



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

CINEMÁTICA DIFERENCIAL Y MATRIZ OMEGA DE UN
MANIPULADOR PARALELO 4RRSS IMPLEMENTANDO UNA
CADENA VIRTUAL RRR.

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO

P R E S E N T A:

CRUZ GUTIÉRREZ DANIEL

VILLANUEVA CHAVEZ EMILIO



DIRECTOR DE TESIS:

DR. PATRICIO MARTÍNEZ ZAMUDIO

CO-DIRECTOR: DR. VÍCTOR J. GONZÁLEZ VILLELA

Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México. 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco en lo que corresponde a la DGAPA, por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través del proyecto UNAM-DGAPA-PAPIME-PE110120: " Desarrollo de material didáctico y banco de pruebas para el fortalecimiento de la enseñanza en Instrumentación y Robótica introduciendo CPS.

Daniel

Agradezco a Dios y a mis padres Elitania y Carlos por siempre apoyarme en mi formación académica y apoyo incondicional en cada momento de mi vida. A mis hermanos Rodrigo y Emiliano mis dos acompañantes de vida. De igual manera agradezco a cada uno de mis profesores por compartirme su conocimiento, en especial a nuestros asesores Dr. Patricio Martínez Zamudio que ha sido un gran apoyo y un ejemplo a seguir y Dr. Víctor J. González Villela por sus aportaciones en el proyecto, muchas gracias. Éste trabajo es dedicado a ellos.

Emilio

No hay palabras para agradecer el apoyo incondicional por parte de mi familia durante toda mi formación académica y como individuo, gracias madre por siempre estar presente, de cerca o de lejos, de madrugada o de noche, pero siempre presente; a ti padre por todo el sustento y apoyo; Cuau, Dany y Maxi por motivarme a dar siempre más. Este trabajo es dedicado a ustedes, gracias.

Agradezco a todos mis profesores que dieron de su tiempo y conocimientos para forjarme como profesionista y persona en especial al Doctor Patricio Martínez Zamudio y al Doctor Víctor J. González Villela quienes fueron pilares para el desarrollo de este trabajo. A mis entrenadores Carlos y Salvador Hernández cuyo apoyo fue clave.

1. Índice

1.	Introducción	8
1.1	¿Qué es la robótica?	8
1.2	Historia de la robótica	10
1.3	Clasificación de los robots:	12
1.4	Cadenas virtuales	20
1.4.1	Objetivo:	23
1.4.2	Hipótesis	24
1.4.3	Planteamiento del problema:	24
1.4.4	Meta:	24
2.	Teoría antecedente	25
2.1	Cinemática.....	25
2.2	Cinemática del robot	25
2.3	Matriz de rotación	25
2.4	Matrices de transformación homogénea	27
2.5	Cinemática directa e inversa	28
2.6	Cinemática directa.....	29
2.7	Problema cinemático directo por matrices de transformación homogénea	29
2.8	Cinemática inversa	30
2.9	Problema cinemático inverso por método algebraico	30
2.10	Matriz Jacobiana.....	30
2.10.1	Jacobiano analítico.....	31
2.10.2	Jacobiana geométrica.....	32
2.11	Matriz Omega	33
2.12	Coordenadas de configuración (25).....	34
2.13	Matriz en variables de estado	35
2.13.1	Concepto de estado	36
2.13.2	Vector de estado.....	36

2.13.3	Ecuaciones del modelo de estado	37
2.13.4	Representación en el espacio de estados.....	37
2.14	Teoría de Cadenas Virtuales en la literatura.....	39
2.14.1	Cadenas Virtuales para la síntesis de tipo de Mecanismos Paralelos (PM): ..	41
3.	Modelado de la cinemática diferencial	45
3.1	Cinemática Directa de Cadena Virtual.....	45
3.2	Postura del manipulador paralelo en el espacio	48
3.3	Cinemática directa paralelo 4 Delta por matrices de transformación homogénea.	50
3.4	Cinemática inversa por método algebraico cadena virtual	56
3.5	Cinemática inversa de paralelo	59
3.6	Matriz jacobiana Geométrica Cadena virtual:.....	63
3.7	Matriz en variables de estado cadena virtual	67
3.8	Matriz en variables del paralelo delta 4	69
4.	Simulación, pruebas y resultados.....	71
4.1	Primer sistema: Cadena virtual RRR Simulación.	71
4.2	Simulación la de cadena virtual RRR en Paralelo Delta 4RRSS.....	76
5.	Conclusiones	81
6.	Trabajo a futuro	83
7.	Apéndice	86

Nomenclatura:

ℓ_{1v}	Longitud #1 de cadena virtual
ℓ_{2v}	Longitud #2 de cadena virtual
ℓ_{3v}	Longitud #3 de cadena virtual
ℓ_1	Longitud #1 de primera cadena de paralelo
ℓ_2	Longitud #2 de primera cadena de paralelo
ℓ_3	Longitud #3 de primera cadena de paralelo
ℓ_4	Longitud #4 de primera cadena de paralelo
ℓ_{21}	Longitud #1 de segunda cadena de paralelo
ℓ_{22}	Longitud #2 de segunda cadena de paralelo
ℓ_{23}	Longitud #3 de segunda cadena de paralelo
ℓ_{24}	Longitud #4 de segunda cadena de paralelo
ℓ_{31}	Longitud #1 de tercera cadena de paralelo
ℓ_{32}	Longitud #2 de tercera cadena de paralelo
ℓ_{33}	Longitud #3 de tercera cadena de paralelo
ℓ_{34}	Longitud #4 de tercera cadena de paralelo
ℓ_{41}	Longitud #1 de cuarta cadena de paralelo
ℓ_{42}	Longitud #2 de cuarta cadena de paralelo
ℓ_{43}	Longitud #3 de cuarta cadena de paralelo
ℓ_{44}	Longitud #4 de cuarta cadena de paralelo
θ_{1v}	Theta 1 cadena virtual
θ_{2v}	Theta 2 cadena virtual
θ_{3v}	Theta 3 cadena virtual
θ_1	Theta 1 de primera cadena de paralelo
θ_2	Theta 2 de primera cadena de paralelo
θ_3	Theta 3 de primera cadena de paralelo
θ_4	Theta 4 de primera cadena de paralelo
θ_5	Theta 5 de primera cadena de paralelo
θ_{21}	Theta 1 de segunda cadena de paralelo
θ_{22}	Theta 2 de segunda cadena de paralelo

θ_{23}	Theta 3 de segunda cadena de paralelo
θ_{24}	Theta 4 de segunda cadena de paralelo
θ_{25}	Theta 5 de segunda cadena de paralelo
θ_{31}	Theta 1 de tercera cadena de paralelo
θ_{32}	Theta 2 de tercera cadena de paralelo
θ_{33}	Theta 3 de tercera cadena de paralelo
θ_{34}	Theta 4 de la tercera cadena del paralelo
θ_{35}	Theta 5 de la tercera cadena del paralelo
θ_{41}	Theta 1 de cuarta cadena de paralelo
θ_{42}	Theta 2 de cuarta cadena de paralelo
θ_{43}	Theta 3 de cuarta cadena de paralelo
θ_{44}	Theta 4 de la cuarta cadena de paralelo
θ_{45}	Theta 5 de la cuarta cadena de paralelo
p_{xv}	Posición den x de la cadena virtual
p_{yv}	Posición en y de la cadena virtual
p_{zv}	Posición en z de la cadena virtual
P_{xdD}	Posición en x de paralelo
P_{ydD}	Posición en y de paralelo
P_{zdD}	Posición en z de paralelo
Ω_v	Matriz omega de cadena virtual
J_v	Jacobiano de cadena virtual
J_d	Jacobiano #1 de paralelo
J_{d2}	Jacobiano #2 de paralelo
J_{d3}	Jacobiano #3 de paralelo
J_{d4}	Jacobiano #4 de paralelo

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta la implementación de una cadena virtual serial RRR en un robot paralelo Delta 4RRSS, demostrando que es posible utilizar cadenas virtuales en el espacio tridimensional en la actuación de robots. Se utilizó como herramienta matemática a la matriz Omega, definida dentro del espacio de las velocidades de la robótica o cinemática diferencial de robots, para obtener de una manera sistemática las velocidades angulares del efector final del robot y formar la matriz jacobiana en el espacio de las velocidades, tanto de la cadena denominada virtual, como la del robot paralelo.

Por un lado, se modeló la cinemática diferencial de la cadena virtual RRR en variables de estado y por otro, la del robot paralelo Delta 4RRSS en variables de estado. Posteriormente se deja en función de la cadena virtual al robot Delta 4RRSS con el fin de que la cadena pueda retroalimentar al paralelo y así poder controlarlo. Se simula en Matlab una trayectoria recta y helicoidal, se puede observar que ambos sistemas siguen la misma trayectoria.

Los resultados obtenidos dan un pequeño aporte a la cinemática diferencial y cabe mencionar que esto podría dar una base para controlar a sistemas más complejos, tal es el caso de robots híbridos.

1. Introducción

1.1 ¿Qué es la robótica?

La definición de robótica es un poco controvertida incluso entre los más expertos, sin embargo, se tiene que la robótica es un campo multidisciplinario que va desde el diseño de componentes mecánicos y eléctricos hasta tecnologías de sensores, sistemas de computadoras e inteligencia artificial. El papel que juega hoy en día es crucial tanto para las fábricas como para la sociedad, tan claro es el ejemplo que, si tienes un automóvil, probablemente fue ensamblado por robots, lo mismo se puede decir de un celular, lavarropa, televisor o cualquier producto plástico.

Según datos del año de 2017 de la IFR (*International Federation of Robotics*) existen alrededor de 1,63 millones de robots funcionando en el mundo y los países con más penetración son Corea del Sur, Singapur y Japón, pero en América Latina tenemos a México, Argentina y Brasil. (1, 2)

Como se puede observar cada vez existen más robots en el mundo y las cifras van en aumento, para continuar se definirá lo que es un robot, existen diferentes definiciones.

Tabla 1.1 Definición de robot según algunos diccionarios y enciclopedias.(3)

<p>Enciclopedia Británica:</p>
<p>Máquina operada automáticamente que sustituye el esfuerzo de los humanos, aunque no tiene por qué tener apariencia humana o desarrollar sus actividades a la manera de los humanos.</p>
<p>Diccionario Merrian Webster:</p>
<p>Máquina que se asemeja a los humanos y desarrolla como ellos tareas complejas comandar o hablar. Un dispositivo que desarrolla de manera automática tareas complicadas, a menudo de manera repetitiva un mecanismo guiado por control automático.</p>

Diccionario de la Real Academia Española:

Máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas solo a las personas.

Así también tenemos las asociaciones más importantes:

- “RIA (*Robot Institute of America*): Un robot es un manipulador reprogramable y multifuncional diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especializados a través de varios movimientos programados para realización de una variedad de tareas.

- JIRA (*Japanese Industrial Robot Association*) teniendo 6 clases:

1. Dispositivo de manipulación manual de clase 1: un dispositivo con varios grados de libertad accionada por un operador.

2. Robot de secuencia fija de clase 2: un dispositivo de manipulación que realiza etapas sucesivas de una tarea de acuerdo con un valor predeterminado e inmutable método, que generalmente es difícil de modificar.

3. Robot de secuencia variable de clase 3: el mismo tipo de dispositivo de manipulación que en la clase 2, pero las etapas se pueden modificar fácilmente.

4. Robot de reproducción de clase 4: el operador humano realiza la tarea manualmente liderando el control del robot, que registra las trayectorias. Esta la información se recupera cuando es necesario, y el robot puede realizar la tarea en modo automático.

5. Robot de control numérico de clase 5: el operador humano suministra el robot con un programa de movimiento en lugar de enseñarle la tarea manualmente.

6. Robot inteligente clase 6: un robot con los medios para comprender su entorno y la capacidad de completar con éxito una tarea a pesar de cambios en las condiciones circundantes bajo las cuales se realizará.

-IFR (*International Federation of Robotics*) se basa en la norma ISO 8373:2012

Un robot que opera de forma semi o totalmente autónoma para realizar servicios útiles para el bienestar de los humanos y los equipos, excluyendo las operaciones de fabricación.

Nota: estas definiciones con excepción de la última, se centran para Robots industriales, no mencionan los Robots móviles o de servicio”.(4)

1.2 Historia de la robótica

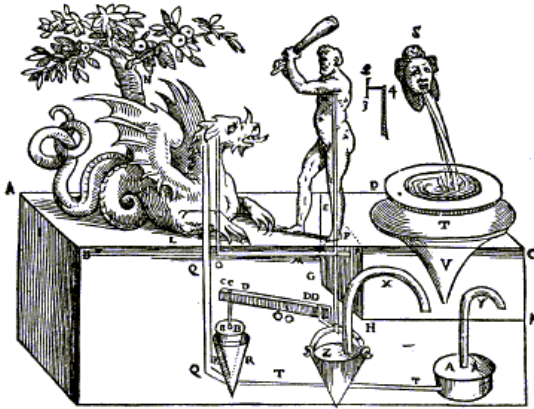


Figura 1.1 Autómatas de Herón de Alejandría
300 d.c

Si bien el ser humano es un ser curioso que siempre busca dominar su alrededor y tener las facilidades posibles para vivir mejor y adaptarse al ambiente, sin duda el ingenio humano no tiene límites. Desde los tiempos remotos, se ha interesado por crear dispositivos y máquinas que imitan a la madre naturaleza. Como los griegos, que se interesaban por crear dispositivos llamados “Autómatas” que imitaban las figura y movimiento de un ser animado, que por lo regular eran animales o humanos.

La cultura árabe no se quedó atrás heredó y difundió los conocimientos griegos, dándole una aplicación práctica, introduciéndolo en la vida cotidiana, como por ejemplo diversos sistemas dispensadores de agua. En esa época, también se desarrollaron diversos ejemplos de autómatas como el Hombre de Hiterro de Alberto Magno (1204-1282), o la Cabeza parlante de Roger Bacon (1214- 1294).

Otro ejemplo relevante de aquella época fue el Gallo de Estrasburgo (1352) de autor desconocido. Es el autómata más antiguo que se conserva en la actualidad, y que formaba parte del reloj de la torre de la catedral de Estrasburgo. Al dar las horas, movía las alas y el pico.

Durante los siglos XV y XVI, los autores del renacimiento se siguieron interesando por los ingenios descritos y desarrollados en la antigüedad. De esta época es conocido el León mecánico construido por Leonardo Da Vinci (1452-1519), que abría su pecho con su garra y mostraba el escudo de armas del Rey. Durante los siglos XVII y XVIII se desarrollaron los primeros autómatas con algunas de las características de los modernos robots.

Fueron desarrollados en su gran mayoría por artesanos del gremio de la relojería, y su función principal era la de entretener a la gente de la corte. Se puede destacar el Pato de Vaucanson, y los Muñecos de la Familia Droz, del relojero suizo Pierre Jaquet Droz (1721-1790) y sus hijos Henri-Louis y Jaquet. (3)

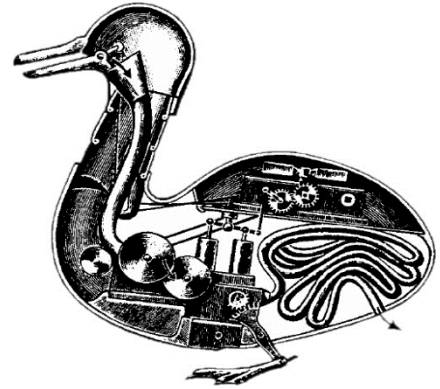


Figura 1.2 Pato de Vaucanson 1738

El origen de la palabra robots aparece en una obra teatral del Checo Karel Capek, quien en el año de 1921 escribió y dirigió su obra “Robots Universales Rusos”, comedia en la cual máquinas con forma humana, eran capaces de reproducirse y esclavizarlos a quienes los habían desarrollado. El término robota en Checo significa trabajo, en especial el forzado o forzado.

No fue hasta el año de 1959 cuando se construyó el primer control computarizado, realizado por Unimation Inc. Aplicando los conceptos de George Devol y Joseph Engelber, se da por iniciada una ciencia denominada **ROBÓTICA INDUSTRIAL**, de la cual Devol es considerado el padre de esta ciencia.



Figura 1.3 George Devol

La construcción de robots industriales para su comercialización es iniciada en el año 1968, de donde parte una nueva era industrial y automatización flexible total.(5)

1.3 Clasificación de los robots:

Existe una gran variedad de robots con diversas estructuras geométricas y mecánicas que definen su funcionalidad y aplicación.

Tabla 1.2 Clasificación de Robots

Robots móviles:	Terrestres, Submarinos, aéreo-espaciales.
Robots Humanoides:	Diseño complejo.
Robots industriales:	Robots manipuladores/Brazos mecánicos.

Robots móviles:

Se utilizan en el hogar para limpiar y recolectar basura; en los hospitales se emplean para trasladar instrumental del quirófano al área de desinfectado; en la investigación científica del espacio, se ocupa para analizar y enviar información de piedras, arenas y de la atmósfera.



Figura 1.4 Robot rover Opportunity

Humanoides:



Figura 1.5 Evolución de robots humanoides

Son sistemas muy complejos no solo en la estructura mecánica sino también en lo relacionando en la electrónica... Pueden guiar a personas invidentes, además de realizar actividades domésticas, también son empleados en siniestros o derrumbes como terremotos".(6)

Robots industriales:

Las principales aplicaciones se encuentran en fundidoras, fábricas ensambladoras automotrices, empresas textiles, procesos de soldadura de arco y de punto...etc.

A su vez los robots industriales según el autor Tsai (7) se pueden dividir en diferentes criterios, por sus GDL, espacio de trabajo, aplicaciones etc. Se tomaron los siguientes:

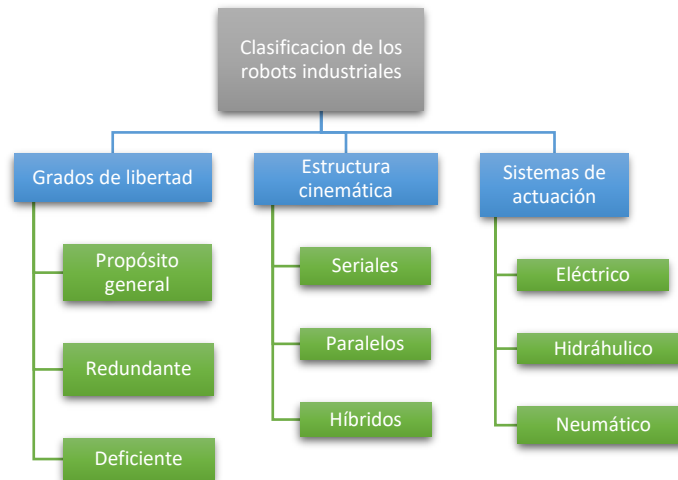


Figura 1.6 Esquema de clasificación

a) Clasificación por grados de libertad

Un grado de libertad (aplicado a la robótica) es el número de parámetros necesarios para conocer la posición y la orientación de un cuerpo en el espacio, la posición de un objeto se mide respecto a un sistema de referencia. Un manipulador ideal consta de 6 GDL para manipular un objeto libremente en un espacio de tres dimensiones. Desde este enfoque, se denomina robot de propósito general. Si posee más de 6 GDL será clasificado como un robot redundante y deficiente si tiene menos de 6 GDL.

b) Clasificación por estructura cinemática

Se clasifican por su estructura topológica, dependiendo de la cadena cinemática que se maneje ya sea abierta o cerrada. Los robots paralelos cuentan con una cadena cinemática cerrada mientras que los robots seriales cuentan con una cadena cinemática abierta además de los híbridos que consisten en la combinación de estas dos estructuras.

b.1 Robots seriales:

Un manipulador serial consiste en diferentes eslabones conectados en serie por varios tipos de juntas, típicamente de revolución o prismáticas. Un extremo del manipulador está unido a una base y el otro extremo es libre de moverse en el espacio. (7)

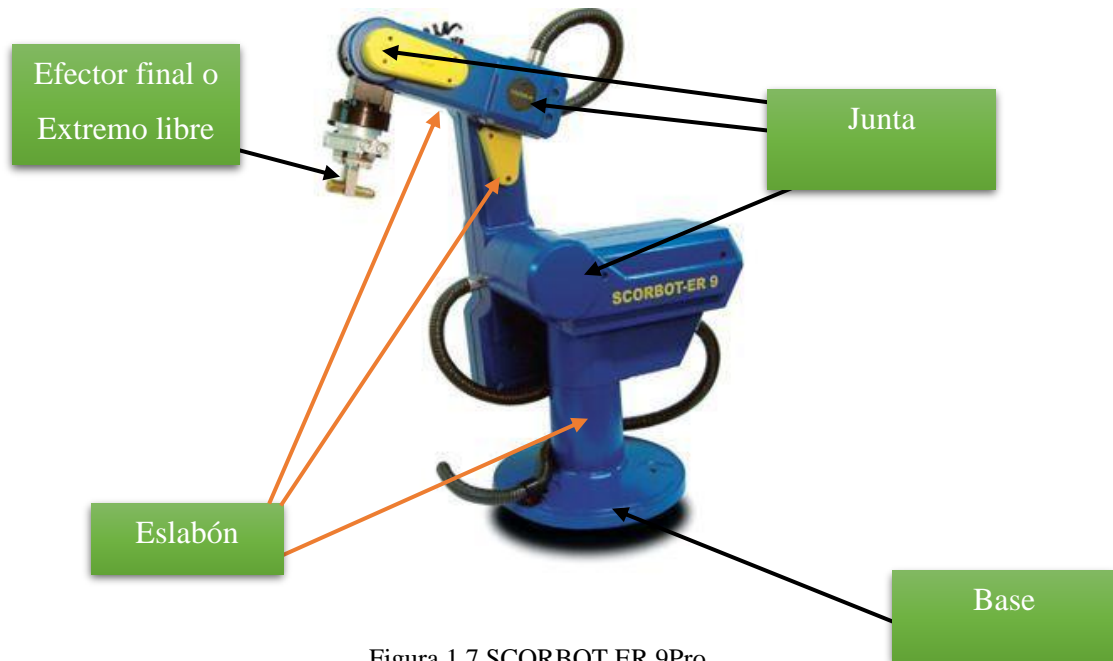


Figura 1.7 SCORBOT ER 9Pro

Configuración de diferentes robots seriales:

-Robot cartesiano: La configuración de este tipo de robots presentan una estructura articulada, es decir se encuentran conformada por una serie de elementos o eslabones que facilitan el movimiento, el cual permite una traslación vertical, horizontal y transversal, por lo general poseen 3GDL, los cuales son representados por cada eje x, y, z. Las ventajas que presenta son la precisión uniforme en todo su espacio de trabajo y alta fiabilidad para seguir trayectorias previamente especificadas.(8)

-Robot cilíndrico: La configuración cilíndrica tiene la articulación de la base rotacional, mientras que la segunda y tercera articulación son prismáticas. Entre las aplicaciones de robots manipuladores en esta configuración se encuentran aquellas que procesan cavidades horizontales y transporte de objetos, pero su estructura mecánica es compleja y su espacio de trabajo es la porción de un cilindro hueco.(9)

-Robot esférico o polar: Esta configuración consta de una articulación rotacional en la base, la segunda también es rotacional y la tercera es prismática teniendo una configuración RRP.

-Robot SCARA: El robot SCARA es un brazo manipulador muy utilizado en la industria. Posee cuatro grados de libertad, con tres articulaciones rotatorias y una prismática. Es decir, este robot es capaz de ubicar un objeto en un espacio de tres dimensiones, imprimiéndole, además, una rotación, siendo ideal para aplicaciones de ensamblado.(10)

-Robot angular, articulado o antropomórfico: La palabra antropomórfico hace alusión a que tiene cualidades o rasgos humanos (11) (en este caso aplicado a los robots), la configuración tiene solo articulaciones rotacionales, esta configuración se asemeja al brazo de un ser humano. El espacio de trabajo es muy complejo, típicamente una sección transversal en forma de media luna. (1)

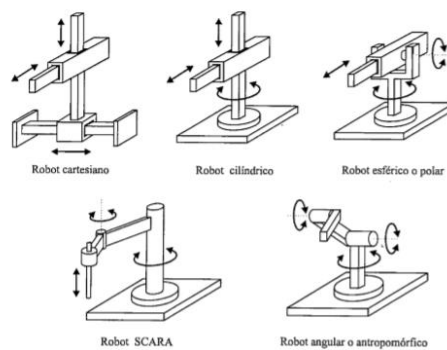


Figura 1.8 Robots seriales

b.2 Robots paralelos:

Los robots paralelos típicos (a veces también llamados manipuladores con plataforma), consisten en una plataforma móvil conectada a una base fija por varias extremidades o piernas. Las características que poseen son: mayor rigidez (estabilidad estructural), mayor velocidad, mayor relación carga/peso y cuentan con más precisión que los robots de cadena abierta o seriales. Sin embargo los robots paralelos tienen desventajas, como son: un análisis cinemático elaborado, un diseño particular y esquemas de control de mayor complejidad más aparte un espacio de trabajo es pequeño, menciona Martínez, Peña (12).

Un robot paralelo con m GDL posee m cadenas unidas a su efector final. Si las cadenas son idénticas se puede utilizar la fórmula de Gruber's, aunque algunas veces esta fórmula puede contener errores debido a que no considera las relaciones geométricas entre las juntas.(1)

Un manipulador paralelo se puede considerar simétrico si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El número de cadenas es igual al número de grados de libertad de la plataforma móvil.
2. El tipo y número de juntas de todas las cadenas son iguales.
3. El número y la localización de las juntas activas en todas las cadenas son las mismas.

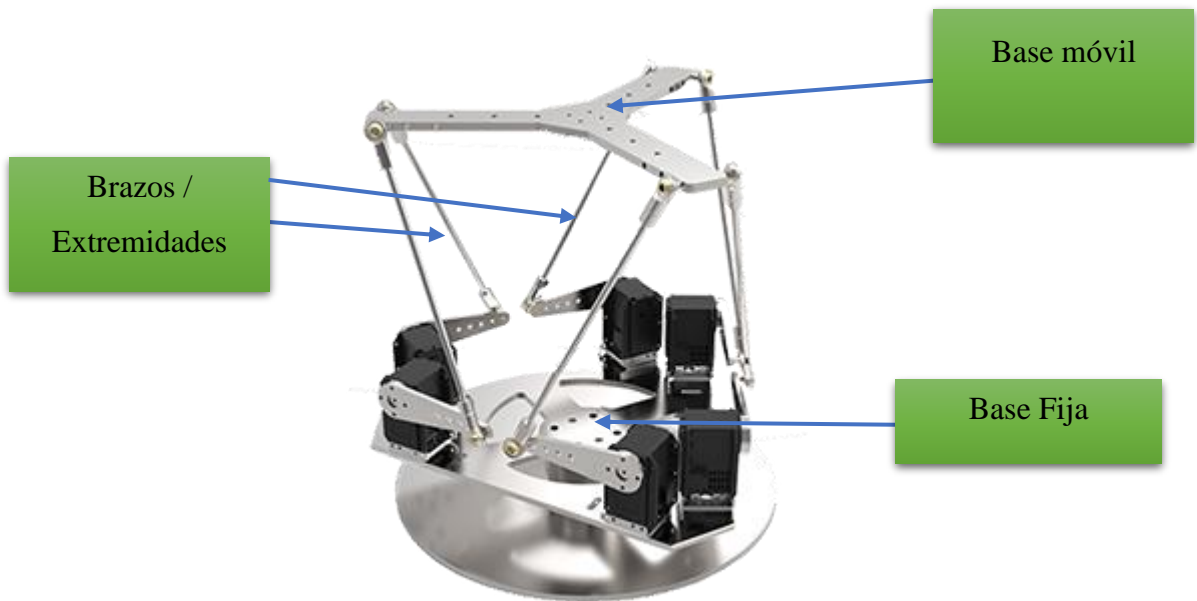


Figura 1.9 6-RSS Parallel Platform

Robots paralelos configuraciones

Los robots paralelos son clasificados como planares, esféricos o espaciales, dependiendo con su movimiento característico.(7)

Robots paralelos planares:

Su nombre hace mención por el espacio de trabajo sobre un plano. El robot plano más básico se tiene uno de 2 GDL que está formado por paralelogramos que permiten que el eslabón de salida permanezca en una orientación fija con respecto al eslabón de entrada, las ventajas que tiene son la capacidad de rotación altas. En la figura 1.10 del lado derecho se puede mostrar un robot de este tipo.

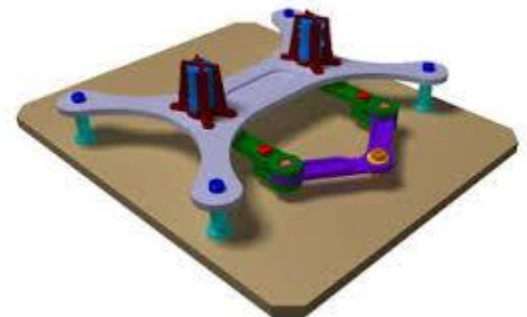


Figura 1.10 Robot de 5 barras de 2 GDL

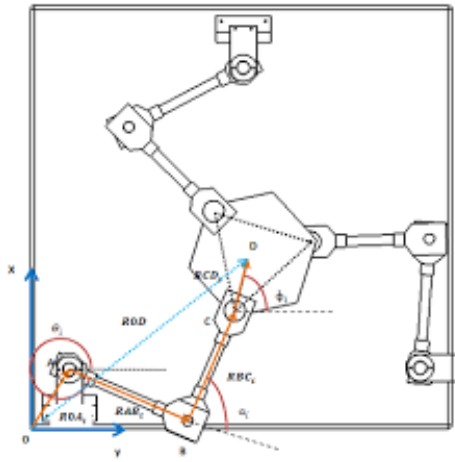


Figura 1.11 Robot Paralelo 3RRR

Las aplicaciones más comunes de estos robots se tienen como ejemplo el robot paralelo planar 3RRR, este robot está formado por tres brazos con 3 articulaciones rotacionales que están fijas a la base, cuenta con 3 GDL.(1)

Robots paralelo espacial:

Los primeros robots paralelos espaciales que se inventaron por desgracia no se construyeron, sin embargo, sirvieron de base para desarrollar nuevos prototipos, tal es el caso de la plataforma de J.E. Gwinnet ideada para funciones de teatro, o el Position-Controlling Apparatus de W.L.V. Pollard un robot paralelo para pintar automóviles, estos inventos daban inicio a los robots paralelos espaciales. A continuación, se muestran los más importantes.(13)

-Plataforma Gough-Stewart: Esta plataforma cuenta con 6 GDL y tiene actuadores lineales, formando un octaedro. Fue patentada por Gough en el año de 1947 y puesta en funcionamiento en el año de 1954, su aplicación fue ideada para el ensayo de neumáticos de aviación, sin embargo, años más tarde 1965 Stewart presenta una plataforma similar a la de Gough con los mismos 6 GDL pero ideada para simuladores de vuelo, es por eso que se le conoce como la Plataforma de Gough-Stewart.(13, 14)

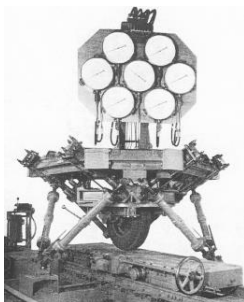


Figura 1.12
Plataforma de V.E
Gough

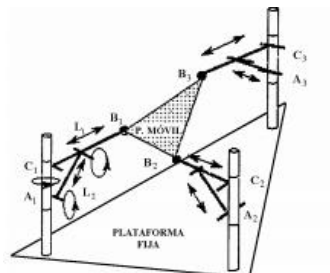
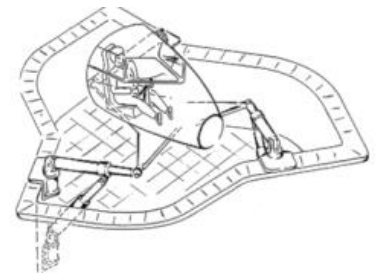


Figura 1.13 Plataforma de Stewart, simulador de vuelo.



-Robot Delta: Es un robot paralelo patentado por Reymond Clavel en la década de los 80, este robot fue diseñado para manipular objetos de bajo peso a altas velocidades. La particularidad del robot Delta es que la plataforma móvil va unida a la base mediante 3 eslabones donde cada eslabón presenta un mecanismo de paralelogramo que permite balancear el centro de masa de cada uno de ellos. Los eslabones se unen a la base fija mediante pares o juntas universales (U). La Figura 14 muestra la representación esquemática del robot Delta donde el movimiento de los eslabones aporta 3 GDL que permiten posicionar la plataforma móvil en el espacio. Las aplicaciones principales de este tipo de robot se encuentran en la industria del embalaje, en la industria farmacéutica e incluso para aplicaciones médicas de cirugía.

El robot Delta tuvo varias evoluciones y en el 2007 la empresa Adept compra la patente y cambia el nombre a Quattro, agregándole un eslabón más. Este robot es posiblemente el más rápido en el mercado industrial.(14)

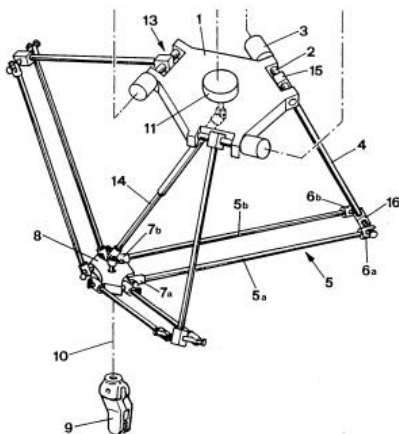


Figura 1.15 Esquema de robot Delta



Figura 1.14 Adept Quattro

Robots por cables: Se encontro en la literatura un robot paralelo accionado por cables lo cual son una clase especial de robots paralelos ideados para reemplazar los enlaces rígidos por cables. Debido a las características que otorgan los cables, como baja inercia y mayor rango de movimiento, pueden realizar una amplia gama de aplicaciones como: la traslación de cámaras de un lugar a otro en eventos deportivos, industria del automovilismo y, principalmente, en la

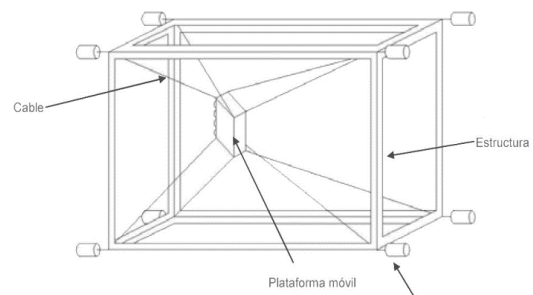


Figura 1.16 Robot paralelo accionado por cables

rehabilitación de extremidades. Sin embargo, por la propiedad unilateral de los cables, el mantenerlos tensionados se convierte en un gran desafío. Al ser una estructura simple que usa un número reducido de componentes conduce a un diseño rentable por la transportabilidad, facilidad de montaje y desmontaje, reconfigurabilidad y mantenimiento. (15).

b.3 Robots Híbridos:

Los robots híbridos son la combinación de de seriales con paralelos y tratan de tomar las ventajas del serial y del paralelo, generalmente este tipo de robots los podemos encontrar en centros de mecanizado o en aplicaciones médicas, ya que requieren buena precisión y habilidades versátiles.

La configuración que propone el autor Lee and Kim (16) son las siguientes: Serial-Serial, Paralelo-Serial, Serial-Paralelo, Paralelo-Paralelo.

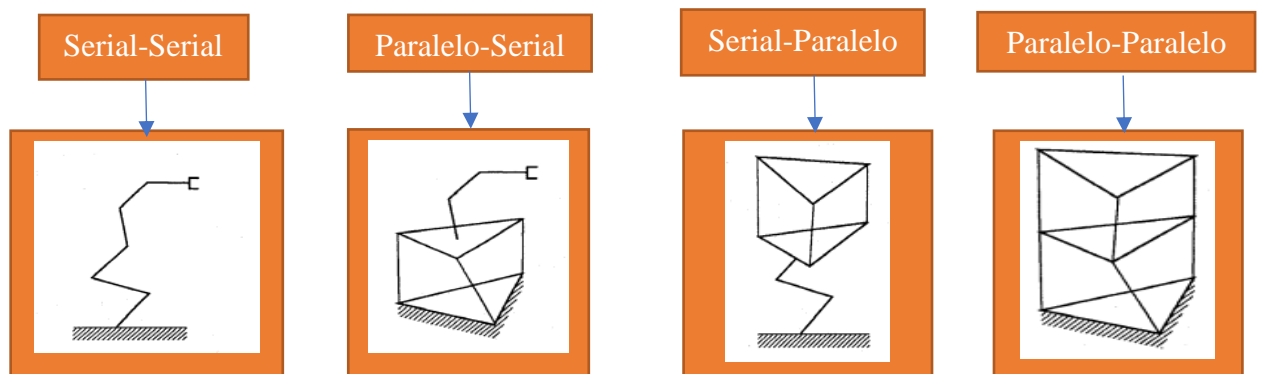


Tabla 1.3 Ejemplos de robots híbridos

Serial-Serial	Paralelo-Serial	Serial-Paralelo	Paralelo-Paralelo
Humanoide con ruedas robot ligero Rollin' Justin se desarrolló en el Instituto de Robótica y Mecatrónica en el Centro aeroespacial Aleman (DLR). El brazo y el tronco forman un serial-serial.(17)	Robot hibrido de 5 GDL desarrollado para cirugía de laparoscopia. El robot paralelo proporciona 2 GDL y el serial 3 GDL.(18)	Robot híbrido de 9 GDL llamado "robot de vertido", robot serial es parecido a un cartesiano y cerca del efector final tiene un robot paralelo.(19)	Robot Hibrido de 9 GDL, propuesto por Rakhodaei, Saadat (20) para reabilitacion de tobillo.



a) Sistema de actuación:

Un actuador corresponde a cualquier mecanismo que permita al efector ejecutar una acción y se clasifican en tres: eléctrico, neumático e hidráulico.(21) Por lo regular se usan actuadores eléctricos debido a que el control y el mantenimiento son fáciles, pero en caso de necesitar velocidad o se requieren para carga pesada recurrimos a actuadores neumáticos o hidráulicos.

Tabla 1.4 Sistema de actuación

	Neumático	Hidráulico	Eléctrico
Energía	Aire comprimido	Aceite mineral	Corriente eléctrica
Opciones	Cilindros, Motor paletas, Motor de pistón.	Cilindros, Motor de paletas, Motor de pistón axiales.	Corriente continua, Corriente alterna, Motor paso a paso.
Ventajas	Baratos, rápidos, sencillos, robustos.	Rápidos, alta relación potencia-peso, alta capacidad de carga.	Precisos, fiables, fácil control, silenciosos.
Desventajas	Dificultad de control continuo, accesorios, ruidosos	Difícil mantenimiento, accesorios, fugas, caros	Potencia limitada

1.4 Cadenas virtuales

Una Cadena virtual se define como un elemento que existe en la cinemática del manipulador, pero no en la dinámica de este. Debido a que la masa de los eslabones de la cadena virtual es considerada cero, los efectos inerciales en el modelo dinámico son nulos, existiendo matemáticamente en el modelo cinemático, pero no en el dinámico.(1)

Existen varios trabajos acerca de las cadenas virtuales, sin embargo, se tomaron los más adecuados para este trabajo.

Se tiene que los primeros trabajos acerca de cadenas virtuales fueron aplicadas a robots seriales; tal es el caso de Chung, Chung (22) 1991 en el cual propone un método para el problema cinemático inverso de manipuladores planos, con múltiples grados de redundancia. El método comienza descomponiendo un brazo redundante en una serie de brazos locales que son módulos manipuladores planos, de dos o tres enlaces y conectando los puntos de conjunción entre brazos locales con enlaces virtuales.

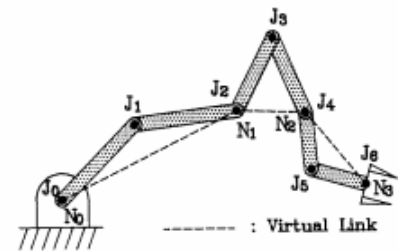


Figura 1.17 Robot redundante de 7 GDL con enlaces virtuales

Otro caso similar en el año 1996 Ashrafiun and Sanka (23) pasa al espacio y propone una forma de resolver la cinemática de robots hiper redundantes, llamado método de enlace virtual. El método se basa en dividir el robot en subsistemas que consisten en tres o cuatro enlaces. Se establecen enlaces virtuales entre el primer y el último nodo de cada subsistema. Se desarrolla un robot hipotético con grados de libertad reducidos utilizando los enlaces virtuales. Luego, el método resuelve la cinemática del sistema de enlace virtual seguido de los subsistemas.

