cap U_A(b) = \phi$, lo que implica que no puede haber un supremo de a y b, por lo que A no es un conjunto reticulado.

Es buen momento para mencionar el Lema de Zorn, que es equivalente al Axioma de elección.

Teorema 1.1. ***(Lema de Zorn)***. *Sea A un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Si cada subconjunto de A que sea una cadena tiene una cota superior en A entonces A contiene un elemento máximo.*

1.1.1. Grupos reticulados y retículas vectoriales

En esta sección introduciremos los grupos parcialmente ordenados, los grupos reticulados, las retículas vectoriales y consideraremos algunas propiedades básicas de estos sistemas algebraicos ordenados. Siempre usaremos la adición para denotar la operación del grupo aunque ésta no siempre sea conmutativa.

Definiciones y propiedades básicas

Definición: Un *grupo parcialmente ordenado* G es un grupo que es a la vez un conjunto parcialmente ordenado bajo $\leq$, de manera que G satisface la siguiente ley de monotonía: Para cualesquiera $a, b, c \in G$,

$$a \leq b \text{ implica que } (a+c) \leq (b+c) \text{ y } (c+a) \leq (c+b), \text{ para todo } c \in G.$$

Si G es un grupo y un conjunto parcialmente ordenado bajo $\leq$, entonces podemos asignarle a G un nuevo orden $\leq^{op}$ que se define como $a \leq^{op} b$ si y sólo si $b \leq a$.

Definición: Al grupo con el orden anterior se le denomina *grupo opuesto* de G y se denota G^{op}.

Definición: Un grupo parcialmente ordenado G es un *grupo reticulado* (l-grupo) si el orden parcial es una retícula, y G es un *grupo totalmente ordenado* (o-grupo) si el orden parcial es un orden total.

Definición: Sea un grupo parcialmente ordenado G.

(1) Un elemento g es llamado *positivo* si $g \geq 0$, donde 0 es el elemento neutro de G.

(2) Un elemento g es llamado *estrictamente positivo* si $g > 0$.

(3) El conjunto $G^+ = \{g \in G : g \geq 0\}$ se conoce como el *cono positivo* de G, y se define $-G^+ = \{g \in G : -g \in G^+\}$, el *cono negativo* de G.

Algunas veces denotaremos $a+b$ como ab, omitiendo el símbolo de suma.

Lema 1.1. *Sea G un l-grupo*

(1) Si $g \geq 0$ entonces $-g \leq 0$.

(2) Para cualesquiera a, b, $c \in G$,
i) $c + (a \wedge b) = (c+a) \wedge (c+b)$,

ii) $(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$,
iii) $c + (a \vee b) = (c + a) \vee (c + b)$,
iv) $(a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c)$.

Demostración.

(1) Sea $0 \leq g \in G$, como G es un grupo ordenado podemos agregar $-g$ en ambos lados de la desigualdad y tenemos que:

$$0 - g \leq g - g.$$

Lo que implica que $-g \leq 0$.

(2) Sean a,b,$c \in G$, tenemos lo siguiente:

$$a \wedge b \leq a,\, b \qquad \text{y} \qquad a,\, b \leq a \vee b.$$

Entonces

$$c + (a \wedge b) \leq (c + a),\, (c + b) \qquad \text{y} \qquad (c + a),\, (c + b) \leq c + (a \vee b).$$

Por lo que por la definición de supremo e ínfimo, se tiene que

$$c + (a \wedge b) \leq (c + a) \wedge (c + b) \qquad \text{y} \qquad (c + a) \vee (c + b) \leq c + (a \vee b).$$

Por otro lado

$$(c + a) \wedge (c + b) \leq (c + a),\, (c + b) \qquad \text{y} \qquad c + a,\, c + b \leq (c + a) \vee (c + b).$$

Entonces

$$-c + ((c + a) \wedge (c + b)) \leq a,\, b \qquad \text{y} \qquad a,\, b \leq -c + ((c + a) \vee (c + b)).$$

Por lo que por la definición de supremo e ínfimo, se tiene que

$$-c + ((c + a) \wedge (c + b)) \leq a \wedge b \qquad \text{y} \qquad (a \vee b) \leq -c + ((c + a) \vee (c + b)).$$

Por lo tanto

$$(c + a) \wedge (c + b) \leq c + (a \wedge b) \qquad \text{y} \qquad c + (a \vee b) \leq (c + a) \vee (c + b).$$

De esta manera tenemos la demostración de i) y iii), la demostración de ii) y iv) son análogas.

Como muestran los siguientes dos Teoremas, los conos positivos caracterizan a los grupos parcialmente ordenados.

Teorema 1.2. *Para un grupo parcialmente ordenado G, el cono positivo G^+ satisface las siguientes tres condiciones:*

(1) $(G^+) + (G^+) \subseteq (G^+)$,

(2) $g + (G^+) + (-g) \subseteq G^+$, *para todo* $g \in G$.

(3) $G^+ \cap -G^+ = \{0\}$.

Demostración.

(1) Sean g, $f \in G^+$. Entonces, como G es un grupo parcialmente ordenado y cumple la ley de monotonía, $0 \leq f \leq f + g$, por lo que $0 \leq f + g$. Por lo tanto $f + g \in G^+$.

(2) Sea $f \in G^+$. Entonces:

$$0 \leq f \tag{1.1}$$
$$g + 0 \leq g + f \tag{1.2}$$
$$g + 0 + (-g) \leq g + f + (-g) \tag{1.3}$$
$$0 \leq g + f + (-g) \tag{1.4}$$

Así, $g + f + (-g) \in G^+$, es decir, $g + (G^+) + (-g) \subseteq G^+$.

(3) Claramente $0 \in G^+ \cap -G^+$. Supongamos que $g \in G^+ \cap -G^+$. Entonces $g \geq 0$ y $-g \geq 0$, entonces $g \geq 0$ y $g \leq 0$ y por antisimetría del orden $g = 0$.

Teorema 1.3. *Sea G un grupo y P un subconjunto de G que satisface las siguientes 3 condiciones:*

(1) $P + P \subseteq P$,

(2) $g + P + (-g) \subseteq P$, para todo $g \in G$,

(3) $P \cap -P = \{0\}$, donde $-P = \{g \in G : -g \in P\}$.

Entonces $\leq$ definida por $a \leq b$ si $b - a \in P$, es un orden parcial en G y G se convierte en un grupo parcialmente ordenado con cono positivo P.

Demostración.

Veamos primero que $\leq$ es un orden parcial.
(a) Sea $a \in G$, entonces $a - a = 0$ y por hipótesis $0 \in P$ por lo que $a \leq a$ y así se tiene que $\leq$ es reflexiva.

(b) Sean a, $b \in G$ tales que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces, por definición, $a - b$ y $b - a \in P$ pero $b - a = -(a - b)$ lo que implica que $a - b \in P \cap -P$ y por (3) tenemos que $a = b$. Así, $\leq$ es simétrica.

(c) Sean a, b, $c \in G$ tales que $a \leq b$ y $b \leq c$.

Como $a \leq b$ y $b \leq c$ tenemos que $b - a$, $c - b \in P$. Por (1), $(c - b) + (b - a) \in P + P \subseteq P$, por lo que $c - a \in P$. Por definición, $a \leq c$ y así $\leq$ es transitiva.
Por lo tanto, tenemos que $\leq$ es un orden parcial.
Ahora veamos que $\leq$ le da a G estructura de grupo parcialmente ordenado.
Sean a, b, $c \in G$ tales que $a \leq b$.
Como $a \leq b$, $b - a \in P$ y por (2),

$$(c + b) - (c + a) = c + (b - a) + (-c) \in P,$$

entonces $c + a \leq c + b$.

De igual manera

$$(b + c) - (a + c) = b + c - c - a = b - a \in P,$$

por lo que $a + c \leq b + c$.

Por lo tanto G es un grupo parcialmente ordenado respecto al orden $\leq$.

Claramente $G^+ = \{g \in G \mid g \geq 0\} = P$.

Lema 1.2. *Sea G un grupo parcialmente ordenado. Supongamos que $g \vee 0$ existe para todo $g \in G$. Entonces G es un l-grupo y para todo f, $g \in G$*

$$g \vee f = ((g - f) \vee 0) + f$$

y

$$g \wedge f = f - [(-g + f) \vee 0]$$

Demostración.

Por definición, tenemos que $(g - f) \vee 0 \geq g - f, 0$ y como estamos trabajando en un grupo con orden parcial tenemos que:

$(g - f) \vee 0 \geq g - f$ implica que $(g - f) \vee 0 + f \geq g$ y $(g - f) \vee 0 \geq 0$ luego, $((g - f) \vee 0) + f \geq f$. Entonces $((g - f) \vee 0) + f$ es una cota superior de g y f. Sea $u \in G$ otra cota superior de g y f, entonces se tiene que:

$u \geq g$ implica que $u - f \geq g - f$ y $u \geq f$ luego $u - f \geq 0$ por lo tanto $u - f$ es cota superior de $g - f$ y de 0. Entonces $(u - f) \geq (g - f) \vee 0$ lo que implica que $u \geq (g - f) \vee 0 + f$ por lo tanto $g \vee f = [(g - f) \vee 0] + f$.

Por definición, tenemos que $(-g + f) \vee 0 \geq -g + f, 0$ y como estamos trabajando en un grupo con orden parcial tenemos que:

$(-g + f) \vee 0 \geq -g + f$ implica que $f - ((g - f) \vee 0) \leq g$ y $(g - f) \vee 0 \geq 0$ luego, $f - ((g - f) \vee 0) \leq f$. Entonces $f - ((g - f) \vee 0)$ es una cota inferior de g y f. Sea $u \in G$ otra cota inferior de g y f, entonces se tiene que:

$u \leq g$ implica que $-u + f \geq -g + f$ y $u \geq f$ implica $-u + f \geq 0$ por lo tanto $-u + f$ es cota superior de $-g + f$ y de 0. Entonces $(-u + f) \geq (-g + f) \vee 0$ lo que implica que $u \leq f - [(-g + f) \vee 0]$ por lo tanto $g \wedge f = f - [(-g + f) \vee 0]$.

Teorema 1.4. *Supongamos que G es un grupo parcialmente ordenado con cono positivo P.*

(1) G es un l-grupo si y sólo si $G = \{a - b : a, b \in P\}$ y P es una retícula bajo el orden parcial inducido por G.

(2) G es un o-grupo si y sólo si $G = P \cup -P$.

Demostración.

(1) Supongamos que G es un l-grupo. Claramente $G \supseteq \{a-b : a, b \in P\}$

Sea $g \in G$ y definamos a $f = g \wedge 0$, claramente $-f \in P$ y por definición de ínfimo $g - f \in P$.

Es claro que $g = (g-f) - (-f)$ por lo que $G = \{a-b : a, b \in P\}$. No es difícil de ver que el supremo e ínfimo de elementos positivos se mantiene positivo por lo que P es una retícula bajo el orden de G.

Ahora supongamos que $G = \{a-b : a, b \in P\}$ y que P es una retícula con el orden inducido de G.

Sea $g \in G$, entonces $g = x - y$ con x, $y \in P$. Tomemos $z = x \vee y \in P$. Veamos que $g \vee 0 = z - y$.

Es claro que $z - y \geq 0, g$. Ahora supongamos que $u \in G$ cumple también que $u \geq 0, g$. Como G es un grupo con orden, se cumple la ley de monotonía y se tiene que:

$$u \geq 0 \text{ implica que } u + y \geq y$$

y

$$u \geq g = x - y \text{ implica que } u + y \geq x$$

Luego, $u + y$ es una cota superior de x y y, lo que la hace mayor o igual que su supremo, es decir, $u+y \geq x \vee y = z$ por lo tanto $u \geq z - y$. Por lo tanto $g \vee 0 = z - y$.

De manera que se tiene que para todo $g \in G$ existe $g \vee 0$. El Teorema queda demostrado usando el Lema 1.2.

(2) Si G es un o-grupo tenemos que para cualesquiera dos elementos de G, estos son comparables; particularmente con el 0. Entonces si $g \in G$, se cumple que $g \leq 0$ o $g \geq 0$ por lo tanto $g \in P$ o $g \in -P$ respectivamente. Así, $G = P \cup -P$.

Recíprocamente si $G = P \cup -P$ y f, $g \in G$ se tiene que $g - f \in P$ o $g - f \in -P$ en cuyo caso indicaría que $g \geq f$ o $g \leq f$ respectivamente, entonces G es un o-grupo.

Definición: Un grupo parcialmente ordenado es llamado *dirigido* si cada elemento es diferencia de dos elementos positivos. Un l-grupo es dirigido por el Teorema 1.4. Sin embargo, un grupo parcialmente ordenado dirigido puede no ser un l-grupo.

Definición: Se dice que un grupo parcialmente ordenado G es *arquimediano* si para todo a, $b \in G^+$, $na \leq b$ para toda $n \in Z^+$ implica que $a = 0$, donde Z^+ es el conjunto de los enteros positivos.

Usualmente usaremos la notación (G, P) para denotar un grupo parcialmente ordenado o l-grupo con el cono positivo P.

Ilustraremos los grupos ordenados y los l-grupos con unos pocos ejemplos. P siempre denotará al cono positivo de un grupo ordenado.

Ejemplo 1.2

(1) Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado bajo el orden parcial $\leq$. Entonces $\leq$ puede extenderse a un orden total en A, es decir, existe un orden total en A el cual es una extensión de $\leq$.

Consideremos

$$a = \{\leq_j \mid \leq_j \text{ es una relación de orden que extiende a } \leq\}$$

Digamos que $a = \{\leq_j\}_{j \in J}$.
Entonces a está ordenado parcialmente con la inclusión mediante:

$$\leq_i \subseteq \leq_j \text{ si y sólo si } x \leq_i y \text{ implica que } x \leq_j y$$

Y es claro que $a \neq \phi$ pues $\leq \in a$.
Sea $C = \{\leq_i\}_{i \in I}$ una cadena en a. Veamos que $\cup C$ es una cota superior de C

Sean a, b, $c \in A$. Notemos que $a \leq_{\cup C} b$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a \leq_i b$

(I) $a \leq_i a$ para toda $i \in I$ por lo que $a \leq_{\cup C} a$ y entonces $\cup C$ es una relación reflexiva.

(II) Si $a \leq_{\cup C} b$ y $b \leq_{\cup C} a$ entonces existen i,$j \in I$ tales que $a \leq_i b$ y $b \leq_j a$, como C es una cadena, sin pérdida de generalidad $\leq_i \subseteq \leq_j$ por lo que $a \leq_j b$ y por tanto $a = b$. Es decir, $\cup C$ es una relación antisimétrica.

(III) Supongamos que $a \leq_{\cup C} b$ y $b \leq_{\cup C} c$ entonces existen i,$j \in I$ tales que $a \leq_i b$ y $b \leq_j c$, como C es una cadena, sin pérdida de generalidad $\leq_i \subseteq \leq_j$ por lo que $a \leq_j b$ y por tanto $a \leq_j c$ lo que implica que $a \leq_{\cup C} c$. Es decir, $\cup C$ es una relación transitiva.

Por lo tanto $\cup C$ es un orden parcial en A. Es claro que $\leq_i \subseteq \cup C$ para toda $i \in I$, por lo que también es una cota superior de C y además extiende a $\leq$ por lo que $\cup C \in a$.

Por el Lema de Zorn, existe un orden máximo de A $\leq_m$ que extiende a $\leq$. Veamos que $\leq_m$ es un orden total.

Supongamos que a, $b \in A$ son incomparables. Entonces tomemos $U(b)$ el conjunto de las cotas superiores de b y $L(a)$ el conjunto de cotas inferiores de a. Aseguramos que ningún elemento $x \in U(b)$ es menor o igual a algún elemento $y \in L(a)$, de lo contrario

$$b \leq_m x \leq_m y \leq_m a$$

y por tanto a y b serían comparables.
Extendamos $\leq_m$ añadiendo

$$\{(x, y) | x \in L(a), y \in U(b)\}.$$

De manera que

$$\leq_n = \leq_m \cup \{(x, y)\} | x \in L(a), y \in U(b).$$

Veamos que $\leq_n$ es un orden parcial y por tanto una extensión de $\leq_m$.

Sean x, y. $z \in A$ entonces:

(I) Dado que $a \leq_m a$ se obtiene la relación $x \leq_n x$ y entonces $\leq_n$ es una relación reflexiva.

(II) Si $x \leq_n y$ y $y \leq_n x$ pero $x \neq y$.

No puede pasar que $x \leq_m y$ y $x \leq_m y$ pues $\leq_m$ es una relación anti simétrica.

El caso en el que $x \in L(a)$ y $y \in U(b)$ y al mismo tiempo $y \in L(a)$ y $x \in U(b)$ tampoco puede pasar pues se tendría que

$$x \leq_m a \text{ y } b \leq_m y \text{ además de } y \leq_m a \text{ y } b \leq_m x$$

y por transitividad de $\leq_m$ se tendría que $b \leq_m a$ lo cual es una contradicción.

Luego, supongamos que $x \leq_m y$ y que $y \in L(a)$ y $x \in U(b)$ por lo que

$$x \leq_m y \text{ además de } y \leq_m a \text{ y } b \leq_m x$$

De donde se obtiene $b \leq_m a$ lo que sería una contradicción.

Luego, supongamos que $x \in L(a)$ y $y \in U(b)$ y $y \leq_m x$ por lo que

$$x \leq_m a \text{ y } b \leq_m y \text{ además de } y \leq_m x$$

De donde se obtiene $b \leq_m a$ lo cual sería una contradicción. Por lo tanto no puede pasar que $x \leq_n y$ y $y \leq_n x$ pero $x \neq y$. Es decir, $\leq_n$ es una relación antisimétrica.

(III) Supongamos que $x \leq_n y$ y $y \leq_n z$: .

Si $x \leq_m y$ y $y \leq_m z$ dado que $\leq_m$ es transitiva se tendría que $x \leq_m z$ y por tanto $x \leq_n z$.

Si $x \leq_m y$ y $y \leq_m a$ y $b \leq_m z$ entonces obtenemos que $x \leq_m a$ y $b \leq_m z$ por lo que $x \in L(a)$ y $z \in U(b)$ por tanto $x \leq_n z$.

Si $x \leq_m a$ y $b \leq_m y$ y $y \leq_m z$ entonces obtenemos que $x \leq_m a$ y $b \leq_m z$ por lo que $x \in L(a)$ y $z \in U(b)$ por tanto $x \leq_n z$.

Si $x \leq_m a$ y $b \leq_m y$ y $x \leq_m y$ y $y \leq_m a$ nos da la contradicción que $b \leq_m a$ por lo que este caso no es posible.

Y por tanto $x \leq_n z$ es decir, $\leq_n$ es una relación transitiva de manera que $\leq_n$ es un orden parcial en A. Es claro que $\leq_m \subseteq \leq_n$ por lo que también es una cota superior de C y además extiende a $\leq$ lo cual es una contradicción pues $\leq_m$ era un elemento máximo. Por tanto $\leq_m$ es un orden total que extiende a $\leq$.

(2) Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cada subconjunto de A que sea una cadena tiene una cota inferior en A, entonces A contiene un elemento mínimo.

Tomemos $\leq^{op}$ el orden opuesto antes definido, entonces para cada subconjunto de A que sea una cadena tiene una cota superior con $\leq^{op}$, por lo cual por el Lema de Zorn, A tiene un elemento máximo con $\leq^{op}$, es decir, A tiene un elemento mínimo con $\leq$.

(3) Sea G el grupo aditivo de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, con el orden usual entre números reales. Entonces G es un grupo arquimediano totalmente ordenado.

Es claro que tanto $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ son grupos totalmente ordenados, gracias al orden usual entre números reales.

Para ver que $\mathbb{Z}$ es arquimediano, usaremos el Algoritmo de la división. Sean m,$n \in \mathbb{Z}^+$, por el algoritmo de la división, existen q, $r \in \mathbb{Z}^+$ con $0 \leq r < m$ tales que $n = mq + r$, luego $m - r > 0$ por lo que se tiene que

$$n < mq + r + (m - r) = mq + m = m(q + 1)$$

con lo que probamos lo que queríamos.

Para ver que $\mathbb{Q}$ es arquimediano tomaremos a $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$. Sean $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, entonces, p,q,r,$s \in \mathbb{N}$. Por lo que es buscar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ es equivalente a buscar dicho n tal que $n(ps) > (rq)$ lo cual se cumple al demostrar anteriormente que $\mathbb{Z}$ es arquimediano.

Para ver que $\mathbb{R}$ es arquimediano, usaremos el Axioma de completitud de $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es un campo, nuestra definición de grupo arquimediano es equivalente a que para todo $x \in \mathbb{R}^+$ exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \geq n$ para todo natural, entonces por Axioma del supremo, debe existir α como supremo de $\mathbb{N}$. Por definición de supremo, se tiene que $\alpha - 1$ ya no sería una cota superior de $\mathbb{N}$ por lo que existiría un natural m tal que $\alpha - 1 < m$, dado que $\mathbb{R}$ es un grupo parcialmente ordenado y $\mathbb{N}$ un grupo, se tiene que $\alpha < m + 1$ con $m + 1$ un natural lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ son grupos arquimedianos.

(4) Consideremos el producto directo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Hagamos que (x, y) pertenezca a P si $y > 0$ o si $y = 0$ y $x \geq 0$. Entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un o-grupo que no es arquimediano:

Tenemos que

$$P = \{(x, y) : y > 0\} \cup \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\} = V \cup S,$$

con esto podemos saber que

$$-P = \{(x, y) : y < 0\} \cup \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\} = (-V) \cup (-S)$$

Debido a la cerradura en la suma y a la conmutatividad de $\mathbb{R}$ es claro que

$$P + P \subseteq P \text{ y que } (x, y) + P + (-(x, y)) \subseteq P \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

hora, tenemos que

$$P \cap -P = (V \cap -V) \cup (S \cap -V) \cup (V \cap -S) \cup (S \cap -S) = \{(0, 0)\}$$

por lo que se cumplen las condiciones del Teorema 1.3 y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ adquiere estructura de grupo parcialmente ordenado con cono positivo P.

Sea $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es claro que si $(x, y) = (0, 0)$ entonces $(x, y) \in P$, luego:

Si $y > 0$, entonces $(x, y) \in V \subseteq P$.

Si $y < 0$, entonces $(x, y) \in -V \subseteq -P$.

Si $x < 0$, $y = 0$, entonces $(x, y) \in -S \subseteq -P$.

Si $x > 0$, $y = 0$, entonces $(x, y) \in S \subseteq P$.

Por lo tanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = P \cup -P$ por lo que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, P)$ es un o-grupo.

Para ver que no es arquimediano veamos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $n(1, 0) \leq (0, 1)$.

Tomemos $(-n, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, como $1 \geq 0$ se tiene que $(0, 1) - (n, 0) = (-n, 1) \in P$ por lo que en efecto, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $n(1, 0) \leq (0, 1)$ y entonces $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, P)$ no puede ser arquimediano.

(5) Tomando de nuevo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definimos $(x, y) \in P$ si $x > 0$ y $y > 0$, o $(x, y) = (0, 0)$. Entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un grupo parcialmente ordenado y arquimediano pero no un l-grupo.

Con lo anterior tenemos que

$$P = \{(x, y) : x > 0 \text{ y } y > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

de esta forma

$$-P = \{(x, y) : x < 0 \text{ o } y < 0\}.$$

Por lo que es claro que $\{(0, 0)\} = \{P \cap -P\}$. Tomando en cuenta que estamos trabajando con $\mathbb{R}$ que es conmutativo, también podemos afirmar que

$$P + P \subseteq P \text{ y que } (x, y) + P + (-(x, y)) \subseteq P \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Y por el Teorema 1.3 se tiene que P le da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ estructura de grupo parcialmente ordenado .

Para ver que no es un l-grupo, veamos que $(1, 0)$ y $(0, 0)$ no tienen supremo.Tenemos que

$$U_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}[(1, 0)] = \{(x, y)|x > 1 \text{ y } y > 0\} \cup \{(1, 0)\} \text{ y } U_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}[(0, 0)] = P,$$

es claro que $U_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}[(1, 0)] \cap U_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}[(0, 0)] = \{(x, y)|x > 1 \text{ y } y > 0\}$ y dicho conjunto no tiene un menor elemento el cual sería el supremo de $(1, 0)$ y $(0, 0)$.

Para ver que es un grupo arquimediano, sean $(x, y), (z, w) \in P$ tales que $n(x, y) \leq (z, w)$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces se tiene que $(z - nx, w - ny) \geq (0, 0)$, es decir, $z > nx$ y $w > ny$ o $z = nx$ y $w = ny$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ y dado que $\mathbb{R}$ es arquimediano, se tiene que $x = 0$ y $y = 0$, por lo tanto $(x, y) = (0, 0)$.

A continuación, nos centraremos en demostrar únicamente propiedades en l-grupos.

Teorema 1.5. *Sea G un l-grupo.*

(1) Para todo a, b, c, $d \in G$, $c+(a\vee b)+d = (c+a+d)\vee(c+b+d)$, $c+(a\wedge b)+d = (c+a+d)\wedge(c+b+d)$.

(2) Para todo a, $b \in G$, $-(a\vee b) = (-a)\wedge(-b)$, $-(a\wedge b) = (-a)\vee(-b)$.

(3) Como retícula, G es distributiva.

(4) Para todo a, $b \in G$, $a-(a\wedge b)+b = a\vee b$. Si G es conmutativo, entonces $a+b = (a\wedge b)+(a\vee b)$, para todo a, $b \in G$.

(5) Si x, $y_1\cdots,y_n$ son elementos positivos tales que $x \leq y_1+\cdots+y_n$, entonces $x = x_1+\cdots+x_n$ para algunos elementos positivos $x_1,\cdots,x_n$ con $x_i \leq y_i$, $i = 1,\cdots,n$.

(6) Si x, $y_1\cdots,y_n$ son elementos positivos, entonces $x\wedge(y_1+\cdots+y_n) \leq (x\wedge y_1)+\cdots+(x\wedge y_n)$.

Demostración.

(1) Dado que $a\vee b \geq a,b$ y estamos en un grupo con ley de monotonía, tenemos que $c+(a\vee b)+d \geq c+a+d$, $c+b+d$ por lo que

$$c+(a\vee b)+d \geq (c+a+d)\vee(c+b+d).$$

Por otro lado, $c+a+d$, $c+b+d \leq (c+a+d)\vee(c+b+d)$ junto con la ley de la monotonía implican que

$$a{,}b \leq -c+(c+a+d)\vee(c+b+d)+(-d),$$

y entonces al ser cota superior de a, b

$$a\vee b \leq -c+(c+a+d)\vee(c+b+d)+(-d).$$

Por lo tanto $c+(a\vee b)+d \leq (c+a+d)\vee(c+b+d)$ y se cumple la igualdad. La otra igualdad se cumple en G^{op}.

