



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

GRÁFICAS INEVITABLES EN 2-COLORACIONES DE LA  
GRÁFICA COMPLETA: EL CASO DE LAS AMOEBAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

JENNIFER LILITH ESPINOSA HERNÁNDEZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. ADRIANA HANSBERG PASTOR

Ciudad Universitaria, CDMX, 2021





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Definiciones básicas</b>	<b>3</b>
1.1. Teoría de Gráficas y algunos resultados básicos . . . . .	3
<b>2. Teoría de Ramsey</b>	<b>7</b>
2.1. Teorema y números de Ramsey . . . . .	7
2.2. Cotas de los números de Ramsey . . . . .	13
<b>3. Teoría Extremal de Gráficas</b>	<b>19</b>
3.1. Teorema de Mantel . . . . .	19
3.2. El Teorema de Turán . . . . .	21
3.3. Número de Turán para trayectorias . . . . .	24
3.4. El Problema de Zarankiewicz y el Teorema de Kővari-Sós-Turán . . . . .	25
<b>4. Variantes de problemas tipo Ramsey-Turán</b>	<b>29</b>
4.1. Gráficas balanceables . . . . .	30
4.2. Gráficas omnitonaes . . . . .	32
4.3. Patrones inevitables en 2-coloraciones de las aristas de $K_n$ . . . . .	34
<b>5. Amoebas</b>	<b>43</b>
5.1. Definición de amoeba y su relación con problemas de coloración . . . . .	43
5.2. Teoremas de caracterización . . . . .	49
5.3. Tercera caracterización y algoritmo . . . . .	56
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>72</b>

# Introducción

La Teoría de Gráficas es una rama de las Matemáticas que ha tenido un gran desarrollo debido a su enorme cantidad de aplicaciones en otras áreas, como en Química, Computación, Biología, etc. Su origen se remonta al siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg, el cual consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel en la ciudad de Königsberg, de modo que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. El trabajo de Leonhard Euler sobre el problema titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* en 1736, es considerado el primer resultado de la Teoría de Gráficas.

En los últimos años se han desarrollado nuevas técnicas en esta área e implementado otras de otras áreas para resolver algunos de los problemas de la Teoría de Gráficas; un ejemplo de esto es el caso de la Teoría de Ramsey, en la cual, se emplean una gran variedad de técnicas provenientes de otras ramas de las matemáticas y cuyos resultados no sólo son importantes en la Teoría de Gráficas sino también en otras áreas como la Teoría de Conjuntos, Análisis, Lógica, Álgebra, etc.

El trabajo de esta tesis se desarrolla alrededor de una familia de gráficas llamadas amoebas. Una amoeba es, de manera muy informal, una gráfica que cumple que, si tenemos cualesquiera dos copias de ella inmersas en una gráfica completa mucho más grande, siempre es posible trasladar la primera copia hacia la otra a través de una serie de intercambios de aristas llamados reemplazos admisibles de aristas. Cuando efectuamos un reemplazo admisible nos referimos a que quitamos una arista de la gráfica en cuestión y ponemos otra pero de tal forma que la gráfica obtenida es isomorfa a la anterior.

Las amoebas fueron introducidas por primera vez por Y. Caro et al [9] en el contexto de ciertos problemas de tipo Ramsey-Turán, en los cuales se estudia la densidad necesaria de las aristas de cada color en 2-coloraciones de la gráfica completa para garantizar la existencia de una determinada subgráfica balanceada, es decir, que contenga el mismo

número de aristas de cada color. Las amoebas son interesantes en ese ámbito ya que su propia esencia las hace candidatas idóneas para emplear técnicas de interpolación con las cuales resulta sencillo demostrar la existencia tanto de patrones balanceados como de diversos otros patrones cromáticos.

En esta tesis, además de adentrarnos en la teoría relacionada, estudiaremos la estructura de las amoebas a profundidad. Así, obtendremos varias caracterizaciones equivalentes así como un algoritmo para reconocerlas. Cabe destacar que se emplean no solo técnicas de teoría de gráficas y combinatoria, sino también concluimos presentando una caracterización algebraica que, además, es la base teórica del algoritmo. Los resultados sobre las amoebas presentados en esta tesis son originales y se derivan, en parte, del trabajo realizado en el V Taller de Matemáticas Discretas, que tuvo lugar del 29 de julio al 3 de agosto de 2018 en la UNAM Juriquilla.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: En el primer capítulo se dan algunas definiciones que necesitaremos para el desarrollo del presente trabajo. En el segundo capítulo se expone la Teoría de Ramsey para dos colores y el tipo de problemas que abarca. En el tercer capítulo hablamos sobre la Teoría Extremal de Gráficas; se dará a conocer el Teorema de Mantel, el Teorema de Turán y el número de Turán para cierto tipo de gráficas. En el cuarto capítulo se mencionarán algunas variantes de problemas tipo Ramsey-Turán y se verá la definición de gráficas balanceables y omnitonales. En el quinto capítulo se dará a conocer la definición de amoeba, algunos ejemplos, resultados de estas y también se presentará un algoritmo para determinar si una gráfica es amoeba.

# Capítulo 1

## Definiciones básicas

En este capítulo presentaremos algunas definiciones básicas de la Teoría de Gráficas así como otros conceptos que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis. Para ahondar más en temas de Teoría de Gráficas, se recomienda consultar en los libros [5] y [27].

### 1.1. Teoría de Gráficas y algunos resultados básicos

Gran variedad de problemas pueden representarse mediante un diagrama formado por un conjunto de puntos, de tal forma que algunos de los puntos estén unidos mediante rectas. Por ejemplo, los puntos pueden representar personas y las rectas pueden representar una relación de amistad o si esas personas se conocen; o los puntos pueden ser ciudades y las rectas entre ellos pueden ser caminos, etc. A este tipo de diagrama se le llama gráfica.

Una *gráfica*  $G$  es una pareja ordenada  $(V(G), E(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito no vacío de objetos llamados *vértices* y  $E(G)$  es el conjunto de parejas no ordenadas  $uv$  de distintos elementos de  $V(G)$ . A este conjunto le llamamos el conjunto de *aristas* de  $G$ . Notemos que, como las aristas son pares no ordenados, entonces la arista  $uv$  es la misma que la arista  $vu$ . Si  $uv \in E(G)$ , a los vértices  $u$  y  $v$  los llamamos *extremos* de la arista. También decimos que la arista  $uv$  *incide* en  $u$  y en  $v$  y que los vértices  $u$  y  $v$  son *adyacentes*. Al conjunto de los vértices adyacentes a otro vértice  $v$  en una gráfica  $G$  lo denotamos con  $N_G(v)$ , a estos vértices se les llama *vecinos* de  $v$ . Observemos que, en

ocasiones, en una gráfica  $G$  puede suceder que algún vértice  $v$  es adyacente a sí mismo, es decir,  $vv \in E(G)$ . A este tipo de aristas se les llama *lazo*. También puede pasar que una arista  $uv$  aparezca más de una vez en  $E(G)$ . Este tipo de aristas son conocidas como *aristas múltiples*. En el presente trabajo sólo nos referiremos a las gráficas *simples*, esto es, aquellas que no tienen lazos ni aristas múltiples.

Se denomina *orden* de una gráfica al número de vértices que tiene dicha gráfica, lo denotamos con  $n(G)$ . Se le llama *tamaño* de una gráfica al número de aristas que tiene esta, lo denotamos con  $e(G)$ .

El *grado* de un vértice  $v$ , denotado  $d(v)$ , es el número de aristas que inciden en él o el número de vértices adyacentes a él. Utilizaremos la notación  $d_G(v)$  para hacer referencia al grado del vértice  $v$  en la gráfica  $G$ . El *grado máximo de  $G$*  es la mayor cantidad de adyacencias de un vértice  $u$  en una gráfica  $G$ , está definido por:

$$\Delta(G) = \text{máx}\{d(u)|u \in V(G)\}.$$

El *grado mínimo de  $G$*  es la menor cantidad de adyacencias de un vértice  $w$  en una gráfica  $G$  y está definido por:

$$\delta(G) = \text{mín}\{d(w)|w \in V(G)\}.$$

Si cada vértice de la gráfica  $G$  tiene grado  $k$ , esto es,  $d(v) = k$ , para todo  $v \in V(G)$ , se dice que la gráfica  $G$  es  $k$ -regular.

Puesto que cada arista tiene dos extremos, la suma de los grados es exactamente igual al doble de las aristas:

$$\sum_1^n d(v_i) = 2e(G). \tag{1.1}$$

Por tanto, la suma de los grados es par:

$$\sum_1^n d(v_i) \equiv 0 \pmod{2}. \tag{1.2}$$

Una gráfica *completa* de  $n$  vértices, denotada como  $K_n$ , es una gráfica de  $n$  vértices tal que cualesquiera dos vértices son adyacentes entre sí. Es decir,  $d(v) = n - 1$  para todo  $v \in V(G)$ . Por tanto,  $e(G) = n(n - 1)/2$ .

El *complemento* de una gráfica  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , es la gráfica con:

1.  $V(\overline{G}) = V(G)$
2.  $uv \in E(\overline{G})$  si y sólo si  $uv \notin E(G)$

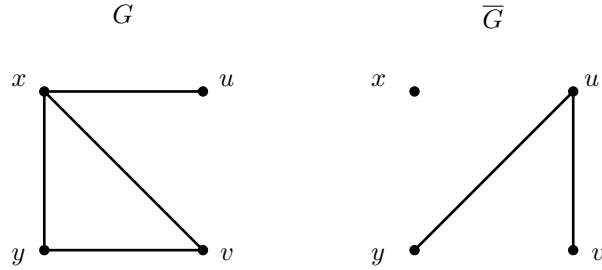


Figura 1.1: Una gráfica  $G$  y su complemento  $\overline{G}$

Decimos que una gráfica  $G$  es *bipartita* si existe una bipartición de  $V(G)$  en dos conjuntos  $V_1, V_2$  tal que toda arista de  $G$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ . Denotamos con  $K_{p,q}$  a la gráfica bipartita completa, donde  $p$  es el orden del conjunto  $V_1$  y  $q$  es el orden del conjunto  $V_2$  y donde todo vértice de  $V_1$  es adyacente a todo vértice de  $V_2$ . Con  $E(V_1, V_2)$  denotamos a las aristas entre  $V_1$  y  $V_2$ .

Una gráfica  $H$  es una *subgráfica* de una gráfica  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dado  $S \subseteq V(G)$ , decimos que  $H$  es la *subgráfica inducida por  $S$*  en  $G$  si  $V(H) = S$  y  $uv \in E(H)$  si y sólo si  $uv \in E(G)$ . A esta subgráfica inducida  $H$  la denotamos con  $G[S]$ .

Una gráfica  $H$  es una *subgráfica inducida por aristas*, si es una subgráfica de  $G$  tal que,  $E(H) \subseteq E(G)$  y su conjunto de vértices es el formado por los vértices extremos de

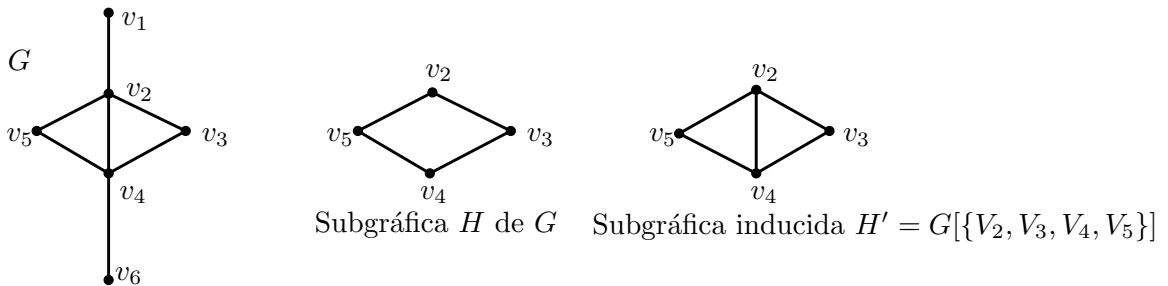


Figura 1.2: Una gráfica  $G$ , una de sus subgráficas y una de sus subgráficas inducidas



las aristas de  $H$ .

En una gráfica  $G$ , un *camino* es una sucesión finita no vacía de vértices  $W = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ , tal que  $v_i v_{i+1} \in E(W)$  para  $1 \leq i \leq n$ . Diremos que  $W$  es un camino de  $v_1$  a  $v_{n+1}$  o un  $v_1 v_{n+1}$ -camino, donde  $v_1$  es el vértice inicial y  $v_{n+1}$  es el vértice final. La cantidad de aristas por las que pasa este camino se le denomina *longitud del camino* y lo denotamos como  $\ell(W)$ . Un *camino cerrado* en una gráfica  $G$  es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.

Un *ciclo* es un camino cerrado de longitud mayor o igual a 3, en donde sólo se repiten el vértice inicial y el vértice final del camino. Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices. Al ciclo de longitud 3 se le llama *triángulo*. Con  $C_k$  y  $P_k$  denotamos al ciclo y, respectivamente, a la trayectoria de longitud  $k$ .

Decimos que una gráfica es *conexa* si para cualesquiera dos vértices  $x$  y  $y$  existe un  $xy$ -camino.

Sean  $G$  y  $G'$  dos gráficas. Decimos que  $G$  es *isomorfa* a  $G'$  y lo denotamos por  $G \cong G'$  si existe una función biyectiva  $f: V(G) \rightarrow V(G')$  tal que, para todo par se cumple que  $uv \in E(G)$  si y sólo si  $f(u)f(v) \in E(G')$ .

Un *automorfismo* de una gráfica es un isomorfismo de una gráfica  $G$  en sí misma. Es decir, es una permutación  $\alpha$  de sus vértices tal que si  $(u, v) \in E(G)$  entonces  $\alpha(u)\alpha(v) \in E(G)$ .

# Capítulo 2

## Teoría de Ramsey

La Teoría de Ramsey estudia las condiciones que se han de cumplir para que en un conjunto dado aparezca un cierto tipo de orden. En palabras de Theodore S. Motzkin [22], la filosofía de la Teoría de Ramsey es que “*el desorden absoluto es imposible*”. El tipo de preguntas que quiere contestar la Teoría de Ramsey es qué tan grande debe ser una estructura para garantizar la existencia de una subestructura con cierta propiedad. En este capítulo expondremos algunos de los resultados básicos de la Teoría de Ramsey. Todos estos resultados se pueden consultar en [5, 27].

### 2.1. Teorema y números de Ramsey

La Teoría de Ramsey debe su nombre al matemático y filósofo inglés Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) quien demostró en un artículo llamado *On a Problem of Formal Logic* [24] lo que hoy se conoce como el Teorema de Ramsey.

El Teorema de Ramsey generaliza el Principio del Palomar, el cual dice, en su versión más sencilla y su analogía más conocida, que si tenemos  $n$  nidos y  $n+1$  palomas, entonces hay un nido en el que duermen al menos dos palomas. De manera más general dice que, si tenemos  $m$  objetos y hacemos una partición de  $n$  clases, entonces una clase tiene al menos  $\lceil m/n \rceil$  objetos y otra clase tiene a lo más  $\lfloor m/n \rfloor$  objetos. Para que quede más claro el tipo de problemas de la Teoría de Ramsey, veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.** *En una reunión de 6 personas sucede que: o bien 3 de ellos se conocen entre sí o 3 de ellos no se conocen entre sí.*

El ejemplo anterior, conocido como el *Teorema de la amistad* es un caso particular del Teorema de Ramsey, del cual existen variantes en diferentes contextos. En este trabajo sólo nos enfocaremos en la versión del Teorema de Ramsey en Teoría de Gráficas que nos dice que, dada una coloración de las aristas de una gráfica completa  $K_n$ , con  $n$  suficientemente grande, siempre podemos encontrar una subgráfica  $K_k$  monocromática.

Una coloración de las aristas de una gráfica  $G$  es una función  $f: E(G) \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto discreto, llamado conjunto de colores. Una  $k$ -coloración de las aristas de  $G$  puede ser pensada como una partición  $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  de  $E(G)$ , donde  $E_i$  denota el conjunto (posiblemente vacío) de las aristas que tienen el color  $i$ . Si  $|S| = 2$ , a  $f$  se le llama *2-coloración* o también *bicoloración*.

En este trabajo emplearemos los colores rojo y azul al referirnos a una bicoloración de las aristas de una gráfica  $G$ . A partir de este momento al utilizar el término coloración nos referiremos a una coloración en aristas.

Veamos el Ejemplo 2.1 en términos de coloración de gráficas. Primero construimos una gráfica que modele esta situación. Representemos a cada persona con un vértice y colocamos una arista roja si dos personas se conocen y una arista azul si no se conocen. Notemos que si la persona  $A$  conoce a la persona  $B$  entonces  $B$  también conoce a  $A$ , por lo que es una relación simétrica. Observemos que el teorema de la amistad es equivalente a la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.** *Toda 2-coloración de  $E(K_6)$  produce una subgráfica isomorfa a  $K_3$  monocromática.*

*Demostración.* Dada una 2-coloración de  $E(K_6)$  en que los colores son rojo y azul, sabemos que cada vértice de  $K_6$  es adyacente a otros 5 vértices. Sea  $v \in V(K_6)$ . Por el principio del palomar sabemos que, de las 5 aristas que inciden en  $v$ , necesariamente al menos 3 son rojas o al menos 3 son azules. Sin pérdida de generalidad, supongamos que hay 3 aristas rojas que conectan a  $v$  con los vértices  $w, x, y$ , como podemos ver en la Figura 2.1.

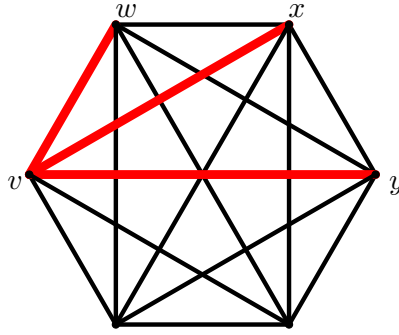


Figura 2.1: Sin pérdida de generalidad, el vértice  $v$  es incidente con tres aristas rojas.

Si las aristas que conectan a  $w$ ,  $x$  y  $y$  son todas azules, entonces la subgráfica inducida por  $w$ ,  $x$ ,  $y$  sería isomorfa a  $K_3$  y de color azul.

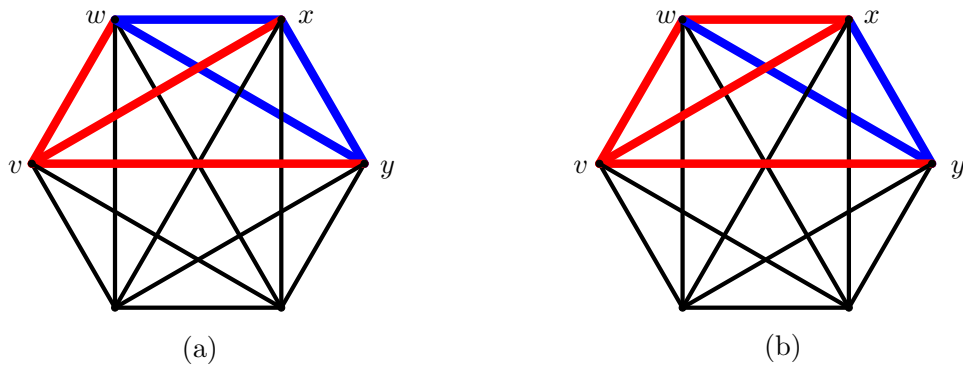


Figura 2.2: (a) Triángulo monocromático de color azul en la gráfica  $K_6$ . (b) Triángulo monocromático de color rojo en la gráfica  $K_6$ .

Entonces supongamos que una de esas aristas es de color rojo. Así, los dos vértices de esta arista estarán conectados a  $v$  por una arista de color rojo. Sin pérdida de generalidad, escojamos la arista  $wx$ , luego, la subgráfica inducida por  $v$ ,  $w$  y  $x$  será isomorfa a  $K_3$  y de color rojo.

Por tanto, tenemos una subgráfica isomorfa a  $K_3$  de color azul o de color rojo.  $\square$

Observemos que lo anterior no se cumple si sólo tenemos 5 vértices.

**Proposición 2.3.** *Existe una 2-coloración de  $E(K_5)$  libre de triángulos monocromáticos.*

*Demostración.* Para demostrar lo anterior damos la 2-coloración de  $K_5$  como se muestra en la Figura 2.3.

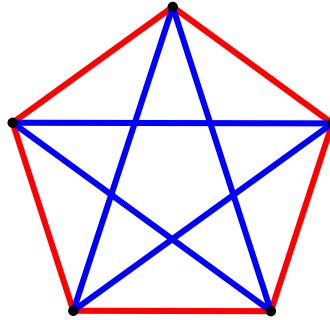


Figura 2.3: Bicoloración de la gráfica  $K_5$  sin triángulos monocromáticos.

Podemos observar que en la coloración anterior no hay subgráficas isomorfas a  $K_3$  monocromáticas de color rojo ni de color azul, con lo cual queda demostrada la proposición.  $\square$

**Corolario 2.4.** *Si  $n \geq 6$  entonces toda 2-coloración de  $E(K_n)$  produce un triángulo monocromático. Además, este resultado es justo.*

*Demostración.* Dado que  $n \geq 6$ ,  $K_n$  tiene una subgráfica isomorfa a  $K_6$  y por la Proposición 2.2 sabemos que contiene un triángulo monocromático. Para  $n \leq 5$ , no es posible garantizar un triángulo monocromático debido a la Proposición 2.3.  $\square$

Existe una generalización del Teorema de Ramsey para un número arbitrario (finito) de colores. En el presente trabajo sólo expondremos el Teorema de Ramsey para dos colores. Antes de pasar al Teorema de Ramsey y su demostración, daremos la definición de número de Ramsey y algunos resultados que nos ayudarán a probar este teorema.

**Definición 2.5** (Número de Ramsey para 2-coloración). *Sean  $k$  y  $l$  dos números enteros positivos. El número de Ramsey  $R(k, l)$  es el mínimo entero positivo tal que, para toda  $n \geq R(k, l)$  y toda 2-coloración de  $K_n$ , esta contiene una  $K_k$  roja o una  $K_l$  azul. Cuando  $k = l$ , los números  $R(k, k)$  son llamados números diagonales de Ramsey.*

**Observación 2.6.** *Notemos que  $R(k, 1) = R(1, l) = 1$  pues como  $K_1$  tiene sólo un vértice, no tiene aristas, por lo que no hay arista que podamos colorear. Así, cualquier*

coloración de  $K_1$  siempre tendrá una subgráfica monocromática azul así como una roja isomorfa a  $K_1$ .

**Teorema 2.7.** *Para todo par de enteros positivos  $k$  y  $l$  se cumple que  $R(k, l) = R(l, k)$ .*

*Demostración.* Consideremos una 2-coloración arbitraria de una gráfica completa  $K_n$ , con  $n \geq R(k, l)$ . Sea  $K'_n$  la gráfica completa inversamente coloreada, es decir, las aristas que estén coloreadas de rojo en  $K_n$  estén coloreadas de azul en  $K'_n$  y viceversa. Esta coloración invertida da una  $K_k$  roja o una  $K_l$  azul en  $K'_n$ . Volviendo a la gráfica original  $K_n$ , tenemos una  $K_l$  roja o una  $K_k$  azul. Por tanto se tiene que  $R(l, k) \leq R(k, l)$ . Por un proceso análogo se tiene que  $R(k, l) \leq R(l, k)$  y se sigue que  $R(k, l) = R(l, k)$ .  $\square$

Ahora analicemos qué pasa cuando  $k = 2$  o  $l = 2$ .

**Lema 2.8.** *Sea  $k$  un entero positivo. Entonces se cumple que  $R(2, k) = R(k, 2) = k$ .*

*Demostración.* Sea  $n \geq k$ , y supongamos que tenemos una bicoloración arbitraria de las aristas de  $K_n$ . Si existe una arista roja tenemos una subgráfica  $K_2$  roja. En caso contrario, si todas las aristas son azules entonces tendremos una subgráfica  $K_k$  azul. Entonces,  $R(k, 2) \leq k$ . Si  $n = k - 1$  y coloreamos todas las aristas de  $K_n$  de color azul no tendremos una  $K_2$  roja ni una  $K_k$  azul. De aquí se tiene que  $R(k, 2) \geq k$  y por tanto,  $R(k, 2) = k$ .  $\square$

El siguiente teorema lo dieron Erdős y Szekeres [12] y Greenwood y Gleason [16].