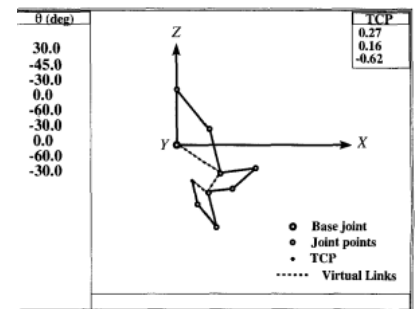


Figura 1.18 Robot de 9 GDL controlado por un robot 4 GDL. Propuesto por Ashrafiun and Sanka.

Posteriormente Campos, Guenther (24) menciona lo que es una cadena virtual ASSUR, nos dice las siguientes propiedades:

1. Es serial.
2. Sus articulaciones se dividen en dos grupos: $\lambda-2$ articulaciones internas conectando dos eslabones virtuales internos con dos eslabones externos (de la cadena original).
3. Tiene puntos donde sus tornillos normalizados son independientes.
4. Cuando dos eslabones externos de la cadena virtual de ASSUR se encuentran conectados a una cadena cinemática con movilidad M , la movilidad de la cadena modificada (la cadena original más la cadena virtual) sigue siendo M . La aplicación de este tipo de cadena es esencialmente la de obtener información sobre el movimiento de una cadena cinemática, o la de imponer movimientos a la cadena cinemática original.

Doctor Martínez Zamudio 2015, da una gran aportación a las cadenas virtuales dando un enfoque nuevo. Presenta una cadena virtual serial (RRR)_v la cual pretende mover un robot paralelo delta plano de configuración 3RRR-(RRR)_v; ambos modelos se presentan en variables de estado y en función de las variables articulares de la cadena virtual. El primer modelo facilita el análisis completo de ambos: la cinemática y la controlabilidad del robot delta plano con su cadena virtual. El segundo modelo se utiliza para obtener su cinemática inversa, para, retroalimentar al primero. Esta retroalimentación es llamada “actuación virtual indirecta. (1) Esta aportación abre camino para utilizar cadenas virtuales en robots y es plantea que es una herramienta efectiva para robots más complejos.

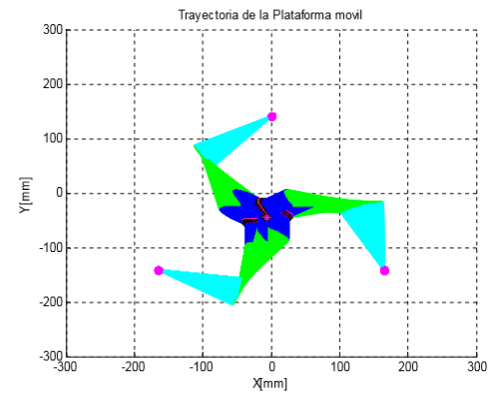


Figura 1.20 Manipulador 3RRR en función de las variables articulares virtuales de Dr. Martínez Zamudio

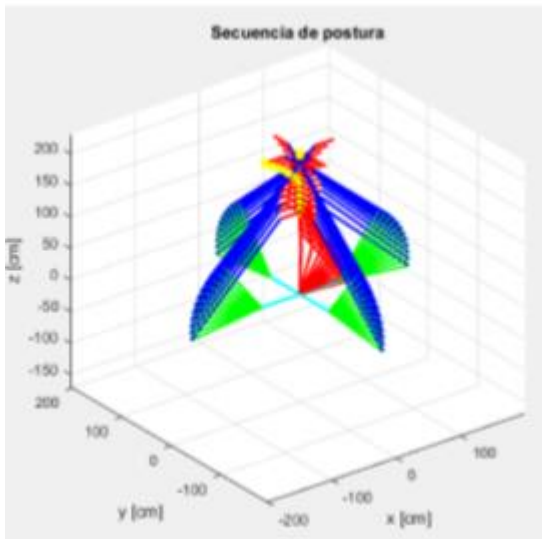


Figura 1.19 Simulación de robot paralelo Delta con cadena virtual de Ing. Bonche Lucio A.S

Con anterioridad a este trabajo se había trabajado con cadenas virtuales en la tesis de Boche (25) 2017 implementa una cadena virtual serial RRR_v restringida en el plano XZ para controlar a un robot paralelo 3RRR y Delta 4, logrando con éxito la demostración de cadenas virtuales en el plano.

Otro trabajo relevante es la tesis de Rubén (26) la cual valida los modelos seriales RRR y RPR, aplicando las teorías de cinemática diferencial y obtiene un modelo matemático en una matriz jacobiana, para simular los robots. A través de la validación de la cinemática diferencial de cadenas seriales simples, los resultados obtenidos proporciona una ayuda más para ser aplicados en cadenas virtuales, que servirán para manipular robots seriales, paralelos e híbridos introduciendo restricciones cinemáticas.

Existe un artículo en la literatura recientemente llamado “Whole body control of a Dual-Arm Mobile Robot Using a Virtual Kinematic Chain” 2016 (Control de cuerpo completo de un robot móvil con 2 brazos usando una cadena cinemática virtual) mostrando la utilización de una cadena cinemática virtual (VKC) para el control de un robot híbrido. Posee 2 brazos teniendo en conjunto 7GDL; más 3 GDL de la base móvil. En la primera parte, usan una cadena cinemática en serie extendida que incluye la base móvil y una VKC para formular restricciones en orientación y traducción deseadas, expresadas en el marco mundial. En la segunda parte, usan el movimiento VKC resuelto para restringir el movimiento común de los dos brazos. A continuación, se muestra el diagrama.

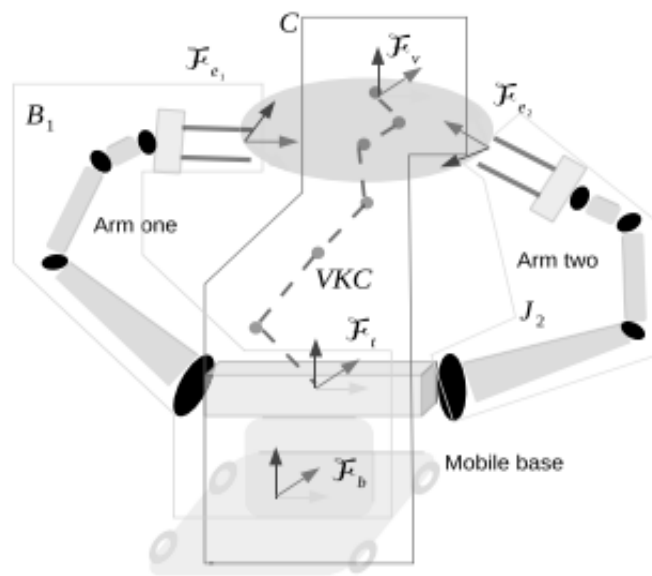


Figura 1.21 Diagrama de Robot híbrido con VKC

Es un artículo interesante, del cual se menciona de VKC algo muy parecido a Cadenas Virtuales, sin embargo, el método empleado en este artículo tiene otras metodologías a comparación del presente trabajo. Sin duda es un paso al que se quiere llegar en un futuro, poder controlar híbridos. (27)

1.4.1 Objetivo:

Modelar, simular e implementar en un robot paralelo Delta 4RRSS una cadena virtual serial RRR, comprobando que una cadena virtual puede manipular a robots paralelos.

1.4.2 Hipótesis

¿Es posible manipular a un robot paralelo 4RRSS empleando la cinemática diferencial y la matriz omega, empleando una cadena virtual RRR_v en el espacio tridimensional R3? \perp

1.4.3 Planteamiento del problema:

El presente trabajo utiliza de base las tesis de los ingenieros Boche Scarlet y León Hector teniendo como antecedente que Boche Scarlet demuestra que el método de propagación de velocidades es efectivo en el plano, sin embargo, en el espacio R3 existen más variables a elección del usuario las cuales influyen directamente al resultado final, reflejado en la matriz en variables de estado y por tanto a los resultados obtenidos.

Por otra parte, el trabajo realizado por León Héctor arroja como conclusiones que empleando la matriz omega es posible la manipulación de un robot plano de 3 GDL por medio de una cadena virtual. Quedando como interrogante validar dicha metodología para la manipulación de robots en el espacio tridimensional.

Con base en lo anterior se pretende continuar con la metodología que emplea a la matriz omega para llevar a cabo la manipulación de un robot paralelo 4RRSS en el espacio tridimensional R3. El robot paralelo seleccionado es el mismo que se empleó para validar el método de propagación de velocidades y la selección de una cadena virtual con configuración $(RRR)_v$ se basa en que es una configuración bastante estudiada y de consulta en diversas fuentes, teniendo de esta manera un buen punto de partida para su análisis.

1.4.4 Meta:

Comprobar que la nueva metodología propuesta arroje como resultados la manipulación de un robot espacial 4RRSS por medio de una cadena virtual RRR_v , obteniendo trayectorias en el espacio tridimensional R3, teniendo como pruebas simulaciones y un banco de pruebas físico.

2. Teoría antecedente

2.1 Cinemática

La mecánica es una de las ciencias físicas que se ocupan de estado de reposo o movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. La ingeniería mecánica se divide en dos áreas de estudio, o sea, estática y dinámica. La cinemática forma parte de la dinámica y trata solo los aspectos geométricos del movimiento sin atender a las causas que lo provocan (28).

2.2 Cinemática del robot

La cinemática directa del robot estudia el movimiento con respecto a un sistema de referencia sin considerar las fuerzas que intervienen. Así, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo del final del robot con los vales que toman sus coordenadas articulares.(26)

2.3 Matriz de rotación

Las matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones. La matriz de rotación se obtiene por medio de los cosenos directores del sistema inercial y móvil. Los cosenos directores son la representación del giro de dos sistemas, uno fijo y otro móvil, de los cuales el fijo es la referencia para medir el giro o ángulo del sistema móvil con referencia a los ejes XYZ.

Supóngase que se tiene en el plano dos sistemas de referencia OXY Y OUV (Figura 2.1) con un mismo origen O, siendo el sistema OXY el de referencia fijo y el sistema OUV el móvil solidario al objeto. Los vectores unitarios de los ejes coordenados del sistema OXY son i_x, j_y mientras que los del sistema OUV son i_u, j_v (3).

Un vector plano P se puede representar en ambos sistemas como:

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = p_x \cdot i_x + p_y \cdot j_y \quad (1.1)$$

$$P_{uv} = \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \end{bmatrix} = p_u \cdot i_u + p_v \cdot j_v \quad (1.2)$$

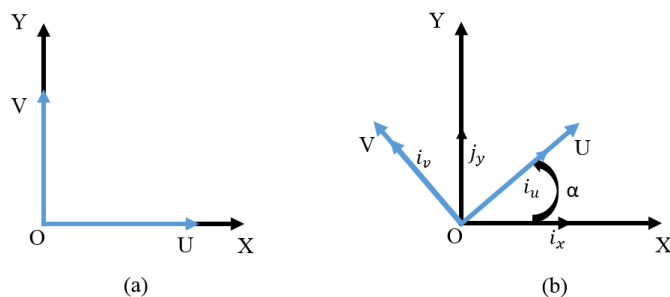


Figura 1.22

Realizando el producto punto $P_{xy} \cdot P_{uv} = R$ se obtiene una matriz orto normal dado que $R = R^T$

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v \end{bmatrix}$$

Realizando los elementos de la matriz:

$$i_x \cdot i_u \cos(\theta) = \cos(\theta) \quad i_x \cdot j_v \cos(\theta + 90^\circ) = -\text{Sen}(\theta)$$

$$j_y \cdot i_u \cos(90^\circ - \theta) = \text{Sen}(\theta) \quad j_y \cdot j_v \cos(\theta) = \cos(\theta)$$

La matriz de rotación o matriz de cosenos directores también puede ser representada como:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{Sen}(\theta) \\ \text{Sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Para 3 dimensiones el método es similar declarando a un vector P en el espacio:

$$P_{xyz} = \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix} = p_x \cdot i_x + p_y \cdot j_y + p_z \cdot k_z \quad (1.4)$$

$$P_{uvw} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = p_u \cdot i_u + p_v \cdot j_v + p_w \cdot k_w \quad (1.5)$$

Matriz de rotación para 3 dimensiones.

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

En la figura (2.2) la orientación del sistema OUVW, coincide con el eje OX, vendrá representada mediante la matriz:

$$R(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{Sen}(\alpha) \\ 0 & \text{Sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

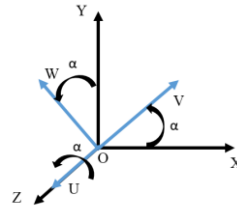


Figura 1.23

Las matrices para la rotación respecto al eje Y y Z quedaran representadas como:

$$R(y, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \text{Sen}(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{Sen}(\theta) & 0 \\ \text{Sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.4 Matrices de transformación homogénea

Las matrices de transformación homogénea permiten la representación conjunta de la posición y la orientación (localización) (3) respecto a una base inercial. Esta es una matriz de 4x4 la cual aporta información tal como; orientación, traslación, perspectiva y escalado respecto a una base fija, dado que servirá de referencia para los sistemas móviles, los cuales se situaran en las articulaciones del manipulador con el fin de ubicar a cada eslabón en el espacio.(26)

Una matriz de transformación homogénea se puede expresar como:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ F_{1 \times 3} & W_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Una manera muy común de representar a la matriz de transformación homogénea es como:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

En donde los elementos **n,o,a** corresponden a la orientación del eslabón en el espacio y está compuesta por una matriz de rotación vista en el capítulo 2.3, representa el giro de un sistema móvil OUVW respecto a un sistema inercial OXYZ.

La traslación indica la posición que ocupa un eslabón en el espacio respecto a cada uno de los ejes del sistema inercial XYZ, y está definida por los elemento de **P** de la matriz T siendo **P** el vector que indica el valor de la traslación de los sistemas.(26)

Los elementos (0,0,0) son la perspectiva desde el cual se aprecian los sistemas, modificando estos elementos se puede cambiar el punto de visión, permitiendo analizar a los sistemas desde diferentes posiciones. Finalmente, el valor de 1 es el escalado el cual representa que tan cerca o que tan lejos se aprecia al sistema, siendo por lo general de 1 para no afectar al modelo matemático.

2.5 Cinemática directa e inversa

La cinemática del robot se descompone en dos principales problemas, el “**Cinemático directo**” y “**Cinemático inverso**” Barrientos, Cruz (3) utiliza en la figura (2.3) para representar dichos problemas. El problema cinemático directo consiste en encontrar una relación que permita la representación de la posición y orientación del efector final respecto a un sistema inercial, determinando esta relación se pueden conocer los valores de las variables articulares permitiendo ubicar al efector final en el espacio, sin embargo no se tiene control sobre el punto o trayectoria del robot, por lo tanto consiste en determinar la posición y orientación del efector final (3). En el “**Cinemático inverso**” se conoce la posición y orientación del efector final pero no el valor de las variables articulares para lograr dichas condiciones.

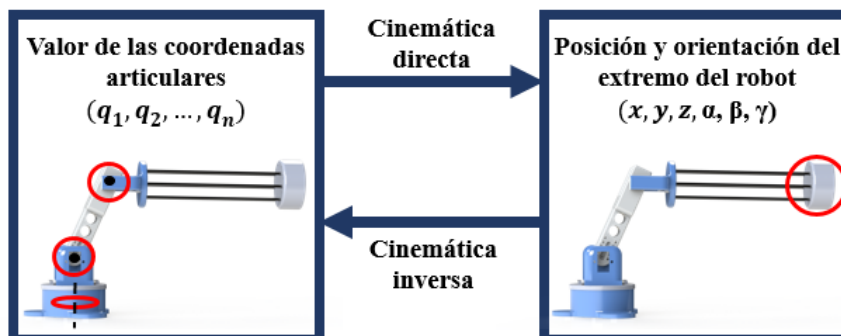


Figura 1.24 Esquema de Cinemática directa y Cinemática inversa

2.6 Cinemática directa

Dado que un robot se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia (3).

Para resolver el problema se necesita una matriz que relacione al efector final con el sistema inercial y dado que un robot es una cadena cinemática compuesta por eslabones y cada junta aporta uno o más grados de libertad, se puede asignar un sistema móvil en cada una de las articulaciones, dicho sistema móvil quedara descrito por una matriz de transformación homogénea de tal manera que dependiendo del eje de acción o condiciones de operación de la junta se le podrá asignar una matriz que contenga dicha información, dicha matriz es nombrada T.

La matriz que caracteriza al robot se puede expresar como:

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 & n-1 \\ \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \dots & \mathbf{a} \\ n & 1 & 2 & 3 & n \end{matrix} \quad (1.12)$$

En donde \mathbf{n} dependerá totalmente de la configuración y numero de articulaciones del robot y es la que caracteriza al sistema móvil del efector final.

2.7 Problema cinemático directo por matrices de transformación homogénea

Una forma de dar solución a la matriz T es por medio de matrices de transformación homogénea, las cuales contienen información respecto a rotaciones y traslaciones respecto a un sistema inercial, (26).

1. Obtener el diagrama del robot, representando articulaciones y eslabones (incluyendo el eslabón de tierra)
2. Enumerar los ejes y eslabones comenzando la numeración con 0 al eslabón de tierra.
3. Identificar la línea de acción de las articulaciones en el manipulador
4. Colar el eje Z_n en la línea de acción de las articulaciones
5. Colocar el origen del sistema a lo largo del eje Z_n para hacerlo coincidir con el centro de la articulación
6. Colar el sistema inercial en la base con el eje X_n a lo largo del eslabón
7. Los sistemas móviles se colocarán a partir de casa eje enumerado, cada uno de ellos para tomar referencia tanto de posición como orientación

8. Cada sistema es completado con el eje Y para formar un sistema dextrógiro
9. Calcular las transformaciones que cada uno de los sistemas móviles tiene que sufrir para colocarse como el sistema siguiente con el uso de matrices de traslación y orientación que representan estas transformaciones.

Dado de que la multiplicación de matrices no es conmutativa se obtiene que el sistema de referencia se multiplica por el sistema móvil dando así la orientación del sistema con respecto al inercial, o dependiendo del caso se toma orden del producto, si la operación es con respecto al sistema inercial se pre multiplica y si con respecto al sistema móvil se multiplica (26).

2.8 Cinemática inversa

En el “**problema cinemático inverso**” se conoce la trayectoria o un punto en el espacio en el cual se encuentra el efector final, pero no se tiene conocimiento de las variables articulares ($q_1, q_2, q_3 \dots q_n$), por lo tanto consiste en descubrir el arreglo que deben tener las variables articulares para cumplir con la condición de orientación y posición del efector final. La solución de este problema depende en gran medida de la configuración del robot, no pudiendo generar un método general para cada manipulador (3).

Este tipo de solución presenta, entre otras, las siguientes ventajas:

- En muchas aplicaciones el problema cinemático inverso debe ser resuelto en tiempo real, por lo que una solución de tipo iterativo no garantiza una solución en el momento adecuado.
- Al contrario de la cinemática directa, el método inverso no siempre tiene una solución única.

2.9 Problema cinemático inverso por método algebraico

En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelos directo, es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición en función de sus coordenadas articulares obtener por manipulación de aquellas las relaciones inversas (25).

2.10 Matriz Jacobiana

Esta matriz jacobiana es una de las cantidades más importantes en el análisis y control del movimiento del robot. Se presenta en prácticamente todos los aspectos de la robótica.

Manipulación: en la planificación y ejecución de trayectorias suaves, en la determinación de configuraciones singulares, en la ejecución de movimiento antropomórfico coordinado, en la derivación de las ecuaciones dinámicas de movimiento y en la transformación de fuerzas y pares desde el efector final a las articulaciones manipuladoras. (29)

2.10.1 Jacobiano analítico

Cuando la posición y orientación del efector final del manipulador es conocida, la matriz jacobiana analítica relaciona las velocidades articulares con el extremo del robot. Es el método más directo para obtener las relaciones entre velocidades articulares y las del extremo del robot. Este método consiste en la diferenciación de las ecuaciones al modelo cinemático directo. Se necesitan definir como coordenadas cartesianas desde coordenadas articulares. (26)

$$X = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n); Y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n); Z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad (1.13)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n); \beta = f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n); \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.14)$$

Se deriva con respecto al tiempo ambos miembros del conjunto de ecuaciones anteriores, obteniendo:

$$\dot{X} = \sum_1^n \frac{dx}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{Y} = \sum_1^n \frac{dy}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{Z} = \sum_1^n \frac{dz}{dq_i} \dot{q}_i; \quad (1.15)$$

$$\dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{d\alpha}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{d\beta}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{d\gamma}{dq_i} \dot{q}_i; \quad (1.16)$$

En donde q_i representa el valor de las coordenadas articulares.

Efectuando la derivada parcial de la posición de las articulaciones se obtiene la matriz jacobiana que es la representación de la velocidad de las articulaciones para adoptar una posición nueva o diferente, el valor instantáneo de cada articulación cambia porque cada derivada será diferente en el espacio articular. (26)

Expresada de forma matricial; la matriz jacobiana será de $6 \times n$ en donde n dependerá completamente del número de variables articulares.

$$J_a \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

2.10.2 Jacobiana geométrica

Establece la relación entre las velocidades articulares (\dot{q}_n) y la velocidad lineal ($\dot{\mathbf{v}}$) y angular ($\dot{\mathbf{w}}$) en el extremo del robot expresadas en el sistema inercial del robot. Para su obtención es necesaria la matriz que define el modelo cinemático del robot.

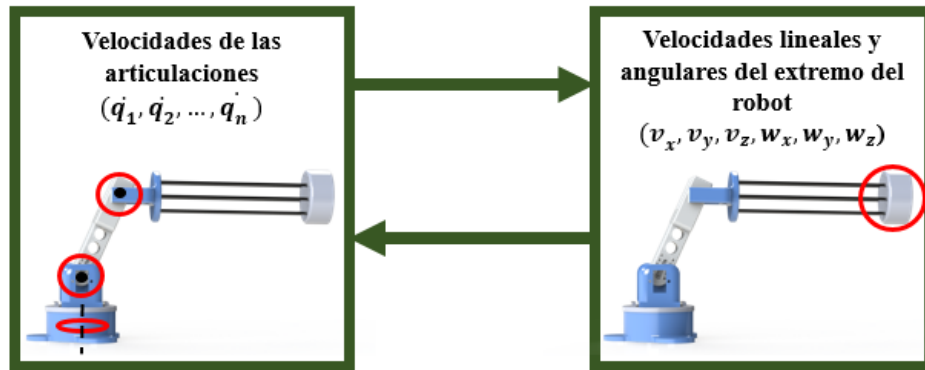


Figura 1.25 Esquema de relación entre velocidades articulares y velocidades del extremo del robot

$$J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

La velocidad lineal del extremo del robot expresada desde el sistema inercial se obtiene mediante las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) obtenidas de la matriz \mathbf{T} . Este procedimiento es igual al del jacobiano analítico, para obtener la velocidad angular. Al obtener la matriz \mathbf{T} de posición del efector final referido con el sistema inercial $\{\mathbf{S}_0\}$ del manipulador; se obtiene una matriz de rotación $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ dentro de la matriz de transformación homogénea, esta es una matriz ortonormal que contiene las rotaciones de los sistemas. Para

obtener las velocidades angulares se deriva la matriz de rotación; se hace uso de la matriz asimétrica (se dice que es asimétrica cuando al multiplicarla por su transpuesta es cero), la diagonal principal es igual a cero, así como la simetría de los elementos internos a través de la diagonal principal. (26)

2.11 Matriz Omega

Para la demostración de la matriz omega se parte de la matriz de rotación. Está es una matriz cuadrada y ortonormal, para cada matriz ortonormal, la matriz de rotación se representa con una letra R y R^{-1} se tiene que:

$$RR^{-1} = I_n \quad (1.19)$$

Donde I_n es la matriz identidad. Al diferenciar la Ecuación se obtiene:

$$\dot{R}R^T + RR^T = 0_n \quad (1.20)$$

Que también puede ser escrito como:

$$\dot{R}R^T + (R\dot{R}^T)^T = 0_n \quad (1.21)$$

Realizando un cambio de variable se obtiene que:

$$\Omega = \dot{R}R^T = 0_n \quad (1.22)$$

La matriz Omega proporciona las velocidades angulares del efector final referido al sistema inercial.

La notación de los vectores **i,j,k** es:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Dentro de la matriz asimétrica la ubicación de las componentes de la velocidad angular cambia a la siguiente manera, debido a que una de sus propiedades es que la diagonal principal está conformada por cero. Otra propiedad de la matriz asimétrica es que sus componentes se encontraran con su inverso aditivo en una simetría dada por la diagonal principal, estas dos propiedades permiten la verificación de ésta: (26)

$$) \Omega(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; b) \Omega(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; c) \Omega(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \dot{\theta} \\ k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = k \dot{\theta} \quad (1.26)$$

2.12 Coordenadas de configuración (25)

Cualquier manipulador ya sea serial o paralelo convencional tiene lo que se conoce como coordenadas de configuración a las coordenadas $q = [q_1, \dots, q_n]$; y se constituye de los siguientes elementos:

- Coordenadas de postura, respecto al sistema inercial:

$$\zeta = [x, y, z]^T \quad (1.27)$$

Coordenadas de configuración correspondientes al tipo de manipulador a analizar

Manipulador Serial: $q_s = [q_{s1}, \dots, q_{sn}]$

Manipulador Virtual: $q_v = [q_{v1}, \dots, q_{vn}]$

Manipulador Paralelo; $q_d = [q_{d1}, \dots, q_{dn}]$

En este caso se encuentran dadas no sólo por las juntas activas, sino incluye también a las pasivas: $q_d = [q_{i,j}, \dots, q_{m,n}]$. Permitiendo definir las coordenadas de manera general de la siguiente manera:

$$q = [\zeta \ q \ k]^T \quad (1.28)$$

Donde $K = s, v, d$; dependiendo del manipulador a estudiar.

Siguiendo las mismas normas se obtienen las velocidades generalizadas como sigue:

$$\dot{q} = [\zeta \dot{q} \ \dot{k}]^T \quad (1.29)$$

Cinemática

La cinemática de un manipulador asociada al sistema inercial, es conocida como cinemática externa. Teniendo las coordenadas generalizadas, q , donde las restricciones cinemáticas se pueden describir de la forma:

$$AT(q)\dot{q} = 0 \quad (1.30)$$

Es posible obtener la matriz asociada a la cinemática externa y parametrizada por las coordenadas generalizadas; de la forma

$$AT(q) \in R^{(n.m) \times (rm+n.m)} \quad (1.31)$$

La cinemática interna de un manipulador es aquella que está asociada al sistema de referencia $\{x_p, y_p, z_p\}$, y es independiente a la orientación del manipulador, θ . Por lo cual para encontrar la cinemática interna del manipulador, es necesario igualar $\theta = 0$; la expresión quedaría de la siguiente forma:

$$ATp(q)q_{\dot{p}} = 0 \quad (1.32)$$

Donde $ATp(q) \in R^{(n.m) \times (rm+n.m)}$ es la matriz asociada a las restricciones de la cinemática interna, que se encuentra parametrizada por las coordenadas generalizadas.

2.13 Matriz en variables de estado

La teoría moderna de control está basada en el conocimiento del comportamiento interno del sistema, reflejado en las variables que influyen en su dinámica. Estas variables constituyen el concepto de *estado del sistema*. El conocimiento de la evolución de todas las variables influye en la dinámica del sistema permite efectuar un control más potente de ésta y abordar el control de sistemas más complejos (30). Sus principales ventajas frente a la teoría clásica son.

- Aplicable a sistemas mutivARIABLES en los que existe un elevado grado de interacción entre las variables del sistema.
- Es aplicable a sistemas con relaciones no-lineales entre las variables involucradas en su dinámica y cuyo comportamiento no puede ser aproximado por un modelo lineal, dentro del rango de valores que van a tomar sus variables.
- Aplicable a sistemas complejos de control, con un gran número de variables internas que condicionan el comportamiento futuro de la salida.
- Aplicable a sistemas cuyos parámetros varían en el tiempo a velocidades comparables con la evolución de sus variables, para los cuales no se puede obtener en consecuencia, un modelo de parámetros constantes válido en un rango temporal necesario para efectuar el control.

2.13.1 Concepto de estado

Se define estado de un sistema como la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior (30).

La cantidad mínima de información que define el estado viene representada por un conjunto de variables $ST(t)$ cuyos valores dependen del instante t considerado, denominadas variables de estado del sistema. Este conjunto de variables, $ST(t)$, recibe el nombre de vector de estado. En la gran mayoría de los sistemas físicos reales se podrá obtener un modelo suficientemente aproximado donde el vector de estado sea de dimensión finita, n , la anterior definición puede expresarse de forma matemática como (30):

$$x(t) = \Psi(t, t_0, x(t_0), u(\tau)), t_0 < \tau \leq t \quad (1.33)$$

Se define estado de un sistema como la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior (30).

La cantidad mínima de información que define el estado viene representada por un conjunto de variables $X_i(t)$ cuyos valores dependen del instante t considerado, denominadas variables de estado del sistema. Este conjunto de variables, $x(t)$, recibe el nombre de vector de estado. En la gran mayoría de los sistemas físicos reales se podrá obtener un modelo suficientemente aproximado donde el vector de estado sea de dimensión finita, n , siendo éste el único caso estudiado a lo largo de todo este texto. Si además se representa el conjunto de variables de entrada mediante el vector $u(t)$, la anterior definición puede expresarse de forma matemática como (30):

2.13.2 Vector de estado

El vector de estado se define sobre el denominado espacio de estado: “Espacio de estado es el espacio vectorial en el cual el vector de estado toma valores, teniendo por tanto la misma dimensión que el número de elementos de dicho vector”

Al ser el espacio de estado un espacio vectorial, admite infinitas bases, relacionadas entre sí mediante transformaciones lineales. La representación del estado depende de la base elegida, por lo que también existen infinitas posibilidades, igualmente relacionadas entre sí por transformaciones lineales. Esta dependencia no afecta a cualquier variable externa, como las entradas y las salidas, que no modifican su expresión sea cual sea la representación del estado elegida.

2.13.3 Ecuaciones del modelo de estado

En análisis en el espacio de estados se centra en el estudio de tres tipos de variables: entrada, salida y de estado (26)

Como el estado recoge toda la información del sistema en un determinado instante, es posible definir una relación de la salida con éste y con la entrada. Dicha relación se establece mediante una ecuación de la forma: (30):

$$y(t) = n(t, x(t), u(t)) \quad (1.34)$$

Donde se puede observar que la salida en el instante t sólo depende del tiempo, del estado y de la entrada en ese instante, no del estado y de la entrada en instantes anteriores. Esto se debe a que toda esta información, por propia definición, ya está recogida en el estado.

2.13.4 Representación en el espacio de estados

A partir de la cinemática diferencial de los manipuladores es posible obtener un sistema de ecuaciones diferenciales. Recordando que un estado es la mínima información necesaria en un instante para conocer la situación del sistema en ese momento, conociendo las entradas en dicho instante, es posible determinar el estado del sistema en cualquier instante posterior.

Una forma de encontrar una representación de la cinemática del sistema MIMO (Múltiples Entradas Múltiples Salidas) es mediante la realización de un mapeo de las velocidades de entrada r_m , donde $n(t) = [n_1, \dots, n_t]$.

Siendo el espacio nulo $N(Atp)$, puede ser utilizado para encontrar un conjunto de vectores suaves de r_m , donde $[\sigma_{m1}(q), \dots, \sigma_{m1_m}(q)]$. Estableciendo $\Sigma(q) = [\sigma_{m1}(q), \dots, \sigma_{m1_m}(q)]$ es una matriz con los vectores de velocidades, parametrizada por las coordenadas angulares $\theta_{i,j}$, se expresa en el espacio de estados de las restricciones cinemáticas como:

$$\dot{q}_p = \sum (\theta_{i,j}) [\eta] \quad (1.35)$$

Donde n es la matriz que representa la velocidad lineal y angular del extremo del manipulador. Lo anterior se puede expresar de la forma generalizada: Lo anterior se puede expresar de la forma generalizada:

$$\begin{aligned} \dot{q}_p &= \begin{pmatrix} \zeta_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} \\ \dot{q}_p &= \left(\frac{\zeta_p}{\sum q_k(\dot{\theta}_{i,j})} \right) \cdot [\eta] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Introduciendo la configuración de la matriz de rotación como una extensión de la matriz de rotación de postura, la cual ayudara a describir la orientación del efector final respecto al sistema inercial.

$$T_q = \begin{bmatrix} R_p^0(\theta_p) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Y visto de manera respecto al sistema local

$$T_{qp} = \begin{bmatrix} R_p^{0^{-1}}(\theta_p) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Pre multiplicando por la matriz de rotación T_q a ambos términos de la expresión se obtiene:

$$T_q \cdot \dot{q}_p = T_q \cdot \begin{pmatrix} \zeta_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

$$T_q \cdot \dot{q}_p = T_q \cdot \left(\frac{\zeta_p}{\sum(q_k \dot{\theta}_{i,j})} \right) \cdot [\eta]$$

Siendo la ecuación anterior la representación del sistema MIMO completo del modelo cinemático de la configuración del manipulador.

$$\dot{q} = S_T(q) \cdot u \quad (1.40)$$

Donde \dot{q} Representa a las variables de salida, u las variables de entrada y ST las ecuaciones a partir de las cuales es posible determinar las variables de estado. Sustituyendo términos se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} = \left(\frac{R(\theta) \Sigma \zeta}{\Sigma(q_k \dot{\theta}_{i,j})} \right) \cdot [\eta] \quad (1.41)$$

Donde, $A_T \in R^{(M.N) \times (3+M.N)}$ es la matriz asociada a la cinemática, $q \in R^{(3+M.N)}$ es el vector de las coordenadas de configuración y $\dot{q} \in R^{(3+M.N)}$ es el vector de las velocidades de configuración.

$$\dot{q}_p = (\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \dot{q}_{1,1}, \dot{q}_{1,2}, \dots, \dot{q}_{1n,m}) \quad (1.42)$$

Para solucionar el conjunto es conveniente seleccionar el conjunto de variables generalizadas que mejor convenga, para representar al sistema MIMO. Las velocidades del punto P expresadas en coordenadas respecto al sistema inercial: v_{xP} , v_{yP} y v_{zP} describiendo los parámetros para un robot RRR_v y 4RRSS.

$$\dot{q}_p = [ST][\eta] \quad (1.43)$$

Donde S_{tn} son vectores columna y $\eta = [v_{xP} \ v_{yP} \ v_{zP}]$ es el vector de entradas. Por lo tanto:

$$\dot{q}_p = [S_{t1}, S_{t2}, S_{t3}][\eta] \quad (1.44)$$

De esta forma se tiene la cinemática del robot expresada en términos de las variables de entrada η .

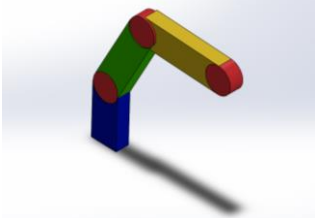
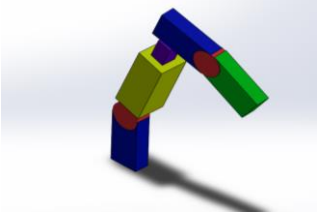
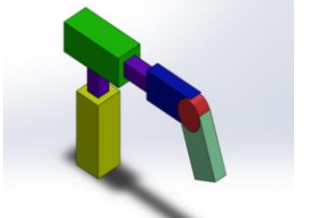
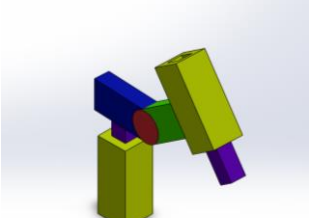
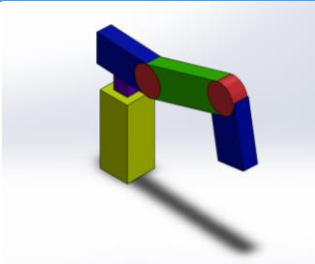
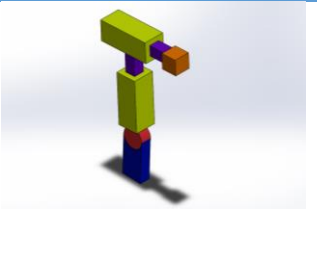
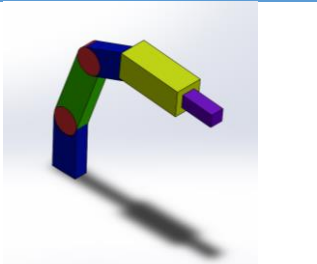
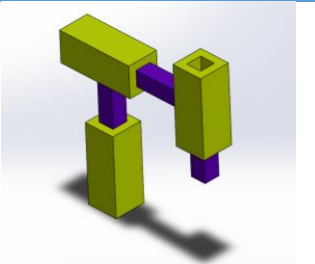
Representación en el espacio de estados

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \\ \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_{t1,1} & \dots & S_{t1,3} \\ S_{t3,1} & \dots & S_{t3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{xP} \\ v_{yP} \\ v_{zP} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

2.14 Teoría de Cadenas Virtuales en la literatura

Como se ha mencionado en el capítulo #1 El Doctor Patricio Z. define a una cadena virtual como: un elemento que existe en la cinemática del manipulador, pero no en la dinámica de este. Debido a que la masa de los eslabones de la cadena virtual es considerada cero, los efectos inerciales en el modelo dinámico son nulos, existiendo matemáticamente en el modelo cinemático, pero no en el dinámico.(1)

Boche (25) en su tesis menciona diferentes tipos de cadenas virtuales seriales de 3GDL en el plano, teniendo la clasificación según sus articulaciones o juntas (R=rotacional, P=Prismática):

Configuraciones de cadenas virtuales seriales de 3 GDL en el plano			
RRR	RPR	PPR	PRP
			
PRR	RPP	RRP	PPP
			

Y para la selección de una cadena virtual es necesario considerar los diferentes factores como los grados de libertad del manipulador “real” o el movimiento que se quiere imponer. Hay 3 posibilidades para implementar una cadena virtual:

- Los GDL (grados de libertad) del manipulador real son menores a los de la cadena virtual.
- Los GDL de ambos manipuladores son iguales.
- Los GDL del manipulador real son menores que los del manipulador virtual.(25)

2.14.1 Cadenas Virtuales para la síntesis de tipo de Mecanismos Paralelos (PM):

En el artículo de Kong and Gosselin (31) utilizan un método intuitivo y conveniente (Cadenas Virtuales) para representar patrones de movimiento sin ninguna ambigüedad. Resulta una herramienta eficaz para la síntesis de tipo.

Síntesis de tipo consiste en encontrar todos los posibles tipos de PMS (Mecanismos paralelos) generando un patrón de movimiento equivalente de la plataforma móvil. La selección de movimiento o patrón de movimiento es un punto de partida para la síntesis de tipo. Las cadenas virtuales se utilizan para sintetizar Mecanismos Paralelos.

El autor define 7 juntas para representar a los mecanismos paralelos:

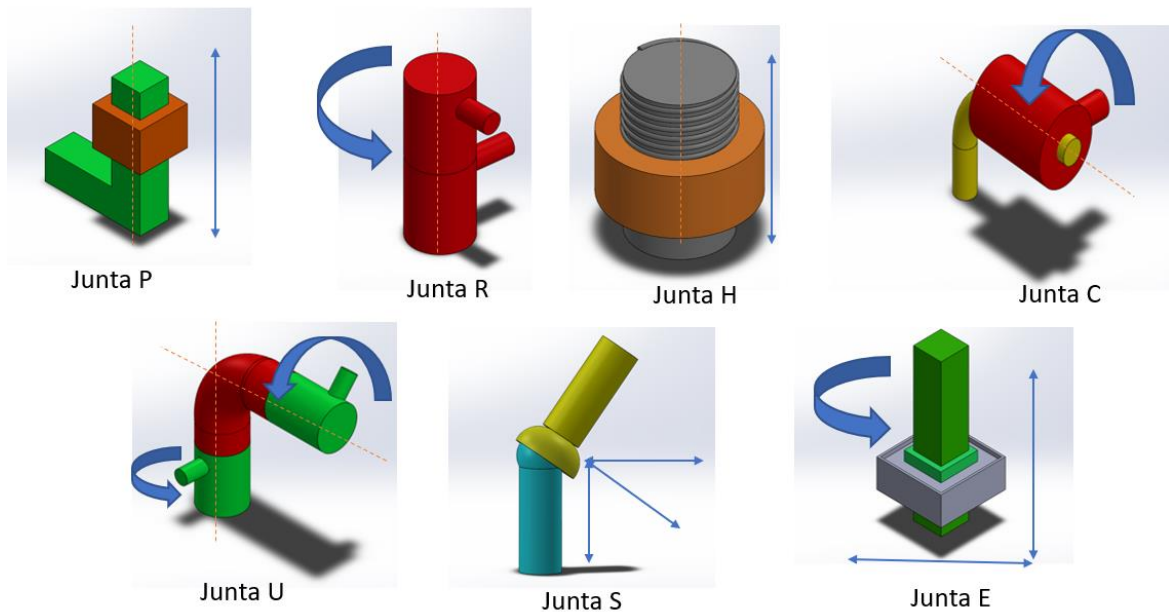


Figura 1.26 Tipos de juntas

Al igual se tiene su nomenclatura para representar las juntas, para posteriormente combinarlas:

Tabla 1.5 Nomenclatura de juntas

C	Junta Cilíndrica	R	Junta de Revoluta
H	Junta Helicoidal	S	Junta Esférica
P	Junta Prismática	U	Junta Universal
E	Junta Planar		

Representación de las Patas y mecanismos paralelos (PM)

Las patas de un PM es representado por una cadena de caracteres representado los tipos de juntas, empezando de la base hasta la plataforma móvil. Por ejemplo RRRR esta compuesto por 4 juntas R. Para representar a los PM se tienen las siguientes reglas:

- Un PM es representado por los tipos de sus patas conectadas por “-“ y “_”.
- Los tipos de patas dentro del mismo grupo de patas se conectan sucesivamente por "-".
- Las patas de diferente grupo se prepresentan con “_”.
- R y P se utilizan para representar las articulaciones R y P activadas.