(2) Tenemos que

$$a,b \leq a\vee b \Rightarrow -(a\vee b) \leq -a,-b \Rightarrow -(a\vee b) \leq -a\wedge -b,$$

y

$$-a\wedge -b \leq -a,-b \Rightarrow a,b \leq -(-a\wedge -b) \Rightarrow a\vee b \leq -(-a\wedge -b),$$

entonces $-a\wedge -b \leq -(a\vee b)$. Y por lo tanto ya tenemos que $-a\wedge -b = -(a\vee b)$; la otra desigualdad se consigue con G^{op}.

(3) Sabemos que en una retícula, basta con que se cumpla una distributividad para que la otra se satisfaga, entonces para a, b, $c \in G$ mostraremos que $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$. Sea $d = b\vee c$. Entonces $a\wedge b \leq a\wedge d$ lo que implica que $0 \leq (a\wedge d)-(a\wedge b)$. Luego,

$$-d+(a\wedge d) = (-d+a)\wedge 0 \leq (-b+a)\wedge 0 = -b+(a\wedge b),$$

tenemos que $0 \leq (a \wedge d) - (a \wedge b) \leq d - b$, similarmente $0 \leq (a \wedge d) - (a \wedge c) \leq d - c$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq [(a \wedge d) - (a \wedge b)] \wedge [(a \wedge d) - (a \wedge c)] \\ &\leq (d - b) \wedge (d - c) \\ &= d + (-b \wedge -c) = d - d = 0 \end{aligned}$$

Entonces $[(a \wedge d) - (a \wedge b)] \wedge [(a \wedge d) - (a \wedge c)] = 0 = (a \wedge d) - [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$ por lo que $a \wedge d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(4) De (1) y (2) sabemos que

$$a - (a \wedge b) + b = a + (-a \vee -b) + b = (a + (-a) + b) \vee (a + (-b) + b) = b \vee a = a \vee b.$$

Si además G es conmutativo tenemos que

$$a - (a \wedge b) + b = a + b - (a \wedge b) = a \vee b,$$

por lo que $a + b = (a \wedge b) + a \vee b$.

(5) Demostraremos este inciso por inducción sobre n.

(i) Sea $n = 1$ y $n = 2$

Es claro que si x, y son elementos positivos con $x \leq y$ entonces $x_1 = x$.

Luego, sean x, y_1, y_2 elementos positivos tales que $x \leq y_1 + y_2$. Tomemos $x_1 = x \wedge y_1$ y $x_2 = -x_1 + x$.

Entonces $x = x_1 + x_2$ y claramente $x_1 \leq y_1$ y

$$0 \leq x_2 = -x_1 + x = -(x \wedge y_1) + x = (-x \vee -y_1) + x = 0 \vee (-y_1 + x) \leq y_2$$

(ii) Supongamos que la propiedad se cumple para n.

(iii) Sean x, $y_1 \cdots, y_{n+1}$ elementos positivos tales que $x \leq y_1 + \cdots + y_{n+1}$ entonces $x \leq y_1 + y$ donde $y = y_2, \cdots, y_{n+1}$, entonces por el caso base se tiene que $x = x_1 + x_{1_2}$ donde $x_1 \leq y_1$ y $x_{1_2} \leq y$ entonces por hipótesis de inducción para x_{1_2} tenemos que $x_{1_2} = x_2 + \cdots, x_{n+1}$ donde $x_i \leq y_i$, por lo tanto

$$x = x_1 + x_{1_2} = x_1 + x_2 + \cdots, x_{n+1}$$

demostrando el inciso.

(6) Tomemos $x \wedge (y_1 + \cdots + y_n) \leq y_1 + \cdots + y_n$. Entonces por (6), $x \wedge (y_1 + \cdots + y_n) = z_1 + \cdots + z_n$, con $0 \leq z_i \leq y_i$ para $i = 1, \cdots, n$. Dado que estamos trabajando con elementos positivos tenemos que $z_i \leq z_i + \cdots + z_n \leq x$. Entonces $z_i \leq x \wedge y_i$ para $i = 1, \cdots, n$. Por lo tanto $x \wedge (y_1 + \cdots + y_n) \leq (x \wedge y_1) + \cdots + (x \wedge y_n)$.

Lema 1.3. *Sea G un l-grupo.*

(1) Para todo $a \in G$ $n \in \mathbb{Z}^+$, $[na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0] + (a \wedge 0) = [(n+1)a] \wedge na \wedge \cdots \wedge a \wedge 0$.

(2) Para todo $a \in G$ $n \in Z^+$, $n(a \wedge 0) = na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0$.

(3) Si $na \geq 0$ para algún entero positivo n, entonces $a \geq 0$.

Demostración.

(1) Del teorema 1.5 podemos deducir que si $a_1, \cdots, a_n, b \in G$ se tiene que:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) + b = (a_1 + b) \wedge (a_2 + b) \wedge \cdots \wedge (a_n + b)$$

Sea $a \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que:

$$\begin{gathered}
[na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0] + (a \wedge 0) = \\
[(na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0) + a] \wedge (na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0) = \\
[(na + a) \wedge ((n-1)a + a) \wedge \cdots \wedge (a + a) \wedge a] \wedge (na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0) = \\
(n+1)a \wedge na \wedge \cdots \wedge 2a \wedge a \wedge 0
\end{gathered}$$

(2) La siguiente demostración será mediante inducción sobre n.
(i) Sea $n = 1$.

Es claro que si $n = 1$ entonces $1(a \wedge 0) = 1(a) \wedge (1-1)a = a \wedge 0$

(ii) Supongamos que $n(a \wedge 0) = na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0$

(iii) Demostremos que $(n+1)(a \wedge 0) = (n+1)a \wedge na \wedge \cdots \wedge a \wedge 0$
Entonces $(n+1)(a \wedge 0) = n(a \wedge 0) + a \wedge 0$, luego por hipótesis de inducción tenemos que

$$(n+1)(a \wedge 0) = na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0 + a \wedge 0$$

y por (1) obtenemos el resultado

$$(n+1)(a \wedge 0) = (n+1)a \wedge na \wedge \cdots \wedge a \wedge 0$$

(3) Dado que $na \geq 0$ tenemos que $na \wedge 0 = 0$, entonces por el inciso anterior:

$$n(a \wedge 0) = na \wedge (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0 = (n-1)a \wedge \cdots \wedge a \wedge 0 = (n-1)(a \wedge 0)$$

por lo tanto $n(a \wedge 0) = (n-1)(a \wedge 0)$ y despejando tenemos que $a \wedge 0 = 0$ por lo que $a \geq 0$.

Definición: Dos elementos estrictamente positivos a. b de un l-grupo G son *ajenos* si $a \wedge b = 0$. Un subconjunto $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de G es ajeno si cada uno de sus elementos es estrictamente positivo y $a_i \wedge a_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Teorema 1.6. *Sea G un l-grupo y a, b, c, $a_1, \cdots, a_n \in G$.*

(1) Si a y b son ajenos y $c \geq 0$, entonces $a \wedge (b+c) = a \wedge c$.

(2) Si $a \wedge b = a \wedge c = 0$, entonces $a \wedge (b+c) = 0$.

(3) Si $\{a_1, \cdots, a_n\}$ es un conjunto ajeno, entonces $a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_n = a_1 + \cdots + a_n$. En particular, si $a \wedge b = 0$, entonces $a + b = a \vee b = b \vee a = b + a$. Es decir, elementos ajenos conmutan.

Demostración.

(1) Como $c \geq 0$ tenemos que $a + c \geq a$,

$$a \wedge c = a \wedge (a \wedge b) + c = a \wedge [(a+c) \wedge (b+c)] = [(a \wedge a + c)] \wedge (b+c) = a \wedge (b+c)$$

. (2) Sabemos por $a \wedge b = a \wedge c = 0$ y que a, b, $c \geq 0$. Luego, usando (1), $a \wedge (b+c) = a \wedge c = 0$.

(3) Realicemos la siguiente demostración mediante inducción sobre n.
(i) Base
Es claro que si $n = 1$ no tiene sentido hablar de la propiedad.Por lo que nuestro caso base será $n = 2$, el cual esta demostrado en el Teorema 1.5(4).
(ii) Supongamos que si $\{a_1, \cdots, a_n\}$ es un conjunto ajeno, entonces $a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_n = a_1 + \cdots + a_n$.
(iii) Demostremos que si $\{a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ es un conjunto ajeno, entonces $a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_n \vee a_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$.
Consideremos sólo el conjunto $\{a_1, \cdots, a_n\}$, que ya es un conjunto ajeno. Entonces por hipótesis, $a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_n = a_1 + \cdots + a_n$. Luego consideremos el conjunto $\{a_1 + \cdots + a_n, a_{n+1}\}$. Por (2) dicho conjunto es ajeno, entonces usando el Teorema 1.5(4) tenemos que

$$(a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_n) \vee a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_n) \vee a_{n+1} + (a_1 + \cdots + a_n) \wedge a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1}.$$

Por lo tanto la propiedad se cumple.

Sea G un l-grupo. Para $g \in G$ la parte positiva g^+, la parte negativa g^- y el valor absoluto $|g|$ están definidos de la siguiente manera.

$$g^+ = g \vee 0,\ g^- = (-g) \vee 0,\ |g| = g \vee (-g).$$

Ya que $g + g^- = g + (-g \vee 0) = 0 \vee g = g^+$, se tiene que $g = g^+ - g^-$.

Teorema 1.7. *Sea G un l-grupo y f, $g \in G$.*

(1) $|g| = g^+ + g^-$.

(2) $g^+ \wedge g^- = 0$.

(3) Si $f \wedge g = 0$, entonces $f = (f-g)^+$ y $g = (f-g)^-$.

(4) $ng^+ = (ng)^+$, $ng^- = (ng)^-$ y $n|g| = |ng|$ para cualquier entero positivo n.

(5) $|f+g| \leq |f| + |g| + |f|$. Si G es conmutativo, entonces $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Demostración.

(1) Por definición, $|g| \geq g, -g$ por lo que sumando ambas desigualdades, $2|g| \geq 0$. Por el Teorema 1.5(5) se tiene que $|g| \geq 0$. Luego usando la distributividad del supremo sobre la suma tenemos:

$$\begin{aligned} g^+ + g^- &= (g \vee 0) + (-g \vee 0) \\ &= [(g \vee 0) + (-g)] \vee (g \vee 0) \\ &= 0 \vee -g \vee g \vee 0 \\ &= 0 \vee |g| \\ &= |g| \end{aligned}$$

(2) Como G es una retícula distributiva,

$$g^+ \wedge g^- = (g \vee 0) \wedge (-g \vee 0) = (g \wedge -g) \vee 0) = -(-g \vee g) \vee 0 = -|g| \vee 0 = 0.$$

(3) Si $f \wedge g = 0$ entonces $-f \vee -g = 0$, y

$$f = f + 0 = f + (-f \vee -g) = 0 \vee f - g = (f - g)^+.$$

De manera análoga $g = (g - f)^+ = (g - f) \vee 0 = -(f - g) \vee 0 = (f - g)^-$.

(4) Por (2) y recordando que $a \wedge b = a \wedge c = 0 \Rightarrow a \wedge (b + c) = 0$, tenemos que $ng^+ \wedge ng^- = 0$.

Después, usando (3) y que $g = g^+ - g^-$, tenemos que,

$$ng^+ = (ng^+ - ng^-)^+ = (n(g^+ - g^-))^+ = (ng)^+.$$

De igual manera,

$$ng^- = (ng^+ - ng^-)^- = (n(g^+ - g^-))^- = (ng)^-.$$

Y por último,

$$n|g| = n(g^+ + g^-) = ng^+ + ng^- = (ng)^+ + (ng)^- = |ng|.$$

(5) Dado que $|f| \geq 0, f, -f$, y que $|g| \geq 0, g, -g$, se tiene que $f + g \leq |f| + |g| \leq |f| + |g| + |f|$ y

$$-(f + g) = (-g) + (-f) \leq |g| + |f| \leq |f| + |g| + |f|,$$

entonces

$$|f + g| = (f + g) \vee -(f + g) \leq |f| + |g| + |f|.$$

Por el mismo argumento de arriba, si G es conmutativo $|g|+|f|=|f|+|g|$ por lo que

$$|f+g| \leq |f|+|g|.$$

Definición: Sea C un subconjunto de un l-grupo G entonces

(1) C es *convexo* si para todo $g \in G$ y para todos c, $d \in C$, $c \leq g \leq d$ implica que $g \in C$.

(2) C es un *l-subgrupo convexo* de G si es un subgrupo de G que es convexo y también es una subretícula de G.

Claramente, G y $\{0\}$ son l-subgrupos convexos de G y la intersección de una familia de l-subgrupos convexos de G es un l-subgrupo convexo de G.

Definición: Para un subconjunto X de G, la intersección de todos los l-subgrupos convexos que contienen a X es el l-subgrupo convexo menor que contiene a X, el cual es llamado la *cápsula convexa* de X y es denotado como $C_G(X)$ o sólo $C(X)$.

Un método de construcción de l-subgrupos convexos es usando un *polar* que se define de la siguiente manera.

Definición: Para un subconjunto X de un l-grupo G, el polar de X es

$$X^{\perp} = \{a \in G : |a| \wedge |x| = 0, \text{ para todo } x \in X\}$$

y el doble polar de X es $X^{\perp\perp} = (X^{\perp})^{\perp}$. Claramente,$X \subseteq X^{\perp\perp}$ y $X^{\perp\perp\perp} = X^{\perp}$. Si $X = \{x\}$, entonces $X^{\perp}$ y $X^{\perp\perp}$ son denotados como $x^{\perp}$ y $x^{\perp\perp}$.

Teorema 1.8. *Sea G un l-grupo.*

(1) Un subgrupo H de G es un l-subgrupo convexo de G si y sólo si para cualquier $a \in H$, $x \in G$, $|x| \leq |a|$ implica $x \in H$.

(2) Para cada subconjunto X de G, $X^{\perp}$ es un l-subgrupo convexo de G.

(3) $C(X) = \{g \in G : |g| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_n \in X$.

(4) El subgrupo de G generado por una familia de l-subgrupos convexos es un l-subgrupo convexo.

Demostración.

(1) Sea H un l-subgrupo convexo de G y $|x| \leq |a|$ para algún $a \in H$, $x \in G$.
Como H es una subretícula de G, $a \in H$ implica que a^+, $a^- \in H$ y entonces $|a| = a^+ + a^- \in H$. Como H es convexo, tenemos que $|x| \in H$. Como $0 \leq x^+, x^- \leq |x|$, usando de nuevo la convexidad de H se tiene que x^+, $x^- \in H$. Por lo que $x = x^+ - x^- \in H$. Aquí podemos observar que en un l-subgrupo convexo, $x \in G$ si y sólo si $|x| \in G$.

Recíprocamente, supongamos que H es un subgrupo con la propiedad mencionada y sean a, $b \in H$, $x \in G$ tales que $a \leq x \leq b$. Entonces $0 \leq x - a \leq b - a \in H$, como estamos trabajando con elementos positivos, estos son iguales a su valor absoluto. Entonces por la propiedad que cumple H, $x - a \in H$. Por lo que $x = (x - a) + a \in H$. Así, H es un subgrupo convexo.

Sean $a, b \in H$, entonces $(b - a)^+ \leq |b - a|$ implica que $(b - a)^+ \in H$ por lo tanto $a \vee b = (b - a)^+ + a \in H$. De forma similar, $a \wedge b \in H$. Por lo tanto, H es una subretícula de G.

(2) Sean a, $b \in X^\perp$, por el Teorema 1.7(5) y 1.6(2), para todo $x \in X$,

$$|a - b| \wedge |x| \leq (|a| + |-b| + |a|) \wedge |x| = (|a| + |b| + |a|) \wedge |x| = 0.$$

Entonces $|a - b| \wedge |x| = 0$ y así, $a - b \in X^\perp$, por lo que $X^\perp$ es un subgrupo de G.

Es claro que si $a \in X^\perp$, $b \in G$ con $|b| \leq |a|$, se tiene que para cualquier $x \in X$,

$$|b| \wedge |x| \leq |a| \wedge |x| = 0.$$

Por lo que $b \in X^\perp$. Por (1), $X^\perp$ es un l-subgrupo convexo de G.

(3) Sea

$$H = \{g \in G : |g| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|, \text{para alguna } n \in \mathbb{N}, x_i \in X\}$$

y a, $b \in H$. Usando de nuevo la desigualdad del triángulo tenemos que $|a - b| \leq |a| + |b| + |a| \leq v + s + v$, donde $v = |x_1| + \cdots + |x_n|$, para algunas $x_1, \cdots, x_n \in X$ y $s = |y_1| + \cdots + |y_m|$, para algunas $y_1, \cdots, y_m \in X$. Por lo que queda claro que $a - b \in H$. Así, H es un subgrupo de G.

De igual manera, si $a \in H$, $x \in G$ $|x| \leq |a|$ pues $|x| \leq |a| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ por lo que $x \in H$ y por (1), H también es un l-subgrupo convexo de G.

Claramente $X \subseteq H$ pues para todo $x \in X$, $|x| \leq |x|$, así tenemos que $C(X) \subseteq H$. Si tomamos un l-subgrupo convexo C que contenga a X, entonces contendrá a $|X|$ por lo que para todo $b \in H$ donde $|b| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ con la combinación lineal en C, por lo tanto $|b| \in C$ y por la observación en (1) $b \in C$ por lo que $H \subseteq C$ por lo que concluimos que $C(X) = H$.

(4) Sea $\{C_i : i \in I\}$ una familia de l-subgrupos convexos de G y C el subgrupo generado por $\{C_i : i \in I\}$. Supongamos que $|g| \leq |c|$ con $g \in G$ y $c \in C$. Sea $c = \sum_{j=1}^{n} c_j$ con $c_j \in \cup\{C_i : i \in I\}$, aplicando nuestra desigualdad del triángulo y la transitividad del orden tenemos que $|g|$ es menor o igual a una suma de elementos de $\cup\{C_i^+ : i \in I\}$ y dado que $g^+, g^- \leq |g|$, estos también son menores a dicha suma. Recordando el Teorema 1.5(6), g^+, g^- pueden ser escritos como elementos de $\cup\{C_i^+ : i \in I\} \subseteq C$, por lo que $g = g^+ - g^- \in C$. Usando (1), tenemos que C es un l-subgrupo convexo.

Para un l-grupo G, usamos $C(G)$ para denotar el conjunto de todos los l-subgrupos convexos de G y lo ordenamos parcialmente mediante la inclusión de conjuntos. Es bien sabido y no es difícil de demostrar que el conjunto de todos los subgrupos de un grupo es una retícula bajo la inclusión de conjuntos. Para cualesquiera dos subgrupos A y B, $A \wedge B = A \cap B$ y $A \vee B$ es el subgrupo generado por $A \cup B$.

Teorema 1.9. *Sea G un l-grupo. $C(G)$ es una subretícula distributiva completa de la retícula de subgrupos de G, Más aún, si A, $\{A_i | i \in I\}$ son l-subgrupos convexos de G, entonces $A \cap (\vee_{i \in I} A_i) = \vee_{i \in I}(A \cap A_i)$.*

Demostración.

Ya habíamos observado que la intersección de l-subgrupos convexos es un l-subgrupo convexo y que el subgrupo generado por una familia de l-subgrupos convexos también es un l-subgrupo convexo; por lo que $C(G)$ con la intersección como ínfimo y el subgrupo generado como el supremo, es una subretícula completa de la retícula de subgrupos de G.

Supongamos que A, A_1, $A_2 \in C(G)$. Mostraremos la siguiente distributividad:

$$A \vee (A_1 \cap A_2) = (A \vee A_1) \cap (A \vee A_2).$$

Sean C, C_1 y C_2 los subgrupos generados por $A \cup (A_1 \cap A_2)$, $A \cup A_1$ y $A \cup A_2$ respectivamente, por lo que nuestra demostración se basa en mostrar que $C = C_1 \cap C_2$.

Puesto que los conjuntos sí son una retícula distributiva bajo la inclusión tenemos que $A \cup (A_1 \cap A_2) = (A \cup A_1) \cap (A \cup A_2)$ por lo que

$$C = \langle (A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \rangle = \langle B \rangle$$

y como $B \subseteq A \cup A_1$, $A \cup A_2$ tenemos que $C \subseteq C_1 \cap C_2$.

Sea $g \in C_1 \cap C_2$ entonces por el Teorema 1.8 (3) tenemos que $|g| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ y $|g| \leq |y_1| + \cdots + |y_m|$ para algunos $x_i \in A \cup A_1$, $y_i \in A \cup A_2$. Entonces por Teorema 5. (7) tenemos que

$$|g| \wedge |g| = |g| \wedge (|x_1| + \cdots + |x_n|) \leq (|g| \wedge |x_1|) + \cdots + (|g| \wedge |x_n|)$$

$$\leq (|x_1| \wedge |y_1| + \cdots + |x_1| \wedge |y_m|) + \cdots + (|x_n| \wedge |y_1| + \cdots + |x_1| \wedge |y_m|)$$

Sabemos que si $x_i \in A$ o $y_j \in A$ entonces $|x_i| \wedge |y_j| \in A$, de igual manera si $x_i \in A_1$ y $y_j \in A_2$ entonces $|x_i| \wedge |y_j| \in A_1 \cap A_2$, de esta manera cada termino $|x_i| \wedge |y_j| \in A \cup (A_1 \cap A_2)$, por lo tanto $g \in C$ por el Teorema 1.8(3) y así $C_1 \cap C_2 \subseteq C$. Por lo tanto $C_1 \cap C_2 = C$ y regresando a sus definiciones tenemos que

$$A \vee (A_1 \cap A_2) = (A \vee A_1) \cap (A \vee A_2).$$

Finalmente, es claro que $\vee_{i \in I}(A \cap A_i) \subseteq A \cap (\vee_{i \in I} A_i)$. Si $g \in A \cap (\vee_{i \in I} A_i)$ entonces $|g| \leq |c_1| + \cdots + |c_n|$ con $c_k \in \cup_{i \in I} A_i$. Entonces por Teorema 1.5 (6) tenemos que $|g| = g_1 + \cdots + g_n$ donde $0 \leq g_k \leq |c_k|$ para $k = 1, \cdots, n$. Luego como estamos trabajando con elementos positivos tenemos que $g_k \leq |g|$ por lo que $g_k \leq |g| \wedge |c_k| \in A \cap A_{i_k}$ para algún A_{i_k} por lo que $g_k \in A \cap A_{i_k}$ y de nuevo aplicando el Teorema 1.8(3) tenemos que $g \in \vee_{i \in I}(A \cap A_i)$. Por lo tanto hemos demostrado la igualdad y $A \cap (\vee_{i \in I} A_i) = \vee_{i \in I}(A \cap A_i)$.

Definición: Sea G un l-grupo y $\{C_i : i \in I\}$ una familia de l-subgrupos convexos de G. G es una *suma directa* de $\{C_i : i \in I\}$, denotada por $G = \oplus_{i\in I} C_i$, si G es generado por $\{C_i : i \in I\}$ y $C_i \cap C_j = \{0\}$ para todo i, $j \in I$ con $i \neq j$.

Teorema 1.10. *Sea G un l-grupo, Supongamos que G es la suma directa de una familia de l-subgrupos convexos $\{C_i | i \in I\}$.*

(1) Si $c_1 + \cdots + c_n = 0$, donde $c_i \in C_{k_i}$ y $k_1, \cdots, k_n$ son distintos, entonces $c_i = 0$.

(2) Cada elemento $0 \neq a \in G$ pude escribirse de manera única como $a = c_1 + \cdots + c_n$ con $0 \neq c_i \in C_{k_i}$ y $k_1, \cdots, k_n$ distintos. Más aún $a \geq 0$ si y sólo si cada $c_i \geq 0$.

Demostración.

(1) Sea $c_1 + \cdots + c_n = 0$, donde $c_i \in C_{k_i}$ y $k_1, \cdots, k_n$ son distintos entonces $c_1 = -c_n - \cdots - c_2$ por lo que $c_1 \in C_{k_1} \cap (C_{k_2} \vee \cdots \vee C_{k_n})$

Luego, por distributividad, $c_1 \in (C_{k_1} \cap C_{k_2}) \vee \cdots \vee (C_{k_1} \cap C_{k_n}) = \{0\}$ Por lo tanto, $c_1 = 0$. De manera análoga para cualquier otro elemento.

(2) Sean $0 \leq d \in C_i$ y $0 \leq b \in C_j$ con $i \neq j$, dado que $C_i \cap C_j = \{0\}$ se tiene que $d \wedge b = 0$ y por el Teorema 1.6.(3) se tendría que $d + b = b + d$.De lo anterior se puede demostrar que los elementos negativos también conmutan. Veamos ahora que los elementos de C_i, C_j conmutan.

Sean $a \in C_i$, $b \in C_j$, como C_i, C_j tienen estructura de reticula, sabemos que son dirigidos, es decir, existen $c, d \in C_i^+$, $e, f \in C_j^+$ tales que $a = c - d$ y $b = e - f$. Ahora se tiene lo siguiente:

$$a + b = (c - d) + (e - f) = (c + e - e - d) + (e - f) = (e + c - d - e) + (e - f) =$$
$$(e + c) + (-d - f) = (e + c) + (-f - d) = (e + c) + (-f - c + c - d) =$$
$$(e + c) + (-c - f + c - d) = (e - f) + (c - d) = b + a$$

De ahí se sigue que toda $a \in G$ con $a \neq 0$ puede escribirse como $a = c_1 + \cdots + c_n$ con $0 \neq c_i \in C_{k_i}$ y $k_1, \cdots, k_n$ distintos. Luego, se sigue de (1) que esa representación es única .

Es claro que si $c_i \geq 0$ entonces $a \geq 0$. Supongamos que $a = c_1 + \cdots + c_n \geq 0$ entonces se tiene que

$$-c_1 \leq c_2 + \cdots + c_n \in C_{k_2} \vee \cdots \vee C_{k_n}.$$

Por ser conjuntos convexos se obtiene que

$$(-c_1)^+ \leq (c_2 + \cdots + c_n)^+ \in C_{k_2} \vee \cdots \vee C_{k_n}.$$

Por lo que $(-c_1)^+ \in C_{k_2} \vee \cdots \vee C_{k_n}$, luego por el Teorema 1.9. se tiene

$$(-c_1)^+ \in (C_{k_1} \cap C_{k_2}) \vee \cdots \vee (C_{k_1} \cap C_{k_n}) = \{0\}.$$

Entonces $(-c_1)^+ = 0$ lo que implica que $c_1 \geq 0$. De manera similar, $c_2, \cdots, c_n \geq 0$.

Sea G un l-grupo y N un l-subgrupo convexo normal de G definimos la relación $\leq$ en el grupo cociente G/N como $x+N \leq y+N$ si $x \leq y+z$ para algún $z \in N$.

Esta relación está bien definida, pues si $x_1+N = x+N$ y $y_1+N = y+N$, entonces $x = x_1 + c$ y $y = y_1 + d$ para algún c, $d \in N$. Entonces si $x+N \leq y+N$ tenemos que $x = x_1 + c \leq y + z \leq y_1 + (d+z)$, lo que implica que $x_1 \leq y_1 + (d+z-c)$ con $d+z-c \in N$. Por lo tanto $x_1 + N \leq y_1 + N$.