**Teorema 2.9.** *Sean  $k, l \geq 2$  dos enteros. Si  $R(k, l - 1)$  y  $R(k - 1, l)$  existen, entonces existe  $R(k, l)$  y*

$$R(k, l) \leq R(k, l - 1) + R(k - 1, l).$$

*Demostración.* Supongamos que  $R(k, l - 1)$  y  $R(k - 1, l)$  existen y que tenemos una bicoloración de una gráfica completa  $K_n$  con  $n = R(k, l - 1) + R(k - 1, l)$ . Tomamos un vértice  $v$ , el cual tiene grado  $n - 1 = R(k, l - 1) + R(k - 1, l) - 1$ , por lo que  $v$  tiene al menos  $R(k, l - 1)$  aristas adyacentes de color azul o al menos  $R(k - 1, l)$  aristas adyacentes de color rojo.

En el primer caso, sea  $T$  el conjunto de los extremos de las aristas azules que inciden en  $v$ . Por la definición de  $R(k, l - 1)$ , el conjunto  $T$  tiene una subgráfica  $K_k$  roja o una  $K_{l-1}$  azul. Si sucede la primera posibilidad ya terminamos. Supongamos entonces que

tenemos una  $K_{l-1}$  azul. Como todos los vértices en el conjunto  $T$  son adyacentes a  $v$  mediante aristas azules, lo que implica que, al agregar  $v$ , tenemos una  $K_l$  azul.

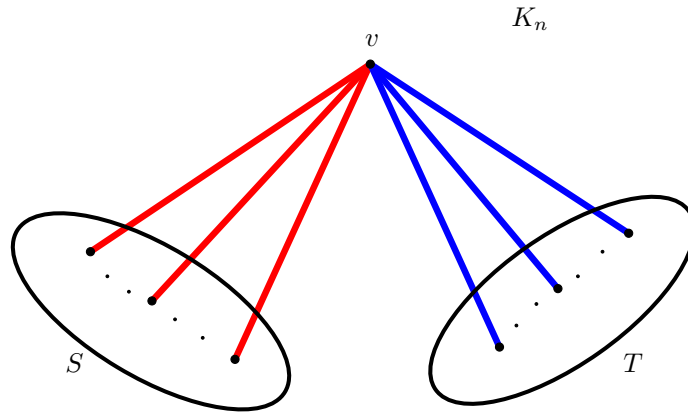


Figura 2.4:  $S$  es el conjunto de las aristas rojas incidentes en  $v$  y  $T$  es el conjunto de las aristas azules incidentes en  $v$ .

En el segundo caso, sea  $S$  el conjunto de los extremos de las aristas rojas que inciden en  $v$ . Por la definición de  $R(k-1, l)$ , el conjunto  $S$  tiene una subgráfica  $K_l$  azul o una  $K_{k-1}$  roja. Si sucede la primera posibilidad ya terminamos. Supongamos entonces que hay una  $K_{k-1}$  roja. Como todos los vértices en el conjunto  $S$  son adyacentes a  $v$  mediante aristas rojas, lo que implica que, al agregar  $v$ , tenemos una  $K_k$  roja.  $\square$

Una vez dados los resultados anteriores, podemos proceder a enunciar el Teorema de Ramsey y dar su demostración.

**Teorema 2.10** (Teorema de Ramsey para dos colores). *Sean  $k, l \in \mathbb{N}$ , tales que  $k, l \geq 2$ . Entonces existe un número entero  $R(k, l)$  tal que si  $n \geq R(k, l)$ , entonces toda bicoloración de las aristas de  $K_n$  contiene una subgráfica  $K_k$  de color rojo o bien una subgráfica  $K_l$  de color azul.*

*Demostración.* Por inducción sobre  $k + l$ . Primero veamos que  $R(k, 2)$  y  $R(2, l)$  existen para todo  $k$  y para todo  $l$ . Después probaremos que si  $R(k, l-1)$  y  $R(k-1, l)$  existen entonces  $R(k, l)$  también existe.

Por el Lema 2.8 sabemos que  $R(k, 2) = k$  y  $R(2, l) = l$  y por el Teorema 2.9 sabemos que  $R(k, l)$  existe si  $R(k, l-1)$  y  $R(k-1, l)$  existen. Con esto queda demostrado el Teorema de Ramsey.  $\square$

## 2.2. Cotas de los números de Ramsey

Determinar los números de Ramsey es en general extremadamente difícil. A lo largo de los años se han obtenido algunas cotas, tanto inferiores como superiores. Las cotas inferiores se pueden obtener de la construcción de ciertas gráficas, llamadas gráficas de Ramsey. Decimos que una gráfica  $G$  es una gráfica  $(k, l)$ -Ramsey si  $G$  no tiene a  $K_k$  como subgráfica ni su complemento contiene a  $K_l$  (véase Figura 2.5).

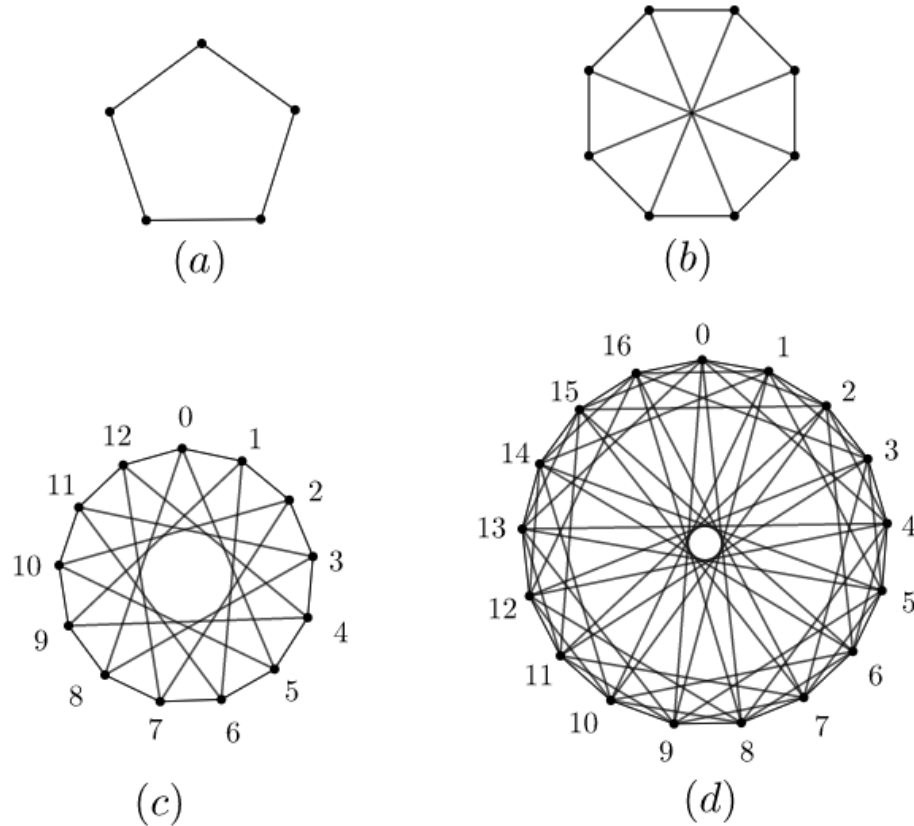


Figura 2.5: (a) Una gráfica  $(3, 3)$ -Ramsey, (b) una gráfica  $(3, 4)$ -Ramsey, (c) una gráfica  $(3, 5)$ -Ramsey, (d) una gráfica  $(4, 4)$ -Ramsey.

La gráfica de la Figura 2.5a no contienen, ni ella ni su complemento, subgráficas isomorfas a  $K_3$ , lo cual implica que

$$R(3, 3) \geq 6. \tag{2.1}$$

La gráfica de la Figura 2.5b es la gráfica de Wagner y no contiene a  $K_3$  como subgráfica



ni su complemento a  $K_4$ . Por tanto,

$$R(3, 4) \geq 9. \quad (2.2)$$

Similarmente la gráfica de la Figura 2.5c muestra que

$$R(3, 5) \geq 14 \quad (2.3)$$

y la Figura 2.5d muestra que

$$R(4, 4) \geq 18. \quad (2.4)$$

El Teorema 2.9 nos ayuda a obtener cotas superiores de los números de Ramsey. Por ejemplo:

Utilizando el Teorema 2.9 y el hecho de que  $R(k, 2) = R(2, k) = k$ , tenemos que

$$R(3, 3) \leq R(3, 2) + R(2, 3) = 3 + 3 = 6.$$

Por lo anterior y por (2.1) obtenemos  $R(3, 3) = 6$ . Como  $R(3, 3) = 6$  y  $R(2, 4) = 4$  son pares, entonces

$$R(3, 4) \leq R(3, 3) + R(2, 4) - 1 = 6 + 4 - 1 = 9.$$

Por tanto, (2.2) implica que  $R(3, 4) = 9$  y así

$$R(3, 5) \leq R(3, 4) + R(2, 5) = 9 + 5 = 14.$$

Utilizando (2.3) tenemos que  $R(3, 5) = 14$ . Por último, tenemos que

$$R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) = 9 + 9 = 18.$$

De esta forma, junto con (2.4), tenemos que  $R(4, 4) = 18$ .

Por la definición de número de Ramsey (Definición 2.5 y por el Teorema de Ramsey (Teorema 2.10), para todo  $k, l \geq 2$  existe una gráfica  $(k, l)$ -Ramsey, la cual tiene  $R(k, l) - 1$  vértices que es  $K_k$ -libre y cuyo complemento es  $K_l$ -libre.

La bicoloración de  $K_n$  se obtiene al colorear de un color (digamos rojo) las aristas de una gráfica  $(k, l)$ -Ramsey y de otro color (azul) las aristas de su complemento. Así

tenemos una  $K_n$  coloreada con rojo y azul de tal forma que no tiene una  $K_k$  roja ni una  $K_l$  azul.

**Definición 2.11.** *Una gráfica  $G$  es  $H$ -libre si  $G$  no contiene a  $H$  como subgráfica. Decimos que una gráfica  $G$  es libre de triángulos si es  $K_3$  libre.*

Todas las gráficas de la Figura 2.5 son gráficas de Ramsey. Se obtiene la gráfica (3, 5)-Ramsey viendo a los trece vértices como elementos del campo de enteros módulo 13, unimos dos vértices si su diferencia es un residuo cúbico de 13, es decir, si es 1, 5, 8 o 12; la gráfica (4, 4)-Ramsey se obtiene viendo a los diecisiete vértices como elementos del campo de enteros módulo 17, y unimos dos vértices, si su diferencia es un residuo cuadrático de 17, esto es, si es 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 o 16. Para  $k = 2, 3$  y 4, las gráficas  $(k, k)$ -Ramsey son autocomplementarias (isomorfas a su complemento).

El siguiente teorema nos da una cota superior para los números de Ramsey.

**Teorema 2.12.** *Para todos los enteros positivos  $k$  y  $l$ ,*

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

*Demostración.* Lo probaremos por inducción sobre  $k+l$ . Mediante  $R(k, 1) = R(1, l) = 1$  y  $R(2, l) = l$ , podemos ver que el teorema se cumple cuando  $k+l \leq 5$ . Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos y asumamos que el teorema es válido para todos los enteros positivos  $k$  y  $l$  tal que  $5 \leq k+l < m+n$ . Entonces, por el Teorema 2.9 y por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} R(m, n) &\leq R(m, n-1) + R(m-1, n) \\ &\leq \binom{m+n-1-2}{m-1} + \binom{m-1+n-2}{m-2} \\ &= \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} \\ &= \binom{m+n-2}{m-1} \end{aligned}$$

Por tanto,  $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$ . De esta forma, el teorema se cumple para toda  $k$  y  $l$ . □

**Corolario 2.13.** Para todo entero positivo  $k$  y  $l$ ,  $R(k, l) \leq 2^{k+l-2}$ . La igualdad se da si y sólo si  $k = l = 1$ .

*Demostración.* Por el Teorema 2.12 sabemos que

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} \quad (2.5)$$

para todo entero positivo  $k$  y  $l$ . Por la suma de coeficientes binomiales tenemos que

$$\sum_{t=0}^m \binom{m}{t} = 2^m. \quad (2.6)$$

Entonces

$$\binom{k+l-2}{k-1} \leq \sum_{t=0}^{k+l-2} \binom{k+l-2}{t} = 2^{k+l-2} \quad (2.7)$$

Por tanto, (2.5) y (2.7) implican que

$$R(k, l) \leq 2^{k+l-2}.$$

Ahora veamos que la igualdad se da si y sólo si  $k = l = 1$ . Por la Observación 2.6 tenemos que  $R(1, 1) = 1$  y además, si  $k = l = 1$ ,  $2^{k+l-2} = 2^{1+1-2} = 2^0 = 1$ . Entonces  $R(1, 1) = 1 = 2^{1+1-2}$ . Por otro lado, si  $R(k, l) = 2^{k+l-2}$  entonces por (2.5) y (2.7) tenemos que

$$R(k, l) = \binom{k+l-2}{k-1} = \sum_{t=0}^{k+l-2} \binom{k+l-2}{t} = 2^{k+l-2}.$$

De esta forma,  $k$  y  $l$  no pueden tomar valores diferentes a 1. Por tanto,  $k = l = 1$ .  $\square$

El Corolario 2.13 muestra, en particular, que los números diagonales de Ramsey crecen a lo más exponencialmente. En el próximo teorema veremos una cota exponencial inferior, dada por Erdős en [11], quien para demostrarlo utilizó una técnica conocida como el método probabilístico. Esta técnica fue introducida y desarrollada por Erdős junto con otros matemáticos húngaros como Paul Turán, de quien hablaremos en el próximo capítulo. Para más información sobre el método probabilista, ver [1].

**Teorema 2.14.** *Para todo entero positivo  $k$ ,*

$$R(k, k) \geq 2^{k/2}.$$

*Demostración.* Sea  $K_n$  una gráfica completa y supongamos que coloreamos, al azar y de manera independiente, cada una de sus aristas de rojo o azul. Notemos que la probabilidad de que una arista esté coloreada de rojo es de 0.5 y la probabilidad de que una arista esté coloreada de azul también es de 0.5. Si elegimos arbitrariamente  $k$  vértices de  $K_n$ , la probabilidad de que estos vértices formen una subgráfica monocromática (ya sea de color rojo o azul) isomorfa a  $K_k$  es de  $2^{1-\binom{k}{2}}$ , pues como  $\binom{k}{2}$  es el número de aristas de  $K_k$ , entonces la probabilidad de tener una  $K_k$  roja (o azul) es de

$$\underbrace{0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \dots \cdot 0.5}_{\binom{k}{2}} = 0.5^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Si esto lo multiplicamos por las 2 formas posibles en que puede ser monocromático (rojo o azul), nos da  $2^{1-\binom{k}{2}}$ .

Observemos que el número total de gráficas isomorfas a  $K_k$  en  $K_n$  es de  $\binom{n}{k}$ . Así, la probabilidad total de que exista una  $K_k$  monocromática en  $K_n$  es  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$ . Si esta probabilidad es menos de 1, quiere decir que existe alguna coloración de  $K_n$  sin  $K_k$ 's monocromáticas. De esta forma,  $R(k, k) > n$ . Usando lo anterior procederemos a demostrar el teorema para  $n \geq 3$ . Notemos que

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < \frac{n^k}{k!} \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}},$$

pues  $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) < n^k$  y  $2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}}$ . Ahora,

$$\binom{\frac{k}{2}}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{(2^{\frac{k}{2}})^k}{k!} \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}} = \frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!} \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}} = \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1.$$

Concluimos que  $\frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1$  observando que  $2^{1+\frac{k}{2}} < k!$  para  $k \geq 3$ . De esta manera, existe una 2-coloración de  $K_n$  que no tiene  $K_k$ 's monocromáticas y por tanto  $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$ .

Observemos que si  $k = 2$  se tiene

$$R(2, 2) \geq 2^{\frac{2}{2}} = 2 \tag{2.8}$$

lo cual es cierto, pues por el Lema 2.8 sabemos que  $R(k, 2) = k$ , por lo que  $R(2, 2) = 2$ .  $\square$

El Corolario 2.13 nos dice que existe una  $R(k, k)$ -gráfica de Ramsey. Sin embargo, no nos dice cómo construirla o cómo encontrarla.

		<i>l</i>								
<i>R(k,l)</i>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<b>2</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>3</b>	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40 42
<b>4</b>	1	4	9	18	25	36 41	49 61	58 84	73 115	92 149
<i>k</i> <b>5</b>	1	5	14	25	43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 412
<b>6</b>	1	6	18	36 41	58 87	102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171
<b>7</b>	1	7	23	49 61	80 143	113 298	205 540	217 1031	241 1713	289 2826
<b>8</b>	1	8	28	58 84	101 216	132 495	217 1031	282 1870	317 3583	6090
<b>9</b>	1	9	36	73 115	126 316	169 780	241 1713	317 3583	565 6588	581 12677
<b>10</b>	1	10	40 42	92 149	144 412	179 1171	289 2826	6090	581 12677	798 23556

En la actualidad se conocen algunos de los números de Ramsey y de otros sólo se conocen cotas superiores e inferiores. En la tabla anterior se muestran los números de Ramsey  $R(k, l)$  con  $k, l \leq 10$ . Notemos que algunos de ellos tienen dos valores, el valor de arriba representa la cota inferior y el valor de abajo la cota superior.

# Capítulo 3

## Teoría Extremal de Gráficas

La Teoría Extremal de Gráficas estudia, como su nombre lo dice, casos extremos o límites que pueden darse en gráficas con ciertas propiedades, ya sea respecto al orden, tamaño, etc. Se puede decir también que estudia cómo las propiedades globales de una gráfica influyen en las subestructuras locales de dicha gráfica. Por ejemplo, una pregunta simple de la Teoría Extremal de Gráficas es: ¿A partir de qué número de aristas de una gráfica con  $n$  vértices podemos garantizar la existencia de un ciclo? Es sencillo darse cuenta que, si dicha gráfica tiene al menos  $n$  aristas, forzosamente existirá un ciclo. Las gráficas extremales respecto a esta propiedad son los árboles: son aquellas gráficas acíclicas con el máximo número de aristas (con  $n - 1$  aristas).

Se considera que esta teoría comenzó en 1941 cuando Paul Turán, matemático húngaro que se dedicó principalmente a la Teoría de Números, a la Teoría de Gráficas y al Análisis y que colaboró por mucho tiempo con Erdős, determinó las gráficas de orden  $n$  que no contienen una subgráfica completa  $K_k$  y que son extremales respecto a su tamaño (con tantas aristas como sea posible) [26].

La teoría presentada en este capítulo puede consultarse en [4] y [5].

### 3.1. Teorema de Mantel

Antes de ver a más detalle el Teorema de Turán [26], presentaremos el Teorema de Mantel, el cual fue probado por Mantel en 1907 [21] y es un caso especial ( $k = 3$ ) del Teorema de Turán. En este capítulo también abordaremos el Teorema de Kővari-Sós-

Turán [4], así como el problema de Zarankiewicz [19], los cuales serán necesarios para este trabajo de tesis.

**Teorema 3.1.** *Toda gráfica simple  $G$  contiene una subgráfica bipartita con al menos  $e(G)/2$  aristas.*

*Demostración.* Sea  $X \cup Y$  la bipartición de los vértices de  $G$  que contiene el mayor número de aristas entre  $X$  y  $Y$ . Sea  $H$  la subgráfica bipartita inducida por las aristas entre  $X$  y  $Y$ . Supongamos que existe un vértice  $v$  en  $X$  tal que  $d_H(v) < \frac{d_G(v)}{2}$ . Consideremos ahora la subgráfica bipartita  $H'$  inducida por el conjunto de aristas entre  $X \setminus \{v\}$  y  $Y \cup \{v\}$ . Tenemos aquí que  $e(H') = e(H) - d_H(v) + (d_G(v) - d_H(v)) = e(H) + d_G(v) - 2d_H(v) > e(H)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $d_H(v) \geq d_G(v)/2$  para todos los vértices en  $X$ , lo cual implica que  $e(H) = \sum_{v \in X} d_H(v) \geq \sum_{v \in X} d_G(v)/2 = e(G)/2$ .  $\square$

Preliminar al teorema más general de Turán, Mantel consideró gráficas libres de triángulos y determinó el máximo número posible de aristas, así como las gráficas libres de triángulos con el mayor número de aristas.

**Teorema 3.2** (Teorema de Mantel). *Toda gráfica de orden  $n$  y tamaño mayor a  $\lfloor n^2/4 \rfloor$  contiene un triángulo.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica simple libre de triángulos con  $n$  vértices. Entonces  $N(x) \cap N(y) = \emptyset$  para cada arista  $xy \in E(G)$ . Así tenemos que  $d(x) + d(y) \leq n$ .

Sumando estas desigualdades para todas las aristas tenemos que

$$\sum_{x \in G} d(x)^2 \leq ne(G). \quad (3.1)$$

Entonces por (1.1) y por la desigualdad de Cauchy tenemos que

$$(2e(G))^2 = \left( \sum_{x \in G} d(x) \right)^2 \leq n \left( \sum_{x \in G} d(x)^2 \right).$$

Por (3.1) tenemos que

$$(2e(G))^2 \leq n^2 e(G).$$

Y por tanto  $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$ .  $\square$

## 3.2. El Teorema de Turán

Procederemos ahora a generalizar el teorema de Mantel determinando el máximo número de aristas que un gráfica simple con  $n$  vértices puede tener sin que contenga una subgráfica completa de cierto orden.

Si  $F$  es una gráfica simple, denotamos por  $\text{ex}(n, F)$  al *número de Turán* que es el máximo número de aristas en una gráfica  $G$  con  $n$  vértices que no contiene una copia de  $F$ . Tal gráfica  $G$  se llama una *gráfica extremal  $F$ -libre* y el conjunto de las gráficas extremales  $F$ -libres se denota con  $\text{Ex}(n, F)$ .

Notemos que en el Teorema 3.2, si  $e(G) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , todas las desigualdades se vuelven igualdades. En particular, tendremos que  $d(x)+d(y) = n$  para cualquier arista  $xy \in E(G)$ . De esta forma tenemos que  $N(x) \cup N(y) = V(G)$ . Como mencionamos anteriormente,  $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ , esto implica que  $G$  es bipartita. La única gráfica bipartita con  $n$  vértices y  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  aristas es  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ . Así,  $\text{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ .

La demostración que daremos del Teorema de Turán fue dada por Zykov en 1949 [29]. Antes de pasar al teorema diremos lo que es una gráfica  $k$ -partita y  $k$ -partita completa para poder definir lo que es una gráfica de Turán.

Una *gráfica  $k$ -partita* es aquella cuyos vértices se pueden partir en  $k$  subconjuntos de tal forma que ninguna arista tiene sus dos extremos en el mismo subconjunto o parte.

Una gráfica  $k$ -partita es *completa* si cualesquiera dos vértices en diferentes partes son adyacentes. Una gráfica  $k$ -partita completa con  $n$  vértices cuyas partes son del mismo o casi del mismo tamaño (esto es,  $\lfloor n/k \rfloor$  o  $\lceil n/k \rceil$ ) es llamada *gráfica de Turán* y es denotada con  $T_{k,n}$ .