Ejemplos:

*4-RRR: esto quiere decir que tiene 4 patas con 3 juntas R.

*2-RR_2PP quiere decir que tiene 2 patas con 2 juntas RR y otras 2 patas con 2 juntas prismáticas.

*2-PPP quiere decir que tiene 2 patas con 3 juntas prismáticas y una de ellas se mueve o es activa.

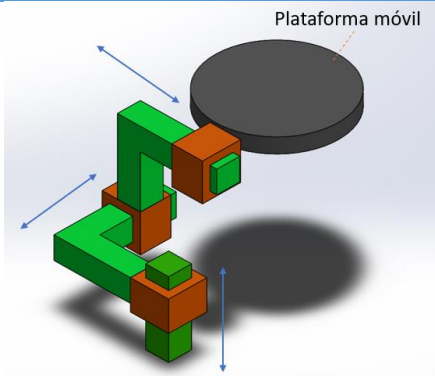
Cadenas Virtuales de 3GDL y 4GDL

En el artículo aparecen cadenas virtuales propuestas por el autor las cuales se encontraron las siguientes:

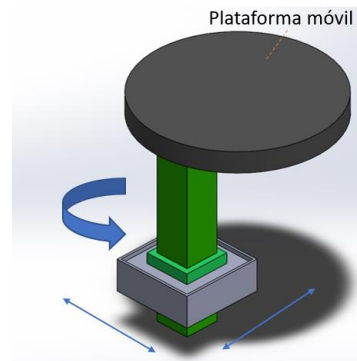
Tabla 1.6 Configuraciones de Cadenas Virtuales de 3GDL

Cadenas Virtuales para Mecanismos Paralelos y Seriales

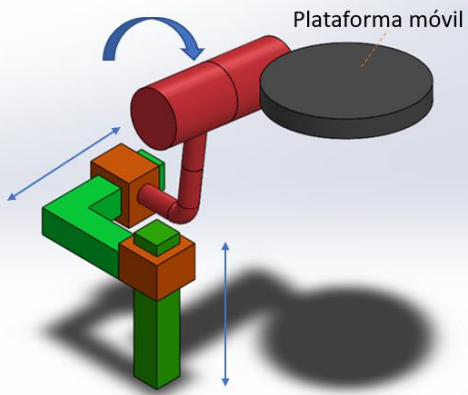
PPP



E



PPR



S

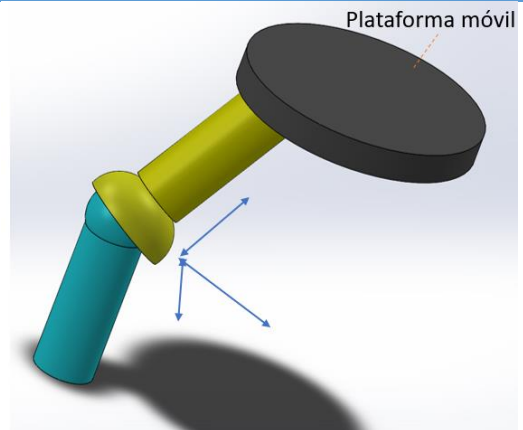


Tabla 1.7 Configuraciones de Cadenas Virtuales de 4GDL

Cadenas Virtuales para Mecanismos Paralelos y Seriales	
PPPR	PS
SP	

Existen más cadenas virtuales de 5 GDL así también Cadenas virtuales Paralelas ya no puestas en el trabajo presente, pero el autor ilustra mejor en su artículo. Sin embargo se menciona: “...la clasificación de los patrones de movimiento y PM propuestas anteriormente no es exhaustiva. Sin embargo, se cree que las clases propuestas cubren los casos más relevantes en la práctica. Además, esta clasificación se basa en cadenas virtuales y alivia cualquier ambigüedad potencial en la descripción del patrón de movimiento...”.(31)

3. Modelado de la cinemática diferencial

3.1 Cinemática Directa de Cadena Virtual

La cadena virtual propuesta en el siguiente trabajo no es encontrada en la literatura, en el capítulo anterior se mostraron las configuraciones más prácticas y habituales. La configuración tomada fue elegida por su simplicidad teniendo 3GDL en el espacio, sabiendo que es deficiente en el espacio, pero el análisis cinemático resulta bastante sencillo. Posee 3 juntas activas, donde la junta 1 y 2 sus ejes son perpendiculares, luego, las juntas 2 y 3 tiene ejes paralelos.

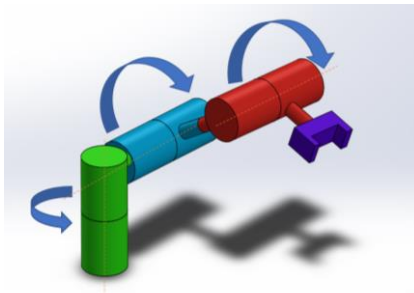


Figura 3.1 Cadena Virtual propuesta

Tabla 3.1 Características de cadena virtual

Características de la Cadena Virtual:	
Grados de libertad	3
Tamaño de eslabones	Eslabón 1: 11 cm Eslabón 2: 20 cm Eslabón 3: 5 cm
Tipos de articulaciones o juntas	Rotacional, Rotacional, Rotacional
Juntas Activas	3

Como se pretendía ver la cadena virtual en físico para observar mejor el fenómeno se realizó un dibujo en CAD, de la siguiente manera desarrollando la cinemática basada en el siguiente diagrama:

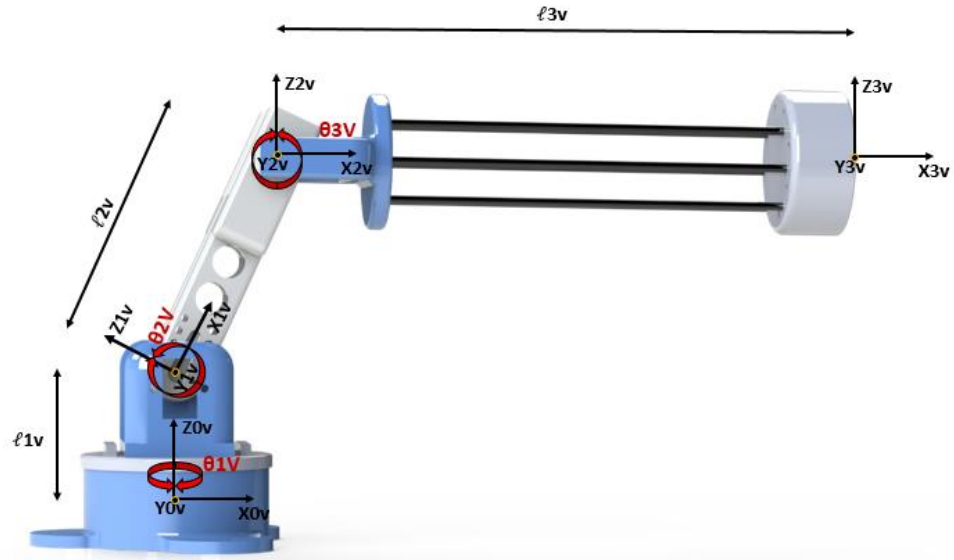


Figura 3.2 Representación de cadena virtual vista lateral

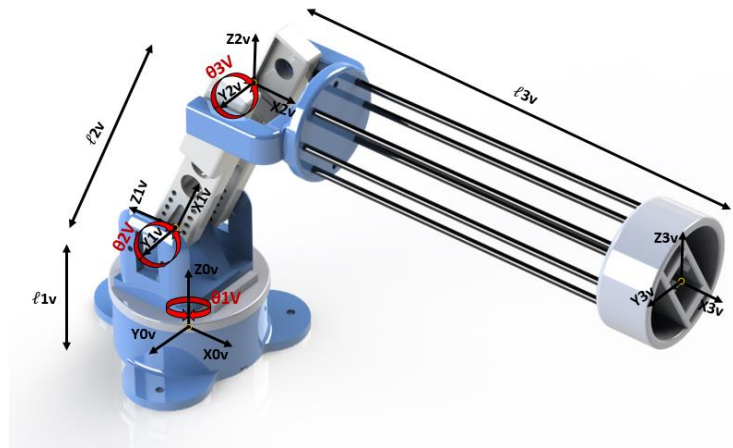


Figura 3.3 Representación de cadena virtual vista isométrica

Se realizaron las siguientes transformaciones ocupando el método de matrices de transformación homogénea.

$${}^0 a_1^v = Q_z[\theta_{1v}].T_z[\ell_{1v}] \quad (3.1)$$

$${}^1 a_2^v = Q_y[\theta_{2v}].T_x[\ell_{2v}] \quad (3.2)$$

$${}^2 a_3^v = Q_y[\theta_{3v}].T_x[\ell_{3v}] \quad (3.3)$$

Modelo Cinemática Directa

$${}^0\mathbf{a}_3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_v \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad (3.4)$$

La matriz $T_c = {}^0\mathbf{a}_3$, contiene los valores de rotación, traslación, perspectiva y escalado.

$${}^0\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{n}}_v & \widehat{\mathbf{o}}_v & \widehat{\mathbf{a}}_v & \widehat{\mathbf{p}}_v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

En donde

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(\theta_1 v) \cos(\theta_2 v + \theta_3 v) & o_x &= -\sin(\theta_1 v) \\ n_y &= \cos(\theta_2 v + \theta_3 v) \sin(\theta_1 v) & o_y &= \cos(\theta_1 v) \\ n_z &= \sin(\theta_2 v + \theta_3 v) & o_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x &= \cos(\theta_1 v) \sin(\theta_2 v + \theta_3 v) & P_{xv} &= \cos(\theta_1 v) (\ell_2 v \cos(\theta_1 v) + \ell_3 v \cos(\theta_2 v + \theta_3 v)) \\ a_y &= \sin(\theta_1 v) \sin(\theta_2 v + \theta_3 v) & P_{yv} &= (\ell_2 v \cos(\theta_1 v) + \ell_3 v \cos(\theta_2 v + \theta_3 v)) \sin(\theta_1 v) \\ a_z &= \cos(\theta_2 v + \theta_3 v) & P_{zv} &= \ell_1 v - \ell_2 v \sin(\theta_1 v) - \ell_3 v \sin(\theta_2 v + \theta_3 v) \end{aligned}$$

Comprobación cinemática por método numérico

Se utilizó el programa de Wolfram Mathematica para comprobar la cinemática y ocupamos la herramienta matemática del método numérico de Newton-Raphson se obtienen la cinemática inversa para dar las soluciones a $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, siguiendo una trayectoria recta iniciando en un punto inicial $\mathbf{p}_i = (7,7,7)$ y un punto final $\mathbf{p}_f = \{20,20,20\}$ siguiendo 20 puntos, los cuales corresponden a cada una de las 20 soluciones arrojadas por el método numérico.

Simulación es una recta:

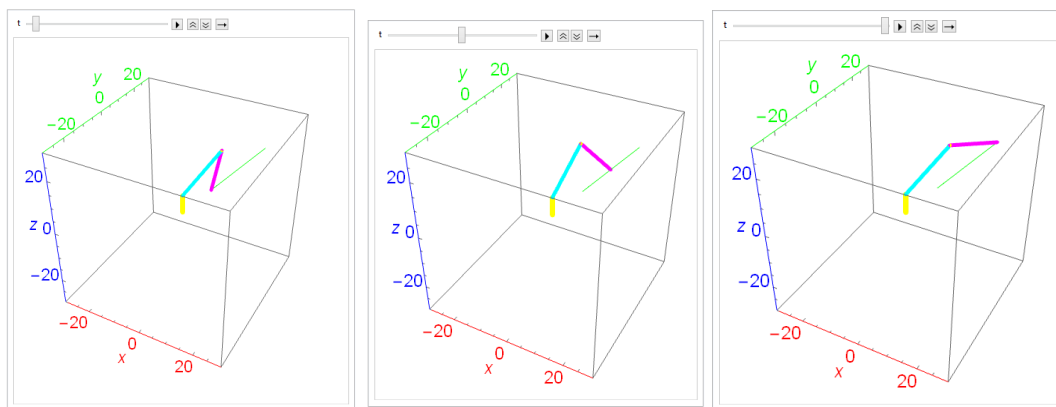


Figura 3.4 Simulación de cadena virtual en Wolfram Mathematica

3.2 Postura del manipulador paralelo en el espacio

La Ilustración muestra el robot paralelo delta 4 en estudio, con sus 4 cadenas cinemáticas independientes, cada una de ellas accionada por un actuador; cada una de las cadenas se encuentra conectada a la base fija, tierra, y al efector final al mismo tiempo; por lo tanto hay 4 puntos de anclaje a la base fija y 4 puntos de unión al efector final.

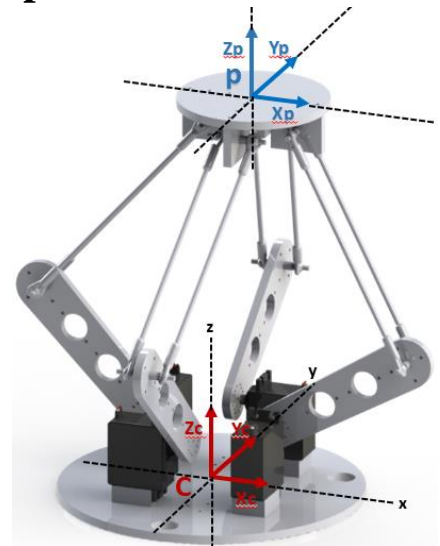


Figura 3.4 Postura del manipulador paralelo

La postura del manipulador paralelo en el espacio puede ser descrita por:

$$\zeta = [x, y, z]^T \quad (3.6)$$

En donde se describe la posición del punto final $P = (x_p, y_p, z_p)$ con respecto al sistema inercial (x_c, y_c, z_c) . Por otra parte dada la configuración del robot paralelo la plataforma no puede cambiar su orientación, por lo que esta permanecerá constante y se asume que $R(\theta)$ tendrá un valor invariable con el tiempo, sin embargo, la orientación quedaría definida por la matriz de rotación de la postura es una matriz ortogonal que puede ir del sistema inercial al sistema local.

$$R(\theta) \cdot R^T(\theta) = I \quad (3.7)$$

$$R^T(\theta) = R^{-1}(\theta) \quad (3.8)$$

Donde $R(\theta)$, puede ser representada por las siguientes matrices correspondientes a la rotación respecto a cada uno de los ejes "X,Y,Z":

$$R_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{Sen}(\alpha) \\ 0 & \text{Sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$R_y(y) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \text{Sen}(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$R_z(z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{Sen}(\theta) & 0 \\ \text{Sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Representación de la posición de un punto entre el sistema inercial y el sistema local

Se define el vector \overline{OC} relativo al sistema inercial como 0C , el vector \overline{PC} relativo al sistema local como 0P . El vector 0C puede ser representado como:

Visto sistema inercial

$${}^0C = R(\theta)^P + {}^PC \quad (3.12)$$

Visto desde el sistema local

$${}^PC = R(\theta)^{-1} + ({}^0C - {}^0P) \quad (3.13)$$

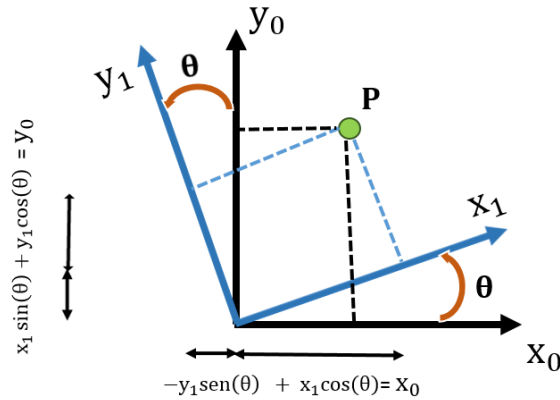


Figura 3.5. Representación de un sistema local visto desde el sistema inercial

Representación de la Velocidad de un Punto entre el Sistema Inercial y el Sistema Local

La velocidad de un punto es un vector libre; por lo cual es posible posicionarlo en cualquier lugar del espacio, sin que se experimenten pérdidas o cambios en el sentido, si la magnitud y la dirección se mantienen. Si la velocidad del punto C definido con respecto al sistema inercial se puede expresar como el vector ${}^0\dot{C}$, y la velocidad del punto C con respecto al sistema local se puede expresar por el vector ${}^P\dot{C}$, se puede expresar de la siguiente manera:

$${}^0\dot{C} = R(\theta)^P * \dot{C} \quad (3.14)$$

$${}^P\dot{C} = R(\theta)^{-1} * {}^0\dot{C} \quad (3.15)$$

3.3 Cinemática directa paralelo 4 Delta por matrices de transformación homogénea

Se utilizó un robot Delta 4 construido por Cruz-López (32) la cual tienen las siguientes características:

Tabla 3.2 Características de robot Delta paralelo 4RRSS

Características de robot Delta 4 RRSS	
Grados de libertad	4
Tamaño de los eslabones y Bases	Eslabón 1: 11cm Eslabón 2: 20 cm Eslabón 3: 50 cm Base móvil: 30 cm de diámetro Base fija: 40x40 cm
Tipos de articulaciones o juntas	Rotacional, Rotacional, Esférica, Esférica
Material	Aluminio y acrílico
Actuadores	Servomotores

Análisis del manipulador

Para la resolución de la cinemática directa, se ha propuesto colocar el sistema inercial en el centro de la base del manipulador a la altura de la primera articulación, de tal manera que resolviendo la cinemática para una cadena solo bastara con rotar la base de la cadena $90^\circ, 180^\circ$ y 270° de esta manera se obtienen las 3 cadenas restantes. En la Figura 3.4 se aprecia al manipulador junto con las 4 cadenas correspondientes

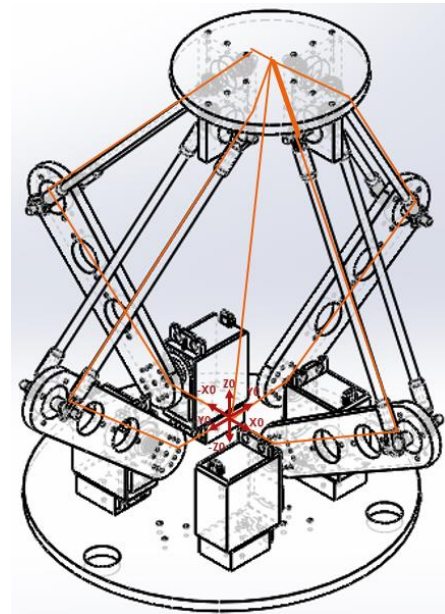


Figura 3.6 Diagrama de paralelo Delta 4 RRSS

Siguiendo el método de matrices de transformación homogénea se trasladan los sistemas de referencia partiendo de $\{X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1}\}$ a $\{X_n, Y_n, Z_n\}$ buscando alinear el sistema $\{X_n, Y_n, Z_n\}$ al eslabón correspondiente obteniendo de esta manera traslaciones así como rotaciones sobre los ejes $\{X, Y, Z\}$. Para simplificar cálculos se ha alineado al eje "X0" (correspondiente al sistema inercial) con uno de los eslabones, de esta manera solo se genera una traslación constante "L1X" entre el sistema "X0" y "X1" (Figura 3.5a y 3.5b).

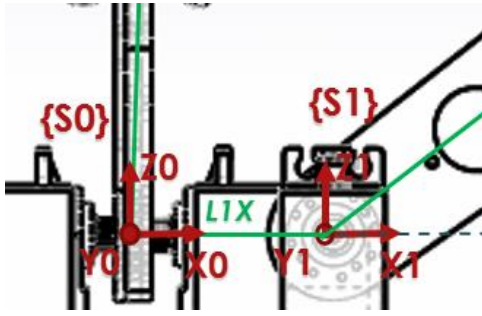


Figura 3.7a Traslación del sistema S0 a S1

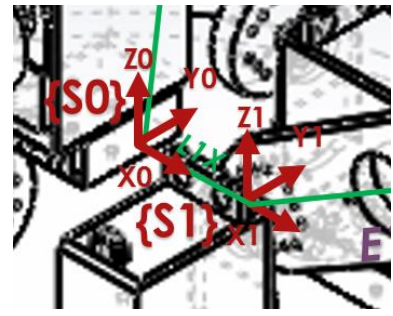


Figura 3.7b Traslación del sistema S0 a S1

Expresado matemáticamente:

$${}^0_{11}ad = Tx[\ell_1] \quad (3.16)$$

Se corresponde a alinear el sistema {S1} con el eslabon E1 por medio de una rotación sobre el eje “Y1” con un ángulo negativo θ_1 generando al sistema {S1’}. El sistema {S1’} se traslada sobre su eje “X” una distancia constante $L2X$ estando alineado se renombra como {S2}. El sistema {S2} se rota sobre su eje “Y” un ángulo θ_2 para quedar alineado con el eslabón E2 generando al sistema {S2’}. En la Figura 3.6 se muestra la traslación y rotación de los sistemas {S1,S1’,S2}

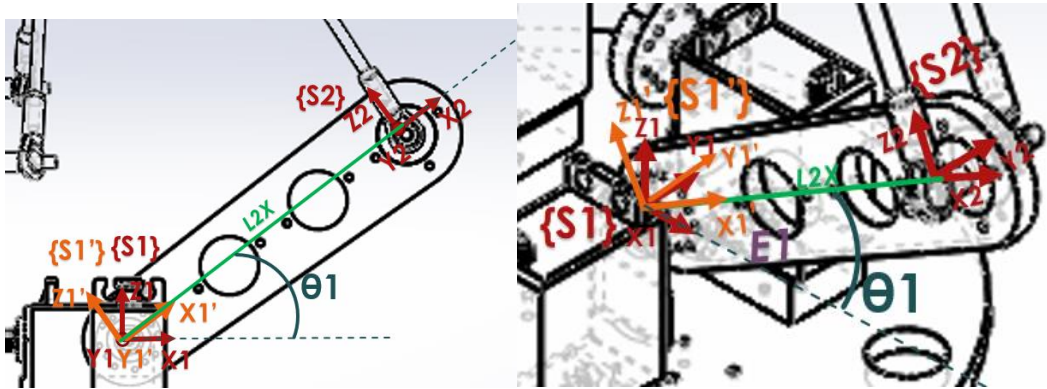


Figura 3.8 Traslación y Rotación de S1, S1' y S2

Quedando la expresión matemática:

$${}^{11}_{12}ad = Qy[-\theta_1].Tx[\ell_2] \quad (3.17)$$

Puesto que el tipo de junta que une al eslabón 1 y 2 es esférica se debe considerar desplazamiento sobre los ejes X, Y, Z debido a la configuración del robot se desprecia la rotación sobre su propio eje del eslabón. No solo bastará con un ángulo para alinear al sistema {S2} con el eslabón, así que además de θ_2 se debe considerar un ángulo θ_3 dicho ángulo se muestra en la Figura 3.7. Se obtiene θ_3 por medio de una rotación del sistema {S2} quedando

alineado con el eslabon E2 y dado que esta rotación esta sobre el mismo punto que la genera a θ_2 el sistema es nombrado $\{S2'\}$.

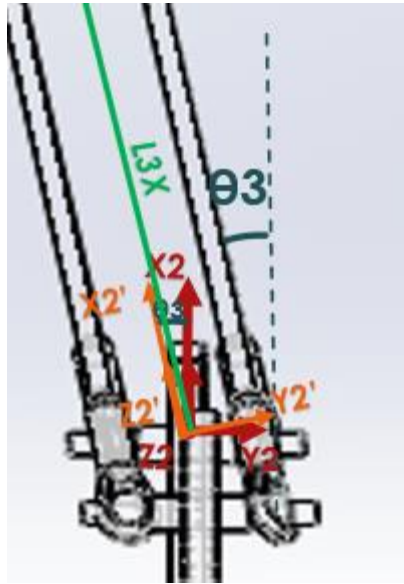


Figura 3.9 Ángulo theta 3

Expresión matemáticamente:

$${}^{12}a_{13}^d = Qy[-\theta_2]. Qz[90^\circ - \theta_3]. Tx[l_3] \quad (3.18)$$

El sistema $\{S2'\}$ sobre su eje "X" es trasladado una distancia constante L_3 para ahora ser renombrado como $\{S3\}$ En la Figura 3.8 se muestra la traslación del sistema.

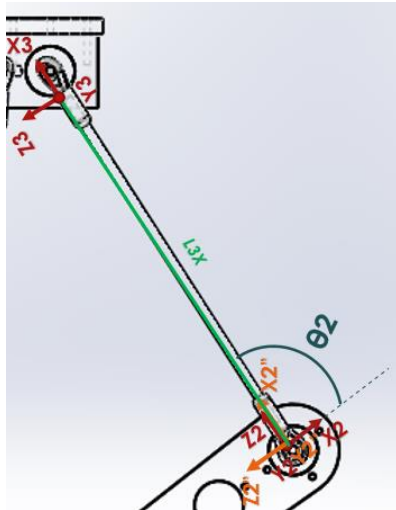


Figura 3.10 a) Vista lateral

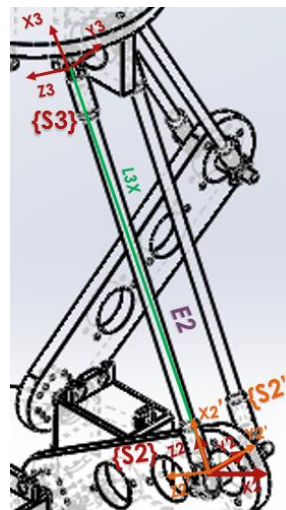


Figura 3.10 b) Vista isométrica

Para el sistema $\{S3\}$ se debe considerar nuevamente que el tipo de junta entre eslabones es esférica, por lo que se debe considerar 2 rotaciones definidas por θ_4 y θ_5 para alinear al sistema $S3$ con el eslabón 3. θ_5 es producto de una rotación del sistema $\{S3\}$ sobre su eje

“Z” Figura 3.9, generando al sistema {S3’}. θ_4 describe la rotación del sistema {S3} sobre su eje “Y” para alinearlo con el eslabón 3.

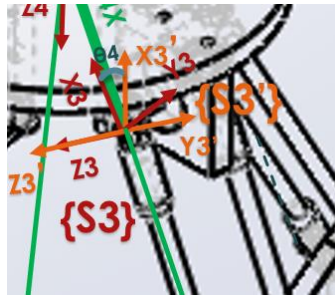


Figura 3.11 a) Vista isométrica

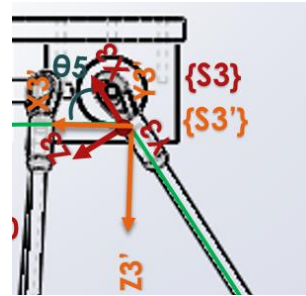


Figura 3.11 b) Vista lateral

El sistema {S3} es trasladado una distancia constante L_4 Figura 3.10 sobre su eje “X” para ser renombrado como {S4} quedando al centro del efector final del manipulador.

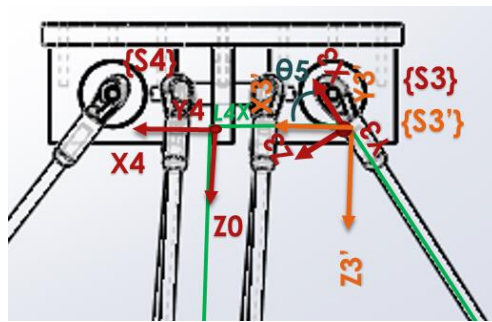


Figura 3.12 a) Vista Lateral

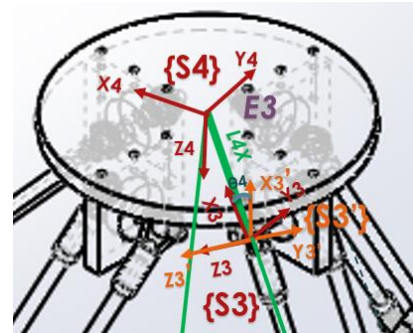


Figura 3.12 b) Vista isométrica

Expresión matemática:

$${}_{14}^{13}ad = Qz[\theta_5]. Qy[\theta_4]. Tx[\ell_4] \quad (3.19)$$

Analizando al manipulador se pueden sustituir los ángulos θ_4 y θ_5 de tal forma que:

$$\theta_4 = -180^\circ + \theta_2 + \theta_1 \quad (3.20)$$

$$\theta_5 = -90^\circ + \theta_3 \quad (3.21)$$

Figura 3.13 Relación de ángulos vista lateral

Quedando de la siguiente manera la expresión matemática:

$${}_{14}^{13}ad = Qz[-90^\circ + \theta_3]. Qy[-180^\circ + \theta_1 + \theta_2]. Tx[\ell_4] \quad (3.22)$$

En la Figura 3.12 se aprecia al manipulador con los sistemas {S1, S2, S3,S4} y sus respectivas transformaciones:

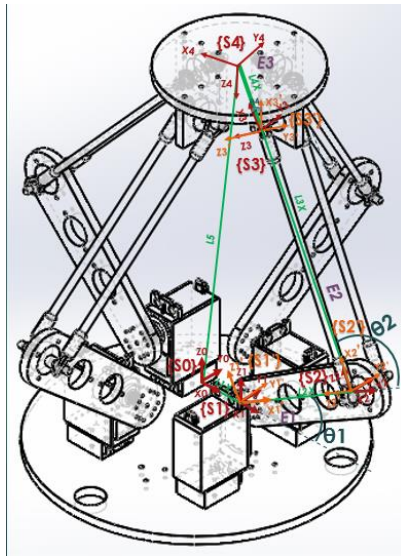


Figura 3.14 a) Vista isométrica de todos los sistemas y transformaciones

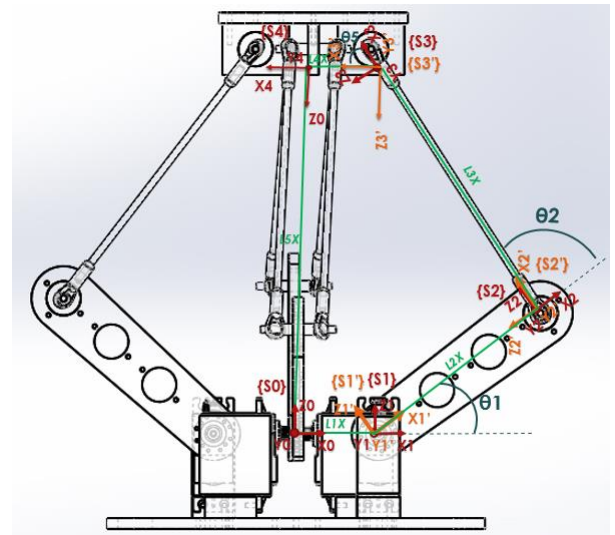


Figura 3.15 b) Vista lateral de todos los sistemas y transformaciones

Obtención del modelo matemático cinemática directa

La obtención del modelo cinemático de una cadena es el mismo empleado para las tres cadenas restantes, dado que las cuatro cadenas cumplen con las mismas dimensiones; tipo de juntas y articulaciones. El método de Matrices de Transformación Homogénea define que la posición y la orientación del efector final vista desde el sistema inercial quedan definida por la matriz:

$${}^{10}_{14}ad \quad (3.23)$$

Dicha matriz es resultado del producto de las matrices obtenidas por el análisis del manipulador en donde:

$${}^{10}_{14}ad = {}^{10}_{11}ad \cdot {}^{11}_{12}ad \cdot {}^{12}_{13}ad \cdot {}^{13}_{14}ad \quad (3.24)$$

Siendo cada una de estas matrices el resultado de multiplicar tanto matrices de rotación como de traslación descritas por el método de “Matrices de Transformación Homogénea” con base en los parámetros obtenidos por el análisis del manipulador. Ver apéndice para checar las matrices.

Realizando las multiplicaciones correspondientes se obtiene como modelo cinemático:

$${}^{10}_{14}ad = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \ell_1 - \ell_4 + \ell_2 \cos(\theta_1) + \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_3) \\ 0 & 1 & 0 & \ell_3 \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & -1 & \ell_2 \sin(\theta_3) + \ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Dado que el efector final se encuentra fijo, su orientación se conservará de tal manera que no hay variables que intervengan en la matriz de rotación.

Obtención del modelo cinemático cadena 2

Siguiendo el mismo procedimiento de la cadena 1 tenemos:

$${}_{24}^{20} ad = {}_{21}^{20} ad. {}_{22}^{21} ad. {}_{23}^{22} ad \quad (3.26)$$

La base sufre una rotación de 90° sobre el eje Z para poder desfasar la cadena respecto al sistema "S0". Para ver las demás matrices checar apéndice.

$${}_{21}^{20} ad = Qz[90^\circ]. Tx[\ell_{21}] \quad (3.27)$$

Modelo cinemático de Cadena 2:

$${}_{21}^{20} ad = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\ell_{23}\text{Cos}(\theta_{23}) \\ -1 & 0 & 0 & \ell_{21} - \ell_{24} + \ell_{22}\text{Cos}(\theta_{21}) + \ell_{23}\text{Cos}(\theta_{21} + \theta_{22})\text{Sen}(\theta_{23}) \\ 0 & 0 & -1 & \ell_{22}\text{Sen}(\theta_{21}) + \ell_{23}\text{Sen}(\theta_{21} + \theta_{22})\text{Sen}(\theta_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Obtención del modelo cinemático cadena 3

$${}_{34}^{30} ad = {}_{31}^{30} ad. {}_{32}^{31} ad. {}_{33}^{32} ad \quad (3.29)$$

La base sufre una rotación de 180° sobre el eje Z para poder desfasar la cadena respecto al sistema "S0". Ver apéndice para checar las demás matrices.

$${}_{31}^{30} a = Qz[180^\circ]. Tx[\ell_{31}] \quad (3.30)$$

Modelo cinemático de cadena 3

$${}_{34}^{30} ad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\ell_{31} + \ell_{34} - \ell_{32}\text{Cos}(\theta_{31}) - \ell_{33}\text{Cos}(\theta_{31} + \theta_{32})\text{Sen}(\theta_{33}) \\ 0 & -1 & 0 & -\ell_{33}\text{Cos}(\theta_{33}) \\ 0 & 0 & -1 & \ell_{32}\text{Sen}(\theta_{31}) + \ell_{33}\text{Sen}(\theta_{31} + \theta_{32})\text{Sen}(\theta_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Obtención del modelo cinemático cadena 4

$${}_{44}^{40} ad = {}_{41}^{40} a. {}_{42}^{41} a. {}_{43}^{42} a. {}_{44}^{43} a \quad (3.32)$$

La base sufre una rotación de 270° sobre el eje Z para poder desfasar la cadena respecto al sistema "S0".

$${}_{41}^{40} ad = Qz[270^\circ]. Tx[\ell_{41}] \quad (3.33)$$

Modelo cinemático

$${}_{44}^{40} ad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ell_{43}\text{Cos}(\theta_{43}) \\ 1 & 0 & 0 & -\ell_{41} + \ell_{44} - \ell_{42}\text{Cos}(\theta_{41}) - \ell_{43}\text{Cos}(\theta_{41} + \theta_{42})\text{Sen}(\theta_{43}) \\ 0 & 0 & -1 & \ell_{42}\text{Sen}(\theta_{41}) + \ell_{43}\text{Sen}(\theta_{41} + \theta_{42})\text{Sen}(\theta_{43}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Modelo de Cinemática directa del robot paralelo

Se comprueban las matrices de transformación homogénea con un esquema en Mathematica, agregando eslabones adicionales para una visualización más realista del robot, las condiciones iniciales son las mismas para todas las cadenas.