Es fácil ver que la relación es reflexiva y transitiva como se muestra a continuación.

Sean x, y, $z \in G$, entonces, $x \leq x+0$ con $0 \in N$ por lo que $x+N \leq x+N$, la relación es reflexiva.

Supongamos que $x+N \leq y+N \leq z+N$ entonces tenemos las siguientes desigualdades: $x \leq y+s$ y $y \leq z+v$ con s, $v \in N$. De donde podemos decir lo siguiente:

$$x \leq y+s \leq z+(v+s),$$

con $v+s \in N$. Por lo que $x+N \leq z+N$.

Supongamos que $x+N \leq y+N$ y que $y+N \leq x+N$ para algún x, $y \in G$, entonces $x \leq y+s$ y $y \leq x+v$, con s, $v \in N$. Entonces $-y+x \leq s$ y $-x+y \leq v$. Por lo que

$$|-y+x| = (-y+x) \vee (-x+y) \leq v \vee s.$$

Como el valor absoluto siempre es positivo, tenemos que $v \vee s \geq 0$ por lo que la desigualdad anterior junto con que N es un l-subgrupo convexo implican que $-y+x \in N$. Por lo que $y+N = x+N$. Así, la relación es antisimétrica. Hemos visto que $\leq$ es un orden parcial en G/N.

Teorema 1.11. *Sea G y N un l-subgrupo convexo normal de G. Entonces, G/N es un l-grupo con respecto al orden parcial definido arriba.*

Demostración.

Supongamos que $x+N \leq y+N$ y que $z+N \in G/N$. Entonces $x \leq y+a$ para algún $a \in N$. Entonces, $z+x \leq (z+y)+a$, por lo que

$$(z+N)+(x+N) = (z+x)+N \leq (z+y)+N = (z+N)+(y+N).$$

Por otro lado,

$$x+z \leq y+a+z = (y+z)+(-z+a+z),$$

donde $-z+a+z \in N$, pues N es un subgrupo normal. Por lo tanto

$$(x+N)+(z+N) = (x+z)+N \leq (y+z)+N = (y+N)+(z+N).$$

Y así, G/N es un grupo parcialmente ordenado.

Ahora mostraremos que $(x+N) \vee (y+N) = (x \vee y)+N$ y que $(x+N) \wedge (y+N) = (x \wedge y)+N$ para cualesquiera x, $y \in G$.

Claramente $(x \vee y) + N \geq x + N, y + N$. Tomemos $z + N \geq x + N, y + N$ para algún $z \in G$, entonces $x \leq z + a$ y $y \leq z + b$ con $a, b \in N$, por lo que $-z + x \leq a$ y $-z + y \leq b$. Y así $(-z + x) \vee (-z + y) \leq a \vee b \in N$. Por último, usando la distributividad del supremo se tiene que $x \vee y \leq z + (a \vee b)$. Por lo que $(x \vee y) + N \leq z + N$, por lo que $(x + N) \vee (y + N) = (x \vee y) + N$. Realizando la misma demostración en G^{op} obtenemos que $(x + N) \wedge (y + N) = (x \wedge y) + N$.

Sólo falta verificar que el supremo y el ínfimo están bien definidos. Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ tales que $\overline{x_1} = \overline{x_2} \in G/N$ y $\overline{y_1} = \overline{y_2} \in G/N$. Dado que $x_1 \vee y_1 \geq x_1, y_1$, se tiene que $\overline{x_1 \vee y_1} \geq \overline{x_1}, \overline{y_1}$ y dada la igualdad que tenemos, se tiene que $\overline{x_1 \vee y_1} \geq \overline{x_2}, \overline{y_2}$ y por las propiedades del supremo, $\overline{x_1 \vee y_1} \geq \overline{x_2 \vee y_2}$. Realizando el mismo razonamiento, se tiene que $x_2 \vee y_2 \geq x_2, y_2$. Así se tiene que $\overline{x_2 \vee y_2} \geq \overline{x_2}, \overline{y_2}$ y dada la igualdad que tenemos, se tiene que $\overline{x_2 \vee y_2} \geq \overline{x_1}, \overline{y_1}$. Por propiedades de supremo $\overline{x_2 \vee y_2} \geq \overline{x_1 \vee y_1}$. Por lo que $\overline{x_2 \vee y_2} = \overline{x_1 \vee y_1}$.

De manera análoga, obtenemos que $\overline{x_2 \wedge y_2} = \overline{x_1 \wedge y_1}$. Así hemps comprobado que el supremo y el ínfimo están bien definidos.

Definición: El l-grupo G/N con la retícula definida arriba se conoce como el l-*grupo cociente* de G por N.

Definición: Sean G y H l-grupos. Un *homomorfismo* de grupos $f : \mathrm{G} \longrightarrow H$ es llamado un *l-homomorfismo* si f también preserva supremos e ínfimos, es decir, para todo a, $b \in G$,

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

y

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Un *l-isomorfismo* es un isomorfismo de grupos que preserva supremos e ínfimos. Si existe un l-isomorfismo entre dos l-grupos G y H, entonces se dice que son *l-isomorfos* y se denota como $G \simeq H$.

Por ejemplo, para un l-grupo G y un l-subgrupo convexo normal N, es fácil verificar que el homomorfismo de grupos $\varphi : \mathrm{G} \longrightarrow G/N$ definido como $\varphi(a) = a + N$ es un l-homomorfismo llamado proyección.

Teorema 1.12. *Sean G y H l-grupos y $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces f es un l-homomorfismo si y sólo si $x \wedge y = 0$ ($x \vee y = 0$) $\Rightarrow f(x) \wedge f(y) = 0$ ($f(x) \vee f(y) = 0$) para todo x, $y \in G$.*

Demostración.

Supongamos que $f : G \longrightarrow H$ es un l-homomorfismo.

Sean x, $y \in G$ tales que $x \wedge y = 0$ $(x \vee y = 0)$, como f es un l-homomorfismo preserva supremos e ínfimos por lo que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 0$ $(f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = 0)$.

Supongamos que $x \wedge y = 0$ $(x \vee y = 0) \rightarrow f(x) \wedge f(y) = 0$ $(f(x) \vee f(y) = 0)$ para todo x, $y \in G$.

Sean x, $y \in G$ y $x \wedge y = z$ ($x \vee y = w$), entonces $x - z \wedge y - z = 0$ ($x - w \vee y - w = 0$) lo que implica que

$$f(x-z) \wedge f(y-z) = 0,$$

$$f(x-w) \vee f(y-w) = 0.$$

Y como además f es un morfismo de grupos

$$(f(x) - f(z)) \wedge (f(y) - f(z)) = 0,$$

$$(f(x) - f(w)) \vee (f(y) - f(w)) = 0.$$

Por lo que podemos concluir que

$$f(x) \wedge f(y) = f(z) = f(x \wedge y),$$

$$f(x) \vee f(y) = f(w) = f(x \vee y).$$

Por lo tanto f es un l-homomorfismo.

1.2. Teoremas de estructura de l-grupos y retículas vectoriales

En esta sección, demostraremos algunos teoremas de estructura de l-grupos y de retículas vectoriales que contienen elementos básicos. Esta teoría fue inicialmente desarrollada por P. Conrad y juega un papel importante en el estudio de l-grupos.

Definición: Sea G un l-grupo.

(1) Un elemento $0 < a \in G$ es llamado un *elemento básico* si para todo c, $d \in G^+$, $c, d \leq a$ implica que c y d son comparables, es decir, $c \leq d$ o $c \geq d$.

(2) Se dice que un polar no cero es un polar mínimo si no contiene propiamente otro polar no cero.

Lema 1.4. *Si G es un l-grupo y para todo x, $y \in G$ con $x \wedge y = 0$ se tiene que $x = 0$ o $y = 0$ entonces G es un o-grupo.*

Demostración.

Sean a, $b \in G$ y definamos $c = a \wedge b$.
Sabemos que $(a - c) \wedge (b - c) = 0$ entonces por hipótesis $a - c = 0$ o $b - c = 0$, es decir, $a = a \wedge b$ o $b = a \wedge b$ por lo que $a \leq b$ o $b \leq a$. Por lo tanto G es un o-grupo.

Teorema 1.13. *Sea G un l-grupo.*

(1) Para $0 < a \in G$, a es básico si y sólo si $a^{\perp\perp}$ es totalmente ordenado.

(2) Sean a, b elementos básicos. Entonces $a \wedge b = 0$ o $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$, y $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$ si y sólo si a y b son comparables.

(3) Para $0 < a \in G$, a es un elemento básico si y sólo si para todo $0 < b \leq a$, $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$.

(4) Para $0 < a \in G$, a es un elemento básico si y sólo si $a^{\perp\perp}$ es un polar mínimo.

Demostración.

(1), $\Longrightarrow$)) Supongamos que $0 < a \in G$ es básico y sean x, $y \in a^{\perp\perp}$

Supongamos que $x \wedge y = 0$, entonces por un lado $a \wedge x \leq x$ y $a \wedge y \leq y$ por lo que $(a \wedge x) \wedge (a \wedge y) = 0$ y por el otro $a \wedge x$, $a \wedge y \leq a$ y a es básico entonces $(a \wedge x) \leq (a \wedge y)$ o $(a \wedge y) \leq (a \wedge x)$.

Con eso tenemos que $a \wedge x = 0$ o $a \wedge y = 0$ que significa que $x \in a \perp$ o $y \in a \perp$. Y por definición de $a^{\perp\perp}$ se tiene que $x = x \wedge x = 0$ o $y = y \wedge y = 0$ Y por el Lema anterior tenemos que $a^{\perp\perp}$ es totalmente ordenado.

($\Longleftarrow$)) Supongamos $0 < a \in G$ con $a^{\perp\perp}$ es totalmente ordenado.

Sean $0 \leq c, d \leq a$ y $0 < b \in a^{\perp}$, entonces $0 \leq (c \wedge b) \leq (a \wedge b) = 0$ y $0 \leq (d \wedge b) \leq (a \wedge b) = 0$ por lo que $c, d \in a^{\perp\perp}$ el cual es totalmente ordenado, por lo tanto c y d son comparables y a es básico.

(2) Supongamos que $a \wedge b \neq 0$ y sean $0 < x \in a^{\perp\perp}$ y $0 < y \in b^{\perp}$

Entonces $y \wedge b = 0$ lo que implica que $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = 0$, luego, como $x \in a^{\perp\perp}$, $(x \wedge y) \in a^{\perp\perp}$ y como $a \in a^{\perp\perp}$, $(a \wedge b) \in a^{\perp\perp}$.

Dado que a es básico por (1) $x \wedge y \leq a \wedge b$ o $a \wedge b \leq x \wedge y$ y debido a nuestra segunda igualdad $x \wedge y = 0$ o $a \wedge b = 0$ pero por hipótesis la que ocurre es la primera opción. Entonces $x \in b^{\perp\perp}$ y así $a^{\perp\perp} \subseteq b^{\perp\perp}$. Intercambiando x y y de lugar obtenemos la otra contención.

Si $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$ entonces a, $b \in b^{\perp\perp}$ el cual es totalmente ordenado por lo que a y b son comparables.

Si a y b son comparables entonces $a = a \wedge b$ o $b = a \wedge b$ donde ninguno es 0 por ser básico y por la primer parte se tiene que $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$.

(3) ($\Longrightarrow$)) Si a es básico y $0 < b \leq a$ entonces b es básico y son comparables por lo que por (2) $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$.

Supongamos que para todo $0 < b \leq a$ se cumple que $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$.

Sean $0 < x, y < a$ y $z = x - (x \wedge y)$, $w = y - (x \wedge y)$, claramente $z, w \geq 0$.

Entonces, sabemos que $z \wedge w = 0$ debido a la distributividad de supremo e ínfimo. Veamos que también z, $w \in a^{\perp\perp}$. Sea $0 < c \in a^{\perp}$ es decir, $c \wedge a = 0$, entonces $0 \leq c \wedge z = c \wedge x - (x \wedge y) \leq c \wedge x \leq c \wedge a = 0$. Por lo tanto $c \wedge z = 0$ y $z \in a^{\perp\perp}$ y de forma análoga $w \in a^{\perp\perp}$. Luego, si $z \neq 0$ implicaría que como $z \leq a$ por hipotésis, $z^{\perp\perp} = a^{\perp\perp}$ y entonces $w \in z^{\perp\perp}$. Por otro lado, que $z \wedge w = 0$ implica que $w \in z^{\perp}$ y entonces $w \wedge w = 0$ por lo que $w = 0$.

Eso implica que $y \leq x$. Similarmente, si $w \neq 0$ tendríamos que $x \leq y$, por lo que x y y son comparables y a es básico.

(4) ($\Longleftarrow$) Supongamos que $a^{\perp\perp}$ es un polar mínimo y $0 < b \leq a$. Entonces $0 \neq b^{\perp\perp} \subseteq a^{\perp\perp}$, lo que implica que $b^{\perp\perp} = a^{\perp\perp}$ y por (3) tenemos que a es básico.

($\Longrightarrow$)) Ahora supongamos que a es básico y $\{0\} \neq X^{\perp} \subseteq a^{\perp\perp}$ para algún $X \subseteq G$. Tomemos $0 < x \in X^{\perp}$. Por la contención antes dada se tiene que $x \in a^{\perp\perp}$ por lo que también es básico. Por (2), $x^{\perp\perp} = a^{\perp\perp}$ debido a que si $x \wedge a = 0$ entonces $x = 0$ por un argumento anterior. Eso contradiría la manera en que tomamos a x. Por lo tanto $a^{\perp\perp} = x^{\perp\perp} \subseteq X^{\perp}$ y $a^{\perp\perp} = X^{\perp}$. Así tenemos que $a^{\perp\perp}$ es un polar mínimo.

Corolario 1.1. *Sea G un l-grupo y $a \in G$. Si a es un elemento básico, entonces $a^{\perp\perp}$ es un subgrupo convexo totalmente ordenado máximo en el sentido que para cualquier subgrupo convexo totalmente ordenado M de G, si $a^{\perp\perp} \subseteq M$ entonces $M = a^{\perp\perp}$.*

Demostración.

Supongamos que M es un subgrupo convexo totalmente ordenado que contiene a $a^{\perp\perp}$ y $0 < g \in M$. Dado que M es convexo y totalmente ordenado, g es básico. Por lo que a, $g \in M$. Lo que implica que $a^{\perp\perp} = g^{\perp\perp}$ por el Teorema 1.13(2), Entonces $g \in a^{\perp\perp}$, para todo $g \in M^+$. Entonces $-g \in -(M^+)$ y como M es totalmente ordenado, se tiene que $M = M^+ \cup -(M^+)$, así $M = a^{\perp\perp}$.

Definición: Sea G un l-grupo. Un subconjunto S de G es una *base* si:

(i) cada elemento en S es básico y

(ii) S es un conjunto ajeno máximo de G.

Lema 1.5. *La definición anterior es equivalente a que un subconjunto S de G es una base si S es un conjunto ajeno de elementos básicos con $S^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración.

Primero demostremos la necesidad. Supongamos las condiciones (i) y (ii).

Claramente las dos condiciones hacen que S sea un conjunto ajeno de elementos básicos de manera que sólo debemos demostrar que $S^{\perp} = \{0\}$.

Sea $0 \neq x \in S^{\perp}$ entonces $x \wedge a = 0$ para todo $a \in S$ por lo que se tiene que $S \cup \{x\}$ es un conjunto ajeno que contiene a S. Esto es una contradicción pues S era máximo con esa propiedad. Por lo tanto $S^{\perp} = \{0\}$.

Ahora supongamos que S es un conjunto de ajenos básicos y que $S^{\perp} = \{0\}$ para demostrar (i) y (ii).

Es fácil notar que si S sea un conjunto de ajenos básicos entonces (i) y solamente nos falta demostrar que es máximo para que se cumpla (ii). Supongamos que existe $S \subset M$ donde M es un conjunto ajeno de básicos entonces existe $0 \neq x \in M - S$ tal que $x \wedge a = 0$ para todo $a \in S$. Por lo que $x \in S^{\perp}$ lo cual es una contradicción a nuestra hipotésis. Por lo tanto $M = S$. Así, la equivalencia está demostrada.

En nuestra terminología, usaremos base, de acuerdo a la definición anterior, en caso de espacios vectoriales nos referiremos a una base de un espacio vectorial.

Teorema 1.14.

(1) G tiene una base si y sólo si G satisface (*)

(*) Cada $0 \leq g \in G$ es mayor igual que al menos un elemento básico.

(2) Si G satisface la siguiente condición (C), entonces G tiene base.

(C) Cada $0 \leq g \in G$ es mayor a lo más a un número finito de elementos ajenos.

Demostración.

(1) Si $G = \{0\}$ entonces el resultado es trivial. Supongamos que $G \neq \{0\}$ y $\phi \neq S \subseteq G$ una base de G. Luego, para todo $g \in G^+/S$ existe $a \in S$ tal que $a \wedge g > 0$ pues $S^\perp = \{0\}$. Como tenemos que a es básico, entonces $a \wedge g$ también es básico. Por lo tanto para todo $g \in G$, g es básico o $g \geq a \wedge g$. Con lo que demostramos la primer implicación.

Ahora tomemos $M = \{A \subseteq G : A \text{ es un conjunto de elementos ajenos básicos}\}$. Debido a nuestra de hipótesis, existe $a \in G$ tal que $\{a\} \in M$. Igualmente, es claro que M es un conjunto parcialmente ordenado mediante la inclusión.

Sea $\{A_i : i \in I\}$ una cadena de M y es claro que $\cup A_i \in M$, por el Lema de Zorn, M cuenta con un elemento máximo S.

Si logramos demostrar que $S^\perp = \{0\}$ tendríamos que S es una base y quedaría demostrada la otra implicación.

Sea $0 < g \in S^\perp$, por hipótesis $g \geq b$ para algún b básico, entonces $g \wedge a \geq b \wedge a = 0$ para todo $a \in S$ por lo que tendríamos que b es ajeno a todo elemento de S y entonces $S \subseteq S \cup \{b\}$ lo cual sería una contradicción pues S era máxima, por lo tanto $S^\perp = \{0\}$ y así S es base de G.

(2) Mostraremos que (*) de (1) se satisface y por lo tanto G tiene una base. Sea $0 < g \in G$ y consideremos $T = \{x \in G : 0 < x \leq g\}$. Afirmamos que si T no tiene elementos ajenos entonces T es totalmente ordenado. Lo anterior se sigue de que si a, $b \in T$ no son comparables entonces $a \wedge b = c > 0$ y entonces $0 < a - c, b - c \leq g$ por lo que están en T y entonces $(a - c) \wedge (b - c) > 0$ lo cual es una contradicción por lo que a y b tienen que ser comparables. Por lo anterior se tiene que g es un elemento básico y se cumple (*).
Ahora supongamos que T contiene n elementos ajenos $x_1, \cdots, x_n$ y debido a la propiedad (C) cuales quiera $n+1$ elementos no pueden ser ajenos para algún entero positivo n; veamos entonces que cada x_i es un elemento básico. Sean $0 \leq y, z \leq x_i$ y supongamos que y y z no son comparables. Sea $w = z \wedge y$, entonces $(z - w) \wedge (y - w) = 0$ donde $(z - w) \in T$ y $(y - w) \in T$ por lo tanto $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n, (z - w), (y - w)$ es un conjunto ajeno de $n+1$ elementos lo cual es una contradicción. Por lo tanto z, y son comparables y x_i es un elemento básico para toda $i = 1, \cdots, n$: A si, g es mayor a elementos básicos y se satisface (*).

Teorema 1.15. *Sea G un l-grupo.*

(1) Si A y B son subgrupos convexos totalmente ordenados de G, entonces $A \subseteq B$ o $A \supseteq B$ o $A \cap B = \{0\}$.

(2) Si A y B son subgrupos convexos totalmente ordenados máximos de G, entonces $A = B$ o $A \cap B = \{0\}$.

Demostración.

(1) Supongamos que $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, entonces existe $0 < a \in A/B$ y $0 < b \in B/A$. Dado que A y B son convexos $a \wedge b \in A \cap B$. Sea $0 \leq c \in A \cap B$. Dado que c, $a \in A$, c y a son comparables y como $c \in B$ el cual es convexo y $a \notin B$ sólo queda que $c \leq a$; de manera similar $c \leq b$. Entonces $c \leq a \wedge b$ para cualquier $0 \leq c \in A \cap B$, tomemos entonces $c = 2(a \wedge b) \in A \cap B$. Por lo tanto tendríamos que $2(a \wedge b) \leq a \wedge b$ que implicaría que $a \wedge b = 0$ por lo tanto para todo $0 \leq c \in A \cap B$, $c \leq a \wedge b = 0$ entonces $c = 0$ de manera que $A \cap B = \{0\}$.

(2) Si A y B son subgrupos totalmente ordenados convexos máximos, por (1) $A \subseteq B$ o $A \supseteq B$ o $A \cap B = \{0\}$ y en caso de tener las dos primeras se tiene que $A = B$.

1.3. Anillos reticulados

En esta sección introduciremos a los anillos y álgebras reticuladas y demostraremos algunas de sus propiedades básicas.

1.3.1. Definiciones, ejemplos y propiedades básicas

Definición: Un *anillo parcialmente ordenado* es un anillo R donde su grupo aditivo es un grupo parcialmente ordenado y para todo a, $b \in R$, si $a, b \geq 0$ entonces $ab \geq 0$. El cono positivo de R es el cono positivo de su grupo aditivo.

Teorema 1.16. *Para un anillo parcialmente ordenado R, el cono positivo R^+ satisface las siguientes tres condiciones:*

(1) $(R^+) + (R^+) \subseteq (R^+)$,

(2) $(R^+)(R^+) \subseteq R^+$.

(3) $R^+ \cap -R^+ = \{0\}$.

La demostración de este Teorema es análoga a su versión para grupos parcialmente ordenados y de igual manera el siguiente.

Teorema 1.17. *Sea R un anillo y P un subconjunto de R que satisface las siguientes 3 condiciones:*

(1) $(P) + (P) \subseteq (P)$,

(2) $PP \subseteq P$,

(3) $P \cap -P = \{0\}$, *donde* $-P = \{g \in R : -g \in P\}$.

Para cualesquiera a, $b \in G$, definimos $a \leq b$ si $b - a \in P$. Entonces $\leq$ es un orden parcial en R y R se convierte en un anillo parcialmente ordenado con cono positivo P.

Definición: Sea R un anillo parcialmente ordenado.

(1) Se dice que es un *anillo reticulado (l-anillo)* si el orden parcial en R es una retícula.

(2) Se define un *anillo totalmente ordenado (o-anillo)* cuando el orden es total. Claramente un o-anillo es un l-anillo.

(3) Es llamado *unitario* si tiene neutro multiplicativo denotado por 1

(4) si R es un l-anillo y $1 \geq 0$ donde 1 representa al neutro multiplicativo, entonces se dice que R es *l-unitario*.

Definición: Sean G y H l-anillos y f : G $\longrightarrow H$ un homomorfismo de anillos.

(1) Se dice que f es un *l-homomorfismo* si f también preserva supremos e ínfimos, es decir, para todo a, $b \in G$,

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

y

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

.

(2) Un *l-isomorfismo* es un isomorfismo de anillos que preserva supremos e ínfimos.

(3) Si existe un l-isomorfismo entre dos l-anillos G y H, entonces se dice que son *l-isomorfos* y se denota como $G \simeq H$.

(4) Sea f un l-homomorfismo entre dos l-anillos R y S al conjunto $Nuc(f) = \{a \in R | f(a) = 0\}$ se le llama el núcleo de f.

Definición: Para un anillo unitario R, un elemento u es llamado una *unidad* si tiene un inverso multiplicativo.

Definición: Un l-anillo R es llamado arquimediano si su grupo aditivo es arquimediano.

Definición: Un *l-ideal* de un l-anillo es un ideal y un l-subgrupo convexo.

Por el Teorema 1.8.(1), un ideal I de un l-anillo es un l-ideal si y sólo si $|r| \leq |x|$ para cualesquiera $x \in I$, $r \in R$, entonces $r \in I$. De manera similar se definen los l-ideales izquierdos (derechos).

Para un l-anillo R y un l-ideal I, es fácil de verificar que el homomorfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow R/I$ definido como $\varphi(a) = a + I$ es un l-homomorfismo llamado la proyección canónica.

Claramente la intersección de cualquier familia de l-ideales es un l-ideal.

Definición: Sea X un subconjunto de un l-anillo R, $\langle X\rangle$ denota a la intersección de todos los l-ideales de R que contienen a X y $\langle X\rangle$ es llamado el *l-ideal generado* por X. Si $X = \{x\}$ denotaremos $\langle X\rangle = \langle x\rangle$.

Lema 1.6. *Sea R un l-anillo. Para cualesquiera a, b, con $c \geq 0$, se tiene que:,*

$$c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb \quad y \quad c(a \vee b) \geq ca \vee cb$$

$$(a \wedge b)c \leq ac \wedge bc \quad y \quad (a \vee b)c \geq ac \vee bc.$$

Demostración.

Notemos primero que la multiplicación del anillo por un elemento positivo fijo preserva el orden (es decir, que para cualesquiera $x, y, z \in R$ con $z \geq 0$, si $x \leq y$ entonces $zx \leq zy$ y $xz \leq yz$). En efecto, tenemos que $y - x \geq 0$, así que $zy - zx = z(y - x) \geq 0 \leq (y - x)z = yz - xz$, de donde se sigue la afirmación.

El resto de la demostración es análogo a la parte correspondiente del Lema 1.1(2).

Lema 1.7. *Sean R, S l-anillos y $f : R \longrightarrow S$ un l-homomorfismo. Entonces, f preserva el orden; además, si $f(x), f(y) \in f(R)$ tales que $f(x) \leq f(y)$, entonces $x \leq y$.*

Demostración.

Primero veamos que f prserva el orden. Sean $x, y \in R$ tales que $x \leq y$, entonces $x \wedge y = x$ y como f es un $l-morfismo$ se tiene que:

$$f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) = f(x)$$

Por lo tanto, $f(x) \leq f(y)$.

Ahora, supongamos que $f(x), f(y) \in f(R)$ tales que $f(x) \leq f(y)$, entonces $f(x) \wedge f(y) = f(x)$, usando nuevamente que f es un $l-morfismo$ se tiene que:

$$f(x) = f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$$

Supongamos que $x \nleq y$, entonces $x \wedge y < x$ y por la primer demostración se tiene que $f(x \wedge y) < f(x)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \leq y$.

Teorema 1.18. *Sean R, S l-anillos y $f : R \longrightarrow S$ un l-homomorfismo.*

(1) Si I es un l-ideal de R entonces $f(I)$ es un l-ideal del subanillo $f(R)$ de S.

(2) Si J es un l-ideal de S entonces $f^{-1}(J)$ es un l-ideal de R.