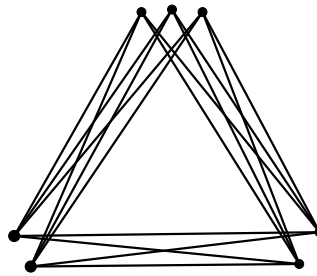


Figura 3.1: Gráfica de Turán  $T_{3,7}$

Ahora veamos cuántas aristas tienen este tipo de gráficas. Sea  $G$  una gráfica con



$n$  vértices, y dividimos este conjunto en  $k$  conjuntos disjuntos. Si  $p = \lfloor n/k \rfloor$  se obtiene cuando se divide  $n$  entre  $k$ , entonces por el algoritmo de la división tenemos que  $n = pk+r$ , donde  $0 \leq r < k$ . Por tanto,  $T_{k,n}$  tiene  $r$  partes con  $p+1$  vértices y  $k-r$  partes con  $p$  vértices. Así, el número de aristas de  $T_{k,n}$  es

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} - r \binom{p+1}{2} - (k-r) \binom{p}{2} &= \frac{n(n-1) - rp(p+1) - (k-r)p(p-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - rp^2 - rp - [(k-r)(p^2 - p)]}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como mencionamos anteriormente,  $n = pk + r$ . Sustituimos  $n$  en (3.2) y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - n - rp^2 - rp - [(k-r)(p^2 - p)]}{2} &= \frac{(pk+r)^2 - pk - r - rp^2 - rp - [kp^2 - kp - rp^2 + rp]}{2} \\ &= \frac{(pk+r)^2 - pk - r - rp^2 - rp - kp^2 + kp + rp^2 - rp}{2} \\ &= \frac{(pk+r)^2 - r - 2rp - kp^2}{2} \\ &= \frac{p^2k^2 + 2pkr + r^2 - r - 2rp - kp^2}{2} \\ &= \frac{(k-1)(p^2k + 2pr)}{2} + \binom{r}{2} \\ &= \frac{(k-1)(p^2k^2 + 2pkr)}{2k} + \binom{r}{2} \\ &= \frac{(k-1)(n^2 - r^2)}{2k} + \binom{r}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$e(T_{k,n}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$

**Teorema 3.3** (Teorema de Turán). *Sea  $G$  una gráfica simple que no contiene una subgráfica  $K_k$ , donde  $k \geq 2$ . Entonces  $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$ . La igualdad se da si y sólo si  $G \cong T_{k-1,n}$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ . Primero veamos que el teorema se cumple para  $k = 2$ . Si  $G$  es una gráfica simple que no contiene a  $K_2$ , entonces  $G$  no tiene ninguna arista y por tanto  $e(G) \leq e(T_{1,n})$ .

Ahora asumamos que el teorema se cumple para todos los valores menores a  $k$  y supongamos que  $G$  es una gráfica simple que no contiene a  $K_k$ . Escogemos un vértice  $x$  con grado  $\Delta = \Delta(G)$  en  $G$ . Sean  $X := N(x)$  y  $Y := V \setminus X$ . Obsérvese que

$$e(G) = e(X) + e(X, Y) + e(Y).$$

Como  $G$  no contiene a  $K_k$ , entonces  $G[X]$  no contiene a  $K_{k-1}$ . Por tanto, por la hipótesis de inducción,

$$e(X) \leq e(T_{k-2, \Delta}),$$

con igualdad si y sólo si  $G[X] \cong T_{k-2, \Delta}$ . Por otro lado, cada vértice en  $Y$  es incidente a, a lo más, todos los vértices de  $X$ , por lo que

$$e(X, Y) \leq \Delta(n - \Delta),$$

con igualdad si y sólo si  $Y$  es un conjunto independiente en el que todos sus vértices tienen grado  $\Delta$ . Por tanto,  $e(G) \leq e(H)$  donde  $H$  es la gráfica obtenida de una copia de  $T_{k-2, \Delta}$  añadiendo un conjunto independiente de  $(n - \Delta)$  vértices y uniendo cada vértice de este conjunto a cada vértice de  $T_{k-2, \Delta}$ . Observemos que  $H$  es una gráfica  $(k - 1)$ -partita completa con  $n$  vértices. Como la gráfica de Turán tiene más aristas que cualquier gráfica  $k$ -partita completa tenemos que  $e(H) \leq e(T_{k-1, n})$  con igualdad si y sólo si  $H \cong T_{k-1, n}$  esto implica que  $e(G) \leq e(T_{k-1, n})$  con igualdad si y sólo si  $G \cong T_{k-1, n}$ .  $\square$

Hay muchas demostraciones del Teorema de Turán. En la que acabamos de ver se infiere que, si  $G$  es una gráfica con  $n$  vértices y con más de  $e(T_{k, n})$  aristas, y si  $v$  es un vértice de grado máximo en  $G$ , entonces la subgráfica  $G[N(v)]$  inducida por los vecinos de  $G$  tiene más de  $t_{k-2}(\Delta)$  aristas o  $G[V(G) \setminus N(v)]$  tiene al menos una arista.

### 3.3. Número de Turán para trayectorias

En la sección anterior determinamos el número de Turán para una gráfica completa, ahora lo daremos para trayectorias.

Para las trayectorias Erdős y Gallai [13] dieron la siguiente cota.

**Teorema 3.4.** *Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  sin trayectorias de longitud  $k$  y con  $n > k \geq 1$ . Entonces*

$$e(G) \leq \frac{k-1}{2}n.$$

*Demostración.* Consideremos una gráfica  $G$  con  $n$  vértices y más de  $\frac{1}{2}(k-1)n$  aristas. Si  $G$  tiene un vértice con grado menor a  $\frac{1}{2}(k-1)$ , podemos quitarlo y encontrar una gráfica con  $n-1$  vértices y que tenga más de  $\frac{1}{2}(k-1)(n-1)$  aristas. Procediendo de esta manera, podemos encontrar una subgráfica no vacía  $H$  con  $n'$  vértices y que tenga más de  $\frac{1}{2}(k-1)n'$  aristas y con grado mínimo de al menos  $\frac{1}{2}(k-1)$ . Además, podemos suponer que  $H$  es conexa, pues si no lo es, nos podemos restringir a la componente conexa con la mayor proporción de aristas sobre vértices y llamar a ésta  $H$ .

Mostraremos que podemos encontrar una trayectoria de longitud  $k$  en  $H$ . Tomemos una trayectoria de longitud máxima en  $H$ . Sea  $v_0, \dots, v_l$  dicha trayectoria. Supongamos que  $l \leq k-1$ . Todos los vecinos de  $v_0$  y  $v_l$  están en la trayectoria. Consideremos dos casos, dependiendo si  $v_0$  es adyacente a  $v_l$  o no.

Primero supongamos que  $v_0$  es adyacente a  $v_l$ . Entonces  $v_0 \dots v_l$  es un ciclo, y por tanto,  $v_i v_{i+1} \dots v_l v_0$  también es una trayectoria de longitud máxima en  $H$  y así todos los vecinos de  $v_i$  están en la trayectoria, para cualquier  $i$ . Finalmente, como  $H$  es conexa,  $V(H) = \{v_0, \dots, v_l\}$  y  $e(G) = \binom{l+1}{2} \leq \frac{k-1}{2}n'$ , lo que es una contradicción.

Ahora supongamos que  $v_0$  no es adyacente a  $v_l$ . Como el grado mínimo es al menos  $\frac{1}{2}(k-1)$ , entonces existe una  $i$  tal que  $v_0$  es adyacente a  $v_{i+1}$  y  $v_i$  es adyacente a  $v_l$  por el principio del palomar. Por tanto,  $v_0 \dots v_i v_l v_{l-1} \dots v_{i+1} v_0$  es un ciclo en  $H$  por lo que podemos usar el caso anterior.  $\square$

Entonces podemos asumir que  $l \geq k$ , con lo cual hemos probado que existe una trayectoria de longitud al menos  $k$ . En conclusión, si  $G$  no tiene trayectorias de longitud  $k$ , entonces  $e(G) \leq \frac{(k-1)n}{2}$ .

### 3.4. El Problema de Zarankiewicz y el Teorema de Kővari-Sós-Turán

El Problema de Zarankiewicz [19] pregunta cuál es el mayor número posible de aristas en una gráfica bipartita  $G$  con  $V(G) = V_1 \cup V_2$  tal que  $V_1$  tiene  $m$  vértices y  $V_2$  tiene  $n$  vértices, de modo que  $G$  no contenga una subgráfica bipartita completa  $K_{s,t}$ . A esto se le conoce como el *número de Zarankiewicz* y lo denotamos con  $z(m, n; s, t)$ . El siguiente lema nos da una desigualdad que servirá para dar la cota superior para  $z(m, n; s, t)$  del Teorema de Kővari-Sós-Turán [4].

Antes de pasar al lema diremos lo que es un coeficiente binomial. Los coeficientes binomiales indican la cantidad de modos en que se pueden extraer subconjuntos a partir de un conjunto dado. Así, el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  es el número de subconjuntos de  $k$  elementos escogidos de un conjunto con  $n$  elementos, donde  $0 \leq k \leq n$ . De esta forma,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si extendemos esta definición reemplazando  $n$  por un número arbitrario  $\alpha$  (negativo, real, complejo) se tiene lo siguiente

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \text{ arbitrario.}$$

**Lema 3.5.** *Sean  $m, n, s, t, k, r$  enteros no negativos, tal que  $2 \leq s \leq m, 2 \leq t \leq n, 0 \leq r < m$ , y sea  $G$  una gráfica bipartita con  $V(G) = V_1 \cup V_2$  tal que  $V_1$  tiene  $m$  vértices,  $V_2$  tiene  $n$  vértices y  $G$  tiene tamaño  $my = km + r$  y no contiene una subgráfica  $K_{s,t}$ , donde  $y$  es un número racional positivo. Entonces*

$$m \binom{y}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}.$$

*Demostración.* Decimos que un  $t$ -conjunto (que tiene  $t$  elementos)  $T$  de  $V_2$  es cubierto por un vértice  $v \in V_1$  si  $v$  es adyacente con cada vértice de  $T$ . La cantidad de  $t$ -conjuntos cubiertos por un vértice  $v \in V_1$  es  $\binom{d(v)}{t}$ . Puesto que  $G$  no contiene a  $K_{s,t}$ , entonces cada  $t$ -conjunto en  $V_2$  está cubierto por a lo más  $s-1$  vértices de  $V_1$  y por tanto

$$\sum_{v \in V_1} \binom{d(v)}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}. \quad (3.3)$$

Sea  $f(x) = \binom{x}{t}$ , la cual es una función convexa. Por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$f\left(\frac{\sum_{v \in V_1} d(v)}{|V_1|}\right) \leq \frac{1}{|V_1|} \sum_{v \in V_1} f(d(v)).$$

Como  $\sum_{v \in V_1} d(v) = my$  y  $|V_1| = m$ , y por la desigualdad anterior, se tiene que

$$\frac{m \binom{y}{t}}{m} \leq \frac{1}{m} \sum_{v \in V_1} \binom{d(v)}{t}.$$

Por tanto,

$$m \binom{y}{t} \leq \sum_{v \in V_1} \binom{d(v)}{t}. \quad (3.4)$$

Entonces por (3.3) y (3.4) se concluye que

$$m \binom{y}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}.$$

□

El siguiente resultado se conoce como el Teorema de Kóvari-Sós-Turán.

**Teorema 3.6.** *Para números naturales  $m, n, s, y, t$ , tales que  $m \geq s \geq 2$  y  $n \geq t \geq 2$ , se tiene que*

$$z(m, n; s, t) \leq (s-1)^{1/t} (n-t+1) m^{1-1/t} + (t-1)m.$$

*Demostración.* Sea  $G$  con  $V(G) = V_1 \cup V_2$  una gráfica extremal para la función  $z(m, n; s, t)$ . Sea  $y$  un número real tal que  $z(m, n; s, t) = my$ . Claramente,  $y \leq n$ , pues  $z(m, n; s, t) \leq e(K_{m,n}) = mn$ .

Por el Lema 3.5 sabemos que  $m \binom{y}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}$ , por lo que

$$\frac{m}{s-1} \leq \binom{n}{t} \binom{y}{t}^{-1} = \frac{n!}{t!(n-t)!} \frac{t!}{y(y-1)\dots(y-t+1)} = \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{y(y-1)\dots(y-t+1)}. \quad (3.5)$$

Sabemos que para cualesquiera números reales positivos  $a, b, x$  tales que  $a, b > x$ ,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a-x}{b-x} \quad \text{si y sólo si} \quad a \geq b.$$

En este caso, como  $n \geq y$ , tenemos que  $\frac{n}{y} \leq \frac{n-(t-1)}{y-(t-1)}$ . De igual forma, como  $n-1 \geq y-1$ , entonces  $\frac{n-1}{y-1} \geq \frac{n-1-(t-2)}{y-1-(t-2)} = \frac{n-t+1}{n-t+1}$ . De esta manera, proseguimos con cada factor y nos queda lo siguiente:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{y(y-1)\dots(y-t+1)} \leq \frac{(n-t+1)^t}{(y-t+1)^t}. \quad (3.6)$$

Así, por (3.5) y (3.6) tenemos que

$$(y-t+1)^t \leq (s-1)(n-t+1)^t m^{-1}$$

Elevamos todo a  $-1/t$  y tenemos

$$y-t+1 \leq (s-1)^{1/t} (n-t+1) m^{-1/t}.$$

Despejamos  $y$  y multiplicamos ambos lados por  $m$ :

$$my \leq (s-1)^{1/t} (n-t+1) m^{1-1/t} + (t-1)m.$$

Por tanto,

$$z(m, n; s, t) \leq (s-1)^{1/t} (n-t+1) m^{1-1/t} + (t-1)m. \quad (3.7)$$

□

El Teorema 3.6 nos da una cota superior para  $ex(n, K_{s,t})$ , el máximo número de aristas en una gráfica de orden  $n$  sin una subgráfica bipartita completa  $K_{s,t}$ .

**Teorema 3.7.** Sean  $n, s, t$ , enteros tales que  $n \geq s + t$  y  $t \leq 2$ . Entonces

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(s-1)^{1/t}n^{2-1/t} + \frac{1}{2}(t-1)n.$$

*Demostración.* Dada  $G$  una gráfica con  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , construimos una gráfica bipartita  $H$  de la siguiente manera. Tomamos dos copias disjuntas de  $V(G)$ . Sean  $V_1 = \{v'_1, \dots, v'_n\}$  y  $V_2 = \{v''_1, \dots, v''_n\}$  dichas copias. La gráfica  $H$  tiene bipartición  $(V_1, V_2)$  y  $v'_i v''_j \in E(H)$  si y sólo si  $v_i v_j \in E(G)$ . De esta forma,  $e(H) = 2e(G)$ ; de hecho,  $d_G(v_i) = d_H(v'_i) = d_H(v''_i)$  para cada  $i$ . Por tanto, Si  $K_{s,t} \not\subset G$ , entonces  $K_{s,t} \not\subset H$  y así  $z(n, n; s, t) \geq 2\text{ex}(n, K_{s,t})$ .  $\square$

Observemos que del Teorema 3.6 tenemos que para un entero positivo  $t$  dado, el máximo número de aristas en una gráfica bipartita con  $n$  vértices en cada parte, que no contiene a  $K_{t,t}$  es

$$z(n, n; t, t) \leq (t-1)^{1/t}n^{2-1/t} + (t-1)n.$$

Y por el Teorema 3.7 tenemos

$$\text{ex}(n, K_{t,t}) \leq \frac{1}{2}(t-1)^{1/t}n^{2-1/t} + \frac{1}{2}(t-1)n.$$

En el siguiente capítulo veremos algunos problemas tipo Ramsey-Turán en donde utilizaremos lo anterior para demostrar algunos resultados.

# Capítulo 4

## Variantes de problemas tipo Ramsey-Turán

Como vimos anteriormente, el Teorema de Ramsey nos garantiza que, dada una gráfica  $G$  y  $n$  suficientemente grande, existe una copia de  $G$  monocromática en cualquier 2-coloración de una gráfica completa  $K_n$  sin ninguna restricción en la coloración. Para forzar la existencia de gráficas con otros patrones (en cuanto a coloración) no basta pedir que la  $n$  sea suficientemente grande, también requerimos que haya una mínima cantidad de aristas de cada color. Para este trabajo de tesis consideraremos los patrones de una gráfica que tengan el mismo (o casi el mismo) número de aristas de cada color.

En este capítulo daremos una nueva demostración de una conjetura propuesta por Bollobás sobre patrones inevitables en 2-coloraciones de la gráfica completa. La primera demostración de esta conjetura la dieron Cutler y Montágh [10] utilizando métodos probabilísticos. La demostración que daremos en esta tesis es de Caro, Montejano y Hansberg [9], en la cual se emplea el Teorema de Ramsey, los números de Turán y los números de Zarankiewicz.

También veremos lo que son las gráficas balanceables y las gráficas omnitonaes.

Para las definiciones y resultados dados en este capítulo nos basamos principalmente en [9].



## 4.1. Gráficas balanceables

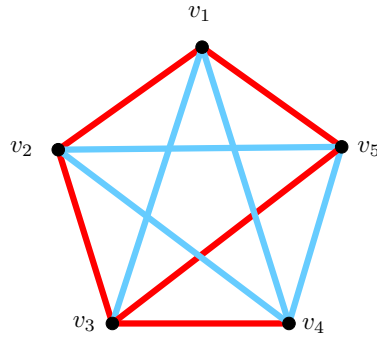
Como mencionamos anteriormente, en esta tesis vamos a trabajar con 2-coloraciones de aristas de la gráfica completa, es decir, con funciones  $f : E(K_n) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  en donde a cada arista se le asigna ya sea el color rojo o el color azul. Toda 2-coloración de las aristas de  $K_n$  induce una bipartición de las aristas acorde a su color. Para sintetizar, de ahora en adelante daremos las coloraciones a través de la bipartición de las aristas y pondremos  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$ , donde  $R$  es la gráfica inducida por las aristas rojas y  $A$  la gráfica inducida por las aristas azules. Una subgráfica  $G$  de una gráfica completa  $K_n$  con tal coloración la llamaremos  $(r, a)$ -coloreada si tiene  $r$  aristas de color rojo y  $a$  aristas de color azul con  $r + a = e(G)$ , donde  $e(G)$  es la cantidad de aristas de  $G$ .

**Definición 4.1.** *Sea  $G$  una gráfica y  $r$  un entero tal que  $0 < r \leq \lfloor e(G)/2 \rfloor$ . Sea  $\text{bal}_r(n, G)$  el mínimo entero, si existe, tal que cada 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} > \text{bal}_r(n, G)$ , contiene una copia de  $G$   $(r, e(G) - r)$ -coloreada o  $(e(G) - r, r)$ -coloreada. Si  $\text{bal}_r(n, G)$  existe para toda  $n$  suficientemente grande, decimos que  $G$  es  $r$ -tonal. Si  $r = e(G)/2$ ,  $\text{bal}(n, G)$  es el mínimo entero, si existe, tal que, para  $n$  suficientemente grande, cualquier 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} > \text{bal}(n, G)$  contiene una copia balanceada de  $G$ .*

Dada una gráfica  $G$ , decimos que una 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  contiene una copia *balanceada* de  $G$  si en la gráfica  $K_n$  coloreada, podemos encontrar una copia  $(e(G)/2, e(G)/2)$ -coloreada de  $G$  en el caso en que  $e(G) \equiv 0 \pmod{2}$ , y una copia  $(\lceil e(G)/2 \rceil, \lfloor e(G)/2 \rfloor)$ -coloreada de  $G$  o una copia  $(\lfloor e(G)/2 \rfloor, \lceil e(G)/2 \rceil)$ -coloreada de  $G$  si  $e(G) \equiv 1 \pmod{2}$ . También decimos que una 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  es balanceada si  $|e(R) - e(A)| \leq 1$ .

**Definición 4.2.** *Si  $\text{bal}(n, G)$  existe para  $n$  suficientemente grande, decimos que  $G$  es balanceable. Para una gráfica balanceable  $G$ , sea  $\text{Bal}(n, G)$  la familia de gráficas con exactamente  $\text{bal}(n, G)$  aristas tal que una coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} = \text{bal}(n, G)$  no contiene una copia balanceada de  $G$  si y sólo si  $R$  o  $A$  es isomorfa a alguna  $H \in \text{Bal}(n, G)$ .*

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea  $G = K_4$  y  $n = 5$  y consideremos la siguiente coloración.



Podemos ver que hay 5 aristas de color rojo y 5 aristas de color azul. Notemos que la gráfica inducida por los vértices  $v_2, v_3, v_4, v_5$  es la gráfica  $K_4$ , la cual tiene 3 aristas rojas y 3 aristas azules, por tanto, esta coloración de  $K_5$  contiene una copia balanceada de  $K_4$ .

Obsérvese que, para probar que una gráfica  $G$  no es balanceable es suficiente exhibir una infinidad de valores de  $n$  para los cuales existe una 2-coloración balanceada de  $K_n$  que no contiene una copia balanceada de  $G$ .

Hay muchas gráficas balanceables. Sin embargo, además de  $K_4$ , no hay otras gráficas completas con un número par de aristas (es decir, tal que  $n \equiv 0$  o  $n \equiv 1$  (mód 4)) tal que sean balanceables, como se ha probado en [7].

**Teorema 4.3.**

- (i) Para todo número entero positivo  $m \geq 2$ ,  $m \neq 4$ ,  $m \equiv 0, 1$  (mód 4), la gráfica completa  $K_m$  no es balanceable.
- (ii) La gráfica completa  $K_4$  es balanceable con  $bal(n, K_4) = n$ , si  $n \equiv 0$  (mód 4) y  $bal(n, K_4) = n - 1$  de otro modo. Además  $Bal(n, K_4) = \{H\}$  con  $H = J \cup \bigcup_{i=1}^q C_4$ , donde  $J \in \{\emptyset, K_1, K_2, P_2\}$ , dependiendo del residuo de  $n$  (mód 4) y,  $q = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ .

Así, el Teorema 4.3 determina cuáles gráficas completas con una cantidad par de aristas son balanceables y cuáles no. Para mostrar que  $K_m$  no es balanceable para  $m \equiv 0, 1$  (mód 4) se muestra en [7] que existen una infinidad de valores de  $n$  para los cuales hay una coloración balanceada de  $E(K_n)$  sin una copia balanceada de  $K_m$ .

## 4.2. Gráficas omnitonales

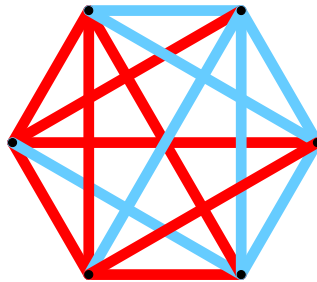
Como veremos a continuación, las gráficas omnitonales son aquellas que aparecen en todas las posibles variaciones de tonos de los colores rojo y azul en una 2-coloración de una gráfica completa siempre que  $n$  sea lo suficientemente grande.

**Definición 4.4.** *Dada una gráfica  $G$ , decimos que una 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  contiene a la gráfica  $G$  en todos los tonos si, para todo par de enteros  $r$  y  $a$  tales que  $r \geq 0$ ,  $a \geq 0$  y  $r + a = e(G)$ , esta 2-coloración contiene una copia  $(r, a)$ -coloreada de  $G$ .*

Si contiene a la gráfica  $G$  en todos los tonos, contiene, en particular, copias monocromáticas de  $G$  en ambos colores (rojo y azul) y también una copia balanceada de  $G$ .

**Definición 4.5.** *Dada una gráfica  $G$ , sea  $ot(n, G)$  el mínimo entero, si existe, tal que cualquier 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} > ot(n, G)$  contiene una copia  $(r, a)$ -coloreada de  $G$  para cualquier par de enteros  $r \geq 0$  y  $a \geq 0$  tal que  $r + a = e(G)$ . Si  $ot(n, G)$  existe para cada  $n$  suficientemente grande, decimos que  $G$  es omnitonal. Para una gráfica omnitonal  $G$ , sea  $Ot(n, G)$  la familia de las gráficas con exactamente  $ot(n, G)$  aristas tal que una coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} = ot(n, G)$  no contiene una copia  $(r, a)$ -coloreada de  $G$  para algún par  $r, a \geq 0$  con  $r + a = e(G)$  si y sólo si  $R$  o  $A$  es isomorfo a alguna  $H \in Ot(n, G)$ .*

Consideremos la siguiente coloración de la gráfica  $K_6$ .



Veamos que la trayectoria  $P_4$  aparece de forma omnitonal. Observemos que tenemos casi la misma cantidad de aristas rojas que de aristas azules. Procedemos a verificar que  $P_4$  se encuentre en todos los tonos.