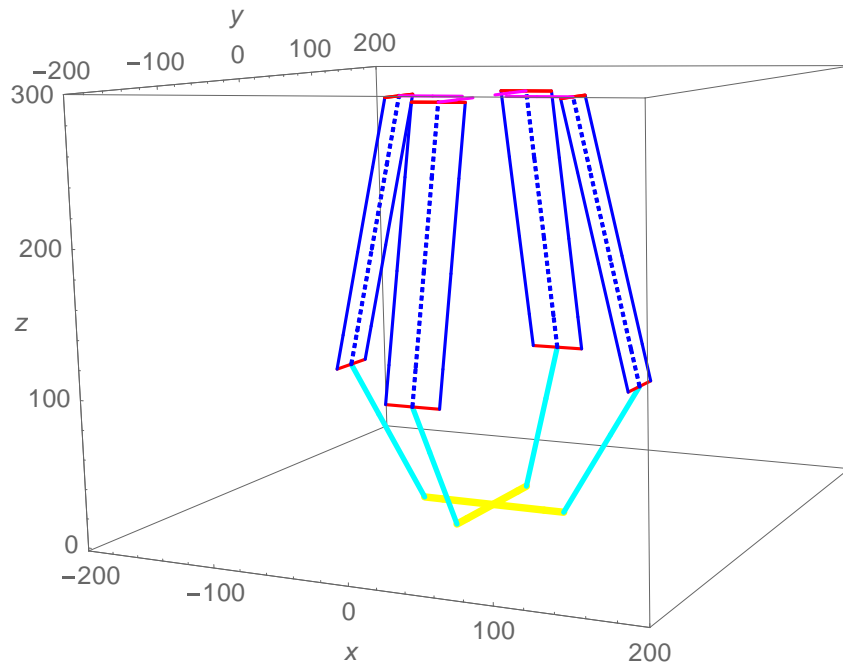


Figura 3.16 Simulación de esquema de postura de robot Delta 4 RRSS

3.4 Cinemática inversa por método algebraico cadena virtual

Del modelo cinemático directo se selecciona al elemento \widehat{p}_v (Figura) que es la que contiene a los elementos de correspondientes a posición, la columna contiene a las igualdades requeridas para poder obtener a las variables articulares ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$). Este método requiere del análisis y observación para la manipulación de las igualdades de tal manera que se pueda dar solución a las variables articulares.

$$\begin{aligned}
P_{xv} &= \text{Cos}(\theta_{1v})(\ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{1v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v} + \theta_{3v})) \\
P_{yv} &= (\ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{1v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v} + \theta_{3v}))\text{Sen}(\theta_{1v}) \\
P_{zv} &= \ell_{1v} - \ell_{2v}\text{Sen}(\theta_{1v}) - \ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{2v} + \theta_{3v})
\end{aligned}
\tag{3.35}$$

Obtención θ_{1v}

Se observa que P_{xv} y P_{yv} nos comunes por lo que:

$$\frac{\ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{2v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v} + \theta_{3v})\text{Sen}(\theta_{1v})}{\text{Cos}(\theta_{1v})(\ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{2v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v} + \theta_{3v}))} = \frac{P_{yv}}{P_{xv}}
\tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Sen}(\theta_{1v})}{\text{Cos}(\theta_{1v})} &= \frac{P_{yv}}{P_{xv}} \\
\tan(\theta_{1v}) &= \frac{P_{yv}}{P_{xv}} \\
(\theta_{1v}) &= \tan^{-1}\left(\frac{P_{yv}}{P_{xv}}\right)
\end{aligned}
\tag{3.37}$$

Obtención θ_{3v}

Se definen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
P_{xvI} + P_{yvI} &= P_{xvD} + P_{yvD} \\
P_{zvI} &= P_{zvD}
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

Términos izquierdos los cuales se nombran P_{xvI} y P_{yvI} revisar apéndice:

Se eleva al cuadrado a los términos $P_{xvI} + P_{yvI}$.

$$P_{xvI}^2 + P_{yvI}^2 = (\ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{2v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v} + \theta_{3v}))^2$$

Se elimina a ℓ_{1v} del término izquierdo P_{zvI} de la igualdad correspondiente al componente “ P_{zv} ” y se eleva al cuadrado.

$$P_{zvI} = \ell_{1v} - \ell_{2v}\text{Sen}(\theta_{2v}) - \ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{2v} + \theta_{3v})$$

$$P_{zvI}^2 = (-\ell_{2v}\text{Sen}(\theta_{2v}) - \ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{2v} + \theta_{3v}))^2$$

Se procede a sumar $P_{xvI}^2 + P_{yvI}^2$ más P_{zvI}^2 y simplificar.

$$P_{xvI}^2 + P_{yvI}^2 + P_{zvI}^2 = \ell_{2v}^2 + \ell_{3v}^2 + 2\ell_{2v}\ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{3v})
\tag{3.39}$$

Términos derechos de las igualdades.

$$P_{xvD}^2 + P_{yvD}^2 = P_{xv}^2 + P_{yv}^2$$

$$P_{zvD}^2 = (P_{zv} - \ell_{1v})^2$$

Sumando los términos derechos de las igualdades se obtiene

$$P_{xvD}^2 + P_{yvD}^2 + P_{zvD}^2 = P_{xv}^2 + P_{yv}^2 + (P_{zv} - \ell_{1v})^2
\tag{3.40}$$

A partir de lo obtenido en las expresiones (3.29) y (3.30) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\ell_{2v}^2 + \ell_{3v}^2 + 2\ell_{2v}\ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{3v}) = P_{xv}^2 + P_{yv}^2 + (P_{zv} - \ell_{1v})^2
\tag{3.41}$$

Despejando y simplificando a $\text{Cos}(\theta_{3v})$ de (3.31)

$$\text{Cos}(\theta_{3v}) = \frac{P_{xv}^2 + P_{yv}^2 + P_{zv}^2 - 2P_{zv}\ell_{1v} + \ell_{1v}^2 - \ell_{2v}^2 - \ell_{3v}^2}{2\ell_{2v}\ell_{3v}} \quad (3.42)$$

Dado que se empleó la función Arco tangente se requiere también obtener a $\text{Sen}(\theta_3)$, por lo cual se recurre a la siguiente identidad trigonométrica.

$$\text{Sen}(\theta_{3v}) = \sqrt{1 - (\text{Cos}(\theta_3))^2}$$

Sustituyendo a $\text{Cos}(\theta_3)$ y tomando en cuenta la configuración del robot se decide aplicar un signo negativo, para definir el sentido del eslabón ℓ_{2v} .

$$\text{Sen}(\theta_{3v}) = -\sqrt{1 - \left(\frac{P_{xv}^2 + P_{yv}^2 + P_{zv}^2 - 2P_{zv}\ell_{1v} + \ell_{1v}^2 - \ell_{2v}^2 - \ell_{3v}^2}{2\ell_{2v}\ell_{3v}}\right)^2} \quad (3.43)$$

Empleando la función ArcTan.

$$\theta_{3v} = \text{ArcTan}(\text{Sen}(\theta_3), \text{Cos}(\theta_3)) \quad (3.44)$$

Obtención θ_{2v}

Desarrollando a P_{xv} , P_{yv} de las expresiones contenidas en (3.25).

$$P_{xv} = \ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{2v})\text{Sen}(\theta_{1v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v})\text{Cos}(\theta_{3v})\text{Sen}(\theta_{1v}) - \ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{1v})\text{Sen}(\theta_{2v})\text{Sen}(\theta_{3v})$$

$$P_{yv} = \ell_{2v}\text{Cos}(\theta_{2v})\text{Sen}(\theta_{1v}) + \ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{2v})\text{Cos}(\theta_{3v})\text{Sen}(\theta_{1v}) - \ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{1v})\text{Sen}(\theta_{2v})\text{Sen}(\theta_{3v})$$

Se propone un sistema de ecuación de 2×2 con P_{xv} y P_{zv} teniendo como incógnitas a $\text{Cos}(\theta_2)$ y $\text{Sen}(\theta_2)$.

Resolviendo el sistema se obtiene.

$$\text{Cos}(\theta_{2v}) = -\frac{A_v}{B_v} \quad \text{Sen}(\theta_{2v}) = -\frac{C_v}{D_v} \quad (3.45)$$

En donde:

$$A_v = -p_x\ell_{2v}\text{Sec}(\theta_{1v}) - p_x\ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{3v})\text{Sec}(\theta_{1v}) + p_z\ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{3v}) - \ell_{1v}\ell_{3v}\text{Sen}(\theta_{3v})$$

$$B_v = \ell_{2v}^2 + 2\ell_{2v}\ell_{3v}\text{Cos}(\theta_{3v}) + \ell_{3v}^2\text{Cos}(\theta_{3v})^2 + \ell_{3v}^2\text{Sen}(\theta_{3v})^2$$

$$C_v = \text{Csc}(\theta_{3v})(p_z\ell_{3v}\text{Cot}(\theta_{3v}) - \ell_{1v}\ell_{3v}\text{Cot}(\theta_{3v}) + p_z\ell_{2v}\text{Csc}(\theta_{3v}) - \ell_{1v}\ell_{2v}\text{Csc}(\theta_{3v}) + p_x\ell_{3v}\text{Sec}(\theta_{1v}))$$

$$D_v = \ell_{3v}^2 + \ell_{3v}^2\text{Cot}(\theta_{3v})^2 + 2\ell_{2v}\ell_{3v}\text{Cot}(\theta_{3v})\text{Csc}(\theta_{3v}) + \ell_{2v}^2\text{Csc}(\theta_{3v})^2$$

Empleando la función ArcTan.

$$\theta_{2v} = \text{ArcTan}(\text{Sen}(\theta_2), \text{Cos}(\theta_2)) \quad (3.46)$$

Simulación de la cinemática inversa forma cerrada de la Cadena virtual:

Se programa una trayectoria con forma de corazón Figura (3.31a), la cinemática inversa arroja los valores de las variables articulares necesarias para dar la configuración necesaria para cumplir con cada punto que conforma la trayectoria, siendo satisfactoria (3.31 b,c).

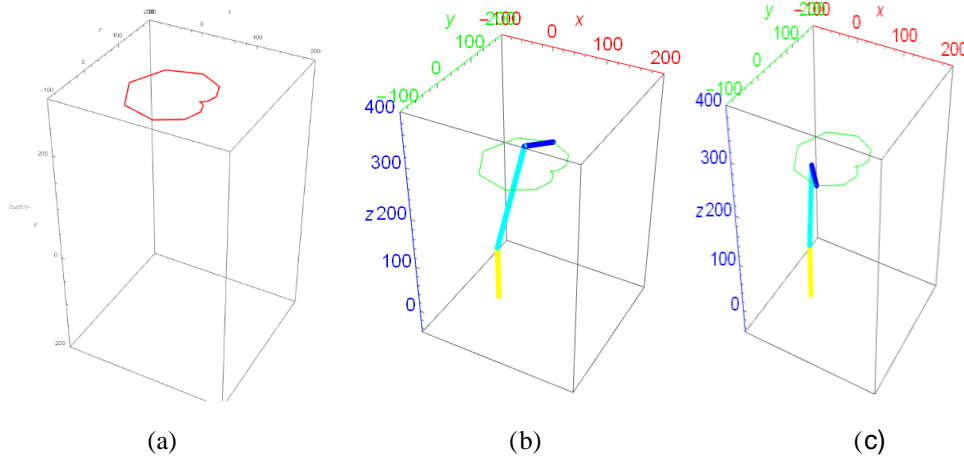


Figura 3.31 (a,b,c) Trayectoria programada así como la cadena virtual recorriendo dicha trayectoria.

3.5 Cinemática inversa de paralelo

Resolución por método algebraico

Se seleccionan a los elementos correspondientes de posición de la matriz ad ¹⁰/₁₄ contenida en (3.15) para manipular las igualdades a conveniencia para poder despejar a las variables articulares ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$).

$$\begin{aligned} Pxd &= \ell_1 - \ell_4 + \ell_2 \text{Cos}(\theta_1) + \ell_3 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \\ Pzd &= \ell_2 \text{Sen}(\theta_1) + \ell_3 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Obtención de θ_3d

Tomando al Pzd contenido en (3.38) y despejando a $\text{Cos}(\theta_3)$.

$$\begin{aligned} Pzd &= \ell_3 \text{Cos}(\theta_3) \\ \frac{Pzd}{\ell_3} &= \text{Cos}(\theta_3) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Empleando la identidad trigonométrica $\text{Sen}^2(\theta_3) + \text{Cos}^2(\theta_3) = 1$ y sustituyendo a $\text{Cos}(\theta_3)$ se da solución al $\text{Sen}(\theta_3)$ para poder emplear la función Arctan .

$$\text{Sen}(\theta_3) = \sqrt{1 - \text{Cos}^2(\theta_3)}$$

$$\text{Sen}(\theta_3) = \sqrt{1 - \frac{Py^2}{\ell^2}}$$

$$\theta_3 = \text{ArcTan}\left(\frac{Pyd}{\ell^3}, \sqrt{1 - \frac{Pyd^2}{\ell^2}}\right) \quad (3.48)$$

Obtención θ_{1d}

Se definen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} P_{xdI} &= P_{xdD} \\ P_{ydI} &= P_{ydD} \\ P_{zdI} &= P_{zdD} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Términos izquierdos de (3.41)

Seleccionando al término "P_{xdI}" de (3.41) y simplificando la igualdad con " $-\ell_1 + \ell_4 - \ell_2 \text{Cos}(\theta_1)$ ".

$$\begin{aligned} P_{xdI} &= 1 - \ell_4 + \ell_2 \text{Cos}(\theta_1) + \ell_3 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \\ P_{xdI} &= \ell_1 - \ell_4 + \ell_2 \text{Cos}(\theta_1) + \ell_3 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) - \ell_1 + \ell_4 - \ell_2 \text{Cos}(\theta_1) \\ P_{xdI} &= \ell_3 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Seleccionando al término "P_{zdI}" de (3.41) y simplificando la igualdad con " $-\ell_2 \text{Sen}(\theta_1)$ ".

$$\begin{aligned} P_{zdI} &= \ell_2 \text{Sen}(\theta_1) + \ell_3 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \\ P_{zdI} &= \ell_2 \text{Sen}(\theta_1) + \ell_3 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) - \ell_2 \text{Sen}(\theta_1) \\ P_{zdI} &= \ell_3 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Se procede a elevar al cuadrado y posteriormente sumar a "P_{xdI}" y "P_{zdI}" (3.42 y 3.43).

$$P_{xdI}^2 + P_{zdI}^2 = (\ell_3 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3))^2 + (\ell_3 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}(\theta_3))^2$$

Desarrollando a "P_{xdI}² + P_{zdI}²"

$$P_{xdI}^2 + P_{zdI}^2 = \ell_3^2 \text{Cos}^2(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}^2(\theta_3) + \ell_3^2 \text{Sen}^2(\theta_1 + \theta_2) \text{Sen}^2(\theta_3)$$

Simplificando a "P_{xdI}² + P_{zdI}²" se obtiene.

$$P_{xdI}^2 + P_{zdI}^2 = \ell_3^2 \text{Sen}^2(\theta_3) \quad (3.52)$$

Términos derechos de (3.41)

Para "P_{xdD}" y Para "P_{zdD}"

$$\begin{aligned} P_{xdD} &= P_{xd} - \ell_1 + \ell_4 - \ell_2 \text{Cos}(\theta_1) \\ P_{zdD} &= P_{zd} - \ell_2 \text{Sen}(\theta_1) \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado "P_{xdD}" y "P_{zdD}" y sumando.

$$P_{xdD}^2 + P_{zdD}^2 = (P_{xd} - \ell_1 + \ell_4 - \ell_2 \text{Cos}(\theta_1))^2 + (P_{zd} - \ell_2 \text{Sen}(\theta_1))^2$$

Desarrollando a "Px_dD² + Pz_dD²".

$$Px_d D^2 + Pz_d D^2 = Pz_d^2 + \ell_2^2 + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 - 2\ell_2(Px_d - \ell_1 + \ell_4)\cos(\theta_1) - 2Pz_d\ell_2\sin(\theta_1) \quad (3.53)$$

Dado el tipo de expresión (3.45) se puede recurrir un cambio de variable (3.46) descrito por el autor Craij para trabajar con una sola variable.

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t_{11}^2}{1 + t_{11}^2}, \sin(\theta) = \frac{2t_{11}}{1 + t_{11}^2} \quad (3.54)$$

Realizando el cambio de variable en (3.45).

$$Px_d D^2 + Pz_d D^2 = Pz_d^2 - \frac{4Pz_d t_{11} \ell_2}{1 + t_{11}^2} + \ell_2^2 - \frac{2(1 - t_{11}^2)\ell_2(Px_d - \ell_1 + \ell_4)}{1 + t_{11}^2} + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 \quad (3.55)$$

Igualando las a las expresiones (3.44) y (3.47) .

$$Px_d I^2 + Pz_d I^2 = Px_d D^2 + Pz_d D^2$$

$$\ell_3^2 \sin^2(\theta_3) = Pz_d^2 - \frac{4Pz_d t_{11} \ell_2}{1 + t_{11}^2} + \ell_2^2 - \frac{2(1 - t_{11}^2)\ell_2(Px_d - \ell_1 + \ell_4)}{1 + t_{11}^2} + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 \quad (3.56)$$

Dando solución a la variable t_{11}^2 se obtienen dos soluciones.

Solución 1

$$(3.57)$$

En donde:

$$V_1 = 2Pz_d \ell_2$$

$$V_2 = -((Pz_d - \ell_2)(Pz_d + \ell_2) + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 + \ell_3 \sin(\theta_3)(2\ell_2 - \ell_3 \sin(\theta_3)))$$

$$V_3 = (Pz_d - \ell_2)(Pz_d + \ell_2) + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 - \ell_3 \sin(\theta_3)(2\ell_2 + \ell_3 \sin(\theta_3))$$

$$V_4 = Pz_d^2 + (Px_d - \ell_1 + \ell_2 + \ell_4)^2 - \ell_3^2 \sin^2(\theta_3)$$

Solución 2

Sustituyendo a t_{11}^2 en (Expresión) y empleando la función 2Arctan

$$\theta_{1a} = 2\text{ArcTan}\left[\frac{V_5 + \sqrt{V_6 * V_7}}{V_8}\right] \quad \theta_{1b} = 2\text{ArcTan}\left[\frac{V_5 - \sqrt{V_6 * V_7}}{V_8}\right] \quad (3.58)$$

En donde:

$$V_5 = 2Pz_d \ell_2$$

$$V_6 = -((Pz_d - \ell_2)(Pz_d + \ell_2) + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 + \ell_3 \sin(\theta_3)(2\ell_2 - \ell_3 \sin(\theta_3)))$$

$$V_7 = (Pz_d - \ell_2)(Pz_d + \ell_2) + (Px_d - \ell_1 + \ell_4)^2 - \ell_3 \sin(\theta_3)(2\ell_2 + \ell_3 \sin(\theta_3))$$

$$V_8 = Pz_d^2 + (Px_d - \ell_1 + \ell_2 + \ell_4)^2 - \ell_3^2 \sin^2(\theta_3)$$

Obtención θ_{2v}

Desarrollando las igualdades de posición (3.38) correspondientes a "Px_d y Pz_d" se establece un sistema de ecuaciones (3.51) de 2x2 para dar solución a "Sen(θ₂) y Cos(θ₂)".

$$\begin{aligned}
 Pxd &= \ell_1 - \ell_4 + \ell_2 \cos(\theta_1) + \ell_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) - \ell_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\
 Pzd &= \ell_2 \sin(\theta_1) + \ell_3 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) + \ell_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.59}$$

Soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta_2) &= \frac{\csc(\theta_3)(-\ell_2 + (Px - \ell_1 + \ell_4)\cos(\theta_1) + Pz\sin(\theta_1))}{\ell_3} \\
 \sin(\theta_2) &= \frac{\cos(\theta_1)\csc(\theta_3)(Pz - (Px - \ell_1 + \ell_4)\tan(\theta_1))}{\ell_3}
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

Empleado la función ArcTan

$$\theta_2 = \text{ArcTan}(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2))
 \tag{3.61}$$

Simulación del modelo matemático de la cinemática Inversa robot paralelo:

Se programa una trayectoria circular Figura (3.31a), la cinemática inversa arroja los valores de las variables articulares necesarias para dar la configuración necesaria para que el efecto final del robot paralelo pueda cumplir con cada punto que conforma la trayectoria, siendo satisfactoria (3.41 b).

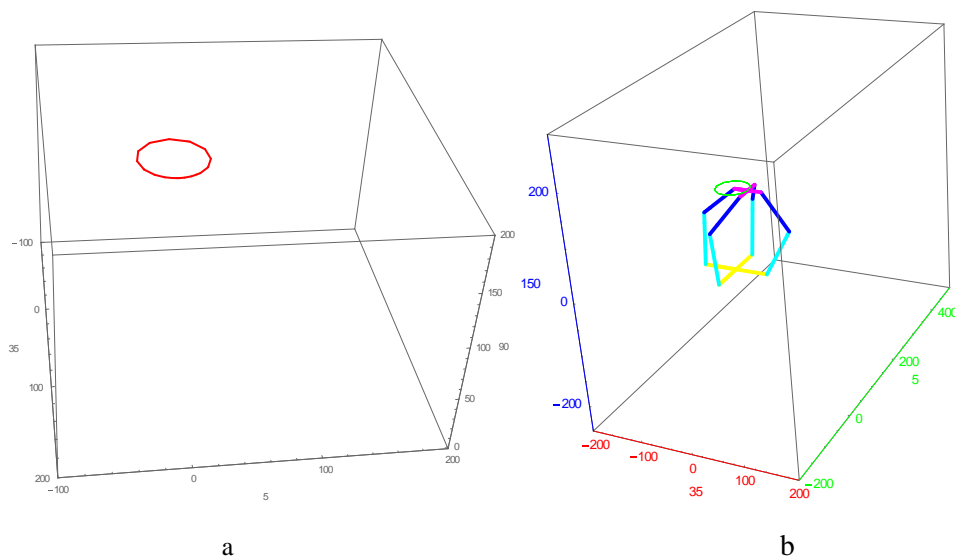


Imagen 3.41 (a,b) Trayectoria circular y robot paralelo desarrollando dicha trayectoria.

3.6 Matriz jacobiana Geométrica Cadena virtual:

Establece la relación entre las velocidades articulares y la velocidad lineal y angular en el extremo del robot expresadas en el sistema inercial del robot. Para su obtención es necesaria la matriz de transformación homogénea 0_3a_v .

La matriz 0_3a_v , contiene los valores de rotación, traslación, perspectiva y escalado.

$${}^0_3a_v = \begin{pmatrix} \hat{n}_v & \hat{o}_v & \hat{a}_v & \hat{p}_v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

En donde

$$\begin{aligned} n_x &= \text{Cos}(\theta_1v)\text{Cos}(\theta_2v + \theta_3v) & o_x &= -\text{Sen}(\theta_1v) \\ n_y &= \text{Cos}(\theta_2v + \theta_3v)\text{Sen}(\theta_1v) & o_y &= \text{Cos}(\theta_1v) \\ n_z &= \text{Sen}(\theta_2v + \theta_3v) & o_z &= 0 \\ a_x &= \text{Cos}(\theta_1v)\text{Sen}(\theta_2v + \theta_3v) & P_{xv} &= \text{Cos}(\theta_1v)(\ell_2v\text{Cos}(\theta_1v) + \ell_3v\text{Cos}(\theta_2v + \theta_3v)) \\ a_y &= \text{Sen}(\theta_1v)\text{Sen}(\theta_2v + \theta_3v) & P_{yv} &= (\ell_2v\text{Cos}(\theta_1v) + \ell_3v\text{Cos}(\theta_2v + \theta_3v))\text{Sen}(\theta_1v) \\ a_z &= \text{Cos}(\theta_2v + \theta_3v) & P_{zv} &= \ell_1v - \ell_2v\text{Sen}(\theta_1v) - \ell_3v\text{Sen}(\theta_2v + \theta_3v) \end{aligned} \quad (3.63)$$

La velocidad lineal del extremo del robot expresada desde el sistema inercial se obtiene mediante las derivadas parciales respecto al tiempo de las coordenadas (P_{xv}, P_{yv}, P_{zv}) contenidas en \hat{p}_v de la matriz 0_3a_v . Se procede a derivar cada uno de los elementos de \hat{p}_v respecto a cada una de las variables articulares $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

$$\frac{\partial P_v}{\partial \theta_{i v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{i v}} \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{i v}} \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{i v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_1 v} & \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_2 v} & \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_3 v} \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_1 v} & \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_2 v} & \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_3 v} \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_1 v} & \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_2 v} & \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_3 v} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

En donde $i = 1,2,3$

Consúltense el apéndice para consultar las derivadas parciales

Para obtener la relación de la velocidad angular con la velocidad articular se considera la submatriz de orientación "R_v" que se encuentra dentro de la matriz de cinemática directa " 0_3a_v " (3.54), la cual contiene a los elementos "n_v,o_v,a_v"(3.55).

Posteriormente se deriva a "R_v" respecto a cada una de las variables articulares (Θ_{1v}, Θ_{2v}, Θ_{3v}).

$$\frac{\partial R_v}{\partial \theta_{i v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_v}{\partial \theta_1 v} \\ \frac{\partial R_v}{\partial \theta_2 v} \\ \frac{\partial R_v}{\partial \theta_3 v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_v}{\partial \theta_1 v} & \frac{\partial o_v}{\partial \theta_1 v} & \frac{\partial a_v}{\partial \theta_1 v} \\ \frac{\partial n_v}{\partial \theta_2 v} & \frac{\partial o_v}{\partial \theta_2 v} & \frac{\partial a_v}{\partial \theta_2 v} \\ \frac{\partial n_v}{\partial \theta_3 v} & \frac{\partial o_v}{\partial \theta_3 v} & \frac{\partial a_v}{\partial \theta_3 v} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

En donde $i = 1,2,3$

Consúltese el apéndice para consultar las derivadas

Por definición se obtiene a la transpuesta de la submatriz de rotación " Rv^T ".

$$Rv^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1v})\cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v})\sin(\theta_{1v}) & -\sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ -\sin(\theta_{1v}) & \cos(\theta_{1v}) & 0 \\ \cos(\theta_{1v})\sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & \sin(\theta_{1v})\sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Obtención matriz omega.

Por definición

$$\Omega v = R\dot{v} * Rv^T$$

$$\Omega v = \left[\frac{dRv}{d\theta_1} + \frac{dRv}{d\theta_2} + \frac{dRv}{d\theta_3} \right] * Rv^T \quad (3.67)$$

$$\Omega v = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{1v}' & \cos(\theta_{1v})(\theta_{2v}' + \theta_{3v}') \\ \theta_{1v}' & 0 & \sin(\theta_{1v})(\theta_{2v}' + \theta_{3v}') \\ -\cos(\theta_{1v})(\theta_{2v}' + \theta_{3v}') & -\sin(\theta_{1v})(\theta_{2v}' + \theta_{3v}') & 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

De la matriz omega se seleccionan a los elementos " $-\omega_{xv}, -\omega_{yv}, -\omega_{zv}$ " siendo $\llbracket 3,2 \rrbracket$, $\llbracket 1,3 \rrbracket$, $\llbracket 1,2 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \omega_{xv} &= -\sin(\theta_{1v})(\theta_{2v}' + \theta_{3v}') \\ \omega_{yv} &= \cos(\theta_{1v})(\theta_{2v}' + \theta_{3v}') \\ \omega_{zv} &= \theta_{1v}' \end{aligned} \quad (3.69)$$

Se procede a derivar parcialmente las velocidades (3.60) angulares respecto a cada una de las variables articulares.

$$\frac{\partial \omega v}{\partial \theta_{i,v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{3v}} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

En donde $i = 1,2,3$

Consúltese el apéndice para consultar las derivadas

Matriz Jacobiana

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{1v}} \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{1v}} \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{1v}} \\ \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{1v}} \\ \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{1v}} \\ \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{1v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{3v}} \\ \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{1v}} & \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{2v}} & \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{3v}} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

En donde $i = 1,2,3$

$$J_v = \begin{bmatrix} -(\ell_2 v \cos(\theta_2 v) + \ell_3 v \cos(\theta_2 v + \theta_3 v)) \text{Sen}(\theta_1 v) & -\text{Cos}(\theta_1 v)(\ell_2 v \text{Sen}(\theta_2 v) + \ell_3 v \text{Sen}(\theta_2 v + \theta_3 v)) & -\ell_3 v \text{Cos}(\theta_1 v) \text{Sen}(\theta_2 v + \theta_3 v) \\ \text{Cos}(\theta_1 v)(\ell_2 v \cos(\theta_2 v) + \ell_3 v \cos(\theta_2 v + \theta_3 v)) & -\text{Sen}(\theta_1 v)(\ell_2 v \text{Sen}(\theta_2 v) + \ell_3 v \text{Sen}(\theta_2 v + \theta_3 v)) & -\ell_3 v \text{Sen}(\theta_1 v) \text{Sen}(\theta_2 v + \theta_3 v) \\ 0 & -\ell_2 v \text{Cos}(\theta_2 v) - \ell_3 v \text{Cos}(\theta_2 v + \theta_3 v) & -\ell_3 v \text{Cos}(\theta_2 v + \theta_3 v) \\ 0 & -\text{Sen}(\theta_1 v) & -\text{Sen}(\theta_1 v) \\ 0 & \text{Cos}(\theta_1 v) & \text{Cos}(\theta_1 v) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Cinemática Diferencial Manipulador paralelo delta 4

Se procede a derivar cada uno de los elementos “Pxd, Pyd y Pzd” respecto a cada una de las variables articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

$$\frac{\partial P_d}{\partial \theta_{i,d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

En donde $i = 1,2,3$

Consulte apéndice para consultar las derivadas

Posteriormente se deriva a R_d respecto a cada una de las variables articulares ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$).

$$\frac{\partial R_d}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_d}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial R_d}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial R_d}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_d}{\partial \theta_1} & \frac{\partial o_d}{\partial \theta_1} & \frac{\partial a_d}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial n_d}{\partial \theta_2} & \frac{\partial o_d}{\partial \theta_2} & \frac{\partial a_d}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial n_d}{\partial \theta_3} & \frac{\partial o_d}{\partial \theta_3} & \frac{\partial a_d}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

En donde $i = 1,2,3$

Dado que la orientación permanecerá constante se obtiene.

$$\frac{\partial R_d}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial R_d}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial R_d}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Por definición se obtiene a la transpuesta de la submatriz de rotación " R_d^T ".

$$R_d^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Obtención matriz omega.

Por definición

$$\Omega_v = R_d \dot{d} * R_d^T$$

$$\Omega_v = \left[\frac{dR_d}{d\theta_1} + \frac{dR_d}{d\theta_2} + \frac{dR_d}{d\theta_3} \right] * R_d^T \quad (3.77)$$

$$\Omega_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

De la matriz omega se seleccionan a los elementos " $-\omega_{xd}, -\omega_{yd}, -\omega_{zd}$ " siendo $\llbracket 3,2 \rrbracket$, $\llbracket 1,3 \rrbracket$, $\llbracket 1,2 \rrbracket$.

$$\omega_{xd} = 0 \quad \omega_{yd} = 0 \quad \omega_{zd} = 0 \quad (3.79)$$

Se procede a derivar parcialmente las velocidades angulares respecto a cada una de las variables articulares, dado que $-\omega_{xd}, -\omega_{yd}, -\omega_{zd}$ tienen un valor de 0 sus derivadas serán 0

$$\frac{\partial \omega_d}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

En donde $i = 1,2,3$

Consúltese el apéndice para consultar las derivadas

Matriz Jacobiana "Jd".

$$J_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_d}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial P_d}{\partial \omega_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

En donde $i = 1,2,3$

$$J_d = \begin{bmatrix} -\ell_2 \sin[\theta_1] - \ell_3 \sin[\theta_1 + \theta_2] \sin[\theta_3] & -\ell_3 \sin[\theta_1 + \theta_2] \sin[\theta_3] & \ell_3 \cos[\theta_1 + \theta_2] \cos[\theta_3] \\ 0 & 0 & -\ell_3 \sin[\theta_3] \\ \ell_2 \cos[\theta_1] + \ell_3 \cos[\theta_1 + \theta_2] \sin[\theta_3] & \ell_3 \cos[\theta_1 + \theta_2] \sin[\theta_3] & \ell_3 \cos[\theta_3] \sin[\theta_1 + \theta_2] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

El mismo procedimiento es aplicado para obtener las 3 cadenas restantes. Consultar el apéndice para observar las matrices jacobianas de las tres cadenas restantes

3.7 Matriz en variables de estado cadena virtual

Una vez obtenida la matriz jacobiana se procede a multiplicarla por las velocidades articulares $\theta_1 v', \theta_2 v', \theta_3 v'$

$$0 = J_v \cdot [\theta_i v'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i v'] \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i v'] \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i v'] \\ \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i v'] \\ \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i v'] \\ \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i v'] \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

En donde $i = 1,2,3$

Con los 3 tres primeros elementos se declara el siguiente sistema de ecuaciones, teniendo como incógnitas a las velocidades articulares θ_{1v}' , θ_{2v}' , θ_{3v}' .

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{iv}'} \cdot [\theta_{iv}'] - X_{pv} \dot{v} &= 0 \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{iv}'} \cdot [\theta_{iv}'] - Y_{pv} \dot{v} &= 0 \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{iv}'} \cdot [\theta_{iv}'] - Z_{pv} \dot{v} &= 0\end{aligned}\quad (3.84)$$

Del sistema de ecuaciones se obtienen las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\theta_{1v}' &= \frac{\cos(\theta_{1v})(Y_{pv} \dot{v} - X_{pv} \tan(\theta_{1v}))}{\ell_{2v} \cos(\theta_{2v}) + \ell_{3v} \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v})} \\ \theta_{2v}' &= \frac{A(B - C)}{D} \\ \theta_{3v}' &= E(F + G - H)\end{aligned}\quad (3.85)$$

En donde

$$\begin{aligned}A &= \csc(\theta_{3v}) \\ B &= \cos[\theta_{2v} + \theta_{3v}](\cos(\theta_{1v})X_{pv} \dot{v} + Y_{pv} \dot{v} \sin(\theta_{1v})) \\ C &= Z_{pv} \dot{v} \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ D &= \ell_{2v} \\ E &= -\frac{1}{\ell_{2v} \ell_{3v}} \csc(\theta_{3v}) \\ F &= \cos(\theta_{1v})(\ell_{2v} \cos(\theta_{2v}) + \ell_{3v} \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}))X_{pv} \dot{v} \\ G &= (\ell_{2v} \cos(\theta_{2v}) + \ell_{3v} \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}))Y_{pv} \dot{v} \sin(\theta_{1v}) \\ H &= Z_{pv} \dot{v} (\ell_{2v} \sin(\theta_{2v}) + \ell_{3v} \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}))\end{aligned}$$

Posteriormente se procede a derivar las soluciones obtenidas para θ_{1v}' , θ_{2v}' , θ_{3v}' : respecto a X_{pv} , Y_{pv} y Z_{pv} . Con las ecuaciones obtenidas, entonces se puede obtener una matriz de cinemática diferencial de una cadena, como la siguiente:

$$stnv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_{1v}'}{\partial X_{pv}} & \frac{\partial \theta_{1v}'}{\partial Y_{pv}} & \frac{\partial \theta_{1v}'}{\partial Z_{pv}} \\ \frac{\partial \theta_{2v}'}{\partial X_{pv}} & \frac{\partial \theta_{2v}'}{\partial Y_{pv}} & \frac{\partial \theta_{2v}'}{\partial Z_{pv}} \\ \frac{\partial \theta_{3v}'}{\partial X_{pv}} & \frac{\partial \theta_{3v}'}{\partial Y_{pv}} & \frac{\partial \theta_{3v}'}{\partial Z_{pv}} \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

Modelo en variables de estado

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{pv} \\ \dot{Y}_{pv} \\ \dot{Z}_{pv} \\ \dot{\theta}_{1v} \\ \dot{\theta}_{2v} \\ \dot{\theta}_{3v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_{1v}'}{\partial X_{pv}} & \frac{\partial \theta_{1v}'}{\partial Y_{pv}} & \frac{\partial \theta_{1v}'}{\partial Z_{pv}} \\ \frac{\partial \theta_{2v}'}{\partial X_{pv}} & \frac{\partial \theta_{2v}'}{\partial Y_{pv}} & \frac{\partial \theta_{2v}'}{\partial Z_{pv}} \\ \frac{\partial \theta_{3v}'}{\partial X_{pv}} & \frac{\partial \theta_{3v}'}{\partial Y_{pv}} & \frac{\partial \theta_{3v}'}{\partial Z_{pv}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{V}_{xpv} \\ \dot{V}_{ypv} \\ \dot{V}_{zpv} \end{pmatrix}$$

3.8 Matriz en variables del paralelo delta 4

Una vez obtenida la matriz jacobiana se procede a multiplicarla por las velocidades articulares $\theta_{1'}, \theta_{2'}, \theta_{3}'$

$$0 = Jd. [\theta_i'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] \\ \frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] \\ \frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] \\ \frac{\partial \omega_{xd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] \\ \frac{\partial \omega_{yd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] \\ \frac{\partial \omega_{zd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Con los 3 tres primeros elementos se declara el siguiente sistema de ecuaciones, teniendo como incógnitas a las velocidades articulares $\theta_{1'}, \theta_{2'}, \theta_{3}'$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] - \dot{X}_{pv} &= 0 \\
\frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] - \dot{Y}_{pv} &= 0 \\
\frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_i} \cdot [\theta_i'] - \dot{Z}_{pv} &= 0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Obteniendo como soluciones:

Cadena 1

$$\begin{aligned}
\theta_1' &= \frac{\text{Csc}(\theta_2)(\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)\dot{X}_p + \text{Cot}(\theta_3)\dot{Y}_p + \dot{Z}_p\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2))}{\ell_2} \\
\theta_2' &= -\frac{1}{\ell_2\ell_3}(A) + B + C + D \\
\theta_3' &= -\frac{\text{Csc}(\theta_3)\dot{Y}_p}{\ell_3}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

En donde:

$$\begin{aligned}
A &= \text{Csc}(\theta_2)(\ell_3\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + \ell_2\text{Cos}(\theta_1)\text{Csc}(\theta_3))\dot{X}_p \\
B &= \text{Cot}(\theta_3)\text{Csc}(\theta_2)(\ell_3 + \ell_2\text{Cos}(\theta_2)\text{Csc}(\theta_3))\dot{Y}_p \\
C &= \dot{Z}_p(\ell_3\text{Cos}(\theta_1)) \\
D &= (\ell_3\text{Cot}(\theta_2) + \ell_2\text{Csc}(\theta_2)\text{Csc}(\theta_3))\text{Sen}(\theta_1))
\end{aligned}$$

El mismo método fue aplicado para obtener las cadenas restantes, consultar apéndice.

Derivando las soluciones de las velocidades θ_1' , θ_2' , θ_3' y derivando respecto a \dot{X}_p , \dot{Y}_p y \dot{Z}_p .

$$St_{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_1'}{\partial \dot{X}_p} & \frac{\partial \theta_1'}{\partial \dot{Y}_p} & \frac{\partial \theta_1'}{\partial \dot{Z}_p} \\ \frac{\partial \theta_2'}{\partial \dot{X}_p} & \frac{\partial \theta_2'}{\partial \dot{Y}_p} & \frac{\partial \theta_2'}{\partial \dot{Z}_p} \\ \frac{\partial \theta_3'}{\partial \dot{X}_p} & \frac{\partial \theta_3'}{\partial \dot{Y}_p} & \frac{\partial \theta_3'}{\partial \dot{Z}_p} \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

Aplicando el mismo método para las cadenas restantes, las ecuaciones son bastante grandes para ponerlas en este apartado. Consúltense el apéndice.

Modelo en variables de estado

$$\dot{q}_{\Delta} = St_{\Delta} \cdot u_{\Delta}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{Z}_p \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_1'}{\partial X_p} & \frac{\partial \theta_1'}{\partial Y_p} & \frac{\partial \theta_1'}{\partial Z_p} \\ \frac{\partial \theta_2'}{\partial X_p} & \frac{\partial \theta_2'}{\partial Y_p} & \frac{\partial \theta_2'}{\partial Z_p} \\ \frac{\partial \theta_3'}{\partial X_p} & \frac{\partial \theta_3'}{\partial Y_p} & \frac{\partial \theta_3'}{\partial Z_p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{V}_{xp} \\ \dot{V}_{yp} \\ \dot{V}_{zp} \end{pmatrix}$$

4. Simulación, pruebas y resultados

Para la demostración del funcionamiento de la cadena virtual en el espacio, se ocuparon los programas Wolfram Mathematica, MatLab y Simulink.

Se eligió a Wolfram Mathematica por la manipulación de matrices, que resulta una herramienta sencilla de ocupar, mostrando los resultados de una manera entendible a simple vista. Obteniendo la cinemática directa e inversa de ambos robots, Wolfram Mathematica tiene una herramienta de animación la cual permite observar la postura del robot y así, comprobar si las operaciones matriciales son correctas.

En cuanto a MatLab es un programa muy poderoso que permitió efectuar los demás cálculos posteriores, obtener datos como ángulos y simular los robots en tiempo real. Posee también la parte de procesamiento de señales la cual, se puede mandar a un microcontrolador para ver al robot moverse.

Simulink es una herramienta gráfica muy utilizada en control y se ocupó para hacer los diagramas de bloques.

4.1 Primer sistema: Cadena virtual RRR Simulación.

Para que todo el sistema se mueva, primero se simuló la cadena virtual RRR_v ya que ésta es la responsable del movimiento del Paralelo, las trayectorias seleccionadas son una recta y una lemniscata.

Recordando en el capítulo anterior se tiene la matriz en variables de estado de la cadena virtual:

$$\begin{bmatrix} X_{pv} \\ Y_{pv} \\ Z_{pv} \\ wxv \\ wyv \\ wzv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{pv} \\ Y_{pv} \\ Z_{pv} \end{bmatrix}$$

$$a_{41} = \frac{\text{Sin}[\theta_{1v}]}{\ell_{2v} * \text{Cos}[\theta_{2v}] + \ell_{3v} * \text{Cos}[\theta_{2v} + \theta_{3v}]}$$

$$a_{42} = \frac{\text{Cos}[\theta_{1v}]}{\ell_{2v} * \text{Cos}[\theta_{2v}] + \ell_{3v} * \text{Cos}[\theta_{2v} + \theta_{3v}]}$$

$$a_{43} = 0$$

$$a_{51} = \frac{\text{Cos}[\theta_{1v}] * \text{Cos}[\theta_{2v} + \theta_{3v}] * \text{Csc}[\theta_{3v}]}{\ell_{2v}}$$

$$a_{52} = \frac{\text{Cos}[\theta_{2v} + \theta_{3v}] * \text{Csc}[\theta_{3v}] * \text{Sin}[\theta_{1v}]}{\ell_{2v}}$$

$$a_{53} = -\frac{\text{Csc}[\theta_{3v}] * \text{Sin}[\theta_{2v} + \theta_{3v}]}{\ell_{2v}}$$

$$a_{61} = \frac{\text{Cos}[\theta_{1v}] * (\ell_{2v} * \text{Cos}[\theta_{2v}] + \ell_{3v} * \text{Cos}[\theta_{2v} + \theta_{3v}]) * \text{Csc}[\theta_{3v}]}{\ell_{2v} * \ell_{3v}}$$

El diagrama 4.1 muestra de manera general, simulando una trayectoria recta. Como se puede observar $V_{x\max}$, $V_{y\max}$, $V_{z\max}$, entran al bloque de cadena virtual RRR_v , éstas son velocidades constantes tomando los valores de 1,-1,1.

Las salidas son las velocidades angulares del efector final de la cadena virtual (w_{1v} , w_{2v} , w_{3v}) y sus respectivos ángulos (θ_{1v} , θ_{2v} , θ_{3v}). Posteriormente se ocuparán para mover al paralelo.