(3) Sean R, S l-anillos y $f : R \longrightarrow S$ un l-homomorfismo, entonces $Nuc(f)$ es un l-ideal de R

Demostración.

(1) Dado que f es un morfismo de anillos, tenemos que $f(I)$ es un ideal de S. Sólo necesitamos demostrar que $f(I)$ también es un l-subgrupo convexo.

Dado que $f(I)$ ya es un ideal de S se tiene que también es un subgrupo del grupo aditivo de S. Sean $x,y \in f(I)$, entonces existen $a,b \in R$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$ por lo que se tiene que

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = x \wedge y \text{ y } f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = x \vee y$$

por lo que $f(I)$ también es una subretícula de S. Sólo falta ver que es convexo. Sean $x \in f(R)$, $y,z \in f(I)$ tales que $y \leq x \leq z$, entonces existen a, $b \in I$ y $c \in R$ tales que $f(a) = y$, $f(c) = x$ y $f(b) = z$; al ser f un l-homomorfismo, usando el Lema 1.7 se tiene que:

$$a \leq x \leq b$$

Y dado que a, $b \in I$ y $c \in R$ con I un l-ideal, entonces $c \in I$, por lo que $f(c) = x \in f(I)$, de manera que $f(I)$ es convexo y por tanto un l-ideal.

(2) Por la teoría de anillos tradicional sabemos que $f^{-1}(J)$ es un ideal de R por lo que sólo falta demostrar que es un l-subgrupo convexo.

Dado que $f^{-1}(J)$ ya es un ideal de R se tiene que también es un subgrupo del grupo aditivo de R. Sean $x,y \in f^{-1}(J)$, entonces $f(x)$, $f(y) \in J$ por lo que se tiene lo siguiente

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \in J \text{ y } f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \in J$$

por lo que $f^{-1}(J)$ también es una subretícula de R. Sólo falta ver que es convexo. Sean $x \in R$, $a,b \in f^{-1}(J)$ tales que $a \leq x \leq b$ al ser f un l-homomorfismo, se mantiene el orden y tendremos que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

y dado que $f(a)$ y $f(b) \in J$ el cual es un l-ideal de S se tiene que $f(x) \in J$ por lo que $x \in f^{-1}(J)$ y de esa manera tenemos que $f^{-1}(J)$ es convexo y por tanto un l-ideal de R.

(3) La demostración es clara si $J = 0$ en el inciso anterior.

El lema siguiente nos ayuda a establecer que en el anillo cociente, los ideales vienen de cociente de ideales del anillo original tal como pasa en la teoría de anillos tradicional.

Lema 1.8. *Sean R un l-anillo, I un l-ideal de R y $\Pi : R \to R/I$ la proyección canónica. Si N es un l-ideal de R/I, entonces existe un l-ideal $J \supseteq I$ de R tal que $\Pi(J) = N$*

Demostración.

Como $\Pi : R \to R/I$ es un l-homomorfismo de anillos, por el lema anterior tenemos que $\Pi^{-1}(N)$ es un l-ideal de R, luego tomando en cuenta que los homomorfismos son funciones, se tiene que $\Pi(\Pi^{-1}(N)) = N$, por lo que queda demostrado el lema.

Además, usando nuevamente el lema anterior y que $\Pi : R \to R/I$ es suprayectiva, se tiene que si J es un l-ideal de R, entonces $\Pi(J)$ es un l-ideal en R/I, lo que nos da una correspondencia entre los l-ideales de R y los de R/I.

El siguiente resultado nos da métodos simples para construir retículas en anillos y convertirlos en l-anillos y construir nuevas retículas a partir de otras.

Teorema 1.19. *Supongamos que R es un l-anillo unitario con cono positivo P y $u > 0$ unidad. Entonces uP es el cono positivo de una retícula en R que lo hace un l-anillo.*

Demostración.

Es claro que uP es cerrado bajo la suma y dado que $u \in P$, uP también es cerrado bajo el producto.
Finalmente, como $uP \subseteq P$ implica que $uP \cap -uP \subseteq P \cap -P = \{0\}$.
Por lo que por el Teorema 1.17. R obtiene estructura de anillo parcialmente ordenado con cono positivo uP.
Para ver que dicho orden es una retícula demostremos que:

$$a \wedge_{uP} b = u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b) \text{ y } a \vee_{uP} b = u(u^{-1}a \vee_P u^{-1}b) \qquad \forall a, b \in uP$$

Veamos que $u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b)$ es una cota inferior para b y a.

Claramente $u(u^{-1}b - (u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b)) = b - u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b) \in uP$ por lo que $u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b) \leq_{uP} b$ y de manera análoga $u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b) \leq_{uP} a$.
Sea $k \in R$ tal que $k \leq_{uP} b$,a si demostramos que $k \leq u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b)$ se demostraría lo querido.

De que $k \leq_{uP} b$,a, se obtiene que $a - k$, $b - k \in uP$, por lo que $u^{-1}(a - k)$, $u^{-1}(b - k) \in P$.
De lo anterior se afirma que como P es un cono positivo, $u^{-1}a$, $u^{-1}b \geq_P u^{-1}k$, por lo que $u^{-1}k \leq_P u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b$.
Así, repitiendo un argumento anterior se tiene que $u(u^{-1}a \wedge_P u^{-1}b) - k \in uP$ lo que demuestra lo deseado.

Usando el anillo opuesto obtenemos la demostración para el supremo.

Corolario 1.2. *Sea R un l-anillo unitario y $u \in R^+$ una unidad con inverso no positivo, entonces existe un orden $\leq$ tal que 1 no es positivo.*

Demostración.

Como R sólo es un l-anillo unitario, podemos tomar la unidad positiva u tal que $u^{-1} \notin R^+$. Por el Teorema anterior, R es un l-anillo con cono positivo uR^+ y dado que $u^{-1} \notin R^+$ se tiene que $1 \notin uR^+$, así, R no es l-unitario con respecto al nuevo orden reticular.

Ejemplos 1.3.

(1) Supongamos que R es un l-anillo y $M_n(R)$ es el anillo de matrices de $n \times n$ sobre R con $n \geq 2$. Definimos una matriz $(a_{ij}) \geq (0_{ij})$ si cada $a_{ij} \geq 0$ en R. Entonces $M_n(R)$ tiene estructura de l-anillo.

Claramente las condiciones del Teorema 1.17 se satisfacen por lo que se tiene una estructura de anillo parcialmente ordenado. Es fácil de verificar que para cualesquiera dos matrices (a_{ij}) y (b_{ij}),

$$(a_{ij}) \wedge (b_{ij}) = (a_{ij} \wedge b_{ij}) \text{ y } (a_{ij}) \vee (b_{ij}) = (a_{ij} \vee b_{ij}).$$

Claramente, $(a_{ij}) - (a_{ij} \wedge b_{ij}) = (a_{ij} - (a_{ij} \wedge b_{ij}))$ y en R $a_{ij} - (a_{ij} \wedge b_{ij}) \geq 0$ por lo que $(a_{ij}) - (a_{ij} \wedge b_{ij}) \geq (0_{ij})$ y de igual manera $(b_{ij}) - (a_{ij} \wedge b_{ij}) \geq (0_{ij})$.

Sea (c_{ij}) tal que (a_{ij}),$(b_{ij}) \geq (c_{ij})$, entonces como nos estamos manejando entrada a entrada se tiene que a_{ij},$b_{ij} \geq c_{ij}$ los cuales son coeficientes de R por lo que $c_{ij} \leq a_{ij} \wedge b_{ij}$ que deja claro que $(c_{ij}) \leq (a_{ij} \wedge b_{ij})$ y por tanto obtenemos lo que queríamos, de manera análoga se tiene el caso del supremo.

Luego, recordemos que el producto de matrices positivas sigue siendo positiva, entonces $M_n(R)$ es un l-anillo con cono positivo $M_n(R^+)$. Este orden reticular en $M_n(R)$ es llamado el *orden de entradas*.

Claramente si R es l-unitario, entonces la matriz identidad es positiva respecto al orden de entrada.

Sea (e_{ij}) la matriz donde la entrada (i, j)-ésima es 1 y las demás entradas son cero. Sea f la matriz $f = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{33} + \cdots + e_{nn}$. Entonces $f \in M_n(R^+)$ y $f^{-1} = e_{12} + e_{21} - e_{22} + e_{33} + \cdots + e_{nn} \notin M_n(R^+)$. Entonces por el Teorema 1.19 y el corolario 1.2, $fM_n(R^+)$ es el cono positivo de un l-anillo $M_n(R)$ sobre R, donde $1 \ngeq 0$.

(2) Considere el anillo de matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$. Definimos el cono positivo como:

$$P = \{(a_{ij}) | a_{nj} = 0, \, j = 1, \cdots, n-1 \text{ y } a_{nn} > 0\} \cup \{(0_{ij})\}.$$

Dado que, además de la matriz nula sólo estamos tomando en cuenta el último renglón de la matriz y de esté, sus entradas son nulas salvo la última que contiene a un real que es estrictamente positivo, es claro que P cumple las propiedades para ser el cono positivo de $M_n(\mathbb{R})$ bajo un orden parcialmente ordenado.

Para ver que $M_n(\mathbb{R})$ no es un l-anillo bajo el orden inducido por P usaremos

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ -1 & -1 & \cdots -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (e_{nn}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que (a_{ij}) no es comparable con (e_{nn}), luego para que una matriz A sea menor a (e_{nn}), el ultimo renglón de A debe tener ceros salvo el último dígito que debe ser menor a 1. Para que una matriz A sea menor a (a_{ij}), las entradas de su último renglón deben ser -1 y su último dígito ser menor a -1. Por lo que es claro que no tienen una cota inferior en común y entonces no puede existir $(e_{nn}) \wedge (a_{ij})$.

(3) Consideremos el anillo $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con las operaciones heredadas de $\mathbb{R}$ (entrada a entrada). Definimos el cono positivo de R como $P = \{(a, b)|b > 0\} \cup \{(0, 0)\}$. Entonces (R, P) es un anillo parcialmente ordenado pero no un l-anillo.

Como se definió R como producto de copias de $\mathbb{R}$, es claro que $P + P \subseteq P$ y $PP \subseteq P$ con $(a, b) \in P$. Luego, $-P = \{(a, b)|b < 0\} \cup \{(0, 0)\}$, por lo que es evidente que $P \cap -P = \{(0, 0)\}$. Por lo tanto R tiene estructura de anillo parcialmente ordenado.

Sean $(-2, 3), (1, 3) \in R$, entonces $U_R(\{(-2, 3), (1, 3)\}) = \{(a, b)|b > 3\}$, el cual es claro que no tiene elemento menor por lo que $(-2, 3) \vee (1, 3)$ no existe. así que R no es un l-anillo.

(4) Vamos a construir más ordenes reticulares en $R = F[x]$ donde F es un anillo ordenado. Tomemos un entero positivo n, definimos el cono positivo P_n como sigue. Para un polinomio $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0$ de grado k. Si $k \leq n$, decimos que $p(x) \geq 0$ si $a_k > 0$ y $a_0 \geq 0$, y si $k > n$, entonces decimos que $p(x) \geq 0$ si $a_k > 0$.

Luego, es claro que al sumar polinomios positivos de igual grado dará como resultado un polinomio positivo. Si son de grados diferentes, se conserva el de grado mayor por lo que se mantiene positivo.

Sin importar el grado del polinomio, si éste es positivo, su coeficiente constante es estrictamente positivo, por lo que es claro que la intersección de P_n con el conjunto de inversos es el polinomio cero.

Finalmente, dada la suma definida en el anillo de polinomios y dado que éstos tienen coeficientes bajo un campo, es inmediato ver que P_n es invariante bajo conjugación.

Por lo que para cada P_n se cumplen las tres propiedades necesarias para que R adquiera estructura de anillo parcialmente ordenado.

(5) Consideremos el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$, definimos el cono positivo como

$$P = \{f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots, +a_n x^n \mid a_0 = 0, a_{i>0} > 0.$$

Entonces $\mathbb{R}[x], P$ es un anillo parcialmente ordenado pero no un l-anillo.

Es claro que una suma de polinomios con coeficientes estrictamente positivos da como resultado un polinomio con coeficientes estrictamente positivos. Además como el polinomio 0, el neutro aditivo de $\mathbb{R}[x]$ se tiene que $P+P \subseteq P$. de igual forma $PP \subseteq P$. Por último, es claro que $-P = \{f(x)|$cada coeficiente de $f(x)$ es estrictamente negativo $\} \cup \{0\}$ y que $P \cap -P = \{0\}$, por lo que $\mathbb{R}[x]$ tiene estructura de anillo parcialmente ordenado.

Luego, es claro que cualquier cota inferior de un elemento $f \in \mathbb{R}[x]$ tiene el mismo coeficiente independiente de f. Por lo tanto, elementos $f, g \in \mathbb{R}[x]$ cuyos coeficientes independientes no sean iguales, no tienen sotas inferiores en común de manera que el ínfimo no existe. Por lo tanto $\mathbb{R}[x]$ no puede der un l-anillo.

1.3.2. Algunos l-anillos especiales

Definición: Sea R un l-anillo.

(1) elemento $a \in R^+$es un *d-elemento* si:

$$\text{para todo } x,\, y \in R,\ x \wedge y = 0 \Rightarrow ax \wedge ay = xa \wedge ya = 0$$

(2) Un elemento $a \in R^+$ es un *f-elemento* si

$$\text{para todo } x,\, y \in R,\ x \wedge y = 0 \Rightarrow ax \wedge y = xa \wedge y = 0.$$

(3) Un l-anillo es un *d-anillo (f-anillo)* si cada elemento de R^+ es un d-elemento (f-elemento).

(4) Definimos $d(R) = \{a \in R^+ : a \text{ es un } d\text{-elemento}\}$ y $f(R) = \{a \in R : |a| \text{ es un } f\text{-elemento}\}$.

Es claro que un f-elemento es un d-elemento.

Teorema 1.20. *Sea R un l-anillo.*

(1) Un elemento $a \in R^+$ es un d-elemento si y sólo si para todo x, $y \in R$, $a(x \wedge y) = ax \wedge ay$ y $(x \wedge y)a = xa \wedge ya$.

(2) Supongamos que $a \in R^+$ es invertible, entonces a es d-elemento si y sólo si $a^{-1} \in R^+$.

(3) Para todo x, $y \in R$, $|xy| \leq |x||y|$ y la igualdad se da si y sólo si R es un d-anillo.

(4) $d(R)$ es un subconjunto convexo de R que es cerrado bajo la multiplicación.

(5) $f(R)$ es un l-subanillo convexo de R y un f-anillo.

(6) R es un f-anillo si y sólo si para cada $a \in R$, $a^{\perp}$ es un l-ideal de R.

(7) Si R es un d-anillo (f-anillo) y I es un l-ideal, entonces R/I es un d-anillo (f-anillo)

Demostración.

(1) Supongamos primero que $a \in R^+$ es un d-elemento y tomemos x, $y \in R$. Como sabemos, $(x-(x \wedge y)) \wedge (y-(x \wedge y)) = 0$ y dado que a es un d-elemento, se tiene que $a(x-(x \wedge y)) \wedge a(y-(x \wedge y)) = 0$ y $(x-(x \wedge y))a \wedge (y-(x \wedge y))a = 0$. Por lo tanto se obtiene lo querido y $a(x \wedge y) = ax \wedge ay$ y $(x \wedge y)a = xa \wedge ya$.

Recíprocamente, supongamos que para todo x, $y \in R$ $a(x \wedge y) = ax \wedge ay$ y $(x \wedge y)a = xa \wedge ya$.
Sean z, $w \in R$ tales que $z \wedge w = 0$ entonces por hipótesis:

$$a(z \wedge w) = az \wedge aw = 0 \text{ y } (z \wedge w)a = za \wedge wa = 0.$$

Por lo tanto a es un d-elemento.

(2) Sea $a \in R^+$ invertible y un d-elemento.
Sabemos que $0 = (-a) \vee 0 = a(-1 \vee 0)$ por lo que al ser a invertible tenemos que $-1 \vee 0 = 0$
Entonces $1 = 1^+ - 1^- = 1^+ \geq 0$ entonces como a es un d-elemento y por (1)

$$a(a^{-1} \wedge 0) = 1 \wedge 0 = 0.$$

De manera que $a^{-1} \wedge 0 = 0$ por lo que $a^{-1} \geq 0$.

Recíprocamente, si a y $a^{-1} \in R^+$ y $x \wedge y = 0$ para x, $y \in R$ se tiene que:

$$0 \leq a^{-1}(ax \wedge ay) \leq a^{-1}ax \wedge a^{-1}ay = x \wedge y = 0$$

debido al comportamiento del ínfimo con el producto y a que trabajamos con elementos mayores o iguales a cero.
Por lo tanto $ax \wedge ay = 0$ y de manera análoga $xa \wedge ya = 0$ con lo que demostramos que a es un d-elemento.

(3) Resolvamos primero la desigualdad para proceder después con la doble implicación.

Sean x, $y \in R$, entonces:

$$|xy| = |(x^+ - x^-)(y^+ - y^-)| = |x^+y^+ - x^+y^- - x^-y^+ + x^-y^-| \leq$$
$$x^+y^+ + x^+y^- + x^-y^+ + x^-y^- = (x^+ + x^-)(y^+ + y^-) = |x||y|$$

Ahora supongamos que $|xy| = |x||y|$ para todo x, $y \in R$, tomemos $a \in R^+$ y z, $w \in R$ tales que $z \wedge w = 0$.
Definamos $c = az \wedge aw$, sabemos que $(az-c) \wedge (aw-c) = 0$ entonces por el Teorema 1.7.(3) se tiene que:

$$|(az-c) - (aw-c)| = (az-c) + (aw-c) = az + aw - 2c$$

Por otra parte, por hipótesis tenemos que:

$$|(az-c) - (aw-c)| = |az - aw| = |a(z-w)| = |a||z-w| = a(z+w) = az + aw$$

Por lo que se afirma que $-2c = 0$ y por lo tanto $c = az \wedge aw = 0$.
De forma análoga $za \wedge wa = 0$ y demostramos que a es un d-elemento lo que implica que R es un d-anillo.

Recíprocamente, tomemos a R un d-anillo y x, $y \in R$.
Nosotros sabemos que $x^+ \wedge x^- = 0$ y $y^+ \wedge y^- = 0$ y dado que x^+, x^-, y^+, $y^- \geq 0$ y que R es un d-anillos se tiene que:

$$x^+y^+ \wedge x^-y^+ = 0 \text{ y } x^+y^+ \wedge x^+y^- = 0,$$
$$\text{y}$$
$$x^-y^- \wedge x^-y^+ = 0 \text{ y } x^-y^- \wedge x^+y^- = 0.$$

Y por el Teorema 1.6.(2) obtenemos que $x^+y^+ \wedge x^-y^+ + x^+y^- = 0$ y $x^-y^- \wedge x^-y^+ + x^+y^- = 0$ y de nuevo obtenemos un elemento ajeno a otros dos por lo que

$$x^+y^+ + x^-y^- \wedge x^-y^+ + x^+y^- = 0.$$

Entonces podemos usar el Teorema 1.7.(3) y regresando a la desigualdad: $|xy| = |(x^+ - x^-)(y^+ - y^-)| = |x^+y^+ - x^+y^- - x^-y^+ + x^-y^-| =$
$|x^+y^+ + x^-y^- - (x^+y^- + x^-y^+)| = x^+y^+ + x^+y^- + x^-y^+ + x^-y^- = (x^+ + x^-)(y^+ + y^-) =$
$|x||y|$.
Por lo tanto, la igualdad se cumple.

(4) Sean a, $b \in d(R)$ y x, y $c \in R$ con $a \leq c \leq b$ y $x \wedge y = 0$.
Como el ínfimo preserva desigualdades se tiene que $0 = ax \wedge ay \leq cx \wedge cy \leq bx \wedge by = 0$ y $0 = xa \wedge ya \leq xc \wedge yc \leq xb \wedge yb = 0$ por lo que $cx \wedge cy = xc \wedge yc = 0$ y por lo tanto $c \in d(R)$.
Además como $x \wedge y = 0$ y $a \in d(R)$ tenemos que $ax \wedge ay = xa \wedge ya = 0$ y como $b \in d(R)$ concluimos que $(ab)x \wedge (ab)y = x(ab) \wedge y(ab) = 0$ y por lo tanto $ab \in d(R)$.

(5) Sean a, $b \in f(R)$ y x, $y \in R$ tales que $x \wedge y = 0$. Debido a la desigualdad del triángulo y al Teorema 1.7.(5) se tiene que:

$$0 \leq |a-b|x \wedge y \leq [(|a| + |b|)x] \wedge y \leq |a|x \wedge y + |b|x \wedge y = 0$$

De manera análoga, $x|a-b| \wedge y = 0$ y se tiene que $a - b \in f(R)$.
Luego, $|b|x \wedge y = 0$ lo que implica que $(|a||b|)x \wedge y = 0$ y similarmente $x(|a||b|) \wedge y = 0$ por lo que $ab \in f(R)$.
Por último, si $|w| \leq |a|$ para algún $w \in R$ y $a \in f(R)$ entonces:

$$0 \leq |w|x \wedge y \leq |a|x \wedge y = 0$$

y

$$0 \leq x|w| \wedge y \leq x|a| \wedge y = 0$$

por lo que $w \in f(R)$ y por lo tanto $f(R)$ es un l-subanillo convexo de R.

Para que $f(R)$ sea un f-anillo, $f(R)^+$ debe estar compuesto sólo de f-elementos pero si $v \in f(R)^+$ entonces $v = |s|$ para algún $s \in f(R)$ y entonces por definición de $f(R)$, v ya es un f-elemento.

(6) Supongamos que R es un f-anillo y $a \in R$.
Para ver que $a^{\perp}$ es un l-ideal necesitamos que sea un ideal y un l-subgrupo convexo. En la sección de grupos vimos que $a^{\perp}$ ya es un l-subgrupo convexo por lo que sólo queda ver que es un ideal.
Sea $b \in a^{\perp}$ y $r \in R$ entonces $|b| \wedge |a| = 0$ por definición.
Como R es un f-anillo, $|r|$ es un f-elemento por lo que $|r||b| \wedge |a| = |b||r| \wedge |a| = 0$ y como todo f-elemento es un d-elemento, R también es un d-anillo, entonces por (3) $|rb| \wedge |a| = |br| \wedge |a| = 0$ por lo que rb, $br \in a^{\perp}$ y asi, $a^{\perp}$ es un l-ideal.

Recíprocamente, supongamos que $a^{\perp}$ es un l-ideal para cualquier elemento de R y sean x, $y \in R$ tales que $x \wedge y = 0$
Entonces se tiene que $x \in y^{\perp}$ y como $y^{\perp}$ es un l-ideal, se tiene en particular que para cualquier $a \in R^{+}$, ax, $xa \in y^{\perp}$.
Por lo tanto $ax \wedge y = xa \wedge y = 0$ y a es un f-elemento. Por lo tanto R es un f-anillo.

(7) Sea R un d-anillo y I un ideal de R.
Sean $\bar{x}$, $\bar{y} \in R/I$ y $\bar{z} \in (R/I)^{+}$ tales que $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{0}$.
Tomemos $x \wedge y = w \in I$, como sabemos $(x - w) \wedge (y - w) = 0$ y como estamos trabajando en un d-anillo y tenemos que $(z + i) \geq 0$ para algún $i \in I$;

$$(z + i)(x - w) \wedge (z + i)(y * w) = 0 \text{ y } (x - w)(z + i) \wedge (x - w)(z + i) = 0$$

lo que implica que

$$(z + i)x \wedge (z + i)y = (z + i)w \text{ y } x(z + i) \wedge y(z + i) = w(z + i)$$

Y recordando que $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ se tiene que $\bar{z}\bar{x} \wedge \bar{z}\bar{y} = \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} = \bar{0}$ y $\bar{x}\bar{z} \wedge \bar{y}\bar{z} = \overline{wz} = \bar{w}\bar{z} = \bar{0}$ por lo que $\bar{z}$ es un d-elemento y R/I es un d-anillo.
Similarmente para un f-anillo.

Definición: Se dice que un l-anillo R es un *producto subdirecto* de la familia de l-anillos $\{R_i | i \in I\}$ si R es un subanillo del producto directo $\Pi_{i \in I} R_i$ tal que $\pi_k(R) = R_k$ para cada $k \in I$ donde $\pi_k : \Pi_{i \in I} R_i \to R_k$ es el l-epimorfismo canónico, esto es, para $\{a_i\} \in \Pi_{i \in I} R_i$, $\pi_k(\{a_i\}) = a_k$.

Definición: Un l-anillo R es llamado *subdirectamente irreducible* si la intersección de todos los l-ideales no cero también es un l-ideal no cero.

Lema 1.9. *Sea R un l-anillo y $a \in R$*

(1) $\langle a \rangle = \{x \in R : |x| \leq n|a| + r|a| + |a|s + t|a|u,\ n \in Z^{+},\ r, s, t, u \in R^{+}\}$.

(2) Si R es conmutativo entonces $\langle a \rangle = \{x \in R : |x| \leq n|a| + r|a|,\ n \in Z^{+},\ r \in R^{+}\}$.

(3) Si R es l-unitario entonces $\langle a \rangle = \{x \in R : |x| \leq t|a|u,\ t, u \in R^{+}\}$.

(4) Supongamos que R es un f-anillo. Si $x \wedge y = 0$ para todo x, $y \in R$ entonces $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$.

Demostración.

(1) Sea $I = \{x \in R : |x| \leq n|a| + r|a| + |a|s + t|a|u, n \in \mathbb{Z}^+, r, s, t, u \in R^+\}$
$I \neq \phi$ pues $a \in I$ ya que $|a| \leq 1|a| + o|a| + |a|0 + 0|a|0$, entonces tomemos x, $y \in I$.
Se tiene que $|x| \leq n_1|a| + r_1|a| + |a|s_1 + t_1|a|u_1$ y $|y| \leq n_2|a| + r_2|a| + |a|s_2 + t_2|a|u_2$ donde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ y $r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2 \in R^+$
entonces:

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq n_1|a| + r_1|a| + |a|s_1 + t_1|a|u_1 + n_2|a| + r_2|a| + |a|s_2 + t_2|a|u_2 \leq$$
$$n_1|a| + r_1|a| + |a|s_1 + t_1|a|u_1 + n_2|a| + r_2|a| + |a|s_2 + t_2|a|u_2 + t_1|a|u_2 + t_2|a|u_1 =$$
$$(n_1 + n_2)|a| + (r_1 + r_2)|a| + |a|(s_1 + s_2) + (t_1 + t_2)|a|(u_1 + u_2)$$

por lo que $x - y \in I$.
Si $r \in R$ tal que $|r| \leq |x|$ entonces por definición y por la transitividad del orden, $r \in I$ por lo que I es un l-subgrupo convexo de R.
Además $|rx| \leq |r||x| \leq |r|n_1|a| + |r|r_1|a| + |r||a|s_1 + |r|t_1|a|u_1$ por lo que $rx \in I$ de igual manera que xr por lo que I es un l-ideal.
Como $a \in I$, se tiene que $\langle a \rangle \subseteq I$ y como I está constituido por elementos menores alguna combinación de $|a|$, al estar trabajando con conjuntos convexos se tiene que $I \subseteq \langle a \rangle$. Por lo tanto $I = \langle a \rangle$.