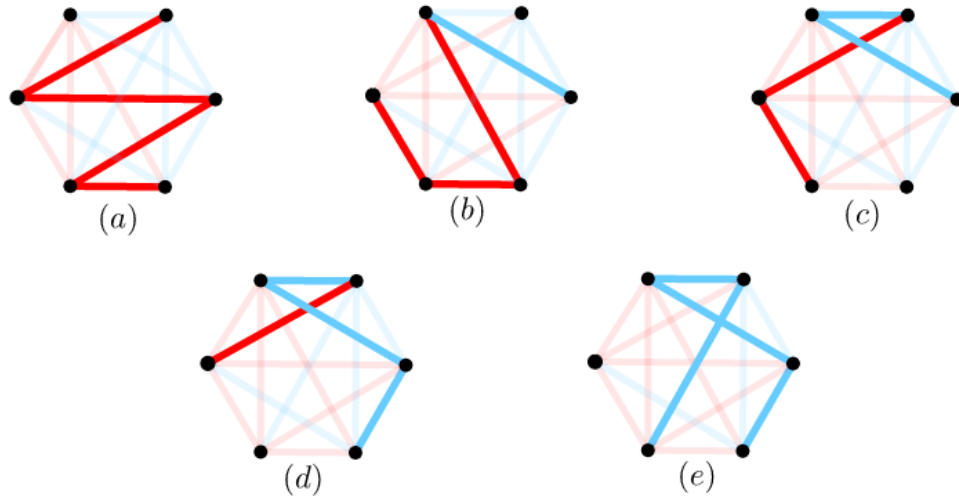


Figura 4.1:  $P_4$  en todos los tonos en  $K_6$

Podemos ver que en la Figura 4.1a está la trayectoria  $P_4$  con todas sus aristas rojas, es decir,  $r = 4$  y  $a = 0$ . En la Figura 4.1b tenemos que  $r = 3$  y  $a = 1$ . En la Figura 4.1c,  $r = 2$  y  $a = 2$ . En la Figura 4.1d,  $r = 1$  y  $a = 3$  y en la última todas sus aristas son de color azul, es decir,  $r = 0$  y  $a = 4$ .

Como sucede con las gráficas balanceables, para probar que una gráfica  $G$  no es omnitonal, es suficiente dar una infinidad de valores de  $n$  para los cuales exista una 2-coloración balanceada de  $K_n$  que no tenga una copia  $(r, a)$ -coloreada de  $G$  para algún  $r, a > 0$  tal que  $r + a = e(G)$ . Además observemos que, si una gráfica  $G$  es omnitonal, entonces también es balanceable pero no necesariamente se cumple el recíproco.

En el capítulo siguiente introduciremos una familia de gráficas llamadas amebas, las cuales, tienen un buen comportamiento en cuanto a las propiedades de ser balanceables u omnitonaes. Efectivamente, como se demostró en [9] y como veremos en el capítulo siguiente, toda amoeba es balanceable y toda amoeba bipartita es omnitonal (Teorema 5.7 y 5.6). En particular mostraremos que  $P_k$  es amoeba con

$$\text{ot}(n, P_k) = \text{ex}(n, P_k) \leq \left( \frac{k-1}{2} \right) n.$$

### 4.3. Patrones inevitables en 2-coloraciones de las aristas de $K_n$

Como mencionamos al inicio de este capítulo, el teorema que veremos a continuación es una nueva demostración de una conjetura de Bollobás sobre la existencia de patrones inevitables en 2-coloraciones de la gráfica completa, la cual fue confirmada en ese mismo año (2008) por Cutler y Montágh [10]. Esta conjetura nos dice que para cada  $\epsilon > 0$  y un entero positivo  $k$ , existe  $n(k, \epsilon)$  tal que toda 2-coloración de la gráfica completa  $K_n$ , con  $n \geq n(k, \epsilon)$  y que tenga al menos  $\epsilon \binom{n}{2}$  aristas de cada color, contiene una copia de  $K_{2t}$  de tipo A o de tipo B. Sean  $t$  y  $n$  dos enteros tal que  $0 \leq t < n$ . Una gráfica completa  $K_n$  2-coloreada se dice que es de *tipo A(t)* si las aristas de uno de los colores inducen una gráfica completa  $K_t$ , y de *tipo B(t)* si las aristas de uno de los colores inducen una gráfica bipartita completa  $K_{t,n-t}$ . Si  $n = 2t$ , eliminamos el parámetro  $t$  y escribimos *tipo A* y *tipo B*.

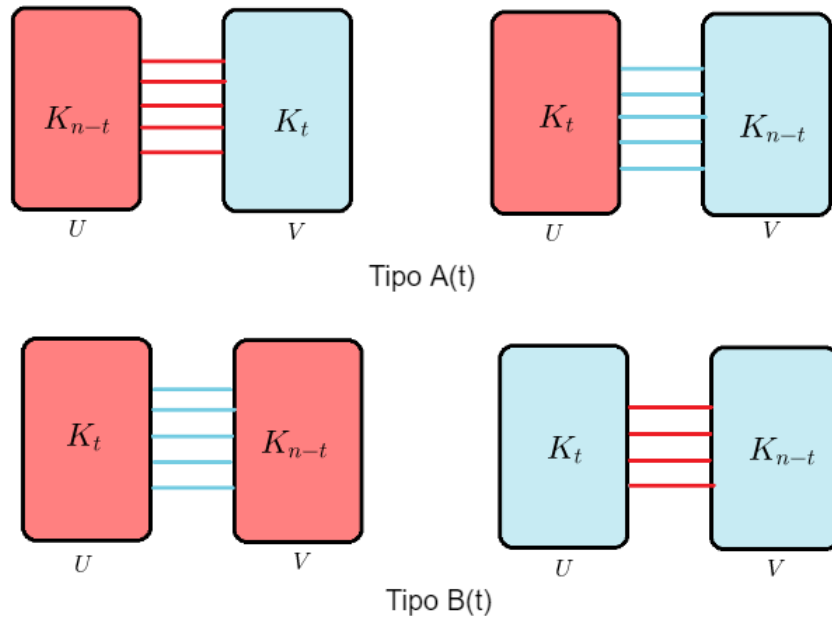


Figura 4.2: Tipo A(t) y tipo B(t)

La cota dada en [10] para el número tipo Ramsey concerniente a este problema fue mejorada por Fox y Sudakov en [14]. En ambos artículos suponen que  $\min\{e(R), e(A)\} =$

$\epsilon \binom{n}{2}$  para alguna  $\epsilon > 0$  y se estima una cota superior para la  $n$  más chica para la cual haya una gráfica  $K_{2t}$  coloreada de tipo  $A$  o de tipo  $B$ . En la demostración que daremos no trabajaremos con el número tipo Ramsey (tan solo se obtendrá su existencia) sino que nos enfocaremos en el número tipo Turán y proporcionaremos una cota superior subcuadrática en función de  $n$  sobre la mínima cantidad de aristas requeridas de cada color en la 2-coloración de  $K_n$ . En esta prueba, como ya dijimos, utilizaremos los números de Ramsey, los números de Turán para gráficas bipartitas completas y los números de Zarankiewicz. Salvo si se menciona expresamente, los resultados presentados en esta sección provienen de [9].

**Teorema 4.6.** *Sea  $t$  un entero positivo. Para  $n$  suficientemente grande, existe un entero positivo  $m = m(t)$  y un número  $\varphi(n, t) = O(n^{2-\frac{1}{m}})$  tal que cualquier coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} \geq \varphi(n, t)$  contiene una copia coloreada de  $K_{2t}$  de tipo  $A$  o de tipo  $B$ .*

*Demostración.* Sea  $q \geq t$  un entero suficientemente grande y fijemos  $m \geq R(q, q)$ . Sea

$$\varphi(n, t) = \text{ex}(n - 2m, K_{m,m}) + m(m - 1) + 2m(n - 2m) + 1. \quad (4.1)$$

Sea  $n$  lo suficientemente grande tal que  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \geq \text{ex}(n, K_{m,m})$ , lo cual es posible por el Teorema 3.6 ya que  $\text{ex}(n, K_{m,m})$  es subcuadrático en  $n$ . Entonces existe una copia roja de  $K_{m,m}$ . Sea  $X \cup Y$  una partición de los vértices de esta copia, donde  $|X| = |Y| = m$  y todas las aristas entre  $X$  y  $Y$  son rojas. Ahora consideremos la gráfica completa  $K_{n-2m}$  obtenida de quitar el conjunto  $X \cup Y$ . Veamos cuántas aristas azules nos quedan. Como al quitar el conjunto  $X \cup Y$  de  $K_n$  perdimos a lo más  $2 \binom{m}{2} + 2m(n - 2m)$  aristas azules, por (4.1) tenemos que

$$\varphi(n, t) - 2 \binom{m}{2} - 2m(n - 2m) \geq \text{ex}(n - 2m, K_{m,m}) + 1.$$

Es decir, tenemos al menos  $\text{ex}(n - 2m, K_{m,m}) + 1$  aristas azules en  $K_{n-2m}$  y, por tanto, hay una copia azul de  $K_{m,m}$  en  $K_{n-2m}$ . Sea  $Z \cup W$  una partición de los vértices de la  $K_{m,m}$  azul, donde  $|Z| = |W| = m$  y todas las aristas entre  $Z$  y  $W$  son azules. Notemos que la  $K_{m,m}$  roja y la  $K_{m,m}$  azul son disjuntas.

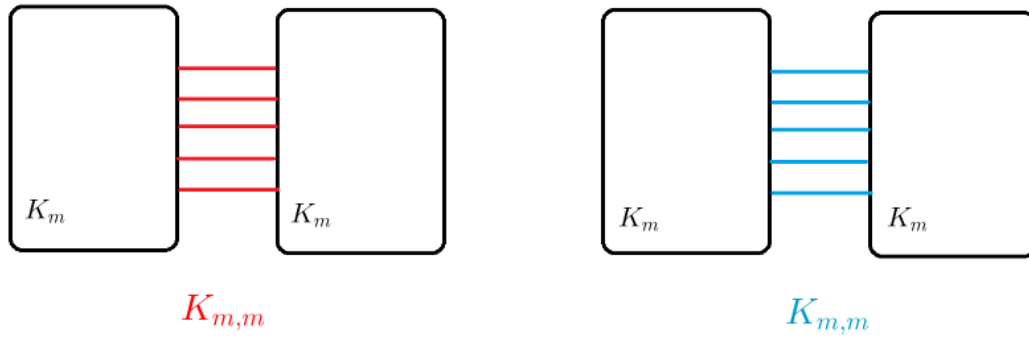


Figura 4.3: Copia roja y azul de  $K_{m,m}$

Como  $m \geq R(q, q)$ , existe una copia monocromática de  $K_q$  en cada conjunto de la bipartición, la cual puede ser azul o roja. Veamos todos los casos.

En el primer caso, consideremos a la gráfica inducida por  $X \cup Y$ . Si hay una copia roja de  $K_q$  en  $X$  y una copia azul de  $K_q$  en  $Y$ , como se muestra en la siguiente figura, entonces tendremos una copia de  $K_{2q}$  de tipo A. Como  $q \geq t$  entonces tendremos una copia de  $K_{2t}$  de tipo A. Lo mismo sucede en la gráfica inducida por  $Z \cup W$ .

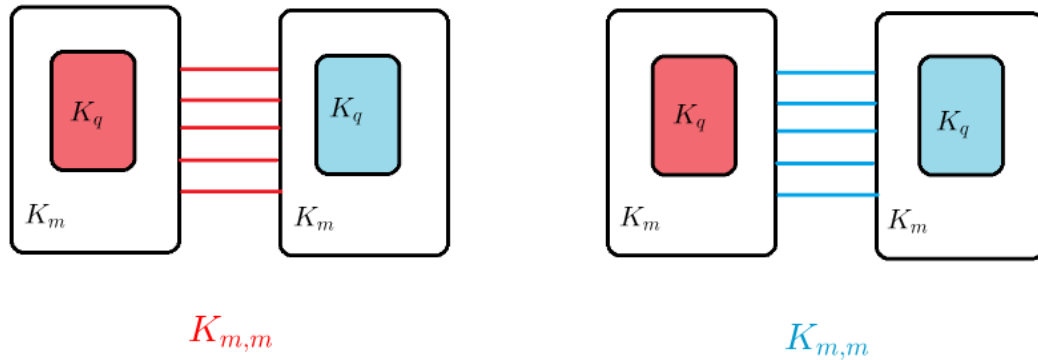


Figura 4.4:  $K_{2q}$  de tipo  $A(t)$ .

Para el siguiente caso, consideremos que en la gráfica inducida por  $X \cup Y$  ambas copias de  $K_q$  son de color azul y que en la gráfica inducida por  $Z \cup W$  ambas copias de  $K_q$  son rojas (Figura 4.5). Por tanto, tendremos una  $K_{2q}$  de tipo B y como  $q \geq t$  tendremos una copia de  $K_{2t}$  de tipo B.

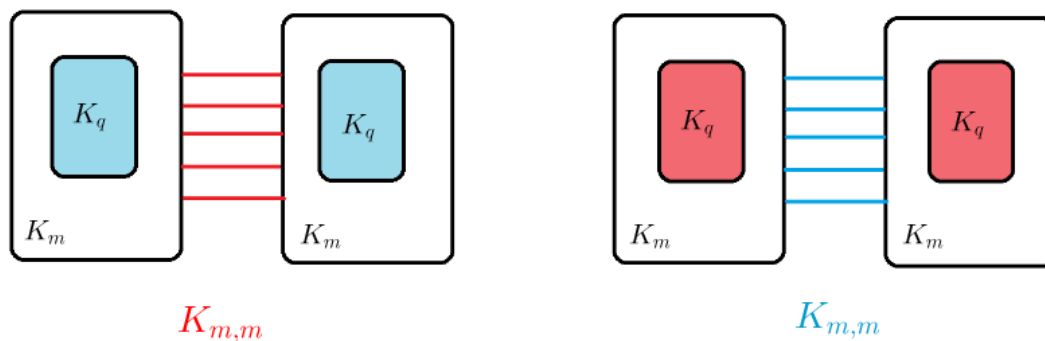
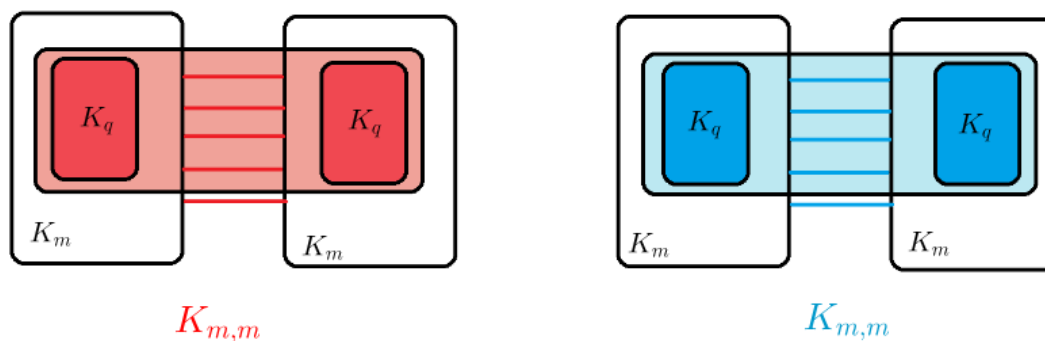


Figura 4.5:  $K_{2q}$  de tipo  $B(t)$ .

Para el último caso, consideremos que ambas copias de  $K_q$  que están en la gráfica inducida por  $X \cup Y$  son de color rojo, por lo que tenemos una  $K_{2q}$  roja. Similarmente, si en la gráfica inducida por  $Z \cup W$  ambas copias de  $K_q$  son azules, tendremos una  $K_{2q}$  azul. Así, tenemos dos copias monocromáticas de  $K_{2q}$ , una roja y una azul, cuyos conjuntos de vértices son disjuntos.



Sea  $C$  el conjunto de vértices de la copia  $K_{2q}$  roja y sea  $D$  el conjunto de vértices de la copia  $K_{2q}$  azul. Ahora consideremos la gráfica bipartita completa  $K_{2q,2q}$  inducida por las aristas de  $E(C, D)$ .



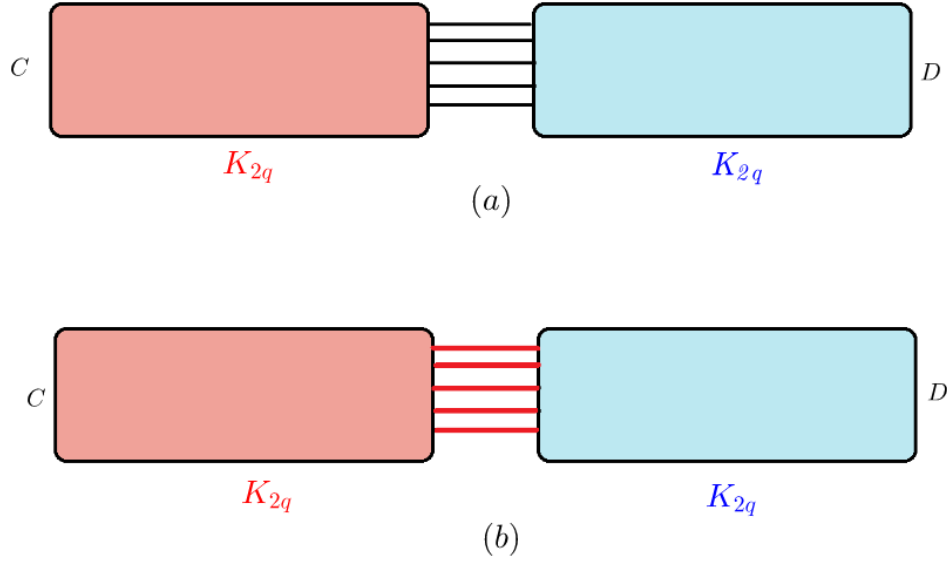


Figura 4.6: (a) Gráfica bipartita inducida por  $E(C, D)$ . (b) La misma gráfica pero con las aristas entre ellas coloreadas de rojo

Sin pérdida de generalidad, supongamos que al menos la mitad de las aristas entre esos dos conjuntos son rojas (como se muestra en la Figura 4.6b). Esto es, que al menos  $\frac{1}{2}(2q)^2 = 2q^2$  aristas de  $E(C, D)$  son de color rojo.

Sabemos, por el Teorema 3.6 que

$$z(2q, t) < (t - 1)^{1/t}(2q)^{2-1/t} + (t - 1)q.$$

De manera que si,  $q$  es suficientemente grande,

$$(t - 1)^{1/t}(2q)^{2-1/t} + (t - 1)q + 1 \leq 2q^2.$$

Es decir, el número de aristas rojas entre  $C \cup D$  es mayor al número de Zarankiewicz  $z(2q, t)$ . De esta manera, podemos garantizar una copia de  $K_{t,t}$  en  $K_{2q,2q}$ . Esto es, existe  $C' \subset C$  y  $D' \subset D$  con  $|C'| = |D'| = t$ , tal que todas las aristas entre  $C'$  y  $D'$  son rojas. De esta forma, hay una gráfica completa  $K_{2t}$  inducida por  $C' \cup D'$  que es de tipo A.

□

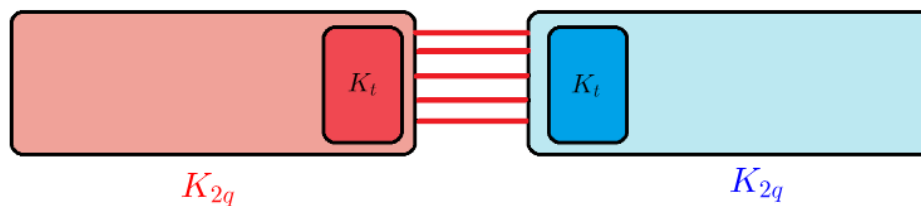


Figura 4.7:  $K_{2t}$  de tipo  $A(t)$ .

Girão y Narayanan [15] dan una mejor cota del número de aristas de cada color para la versión que acabamos de dar. Más precisamente, determinan que  $m = t$  y nos dicen que la cota obtenida es asintóticamente justa si la conjetura de Kővari-Sós-Turán es cierta, la cual dice, que la cota del Teorema de Kővari-Sós-Turán (Teorema 3.6) es asintóticamente justa. Bowen et al ([6], Teorema 1.4) dan una versión multicolor del Teorema 3.6 con  $\varphi(n, t) = r^r n^{2-1/t}$ , donde  $r$  es el número de colores.

Notemos que, si  $bal_r(n, G)$  existe, entonces  $bal(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2}$ . Esto también sucede para las gráficas omnitonales:  $ot(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2}$ .

El Teorema 4.6 nos permite dar una caracterización de las gráficas  $r$ -tonales, así como de las gráficas balanceables y omnitonales. El siguiente lema, que sale directamente de los Lemas 3.1 y 3.2 dados en [7] nos ayudará a probar los siguientes resultados.

**Lema 4.7.** *Para infinitos valores positivos de  $n$ , podemos elegir  $t = t(n)$  de tal forma que exista una coloración balanceada de  $K_n$  de tipo  $A(t)$ . Análogamente, para infinitos valores positivos de  $n$ , podemos elegir  $t = t(n)$  de tal forma que exista una coloración balanceada de  $K_n$  de tipo  $B(t)$ .*

**Teorema 4.8.** *Sea  $G$  una gráfica y  $r$  un entero tal que  $0 < r \leq \lfloor e(G)/2 \rfloor$ . Entonces  $G$  es  $r$ -tonal si y sólo si  $G$  tiene una partición  $V(G) = X \cup Y$  y un conjunto de vértices  $W \subseteq V(G)$  tal que  $e(X, Y), e(G[W]) \in \{r, e(G) - r\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es  $r$ -tonal. Sea  $n$  lo suficientemente grande para que exista  $bal_r(n, G)$  y seleccionada de tal forma que haya una coloración balanceada de  $K_n$  de tipo  $A(t)$  para alguna  $t = t(n)$ , lo cual es posible por el Lema 4.7. Sin pérdida de generalidad supongamos que la gráfica  $R$  inducida por las aristas rojas es isomorfa a  $K_t$ . Sea  $A$  la gráfica inducida por las aristas azules. Como  $G$  es  $r$ -tonal y  $bal_r(n, G) \leq$

$\frac{1}{2}\binom{n}{2} = e(R) = e(A)$ , debe haber una copia  $(r, e(G) - r)$ -coloreada de  $G$  en  $K_n$  y, por tanto, con  $r$  o  $e(G) - r$  aristas rojas, lo cual implica que hay un conjunto  $W \subseteq V(G)$  con  $e(G[W]) \in \{r, e(G) - r\}$ . Análogamente, tomemos una  $n$  suficientemente grande tal que exista  $bal_r(n, G)$  y seleccionada de tal forma que haya una coloración balanceada de tipo  $B(t)$  de  $K_n$  para alguna  $t = t(n)$ , lo cual es posible por el Lema 4.7. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la gráfica  $R$  inducida por las aristas rojas es isomorfa a  $K_{t, n-t}$ . Sea  $A$  la gráfica inducida por las aristas azules. Como  $G$  es omnitonal y  $ot(n, G) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} = e(R) = e(A)$  debe haber una copia de  $G$  en  $K_n$  con  $r$  o  $e(G) - r$  aristas, lo cual implica que hay una partición  $V(G) = X \cup Y$  con  $e(X, Y) \in \{r, e(G) - r\}$ .

Por otro lado, supongamos que  $G$  tiene una partición  $V(G) = X \cup Y$  y un conjunto de vértices  $W \subseteq V(G)$  tal que  $e(X, Y), e(G[W]) \in \{r, e(G) - r\}$ . Sea  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  una coloración de las aristas de  $K_n$  con  $\min\{e(R), e(A)\} \geq \varphi(n, t)$ , donde  $t = n(G)$  y  $\varphi(n, t)$  es como en el Teorema 4.6. Por tanto, para  $n$  suficientemente grande, existe una copia de  $K_{2t}$  de tipo A o de tipo B. Si esta copia es de tipo A, entonces tenemos un  $K_t$  de color rojo y otro  $K_t$  de color azul y las aristas entre ellos son todas azules, por lo cual podemos encontrar una copia de  $G$  situando el conjunto  $W$  dentro de la  $K_t$  roja y los otros vértices dentro de la  $K_t$  azul. Si esta copia es de tipo B, tenemos dos copias rojas de  $K_t$  con aristas azules entre ellas, por lo que podemos encontrar una copia de  $G$  situando las aristas del corte  $e(X, Y)$  tal que los conjuntos  $X$  y  $Y$  estén cada uno en una copia roja de  $K_t$ .  $\square$

Como una gráfica  $G$  es balanceable si y sólo si  $G$  es  $\lfloor e(G)/2 \rfloor$ -tonal, el siguiente resultado se sigue del Teorema 4.6.