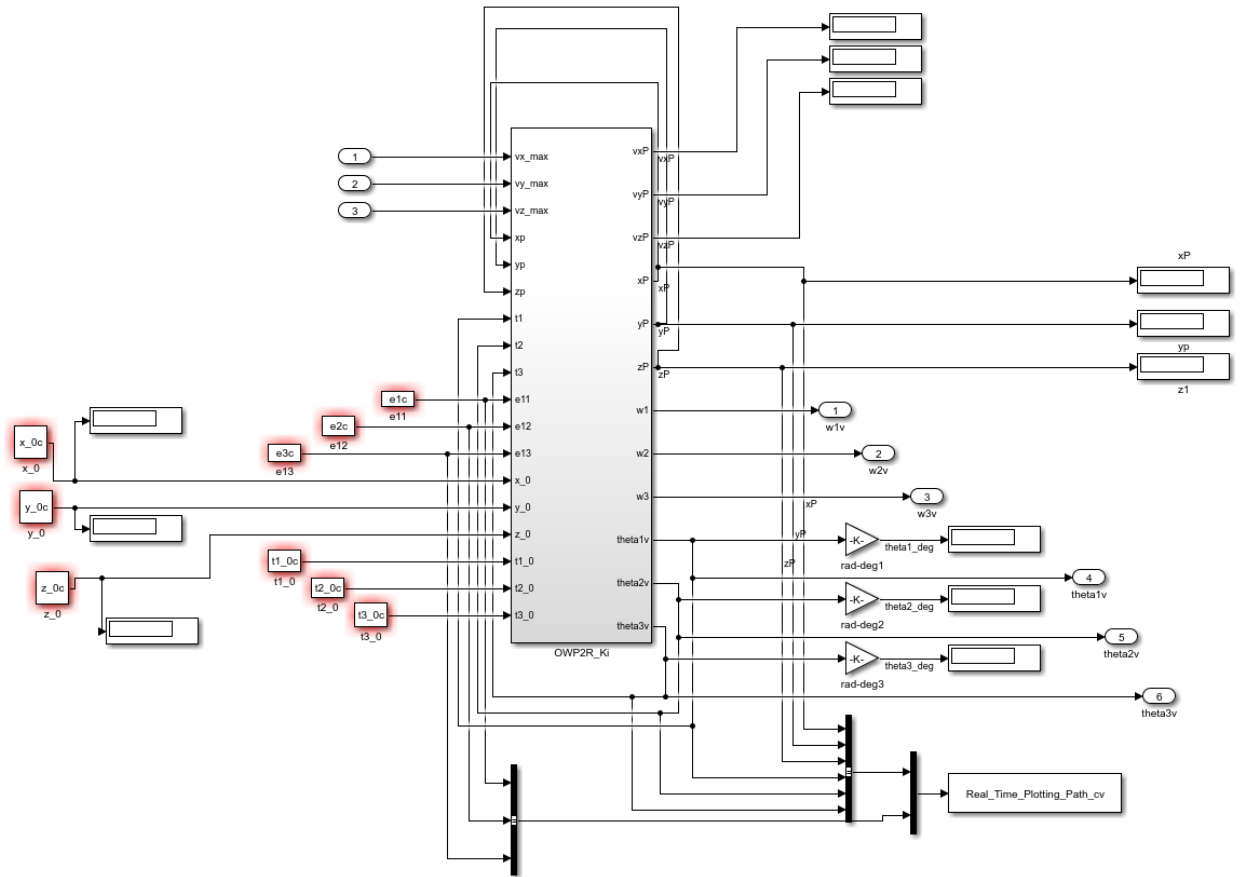


Figura 4.1 Diagrama del subsistema de Cadena Virtual RRR_v

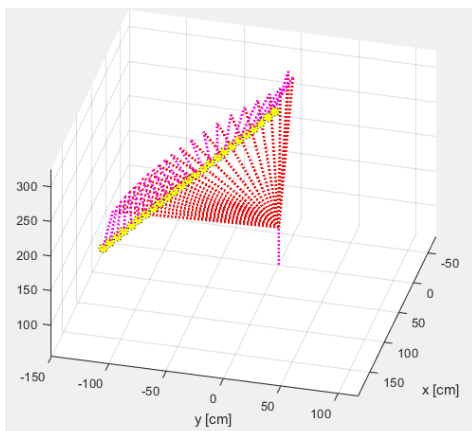


Figura 4.2 Simulación de recta en Cadena virtual

A continuación se observa la simulación de la cadena virtual, en el cual se le dio un tiempo de simulación de 150. El punto de color amarillo es el efector final, y éste, sigue a la trayectoria.

Las siguientes 3 graficas en la figura 4.3 se muestra la evolución de los ángulos con respecto al tiempo; se tiene en el eje de las ordenadas "theta1v", "theta2v" y "theta3v", en el eje de las abscisas tenemos el tiempo de simulación que es de 0-150, cabe mencionar que las unidades son en grados y segundos. Se observa que es un comportamiento es (por asi decirlo) "estable" ya que los ángulos no presentan datos tan disparados.

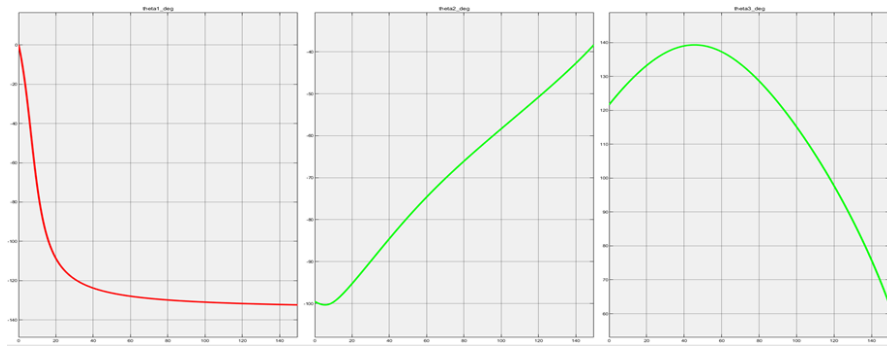


Figura 4.3 Graficas de ángulos theta1v, theta2v, theta3v.

Comportamiento de las velocidades lineales en el efector final (X_{Pv}, Y_{Pv}, Z_{Pv}), son rectas con pendientes positivas y negativas, como ya se ha mencionado mantienen el valor de 1,-1,1.

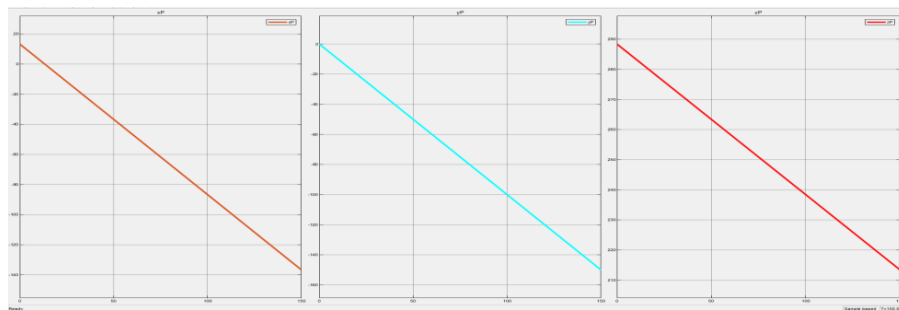


Figura 4.4 Velocidades lineales del efector final de la Cadena virtual.

Para simular la trayectoria de lemniscata es creada por funciones senoidales,paramétricas, quedando la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} vx_{max} = -\text{Sin}\left(\frac{\pi}{79} * t\right) \\ vy_{max} = -\text{Sin}\left(\frac{\pi}{79} * t + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$vzmax = -.5 * \sin\left(\frac{\pi}{79} * t\right) \quad (4.1)$$

Donde t es el tiempo de la simulación la cual le dimos 150.

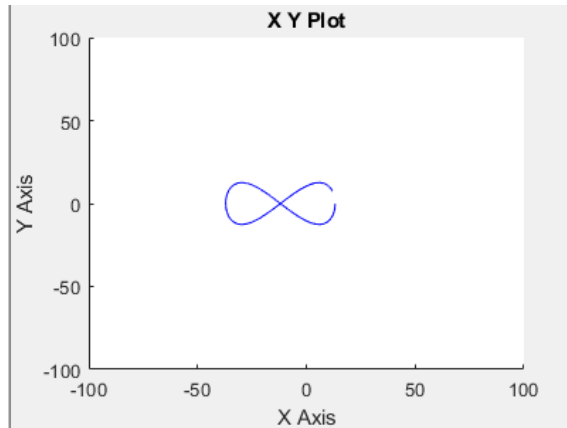


Figura 4.5 Gráfica de lemniscata

En la figura 4.4 se muestra a la cadena virtual siguiendo dicha trayectoria.

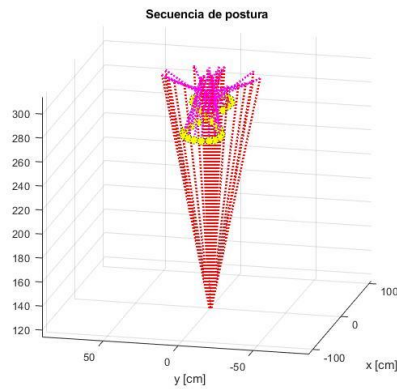


Figura 4.6 Cadena virtual con lemniscata.

Se gráfico también el comportamiento de los ángulos con respecto al tiempo, teniendo de igual manera en el eje de las ordenadas los ángulos y en el eje de las abscisas el tiempo de 0-150, igualmente los ángulos no presentan perturbaciones o valores tan disparados.

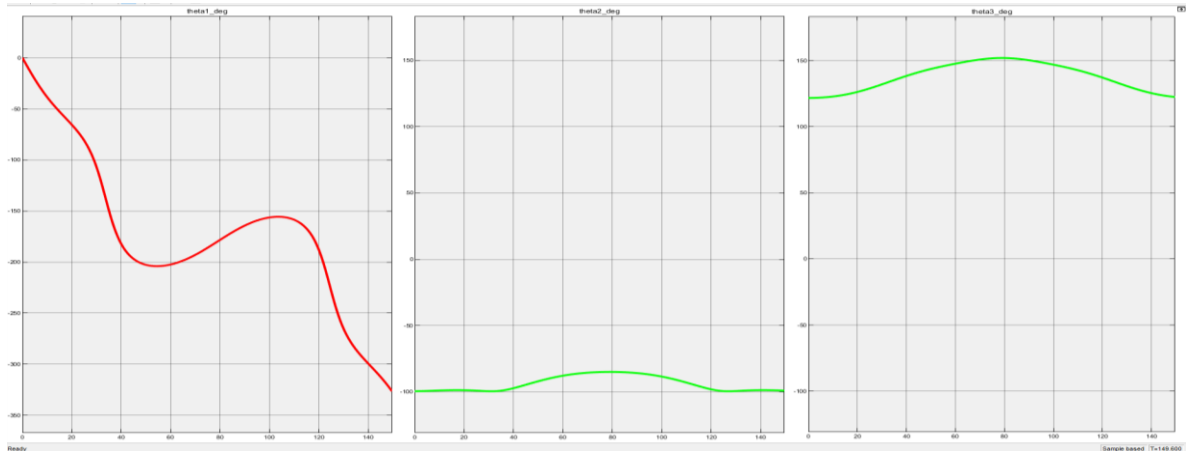


Figura 4.7 Ángulos de cadena virtual con lemniscata.

4.2 Simulación la de cadena virtual RRR en Paralelo Delta 4RRSS.

Previamente se han obtenido las matrices en variables de estado, tanto de la cadena virtual como del robot paralelo ya uniendo los dos sistemas; se procede a simular dichas matrices para observar visualmente el comportamiento del sistema completo.

En el diagrama general se muestran las diferentes etapas de la simulación: como primera fase se tiene la entrada a la cadena virtual por parte del vector de velocidades lineales $[v_x, v_y, v_z]$ en el efector final, para dar solución a las velocidades angulares y ángulos de las variables articulares de la cadena virtual, las cuales en la siguiente etapa se introducen al robot paralelo quedando este en función de la cadena virtual.

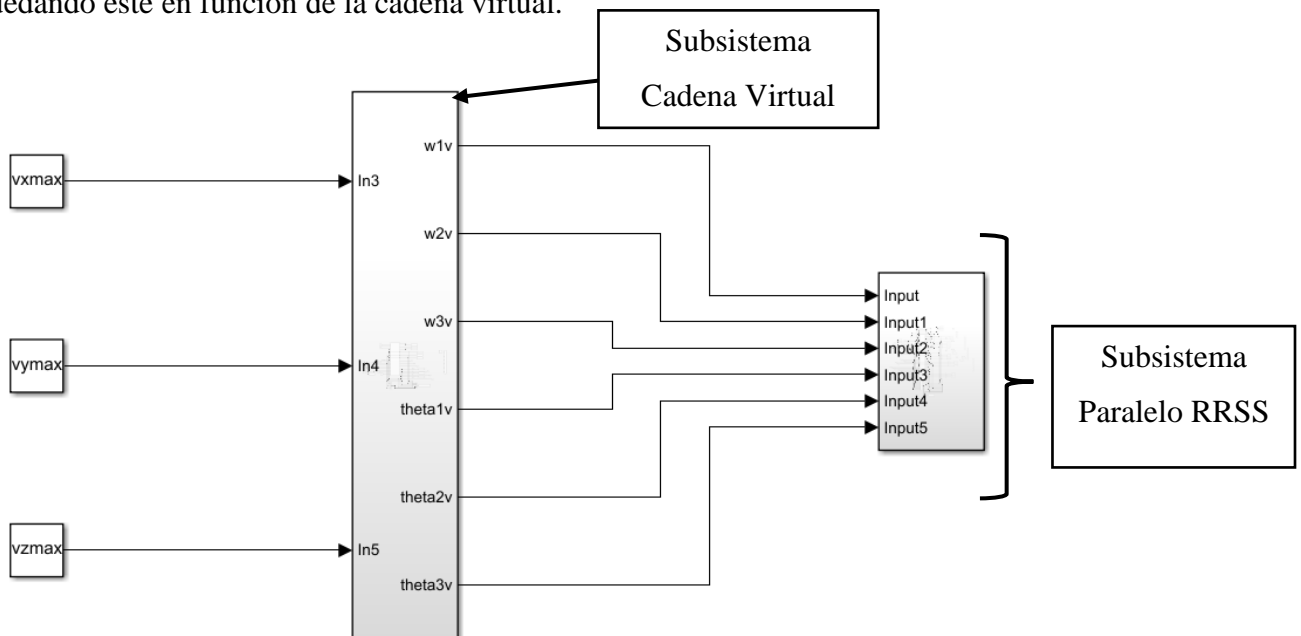


Figura 4.8 Diagrama de bloques de sistema completo.

Checar apartado de apéndice para visualizar el subsistema de Paralelo RSS ya que es un diagrama muy extenso.

En la figura 4.9 se puede apreciar a la cadena virtual representada por las líneas magentas y rojas punteadas, por otro lado, el robot paralelo se representa por las líneas continuas. Se observa que para un tiempo “0” tanto la cadena virtual y el robot paralelo convergen en un mismo punto, con lo cual se comprueba dadas las condiciones iniciales; la cadena virtual y el robot paralelo posicionan al efector final en el mismo punto del espacio.

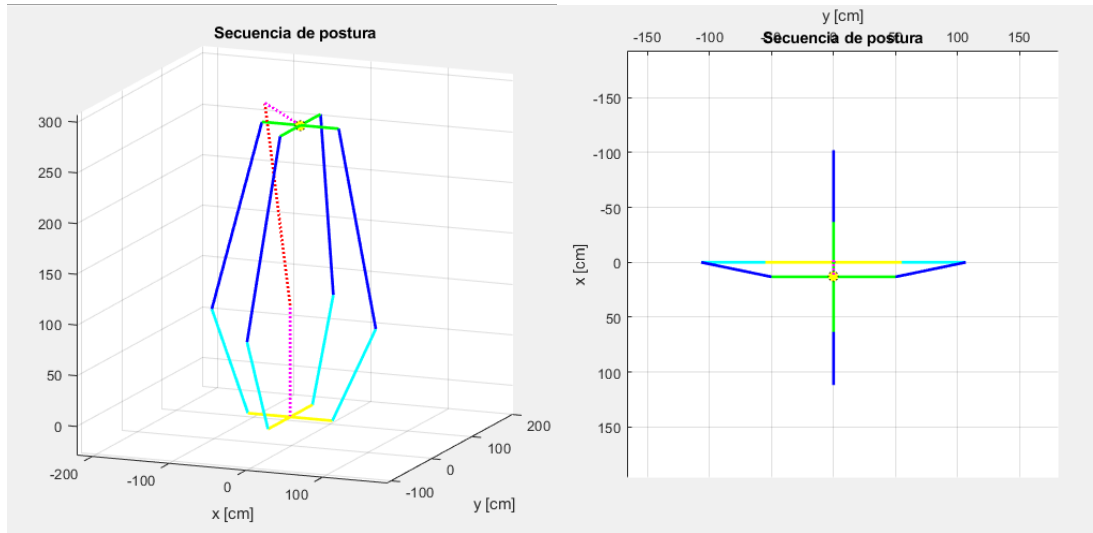


Figura 4.9 Vistas de Paralelo RRSS con cadena virtual.

Luego se pasa a simular una línea recta como trayectoria, dando un tiempo de simulación de 120, los dos sistemas convergieron satisfactoriamente en todo momento, comprobando de esta manera, el control por parte de la cadena virtual sobre el paralelo.

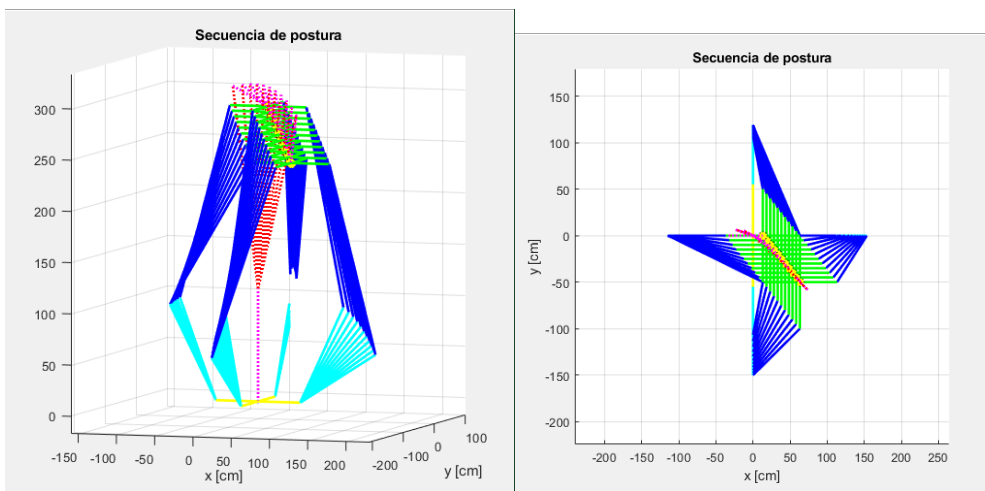
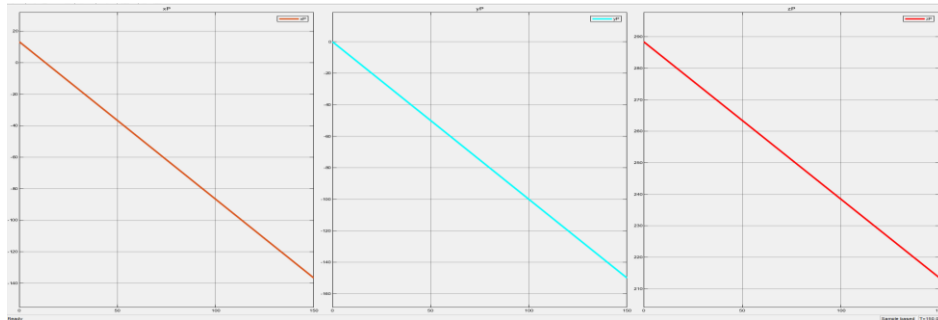
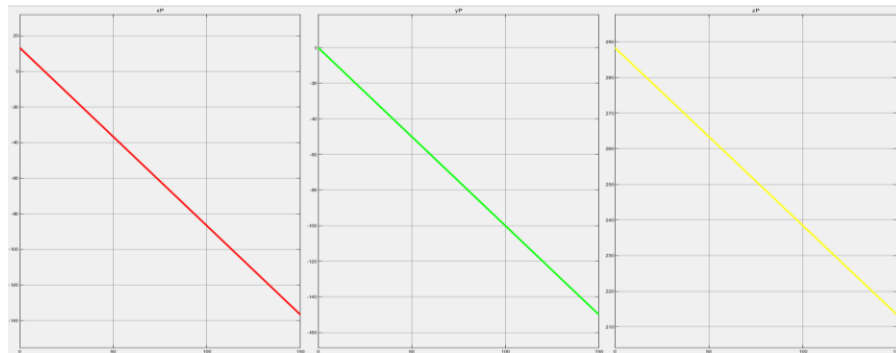


Figura 4.10 Simulación de Cadena virtual con Paralelo siguiendo una recta

Las gráficas de la velocidades lineales en el efector final el paralelo y la cadena virtual (X_p, Y_p, Z_p) demuestran que siguen al mismo punto, a continuación, se puede observar dicha comparación entre ambos.



a) Cadena virtual



b) Paralelo RRSS

Figura 4.11 a Comparación de Velocidades lineales.

Posteriormente, se graficaron los ángulos del paralelo con respecto al tiempo, con un tiempo “t” de 150, en la figura 4.12 y 4.13 se muestra un comportamiento estable llegando a tiempo $t=140$, sin embargo, el lector se puede dar cuenta, que pasando dicho tiempo, empieza a existir un “desorden” en las gráficas ($\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{41}, \theta_{42}$). Esto sucede porque al paralelo le resulta más complicado llegar a algunos puntos, lo ideal en la práctica es cuidar llegar a esos ángulos. Otra información que da las gráficas: es que algunos ángulos son muy parecidos a otros, esto se debe a que las ecuaciones cinemáticas son casi idénticas, solo cambia el signo.

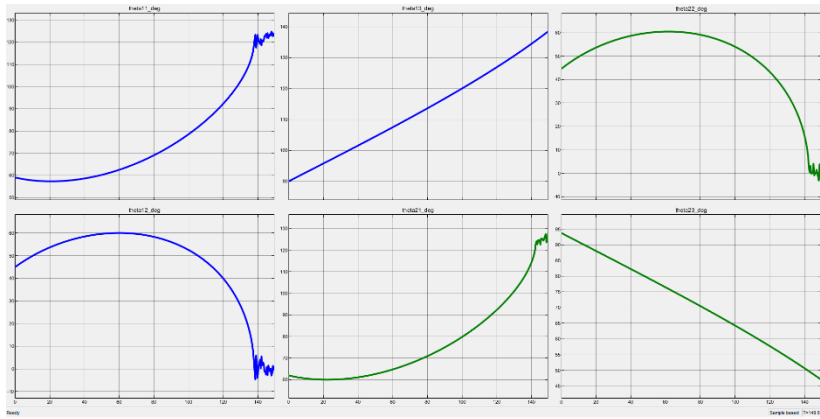


Figura 4.12 Ángulos del paralelo, Cadena #1 y #2

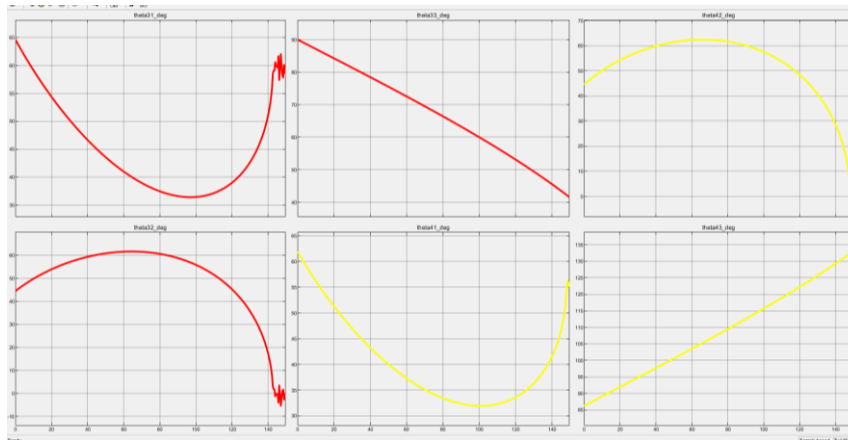


Figura 4.13 Ángulos de paralelo, Cadena #3 y #4

Luego de analizar la recta, se simuló la lemniscata teniendo los siguientes resultados:

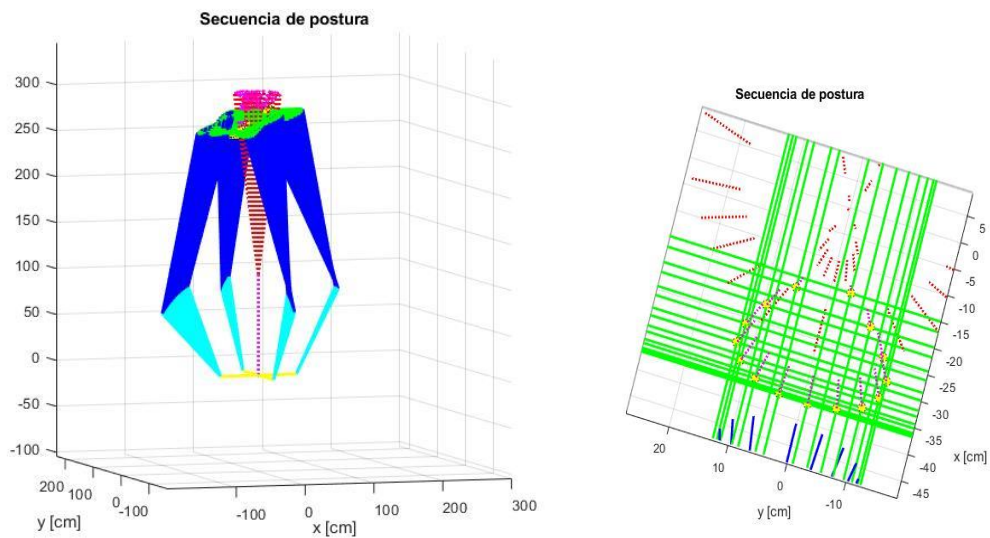
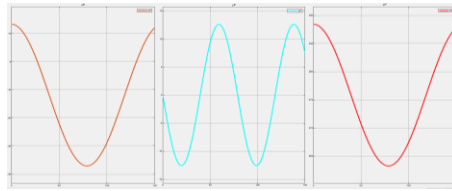
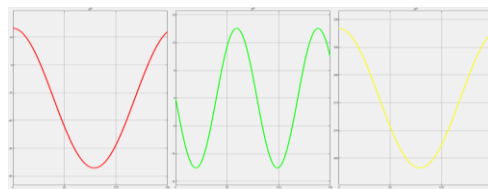


Figura 4.14 Paralelo con cadena virtual siguiendo una lemniscata.

Para apreciar mejor el movimiento de ambos sistemas, se compararon las gráficas de las velocidades lineales en los efectores finales tanto del paralelo como la cadena virtual, y efectivamente muestran los datos similares.



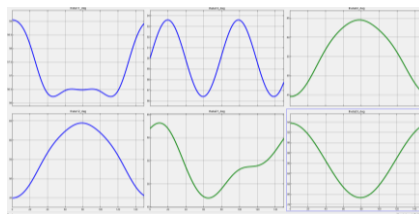
a) Cadena virtual RRR_v



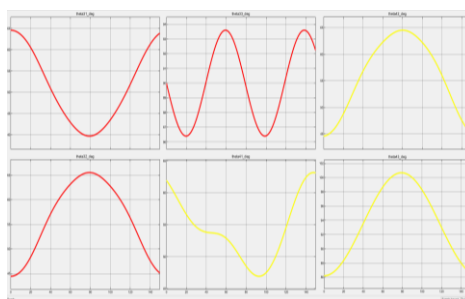
b) Paralelo RRSS

Figura 4.15 Comparación de la velocidad lineal en los efectores finales

Así también se graficó los ángulos del paralelo RRSS y como se puede observar no se tuvieron problemas en los ángulos, se muestran estables y no hay un desorden en ellos.



a) Ángulos de la cadena #1 y #2



b) Ángulos de la cadena #3 y #4

Figura 4.16 Gráficas de ángulos del paralelo RRSS

5. Conclusiones

Es posible el control de una arquitectura compleja como la de un paralelo por medio de una cadena virtual RRR de arquitectura más sencilla con resultados satisfactorios en el espacio, generando trayectorias continuas y consistentes.

La cinemática inversa es necesaria para dar las condiciones iniciales del sistema y de esta manera conocer el valor de las variables articulares y la configuración necesaria, para que robot y la cadena virtual se posicionen en un mismo punto del espacio. Sin embargo, aunque ambos sistemas no se coloquen en el mismo punto; la cadena virtual es capaz de efectuar el control por medio de las velocidades.

Otro punto para tomar en cuenta es: el diseño de una cadena virtual, ya que queda en función del espacio de trabajo del manipulador a controlar. Es necesaria esta consideración ya que de no ser así; la cadena virtual podría no alcanzar puntos o trayectorias que el manipulador si, generando posibles singularidades y limitaciones al momento del control de la trayectoria. De igual manera en viceversa puede que la cadena virtual no alcance algunos puntos y el paralelo sí. A continuación, se ilustra lo que sucedió:

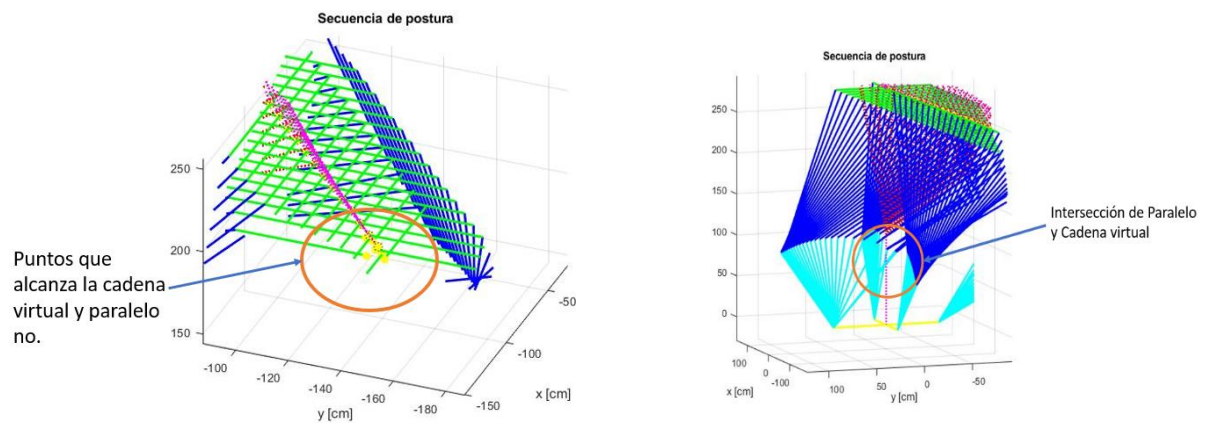
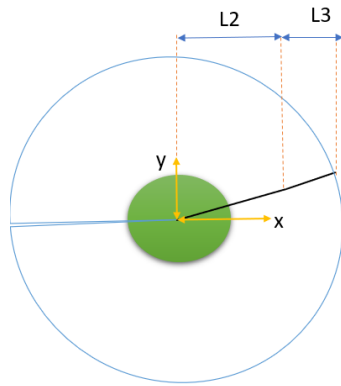


Figura 5.1 Errores de convergencia

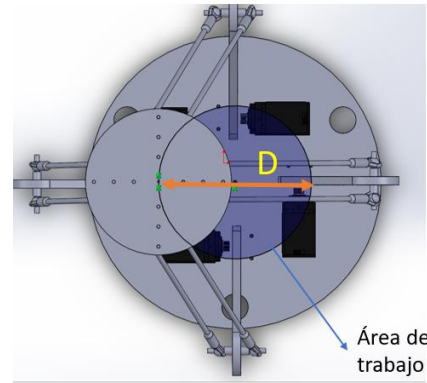
Esto es claro, ya que si observamos a los sistemas desde el plano X y Y; la cadena virtual puede cubrir más área de trabajo que el paralelo.



$\Theta_1 [0,360]$

Distancia máx = $L_2 + L_3$
 $D_{\text{max}} = 200 + 50 = 250\text{mm}$
 Área = 49087.38 mm^2
 Cuando Θ_2 y $\Theta_3 = 0$

Cadena Virtual



Diámetro = 92mm
 $A = 6647.61 \text{ mm}^2$
 $\Theta_{11} = 30$
 $\Theta_{12} = 46$
 $\Theta_{13} = 60$
 $\Theta_{14} = 46$

Paralelo

Figura 5.2 Comparación de áreas

En cuanto a los cálculos efectuados, se debe tener cuidado a la hora de la simplificación de las ecuaciones, cuando se deja en función a la cadena virtual, porque en varios intentos existieron fallas, los dos sistemas no convergían, esto quiere decir que el efector final de la cadena virtual se salía de la trayectoria e igual el paralelo, en la siguiente figura se puede observar este error:

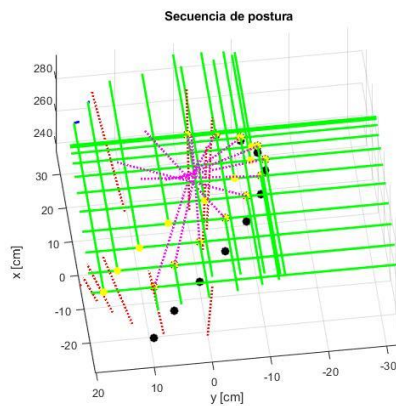


Figura 5.3 Error de simplificación

El programa Wolfram Mathematica tiene una herramienta para simplificar llamada Fullsimplify, fue de gran ayuda para obtener resultados más pequeños y ordenados, sin embargo, cuando se aplicaba en la matriz de variables de estado, ocurría el error de la trayectoria, se debía a que algunos términos se usaban identidades trigonométricas, las cuales simplifican las expresiones, pero como se trabaja con algunos valores pequeños, existían variaciones, reflejadas en la trayectoria.

Posteriormente podemos resumir la conclusión de este trabajo con la siguiente tabla, mostrando las ventajas y desventajas observadas.

Ventajas:	Desventajas:
Posible control de no solo un sistema sino más sistemas, como los híbridos.	Las expresiones obtenidas son muy grandes se debe tener cuidado de no equivocarse en algún término.
Control con un sistema sencillo uno más complejo.	Simplificación de cálculos puede afectar al método.
Espacio de trabajo de los sistemas se fusionan, llegando a ser más extenso o menor.	

6. Trabajo a futuro

-Probar diferentes configuraciones de cadenas virtuales en el espacio, dado que la selección de una RRR_v fue debido a que es uno de los casos más estudiados y documentados en la robótica. Todavía es un tema con gran investigación y se puede decir que es un tema muy prometedor, se podría implementar una cadena virtual con más grados de libertad o con juntas prismáticas, posteriormente escalar a arquitecturas más complejas, tal como la de un robot híbrido.

-Instrumentar al robot paralelo para poder cotejar los ángulos arrojados por las mediciones y los arrojados por la simulación de Matlab.

-Estudiar el comportamiento dinámico del robot paralelo.

Bibliografía

1. Martínez P. *Manipulador Paralelo Plano 3RRR-(RRR)v con Actuación Virtual Indirecta*. México D.F: UNAM; 2015.
2. Seitz M. *Qué países tienen más robots en sus fábricas y cuán cierto es que nos están robando los puestos de trabajo*. BCC Mundo. 2017.
3. Barrientos A, Cruz AB, Peñín LF, Balaguer C. *Fundamentos de robótica*. Madrid: McGraw-Hill; 2007.
4. De Garibay P. *Robótica: Estado del arte*. Universidad de Deusto [Internet]. 2006. Available from: https://www.academia.edu/913608/Rob%C3%B3tica_Estado_del_arte.
5. F.D'Inca CO. *Estado actual de la robótica 2019*: [26 p.]. Available from: <http://www.um.edu.ar/ojs-new/index.php/RUM/article/view/100>.
6. Reyes F. *Robótica - control de robots manipuladores*: Alfaomega Grupo Editor; 2011.
7. Tsai L-W. *Robot Analysis and Design: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*: John Wiley & Sons, Inc.; 1999. 520 p.
8. Segovia J, Alamilla, M., & Domínguez, J. *Robot cartesiano seguimiento de trayectorias irregulares arbitrarias mediante computadora*. Hidalgo, México: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. ; 2007.
9. Jara R, & Rodríguez, M.E. *Control de un robot cilíndrico*. . Revista de Ingeniería Biomédica y Biotecnología Sitio web. 2018.
10. Vivas O. *Control Predictivo de un Robot tipo SCARA*. Revista chilena de ingeniería. 2006:135-45.
11. REAL-ACADEMIA-ESPAÑOLA. *Diccionario de la lengua española*. Available from: <https://dle.rae.es>.
12. Martínez E, Peña CA, Yime E. *Diseño óptimo de un robot paralelo con configuración delta para aplicaciones educativas*. Revista Educación en Ingeniería. 2010;5(10):110-9.
13. Zabalza I, Ros J, editors. *Aplicaciones actuales de los robots paralelos*. 8th Latin American Congress of Mechanical Engineering Cusco, Perú; 2007.
14. Díaz-Rodríguez M, Quintero-Riaza HF, Mejía-Calderón LA, Holguin G, Herrera-López M, Mesa C, et al. *Aplicación de los Robots Paralelos*. 2018.
15. Aguas X, Herrera M, Sotomayor N, Camacho O. *Parallel robot prototype driven by four cables: experimental results*. Enfoque UTE. 2019;10(1):13-25.
16. Lee S, Kim S, editors. *Efficient inverse kinematics for serial connections of serial and parallel manipulators*. Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'93); 1993: IEEE.
17. Dietrich A. *Whole-body impedance control of wheeled humanoid robots*: Springer; 2016.
18. Písla D, Gherman B, Vaida C, Plitea N. Kinematic modelling of a 5-DOF hybrid parallel robot for laparoscopic surgery. *Robotica*. 2012;30(7):1095-107.
19. Li L, Wang C, Guo Y, Wu H. *Research on dynamics of hybrid pouring robot and attitude stability control of ladle*. Measurement and Control. 2020:0020294019886102.
20. Rakhodaei H, Saadat M, Rastegarpanah A, Abdullah CZ. *Path planning of the hybrid parallel robot for ankle rehabilitation*. *Robotica*. 2016;34(1):173-84.
21. Ruiz J, Salazar SR. *Sensores, Actuadores y Efectores*. Universidad de Chile <http://robotica.uchile.cl/EL63G/capitulo2.pdf>[Revisado: Octubre de 2009].
22. Chung W, Chung W, Youm Y, editors. *Inverse kinematics of planar redundant manipulators using virtual link and displacement distribution schemes*. Proceedings 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation; 1991: IEEE.

23. Ashrafiuon H, Sanka K. *Development of virtual link method for the solution of hyper-redundant spatial robots*. Journal of robotic systems. 1996;13(6):371-8.
24. Campos A, Guenther R, Martins D. *Differential kinematics of parallel manipulators using Assur virtual chains*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2009;223(7):1697-711.
25. Boche AS. *Cinématica diferencial de un robot paralelo con una cadena virtual* [Investigación]. Ciudad de México, Mexico: UNAM; 2017.
26. Rubén H. *Simulación de la Cinemática Diferencial de dos Manipuladores Seriales RRR y PRP*. Ciudad Nezahuacóyotl, Estado de México: FES Aragón, UNAM; 2019.
27. Wang Y, Smith C, Karayiannidis Y, Ögren P. *Whole body control of a dual-arm mobile robot using a virtual kinematic chain*. International Journal of Humanoid Robotics. 2016;13(01):1550047.
28. Hibbeler RC, de la Cera Alonso J. *Mecánica Vectorial Para Ingenieros: Dinámica*: Pearson Educación; 2004.
29. Spong MW, Vidyasagar M. *Robot Dynamics And Control*: Wiley India Pvt. Limited; 2008.
30. Cabrerizo SD. *Control en el espacio de estado 2/e*: Pearson Educación; 2006.
31. Kong X, Gosselin CM. *Type synthesis of parallel mechanisms*: Springer; 2007.
32. Cruz-López C, Flores-Méndez, J. *Robot Manipulador Paralelo Híbrido de 7 GDL: Cinemática Dinámica y Seguimiento de una Trayectoria*. México D.F: UNAM; 2013.