(2) Si observamos la definición de $\langle a \rangle$ en (1), al ser R conmutativo, nos permite agrupar los múltiplos de $|a|$ cuyo factor es un elemento de R^+ con lo que se resuelve este inciso.

(3) Sea $J = \{x \in R : |x| \leq t|a|u, t, u \in R^+\}$
Como R es unitario se tiene que $J \neq \phi$. Pues $a \in J$ ya que $|a| \leq 1|a|1$. Entonces tomemos x, $y \in J$.
Se tiene que $|x| \leq t_1|a|u_1$ y $|y| \leq t_2|a|u_2$ donde $t_1, t_2, u_1, u_2 \in R^+$
entonces:

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq t_1|a|u_1 + t_2|a|u_2 \leq t_1|a|u_1 + t_2|a|u_2 + t_1|a|u_2 + t_2|a|u_1 =$$
$$(t_1 + t_2)|a|(u_1 + u_2)$$

por lo que $x - y \in J$.
Si $r \in R$ tal que $|r| \leq |x|$ entonces por definición y por la transitividad del orden, $r \in J$ por lo que J es un l-subgrupo convexo de R.
Además $|rx| \leq |r||x| \leq |r|t_1|a|u_1$ por lo que $rx \in J$ de igual manera que xr por lo que J es un l-ideal.
Luego, si $x \in J$, entonces $|x| \leq t|a|u \leq 0|a| + 0|a| + |a|0 + t|a|u$ por lo que $x \in \langle a \rangle$.
De esa manera tenemos a un l-ideal que contiene a a contenido en el l-ideal generado por a. Por lo tanto $J = \langle a \rangle$.

(4) Sean x, $y \in R$ tales que $x \wedge y = 0$, recordemos que al dos elementos ser ajenos, dichos elementos son positivos.
Sea $a \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$, por (1) tenemos que a cumple lo siguiente:

$$|a| \leq n_1|x| + r_1|x| + |x|s_1 + t_1|x|u_1 \text{ y } |a| \leq n_2|y| + r_2|y| + |y|s_2 + t_2|y|u_2$$

con $n_1, n_2 \in Z^+$ y $r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2 \in R^+$.
Debido a que $x \wedge y = 0$ y que R es un f-anillo, usando el mismo argumento que en

Teorema 1.20.(3) se tiene que

$$0 \leq |a| \wedge |a| \leq (n_1|x| + r_1|x| + |x|s_1 + t_1|x|u_1) \wedge (n_2|y| + r_2|y| + |y|s_2 + t_2|y|u_2) = 0$$

lo cual implica que $|a| = 0$ y por lo tanto $a = 0$.

Corolario 1.3. *Sea $S \subset R$ un subconjunto, entonces*

$$\langle S \rangle = \{x \in R \mid |x| \leq \sum_{i=0}^{n} m_i|a_i| + r_i|a_i| + |a_i|s_i + t_i|a_i|u_i \mid m_i \in Z^+, r_i, s_i, t_i, u_i \in R^+, a_i \in S\}$$

Demostración.

Sea $I = \{x \in R \mid |x| \leq \sum_{i=0}^{n} m_i|a_i| + r_i|a_i| + |a_i|s_i + t_i|a_i|u_i \mid m_i \in Z^+, r_i, s_i, t_i, u_i \in R^+, a_i \in S\}$
$I \neq \phi$ pues $S \subset I$ ya que para todo $a \in S$ $|a| \leq 1|a| + o|a| + |a|0 + 0|a|0$.
Sean x, $y \in I$ entonces $|x| \leq \sum_{i=0}^{n} m_{i,1}|a_i| + r_{i,1}|a_i| + |a_i|s_{i,1} + t_{i,1}|a_i|u_{i,1}$ y $|y| \leq \sum_{i=0}^{k} m_{i,2}|b_i| + r_{i,2}|b_i| + |b_i|s_{i,2} + t_{i,2}|b_i|u_{i,2}$ entonces, añadiendo términos similares a los que se usaron en el el Lema 1.9 se tiene que

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq \sum_{i=0}^{n}(m_{i,1} + m_{i,2})(|a_i| + |b_i|) + (r_{i,1} + r_{i,2})(|a_i| + |b_i|) + (|a_i| + |b_i|)(s_{i,1} + s_{i,2}) + (t_{i,1} + t_{i,2})(|a_i| + |b_i|)(u_{i,1} + u_{i,2})$$

por lo que $x - y \in I$.
Si $r \in R$ tal que $|r| \leq |x|$ entonces por definición y por la transitividad del orden, $r \in I$ por lo que I es un l-subgrupo convexo de R.
Además $|rx| \leq |r||x| \leq \sum_{i=0}^{n} |r|m_i|a_i| + |r|r_i|a_i| + |r||a_i|s_i + |r|t_i|a_i|u_i$ por lo que $rx \in I$ de igual manera que xr por lo que I es un l-ideal.
Como $S \subset I$, se tiene que $\langle S \rangle \subseteq I$ y como I está constituido por elementos menores de alguna combinación de valores absolutos de elementos de S, al estar trabajando con conjuntos convexos se tiene que $I \subseteq \langle S \rangle$. Por lo tanto $I = \langle S \rangle$.

Teorema 1.21. *Sea R un l-anillo.*

(1) Un l-anillo R es l-isomorfo a un producto subdirecto de l-anillos $\{R_i|i \in I\}$ si y sólo si hay una familia de l-ideales $\{J_i|i \in I\}$ tal que $R/J_k = R_k$ para cada $k \in I$ y la intersección de $\{J_i|i \in I\}$ es cero.

(2) Un f-anillo subdirectamente irreducible es totalmente ordenado.

(3) Un l-anillo es un f-anillo si y sólo si es un producto subdirecto de anillos totalmente ordenados.

Demostración.

(1) Supongamos que R es un producto subdirecto de una familia de l-anillos $R_i|i \in I$.
Definamos $J_i = ker(\pi_i) \cap R$, entonces J_i, es un l-ideal de R, aún más es $ker(\pi_{i|R})$ y

por el primer Teorema del isomorfismo $R/J_i \simeq R_i$.
Sea $\{a_i\} \in \cap_{i\in I} J_i$, entonces $\pi_k(\{a_i\}) = 0$ para toda $k \in I$ por lo que $\{a_i\} = 0$. Es decir, $\cap_{i\in I} J_i = 0$

Recíprocamente, supongamos que existe una familia de l-ideales $\{J_i | i \in I\}$ de R tales que $R/J_k = R_k$ para cada $k \in I$ y la intersección de $\{J_i | i \in I\}$ es cero. Definamos el siguiente l-anillo:

$$\overline{R} = \{\{a + J_i\}_{i\in I} | a \in R\}$$

Cuyas operaciones son las naturales. Veamos que $\overline{R}$ es producto subdirecto de la familia $\{R/J_i \ | i \in I\}$.

Claramente $\overline{R}$ es un l-subanillo del producto directo de $\{R/J_i \ | i \in I\}$ y es fácil notar que $\pi_k(\overline{R}) = R/J_k$, por lo que, en efecto, es un producto subdirecto.
Nótese también, que por su definición, $\overline{R} \simeq R$ por lo que R es isomorfo a un producto subdirecto de una familia de l-anillos.

(2) Sea R un f-anillo subdirectamente irreducible.
Supongamos que $x \wedge y = 0$ para x, $y \in R$, por el Lema 1.9.(4) $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$ y como la intersección de $l$ideales no cero es un $l$ideal no cero tenemos que $\langle x \rangle = 0$ o $\langle y \rangle = 0$ lo cual implicaría que $x = 0$ o $y = 0$.
Sea $x \in R$, sabemos que $x = x^+ - x^-$ donde $x^+ \wedge x^- = 0$ entonces por la observación anterior se tiene que $x = x^+$ o $x = x^-$ y entonces $x \in R^+ \cup -R^+$ y por el Teorema 1.4.(2) se tiene que R es totalmente ordenado.

(3) Sea R un l-anillo y un f-anillo. Para cada $0 \neq a \in R$ definimos:

$$M_a = \{I | I \text{ es un } l\text{-ideal y } a \notin I\}$$

Es claro que $M_a \neq \phi$ puesto que $\{0\} \in M_a$, luego M_a es un conjunto parcialmente ordenado mediante la inclusión.
Si $\{I_j\}_{j\in J}$ una cadena de M_a entonces $\cup_{j\in J} I_j$ es un l-ideal que no contiene a a. Aplicando entonces el Lema de Zorn, M_a tiene un elemento máximo I_a.
Afirmamos que R/I_a es un f-anillo subdirectamente irreducible.
La parte de ser un f-anillo es clara por el Teorema 1.20.(7)

Un método importante para demostrar propiedades de f-anillos es primero considerar anillo totalmente ordenados y entonces usar el hecho de que un f-anillo es un producto subdirecto de anillos totalmente ordenados.

Teorema 1.22. *Sea R un f-anillo.*

(1) Si $a \wedge b = 0$ para a, $b \in R$, entonces $ab = 0$. Seguidamente, R tiene cuadrados positivos.

(2) Si R es arquimediano, entonces R es conmutativo.

(3) Si R es unitario, entonces cada elemento idempotente de R está en el centro de R.

(4) Si R es unitario y $a^n = 1$ para algún $a \in R^+$ y algún entero positivo n, entonces $a = 1$.

Demostración.

(1) Si $a \wedge b = 0$ entonces por ser f-anillo se tiene que $ab \wedge b = 0$ y seguidamente que $ab \wedge ab = 0$.
Para cualquier $x \in R$ se tiene que:

$$x^2 = (x^+ - x^-)^2 = {x^+}^2 - x^+x^- - x^-x^+ + {x^-}^2 = {x^+}^2 + {x^-}^2 \geq 0$$

(2) Mostraremos que dados $a, b \geq 0$, para cualquier n entero positivo, $n|ab - ba| \leq a^2 + b^2$.
Supongamos que S es un o-anillo arquimediano con $a, b \neq 0$. Dado que S es arquimediano existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $ka < nb \leq (k+1)a$, sea $nb = ka + r$ con $0 \leq r < leqa$, entonces:

$$n|ab - ba| = |a(ka + r) - (ka + r)a| = |ar - ra| \leq a^2 \leq a^2 + b^2$$

Si R es un f-anillo se tiene que R es l-isomorfo a un producto subdirecto de l-anillos totalmente ordenados. Entonces existen $l$ideales $\{I_j | j \in J\}$ tales que R/I_j es totalmente ordenado y $\cap_{j \in J} I_j = \{0\}$. De esta manera, usando el argumento anterior se tiene que para $a, b \in R$ positivos:

$$n|\overline{ab} - \overline{ba}| \leq \overline{a}^2 + \overline{b}^2 \text{ en } R/I_j \text{ para toda } j$$

Luego,

$$\overline{n|ab - ba|} = \overline{n|ab - ba} \wedge \overline{a^2 + b^2} \text{ en } R/I_j \text{ para toda } j$$

Recordando que el ínfimo de dos clases es la clase del ínfimo se tendría que:

$$\overline{n|ab - ba|} - (\overline{n|ab - ba| \wedge (a^2 + b^2)}) = \overline{0}$$

De manera que:

$$n|ab - ba| - (n|ab - ba| \wedge (a^2 + b^2) \in (I_j) \text{ para toda } j$$

Y como la intersección es 0 tenemos que $n|ab - ba| \wedge a^2 + b^2 = n|ab - ba|$ por lo que $n|ab - ba| \leq a^2 + b^2$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y dado que R es arquimediano se tiene que $|ab - ba| = 0$ que implica que $ab = ba$ para cualesquiera $a, b \geq 0$.
Como los l-grupos son dirigidos y R es un l-grupo, todos sus elementos son resta de elementos positivos, por ende la conmutatividad se extiende.

(3) Es claro que un f-anillo unitario debe ser un l-unitario pues $1^2 = 1 \geq 0$ por (1).
Sea S un anillo totalmente ordenado y $e \in S$ un elemento idempotente. Como e es idempotente, se tiene que $1 - e$ también es idempotente pues $(1 - e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$.
Usando (1) nuevamente, se tiene que todos los idempotentes son positivos, por lo que $e, 1 - e \geq 0$, además al estar en un anillo totalmente ordenado se tiene que $e \geq 1 - e$ o $1 - e \geq e$.
Si $e > 1 - e$ entonces se tiene que $e = e^2 > (1 - e)e = 0$, por otro lado, si $1 - e > e$

entonces $1 - e = (1 - e)^2 > e(1 - e) = 0$ por lo que $e = 1$ por lo tanto, los únicos idempotentes son el 0 y 1.

Supongamos que R es un f-anillo, entonces existen l-ideales $\{J_i\}$ de R tales que R/J_i es totalmente ordenado y $\cap_{i \in I} J_i = \{0\}$.
Sea e un idempotente en R, por la observación anterior de tiene que $\bar{e} = \bar{0}$ o $\bar{e} = \bar{1}$ para todo R/J_i, por lo que para cualquier $a \in R$ se tiene que $\overline{ea} = \overline{ae}$ para todo R/J_i, entonces $ea - ae \in J_i$ para toda $i \in I$.
Por lo tanto $ea - ae = 0$, lo que implica que e está en el centro de R,

(4) Sea S un anillo totalmente ordenado. Si $1 < a$ se tiene la cadena $1 < a \leq a^2 \cdots \leq a^n = 1$ lo cual es una contradicción. De igual manera si $a < 1$ se tiene que $1 > a \geq a^2 \cdots \geq a^n = 1$ que vuelve a ser una contradicción por lo que se tiene que $a = 1$.
Supongamos que R es un f-anillo, entonces existen l-ideales $\{J_i\}$ de R tales que R/J_i es totalmente ordenado y $\cap_{i \in I} J_i = \{0\}$.
Sea $a \in R$ tal que $a^n = 1$ entonces $\bar{a^n} = \bar{1}$ para todo R/J_i por lo que $\bar{a} = \bar{1}$ debido a la observación anterior. Por lo tanto se tiene que $a - 1 \in J_i$ para toda $i \in I$ lo que implica que $a = 1$.

Definición: Un l-anillo R es llamado un *casi-f-anillo* si $x^+x^- = 0$ para todo $x \in R$.

Por el Teorema anterior un f-anillo es un casi f-anillo y estos tienen cuadrados positivos.

Lema 1.10. *Sea R un l-anillo. R es un casi f-anillo si y sólo si para cualquier $a \in R$, $|a|^2 = a^2$.*

Demostración.
Supongamos que R es un casi f-anillo. Sea $a \in R$, entonces

$$|a|^2 = (a^+ + a^-)^2 = (a^+)^2 + a^+a^- + a^-a^+ + (a^-)^2 = (a^+)^2 + (a^-)^2 =$$
$$(a^+)^2 - (a^+a^-) - (a^-a^+) + (a^-)^2 = (a^+ - a^-)^2 = a^2$$

Recíprocamente, supongamos que para toda $a \in R$, se tiene que $|a|^2 = a^2$. Sea $a \in R$, entonces

$$|a|^2 = (a^+ + a^-)^2 = (a^+)^2 + a^+a^- + a^-a^+ + (a^-)^2 =$$
$$(a^+)^2 - (a^+a^-) - (a^-a^+) + (a^-)^2 = (a^+ - a^-)^2 = a^2$$

luego

$$a^+a^- + a^-a^+ = -(a^+a^-) - (a^-x^+)$$

por lo que

$$2(a^+a^- + a^-a^+) = 0 \Rightarrow a^+a^- = -(a^-a^+)$$

Como estamos en un anillo parcialmente ordenado, y sabemos que a^+, $a^- \geq 0$ tenemos que a^-a^+,$a^+a^- \geq 0$ por lo que la igualdad anterior nos indica que $a^+a^- = a^-a^+ = 0$ y por tanto R es un casi f-anillo.

Los siguientes son dos consecuencias inmediatas del Teorema 1.22.

(1) Cualquier anillo de matrices de $n \times n$ sobre un anillo unitario no puede convertirse en un f-anillo si $n \geq 2$.

Esto es inmediato de 1.22 (3) ya que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

claramente es idempotente pero no está en el centro del anillo de matrices con entradas reales, por lo que se cumple la contra positiva del enunciado.

(2) Cualquier álgebra de grupo finito no trivial $F[G]$ sobre un campo totalmente ordenado F no puede ser un f-anillo tal que $(G \setminus \{e\} \cap F[G]^+) \neq \phi$.

Es claro ya que al ser finito, para cualquier elemento $g \in G$ existe un entero positivo n tal que $g^n = e$, donde e es el elemento identidad del grupo por lo que se tiene la contra positiva de 1.22.(4).

Sin embargo, un álgebra de grupo finito $F[G]$ puede volverse un f-anillo con $(G \setminus \{e\}) \cap F[G]^+) = \phi$ como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4 Consideremos $R = \mathbb{Q}[G]$ su álgebra de grupo con $G = \{e, a\}$ y $a^2 = e$. Definamos $u = \frac{1}{2}(e + a)$ y $v = \frac{1}{2}(e - a)$. Entonces se tiene lo siguiente:

(1)

$$\begin{aligned} u^2 = (\tfrac{1}{2}(e+a))^2 = \tfrac{1}{4}(e^2 + ea + ae + a^2) = \tfrac{1}{4}(2e + 2a) = u, \\ v^2 = (\tfrac{1}{2}(e-a))^2 = \tfrac{1}{4}(e^2 - ea - ae + a^2) = \tfrac{1}{4}(2e - 2a)v, \\ uv = (\tfrac{1}{2}(e+a))(\tfrac{1}{2}(e-a)) = \tfrac{1}{4}(e^2 - a^2) = 0 \end{aligned}$$

(2) $\{u, v\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$. Pues si suponemos que existen p,$q \in \mathbb{Q}$ tales que $pu + qv = 0$ se tendría que

$$pu + qv = p(\tfrac{1}{2}(e+a)) + q(\tfrac{1}{2}(e-a)) = (\tfrac{p}{2}(e+a)) + (\tfrac{q}{2}(e-a)) = (\tfrac{p}{2} + \tfrac{q}{2})e + (\tfrac{p}{2} - \tfrac{q}{2})a = 0$$

y dado que e y a son elementos del grupo, por definición de álgebra de grupo, se tiene que e y a son linealmente independientes, por lo que $p = q = 0$ y por tanto u y v son linealmente independientes.

Además es inmediato que $P = \mathbb{Q}^+u + \mathbb{Q}^+v$ cumple las condiciones para ser el cono positivo de un orden parcial, que, escribiendo cada elemento de R como combinación lineal de u y v resulta ser un orden reticular.

Claramente u y v son ambos f-elementos, entonces R es un f-anillo. Notemos que $1 = u + v$ y $a = u - v \not\geq 0$.

Un anillo de grupo de un grupo infinito puede volverse un anillo totalmente ordenado. El ejemplo más simple sería el anillo de grupo $F[G]$ con F totalmente ordenado de un grupo cíclico infinito $G = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Definamos un elemento $\Sigma_{i=-m}^{n} \alpha_i g^i \geq 0$ si $\alpha_n > 0$. Entonces $F[G]$ es un anillo totalmente ordenado con

$$\cdots < g^{-2} < g^{-1} < 1 < g < g^2 < \cdots$$

Suponga que R es un l-anillo y $I_1, \cdots, I_n$ son l-ideales de R, Definimos

$$I_1 + \cdots + I_n = \{a \in R | a = a_1 + \cdots + a_n,\ a_i \in I_i\}$$

Ahora consideraremos propiedades de l-ideales de un l-anillo.

Teorema 1.23. *Sean I, $I_1 + \cdots + I_n$ l-ideales de un l-anillo R.*

1) $I_1 + \cdots + I_n$ es un l-ideal de R, el cual es generado por $\{I_1, \cdots, I_n\}$

2) $(I_1 + \cdots + I_n) \cap I$=$(I_1 \cap I) + \cdots + (I_n \cap I)$

Demostración.

(1) Claramente $I_1 + \cdots + I_n$ es un ideal de R y usaremos la equivalencia del Teorema 1.8(1) para verificar que es un l-ideal.
Supongamos que $|x| \leq |a_1 + \cdots + a_n|$ con $x \in R$ y $a_j \in I_j$, por propiedades del valor absoluto se tiene que $|x| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$ y usando el Teorema 1.5(6) se tiene que $|x| = x_1 + \cdots + x_n$ con $0 \leq x_j \leq |a_j| \in I_j$ y como los I_j son l-ideales, se tiene que $x_j \in I_j$ por lo que $|x| \in I_1 + \cdots + I_n$ lo cual demuestra la equivalencia.

(2) Es claro que $\langle I_1, \cdots, I_j\rangle \cap I \supseteq \langle I \cap I_1, \cdots, I \cap I_n\rangle$.
Sea $a \in \langle I_1, \cdots, I_n\rangle \cap I$, entonces $a = a_1 + \cdots + a_n$ con $a_j \in I_j$ y $a \in I$, luego $|a| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$ entonces $|a| = x_1 + \cdots + x_n$ con $0 \leq x_j \leq |a_j|$, por lo tanto $x_j \in I_j$ y como $x_i \leq |a|$ también tenemos que $x_i \in I$ por lo que $a \in \langle I \cap I_1, \cdots, I \cap I_n\rangle$.

1.3.3. El l-radical y l-ideales l-primos

Suponga que R es un l-anillo y I,J son l-ideales de R. El producto IJ no es un l-ideal de R. $\langle IJ\rangle$ lo será.

Definición: Un l-ideal I es *nilpotente* si $I^n = \{0\}$ para algún entero positivo n; y el menor entero positivo con esa propiedad se define como el *índice de nilpotencia.*

Dado que la definición anterior es igual a la de teoria de anillos tradicional, se tiene que si I, J son l-ideales nilpotentes, entonces $I + J$ es nilpotente.
Definición: El l-radical de un l-anillo R es el conjunto

$$l - N(R) = \{a \in R : x_0|a|x_1|a| \cdots x_{n-1}|a|x_n = 0, \text{ p.a. } n \in N, \text{y cualesquiera } x_0, \cdots, x_n \in R\}.$$

Es necesario hacer notar que los x_i no pueden ser 0.

Teorema 1.24. *Suponga que R es un l-anillo.*

(1)l-N(R) es un l-ideal. Es la unión de todos los l-ideales nilpotentes. Si $a \in l-N(R)$ entonces a es nilpotente.

(2) Si R es conmutativo entonces $l-N(R) = \{a \in R : |a| \text{ es nilpotente}\}$

(3)Si R satisface la condición de cadena ascendente en l-ideales o descendiente en ideales bilaterales entonces l-N(R) es nilpotente.

Demostración.

(1) Primero veamos que $l-N(R)$ es la unión de todos los nilpotentes.
Si I es nilpotente, para todo $a \in I$ sabemos que $|a| \in I$, entonces si k es un entero positivo tal que $I^k = \{0\}$ entonces para cualesquiera $x_1, \cdots, x_{k+1} \in R$ se tiene que $x_1|a|\cdots|a|x_{k+1} = 0$, por lo tanto $a \in l-N(R)$ lo que implica que el l-radical contiene a la unión de los nilpotentes.

Sea $a \in l-N(R)$,entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x_0|a|x_1|a|\cdots x_{n-1}|a|x_n = 0$ por lo que se tienen las siguientes igualdades:

$$(|a|R^+)^{n+1} = (R^+|a|)^{n+1} = (R^+|a|R^+)^{2n+1} = 0$$

De igual forma, sea $x \in \langle a \rangle^n$. Usando la desigualdad del triángulo, la desigualdad del Teorema 1.20(3) y la descripción dada en el Lema 1.9(1), y haciendo el desarrollo apropiado, se observa que $|x| \leq \Sigma$, donde Σ es una suma de productos en cada uno de los cuales $|a|$ aparece como factor n veces. Se sigue que $\Sigma = 0$, de donde $|x| = 0$, es decir, $x = 0$. Ambos argumentos implican que el l-ideal generado por a es nilpotente. Por lo tanto $l-N(R)$ es igual a la unión de todos los ideales nilpotentes.

Es claro que $0 \in l-N(R)$, por otro lado, si a, $b \in l-N(R)$ se tiene que sus l-ideales generados son nilpotentes por lo que la suma de ambos l-ideales igual es nilpotente y por tanto $a - b \in l-N(R)$ además, si $r \in R$ y $a \in l-N(R)$, entonces $ra, ar \in l-N(R)$. Por lo tanto $l-N(R)$ es un ideal de R. Luego si $x \in R$ y $a \in l-N(R)$ de manera que $|x| \leq |a|$, se tendría que x está en el l-ideal generado por a el cual al ser nilpotente estaría contenido en $l-N(R)$ por lo que $x \in l-N(R)$. Por lo tanto $l-N(R)$ es un $l-ideal$ de R.

Luego, si $a \in l-N(R)$, es claro para algún entero positivo n que $|a^n| \leq |a|^n = 0$. Por lo tanto, a es un elemento nilpotente.

(2) Sea $x \in R$ con $|x|$ nilpotente, por el Lema 9.(2)

$$\langle x \rangle = \{u \in R : |u| \leq n|x| + r|x|, \text{p. a.} n \geq 1, r \in R^+\}$$

Veamos que $\langle x \rangle$ es nilpotente.
Tenemos que $\langle x \rangle^2 = \{u \in R : u = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i,\ a_i, b_i \in \langle x \rangle\}$, por lo que si $u \in \langle x \rangle^2$ tendríamos que

$$|u| = |\sum_{i=0}^{n} a_i b_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i||b_i| \leq \sum_{i=0}^{n} (n_{1_i} + r_{1_i})|x|(n_{2_i} + r_{2_i})|x|$$

Y dado que R es conmutativo se tendría que

$$|u| \leq \sum_{i=0}^{n} (n_{1_i} + r_{1_i})(n_{2_i} + r_{2_i})|x|^2 \leq |x|^2 \sum_{i=0}^{n} (n_{1_i} + r_{1_i})(n_{2_i} + r_{2_i}),$$

Siguiendo un razonamiento análogo, es claro ver que si $k \geq 1$ es el índice de nilpotencia de $|x|$ entonces $\langle x \rangle^k = \{0\}$. Por lo tanto $\langle x \rangle$ es nilpotente y tenemos que $x \in \langle x \rangle \subseteq \cup_{N nilpotente} N = l - N(R)$. Lo que implica que l-N(R) contiene a los elementos cuyo valor absoluto es nilpotente.

Luego, por la propiedad que tienen los elementos de l-N(R) es claro que si $x_i = |a|$ sus valores absolutos también son nilpotentes, por lo tanto $l - N(R) = \{a \in R : |a|$ es nilpotente$\}$.