**Corolario 4.9.** *Una gráfica  $G$  es balanceable si y sólo si  $G$  tiene una bipartición  $V(G) = X \cup Y$  y un conjunto de vértices  $W \subseteq V(G)$  tal que  $e(X, Y), e(G[W]) \in \{\lfloor \frac{1}{2}e(G) \rfloor, \lceil \frac{1}{2}e(G) \rceil\}$ .*

**Teorema 4.10.** *Una gráfica  $G$  es omnitonal si y sólo si, para cada entero  $r$  con  $0 \leq r \leq e(G)$ ,  $G$  tiene una bipartición  $V(G) = X \cup Y$  y un conjunto de vértices  $W \subseteq V(G)$  tal que  $e(X, Y) = e(G[W])$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es omnitonal y sea  $n$  suficientemente grande tal que existe  $ot(n, G)$  y seleccionada de tal forma que haya una coloración balanceada de  $K_n$  de tipo  $B(t)$  para alguna  $t = t(n)$ , lo que es posible por el Lema 4.7. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la gráfica  $R$  inducida por las aristas rojas es isomorfa a

$K_{t,n-t}$ . Sea  $A$  la gráfica inducida por las aristas azules. Como  $G$  es omnitonal y  $ot(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} = e(R) = e(A)$ , debe haber una copia de  $G$  en  $K_n$  con  $r$  aristas para cada  $0 \leq r \leq e(G)$ . Esto implica la existencia de una partición  $V(G) = X \cup Y$  con  $e(X, Y) = r$  para cada  $0 \leq r \leq e(G)$ . Ahora tomemos  $n$  suficientemente grande tal que exista  $ot(n, G)$  y seleccionada de tal forma que haya una coloración balanceada de  $K_n$  de tipo  $A(t)$  para alguna  $t = t(n)$ , lo que es posible por el Lema 4.7. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la gráfica  $R$  inducida por las aristas rojas es isomorfa a  $K_n$ . Sea  $A$  la gráfica inducida por las aristas azules. Como  $G$  es omnitonal y  $ot(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} = e(R) = e(A)$ , debe haber una copia de  $G$  en  $K_n$  con  $r$  aristas rojas para cada  $0 \leq r \leq e(G)$ , implicando que hay un conjunto  $W \subseteq V(G)$  con  $e(G[W]) = r$ .

Por otro lado, supongamos que  $V(G) = X \cup Y$  y que  $W \subseteq V(G)$  son tal que  $e(X, Y) = e(G[W]) = r$  para cada  $0 \leq r \leq e(G)$ . Sea  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  una coloración de  $K_n$  con  $\min\{e(R), e(A)\} \geq \varphi(n, t)$  donde  $t = n(G)$  y  $\varphi(n, t)$  es como en el Teorema 4.6. Por tanto, para  $n$  suficientemente grande, existe una copia coloreada de  $K_{2t}$  de tipo A o tipo B en  $K_n$ . Si esta copia es de tipo A, entonces tenemos dos posibilidades: o tenemos una  $K_t$  roja y otra azul con las aristas entre ellas azules o viceversa. En el primer caso podemos usar un conjunto  $W$  con  $e(G[W]) = r$  para encontrar una copia de  $G$  con  $r$  aristas rojas y  $e(G) - r$  aristas azules. En el segundo caso podemos usar un conjunto  $W'$  con  $e(G[W']) = e(G) - r$  para encontrar una copia de  $G$  con  $r$  aristas rojas y  $e(G) - r$  aristas azules. Cuando se tiene una copia  $K_{2t}$  coloreada de tipo B es similar.  $\square$

**Corolario 4.11.** *Las gráficas omnitoniales son bipartitas.*

*Demostración.* Tomemos a  $n$  suficientemente grande, tal que existe  $ot(n, G)$  y seleccionada de tal forma que haya una coloración balanceada de tipo  $B(t)$  de  $K_n$  para alguna  $t = t(n)$ , lo cual es posible por el Lema 4.7. Sin pérdida de generalidad supongamos que la gráfica  $R$ , inducida por las aristas rojas, es isomorfa a  $K_{t,n-t}$ . Sea  $A$  la gráfica inducida por las aristas azules. Como  $G$  es omnitonal y  $ot(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} = e(R) = e(A)$ , debe haber una copia de  $G$  contenida en la gráfica roja  $R$ , y como esta gráfica es bipartita se sigue que  $G$  debe ser bipartita.  $\square$

Observemos que hay gráficas bipartitas que no son balanceables y por tanto tampoco son omnitoniales. Por ejemplo, ciclos  $C_t$  de longitud  $t \equiv 2 \pmod{4}$  no aparecen de forma balanceada en ninguna coloración de  $K_n$  de tipo B. También notemos que las

gráficas balanceables no siempre son bipartitas, como la gráfica  $K_4$  que, como vimos anteriormente, es balanceable, pero no es bipartita.

# Capítulo 5

## Amoebas

En este capítulo, que es el que le da el título a este trabajo de tesis, describiremos un tipo de gráficas llamadas *amoebas* y algunos resultados sobre éstas. También daremos un algoritmo que nos ayudará a determinar si una gráfica es una amoeba o no.

### 5.1. Definición de amoeba y su relación con problemas de coloración

Antes de dar la definición de amoeba necesitamos algunas definiciones.

**Definición 5.1.** *Sea  $G$  una gráfica y  $H$  una copia de  $G$  en  $K_n$ , donde  $n \geq n(G)$ . Sean  $e \in E(H)$  y  $f \in (E(K_n) \setminus E(H)) \cup \{e\}$  y sea  $H'$  una gráfica de tal forma que sucede una de las siguientes opciones:*

1.  $H' = H - e + f$ ,
2.  $e = f$  y  $H' = (H - v) + w$ , donde  $v$  es vértice de grado 0 en  $H$  y  $w \in V(K_n) \setminus V(H)$ ,
3.  $H' = (H - v) + w + uw$ , donde  $v$  es de grado 1 en  $H$ ,  $u$  es el vecino de  $v$  en  $H$ , y  $w \in V(K_n) \setminus V(H)$ , donde  $uv = e$  y  $uw = f$ .

*Si  $H'$  es isomorfa a  $G$ , entonces decimos que  $H'$  se obtiene a partir de  $H$  a través de un reemplazo admisible de arista.*

En la Figura 5.1 vemos la primera forma en que podemos hacer un reemplazo admisible. Aquí quitamos la arista  $e$  y la reemplazamos por la arista  $f$  de tal forma que  $H' \cong H$  y donde  $e \in E(H)$  y  $f \in (E(K_n) \setminus E(H)) \cup \{e\}$ . Observemos que en este caso el conjunto de vértices se mantiene.

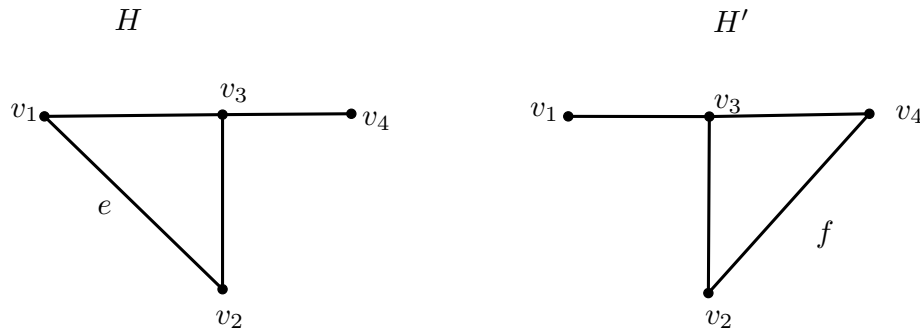


Figura 5.1: Primera forma en que podemos hacer un reemplazo admisible.

En la Figura 5.2 vemos la segunda forma en que podemos hacer un reemplazo admisible. Aquí todas las aristas se quedan igual y lo que quitamos es el vértice  $v$  y lo reemplazamos por el vértice  $w$ , donde  $w \in V(K_n) \setminus V(H)$ .

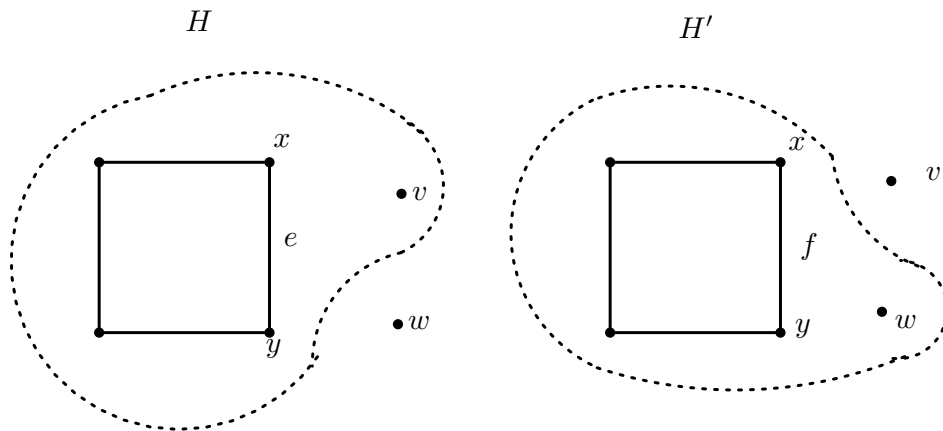


Figura 5.2: Segunda forma en que podemos hacer un reemplazo admisible.

En la siguiente Figura (Figura 5.3) vemos la tercera forma en que podemos hacer un reemplazo admisible. En este caso, quitamos el vértice  $v$  de grado 1 y la arista  $e$  y los

reemplazamos con el vértice  $w$  y la arista  $f$ , tal que  $H \cong H'$  y donde  $w \in V(K_n) \setminus V(H)$ ,  $e \in E(H)$  y  $f \in (E(K_n) \setminus E(H)) \cup \{e\}$ . Observemos que aquí el conjunto de vértices sí cambia.

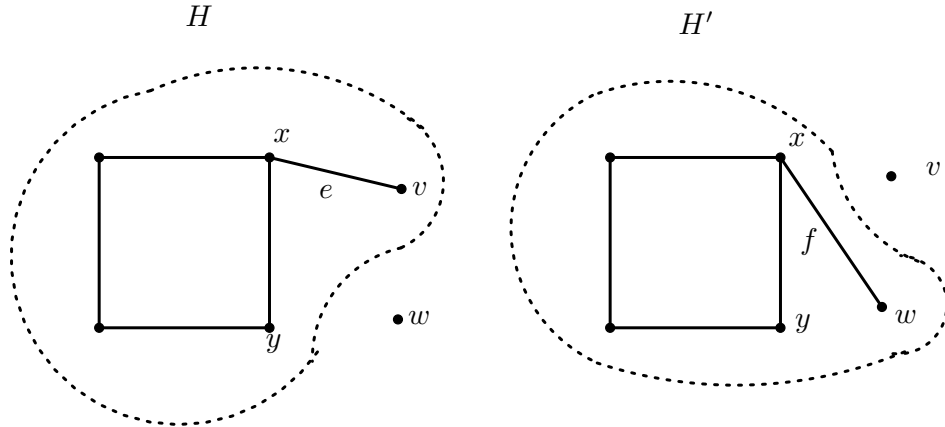


Figura 5.3: Tercera forma en que podemos hacer un reemplazo admisible.

**Definición 5.2.** Sea  $n$  un entero y sea  $G$  una gráfica de orden  $n(G) < n$ . Para dos copias  $H$  y  $H'$  de  $G$  en  $K_n$ , con  $H \neq H'$ , decimos que  $H'$  se obtiene de  $H$  a partir de una cadena de reemplazos admisibles de aristas (CRA) si existe un número entero  $t \geq 1$  y una sucesión  $G_1, G_2, \dots, G_t$  de copias de  $G$  contenidas en  $K_n$  donde  $G_1 = H$  y  $G_t = H'$  y, para toda  $1 \leq i \leq t - 1$ ,  $G_{i+1}$  se obtiene de  $G_i$  a partir de un reemplazo admisible de arista.

**Definición 5.3.** Una gráfica  $G$  es una amoeba si, para todo entero  $n$  suficientemente grande (con  $n > n(G)$ ) y para cualesquiera dos copias  $F$  y  $H$  de  $G$  en  $K_n$ , existe una cadena  $G_1, \dots, G_t$  de reemplazos admisibles tal que  $H = G_1$  y  $F = G_t$ .

En este trabajo no nos enfocaremos en qué tan grande debe ser  $n$ . De hecho, actualmente se sabe que si  $G$  es amoeba, entonces basta con asumir que  $n > n(G)$  para que siempre exista una CRA entre cualesquiera dos copias de  $G$  en  $K_n$  [8]. Sin embargo, en la teoría aquí presentada, sí requeriremos  $n$ 's más grandes en relación al orden de  $G$  (requeriremos que  $n$  sea al menos tres veces más grande que  $n(G)$ ). Por lo tanto, de



ahora en adelante, no nos importará de qué tamaño es  $n$  y simplemente asumiremos que es suficientemente grande.

Consideremos la gráfica  $P_3$ , es decir, la trayectoria de longitud 3 como se muestra en la Figura 5.4. Tomamos la arista  $v_1v_2 \in E(P_3)$  y procedemos a hacer el reemplazo admisible de arista. Es decir, quitamos la arista  $v_1v_2$  y añadimos otra de tal forma que la gráfica resultante sea isomorfa a  $P_3$ . Observemos que si tomamos el vértice  $v_4$  como extremo de la nueva arista que añadiremos y lo unimos a un vértice  $u_1 \in V(K_n) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$  nos queda una gráfica isomorfa a  $P_3$ . Repetimos el mismo proceso pero ahora con la arista  $v_2v_3$ . Notemos que en algún momento todas las aristas de la gráfica meta serán alcanzadas, ya sea que tenga aristas de la gráfica original o no. De forma completamente análoga, podemos proceder para  $P_k$  con  $k \geq 1$  arbitraria.

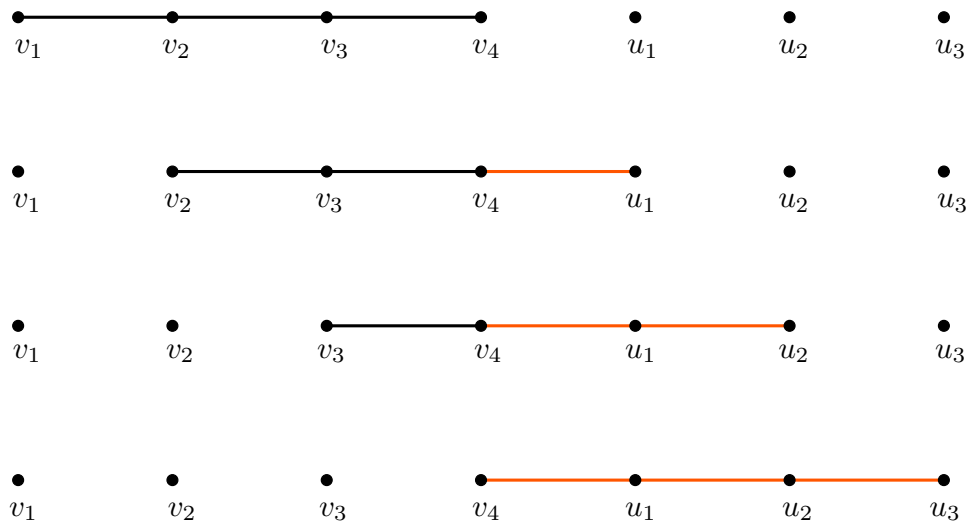


Figura 5.4: Gráfica  $P_3$  al reemplazar aristas

De esta forma podemos llegar a cualquier gráfica isomorfa a  $P_3$  contenida en  $K_n$ . Por tanto  $P_3$  es una amoeba.

Veamos ahora qué sucede si en vez de tener una trayectoria tenemos un ciclo. Consideremos el ciclo de longitud cuatro,  $C_4$ , contenido en la gráfica  $K_n$ .

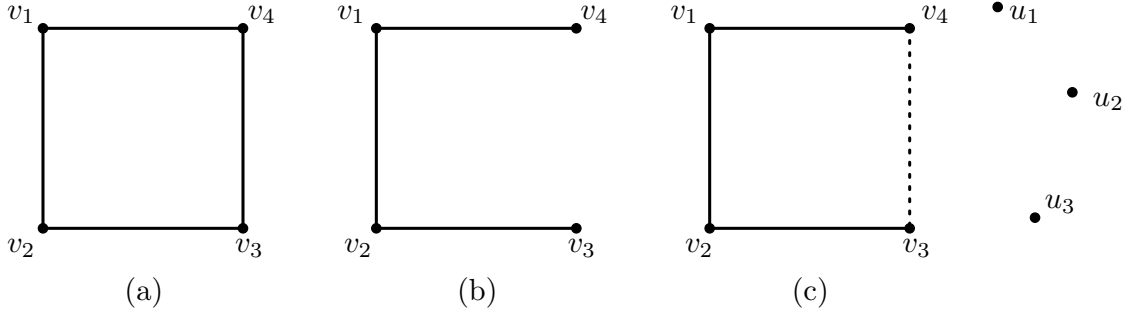


Figura 5.5: (a) la gráfica  $C_4$ . (b)  $C_4$  sin la arista  $v_4v_3$ . (c) único reemplazo posible de la arista  $v_4v_3$ .

Como queremos saber si  $C_4$  es una amoeba, procederemos a quitar una arista. Eliminamos la arista  $v_4v_3$ , como se muestra en la Figura 5.5b. Ahora intentaremos hacer un reemplazo admisible de la arista que quitamos. Observemos que la única forma de reemplazar de forma admisible la arista  $v_4v_3$  es poner la arista justo donde estaba (Figura 5.5c), pero entonces no podemos llegar a cualquier copia de  $C_4$  dada. Por lo tanto, la gráfica  $C_4$  no es una amoeba. Notemos que lo mismo sucede con cualquier ciclo.

A continuación, se presenta un lema de interpolación para amoebas, el cual fue dado en [9]. Con interpolación nos referimos a la propiedad que tienen ciertos parámetros  $f(k)$  definidos sobre los números enteros  $k \in \mathbb{N}$  tal que, si se conocen 2 de sus valores,  $f(k)$  y  $f(k + d)$ , se pueden obtener conclusiones acerca los valores intermedios. Para más información sobre parámetros de interpolación en gráficas, se puede consultar [17, 18, 20, 23, 28].

**Lema 5.4.** *Sea  $G$  una amoeba y consideremos una 2-coloración  $E(K_n) = E(A) \cup E(R)$ . Sean  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  enteros tal que  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = e(G)$  y  $0 \leq \alpha \leq \alpha'$  y  $0 \leq \beta' \leq \beta$ . Si hay una copia  $(\alpha, \beta)$ -coloreada de  $G$  y una copia  $(\alpha', \beta')$ -coloreada de  $G$ , entonces hay una copia  $(r, a)$ -coloreada de  $G$  para todos los enteros  $r$  y  $a$  tal que  $r + a = e(G)$ ,  $\alpha \leq r \leq \alpha'$  y  $\beta' \leq a \leq \beta$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es una copia  $(\alpha, \beta)$ -coloreada de  $G$  y  $H$  una copia  $(\alpha', \beta')$ -coloreada de  $G$  con  $\alpha \leq r \leq \alpha'$  y  $\beta' \leq a \leq \beta$ . Como  $G$  es una amoeba y  $n \geq n_0(G)$ , sabemos que hay una cadena  $F = G_0, G_1, \dots, G_t = H$  tal que para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $G_i \cong G$  y  $G_i$  se obtiene de  $G_{i-1}$  por un reemplazo admisible de arista.

Sea  $r_i = |R \cap E(G_i)|$  el número de aristas rojas en  $G_i$  y sea  $a_i = |A \cap E(G_i)|$  el número de aristas azules en  $G_i$ , de esta forma, para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $G_i$  es una copia  $(r_i, a_i)$ -coloreada de  $G$ . Observemos que un reemplazo de arista modifica el patrón de color en a lo más una unidad por cada color, es decir, para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $|r_i - r_{i-1}| \leq 1$ ,  $|a_i - a_{i-1}| \leq 1$  y  $r_i + a_i = e(G_i)$ . Así, si comenzamos con una copia  $(r_0, a_0)$ -coloreada de  $G$  y terminamos con una copia  $(r_t, a_t)$ -coloreada de  $G$ , debimos pasar por todos los patrones de colores con  $\alpha = r_0 \leq r \leq r_t = \alpha'$  y  $\beta' = a_t \leq a \leq a_0 = \beta$ .  $\square$

El lema que acabamos de ver (Lema 5.4) implica que, dada una amoeba  $G$  y una 2-coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$ , si hay una copia de  $G$   $(0, e(G))$ -coloreada y una copia de  $G$   $(e(G), 0)$ -coloreada, entonces existirá una copia de  $G$   $(r, a)$ -coloreada para todo par  $r, a$  tal que  $r + a = e(G)$ ,  $0 \leq r \leq e(G)$  y  $0 \leq a \leq e(G)$ .

Esta propiedad de interpolación en las amoebas es la clave para su importancia en teoremas de coloraciones de aristas en la gráfica completa. Efectivamente, como mostraremos a continuación, toda amoeba es balanceable (Teorema 5.7) y toda amoeba bipartita es omnitonal (Teorema 5.6).

**Observación 5.5.** *Por el Teorema 3.7,  $\text{ex}(n, G) = o(n^2)$  para cualquier gráfica bipartita  $G$ , tenemos que, para  $n$  suficientemente grande,  $2(\text{ex}(n, G) + 1) \leq \binom{n}{2}$ . Esto quiere decir que podemos considerar 2-coloraciones de  $E(K_n)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} \geq \text{ex}(n, G) + 1$ , si  $n$  es suficientemente grande.*

Mostraremos ahora que toda amoeba bipartita es omnitonal y toda amoeba es balanceable, resultados que se dan en [9].

**Teorema 5.6.** *Toda amoeba bipartita es omnitonal y  $\text{ot}(n, G) = \text{ex}(n, G)$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una amoeba bipartita. Por la Observación 5.5 podemos considerar, para  $n$  suficientemente grande, una 2-coloración de  $E(K_n)$  con al menos  $\text{ex}(n, G) + 1$  aristas de cada color. Puesto que cualquier coloración  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} \geq \text{ex}(n, G) + 1$  contiene una copia  $(0, e(G))$ -coloreada de  $G$  y una copia  $(e(G), 0)$ -coloreada de  $G$ , por el Lema 5.4, hay una copia de  $G$   $(r, a)$ -coloreada para todo los enteros  $r$  y  $a$  tal que  $0 \leq r, a \leq e(G)$  y  $r + a = e(G)$ . De esta forma,  $G$  es omnitonal y  $\text{ot}(n, G) \leq \text{ex}(n, G)$ . Ahora veamos que  $\text{ex}(n, G) \leq \text{ot}(n, G)$ , para esto, observemos que podemos dar una 2-coloración de  $E(K_n)$  con  $\min\{e(R), e(A)\} = \text{ex}(n, G)$  tal que no

hay copias  $(e(G), 0)$ -coloreadas de  $G$  y por tanto  $G$  no sería omnitonal, lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto que sí lo era.  $\square$

A continuación probaremos que toda amoeba es balanceable. Para esto, utilizaremos el Teorema 3.1, el cual nos dice que toda gráfica  $G$  tiene una bipartición de sus vértices  $V(G) = X \cup Y$  tal que  $e(X, Y) \geq \lceil e(G)/2 \rceil$ . Eliminando aristas si es necesario, podemos darnos cuenta que cada gráfica  $G$  contiene una subgráfica bipartita  $B$  tal que  $e(B) = \lceil e(G)/2 \rceil$ .

