



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La meta-estabilidad del vacío de Higgs y fuerzas
adicionales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Yamil Alberto Cahuana Medrano

TUTOR

Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez



Ciudad de México 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Cahuana

Medrano

Yamil Alberto

5521131146

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

313217025

2. Datos del tutor

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dr

Wolfgang

Peter

Bietenholz

4. Datos de sinodal 2

Dr

Mariano

Chernicoff

Minsberg

5. Datos del sinodal 3

Dr

Pablo

Roig

Garcés

6. Datos del sinodal 4

Dr

Ángel

Sánchez

Cecilio

7. Datos del trabajo escrito

La meta-estabilidad del vacío de Higgs y fuerzas adicionales

80 p

2021

Dedicada a la familia Cahuana Medrano; Mirtha, Alberto e Itzel. A todos mis abuelos, en especial a mi abuelita Yola.

Quiero agradecer al Dr. Saúl Ramos, por guiarme en las últimas etapas de la licenciatura e introducirme al mundo científico y ayudarme a formarme en él. Por el compromiso con sus estudiantes y la solidez del grupo que lidera, el cual también tuvo un impacto en mi percepción de la física de altas energías.

A la comunidad de la Facultad de Ciencias, donde la libertad dada a los estudiantes para la realización de proyectos personales es un regalo invaluable. En especial quiero agradecer por la invitación al proyecto de Talleres Estudiantiles de Física, donde las discusiones sobre Teorías de Norma fueron relevantes en la construcción de este trabajo.

A el Dr. Alejandro Reyes Coronado, por guiarme en las etapas tempranas de la licenciatura y ayudarme a definir mis intereses en la física en general.

Respecto a mi familia y amigos...

Me gustaría agradecer a mi mamá, Mirtha, por sus esfuerzos para hacerme el hombre que soy y por enseñarme a tener pasión de hacer lo que me gusta.

A mi papá, Alberto, que siempre me inculcó la curiosidad por saber más y los valores de paciencia y dedicación en la vida.

A mi hermana, Itzel, por todo su cariño y por tener la fortaleza que muchas veces me impulsó a seguir adelante.

A toda las personas que me acompañaron en mi camino en la facultad: Fedro, ambos José, Rubén, Rafa, Victor, Emiliano y todos los que de alguna forma convivieron y formaron una amistad conmigo, gracias.

Resumen

El modelo estándar no es capaz de explicar la estabilidad observada de nuestro Universo, sin invocar un enorme ajuste fino de los parámetros. Para entender los detalles de este problema es preciso entender la dependencia energética de los acoplamientos y masas de todas las partículas del modelo estándar en términos de las interacciones de sus campos cuánticos. En esta tesis, estudiamos de manera general esta dependencia energética mediante el cálculo a un lazo de las ecuaciones del llamado grupo de renormalización para constantes adimensionales. Este cálculo perturbativo revela que las interacciones entre escalares (el acoplamiento ϕ^4) requiere un factor de permutación no discutido en la literatura, para establecer la compatibilidad de este resultado con el análogo obtenido mediante el método de campos de fondo (*background field method*). Aplicando estos resultados al modelo estándar, comprobamos la meta-estabilidad del vacío de Higgs. Adicionalmente, mostramos en un modelo de juguete cómo la existencia de una simetría de norma Abeliana U(1)' extra permite resolver este problema. Este tipo de modelos es común en compactificaciones de la teoría de cuerdas.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría de grupos en la física de partículas	5
2.1. El concepto de grupo y sus representaciones	5
2.2. Álgebra	7
2.2.1. Subálgebras $su(2)$	10
2.2.2. Representación fundamental	10
2.2.3. Operador de Casimir	11
3. Teoría de Yang-Mills y campos de materia	13
3.1. Teorías de Norma Clásicas	13
3.2. Cuantización en teorías de Yang-Mills	15
3.2.1. Integral de trayectoria	15
3.2.2. Fantasmas de Faddeev-Popov	18
4. Interacciones en el Modelo Estándar	21
4.1. Acoplamientos Yukawa y ϕ^4	21
4.2. Descripción de las partículas elementales	22
4.2.1. Lagrangiano del SM	23
4.3. Mecanismo de Higgs	24
4.3.1. Bosones de norma masivos, W^\pm y Z	25
4.3.2. Matrices de masa en partículas fermiónicas	26
4.3.3. Teorema de Goldstone	27
5. Cálculo de divergencias, acoplamientos y RGEs	29
5.1. Renormalización	29
5.1.1. Divergencia superficial	29
5.1.2. Renormalizabilidad	31
5.1.3. Contratérminos y constante de renormalización del campo	31
5.2. Regularización	33

5.2.1. Regularización Dimensional	33
5.3. Ecuaciones del Grupo de Renormalización	35
5.4. Acoplamientos	36
5.4.1. Flujos de renormalización y puntos fijos	36
6. Renormalización y Regularización en teorías de Yang-Mills	39
6.1. Descripción general en teorías tipo SM	39
6.2. Factores de Simetría	41
6.3. Correcciones 1-lazo	41
6.3.1. Acoplamiento g	43
6.3.2. Acoplamiento Y^a	46
6.3.3. Acoplamiento λ_{abcd}	51
6.4. Extensión a grupos semi-simples	57
7. Meta-estabilidad del vacío de Higgs	59
7.1. Modelo Estándar	59
7.2. Interacción $U(1)'$	62
8. Conclusiones y trabajo futuro	67
A. Parametrización de Feynman	71
B. Convenciones en diagramas y factores de permutación	73
Bibliografía	77

Capítulo 1

Introducción

Uno de los grandes avances en la física de altas energías ha sido la construcción de las teorías cuánticas de campos (TCC), una imponente síntesis de conceptos físicos y matemáticos, dotada de un poder de predictibilidad sin precedente. Dentro de este contexto de las TCC, se engloba el estudio la partícula elemental y se adopta el campo como agente principal y fundamental. Bajo esta óptica, al incluir las interacciones observadas en la naturaleza, una opción, aunque no la única, es asumir una postura perturbativa para realizar cálculos. Por lo tanto, la TCC exhibe que las partículas son descritas en este contexto como perturbaciones de un campo cuántico. Lo anterior concluye en el planteamiento de los llamados *diagramas de Feynman*, los cuales expresan las diferentes posibles trayectorias de partículas en un proceso de colisión o propagación.

Con lo anterior, al desarrollar una TCC e ir a órdenes perturbativos más altos que a nivel árbol (diagramas que no contienen circuitos cerrados de partículas llamados lazos o loops), frecuentemente se encuentran divergencias. Sin embargo, estos infinitos pueden ser eliminados de una TCC mediante los procesos de *regularización* y *renormalización* de la teoría. Un resultado muy importante que surge de la aplicación de estas herramientas es que las *constantes* acoplamiento del modelo no son constantes en realidad, sino que dependen de la escala de energía a la que las interacciones ocurren. A pesar de su dependencia funcional en la energía seguiremos llamándoles “constantes de acoplamiento” convencionalmente.

El Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés) de partículas elementales se construye como una TCC, basada en un grupo de (simetrías de) norma, que incluye tres de las cuatro fuerzas fundamentales. El grupo de norma corresponde a un grupo de simetrías internas de la teoría, adicional y diferente en naturaleza al grupo de simetrías global (espacio-temporal) de Poincaré, asociado al espacio plano de Minkowski donde la TCC se desarrolla. Una pieza clave en la consistencia del SM es el bosón de Higgs, propuesto en los trabajos [1, 2, 3] en los años 60 dentro del mecanismo de Higgs. Dicho mecanismo es capaz de explicar las masas de las partículas elementales y las cualidades de la fuerza electro-débil y cuya confirmación experimental llegó en 2012 con [4].

Por ser una TCC, el SM puede ser caracterizado mediante los acoplamiento entre los distintos campos incluidos, y mediante la dependencia energética de las correspondientes constantes de aco-

plamiento. Esta dependencia energética, originada por los mencionados procesos de regularización y renormalización, se codifica en un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, conocido como *Ecuaciones del Grupo de Renormalización* (RGEs, por sus siglas en inglés). Uno de los objetivos de este trabajo es precisamente obtener una comprensión profunda de las RGEs del SM. El segundo objetivo, de mayor relevancia desde el punto de vista fenomenológico, es conocer y controlar lo que se denomina como el problema de *meta-estabilidad del vacío electro-débil* en el SM, protagonizado por la constante de autoacoplamiento del campo de Higgs.

Tras comprender las RGEs en general, en esta tesis explotamos las RGEs de las constantes de acoplamiento de extensiones del SM con fuerzas adicionales abelianas, conocidas como $U(1)'$. Mostraremos que es posible estabilizar el vacío de Higgs mediante el control de las cargas de las partículas observadas bajo la nueva interacción.

El comportamiento de las TCC respecto a la escala de energía, es una propiedad ampliamente explotada en diversas áreas de la física donde incluso se propone a la escala de energía como una coordenada espacial en teorías de dimensiones mayores, con el objetivo de proponer un análisis geométrico de las RGEs. Por otro lado, en el ámbito experimental, conocer las constantes de acoplamiento con mayor precisión, por medio de otros parámetros del SM, tales como el ángulo de Weinberg, sirve como motivación teórica para analizar la evolución a distintos órdenes y bajo distintas metodologías para poder compararlo y encontrar ventanas en las que puede existir física más allá del SM.

Existen trabajos seminales en la derivación de las RGEs a dos lazos para las constantes de acoplamiento adimensionales [5, 6, 7], basados en [8] para el caso fermiónico y [9, 10, 11] para el caso bosónico, donde se utiliza el concepto de campo de fondo, que da origen al *método de campo de fondo* (BFM, por Background Field Method), para realizar los cálculos y posteriores correcciones, presentadas en [12]. Basándonos en esos trabajos, esta tesis mostrará los cálculos explícitos utilizando el desarrollo convencional de TCC a un lazo. El planteamiento del problema es, en primera instancia, obtener las RGEs para una teoría tipo SM, la cual posee una simetría de norma descrita por un grupo (de Lie) simple. La generalización a un grupo semi-simple es relativamente directa. Además, supondremos que la teoría tipo SM exhibe un contenido arbitrario de materia tanto escalar como fermiónica, e incluye acoplamientos tipo Yukawa (escalar-fermión-fermión) y auto-interacciones escalares cuárticas (frecuentemente llamadas ϕ^4). Mediante el análisis presentado, se conjetura un factor que llamaremos *factor de permutación* que está íntimamente relacionado con la estructura externa del diagrama y su relación con los llamados contratérminos que aparecen en el proceso de regularización y renormalización. En segundo lugar, usando estos resultados y la generalización presentada en [13] para múltiples $U(1)'$, nos proponemos a estudiar un modelo mínimo, presentado en [14], con $U(1)'$ adicional donde se busca una estabilización del vacío de Higgs a energías arbitrarias.

El presente trabajo está organizado como sigue. En el capítulo 2 se revisará la teoría de representaciones de grupos y álgebras, orientado a definir el concepto de representación fundamental y representación adjunta, así como a introducir algunos factores importantes en el desarrollo del trabajo, tales como el invariante de Casimir cuadrático.

El capítulo 3 presenta una revisión de la aplicación directa de la teoría de representaciones, asignando esta estructura por medio del concepto de fibrados principales y asociados, lo cual nos permite construir las teorías de Yang-Mills desde un punto de vista clásico. Después se explica de manera breve la cuantización de los campos presentes por integral de trayectoria, resultando en la inclusión de los *fantasmas de Faddeev-Popov* en las reglas de Feynman.

Enseguida, el capítulo 4 se dedica a una construcción de las generalidades para describir el SM, dando el número de partículas, las simetrías globales y el mecanismo de Higgs para la adquisición de masas en las partículas elementales observadas, tales como W^\pm , Z y las tres familias de leptones y quarks.

Para terminar la revisión de conceptos en este trabajo, en el capítulo 5 se desarrollan las herramientas para renormalizar y regularizar una TCC, tomando el ejemplo del campo escalar e introduciendo el concepto de contratérminos y esquemas de renormalización y regularización. Posteriormente se da un breve repaso de los métodos para obtener las RGEs en una TCC y concluimos remarcando algunas definiciones como flujos de renormalización y puntos fijos del grupo de renormalización.

Considerando las herramientas previamente desarrolladas, en el capítulo 6 se calculan explícitamente las RGEs para una teoría tipo SM, antes descrita. Aunque la mayor parte de nuestros cálculos son realizados bajo las convenciones de [12], las derivaciones y reducción de las contribuciones con los diagramas es una contribución propia del trabajo, siendo la idea de un factor de permutación una de las principales aportaciones. En el apéndice B se presenta el método para calcular dicho factor. También se hace referencia al factor de simetría general asociado a este tipo de teorías, tratado en [15, 16].

Finalmente, en el capítulo 7 se escriben las RGEs para el SM, dando una derivación explícita para los acoplamientos g_i de las interacciones fundamentales. Además, con ayuda de la paquetería SARAH, se muestra el problema de la inestabilidad del potencial de Higgs, debido al cambio de signo en la constante λ , lo cual es esencial para el mecanismo de Higgs y la generación de masa de nuestras partículas elementales.

Para la solución de este problema se utilizará la propuesta de extender el grupo de norma del SM, agregando una $U(1)'$ adicional, y partículas de materia como bosones escalares y fermiones de manera análoga a lo establecido en [14]. Dentro de este contexto, ignoramos las contribuciones debidas a la mezcla cinética de los grupos $U(1)'$ presentes, y como simplificación solo se considera una partícula bosónica escalar adicional para una posible ruptura de simetría, que además se acopla con el bosón de Higgs, pero que dicha contribución no aporta en las RGEs del problema. Bajo esta óptica, se ejemplifica un escenario estable para el potencial de Higgs, eligiendo cargas de esta nueva simetría dentro del espacio de parámetros presentado en el trabajo antes mencionado, y finalmente exponiendo la pérdida de la propiedad perturbativa al variar la carga $U(1)'$ del bosón de Higgs.

Capítulo 2

Teoría de grupos en la física de partículas

Una de las principales herramientas para describir nuevas interacciones en la física de partículas elementales, así como en la descripción precisa de las ya existentes, es protagonizado por la teoría de grupos. Desde el grupo de Poincaré, hasta los grupos de norma que junto con las interacciones presentes en el SM rigen la forma en que las partículas interactúan en el universo, conforman algunos de los ejemplos donde esta rama de las matemáticas introduce herramientas útiles para la física de altas energías.

2.1. El concepto de grupo y sus representaciones

Debido al amplio espectro de aplicación del concepto de grupo en la física es importante analizar este objeto matemático y sus propiedades a continuación.

Definición 1. Se denomina como **grupo** a la pareja (G, \bullet) , donde¹ \bullet se denomina la operación binaria y G es el conjunto de elementos $\{g_\alpha\}$ que cumplen las siguientes propiedades:

- (I) **Asociatividad.** Si $f, g, h \in G$, entonces $(fg)h = f(gh)$.
- (II) **Identidad.** Existe un elemento $e \in G$ tal que $eg = ge = g$.
- (III) **Inversa.** Existe un elemento llamado $g^{-1} \in G$, tal que $g^{-1}g = gg^{-1} = e$.

Es importante mencionar que el índice α puede ser discreto o continuo, según el grupo que se esté analizando.

Naturalmente, el concepto de **subgrupo** surge como un subconjunto $H \subset G$ que tenga estructura de grupo, i.e. que cumpla las propiedades mencionadas y con la operación binaria heredada de (G, \bullet) .

Antes de describir los tipos usuales de representaciones, que son de interés en la física de altas energías, es importante presentar el concepto de **grupo de Lie**.

¹Por simplicidad en la notación se omitirá el símbolo de operación binaria de manera que g_1g_2 es equivalente a escribir $g_1 \bullet g_2$.

Definición 2. Un grupo de Lie es un conjunto, que además de poseer la estructura de grupo, también tiene estructura de variedad diferenciable, por lo que las operaciones de grupo,

$$\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2 \quad \text{y} \quad \text{inv}(g) = g^{-1}, \quad (2.1)$$

son diferenciables.

En particular, las propiedades de variedad diferenciable de los grupos de Lie nos dan un camino para introducir el concepto de **álgebra de Lie**.

Definición 3. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, entonces \mathfrak{g} es un espacio vectorial², dotado de un producto $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, comúnmente llamado **corchete**, que cumple las siguientes propiedades:

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal
2. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $[X, Y] = -[Y, X]$
3. Sea $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ se cumple la **identidad de Jacobi**: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Considerando las definiciones 2 y 3 anterior es interesante observar la conexión entre grupo y álgebras de Lie.

Utilizando la estructura de variedad diferenciable de un grupo de Lie G , tendremos un espacio tangente asociado a un punto dentro de la variedad denotado por $T_p G$. Si consideramos como punto el elemento identidad $p = e \in G$ entonces $T_e G = \mathfrak{g}$, y utilizando el conmutador usual entre elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$ como corchete, definimos

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (2.2)$$

Bajo el contexto de variedades diferenciables vale la pena mencionar que existe una equivalencia entre el **mapeo exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ y la función exponencial de una matriz,

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n. \quad (2.3)$$

Utilizando los conceptos de grupo y álgebra, tratados en la literatura [17], se introduce el concepto de representación, que utilizaremos de manera recurrente en este trabajo.

Definición 4. Se define una representación de un grupo G al mapeo $D : G \rightarrow GL(d, \mathbb{C})$, tal que es un **homomorfismo**, i.e si $g_1, g_2 \in G$,

$$D(g_1) D(g_2) = D(g_1 g_2). \quad (2.4)$$

²Sobre un campo que puede ser real o complejo.

La definición de una representación de un álgebra es análoga a la de grupo, con la única consideración de que el mapeo será $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$, cumpliendo

$$[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y]). \quad (2.5)$$

Si pedimos que el mapeo en ambos casos sea inyectivo, se conoce como una **representación fiel**. Además si el mapeo es una representación fiel evitamos casos como el de la representación trivial, $D(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Gracias al isomorfismo local *exp* que existe entre la variedad y su espacio tangente una representación en el grupo G induce una representación en el álgebra \mathfrak{g} y viceversa.

Tal es el caso de la representación adjunta del álgebra de Lie ³.

Definición 5. Sea el álgebra de Lie \mathfrak{g} y $X, Y \in \mathfrak{g}$ definimos el mapeo lineal $adj_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, tal que

$$adj_{X_a}(Y_b) = [X^a, Y^b] = if^{abc}T_c. \quad (2.6)$$

Esto nos induce el siguiente homomorfismo $\rho_{adj} : X \rightarrow adj_X$ que es conocido como la **representación adjunta**.

En la anterior definición se utilizó la estructura de espacio vectorial de \mathfrak{g} , proponiendo al conmutador como descomposición de los elementos del álgebra de Lie, T_k , como base. Por lo cuál, se asocian a los elementos de matriz de esta representación las constantes de estructura

$$\rho_{adj_{T_a}(T_b)}(T_c) = -if_{abc}, \quad (2.7)$$

donde el factor $-i$ asegura que $T_a \in \mathfrak{g}$ sean hermíticos.

Por último, algunas propiedades del álgebra de nuestro interés son los de **ideal** y de **álgebras semisimples** que serán de utilidad para la clasificación de álgebras de Lie.

Definición 6. Un ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una subálgebra \mathfrak{h} tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $Y \in \mathfrak{h}$.

Definición 7. Un álgebra de Lie se denomina simple si sus únicos ideales son \mathfrak{g} y $\{0\}$. Adicionalmente, un álgebra de Lie se dice semisimple si no contiene abelianos ideales no triviales.

2.2. Álgebra

Una de las principales motivaciones de trabajar con el álgebra de Lie en lugar del grupo es la simplicidad que existe en los elementos y la facilidad para caracterizar álgebras por medio de los diagramas de Dynkin. Lo anterior, paralelamente, nos conducirá a una clasificación, aunque no

³Dicha representación surge de un automorfismo en el grupo G tal que fijando un elemento $a \in G$, para todo elemento $g \rightarrow aga^{-1}$.

se tratará en este trabajo. Además, este tratamiento nos permitirá definir de manera precisa a la representación fundamental.

Dentro de este contexto, dos conceptos íntimamente relacionados son el de raíces y pesos, por lo cual vale la pena remarcar las diferencias sutiles que existen entre ambos.

Definición 8. Sea $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, una representación del álgebra y $v \in V$ el espacio vectorial sobre el que actúa la representación, llamamos **peso** a $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\rho(H)v = \mu(H)v. \quad (2.8)$$

Para comenzar con la caracterización del álgebra podemos iniciar con agrupar a todos los elementos $H \in \mathfrak{g}$, tales que en la representación adjunta cumplan

$$adj_H(H') = [H, H'] = 0. \quad (2.9)$$

El subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ cuyos elementos cumplan con la propiedad (2.9) y $H_i^\dagger = H_i$ conforman el **subálgebra de Cartan**. A todos los elementos que no pertenezcan a esta subálgebra los etiquetamos con E^α . Considerando la representación adjunta, $\rho_{adj} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ y $H, E^\alpha \in \mathfrak{g}$ obtenemos

$$\rho_{adj}(H)(E^\alpha) = adj_H(E^\alpha) = [H, E^\alpha] = \alpha(H)E^\alpha, \quad (2.10)$$

en donde definimos $\alpha(H)$ es el peso asociado a E^α en la representación adjunta, al cuál denominamos como raíz de E^α .

Por lo anterior dividiremos a los elementos de \mathfrak{g} en lo que se conoce como la base de Cartan-Weyl dada por

$$\{H^i | i = 1, 2, \dots, r\} \cup \{E^\alpha | \alpha \in \Phi\}, \quad (2.11)$$

con Φ la colección de todas las raíces.

Debido a la estructura del álgebra de Lie \mathfrak{g} , y en general en cualquier espacio vectorial, es posible dotar con un producto interior no degenerado a \mathfrak{g} , llamado **forma de Killing** definida por

$$\kappa(X, Y) = \frac{1}{N} tr(adj_X \circ adj_Y). \quad (2.12)$$

Por otra parte, este producto interior nos permitirá definir un producto interno en el **espacio dual**, que resultará ser de interés más adelante. Este espacio dual, denotado por \mathfrak{h}^* , restringido al subálgebra de Cartan es relevante ya que si α es raíz entonces $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

Antes de introducirnos a analizar el espacio de raíces \mathfrak{h}^* , es importante mencionar algunas propiedades sobre la base de Cartan-Weyl. Con base en la linealidad del producto interior de \mathfrak{g} y la propiedad $\kappa(ad_Z X, Y) = -\kappa(X, ad_Z Y)$, se pueden mostrar las siguientes dos relaciones:

$$\kappa(H, E^\alpha) = 0 \quad y \quad \kappa(E^\alpha, E^\beta) = 0 \quad si \quad \alpha \neq -\beta. \quad (2.13)$$

Lo anterior es utilizado para justificar que el producto interior no degenerado (PIND) en el espacio \mathfrak{g} puede utilizarse como PIND en \mathfrak{h} , ya que para todo $H \in \mathfrak{h}$ existe un elemento $H' \in \mathfrak{h}$ tal que $\kappa(H, H') \neq 0$. Así, es posible definir la inversa de κ , tal que

$$(\kappa^{-1})_{ij} \kappa^{jk} = \delta_i^k. \quad (2.14)$$

Así, $(\kappa)^{-1}$ es también un PIND en el espacio de raíces \mathfrak{h}^* y lo expresamos como

$$(\alpha, \beta) = \left(\kappa^{-1} \right)_{ij} \alpha^i \beta^j. \quad (2.15)$$

con $\alpha^i = \alpha(H^i)$, $\alpha \in \Phi \subset \mathfrak{h}^*$ y $H \in \mathfrak{h}$.

Para secciones posteriores será útil adoptar la notación de producto interno utilizada en [18], donde $|E^\alpha\rangle$ y $|H^i\rangle$ son vectores en \mathfrak{g} . Adicionalmente, debido a las propiedades de la forma de Killing, la forma matricial de este producto es diagonalizable tal que

$$\langle X^a | X^b \rangle = \kappa(X^a, X^b) = \frac{\lambda_D}{N} \delta^{ab}, \quad (2.16)$$

en donde λ_D es el **índice de Dynkin** y surge de $\text{tr}(ad_{X_i} ad_{X_j}) = \lambda_D \delta_{ij}$. Para el caso de la representación adjunta $\lambda_D = N$.