(3) Si R satisface la condición de cadena ascendente en l-ideales, entonces contiene un l-ideal nilpotente máximo M. Lo anterior es claro usando el conjunto compuesto de sumandos consecutivos de $\{J_i : i \in I, J_i \subseteq R$ es l-ideal nilpotente$\}$.

Para cualquier l-ideal nilpotente J, $M + J$ es nilpotente y $M \subseteq M + J$ por lo que $M = M + J$.

Lo que implica que $J \subseteq M$, por lo tanto $\cup\{N \mid N$ es nilpotente $\} = l - N(R) \subseteq M \subseteq l - N(R)$ por lo que se da una igualdad y como M es nilpotente, l-N(R) lo es.

Supongamos que R satisface la condición de cadena descendente en ideales, tomemos a $l - N(R) = N$.Se tiene la siguiente cadena

$$N \supseteq N^2 \supseteq \cdots \supseteq N^n \supseteq \cdots$$

Entonces existe $N^k = N^{k+1} = \cdots$ para algún $k \geq 1$. Sea $M = N^k$, entonces $M = M^2 = M^3 = \cdots$. Supongamos que $M \neq \{0\}$ entonces el conjunto

$$V = \{I \subseteq R : \text{I es un } l\text{-ideal .de R}, \ MIM \neq \{0\}\}$$

no es vacío pues $MRM = M^2 \neq \{0\}$, así que $R \in V$. Usando el Lema de Zorn, existe un elemento mínimo K en V. Sea $0 \neq a \in K$ con $MaM \neq \{0\}$ y definimos

$$J = \{c \in R : |c| \leq u|a|v, \ 0 < u, v \in \langle M \rangle\}.$$

Notemos que J es un l-ideal de R. Además, $MaM \subseteq J$; como $MaM \neq \{0\}$ existen $x, y \in M$ tales que $xay \neq 0$, es claro que $|xay| \leq |x||a||y|$ por lo que $xay \in J$. La definición de J deja claro que $J \subseteq K$ pues K es un conjunto convexo y $\{0\} \neq MaM = MMaMM \subseteq MJM$ por lo que $MJM \neq \{0\}$ de forma que $J \in V$.

Esto implica que $J = K$ y entonces $|a| \leq u|a|v$ para algún, u, $v \in \langle M \rangle^+$. Entonces se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$|a| \leq u|a|v \leq u^2|a|v^2 \leq \cdots \leq u^n|a|v^n = 0, \text{ para algún entero positivo n}$$

Lo último está dado pues $u, v \in \langle M \rangle \subseteq l - N(R)$. Entonces $a = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M = \{0\}$ lo que implica que $(l - N(R))^n = \{0\}$.

Definición: Sea R un l-anillo y P, I l-ideales de R.

(1) Se dice que I es *propio* si $I \neq R$.

(2) Se le llama a P un l-ideal l-*primo* de R si es propio y para cualesquiera dos l-ideales I, J, de R, $IJ \subseteq P$ implica que $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$.

Definición: Un l-anillo R es l-*anillo primo* si $\{0\}$ es un l-ideal l-primo.

Definición: Se dice que un anillo R es un dominio si se cumple que con a, $b \in R$, tales que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ implica que $ab \neq 0$.

Definición: Un l-anillo R es un l-dominio si para cualquier $a, b \in R$ con $a, b > 0$ implica que $ab > 0$.

Observaciones: Sea R un l-anillo

(1) Para l-ideales I,J es claro que $IJ \subseteq P$ si y sólo si $\langle IJ \rangle \subseteq P$, por lo que la definición de l-ideal l-primo es independiente de escoger $IJ \subseteq P$ o $\langle IJ \rangle \subseteq P$.

(2) Un l-ideal propio I de R es l-primo si y sólo si R/I es un l-anillo l-primo.

(3) Sea R un l-anillo. Si R es un dominio entonces R es un l-dominio.

(4) Un f-anillo es un dominio si y sólo si es un l-dominio.

Demostración.

(1) Es claro que $IJ \subseteq \langle IJ \rangle$, por lo que si $\langle IJ \rangle \subseteq P$ entonces $IJ \subseteq P$. Por el otro lado $\langle IJ \rangle$ es el l-ideal más pequeño que contiene a IJ por lo que si $IJ \subseteq P$ entonces $\langle IJ \rangle \subseteq P$.

(2) Supongamos que I es un l-ideal l-primo de R, sean $\bar{J}$, $\bar{K}$ l-ideales en R/I tales que $\overline{JK} \subseteq \{\bar{0}\}$, es decir, $\overline{JK} = \{\bar{0}\}$, como sabemos existen J, K l-ideales de R tales que $\bar{J} = J/I$ y $\bar{K} = K/I$, lo que implica que $JK \subseteq I$ y dado que I es l-primo entonces $J \subseteq I$ o $K \subseteq I$, por lo tanto, $\bar{J} = \{0\}$ o $\bar{K} = \{0\}$ y R/I es un l-anillo l-primo.
Sea I un l-ideal y supongamos que R/I es un l-anillo l-primo. Sean J, K l-ideales de R tales que $JK \subseteq I$, por lo tanto $\pi(J)\pi(K) = \pi(JK) = \{0\}$ donde $\pi : R \longrightarrow R/I$ es la poryección canónica. Dado que $\{0\}$ es un l-ideal l-primo entonces $J/I \subseteq \{0\}$ o $K/I \subseteq \{0\}$, lo que implica que $J \subseteq I$ o $K \subseteq I$ por lo tanto I es un l-ideal l-primo.

(3) Sean a, $b > 0$. Entonces se tiene que $a = |a|$ y $b = |b|$ y tenemos la siguiente desigualdad:

$$ab = |a||b| \geq |ab| \geq 0$$

Y por ser dominio $ab \neq 0$ por lo que $ab > 0$. Por lo tanto, R es un l-dominio.

(4) Por (3) ya tenemos que los dominios son l-dominios. Sean a, $b \neq 0$ y supongamos que $ab = 0$. Se tiene que

$$0 = |ab| = |a||b|,$$

como a, $b \neq 0$ se tiene que $|a|$, $|b| > 0$ y como suponemos que R es un l-dominio, se tiene que $|a||b| > 0$. Por lo que, tenemos una contradicción. Por lo tanto, $ab \neq 0$ y R es un dominio.

Definición: Se define un *m-sistema* M de un l-anillo R si M es un subconjunto no vacío de R, $M \subseteq R^+$ y para todo a, $b \in M$ existe un $x \in R^+$ tal que $axb \in M$.

Definición: Un subconjunto no vacío S de R es *cerrado bajo multiplicación* si para cuales quiera a, $b \in S$ se tiene que $ab \in S$.

Es claro que si $S \subseteq R^+$ es cerrado bajo multiplicación en R, entonces S es un m-sistema.

Lema 1.11. *Sean I, P l-ideal de un l-anillo R. Si $I^n \subseteq P$ para algún entero positivo n, entonces $I\langle I^{n-1}\rangle \subseteq P$.*

Demostración.

Sea $p \in I\langle I^{n-1}\rangle$ entonces $p = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$ con $a_i \in I$, $b_i \in \langle I^{n-1}\rangle$. Usando la expresión obtenida del Corolario 1.3, se tiene que:

$$0 \leq |p| = |\sum_{i=0}^{n} a_i b_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i||b_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| c_i \in I^n \subseteq P, c_i \in I^{n-1}$$

Por lo tanto, al trabajar con conjuntos convexos se concluye que $p \in P$ y $I\langle I^{n-1}\rangle \subseteq P$.

Teorema 1.25. *Sea R un l-anillo.*

(1) Suponga que P es un l-ideal l-primo y I un l-ideal de R. Si $I^n \subseteq P$ para algún entero positivo n, entonces $I \subseteq P$.

(2) Un l-ideal bilateral propio P de R es l-primo si y sólo si $a, b \in R^+$ y $aR^+b \subseteq P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$. En particular, si R es conmutativo, entonces un l-ideal propio es l-primo si sólo si $a, b \in R$ y $ab \in P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$.

(3) Un l-ideal propio P de R es l-primo si y sólo si $R^+ \setminus P$ es un m-sistema.

(4) Supongamos que M es un m-sistema de R y I es un l-ideal de R con $I \cap M = \{\phi\}$. Entonces I está contenido en un l-ideal l-primo P con $P \cap M = \{\phi\}$.

Demostración.

(1) Sean I un l-ideal y P un l-ideal l-primo tales que $I^n \subseteq P$, entonces por el lema anterior, $I\langle I^{n-1}\rangle \subseteq P$ por lo que $I \subseteq P$ o $\langle I^{n-1}\rangle \subseteq P$ por lo que en caso de ser necesario se repite el argumento y llegamos a la demostración.

(2) Sea P un l-ideal l-primo propio de R y a, $b \in R^+$ tal que $aR^+b \subseteq P$. Veamos que $\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq P$. Sean $x \in \langle a\rangle$ y $y \in \langle b\rangle$. Tenemos, en virtud del Lema 1.9(1) y haciendo el desarrollo apropiado, que $|xy| = |x1y| \leq |x||1||y| \leq \Sigma$, donde Σ es una suma de productos en cada uno de los cuales aparece como factor algún elemento de aR^+b. Se sigue que $\Sigma \in P$, de donde $|xy| \in P$, es decir, $xy \in P$. Entonces tenemos que $\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq P$ por lo que $\langle a\rangle \subseteq P$ o $\langle b\rangle \subseteq P$. En el primer caso se tendría que $a \in P$. De igual forma, si $\langle b\rangle \subseteq P$ obtendríamos que $b \in P$.

Supongamos que la condición dada es verdadera. Sean I, J l-ideales tales que $IJ \subseteq P$ y que I no está contenido en P, entonces como estamos trabajando en conjuntos convexos, existe $0 < a \in I \setminus P$ donde para todo $0 < b \in J$. $aR^+b \subseteq IJ \subseteq P$, entonces por hipótesis, $b \in P$ lo que implica que $J \subseteq P$. Por lo tanto P es un l-ideal l-primo .

Supongamos que R es conmutativo. Sea P un l-ideal l-primo de R y $ab \in P$, entonces $R^+(ab) = aR^+b \subseteq P$ por lo que $a \in P$ o $b \in P$ por ser P un l-ideal l-primo . Sea P un l-ideal tal que para todo a, $b \in R^+$ donde $ab \in P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$. Sean I, J l-ideales de R con $IJ \subseteq P$ y que I no está contenido en P, entonces como estamos trabajando en conjuntos convexos existe $0 < a \in I \setminus P$ donde para todo $0 < b \in J$. $ab \in IJ \subseteq P$. Entonces por hipótesis, $b \in P$ lo que implica que $J \subseteq P$, por lo tanto P es un l-ideal l-primo .

(3) Sea P un l-ideal l-primo de R. Veamos que $R^+\backslash P \subseteq R^+$ y para todos x, $y \in R^+\backslash P$ existe $z \in R^+$ tal que $xzy \in R^+\backslash P$.
Es claro que $R^+\backslash P \subseteq R^+$, tomemos x, $y \in R^+\backslash P$ y supongamos que para todo $z \in R^+$, $xzy \notin R^+\backslash P$, dado que que estamos trabajando sobre R^+ se tiene que $xzy \in P$, es decir, $xR^+y \subseteq P$ por lo que $x \in P$ o $y \in P$ lo cual es una contradicción; por lo tanto se cumple la segunda propiedad y $R^+\backslash P$ es un m-sistema.
Supongamos que $R^+\backslash P$ es un m-sistema y veamos que P es un l-ideal l-primo de R. Sean x, $y \in R^+$ tales que $xR^+y \subseteq P$ y supongamos que x,$y \notin P$, es decir, x, $y \in R^+\backslash P$, entonces existe $z \in R^+$tal que $xzy \in R^+\backslash P$ lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto $x \in P$ o $y \in P$.

(4) Sea M un m-sistema y I un l-ideal bilateral de R tal que $M \cap I = \phi$, definimos el siguiente conjunto,

$$V = \{J : J \text{ es un } l\text{-ideal }, I \subseteq J \text{ y } M \cap J = \phi\}.$$

Dado que $I \in V$, V no es vacío. Si $\{J_k\}_{k \in K}$ es una cadena de V, es claro que $\bigcup_{i \in K} J_i$ es un l-ideal y $M \cap \bigcup_{i \in K} J_i = \phi$, entonces aplicando el Lema de Zorn, V tiene un elemento máximo P. Veamos que es un l-ideal l-primo .
Sean a, $b \in R^+$ con $aR^+b \subseteq P$ y supongamos que a, $b \notin P$. Entonces $M \cap \langle P, a\rangle \neq \phi$, sea $z_1 \in M \cap \langle P, a\rangle$ entonces

$$z_1 \leq n_1a + r_1a + as_1 + u_1av_1 + p_1 \text{ con } n_1 \geq 0 \text{ y } r_1,\, s_1,\, u_1,\, v_1 \in R^+.\ p_1 \in P$$

Similarmente, existe $z_2 \in M \cap \langle P, b\rangle$ donde

$$z_2 \leq n_2b + r_2b + bs_2 + u_2bv_2 + p_2 \text{ con } n_2 \geq 0 \text{ y } r_2,\, s_2,\, u_2,\, v_2 \in R^+,\ p_2 \in P.$$

Ya que M es un m-sistema, existe $x \in R^+$ tal que $z_1xz_2 \in M$ luego,

$$z_1xz_2 \leq (n_1b + r_1b + bs_1 + u_1bv_1 + p_1)x(n_2b + r_2b + bs_2 + u_2bv_2 + p_2),$$

Debido a la distributividad en R, a que $aR^+b \subseteq P$ y que P es un l-ideal bilateral se

tiene que $z_1xz_2 \in P$, lo cual es una contradicción pues $z_1xz_2 \in M$. Por lo tanto $a \in P$ o $b \in P$ y P es un l-ideal l-primo .

Definición: Sea R un l-anillo y I un l-ideal de R. Se dice que I es l-semiprimo si para cualquier l-ideal H de R, $H^k \subseteq I$ para algún entero positivo implica que $H \subseteq I$

Teorema 1.26. *Sea R un l-anillo e I un l-ideal de R. I es l-semiprimo si y sólo si para cualquier $a \in R^+$, $aR^+a \subseteq I$ implica que $a \in I$.*

Demostración.

Con la definición dada, el problema se vuelve un corolario del Teorema 1.25 (2)

Teorema 1.27. *Sea R un f-anillo.*

(1) Para cada $k \geq 1$, $N_k = \{a \in R : a^k = 0\}$ es un l-ideal nilpotente de R. Más aún, $l - N(R) = \{a \in R : a \text{ es nilpotente}\}$.

(2) Si R es l-primo, entonces R es un dominio totalmente ordenado.

(3) Un l-ideal propio P de R es l-primo si y sólo si para cuales quiera a, $b \in R$, $ab \in P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

(4) Un l-ideal propio P de R es l-primo si y sólo si para cuales quiera a, $b \in R$, $a \wedge b \in P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$ y para cualquier $c \in R$, $c^2 \in P$ implica que $c \in P$.

Demostración.

(1) Primero supongamos que R es totalmente ordenado.
Sean a, $b \in N_k$, entonces $|a| \geq |b|$ o $|b| \geq |a|$, supongamos que $|a| \geq |b|$ entonces $|a - b| \leq |a| + |b| \leq 2|a|$ y entonces $|a - b|^k = 0$, es decir, $a - b \in N_k$ y de manera similar si $|b| \geq |a|$
Sea $0 \leq a \in N_k$ y $0 \leq x \in R$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $ax \leq xa$ entonces

$$0 \leq (ax)^k \leq (xa)^k = x(ax)^{k-1}a \leq x(xa)^{k-1}a \leq \cdots \leq x^k a^k = 0$$

la cadena de desigualdades nos muestra que $(ax)^k = (xa)^k = 0$, por lo que N_k es un ideal de R.
Si $|x| \leq |a|$ para algún $x \in R$ y $a \in N_k$, entonces $|x^k| = |x|^k \leq |a|^k = |a^k| = 0$ por lo que $x \in N_k$, entonces N_k es un l-ideal de R y es claro que es nilpotente.

Ahora que demostramos que en los anillos totalmente ordenados el enunciado es verdad, extendamos la demostración si R es un f-anillo sabiendo que es un producto subdirecto de l-anillos totalmente ordenados.
Como R es producto subdirecto de l-anillos, existen $\{I_j\}_{j \in J}$ tales que R/I_j es totalmente ordenado y $\bigcap_{j \in J} I_j = \{0\}$.
Sean a, $b \in N_k$. Sean, para cada $j \in J$, $\Pi_j : R \to R/I_j$ la proyección canónica y $(N_k)_j = \{\bar{x} \in R/I_j \mid (\bar{x})^k = \bar{0}\}$. Observemos que $\Pi_j(N_k) \subseteq (N_k)_j$. Sabemos que $\overline{a - b} \in (N_k)_j$ para todo $j \in J$ por el caso totalmente ordenado, es decir, $\overline{(a - b)^k} = \bar{0}$ lo que implica que $(a-b)^k \in I_j$ para toda $j \in J$. Por lo tanto $(a-b)^k = 0$ y $a-b \in N_k$.

Sea $0 \leq a \in N_k$ y $0 \leq x \in R$. Nosotros sabemos que $\overline{xa}$, $\overline{ax} \in (N_k)_j$ para todo $j \in J$ por el caso totalmente ordenado, es decir, $\overline{(xa)^k}$, $\overline{(ax)^k} = \bar{0}$ lo que implica que $(xa)^k$, $(ax)^k \in I_j$ para toda $j \in J$, por lo tanto $(xa)^k$, $(ax)^k = 0$ y xa, $ax \in N_k$, por lo que N_k es un ideal de R.
La demostración que se usó para ver que N_k es un l-ideal de R en el caso totalmente ordenado no dependía de la totalidad por lo que en los f-anillos la demostración es la misma.

Ahora veamos que $l-N(R) = \{a \in R$:a es nilpotente$\}$. Es claro que $\bigcup_{k\geq 0} N_k = \{a \in R$:a es nilpotente$\}$.
Sea $a \in l-N(R)$, por el Teorema 1.24(1), sabemos que a es nilpotente por lo que existe $k \geq 0$ tal que $a^k = 0$, es decir, $a \in N_k$ por lo tanto $a \in \bigcup_{k\geq 0} N_k$, es decir $l-N(R) \subseteq \bigcup_{k\geq 0} N_k$.
Como los N_k son nilpotentes, cada uno de ellos está contenido en la unión de todos los nilpotentes que es $l-N(R)$ e igualmente su unión, por lo tanto $\bigcup_{k\geq 0} N_k \subseteq l-N(R)$. Por lo tanto $l-N(R) = \{a \in R$:a es nilpotente$\}$.

(2) Supongamos que R es un f-anillo l-primo. **Afirmación:** R no tiene elementos nilpotentes distintos de 0.
Demostración de la afirmación: Sea $z \in R$ nilpotente, entonces usando la notación de (1), $z \in N_k$. Por (1), N_k es un l-ideal nilpotente de R. Por el teorema 1.25(1) y al ser $\{0\}$ un l-ideal l-primo de R, $N_k = \{0\}$

Sea $x \in R$, dado que $x^+x^- = 0$, se tiene que $(x^+R^+x^-)^2 = \{0\}$, al ser $\{0\}$ un l-ideal l-primo de R se tiene que $x^+R^+x^- = \{0\}$ lo que implica que $x^+ = 0$ o $x^- = 0$, por lo tanto R es totalmente ordenado.

Supongamos que $ab = 0$ para algún, a,$b \in R$, dado que R es un f-anillo tenemos que $0 = |ab| = |a||b|$ y como tenemos que es totalmente ordenado $|a| \geq |b|$ o $|b| \geq |a|$. Si $|a| \geq |b|$ se tiene que $0 = |a||b| \geq |b|^2 \geq 0$ por lo que $|b|^2 = 0$ y como R no puede tener nilpotentes distintos de cero $|b| = 0$ lo que implica que $b = 0$. De manera análoga, si $|b| \geq |a|$ se tendría que $a = 0$ y por lo tanto R es un dominio.

(3) Supongamos que P es un l-ideal l-primo de R, entonces R/P es un f-anillo l-primo y entonces por (2) es un dominio totalmente ordenado. Si $ab \in P$ para algún a, $b \in P$ tendríamos que $\overline{ab} = \bar{0}$ por lo que $\bar{a} = \bar{0}$ o $\bar{b} = \bar{0}$ que implica que $a \in P$ o $b \in P$.

El recíproco es la misma demostración realizada en 1.25(2) para anillos conmutativos.

(4) Supongamos que P es l-ideal l-primo de R, entonces R/P es un dominio totalmente ordenado. Sean a,$b \in R$ tales que $a \wedge b \in P$, luego $\overline{a \wedge b} = \bar{0}$ y como R/P es totalmente ordenado se tiene que $\bar{a} = \bar{0}$ o $\bar{b} = \bar{0}$ que implica que $a \in P$ o $b \in P$.
Sea $c \in R$ tal que $c^2 \in P$, entonces $\overline{c^2} = \bar{0}$ y como estamos en un dominio se tiene que $\bar{c} = \bar{0}$, es decir, $c \in P$.

Sean x,$y \in R$ tales que $xy \in P$. Entonces $(|x| \wedge |y|)^2 \leq |x||y| = |xy| \in P$ por lo que $(|x| \wedge |y|)^2 \in P$. Por hipótesis implica que $|x| \wedge |y| \in P$ y nuevamente por hipótesis, $x \in P$ O $y \in P$. Por lo tanto P es un l-ideal l-primo de R.

Definición: Para un l-anillo R, su *p-radical*, denotado por l-$P(R)$, es la intersección de todos los l-ideales l-primos de R.

Definición: Un anillo es reducido si no contiene elementos nilpotentes distintos de cero y un l-anillo es *l-reducido* si no contiene elementos nilpotentes estrictamente positivos.

Teorema 1.28. *Sea R un l-anillo.*

(1) $l-N(R) \subseteq l-P(R)$ y cada elemento de l-$P(R)$ es nilpotente. SI R es conmutativo o un f-anillo, entonces $l-N(R) = l-P(R)$.

(2) El p-radical de $R/l-P(R)$ es cero.

(3) $l-N(R) = \{0\}$ si y sólo si $l-P(R) = \{0\}$.

(4) Supongamos que $l-N(R) = \{0\}$. SI R es un d-anillo o un casi f-anillo, entonces R es un f-anillo reducido.

Demostración.

(1) Por 1.25 (1) si I es un l-ideal nilpotente entonces $I^n = \{0\} \subseteq P$ para cualquier l-ideal l-primo P, por lo tanto $l–N(R) = \cup_{I \text{ es un } l\text{-ideal nilpotente}} I \subseteq \cap_{P \text{ es un } l\text{-ideal } l\text{-primo}} P = l-P(R)$.
Suponga que $a \in R$ no es nilpotente, por lo que $|a|$ tampoco lo es. Observemos que, $\{|a|^n : n \geq 1\}$ es un m-sistema que no contiene al 0. Como $\{0\}$ es un l-ideal, por 1.25 (4) existe P l-ideal l-primo tal que $P \cap \{|a|^n : n \geq 1\} = \phi$ por lo que a no puede estar en P, así $a \notin l-P(R)$ y por lo tanto los elementos de $l-P(R)$ son nilpotentes.
Si R es conmutativo, es un resultado de teoría de anillos clásico y si R es un f-anillo tenemos por 1.27. (1) que $l-N(R) = \{a \in R : a \text{ es nilpotente}\}$ con el cual se da la otra contención.

(2) Observación:Sean I, J l-ideales de R tales que $I \subseteq J$. J es un l-ideal l-primo de R si y sólo si J/I es l-ideal l-primo de R/I.

Supongamos que J/I es un l-ideal l-primo de R/I y sean a,$b \in R^+$ tales que $aR^+b \subseteq J$. Se sigue que $\bar{a}$, $\bar{b} \in (R/I)^+$, sea $\bar{r} \in (R/I)^+$, entonces $r + z \geq 0$ para algún $z \in I$ por lo que $a(r + z)b \in J$ y entonces $\overline{a(r + z)b} \in J/I$ donde

$$\overline{a(r + z)b} = \overline{arb + azb} = \overline{arb} + \overline{azb} = \overline{arb}$$

Por lo que $\bar{a}(R/I)^+\bar{b} \subseteq J/I$ y al ser un l-ideal l-primo se tiene que $\bar{a} \in J/I$ o $\bar{b} \in J/I$, luego $a \in J$ o $b \in J$ y J es un l-ideal l-primo .

Supongamos que J es un l-ideal l-primo de R y sean $\bar{a}$,$\bar{b} \in (R/I)^+$ tales que $\bar{a}(R/I)^+\bar{b} \subseteq J/I$. Luego, $\overline{arb} \in J/I$ para todo $\bar{r} \geq \bar{0}$ en particular si $r \geq 0$ por lo que se sigue que $aR^+b \in J$ lo cual implica que $a \in J$ o $b \in J$ y por lo tanto $\bar{a} \in J/I$ o $\bar{b} \in J/I$ y J/I es un l-ideal l-primo de (R/I).

Sabemos que cada l-ideal de R/I con I l-ideal de R se puede expresar como J/I con J un l-ideal de R que contiene a I. Luego, el p-radical de $R/(l-P(R))$ es la intersección de los l-ideales l-primos de $R/(l-P(R))$ y gracias a la observación anterior, será la intersección de los cocientes $J/(l-P(R))$ con J l-ideal l-primo de R, por lo tanto $l-P(R/l-P(R)) = (l-P(R))/(l-P(R)) = \{0\}$.

(3) Usando (1), es claro que si $l-P(R) = \{0\}$ entonces $l-N(R) = \{0\}$.

Supongamos que $l-N(R) = \{0\}$. Si $l-P(R) \neq \{0\}$, sea $0 < a_0 \in l-P(R)$. Entonces $\langle a_0\rangle^n \neq \{0\}$ para cualquier entero positivo n o de lo contrario $a_0 \in l-N(R)$ y se tendría que $a_0 = 0$. Luego, como $\langle a_0\rangle^3 \subseteq \langle R^+a_0R^+\rangle$ se tiene que $\langle R^+a_0R^+\rangle^2 \neq \{0\}$; entonces existe $b_0 \in R^+$ tal que $a_0b_0a_0 = a_1 \neq 0$. De manera similar existe $b_1 \in R^+$ tal que $a_1b_1a_1 = a_2 \neq 0$. Inductivamente, obtenemos $a_nb_na_n = a_{n+1} \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Veamos ahora que $\{a_i|i \geq 0\} = I$ es un m-sistema.