7. Apéndice

Matrices de cadena 1

$${}_{10}^{11}ad = Tx[\ell1]$$

$${}_{11}^{12}ad = Qy[-\theta1].Tx[\ell2]$$

$${}_{12}^{13}ad = Qy[-\theta2].Qz[90^\circ - \theta3].Tx[\ell3]$$

$${}_{13}^{14}ad = Qz[-90^\circ + \theta3].Qy[-180^\circ + \theta1 + \theta2].Tx[\ell4]$$

Matrices de cadena 2

$${}_{21}^{22}ad = Qy[-\theta21].Tx[\ell22]$$

$${}_{22}^{23}ad = Qy[-\theta22].Qz[90^\circ - \theta23].Tx[\ell23]$$

$${}_{23}^{24}ad = Qz[\theta25].Qy[\theta24].Tx[\ell24]$$

Matrices de cadena 3

$${}_{31}^{32}ad = Qy[-\theta31].Tx[\ell32]$$

$${}_{32}^{33}ad = Qy[-\theta32].Qz[90^\circ - \theta33].Tx[\ell33]$$

$${}_{33}^{34}ad = Qz[\theta35].Qy[\theta34].Tx[\ell34]$$

Matrices de cadena 4

$${}_{41}^{42}a = Qy[-\theta41].Tx[\ell42]$$

$${}_{42}^{43}ad = Qy[-\theta42].Qz[90^\circ - \theta43].Tx[\ell43]$$

$${}_{43}^{44}ad = Qz[\theta45].Qy[\theta44].Tx[\ell44]$$

Derivadas parciales para "Pxv" matriz jacobiana

$$\frac{\partial Pxv}{\partial \theta1v} = -(\ell2v \cos(\theta2v) + \ell3v \cos(\theta2v + \theta3v)) \sin(\theta1v)$$

$$\frac{\partial Pxv}{\partial \theta2v} = \cos(\theta1v) (-\ell2v \sin(\theta2v) - \ell3v \sin(\theta2v + \theta3v))$$

$$\frac{\partial P_{xv}}{\partial \theta_{3v}} = -\ell_{3v} \cos(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v})$$

Derivadas parciales para "Pyv"

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{1v}} &= \cos(\theta_{1v})(\ell_{2v} \cos(\theta_{2v}) + \ell_{3v} \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v})) \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{2v}} &= \sin(\theta_{1v})(-\ell_{2v} \sin(\theta_{2v}) - \ell_{3v} \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v})) \\ \frac{\partial P_{yv}}{\partial \theta_{3v}} &= -\ell_{3v} \sin(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \end{aligned}$$

Derivadas parciales para "Pzv"

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{1v}} &= 0 \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{2v}} &= -\ell_{2v} \cos(\theta_{2v}) - \ell_{3v} \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ \frac{\partial P_{zv}}{\partial \theta_{3v}} &= -\ell_{3v} \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \end{aligned}$$

Derivadas submatriz de rotación cadena virtual

$$\begin{aligned} \frac{\partial Rv}{\partial \theta_{1v}} &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \sin(\theta_{1v}) & -\cos(\theta_{1v}) & -\sin(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ \cos(\theta_{1v}) \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & -\sin(\theta_{1v}) & \cos(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial Rv}{\partial \theta_{2v}} &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & 0 & \cos(\theta_{1v}) \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ -\sin(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & 0 & \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \sin(\theta_{1v}) \\ -\cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & 0 & -\sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial Rv}{\partial \theta_{3v}} &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & 0 & \cos(\theta_{1v}) \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \\ -\sin(\theta_{1v}) \sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & 0 & \cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \sin(\theta_{1v}) \\ -\cos(\theta_{2v} + \theta_{3v}) & 0 & -\sin(\theta_{2v} + \theta_{3v}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Derivadas de w para la cadena virtual

Para " ω_{xv} "

$$\frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{1v}} = 0 \quad \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{2v}} = -\sin(\theta_{1v}) \quad \frac{\partial \omega_{xv}}{\partial \theta_{3v}} = -\sin(\theta_{1v})$$

Para " ω_{yv} "

$$\frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{1v}} = 0 \quad \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{2v}} = \cos(\theta_{1v}) \quad \frac{\partial \omega_{yv}}{\partial \theta_{3v}} = \cos(\theta_{1v})$$

Para " ω_{zv} "

$$\frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{1v}} = 1 \quad \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{2v}} = 0 \quad \frac{\partial \omega_{zv}}{\partial \theta_{3v}} = 0$$

Capítulo 3.6

Derivadas de posición-jacobiano

Derivadas parciales para "Pxd".

$$\frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_1} = -\ell_2 \sin(\theta_1) - \ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_2} = -\ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial P_{xd}}{\partial \theta_3} = \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3)$$

Derivadas parciales para "Pyd".

$$\frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial P_{yd}}{\partial \theta_3} = -\ell_3 \sin(\theta_3)$$

Derivadas parciales para "Pzd".

$$\frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_1} = \ell_2 \cos(\theta_1) + \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_2} = \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial P_{zd}}{\partial \theta_3} = \ell_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Derivadas de W paralelo

Para " ω_{xd} "

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \theta_1} = 0 \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial \theta_2} = 0 \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial \theta_3} = 0$$

Para " ω_{yd} "

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial \theta_1} = 0 \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \theta_2} = 0 \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \theta_3} = 0$$

Para " ω_{zd} "

$$\frac{\partial \omega x}{\partial \theta 1} = 0 \quad \frac{\partial \omega x}{\partial \theta 2} = 0 \quad \frac{\partial \omega x}{\partial \theta 3} = 0$$

Matrices jacobianas 3 cadenas paralelo

$$Jd2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ell 23 \sin(\theta 23) \\ -\ell 22 \sin(\theta 21) - \ell 23 \sin[\theta 21 + \theta 22] \sin(\theta 23) & -\ell 23 \sin[\theta 21 + \theta 22] \sin(\theta 23) & \ell 23 \cos[\theta 21 + \theta 22] \cos(\theta 23) \\ \ell 22 \cos(\theta 21) + \ell 23 \cos[\theta 21 + \theta 22] \sin(\theta 23) & \ell 23 \cos[\theta 21 + \theta 22] \sin(\theta 23) & \ell 23 \cos(\theta 23) \sin[\theta 21 + \theta 22] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jd3 = \begin{bmatrix} \ell 32 \sin(\theta 31) + \ell 33 \sin(\theta 31 + \theta 32) \sin(\theta 33) & \ell 33 \sin(\theta 31 + \theta 32) \sin(\theta 33) & -\ell 33 \cos(\theta 31 + \theta 32) \cos(\theta 33) \\ 0 & 0 & \ell 33 \sin(\theta 33) \\ \ell 32 \cos(\theta 31) + \ell 33 \cos(\theta 31 + \theta 32) \sin(\theta 33) & \ell 33 \cos(\theta 31 + \theta 32) \sin(\theta 33) & \ell 33 \cos(\theta 33) \sin(\theta 31 + \theta 32) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jd4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\ell 43 \sin(\theta 43) \\ \ell 42 \sin(\theta 41) + \ell 43 \sin(\theta 41 + \theta 42) \sin(\theta 43) & \ell 43 \sin(\theta 41 + \theta 42) \sin(\theta 43) & -\ell 43 \cos(\theta 41 + \theta 42) \cos(\theta 43) \\ \ell 42 \cos(\theta 41) + \ell 43 \cos(\theta 41 + \theta 42) \sin(\theta 43) & \ell 43 \cos(\theta 41 + \theta 42) \sin(\theta 43) & \ell 43 \cos(\theta 43) \sin(\theta 41 + \theta 42) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidades articulares paralelo

Cadena 2

$$\theta 21' = \frac{\text{Csc}(\theta 22)(-\text{Cot}(\theta 23)\dot{X}p2 + \text{Cos}(\theta 21 + \theta 22)\dot{Y}p2 + \dot{Z}p2 \text{Sen}(\theta 21 + \theta 22))}{\ell 22}$$

$$\begin{aligned} \theta 22' = & \frac{1}{\ell 22 \ell 23} (\text{Cot}(\theta 23)(\ell 23 \text{Csc}(\theta 22) + \ell 22 \text{Cot}(\theta 22) \text{Csc}(\theta 23))\dot{X}p2 \\ & + \dot{Y}p2(-\text{Cos}(\theta 21)(\ell 23 \text{Cot}(\theta 22) + \ell 22 \text{Csc}(\theta 22) \text{Csc}(\theta 23)) \\ & + \ell 23 \text{Sen}(\theta 21)) - \dot{Z}p2(\ell 23 \text{Cos}(\theta 21) + (\ell 23 \text{Cot}(\theta 22) \\ & + \ell 22 \text{Csc}(\theta 22) \text{Csc}(\theta 23)) \text{Sen}(\theta 21))) \end{aligned}$$

$$\theta 23' = \frac{\text{Csc}(\theta 23)\dot{X}p2}{\ell 23}$$

Cadena 3

$$\theta 31' = -\frac{\text{Csc}(\theta 32)(\text{Cos}(\theta 31 + \theta 32)\dot{X}p3 + \text{Cot}(\theta 33)\dot{Y}p3 - \dot{Z}p3 \text{Sen}(\theta 31 + \theta 32))}{\ell 32}$$

$$\begin{aligned} \theta 32' = & \frac{1}{\ell 32 \ell 33} (\text{Cot}(\theta 33) \text{Csc}(\theta 32)(\ell 33 + \ell 32 \text{Cos}(\theta 32) \text{Csc}(\theta 33))\dot{Y}p3 \\ & + \dot{X}p3(\text{Cos}(\theta 31)(\ell 33 \text{Cot}(\theta 32) + \ell 32 \text{Csc}(\theta 32) \text{Csc}(\theta 33)) \\ & - \ell 33 \text{Sen}(\theta 31)) - \dot{Z}p3(\ell 33 \text{Cos}(\theta 31) + (\ell 33 \text{Cot}(\theta 32) \\ & + \ell 32 \text{Csc}(\theta 32) \text{Csc}(\theta 33)) \text{Sen}(\theta 31))) \end{aligned}$$

$$\theta 33' = \frac{\text{Csc}(\theta 33)\dot{Y}p3}{\ell 33}$$

Cadena 4

$$\theta_{41}' = \frac{\text{Csc}(\theta_{42}) \left(\text{Cot}(\theta_{43}) \dot{X}_{p4} - \text{Cos}(\theta_{41} + \theta_{42}) \dot{Y}_{p4} + \dot{Z}_{p4} \text{Sen}(\theta_{41} + \theta_{42}) \right)}{\ell_{42}}$$

$$\begin{aligned} \theta_{42}' = \frac{1}{\ell_{42} \ell_{43}} & \left(-\text{Cot}(\theta_{43}) \text{Csc}(\theta_{42}) (\ell_{43} + \ell_{42} \text{Cos}(\theta_{42}) \text{Csc}(\theta_{43})) \dot{X}_{p4} \right. \\ & + \dot{Y}_{p4} (\text{Cos}(\theta_{41}) (\ell_{43} \text{Cot}(\theta_{42}) + \ell_{42} \text{Csc}(\theta_{42}) \text{Csc}(\theta_{43})) \\ & - \ell_{43} \text{Sen}(\theta_{41})) - \dot{Z}_{p4} (\ell_{43} \text{Cos}(\theta_{41}) + (\ell_{43} \text{Cot}(\theta_{42}) \\ & \left. + \ell_{42} \text{Csc}(\theta_{42}) \text{Csc}(\theta_{43})) \text{Sen}(\theta_{41})) \right) \end{aligned}$$

$$\theta_{43}' = -\frac{\text{Csc}(\theta_{43}) \dot{X}_{p4}}{\ell_{43}}$$

Matrices en variables de estados paralelo

$$tnd2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_{21}'}{\partial X_{p2}} & \frac{\partial \theta_{21}'}{\partial Y_{p2}} & \frac{\partial \theta_{21}'}{\partial Z_{p2}} \\ \frac{\partial \theta_{22}'}{\partial X_{p2}} & \frac{\partial \theta_{22}'}{\partial Y_{p2}} & \frac{\partial \theta_{22}'}{\partial Z_{p2}} \\ \frac{\partial \theta_{23}'}{\partial X_{p2}} & \frac{\partial \theta_{23}'}{\partial Y_{p2}} & \frac{\partial \theta_{23}'}{\partial Z_{p2}} \end{pmatrix}$$

$$stnd3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_{31}'}{\partial X_{p3}} & \frac{\partial \theta_{31}'}{\partial Y_{p3}} & \frac{\partial \theta_{31}'}{\partial Z_{p3}} \\ \frac{\partial \theta_{32}'}{\partial X_{p3}} & \frac{\partial \theta_{32}'}{\partial Y_{p3}} & \frac{\partial \theta_{32}'}{\partial Z_{p3}} \\ \frac{\partial \theta_{33}'}{\partial X_{p3}} & \frac{\partial \theta_{33}'}{\partial Y_{p3}} & \frac{\partial \theta_{33}'}{\partial Z_{p3}} \end{pmatrix} \quad stnd4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \theta_{41}'}{\partial X_{p4}} & \frac{\partial \theta_{41}'}{\partial Y_{p4}} & \frac{\partial \theta_{41}'}{\partial Z_{p4}} \\ \frac{\partial \theta_{42}'}{\partial X_{p4}} & \frac{\partial \theta_{42}'}{\partial Y_{p4}} & \frac{\partial \theta_{42}'}{\partial Z_{p4}} \\ \frac{\partial \theta_{43}'}{\partial X_{p4}} & \frac{\partial \theta_{43}'}{\partial Y_{p4}} & \frac{\partial \theta_{43}'}{\partial Z_{p4}} \end{pmatrix}$$

Wolfram mathemtica

CINEMÁTICA DIRECTA E INVERSA CADENA VIRTUAL RRR

(*Programa elaborado por Daniel Cruz y Emilio Villanueva junto con el Asesor Dr. Martínez Zamudio P. Para la cinemática directa e inversa de una cadena virtual RRR 2019*)

FUNCIONES

Clear[α]

Qx[α_]:={{1,0,0,0},{0,Cos[α],-Sin[α],0},{0,Sin[α],Cos[α],0},{0,0,0,1}}

Qy[φ_]:={{Cos[φ],0,Sin[φ],0},{0,1,0,0},{-Sin[φ],0,Cos[φ],0},{0,0,0,1}}

Qz[θ_]:=

{

```

{Cos[θ],-Sin[θ],0,0},
{Sin[θ],Cos[θ],0,0},
{0,0,1,0},
{0,0,0,1}
}

```

(*Matrices de traslación*)

```

Tx[x_]:=
{1,0,0,x},
{0,1,0,0},
{0,0,1,0},
{0,0,0,1}
}

```

```

Ty[y_]:=
{1,0,0,0},
{0,1,0,y},
{0,0,1,0},
{0,0,0,1}
}

```

```

Tz[z_]:=
{1,0,0,0},
{0,1,0,0},
{0,0,1,z},
{0,0,0,1}
}

```

```

Txyz[x_,y_,z_]:=
{1,0,0,x},
{0,1,0,y},
{0,0,1,z},
{0,0,0,1}
}

```

```

n={0,0,0,1};

```

```

T3D[P_]:= {P[[1]],P[[2]],P[[3]]}

```

(*Matriz D-H*)

```

Q[θ_,d_,a_,α_]:=Qz[θ].Tz[d].Tx[a].Qx[α]

```

```

Q[θ,d,a,α]/MatrixForm

```

CINEMATICA DIRECTA M.T.H

(*letra c es de cadena virtual*)

```

a01 = Qz [θ1v] . Tz [l1v] ;

```

```

a01 // MatrixForm
|forma de matriz

```

```

a12 = Qy [θ2v] . Tx [l2v] ;

```

```

a12 // MatrixForm
|forma de matriz

```

```

a23 = Qy [θ3v] . Tx [l3v] ;

```

```

a23 // MatrixForm
|forma de matriz

```

```

a01 = a01 // FullSimplify
|simplifica completamente

```

```

a01 // MatrixForm
|forma de matriz

```

```

av0 = a10.a21 // FullSimplify
|simplifica completamente;

av0 // MatrixForm
|forma de matriz;

av0 = a10.a21.a32 // FullSimplify
|simplifica completamente;

av0 // MatrixForm
|forma de matriz

```

CINEMATICA INVERSA CERRADA MÉTODO ALGEBRAICO

TETHA 1

X_v = $\frac{0}{3} \text{av}[[1, 4]]$

Y_v = $\frac{0}{3} \text{av}[[2, 4]]$

Z_v = $\frac{0}{3} \text{av}[[3, 4]]$

pypx=Y_v/X_v

t1=ArcTan[pxv,pyv]

Cos[θ1v]/.θ1v->t1

TETHA 3

X_v²;

Y_v²;

Z_v;

Ecxy2D=X_v²+Y_v² //FullSimplify

Ecz2D=(Z_v-ℓ1v)²

Sumxyz2D=Ecxy2D+Ecz2D//FullSimplify (*2 ES DE ELEVADO AL CUADRADO Y D ES DEL LADO DERECHO*)

Sumxyz2I=pxv²+pyv²+(pzv-ℓ1v)²

Theta3=Solve[{Sumxyz2D==Sumxyz2I}, Cos[θ3v]]//Flatten

C3= Cos[θ3v]/.Theta3

S3= $\sqrt{1 - (C3)^2}$

t3=ArcTan[C3,S3]

TETHA 2

Ecxt2=X_v//TrigExpand;

Ecyt2=Y_v//TrigExpand;

Eczt2=Z_v//TrigExpand;

SolSCθ2v=Solve[{Ecxt2==pxv,Eczt2==pzv},{Cos[θ2v],Sin[θ2v]}]//Flatten

C2=Cos[θ2v]/.SolSCθ2v;

S2=Sin[θ2v]/.SolSCθ2v;

t2=ArcTan[C2,S2]//FullSimplify;

Datos

ℓ1v=50;

ℓ2v=60;

ℓ3v=60;

nxv=0; nyv=-1; nzv=0;

oxv=-1; oyv=0; ozv=0;

axv=0; ayv=0; azv=-1;

or={ {nxv,oxv,axv}, {nyv,oyv,ayv}, {nzv,ozv,azv} };

tf=20;

Ce={0,0,0};

Cross[{-1,0,0},{0,0,-1}]

Trayectoria

For[t=0,t<=tf, t+=1,

p=(10*(t/20)³-15*(t/20)⁴+6*(t/20)⁵);

aa=15;

```

{
  {AbsoluteThickness[2],RGBColor[1,0,0],Trayectoria}
},
Axes->True, AxesLabel->{x,y,z},
PlotRange->{{-100,200},{-100,200},{-1,200}},
ImageSize->500
]

```

Valores de las variables articulares

```

For[t=0,t<= tf, t+=1,
pxv=s[t][[1]];
pyv=s[t][[2]];
pzv=s[t][[3]];
(*Variables articulares*)
θa1[t]=t1;
θ1v=θa1[t];
θa3[t]=t3;
θ3v=θa3[t];
θa2[t]=t2;
θ2v=θa2[t];
]
??θ3v

```

SIMULACIÓN

```

Animate[
θ1v=θa1[t];
θ2v=θa2[t];
θ3v=θa3[t];

Ce={0,0,0};

Eslabon1=Line[{Ce, T3D[ $\begin{matrix} \theta \\ \text{av.n} \\ 1 \end{matrix}$  ]}];
Eslabon2=Line[{T3D[ $\begin{matrix} \theta \\ \text{av.n} \\ 1 \end{matrix}$  ], T3D[ $\begin{matrix} \theta \\ \text{av.n} \\ 2 \end{matrix}$  ]}];
Eslabon3=Line[{T3D[ $\begin{matrix} \theta \\ \text{av.n} \\ 2 \end{matrix}$  ], T3D[ $\begin{matrix} \theta \\ \text{av.n} \\ 3 \end{matrix}$  ]}];
Graphics3D[
{
  {AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,1,0], Trayectoria},
  {AbsoluteThickness[7], RGBColor[1,1,0], Eslabon1},
  {AbsoluteThickness[7], RGBColor[0,1,1], Eslabon2},
  {AbsoluteThickness[7], RGBColor[0,0,1], Eslabon3}
},
Axes->True, AxesLabel->{x,y,z},
AxesStyle->{Red,Green,Blue},
BaseStyle->{24,FontFamily->"Arial"},
ImageSize->400,
PlotRange->{{-100,200},{-100,200},{-50,200}}
],{t,0,tf,1}
]

```

CINEMÁTICA DIRECTA E INVERSA DE ROBOT PARALELO DELTA 4

(*Programa elaborado por Emilio Villanueva y Daniel Cruz junto con el Asesor Dr. Martínez Zamudio P. Para la cinemática directa e inversa de Robot Delta RSSS 2019

Nomenclatura:

-Eslabones: "eim" donde "i" es el número de cadena y "m" es el número de eslabón.

-Matrices de transformación: □□

\square UnderoverscriptBox[\square a \square , \square im \square , \square in \square] donde \square " $\langle i \rangle$ " \square es el número de cadena \square , "n" número de matriz y "m" es el número de matriz vista en el sistema anterior.

-Ángulos: θ in donde "i" es el número de cadena y "n" es el número de ángulo.

*)

FUNCIONES

Clear[α]

Qx[α]:=

```
{  
  {1,0,0,0},  
  {0,Cos[ $\alpha$ ],-Sin[ $\alpha$ ],0},  
  {0,Sin[ $\alpha$ ],Cos[ $\alpha$ ],0},  
  {0,0,0,1}}
```

Qy[ϕ]:=

```
{  
  {Cos[ $\phi$ ],0,Sin[ $\phi$ ],0},  
  {0,1,0,0},  
  {-Sin[ $\phi$ ],0,Cos[ $\phi$ ],0},  
  {0,0,0,1}}
```

Qz[θ]:=

```
{  
  {Cos[ $\theta$ ],-Sin[ $\theta$ ],0,0},  
  {Sin[ $\theta$ ],Cos[ $\theta$ ],0,0},  
  {0,0,1,0},  
  {0,0,0,1}  
}
```

(*Matrices de traslación*)

Tx[x]:=

```
{  
  {1,0,0,x},  
  {0,1,0,0},  
  {0,0,1,0},  
  {0,0,0,1}  
}
```

Ty[y]:=

```
{  
  {1,0,0,0},  
  {0,1,0,y},  
  {0,0,1,0},  
  {0,0,0,1}  
}
```

Tz[z]:=

```
{  
  {1,0,0,0},  
  {0,1,0,0},  
  {0,0,1,z},  
  {0,0,0,1}  
}
```

Txyz[x _, y _, z _]:=

```
{  
  {1,0,0,x},  
  {0,1,0,y},  
  {0,0,1,z},  
  {0,0,0,1}  
}
```

n={0,0,0,1};

T3D[P_]:= {P[[1]],P[[2]],P[[3]]}

```

10
a = Tx[e11]
11
;
10
a // MatrixForm
11
|forma de matriz
;
11
a = Qy[-θ11].Tx[e12]
12
;
11
a // MatrixForm
12
|forma de matriz
;
12
a = Qy[-θ12].Qz[90° - θ13].Tx[e13]
13
;
12
a // MatrixForm
13
|forma de matriz
;
θ14=-180°+θ12+θ11;
θ15=-90°+θ13;
13
a = Qz[θ15].Qy[θ14].Tx[e14]
14
;
13
a // MatrixForm
14
|forma de matriz
;
10 10
a = a
11 11;
10
a // MatrixForm
11
|forma de matriz
;
10 10 11
a = a.a // MatrixForm
12 11 12 |forma de matriz
;
10
a // MatrixForm
12
|forma de matriz
;
10 10 11 12
a = a.a.a // FullSimplify;
13 11 12 13;
10
a // MatrixForm
13
|forma de matriz
;
10 10 11 12 13
a = a.a.a.a // FullSimplify
14 11 12 13 14 |simplifica completamente
;
10
a // MatrixForm
14
|forma de matriz
;
(*Trasformaciones auxiliares lado derecho*)
12
aADi = Ty[e12A]
13
;
12
ad = Qy[-θ12].Qz[90° - θ13].Tx[e13]
13
;
12
aADs = Ty[-e12A]
13
;
10 10 11 12
aD = a.a.aADi
13 11 12 13;
10
aD // MatrixForm
13
|forma de matriz
;
10 10 11 12 12
aDb = a.a.aADi.ad
13 11 12 13 13;
10
aDb // MatrixForm
13
|forma de matriz
;

```



```


$${}_{13}^{10} \mathbf{aDs} = {}_{13}^{10} \mathbf{a} \cdot {}_{11}^{12} \mathbf{a} \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{aADi} \cdot \mathbf{Qz}[\theta_{15}] \cdot \mathbf{Qy}[\theta_{14}] \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{aADs}$$
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aDs} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;
(*Trasformaciones auxiliares lado izquierdo*)

$${}_{13}^{12} \mathbf{aAIi} = \mathbf{Ty}[-e_{12A}]$$
;

$${}_{13}^{12} \mathbf{ai} = \mathbf{Qy}[-\theta_{12}] \cdot \mathbf{Qz}[90^\circ - \theta_{13}] \cdot \mathbf{Tx}[e_{13}]$$
;

$${}_{13}^{12} \mathbf{aAIs} = \mathbf{Ty}[e_{12A}]$$
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aI} = {}_{13}^{10} \mathbf{a} \cdot {}_{11}^{12} \mathbf{a} \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{aAIi}$$
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aI} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aIb} = {}_{13}^{10} \mathbf{a} \cdot {}_{11}^{12} \mathbf{a} \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{aAIi} \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{ai}$$
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aIb} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aIs} = {}_{13}^{10} \mathbf{a} \cdot {}_{11}^{12} \mathbf{a} \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{aAIi} \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{ai} \cdot \mathbf{Qz}[\theta_{15}] \cdot \mathbf{Qy}[\theta_{14}] \cdot {}_{13}^{12} \mathbf{aAIs}$$
;

$${}_{13}^{10} \mathbf{aIs} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

```

CADENA 2

```


$${}_{21}^{20} \mathbf{a} = \mathbf{Qz}[90^\circ] \cdot \mathbf{Tx}[e_{21}]$$
;

$${}_{21}^{20} \mathbf{a} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$${}_{22}^{21} \mathbf{a} = \mathbf{Qy}[-\theta_{21}] \cdot \mathbf{Tx}[e_{22}]$$
;

$${}_{22}^{21} \mathbf{a} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$${}_{23}^{22} \mathbf{a} = \mathbf{Qy}[-\theta_{22}] \cdot \mathbf{Qz}[90^\circ - \theta_{23}] \cdot \mathbf{Tx}[e_{23}]$$
;

$${}_{23}^{22} \mathbf{a} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$${}_{23}^{22} \mathbf{a} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$$\theta_{24} = -180^\circ + \theta_{22} + \theta_{21}$$
;

$$\theta_{25} = -90^\circ + \theta_{23}$$
;

$${}_{24}^{23} \mathbf{a} = \mathbf{Qz}[\theta_{25}] \cdot \mathbf{Qy}[\theta_{24}] \cdot \mathbf{Tx}[e_{24}]$$
;

$${}_{24}^{23} \mathbf{a} // \text{MatrixForm}$$

|forma de matriz
;

$${}_{21}^{20} \mathbf{a} = {}_{21}^{20} \mathbf{a}$$
;

```

```

20 a // MatrixForm
21 |forma de matriz
;

20 a = a . a
22 21 21 22;

20 a // MatrixForm
22 |forma de matriz
;

20 a = a . a . a
23 21 22 23;

20 a // MatrixForm
23 |forma de matriz
;

20 a = a . a . a . a // FullSimplify
24 21 22 23 24 |simplifica completamente
;

20 a // MatrixForm
24 |forma de matriz

(*Trasformaciones auxiliares lado derecho*)
22
aADi = Ty[e22A]
23
;

22
ad = Qy[-θ22] . Qz[90° - θ23] . Tx[e23]
23
;

22
aADs = Ty[-e22A]
23
;

20 aD = a . a . aADi
23 21 22 23;

20 aD // MatrixForm
23 |forma de matriz
;

20 aDb = a . a . aADi . ad
23 21 22 23 23;

20 aDb // MatrixForm
23 |forma de matriz
;

20 aDs = a . a . aADi . ad . Qz[θ25] . Qy[θ24] . aADs
23 21 22 23 23 23;

20 aDs // MatrixForm
23 |forma de matriz
;

(*Trasformaciones auxiliares lado izquierdo*)
22
aAIi = Ty[-e22A]
23
;

22
ai = Qy[-θ22] . Qz[90° - θ23] . Tx[e23]
23
;

22
aAIs = Ty[e22A]
23
;

20 aI = a . a . aAIi
23 21 22 23;

20 aI // MatrixForm
23 |forma de matriz
;

20 aIb = a . a . aAIi . ai
23 21 22 23 23;

20 aIb // MatrixForm
23 |forma de matriz
;

```

```

20 20 21 22 22
aIs = a . a . aAIi . ai . Qz [θ25] . Qy [θ24] . aAIs ;
23 21 22 23 23 23

20
aIs // MatrixForm
23      [forma de matriz] ;

CADENA 3
30
a = Qz [180 °] . Tx [e31]
31 ;

30
a // MatrixForm
31      [forma de matriz] ;

31
a = Qy [-θ31] . Tx [e32]
32 ;

31
a // MatrixForm
32      [forma de matriz] ;

32
a = Qy [-θ32] . Qz [90 ° - θ33] . Tx [e33]
33 ;

32
a // MatrixForm
33      [forma de matriz] ;

32
a // MatrixForm
33      [forma de matriz] ;

θ34=-180°+θ32+θ31;
θ35=-90°+θ33;
33
a = Qz [θ35] . Qy [θ34] . Tx [e34]
34 ;

33
a // MatrixForm
34      [forma de matriz] ;

30 30
a = a
31 31 ;

30
a // MatrixForm
31      [forma de matriz] ;

30 30 31
a = a . a
32 31 32 ;

30
a // MatrixForm
32      [forma de matriz] ;

30 30 31 32
a = a . a . a
33 31 32 33 ;

30
a // MatrixForm
33      [forma de matriz] ;

30 30 31 32 33
a = a . a . a . a // FullSimplify
34 31 32 33 34      [simplifica completamente] ;

30
a // MatrixForm
34      [forma de matriz] ;

(*Trasformaciones auxiliares lado derecho*)
32
aADi = Ty [e32A]
33 ;

32
ad = Qy [-θ32] . Qz [90 ° - θ33] . Tx [e33]
33 ;

32
aADs = Ty [-e32A]
33 ;

```

```

30 30 31 32
aD = a . a . aADi
33 31 32 33 ;
30
aD // MatrixForm
33 |forma de matriz ;
30 30 31 32 32
aDb = a . a . aADi . ad
33 31 32 33 33 ;
30
aDb // MatrixForm
33 |forma de matriz ;
30 30 31 32 32 32
aDs = a . a . aADi . ad . Qz [θ35] . Qy [θ34] . aADs
33 31 32 33 33 33 ;
30
aDs // MatrixForm
33 |forma de matriz ;
(*Trasformaciones auxiliares lado izquierdo*)
32
aAIi = Ty[-e32A]
33 ;
32
ai = Qy[-θ32] . Qz[90° - θ33] . Tx[e33]
33 ;
32
aAIs = Ty[e32A]
33 ;
30 30 31 32
aI = a . a . aAIi
33 31 32 33 ;
30
aI // MatrixForm
33 |forma de matriz ;
30 30 31 32 32
aIb = a . a . aAIi . ai
33 31 32 33 33 ;
30
aIb // MatrixForm
33 |forma de matriz ;
30 30 31 32 32 32
aIs = a . a . aAIi . ai . Qz [θ35] . Qy [θ34] . aAIs
33 31 32 33 33 33 ;
30
aIs // MatrixForm
33 |forma de matriz ;
CADENA 4
40
a = Qz [270°] . Tx [e41]
41 ;(**)
40
a // MatrixForm
41 |forma de matriz ;
41
a = Qy [-θ41] . Tx [e42]
42 ;
41
a // MatrixForm
42 |forma de matriz ;
42
a = Qy [-θ42] . Qz [90° - θ43] . Tx [e43]
43 ;
42
a // MatrixForm
43 |forma de matriz ;
42
a // MatrixForm
43 |forma de matriz ;
044=-180°+042+041;
045=-90°+043;

```

```

43 a = Qz[θ45].Qy[θ44].Tx[e44]
44 ;
43 a // MatrixForm
44 |forma de matriz ;
40 40
a = a
41 41 ;
40 a // MatrixForm
41 |forma de matriz ;
40 40 41
a = a.a
42 41 42 ;
40 a // MatrixForm
42 |forma de matriz ;
40 40 41 42
a = a.a.a
43 41 42 43 ;
40 a // MatrixForm
43 |forma de matriz ;
40 40 41 42 43
a = a.a.a.a // FullSimplify
44 41 42 43 44 |simplifica completamente ;
40 a // MatrixForm
44 |forma de matriz ;
(*Trasformaciones auxiliares lado derecho*)
42
aADi = Ty[e42A]
43 ;
42
ad = Qy[-θ42].Qz[90° - θ43].Tx[e43]
43 ;
42
aADs = Ty[-e42A]
43 ;
40 40 41 42
aD = a.a.aADi
43 41 42 43 ;
40 aD // MatrixForm
43 |forma de matriz ;
40 40 41 42 42
aDb = a.a.aADi.ad
43 41 42 43 43 ;
40 aDb // MatrixForm
43 |forma de matriz ;
40 40 41 42 42
aDs = a.a.aADi.ad.Qz[θ45].Qy[θ44].aADs
43 41 42 43 43 43 ;
40 aDs // MatrixForm
43 |forma de matriz ;
(*Trasformaciones auxiliares lado izquierdo*)
42
aAIi = Ty[-e42A]
43 ;
42
ai = Qy[-θ42].Qz[90° - θ43].Tx[e43]
43 ;
42
aAIs = Ty[e42A]
43 ;
40 40 41 42
aI = a.a.aAIi
43 41 42 43 ;

```

```

40
aI // MatrixForm
43      |forma de matriz
      ;
40      40 41 42 42
aIb = a . a . aAIi . ai
43      41 42 43 43 ;
40
aIb // MatrixForm
43      |forma de matriz
      ;
40      40 41 42 42
aIs = a . a . aAIi . ai . Qz[θ45] . Qy[θ44] . aAIs
43      41 42 43 43      42
      43 ;
40
aIs // MatrixForm
43      |forma de matriz
      ;

```

Vector de posición

```

10
a [[1, 4]]
X=14 ;
10
a [[2, 4]]
Y=14 ;
10
a [[3, 4]]
Z=14 ;

```

```

20
a [[1, 4]]
X2=24 ;
20
a [[2, 4]]
Y2=24 ;
20
a [[3, 4]]
Z2=24 ;
30
a [[1, 4]]
X3=34 ;
30
a [[2, 4]]
Y3=34 ;
30
a [[3, 4]]
Z3=34 ;
40
a [[1, 4]]
X4=44 ;
40
a [[2, 4]]
Y4=44 ;
40
a [[3, 4]]
Z4=44 ;

```

Cadena#1 Cinematica inversa

Tetha3

SolC3=Solve[y==Y,Cos[θ13]]//Flatten

C3=Cos[θ13]/.SolC3

S3= $\sqrt{1 - C3^2}$

t13=ArcTan[C3,S3]

Tetha1

X

Y

Z

(*Sistema lado izquierdo*)

EcIx=X-e11+e14-e12 Cos[θ11];

EcIz=Z-e12 Sin[θ11];

SumIxz=EcIx²+EcIz²//FullSimplify

(*Sistema lado derecho*)

EcDx=x-e11+e14-e12 Cos[θ11];

EcDz=z-e12 Sin[θ11];

$\text{SumDxz} = \text{EcDx}^2 + \text{EcDz}^2 // \text{Expand} // \text{FullSimplify}$
 (*Realizando el cambio de variable de acuerdo a la identidad trigonométrica 101 Craig $\cos[\theta] = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ y $\sin[\theta] = 2t/(1 + t^2)$ *)
 $\text{CSumDxz} = \text{SumDxz} / \cos[\theta] \rightarrow (1 - t^2)/(1 + t^2) / \sin[\theta] \rightarrow 2t/(1 + t^2)$
 $\text{Sol}\theta 11 = \text{Solve}\{\text{SumIxz} == \text{CSumDxz}, t\}$
 (*Sustituyendo t en $\theta 11$, página del Craig 114*)
 $t1a = 2 \cdot \text{ArcTan}[t11] / \text{Sol}\theta 11[[1]] / \sin[\theta 13] \rightarrow S3 // \text{FullSimplify}$
 $t1b = 2 \cdot \text{ArcTan}[t11] / \text{Sol}\theta 11[[2]] / \sin[\theta 13] \rightarrow S3 // \text{FullSimplify}$
 (*tenemos dos posibles soluciones*)
 $\text{Tetha} 2$
 $\text{Ecxt}12 = X // \text{TrigExpand}$
 $\text{Ecyt}12 = Y // \text{TrigExpand}$
 $\text{Eczt}12 = Z // \text{TrigExpand}$

 $\text{Sol}\theta 12 = \text{Solve}\{\text{Ecxt}12 == x, \text{Eczt}12 == z, \{\cos[\theta 12], \sin[\theta 12]\}\} // \text{Flatten} // \text{FullSimplify}$
 $\text{C}12 = \cos[\theta 12] / \text{Sol}\theta 12[[1]]$
 $\text{S}12 = \sin[\theta 12] / \text{Sol}\theta 12[[2]]$
 $t12 = \text{ArcTan}[\text{C}12, \text{S}12]$

CADENA #2

$\text{Tetha} 23$
 $\text{SolC}23 = \text{Solve}[x^2 == X^2, \cos[\theta 23]] // \text{Flatten}$
 $\text{C}23 = \cos[\theta 23] / \text{SolC}23$
 $\text{S}23 = \sqrt{1 - \text{C}23^2}$
 $t132 = \text{ArcTan}[\text{C}23, \text{S}23]$
 $\text{Tetha} \#12$
 $X2$
 $Y2$
 $Z2$
 (*Sistema lado izquierdo*)
 $\text{EcIy}2 = Y2 - e^{21} + e^{24} - e^{22} \cos[\theta 21];$
 $\text{EcIz}2 = Z2 - e^{22} \sin[\theta 21];$
 $\text{SumIyz}2 = \text{EcIy}2^2 + \text{EcIz}2^2 // \text{FullSimplify}$
 (*Sistema lado Derecho*)
 $\text{EcDy}2 = y2 - e^{21} + e^{24} - e^{22} \cos[\theta 21];$
 $\text{EcDz}2 = z2 - e^{22} \sin[\theta 21];$
 $\text{SumDyz}2 = \text{EcDy}2^2 + \text{EcDz}2^2 // \text{Expand} // \text{FullSimplify}$

(*Realizando el cambio de variable de acuerdo a la identidad trigonométrica 101 Craig $\cos[\theta] = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ y $\sin[\theta] = 2t/(1 + t^2)$ *)
 $\text{CSumDyz}2 = \text{SumDyz}2 / \cos[\theta 21] \rightarrow (1 - t^2)/(1 + t^2) / \sin[\theta 21] \rightarrow 2t/(1 + t^2)$
 $\text{Sol}\theta 12 = \text{Solve}\{\text{SumIyz}2 == \text{CSumDyz}2, t\}$
 (*Sustituyendo t en $\theta 1$, página del Craig 114*)
 $t1a2 = 2 \cdot \text{ArcTan}[t112] / \text{Sol}\theta 12[[1]] / \sin[\theta 23] \rightarrow S23 // \text{FullSimplify}$
 $t1b2 = 2 \cdot \text{ArcTan}[t112] / \text{Sol}\theta 12[[2]] / \sin[\theta 23] \rightarrow S23 // \text{FullSimplify}$
 (*tenemos dos posibles soluciones*)

Tetha #22

$\text{Ecxt}122 = X2 // \text{TrigExpand}$
 $\text{Ecyt}122 = Y2 // \text{TrigExpand}$
 $\text{Eczt}122 = Z2 // \text{TrigExpand}$
 $\text{Sol}\theta 22 = \text{Solve}\{\text{Ecyt}122 == y2, \text{Eczt}122 == z2, \{\cos[\theta 22], \sin[\theta 22]\}\} // \text{Flatten} // \text{FullSimplify}$
 $\text{C}122 = \cos[\theta 22] / \text{Sol}\theta 22[[1]]$
 $\text{S}122 = \sin[\theta 22] / \text{Sol}\theta 22[[2]]$
 $t122 = \text{ArcTan}[\text{C}122, \text{S}122]$

CADENA #3

$\text{Tetha} 33$
 $\text{SolC}33 = \text{Solve}[y^3 == Y3, \cos[\theta 33]] // \text{Flatten}$
 $\text{C}33 = \cos[\theta 33] / \text{SolC}33$
 $\text{S}33 = \sqrt{1 - \text{C}33^2}$
 $t133 = \text{ArcTan}[\text{C}33, \text{S}33]$
 $\text{Tetha} 31$