**Teorema 5.7.** *Toda amoeba es balanceable.*

*Demostración.* Sea  $G$  una amoeba. Por lo anterior, podemos considerar una subgráfica bipartita  $B$  de  $G$  con  $e(B) = \lceil e(G)/2 \rceil$  aristas. Sea  $E(K_n) = E(R) \cup E(A)$  una 2-coloración con  $\min\{e(R), e(A)\} \geq \text{ex}(n, G) + 1$ , lo cual es posible para una  $n$  suficientemente grande por la Observación 5.5. Sabemos que  $K_n$  contiene una copia  $(0, e(B))$ -coloreada de  $B$  y una copia  $(e(B), 0)$ -coloreada de  $B$ . Esas copias de  $B$  podemos convertirlas en copias de  $G$  agregándole aristas de tal forma que obtengamos una copia  $(\alpha, \beta)$ -coloreada de  $G$  y una copia  $(\alpha', \beta')$ -coloreada de  $G$ , donde  $\lceil e(G)/2 \rceil \leq \beta$  y  $\lceil e(G)/2 \rceil \leq \alpha'$ . Como  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = e(G)$  tenemos que  $\alpha \leq \lfloor e(G)/2 \rfloor$  y  $\beta' \leq \lfloor e(G)/2 \rfloor$ . Por tanto, tenemos que  $\alpha \leq \lfloor e(G)/2 \rfloor \leq \lceil e(G)/2 \rceil \leq \alpha'$  y  $\beta' \leq \lfloor e(G)/2 \rfloor \leq \lceil e(G)/2 \rceil \leq \beta$ . Entonces, por el Lema 5.4,  $K_n$  contiene una  $(\lfloor e(G)/2 \rfloor, \lceil e(G)/2 \rceil)$ -copia de  $G$  y una  $(\lceil e(G)/2 \rceil, \lfloor e(G)/2 \rfloor)$ -copia de  $G$ .  $\square$

## 5.2. Teoremas de caracterización

En esta sección daremos una caracterización de las amoebas que nos servirá para, en la Sección 5.3, poder dar un algoritmo para reconocerlas. Los resultados obtenidos son originales de este trabajo de tesis y se derivan del trabajo iniciado en el V Taller de Matemáticas Discretas. Cabe destacar que en [8] se desarrollaron herramientas de Teoría de Grupos con las cuales pudieron evadirse muchos de los obstáculos que tuvimos en este trabajo para encontrar una caracterización adecuada así como el algoritmo. Sin embargo, no forma parte de los fines de esta tesis discutir esas técnicas algebraicas de las amoebas.

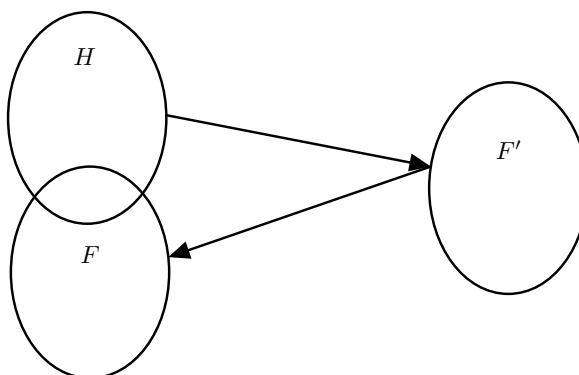
**Lema 5.8.**  *$G$  es amoeba si y sólo si, para todo par  $H, F \subseteq K_n$  de copias disjuntas de  $G$ , existe una CRA  $G_1, \dots, G_t$  tal que  $G_1 = H$  y  $G_t = F$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  amoeba y sean  $H$  y  $F$  dos copias disjuntas de  $G$  en  $K_n$ . Por definición de amoeba sabemos que, para cualesquiera dos copias de  $G$ , existe una CRA. Por tanto, en particular, existe una CRA de  $H$  a  $F$  tal que

$$H = G_1, \dots, G_t = F.$$

Por otro lado, supongamos que, para todo par  $H$  y  $F$  copias disjuntas de  $G$  en  $K_n$ , existe una CRA  $G_1, \dots, G_t$  tal que  $G_1 = H$  y  $G_t = F$ . Como queremos probar que  $G$  es amoeba, tenemos que ver que exista la cadena para cualesquiera dos copias ya sean disjuntas o no. Si  $H$  y  $F$  son disjuntas, no hay nada que probar. Por lo tanto, podemos asumir que  $H$  y  $F$  no son disjuntas. Sea  $F'$  otra copia de  $G$  tal que  $F'$  es disjunta a  $H$  y a  $F$ . Como  $H$  y  $F'$  son disjuntas, por hipótesis existe una CRA tal que

$$H = G_1, \dots, G_r = F'.$$



Análogamente, para  $F'$  y  $F$ , existe una CRA  $F' = G_r, \dots, G_t = F$ , donde  $t > r$ . Por tanto, existe una CRA de  $H$  a  $F$

$$H = G_1, \dots, G_r = F', G_{r+1}, \dots, G_t = F,$$

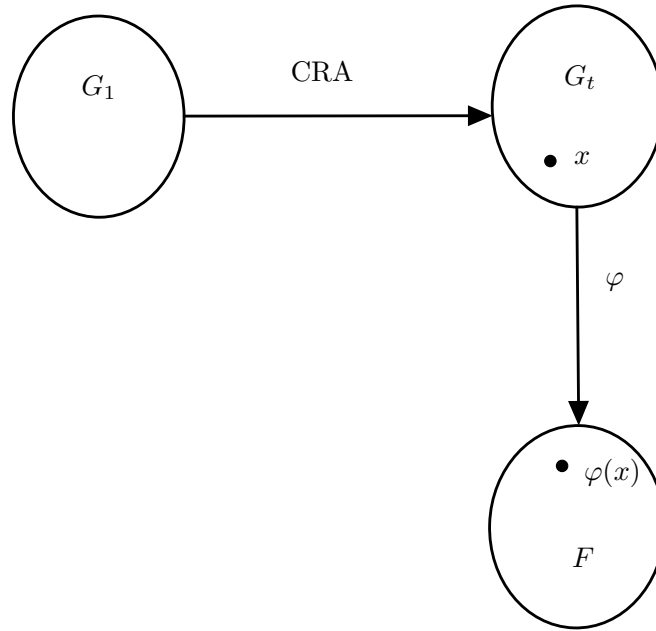
con lo cual,  $G$  es amoeba. □

**Lema 5.9.** *Una gráfica  $G$  es amoeba si y sólo si, dada una copia  $H$  de  $G$ , existe una CRA  $G_1, \dots, G_t$  tal que  $H = G_1$  y  $V(H) \cap V(G_t) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Sea  $H$  una copia de  $G$  dada en  $K_n$ , con  $n$  suficientemente grande. Tomamos una copia arbitraria de  $G$  en  $K_n$ , a la que llamamos  $F$ , de tal forma que  $V(H) \cap V(F) = \emptyset$ . Por la definición de amoeba, existe una CRA

$$H = G_1, \dots, G_t = F.$$

Por el contrario, sean  $H$  y  $F$  dos copias de  $G$  en  $K_n$ . Por el Lema 5.8, podemos asumir que son disjuntas por vértices. Por hipótesis hay una CRA  $G_1, \dots, G_t$  donde  $H = G_1$  y  $G_t$  es disjunta de  $H$ . Como  $n$  es suficientemente grande, podemos asumir que  $V(G_i) \cap V(F) = \emptyset$  (si no es así, podemos trabajar con la gráfica completa  $K_n \setminus V(F)$  y obtenemos la CRA como se desea). Ahora, todas estas gráficas son isomorfas a  $G$ . En particular,  $G_t$  y  $F$  son isomorfas. Sea  $\varphi$  un isomorfismo entre  $G_t$  y  $F$ .



Lo que requerimos hacer es que, en vez de que se tomen los vértices de  $G_t$ , se tomen los vértices de  $F$ , tal como lo marca el isomorfismo. Para esto, es necesario aclarar qué es lo que sucede cada vez que entra en acción un vértice nuevo a lo largo de la cadena, es decir, uno que no se ha usado hasta ahora. Entonces, supongamos que en el paso de  $G_i$  a  $G_{i+1}$  sucede por primera vez que  $V(G_i) \neq V(G_{i+1})$ . Por la definición de reemplazo admisible, esto sólo puede suceder si existen vértices  $v \in V(G_i)$  y  $w \in V(G_{i+1}) \setminus V(G_i)$

y si

1.  $v$  es de grado 0 y  $G_{i+1} = (G_i - v) + w$ , o
2.  $v$  es de grado 1 y  $G_{i+1} = (G_i - v) + w + uw$ , donde  $u$  es el vecino de  $v$  en  $G_i$  (Figura 5.6).

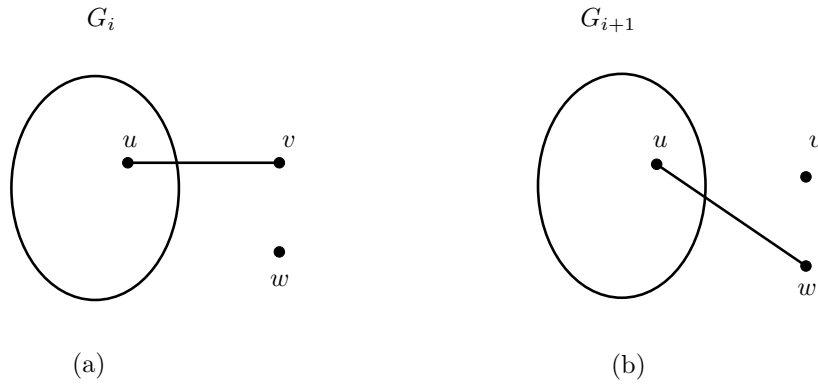


Figura 5.6: (a) La gráfica  $G_i$  con un vértice  $v$  de grado 1. (b) La gráfica resultante  $G_{i+1}$  después de hacer el reemplazo de arista.

En el primer caso no hubo un reemplazo de aristas realmente. Se quitó y se puso de nuevo la misma arista. Si en este reemplazo de aristas justo sucede que el vértice  $w$  está en  $G_t$ , lo que vamos a hacer en vez de eso es añadir el vértice correspondiente en  $F$ , es decir  $\varphi(w)$ , así como la arista  $u\varphi(w)$ .

De esta forma, la cadena  $G_1, G_2, \dots, G_t$  nos da las instrucciones para saber cómo construir una cadena de reemplazos de aristas  $F_1, F_2, \dots, F_t$ , donde  $F_1 = H$  y  $F_t = F$ . Para los siguientes pasos, si ya tenemos vértices de  $F$  en alguno de los pasos, estos los vamos a manejar como si fueran sus correspondientes en  $G_t$ .

Para modelarlo adecuadamente, podemos hacer lo siguiente. A todos los vértices  $u \in (\bigcup_{i=1}^{t-1} V(G_i)) \setminus V(G_t)$  les ponemos la etiqueta  $(u, u)$ , mientras que a los vértices  $w$  de  $V(G_t)$  les ponemos la etiqueta  $(w, \varphi(w))$ . Al final de la cadena, en  $G_t$ , tendremos puros vértices con etiquetas tipo  $(w, \varphi(w))$ . Digamos entonces que  $\{(u, u') | u \in (\bigcup_{i=1}^{t-1} V(G_i))\}$  es nuestro conjunto de etiquetas. Entonces, volviendo a los nombres originales, podemos definir  $F_i$  mediante  $V(F_i) = \{v' | v \in V(G_i)\}$  y, si  $uv$  es arista en  $G_i$ , entonces  $u'v'$  es

arista en  $F_i$ . De esta manera, obtenemos una CRA  $F_1, F_2, \dots, F_t$  con  $F_t = F$  y  $H = F_1$ . Por tanto  $G$  es amoeba.  $\square$

Observemos que las  $G'_i$ s son todas disjuntas de  $F$ , pues, si no, podría haber conflictos de que, para alguna  $i$ , hubiera vértices  $u \in V(F) \cap V(G_i)$  y  $v \in V(G_i)$  tal que  $\varphi(v) = u$  de tal forma que tanto  $(u, u)$  como  $(v, \varphi(v)) = (v, u)$  son etiquetas de vértices en  $V(G_i)$ , lo cual trae problemas a la hora de dejar sólo la segunda coordenada.

A continuación daremos una caracterización de las amoebas, en donde si para todo vértice en una copia de  $G$  podemos encontrar una CRA, tal que ese vértice no se encuentre en la gráfica meta, entonces  $G$  es una amoeba.

**Teorema 5.10** (Caracterización 1).  *$G$  es amoeba si y sólo si, para toda copia  $H$  de  $G$  en  $K_n$  y para todo  $v \in V(H)$ , existe una CRA  $G_1, \dots, G_t$  tal que  $G_1 = H$  y  $v \notin V(G_t)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es amoeba. Sean  $H$  copia de  $G$  y  $v \in V(H)$ . Sea  $F$  copia de  $G$  tal que  $v \notin V(F)$ . Entonces existe una cadena de  $H$  a  $F$ ,

$$H = G_1, \dots, G_t = F.$$

Por otro lado, supongamos que  $G$  es una gráfica y  $H$  una copia de  $G$  en  $K_n$ , con  $V(H) = \{v_1, \dots, v_r\}$ . Por hipótesis existe una cadena  $G_{1,1}, \dots, G_{1,t_1}$  tal que  $v_1 \notin V(G_{1,t_1})$ . Consideremos ahora la gráfica completa  $K_n - v_1$ , en donde se encuentra la copia  $H_2 = G_{1,t_1}$  de  $G$ . De manera inductiva, podemos ir obteniendo copias  $G_{1,t_1}, G_{1,t_2}, \dots, G_{1,t_r}$  de  $G$  (contenidas en  $K_n - v_1, K_n - \{v_1, v_2\}, \dots, K_n - \{v_1, \dots, v_r\}$ ) tal que  $v_1, \dots, v_i \notin V(G_{1,t_i})$ . La última copia  $G_{1,t_r}$  no tiene ninguno de los vértices de  $H$ . Por lo tanto, por el Lema 5.9,  $G$  es amoeba.  $\square$

**Corolario 5.11.** *Sea  $G$  una amoeba con grado máximo  $\Delta$ . Entonces para toda  $i \in \{1, \dots, \Delta\}$  existe  $v \in V(G)$ , con  $d(v) = i$ .*

*Demostración.* Sea  $n$  suficientemente grande. Sea  $H$  una copia de  $G$  en  $K_n$  y sea  $v \in V(H)$  vértice de grado  $\Delta$  en  $H$ . Por el Teorema 5.10 existe una CRA  $G_1, \dots, G_t$  tal que  $v \notin V(G_t)$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $v \in V(G_{t-1})$ .

Como en cada reemplazo de arista el grado de los vértices puede disminuir en a lo más una unidad, debe existir una subsecuencia  $G_{i_1}, \dots, G_{i_\Delta}$  con  $G_{i_1} = G_1$  y  $G_{i_\Delta} = G_t$  y  $d_{G_{i_k}}(v) = \Delta - k + 1$ , para  $i \leq k \leq \Delta$ .



Dado que  $G_{i_k}$  es copia de  $G$ , tenemos que existen vértices con cada uno de los grados  $1, 2, \dots, \Delta$ .  $\square$

El siguiente teorema es lo mismo que el Teorema 5.10, pero en esta ocasión le aumentamos un vértice a la gráfica  $G$  para facilitarnos las cosas.

**Teorema 5.12** (Caracterización 2). *Una gráfica  $G$  es una amoeba si y sólo si para toda copia  $H^*$  de  $G^* = G \cup K_1$  en  $K_n$  y todo vértice  $v \in V(H^*)$ , existe una CRA  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_t^*$  tal que  $H^* = G_1^*$ ,  $V(G_i^*) = V(H^*)$  para toda  $i$  y  $d_{G_i^*}(v) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una amoeba. Tomemos una copia  $H^*$  de  $G^* = G \cup K_1$  y un vértice  $v \in V(H^*)$ . Si  $d_{H^*}(v) = 0$ , no hay nada que mostrar, por lo que supondremos  $d_{H^*}(v) > 0$ . Sea  $u^* \in V(H^*)$  tal que  $H = H^* - u^* \cong G$ . Como  $d_{H^*}(v) > 0$ ,  $v \neq u^*$ . Por el Teorema 5.10, existe una una CRA  $G_1, G_2, \dots, G_t$  con  $G_1 = H$  y tal que  $v \notin V(G_t)$ .

Como en el Lema 5.9, usaremos etiquetas para cada vértice  $u \in V(K_n)$ : en este caso pondremos  $(u, u)$  para cada vértice  $u \in V(G_1)$  y  $(u, u^*)$  para todos los demás vértices (es decir, las segundas coordenadas de cada etiqueta tienen todas entradas en  $V(H^*)$ , donde todas las que no son de vértices de  $V(G_1) = V(H)$  son siempre  $u^*$ ).

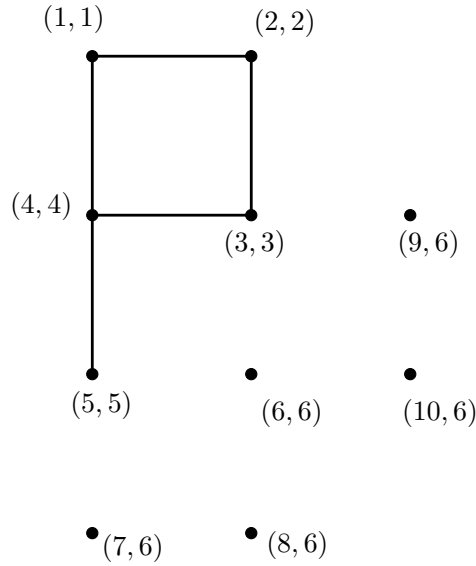


Figura 5.7: Etiquetamiento de los vértices.

Las etiquetas en cada  $G_i$  las iremos modificando en cada paso (de  $i$  a  $i+1$ ) de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si  $V(G_i) = V(G_{i+1})$ , no se modificará ninguna etiqueta.
- Si  $V(G_i) \neq V(G_{i+1})$ , es porque hubo un reemplazo de arista que involucró a algún vértice de fuera de  $G_i$ , digamos  $z$ , el cual debe haber sido intercambiado con un vértice, digamos  $w$ , de grado uno o cero en  $G_i$ , es decir,
  1.  $w$  es de grado 0 en  $G_i$  y  $G_{i+1} = (G_i - w) + z$ , o
  2.  $w$  es de grado 1 en  $G_i$  y  $G_{i+1} = (G_i - w) + z + xz$ , donde  $x$  es el vecino de  $w$  en  $G_i$ .

En este caso, todas las etiquetas de vértices de  $V(G_{i+1})$  se quedan igual, mientras que la segunda coordenada de todos los demás vértices (fuera de  $G_{i+1}$ ) cambia a lo que tiene  $w$  en su segunda coordenada. Es decir, si  $L_i = \{(u, u') | u \in V(K_n)\}$  es el conjunto de etiquetas en el paso  $i$ , entonces, en el paso  $i + 1$  tenemos que  $(u, u')$  es etiqueta de  $u$ , si  $u \in V(G_{i+1})$ , y  $(u, w')$  es etiqueta de  $u$ , si  $u \in V(K_n) \setminus V(G_{i+1})$ .

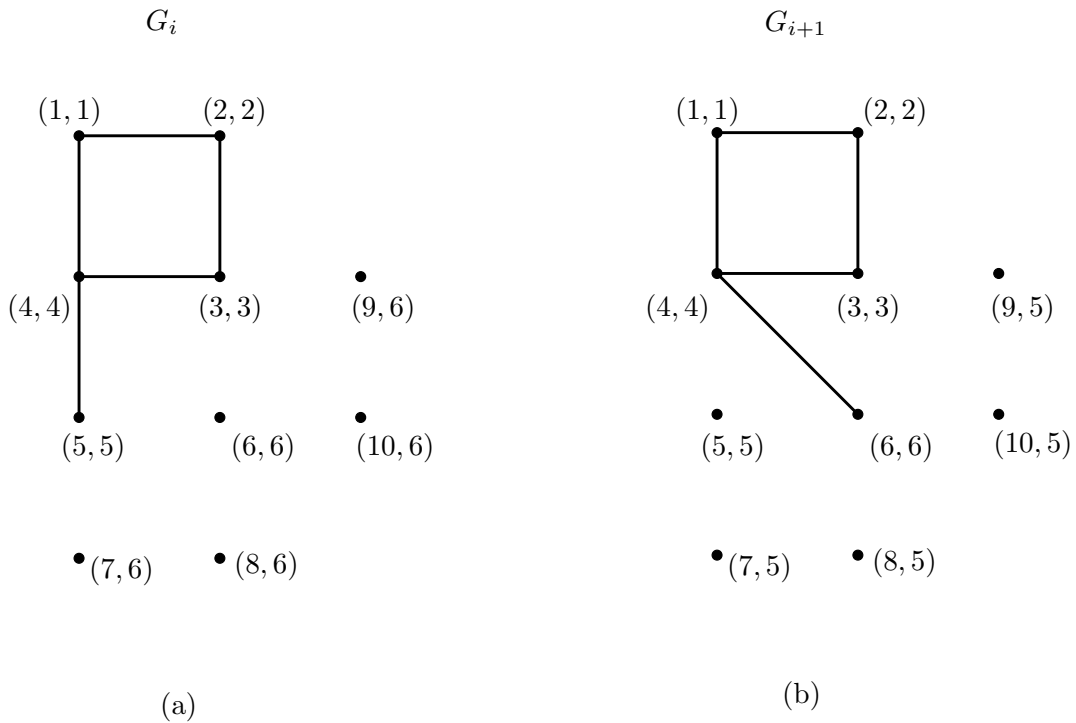


Figura 5.8: (a) La gráfica  $G_i$  con un vértice de grado 1 antes de hacer el reemplazo de arista. (b) La gráfica resultante  $G_{i+1}$  después de hacer el reemplazo de arista.

Observemos que las segundas coordenadas de todos los vértices que no pertenecen a  $G_{i+1}$  son todas iguales al vértice que acaba de salir de  $G_i$ . Lo que estamos haciendo, en cierto sentido, es identificar a todos esos vértices con uno solo. Además, por construcción, para cualquier vértice  $x \in V(K_n) \setminus V(G_i)$ , las segundas coordenadas de las etiquetas de los vértices de  $V(G_i \cup \{x\})$  son precisamente los vértices de  $H^*$ , o más precisamente: Para todo  $x \in V(K_n) \setminus V(G_i) : \{w' | (w, w') \text{ es etiqueta de } w \in V(G_i \cup \{x\})\} = V(H^*)$ .

Ahora definimos la gráfica  $G_i^*$  como la gráfica con conjunto de vértices  $V(H^*)$  y conjunto de aristas  $\{x'y' | x, y \in V(H^*) \text{ y } (x, x'), (y, y') \in L_i\}$ . Ahora sólo nos falta mostrar que  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_t^*$  es una CRA de  $H^*$  tal que  $d_{G_t^*}(v) = 0$ . Como las segundas coordenadas en cada conjunto  $V(G_i \cup \{x\})$  no se repiten, por construcción de  $G_i^*$  tenemos que  $G_i^* \cong H^*$  para toda  $i$ . Así, los reemplazos de aristas que se efectúan para pasar de  $G_i$  a  $G_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq t-1$ , son heredados en la cadena  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_t^*$  por lo que efectivamente es una CRA de  $H^*$ . Finalmente, como  $v \in V(H^*) \setminus V(G_t)$ , tenemos que  $d_{G_t^*}(v) = 0$ .

Suponemos ahora que tenemos una CRA  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_t^*$  tal que  $H = G_1^*$ ,  $V(G_i^*) = V(H)$  para toda  $i$  y  $d_{G_t^*}(v) = 0$ . Como  $G^*$  tiene al menos un vértice de grado 0, entonces cada  $G_i^*$  tiene un vértice, digamos  $v_i$ , de grado 0. Definimos  $G'_i = G_i^* - v_i$  y mostraremos que  $G'_1, G'_2, \dots, G'_t$  es una CRA de  $G$  con  $G'_1 = H - v_1$ . Que  $G'_i \cong G$  es fácil de ver. Sólo falta mostrar, para toda  $1 \leq i \leq t-1$ , que  $G'_{i+1}$  se obtiene de  $G'_i$  a través de un reemplazo admisible de arista. Si  $v_i = v_{i+1}$ , el reemplazo admisible que se usa para pasar de  $G_i^*$  a  $G_{i+1}^*$  involucra a puros vértices de  $V(G'_i) = V(G'_{i+1})$ , por lo que es un reemplazo admisible en  $G'_i$ . Si, por otro lado,  $v_i \neq v_{i+1}$ , entonces  $v_{i+1}$  tiene que tener grado uno en  $G_i^*$  y por lo tanto también en  $G'_i$ . Entonces es fácil ver que, si  $u$  es el vecino de  $v_{i+1}$  en  $G'_i$ , podemos reemplazar  $uv_{i+1}$  por  $uv_i$  y obtenemos  $G'_{i+1}$ , por lo que también es un reemplazo admisible de arista. Como esto se da para toda  $i$ , tenemos que  $G'_1, G'_2, \dots, G'_t$  es una CRA de  $G$ .  $\square$

### 5.3. Tercera caracterización y algoritmo

En esta sección, presentaremos una serie de herramientas con las cuales será más sencillo manipular una gráfica de manera que se pueda determinar con mayor facilidad si es amoeba o no. En particular, daremos un algoritmo para este fin.