Es claro que $I \subseteq R^+$ y $0 \notin I$. Sean a_i, $a_j \in I$, sin pérdida de generalidad $i \geq j$. Dado que $I \subseteq R^+$ y que $b_k > 0$ para todo $k > 0$, se tiene que

$$b_ia_{i-1}b_{i-1}a_{i-2}b_{i-2}\cdots a_{j+1}b_{j+1}a_jb_j \geq 0$$

por lo que

$$a_i(b_ia_{i-1}b_{i-1}a_{i-2}b_{i-2}\cdots a_{j+1}b_{j+1}a_jb_j)a_j = a_{i+1} \in I$$

asi, I es un m-sistema de R, entonces por el Teorema 1.25.(4) hay un l-ideal l-primo tal que $P \cap I = \phi$, Entonces $a_0 \notin P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $l-P(R) = \{0\}$

(4) Primero supongamos que R es un d-anillo. Dado que $l-N(R) = \{0\}$, por (3) R es producto subdirecto de sus cocientes sobre l-ideales $l$primos, los cuales son d-anillos.

Vamos a mostrar que un d-anillo l-primo D es un dominio totalmente ordenado, ya que así, R sería un producto subdirecto de anillos totalmente ordenados lo cual es equivalente a ser f-anillo por el Teorema 1.21. Sea $a \in D^+$ con $aD^+ = \{0\}$ o $D^+a = \{0\}$ entonces $aD^+a = \{0\}$ y el hecho de que D es l-primo implica que $a = 0$. Sean x,$y \in D$ tales que $x \wedge y = 0$ y c,$d \in D^+$, dado que dc,$d \leq dc + d$ y que D es un d-anillo se tiene que

$$0 \leq d(cx \wedge y) = (dcx \wedge dy) \leq (dc+d)x \wedge (dc+d)y = 0.$$

Por lo que $d(cx \wedge y) = 0$ para todo $d \in D^+$ por lo que $cx \wedge y = 0$, de manera similar, $xc \wedge y = 0$ por lo que D es un f-anillo y por 1.26(2) D es un dominio totalmente ordenado.

Por lo dicho al inicio, ya tenemos que R es un f-anillo por lo que $l-N(R) = \{a$:a es nilpotente $\} = \{0\}$ por lo que R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero y por lo tanto R es reducido.

De manera similar supongamos que R es un casi f-anillo. Entonces podemos trabajar con casi f-anillos l-primos D, con el mismo argumento del caso d-anillo.

Primero veamos que si $a \in D^+$ y $a^2 = 0$ entonces $a = 0$. Sea $z \in D^+$, afirmamos que $aza = 0$.

Supongamos que $x = az - za$. Si $x^+ = 0$ entonces $az \leq za$ lo que implica que $0 \leq aza \leq za^2 = 0$ y entonces $aza = 0$, de manera similar si $x^- = 0$.

Ahora suponemos que $x^+ \neq 0 \neq x^-$, como $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ se tiene que para cuales quiera y, $w \in D^+$, $(x^-yx^+)^2 = (x^+wx^-)^2 = 0$. Por propiedades de los casi f-anillos, los cuadrados son positivos por lo que $(x^-yx^+ - a)^2 = 0$. Desarrollando se tiene que

$$0 \leq ax^-yx^+ + x^-yx^+a \leq (x^-yx^+)^2 + a^2 \geq 0.$$

Entonces $ax^-yx^+ = 0$ para todo $y \in D^+$ y ya que R es l-primo y $x^+ = 0$ se tiene que $ax^- = 0$. De manera similar se obtiene que $ax^+ = 0$ y se tiene que

$$-aza = a^2z - aza = a(az - za) = ax = ax^+ - ax^- = 0.$$

Ahora tenemos que en cualquier caso $aza = 0$ para todo $z \in D^+$, es decir, $aD^+a = \{0\}$ y ya que D es l-primo se tiene que $a = 0$.

Sean a, $b \in D^+$ con $ab = 0$, entonces para todo $z \in D^+$, $(bza)^2 = 0$ y por lo anterior se tiene que $bza = 0$, es decir, $bD^+a = \{0\}$ y ya que D es l-primo se tiene que $a = 0$ o que $b = 0$, lo cual lo hace dominio y si lo aplicamos a que $x^+x^- = 0$ entonces tenemos que es totalmente ordenado.
Por lo tanto tenemos nuevamente que R es producto subdirecto de anillos totalmente ordenados que es equivalente a ser f-anillo y eso implica que sea reducido.

Por el Teorema 1.28(4), encontramos una relación entre los casi f-anillos y los f-anillos reducidos. En un orden parcial tenemos una relación entre los casi f-anillos reducidos y un f-anillo.

Teorema 1.29. *Para un anillo reducido parcialmente ordenado R, si para cualquier $a \in R$, existen a_1, $a_2 \in R^+$ tales que $a = a_1 - a_2$ y $a_1a_2 = 0$, entonces R es un f-anillo.*

Demostración.

Notemos primero que para cualesquiera u, v en un anillo reducido, $uv = 0$ si y sólo si $vu = 0$. En efecto, si $uv = 0$, entonces $(vu)^2 = 0$, así que $vu = 0$. Sean $a \in R$ y a_1, a_2 como en el enunciado. Primero mostraremos que cero es el ínfimo de a_1 y a_2. Supongamos que $c \leq a_1$,a_2 con $c = c_1 - c_2$ y c_1,$c_2 \in R^+$ tales que $c_1c_2 = c_2c_1 = 0$. Entonces $0 \leq c_i^2 = c_1(c_1 - c_2) = c_1c \leq c_1a_1$ y de igual manera $0 \leq c_1^2 \leq a_2c_1$ por lo que $0 \leq c_1^4 \leq c_1a_1a_2c_1$ y entonces $c_1^4 = 0$ y como R es reducido, se tiene que $c_1 = 0$, por lo tanto $c = -c_2 \leq 0$ y es implica que $a_1 \wedge a_2 = 0$.

Ahora veremos que $a_1 = a \vee 0$. Es claro que $a_1 \geq a$,0. Supongamos que $b \geq a$,0 para algún $b \in R$. entonces

$$a_1 - b \leq a_1, a_2 \Rightarrow a_1 - b \leq 0$$

de esa manera $a_1 \leq b$ y $a_1 = a \vee 0$; de manera similar tenemos que $a_2 = (-a) \vee 0$.Por lo tanto, ya tenemos la existencia del ínfimo y supremo de cualquier $r \in R$ y 0.

Después, sabemos que para cualquier a, $b \in R$, $a \wedge b = (a - b) \wedge 0 + b$ y $a \vee b = (a - b) \vee 0 + b$ por lo que el orden se convierte en reticular.

Luego, por hipótesis, tendríamos que el producto de la parte positiva y negativa de un elemento es cero, por lo que por definición R se vuelve un casi f-anillo y al ser reducido tenemos que $l - N(R) = \{0\}$ por lo que usando el Teorema anterior se tiene que R es un f-anillo.

Definición: Un l-ideal l-primo P de un l-anillo R es *mínimo* si cualquier l-ideal de R propiamente contenido en P no es un l-ideal l-primo de R.

Por ejemplo, en un l-dominio, $\{0\}$ es el único l-ideal l-primo mínimo.

Observación. Sea R un l-anillo. Si R es l-reducido y l-primo entonces R es un l-dominio.

Demostración.

Sean $a,b > 0$. Como R es un l-anillo sabemos que $ab \geq 0$. Supongamos que $ab = 0$ entonces $(bR^+a)^2 = \{0\}$ y por ser l-reducido se obtiene que $(bR^+a) = \{0\}$ y como es un l-anillo l-primo se tiene que $a = 0$ o $b = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $ab > 0$ y R es un l-dominio.

Teorema 1.30. *Sea R un l-anillo.*

(1) Cada l-ideal l-primo de R contiene un l-ideal l-primo mínimo.

(2) Un l-ideal l-primo P es mínimo si y sólo si cualquier m-sistema propiamente contenido en $R^+ \setminus P$ tiene al 0.

(3) Si R es l-reducido, entonces un l-ideal l-primo P es mínimo si y sólo si para cada $x \in P$ con $x \geq 0$, existe $y \notin P$ con $y \geq 0$ tal que $xy = 0$.

(4) Si R es l-reducido, entonces por cada l-ideal l-primo mínimo P, R/P es un l-dominio. Además. un l-anillo es l-reducido si y sólo si es un producto subdirecto de l-dominios.

Demostración.

(1) Sea P un l-ideal l-primo de R. Consideremos

$$M = \{N | N \subseteq P \text{ y } N \text{ es un } l\text{-ideal } l\text{-primo }\}$$

Entonces $P \in M$ y M está parcialmente ordenado por la inclusión. Para una cadena $\{P_i | i \in I\} \subseteq M$, por el Teorema 1.25(3) se tiene que $J = \bigcap_{i \in I} P_i$ es un l-ideal l-primo de R dado que $R^+ \setminus J = \bigcup_{i \in I} (R^+ \setminus P_i)$ es un m-sistema.
Luego, usando el Lema de Zorn se obtiene que M tiene un elemento mínimo, el cual es un l-ideal l-primo mínimo de R contenido en P.

(2) Supongamos que P es un l-ideal l-primo mínimo de R y que $(R^+ \setminus P) \subset M$ para algún m-sistema M. Si $0 \notin M$ entonces por el Teorema 1.25(4) existe un l-ideal l-primo I tal que $M \cap I = \phi$. Como $M \subseteq R^+$ se tiene que $I^+ \subseteq P^+$ por lo que $I \subseteq P$ y al ser P mínimo e I un l-ideal l-primo se tiene que $I = P$. Pero $I \cap M = P \cap M \neq \phi$, pues $R^+ \setminus P \subset M \subseteq R^+$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $0 \in M$.

Supongamos que I es un l-ideal l-primo y que $I \subseteq P$, entonces $(R^+ \setminus P) \subseteq (R^+ \setminus I)$. Si dicha inclusión es propia se tendría que $0 \in R^+ \setminus I$ por hipótesis lo cual es una contradicción. Por lo tanto $I = P$ y P es mínimo.

(3) Sea P un l-ideal l-primo . Por (1) existe Q un l-ideal l-primo mínimo contenido en P . Si $Q \neq P$, entonces podemos tomar $0 < x \in P \setminus Q$. Por la hipótesis, existe $0 \leq y \notin P$ tal que $xy = 0$, entonces $(yR^+x)^2 = \{0\}$ y como R es l-reducido, tenemos que $yR^+x = \{0\} \subseteq Q$. Como Q es l-primo se tiene que $x \in Q$ o $y \in Q$. Pero por construcción, $x \notin Q$ por lo que $y \in Q \subseteq P$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Q = P$ y P es mínimo.

Sea P un l-ideal l-primo mínimo de R y $0 < a \in P$. Definimos

$$S = \{a_1aa_2 \cdots a_naa_{n+1} : n \geq 1, a_i \in R^+ \setminus P\} \cup R^+ \setminus P$$

Observaciones:

a) $R^+ \setminus P \subset S \subseteq R^+$

b) S es un m-sistema

Sean $x,y \in S$ y $S = V \cup R^+ \setminus P$. Veamos que $a \in R^+$ sirve tal que $xay \in S$.

b.1) Si $x,y \in R^+ \setminus P$, entonces $xay \in V \subseteq S$.

b.2) Si $x \in V$ y $y \in R^+ \setminus P$, entonces $x = a_1aa_2 \cdots a_naa_{n+1}$ por lo que

$$xay = a_1aa_2 \cdots a_naa_{n+1}aa_{n+2} \in V \subseteq S \text{ con } a_{n+2} = y.$$

b.3) Si $x,y \in V$, entonces $x = a_1aa_2 \cdots a_naa_{n+1}$ y $y = b_1ab_2 \cdots b_mab_{m+1}$ así,

$$xay = a_1aa_2 \cdots a_naa_{n+1}ab_1ab_2 \cdots b_mab_{m+1} \in V \subseteq S.$$

c) Si $x_1x_2 \cdots x_ix_{i+1} \cdots x_k = 0$ con $k \geq 2$ y $x_j \in R^+$, entonces $x_1x_2 \cdots x_{i+1}x_i \cdots x_k = 0$.

Si $uv = 0$ para algún u, $v \in R^+$ se tiene que $(vu)^2 = 0$ y como R es l-reducido entonces $vu = 0$ y entonces $(uxv)^2 = 0$ para todo $x \in R^+$. Por lo que $uxv = 0$. Esto nos dice que si $uv = 0$, podemos insertar cualquier $x \geq 0$ entre ellos para obtener $uxv = 0$.

Si insertamos los términos x_{i+1}, $(x_{i+2} \cdots x_k)(x_1 \cdots x_{i-1})$, x_i en $x_1x_2 \cdots x_ix_{i+1} \cdots x_k = 0$ tenemos

$$x_1x_2 \cdots x_{i-1}(x_{i+1})x_i(x_{i+2} \cdots x_k)(x_1 \cdots x_{i-1})x_{i+1}(x_i)x_{i+2} \cdots x_k = 0$$

dicho agrupamiento es igual a

$$[x_1x_2 \cdots x_{i-1}(x_{i+1})x_i(x_{i+2} \cdots x_k)]^2 = 0$$

y dado que R es l-reducido tenemos que $x_1x_2 \cdots x_{i-1}(x_{i+1})x_i(x_{i+2} \cdots x_k) = 0$.

Este análisis nos muestra que en un producto de elemento positivos cuyo resultado sea 0, se puede intercambiar el orden de dos elementos y mantener el resultado. Usando esta idea en $a_1aa_2 \cdots a_naa_{n+1} = 0$ tenemos que $a_1a_2 \cdots a_na_{n+1}a^n = 0$.

Como $R^+ \setminus P$ es un m-sistema se tiene que si a_1,$a_2 \in R^+ \setminus P$ entonces existe $x \in R^+$ tal que $a_1 x a_2 \in R^+ \setminus P$ y entonces existe $x_2 \in R^+$ tal que $a_1 x_1 a_2 x_2 a_3 \in R^+ \setminus P$, continuando con el proceso tenemos que

$$a_1 x_1 a_2 \cdots a_n x_n a_{n+1} \in R^+ \setminus P \text{ para } x_i \in R^+$$

Sea $y = a_1 x_1 a_2 \cdots a_n x_n a_{n+1}$, entonces $0 \leq y \notin P$ y $ya^n = 0$ y usando de nuevo el argumento de intercambiar y agregar elemento obtenemos que $(ay)^n = 0$ lo que implica que $ay = 0$.

(4) Sea $a \in R \setminus P$ y supongamos que $a^2 \in P$. Por el inciso (3) existe $0 \ < y \notin P$ tal que $a^2 y = 0$. Entonces $(aya)^2 = (aya)(aya) = 0$ y como R es l-reducido se tiene que $aya = 0$. Luego, $(ay)^2 = 0$ lo cual implica que $ay = 0$. Por lo tanto $(yR^+a)^2 = \{0\}$ y entonces $(yR^+a) = \{0\} \subset P$ entonces se tiene que $a \in P$ o $y \in P$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto si $a + P \in R/P$ se tiene que $a^2 + P \neq 0 + P$. Adaptando el argumento del párrafo anterior, se verifica que, para $\bar{0} < \bar{a} \in R/P$, si para algún $k \geq 2$ $(\bar{a})^k = \bar{0}$, entonces $(\bar{a})^{k-1} = \bar{0}$. Se sigue por inducción que el cociente es l-reducido y por hipotésis es l-primo. Por lo tanto, usando la observación previa al teorema, R/P es un l-dominio.

Si R es l-reducido, entonces la intersección de todos los l-ideales l- primos mínimos de R es cero por el Teorema 1.28.(3) y por lo tanto R es isomorfo al producto directo de los cocientes de sus l-ideales l- primos mínimos, los cuales son l-dominios. Es claro que un producto subdirecto de l-dominios es l-reducido.

El siguiente resultado da una mejor relación entre los f-elementos y los d-elementos en un l-dominio l-unitario.

Teorema 1.31. *Sea R un l-dominio l-unitario.*

(1) Si a es un d-elemento, entonces a es un f-elemento o $a \wedge 1 = 0$.

(2) Si a es un d-elemento, entonces el conjunto $\{a^n : n \geq 0\}$, donde $a^0 = 1$, es ajeno o a^k es un f-elemento para algún $k \geq 1$.

(3) Si para $0 < a \in R$, a^k es un f-elemento, entonces a es un d-elemento y un elemento básico.

Demostración.

Notemos primero que si R es un l-dominio entonces $f(R)$ es un dominio totalmente ordenado.
Recordemos que $f(R) = \{a : |a| \text{ es un } f\text{-elemento}\}$, es claro que si R es un l-dominio entonces $f(R)$ también lo es, además $f(R)$ es un f-anillo y demostramos que en f-anillos ser dominio o ser l-dominio son equivalentes, por lo tanto $f(R)$ es un dominio. Luego, como $f(R)$ es un f-anillo se tiene que para toda $x \in f(R)$ se tiene que $x^+ x^- = 0$ y al ser un dominio se tiene que $x^+ = 0$ o $x^- = 0$ lo cual implica que también es totalmente ordenado.

(1) Sea a un d-elemento, supongamos $a \wedge 1 = b > 0$. Si $x \wedge y = 0$ se tiene que $0 \leq xb \wedge y \leq x \wedge y = 0$ y de manera análoga $bx \wedge y = 0$ por lo que b es un f-elemento. Luego, $0 \leq ax \wedge by \leq ax \wedge ay = 0$ pues a es un d-elemento y $a \geq b$. Como b es un f-elemento se sigue que $bax \wedge by = 0$ por lo que $b(ax \wedge y) = 0$ y como estamos en un l-dominio se concluye que $ax \wedge y = 0$. De manera similar se tiene que $xa \wedge y = 0$ por lo que a es un f-elemento

(2) Suponga que para todo $n \geq 1$ se tiene que a^n no es un f-elemento, entonces por (1), $a^n \wedge 1 = 0$ para todo $n \geq 1$. Luego, para todo par de enteros $i \geq j \geq 0$, $a^i \wedge a^j = a^j(a^{i-j} \wedge 1) = 0$ dado que a^j es un $d-$elemento, por lo tanto el conjunto deseado es ajeno.

(3) Si $x \wedge y = 0$ entonces $0 \leq a^{k-1}(ax \wedge ay) \leq a^k x \wedge a^k y = 0$ gracias a que a^k es un f-elemento, entonces $a^{k-1}(ax \wedge ay) = 0$ y como estamos en un $l$dominio concluimos que $ax \wedge ay = 0$, de manera análoga $xa \wedge ya = 0$ lo que implica que a es un d-elemento. Sea $0 \leq b, c \leq a$ entonces $0 \leq a^{k-1}b, a^{k-1}c \leq a^k \in f(R)$ por lo que $a^{k-1}b, a^{k-1}c \in f(R)$ el cual es totalmente ordenado así que son comparables, es decir, $a^{k-1}b \geq a^{k-1}c$ o $a^{k-1}c \geq a^{k-1}b$ y usando que $f(R)$ es un l-dominio se tiene que $b \geq c$ o que $c \geq b$ por lo que a es un elemento básico.

Lema 1.12. *Sea R un l-anillo. Si R es un d-anillo unitario, entonces R es un f-anillo.*

Demostración.

Sean x,$y \in R$ tales que $x \wedge y = 0$ y c,$d \in R^+$, dado que $dc, d \leq dc + d$ y que R es un d-anillo se tiene que

$$0 \leq d(cx \wedge y) = (dcx \wedge dy) \leq (dc + d)x \wedge (dc + d)y = 0$$

Por lo que $d(cx \wedge y) = 0$ para todo $d \in R^+$ en particular, para $|1|$ entonces

$$|1|(cx \wedge y) = |1||(cx \wedge y)| = |1(cx \wedge y)| = (cx \wedge y) = 0$$

de manera que c es un f-elemento. Por lo tanto, R es un f-anillo.

Capítulo 2

Retículas vectoriales

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición: Un *campo totalmente ordenado* es un campo donde su grupo aditivo es un grupo totalmente ordenado y el producto de dos elementos positivos se mantiene positivo.

Por ejemplo, el campo $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales y el campo R de todos los números reales son campos totalmente ordenados bajo el orden usual. Sea F un campo totalmente ordenado y $a \in F$. Entonces $a \geq 0$ o $a \leq 0$, así que $a^2 \geq 0$ en cualquier caso. Debido a eso el elemento identidad es positivo pues $1 = 1^2$.

Definición: Sea F un campo totalmente ordenado y V un espacio vectorial sobre F.

(1)V es una *retícula vectorial* sobre F si V es un l-grupo y para todo $\alpha \in F^+$ y $v \in V^+$, $\alpha v \in V^+$.

(2) Una *subretícula vectorial convexa* W de V es un subespacio de V y un l-subgrupo convexo de V.

(3) Un elemento $\alpha \in F^+$ es un *f-elemento* en V si $v \wedge u = 0 \Rightarrow \alpha v \wedge u = 0$ para todo u, $v \in V$.

(4) Más generalmente, para un anillo unitario totalmente ordenado T y un modulo izquierdo (derecho) M sobre T, M se dice que es un *l-módulo* si su grupo aditivo es un l-grupo y para cualquier $\alpha \in T^+$ y $v \in M^+$, $\alpha v \in M^+$ ($v\alpha \in M^+$).

(5) Un l-módulo es llamado un *f-módulo* si cada elemento en T^+ es un f-elemento en M.

En el caso donde $F = R$, una retícula vectorial es llamada un espacio de Riezs.

Teorema 2.1. *Sea V una retícula vectorial sobre un campo totalmente ordenado F.*

(1) Cada elemento positivo de F es un f-elemento en V, es decir, V es un f-módulo sobre F.

(2) Supongamos que $v_1, \cdots, v_n \in V$ son ajenos. Entonces para cualquier $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F$, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \geq 0$ si y sólo si cada $\alpha_i \geq 0$.

(3) Todo subconjunto ajeno de V es linealmente independiente sobre F.

Demostración.

(1) Para todo $\beta \in F$ con $\beta > 0$, como F es totalmente ordenado y $1 \geq 0$, $\beta^{-1} \geq 0$. Supongamos que $0 \leq \alpha \in F^+$ y $u \wedge v = 0$ para u, $v \in V$, entonces

$$0 = u \wedge v \geq (\alpha+1)^{-1}((\alpha+1)u \wedge (\alpha+1)v) \geq (\alpha+1)^{-1}(\alpha u \wedge v) \geq 0$$

Donde dichas desigualdades están dadas por las propiedades del ínfimo en cuanto a producto por un escalar y desigualdades se refiere.

Por lo tanto se tiene que $(\alpha+1)^{-1}(\alpha u \wedge v) = 0$ lo que implica que $\alpha u \wedge v = 0$. De esta manera, cada elemento positivo de F es un f-elemento en V lo que convierte a V en un f-módulo sobre F.

(2) Si cada $\alpha_j \geq 0$, entonces es claro que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \geq 0$ pues además elementos ajenos son positivos.

Ahora supongamos que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \geq 0$ con algunos escalares negativos, para mayor comodidad y tomando en cuenta que la suma es conmutativa supongamos que $0 > \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ y que $0 < \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$.
Entonces $-\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_k v_k \leq \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$ y entonces por el Teorema 1.5 (6) se tiene que:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 v_1 = (-\alpha_1 v_1) \wedge (-\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_k v_k) &\leq (-\alpha_1 v_1) \wedge (\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &\leq (-\alpha_1 v_1 \wedge \alpha_{k+1} v_{k+1}) + \cdots + (-\alpha_1 v_1 \wedge \alpha_n v_n) = 0 \end{aligned}$$

Debido a (1) y a que estamos trabajando con elementos ajenos.
Entonces $-\alpha_1 v_1 = 0$ lo que implica que $\alpha_1 = 0$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto cada $\alpha_j \geq 0$

(3) Dado que trabajamos con desigualdad no estricta y en vista de que, si una suma de elementos positivos es cero, entonces cada sumando es cero se tiene demostrado este punto.

2.2. Teoremas principales de retículas vectoriales

Para retículas vectoriales de dimensión finita, la condición (C) del Teorema 1.14(2) también se satisface.

Teorema 2.2. *Sea V una retícula vectorial sobre un campo totalmente ordenado F, Si V es de dimensión finita sobre F como espacio vectorial, entonces V satisface (C) en el Teorema 1.14(2) y por lo tanto el grupo aditivo de V tiene una base.*

Demostración.

Por el Teorema 2.1(3) todo subconjunto de elementos ajenos es linealmente independiente. Como V es de dimensión finita sobre F, contiene un subconjunto linealmente independiente con n elementos y recordemos que una base de espacio vectorial es un conjunto linealmente independiente máximo.

Sea $0 < g \in G$ y $X \subseteq G$ conjunto ajeno de elementos menores a g entonces dicho conjunto debe ser finito pues por la observación anterior X es linealmente independiente por lo que su cardinalidad debe ser menor o igual que la de la base la cual es finita. Por lo tanto $(V, +)$ cumple (C) y por el Teorema 1.14(2) $(V, +)$ tiene una base.

Definición: Una retícula vectorial sobre un campo totalmente ordenado F es llamada *arquimediana sobre* F si para a, $b \in V^+$, $\alpha a \leq b$ para todo $\alpha \in F^+$ implica que $a = 0$.

Teorema 2.3. *Sea V una reticula vectorial sobre un campo totalmente ordenado F.*

(1)Si V es arquimediana como l-grupo, entonces V es arquimediana sobre F.

(2) Si F es arquimediano y V es arquimediana sobre F entonces V es arquimediana como l-grupo.

Demostración.

(1) Sean $a, b \in V^+$ y supongamos que $a \neq 0$. Como V es arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$, entonces

$$b < na = n(1_F a) = (n 1_F)a \text{ con } n(1_F) \in F^+$$

Por lo tanto, V es arquimediana sobre F.

(2) Sean a, $b \in V^+$ y supongamos que $a \neq 0$. Veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Como V es arquimediana sobre F, existe $f \in F^+$ tal que $fa > b$. Luego, como F es arquimediano existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(1_F) > f$ por lo que se tiene que:

$$n(1_F)a = na > fa > b$$

Por lo tanto, V es arquimediana.

Claramente si V es arquimediana, entonces V es arquimediana sobre F. Por otra parte, si F no es un campo arquimediano totalmente ordenado, entonces el hecho de que V es arquimediano sobre F puede no implicar que V es arquimediana. Por ejemplo, cualquier campo totalmente ordenado que no es arquimediano es una retícula vectorial arquimediana sobre sí mismo.

Notemos que el Teorema 1.15 es verdadero para subespacios convexos totalmente ordenados de una retícula vectorial sobre un campo totalmente ordenado.

El siguiente Teorema es de estructura de retículas vectoriales y el resultado es igual cierto para l-grupos.

Teorema 2.4. *Sea V una retícula vectorial sobre un campo totalmente ordenado F. Si V satisface la condición (C) en Teorema 1.14 y ningún subespacio convexo totalmente ordenado máximo está acotado superiormente, entonces V es suma directa de subespacios convexos totalmente ordenados máximos sobre F.*

Demostración.

Usando el Teorema 1.14 (2) se tiene que V tiene una base S. Notemos primero que, siguiendo la demostración del Teorema 1.20(3), se tiene, para $\alpha \in F$ y $v \in V$, que $|\alpha v| \leq |\alpha||v|$. Se sigue, teniendo en cuenta el Teorema 2.1(1), que para cualquier $X \subseteq V$, $X^{\perp}$ es un subespacio vectorial sobre V.

Para cada $s \in S$, $s^{\perp\perp}$ es un subespacio convexo totalmente ordenado máximo de V por Teorema 1.14(1) y Corolario 1.1. Ahora mostraremos que V es suma directa de $s^{\perp\perp}$ con $s \in S$. Dado que para cualesquiera $s, t \in S$, si $s \neq t$, entonces $s^{\perp\perp} \cap t^{\perp\perp} = \{0\}$ por el Teorema 1.13 (2) y 1.15 (2), sólo debemos demostrar que V es suma de $s^{\perp\perp}$ con $s \in S$.

Sea $0 < a \in V$. Por la condición (C) podemos suponer que existen k elementos básicos ajenos $v_1, \cdots, v_k$ menores o iguales a a para algún entero positivo k y que a no es mayor o igual que $k+1$ elementos básicos disjuntos.
Dado que $S^{\perp} = \{0\}$ por ser base, se tiene que para cada $i = 1, \cdots, k$ existe $s_i \in S$ tal que $v_i \wedge s_i \neq 0$ o de lo contrario $v_i \in S^{\perp}$. Nosotros mostraremos que $a \in s_1^{\perp\perp} + \cdots + s_k^{\perp\perp}$
Como mencionamos anteriormente para $i = 1, \cdots, k$, $s_i^{\perp\perp}$ es un subespacio convexo totalmente ordenado máximo de V entonces por hipótesis existe $0 < x \in s_1^{\perp\perp}$ tal que $x \nleq a$ puesto que $s_1^{\perp\perp}$ no es acotado por arriba.
Si $a \wedge x = a_1$. Como ya sabemos $(a - a_1) \wedge (x - a_1) = 0$ y $0 < x - a_1 \in s_1^{\perp\perp}$.
Recordando que $s_1 \in s_1^{\perp\perp}$ y que los polares son convexos, tenemos que $(a - a_1) \wedge s_1 \in s_1^{\perp\perp}$
Como los elementos de la base son positivos se tiene que $s_1 \wedge (a - a_1) \wedge (x - a_1) = ((a - a_1) \wedge s_1) \wedge (x - a_1) = 0$ y por las observaciones anteriores, como $s_1^{\perp\perp}$ es totalmente ordenado se tiene que $(a - a_1) \wedge s_1 = 0$.
Si $a - a_1 = a'_1$. Entonces $a = a_1 + a'_1$ con $a_1 \in s_1^{\perp\perp}$ y $a'_1 \wedge s_1 = (a - a_1) \wedge s_1 = 0$.
De igual manera existe $0 < x_2 \in s_2^{\perp\perp}$ tal que $x_2 \nleq a'_1$ y tomemos que $a'_1 \wedge x_2 = a_2$.
Entonces $(a'_1 - a_2) \wedge (x_2 - a_2) = 0$ con $0 < x_2 - a_2$ por lo que de manera análoga $(a'_1 - a_2) \wedge s_2 = 0$
Si $a'_1 - a_2 = a'_2$, entonces tenemos que $a'_1 = a_2 + a'_2$ con $a_2 \in s_2^{\perp\perp}$ y $a'_2 \wedge s_2 = 0$.
Con eso tenemos que $a = a_1 + a_2 + a'_2$ con $a'_2 \wedge s_2 = 0$ y por construcción $a'_1 \geq a'_2$ por lo que también tenemos que $a'_2 \wedge s_1 = 0$.
Continuando este proceso tenemos que $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a'_k$ con $a'_k \wedge s_1 = \cdots = a'_k \wedge s_k = 0$ y cada $a_i \in s_i^{\perp\perp}$, sólo hay que verificar que $a'_k = 0$.
Si $a'_k > 0$, entonces existe un elemento $t \in S$ tal que $a'_k \wedge t \neq 0$ y entonces por construcción $a'_k \wedge t$ sería un elemento básico menor a a. Debido a eso $(a'_k \wedge t) \wedge v_j \neq 0$

para algún $1 \leq j \leq k$ o se contradiría la condición (C).
Entonces por el Teorema 1.13(2). se tiene que $(a_k^{,} \wedge t)^{\perp\perp} = v_j^{\perp\perp} = s_j^{\perp\perp}$ y entonces $a_k^{,} \wedge t$ y s_j serían comparables lo cual contradice el que sean mayores a 0 y que $a_k^{,} \wedge s_j = 0$. Por lo tanto $a_k^{,} = 0$ y $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \in s_1^{\perp\perp} + \cdots + s_k^{\perp\perp}$ y esto completa la demostración.

Definición: Sea V una retícula vectorial sobre un campo totalmente ordenado F. Se dice que un elemento $a \in V^+$ es una *unidad fuerte de* V *sobre* F si para toda $x \in V$, existe $\alpha_x \in F$ tal que $x \leq \alpha_x a$

Teorema 2.5. *Toda retícula vectorial de dimensión finita V tiene una unidad fuerte.*

Demostración.

Sea $v_1, \cdots, v_n$ una base de espacio vectorial para V sobre F con n un entero positivo. Veamos que $u = |v_1| + \cdots, +|v_n|$ e suna unidad fuerte. En efecto, para cualquier $v \in V$, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_i \in F$, entonces

$$v \leq |v| \leq |\alpha_1||v_1| + \cdots + |\alpha_n||v_n| \leq (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)u.$$

Por lo tanto, u es una unidad fuerte de V.

Capítulo 3

Álgebras

3.1. Definiciones, ejemplos y propiedades básicas

Definición: Sea F un o-campo. Un *álgebra reticulada (l-álgebra) A* sobre F es un álgebra y un l-anillo tal que para todo $\alpha \in F$, $a \in A$ con $\alpha \geq_F 0$ y $a \geq_A 0$ entonces $\alpha * a \geq_A 0$.

Entonces respecto a la suma y multiplicación por escalar, A es una retícula vectorial sobre F.

Definición: Una l-álgebra A sobre un campo totalmente ordenado F es *arquimediana sobre F* si A es arquimediana sobre F como retícula vectorial sobre F. El siguiente resultado nos da métodos simples para construir retículas en álgebras para convertirlas en l-álgebras.

Teorema 3.1.

(1) Sea A un álgebra sobre F un o-campo y B una base de A como espacio vectorial sobre F. Si para todo a, $b \in B$, ab es una combinación lineal de B con escalares positivos en F, entonces A puede volverse una l-álgebra definiendo que un elemento de A es positivo si cada escalar en su representación como combinación de elementos de B es positivo.

(2) Supongamos que R es una l-álgebra unitaria con cono positivo P y $u > 0$ unidad. Entonces uP es el cono positivo de una retícula en R que lo hace una l-álgebra.

Demostración.

(1) Recordemos que una l-álgebra es un álgebra que tiene estructura de l-anillo y que cumple que para cualesquiera $a \in A^+$, $\alpha \in F^+$ se tiene que $\alpha a \in A^+$.

Dado que A ya es un álgebra sólo debemos demostrar las otras dos afirmaciones.

Consideremos una combinación lineal positiva si presenta todos sus escalares positivos.

Sea P el conjunto de todas las combinaciones lineales positivas de B.

Entonces, es claro que las condiciones del Teorema 1.17 son satisfechas por lo que A obtiene estructura de anillo parcialmente ordenado con cono positivo P.

Ahora sólo necesitamos que que dicho orden sea reticular. Como hemos visto anteriormente, sólo necesitamos definir $a \wedge 0$ y $a \vee 0$ para poder dar una estructura de retícula al anillo. Por lo tanto veamos que si $a \in A$, $a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_i \in F$ y $v_i \in B$ entonces

$$a \wedge 0 = (\alpha_1 \wedge 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \wedge 0)v_n$$

y

$$a \vee 0 = (\alpha_1 \vee 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \vee 0)v_n.$$

Tenemos que

$$a - [(\alpha_1 \wedge 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \wedge 0)v_n] = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n - [(\alpha_1 \wedge 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \wedge 0)v_n]$$

$$= [\alpha_1 - (\alpha_1 \wedge 0)]v_1 + \cdots + [\alpha_n - (\alpha_n \wedge 0)]v_n.$$

Luego, es claro que $\alpha_i - (\alpha_i \wedge 0) \geq 0$ para toda $i = 1, \cdots, n$ por lo que $a - [(\alpha_1 \wedge 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \wedge 0)v_n]$ es una combinación positiva lo que implica que $0, a \geq [(\alpha_1 \wedge 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \wedge 0)v_n]$.

Sea $x \in A$ tal que $0, a \geq x$, entonces si $x = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ tenemos que

$$a - [\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n] = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n - [\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n]$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n \geq 0$$

Por lo que $0, \alpha_i \geq \beta_i$ para toda $i = 1, \cdots, n$.Lo cual implica que $\beta_i \leq \alpha_i \wedge 0$. Por lo tanto

$$(\alpha_1 \wedge 0)v_1 + \cdots + (\alpha_n \wedge 0)v_n \geq \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = x$$

Y así queda bien definido el ínfimo. Usando A^{op} obtenemos que el supremo está bien definido y podemos dar estructura de retícula a A

Sean $a \in A^+ = P$, $\beta \in F^+$, entonces $a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_i \in F^+$ y $v_i \in B$. Por lo que resulta que:

$$\beta a = \beta(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \beta\alpha_1 v_1 + \cdots + \beta\alpha_n v_n\text{-}$$

Donde $\beta\alpha_i \in F^+$ por lo que $\beta a \in A^+$ con lo que demostramos la última condición.

(2) La demostración de esta parte es análoga a la del Teorema 1.19

Definición: Se dice que una base de espacio vectorial B de un álgebra es una *base multiplicativa* si para todo a,$b \in B$, $ab \in B$ o $ab = 0$.

Corolario 3.1. *Sea A un álgebra. Si A tiene una base multiplicativa B, entonces A puede convertirse en una l-álgebra en donde B es una base, es decir, B es un conjunto de elementos básicos ajenos con $B^\perp = \{0\}$.*

Demostración.

Por el Teorema 3.1.(1) y al ser B multiplicativa se tiene que A puede adquirir estrucutura de l-álgebra. Luego, como está definido el orden en A, si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ se tiene que para cualquier elemento $v_i \in B$, $L_A(\{v_i\}) = \{\alpha_1 v_1 + \dots, \alpha_n v_n | \alpha_i \leq 1, v_j \leq 0, j \neq i\}$. Por lo tanto es claro que B es un conjunto ajeno y que $B^\perp = \{0\}$.

La noción de base multiplicativa se puede extender afuera del conjunto usando el campo F en el cual esté definida el álgebra, de la siguiente manera.

Definición: Para un álgebra A sobre un campo totalmente ordenado F, se dice que una base de espacio vectorial B es *multiplicativa sobre* F^+ si para todo a,$b \in B$, $ab = \alpha c$ para algún $\alpha \in F^+$, $c \in B$. De igual manera, por el Teorema 3.1.(1), si A tiene una base multiplicativa sobre F^+, se puede dar estructura de l-álgebra a A con B como base.

Ejemplos 3.1.

(1) El álgebra de matrices de $n \times n$ puede adquirir estructura de l-álgebra con la base estándar (e_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$ como conjunto ajeno y de polar cero.

Esto es claro pues $(e_{ij})(e_{hk}) = e_{ik}$ si $j = h$ y $(e_{ij})(e_{hk}) = 0$ si $j \neq h$ por lo que la base estándar es una base multiplicativa y puede aplicarse el Corolario 3.1.

(2) En el campo $A = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $B = \{1, \sqrt{2}\}$ es una base multiplicativa sobre $\mathbb{Q}^+$

En este caso tomaremos a A como un álgebra sobre $\mathbb{Q}$, ya que $1 \in B \cap \mathbb{Q}^+$ es claro que:

$$(1_B)(1_B) = (1_{\mathbb{Q}^+})(1_B)$$
$$(1_B)(\sqrt{2}) = (1_{\mathbb{Q}^+})(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})(1_B)$$
$$(\sqrt{2})(\sqrt{2}) = (2_{\mathbb{Q}^+})(1_B)$$

Por lo tanto, B es una base multiplicativa sobre $\mathbb{Q}^+$

En lo siguiente consideraremos el l-radical de un l-álgebra sobre un campo totalmente ordenado F. El resultado principal es mostrar que si el l-radical es 0, entonces una l-álgebra de dimensión finita es arquimediana sobre F. Claramente para una l-álgebra A sobre un campo totalmente ordenado F, l-$N(A)$ es cerrado bajo el producto por escalar, esto es, l-$N(A)$ es un l-ideal y una subreticula vectorial del l-álgebra A.

Teorema 3.2. *Sea A una l-álgebra sobre un campo totalmente ordenado F.*

(1) Si A tiene una unidad fuerte, entonces el conjunto

$$i(A) = \{a \in A \;/\; \alpha|a| \leq u \textit{ para toda unidad fuerte } u \textit{ y todo } \alpha \in F^+\}$$

es un l-ideal de A que no contiene unidades fuertes de A sobre F. Además, A es arquimediana sobre F si y sólo si $i(A) = \{0\}$.

(2) Si A es de dimensión finita entonces $i(A)$ es nilpotente, por lo tanto, l-$N(A) = \{0\}$ implica que A es arquimediana sobre F.

Demostración.

(1)Sean x,$y \in i(A)$, $\alpha \in F^+$, $a \in F$, $z \in A$ y una unidad fuerte u

Se tiene que

$$2\alpha|x-y| \leq 2\alpha|x| + 2\alpha|y| \leq 2u.$$

Entonces $\alpha|x-y| \leq u$, asi, $x-y \in i(A)$.

Luego, $\alpha|ax| \leq \alpha|a||x| \leq u$. Por lo que $ax \in i(A)$.

Si $|z| \leq |x|$, entonces $\alpha|z| \leq \alpha|x|$ por lo que $z \in i(A)$. De manera que $i(A)$ es una subretícula convexa de A

Por definición de unidad fuerte, tenemos que $|z|u \leq \beta u$ para algún $0 < \beta \in F$. Entonces se tiene que:

$$\alpha\beta|zx| \leq \alpha\beta|z||x| = |z|\beta\alpha|x| \leq |z|u \leq \beta u$$

Por lo que al estar trabajando en un campo, se tiene que $\alpha|zx| \leq u$ para cualquier $\alpha \in F^+$. Por lo tanto $zx \in i(A)$ y de manera analoga xz, así, $i(A)$ es un l-ideal de A.

Finalmente, dado que $2u \nleq u$, nos implica que $u \notin i(A)$.

Es claro que si A es arquimediana sobre F entonces $i(A) = \{0\}$. Ahora supongamos que $i(A) = \{0\}$ y que $\alpha x \leq y$ para toda $\alpha \in F^+$ y con x, $y \in A^+$.

Por definición de unidad fuerte y que $y \in A^+$ se tiene que existe $\beta \in F^+$ tal que $y \leq \beta u$ por lo que se tiene la desigualdad $\alpha x \leq y \leq \beta u$. Por lo que al estar trabajando en un campo, se tiene que $\alpha x \leq u$ para cualquier $\alpha \in F^+$, asi, $x \in i(A)$. Por lo tanto $x = 0$ y A es arquimediana sobre F.

(2) Sea $I = i(A)$. Como habíamos hecho antes, definimos $I^{(2)} = \langle I^2 \rangle$, $I^{(3)} = \langle II^{(2)} \rangle$, $\cdots$, $I^{(n)} = \langle II^{(n-1)} \rangle$ para cualquier $n \geq 2$. Claramente $I^n \subseteq I^{(n)}$ y $I^{(k+1)} \subseteq I^{(k)}$. Veamos que si $I^{(k)} \neq 0$ entonces

$$I^{(k+1)} \subset I^{(k)}.$$

Como $I^{(k)}$ es de dimensión finita como retícula vectorial, por el Teorema 2.5 $I^{(k)}$ tiene una unidad fuerte u_k. Analogamente I tiene una unidad fuerte (que no será unidad fuerte de A por (1)). Sea u una unidad fuerte de A. Si $a \in I^{(k+1)}$ entonces $|a| \leq \sum |x_i y_i|$ con $x_i \in I$ y $y_i \in I^{(k)}$. Entonces para algunos β, $\gamma \in F^+$, $|x_i| \leq \beta u_1$ y $|y_i| \leq \gamma u_k$, entonces $|x_i y_i| \leq |x_i||y_i| \leq \beta\gamma u_1 u_k$.

Dado que $I^{(k)}$ es un l-ideal de A, $uu_k \in I^{(k)}$ entonces $uu_k \leq \delta u_k$ para algún $\delta \in F^+$ por ser u_k unidad fuerte. Entonces para toda $\alpha \in F^+$

$$\beta\gamma\delta\alpha|x_i y_i| \leq \beta\gamma\delta\alpha|x_i||y_i| \leq \alpha\beta^2\gamma^2\delta u_1 u_k \leq \beta\gamma u u_k \leq \beta\gamma\delta u_k$$

entonces $\alpha|x_i y_i| \leq u_k$ para toda $\alpha \in F^+$.

Sea v_k una unidad fuerte arbitraria de $I^{(k)}$. Entonces $u_k \leq \lambda v_k$ por lo que $\alpha|x_i y_i| \leq v_k$ para toda $\alpha \in F^+$. Luego, $|x_i y_i| \in i(I^{(k)})$, lo cual implica que $\sum |x_i y_i| \in i(I^{(k)})$ y por tanto $a \in i(I^{(k)})$. Finalmente $I^{(k+1)} \subseteq i(I^{(k)}) \subset I^{(k)}$.

Como A es de dimensión finita sobre F, debe haber un entero positivo m tal que $I^{(m)} = \{0\}$, es decir $I^m = \{0\}$ por lo que I sería nilpotente y estaría contenido en

$l-N(A)$. Por lo tanto si $l-N(A)=\{0\}$ se tiene que $i(A)=\{0\}$ y por (1) A es arquimediana sobre F.

Corolario 3.2. *Sea A una l-álgebra de dimensión finita sobre un campo totalmente ordenado F. Si A es arquimediana sobre F, entonces como retícula vectorial sobre F, A es una suma directa finita de subespacios de A sobre F convexos y totalmente ordenados. En particular, si $l-N(A)=\{0\}$, A es una suma directa finita de subespacios de A sobre F convexos y totalmente ordenados.*

Demostración.

Si A es Arquimediana sobre F, entonces A no tiene subespacios convexos totalmente ordenados máximos que esten acotados por arriba. Dado que A es de dimensión finita se tiene que la condición (C) del Teorema 1.14 se cumple por lo que el Teorema 2.2 puede aplicarse.

Ejemplos 3.2.

(1) Supongamos que R es un campo totalmente ordenado y $M_n(R)$ es el anillo de matrices de $n\times n$ sobre R con $n\geq 2$. Definimos una matriz $(a_{ij})\geq(0_{ij})$ si cada $a_{ij}\geq 0$ en R. Entonces $M_n(R)$ tiene estructura de l-álgebra.

Como vimos en el ejemplo 1.3. (1), las condiciones ya mencionados hacen que $M_n(R)$ sea un l-anillo, además, es claro que si le damos a $M_n(R)$ estructura de espacio vectorial sobre F, el producto de un escalar positivo por una matriz positiva dará como resultado una matriz positiva. Por lo tanto $M_n(R)$ es una l-álgebra con el orden de entradas.

Como mencionamos antes $\{e_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ la base canónica como espacio vectorial sobre F de $M_n(R)$ es una base multiplicativa y entonces es una base de $M_n(F)$ sobre F, es decir, un conjunto de elementos básicos ajenos con polar nulo, con respecto al orden de entrada.

De manera análoga al caso de anillos también se le puede dotar a $M_n(R)$ de estructura de l-álgebra con el elemento identidad no positivo.

(2) Supongamos que G es un grupo (semigrupo) y F es un campo totalmente ordenado.

Sea $F[G]=\{\Sigma\alpha_i g_i|\alpha_i\in F, g_i\in G\}$ el álgebra de grupo (semigrupo) sobre F. En este caso usaremos notación multiplicativa para referirnos a la operación en G. Definamos $\Sigma\alpha_i g_i\geq 0$ si cada $\alpha_i\geq 0$, esto es, el cono positivo $F^+[G]$.

Entonces $F[G]$ es una l-álgebra sobre F pues es claro que el orden le da estructura de l-anillo y por definición si $x\in F^+[G]$ y $\alpha\in F^+$ entonces $\alpha x\in F^+[G]$. El orden reticular inducido se llama el *orden de coordenadas.*

Claramente $1G=\{1g|g\in G\}$, donde 1 es elemento de F, es una base de espacio vectorial para $F[G]$ sobre F.

Además, $1G$ también es una base pues si $0\leq a, b\leq g$ como $a=\Sigma\alpha_i g_i$ y $b=\Sigma\beta_i g_i$ entonces es claro que los coeficientes son cero salvo el correspondiente a g, es decir, $a=\alpha g$ y $b=\beta g$ con α, $\beta\in F$ y dado que F es totalmente ordenado, $a>b$ o $b>a$;

por lo tanto g es un elemento básico y como claramente es un conjunto ajeno de polar cero, $1G$ es una base.

La diferencia entre los dos ejemplos anteriores es que la matriz identidad en $M_n(F)$ no es un elemento básico pero el elemento identidad en F[G] si lo es.

(3) Sea F un campo totalmente ordenado y $R = F[x]$ el anillo de polinomios sobre F. Sea $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_kx^k \in R$ con $a_i \in F$, $0 \leq k \leq n$, y $a_k,a_n \neq 0$. Si definimos $p(x) > 0$ por $a_n > 0$, entonces R es una álgebra totalmente ordenada. Si definimos $p(x) > 0$ por $a_k > 0$, entonces R también es un álgebra totalmente ordenada y ambos ordenes no son arquimedianos sobre F.

Necesitamos ver que R tiene estructura de álgebra y de anillo totalmente ordenado. Es claro que los polinomios sobre un campo totalmente ordenado forman un álgebra. Veamos que se cumplen las condiciones para que $P = \{p(x) = a_nx^n + \cdots + a_kx^k \in R | a_n > 0\} \cup \{0\}$ sea el cono positivo de R como anillo parcialmente ordenado.

Sean $q(x) = b_mx^m + \cdots + b_kx^k$,$p(x) = a_nx^n + \cdots + a_kx^k \in P$, sin perdida de generalidad supongamos que $m \geq n$, entonces el primer coeficiente en $q(x) + p(x)$ sería b_m o $b_m + a_n$ ambos estrictamente positivos por lo que $q(x) + p(x) \in P$, es decir, $P + P \subseteq P$.

Debido aque R es un anillo, es claro que si $p(x) \in P$ entonces $p(x) + P + (-p(x)) \subseteq P$.

Es claro que $-P = \{p(x) = a_nx^n + \cdots + a_kx^k \in R | a_n < 0\} \cup \{0\}$ por lo que $P \cap -P = \{0\}$, por lo que R tiene estructura de anillo parcialmente ordenado.

Como F es un $o-campo$, es claro que $R = P \cup -P$ y usando el Teorema 1.4(2), el grupo aditivo de R es totalmente ordenado. Como el anillo hereda sus propiedades de orden respecto a su grupo aditivo tenemos que R es un anillo totalmente ordenado.

Si escribimos a $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_kx^k \in R$ como $p(x) = a_kx^k + \cdots + a_nx^n \in R$ tenemos que el nuevo orden está definido de misma manera que el primero, por lo que es inmediato que R es un álgebra totalmente ordenada con dicho orden.

A los órdenes anteriores se les conoce como el *orden lexicográfico* y el *orden anti lexicográfico*, respectivamente.

Sean $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q(x) = x \in R$ con $a_2,a_1,a_0 > 0$. Es claro que ambos polinomios son elementos positivos no cero tanto en el orden lexicográfico como en el anti-lexicográfico donde $p(x) > q(x)$ en ambos órdenes. Además para todo $b \in F^+$, $p(x) > bq(x)$ en ambos órdenes. Dado que $q(x) \neq 0$, se tiene que ninguno de los órdenes es arquimediano sobre F.

(4) Sea $S = \{a, b\}$ el semigrupo con la multiplicación $ab = ba = a^2 = b^2 = a$, $a \neq b$ y $\mathbb{R}[S]$ el l-álgebra de semigrupo con coeficientes reales definidos en el ejemplo 3.2 (2). Entonces $\mathbb{R}[S]$ es un l-dominio que no es un dominio. Además, $\mathbb{R}[G]$ es un l-anillo conmutativo y arquimediano en el cual el cuadrado de cada elemento es positivo ya que $(\alpha a + \beta b)^2 = (\alpha + \beta)^2 a \geq 0$.

Recordemos que según el Ejemplo 3.2.(2) $\mathbb{R}[S] = \{\alpha a + \beta b | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ a, b \in S\}$, con el producto natural entre elementos de $\mathbb{R}[S]$, al ser una l-álgebra, por definición es un l-anillo.

Sean $v, s \in \mathbb{R}[S]$ con $v = \alpha_1 a + \beta_1 b$ y $s = \alpha_2 a + \beta_2 b$ entonces

$$vs = (\alpha_1\alpha_2)a^2 + (\alpha_1\beta_2)ab + (\beta_1\alpha_2)ba + (\beta_1\beta_2)b^2 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)a$$

De la definición del producto tenemos que como $\mathbb{R}$ es un campo, $\mathbb{R}[S]$ es conmutativo, luego, supongamos que $v, s > 0$, con el orden definido en el ejemplo 3.2 (2) se tiene que α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \geq 0$ y al menos un coeficiente tanto en v como en s es no cero. Finalmente, la definición nos muestra que $vu > 0$ por lo que $\mathbb{R}[S]$ es un l-dominio.

Dado que $a \neq b$, se tiene que $a - b \neq 0$, sin embargo, $(a - b)^2 = 0$ por lo que es claro que $\mathbb{R}[S]$ no es un dominio.

Usando la definición nuevamente tenemos que $v^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 a > 0$ por lo que en efecto, los cuadrados son positivos.

Sean $v, s \in \mathbb{R}[S]^+$ con $v \neq 0$, entonces $v = \alpha_1 a + \beta_1 b$ y $s = \alpha_2 a + \beta_2 b$ donde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $i = 1, 2$, y al menos uno de α_1 y β_1 es no cero. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha_1 > \alpha_2$. Por lo tanto,

$$nv = n\alpha_1 a + n\beta_1 b \not\leq \alpha_2 a + \beta_2 b = s$$

con lo que se muestra, por contrapositiva, que $\mathbb{R}[S]$ es arquimediano como l-anillo.

Bibliografía

[1] Davey, P., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge: Cambridge University, 1990.

[2] Ma, Jingjing, *Lecture notes on algebraic structure of lattice-ordered rings*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, Toh Tuck Link, 2014.

[3] Schwartz, N. y ,Yang, Y. *Field with directed partial orders*, J. Algebra, 2011.

[4] Schwartz, N., *Lattice-ordered fields*, Order, 1986.

[5] Steinberg, S. A., *Lattice-ordered rings and modules.*, Springer, USA, New York, 2010.

Índice alfabético