X3
Y3
Z3
(*Sistema de lado izquierdo*)
EcIx3=X3+e31-e34+e32 Cos[031];
EcIz3=Z3-e32 Sin[031];
SumIxz3=EcIx3²+EcIz3²//FullSimplify
(*Sistema lado derecho*)
EcDx3=x3+e31-e34+e32 Cos[031];
EcDz3=z3-e32 Sin[031];
SumDxz3=EcDx3²+EcDz3²//Expand//FullSimplify
(*Realizando el cambio de variable de acuerdo a la identidad trigonométrica 101 Craig Cos[θ] = (1-t11^2)/(1+t11^2).Sin[θ] = (2t11)/(1+t11^2)*)
CsumDxz3=SumDxz3/.Cos[031]->(1-t113²)/(1+t113²)/.Sin[031]->(2t113)/(1+t113²)
Sol031=Solve[{SumIxz3 == CsumDxz3}, t113]
(*Sustituyendo t en θ1, página del Craig 114*)
t11a3=2*ArcTan[t113]/.Sol031[[1]]/. Sin[033]->S33//FullSimplify
t11b3=2*ArcTan[t113]/.Sol031[[2]]/. Sin[033]->S33//FullSimplify
(*tenemos dos posibles soluciones*)
Tetha 32
Ecxt123=X3//TrigExpand
Ecyt123=Y3//TrigExpand
Eczt123=Z3//TrigExpand

Sol032=Solve[{Ecxt123==x3,Eczt123==z3},{Cos[032],Sin[032]}//Flatten//FullSimplify
C123=Cos[032]/.Sol032[[1]]
S123=Sin[032]/.Sol032[[2]]
t123=ArcTan[C123,S123]

CADENA #4

Tetha 43

SolC4=Solve[x4==X4,Cos[043]]//Flatten
C4=Cos[043]/.SolC4

$$S4 = \sqrt{1 - C4^2}$$

t134=ArcTan[C4,S4]

Tetha 41

X4

Y4

Z4

(*Sistema de lado izquierdo*)

EcIy4=Y4+e41-e44+e42 Cos[041];

EcIz4=Z4-e42 Sin[041];

SumIyz4=EcIy4²+EcIz4²//FullSimplify

(*Sistema de lado derecho*)

EcDy4=y4+e41-e44+e42 Cos[041];

EcDz4=z4-e42 Sin[041];

SumDyz4=EcDy4²+EcDz4²//Expand//FullSimplify

(*Realizando el cambio de variable de acuerdo a la identidad trigonométrica 101 Craig Cos[θ] = (1-t11^2)/(1+t11^2).Sin[θ] = (2t11)/(1+t11^2)*)

CsumDyz4=SumDyz4/.Cos[041]->(1-t114²)/(1+t114²)/.Sin[041]->(2t114)/(1+t114²)

Sol041=Solve[{SumIyz4==CsumDyz4}, t114]

(*Sustituyendo t en θ1, página del Craig 114*)

t11a4=2*ArcTan[t114]/.Sol041[[1]]/. Sin[043]->S4//FullSimplify

t11b4=2*ArcTan[t114]/.Sol041[[2]]/. Sin[043]->S4//FullSimplify

(*tenemos dos posibles soluciones*)

Tetha 42

Ecxt124=X4//TrigExpand

Ecyt124=Y4//TrigExpand

Eczt124=Z4//TrigExpand

Sol042=Solve[{Ecyt124==y4,Eczt124==z4},{Cos[042],Sin[042]}//Flatten//FullSimplify

C124=Cos[042]/.Sol042[[1]]

S124=Sin[042]/.Sol042[[2]]

t124=ArcTan[C124,S124]

DATOS

e11=55;

e12=110;

e13=200;

e14=50;

e12A=20;

e21=55;

e22=110;

e23=200;

e24=50;

e22A=20;

e31=55;

e32=110;

e33=200;

e34=50;

e32A=20;

e41=55;

e42=110;

e43=200;

e44=50;

e42A=20;

pi={30,50,300};

pf={30,50,200};

tf=20;

Ce={0,0,0};

Cross[{-1,0,0},{0,0,-1}];

TRAYECTORIA:

For[t=0,t<=tf, t+=1,

p=(10*(t/tf)³-15*(t/tf)⁴+6*(t/tf)⁵);

aa=50;

(*s[t]=

{
pi[[1]] + p*(pf[[1]] - pi[[1]]),
pi[[2]] + p*(pf[[2]] - pi[[2]]),
pi[[3]] + p*(pf[[3]] - pi[[3]])
}*)

(*s[t]=

{
0+2*aa *Cos[2*Pi*p]-aa*Cos[4*Pi*p],
0+2*aa*Sin[2*Pi*p]-aa*Sin[4*Pi*p],
250
}*)

s[t]={

30+10*Sin[p*t],
30+10*Cos[p*t],
200+p*t/.3
}

(*s[t]=

{
5+30*Cos[2*Pi*p],
5+30*Sin[2*Pi*p],
300(*20*Cos[2*Pi*p]*)
}*)

```

(*s[t]=
{
10*sqrt[t*p]Cos[t*p],
10*Sin[t*p],
4*t*p}
*)
]
Tabla=Table[{s[t][[1]],s[t][[2]],s[t][[3]] },{t,0,tf,1}];
Trayectoria=Line[Tabla];
Graphics3D[
{
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[1,0,0],Trayectoria}
},
Axes->True, AxesLabel->{x,y,z},
PlotRange->{{-100,200},{-100,200},{-200,400}},
ImageSize->500
]
VARIABLES ARTICULARES
For[t=0,t<= tf, t+=1,
x=s[t][[1]];
y=s[t][[2]];
z=s[t][[3]];
x2=s[t][[1]];
y2=s[t][[2]];
z2=s[t][[3]];
x3=s[t][[1]];
y3=s[t][[2]];
z3=s[t][[3]];
x4=s[t][[1]];
y4=s[t][[2]];
z4=s[t][[3]];
(*Variables articulares*)
(*cadena1*)
theta3[t]=t13;
theta13=theta3[t];
theta1[t]=t11b;
theta11=theta1[t];
theta2[t]=t12;
theta12=theta2[t];
theta23[t]=t132;
theta23=theta23[t];
theta21[t]=t11b2;
theta21=theta21[t];
theta22[t]=t122;
theta22=theta22[t];
theta33[t]=t133;
theta33=theta33[t];
theta31[t]=t11b3;
theta31=theta31[t];
theta32[t]=t123;
theta32=theta32[t];
theta43[t]=t134;
theta43=theta43[t];
theta41[t]=t11b4;
theta41=theta41[t];
theta42[t]=t124;
theta42=theta42[t];
]

```

```

Animate[
  θ13=θa3[t];
  θ11=θa1[t];
  θ12=θa2[t];
  θ23=θa23[t];
  θ21=θa21[t];
  θ22=θa22[t];
  θ33=θa33[t];
  θ31=θa31[t];
  θ32=θa32[t];
  θ43=θa43[t];
  θ41=θa41[t];
  θ42=θa42[t];
  Ce={0,0,0};
  (*Primer cadena*)

```

```

      10
      a.n
Eslabon1=Line[{Ce,T3D[11  ]}];
      10      10
      a.n      a.n
Eslabon2=Line[{T3D[11  ],T3D[12  ]}];
      10      10
      a.n      a.n
Eslabon3=Line[{T3D[12  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      a.n      aD.n
Eslabon3D=Line[{T3D[12  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      a.n      aI.n
Eslabon3I=Line[{T3D[12  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      aD.n      aDb.n
Eslabon3Db=Line[{T3D[13  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      aI.n      aIb.n
Eslabon3Ib=Line[{T3D[13  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      aDb.n      aDs.n
Eslabon3Ds=Line[{T3D[13  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      aIb.n      aIs.n
Eslabon3Is=Line[{T3D[13  ],T3D[13  ]}];
      10      10
      a.n      a.n
Eslabon4=Line[{T3D[13  ],T3D[14  ]}];

```

(*Segunda cadena*)

```

      20
      a.n
Eslabon21=Line[{Ce,T3D[21  ]}];
      20      20
      a.n      a.n
Eslabon22=Line[{T3D[21  ],T3D[22  ]}];
      20      20
      a.n      a.n
Eslabon23=Line[{T3D[22  ],T3D[23  ]}];
      20      20
      a.n      aD.n
Eslabon23D=Line[{T3D[22  ],T3D[23  ]}];
      20      20
      a.n      aI.n
Eslabon23I=Line[{T3D[22  ],T3D[23  ]}];
      20      20
      aD.n      aDb.n
Eslabon23Db=Line[{T3D[23  ],T3D[23  ]}];
      20      20
      aI.n      aIb.n
Eslabon23Ib=Line[{T3D[23  ],T3D[23  ]}];
      20      20
      aDb.n      aDs.n
Eslabon23Ds=Line[{T3D[23  ],T3D[23  ]}];
      20      20
      aIb.n      aIs.n
Eslabon23Is=Line[{T3D[23  ],T3D[23  ]}];

```

Eslabon24=Line[{{T3D[²⁰a.n],T3D[²⁰a.n]}},T3D[²⁰a.n],T3D[²⁰a.n]}];

(*Tercera cadena*)

Eslabon31=Line[{{Ce,T3D[³⁰a.n]}},T3D[³⁰a.n]}];

Eslabon32=Line[{{T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰a.n]}},T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰a.n]}];

Eslabon33=Line[{{T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰a.n]}},T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰a.n]}];

Eslabon33D=Line[{{T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰aD.n]}},T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰aD.n]}];

Eslabon33I=Line[{{T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰aI.n]}},T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰aI.n]}];

Eslabon33Db=Line[{{T3D[³⁰aD.n],T3D[³⁰aDb.n]}},T3D[³⁰aD.n],T3D[³⁰aDb.n]}];

Eslabon33Ib=Line[{{T3D[³⁰aI.n],T3D[³⁰aIb.n]}},T3D[³⁰aI.n],T3D[³⁰aIb.n]}];

Eslabon33Ds=Line[{{T3D[³⁰aDb.n],T3D[³⁰aDs.n]}},T3D[³⁰aDb.n],T3D[³⁰aDs.n]}];

Eslabon33Is=Line[{{T3D[³⁰aIb.n],T3D[³⁰aIs.n]}},T3D[³⁰aIb.n],T3D[³⁰aIs.n]}];

Eslabon34=Line[{{T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰a.n]}},T3D[³⁰a.n],T3D[³⁰a.n]}];

(*Cuarta cadena*)

Eslabon41=Line[{{Ce,T3D[⁴⁰a.n]}},T3D[⁴⁰a.n]}];

Eslabon42=Line[{{T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰a.n]}},T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰a.n]}];

Eslabon43=Line[{{T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰a.n]}},T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰a.n]}];

Eslabon43D=Line[{{T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰aD.n]}},T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰aD.n]}];

Eslabon43I=Line[{{T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰aI.n]}},T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰aI.n]}];

Eslabon43Db=Line[{{T3D[⁴⁰aD.n],T3D[⁴⁰aDb.n]}},T3D[⁴⁰aD.n],T3D[⁴⁰aDb.n]}];

Eslabon43Ib=Line[{{T3D[⁴⁰aI.n],T3D[⁴⁰aIb.n]}},T3D[⁴⁰aI.n],T3D[⁴⁰aIb.n]}];

Eslabon43Ds=Line[{{T3D[⁴⁰aDb.n],T3D[⁴⁰aDs.n]}},T3D[⁴⁰aDb.n],T3D[⁴⁰aDs.n]}];

Eslabon43Is=Line[{{T3D[⁴⁰aIb.n],T3D[⁴⁰aIs.n]}},T3D[⁴⁰aIb.n],T3D[⁴⁰aIs.n]}];

Eslabon44=Line[{{T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰a.n]}},T3D[⁴⁰a.n],T3D[⁴⁰a.n]}];

Graphics3D[

{

(*Primera cadena*)

{AbsoluteThickness[1], RGBColor[1,1,0],Trayectoria},
{AbsoluteThickness[7], RGBColor[1,1,0],Eslabon1},
{AbsoluteThickness[5], RGBColor[0,1,1], Eslabon2},
{AbsoluteThickness[3], RGBColor[0,0,1],Dashed,1 Eslabon3},
{AbsoluteThickness[3], RGBColor[1,0,1], Eslabon4},
{AbsoluteThickness[3], RGBColor[1,0,0],Eslabon3D},
{AbsoluteThickness[3], RGBColor[1,0,0], Eslabon3I},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon3Db},

```

{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon3Ib},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon3Ds},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon3Is},
(*Segunda cadena*)
{AbsoluteThickness[7],RGBColor[1,1,0],Trayectoria},
{AbsoluteThickness[7],RGBColor[1,1,0],Eslabon21},
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,1],Eslabon22},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Dashed,1Eslabon23},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,1],Eslabon24},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon23D},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon23I},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon23Db},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon23Ib},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon23Ds},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon23Is},
(*Tercera cadena*)
{AbsoluteThickness[7],RGBColor[1,1,0],Trayectoria},
{AbsoluteThickness[7],RGBColor[1,1,0],Eslabon31},
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,1],Eslabon32},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Dashed,1Eslabon33},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,1],Eslabon34},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon33D},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon33I},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon33Db},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon33Ib},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon33Ds},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon33Is},
(*Cuarta cadena*)
{AbsoluteThickness[7],RGBColor[1,1,0],Trayectoria},
{AbsoluteThickness[7],RGBColor[1,1,0],Eslabon41},
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,1],Eslabon42},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Dashed,1Eslabon43},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,1],Eslabon44},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon43D},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon43I},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon43Db},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[0,0,1],Eslabon43Ib},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon43Ds},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,0,0],Eslabon43Is}

},
Axes->True, AxesLabel->{x,y,z},
ImageSize->800,
BaseStyle->{24,FontFamily->"Arial"},
PlotRange->{{-200,400},{-200,400},{-2,400}}
],{t,0,tf,1}
]

```

Matriz en variables de estado de Robot Paralelo Delta 4RSS

(*Programa elaborado por Emilio Villanueva y Daniel Cruz junto con el Asesor Dr. Martínez Zamudio P. Para la implementación de una cadena virtual RRR en un Robot Delta RSS (2019)

Nomenclatura:

-Eslabones:"eim" donde "i" es el número de cadena y "m" es el número de eslabón.

-Matrices de transformación: $\square \square$

$\square \square$ UnderoverscriptBox[\square a \square , \square im \square , \square in \square] donde $\square \square \langle i \rangle \square$ es el número de cadena $\square \square \langle n \rangle \square$ número de matriz y $\square \square \langle m \rangle \square$ es el número de matriz vista en el sistema \square anterior. Con \square excepción de

□ UnderoverscriptBox[□ av□, □ im□, □ in□] \ la\ cual\ □ "\<v\>" □ representa\ a\ la\ cadena\ □ virtual . □ □ -
 Ángulos □ □ □: θ in donde "i" es el número de cadena y "n" es el número de ángulo.
 *)

FUNCIONES

```

Clear[α]
Qx[α_]:=
{
  {1,0,0,0},
  {0,Cos[α],-Sin[α],0},
  {0,Sin[α],Cos[α],0},
  {0,0,0,1}}
Qy[φ_]:=
{
  {Cos[φ],0,Sin[φ],0},
  {0,1,0,0},
  {-Sin[φ],0,Cos[φ],0},
  {0,0,0,1}}
Qz[θ_]:=
{
  {Cos[θ],-Sin[θ],0,0},
  {Sin[θ],Cos[θ],0,0},
  {0,0,1,0},
  {0,0,0,1}}
(*Matrices de traslación*)
Tx[x_]:=
{
  {1,0,0,x},
  {0,1,0,0},
  {0,0,1,0},
  {0,0,0,1}}
}
Ty[y_]:=
{
  {1,0,0,0},
  {0,1,0,y},
  {0,0,1,0},
  {0,0,0,1}}
}
Tz[z_]:=
{
  {1,0,0,0},
  {0,1,0,0},
  {0,0,1,z},
  {0,0,0,1}}
}
Txyz[x_,y_,z_]:=
{
  {1,0,0,x},
  {0,1,0,y},
  {0,0,1,z},
  {0,0,0,1}}
}
n={0,0,0,1};
T3D[P_]:= {P[[1]],P[[2]],P[[3]]}
M3D[p_]:= {{p[[1,1]],p[[1,2]],p[[1,3]]},{p[[2,1]],p[[2,2]],p[[2,3]]},{p[[3,1]],p[[3,2]],p[[3,3]]}};

```

CINEMÁTICA DIRECTA DE PARALELO

```

(*CADENA #1*)
10
a = Tx[e11]
11
;
10
a // MatrixForm
11
[forma de matriz]
;

```

```

11 a = Qy[-theta11[t11]] .Tx[e12]
12 ;
11 a // MatrixForm
12 |forma de matriz
;
12 a = Qy[-theta12[t12]] .Qz[90° - theta13[t13]] .Tx[e13]
13 ;
12 a // MatrixForm
13 |forma de matriz
;
theta14[t14]=-180°+theta12[t12]+theta11[t11];
theta15[t15]=-90°+theta13[t13];
13 a = Qz[theta15[t15]] .Qy[theta14[t14]] .Tx[e14]
14 ;
13 a // MatrixForm
14 |forma de matriz
;
10 a = a
11 |
10 a = a . a
12 |
10 a = a . a . a
13 |
10 a = a . a . a . a // FullSimplify
14 |simplifica completamente
;
10 a // MatrixForm
14 |forma de matriz
//FullSimplify;
(*CADENA #2*)
20 a = Qz[90°] .Tx[e21]
21 ;
20 a // MatrixForm
21 |forma de matriz
;
21 a = Qy[-theta21[t21]] .Tx[e22]
22 ;
21 a // MatrixForm
22 |forma de matriz
;
22 a = Qy[-theta22[t22]] .Qz[90° - theta23[t23]] .Tx[e23]
23 ;
22 a // MatrixForm
23 |forma de matriz
;
theta24[t24]=-180°+theta22[t22]+theta21[t21];
theta25[t25]=-90°+theta23[t23];
23 a = Qz[theta25[t25]] .Qy[theta24[t24]] .Tx[e24]
24 ;
23 a // MatrixForm
24 |forma de matriz
;

```

```

20  20
a = a
21  21;
20
a // MatrixForm
21      [forma de matriz]
;
20  20 21
a = a . a
22  21 22;
20
a // MatrixForm
22      [forma de matriz]
;
20  20 21 22
a = a . a . a
23  21 22 23;
20
a // MatrixForm
23      [forma de matriz]
//FullSimplify;
20  20 21 22 23
a = a . a . a . a // FullSimplify
24  21 22 23 24      [simplifica completamente]
;
20
a // MatrixForm
24      [forma de matriz]
;
(*CADENA #3*)
30
a = Qz[180°].Tx[e31]
31
;
30
a // MatrixForm
31      [forma de matriz]
;
31
a = Qy[-θ31[t31]].Tx[e32]
32
;
31
a // MatrixForm
32      [forma de matriz]
;
32
a = Qy[-θ32[t32]].Qz[90° - θ33[t33]].Tx[e33]
33
;
32
a // MatrixForm
33      [forma de matriz]
;
θ34[t34]=-180°+θ32[t32]+θ31[t31];
θ35[t35]=-90°+θ33[t33];
33
a = Qz[θ35[t35]].Qy[θ34[t34]].Tx[e34]
34
;
33
a // MatrixForm
34      [forma de matriz]
;
30  30
a = a
31  31;
30
a // MatrixForm
31      [forma de matriz]
;
30  30 31
a = a . a
32  31 32;

```



```

30 a // MatrixForm
32      [forma de matriz]
;

30 a = a . a . a
33      30 31 32
      31 32 33
;

30 a // MatrixForm
33      [forma de matriz]
;

30 a = a . a . a . a // FullSimplify
34      30 31 32 33
      31 32 33 34      [simplifica completamente]
;

30 a // MatrixForm
34      [forma de matriz]
;

(*CADENA #4*)
40 a = Qz [ 270 ° ] . Tx [ e41 ]
41
;

40 a // MatrixForm
41      [forma de matriz]
;

41 a = Qy [ -θ41 [ t41 ] ] . Tx [ e42 ]
42
;

41 a // MatrixForm
42      [forma de matriz]
;

42 a = Qy [ -θ42 [ t42 ] ] . Qz [ 90 ° - θ43 [ t43 ] ] . Tx [ e43 ]
43
;

42 a // MatrixForm
43      [forma de matriz]
;

θ44[t44]=-180°+θ42[t42]+θ41[t41];
θ45[t45]=-90°+θ43[t43];
43 a = Qz [ θ45 [ t45 ] ] . Qy [ θ44 [ t44 ] ] . Tx [ e44 ]
44
;

43 a // MatrixForm
44      [forma de matriz]
;

40 a = a
41      40
      41
;

40 a // MatrixForm
41      [forma de matriz]
;

40 a = a . a
42      40 41
      41 42
;

40 a // MatrixForm
42      [forma de matriz]
;

40 a = a . a . a
43      40 41 42
      41 42 43
;

40 a // MatrixForm
43      [forma de matriz]
;

```

```

40  a = a . a . a . a // FullSimplify
44  41 42 43 44      |simplifica completamente
;

40  a // MatrixForm
44  |forma de matriz
;

```

CINEMÁTICA DE CADENA VIRTUAL

```

0
a10 = Qz [θ1v [t1v]] . Tz [e1v]
;

0
a10 // MatrixForm
1      |forma de matriz
;

1
a21 = Qy [θ2v [t2v]] . Tx [e2v]
;

1
a21 // MatrixForm
2      |forma de matriz
;

2
a32 = Qy [θ3v [t3v]] . Tx [e3v]
;

2
a32 // MatrixForm
3      |forma de matriz
;

```

```

0
a10 = a10 // FullSimplify
1      |simplifica completamente
;

```

```

0
a10 // MatrixForm
1      |forma de matriz
;

```

```

0
a20 = a10 . a21 // FullSimplify
2      |simplifica completamente
;

```

```

0
a20 // MatrixForm
2      |forma de matriz
;

```

```

0
a30 = a10 . a21 . a32 // FullSimplify
3      |simplifica completamente
;

```

```

0
a30 // MatrixForm
3      |forma de matriz
;

```

ECUACIONES PARA LA CINEMÁTICA DIRECTA

```

(*Paralelo*)
10
a1410 [[1, 4]]
X=14
;

10
a1410 [[2, 4]]
Y=14
;

10
a1410 [[3, 4]]
Z=14
;

20
a2420 [[1, 4]]
X2=24
;

```

```

      20
a [[2, 4]]
Y2=24 ;
      20
a [[3, 4]]
Z2=24 ;
      30
a [[1, 4]]
X3=34 ;
      30
a [[2, 4]]
Y3=34 ;
      30
a [[3, 4]]
Z3=34 ;
      40
a [[1, 4]]
X4=44 ;
      40
a [[2, 4]]
Y4=44 ;
      40
a [[3, 4]]
Z4=44 ;
(*Cadena virtual*)
      0
av [[1, 4]]
Xv= 3 ;
      0
av [[2, 4]]
Yv= 3 ;
      0
av [[3, 4]]
Zv= 3 ;

```

DERIVADAS PARA VELOCIDADES LINEALES

CADENA 1

```

dx1=D[X,011[t11]];
dx2=D[X,012[t12]];
dx3=D[X,013[t13]];
dy1=D[Y,011[t11]];
dy2=D[Y,012[t12]];
dy3=D[Y,013[t13]];
dz1=D[Z,011[t11]];
dz2=D[Z,012[t12]];
dz3=D[Z,013[t13]];

```

CADENA 2

```

dx12=D[X2,021[t21]];
dx22=D[X2,022[t22]];
dx32=D[X2,023[t23]];
dy12=D[Y2,021[t21]];
dy22=D[Y2,022[t22]];
dy32=D[Y2,023[t23]];
dz12=D[Z2,021[t21]];
dz22=D[Z2,022[t22]];
dz32=D[Z2,023[t23]];

```

CADENA 3

(*CADENA #3*)

```

dx13=D[X3,031[t31]];
dx23=D[X3,032[t32]];
dx33=D[X3,033[t33]];
dy13=D[Y3,031[t31]];
dy23=D[Y3,032[t32]];
dy33=D[Y3,033[t33]];
dz13=D[Z3,031[t31]];
dz23=D[Z3,032[t32]];

```

```

dz33=D[Z3,033[t33]];
CADENA 4
(*CADENA #4*)
dx14=D[X4,041[t41]];
dx24=D[X4,042[t42]];
dx34=D[X4,043[t43]];
dy14=D[Y4,041[t41]];
dy24=D[Y4,042[t42]];
dy34=D[Y4,043[t43]];
dz14=D[Z4,041[t41]];
dz24=D[Z4,042[t42]];
dz34=D[Z4,043[t43]];
CADENA VIRTUAL
dx1v=D[Xv,01v[t1v]];
dx2v=D[Xv,02v[t2v]];
dx3v=D[Xv,03v[t3v]];
dy1v=D[Yv,01v[t1v]];
dy2v=D[Yv,02v[t2v]];
dy3v=D[Yv,03v[t3v]];
dz1v=D[Zv,01v[t1v]];
dz2v=D[Zv,02v[t2v]];
dz3v=D[Zv,03v[t3v]];

```

SUBMATRICES DE ROTACION (SMR)

```

CADENA 1
(*CADENA #1*)
10
a
SMR1=M3D[14];
SMR1//MatrixForm;
DSMR1=D[SMR1,t11];
DSMR11=DSMR1/011[t11];
DSMR11//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje y*)

```

```

10
a
SMR2=M3D[14];
SMR2//MatrixForm;
DSMR2=D[SMR1,t12];
DSMR22=DSMR2/012[t12];
DSMR22//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje z*)

```

```

10
a
SMR3=M3D[14];
SMR3//MatrixForm;
DSMR3=D[SMR1,t13];
DSMR33=DSMR3/013[t13];
DSMR33//MatrixForm//FullSimplify;
TSMR1=Transpose[SMR1];
TSMR1//MatrixForm;

```

```

CADENA 2
(*CADENA #2*)
20
a
SMR12=M3D[24];
SMR12//MatrixForm;
DSMR12=D[SMR12,t21];
DSMR112=DSMR12/021[t21];
DSMR112//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje y*)

```

```

20
a
SMR22=M3D[24];

```

SMR22//MatrixForm;
DSMR29=D[SMR12,t22];
DSMR222=DSMR29/022'[t22];
DSMR222//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje z*)

20
a
SMR32=M3D[**24**];
SMR32//MatrixForm;
DSMR32=D[SMR12,t23];
DSMR332=DSMR32/023'[t23];
DSMR332//MatrixForm//FullSimplify;
TSMR12=Transpose[SMR12];
TSMR12//MatrixForm;

CADENA 3
(*CADENA #3*)

30
a
SMR13=M3D[**34**];
SMR13//MatrixForm;
DSMR13=D[SMR13,t31];
DSMR113=DSMR13/031'[t31];
DSMR113//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje y*)

30
a
SMR23=M3D[**34**];
SMR23//MatrixForm;
DSMR23=D[SMR13,t32];
DSMR223=DSMR23/032'[t32];
DSMR223//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje z*)

30
a
SMR33=M3D[**34**];
SMR33//MatrixForm;
DSMR39=D[SMR13,t33];
DSMR339=DSMR39/033'[t33];
DSMR339//MatrixForm//FullSimplify;
TSMR13=Transpose[SMR13];
TSMR13//MatrixForm;

CADENA 4
(*CADENA #4*)

40
a
SMR14=M3D[**44**];
SMR14//MatrixForm;
DSMR14=D[SMR14,t41];
DSMR114=DSMR14/041'[t41];
DSMR114//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje y*)

40
a
SMR24=M3D[**44**];
SMR24//MatrixForm;
DSMR24=D[SMR14,t42];
DSMR224=DSMR24/042'[t42];
DSMR224//MatrixForm//FullSimplify;
(*eje z*)

40
a
SMR34=M3D[**44**];
SMR34//MatrixForm;
DSMR34=D[SMR14,t43];

DSMR334=DSMR34/043'[t43];
DSMR334//MatrixForm//FullSimplify;
TSMR14=Transpose[SMR14];
TSMR14//MatrixForm;

CADENA VIRTUAL

θ
 av
SMR1v=M3D[3];
SMR1v//MatrixForm;
DSMR1v=D[SMR1v,t1v];
DSMR11v=DSMR1v/01v'[t1v];
DSMR11v//MatrixForm//FullSimplify;

θ
 av
SMR2v=M3D[3];
SMR2v//MatrixForm;
DSMR2v=D[SMR1v,t2v];
DSMR22v=DSMR2v/02v'[t2v];
DSMR22v//MatrixForm//FullSimplify;

θ
 av
SMR3v=M3D[3];
SMR3v//MatrixForm;
DSMR3v=D[SMR1v,t3v];
DSMR33v=DSMR3v/03v'[t3v];
DSMR33v//MatrixForm//FullSimplify;
TSMR1v=Transpose[SMR1v];
TSMR1v//MatrixForm;

MATRICES OMEGA

$\Omega1=(DSMR1.TSMR1)+(DSMR2.TSMR1)+(DSMR3.TSMR1);$
 $\Omega1//MatrixForm//FullSimplify;$

$\mu x=-\Omega1[[2,3]]//FullSimplify;$
 $\mu y=-\Omega1[[3,1]]//FullSimplify;$
 $\mu z=-\Omega1[[1,2]]//FullSimplify;$

$wx1=D[\mu x,011'[t11]];$

$wx2=D[\mu x,012'[t12]];$

$wx3=D[\mu x,013'[t13]];$

$wy1=D[\mu y,011'[t11]];$

$wy2=D[\mu y,012'[t12]];$

$wy3=D[\mu y,013'[t13]];$

$wz1=D[\mu z,011'[t11]];$

$wz2=D[\mu z,012'[t12]];$

$wz3=D[\mu z,013'[t13]];$

(*CADENA #2*)

$\Omega2=(DSMR12.TSMR12)+(DSMR29.TSMR12)+(DSMR32.TSMR12);$

$\Omega2//MatrixForm//FullSimplify;$

$\mu x2=-\Omega2[[2,3]]//FullSimplify;$

$\mu y2=-\Omega2[[3,1]]//FullSimplify;$

$\mu z2=-\Omega2[[2,1]]//FullSimplify;$

$wx12=D[\mu x2,021'[t21]];$

$wx22=D[\mu x2,022'[t22]];$

$wx32=D[\mu x2,023'[t23]];$

$wy12=D[\mu y2,021'[t21]];$

$wy22=D[\mu y2,022'[t22]];$

$wy32=D[\mu y2,023'[t23]];$

$wz12=D[\mu z2,021'[t21]];$

$wz22=D[\mu z2,022'[t22]];$

$wz32=D[\mu z2,023'[t23]];$

(*CADENA #3*)

$\Omega3=(DSMR13.TSMR13)+(DSMR23.TSMR13)+(DSMR339.TSMR13);$

$\Omega3//MatrixForm//FullSimplify;$

$\mu x3=-\Omega3[[2,3]]//FullSimplify;$

$\mu y3=-\Omega3[[3,1]]//FullSimplify;$

$\mu z3 = -\Omega 3[[2,1]]/\text{FullSimplify};$
 $wx13 = D[\mu x3, \theta 31'[t31]];$
 $wx23 = D[\mu x3, \theta 32'[t32]];$
 $wx33 = D[\mu x3, \theta 33'[t33]];$
 $wy13 = D[\mu y3, \theta 31'[t31]];$
 $wy23 = D[\mu y3, \theta 32'[t32]];$
 $wy33 = D[\mu y3, \theta 33'[t33]];$
 $wz13 = D[\mu z3, \theta 31'[t31]];$
 $wz23 = D[\mu z3, \theta 32'[t32]];$
 $wz33 = D[\mu z3, \theta 33'[t33]];$

(*CADENA#4*)

$\Omega 4 = (\text{DSMR}14.\text{TSMR}14) + (\text{DSMR}24.\text{TSMR}14) + (\text{DSMR}34.\text{TSMR}14);$

$\Omega 4/\text{MatrixForm}/\text{FullSimplify};$

$\mu x4 = -\Omega 4[[2,3]]/\text{FullSimplify};$

$\mu y4 = -\Omega 4[[3,1]]/\text{FullSimplify};$

$\mu z4 = -\Omega 4[[2,1]]/\text{FullSimplify};$

$wx14 = D[\mu x4, \theta 41'[t41]];$

$wx24 = D[\mu x4, \theta 42'[t42]];$

$wx34 = D[\mu x4, \theta 43'[t43]];$

$wy14 = D[\mu y4, \theta 41'[t41]];$

$wy24 = D[\mu y4, \theta 42'[t42]];$

$wy34 = D[\mu y4, \theta 43'[t43]];$

$wz14 = D[\mu z4, \theta 41'[t41]];$

$wz24 = D[\mu z4, \theta 42'[t42]];$

$wz34 = D[\mu z4, \theta 43'[t43]];$

(*JACOBIANO #1*)

$J1 = \{ \{ dx1, dx2, dx3 \}, \{ dy1, dy2, dy3 \}, \{ dz1, dz2, dz3 \}, \{ wx1, wx2, wx3 \}, \{ wy1, wy2, wy3 \}, \{ wz1, wz2, wz3 \} \};$

(*JACOBIANO #2*)

$J2 = \{ \{ dx12, dx22, dx32 \}, \{ dy12, dy22, dy32 \}, \{ dz12, dz22, dz32 \}, \{ wx12, wx22, wx32 \}, \{ wy12, wy22, wy32 \}, \{ wz12, wz22, wz32 \} \};$

(*JACOBIANO #3*)

$J3 = \{ \{ dx13, dx23, dx33 \}, \{ dy13, dy23, dy33 \}, \{ dz13, dz23, dz33 \}, \{ wx13, wx23, wx33 \}, \{ wy13, wy23, wy33 \}, \{ wz13, wz23, wz33 \} \};$

(*JACOBIANO #4*)

$J4 = \{ \{ dx14, dx24, dx34 \}, \{ dy14, dy24, dy34 \}, \{ dz14, dz24, dz34 \}, \{ wx14, wx24, wx34 \}, \{ wy14, wy24, wy34 \}, \{ wz14, wz24, wz34 \} \};$

$J1/\text{MatrixForm}/\text{FullSimplify}$

$J2/\text{MatrixForm}/\text{FullSimplify}$

$J3/\text{MatrixForm}/\text{FullSimplify}$

$J4/\text{MatrixForm}/\text{FullSimplify}$

CADENA VIRTUAL

$\Omega v = (\text{DSMR}1v.\text{TSMR}1v) + (\text{DSMR}2v.\text{TSMR}1v) + (\text{DSMR}3v.\text{TSMR}1v);$

$\Omega v/\text{MatrixForm}/\text{FullSimplify}$

$wxv = -\Omega v[[2,3]]/\text{FullSimplify};$

$wyv = -\Omega v[[3,1]]/\text{FullSimplify};$

$wzv = -\Omega v[[1,2]]/\text{FullSimplify};$

$wx1v = D[w xv, \theta 1v'[t1v]];$

$wx2v = D[w xv, \theta 2v'[t2v]];$

$wx3v = D[w xv, \theta 3v'[t3v]];$

$wy1v = D[w yv, \theta 1v'[t1v]];$

$wy2v = D[w yv, \theta 2v'[t2v]];$

$wy3v = D[w yv, \theta 3v'[t3v]];$

$wz1v = D[w zv, \theta 1v'[t1v]];$

$wz2v = D[w zv, \theta 2v'[t2v]];$

$wz3v = D[w zv, \theta 3v'[t3v]];$

$Jv = \{ \{ dx1v, dx2v, dx3v \}, \{ dy1v, dy2v, dy3v \}, \{ dz1v, dz2v, dz3v \}, \{ wx1v, wx2v, wx3v \}, \{ wy1v, wy2v, wy3v \}, \{ wz1v, wz2v, wz3v \} \};$

$Jv/\text{MatrixForm}/\text{Simplify};$

MATRICES EN VARIABLES DE ESTADO

Cadena 1

$J_{xyz} = J1. \{ \theta 11'[t11], \theta 12'[t12], \theta 13'[t13] \};$

```

Jxyz//MatrixForm;
xx=Jxyz[[1]];
yy=Jxyz[[2]];
zz=Jxyz[[3]];
xα=Jxyz[[4]];
yβ=Jxyz[[5]];
zγ=Jxyz[[6]];
xyz={xx,yy,zz,xα,yβ,zγ};
xyz//MatrixForm;
Ec1=xyz[[1]]//FullSimplify ;
Ec2=xyz[[2]]//FullSimplify ;
Ec3=xyz[[3]]//FullSimplify ;
Ec4=xyz[[4]]//FullSimplify ;
Ec5=xyz[[5]]//FullSimplify ;
Ec6=xyz[[6]]//FullSimplify ;

```

Cadena 2

```

Jxyz2=J2.{021^[t21],022^[t22],023^[t23]};
Jxyz2//MatrixForm;
xx2=Jxyz2[[1]];
yy2=Jxyz2[[2]];
zz2=Jxyz2[[3]];
xα2=Jxyz2[[4]];
yβ2=Jxyz2[[5]];
zγ2=Jxyz2[[6]];
xyz2={xx2,yy2,zz2,xα2,yβ2,zγ2};
xyz2//MatrixForm;
Ec12=xyz2[[1]]//FullSimplify ;
Ec22=xyz2[[2]]//FullSimplify ;
Ec32=xyz2[[3]]//FullSimplify ;
Ec42=xyz2[[4]]//FullSimplify ;
Ec52=xyz2[[5]]//FullSimplify ;
Ec62=xyz2[[6]]//FullSimplify ;

```

Cadena 3

```

Jxyz3=J3.{031^[t31],032^[t32],033^[t33]};
Jxyz3//MatrixForm;
xx3=Jxyz3[[1]];
yy3=Jxyz3[[2]];
zz3=Jxyz3[[3]];
xα3=Jxyz3[[4]];
yβ3=Jxyz3[[5]];
zγ3=Jxyz3[[6]];
xyz3={xx3,yy3,zz3,xα3,yβ3,zγ3};
xyz3//MatrixForm;
Ec13=xyz3[[1]]//FullSimplify ;
Ec23=xyz3[[2]]//FullSimplify ;
Ec33=xyz3[[3]]//FullSimplify ;
Ec43=xyz3[[4]]//FullSimplify ;
Ec53=xyz3[[5]]//FullSimplify ;
Ec63=xyz3[[6]]//FullSimplify ;

```

Cadena 4

```

Jxyz4=J4.{041^[t41],042^[t42],043^[t43]};
Jxyz4//MatrixForm;
xx4=Jxyz4[[1]];
yy4=Jxyz4[[2]];
zz4=Jxyz4[[3]];
xα4=Jxyz4[[4]];
yβ4=Jxyz4[[5]];
zγ4=Jxyz4[[6]];
xyz4={xx4,yy4,zz4,xα4,yβ4,zγ4};
xyz4//MatrixForm;
Ec14=xyz4[[1]]//FullSimplify ;
Ec24=xyz4[[2]]//FullSimplify ;

```


Ec34=xyz4[[3]]/FullSimplify ;

Ec44=xyz4[[4]]/FullSimplify ;

Ec54=xyz4[[5]]/FullSimplify ;

Ec64=xyz4[[6]]/FullSimplify ;

Cadena virtual

Jxyzv=Jv.{ $\theta 1 v^{[t1v]}, \theta 2 v^{[t2v]}, \theta 3 v^{[t3v]}$ };

Jxyzv//MatrixForm;

xxv=Jxyzv[[1]];

yyv=Jxyzv[[2]];

zzv=Jxyzv[[3]];

xav=Jxyzv[[4]];

yβv=Jxyzv[[5]];

zγv=Jxyzv[[6]];

xyzv={xxv,yyv,zzv,xav,yβv,zγv};

xyzv//MatrixForm;

Ec1v=xyzv[[1]]/FullSimplify;

Ec2v=xyzv[[2]]/FullSimplify ;

Ec3v=xyzv[[3]]/FullSimplify ;

Ec4v=xyzv[[4]]/FullSimplify ;

Ec5v=xyzv[[5]]/FullSimplify ;

Ec6v=xyzv[[6]]/FullSimplify ;

OBTENCIÓN DE LAS VELOCIDADES LINEALES

```
sol=Solve[{
  Ec1- $\dot{X}p==0$ ,Ec2- $\dot{Y}p==0$ ,Ec3- $\dot{Z}p==0$ ,
  Ec12- $\dot{X}p==0$ ,Ec22- $\dot{Y}p==0$ ,Ec32- $\dot{Z}p==0$ ,
  Ec13- $\dot{X}p==0$ ,Ec23- $\dot{Y}p==0$ ,Ec33- $\dot{Z}p==0$ ,
  Ec14- $\dot{X}p==0$ ,Ec24- $\dot{Y}p==0$ ,Ec34- $\dot{Z}p==0$ ,
  Ec1v- $\dot{X}p==0$ ,Ec2v- $\dot{Y}p==0$ ,Ec3v- $\dot{Z}p==0$ },
  { $\dot{X}p, \dot{Y}p, \dot{Z}p$ ,
   $\theta 1 1^{[t11]}, \theta 1 2^{[t12]}, \theta 1 3^{[t13]}$ ,
   $\theta 2 1^{[t21]}, \theta 2 2^{[t22]}, \theta 2 3^{[t23]}$ ,
   $\theta 3 1^{[t31]}, \theta 3 2^{[t32]}, \theta 3 3^{[t33]}$ ,
   $\theta 4 1^{[t41]}, \theta 4 2^{[t42]}, \theta 4 3^{[t43]}$ 
}
```

```
}}
```