Por otro lado, dada una gráfica  $G$  con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y para cualesquiera  $i, j, k, l \in [n]$ , abreviaremos con  $[i, j] \rightarrow [k, l]$  al reemplazo de aristas de  $G$ , donde  $v_i v_j \in E(G)$ ,  $v_k v_l \in \overline{G}$  y  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Al conjunto de reemplazos admisibles de una gráfica  $G$  lo denotaremos con  $R_G$ . A continuación, trabajaremos con etiquetas sobre los vértices de  $G$ , donde a los vértices de la gráfica  $G$  les daremos el etiquetamiento natural  $v_i \rightarrow i$ . Sea  $L = \{ij | v_i v_j \in E(G)\}$  el conjunto de etiquetas de las aristas de  $G$ , donde  $ij = ji$ . Dada una permutación  $\varphi \in S_n$ , denotaremos con  $G_\varphi$  a la copia de  $G$  sobre el mismo conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  y  $E(G_\varphi) = \{v_i v_j | \varphi(i)\varphi(j) \in L\}$ . Es decir, la copia  $G_\varphi$  está dada tras reetiquetar los vértices de  $G$  mediante la permutación  $\varphi$  y manteniendo el mismo conjunto  $L$  de etiquetas de las aristas.

Dado un reemplazo admisible de aristas  $\rho = [i, j] \rightarrow [k, l] \in R_G$ , debido a que la gráfica obtenida tras el reemplazo es isomorfa a  $G$ , existe entonces al menos una permutación  $\varphi \in S_n$  que permuta las etiquetas de los vértices, de tal forma que la copia así obtenida sea  $G_\varphi$ . Claramente, esta permutación es única salvo por automorfismos de  $G_\varphi$ . Denotaremos entonces con  $S_G(\rho)$  al conjunto de todas estas posibles permutaciones. Dados estos conjuntos de permutaciones, definimos ahora al grupo  $S_G$  como  $S_G = \langle \bigcup_{\rho \in R_G} S_G(\rho) \rangle$ .

Debido a que el conjunto de etiquetas sobre las aristas,  $L$ , es invariante en el conjunto de copias de  $G$   $\{G_\varphi | \varphi \in S_G\}$ , es posible concatenar permutaciones. Es decir, dadas  $\varphi, \psi \in S_G$ , tenemos que  $(G_\psi)_\varphi = G_{\varphi\psi}$ . Entonces, como las permutaciones generadoras de  $S_G$  son producto de los reemplazos admisibles de aristas, el conjunto  $\{G_\varphi | \varphi \in S_G\}$  consiste de todas las copias de  $G$  a las cuales es posible llegar a través de una CRA.

Observemos también que  $S_G$  actúa de manera natural sobre el conjunto de enteros  $[n]$  a través de  $(\varphi, i) \mapsto \varphi(i)$  para cualquier  $\varphi \in S_G$  e  $i \in [n]$ . El estudio de esta acción y, en particular, de las órbitas generadas será la clave para determinar si una gráfica es amoeba o no. Esto es el contenido del siguiente teorema.

**Teorema 5.13** (Caracterización 3). *Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ .  $G$  es amoeba si y sólo si  $|(n+1)/S_{G^*}| = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $N$  arbitrariamente grande. Sea  $H^*$  una copia de  $G^* = G \cup K_1$  en  $K_N$  y sea  $V(H^*) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$  donde  $v_{n+1}$  es un vértice de grado 0 en  $H^*$ . Por el Teorema 5.12, sabemos que  $G$  es amoeba si y sólo si, para todo vértice  $v \in V(H^*)$ , existe una CRA  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_t^*$  tal que  $H^* = G_1^*$ ,  $V(G_i^*) = V(H^*)$  para toda  $i$  y  $d_{G_i^*}(v) = 0$ . Por lo dicho arriba, esto es equivalente a mostrar que, para todo  $i \in [n+1]$ , existe un

elemento  $\sigma \in S_{G^*}$  tal que  $\sigma(i) = j$ , para alguna  $j \in [n + 1]$  tal que  $v_j$  es de grado cero en  $H^*$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $j = n + 1$ , ya que, de lo contrario, podemos tomar  $\sigma' = (j \ n + 1)\sigma \in S_{G^*}$ , con  $(j \ n + 1)$  la transposición que intercambia a  $j$  por  $n + 1$  y viceversa, la cual claramente está en  $S_{G^*}$ . Por lo tanto, esto último equivale a decir que toda  $i \in [n + 1]$  está en la órbita de  $n + 1$ , lo cual es equivalente a afirmar que  $|[n + 1]/S_{G^*}| = 1$ .  $\square$

El Teorema 5.13 nos indica que únicamente requerimos analizar la acción del grupo  $S_{G^*}$  sobre  $[n + 1]$  y que la gráfica  $G$  es amoeba si y sólo si esta acción es transitiva, es decir, que tiene una sola órbita. Dado esto, podemos proceder a describir el algoritmo arriba mencionado.

El siguiente pseudocódigo da una descripción básica de un algoritmo que, dada una gráfica  $G$  como entrada, determina si  $G$  es amoeba o no. Observemos que un reemplazo admisible de arista  $[i, j] \rightarrow [k, l]$  debe mantener la secuencia de grados de la gráfica. Es decir, como sólo el grado de los vértices  $v_i, v_j$  disminuye en una unidad y el de los vértices  $v_k, v_l$  aumenta en una unidad, mientras que los demás vértices se quedan intactos, en caso de tener un reemplazo de arista no trivial, debemos tener uno de los siguientes casos:

1. Si  $\{i, j\} \neq \{k, l\} : \{d(v_i), d(v_j)\} = \{d(v_k) + 1, d(v_l) + 1\}$
2. Si  $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$ , digamos que  $i = k$ , entonces:  $d(v_j) = d(v_l) + 1$

En el algoritmo, para acotar el conjunto de todas las combinaciones de intercambios de aristas, consideraremos reemplazos de aristas que cumplan una de estas dos condiciones y, dado esto, verificaremos si son reemplazos admisibles o no revisando si existe un isomorfismo entre la gráfica dada y la resultante al aplicar el reemplazo. La idea del algoritmo es, dada una gráfica  $G$  sobre el conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ir haciendo crecer el grupo  $A$  generado por todos los isomorfismos entre  $G^* = G \cup K_1$  (con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ ) y las copias de  $G^*$  que se van obteniendo a través de los reemplazos admisibles de aristas encontrados. Como paso inicial, se pone a  $A$  como el grupo de automorfismos de  $G$ . A medida que va creciendo  $A$ , se va revisando si este grupo es transitivo sobre  $[n + 1]$ . Si en algún momento del procedimiento, se obtiene una respuesta positiva, quiere decir, por el Teorema 5.13, que  $G$  es una amoeba. Si ya hemos explorado todos los potenciales reemplazos admisibles de aristas y no hemos obtenido

una respuesta positiva, quiere decir que el grupo  $A = S_G$  pero que  $S_G$  tiene más de una órbita en su acción sobre  $[n + 1]$ , por lo que  $G$  no es amoeba.

**Algoritmo 5.14.** .

*ENTRADA:* gráfica  $G$  definida sobre conjunto de vértices  $[n]$ .

1. Definimos  $G^* = G \cup K_1$  sobre conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ .
2. Determinamos el grupo  $A$  de todos los automorfismos de  $G^*$ .
3. Determinamos el conjunto  $R$  de reemplazos de aristas que cumplan una de las siguientes condiciones:

a) Si  $\{i, j\} \neq \{k, l\} : \{d(v_i), d(v_j)\} = \{d(v_k) + 1, d(v_l) + 1\}$ , o

b) Si  $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$ , digamos que  $i = k$ , entonces:  $d(v_j) = d(v_l) + 1$

4. Mientras  $R$  no sea vacío:

Escoge  $[i, j] \rightarrow [k, l] \in R$ .

Si  $G^* - v_i v_j + v_k v_l$  es isomorfa a  $G^*$ , sea  $\varphi$  el isomorfismo asociado. Entonces define  $A = \langle A \cup \{\varphi\} \rangle$  y calcula el número de órbitas  $\alpha$  de  $A$  en  $[n + 1]$ .

Si  $\alpha = 1$ : *ENTREGA:*  $G$  es amoeba

Define  $R = R \setminus \{[i, j] \rightarrow [k, l]\}$

5. *ENTREGA:*  $G$  no es amoeba

Observemos que en el paso 4 se van revisando uno a uno los elementos de  $R$ . Habiendo seleccionado un  $[i, j] \rightarrow [k, l] \in R$ , se comprueba primeramente si es admisible. Si sí lo es, se redefine el grupo  $A$  incluyendo como un nuevo generador el isomorfismo inducido por el reemplazo en cuestión y se revisa si el nuevo grupo tiene una sola órbita. En caso afirmativo, quiere decir que la gráfica es amoeba, en caso negativo se procede con los siguientes reemplazos contenidos en  $R$ , tras haber removido primero el reemplazo que se acaba de revisar. Por otro lado, si el posible reemplazo no es admisible, simplemente se remueve de  $R$  y se repite el paso con un nuevo reemplazo contenido en  $R$ . El paso 4 se repite hasta llegar a entregar que  $G$  es amoeba o hasta que  $R$  queda vacío, en cuyo caso

quiere decir que ya se revisaron todos los posibles reemplazos sin obtener que el grupo actúa transitivamente sobre  $[n + 1]$ , con lo cual se entrega que  $G$  no es amoeba.

Es importante mencionar que el algoritmo depende de un procedimiento para comprobar isomorfismos entre gráficas, de uno que calcule todos los automorfismos de una gráfica, así como de uno que calcule el número de órbitas de un subgrupo de  $S_{n+1}$  al actuar sobre el conjunto  $[n + 1]$ . El problema del isomorfismo de gráficas se ha estudiado intensivamente. Actualmente el algoritmo más eficiente, anunciado por Babai en 2017 pero aún sin publicar, tiene un tiempo de ejecución casi-polinomial [3] (para más información ver [2]). El problema de calcular el grupo de automorfismos de una gráfica se sabe que es al menos tan difícil como el problema del isomorfismo de gráficas. Está claramente en NP, pero no se sabe si sea NP-completo. El problema de determinar el número de órbitas de la acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $X$  a través de un conjunto  $S$  de generadores de  $G$  se puede llevar a cabo fácilmente aplicando a cada elemento de  $X$  los  $|S|$  generadores por lo que se requieren  $O(|X||S|)$  pasos, lo cual es eficiente siempre que  $|S|$  no sea muy grande (ver [25] para más información sobre esto).

A continuación veremos algunos ejemplos.

La gráfica  $G_n$ , formada por un ciclo  $v_1v_2\dots v_{n-1}v_1$  de longitud  $n-1$  a la que le añadimos un vértice  $v_n$  así como la arista  $v_1v_n$ , es amoeba.

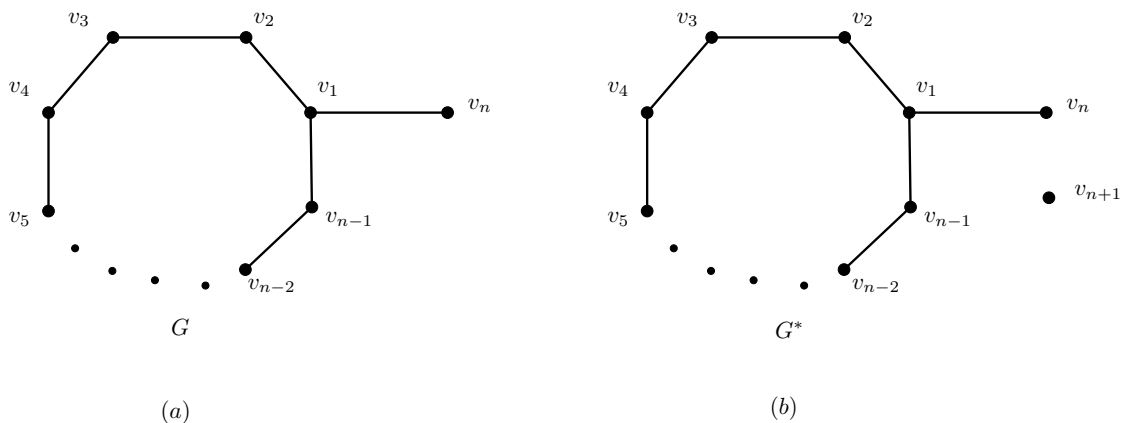


Figura 5.9: (a) Gráfica  $G_n$ . (b) Gráfica  $G_n^* = G_n \cup K_1$ .

*Demostración.* Sea  $G_n^* = G_n \cup K_1$  con  $V(G_n^*) = V(G_n) \cup \{v_{n+1}\}$ . Primero damos el etiquetamiento natural  $v_i \rightarrow i$  como se muestra en la Figura 5.10.

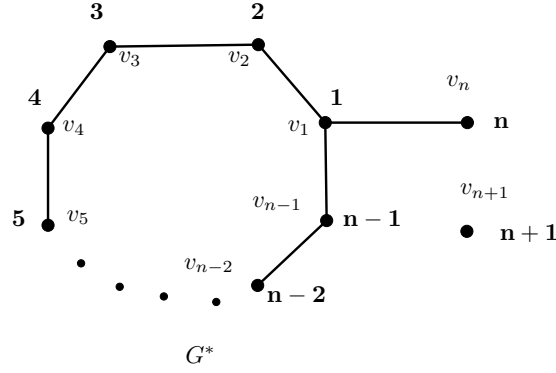


Figura 5.10: Etiquetamiento de  $G^*$

Así,  $L = \{12, 23, 34, \dots, n-2 \ n-1, n-1 \ 1, 1n\}$ . Notemos que esta gráfica sólo tiene una simetría y ninguna rotación (aparte de la triviales) por lo que

$$Aut_{G^*} = \left\{ id, (2 \ n-1)(3 \ n-2) \dots \left( \frac{n}{2} \ \frac{n}{2} + 1 \right) \right\} \quad \text{si } n \text{ es par y}$$

$$Aut_{G^*} = \left\{ id, (2 \ n-1)(3 \ n-2) \dots \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) \right\} \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Observemos que tenemos los siguientes reemplazos admisibles:

1.  $[1, n] \rightarrow [1, n+1]$ ,
2.  $[1, n] \rightarrow [n-1, n]$ ,
3.  $[n-1, n-2] \rightarrow [n-2, n]$ .

Cuando hacemos el reemplazo  $[1, n] \rightarrow [1, n+1]$  obtenemos la permutación  $\varphi_1 = (n \ n+1)$ , es decir, las etiquetas de los vértices  $v_n$  y  $v_{n+1}$  se intercambian (Figura 5.11a).

El reemplazo  $[1, n] \rightarrow [n-1, n]$  nos da la permutación  $\varphi_2 = (1 \ 2 \ 3 \dots n-1)$ , como se ve en la gráfica de la Figura 5.11b.

El tercer reemplazo,  $[n-1, n-2] \rightarrow [n-2, n]$ , nos da la permutación  $\varphi_3 = (n \ n-1)$ . Así obtenemos la gráfica de la Figura 5.11c. Obsérvese que tras cada reemplazo de arista, el conjunto  $L$  no cambia, se queda invariante.



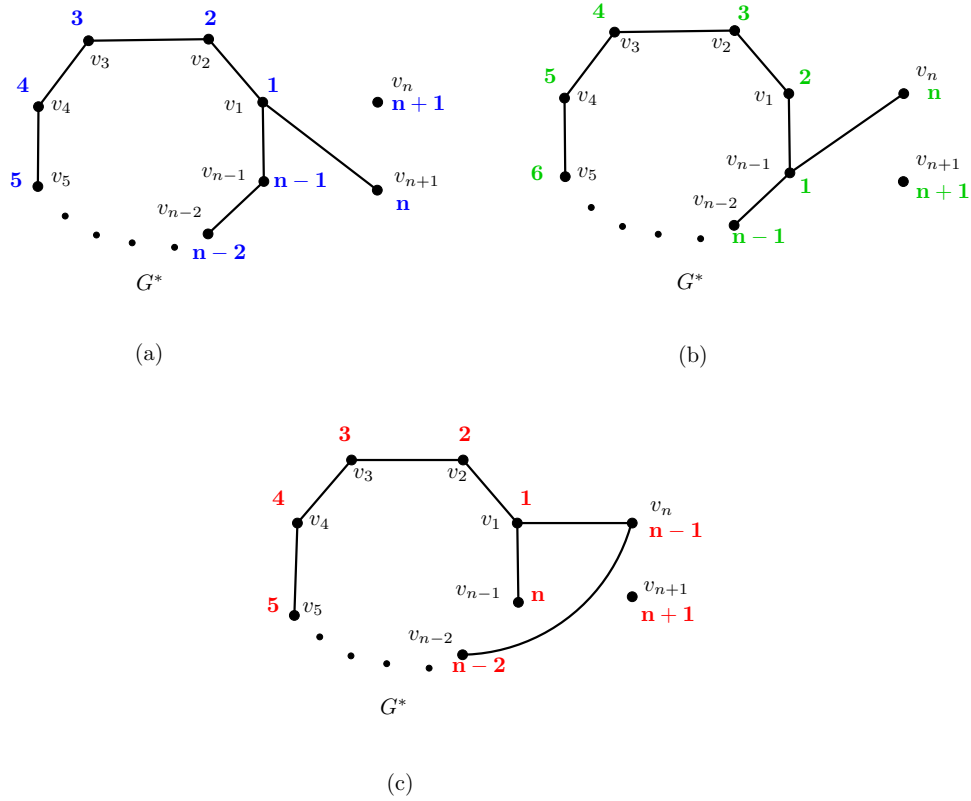


Figura 5.11: (a) Gráfica obtenida al hacer el reemplazo  $[1, n] \rightarrow [1, n + 1]$ . (b) Gráfica obtenida al hacer el reemplazo  $[1, n] \rightarrow [n - 1, n]$ . (c) Gráfica obtenida al hacer el reemplazo  $[n - 1, n - 2] \rightarrow [n - 2, n]$ .

Dados estos reemplazos admisibles, procederemos a demostrar que la gráfica  $G$  es una amoeba. Para esto, ponemos un vértice por cada etiqueta y pondremos una flecha si hubo una permutación de las etiquetas de los vértices. Como la permutación  $\varphi_1$  intercambia las etiquetas de los vértices  $v_n$  y  $v_{n+1}$ , pondremos una flecha azul de  $n$  a  $n + 1$  y otra de  $n + 1$  a  $n$ . La permutación  $\varphi_2$  recorre las etiquetas de los vértices que están dentro del ciclo, es decir, el vértice  $v_{n-1}$  pasa a tener la etiqueta 1, el vértice  $v_1$  a tener la etiqueta 2, el vértice  $v_2$  a tener la etiqueta 3 y así con todos los vértices dentro del ciclo, por lo que ponemos flechas verdes correspondientes a esta permutación. La permutación  $\varphi_3$  intercambia las etiquetas de los vértices  $v_n$  y  $v_{n-1}$ , por lo que ponemos una flecha roja de  $n$  a  $n - 1$  y otra de  $n - 1$  a  $n$ . De esta manera, nos queda el siguiente esquema de la acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ , el grupo generado por  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sobre  $[n + 1]$ , donde las flechas nos dicen cómo actúan los generadores de este grupo sobre el conjunto de las etiquetas

de los vértices.

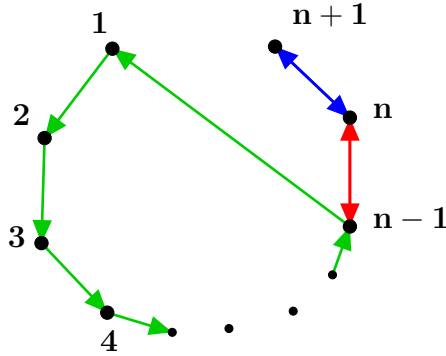


Figura 5.12: Esquema de la acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$  sobre  $[n+1]$ .

Como  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$  es subgrupo de  $S_{G^*}$  que tiene una sola órbita sobre  $[n+1]$  entonces  $S_{G^*}$  también actúa transitivamente sobre  $[n+1]$ . Por tanto, por el Teorema 5.13,  $G$  es amoeba.  $\square$

Obsérvese que las permutaciones asociadas a los reemplazos de aristas no necesariamente son únicas. En el ejemplo anterior, la permutación asociada al reemplazo  $[1, n] \rightarrow [n-1, n]$  no es la única para este reemplazo de arista, también tenemos la permutación  $(1 \ n-1)(2 \ n-2) \dots (\frac{n}{2}-1 \ \frac{n}{2}+1)$ , por lo que  $S_{G^*}([1, n] \rightarrow [n-1, n]) = \{(1 \ 2 \ 3 \dots n-2 \ n-1), (1 \ n-1)(2 \ n-2) \dots (\frac{n}{2}-1 \ \frac{n}{2}+1)\}$  si  $n$  es par.

**Ejemplo 5.15.** *La trayectoria  $P_n$  es una amoeba.*

*Demostración.* Sea  $G = P_n$  y sea  $G^* = P_n \cup K_1$ . Al igual que en el ejemplo anterior, también le daremos el etiquetamiento natural  $v_i \rightarrow i$ . De esta forma,

$$L = \{12, 23, \dots, n-1 \ n\}.$$

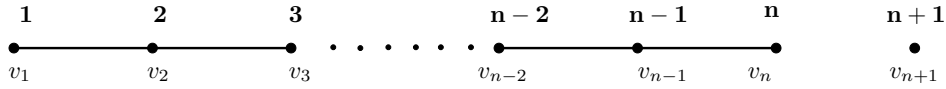


Figura 5.13: La gráfica  $G^* = P_n \cup K_1$ .

Notemos que en esta ocasión tenemos los siguientes reemplazos admisibles:

1.  $[n - 1, n] \rightarrow [n - 1, n + 1]$ ,
2.  $[n - 1, n] \rightarrow [n, 1]$ .

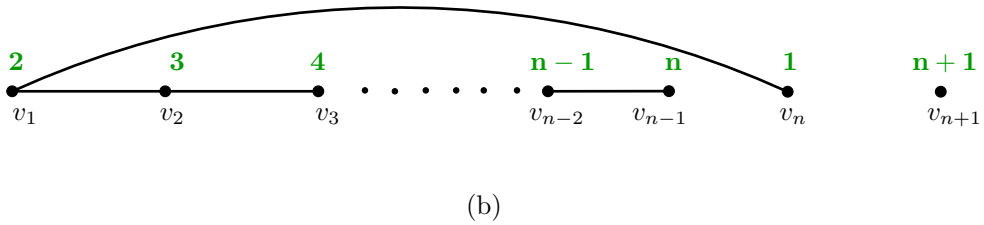
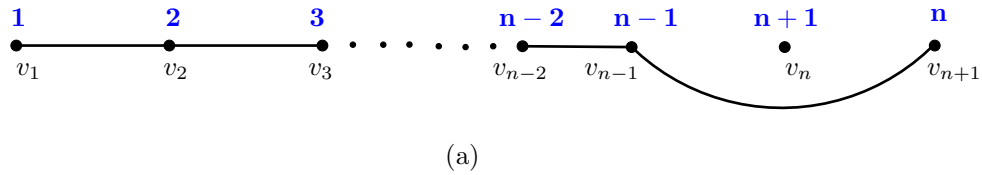


Figura 5.14: (a) Gráfica obtenida al hacer el reemplazo  $[n - 1, n] \rightarrow [n - 1, n + 1]$ . (b) Gráfica obtenida al hacer el reemplazo  $[n - 1, n] \rightarrow [n, 1]$ .

Cuando hacemos el reemplazo  $[n - 1, n] \rightarrow [n - 1, n + 1]$  obtenemos la permutación  $\varphi_1 = (n \ n + 1)$ , como se muestra en la Figura 5.14(a). El reemplazo  $[n - 1, n] \rightarrow [n, 1]$  nos da la permutación  $\varphi_2 = (1 \ 2 \ 3 \dots n)$ , como podemos ver en la Figura 5.14(b).

Ahora, procedemos a hacer el esquema de acción de las dos permutaciones anteriores, con lo que nos queda la Figura 5.15. Observemos que, como  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$  es subgrupo de  $S_{G^*}$  que tiene una sola órbita sobre  $[n + 1]$ , entonces  $S_{G^*}$  también actúa transitivamente sobre  $[n + 1]$ . Por tanto, por el Teorema 5.13,  $G$  es amoeba.  $\square$

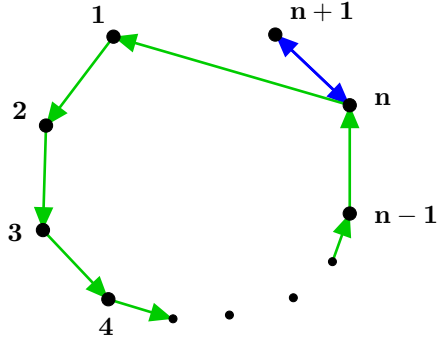


Figura 5.15: Esquema de la acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$  sobre  $[n + 1]$ .

Las estrellas con al menos 3 picos no cumplen la propiedad de los grados dada en el Corolario 5.11, por lo que no pueden ser amoebas. Sin embargo, daremos una demostración alternativa usando la caracterización del Teorema 5.13.

**Ejemplo 5.16.** *La estrella  $K_{n-1,1}$  no es amoeba para  $n \geq 4$ .*

*Demostración.* Sea  $G = K_{n-1,1}$  y  $G^* = K_{n-1,1} \cup K_1$  la gráfica a la que damos el etiquetamiento  $v_i \rightarrow i$ .

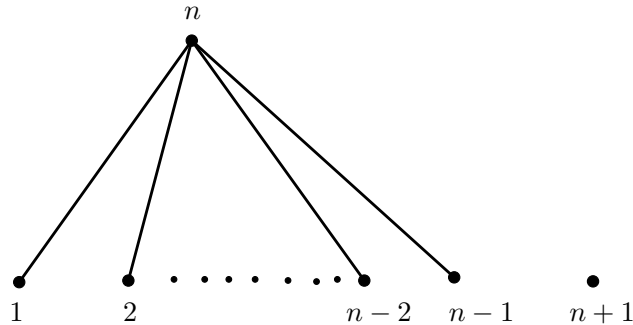


Figura 5.16: La gráfica  $G^* = K_{n-1,1} \cup K_1$ .

El conjunto de reemplazos admisibles es  $R_{G^*} = \{[i, n] \rightarrow [n + 1, n] | i \in [n - 1]\}$  y esto nos genera a  $S_{G^*} = \langle (i \ n + 1) | i \in [n - 1] \rangle$ . Entonces  $G^*$  tiene dos órbitas:  $[n - 1] \cup \{n + 1\}$  y  $\{n\}$ . Así, por el Teorema 5.13,  $G$  no es amoeba.  $\square$

A continuación, veremos un ejemplo de un árbol con grado máximo arbitrario el cual cumple la condición de los grados necesaria para las amoebas (Corolario 5.11), es decir,

que tiene vértices de grado 1, 2, 3, ... hasta grado máximo  $k$ , pero que no es amoeba.

Sea  $T_k$  el árbol con un vértice  $u$  de grado  $k+1$  tal que sus vecinos son  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  con  $d(v_i) = i + 1$  y todos los vecinos de  $v_i$  diferentes a  $u$  son hojas. Obsérvese que por construcción, el vértice  $v_{k-1}$  es el único vértice de grado  $k$ .

**Ejemplo 5.17.** *El árbol  $T_k$  no es amoeba para  $k > 1$ .*

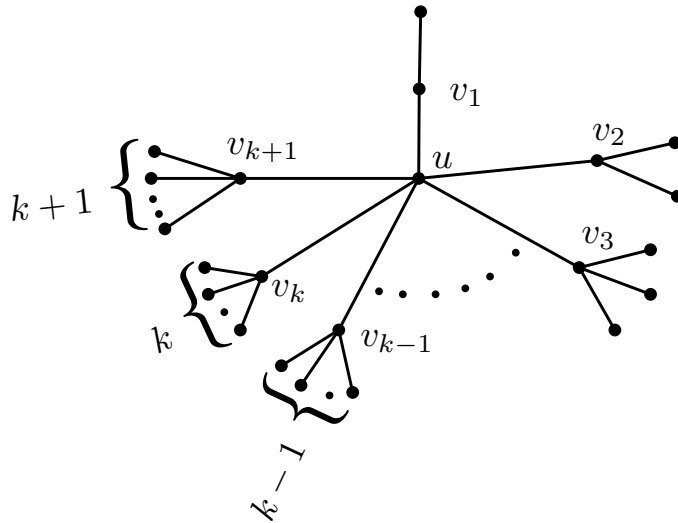


Figura 5.17: Gráfica que tiene todos los grados posibles y no es amoeba.

*Demostración.* Para que  $T_k$  sea amoeba, necesitamos que todo vértice pueda bajarse de grado con cierto reemplazo admisible de arista. Como  $d(u) = k + 1$  y  $v_{k-1}$  es el único vértice de grado  $k$ , entonces  $u$  tendría que convertirse en el vértice  $v_{k-1}$  mediante un reemplazo admisible de arista. Sin embargo, esto no se puede, pues  $v_{k-1}$  tiene  $k - 1$  vecinos que son hojas y no podemos hacer que  $u$  tenga  $k - 1$  vecinos de hojas con un reemplazo admisible de arista. Así, el vértice  $u$  no puede disminuir de grado y por lo tanto,  $G$  no es amoeba.  $\square$

A continuación, daremos la construcción de una familia de árboles  $A_k$  con grado máximo  $k$ , el cual se construirá a partir de dos árboles  $A_{k-1}$  con grado máximo  $k - 1$ . Sea  $A_2 = P_2$ . Para  $i \geq 2$ , definiremos  $A_{i+1}$  al árbol formado por dos copias,  $A$  y  $A'$ , de  $A_i$  tal que unificamos el vértice de grado máximo en  $A$  con un vértice  $u$  de grado 1 en  $A'$  adyacente al vértice de grado máximo en  $A'$ .

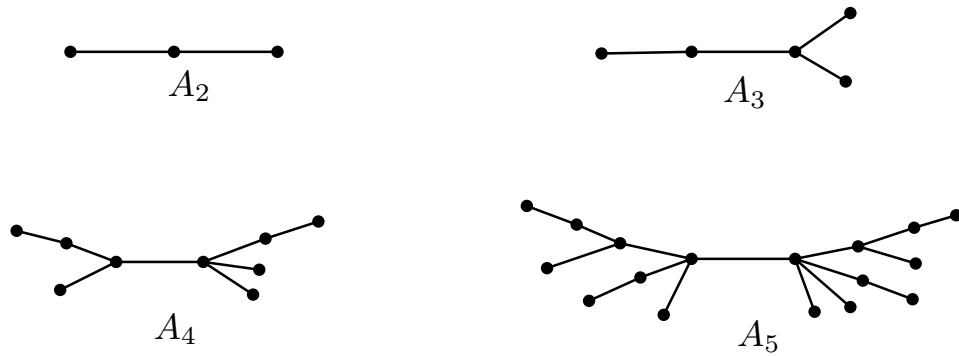


Figura 5.18: Árboles  $A_i$ ,  $2 \leq i \leq 5$ .

Demostraremos que  $A_3$  y  $A_4$  son amoebas.

**Ejemplo 5.18.**  $A_3$  es amoeba.

*Demostración.* Sean  $G = A_3$  y  $G^* = A_3 \cup \{v_6\}$ . Etiquetamos a los vértices como en los ejemplos anteriores. Así,  $L = \{12, 13, 34, 35\}$ .

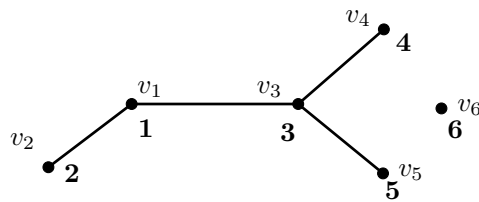


Figura 5.19: Gráfica  $G^* = A_3 \cup \{v_6\}$ .

En esta gráfica se tienen los siguientes reemplazos admisibles:

1.  $[3, 4] \rightarrow [1, 4]$ ,
2.  $[1, 3] \rightarrow [2, 3]$ ,
3.  $[3, 5] \rightarrow [3, 6]$ ,
4.  $[3, 4] \rightarrow [3, 6]$ .

El reemplazo  $[3, 4] \rightarrow [1, 4]$  nos da la permutación  $\varphi_1 = (1 \ 3)(5 \ 2)$ . Con el siguiente reemplazo,  $[1, 3] \rightarrow [2, 3]$ , se tiene la permutación  $\varphi_2 = (1 \ 2)$ . Al hacer el reemplazo

$[3, 5] \rightarrow [3, 6]$  obtenemos  $\varphi_3 = (5 \ 6)$ , y el último,  $[3, 4] \rightarrow [3, 6]$ , nos da  $\varphi_4 = (6 \ 4)$ . Para visualizar mejor estos reemplazos de aristas ver la Figura 5.20.

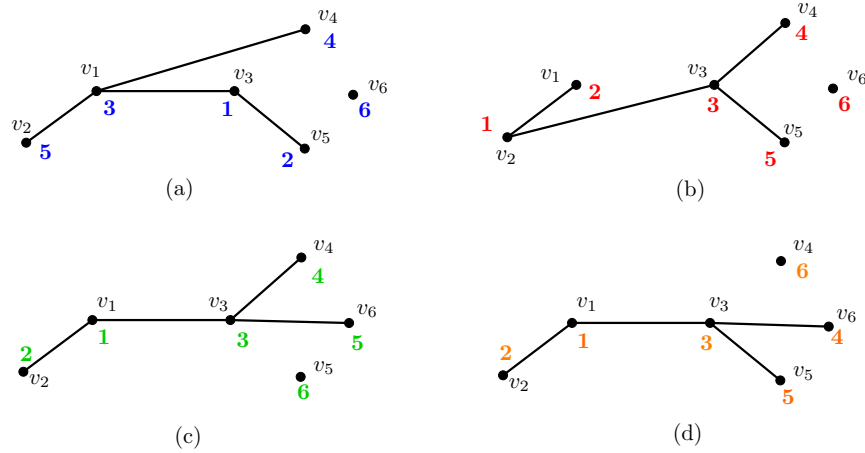


Figura 5.20: Gráficas que se obtienen al hacer los reemplazos de aristas arriba mencionados.

En la Figura 5.21 se muestra el esquema de acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \rangle$  sobre los vértices de la gráfica  $G^*$ .

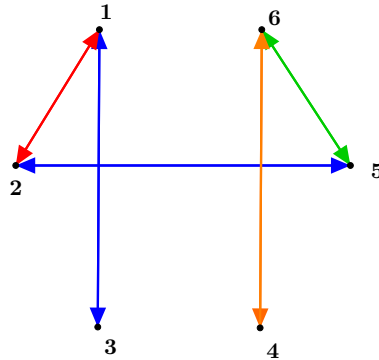


Figura 5.21: Esquema de la acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \rangle$  sobre  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Como  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \rangle$  es subgrupo de  $S_{G^*}$  que tiene una sola órbita sobre  $[n + 1]$  entonces  $S_{G^*}$  actúa transitivamente sobre  $[n + 1]$ . Entonces, por el Teorema 5.13,  $G$  es amoeba.  $\square$

**Ejemplo 5.19.**  $A_4$  es amoeba.

*Demostración.* Sean  $G = A_4$  y  $G^* = A_4 \cup \{v_{10}\}$ . Etiquetamos a los vértices como en los ejemplos anteriores. Así,  $L = \{12, 23, 14, 15, 56, 67, 58, 59\}$ .

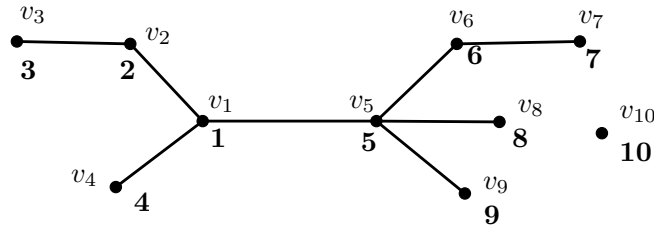


Figura 5.22: Gráfica  $G^* = A_4 \cup \{v_{10}\}$ .

Tenemos los siguientes reemplazos de aristas:

1.  $[5, 9] \rightarrow [1, 9]$ ,
2.  $[1, 5] \rightarrow [2, 5]$ ,
3.  $[5, 9] \rightarrow [5, 10]$ ,
4.  $[5, 8] \rightarrow [5, 10]$ ,
5.  $[5, 6] \rightarrow [5, 7]$ .

Al hacer el reemplazo  $[5, 9] \rightarrow [1, 9]$  obtenemos la permutación  $\varphi_1 = (1\ 5)(6\ 2)(3\ 7)(4\ 8)$ , como se puede ver en la Figura 5.23a. El siguiente reemplazo,  $[1, 5] \rightarrow [2, 5]$ , nos da la permutación  $\varphi_2 = (1\ 2)(3\ 4)$  (Figura 5.23b). Con el reemplazo  $[5, 9] \rightarrow [5, 10]$  tenemos la permutación  $\varphi_3 = (9\ 10)$  (Figura 5.23c). Cuando hacemos el reemplazo  $[5, 8] \rightarrow [5, 10]$  se obtiene la permutación  $\varphi_4 = (8\ 10)$  (Figura 5.23d). El último reemplazo,  $[5, 6] \rightarrow [5, 7]$ , nos da la permutación  $\varphi_5 = (6\ 7)$  (Figura 5.23e).



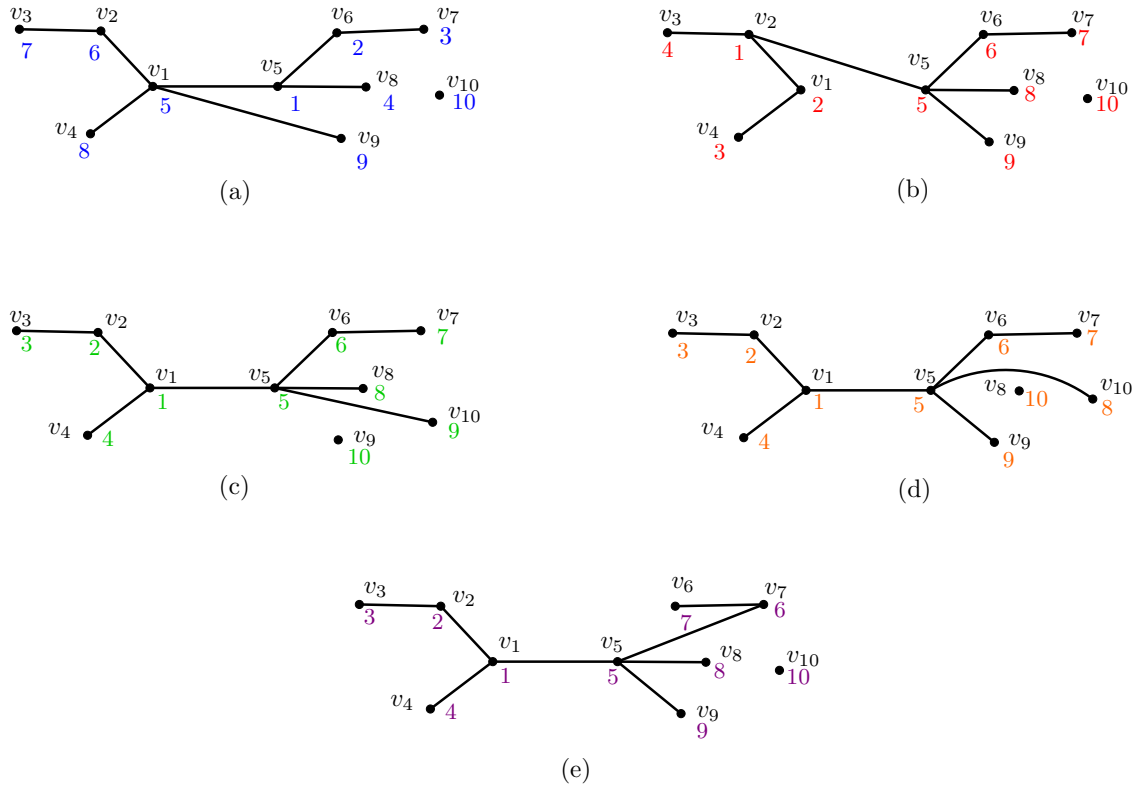


Figura 5.23: Gráficas resultantes al hacer los reemplazos de aristas que se mencionaron anteriormente.

Realizamos el esquema de acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \rangle$  como lo explicamos anteriormente y nos queda la gráfica de la Figura 5.24.

Como  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \rangle$  es subgrupo de  $S_{G^*}$  que tiene una sola órbita sobre  $[n + 1]$  entonces  $S_{G^*}$  actúa transitivamente sobre  $[n + 1]$ . Así, por el Teorema 5.13,  $G$  es amoeba.  $\square$

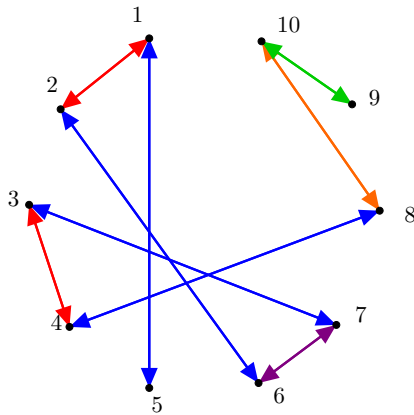


Figura 5.24: Esquema de la acción de  $\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \rangle$  sobre  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

La idea para demostrar que estas gráficas son amoebas es que todo vértice de grado  $i$  pueda convertirse, mediante un reemplazo de arista, en su vértice consecutivo de grado, tal que ambos vértices estén en la misma capa, es decir, que estén a la misma distancia del vértice central más próximo.

Probablemente la técnica arriba mencionada sirva para demostrar que la familia entera forma una familia de amoebas. Sin embargo, dar una demostración general queda fuera de los propósitos de esta tesis.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis, tras dar el contexto teórico de donde surgen las amoebas, se desarrolló teoría para entender mejor el comportamiento de este tipo de gráficas, gracias a la cual se obtuvieron algunos resultados como son los tres teoremas de caracterización:

1. (Teorema 5.10).  $G$  es amoeba si y sólo si, para toda copia  $H$  de  $G$  en  $K_n$  y para todo  $v \in V(H)$ , existe una CRA  $G_1, \dots, G_t$  tal que  $G_1 = H$  y  $v \notin V(G_t)$ .
2. (Teorema 5.12). Una gráfica  $G$  es una amoeba si y sólo si para toda copia  $H^*$  de  $G^* = G \cup K_1$  en  $K_n$  y todo vértice  $v \in V(H^*)$ , existe una CRA  $G_1^*, G_2^*, \dots, G_t^*$  tal que  $H^* = G_1^*$ ,  $V(G_i^*) = V(H^*)$  para toda  $i$  y  $d_{G_t^*}(v) = 0$ .
3. (Teorema 5.13). Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ .  $G$  es amoeba si y sólo si  $|(n+1)/S_{G^*}| = 1$ .

Finalmente, se dio un algoritmo para determinar si una gráfica es amoeba y se realizaron algunos ejemplos de gráficas que eran amoebas y de gráficas que no lo eran. Queda pendiente verificar que toda gráfica de la familia de la Figura 5.18 es amoeba. Como una meta más lejana, estaría la de caracterizar a todos los árboles amoebas. También se podrían estudiar otras familias de gráficas como familias interesantes de gráficas bipartitas que pudieran ser amoebas. Por último, sería interesante estudiar el tema algorítmico y proponer estrategias de optimización, ya que probablemente el tiempo de ejecución del algoritmo presentado en esta tesis pueda verse reducido al estudiar el problema del isomorfismo en gráficas directamente en la clase de las amoebas.

Cabe mencionar que, en paralelo con este trabajo de tesis, los investigadores Adriana Hansberg, Amanda Montejano y Yair Caro [8] continuaron con su investigación en el tema y abordaron a las amebas con herramientas de Teoría de Grupos, con lo cual se ha logrado un gran avance, dejando claro que este tipo de herramientas son adecuadas para este tema y que la investigación podría continuarse en esta dirección.

# Bibliografía

- [1] ALON, N., AND SPENCER, J. H. *The Probabilistic Method*, 4th ed. Wiley Publishing, 2016.
- [2] BABAI, L. <http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html>.
- [3] BABAI, L. Graph Isomorphism in Quasipolynomial Time. arXiv:1512.03547.
- [4] BOLLOBÁS, B. *Modern Graph Theory*, vol. 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] BONDY, J., AND MURTY, U. Graph Theory. *Graduate Texts in Mathematics 244* (2008).
- [6] BOWEN, M., HANSBERG, A., MONTEJANO, A., AND MÜYESSER, A. Colored unavoidable patterns and balanceable graphs. arXiv:1912.06302.
- [7] CARO, Y., HANSBERG, A., AND MONTEJANO, A. Zero-sum  $K_m$  over  $\mathbb{Z}$  and the story of  $K_4$ . *Graph. Combin.* 35, 4 (July 2019), 855–865.
- [8] CARO, Y., HANSBERG, A., AND MONTEJANO, A. Graphs isomorphisms under edge-replacements and the family of amoebas. arXiv:2007.11769.
- [9] CARO, Y., HANSBERG, A., AND MONTEJANO, A. Unavoidable chromatic patterns in 2-colorings of the complete graph. *Journal of Graph Theory* (en prensa).
- [10] CUTLER, J., AND MONTÁGH, B. Unavoidable subgraphs of colored graphs. *Discrete Mathematics* 308, 19 (2008), 4396 – 4413.
- [11] ERDÖS, P. Some remarks on the theory of graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 53 (1947), 292–294.

- [12] ERDŐS, P., AND SZEKERES, G. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica* 2 (1935), 463–470.
- [13] ERDŐS, P., AND GALLAI, T. On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Mathematica Hungarica* 10, 3-4 (9 1959), 337–356.
- [14] FOX, J., AND SUDAKOV, B. Unavoidable patterns. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 115, 8 (2008), 1561 – 1569.
- [15] GIRÃO, A., AND NARAYANAN, B. Turán theorems for unavoidable patterns. arXiv:1907.00964.
- [16] GREENWOOD, R. E., AND GLEASON, A. M. Combinatorial Relations and Chromatic Graphs. *Canadian Journal of Mathematics* 7 (1955), 1–7.
- [17] HARARY, F., MOKKEN, R., AND PLANTHOLT, M. Interpolation theorem for diameters of spanning trees. *IEEE transactions on circuits and systems* 30, 7 (1983), 429–432.
- [18] HARARY, F., AND PLANTHOLT, M. J. Classification of interpolation theorems for spanning trees and other families of spanning subgraphs. *Journal of Graph Theory* 13, 6 (1989), 703–712.
- [19] KÓVARI T., S. V., AND TURÁN, P. On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloq. Math* 3, 1 (1954), 50–57.
- [20] LIH, K.-W., LIN, C.-Y., AND TONG, L.-D. On an interpolation property of outerplanar graphs. *Discrete Applied Mathematics* 154, 1 (2006), 166–172.
- [21] MANTEL, W. Problem 28. *Wiskundige Opgaven* 10, 60-61 (1907), 320.
- [22] PRÖMEL, H. J. Complete Disorder is Impossible: The Mathematical Work of Walter Deuber. *Combinatorics, Probability and Computing* 14, 1-2 (2005), 3–16.
- [23] PUNNIM, N. Switchings, realizations, and interpolation theorems for graph parameters. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2005 (2005).
- [24] RAMSEY, F. P. On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-30, 1 (1930), 264–286.

- [25] SERESS, A. *Permutation Group Algorithms*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [26] TURÁN, P. On an extremal problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lapok* 48 (1941), 436–452.
- [27] WEST, D. *Introduction to Graph Theory*. Featured Titles for Graph Theory Series. Prentice Hall, 2001.
- [28] ZHOU, S. Interpolation theorems for graphs, hypergraphs and matroids. *Discrete mathematics* 185, 1-3 (1998), 221–229.
- [29] ЗЫКОВ, А. А. On some properties of linear complexes. *Mat. Sbornik N.S.* 24, 66 (1949), 163–188.