Utilizando las ecuaciones (2.8) y (2.9) podemos escribir relaciones entre vectores,

$$H_i |H_j\rangle = 0 = |[H_i, H_j]\rangle \quad H_i |E_\alpha\rangle = \alpha^i |E_i\rangle = |[H_i, E_\alpha]\rangle. \quad (2.17)$$

Debido a que los vectores $|E_\alpha\rangle$ están caracterizados únicamente con su **vector raíz** α^i , si dos elementos, $|E\rangle$ y $|E'\rangle$ tienen el mismo vector raíz entonces son el mismo vector. Este argumento nos es de utilidad para mostrar que si

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha^i E_\alpha^\dagger \quad \Rightarrow \quad E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}. \quad (2.18)$$

Un elemento que analizaremos ahora será $E_\alpha |E_\beta\rangle = |[E_\alpha, E_\beta]\rangle$ que nos servirá posteriormente en el tratamiento de raíces. El cálculo del vector anterior constará de tres casos:

El primero caso es $\alpha, \beta \in \Phi$ y $\alpha + \beta \neq 0$. Utilizando el desarrollo algebraico siguiente,

$$[H, [E_\alpha, E_\beta]] = -[E_\alpha, [H, E_\beta]] + [[H, E_\alpha] E_\beta] = (\alpha(H) + \beta(H)) [E_\alpha, E_\beta], \quad (2.19)$$

y por la expresión final de la raíz el estado $|[E_\alpha, E_\beta]\rangle$ será proporcional a $|E_{\alpha+\beta}\rangle$ para algún $E_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{g}$.

El segundo caso se puede discutir a partir de la ecuación (2.19): suponiendo $\alpha + \beta = 0$ implica que $|[E_\alpha, E_\beta]\rangle = c_i |H^i\rangle$, donde los coeficientes c_i son

$$c_i = \langle H_i | E_\alpha | E_{-\alpha} \rangle = \frac{1}{\lambda_D} \text{tr}(H_i, [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \frac{1}{\lambda_D} \text{tr}(E_{-\alpha} [H_i, E_\alpha]) = \frac{\alpha^i}{\lambda_D} \text{tr}(E_{-\alpha} E_\alpha) = \alpha \alpha_i. \quad (2.20)$$

Para el tercer caso si $\alpha + \beta \notin \Phi$ el estado $|[E_\alpha, E_\beta]\rangle = 0$.

Podemos resumir las anteriores propiedades de la base de Cartan-Weyl en las siguientes expresiones;

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad y \quad [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \alpha_i H_i & \text{si } \alpha = -\beta \\ N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \Phi \\ 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Phi \end{cases} . \quad (2.21)$$

2.2.1. Subálgebras $\mathfrak{su}(2)$

Una observación importante sobre el álgebra \mathfrak{g} , que se está analizando, es que los elementos de la base de Cartan-Weyl, definidos como

$$E^\pm = \frac{1}{|\alpha|} E_{\pm\alpha} \quad y \quad E_3 = \frac{\alpha_i H_i}{|\alpha|^2}, \quad (2.22)$$

cumplen con las relaciones

$$[E_3, E^\pm] = \pm E^\pm \quad y \quad [E^+, E^-] = E_3, \quad (2.23)$$

las cuales son las relaciones de conmutación para los generadores del álgebra de $\mathfrak{su}(2)$. Esta sutil observación permite proponer una simplificación en la construcción del álgebra a partir de saber cuantas subálgebras de este tipo tiene contenidas y concluye con la representación de toda la información del álgebra en los conocidos **diagramas de Dynkin** [19].

En general, los vectores en \mathfrak{g} estarán dados en una representación arbitraria ρ distinta de la representación adjunta. Esto hecho nos conduce a sustituir todo el tratamiento anterior en términos de una representación arbitraria. Es fácil comprobar que la estructura trabajada hasta este punto se preserva bajo un homomorfismo. Por lo cuál, sólo se introducirá un cambio de etiquetas

$$|H\rangle \rightarrow |\mu, \rho\rangle, \quad \rho(H) \rightarrow E_\alpha \quad y \quad \rho(H) \rightarrow H, \quad (2.24)$$

donde μ indica el peso asociado al vector H bajo la representación ρ . La notación anterior se sigue de [18] y nos facilitará la introducción de algunos conceptos.

2.2.2. Representación fundamental

Previo a la definición de una representación fundamental es importante tener en cuenta, al menos de manera superficial, el procedimiento de reducción de raíces en el álgebra.

Dos propiedades importante asociadas a raíces son el de positividad y simplicidad. Se dice que una raíz es **positiva** si su primera componente distinta de cero lo es, i.e. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es positiva si $\alpha_1 > 0$. Por otra parte, se define una raíz como **simple** si es positiva y no puede ser escrita como suma de dos raíces simples. Aunque la definición de positividad depende de las

coordenadas utilizadas en el espacio de raíces, en un tratamiento más general, como en [20], se obtendrán resultados equivalentes.

Algunas propiedades de las raíces simples son:

- Sea α, β raíces simples, entonces $\alpha - \beta$ y $\beta - \alpha$ no son raíces.
- Si θ es el ángulo entre dos raíces simples, entonces $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, lo cual nos indica que las raíces simples son linealmente independientes.
- Cualquier raíz positiva se puede expresar como $\phi_k = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \alpha$, donde k representa el número de raíces simples que componen a ϕ_k , k_{α} es un número entero y la suma sobre α representa la suma sobre raíces simples.

Definición 9. Sea $|\mu, \rho\rangle$ un vector con peso μ en la representación ρ , y E_{α^i} tal que α^i es la i -ésima raíz simple del álgebra. Si se satisface que

$$E_{\alpha^i} |\mu, \rho\rangle = 0 \quad \forall i, \quad (2.25)$$

se denomina a μ como **peso máximo**.

Utilizando la fórmula maestra para los pesos máximos, obtenemos que

$$\frac{2\alpha^i \mu}{(\alpha^i)^2} = l^i, \quad (2.26)$$

donde los valores l^i se denominan **coeficientes de Dynkin**. Estos coeficientes definen un peso máximo y, por lo tanto, definen una representación irreducible.

Definición 10. Si un vector de pesos μ^i cumple

$$\frac{2\alpha^j \mu^i}{(\alpha^j)^2} = \delta_{ij}, \quad (2.27)$$

a los vectores base μ^i se les llama **pesos fundamentales**.

Por último, si la representación ρ_{μ} el peso máximo asociado cumple simultáneamente con ser un peso fundamental, entonces es una **representación fundamental**.

2.2.3. Operador de Casimir

Uno de los factores que aparecen en cálculos perturbativos de una teoría cuántica de campos no-abeliana son los operadores de Casimir. Por lo cual, se analizarán algunas de las propiedades que se utilizarán en los capítulos posteriores.

Debido al amplio campo de estudio que involucra una definición precisa de los operadores de Casimir, a continuación se presentará las definiciones y prácticas de este concepto.

Definición 11. Sea un álgebra de Lie semi-simple y una representación R , entonces existe el operador de Casimir $\bar{C}_2(R)$, tal que

$$\bar{C}_2(R) = \sum_{a=1}^{\text{elementos}} R(T^a)R(T^a) = T^a T^a. \quad (2.28)$$

Además, el operador de Casimir conmuta con todos los generadores:

$$[T^b, \bar{C}_2(R)] = i f^{bca} T^c T^a + T^a i f^{bac} T^c = i f^{bca} \{T^c, T^a\} = 0, \quad (2.29)$$

donde se utiliza el resultado del producto de elementos anti simétricos y simétricos bajo los índices a , b y c .

Por otro lado, si un operador conmuta con todos los elementos del álgebra, aplicando el lema de Schur, tendrá la forma

$$\bar{C}_2(R) = C_2(R)\mathbb{I}, \quad (2.30)$$

ecuación en la cual $C_2(R)$ es un valor escalar conocido como **invariante de Casimir cuadrático** y es un valor característico de cada representación. Vale la pena mencionar que, en el caso de $SU(3)$ existe un objeto denominado como Casimir cúbico.

Como última observación, al aplicar la operación traza al operador de Casimir encontramos

$$\lambda_D \dim(G) = \text{tr}(T^a T^a) = \text{tr}(\bar{C}_2(R)) = C_2(R) \dim(R). \quad (2.31)$$

En los capítulos posteriores se tendrá en cuenta el cambio $\lambda_D \rightarrow S_2(R)$ para seguir la notación de los trabajos [5, 6, 7].

Capítulo 3

Teoría de Yang-Mills y campos de materia

La teoría más exitosa en la descripción de las interacciones entre partículas elementales es el Modelo Estándar, el cual está basado en una teoría de norma no abeliana sobre un grupo de Lie semi-simple propuesto por primera vez en [21] por C.N. Yang y R.L. Mills y conocido como Teorías de Yang-Mills. En esta sección se describirán algunas generalidades de una TCC tipo Yang-Mills, así como la inclusión de campos fermiónicos y escalares.

3.1. Teorías de Norma Clásicas

En retrospectiva uno de las principales confirmaciones experimentales de las teorías de norma fue el efecto Aharonov-Bohm [22], consecuencia de la geometría intrínseca del espacio-tiempo (debido al que grupo $U(1)$ actúa como simetría local del espacio-tiempo), en el que las partículas se mueven. Además, con el descubrimiento de este fenómeno se acentuó la importancia del concepto de **invariancia de norma**, el cual tiene su justificación en la geometría diferencial y es un requisito en la búsqueda de un lagrangiano que describa interacciones y la dinámica de las partículas elementales. Las transformaciones de norma en una TCC son expresiones de una redundancia en los grados de libertad físicos que, en el caso de una teoría de Yang Mills, se están utilizando para describir partículas no masivas de espín 1.

Es importante mencionar que los objetos principales que se utilizaran a lo largo de este trabajo son tres tipos de campos: escalares(ϕ), espinoriales(ψ_i) y vectoriales(A_μ). Cada uno de ellos cumple con ser invariante bajo transformaciones de norma asociadas a un grupo de Lie. En particular, el campo vectorial tiene un significado más profundo, asociado con formar parte de una conexión afín de alguna variedad. Una observación sutil surge de preguntarse a cuál variedad nos referimos al hablar de el campo A_μ , ya que sabemos que tanto el espacio-tiempo plano M (de Minkowski) como el grupo de Lie G , son variedades presentes en la teoría.

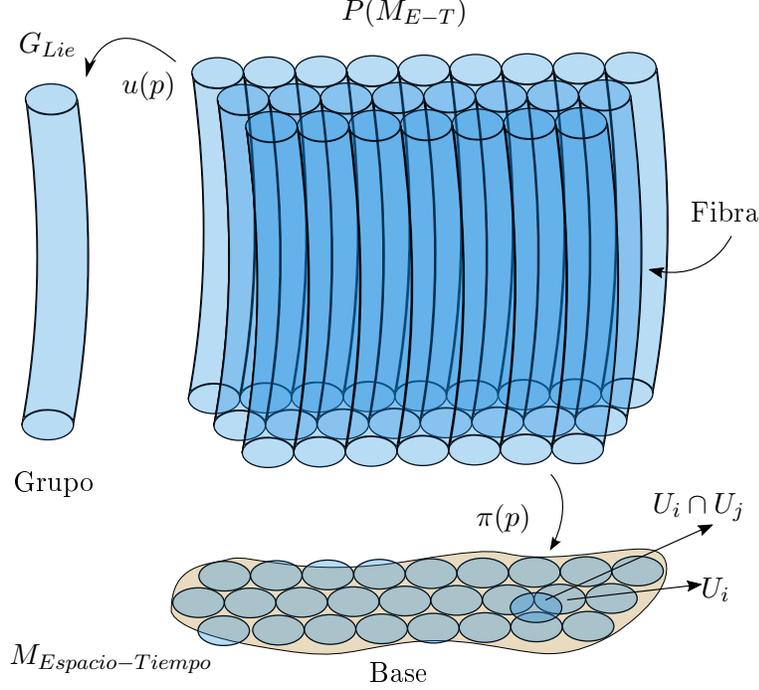


Figura 3.1: Representación gráfica de fibrado principal para una teoría clásica de campos basada en un grupo de norma.

Un concepto necesario para definir la variedad a la cual corresponde la conexión es el de **fibrado principal**, desarrollado a detalle en [23]. Este, al ser un fibrado P es homeomorfo localmente a $M_{E-T} \times G_{Lie}$ y se define a partir de un **espacio base** M_{E-T} , que en este caso el espacio-tiempo plano, una **fibra**, la cual tiene una estructura idéntica al grupo de Lie semi-simple G_{Lie} con el que se está trabajando, una función $\pi : P \rightarrow M_{E-T}$ de proyección y otra $u : P \rightarrow G_{Lie}$ que es un isomorfismo, como se muestra en la figura 3.1.

Desde el punto de vista geométrico e intuitivo, nos interesará la manera en que las fibras de P se acomodan entre sí, dicha propiedad será estudiada por medio de las **funciones de transición**. Con dichas funciones $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G_{Lie}$ y un estudio profundo en la definición de conexiones en fibrados principales, se obtiene la **condición de compatibilidad**

$$A_j(x) = t_{ij}^{-1}(x)A_i(x)t_{ij}(x) + it_{ij}^{-1}(x)dt_{ij}(x), \quad (3.1)$$

donde A_i está definido en U_i , una vecindad del espacio-tiempo. Así, notamos que $t_{ij} \in G_{Lie}$ tiene una expresión en términos de los generadores del álgebra $T_i \in \mathfrak{g}$ gracias al mapeo exponencial

mencionado en el capítulo anterior. Redefiniendo $t_{ij}(x) \rightarrow \Omega(x)$, tendremos la expresión

$$\Omega(x) = e^{i T_\alpha \theta^\alpha(x)}, \quad (3.2)$$

donde θ^α es una función asociada a cada generador y $\alpha = 1, \dots, \dim(G_{Lie})$. La derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$ cuya conexión toma valores en el álgebra $A_\mu \rightarrow A_\mu^\alpha T_\alpha$, será de utilidad en la construcción de invariantes de norma. Además, podemos tener la expresión de curvatura dada por el conmutador de las derivadas covariantes,

$$[D_\mu, D_\nu] = -i F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}^\alpha = (\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma), \quad (3.3)$$

donde los índices μ, ν corren en las coordenadas espacio-temporales. Por otra parte, para los campos de materia $\phi(x)$ y $\psi(x)$ existe un concepto similar, llamado **fibrado asociado**. Dicho concepto está relacionado en como actuará una representación $\rho: G_{Lie} \rightarrow GL(V)$ sobre un espacio vectorial. Con lo anterior, se puede mostrar que las transformaciones de norma asociadas son

$$\phi'(x) = e^{i\theta^\alpha(x)\rho_S(T^\alpha)}\phi(x) \quad y \quad \psi'(x) = e^{i\theta^\alpha(x)\rho_F(T^\alpha)}\psi(x), \quad (3.4)$$

donde tomamos en cuenta el cambio $\rho_S(T^\alpha) \rightarrow \theta^\alpha$ y $\rho_F(T^\alpha) \rightarrow t^\alpha$, notación presente en [5, 6, 7].

Por último, podemos construir una densidad lagrangiana invariante de Lorentz y bajo transformaciones de norma, incluyendo materia escalar y fermiónica cargada bajo G_{Lie} :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu}_\alpha + i\bar{\psi}\not{D}\psi + D_\mu\phi D^\mu\phi, \quad (3.5)$$

en el cual se considera $D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a + ig\theta_{ab}^\alpha\phi^b$ y $D_\mu\psi^i = \partial_\mu\psi^i + igt_{ij}^\alpha\psi^j$, con θ y t representaciones de los elementos del álgebra para los campos escalares y fermiónicos, respectivamente.

3.2. Cuantización en teorías de Yang-Mills

Existen distintos métodos para la cuantización de una teoría clásica de campos, los más recurridos son integral de trayectoria, canónica o el método BRST. Cada uno de estos métodos conlleva a tratar con las redundancias dadas por las transformaciones de norma, por ejemplo en la cuantización canónica se debe tratar con estados redundantes por el método de Gupta-Bleuler en el caso de la electrodinámica cuántica. En el caso de la cuantización por integral de trayectoria, la forma en que se tratan estas redundancias es el método de Faddeev-Popov el cual implicará quitar estas redundancias por medio de campos que se denominan fantasmas.

3.2.1. Integral de trayectoria

En el formalismo de integral de trayectoria se definen a los campos como variables dinámicas sobre las cuales se deberá integrar la acción clásica, bajo un peso exponencial. Este formalismo surge

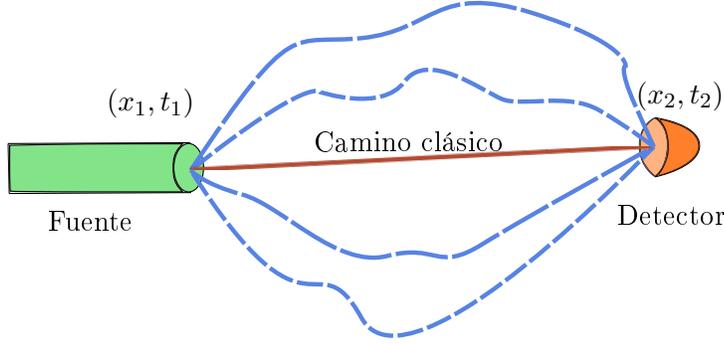


Figura 3.2: Interpretación de la trayectoria de una partícula no relativista.

en la mecánica cuántica debido al desarrollo de una expresión para el propagador¹

$$\langle x_2, t_2, x_1, t_1 \rangle = U(x_1, x_2, t_2 - t_1) = \langle x_b | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} | x_a \rangle, \quad (3.6)$$

que a través de la discretización del parámetro tiempo y generalizar el concepto de integral gaussiana para funciones, se obtiene la expresión

$$\langle x_2, t_2, x_1, t_1 \rangle = \int D[x(t)] e^{iS_{clas}[x(t)]}, \quad (3.7)$$

donde $D[x(t)]$ representa la suma sobre todas las trayectorias posibles y $S_{clas}[x(t)]$ es la acción del sistema clásico que buscamos cuantizar.

Este método de cuantización trae consigo mucha física y nos permite trabajar fuera del contexto de operadores y es una herramienta útil en la cuantización de teorías de Yang-Mills. Por ejemplo, este formalismo aplicado al sistema de una partícula (no relativista) muestra que dentro de la dinámica de la partícula estarán consideradas todas las trayectorias posibles de un punto x_1 a x_2 , como se muestra en la figura 3.2, asignándoles una probabilidad.

Existe un desarrollo similar para los campos escalares y vectoriales, aunque algunos conceptos se deberán generalizar. En primer lugar, la discretización, que para este caso no sólo será del tiempo, sino además de las variables espaciales, ya que los campos bosónicos $\phi(x)$ y $A_\mu(x)$ son variables que dependen del espacio-tiempo. En segundo lugar, la definición de integrales gaussianas para funcionales también se tiene que extender, lo cual se realizará siguiendo el tratamiento en [24, 25]. En adición, para incluir el campo fermiónico dentro de las variables dinámicas con las que trabajaremos existen algunas diferencias notables debido a que obedecen relaciones de anti-conmutación ($\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = \delta^{(3)}(x-y)\delta_{ab}$). Por lo cual, en la expresión para campos de la función de correlación

$$\langle A'_\mu(x), \psi'(x), \phi'(x); t' | A_\mu(x), \psi(x), \phi(x); t \rangle = \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} D\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{clas}}, \quad (3.8)$$

¹Utilizaremos unidades naturales $c = \hbar = 1$ para este desarrollo.

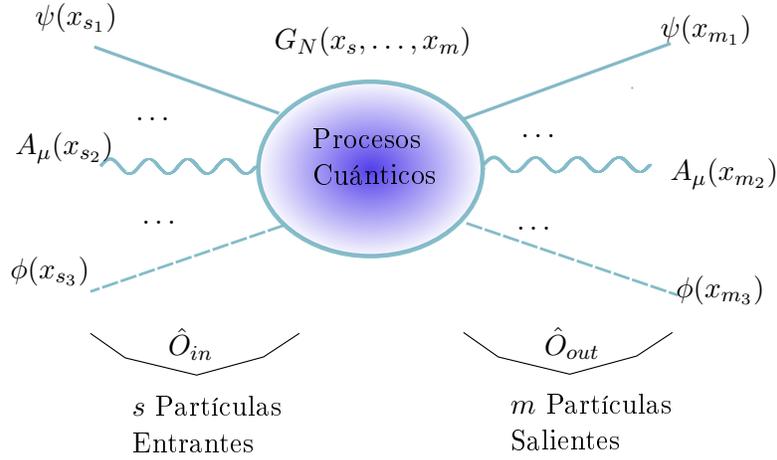


Figura 3.3: Función de correlación con campos arbitrarios presentes en la interacción.

la integración sobre las variables fermiónicas está basada sobre una **integración de Berezin**². La definición del espacio donde se definen estas operaciones y un tratamiento más detallado se presenta en [25, 26].

Sin embargo, el objeto de interés en una TCC es las **funciones de correlación** de N puntos, cuya interpretación es la amplitud de probabilidad de que s partículas entrantes se transformen en m partículas salientes, tal que $s + m = N$. La expresión de dichas funciones de correlación está dada por

$$\langle \Omega | T \left\{ \hat{O}_{in}(x_s) \hat{O}_{out}(x_m) \right\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \frac{\int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} D\phi O_{in}(x) O_{out}(x) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{clas}}}{\int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} D\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{clas}}}, \quad (3.9)$$

donde los operadores $O_{in}(x)$ y $O_{out}(x)$ representan la configuración necesaria de campos y productos entre ellos para generar las partículas que entran y salen respectivamente, como se puede observar en la figura 3.3, con $|\Omega\rangle$ es el estado base de la teoría interactuante que se está proponiendo. Por otra parte, el límite de $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$ se utiliza en la teoría perturbativa como un procedimiento para eliminar ciertos estados con energía E_n que son eigenestados del hamiltoniano que incluye los términos de interacción entre los campos, para mayor referencia revisar [25].

Una técnica usada en teoría cuántica de campos para obtener estas funciones de correlación surge de definir la funcional generatriz

$$Z[J_{A_\mu}, J_\psi, J_\phi] = \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} D\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L} + J_{A_\mu} A_\mu + \bar{J}_\psi \psi - \bar{\psi} J_\psi + J_\phi \phi}, \quad (3.10)$$

²Una de las particularidades de este tipo de integración es que coincide con el operador derivada en el espacio de variables de Grassmann donde se trabaja este formalismo. Además, debido a la propiedad de nilpotencia de las variables que existen en este espacio, la función más general en una variable es la lineal.

donde J_ψ y \bar{J}_ψ son fuentes anti-conmutativas y espinoriales complejas. La función generatriz guarda una relación con la función de partición de la mecánica estadística y junto con las relaciones

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x - y) \quad y \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y \partial_\mu J(y) V^\mu(y) = -\partial_\mu V^\mu(x), \quad (3.11)$$

obtenemos una expresión alternativa para las amplitudes de probabilidad, tal que

$$G_N(x_s, \dots, x_m) = \frac{1}{Z[J=0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J_{field}(x_{s_i})} \right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta J_{field}(x_{m_i})} \right) Z[J]|_{J=0}. \quad (3.12)$$

Este método también es de utilidad para la derivación de las reglas de Feynman en el espacio de momentos, como se muestra en el caso de la cromodinámica cuántica [27].

3.2.2. Fantasmas de Faddeev-Popov

En la cuantización del campo vectorial, con el fin de conservar covarianza en los resultados, se han cuantizado más grados de libertad de los necesarios, por lo cual, se deben introducir restricciones que eliminen estos grados de libertad adicionales. Una forma de hacerlo explícito en la densidad lagrangiana, similar a las restricciones introducidas en la mecánica clásica, es por medio de multiplicadores de Lagrange. El término conocido como **fijador de norma** , con ξ un escalar real, es

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (3.13)$$

Cabe mencionar, que al fijar la norma se está eliminando las divergencias que obtenemos de integrar sobre todas las configuraciones posibles del campo y sus equivalencias, i.e. integraremos sobre ${}^\theta A_\mu^\alpha(x) = A_\mu^\alpha(x) - f^{\alpha\beta\gamma} \theta^\beta(x) A_\mu^\gamma(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^\alpha(x) \quad \forall \theta^\alpha(x)$ en la integral funcional de las ecuaciones 3.8 y 3.9.

En el trabajo [28] se muestra la forma de insertar el término fijador de norma, que en la literatura [25, 29] se conoce como el **método de Faddeev-Popov**. Dicho procedimiento consiste en insertar en la integral de trayectoria

$$\mathbb{I} = \int D\theta(x) \delta^\infty(N({}^\theta A_\mu)) \det \left(\frac{\delta N({}^\theta A)}{\delta \theta(x)} \right) = \int D[N({}^\theta A(x))] \delta^\infty(N({}^\theta A)), \quad (3.14)$$

donde $N({}^\theta A) = \partial^\mu A_\mu^\alpha - f^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu (\theta^\beta A_\mu^\gamma) - \frac{1}{g} \partial^2 \theta^\alpha - \omega^\alpha$ es una generalización de la norma de Lorenz para el caso no-abeliano. También, para preservar la invariancia de norma, $\delta^\infty[N({}^\theta A)]$ representa la **delta de Dirac funcional** que impone la condición $\partial^\mu {}^\theta A_\mu(x) = \omega(x)$ para cada punto del espacio-tiempo. Por último, el determinante en la ecuación 3.14 es llamado **determinante de Faddeev-Popov** que tiene la expresión

$$\det \left(\frac{\delta N[{}^\theta A_\mu(y)]}{\delta \theta(x)} \right) = \det \left(-\frac{1}{g} \partial^\mu [(\delta^{\alpha\beta} \partial_\mu + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma) \delta^4(x - y)] \right) = \det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu \right). \quad (3.15)$$

Debido a las propiedades de la integral de Berezin se puede obtener una forma particular del determinante de Faddeev-Popov, tal que

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) = \int DcD\bar{c}e^{i\int d^4x\bar{c}(-\partial^\mu D_\mu)c}. \quad (3.16)$$

En la expresión las variables c y \bar{c} son conocidas como **fantasmas de Faddeev-Popov**, y no se deben interpretar como partículas con realidad física, mas bien serán grados de libertad negativos que aunque deben ser considerados en nuestros cálculos. Lo anterior recae en que dichos campos tienen la peculiaridad de ser variables de Grassmann pero comportarse como escalares bajo transformaciones de Lorentz.

Como último paso, al agregar el término de (3.14) e integrar $\omega(x)$ bajo un peso gaussiano

$$\int D\omega e^{-i\int d^4x\frac{\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(x)}{2\xi}}, \quad (3.17)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_\xi} \int DA_\mu e^{iS_{clás}} &= \int D\omega e^{-i\int d^4x\frac{\omega^2(x)}{2\xi}} \int DA_\mu e^{iS[A]} \\ &= \int D\omega e^{-i\int d^4x\frac{\omega^2(x)}{2\xi}} \int D\theta \int DA_\mu \delta^\infty[N(\theta A_\mu)] \det\left(\frac{\delta N(\theta A)}{\delta\theta(x)}\right) e^{iS[A]} \\ &= \text{vol}(G_{Lie}) \int DA_\mu DcD\bar{c} e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_Y - M + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \bar{c}\partial^\mu D_\mu c]} \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $\text{vol}(G_{Lie}) = \int D\theta(x)$ y se denomina el volumen del grupo de norma compacto.

Notemos que, aparte de la restricción que buscábamos, se introducen los campos fantasmas en la teoría perturbativa, los cuales tendrán una contribución por medio de una regla de Feynman para nuestros cálculos posteriores. Las reglas de Feynman son un diccionario en el formalismo de TCC que nos ayuda a traducir cálculos analíticos en representaciones pictóricas y viceversa. Así, los **diagramas de Feynman** son representaciones pictóricas de las funciones de correlación en el espacio de momentos y a cierto orden en la expansión perturbativa de nuestra teoría interactuante, construidas con las reglas anteriormente mencionadas. La regla asociada a estos campos se muestra en la figura 3.4.

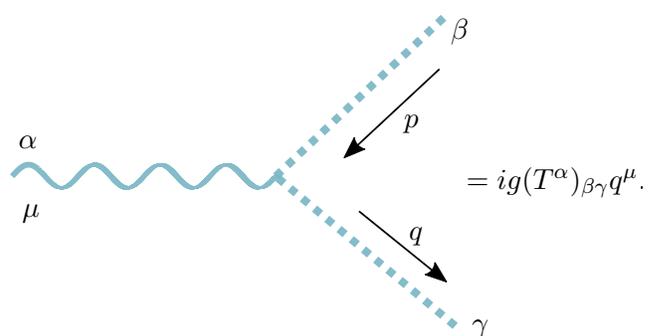


Figura 3.4: Reglas de Feynman para fantasmas de Faddeev-Popov, tal que $(T^\alpha)_{\beta\gamma} = if_{\alpha\beta\gamma}$.

Capítulo 4

Interacciones en el Modelo Estándar

Uno de los grandes avances en la física teórica del siglo pasado fue la consolidación del Modelo Estándar con los trabajos de S. Weinberg, A. Salam y S. Glashow [30][31] y P. Higgs [2], por mencionar algunos. En este capítulo se resumirán dichos avances realizados, revisando conceptos como; ruptura espontánea de la simetría, mecanismo de Higgs, generación de masas de las partículas elementales y acoplamientos tipo Yukawa y ϕ^4 , aportando los elementos necesarios para definir el Modelo Estándar de Partículas Elementales.

4.1. Acoplamientos Yukawa y ϕ^4

El primer de los acoplamientos que será de utilidad más adelante para la generación de masas fermiónicas en modelos que así lo requieran son los que involucran dos campos fermiónicos y un campo escalar, comúnmente clasificado como un **acoplamiento tipo Yukawa** (mediada por Y). En segundo lugar, para construir el potencial del campo de Higgs tendremos que acoplar cuatro campos bosónicos escalares, lo que se conoce como un **acoplamiento tipo ϕ^4** (mediada por λ). La densidad lagrangiana, conformada por las partes cinéticas de los lagrangianos de Dirac y de Klein-Gordon, por el momento sin introducir los campos de norma, y con los términos antes mencionados, tiene la expresión

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - Y\bar{\psi}\phi\psi - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4. \quad (4.1)$$

Adicionalmente, en capítulos posteriores, será importante conocer la dimensionalidad de los acoplamientos por su utilidad en saber si la teoría entra en la categoría de renormalizable. Dicha dimensionalidad se puede obtener notando que la acción es adimensional en unidades naturales y considerando que la dimensionalidad en unidades de masa para los campos obtenemos que $[\phi] = 1$ y $[\psi] = \frac{3}{2}$. Las constantes Y y λ en consecuencia son adimensionales, y la teoría se clasificará como renormalizable. Las dimensiones mostradas para los campos se pueden obtener utilizando el mismo análisis dimensional aplicado a los términos cinéticos de la densidad lagrangiana asociada a cada campo.

Lo anterior es la base para construir los acoplamientos Yukawa del SM, que están relacionadas con las matrices de masa. Para dar una expresión de las teorías que buscamos describir más adelante, es importante conocer las reglas de Feynman asociadas a estos acoplamiento adimensionales, reglas que se muestran en la figura 4.1.

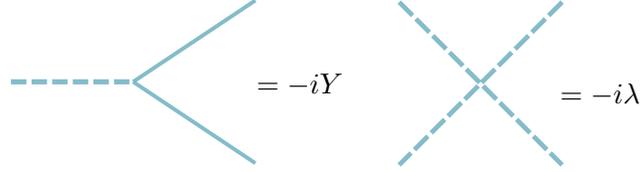


Figura 4.1: Reglas de Feynman en espacio de momentos para los acoplamientos tipo Yukawa y ϕ^4 , donde la línea punteada representa el campo escalar y la línea continua el campo fermiónico.

4.2. Descripción de las partículas elementales

Para la descripción de todas las partículas presentes en la naturaleza, desde el punto de vista fenomenológico, es necesario trabajar con una teoría de Yang-Mills con un grupo de norma $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ y partículas fermiónicas, quarks y leptones, cargadas bajo el grupo de Lie anterior. El subíndice c hace referencia a la carga de color que las partículas que pueden tener en QCD, el subíndice L se refiere a que esta simetría solo estará presente en partículas con quiralidad izquierda y Y es la hipercarga que hace explícita la diferencia con el grupo abeliano asociado al electromagnetismo.

Un último elemento de esta teoría el campo de Higgs, que está conformado por dos campos escalares complejos que transforman como un doblete bajo el grupo de norma $SU_L(2) \times U_Y(1)$ y es el encargado de dotar de masa a los campos fermiónicos y a tres bosones de norma por medio del **mecanismo de Higgs**. A la simplificación anterior, junto con la información de como interactúan dichos campos, se le conoce como **Modelo Estándar de Partículas Elementales**.

El contenido de partículas elementales lo podemos resumir en la figura 4.2, el cual consiste en doce partículas fermiónicas, 6 **leptones** y 6 **quarks**, 12 bosones de norma asociados al grupo de norma del SM y un bosón de norma escalar. Dichos campos también estarán sujetos a una **simetría global**

$$G_{global,SM} = U(1)_{B-L}, \quad (4.2)$$

donde B representa el número bariónico y L el número leptónico y esta simetría es indicador de la conservación de esta combinación entre B y L incluso a nivel cuántico. Adicionalmente, si consideramos solamente el sector de QCD (i.e. quarks interaccionando fuertemente), existen simetrías globales que ayudaran a realizar una descripción a bajas energías, un ejemplo de esto es la teoría quiral perturbativa.

4.2.1. Lagrangiano del SM

Tomando en cuenta las simetrías anteriores (globales y locales), las cargas de la figura 4.2, los acoplamientos Yukawa y ϕ^4 , así como el planteamiento realizado en el capítulo 3, podemos escribir una expresión para la lagrangiana del modelo tal que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^c G_c^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\
 & \sum_{QCD,EW} (\bar{Q}_{Li} \not{D} Q_{Li} + i\bar{u}_{Ri} \not{D} u_{Ri} + i\bar{d}_{Ri} \not{D} d_{Ri}) + \sum_{EW} (i\bar{L}_{Li} \not{D} L_{Li} + i\bar{e}_{Ri} \not{D} e_{Ri}) \\
 & + \sum_{EW} (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \mu^2 H^\dagger H - \lambda(H^2)^2 \\
 & + Y_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \tilde{H} u_{Ri} + Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li} H d_{Ri} + Y_{ij}^l \bar{L}_{Li} H e_{Ri} + h.c. + \mathcal{L}_\xi
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Los términos $\bar{Q}_{Li} = (\bar{u}_L^i, \bar{d}_L^i)$, con $u_{Ri} = \{u_R, c_R, t_R\}$ $d_{Ri} = \{d_R, s_R, b_R\}$ y $\bar{L}_{Li} = (\bar{\nu}_L^i, \bar{e}_L^i)$, tal que $e_{Ri} = \{e_R, \mu_R, \tau_R\}$ $\nu_i = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$ son dobletes bajo la simetría $SU_L(2)$ de acuerdo a la asignación de cargas en la figura 4.2 y utilizando la notación planteada en la misma. Los términos cinéticos se relacionan a los campos bosónicos de espín 1 por medio de las letras que representan dichos campos en la figura 4.2 y el campo de Higgs H está definido como

$$H = \begin{bmatrix} h^+ \\ h^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_1 + ih_2 \\ h_3 + ih_4 \end{bmatrix} \quad \tilde{H} = i\sigma_2 H^* = \begin{bmatrix} h^{0*} \\ -h^{+*} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

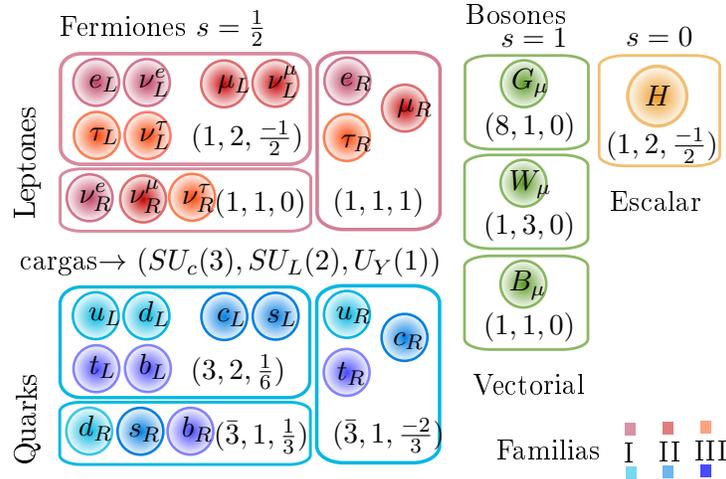


Figura 4.2: Contenido de partículas elementales previo al rompimiento espontáneo de simetría con las cargas asociadas al grupo de norma.

donde h^+ y h^0 son campos escalares complejos. Los acoplamientos Yukawa ($Y_{ij}^u, Y_{ij}^d, Y_{ij}^l$) son los mediadores de la interacción entre el campo de Higgs y las partículas fermiónicas, acoplando partículas izquierdas y derechas. El único elemento faltante son los neutrinos derechos, para los que existen diferentes propuestas para la generación de estas masas, por ejemplo el decaimiento doble β , donde se propone al neutrino como una partícula de Majorana. Por otra parte, las derivadas covariantes en los términos cinéticos son distintos de acuerdo a la partícula que se este tratando, por lo cual la suma indica los campos de norma que se deberán considerar, tal que

$$\sum_{QCD,EW} D_\mu \rightarrow \partial_\mu - ig_Y Y B_\mu - ig_{EW} W_\mu - ig_{QCD} G_\mu \quad y \quad (4.5)$$

$$\sum_{EW} D_\mu \rightarrow \partial_\mu - ig_Y Y B_\mu - ig_{EW} W_\mu. \quad (4.6)$$

Por último, con \mathcal{L}_ξ agregamos los términos asociados a los fantasmas de Faddeev-Popov asociados a cada grupo semi-simple, así como los fijadores de norma correspondientes.

4.3. Mecanismo de Higgs

La herramienta teórica para la generación de masas de las partículas elementales en el Modelo Estándar es el mecanismo de Higgs, propuesta en [2, 3]. Este mecanismo permite a los campos vectoriales y fermiónicos, por medio de la interacción con un campo escalar masivo, adquirir un término de masa preservando la invarianza de norma suponiendo un valor de expectación del vacío (VEV)

$$\langle H \rangle = \langle \Omega | H | \Omega \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

donde v es un escalar real. Sumado a la adquisición del VEV es importante definir los parámetros presentes en el potencial 4.3 Las dos alternativas son con $\mu^2 > 0$, caso que representaría la masa de el campo H y $\mu^2 < 0$ como se muestra en la figura 4.3a que constituye un potencial con mínimo $v \neq 0$. El planteamiento del mecanismo de Higgs busca cuantizar alrededor de este mínimo.

En adición a lo anterior, se utilizó que el valor de expectación del campo de Higgs se manifiesta en la parte real de h^0 , ya que los posibles vacíos del potencial están todos conectados entre sí por medio de transformaciones de norma del sector electro-débil. Para mostrar las consecuencias de este mecanismo, debemos notar que el campo de Higgs es separable en una contribución que llamaremos **cuántica** \hat{h} y otra **clásica** h_{clas} , tal que

$$H = h_{clas} + \hat{h}. \quad (4.8)$$

La primera de estas contribuciones se asocia a las fluctuaciones cuánticas y se utiliza como variables de integración en la cuantización por integral de caminos. La segunda contribución se asocia al valor

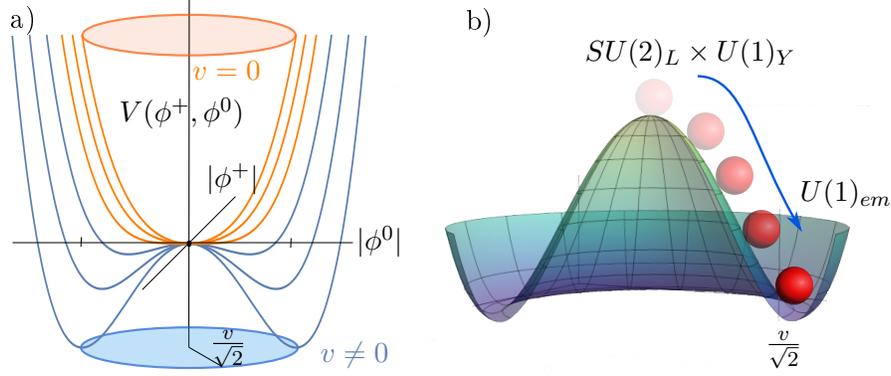


Figura 4.3: Transición de fase en el mecanismo de Higgs.

esperado de H , de tal manera que

$$h_{clas} = \langle \Omega | H | \Omega \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (4.9)$$

Esta separación en contribuciones clásica y cuánticas es una idea extensible al cálculo de acciones efectivas, que ayudan a hacer cálculos en una TCC, por ejemplo a la constante de acoplamiento a 1-lazo por medio de **Background Field Method**. Sin embargo, sólo utilizaremos la definición del potencial para encontrar la condición que extremiza el mismo,

$$\frac{\partial V(h_{clas})}{\partial h_{clas}} = 0 \implies 2\mu^2 h_{clas} + 4\lambda h_{clas}^3 = 0 \implies \mu^2 = -2\lambda h_{clas}^2 \implies v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (4.10)$$

Vale la pena notar que las condiciones $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$ son necesarias para tener bien definido el valor de v , estas consideraciones definen la **estabilidad del vacío de Higgs** y serán analizadas en capítulos posteriores.

4.3.1. Bosones de norma masivos, W^\pm y Z

Las consecuencias de la adquisición de un VEV para el campo de Higgs son la ruptura espontánea de la simetría de norma en el estado de mínima energía, el vacío, en específico el sector electrodébil. El procedimiento de esta ruptura se puede observar a nivel de la acción, como se muestra a continuación.

En primer lugar, para obtener el término cinético del campo H tenemos que

$$\mathcal{L}_{SM} \supset \sum_{EW} D_\mu \langle H \rangle = \left(-ig_Y \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{bmatrix} - ig_{EW} \begin{bmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{iv}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g_{EW}W_\mu^+ \\ g_Y B_\mu + g_{EW}W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

donde g_{EW} y g_Y son los acoplamientos asociados a las simetría $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$, respectivamente. Por lo tanto,

$$|D_\mu H|^2 \supset \frac{v^2}{2} \left[g_{EW}^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \left(\frac{g_Y}{2} B_\mu + g_{EW} W_\mu^3 \right)^2 \right], \quad (4.12)$$

para lo cuál se utilizaron las redefiniciones de los campos $W_\mu^{1,2}$ como

$$W_\mu^\pm(x) = \frac{W_\mu^1(x) \mp iW_\mu^2(x)}{\sqrt{2}}, \quad \tau^a \equiv \frac{\sigma^a}{2} \quad y \quad \tau^\pm = \frac{\tau^1 \pm i\tau^2}{\sqrt{2}}, \quad (4.13)$$

escribiendo explícitamente $W_\mu = W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^- + W_\mu^3 \tau^3$, para realizar los cálculos de la ecuación (4.11). Lo anterior se puede visualizar solamente como un cambio de base en la representación, aunado a que los campos W^\pm son los que tienen realidad física.

Otra consideración, pero sobre el segundo término de la ecuación (4.12), es trabajar con los bosones de norma físicos, donde nuevamente cambiamos los campos W_μ^3 y B_μ , para sólo contar con un campo de norma masivo Z^μ y el fotón. Este cambio se asemeja a una rotación, tal que

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

con θ_W , llamado el **ángulo de mezcla**, definido como $\cos \theta_W = \frac{g_{EW}}{\sqrt{g_Y^2 + g_{EW}^2}}$ y $\sin \theta_W = \frac{g_Y}{\sqrt{g_Y^2 + g_{EW}^2}}$. Las masas de los bosones de norma tendrán la forma $m_W = \frac{vg_{EW}}{\sqrt{2}}$ y $m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}$ rompiendo con la invariancia de norma del grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$, dejando una simetría remanente que se asocia con la fuerza electromagnética como es muestra en la figura 4.3b, todo consecuencia de la adquisición del VEV. Es importante mencionar que los efectos de la ruptura de simetría de norma suceden en el estado de mínima energía, el vacío de nuestra teoría, pero aún tendremos consecuencias físicas y observables, tales como el decaimiento β que confirman la existencia de esta interacción en la naturaleza.

4.3.2. Matrices de masa en partículas fermiónicas

Ahora tomaremos en cuenta los acoplamientos en el caso Yukawa de la ecuación (4.3) para la generación de masa de los quarks y leptones. De manera similar al caso bosónico, las masas de los campos fermiónicos dependerán del acoplamiento Y y del VEV, tal que

$$\mathcal{L}_{SM} \supset \bar{u}_{L_i} M_{ij}^u u_{R_j} + \bar{d}_{L_i} M_{ij}^d d_{R_j} + \bar{e}_{L_i} M_{ij}^e e_{R_j} + h.c., \quad (4.15)$$

con $M_{ij}^u = Y_{ij}^u \frac{v}{\sqrt{2}}$, $M_{ij}^d = Y_{ij}^d \frac{v}{\sqrt{2}}$ y $M_{ij}^e = Y_{ij}^e \frac{v}{\sqrt{2}}$. Adicionalmente, debemos de tomar en cuenta términos de masa para los neutrinos, debido a la evidencia experimenta de su oscilación, sin embargo, las propuestas de la generación de esta misma se omite por simplicidad.

Debido al término de masa, tendremos una oscilación entre las orientaciones derecha e izquierda de nuestro campo fermiónico. A causa de esta oscilación y teniendo en cuenta la diferencia de cargas entre ambas partes, surge la interpretación de la parte clásica del campo de Higgs. Aunque el campo H no tiene fuentes, la componente h_{clas} se interpreta como un condensado que llena el vacío del universo, tal que provee y recibe carga ilimitada de la simetría rota a todas las partículas con las que interacciona el campo H .

4.3.3. Teorema de Goldstone

En los desarrollos anteriores se puede observar una restricción sobre la dirección específica para el valor del campo H en el vacío, sin embargo, esto se realiza para simplificar los cálculos y se sustenta en el teorema de Goldstone que establece lo siguiente.

Teorema 1. *Existirá un modo no masivo por cada generador de la simetría rota.*

Para hacer explícita la libertad en la elección de la dirección y siguiendo el tratamiento de [32], la expresión del campo de Higgs se puede describir como

$$H = \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{v} \begin{pmatrix} \frac{z(x)}{\sqrt{2}} & w^-(x) \\ w^+(x) & -\frac{z(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

La expresión anterior es simplemente una forma de presentar los cuatro grados de libertad, inicialmente contenidos en ϕ^0 y ϕ^+ campos escalares complejos del doblete H de la ecuación 4.5. Por lo cuál, la información ahora se encuentra en los campos $z(x)$, $w^\pm(x)$ y $h(x)$ como las componentes cuánticas de H , ganando generalidad en la dirección del valor de expectación v , que sigue representando la parte clásica. El lagrangiano se ve modificado, tal que

$$\mathcal{L}_{SM} \supset \left[(\partial_\mu w^-)(\partial_\mu w^+) + \frac{1}{2}(\partial_\mu z)^2 \right] \left(1 + \frac{2h}{v} + \frac{h^2}{v^2} \right) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 \quad (4.17)$$

donde podemos notar la presencia de tres bosones escalares reales no masivos y un bosón masivo h con masa $m_h = \sqrt{2}\mu$. Por lo tanto, los modos escalares toman el lugar de los grados de libertad en los bosones de norma masivos, incluyéndolos en los términos fijadores de norma asociados. Un procedimiento detallado se da en [33], donde se realiza el método de Faddeev-Popov para bosones de norma masivos de la teoría electro-débil.

Capítulo 5

Cálculo de divergencias, acoplamientos y RGEs

La importancia de trabajar en el formalismo de campos cuánticos es el poder predictivo que obtenemos para describir las interacciones y el comportamiento de las partículas elementales, siendo el cálculo de la carga del electrón un ejemplo de la importancia de utilizar este formalismo. Sin embargo, el desarrollo usual de estas teorías es perturbativo, respecto a las constantes de acoplamiento, lo cual da origen a los diagramas de Feynman como una representación visual de las amplitudes en la teoría por calcular. Por esta razón, en este capítulo se revisan las técnicas usuales para el planteamiento y solución de diagramas a un lazo.

5.1. Renormalización

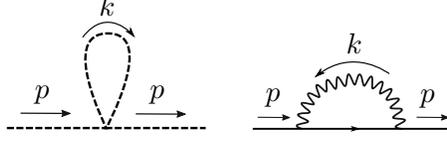
El concepto de renormalización, en el contexto de este trabajo donde se asume una postura perturbativa para realizar los cálculos, es un procedimiento para conectar los parámetros físicos de la teoría con los observados en la naturaleza. En dicho procedimiento se hace una distinción entre parámetros desnudos y parámetros vestidos, los primeros guardan divergencias que aparecen en la teoría y los últimos serán los relevantes físicamente. Dichas divergencias, no físicas, aparecerán en las funciones de correlación a ordenes superiores a nivel árbol de la teoría debido al rango de integración sobre los momentos indeterminados. Sin embargo, una consecuencia de trabajar con los parámetros vestidos es que aparecerán nuevos términos en la densidad lagrangiana que se utilizarán para absorber las divergencias que emerjan de la teoría no renormalizada. La manera de conectar los parámetros desnudos y vestidos se conocen como **condiciones de renormalización**.

5.1.1. Divergencia superficial

Para introducirnos en la aparición de divergencias en una TCC y su resolución, notemos como surgen estas cantidades en los diagrama de Feynman y aportemos algunas definiciones relevantes.

30 CAPÍTULO 5. CÁLCULO DE DIVERGENCIAS, ACOPLAMIENTOS Y RGES

Por ejemplo, al analizar los diagramas a un lazo provenientes de una teoría de campo escalar con



interacciones tipo ϕ^4 y la electrodinámica cuántica respectivamente (las reglas de Feynman para ambas teoría se pueden encontrar en [25]), notamos que las integrales resultantes en el espacio de momentos son

$$\frac{-i\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^2} (-ig\gamma^\mu) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} (-ig\gamma^\nu) \left(-\frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \right). \quad (5.1)$$

Tomando el límite $k^2 \rightarrow \infty$, notamos que al comparar el grado en k en el numerador y denominador las integrales son divergentes de orden cuadrático y lineal, respectivamente. Al concepto anterior se le conoce como **grado de divergencia superficial**, definido como

$$D = \# \text{ total de potencias de } k \text{ en la integral.} \quad (5.2)$$

En general, para obtener una expresión para la divergencia superficial, de una teoría de campos arbitraria en d dimensiones espacio-temporales, sera útil considerar: I_f el número de propagadores del campo¹ f , E_f el número de líneas externas asociadas al campo f , N_i la cantidad de vértices del tipo i con d_i derivadas y n_{if} el número de campos involucrados en la interacción.

Notando un patrón en los propagadores de los campos revisados hasta ahora, observamos que $\Delta_f \rightarrow k^{2s_f-2}$, con s_f el espín² del campo f . Con todo lo anterior podemos dar una expresión general para el grado de divergencia superficial, tal que

$$D = dL + \sum_i N_i d_i + \sum_f (2s_f - 2), \quad (5.3)$$

con $L = \sum_f I_f - \sum_i N_i$ el número de lazos (circuitos cerrados de partículas). Desarrollando algunas equivalencias como $\sum_i N_i n_{if} = 2I_f + E_f$ dadas en [34] obtenemos

$$D = d - \sum_f E_f \left(s_f + \frac{d-2}{2} \right) - \sum_i N_i \Delta_i, \quad (5.4)$$

donde $\Delta_i = d - d_i - \sum_f n_{if} \left(s_f + \frac{d-2}{2} \right)$ y además coincide con la dimensión del acoplamiento asociado al vértice i .

¹El símbolo f debe considerarse como un campo arbitrario: vectorial, fermiónico o escalar.

²Para campos vectoriales no masivos $s_f = 0$ y para el caso masivo $s_f = 1$.

5.1.2. Renormalizabilidad

En perspectiva, la importancia de definir el grado de divergencia superficial recae en analizar la renormalizabilidad de una teoría, en donde el elemento clave será la dimensionalidad del acoplamiento $[g_i] = \Delta_i$.

Por lo tanto, clasificamos a una teoría de campos cuánticos como:

- Renormalizable si $\Delta_i > 0$. Sólo un número finito de diagramas de Feynman divergen superficialmente, pero las divergencias ocurren en cada orden perturbativo.
- Super-Renormalizables si $\Delta_i = 0$. Sólo un número finito de diagramas de Feynman son divergentes superficialmente.
- No Renormalizables si $\Delta_i < 0$. Todas las diagramas de Feynman son divergentes a partir de cierto orden perturbativo.

La clasificación anterior está basada en el teorema Weinberg, donde se hace un análisis de la convergencia de las integrales asociadas a las amplitudes tomando en cuenta su continuación analítica, proponiendo lo siguiente.

Teorema 2. *Si $D < 0$ para el planteamiento integral de un diagrama y cualquier subdiagrama que lo conforme, entonces la integral asociada al diagrama es convergente.*

En el caso de cálculos a 1-loop, que es de nuestro interés, al no tener subdiagramas divergentes superficialmente y suponiendo $D < 0$, concluiremos que serán renormalizables.

5.1.3. Contratérminos y constante de renormalización del campo

La existencia de contratérminos se motiva al comparar los parámetros utilizados en la teoría, tales como, masa o acoplamientos (cargas) del lagrangiano con los parámetros experimentales que son observables y medibles. Si bien es cierto que ambos están relacionados, no son equivalentes. Para mostrar el procedimiento de generación de contratérminos, que son términos extra en la lagrangiana que se originan por utilizar parámetros y campos ya renormalizados, consideraremos una teoría escalar masiva e interacción ϕ^4 , tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4. \quad (5.5)$$

Como mencioné, es importante la distinción de m y λ como parámetros renormalizados y agregamos un subíndice a los parámetros teóricos m_0 y λ_0 , también llamados masa y acoplamiento desnudo. Además, definiremos el campo ϕ_0 como el campo no renormalizado.

Por otra parte podemos desarrollar dentro de la teoría anterior una expresión que surge de un desarrollo no perturbativo del correlador a dos puntos propuesto en [35]. Siguiendo el desarrollo utilizado en [24], se obtiene

$${}_oG_2(p^2) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (5.6)$$

32 CAPÍTULO 5. CÁLCULO DE DIVERGENCIAS, ACOPLAMIENTOS Y RGES

donde $Z = |\langle \mathbf{p} | \hat{\phi} | \Omega \rangle|^2$, ${}_oG_2(p^2)$ es el correlador utilizando la teoría no renormalizada y $\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi)\delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$. Los índices λ_0 etiquetan el número de partículas en reposo que se están considerando y ρ se conoce como la función de densidad de estados. Por tanto, Z se interpreta como la probabilidad del campo de crear estados de una partícula en reposo en el vacío.

Si ahora desarrollamos el propagador a nivel perturbativo en términos de diagramas, definiendo $-i\Delta m^2$ como la contribución de los diagramas irreducibles a una partícula³ (IIP), tal que

$$\begin{aligned}
 {}_oG_2(p^2) &= \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[-i\Delta m^2 \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right] + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[-i\Delta m^2 \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon}. \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

Realizando una expansión de Taylor $\Delta m^2(p^2) = \Delta m^2(m^2) + \frac{d\Delta m^2(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) + \dots$ y debido a que la masa se define como el polo en la función de correlación a dos puntos obtenemos $m^2 \equiv m_0^2 + \Delta m^2(m^2)$. Además de lo anterior, tendremos una expresión para Z si comparamos (5.7) y (5.6) a primer orden, tal que $Z = \frac{1}{1 - \Delta m^2(m^2)}$.

En adición, para reescribir nuestros cálculos en términos de los parámetros experimentales y eliminar la dependencia de Z en la ecuación (5.6) trabajamos con el campo renormalizado $\phi = \frac{\phi_0}{\sqrt{Z}}$. Utilizando esta redefinición anterior en la lagrangiana (5.5), sumando y reordenando términos, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \frac{1}{2} (Z - 1) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (Z m_0^2 - m^2) \phi^2 - \frac{1}{4!} (Z^2 \lambda_0 - \lambda) \phi^4. \tag{5.8}$$

Así, definiendo $\delta Z = Z - 1$, $\delta m = Z m_0^2 - m^2$ y $\delta \lambda = Z^2 \lambda_0 - \lambda$ podemos mostrar los términos adicionales de la ecuación (5.8) se verán reflejados en las reglas de Feynman de la figura 5.1. Como resultado, al hacer un cálculo los contratérminos también deberán ser tomados en cuenta en la expansión perturbativa del correlador con el que se esté trabajando, ya que eliminarán las divergencias de la teoría y ayudarán a obtener cantidades físicas finitas.

³Estos diagramas se definen como diagramas conexos que no pueden ser desconectados al cortar un propagador de cualquier tipo de partícula.

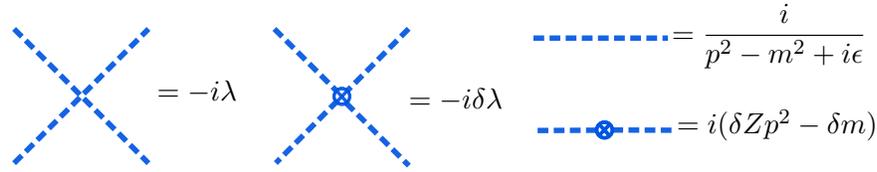


Figura 5.1: Reglas de Feynman de la teoría ϕ^4 y contratérminos.

Por último, para generalizar el concepto de renormalización a los diferentes tipos de campos y la generación de contratérminos para una teoría más general, se propone

$$A^\mu = \frac{A_0^\mu}{\sqrt{Z_A}} \quad \psi = \frac{\psi_0}{\sqrt{Z_\psi}}, \quad (5.9)$$

donde Z_A y Z_ψ se denominan las constantes de renormalización del campo bosónico de espín 1 y el campo fermiónico respectivamente, y serán de utilidad en el capítulo siguiente para renormalizar teorías más generales.

5.2. Regularización

El procedimiento para el cálculo de integrales que divergen se conoce como **regularización**. El cálculo de la integral divergente se realiza por medio de la variación de un parámetro dentro de la misma integral, para realizar una continuación analítica y posteriormente recuperar la integral original en algún caso límite de este parámetro. Por lo tanto, regularizar una teoría consiste en establecer el método para el cálculo de estas divergencias que aparecen en integrales asociadas a diagramas con lazos.

5.2.1. Regularización Dimensional

Existe una amplia variedad de caminos para calcular la integral divergente denominados **esquemas de regularización**. Cada uno de estos conlleva cierta conservación de simetrías dependiendo de la teoría con la que se trabaje. En la siguiente tabla se muestran los principales esquemas y las simetrías que conservan y si es generalizable al caso de TCC tipo Yang-Mills.

Debido al amplio margen que ofrece el trabajar en el esquema dimensional y su generalizabilidad a teorías de norma no-abelianas en el presente trabajo se utilizará este camino.

Este método, desarrollado por primera vez en [36, 37] y posteriormente explorada en [38, 39] (para un acercamiento más detallado véase [40]), surge de notar la fuerte dependencia del grado de divergencia superficial de los diagramas de la dimensionalidad de la teoría, por lo que se propone variar la dimensión de integración para realizar la integral, utilizando la variable d para la dimensión espacio-temporal. Así, después de algunos pasos intermedios para reescribir la integral, dados en el

	Abelian gauge	Lorentz	Yang-Mills
Corte (Escala)			
Lattice			
Tiempo propio de Schwinger			
Pauli-Villars			
Dimensional			

apéndice A, se puede llegar a una expresión para la segunda divergencia planteada en el caso de la electrodinámica cuántica al inicio de este capítulo en la ecuación (5.1), obteniendo

$$e^2 \int_0^1 dx \int d^4 P \frac{2(1-x)\not{p} + 4m}{(P^2 - M^2)^2} \rightarrow -\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \int d^d P \frac{(2-d)(1-x)\not{p} + md}{(P^2 - M^2)^2}, \quad (5.10)$$

donde e es la carga eléctrica, $P = k + xp$ y $M^2 = -x(1-x)p^2 + xm^2$. Para realizar esta generalización a más dimensiones se utilizó una modificación a nuestras propiedades de las matrices gamma, tal que $\gamma_\mu \gamma^\mu = d$ y $\gamma_\mu \not{k} \gamma^\mu = (2-d)\not{k}$. También se agregó un parámetro de escala μ^ϵ , donde $\epsilon = 4-d$, con el cual se conserva la dimensión correcta en la integral.

Debido a que realizaremos correcciones a 1 lazo en el siguiente capítulo se mostrarán las soluciones de las siguientes integrales dadas en [25]:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (5.11)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (5.12)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i g^{\mu\nu} \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (5.13)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i d(d+2) \Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 4 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \quad (5.14)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i \Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (5.15)$$

tal que Δ juega el mismo rol de M^2 siendo el término que no depende de la variable de integración k . Una expresión útil para las anteriores integrales será

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \quad (5.16)$$

lo cual además introduce en el esquema de renormalización de **sustracción mínima** MS o el de **sustracción mínima modificada** \overline{MS} . Ambos esquemas asocian directamente el polo con los contratérminos δZ , sin embargo, el esquema MS no elimina las constantes de Euler-Mascheroni γ y $\ln(4\pi)$ y el \overline{MS} sí. Vale la pena resaltar la equivalencia entre estos esquemas debido a la libertad de elegir las condiciones de renormalización, lo cual recae en el cambio de variable entre las escalas

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{\gamma}{2}} \mu, \quad (5.17)$$

donde $\bar{\mu}$ será la escala asociada al esquema \overline{MS} .

5.3. Ecuaciones del Grupo de Renormalización

Una idea motivada durante el desarrollo anterior es la independencia de las cantidades físicas de esquemas tanto de renormalización y regularización. Basado en esta afirmación, se puede proponer la renormalización del campo por medio de dos esquemas (etiquetados por r_1 y r_2), tal que

$$\phi_{r_1} = \frac{\phi_0}{\sqrt{Z(\mu)}} \quad \text{y} \quad \phi_{r_2} = \frac{\phi_0}{\sqrt{Z(\mu')}}. \quad (5.18)$$

Sin embargo, al utilizar el campo renormalizado en el cálculo de la función de correlación de N puntos en una teoría ϕ^4 y relacionarlo con los campos desnudos, obtenemos

$$G_N(x; g_\lambda(\mu), g_m(\mu), \mu) = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \} | \Omega \rangle = \frac{1}{Z(\mu)^{\frac{N}{2}}} \langle \Omega | T \{ \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_N) \} | \Omega \rangle, \quad (5.19)$$

lo cual, aplicado en ambos esquemas resulta en

$$Z(\mu)^{\frac{N}{2}} G_N(x; g_\lambda(\mu), g_m(\mu), \mu) = Z(\mu')^{\frac{N}{2}} G_N(x; g_\lambda(\mu'), g_m(\mu'), \mu'), \quad (5.20)$$

donde definimos los **acoplamientos adimensionales** como $g_\lambda = \frac{\lambda}{\mu^{[\lambda]}} = \lambda(\mu)$ y $g_m = \frac{m^2(\mu)}{\mu^{[m^2]}} = \frac{m^2(\mu)}{\mu^2}$. La ecuación anterior, comúnmente llamada **ecuación básica del grupo de renormalización**, nos da información sobre el cambio que sufre $g_i(\mu)$ y $Z(\mu)$ al cambiar de esquema $\mu \rightarrow \mu'$. Si además analizamos un cambio infinitesimal $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu$ al derivar la ecuación (5.19) obtenemos

$$0 = \frac{d}{d\mu} G_N^0(x) = \frac{d}{d\mu} \left[Z(\mu)^{\frac{N}{2}} G_N(x; g_i, \mu) \right]$$

$$\implies \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial g_\lambda} + \beta_m \frac{\partial}{\partial g_m} + N\gamma \right) G(x; g_\lambda, g_m, \mu) = 0, \quad (5.21)$$

definiendo las **funciones beta** para cada acoplamiento como $\beta_{\lambda,m} = \mu \frac{\partial g_{\lambda,m}}{\partial \mu}$ y una **dimensión anómala** $\gamma = \frac{\mu}{2} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial \mu}$, por cada campo presente en la teoría. La dimensión anómala nos da información acerca de las desviaciones en el escalamiento del correlador.

Para generalizar los conceptos anteriores a una teoría con más tipos de interacciones renormalizables y campos, los acoplamientos renormalizados α cumplen

$$g_\alpha \equiv \mathcal{Z} g_0 = \mathcal{Z} \frac{\alpha_0}{\mu^{\Delta_\alpha}} \quad \text{con} \quad \mathcal{Z} = \prod_i Z_i^{t_i}, \quad (5.22)$$

con t_i el número de veces que el campo asociado a Z_i aparece en la interacción mediada por α . Manipulando la ecuación anterior podemos reescribir la función beta como

$$\beta_\alpha(\mu) = -g\Delta_\alpha - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^2 \frac{\partial}{\partial g} [t_1 \text{Res} Z_1 + t_2 \text{Res} Z_2 + \dots], \quad (5.23)$$

donde $n = \sum_f n_{if}$ es el número total de patas en el diagramas y $\text{Res} Z_i$ representan los factores acompañando al polo en nuestros cálculos del capítulo 6 asociados factor de renormalización Z_i .

5.4. Acoplamientos

En el análisis de una TCC el principal componente sobre el cual se construye son los acoplamientos, así como el nivel de predicción perturbativa que puede tener la teoría depende de la condición perturbativa $g^2 \ll 1$. Sin embargo, vimos que nuestros acoplamientos se ven modificados por correcciones cuánticas y por lo tanto es importante analizar su evolución como función de la energía para conocer las limitaciones de nuestra TCC.

5.4.1. Flujos de renormalización y puntos fijos

Para analizar el comportamiento del acoplamiento, notemos que existe una ecuación diferencial

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial(\ln \mu)}, \quad (5.24)$$

que al resolverla se encuentra la relación que guarda el acoplamiento adimensional con la escala de energía μ .

A la variación de esta escala y su impacto en el cambio de los parámetros desnudos lo denominamos **flujo de renormalización**. En adición, si un punto $g(\mu^*) = g^*$ cumple con $\beta(g = g^*) = 0$ se conoce como **punto fijo** en el flujo de renormalización. A continuación listaremos los diversos

comportamientos que puede tener la función beta y por lo tanto, analizaremos el comportamiento de g implícitamente.

El caso $\beta(g) > 0$ nos indica que a bajas energías el acoplamiento decrece y la teoría será débilmente acoplada. En contraste en el ultravioleta, $\mu \rightarrow \infty$, región donde el acoplamiento crece. En general, podemos hablar de dos casos donde el primero de ellos no existe un punto donde el acoplamiento sea infinito pero $g(\mu \rightarrow \infty) \rightarrow \mu$. El segundo caso implica la existencia de μ_∞ , tal que $g(\mu_\infty) \rightarrow \infty$. Como ejemplo de este último caso tenemos a la Electrodinámica Cuántica, ya que al obtener el comportamiento de la carga respecto a la escala de energía

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_{ref})}{1 - \frac{2\alpha(\mu_{ref})}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_{ref}}\right)}, \quad (5.25)$$

donde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ y μ_{ref} es una escala de referencia en la cual el valor del acoplamiento α es conocido. Los casos anteriores se conocen como teorías no completas en el ultravioleta y estables en el infrarrojo.

El siguiente caso, $\beta(g) = 0$, se describe como una **teoría finita**. En ella cierta clase de contribuciones divergentes está ausente y por lo tanto el acoplamiento no depende de la escala de energía. Un ejemplo de acoplamientos de esta clase se encuentra en las **teorías de Yang-Mills Supersimétricas** en cuatro dimensiones espacio-temporales.

El caso $\beta(g) < 0$ representa uno de los grandes avances en la física de partículas, desarrollado en [41] por D. Gross y F. Wilczek, así como H. Politzer en [42], muestran un ejemplo de este comportamiento que se basa en una TCC con grupo de norma no abeliano, para lo cual la cromodinámica cuántica y en general el modelo estándar entran en esta categoría. En este caso la teoría se comporta fuertemente acoplada a grandes distancias y débilmente acoplada conforme la escala de energía aumenta, denominando este tipo de teorías como **asintóticamente libres**. Sin embargo, el efecto a bajas energías también es igualmente importante, debido al fuerte acoplamiento que genera se produce el fenómeno de **confinamiento**, postulando que a partir de cierta escala de energía las partículas con carga de color no pueden existir aisladas y deberán formar estados hadrónicos.

Capítulo 6

Renormalización y Regularización en teorías de Yang-Mills

A lo largo del capítulo se aplicarán las técnicas revisadas anteriormente para encontrar correcciones a un lazo en una generalización del Modelo Estándar. Partiremos de una teoría de Yang-Mills con un grupo de norma simple y posteriormente indicaremos como extender el resultado a un grupo de Lie semi-simple. El desarrollo se basa en [5, 6, 7], siguiendo los esquemas dimensional para regularización y \overline{MS} para renormalización.

6.1. Descripción general en teorías tipo SM

La teoría que buscamos analizar en este capítulo consiste en incluir todas las interacciones presentes en el Modelo Estándar de partículas elementales, considerando un número arbitrario de campos de materia tanto escalares como fermiónicos (el número de campos estará restringido a la generación de anomalías del grupo de norma de la teoría). Dichos campos también estarán cargados bajo el grupo de norma e interactuarán con un potencial tipo Higgs y acoplamientos Yukawa. La densidad lagrangiana que representa esta teoría anteriormente descrita es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F_\alpha^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi_a D^\mu\phi_a + i\bar{\psi}_j \not{D}\psi_j - (Y_{ij}^\alpha \bar{\psi}_i \phi_a \psi_j + h.c.) \\ & + \frac{\lambda_{abcd}}{4!}\phi_a\phi_b\phi_c\phi_d + \text{términos masivos} + \text{fantasmas}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde $D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a + ig\theta_{ab}^\alpha A_\mu^\alpha\phi_b$, $D_\mu\psi_j = \partial_\mu\psi_j + igt_{ij}^\alpha A_\mu^\alpha\psi_i$ y θ y t son las representaciones escalar y espinorial respectivamente del grupo de norma utilizado.¹

¹La convención utilizada en este trabajo sobre los índices es la siguiente: Los símbolos del alfabeto griego iniciales se utilizan para identificar los elementos del álgebra y los finales para denotar componentes espacio-temporales. Por otra parte, los índices del alfabeto latino iniciales indican las componentes de un elemento del álgebra en la representación escalar y la parte intermedia y final de alfabeto se utiliza para las componentes pero en la representación espinorial.

Para renormalizar la teoría es necesario trabajar con las constantes de acoplamiento y campos renormalizados como se propuso en el capítulo anterior y así generar los contratérminos. Por lo tanto, al realizar esta sustitución sobre los campos y conseguir un lagrangiano dependiente de los parámetros físicos, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \mathcal{L}_{ren} + (Z_A - 1)(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + (Z_\psi - 1)\bar{\psi}_i i \not{\partial} \psi_i - (Z_\phi - 1)\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a \quad (6.2) \\
& - (Z_A Z_\phi - 1)\frac{g^2}{2}\theta_{ab}^\alpha \theta_{ac}^\beta A_\mu^\alpha A^{\mu\alpha} \phi_b \phi_c + (Z_\phi \sqrt{Z_A} - 1)ig(\partial_\mu \phi_a)\theta_{ab}^\alpha A^{\mu\alpha} \phi_b \\
& - (Z_\psi \sqrt{Z_A} - 1)\bar{\psi}_j g t_{ij}^\alpha A^\alpha \psi_i - (Z_A^{\frac{3}{2}} - 1)\frac{g}{2}f^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)A^{\mu\beta} A^{\nu\gamma} \\
& - (Z_A^2 - 1)\frac{1}{4}gf^{\alpha\beta\gamma}f^{\gamma\delta\xi}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta A^{\mu\delta} A^{\nu\xi} - [(Z_\psi \sqrt{Z_\phi} - 1)Y_{jk}^\alpha \psi_j \phi_a \psi_k + h.c.] \\
& + (Z_\phi^2 - 1)\frac{1}{4!}\lambda_{abcd}\phi_a \phi_b \phi_c \phi_d + \text{fantasmas y términos masivos},
\end{aligned}$$

donde definimos $\delta Z_{campo} = Z_{campo} - 1$, $\delta Z_{2A2\phi} = Z_A Z_\phi - 1$, $\delta Z_{2\phi A} = Z_\phi \sqrt{Z_A} - 1$, $\delta Z_{2\psi A} = Z_\psi \sqrt{Z_A} - 1$, $\delta Z_{3A} = Z_A^{\frac{3}{2}} - 1$, $\delta Z_{4A} = Z_A^2 - 1$, $\delta Z_{2\psi\phi} = Z_\psi \sqrt{Z_\phi}$ y $\delta Z_{4\phi} = Z_\phi^2 - 1$ y \mathcal{L}_{ren} es el lagrangiano de la ecuación (6.1) con los campos ya renormalizados.

Una herramienta útil en una teoría no abeliana son las **identidades de Slavnov-Taylor**, desarrollado en [43, 44], que al ser una generalización de las **identidades de Ward-Takahashi** relacionan los factores de renormalización del campo con los factores asociados al vértice que media el acoplamiento. Dichas relaciones son

$$\frac{g}{g_0 \sqrt{Z_A}} = \frac{Z_\psi}{Z_{A2\psi}} = \frac{Z_A}{Z_{3A}} = \sqrt{\frac{Z_A}{Z_{4A}}} = \sqrt{\frac{Z_A}{Z_{2A2\phi}}}, \quad (6.3)$$

y garantizan la universalidad de la constante de acoplamiento g renormalizada.

Para comenzar a realizar cálculos perturbativos en el contexto anterior, debemos cuantizar y obtener las reglas de Feynman por medio de la cuantización por integral de trayectoria, descrita brevemente en el capítulo 3. Sin embargo, para reducir la cantidad de cálculos, se utilizó el programa **FeynCalc** para la derivación de las reglas de Feynman para la parte escalar y los acoplamiento Yukawa del lagrangiano (6.2). Para los sectores restantes correspondientes a una teoría tipo QCD con un grupo de norma simple, la derivación de las reglas es análogo y se encuentran detallados en [27].

En consecuencia de lo anterior, los propagadores considerados se presentan en la figura 6.1 y los acoplamientos presentes en la teoría se presenta en la figura 6.2. Se añaden los contratérminos cambiando el símbolo del vértice y agregando el factor δZ_i , donde i representa un tipo de vértice o el contratérmino asociado al propagador de un campo.

Finalmente, para obtener los contratérminos asociados a los propagadores de la figura 6.1 definimos la parte masiva de los campos como $m_\psi = \frac{Z_{2\psi}}{Z_m} m_{0,\psi}$ para la masa fermiónica y $m_\phi^2 = \frac{Z_{2\phi}}{Z_{m^2}} m_\phi^2$ para la masa de los campos escalares.

$$\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} \alpha \\ \mu \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \beta \\ \nu \end{array} & i \xrightarrow{p} j & a \xrightarrow{p} b & \alpha \xrightarrow{p} \beta \\
\text{wavy line} & \text{solid line} & \text{dashed line} & \text{dotted line} \\
= -\frac{i}{p^2}(\eta_{\mu\nu} + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})\delta_{\alpha\beta} & = \frac{i\delta_{ij}}{\not{p} - m_f} & = \frac{i\delta_{ab}}{p^2 - m_s^2} & = \frac{i\delta_{\alpha\beta}}{p^2}
\end{array}$$

Figura 6.1: Propagadores de los campos y fantasmas de la teoría en el espacio de momentos.

6.2. Factores de Simetría

En los cálculos que haremos a continuación, un elemento importante son los **factores de simetría** asociados a los diagramas de Feynman. Una generalización para la determinación de estos factores en el tipo de teoría que queremos trabajar se plantea en [16, 15]. La expresión para obtener dicho factor de simetría es

$$S = g 2^\beta 2^d \prod_n (n!)^{\alpha_n}, \quad (6.4)$$

donde las etiquetas se definen como:

- α_n es el número de conjuntos de n líneas idénticas conectando el mismo par de vértices.
- d es el número de vértices con dos burbujas idénticas.
- β es la suma de todas las burbujas auto-conjugadas, que son líneas de partícula provenientes de campos auto-conjugados (β es nula si los campos con que participan en la teoría son no-conjugados).
- g es el número de permutaciones de vértices, manteniendo el diagrama topológicamente inalterado.

6.3. Correcciones 1-lazo

Para realizar las correcciones a las constantes de acoplamiento podemos basarnos en resultados obtenidos en teorías de Yang-Mills, calculadas en [25, 41, 45], donde las interacciones mediadas por Y y λ no son consideradas. Por lo tanto, al resolver los diagramas, presentados en 6.3, e incluir las correcciones a la función β asociada a g obtenemos

$$\beta_{YM}(g) = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{4}{3} n_f S_2(F) \right], \quad (6.5)$$

donde $C_2(G)$ y $S_2(F)$ es el factor de Casimir cuadrático en la representación adjunta y el índice de Dynkin en la representación irreducible para los campos fermiónicos, respectivamente.

El resultado anterior para la función $\beta(g)$ se obtiene de una ecuación (5.23), la cual estaremos utilizando a lo largo de este capítulo. Es importante mencionar que en este cálculo se separan las

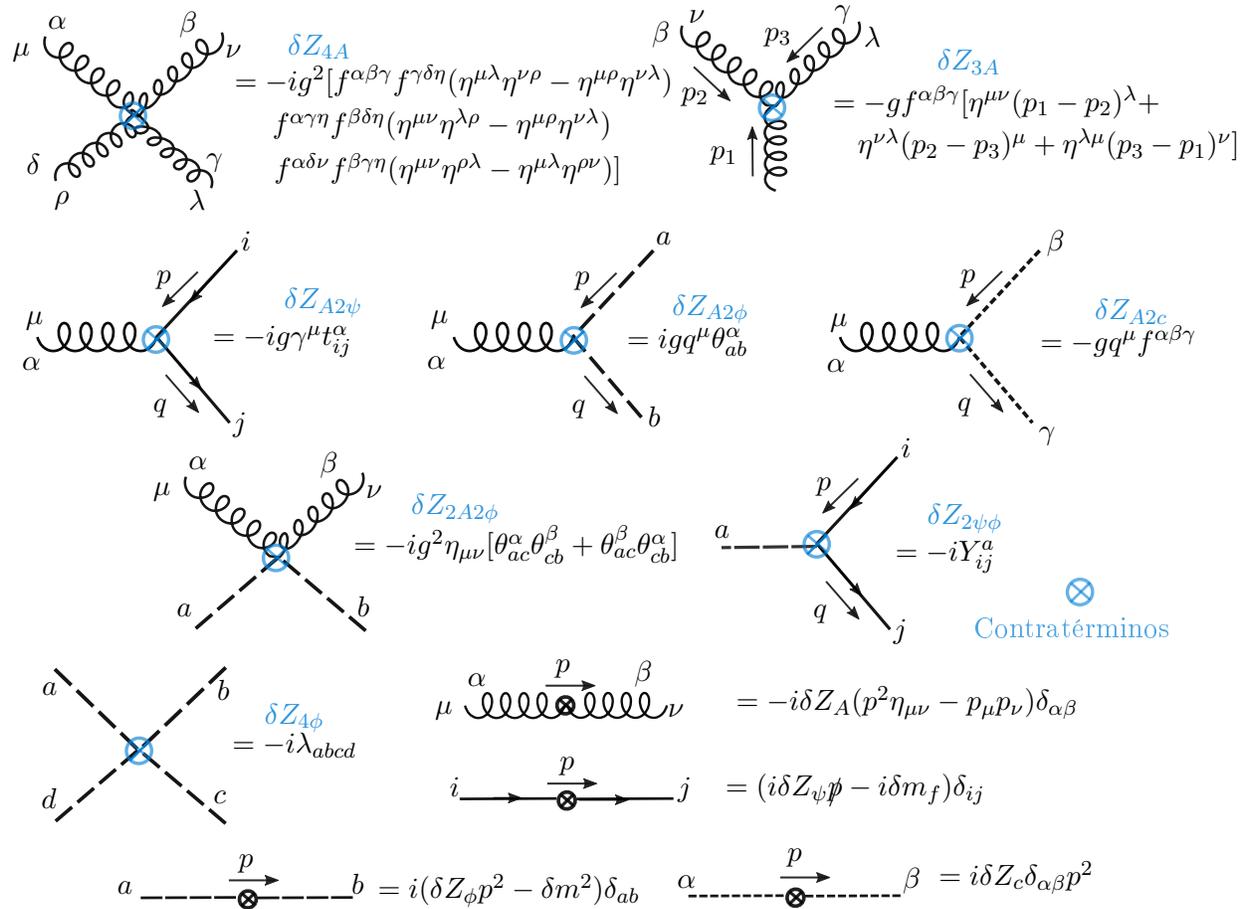


Figura 6.2: Reglas de Feynman para los acoplamientos y contraterminos en el espacio de momentos.

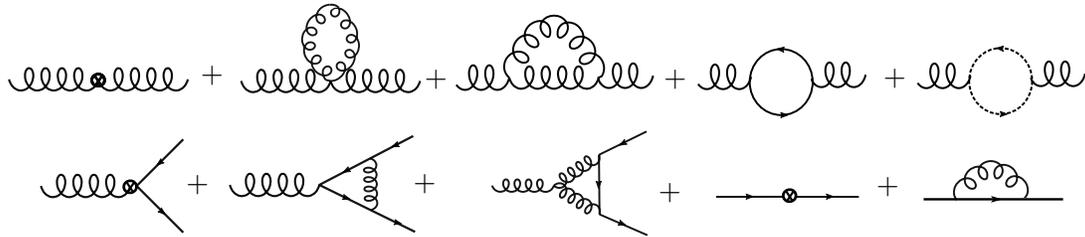


Figura 6.3: Diagramas en teorías de Yang-Mills tipo QCD.

contribuciones cuánticas asociadas al factor de renormalización en tres tipos, relacionados con los elementos que participan en la interacción que media g ; los campos ψ y A_μ , así como el tipo de

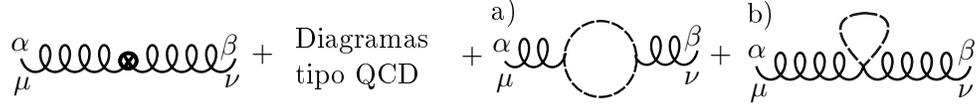


Figura 6.4: Contribución de campos escalares cargados bajo la simetría de norma.

vértice que involucra a estos campos. Adicionalmente, el caso del acoplamiento g es especial debido a que está involucrado en muchas interacciones, y como lo podemos observar en las identidades de Slavnov-Taylor, existen al menos tres maneras de calcular el resultado (6.5).

6.3.1. Acoplamiento g

Retomando el cálculo de la función β para nuestra teoría general, podemos agregar las interacciones tipo Yukawa, ϕ^4 y el acoplamiento a materia escalar a los tipos de diagramas que contribuyen a los contratérminos obtenidos en la figura 6.3. El planteamiento utilizado anteriormente, se basa en considerar

$$\beta(g) = -g^3 \frac{\partial}{\partial(g^2)} \left[(-1)ResZ_{A2\psi} + (1)ResZ_{\psi} + \left(\frac{-1}{2}\right) ResZ_A \right]. \quad (6.6)$$

Para completar el análisis del término Z_A de acuerdo a nuestra teoría, resolveremos los dos diagramas adicionales de la figura 6.4. A lo largo de este trabajo utilizaremos el esquema \overline{MS} y la variable dimensional $d = 4 - \epsilon$ para reescribir el polo. Por lo tanto, al plantear el diagrama de la figura 6.4, se escribe como

$$\begin{aligned} & -g^2 \theta_{ab}^\alpha \theta_{ab}^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{k^\mu}{k^2 - m_{s1}^2} \frac{(k-p)^\nu}{(k-p)^2 - m_{s2}^2} \\ & = -g^2 S_2(S) \delta^{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l^\mu + xp^\mu)(l^\nu + (x-1)p^\nu)}{[l^2 - \Delta]^2}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\Delta = p^2(x-x^2) - m_{s1}^2 x - m_{s2}^2(1-x)$, $l^\mu = k^\mu - xp^\mu$. Regularizando el resultado anterior y utilizando la propiedad (5.16) resultan tres contribuciones. La primera contribución está asociada al término cuadrático en la variable de integración, $l^\mu l^\nu$ de la integral planteada en (6.7), lo que

resulta en

$$\begin{aligned}
& \int dx g^2 S_2(S) \delta^{\alpha\beta} \frac{i\Delta}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(1 - \frac{d}{2})\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \\
&= \frac{g^2}{2} S_2(S) \delta^{\alpha\beta} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \Delta dx \\
&= i \frac{g^2}{2} S_2(S) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{16\pi^2} p^2 \int_0^1 (-x^2) dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \\
&= -i g^2 S_2(S) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{6} p^2 \eta^{\mu\nu} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right). \tag{6.8}
\end{aligned}$$

En el cálculo anterior se integró $\Delta(x, m_{s_1}, m_{s_2}, p^2)$ y se utilizó la relación $m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2 = p^2$ para integrar sobre los factores que incluyen p^2 . Por otra parte, notemos que los términos $p^\mu p^\nu$ (lineales en la variable de integración), se eliminan por paridad en la integral (6.7). Por lo tanto, el término de tipo $p^\mu p^\nu$ en la integral (6.7) es

$$\begin{aligned}
& -g^2 S_2(S) \delta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu \int_0^1 dx (x^2 - x) \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \\
&= i \frac{g^2}{6} S_2(S) \delta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \\
&= i \frac{g^2}{(4\pi)^2} S_2(S) \delta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right). \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Al plantear el segundo diagrama, debido a que es una divergencia cuadrática al regularizar dimensionalmente, la contribución es nula, obteniendo una contribución de la integral (6.7), tal que

$$-i \frac{g^2}{(4\pi)^2} S_2(S) \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{3\epsilon} \left(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu\right), \tag{6.10}$$

es la contribución total a la autoenergía Z_A .

Para las siguientes contribuciones es necesario utilizar una identidad de la teoría que surge por la invariancia de norma del término Yukawa, la cual resulta en

$$t_{ij}^\alpha Y_{jk}^a - Y_{ij}^{a\alpha} t_{jk} = Y_{ik}^b \theta_{ba}^\alpha. \tag{6.11}$$

Finalmente, para calcular $Z_{A2\psi}$, asociado al vértice de un bosón de norma con dos partículas fermiónicas y Z_ψ a la autoenergía de los fermiones, las contribuciones nuevas se muestran en la figura 6.5

El diagrama asociado a la figura 6.5a) tiene la expresión

$$g Y_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha Y_{kj}^b \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(p-q)^\mu}{(p-q)^2 - m_{s_1}^2} \frac{1}{(q-k)^2 - m_{s_2}^2} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m_f^2}. \tag{6.12}$$

Para reescribir la integral anterior se puede escribir conforme a la generalización del parámetro de Feynman, tal que

$$-gY_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha Y_{kj}^b \int_0^1 dx dy \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2(l^\mu l^\nu + \text{términos no cuadráticos})}{[l^2 - \Delta]^3}, \quad (6.13)$$

donde $l^\mu = q^\mu - xp^\mu - yk^\mu$ y $\Delta = (px + ky)^2 - xp^2 - yk^2 + xm_{s_1}^2 + ym_{s_2}^2 - (1-x-y)m_f^2$. Además, nuevamente por un argumento de paridad en la integral se eliminarán los términos no cuadráticos en l^μ y aplicando el método de regularización obtendremos

$$\begin{aligned} & -gY_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha Y_{kj}^b \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{g^{\mu\nu} \gamma_\nu}{2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}} \\ & = -i \frac{g}{2} Y_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha Y_{kj}^b \frac{\gamma^\mu}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para el segundo diagrama en la figura 6.5 b) la expresión es

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iY_{ik}^a) \frac{i(\not{q} - \not{k} + m_{f_1})}{(q-k)^2 - m_{f_1}^2} (-ig\gamma^\mu t_{kl}^\alpha) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_{f_2})}{(p-k)^2 - m_{f_2}^2} (-iY_{kj}^{a\dagger}) \frac{i}{k^2 - m_s^2}, \quad (6.15)$$

y regularizando la integral se simplifica a

$$\begin{aligned} & gY_{ik}^a t_{kl}^\alpha Y_{lj}^{a\dagger} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{2(\not{q}(1-x) - \not{l} - \not{p}y + m_{f_1})\gamma^\mu(\not{p}(1-y) - \not{l} - \not{q}x + m_{f_2})}{[l^2 - \Delta]^3} \\ & = 2gY_{ik}^a t_{kl}^\alpha Y_{lj}^{a\dagger} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\sigma l_\nu \gamma^\sigma (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu)}{[l^2 - \Delta]^3} = gY_{ik}^a t_{kl}^\alpha Y_{lj}^{a\dagger} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\gamma_\nu (2-d)}{4} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde $l^\mu = k^\mu - xq^\mu - yp^\mu$ y $\Delta = (qx + py)^2 - xq^2 - yp^2 + xm_{f_1}^2 + ym_{f_2}^2 - (1-x-y)m_s^2$. Podemos reescribir los factores de ambos diagramas utilizando la ecuación (6.11) al conjugarla y transponerla, tal que

$$Y_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha Y_{kj}^{b\dagger} + Y_{ik}^a t_{kl}^\alpha Y_{lj}^{a\dagger} = Y_{ik}^a Y_{kl}^{a\dagger} t_{lj}^\alpha. \quad (6.17)$$

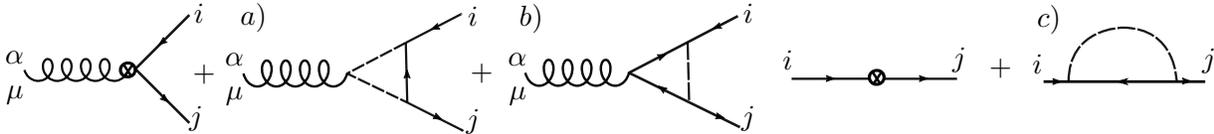


Figura 6.5: Contribuciones adicionales al vértice y la autoenergía de la partícula fermiónica.

Para la última contribución, relacionada con Z_ψ , el planteamiento del diagrama de la figura 6.5 c) es

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-iY_{ik}^a) (-iY_{kj}^{a\dagger}) \frac{i(k+m_f)}{k^2 - m_f^2} \frac{i}{(p-k)^2 - m_s^2} \\
 = & Y_{ik}^a Y_{kj}^{a\dagger} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{x \not{p}}{[q^2 - \Delta]^2} \rightarrow \frac{i \not{p} Y_2(F)}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

donde $Y_2(F) = Y_{ik}^a Y_{kj}^{a\dagger}$, $q^\mu = k^\mu - xp^\mu$ y $\Delta = xm_s^2 + (1-x)m_f^2 - x(1-x)p^2$. Sumando los residuos obtenidos para el vértice y la autoenergía se cancelarán ambos términos en la contribución, dando como resultado la función beta

$$\beta_{1\text{-lazo}}(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} S_2(F) - \frac{1}{6} S_2(S) \right\}. \quad (6.19)$$

Comparando este resultado con el obtenidos en [5, 12], existe un término extra y definiendo $Y_4(F) = \frac{1}{d(G)} \text{tr}[C_2(F)Y^a Y^{a\dagger}]$, la contribución en la función β es tal que

$$\beta(g) = \beta_{1\text{-lazo}}(g) - \frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{2\kappa}{(4\pi)^2} Y_4(F) \right). \quad (6.20)$$

Sin embargo, la contribución anterior proviene de diagramas a dos lazos por las constantes de acoplamiento involucradas, como se muestra en la figura 6.6, por mencionar algunos diagramas que suman a este tipo de factor.

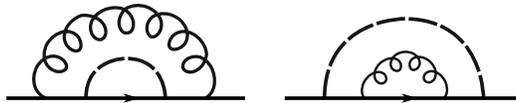


Figura 6.6: Contribuciones a dos lazos al término $Y_4(F)$.

6.3.2. Acoplamiento Y^a

Posteriormente, para analizar el acoplamiento Y^a como en el caso anterior, tomaremos en cuenta las relaciones que surgen de manipular los contratérminos agregados en la lagrangiana, dando como resultado la relación

$$Y^a = \frac{Z_\psi \sqrt{Z_\phi}}{Z_{2\psi\phi}} Y_0^a, \quad (6.21)$$

donde separamos las correcciones a un lazo en contribuciones por vértice y autoenergías de los campos, tanto escalares como fermiónicos.

En primer lugar, obtendremos las contribuciones al vértice calculando el residuo de $Z_{2\psi\phi}$ por medio de los diagramas que se muestran en la figura 6.7. El diagrama a) tiene la representación siguiente en el espacio de momentos

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Y_{ik}^b Y_{ks}^{a\dagger} Y_{sj}^b \frac{(\not{q} - \not{k} + m_{f1})}{(q-k)^2 - m_{f1}^2} \frac{\not{p} - \not{k} + m_{f2}}{(p-k)^2 - m_{f2}^2} \frac{1}{k^2 - m_{s2}^2}. \quad (6.22)$$

El resultado de la integral anterior es similar al obtenido en la contribución de la figura 6.5b), salvo la manipulación en las matrices γ y se simplifica a

$$\begin{aligned} & Y_{ik}^b Y_{ks}^{a\dagger} Y_{sj}^b \int dxdy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(\not{q}(1-x) - \not{l} - y\not{p} + m_{f1})(\not{p}(1-y) - \not{l} - x\not{q} + m_{f2})}{(l^2 + \Delta)^3} \\ &= Y_{ik}^b Y_{ks}^{a\dagger} Y_{sj}^b \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \frac{d}{4} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{i}{(4\pi)^2} Y_{ik}^b Y_{ks}^{a\dagger} Y_{sj}^b \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Para la contribución 6.7b) la integral a resolver es

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ig\gamma t_{ik}^\alpha) \frac{i(\not{q} - \not{k} + m_{f1})}{(q-k)^2 - m_{f1}^2} (-iY_{ks}^a) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_{f2})}{(p-k)^2 - m_{f2}^2} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2} (-ig\gamma_\nu t_{sj}^\alpha), \quad (6.24)$$

donde al definir las variables $l^\mu = k^\mu - xq^\mu - yp^\mu$, $\Delta = (qx + py)^2 - xq^2 - yp^2 + xm_{f1}^2 + ym_{f2}^2$. Por último, la integral anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} & -g^2 t^\alpha Y^a t^\alpha \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int dxdy \frac{\gamma_\mu (\not{q}(1-x) - \not{l} - \not{p}y)(\not{p}(1-y) - \not{l} - \not{q}x) \gamma^\mu}{(l^2 - \Delta)^3} \\ &= \frac{-it^\alpha Y^a t^\alpha}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta_{\nu\rho}}{4} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{-it^\alpha Y^a t^\alpha}{(4\pi)^2} \frac{d^2}{4} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Procediendo a calcular las contribuciones c) y d) de la figura 6.7, ambas tendrán las mismas contribuciones salvo cambio de variables en los momentos internos, aunque, esto no varía el resultado final del factor del polo. El diagrama c) en su forma integral es

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ig\gamma_\mu t_{ik}^\alpha) \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(q-k)^2} ig\theta_{ab}^\alpha (p-k)_\nu \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2} (-iY_{kj}^a) \frac{i}{(p-k)^2 - m_s^2}. \quad (6.26)$$

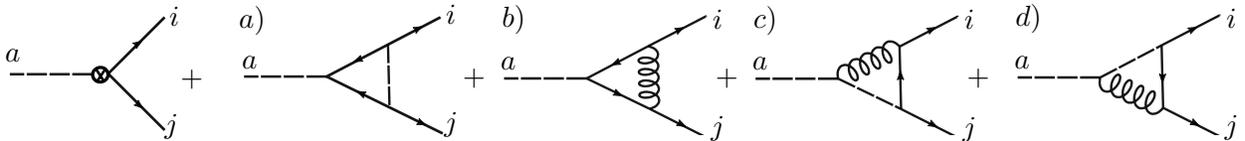


Figura 6.7: Correcciones a un lazo para el acoplamiento tipo Yukawa.

Una sutil observación en estos diagramas similares, es la elección de los momentos de las partículas internas. Si bien existe la libertad de elegir los momentos, cuidando la conservación de energía en el vértice, al fijar los momentos externos y dos de los momentos internos, la dirección del momento en la parte fermiónica es contraria en ambos casos, como de muestra en la figura 6.8, por lo cual ambos diagramas tendrán signos opuestos.

La integral correspondiente a la figura 6.7d) es

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-iY_{kj}^a) \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(p+k)^2} ig\theta_{ab}^\alpha (q+k)_\nu \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2} (-ig\gamma_\mu t_{ik}^\alpha) \frac{i}{(q+k)^2 - m_s^2}. \quad (6.27)$$

Resolviendo esta última contribución y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned} &= 2g^2 Y_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha t_{kj}^\alpha \int_0^1 dx dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu (l_\mu l_\nu + \dots)}{(l^2 - \Delta)^3} \\ &= 2 \frac{g^2}{(4\pi)^2} Y_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha t_{kj}^\alpha \frac{d}{4} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde $l^\mu = k^\mu + xq^\mu + yp^\mu$ y Δ los términos que no dependen de k . En el caso de la integral de la ecuación (6.26) el cambio de variable es $l^\mu = k^\mu - xp^\mu - yq^\mu$. Además, desarrollando los factores del algebra con la relación (6.11), el resultado es

$$\begin{aligned} Y_{ik}^a \theta_{ab}^\alpha t_{kj}^\alpha - t_{ik}^\alpha Y_{kj}^a \theta_{ab}^\alpha &= t_{is}^\alpha Y_{sk}^b t_{kj}^\alpha - Y_{is}^b t_{sk}^\alpha t_{kj}^\alpha - t_{ik}^\alpha t_{ks}^\alpha Y_{sj}^b + t_{ik}^\alpha Y_{ks}^b t_{sj}^\alpha \\ &= 2t_{is}^\alpha Y_{sk}^b t_{kj}^\alpha - \{C_2(F), Y^a\}_{ij} = -\theta^\alpha \theta^\alpha Y_{ij}^a. \end{aligned} \quad (6.29)$$

La última igualdad se obtiene como consecuencia de imponer la independencia del parámetro de fijación de norma, los detalles se encuentran en el trabajo [46]. Por lo tanto, sumando las tres contribuciones de la figura 6.7 b)-d), además de las contribuciones posteriores de la figura 6.9c) y d), tendremos que utilizar la propiedad anterior

$$8t^\alpha Y^a t^\alpha + 4\theta^\alpha \theta^\alpha Y^a = 4 \{C_2(F), Y^a\}_{ij}, \quad (6.30)$$

para simplificar la función beta final.

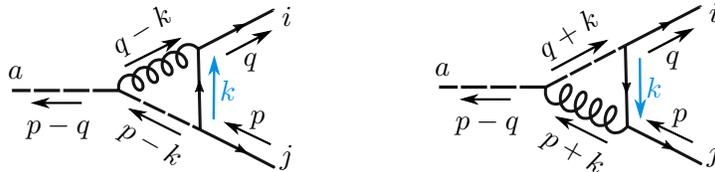


Figura 6.8: Configuración de momentos en diagramas c) y d).

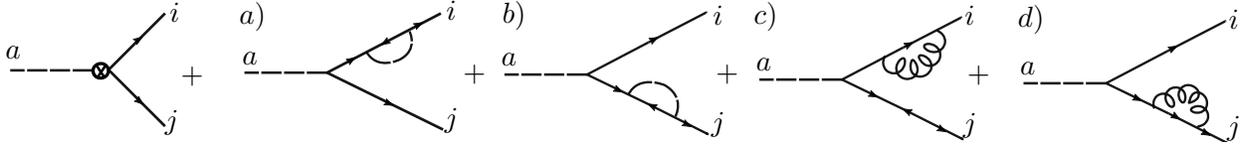


Figura 6.9: Contribuciones de autoenergías del campo fermiónico en correcciones a un lazo al vértice tipo Yukawa.

Una observación importante a la renormalización del vértice tipo Yukawa es la diferencia entre campos fermiónicos que participan en esta interacción, por lo tanto, una definición más precisa es

$$Y_{ij}^a = \frac{\sqrt{Z_{\psi_i}}\sqrt{Z_{\psi_j}}\sqrt{Z_{\phi}}}{Z_{2\psi\phi}} Y_{0ij}^a. \quad (6.31)$$

Dicha modificación también se deberían realizar en las correcciones al vértice del acoplamiento g , sin embargo, en ese caso se esta analizando una interacción de dos campos fermiónicos estarán cargados igualmente bajo el grupo de norma. Un ejemplo de este tipo de interacciones es dada por la interacción débil entre el electrón y el neutrino-electrón (así como para cada familia de leptones), donde será cierto tomar a los factores de renormalización del campo fermiónico como iguales.

En el proceso desarrollado a lo largo de este capítulo, se han analizado las contribuciones a un lazo en diferentes secciones del diagrama, diferenciando entre las autoenergías de las patas externas y las asociadas el vértice. Sin embargo, una alternativa es plantear todos los diagramas sin realizar esta separación arbitraria, por lo tanto los diagramas que contribuyen son los mostrados en la figura 6.9. Lo anterior es de utilidad para plantear el tipo de contribuciones que tenemos ahora con la modificación de la ecuación (6.31). Por lo tanto, las contribuciones ya calculadas para las autoenergía del campo fermiónico se ven modificadas en la función beta, tal que

$$\longrightarrow \otimes \longrightarrow = -i \left\{ -[Y_2^\dagger(F)Y^a + Y^a Y_2(F)] + 2g^2 \{C_2(F), Y^a\} \right\} \not{p} \frac{1}{\epsilon},$$

donde $Y_2(F) = Y^{a\dagger}Y^a$.

Por último, el cálculo de la autoenergía del campo escalar se puede obtener a partir de los siguientes diagramas de la figura 6.10.

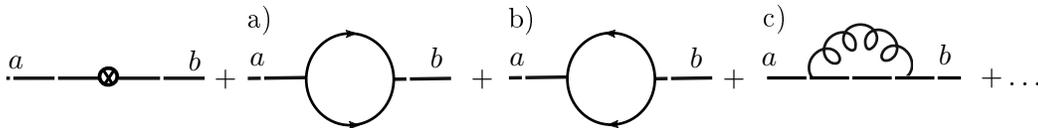


Figura 6.10: Autoenergía del campo escalar a un lazo.

Los diagramas a) y b) aunque similares en su estructura, son contribuciones que toman en cuenta la dirección de las líneas internas fermiónicas, elemento que se toma en cuenta en los trabajos [12, 13], donde se exhibe la posibilidad de ambos comportamientos a diferencia de [5, 6, 7]. La integral asociada a estos diagramas es

$$Y_2^{ab}(S) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + m_{1f})}{k^2 - m_{1f}^2} \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_{2f})}{(p - k)^2 - m_{2f}^2}, \quad (6.32)$$

donde $Y_2^{ab}(S) = \text{tr}(Y^{b\dagger}Y^a + Y^{a\dagger}Y^b)$ y aplicando el cambio de variable $\Delta = -xp^2(1-x) + xm_{2f}^2 + (1-x)m_{1f}^2$, la integral se reescribe como

$$\begin{aligned} Y_2^{ab}(S) & \int \int dx \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-l^2 - x^2 p^2 + g(m_{1f}, m_{2f})}{(l^2 - \Delta)^2} \\ & = -Y_2^{ab}(S) \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int dx \left(-\Delta d \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{2(1 - \frac{d}{2})} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} + x^2 p^2 \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Después de realizar la expansión respecto al polo, para encontrar el factor del primer término debemos resolver

$$\int_0^1 dx \Delta = -\frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{2}(m_{1f}^2 + m_{2f}^2) = \frac{1}{3}p^2, \quad (6.34)$$

donde aplicamos la conservación de energía en el vértice, $p^2 = m_{1f}^2 + m_{2f}^2$. Así, la integral (6.32) resulta en

$$a) + b) = -iY_2^{ab}(S)p^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \text{términos de masa} \quad (6.35)$$

El diagrama 6.10c) en su forma integral se expresa como

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig\theta_{cb}^\alpha p^\mu) \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \right) \frac{i}{(k+p)^2 - m_s^2} (-ig\theta_{ac}^\alpha (p+k)^\nu), \quad (6.36)$$

la cual después de aplicar el método de regularización dimensional obtenemos el resultado

$$\frac{2iC_2(S)p^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (6.37)$$

Los diagramas de la figura 6.11, aunque son a un lazo, no tienen contribución alguna dentro de nuestros cálculos al ser divergencias puras.

Una última consideración importante es la existencia de una redundancia en nuestros cálculos relacionados con el contratérmino $Z_{2\psi\phi}$ ya que existen dos maneras para introducir el contratérmino, mostradas en la figura 6.12. Dicha redundancia introducirá un factor $\frac{1}{2}$ para tomarla en cuenta.



Figura 6.11: Divergencias no contribuyentes al propagador escalar.

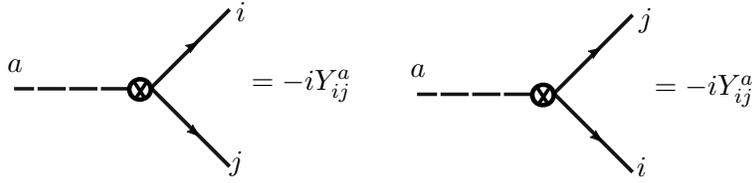


Figura 6.12: Alternativas de contratérminos para la eliminación de polos en los acoplamientos Yukawa.

Recopilando todas las contribuciones calculadas a un lazo y en conjunto con la renormalización del acoplamiento Yukawa en la ecuación (6.31), la función beta para este caso es

$$\begin{aligned}
 (4\pi)^2 \beta_{1\text{-lazo}}(Y^a) &= Y^a \left[\frac{1}{2} \text{Res} Z_{\psi_i} + \frac{1}{2} \text{Res} Z_{\psi_j} + \frac{1}{2} \text{Res} Z_{\phi} - \text{Res} Z_{2\psi\phi} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [Y_2^\dagger(F) Y^a + Y^a Y_2(F)] + 2Y^b Y^{a\dagger} Y^b + Y^b Y_2^{ab}(S) - 3g^2 \{C_2(F), Y^a\}. \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

6.3.3. Acoplamiento λ_{abcd}

El último tipo de constante de acoplamiento adimensional en este modelo por analizar es el asociado a la interacción tipo ϕ^4 . La definición de este acoplamiento renormalizado cumple con la siguiente relación

$$\lambda_{abcd} = \frac{Z_{\phi}^2}{Z_{4\phi}} \lambda_{0abcd}. \quad (6.39)$$

Con la relación anterior, podemos comenzar encontrando las correcciones al vértice λ_{abcd} , asociados a $Z_{4\phi}$. Para este factor de renormalización los diagramas de Feynman que contribuyen se presentan en la figura 6.13.

Al igual que en el caso de los acoplamientos Yukawa, existe una redundancia asociada a los contratérminos, específicamente a los índices y su posición en el acoplamiento como se muestra en la figura 6.14

Sin embargo, existe una diferencia en el planteamiento de estos factores asociados a la libertad de permutación de los índices escalares, dependiendo del diagrama a analizar y las constantes de acoplamiento presentes en el mismo. A continuación, presentamos la **notación de corchetes**, como

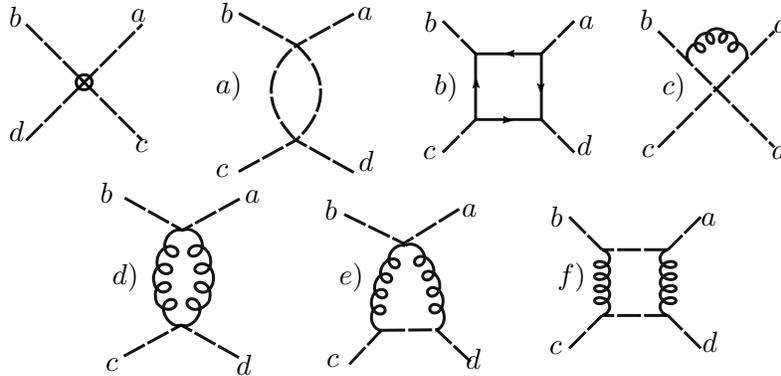


Figura 6.13: Contribuciones a un lazo para las constante λ_{abcd} .

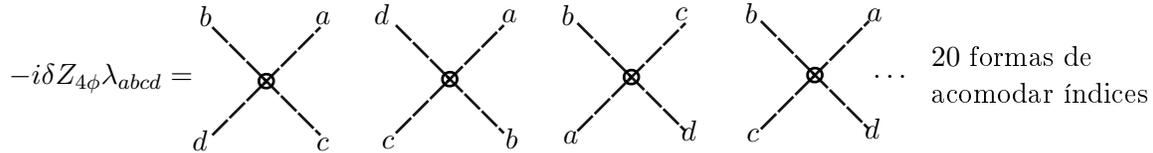


Figura 6.14: Contraterminos con $4!$ acomodados posibles de los índices para el mismo tipo de diagramas.

una simple reducción del trabajo realizado en el apéndice B y solo útil en algunos casos, obedeciendo las siguientes reglas:

- Las letras participantes sólo pueden ser las asociadas a la representación escalar, y deben encontrarse dentro del corchete.
- Si el número de letras dentro del corchete es m , el factor de permutación asociado será $m!$.
- En caso de existir más de un corchete dentro de la misma constante de acoplamiento, los factores se multiplicarán.
- Para el caso en que se cierren los corchetes en diferentes constantes, se debe considerar los posibles acomodados de letras dentro de la constante de acoplamiento, sin cambiar su posición fuera del corchete que las delimita, y también tomar en cuenta la convención de Einstein.

El diagrama 6.14 a) se escribe en su forma integral como

$$(-i\lambda_{[ab][ef]})(-i\lambda_{ef}[cd]) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_{1s}^2} \frac{i}{(p+k)^2 - m_{2s}^2}, \quad (6.40)$$

donde $p = p_a + p_b = p_c + p_d$. Tomando en cuenta los factores generados por la redundancia de contraterminos, $\lambda_{[ab][ef]\lambda_{ef}[cd]} \rightarrow \frac{1}{8}\lambda_{abef}\lambda_{efcd}$ y el factor de simetría, obtenemos el resultado para el

diagrama de la figura 6.14 a)

$$-\frac{i}{16}\lambda_{abef}\lambda_{efcd}\left(\frac{2}{\epsilon}-\log\Delta-\gamma+\log(4\pi)+\mathcal{O}(\epsilon)\right). \quad (6.41)$$

Para el segundo término, tenemos un factor de redundancia de $3!$ debido a que podemos cambiar las patas externas el diagrama, tal que existe un diagrama para cada contratérmino pensado en la figura 6.14. Así, la expresión integral es

$$\begin{aligned} & \text{tr}(Y^a Y^b Y^c Y^d) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + m_{1f})}{k^2 - m_{1f}^2} \frac{i(\not{k} - \not{p}_1 + m_{2f})}{(k - p_1)^2 - m_{2f}^2} \frac{i(\not{k} - \not{p}_3 + m_{3f})}{(k - p_3)^2 + m_{3f}^2} \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_2 - \not{k} + m_{4f})}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m_{4f}^2} \\ &= -\frac{1}{3!} \text{tr}(Y^a Y^{b\dagger} Y^c Y^{d\dagger}) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^4} 3! \frac{k^4 + \dots}{(k^2 - \Delta)^4} \\ &= -Y^4(F) \frac{d(d+2)}{3!4} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = -iY^4(F) \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \end{aligned} \quad (6.42)$$

tal que $Y^4(F) = \text{tr}(Y^a Y^{b\dagger} Y^c Y^{d\dagger})$. En el anterior cálculo existe un factor de 2, eliminado con el factor de simetría, asociado a la posibilidad de cambiar la dirección de las líneas de partícula, como se muestra en la figura 6.15.

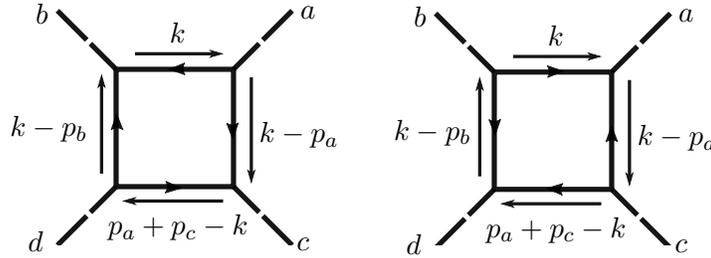


Figura 6.15: Alternativas de diagrama de caja para las líneas internas.

Para el siguiente diagrama, se tendrá que sumar sobre todas las permutaciones, sin embargo, el resultado calculado para un solo diagrama es suficiente para inferir el de los restantes, cambiando los factores del grupo. La integral asociada es

$$\begin{aligned} & (-i\lambda_{[fe][cd]})(ig\theta_{af}^\alpha)(ig\theta_{be}^\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2} \frac{i(p_a - k)_\mu}{(p_a - k)^2 - m_{1s}^2} \frac{i(k - p_b)_\nu}{(p_b - k)^2 - m_{2s}^2} \\ &= \frac{g^2}{4} \lambda_{fecd} \theta_{af}^\alpha \theta_{be}^\alpha \int 2 \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2 + \dots}{(l^2 - \Delta)^3} \\ &= i\frac{g^2}{2} \lambda_{fecd} \theta_{af}^\alpha \theta_{be}^\alpha \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Una propiedad útil para la reducción de las permutaciones para el caso de la figura 6.13c), la cual tiene su origen en la invarianza de norma del término ϕ^4 , es

$$\theta_{ae}^\alpha \lambda_{ebcd} + \theta_{be}^\alpha \lambda_{aecd} + \theta_{ce}^\alpha \lambda_{abed} + \theta_{de}^\alpha \lambda_{abce} = 0, \quad (6.44)$$

propuesta en [7]. Con la anterior relación, los factores asociados a algunos diagramas tipo 6.13 se presentan en la figura 6.16. En este caso se omiten momentáneamente las reglas de índices y corchetes, ya que el factor asociado a estos diagramas es el mismo que para el primer caso resuelto en la integral.

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_{fecd} \theta_{af}^\alpha \theta_{be}^\alpha = -(\lambda_{afcd} \theta_{ef}^\alpha + \lambda_{aefd} \theta_{cf}^\alpha + \lambda_{aecf} \theta_{df}^\alpha) \theta_{be}^\alpha \\
 &= \lambda_{fbcd} \theta_{af}^\alpha \theta_{ec}^\alpha = -(\lambda_{afed} \theta_{bf}^\alpha + \lambda_{abfd} \theta_{ef}^\alpha + \lambda_{abcf} \theta_{df}^\alpha) \theta_{ec}^\alpha \\
 &= \lambda_{fbce} \theta_{af}^\alpha \theta_{ed}^\alpha = -(\lambda_{afcd} \theta_{bf}^\alpha + \lambda_{abfe} \theta_{cf}^\alpha + \lambda_{abcf} \theta_{ef}^\alpha) \theta_{ed}^\alpha
 \end{aligned}$$

Figura 6.16: Interacciones entre bosones escalares por un bosón de norma.

La cancelación de los términos restantes, es una consecuencia del planteamiento de los coeficientes en la figura 6.17. Por lo tanto, los términos resultantes son

$$-\lambda_{afcd} \theta_{fe}^\alpha \theta_{eb}^\alpha - \lambda_{abfd} \theta_{fe}^\alpha \theta_{ec}^\alpha - \lambda_{abcf} \theta_{fe}^\alpha \theta_{ed}^\alpha - \lambda_{fbcd} \theta_{fe}^\alpha \theta_{ea}^\alpha = - \sum_i C_2(S)_{fi} \lambda_{abcd;i}. \quad (6.45)$$

Los diagramas de la figura 6.17 en la última columna generan el último término extra en la ecuación (6.45), si permutamos los índices en la constante de acoplamiento.

Por último, los tres diagramas restantes de la figura 6.13 contribuyen en el mismo factor asociado al grupo, que es el producto de 4 matrices en la representación escalar. Para el primer diagrama

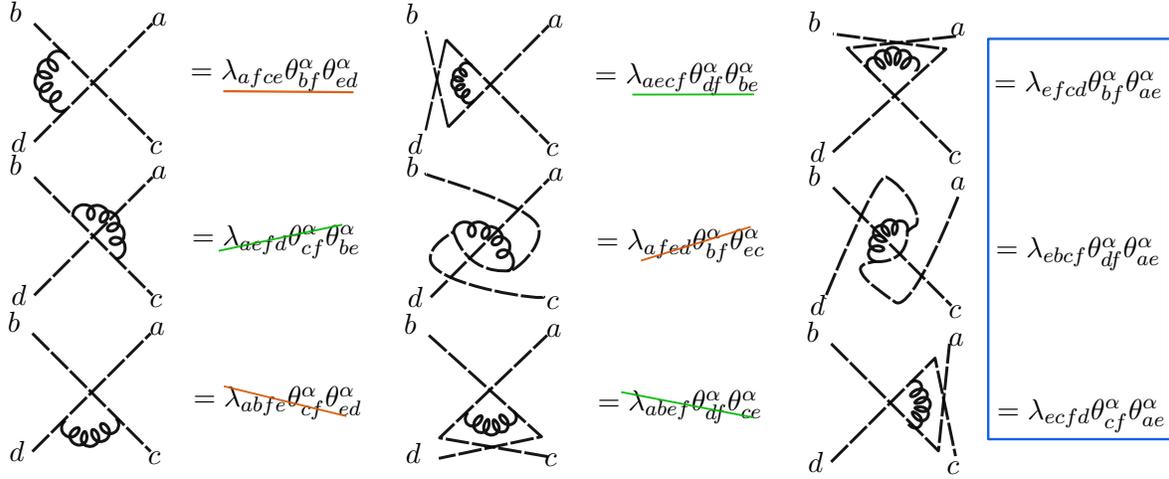


Figura 6.17: Permutaciones en diagramas tipo λg^2 , omitiendo los factores no relacionados con los índices escalares.

6.13d), al aplicar las reglas de Feynman la integral es

$$-g^4 \frac{1}{4} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \frac{-i\eta_{\mu\rho}}{k^2} \frac{-i\eta_{\nu\sigma}}{(k+p)^2}. \quad (6.46)$$

Aplicando el método de regularización dimensional a la integral anterior obtenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{g^4}{8} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{d}{(l^2 - \Delta)^2} \\ &= \frac{4ig^4}{8(4\pi)^2} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \end{aligned} \quad (6.47)$$

donde se conjetura que el factor de permutación se asocia a solamente cuatro diagramas equivalentes y el factor de simetría es $s = 2$. En el apéndice B, se realiza el cálculo de estos factores de permutación para algunos casos particulares.

Es importante notar que la multiplicación de los anticonmutadores se puede reescribir como:

$$\left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd} = 2 \left(\theta_{ae}^\alpha \theta_{eb}^\beta \theta_{cf}^\alpha \theta_{fd}^\beta + \theta_{ae}^\alpha \theta_{eb}^\beta \theta_{cf}^\beta \theta_{fd}^\alpha \right) = 2 \left(\theta_{ae}^\beta \theta_{eb}^\alpha \theta_{cf}^\beta \theta_{fd}^\alpha + \theta_{ae}^\beta \theta_{eb}^\alpha \theta_{cf}^\alpha \theta_{fd}^\beta \right). \quad (6.48)$$

En la figura 6.18 se puede notar la configuración de momentos utilizados en los últimos diagramas.

Por lo tanto, el diagrama 6.13e) tiene la expresión

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-ig^2 \eta_{\mu\nu} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \right) \frac{-1}{k^2 (k+p)^2} \frac{i}{(p_1-k)^2 - m_s^2} \left(ig\theta_{cf}^\alpha (p_1-k)^\mu \right) \left(ig\theta_{fd}^\beta (k-p_1)^\nu \right) \\
 &= \frac{-g^4}{4} \frac{\left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd}}{2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int dx dy \frac{l^2 + \dots}{(l-\Delta)^3} \\
 &= -ig^4 \frac{\left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd}}{4(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \tag{6.49}
 \end{aligned}$$

donde $p = p_b - p_a$ y $p_1 = p - p_c$.

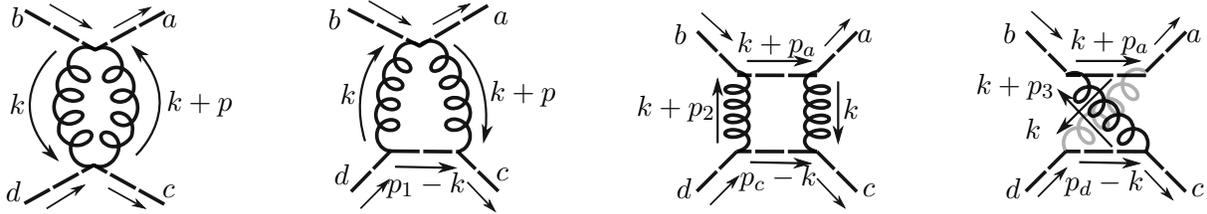


Figura 6.18: Configuración de momentos internos para diagramas de orden g^4 .

Para el caso de los últimos dos diagramas de la figura 6.18 las integrales son:

$$\begin{aligned}
 & -\theta_{ae}^\alpha \theta_{eb}^\beta \theta_{cf}^\alpha \theta_{fd}^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{ig^2 (k^\mu - p_a^\mu)^2}{(k-p_a)^2 - m_{1s}^2} \frac{ig^2 (k^\nu - p_c^\nu)^2}{(k-p_c)^2 - m_{2s}^2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k-p_2)^2} \quad y \\
 & -\theta_{ae}^\alpha \theta_{eb}^\beta \theta_{cf}^\beta \theta_{fd}^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{ig^2 (k^\mu - p_a^\mu)^2}{(k-p_a)^2 - m_{1s}^2} \frac{ig^2 (k^\nu - p_d^\nu)^2}{(k-p_d)^2 - m_{2s}^2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k-p_3)^2}, \tag{6.50}
 \end{aligned}$$

donde $p_2 = p_b - p_a$ y $p_3 = p_c - p_d$. Las anteriores integrales son similares, salvo cambios en $p_c \rightarrow p_d$ y $p_2 \rightarrow p_3$. Por lo tanto, al no afectar las potencias en la variable de integración k , ambas integrales se reducen a

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{1}{4!} g^4 \frac{\left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd}}{2} 3! \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^4 + \dots}{(l^2 - \Delta)^4} \\
 &= -i \frac{g^4}{16} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \tag{6.51}
 \end{aligned}$$

con Δ distinto en cada diagrama, sin embargo, al interesarnos solamente el factor del polo contribuyen igual y se pueden factorizar. Se incluyó el factor de grupo de norma de ambos diagramas y se utilizó la propiedad (6.48) para simplificarlo, además, ese incluyen los factores de simetría y de permutación respectivamente.

Utilizando la ecuación (5.23) podemos llegar a la expresión

$$\beta_{1\text{-lazo}}(\lambda_{abcd}) = \lambda_{abcd} \left[\sum_{i \in A} \text{Res} Z_{\phi_i} - \text{Res} Z_{4\phi} \right], \quad (6.52)$$

donde $A = \{a, b, c, d\}$.

Así, recopilando todas las contribuciones de nuestros diagramas, obtenemos

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \beta_{1\text{-lazo}}(\lambda_{abcd}) &= \sum_{perm} \frac{\lambda_{abef} \lambda_{efcd}}{8} - 2 \sum_{perm} Y^4(F) + 2 \sum_i Y_2(i) \lambda_{abcd;i} \\ &\quad - 3g^2 \sum_i C_2(i) \lambda_{abcd;i} + \frac{3}{8} g^4 \sum_{perm} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

que es la Ecuación del Grupo de Renormalización para acoplamiento λ_{abcd} .

6.4. Extensión a grupos semi-simples

En la sección anterior se calcularon las RGEs para teorías tipo Modelo Estándar, con partículas fermiónicas y escalares cargadas bajo un solo grupo de norma $G = G_{Lie}$. Para generalizar el cálculo a grupos semi-simples $G = G_{Lie}^{(1)} \times \cdots \times G_{Lie}^{(n)}$ se toman las siguientes consideraciones a 1 lazo en $\beta(g)$

$$g^3 C_2(G) \rightarrow g_k^3 C_2(G^{(k)}), \quad (6.54)$$

$$g^3 S_2(R) \rightarrow g_k^3 S_2^k(R) \quad (6.55)$$

y para el caso de $\beta(Y^a)$ y $\beta(\lambda_{abcd})$ los cambios son

$$g^2 C_2(R) = \sum_k g_k^2 C_2^k(R). \quad (6.56)$$

Adicionalmente, se considera la siguiente notación $\Lambda_{ab,cd} = (\theta^\alpha)_{ac} (\theta^\alpha)_{bd}$, y las reglas de sustitución son

$$g^2 \Lambda_{ab,cd} \rightarrow \sum_k g_k^2 \Lambda_{ab,cd}^k \quad (6.57)$$

$$\frac{g^4}{8} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{ab} \left\{ \theta^\alpha, \theta^\beta \right\}_{cd} \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{k,l} g_k^2 g_l^2 \sum_{perm} \left(\Lambda_{ac,ef}^k \Lambda_{ef,bd}^l + \Lambda_{ae,fd}^k \Lambda_{eb,cf}^l \right). \quad (6.58)$$

Capítulo 7

Meta-estabilidad del vacío de Higgs

Dentro del SM, y por medio de las RGEs la condición de estabilidad del potencial de Higgs no se cumple, ya que $\lambda(E) < 0$. Esta condición genera así escenarios en el SM como la posibilidad de encontrarnos en la región de meta-estabilidad del vacío de Higgs. Para evitar dichos escenarios, en la literatura se estudian varias propuestas nacidas en física mas allá del Modelo Estándar, cuyos principales trabajos se recopilan en [47]. Por lo cual, en este capítulo se presenta un modelo con extensión tipo $U(1)'$ donde se busca estabilizar el potencial de Higgs por medio de esta modificación de las RGEs, utilizando el procedimiento presentado en [48].

7.1. Modelo Estándar

Tomando en cuenta los resultados del capítulo 6, aplicado al caso particular cuyo grupo de norma es $G = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. Adicionalmente, las expresiones para el factor de Casimir en la representación fundamental y adjunta de $SU(N)$ son

$$C_2(R) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_2(G) = N. \quad (7.1)$$

Para el caso de una simetría $U(1)$ la función beta del se ve modificada solamente contando las contribuciones de las cargas(hipercarga) de las partículas fermiónicas y escalares, como se muestra en [49], tal que

$$\beta(g_Y) = -\frac{g_Y^3}{(4\pi)^2} \left(-\frac{2}{3} \sum_f Q_f^2 - \frac{1}{3} \sum_s Q_s^2 \right), \quad (7.2)$$

donde $Q_{f,s}$ son las cargas de los campos fermiónicos de Weyl y los campos escalares respectivamente. Así, realizando la suma de cargas al cuadrado, considerando las cargas expresadas en la figura 4.2, obtenemos

$$16\pi^2 \frac{dg_Y}{dt} = \beta(g_Y) = - \left(-\left(\frac{2}{3}\right) \frac{10}{3} n_g - \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} \right) g_Y^3 = \frac{41}{6} g_Y^3, \quad (7.3)$$

donde n_g representa el numero de generaciones, en el caso del SM $n_g = 3$.

Por otra parte, la RGE para las simetrías $SU_L(2)$ y $SU_c(3)$ las RGEs estarán dadas por la ecuación (6.19), sólo cambiará el factor de Casimir y el hecho que el bosón de Higgs contribuirá únicamente a la constante de acoplamiento asociada a la interacción débil, tal que

$$16\pi^2 \frac{dg_2}{dt} = \beta(g_2) = \left(\frac{11}{3} 2 - \frac{4}{3} n_g - \frac{1}{6} \right) g_2^3 = -\frac{19}{6} g_2^3, \quad (7.4)$$

$$16\pi^2 \frac{dg_3}{dt} = \beta(g_3) = \left(\frac{11}{3} 3 - \frac{4}{3} n_g \right) g_3^3 = -7g_3^3. \quad (7.5)$$

Retomando el lagrangiano con los acoplamientos Yukawa en el SM en la ecuación (4.3), obtenemos

$$\mathcal{L}_{masa} = Y_{ij}^u \bar{Q}_{L_i} \bar{H} u_{R_i} + Y_{ij}^d \bar{Q}_{L_i} H d_{R_i} + Y_{ij}^l \bar{L} H e_{R_i} + h.c. \quad (7.6)$$

Algunos factores necesarios para las ecuaciones de los acoplamientos Y y λ son:

$$\begin{aligned} Y_2(S) &= \text{tr} \left(\frac{3}{2} (Y_{ij}^{u\dagger} Y_{ij}^u - Y_{ij}^u Y_{ij}^{u\dagger}) + \frac{3}{2} (Y_{ij}^{d\dagger} Y_{ij}^d - Y_{ij}^d Y_{ij}^{d\dagger}) + \frac{1}{2} (Y_{ij}^{l\dagger} Y_{ij}^l - Y_{ij}^l Y_{ij}^{l\dagger}) \right) \\ &= \text{tr} \left(3Y_{ij}^{u\dagger} Y_{ij}^u + 3Y_{ij}^{d\dagger} Y_{ij}^d + Y_{ij}^{l\dagger} Y_{ij}^l \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$H(S) = \text{tr} \left(3(Y_{ij}^{u\dagger} Y_{ij}^u)^2 + 3(Y_{ij}^{d\dagger} Y_{ij}^d)^2 + (Y_{ij}^{l\dagger} Y_{ij}^l)^2 \right). \quad (7.8)$$

La obtención de los factores restantes implican un desarrollo de los índices asociados a las partículas escalares y fermiónicas, procedimiento el cual se encuentra en la referencia [50], donde además se explica la normalización de los factores Yukawa de acuerdo al VEV que se considere.

Con la simplificación de los factores mencionados anteriormente, podemos dar las RGE para los acoplamientos tipo Yukawa en el SM,

$$16\pi^2 (Y^u)^{-1} \frac{dY^u}{dt} = \frac{3}{2} (Y^{u\dagger} Y^u - Y^{d\dagger} Y^d) + Y_2(S) - \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right), \quad (7.9)$$

$$16\pi^2 (Y^d)^{-1} \frac{dY^d}{dt} = \frac{3}{2} (Y^{d\dagger} Y^d - Y^{u\dagger} Y^u) + Y_2(S) - \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right), \quad (7.10)$$

$$16\pi^2 (Y^l)^{-1} \frac{dY^l}{dt} = \frac{3}{2} Y^{l\dagger} Y^l + Y_2(S) - \frac{9}{4} (g_1^2 + g_2^2). \quad (7.11)$$

Y paralelamente, las RGEs para el acoplamiento λ son

$$16\pi^2 \frac{d\lambda}{dt} = 12\lambda^2 - \left(\frac{9}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \lambda + \frac{9}{4} \left(\frac{3}{25} g_1^4 + \frac{2}{5} g_1^2 g_2^2 + g_2^4 \right) + 4Y_2(S)\lambda - 4H(S). \quad (7.12)$$

Al resolver las RGEs para el SM podemos obtener la evolución de las constantes de acoplamiento, al fijar las condiciones iniciales para determinar las soluciones de manera única. Aunque dichas

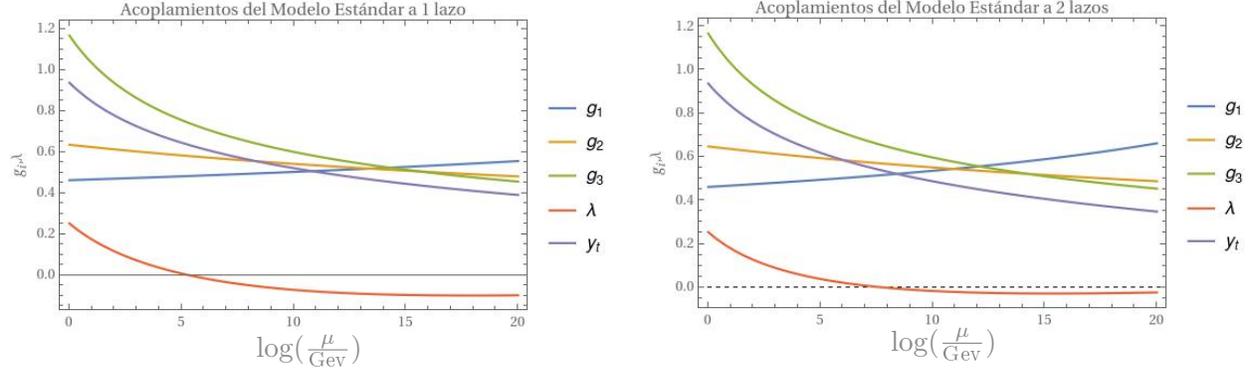


Figura 7.1: Solución numérica a las RGEs del Modelo Estándar a uno y dos lazos en orden perturbativos, con ayuda de la paquetería SARAH y considerando $g_Y = \sqrt{5/3}g_1$.

condiciones se pueden tomar en cualquier escala de energía, se utilizan las condiciones presentadas en [51], donde la escala de energía elegida es $M_t = 173.35$ GeV, se resumen en:

$$g_Y(M_t) = 0.3583, \quad g_2(M_t) = 0.64779, \quad g_3(M_t) = 1.1666, \\ \lambda(M_t) = 0.12604 \quad \text{y} \quad Y^t(M_t) = 0.9369.$$

Utilizando la paquetería SARAH se pueden obtener las RGEs para el SM a uno y dos lazos. El marco teórico bajo el cual funciona esta paquetería es por medio del método antes mencionado, **Background Field Method**[12, 13, 5, 6, 7], basado en la idea de la separación del campo en sus contribuciones clásica y cuántica. Adicionalmente, se extiende a acoplamiento dimensionales, tales como las masas de las partículas, por medio de una modificación a los índices de los acoplamiento llamado **Dummy Field Method**[52], aunque el análisis de este tipo de constantes sale de los objetivos de este trabajo. En consecuencia, podemos analizar la estabilidad del potencial de Higgs al menos en sus primeros dos órdenes perturbativos, como se muestra en la figura 7.1.

Se puede extender este análisis a ordenes mayores como en [53, 54] y se encontrará que el mismo comportamiento para el acoplamiento λ , cambiando de signo para energías del orden de 10^{11} GeV en análisis más detallados como [51]. Dicho cambio en la estructura del potencial pone las condiciones para el problema de meta-estabilidad del vacío de Higgs, el cual describe un decaimiento en un vacío real con tiempo característico mayor la edad del Universo. En el capítulo 4 se describe una condición de estabilidad $\lambda > 0$, y claramente la estructura del potencial cambiará si no se cumple, tal como se muestra en la figura 7.2. Vale la pena añadir que existen trabajos con mayor profundidad [55], que toman en cuenta un análisis de las incertidumbres que existen para los parámetros del SM en particular M_t y m_h , y las condiciones para resolver las RGEs, los cuales indican que el SM no descarta ninguno de los escenarios de estabilidad y meta-estabilidad, favoreciendo más este último caso. Con la propuesta de la siguiente sección solamente se busca realizar una demostración de la estabilización del vacío electro-débil del SM a escalas arbitrarias.

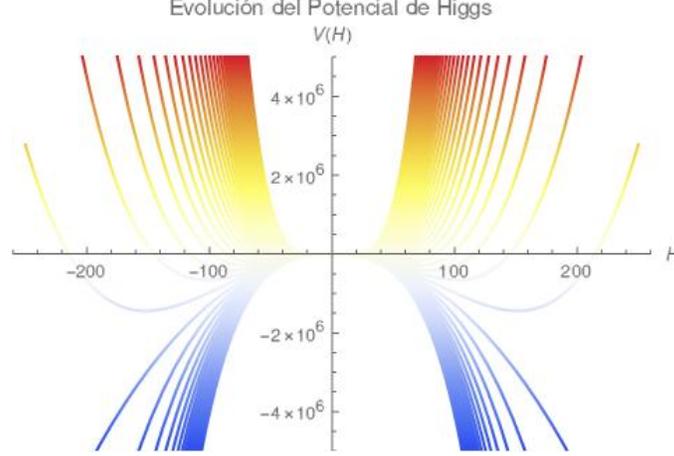


Figura 7.2: Dada la masa del Higgs $M_h = 125.15$ GeV [51] y utilizando la solución para el acoplamiento $\lambda(E)$, se esboza la evolución del potencial a diferentes energías.

7.2. Interacción $U(1)'$

Una posible solución para estabilizar el potencial de Higgs es la inclusión de contribuciones en las funciones beta del acoplamiento λ y de los acoplamientos Y^a , particularmente el acoplamiento Yukawa correspondiente a el quark top. Una de las modificaciones propuestas en la literatura, siguiendo [48], es añadir una fuerza adicional al grupo de norma del SM,

$$G_{Lie} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)', \quad (7.13)$$

donde $U(1)'$ es la simetría de norma adicional, y deriva en la inclusión de un bosón de norma al contenido de partículas previamente planteado en la figura 4.2. Los tipos de interacciones en el modelo, propuesto en [48], se pueden expresar con la densidad lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{SM} + g_4 B'_\mu \sum_i Q_i \bar{\psi}_{SM,i} \gamma^\mu \psi_{SM,i} \\ & + \sum_i D'_\mu S_i^* D^{*\mu} S_i - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{\epsilon}{2} F^Y_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} \\ & + \sum_i \bar{\chi} \left(i\partial_\mu + g_4 Q'_i B'_\mu \right) \gamma^\mu \chi_i, \end{aligned} \quad (7.14)$$

donde

$$D'_\mu = \partial_\mu - ig_4 Q'_i B'_\mu \quad (7.15)$$

con B'_μ y g_4 el campo y el acoplamiento del grupo de norma adicional. Los campos de materia adicionales, S_i y χ_i , son campos escalares y fermiónicos singuletes bajo el grupo del SM, Q_i y Q'_i representan las cargas de los fermiones quirales y los singuletes del SM, respectivamente.

La propuesta anterior, en un análisis más general como el presentado en [14], deberá incluir las contribuciones dadas por un potencial de interacción entre las partículas escalares que participan en el modelo, tal que

$$V = \sum_{ij} \lambda_{s_i s_j} S_i^* S_i S_j^* S_j + \sum_i \lambda_{h s_i} H^\dagger H S_i^* S_i. \quad (7.16)$$

Sin embargo, por simplicidad en el trabajo se analizará solamente en las contribuciones debidas al bosón de norma, por lo cual consideramos $\lambda_{s_i s_j}, \lambda_{h s_i} \ll 1$. Claramente, también existirán rompimientos de simetría asociado a cada singulete S_i que adquiera un VEV, así como fenomenología interesante debido a la mezcla cinética mediada por ϵ que se analiza en [47].

Para evitar la mezcla entre los campos bosónicos B_μ^Y y B'_μ podemos utilizar un cambio de base, tal que

$$F^Y \rightarrow \bar{F}^Y - \frac{\epsilon \bar{F}'}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \quad F' \rightarrow \frac{\bar{F}'}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \quad (7.17)$$

modificando la derivada covariante como

$$g_Y Y \bar{B}^Y + \left(\frac{g_4}{\sqrt{1-\epsilon^2}} Q - \frac{\epsilon g_Y}{\sqrt{1-\epsilon^2}} Y \right) \bar{B}'. \quad (7.18)$$

En consecuencia, redefinimos los nuevos acoplamientos

$$\bar{g} = -\frac{\epsilon g_Y}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad \text{y} \quad \frac{g_4}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \bar{g}_4, \quad (7.19)$$

que en su conjunto dichas redefiniciones se denominan el cambio a la base diagonal y utilizaremos esta base para dar las RGEs en este modelo. Notemos que no se ha realizado ninguna suposición sobre ϵ ¹.

Considerando nuestros cálculos del capítulo anterior y la generalización presentada en [13] para multiples $U(1)$ dentro del grupo de norma, con mezcla cinética y a dos lazos, las RGEs obtenidas son:

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d\lambda_h}{dt} &= -6Y_t^4 - 3 \left(g_1^2 + 3g_2^2 + \bar{g}^2 - 8\lambda_h - 4Y_t^2 \right) \lambda_h \\ &\quad + 3Q_h^2 \left(g_1^2 + g_2^2 + \bar{g}^2 - 4\lambda_h + 4Q_h^2 g_4^2 \right) g_4 \bar{g} \\ &\quad + 3Q_h^2 \left(g_1^2 + g_2^2 + 3\bar{g}^2 - 4\lambda_h + 4Q_h^2 g_4^2 \right) g_4^2 \\ &\quad + \frac{3}{4} g_1^2 \bar{g}^2 + \frac{3}{4} g_2^2 \bar{g}^2 + \frac{3}{8} g_1^4 + \frac{3}{8} \bar{g}^4 + \frac{9}{8} g_2^4 + \frac{3}{4} g_1^2 g_2^2, \end{aligned} \quad (7.20)$$

¹Renombraremos a \bar{g}_4 como g_4 en las ecuaciones subsecuentes.

$$\begin{aligned}
16\pi^2 \frac{dg_4}{dt} &= \frac{41}{6} g_4 \bar{g}^2 + \left(-4Q_b + \frac{2}{3} Q_h - 4Q_l + 4Q_q + 8Q_t - 4Q_\tau \right) g_4^2 \bar{g} \\
&+ \left(6Q_b^2 + \frac{2}{3} Q_h^2 + 4Q_l^2 + 12Q_q^2 + \frac{1}{3} Q_S^2 + 6Q_t^2 + 2Q_\tau^2 + \frac{2}{3} Q_\chi^2 \right) g_4^3 \\
&+ \frac{1}{16\pi^2} \left(18Q_b^4 + 8Q_h^4 + 12Q_l^4 + 36Q_q^4 + 4Q_S^4 + 18Q_t^4 + 6Q_\tau^4 + Q_\chi^4 \right) g_4^5, \quad (7.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16\pi^2 \frac{d\bar{g}}{dt} &= \frac{41}{6} \bar{g}^3 + \left(-4Q_b + \frac{2}{3} Q_h - 4Q_l + 4Q_q + 8Q_t - 4Q_\tau \right) g_4 \bar{g}^2 \\
&+ \frac{41}{6} g_1^2 \bar{g} + Q_4^2 g_4^2 \bar{g} + Q_5 g_1^2 g_4, \quad (7.22)
\end{aligned}$$

$$16\pi^2 \frac{dY_t}{dt} = Y_t \left(-g_4 \bar{g} (4Q_t + Q_q) - 3g_4^2 (Q_q^2 + Q_t^2) - \frac{17}{12} g_1^2 - \frac{9}{4} g_2^2 - 8g_3^2 - \frac{17}{12} \bar{g}^2 + \frac{9}{2} Y_t^2 \right), \quad (7.23)$$

donde

$$Q_4^2 = 6Q_b^2 + \frac{2}{3} Q_h^2 + 4Q_l^2 + 12Q_q^2 + \frac{1}{3} Q_S^2 + 6Q_t^2 + 2Q_\tau^2 + \frac{2}{3} Q_\chi^2 \quad \text{y} \quad (7.24)$$

$$Q_5 = \left(-4Q_b + \frac{2}{3} Q_h - 4Q_l + 4Q_q + 8Q_t - 4Q_\tau \right). \quad (7.25)$$

Las cargas de la interacción adicional son: $Q_{t,b,\tau}$ para fermiones derechos y $Q_{q,l}$ para fermiones izquierdos, Q_h para la carga asociada al Higgs, Q_S y Q_χ son las cargas de los campos S y χ respectivamente.

Para evitar el surgimiento de anomalías en los acoplamientos Yukawa en el SM las cargas deben obedecer las relaciones,

$$Q_t = Q_q + Q_h, \quad Q_b = Q_q - Q_h, \quad Q_\tau = Q_l - Q_h. \quad (7.26)$$

Adicionalmente, consideraremos las condiciones $\bar{g}(\Lambda_{Z'}) = 0$, $g_4(\Lambda_{Z'}) = 0.1$, donde $\Lambda_{Z'}$ es la escala donde el acoplamiento g_4 se vuelve relevante. Consideramos esta escala para nuestros cálculos como $\Lambda_{Z'} = M_t$.

Con las restricciones anteriores, los parámetros relevantes para obtener un mínimo estable al evolucionar la energía son Q_q , Q_h y Q_4 . El análisis de distintos escenarios realizado en [48] muestra los posibles valores para dichas cargas. Para mostrar la evolución y un ejemplo de estabilidad, elegimos una de las muchas configuraciones, mencionadas en el mismo trabajo, obteniendo la evolución de los acoplamientos en la figura 7.3 para energías superiores a la escala de Planck, preservando la estabilidad ($\lambda > 0$).

Por último, aunque la estabilización de λ es importante, existen restricciones adicionales, con la misma relevancia, y que deben considerarse. Dentro de estas restricciones, vale la pena mencionar que se busca que la teoría permanezca en el régimen perturbativo, lo cual se traduce en la condición

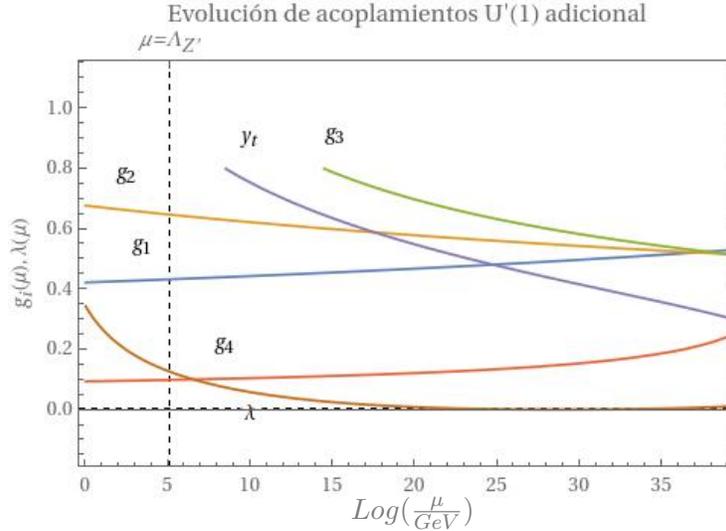


Figura 7.3: Solución estable para el acoplamiento λ con $Q_h = 1$, $Q_q = 2.5$ y $Q_4 = 13$. En este caso las RGEs impiden que λ sea negativa y comparando con la figura 7.1, la simetría $U(1)'$ adicional resuelve el problema de meta-estabilidad del SM.

$\lambda < 1$. Dentro de la propuesta, al variar la carga $U'(1)$ del bosón de Higgs como se muestra en la figura 7.4, se encuentra que a medida que la carga Q_h aumenta, la propiedad perturbativa de la teoría se pierde a energías más altas, a pesar de ser una solución válida con vacío estable, por lo cual, será una restricción que nos ayudará a generar el espacio de parámetros válido para un vacío estable.

En general, en adición al análisis dado en [47], existen propuestas donde el significado físico de la simetría extra tiene interpretaciones distintas. Por ejemplo, la propuesta $U(1)_{B-L}$, la cual considera que la simetría global del SM, donde B es el número bariónico y L el número leptónico, puede ser promovida a una simetría local como se propone en [56] y se analiza la inestabilidad del vacío de Higgs para este modelo en [57]. En la misma línea, las diferencias $L_\mu - L_e$, $L_e - L_\tau$ o $L_\mu - L_\tau$ pueden ser promovidas a simetrías de norma, sin introducir anomalías en el modelo [58]. Asimismo, la propuesta de esta simetría de norma adicional puede provenir del contexto de teorías de cuerdas y la compactificación del orbifoldo heterótico como se presenta en [59]. El análisis realizado en este trabajo, así como en [47], se puede particularizar para cada modelo y acotar el espacio de cargas permitido en el mismo.

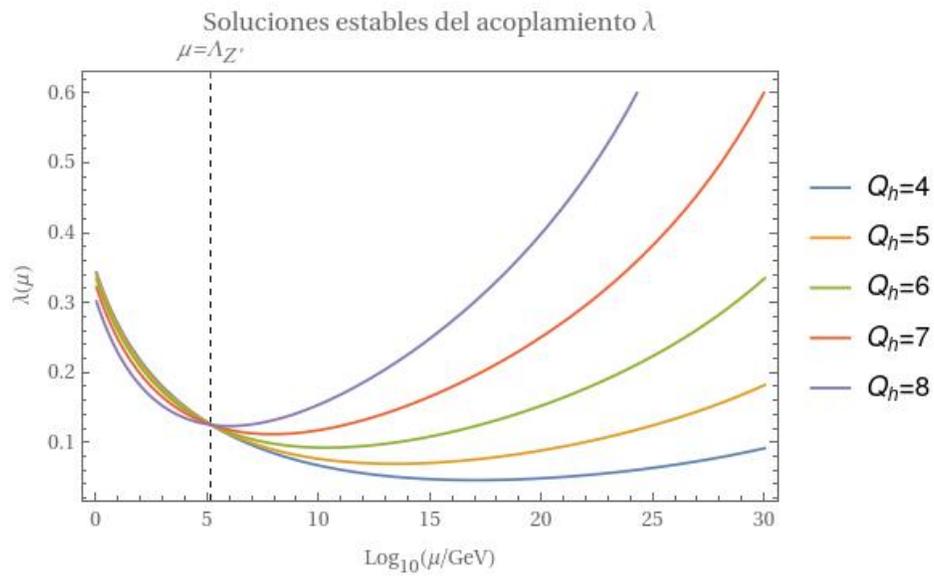


Figura 7.4: Variación de la evolución de $\lambda(\mu)$ para diferentes Q_h y utilizando los parámetros $Q_q = 2.5$ y $Q_4 = 13$.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

El presente trabajo está dedicado al cálculo explícito de las ecuaciones del grupo de renormalización (RGEs) a un lazo en teorías cuánticas de campo tipo modelo estándar de partículas elementales (SM), y a su aplicación en una extensión del SM dotada de una interacción abeliana adicional, cuyo mediador es un bosón Z' , con la finalidad de resolver la posible meta-estabilidad del vacío de Higgs. Con estos objetivos, hice una breve revisión de los conceptos básicos empleados en las teorías cuánticas de campos. Primeramente, en el capítulo 2, presenté una revisión de teoría de grupos, y en especial de aspectos de teoría de representaciones. Después, en el capítulo 3 procedí a establecer cómo estos elementos matemáticos son la base del concepto de teorías de norma desde el punto de vista geométrico y teorías clásicas de campos, lo que conduce a las llamadas teorías de Yang-Mills. Como parte de la discusión, incluí una introducción a la cuantización por integral de trayectoria con el objetivo de conocer de manera más concreta cómo ocurren las interacciones en estas teorías.

En el capítulo 4, expuse los aspectos más importantes del SM, introduciendo los tipos de acoplamientos adimensionales restantes que se pueden construir. Entonces, planteé las generalidades del SM, tales como el contenido de partículas, el grupo de simetría de norma $SU(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, así como sus simetrías globales. Además, expliqué el mecanismo de Higgs para la adquisición de masa de las partículas bosónicas W^\pm y Z , mediadoras de las interacciones nucleares débiles y las partículas fermiónicas como quarks y leptones.

En el capítulo 5, como herramienta esencial para el cálculo principal de este trabajo, aporté una introducción al cálculo de divergencias de una teoría cuántica de campos. Es aquí, en donde aparecen las RGEs, un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de los acoplamientos adimensionales de la teoría. Utilicé el esquema \overline{MS} para resolver las contribuciones a un lazo y revisé los procedimientos de *renormalización* y *regularización* en teorías cuánticas de campos.

Finalmente, el capítulo 6 contiene algunos de los resultados principales de este trabajo. Calculé explícitamente las RGEs para una teoría tipo SM, es decir, una teoría en la que aparecen i) interacciones cuárticas con acoplamiento λ , como en el potencial de Higgs, ii) interacciones tipo Yukawa con acoplamiento Y^a , y iii) una simetría de norma basada en un grupo de Lie simple. La generali-

zación de estos cálculos a grupos de Lie semi-simples también es presentada. Para estos cálculos, un aspecto muy poco discutido en la literatura especializada y crucial en los cálculos es la presencia de factores de permutación. Para poder determinar los resultados, conjeturé la existencia de un *factor de permutación* en estas teorías con bosones y fermiones, similar al factor de simetría que aparece en teorías escalares. Este factor surge especialmente de una redundancia en los contratérminos para la interacción tipo ϕ^4 . La conjetura del factor de permutación permite comparar exitosamente los resultados aquí obtenidos con los obtenidos previamente mediante el llamado método de campos de fondo (o background field method, BFM) [5, 6, 7].

El capítulo 7 está destinado al tema que motiva el título de esta tesis. Dada la conocida meta-estabilidad (o inestabilidad) del SM ante las correcciones radiativas contenidas en las RGEs, los resultados del capítulo 6 pueden hacer notar que el acoplamiento λ del potencial de Higgs puede ser negativo a muy altas energías, si el SM no es modificado. Esto es catastrófico porque conduce a un escenario en el que la energía del vacío no está acotada por abajo. A este problema se le conoce como meta-estabilidad del vacío de Higgs. Introduciendo una simetría abeliana adicional y cargas adecuadas bajo esta fuerza, mostré que el grupo de renormalización puede modificarse de forma que el vacío deja de ser meta-estable. En particular, el acoplamiento cuártico es positivo definido, lo que conduce a un potencial acotado para cualquier energía. Comprobé este resultado empleando el grupo de renormalización, no sólo a un lazo como en el capítulo anterior, sino incluyendo correcciones radiativas a dos lazos mediante el uso del programa SARAH en el modelo con una simetría adicional. Este resultado es relevante en la física de partículas y comprueba el poder de la herramienta estudiada.

En el contexto de este trabajo, es posible apreciar un objetivo a mediano plazo: comprobar la validez del factor de permutación conjeturado en el capítulo 6, en el planteamiento de la teoría en el lagrangiano (6.1) y sus contratérminos para el acoplamiento λ_{abcd} . De manera similar, será interesante explorar los resultados para un número mayor de lazos y comparar con otros trabajos.

Otro de los objetivos inmediatos para un trabajo futuro sería emplear el método BFM para calcular las RGE a cualquier números altos de lazos, como en las refs. [5, 6, 7]. Con este propósito, además de los métodos aquí discutidos, es necesario entender y desarrollar más el método BFM, lo cual requerirá dedicación de varios años. Una pregunta adicional en esta ruta sería la posibilidad del cálculo de amplitudes por métodos novedosos y alternativos, como el del *amplituhedron*, propuesto recientemente por Nima Arkani-Hamed [60], lo que tal vez permitiría un cálculo más directo de las RGEs.

Por otra parte, este trabajo introduce a la exploración de diferentes modelos con $U(1)'$ adicionales, así como el planteado de espacios de parámetros permitidos en el mismo, buscando la estabilización del potencial de Higgs y manteniendo la evolución del acoplamiento en el régimen perturbativo. Adicionalmente, se da pie a trabajar en un futuro en los cálculos para los modelos que presentan mezcla cinética entre grupos de norma abeliano, efecto que fue despreciado en el capítulo 7, y similar a como se muestra en [13], en donde se dan las RGEs para este caso. Para lo anterior, no existen cálculos explícitos utilizando BFM o utilizando la metodología tradicional tratada en el capítulo 6. Sería interesante desarrollarlos.

Para concluir, este trabajo motiva futuras investigaciones en el desarrollo de técnicas para el cálculo de divergencias, ya sea aumentando el orden del desarrollo perturbativo, o generalizando el modelo que se propone. Es bien sabido que el método BFM, es mayormente utilizado en el contexto de gravedad cuántica, por lo tanto, un mejor conocimiento del mismo, como se motiva en este trabajo, puede influir de manera positiva en diversas áreas de la física más allá del cálculo de RGEs.

Apéndice A

Parametrización de Feynman

Para reescribir las integrales resultantes de diagramas a un lazo en el presente trabajo y en la literatura [25], se utilizan los siguientes resultados. La propiedad de la que partimos es

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots x_n A_n]^n}. \quad (\text{A.1})$$

Para realizar la reducción presentada en el capítulo 5 de la autoenergía de una partícula fermiónica es necesario reducir la integral utilizando el caso particular de la ecuación anterior con $n = 2$, por lo tanto podremos reescribir la integral como

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2((k^2 + p^2) - m^2)} &= \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]x + k^2 y]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(k+p)^2 x - m^2 x + k^2(1-x)]^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Considerando la variación dimensional en la integral obtenemos

$$= -e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\not{k} + \not{p}) + md}{[(k+xp)^2 + x(1-x)p^2 - xm^2]^2}, \quad (\text{A.3})$$

donde se realizó los cambios de variable planteados anteriormente y se eliminaron los factores dependientes de \not{k} ya que al ser lineales por paridad la contribución en la integral es nula.

Otras ecuaciones de reducción que nos serán útiles en los cálculos del capítulo 6 son los casos $n = 3, 4$ para correcciones a vértices a un lazo, dando como resultado

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx dy \frac{2}{[Ax + By + (1-x-y)C]^3} \quad y \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{ABCD} = \int_0^1 dx dy dz \frac{3!}{[Ax + By + Cz + D(1-x-y-z)]^4}. \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B

Convenciones en diagramas y factores de permutación

La convención utilizada en este trabajo para el orden en que se transcriben las reglas de Feynman en el espacio de momentos a su forma integral se describe en la figura B.1.

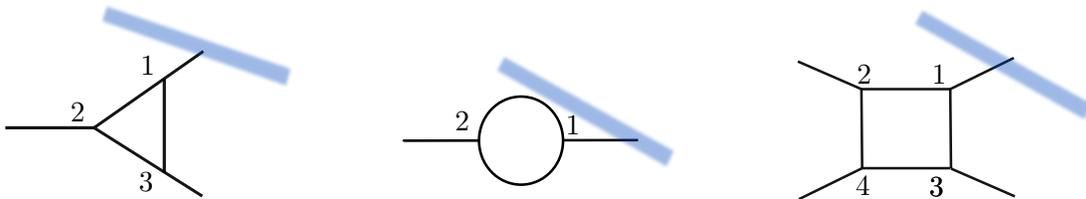


Figura B.1: Regla nemotécnica para los posibles diagrama.

En la figura anterior se dan todos los tipos de diagramas o sus equivalencias topológicas presentes en el trabajo y se ordenan los factores de los vértices presentes en el diagrama. La convención anterior se puede visualizar como una línea imaginaria pasando a través del diagrama, siguiendo el orden establecido por la numeración.

Por otra parte, en el capítulo 6 se planteó la aparición de un factor de redundancia en la teoría, el cual está asociado a los índices de los campos escalares participantes en nuestro potencial tipo ϕ^4 . A continuación se muestra la obtención de este factor para distintos diagramas anteriormente utilizados para el cálculo de RGEs en este trabajo.

Para calcular el factor de permutación del diagrama de la figura B.2, en este y en posteriores diagramas se puede visualizar como los posibles intercambios de partículas escalares. Lo anterior nos da la posibilidad de dibujar las posibilidades de intercambio entre estas partículas escalares con la restricción de dejar el diagrama invariante. Por lo cual, en la misma figura se colorean las líneas de partículas escalares intercambiables entre sí. Además, se dibujan algunos de los cambios que no

están permitidos entre sí, ya que modificarían el diagrama, ocasionando una permutación.

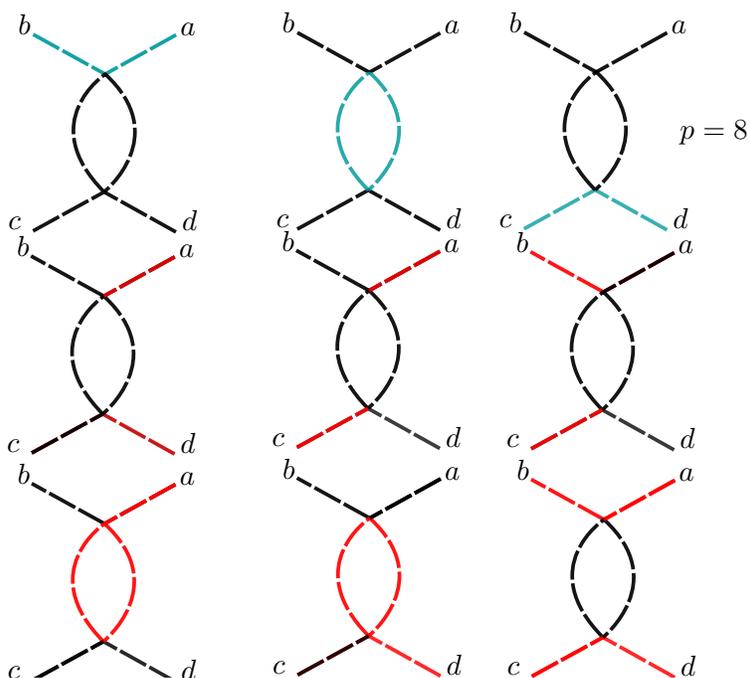


Figura B.2: Configuraciones que contribuyentes al factor de permutación (azul) y ejemplos de no contribuyentes (rojo).

El siguiente diagrama por analizar es el de la caja formada por sólo acoplamiento Yukawa. En la configuración será mas sencillo dar los cambios permitidos de las $4!$ posibilidades.

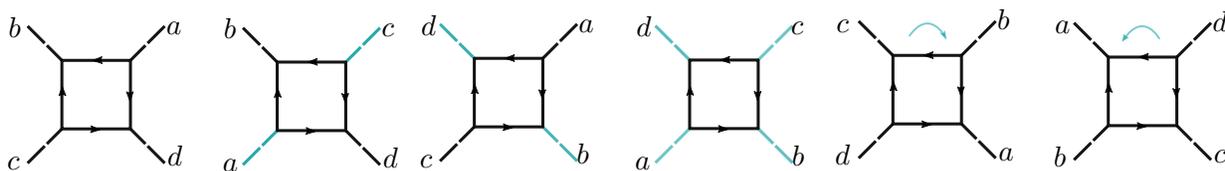


Figura B.3: Intercambios permitidos en diagramas de caja con acoplamiento tipo Yukawa. El factor de permutación para este caso es $p = 6 = 3!$.

Otro ejemplo dentro del cálculo de estos factores es el que se muestra en el tercer diagrama de la figura 6.18, donde nuevamente tendremos un diagrama tipo caja pero con interacciones tipo $ig\theta^\alpha$. Todos los arreglos posibles son permitidos en este diagrama debido al tipo de interacción, por lo tanto, $p = 4!$.

Notemos que en el cálculo de estos factores sólo será necesario dibujar las posibilidades en que

podemos intercambiar las partículas escalares a los largo del diagrama¹.

A continuación se presentan todos los subdiagramas posibles en la figura B.4, provenientes de los dos primeros diagramas de la figura 6.18.

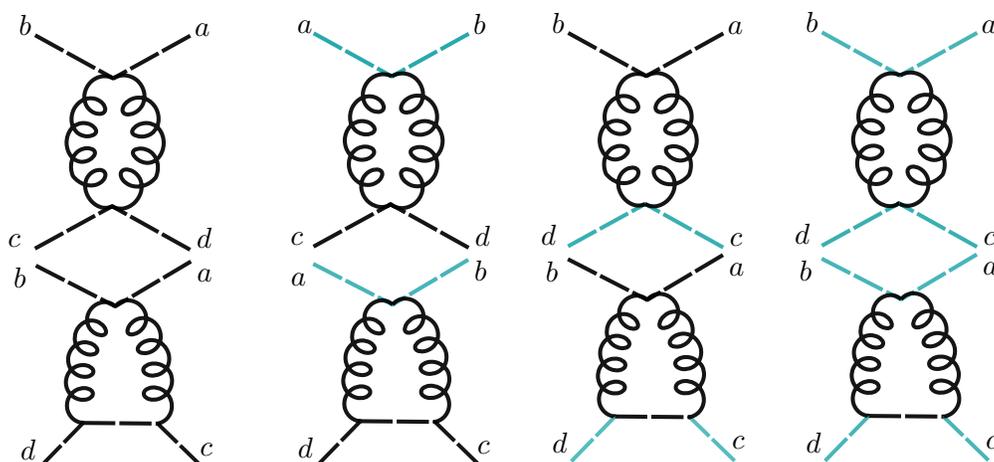


Figura B.4: Subdiagramas permitidos y factores de simetría asociados.

¹Aunque el 'Factor de permutación' describe el cambio de nuestras partículas escalares a través del diagrama, este no considera los cambios debidos a una permutación debido a que alteran el diagrama y los factores al mismo, de ahí el origen de su nombre.

Bibliografía

- [1] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 321–323.
- [2] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 508–509.
- [3] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964), 132–133.
- [4] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. Abdel Khalek, A. Abdelalim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, and et al., Physics Letters B **716** (2012), no. 1, 1–29.
- [5] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nucl. Phys. B **222** (1983), 83–103.
- [6] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nucl. Phys. B **236** (1984), 221–232.
- [7] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nucl. Phys. B **249** (1985), 70–92.
- [8] I. Jack and H. Osborn, Nucl. Phys. B **249** (1985), 472–506.
- [9] S. Ichinose and M. Omote, Nucl. Phys. B **203** (1982), no. 2, 221 – 267.
- [10] L. Abbott, Nucl. Phys. B **185** (1981), 189–203.
- [11] I. Jack and H. Osborn, Nucl. Phys. B **207** (1982), 474–504.
- [12] M.-x. Luo, H.-w. Wang, and Y. Xiao, Phys. Rev. D **67** (2003), 065019, [hep-ph/0211440].
- [13] M.-x. Luo and Y. Xiao, Phys. Lett. B **555** (2003), 279–286, [hep-ph/0212152].
- [14] O. Lebedev, Eur. Phys. J. C **72** (2012), 2058, [1203.0156].
- [15] L. Hue, H. Hung, and H. Long, Rept. Math. Phys. **69** (2012), 331–351, [1011.4142].
- [16] C. Palmer and M. Carrington, Can. J. Phys. **80** (2002), 847–854, [hep-th/0108088].
- [17] B. C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations, volume 222 of Graduate Texts in Mathematics*, 2003.

-
- [18] H. Georgi, *Lie algebras in particle physics*, 2nd ed. ed., vol. 54, Perseus Books, Reading, MA, 1999.
- [19] A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*, Princeton University Press, USA, 2016.
- [20] B. C. Hall, *An Elementary introduction to groups and representations*, May 2000.
- [21] C.-N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954), 191–195.
- [22] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959), 485–491.
- [23] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, 2003.
- [24] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*, 1996.
- [25] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [26] D. Candlin, *Il Nuovo Cimento* (1955-1965) **4** (1956), no. 2, 231–239.
- [27] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics. Second edition*, vol. 57, 1998.
- [28] L. Faddeev and V. Popov, *Phys. Lett. B* **25** (1967), 29–30.
- [29] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*, Cambridge University Press, Sep 2013.
- [30] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **10** (1959), 107–117.
- [31] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1962), 965–970.
- [32] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, Mar 2014.
- [33] J. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*, vol. 2, Cambridge University Press, 2014.
- [34] A. Bilal, *Advanced Quantum Field Theory: Renormalization, Non-Abelian Gauge Theories and Anomalies (Unpublished Lecture Notes)*, Oct 2014.
- [35] H. Lehmann, *Nuovo Cim.* **11** (1954), 342–357.
- [36] G. J. Bollini C.G. and D. A.G., *Il Nuovo Cimento* (1964).
- [37] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Nuovo Cim. B* **12** (1972), 20–26.
- [38] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **33** (1971), 173–199.

- [39] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **35** (1971), 167–188.
- [40] W. Bietenholz and L. Prado, Physics Today **67** (2014), no. 2, 38–43, [<https://doi.org/10.1063/PT.3.2277>].
- [41] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1343–1346.
- [42] H. D. Politzer, Phys. Rept. **14** (1974), 129–180.
- [43] J. Taylor, Nucl. Phys. B **33** (1971), 436–444.
- [44] A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **10** (1972), 99–107.
- [45] D. Tong, *Gauge Theory (Unpublished Lecture Notes)*, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>, Acceso; 03 Marzo 2021.
- [46] M. Ozer, Turk. J. Phys. **22** (1998), 351–360.
- [47] P. Langacker, Rev. Mod. Phys. **81** (2009), 1199–1228, [0801.1345].
- [48] S. Di Chiara, V. Keus, and O. Lebedev, Phys. Lett. B **744** (2015), 59–66.
- [49] M. E. Peskin, *Beyond the standard model*, in *The 1996 European School of HEP (formerly CERN / JINR School of Physics)*, 1997, pp. 49–142.
- [50] F. Lyonnet, I. Schienbein, F. Staub, and A. Wingerter, Comp. Phys. Communications **185** (2014), no. 3, 1130–1152.
- [51] D. Buttazzo, G. Degrassi, P. P. Giardino, G. F. Giudice, F. Sala, A. Salvio, and A. Strumia, JHEP **2013** (2013), no. 12.
- [52] I. Schienbein, F. Staub, T. Steudtner, and K. Svirina, Nucl. Phys. B **939** (2019), 1–48.
- [53] S. P. Martin, Phys. Rev. D **89** (2014), no. 1.
- [54] S. P. Martin, Phys. Rev. D **92** (2015), no. 5.
- [55] G. Degrassi, S. Di Vita, J. Elias-Miró, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, and A. Strumia, Journal of High Energy Physics **2012** (2012), no. 8.
- [56] R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, Phys. Rev. Lett. **44** (1980), 1316–1319, [Erratum: Phys.Rev.Lett. 44, 1643 (1980)].
- [57] A. Datta, A. Elsayed, S. Khalil, and A. Moursy, Phys. Rev. D **88** (2013), no. 5.
- [58] X.-G. He, G. C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas, Phys. Rev. D **44** (1991), 2118–2132.

- [59] Y. Olguín-Trejo, O. Pérez-Figueroa, R. Pérez-Martínez, and S. Ramos-Sánchez, *Phys. Lett. B* **795** (2019), 673–681, [1901.10102].
- [60] N. Arkani-Hamed and J. Trnka, *JHEP* **10** (2014), 030, [1312.2007].