MATRIZ DE VARIABLES DE ESTADO

(*soluciones de de las velocidades lineales*)

sA1p= $\dot{X}p$ /.sol[[1,1]];

sA2p= $\dot{Y}p$ /.sol[[1,2]];

sA3p= $\dot{Z}p$ /.sol[[1,3]];

sA1= $\theta 1 1^{[t11]}$ /.sol[[1,4]];

sA2= $\theta 1 2^{[t12]}$ /.sol[[1,5]];

sA3= $\theta 1 3^{[t13]}$ /.sol[[1,6]];

sA12= $\theta 2 1^{[t21]}$ /.sol[[1,7]];

sA22= $\theta 2 2^{[t22]}$ /.sol[[1,8]];

sA32= $\theta 2 3^{[t23]}$ /.sol[[1,9]];

sA13= $\theta 3 1^{[t31]}$ /.sol[[1,10]];

sA23= $\theta 3 2^{[t32]}$ /.sol[[1,11]];

sA33= $\theta 3 3^{[t33]}$ /.sol[[1,12]];

sA14= $\theta 4 1^{[t41]}$ /.sol[[1,13]];

sA24= $\theta 4 2^{[t42]}$ /.sol[[1,14]];

sA34= $\theta 4 3^{[t43]}$ /.sol[[1,15]];

dxp1=D[sA1p, $\theta 1 v^{[t1v]}$];

dxp2=D[sA1p, $\theta 2 v^{[t2v]}$];

dxp3=D[sA1p,03v'[t3v]];
vp1={dxp1,dxp2,dxp3};

dpy1=D[sA2p,01v'[t1v]];
dpy2=D[sA2p,02v'[t2v]];
dpy3=D[sA2p,03v'[t3v]];
vp2={dpy1,dpy2,dpy3};

dzp1=D[sA3p,01v'[t1v]];
dzp2=D[sA3p,02v'[t2v]];
d zp3=D[sA3p,03v'[t3v]];
vp3={d zp1,d zp2,d zp3};

(*cadena 1*)

(*Nomenclatura "d(numero de cadena)(variable)(numero de derivada)" *)

d1x1=D[sA1,01v'[t1v]];
d1x2=D[sA1,02v'[t2v]];
d1x3=D[sA1,03v'[t3v]];
v11={d1x1,d1x2,d1x3};

d1y1=D[sA2,01v'[t1v]];
d1y2=D[sA2,02v'[t2v]];
d1y3=D[sA2,03v'[t3v]];
v12={d1y1,d1y2,d1y3};

d1z1=D[sA3,01v'[t1v]];
d1z2=D[sA3,02v'[t2v]];
d1z3=D[sA3,03v'[t3v]];
v13={d1z1,d1z2,d1z3};

(*CADENA 2*)

d2x1=D[sA12,01v'[t1v]];
d2x2=D[sA12,02v'[t2v]];
d2x3=D[sA12,03v'[t3v]];
v21={d2x1,d2x2,d2x3};

d2y1=D[sA22,01v'[t1v]];
d2y2=D[sA22,02v'[t2v]];
d2y3=D[sA22,03v'[t3v]];
v22={d2y1,d2y2,d2y3};

d2z1=D[sA32,01v'[t1v]];
d2z2=D[sA32,02v'[t2v]];
d2z3=D[sA32,03v'[t3v]];
v23={d2z1,d2z2,d2z3};

(*CADENA 3*)

d3x1=D[sA13,01v'[t1v]];
d3x2=D[sA13,02v'[t2v]];
d3x3=D[sA13,03v'[t3v]];
v31={d3x1,d3x2,d3x3};

d3y1=D[sA23,01v'[t1v]];
d3y2=D[sA23,02v'[t2v]];
d3y3=D[sA23,03v'[t3v]];
v32={d3y1,d3y2,d3y3};

d3z1=D[sA33,01v'[t1v]];
d3z2=D[sA33,02v'[t2v]];
d3z3=D[sA33,03v'[t3v]];
v33={d3z1,d3z2,d3z3};

(*CADENA 4*)

```

d4x1=D[sA14,01v[t1v]];
d4x2=D[sA14,02v[t2v]];
d4x3=D[sA14,03v[t3v]];
v41={d4x1,d4x2,d4x3};

d4y1=D[sA24,01v[t1v]];
d4y2=D[sA24,02v[t2v]];
d4y3=D[sA24,03v[t3v]];
v42={d4y1,d4y2,d4y3};

d4z1=D[sA34,01v[t1v]];
d4z2=D[sA34,02v[t2v]];
d4z3=D[sA34,03v[t3v]];
v43={d4z1,d4z2,d4z3};

MV={vp1,vp2,vp3,v11,v12,v13,v21,v22,v23,v31,v32,v33,v41,v42,v43};
MV//MatrixForm

```

MODELO CINEMÁTICO PARALELO RRSS Y CADENA VIRTUAL

(*Programa elaborado por Daniel Cruz y Emilio Villanueva junto con el Asesor Dr. Martínez Zamudio P. Para la resolución de la cinemática de Robot Delta RSSS en función de una cadena virtual RRR 2019

```

function [sys,x0,str,ts] = kinematic_model_path(t,x,u,flag)

% Rutina para el cálculo de la cinemática de un robot paralelo 4RRSS y
% una cadena virtual RRR, donde los estados de entrada fueron seleccionados
% como:
% 1) La velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Xp".
% 2) La velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Yp".
% 3) La velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Zp".
% Las entradas están definidas de la siguiente manera:
% u(1) = vx_max Velocidad lineal máxima en el eje "Xp"
% u(2) = vy_max Velocidad lineal máxima en el eje "Yp"
% u(3) = vz_max Velocidad lineal máxima en el eje "Zp"
% u(4) = Xp Valor para posicion sobre el eje "Xp"
% u(5) = Yp Valor para posicion sobre el eje "Yp"
% u(6) = Zp Valor para posicion sobre el eje "Zp"
% u(7) = t11 Ángulo variable articular "?1" primera cadena robot
4RRSS
% u(8) = t12 Ángulo variable articular "?2" primera cadena robot
4RRSS
% u(9) = t13 Ángulo variable articular "?3" primera cadena robot
4RRSS
% u(10) = e11 Eslabón "11" primera cadena robot 4RRSS
% u(11) = e12 Eslabón "12" primera cadena robot 4RRSS
% u(12) = e13 Eslabón "13" primera cadena robot 4RRSS
% u(13) = e14 Eslabón "13" primera cadena robot 4RRSS
% u(14) = t21 Ángulo variable articular "?21" segunda cadena robot
4RRSS
% u(15) = t22 Ángulo variable articular "?22" segunda cadena robot
4RRSS
% u(16) = t23 Ángulo variable articular "?23" segunda cadena robot
4RRSS
% u(17) = e21 Eslabón "121" segunda cadena robot 4RRSS
% u(18) = e22 Eslabón "122" segunda cadena robot 4RRSS
% u(19) = e23 Eslabón "123" segunda cadena robot 4RRSS
% u(20) = e24 Eslabón "123" segunda cadena robot 4RRSS
% u(21) = t31 Ángulo variable articular "?31" tercera cadena robot
4RRSS
% u(22) = t32 Ángulo variable articular "?32" tercera cadena robot
4RRSS

```

```

% u(23) = t33      Ángulo variable articular "?33" tercera cadena robot
4RRSS
% u(24) = e31      Eslabón "l31" tercera cadena robot 4RRSS
% u(25) = e32      Eslabón "l32" tercera cadena robot 4RRSS
% u(26) = e33      Eslabón "l33" tercera cadena robot 4RRSS
% u(27) = e34      Eslabón "l34" tercera cadena robot 4RRSS
% u(28) = t41      Ángulo variable articular "?41" cuarta cadena robot
4RRSS
% u(29) = t42      Ángulo variable articular "?42" cuarta cadena robot
4RRSS
% u(30) = t43      Ángulo variable articular "?43" cuarta cadena robot
4RRSS
% u(31) = e41      Eslabón "l41" cuarta cadena robot 4RRSS
% u(32) = e42      Eslabón "l42" cuarta cadena robot 4RRSS
% u(33) = e43      Eslabón "l43" cuarta cadena robot 4RRSS
% u(34) = e44      Eslabón "l43" cuarta cadena robot 4RRSS
% u(35) = t1v      Ángulo variable articular "?1v" cadena virtua RRR
% u(36) = t2v      Ángulo variable articular "?2v" cadena virtua RRR
% u(37) = t3v      Ángulo variable articular "?3v" cadena virtua RRR
% u(38) = e1v      Eslabón "l1v" cadena virtual RRR
% u(39) = e2v      Eslabón "l2v" cadena virtual RRR
% u(40) = e3v      Eslabón "l3v" cadena virtual RRR
% Las salidas están definidas de la siguiente manera:
% o(1) = vxP      velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "X"
% o(2) = vyP      velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Y"
% o(3) = vzP      velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Z"

```

```

switch flag,

```

```

    case 0,
        [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes;

    case 1,
        sys=mdlDerivatives(t,x,u);

    case 2,
        sys=mdlUpdate(t,x,u);

    case 3,
        sys=mdlOutputs(t,x,u);

    case 4,
        sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u);

    case 9,
        sys=mdlTerminate(t,x,u);

    otherwise
        error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);

```

```

end

```

```

function [sys,x0,str,ts,T_samp]=mdlInitializeSizes

```

```

%
sizes = simsizes;

sizes.NumContStates = 0;

```

```

sizes.NumDiscStates = 0;
sizes.NumOutputs    = 18;
sizes.NumInputs     = 40;
sizes.DirFeedthrough = 1;
sizes.NumSampleTimes = 1;

sys = simsizes(sizes);

x0 = [];

str = [];

ts = [0 0];

% end mdlInitializeSizes

%
%=====
=====
% mdlDerivatives
% Return the derivatives for the continuous states.
%=====
=====
%
function sys=mdlDerivatives(t,x,u)

sys = [];

function sys=mdlUpdate(t,x,u)

sys = [ ];

function sys=mdlOutputs(t,x,u)

% Variables de velocidad de entrada
    wv3 = u(1);
    wv2 = u(2);
    wv1 = u(3);
% Variables de retroalimentación angular
    xP = u(4);
    yP = u(5);
    zP = u(6);
%Primer cadena
    t11 = u(7);
    t12 = u(8);
    t13 = u(9);
%segunda cadena
    t21 = u(14);
    t22 = u(15);
    t23 = u(16);
%tercera cadena
    t31 = u(21);
    t32 = u(22);
    t33 = u(23);
%cuarta cadena
    t41 = u(28);
    t42 = u(29);
    t43 = u(30);
%Cadena virtual serial
    t1v= u(35);
    t2v= u(36);

```

```

t3v= u(37);
% Dimensiones de la plataforma

global e11 e12 e13 e14 e21 e22 e23 e24 e31 e32 e33 e34 e41 e42 e43
e44 e1v e2v e3v ;

%Primer cadena
e11 = u(10);
e12 = u(11);
e13 = u(12);
e14 = u(13);
%segunda cadena
e21 = u(17);
e22 = u(18);
e23 = u(19);
e24 = u(20);
%tercera cadena
e31 = u(24);
e32 = u(25);
e33 = u(26);
e34 = u(27);
%cuarta cadena
e41 = u(31);
e42 = u(32);
e43 = u(33);
e44 = u(34);
%Cadena virtual
e1v= u(38);
e2v= u(39);
e3v= u(40);

% Cálculo de las velocidades generalizada
U = [wv3; wv2; wv1];

Sq=[

% virtual
-e2v*cos(t2v)*sin(t1v)-
e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*sin(t1v)+e3v*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v), -
e2v*cos(t1v)*sin(t2v)-e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*sin(t3v), -e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*sin(t3v);

e2v*cos(t1v)*cos(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v), -e2v*sin(t1v)
*sin(t2v)-e3v*sin(t1v)*sin(t2v+t3v), -e3v*sin(t1v)*sin(t2v+t3v);

0, -e2v*cos(t2v)-e3v*cos(t2v+t3v), -e3v*cos(t2v+t3v);

%% PRIMERA CADENA PARALELO

(-e2v*cos(t1v)*(cos(t11+t12)^2)*cos(t2v)*cot(t13)-
e3v*cos(t1v)*(cos(t11+t12)^2)*cos(t2v+t3v)*cot(t13)+e2v*cos(t11+t12)*cos(
t2v)*sin(t1v)+e3v*cos(t11+t12)*cos(t2v)*cos(t3v)*sin(t1v)-
e2v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t13)*sin(t11+t12)^2-

```



```

- (( (e2v*cos(t1v)*cos(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v))*csc(t13))/e13, -
((csc(t13)*(-e2v*sin(t1v)*sin(t2v)-e3v*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)))/e13,
(e3v*csc(t13)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v))/e13;

```

```

%% SEGUNDA CADENA PARALELO

```

```

(-e2v*cos(t1v)*cos(t21+t22)*cos(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t21+t22)*cos(t2v+t3v)-
e2v*cos(t21+t22)^2*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t1v)-
e3v*cos(t21+t22)^2*cos(t2v)*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t1v)-
e2v*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t1v)*sin(t21+t22)^2-
e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t1v)*sin(t21+t22)^2+e3v*cos(t21+t22)^2
*cot(t23)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)+e3v*cot(t23)*sin(t1v)*sin(t21+t22)^2
*sin(t2v)*sin(t3v))/(e22*(cos(t21+t22)*sin(t21)-cos(t21)*sin(t21+t22))),
(e2v*cos(t2v)*sin(t21+t22)+e3v*cos(t2v+t3v)*sin(t21+t22)-
e2v*cos(t1v)*cos(t21+t22)^2*cot(t23)*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t21+t22)^2*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t2v)+e2v*cos(t21+t22)*s
in(t1v)*sin(t2v)-e2v*cos(t1v)*cot(t23)*sin(t21+t22)^2*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t21+t22)^2*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t21+t22)^2*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t3v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t21+t22)^2*sin(t3v)+e3v*cos(t21+t22)*s
in(t1v)*sin(t2v+t3v))/(e22*(cos(t21+t22)*sin(t21)-
cos(t21)*sin(t21+t22))), (e3v*cos(t2v+t3v)*sin(t21+t22)-
e3v*cos(t1v)*cos(t21+t22)^2*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t21+t22)^2*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t21+t22)^2*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t3v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t21+t22)^2*sin(t3v)+e3v*cos(t21+t22)*s
in(t1v)*sin(t2v+t3v))/(e22*(cos(t21+t22)*sin(t21)-
cos(t21)*sin(t21+t22)));

```

```

-
((sin(t21+t22)*(e23*e2v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t21+t22)*csc(t21+t22)+e23*e
3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v)*cot(t21+t22)*csc(t21+t22)+e22*e2v*cos(t1v)*cos(t
21)*cos(t2v)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(t21)*cos(t2v+t3
v)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)+e23*e2v*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t1v)+e23*e3v*cos
(t2v)*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t1v)+e23*e2v*cos(t2v)*cot(t21+t22)^2*cot(t23)
*sin(t1v)+e23*e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*cot(t21+t22)^2*cot(t23)*sin(t1v)+e22*
e2v*cos(t21)*cos(t2v)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t1v
)+e22*e3v*cos(t21)*cos(t2v)*cos(t3v)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t21+t22)*c
sc(t23)*sin(t1v)+e22*e2v*cos(t2v)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t1v)
*sin(t21)+e22*e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t1
v)*sin(t21)-e23*e3v*cot(t23)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)-
e23*e3v*cot(t21+t22)^2*cot(t23)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)-
e22*e3v*cos(t21)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t1v)*sin
(t2v)*sin(t3v)-
e22*e3v*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t1v)*sin(t21)*sin(t2v)*sin(t3v
)))/(e22*e23*(cos(t21)-cot(t21+t22)*sin(t21))), -(sin(t21+t22)*(-
e23*e2v*cos(t2v)*csc(t21+t22)-e23*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t21+t22)-
e22*e2v*cos(t2v)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)*sin(t21)-
e22*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)*sin(t21)+e23*e2v*cos(t1v)*co
t(t23)*sin(t2v)+e23*e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t23)*sin(t2v)+e23*e2v*cos(t
1v)*cot(t21+t22)^2*cot(t23)*sin(t2v)+e23*e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t21+t2
2)^2*cot(t23)*sin(t2v)+e22*e2v*cos(t1v)*cos(t21)*cot(t21+t22)*cot(t23)*cs
c(t21+t22)*csc(t23)*sin(t2v)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(t21)*cos(t3v)*cot(t21+t
22)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t2v)-
e23*e2v*cot(t21+t22)*csc(t21+t22)*sin(t1v)*sin(t2v)-
e22*e2v*cos(t21)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)*sin(t1v)*sin(t2v)+e22*e2v*cos(t1
v)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t21)*sin(t2v)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(
t3v)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t21)*sin(t2v)+e23*e3v*cos(t1v)*co
s(t2v)*cot(t23)*sin(t3v)+e23*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t21+t22)^2*cot(t23
)*sin(t3v)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(t21)*cos(t2v)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t
21+t22)*csc(t23)*sin(t3v)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t23)*csc(t21+t22)
*csc(t23)*sin(t21)*sin(t3v)-
e23*e3v*cot(t21+t22)*csc(t21+t22)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)-

```



```

e22*e3v*cos(t21)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v))/ (e22*e23
*(cos(t21)-cot(t21+t22)*sin(t21))), -(sin(t21+t22)*(-
e23*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t21+t22)-
e22*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)*sin(t21)+e23*e3v*cos(t1v)*co
s(t3v)*cot(t23)*sin(t2v)+e23*e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t21+t22)^2*cot(t23
)*sin(t2v)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(t21)*cos(t3v)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t
21+t22)*csc(t23)*sin(t2v)+e22*e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t23)*csc(t21+t22)
*csc(t23)*sin(t21)*sin(t2v)+e23*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t23)*sin(t3v)+e
23*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t21+t22)^2*cot(t23)*sin(t3v)+e22*e3v*cos(t1v
)*cos(t21)*cos(t2v)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t3v)+
e22*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t21+t22)*cot(t23)*csc(t21+t22)*csc(t23)*sin(t3v)
)-e23*e3v*cot(t21+t22)*csc(t21+t22)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)-
e22*e3v*cos(t21)*csc(t21+t22)^2*csc(t23)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v))/ (e22*e23
*(cos(t21)-cot(t21+t22)*sin(t21)));

```

```

-((csc(t23)*(e2v*cos(t2v)*sin(t1v)+e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*sin(t1v)-
e3v*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)))/e23), -
((csc(t23)*(e2v*cos(t1v)*sin(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*sin(t2v)+e3v*cos(
t1v)*cos(t2v)*sin(t3v)))/e23), -
((csc(t23)*(e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*sin(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*sin(t3v)
))/e23);

```

```

%% TERCERA CADENA PARALELO

```

```

(e2v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t31+t32)^2*cot(t33)+e3v*cos(t1v)*cos(t31+t32)^
2*cos(t2v+t3v)*cot(t33)-e2v*cos(t2v)*cos(t31+t32)*sin(t1v)-
e3v*cos(t2v)*cos(t31+t32)*cos(t3v)*sin(t1v)+e2v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t33
)*sin(t31+t32)^2+e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v)*cot(t33)*sin(t31+t32)^2+e3v*co
s(t31+t32)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v))/(e32*(cos(t31+t32)*sin(t31)-
cos(t31)*sin(t31+t32))), (-e2v*cos(t1v)*cos(t31+t32)*sin(t2v)-
e3v*cos(t1v)*cos(t31+t32)*cos(t3v)*sin(t2v)-
e2v*cos(t31+t32)^2*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v)+e2v*cos(t2v)*sin(t31+t32)+e
3v*cos(t2v+t3v)*sin(t31+t32)-
e2v*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t31+t32)^2-
e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t31+t32)*sin(t3v)-
e3v*cos(t31+t32)^2*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)-
e3v*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t31+t32)^2*sin(t2v+t3v))/(e32*(cos(t31+t32)*sin
(t31)-cos(t31)*sin(t31+t32))), (-
e3v*cos(t1v)*cos(t31+t32)*cos(t3v)*sin(t2v)+e3v*cos(t2v+t3v)*sin(t31+t32)
-e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t31+t32)*sin(t3v)-
e3v*cos(t31+t32)^2*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)-
e3v*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t31+t32)^2*sin(t2v+t3v))/(e32*(cos(t31+t32)*sin
(t31)-cos(t31)*sin(t31+t32)));

```

```

-((sin(t31+t32)*(-e2v*e33*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t33)-
e33*e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v)*cot(t33)-
e2v*e33*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t31+t32)^2*cot(t33)-
e33*e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v)*cot(t31+t32)^2*cot(t33)-
e2v*e32*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t31)*cot(t31+t32)*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc
(t33)-
e32*e3v*cos(t1v)*cos(t31)*cos(t2v+t3v)*cot(t31+t32)*cot(t33)*csc(t31+t32)
*csc(t33)+e2v*e33*cos(t2v)*cot(t31+t32)*csc(t31+t32)*sin(t1v)+e33*e3v*cos
(t2v)*cos(t3v)*cot(t31+t32)*csc(t31+t32)*sin(t1v)+e32*
e32*cos(t2v)*cos(t31)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t1v)+e32*e3v*cos(t2v)*c
os(t31)*cos(t3v)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t1v)-
e2v*e32*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t31)-
e32*e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v)*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t31)-
e33*e3v*cot(t31+t32)*csc(t31+t32)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)-

```

```

e32*e3v*cos(t31)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v))/ (e3
2*e33*(cos(t31)-cot(t31+t32)*sin(t31))), -(sin(t31+t32)*(-
e2v*e33*cos(t2v)*csc(t31+t32)-
e33*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t31+t32)+e2v*e33*cos(t1v)*cot(t31+t32)*csc(t31+t
32)*sin(t2v)+e33*e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t31+t32)*csc(t31+t32)*sin(t2v)
+e2v*e32*cos(t1v)*cos(t31)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t2v)+e32*e3v*cos(t
1v)*cos(t31)*cos(t3v)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t2v)+e2v*e33*cot(t33)*s
in(t1v)*sin(t2v)+e2v*e33*cot(t31+t32)^2*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v)+e2v*e3
2*cos(t31)*cot(t31+t32)*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t1v)*sin(t2v)-
e2v*e32*cos(t2v)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t31)-
e32*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t31)+e2v*e32*cot(t33)*cs
c(t31+t32)*csc(t33)*
sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t31)+e33*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t31+t32)*csc(t31
+t32)*sin(t3v)+e32*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t31)*csc(t31+t32)^2*csc(t33)
*sin(t3v)+e33*e3v*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)+e33*e3v*cot(t31+t32)^2*c
ot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)+e32
*e3v*cos(t31)*cot(t31+t32)*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t1v)*sin(t2
v+t3v)+e32*e3v*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t1v)*sin(t31)*sin(t2v+t
3v)))/(e32*e33*(cos(t31)-cot(t31+t32)*sin(t31))), -(sin(t31+t32)*(-
e33*e3v*cos(t2v+t3v)*csc(t31+t32)+e33*e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t31+t32)*
csc(t31+t32)*sin(t2v)+e32*e3v*cos(t1v)*cos(t31)*cos(t3v)*csc(t31+t32)^2*c
sc(t33)*sin(t2v)-e32*e3v*cos(t2v+t3v)
*csc(t31+t32)^2*csc(t33)*sin(t31)+e33*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cot(t31+t32)*
csc(t31+t32)*sin(t3v)+e32*e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t31)*csc(t31+t32)^2*c
sc(t33)*sin(t3v)+e33*e3v*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)+e33*
e3v*cot(t31+t32)^2*cot(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)+e32*
e3v*cos(t31)*cot(t31+t32)*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t1v)
*sin(t2v+t3v)+e32*e3v*cot(t33)*csc(t31+t32)*csc(t33)*sin(t1v)
*sin(t2v+t3v))/ (e32*e33*(cos(t31)-cot(t31+t32)*sin(t31))));

((e2v*cos(t1v)*cos(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v))*csc(t33))/e33,
(csc(t33)*(-e2v*sin(t1v)*sin(t2v)-e3v*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)))/e33, -
((e3v*csc(t33)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v))/e33);

```

%%CUARTA CADENA PARALELO

```

(e2v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t41+t42)+e3v*cos(t1v)*cos(t2v+t3v)*cos(t41+t42
)+e2v*cos(t2v)*cos(t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t1v)+e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*cos
(t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t1v)-
e3v*cos(t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)+e2v*cos(t2v)*cot(t
43)*sin(t1v)*sin(t41+t42)^2+e3v*cos(t2v)*cos(t3v)*cot(t43)*sin(t1v)*sin(t
41+t42)^2-
e3v*cot(t43)*sin(t1v)*sin(t2v)*sin(t3v)*sin(t41+t42)^2)/(e42*(cos(t41+t42
)*sin(t41)-cos(t41)*sin(t41+t42))),
(e2v*cos(t1v)*cos(t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cos(
t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t2v)-
e2v*cos(t41+t42)*sin(t1v)*sin(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*cos(t41+t42)^2*c
ot(t43)*sin(t3v)-
e3v*cos(t41+t42)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)+e2v*cos(t2v)*sin(t41+t42)+e3v*cos(
t2v+t3v)*sin(t41+t42)+e2v*cos(t1v)*cot(t43)*sin(t2v)*sin(t41+t42)^2+e3v*c
os(t1v)*cos(t3v)*cot(t43)*sin(t2v)*sin(t41+t42)^2+e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*c
ot(t43)*sin(t3v)*sin(t41+t42)^2)/(e42*(cos(t41+t42)*sin(t41)-
cos(t41)*sin(t41+t42))),
(e3v*cos(t1v)*cos(t3v)*cos(t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t2v)+e3v*cos(t1v)*cos(
t2v)*cos(t41+t42)^2*cot(t43)*sin(t3v)-
e3v*cos(t41+t42)*sin(t1v)*sin(t2v+t3v)+e3v*cos(t2v+t3v)*sin(t41+t42)+e3v*
cos(t1v)*cos(t3v)*cot(t43)*sin(t2v)*sin(t41+t42)^2+e3v*cos(t1v)*cos(t2v)*
cot(t43)*sin(t3v)*sin(t41+t42)^2)/(e42*(cos(t41+t42)*sin(t41)-
cos(t41)*sin(t41+t42)));

```

$$\begin{aligned}
& - (((-e2v*e43*\cos(t1v)*\cos(t2v)*\cot(t41+t42)*\csc(t41+t42) - \\
& e3v*e43*\cos(t1v)*\cos(t2v+t3v)*\cot(t41+t42)*\csc(t41+t42) - \\
& e2v*e42*\cos(t1v)*\cos(t2v)*\cos(t41)*\csc(t41+t42)^2*\csc(t43) - \\
& e3v*e42*\cos(t1v)*\cos(t2v+t3v)*\cos(t41)*\csc(t41+t42)^2*\csc(t43) - \\
& e2v*e43*\cos(t2v)*\cot(t43)*\sin(t1v) - \\
& e3v*e43*\cos(t2v)*\cos(t3v)*\cot(t43)*\sin(t1v) - \\
& e2v*e43*\cos(t2v)*\cot(t41+t42)^2*\cot(t43)*\sin(t1v) - \\
& e3v*e43*\cos(t2v)*\cos(t3v)*\cot(t41+t42)^2*\cot(t43)*\sin(t1v) - \\
& e2v*e42*\cos(t2v)*\cos(t41)*\cot(t41+t42)* \\
& \cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin(t1v) - \\
& e3v*e42*\cos(t2v)*\cos(t3v)*\cos(t41)*\cot(t41+t42)*\cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc \\
& (t43)*\sin(t1v)+e3v \\
& *e43*\cot(t43)*\sin(t1v)*\sin(t2v)*\sin(t3v)+e3v*e43*\cot(t41+t42)^2*\cot(t43)* \\
& \sin(t1v)*\sin(t2v)* \\
& \sin(t3v)+e3v*e42*\cos(t41)*\cot(t41+t42)*\cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin \\
& (t1v)*\sin(t2v)*\sin(t3v) - \\
& e2v*e42*\cos(t2v)*\cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin(t1v)*\sin(t41) - \\
& e3v*e42*\cos(t2v)*\cos(t3v)*\cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin(t1v)*\sin(t41 \\
&)+e3v*e42*\cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin(t1v)*\sin(t2v)*\sin(t3v)*\sin(t41 \\
&))* \sin(t41+t42))/(e42*e43*(\cos(t41)-\cot(t41+t42)*\sin(t41))), - (((- \\
& e2v*e43*\cos(t2v)*\csc(t41+t42)-e3v*e43*\cos(t2v+t3v)*\csc(t41+t42) - \\
& e2v*e43*\cos(t1v)*\cot(t43)*\sin(t2v) - \\
& e3v*e43*\cos(t1v)*\cos(t3v)*\cot(t43)*\sin(t2v) - \\
& e2v*e43*\cos(t1v)*\cot(t41+t42)^2*\cot(t43)*\sin(t2v) - \\
& e3v*e43*\cos(t1v)*\cos(t3v)*\cot(t41+t42)^2*\cot(t43)*\sin(t2v) - \\
& e2v*e42*\cos(t1v)*\cos(t41)*\cot(t41+t42)*\cot(t43) \\
& * \csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin(t2v) - \\
& e3v*e42*\cos(t1v)*\cos(t3v)*\cos(t41)*\cot(t41+t42)*\cot(t43)* \csc(t41+t42) \\
& * \csc(t43)*\sin(t2v)+e2v* e43 *\cot(t41+t42) \\
& * \csc(t41+t42)*\sin(t1v)*\sin(t2v)+e2v* e42* \cos(t41)* \csc(t41+t42)^2 \\
& * \csc(t43)*\sin(t1v)* \sin(t2v)-e3v* e43 *\cos(t1v)*\cos(t2v)*\cot(t43)* \\
& \sin(t3v)-e3v *e43* \cos(t1v)*\cos(t2v)*\cot(t41+t42)^2 *\cot(t43)* \sin(t3v)- \\
& e3v* e42 *\cos(t1v)* \cos(t2v)* \cos(t41)* \cot(t41+t42)* \cot(t43)* \\
& \csc(t41+t42)* \csc(t43)* \sin(t3v)+e3v* e43* \cot(t41+t42)* \csc(t41+t42) \\
& *\sin(t1v)* \sin(t2v+t3v)+e3v* e42 *\cos(t41)* \csc(t41+t42)^2 *\csc(t43) \\
& *\sin(t1v)* \sin(t2v+t3v)-e2v* e42* \cos(t2v) *\csc(t41+t42)^2 *\csc(t43)* \\
& \sin(t41)-e3v* e42 *\cos(t2v+t3v)* \csc(t41+t42)^2 *\csc(t43)*\sin(t41)-e2v* \\
& e42* \cos(t1v)* \cot(t43)* \csc(t41+t42)* \csc(t43)* \sin(t2v)* \sin(t41)-e3v* \\
& e42* \cos(t1v)* \cos(t3v)* \cot(t43)* \csc(t41+t42)*\csc(t43)* \sin(t2v)* \\
& \sin(t41)-e3v* e42 *\cos(t1v)* \cos(t2v)* \cot(t43)* \csc(t41+t42)* \csc(t43)* \\
& \sin(t3v)*\sin(t41))* \sin(t41+t42))/(e42* e43* (\cos(t41)-\cot(t41+t42)* \\
& \sin(t41))), - (((-e3v *e43 *\cos(t2v+t3v)* \csc(t41+t42)-e3v* e43* \cos(t1v) \\
& *\cos(t3v)* \cot(t43)* \sin(t2v)-e3v* e43* \cos(t1v)* \cos(t3v)* \\
& \cot(t41+t42)^2 *\cot(t43)* \sin(t2v)-e3v \\
& *e42*\cos(t1v)*\cos(t3v)*\cos(t41)*\cot(t41+t42)* \\
& \cot(t43)*\csc(t41+t42)*\csc(t43)*\sin(t2v)-e3v*e43*\cos(t1v)*\cos(t2v)* \\
& \cot(t43)* \sin(t3v)-e3v* e43* \cos(t1v)* \cos(t2v)* \cot(t41+t42)^2 \\
& * \cot(t43)* \sin(t3v)-e3v* e42* \cos(t1v)* \cos(t2v)* \cos(t41)*\cot(t41+t42)* \\
& \cot(t43)* \csc(t41+t42)* \csc(t43)* \sin(t3v)+e3v *e43* \cot(t41+t42)* \\
& \csc(t41+t42)*\sin(t1v)* \sin(t2v+t3v)+e3v* e42 *\cos(t41)* \csc(t41+t42)^2 \\
& * \csc(t43)* \sin(t1v)* \sin(t2v+t3v)-e3v* e42* \cos(t2v+t3v) *\csc(t41+t42)^2 \\
& * \csc(t43)* \sin(t41)-e3v* e42* \cos(t1v)* \cos(t3v) *\cot(t43)* \csc(t41+t42) \\
& * \csc(t43)* \sin(t2v)* \sin(t41)-e3v* e42* \cos(t1v) *\cos(t2v)* \cot(t43) \\
& * \csc(t41+t42)* \csc(t43)* \sin(t3v)* \sin(t41))* \sin(t41+t42))/(e42* e43* \\
& (\cos(t41)-\cot(t41+t42)*\sin(t41)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\csc(t43)* (e2v*\cos(t2v)*\sin(t1v)+e3v*\cos(t2v)*\cos(t3v)*\sin(t1v) - \\
& e3v*\sin(t1v)*\sin(t2v)*\sin(t3v)))/e43, \\
& (\csc(t43)* (e2v*\cos(t1v)*\sin(t2v)+e3v*\cos(t1v)*\cos(t3v)*\sin(t2v)+e3v*\cos(t \\
& 1v)*\cos(t2v)*\sin(t3v)))/e43, \\
& (\csc(t43)* (e3v*\cos(t1v)*\cos(t3v)*\sin(t2v)+e3v*\cos(t1v)*\cos(t2v)*\sin(t3v)) \\
&)/e43;
\end{aligned}$$

```

        1,0,0;
        0,1,0;
        0,0,1;

];

X= Sq*U;

sys = [X]; %sistema

function sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u)

sampleTime = 1; % Example, set the next hit to be one second later.
sys = t + sampleTime;

% end mdlGetTimeOfNextVarHit

%
%=====
%====
% mdlTerminate
% Perform any end of simulation tasks.
%=====
%====
%
function sys=mdlTerminate(t,x,u)

sys = [];

% end mdlTerminate

```

Diagramas de Simulink

Diagrama general unidos los dos sistemas

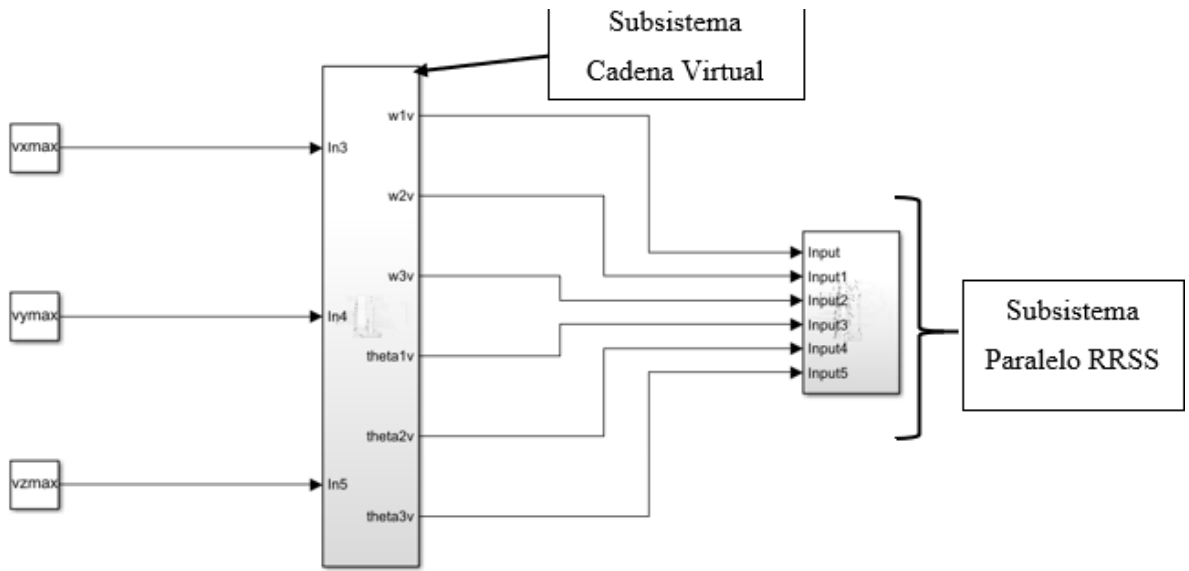


Diagrama de Subsistema cadena virtual:

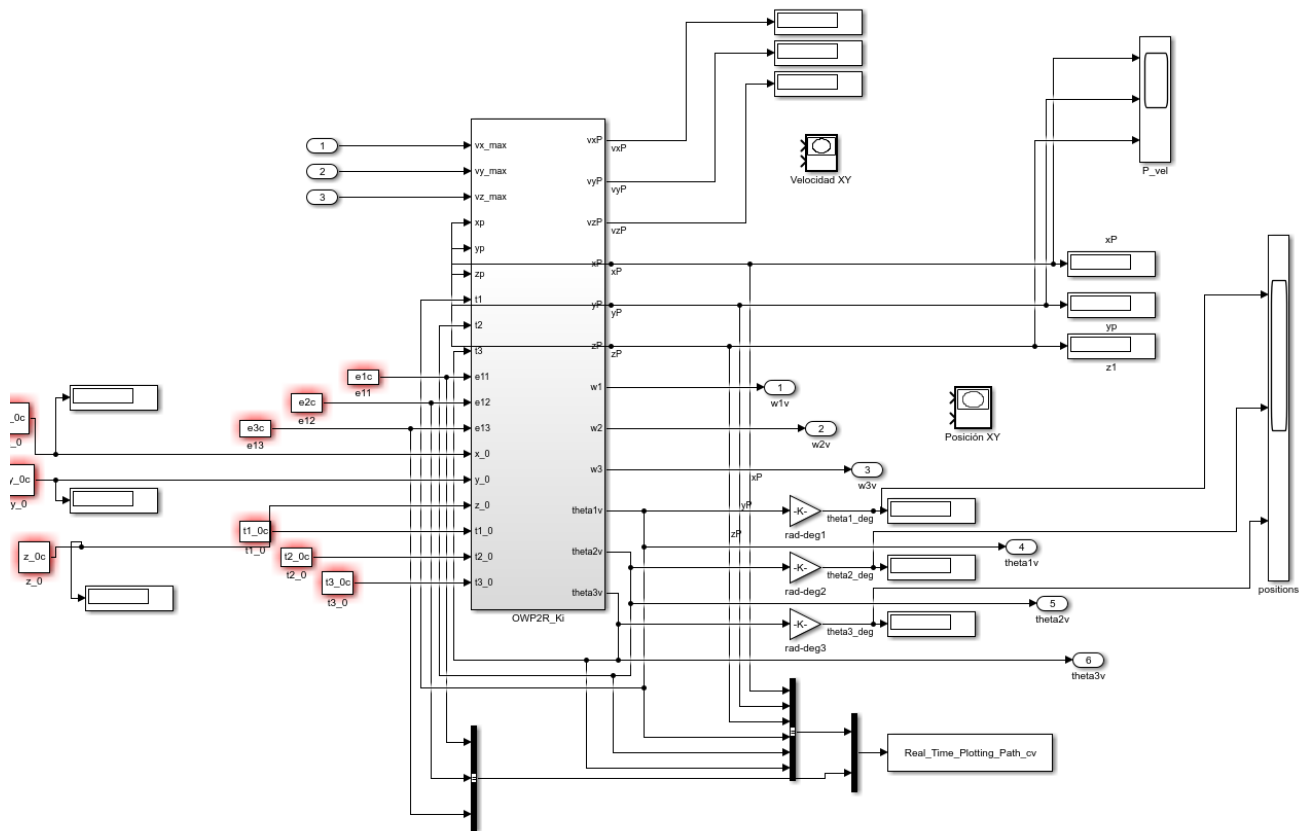


Diagrama de Subsistema Paralelo:

