



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Procesos de ramificación con bancos de semillas
y catástrofes del tipo binomial

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático Aplicado

PRESENTA:

Julio Ernesto Nava Trejo

TUTORA

Dra. María Clara Fittipaldi

COTUTOR

Dr. Adrián González Casanova Soberón





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia.

Agradecimientos

A Clara y Adrián, por todo el acompañamiento que me han brindado, por todo lo que me han enseñado y sobre todo por el gran ejemplo que me dan.

A toda mi familia por ser el apoyo mas grande que tengo, gracias por su amor incondicional y todo lo que no podría expresar.

A Argelia mi compañera de carrera por todo lo compartido. A los amigos que encontré en la licenciatura Fer, Paco, Luis, Diego, Kia, Diana, Guillermo, Lalo y uno que otro más, en especial a Silvestre por todas las platicas y desvaríos.

A Javier Paez por todas las lecciones y toda su generosidad. A Sergio López por los buenos consejos y las oportuñidades.

A mis amigos de siempre, Abel, Joselyn, Miguel, Mariel, Danae, Christopher y Fercha por todo lo vivido y la suerte de encontrarlos.

Índice general

1. Procesos de ramificación	5
1.1. Procesos de ramificación a tiempo discreto	5
1.1.1. Proceso Galton-Watson	5
1.1.2. Procesos Gaton-Watson multitypo	13
1.2. Procesos de ramificación a tiempo continuo	23
1.2.1. Procesos de ramificación a tiempo continuo	23
1.2.2. Ramificación Multitypo a tiempo continuo	32
2. Procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial	41
2.1. Desastres	41
2.2. Bancos de Semillas	47
3. Dualidad entre procesos de ramificación con desastres y procesos deterministas por partes.	53
3.1. Procesos deterministas por partes	53
3.2. Dualidad	60
3.2.1. Dualidad entre procesos BPBD y p-jump	62
3.2.2. Dualidad entre procesos BPSBBD y 2D-p-jump	65
4. Simulación	73
4.1. Método de Euler	73
4.2. Método de Euler acoplado a desastres	75
4.3. BPBD vs BPSBBD	78
4.4. Conclusión y posibles ramificaciones	83
A. Procesos de Markov a tiempo continuo	85
A.1. Cadenas de Markov a tiempo continuo	85
A.1.1. De la cadena de Markov a la descripción infinitesimal	87
A.1.2. De la descripción infinitesimal a la cadena de Markov en tiempo continuo	92
A.2. Procesos de Feller	98
A.2.1. Relaciones entre el semigrupo y el generador	100
A.2.2. Ejemplos	105

Abstract

The aim of this project is to construct and analyze the branching process with seed banks and binomial disasters. The model construction will be done in the most self-contained way possible, starting with a review of branching processes theory. Later, we begin the study of branching processes with disasters using the approach from [7], reaching preliminar results; we extrapolate these ideas to the model with seed banks. Then, based on the novel theory of [5] we use the p -jump processes to study the extinction probability through duality relationship between the processes.

Finally, we introduce the $2D$ - p -jump processes which partially extend p -jump processes. These processes are fundamental in our analysis because they maintain a duality relationship with the branching process with seed banks and binomial disasters and give to us an extremely useful tool to estimate the probability of extinction via simulation.

Resumen

Los objetivos de esta tesis son construir y estudiar los procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial. La construcción del modelo se hará de la manera más autocontenida posible comenzando por un repaso de la teoría de procesos de ramificación. Posteriormente comenzaremos con el estudio de los procesos de ramificación con desastres utilizando el enfoque clásico provisto por [7], encontrando resultados preliminares; aplicaremos estas ideas para estudiar el proceso con bancos de semillas. Después basándonos en [5] emplearemos la novedosa teoría de procesos p -jump para estudiar la probabilidad de extinción vía la dualidad entre los procesos.

Por último, introduciremos a los procesos $2D$ - p -jump que extienden parcialmente a los procesos p -jump, siendo fundamentales ya que mantienen una relación de dualidad con los procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial y nos brindan de una herramienta para estimar la probabilidad de extinción a través de simulaciones.

Introducción

Los objetivos de esta tesis son construir y estudiar el proceso de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial. Este modelo nace de abstraer y simplificar la estrategia de organismos que en presencia de condiciones negativas para su crecimiento optan por entrar en un estado reversible de reducción de su estado metabólico. Por tanto, el interés biológico de este modelo es poder comparar poblaciones y determinar si los bancos de semillas representan una ventaja en un entorno catastrófico.

El modelo matemático de nuestro interés es un proceso de ramificación multitypo a tiempo continuo con dos especies, identificadas como individuos activos e inactivos. Las acciones de los individuos activos son reproducirse según un mecanismo de ramificación arbitrario o pasar a estado de latencia, los individuos inactivos solo pueden reactivarse. Simultáneamente en el tiempo se desarrollan desastres dictados por un proceso de Poisson, cuyo efecto se refleja en que todo individuo activo tiene una probabilidad de morir según una variable aleatoria de tipo Bernoulli, mientras que los individuos inactivos no son afectados. El conjunto de los individuos en estado de latencia es llamado banco de semillas, ya que los organismos pueden sobrevivir a condiciones adversas del ambiente y reactivarse.

La presentación formal de este modelo se hará de modo constructivo, de la manera más autocontenida posible. En el primer capítulo haremos un recorrido por la teoría clásica de procesos de ramificación, comenzando por el modelo más sencillo con un solo tipo de individuos en estados y tiempo discretos, hasta llegar a procesos en tiempo continuo con una cantidad finita de tipos de individuos. En cada modelo estudiaremos la construcción, momentos y probabilidad de extinción.

En el segundo capítulo estudiaremos los procesos de ramificación con desastres del tipo binomial utilizando el enfoque de [Kaplan, 1975] para obtener el comportamiento del proceso en media, además de introducir la estrategia de cobertura de apuestas que presupone tienen las poblaciones con bancos de semillas.

En el tercer capítulo estudiaremos la herramienta de dualidad para procesos de Markov y la emplearemos para estudiar a los procesos de ramificación a tiempo continuo con desastres de tipo binomial desde el comportamiento de los procesos p -*jump* empleados en [Hermann y Pfaffelhuber, 2019]. Ana-

lizaremos el comportamiento en infinito de los procesos p -*jump*, utilizando teoría de regeneración. Con el fin de estudiar los procesos con bancos de semillas y desastres extenderemos la idea de procesos p -*jump* a dos dimensiones.

Finalmente, en el cuarto capítulo utilizaremos las relaciones de dualidad encontradas para simular los procesos de ramificación a tiempo continuo con bancos de semillas y desastres del tipo binomial a través de los procesos $2D$ - p -*jump*.

Capítulo 1

Procesos de ramificación

1.1. Procesos de ramificación a tiempo discreto

Los procesos de ramificación han representado desde su origen un enlace entre la probabilidad y los modelos de poblaciones. En 1874, H. W. Watson planteaba el problema de determinar cuando el apellido de una familia desaparece, y fue Francis Galton quien propuso una solución que serviría de base para un futuro campo de estudio. Actualmente las generalizaciones del modelo propuesto por Galton y Watson son utilizadas para abordar problemas de genética de poblaciones o fenómenos físicos como las cascadas de electrones y fotones. El objetivo de este capítulo es brindar al lector un acercamiento a los procesos de ramificación desde el modelo más sencillo a sus generalizaciones, modificando el tiempo en que se concibe al proceso y el número de tipos de individuos que se considera. En cada uno de los modelos estudiados nos ocuparemos de su construcción, momentos y la probabilidad de extinción. Toda la teoría y resultados enunciados en este capítulo están basados en [1] y [2].

1.1.1. Proceso Galton-Watson

El proceso de Galton-Watson es un modelo sencillo que simula la dinámica de una población. Antes de formularlo, entendamos primero que fenómeno describe y exploremos que condiciones debería satisfacer. Consideremos a un individuo o objeto capaz de replicarse a sí mismo, que después de un tiempo unitario muere dejando descendencia. Estos nuevos individuos se reproducirán de manera independiente y con la misma distribución del organismo inicial. El proceso $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ representa el número total de individuos en cada tiempo. Si nosotros comenzamos con solo un individuo al tiempo 0, Z_1 será el número de hijos del primer individuo; Z_2 la población total generada por los individuos de la primera generación; y sucesivamente tendremos que Z_n es el número de descendientes de la generación anterior. Sean $(\xi_k^n)_{n,k \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas en los enteros

no negativos, que dictan el número de hijos del individuo k en la generación n , por las observaciones hechas tenemos que

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_k^n, \quad (1.1)$$

y además

$$\mathbb{P}[Z_{n+1} = j | Z_n = i] = \mathbb{P} \left[\sum_{k=1}^i \xi_k^n = j \right] = \mathbb{P} [\xi^{*i} = j], \quad (1.2)$$

donde ξ^{*i} es la convolución de i variables aleatorias independientes de distribución ξ . El proceso deseado deberá tener entonces estas sencillas pero descriptivas propiedades.

Definición 1.1. *Un proceso de Galton-Watson es una cadena de Markov $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en los enteros no negativos, \mathbb{N} , cuyas probabilidades de transición están definidas en términos de una variable aleatoria ξ con distribución $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de la siguiente manera:*

$$p(i, j) := \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} p_j^{*i} & \text{si } i \geq 1 \\ \delta_0(0, j) & \text{si } i = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

donde $(p_k^{*i})_{k \in \mathbb{N}}$ es la i -ésima convolución de la distribución $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Donde $\delta_0(i, j)$ es la delta de Kronecker.

A lo largo del capítulo supondremos que $Z_0 = 1$ a menos que lo contrario se indique; emplearemos la notación usual de cadenas de Markov para transiciones de n pasos,

$$p_n(i, j) := \mathbb{P}[Z_n = j | Z_0 = i];$$

y nos referiremos a la distribución $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ como el *mecanismo de ramificación*. Exploremos las propiedades del proceso, calculemos sus momentos, varianzas y la probabilidad de que el proceso llegue eventualmente a 0. Las funciones generadoras serán fundamentales para estas tareas.

Definición 1.2. *Si X es una variable aleatoria discreta en \mathbb{N} , con distribución $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la **función generadora de probabilidad** se define como*

$$\mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

con $|s| \leq 1$.

Recordatorio 1.1. Sean $(\xi_k)_{k=1}^n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, la función generadora de probabilidad satisface que,

$$\mathbb{E}[s^{\sum_{k=1}^n \xi_k}] = \left(\mathbb{E}[s^{\xi_1}] \right)^n,$$

con $|s| \leq 1$.

Recordatorio 1.2. Si X, Y son variables aleatorias en el mismo espacio de estados cuyas funciones generadoras existen y satisfacen que

$$\mathbb{E}[s^X] = \mathbb{E}[s^Y],$$

para s en alguna vecindad de 0, entonces X y Y tienen la misma distribución.

Observación 1.1. Si $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso de Markov en los naturales. Entonces \mathcal{Z} es un proceso de ramificación si solo si se satisface que

$$\mathbb{E}^i[s^{Z_n}] = \left(\mathbb{E}^1[s^{Z_n}] \right)^i.$$

Donde $\mathbb{E}^i[X_n]$ representa la esperanza del proceso comenzando con i individuos. Este hecho es claro de los recordatorios 1.1 y 1.2.

A lo largo del capítulo nos referiremos a f como la función generadora asociada al mecanismo de ramificación

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k. \quad (1.4)$$

Consideremos a la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida de manera iterativa como,

$$f_0(s) = s, f_1(s) = f(s), \dots, f_{n+1}(s) = f(f_n(s)).$$

Nuestro primer objetivo es demostrar que la función generadora del proceso al tiempo n coincide con f_n . Es decir, f_n corresponde a la función generadora de Z_n

$$f_{(n)} := \sum_{j=0}^{\infty} p_n(1, j) s^j.$$

Veamos la igualdad entre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(f_{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

El término inicial se cumple trivialmente pues $f_{(0)} = \delta_0(1, 1)s = s$, y para el siguiente elemento, tenemos

$$f_{(1)}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p(1, j) s^j = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j = f(s).$$

Ahora notemos la relación

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(i, j) s^j = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{*i} s^j = \mathbb{E}^i[s^{Z_1}] = (\mathbb{E}^1[s^{Z_1}])^i = (f(s))^i, \quad (1.5)$$

y utilizándose junto con las ecuaciones de Chapman-Kolgorov, veamos que

$$\begin{aligned} f_{(n+1)}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+1}(1, j) s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_n(1, k) p(k, j) s^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_n(1, k) \sum_{j=0}^{\infty} p(k, j) s^j = \sum_{k=0}^{\infty} p(1, k) (f(s))^k \\ &= f_{(n)}(f(s)), \end{aligned}$$

por tanto, ya que coinciden en sus primeros elementos y se definen por la composición, concluimos que son iguales. La importancia de este resultado recae en que nos permite estudiar el proceso a partir de su mecanismo de ramificación.

Utilicemos las funciones generadoras para calcular los momentos del proceso. Supondremos que la esperanza y varianza del mecanismo de ramificación, m y σ^2 respectivamente, son finitas. Por las propiedades de la función generadora tenemos que

$$m = \mathbb{E}[Z_1] = f'(1), \quad \sigma^2 = \text{Var}[Z_1] = f''(1) - f'(1).$$

Utilizando la regla de la cadena tenemos que el primer momento Z_n está dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n] &= f'_n(1) \\ &= f'(1) f'_{n-1}(1) \\ &= m^n, \end{aligned}$$

para la varianza, primero calculemos su segundo momento factorial

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n(Z_n - 1)] &= f''_n(1) \\ &= f''(1) (f'_{n-1}(1))^2 + f'(1) f''_{n-1}(1) \\ &= f''(1) m^{2(n-1)} + m f''_{n-1}(1) \\ &= f''(1) m^{2n-2} + f''(1) m^{2n-3} + m^2 f''_{n-2}(1) \\ &= f''(1) (m^{2n-2} + m^{2n-3} + \dots + m^{n-1}) \\ &= f''(1) \sum_{k=2}^{n+1} m^{2n-k} \\ &= \begin{cases} f''(1) \frac{m^{n-1}(m^n-1)}{m-1} & \text{si } m \neq 1 \\ f''(1)n & \text{si } m = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Si $m \neq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Z_n] &= \mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n]^2 \\
&= \mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n] + \mathbb{E}[Z_n] - \mathbb{E}[Z_n]^2 \\
&= f_n''(1) + \mathbb{E}[Z_n] - \mathbb{E}[Z_n]^2 \\
&= f_n''(1) \frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} + m^n - m^{2n} \\
&= (\sigma^2 + m^2 + m) \frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} + m^n - m^{2n} \\
&= \sigma^2 \frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} + m(m - 1) \frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} - m^n(m^n - 1) \\
&= \sigma^2 \frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1},
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\text{Var}[Z_n] = \begin{cases} \sigma^2 \frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} & \text{si } m \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{si } m = 1 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Cualquier momento de orden superior puede ser obtenido por la regla de la cadena utilizando un procedimiento análogo.

Estudiemos algunas propiedades útiles de la función generadora que facilitarán el cálculo de la probabilidad de extinción. En orden de evitar procesos degenerados, supondremos que todo mecanismo de ramificación satisface que

- $p_0 + p_1 < 1$,
- $p_k < 1, \forall k \geq 2$.

Proposición 1.1. *La función generadora del mecanismo de ramificación f satisface que*

1. *Es estrictamente creciente en el intervalo $[0, 1]$,*
2. *Es convexa en el intervalo $[0, 1]$,*
3. *$f(0) = p_0$ y $f(1) = 1$,*
4. *Si $m \leq 1$ entonces $f(t) > t$ para todo $t \in [0, 1]$,*
5. *Si $m > 1$ entonces $f(t) = t$ tiene una única raíz en el $[0, 1]$.*

Demostración.

1. Veamos que la primera derivada de f es positiva

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} > 0,$$

para todo $s \in [0, 1]$, por tanto es estrictamente creciente.

2. Por la segunda derivada de f

$$f''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0,$$

para todo $s \in [0, 1]$, tenemos que es convexa.

3. Utilizando la convención de que $0^0 = 1$. Evaluando en 0 y 1,

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k 0^k = p_0$$

y

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

4. Por el teorema del valor medio tenemos que para toda t menor que 1 $\exists \zeta \in (t, 1)$ tal que

$$f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(t)}{1 - t}.$$

Notemos que ya que $m = f'(1) \leq 1$ entonces $f'(\zeta) < 1$ y por tanto

$$1 - f(t) = f'(\zeta)(1 - t) < 1 - t,$$

lo que implica $f(t) > t$.

5. Definamos $h(t) = f(t) - t$, veamos que $h(0) = p_0 \geq 0$. Notemos que si $m > 1$ entonces existe un $s < 1$ tal que $f(t) < t$ y por tanto $h(s) < 0$. Por el teorema de Rolle existirá una raíz en el intervalo $[0, 1]$. Ya que la función f es estrictamente creciente y convexa concluimos que dicha raíz es única.

□

Corolario 1.1. *Sea q la raíz más pequeña de $f(t) = t$ en el intervalo $t \in [0, 1]$. Si $m \leq 1$ entonces $q = 1$; si $m > 1$ entonces $q < 1$.*

Demostración. La prueba es consecuencia de la proposición 1.1. Si $m \leq 1$ por el inciso 4 no existen raíces más pequeñas que 1; y si $m > 1$ el punto 5 asegura que $q < 1$. □

Lema 1.1. *Sea q la raíz más pequeña de $f(t) = t$ en el intervalo $t \in [0, 1]$.*

1. Si $t \in [0, q)$ entonces $f_n(t) \uparrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$,
2. Si $t \in (q, 1)$ entonces $f_n(t) \downarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$,

3. Si $t = q$ o $t = 1$ entonces $f_n(t) = t \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1. Sea $t \in [0, q)$, por la proposición 1.1 tenemos que $t < f(t) < f(q) = q$, componiendo de manera iterativa con f tenemos una sucesión $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$, creciente y acotada superiormente por q . Si consideramos a $l := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$, por la continuidad de f deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(t) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)\right) \\ l &= f(l), \end{aligned}$$

es decir l es un punto fijo de f y ya que q es el punto fijo más pequeño de f concluimos que $q = l$.

2. Análogamente al primer inciso si $t \in (q, 1)$ podemos construir una sucesión $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ y volvemos a obtener la relación $f(l) = l$, y ya que no existe otra raíz en el intervalo $(q, 1)$ entonces concluimos que $l = q$.

3. Si $t = q$ o $t = 1$ es directo ya que ambos son puntos fijos de f .

□

Estamos ahora en posición de encontrar la probabilidad de extinción. Comencemos definiendo explícitamente la extinción de la población

$$A = \{Z_n = 0 \text{ p.a. } n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.7)$$

Observemos también que 0 es un estado absorbente, es decir, si $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que nos permite establecer las siguientes equivalencias

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_i = 0, \text{ para alguna } i \leq n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n = 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0). \quad (1.8)$$

Teorema 1.1. *La probabilidad de extinción de un proceso de ramificación $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la raíz más pequeña de $f(t) = t$ en el intervalo $[0, 1]$. Además, tenemos que:*

$$\mathbb{P}[Z_n \rightarrow 0] + \mathbb{P}[Z_n \rightarrow \infty] = 1, \quad (1.9)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Propiedad que referiremos como la inestabilidad del proceso.

Demostración. La primera parte del teorema se deriva de utilizar el lema 1.1 pues,

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n \rightarrow 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = q.$$

Para demostrar la segunda parte del teorema veamos que los estados distintos del 0 son transitorios,

$$\mathbb{P}[Z_{n+i} \neq k; i \geq 1 | Z_n = k] \geq \begin{cases} p_0^k & \text{si } p_0 > 0 \\ 1 - p_1^k & \text{si } p_0 = 0 \end{cases},$$

con cada una de las probabilidades positivas, es decir la probabilidad de regresar a un tamaño de población k desde el mismo tamaño es menor que 1, teniendo así que el único estado recurrente es 0. Por tanto tenemos dos comportamientos válidos: ir a infinito o extinguirse. \square

Diremos que el proceso es subcrítico si $f'(1) \leq 1$ y supercrítico si $f'(1) > 1$.

Ejemplo 1.1. Consideremos una población en la que los individuos tienen solo dos posibles acciones, morir sin dejar descendencia con una probabilidad p_0 o morir dejando a dos nuevos individuos con una probabilidad p_2 . Este proceso puede reinterpretarse como que el individuo muere o se reproduce creando una copia idéntica, por esto es conocido como el proceso de nacimiento y muerte. La función generadora del mecanismo de ramificación es:

$$f(s) = p_0 + p_2 s^2. \quad (1.10)$$

En este caso tenemos que

$$\mathbb{E}[Z_1] = f'(1) = 2p_2, \quad (1.11)$$

mientras que la varianza, está dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z_1] &= f''(1) + f(1) - \mathbb{E}[Z_1]^2 \\ &= 2p_2 + 2p_2 - 4p_2^2 \\ &= 4p_2(1 - p_2) \\ &= 4p_0p_2. \end{aligned}$$

Para Z_n tenemos que su primer momento está dado por

$$\mathbb{E}[Z_n] = (2p_2)^n \quad (1.12)$$

con varianza

$$\text{Var}[Z_n] = \begin{cases} 4p_0p_2 \frac{(2p_2)^{n-1}((2p_2)^n - 1)}{2p_2 - 1} & \text{si } p_2 \neq \frac{1}{2} \\ n & \text{si } p_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Calculemos la probabilidad de extinción, que por el teorema 1.1 está dada por la raíz más pequeña de $f(s) = s$. Si $m = 2p_2 \leq 1$, por el lema 1.1 entonces $q = 1$; y en el caso supercrítico cuando $p_2 > \frac{1}{2}$, la solución de

$$p_0 + p_2 s^2 = s \quad (1.13)$$

está determinada por

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n \rightarrow 0] = \frac{p_0}{p_2}. \quad (1.14)$$

1.1.2. Procesos Gatton-Watson multitypo

Un primer paso en la generalización del proceso Galton-Watson es añadir distintos tipos de individuos en la población. Durante esta sección consideraremos K tipos, y como es natural suponer que la distribución de hijos variará según la clase del individuo, se considera K distribuciones asociadas a los mecanismos de ramificación. Es decir, tendremos $(p^i)_{i \in \{1, \dots, K\}}$ distribuciones donde $p^i(j_1, \dots, j_K)$ es la probabilidad de que un individuo del tipo i tenga j_1, \dots, j_K hijos de cada tipo respectivamente. De esta manera las funciones generadoras quedan definidas como

$$f^i(s_1, \dots, s_K) := \sum_{j_1, \dots, j_K \geq 0} p^i(j_1, \dots, j_K) s^{j_1} \dots s^{j_K}$$

con $i \in \{1, \dots, K\}$. Adoptaremos las siguientes convenciones

- Si \mathbf{x}, \mathbf{y} son matrices o vectores de la misma dimensión, diremos que $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ si entrada a entrada se satisface que $x_{ij} \geq y_{ij}$. De la misma manera definiremos cualquier otra las relaciones $<, >, \leq$.
- Si $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^K$ y $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^K$ definimos

$$\mathbf{s}^{\mathbf{j}} := \prod_{i=1}^K s_i^{j_i}.$$

Si consideramos al vector formado por las funciones generadoras

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) := (f^1(\mathbf{s}), \dots, f^K(\mathbf{s})), \quad (1.15)$$

podemos reescribir este arreglo como

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} \mathbf{p}(\mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}}, \quad (1.16)$$

con $\mathbf{p}(\mathbf{j}) = (p^1(\mathbf{j}), \dots, p^K(\mathbf{j}))$.

Definición 1.3. *Un proceso de Galton-Watson multitypo es una cadena de Markov $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{N}^K tal que sus probabilidades de transición satisfacen que*

$$\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_n(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} = \prod_{k=1}^K \left[\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_n(e_k, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right]^{i_k}, \quad (1.17)$$

con $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_K)$.

Podemos hacer referencia al proceso al tiempo n según los tipos de individuos,

$$Z_n = (Z_{1n}, \dots, Z_{Kn}). \quad (1.18)$$

Denotaremos al proceso que comienza con una configuración inicial \mathbf{i} de individuos, $Z_0 = \mathbf{i}$, con $Z_n^{\mathbf{i}}$. Análogamente al caso unidimensional, las funciones generadoras del proceso juegan un papel esencial. Definamos iterativamente a $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como $\mathbf{f}_0(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{s})$ y

$$\mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}_n(\mathbf{s})).$$

Si $\mathbf{f}_{(n)}(\mathbf{s}) = (f_{(n)}^1(\mathbf{s}), \dots, f_{(n)}^K(\mathbf{s}))$ corresponde a la función generadora del proceso al tiempo n ,

$$f_{(n)}^i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_n(e_i, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}}$$

para $i \in \{1, \dots, K\}$, demostremos que $\mathbf{f}_n(\mathbf{s}) = \mathbf{f}_{(n)}(\mathbf{s})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Los primeros dos términos de sucesión son trivialmente iguales, y veamos que la función generadora del proceso satisface que $\mathbf{f}_{(n+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{f}_{(n)})$. Notemos primero la relación

$$\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p(k_i e_i, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} (p^i)^{*k_i}(\mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} = \left(\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p^i(\mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right)^{k_i} = (f^i(\mathbf{s}))^{k_i},$$

para todo $i \in \{1, \dots, K\}$, donde $(p^i)^{*k_i}$ es la k_i -ésima convolución de la distribución p^i . Escrito de manera vectorial

$$\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{k}} = (f^1(\mathbf{s}))^{k_1} \dots (f^K(\mathbf{s}))^{k_K} = \mathbf{f}(\mathbf{s})^{\mathbf{k}}.$$

Utilizando las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* y las igualdades encontradas tenemos que

$$\begin{aligned} f_{(n+1)}^i &= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_{n+1}(e_i, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_n(e_i, \mathbf{k}) p(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_n(e_i, \mathbf{k}) \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_n(e_i, \mathbf{k}) \mathbf{f}(\mathbf{s})^{\mathbf{k}} \\ &= f^i(\mathbf{f}_n(\mathbf{s})), \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que ambas sucesiones son iguales pues coinciden en sus primeros términos y se definen recursivamente por la composición con \mathbf{f} .

Calculemos ahora los momentos de un proceso Galton-Watson multitypo. Para esto supongamos que los primeros momentos de los mecanismos de ramificación existen. Estudiemos la matriz de momentos, M , cuya entrada m_{ij} es la esperanza de los individuos del tipo j generados por un individuo del tipo i

$$m_{ij} = \mathbb{E}^{e_i}[Z_{1j}], \quad (1.19)$$

que por la finitud de la esperanza de los mecanismos de ramificación tenemos que $m_{ij} < \infty$ con $i, j \in \{1, \dots, K\}$. Utilizando las propiedades de las funciones generadoras tenemos que

$$m_{ij} = \frac{d}{ds_j} f^i(\mathbf{1}),$$

y de manera general

$$\mathbb{E}^{e_i}[Z_{nj}] = \frac{d}{ds_j} f_n^i(\mathbf{1}),$$

para todo $i \in \{1, \dots, K\}$. Veamos que los momentos del proceso pueden ser escritos como

$$\mathbb{E}^{Z_0}[Z_n] = Z_0 M^n. \quad (1.20)$$

Para esto, primero notemos que

$$D(\mathbf{f})(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \nabla f^1(\mathbf{1}) \\ \vdots \\ \nabla f^K(\mathbf{1}) \end{bmatrix} = M,$$

donde D simboliza la derivada. Utilizando la regla de la cadena iterativamente

$$D(\mathbf{f}_n)(\mathbf{1}) = D(\mathbf{f}_{n-1})(\mathbf{1})D(\mathbf{f})(\mathbf{1}) = M^n, \quad (1.21)$$

y por tanto

$$\mathbb{E}^{Z_0}[Z_n] = Z_0 M^n. \quad (1.22)$$

Cuando los momentos de orden superior existen podrán ser escritos en términos de las derivadas de órdenes superiores de \mathbf{f} , además de la matriz M . Durante esta sección no profundizaremos en su cálculo, en su lugar enunciamos un teorema útil para el manejo de las potencias de M .

Definición 1.4. Decimos que M , una matriz cuadrada, es **estrictamente positiva** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_{ij}^n > 0$ para cualquier $i, j \in \{1, \dots, K\}$ donde m_{ij}^n son los elementos de M^n . Si un proceso de ramificación multitypo tiene por matriz de esperanzas una matriz M estrictamente positiva decimos que es **positivo regular**.

Teorema 1.2 (Teorema Perron-Frobenius). *Una matriz M estrictamente positiva tiene un valor propio máximo ρ , el cual es positivo y tiene asociado vectores propios u, v , izquierdo y derecho respectivamente, normalizados de manera tal que $u \cdot v = 1$ y $u \cdot \mathbf{1} = 1$. Además podemos escribir a M^n como:*

$$M^n = \rho^n P + R^n$$

Donde $P = (u_i v_j)_{ij}$ y R tiene las propiedades:

- $PR = RP = 0$,
- $r_{ij}^{(n)} \leq c \rho_0^n$ para alguna $c < \infty$, y $0 < \rho_0 < \rho$.

Los procesos de nuestro interés serán positivo regulares, propiedad que puede interpretarse como que comenzando con cualquier configuración eventualmente (si el proceso no se extingue) tendremos la posibilidad de tener individuos de cualquier tipo.

Estudiemos la probabilidad de extinción para el caso multidimensional. Decimos que el proceso se extingue si eventualmente llega al vector $\mathbf{0}$. Nos es conveniente estudiar la probabilidad de extinción condicionando a empezar con un solo individuo de algún tipo, es decir

$$q_i = \mathbb{P}[Z_n = \mathbf{0} | Z_0 = e_i]$$

con $i \in \{1, \dots, K\}$. Dado $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K)$, notemos que si el proceso comienza con una configuración \mathbf{k} entonces la probabilidad de extinción estará dada por $\mathbf{q}^{\mathbf{k}}$. Comencemos nuestro camino hacia la probabilidad de extinción demostrando que todo estado distinto a $\mathbf{0}$ no es recurrente. La idea detrás de esto es que empezando de cualquier estado el proceso se extinguirá o el tamaño de la población tenderá a infinito. Formalicemos y demostremos esta idea.

Definición 1.5. *Sea S el conjunto de los $i \in \{1, \dots, K\}$ tales que*

$$p_n(e_i, 0) = 0 \tag{1.23}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que si i no pertenece a S entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $p_n(e_i, 0) > 0$. Si $|S| = r$ supondremos sin pérdida de generalidad que los primeros r tipos son los elementos de S .

Definición 1.6. *Sea $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^K$, definimos a la suma de las primeras r coordenadas como*

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r k_j \tag{1.24}$$

Lema 1.2. *Si S es distinto del vacío entonces*

$$\mathbb{P}[\zeta(Z_{n+1}) > \zeta(Z_n)] = 1, \quad (1.25)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^K$ es tal que $\zeta(\mathbf{z}) = 0$. Ya que solo existen individuos ajenos a S , o no hay ninguno, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_n(\mathbf{z}, \mathbf{0}) > 0,$$

con $n > N$. Sea $i \in S$, $n > N$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= p_{n+1}(e_i, \mathbf{0}) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p(e_i, \mathbf{j}) p_n(\mathbf{j}, \mathbf{0}) \\ &= p(e_i, \mathbf{z}) p_n(\mathbf{z}, \mathbf{0}), \end{aligned}$$

ya que $p_n(\mathbf{z}, \mathbf{0}) > 0$ entonces $p(e_i, \mathbf{z}) = 0$. Notemos que la elección de \mathbf{z} fue arbitraria sujeta a no tener individuos de los primeros r tipos, además tenemos que el proceso no puede extinguirse comenzando en i por tanto al menos debe existir un descendiente de i en las primeras r clases,

$$\mathbb{P}[\zeta(Z_1) \geq 1 | Z_0 = e_i] = 1,$$

y para todo $i \in S$. Por tanto tenemos que

$$\mathbb{P}[\zeta(Z_1) \geq \zeta(Z_0)] = 1,$$

como el proceso es homogéneo en el tiempo terminamos. \square

Definición 1.7. *Decimos que el proceso de ramificación multitipo \mathcal{Z} cumple la **condición de singularidad** si $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = M\mathbf{s}^t$, con M una matriz de $K \times K$ con sus entradas no negativas.*

Observación 1.2. *Si \mathcal{Z} es un proceso de ramificación multitipo singular entonces puede ser visto como una población que en cada paso los individuos cambian de clase, sin posibilidad de morir o generar nuevos individuos. Este proceso puede ser visto como una cadena de Markov con matriz de transición M .*

Teorema 1.3. *Supongamos que \mathcal{Z} es un proceso de ramificación multitipo positivo regular y no singular entonces todo estado distinto de $\mathbf{0}$ es transitorio.*

Demostración. La prueba de este teorema será dividida en dos casos.

1. *Si S es vacío.* Entonces para todo $i \in \{1, \dots, K\}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n(e_i, 0) > 0$ si $n > N$. Por tanto para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^K$, existirá un $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n > M$ entonces $p_n(\mathbf{z}, 0) > 0$ y ya que el $\mathbf{0}$ es un estado absorbente concluimos que \mathbf{z} es transitorio pues existe una probabilidad positiva de no regresar.
2. *Si S es distinto del vacío.* Los elementos de S son candidatos a que su población tienda a infinito, en particular demostraremos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}[\zeta(Z_{n_0}) > \zeta(fz) | Z_0 = \mathbf{z}] > 0,$$

pues esto garantiza la transitoriedad del estado z por el lema 1.2, ya que siempre tendrás más individuos en las primeras r coordenadas. Supongamos que M es positiva es decir que, todas sus entradas son positivas. Tendremos dos casos

- a) *Si $r = K$.* Como el proceso es no singular existe $j \in S$ tal que

$$\mathbb{P}[\zeta(Z_1) > 1 | Z_0 = e_j] > 0,$$

de lo contrario tendríamos que cualquier individuo tiene un único hijo, lo cual implica que el proceso sería singular. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^K$ es tal que $z_j \geq 1$ tendremos que

$$\mathbb{P}[\zeta(Z_1) > \zeta(\mathbf{z}) | Z_0 = \mathbf{z}] > 0,$$

por tanto si $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^K$ entonces Z_{1j} puede ser mayor que 0 por la positividad de M y $\zeta(Z_2) > \zeta(Z_1)$ tiene una probabilidad positiva por tanto basta considerar $n_0 = 2$.

- b) *Si $r < K$.* Notemos que Z_n puede ser reescrito como $Z'_n + Z''_n$ donde Z'_n son los descendientes de los individuos de los primeros r tipos y Z''_n son los descendientes de los restantes. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^K$ tendremos que existe una probabilidad positiva que $\zeta(Z_1) > 0$ pues M es positiva y por lema 1.2,

$$\mathbb{P}[\zeta(Z'_2) \geq \zeta(Z_1)] = 1,$$

y Z''_2 puede tener individuos de los primeros r tipos ya que M es positiva. Por tanto existe una probabilidad positiva de que $\zeta(Z_2) = \zeta(Z'_2) + \zeta(Z''_2) > \zeta(Z_1) \geq \mathbf{z}$ teniendo que $n_0 = 2$ es suficiente.

La demostración del teorema ha terminado si M es positiva. Ya que M es estrictamente positiva entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que M^N es positiva. La cadena de Markov definida como $(Z_{Nk})_{k \in \mathbb{N}}$ es un proceso de ramificación multitipo no singular con matriz de esperanzas M^N , positiva. Por lo demostrado para los procesos positivo regulares no singulares terminamos.

□

Teorema 1.4 (Probabilidad de extinción). *Sea $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso Galton-Watson multitypo regular positivo y no singular. Si ρ es el valor propio más grande de $M = \mathbb{E}^{e_i}[Z_{1j}]$ entonces*

1. Si $\rho \leq 1$ entonces $\mathbf{q} = \mathbf{1}$,
2. Si $\rho > 1$, entonces $\mathbf{0} \leq \mathbf{q} < \mathbf{1}$ y \mathbf{q} satisface

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (1.26)$$

3. Si $\mathbf{s} \in [0, 1]^K$ con $\mathbf{s} \neq \mathbf{1}$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{s}) = \mathbf{q}.$$

Demostración. Para esta demostración nos será conveniente definir al valor absoluto de una matriz o vector M , como la suma del valor absoluto de todas las entradas. Sea $N \in \mathbb{N}$. Todo estado de la cadena distinto al origen es transitorio por el teorema 1.3, por tanto

$$\mathbb{P}[0 < |Z_n| < N \text{ para infinitos valores de } n] = 0,$$

ya que tenemos dos comportamientos válidos, ir a $\mathbf{0}$ o que algunas entradas del proceso tiendan a infinito, por tanto la suma de las entradas del proceso tienden a 0 o infinito. Este razonamiento también implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}[|Z_n| \rightarrow 0] + \mathbb{P}[|Z_n| \rightarrow \infty]) = 1.$$

1. Por el teorema de *Perron-Frobenius* tenemos que existen matrices P, R tales que

$$M^n = \rho^n P + R^n, \quad (1.27)$$

con $r_{i,j} \leq c\rho_0^n$; $0 < c$ y $\rho_0 < \rho \leq 1$. Por tanto, tenemos que R^n tiende a la matriz $\mathbf{0}$ si $n \rightarrow \infty$ pues todas sus entradas están acotadas por un número proporcional a un valor entre en el $[0, 1)$ elevado a la n . Las entradas de $\rho^n P$ serán menores o iguales que las de P , lo que indica un crecimiento acotado, por tanto $\mathbb{P}[|Z_n| \rightarrow \infty] = 0$ si $n \rightarrow \infty$, y $\mathbb{P}[Z_n \rightarrow 0] = 1$, lo que asegura que $\mathbf{q} = \mathbf{1}$.

2. La demostración de esta punto puede ser descrita en 3 partes, a) Mostrar que existe una sucesión no decreciente cuyo límite es \mathbf{q} y satisface (1.26), b) Mostrar que $\mathbf{q} \neq \mathbf{1}$ y c) \mathbf{q} no puede tener entradas iguales a 1.

a) Al igual que en el caso unidimensional notemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n = 0] = \mathbb{P}[Z_n = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}] = \mathbf{q}.$$

Además, ya que $\mathbf{0} \leq \mathbf{f}(\mathbf{0})$ y \mathbf{f} es una función creciente en cada entrada, la sucesión $(\mathbf{f}_n(\mathbf{0}))_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente en cada entrada; y por último, utilizando la continuidad de la función encontramos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{0}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{f}_n(\mathbf{0})) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{0}) &= \mathbf{f}(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{0})) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

b) Supongamos que $\mathbf{q} = \mathbf{1}$, buscaremos encontrar una contradicción. Utilizando el Teorema de Taylor podemos reescribir \mathbf{f}_n valuada en $\mathbf{1} - \mathbf{s}$ con $\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{1}$ como,

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{1} - \mathbf{s}) = \mathbf{1} - M^n \mathbf{s} + o(|\mathbf{s}|). \quad (1.28)$$

Por el teorema de *Perron-Frobenius* sabemos que existen P, R como en (1.27), así que $|M^n|$ puede ser visto como una suma de números positivos multiplicados por ρ^n , y ya que $\rho > 1$ existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|M^{n_0} \mathbf{s}| > 2|\mathbf{s}|, \quad (1.29)$$

si $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Por (1.28) y (1.29) podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\mathbf{1} - \mathbf{f}_{n_0}(\mathbf{1} - \mathbf{s})| > |\mathbf{s}|, \quad (1.30)$$

si $|\mathbf{s}| < \varepsilon$ y $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Recordando que por hipótesis $\mathbf{q} = \mathbf{1}$ entonces existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbf{f}_N(\mathbf{0}) - \mathbf{1}| < \varepsilon$, y empleando este hecho junto con la desigualdad (1.30) encontramos que

$$|\mathbf{1} - \mathbf{f}_{n_0+N}(\mathbf{1} - \mathbf{s})| = |\mathbf{1} - \mathbf{f}_{n_0}(\mathbf{f}_N(\mathbf{1} - \mathbf{s}))| > |\mathbf{1} - \mathbf{f}_N(\mathbf{1} - \mathbf{s})|,$$

lo cual es una contradicción a que $(\mathbf{f}_n(\mathbf{0}))_{n \in \mathbb{N}}$ sea una sucesión monótonamente creciente que converge a $\mathbf{q} = \mathbf{1}$.

c) Veamos que \mathbf{q} no puede contener a 1. Supongamos sin pérdida de generalidad que los primeros r elementos de \mathbf{q} son 1, ya que \mathbf{q} es punto fijo de \mathbf{f} las siguientes igualdades se dan

$$1 = f^i(1, \dots, 1, q_{r+1}, \dots, q_K), \quad i \in \{1, \dots, r\}$$

además ya que $f^i(\mathbf{1}) = 1$ deducimos que f^i no involucra explícitamente a las variables s_{r+1}, \dots, s_K para todo para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Esto implica que $m_{ij} = \frac{d}{ds_j} f^i(\mathbf{1}) = 0$ con $i \in \{1, \dots, r\}$ y $j \in \{r+1, \dots, K\}$, lo cual es una contradicción pues cualquier potencia de M no será positiva, es decir M no es estrictamente positiva.

3. Sea $\mathbf{s} \in [0, 1]^K$. Dividiremos este punto en dos casos, a) Cuando $\mathbf{s} < \mathbf{1}$ y b) cuando \mathbf{s} contiene al menos un 1.

a) Sea $\mathbf{s} < \mathbf{1}$, $N \in \mathbb{N}$ y $i \in \{1, \dots, K\}$. Notemos que

$$f_n^i(\mathbf{s}) = p_n(e_i, \mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{0} < |\mathbf{z}| < N} p_n(e_i, \mathbf{z}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}} + \sum_{|\mathbf{z}| > N} p_n(e_i, \mathbf{z}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}}, \quad (1.31)$$

el primer sumando tiende a q_i cuando $n \rightarrow \infty$, demostremos que los otros términos van a 0. El segundo término es inmediato pues eventualmente no existirán elementos tal que $\mathbf{0} < |\mathbf{z}| < N$ por la transitividad de los estados distintos de $\mathbf{0}$. Para el tercer sumando notemos que si definimos a $s_{max} = \max_{i \in \{1, \dots, K\}} s_i$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{|\mathbf{z}| > N} p_n(e_i, \mathbf{z}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}} &\leq (s_{max})^N \sum_{|\mathbf{z}| > N} p_n(e_i, \mathbf{z}) \\ &= (s_{max})^N \mathbb{P}[|Z_n| > N] \\ &\leq (s_{max})^N, \end{aligned}$$

como el procedimiento es válido para cualquier $N \in \mathbb{N}$, y $s_{max} < 1$ tenemos que $\sum_{|\mathbf{z}| > N} p_n(e_i, \mathbf{z}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$.

- b) Sea \mathbf{s} tal que contiene un 1. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que M^N es positiva entonces tendremos que la función f_N^i involucra explícitamente a todas las variables s_1, \dots, s_K y por tanto $f_N^i(\mathbf{s}) < 1$ para todo $i \in \{1, \dots, K\}$. Definiendo $\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_N(\mathbf{s})$ por el inciso anterior terminamos.

□

Observación 1.3. Sea \mathcal{Z} un proceso de ramificación multitipo singular, entonces \mathcal{Z} es una cadena de Markov, cuya matriz de esperanzas coincide con ser la matriz de transición. Toda matriz de Markov tiene su valor propio máximo igual a 1. La singularidad del proceso implica que el proceso no se extingue, los individuos solo cambian de tipo, por lo que $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1.2. Ilustremos los procesos de ramificación multitipo con el mecanismo de nacimiento y muerte agregando bancos de semillas. En el siguiente capítulo profundizaremos en la importancia de este ejemplo, por ahora nos limitaremos a presentar la dinámica. Tenemos una población con dos clases, activos e inactivos. El mecanismo de ramificación de los organismos activos describe que un individuo activo puede dividirse en dos, convertirse en semilla o morir sin descendencia. La función generadora asociada a los individuos activos es

$$f^1(s_1, s_2) = p_0 + p_1 s_2 + p_2 s_1^2.$$

La dinámica de los organismos inactivos se reduce a que el individuo solo puede pasar a ser activo, es decir la función generadora está dada por,

$$f^2(s_1, s_2) = s_1.$$

Derivando las funciones generadoras construimos la matriz de esperanzas,

$$M = (\mathbb{E}^{e_i}[Z_{1j}])_{ij \in \{1,2\}} = \begin{bmatrix} 2p_2 & p_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

El primer momento de Z_n comenzando con una configuración inicial Z_0 estará dado por,

$$\mathbb{E}^{Z_0}[Z_n] = Z_0 \begin{bmatrix} 2p_2 & p_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n. \quad (1.33)$$

Calculemos la probabilidad de extinción, comencemos mostrando los valores propios de M ,

$$\lambda_1 = p_2 + \sqrt{p_2^2 + p_1}, \quad \lambda_2 = p_2 - \sqrt{p_2^2 + p_1}, \quad (1.34)$$

es claro que λ_1 es el máximo de los valores propios. Veamos que si $p_0 < p_2$ sí y solo si $\lambda_1 > 1$,

$$\begin{aligned} p_0 &< p_2 \\ 1 - p_0 &> 1 - p_2 \\ p_1 + p_2 &> 1 - p_2 \\ p_2^2 + p_1 &> 1 - 2p_2 + p_2^2 \\ p_2^2 + p_1 &> (1 - p_2)^2 \\ \sqrt{p_2^2 + p_1} &> (1 - p_2) \\ p_2 + \sqrt{p_2^2 + p_1} &> 1 \\ \lambda_1 &> 1. \end{aligned}$$

Por el teorema 1.4 si $p_0 \geq p_2$ entonces $\mathbf{q} = \mathbf{1}$. Si $\lambda_1 > 1$, encontremos ahora las probabilidades de extinción que satisfacen $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 s_2 + p_2 s_1^2 &= s_1 \\ s_1 &= s_2, \end{aligned}$$

que se reduce a resolver la ecuación

$$p_0 + p_1 s + p_2 s^2 = s,$$

resolviendo tenemos que $\mathbf{q} = (\frac{p_0}{p_2}, \frac{p_0}{p_2})$. La relación entre la probabilidad de tener dos hijos o morir determinan la probabilidad de extinción al igual que en el caso unidimensional.

1.2. Procesos de ramificación a tiempo continuo

Los modelos estudiados hasta el momento han considerado el tiempo de vida como unitario. Sin embargo, para un gran número de aplicaciones en la biología y física es necesario estudiar procesos más generales, donde el tiempo de vida de cada organismo es una variable aleatoria, por lo que ahora los procesos serán indexados por un continuo. Para este trabajo nos restringimos a considerar los tiempos de vida como variables exponenciales, con la finalidad de describir a los modelos como procesos de Markov a tiempo continuo.

1.2.1. Procesos de ramificación a tiempo continuo

El proceso a definir es una versión markoviana a tiempo continuo del proceso Galton-Watson unidimensional. Al igual que en el caso discreto, necesitaremos una distribución que señale el número de hijos que deja un individuo cuando muere. El cambio más importante son los tiempos de vida de los organismos, que pasan de ser unitarios a ser variables exponenciales.

Definición 1.8. *Un proceso estocástico $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ es llamado un **proceso de ramificación a tiempo continuo** si*

1. Su espacio de estados son los enteros no negativos,
2. Es una cadena de Markov estacionaria respecto a la σ -álgebra $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s; s \leq t\}$,
3. Las probabilidades de transición satisfacen

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_t(i, j) s^j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_t(1, j) s^j \right)^i, \quad (1.35)$$

para toda $i \geq 0$ y $|s| \leq 1$.

Alternativamente podemos dar una definición del proceso en términos de su generador.

Definición 1.9. *Decimos que \mathcal{Z} es un **proceso de ramificación a tiempo continuo**, con mecanismo de ramificación $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y esperanza de vida $0 < r^{-1} < \infty$ si \mathcal{Z} es una cadena de Markov cuyo generador dado por,*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{Z}} f(z) = rz \sum_{n=0}^{\infty} p_n (f(z+n-1) - f(z)), \quad (1.36)$$

con $f \in C(\mathbb{N})$.

Ambas definiciones describen el comportamiento del mismo proceso, en el caso de la definición 1.8 los puntos 1 y 2 muestran que tenemos un proceso de Markov que cuenta el número de individuos, mientras que 3 señala que la población generada por i individuos iniciales es igual a considerar la generada por i poblaciones con un individuo inicial. Interpretando el generador podemos ver que pasa de una población z a $z + n - 1$ con una tasa dada por rzp_n , es decir después de una variable exponencial de parámetro rzp_n que es equivalente a considerar el mínimo de z variables exponenciales de tasa rp_n .

Ilustremos la construcción del proceso en términos de sus parámetros infinitesimales. Sean $0 < r^{-1} < \infty$ el tiempo medio de vida y $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ el mecanismo de ramificación. Notemos que la probabilidad de pasar de tener un número de individuos i a tener j , con $j \geq i - 1$, en el intervalo $[0, h)$ es igual a considerar que alguno de los i individuos muera en este intervalo dejando $j - i + 1$ nuevos organismos, y adicionalmente en el caso en que $j = i$ tenemos la posibilidad que ningún individuo muera en ese intervalo. Por lo tanto podemos escribir

$$p_h(i, j) = irp_{j-i+1}t + (1 - irh)\mathbb{I}_{\{j=i\}} + o(h),$$

por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov podemos encontrar las siguientes relaciones,

$$p_{t+h}(i, j) = (1 - jrh)p_t(i, j) + rh \sum_{k=1}^{j+1} kp_t(i, k)p_{j-k+1} + o(h), \quad (1.37)$$

$$p_{t+h}(i, j) = (1 - irh)p_t(i, j) + rih \sum_{k=i-1}^{\infty} p_{k-i+1}p_t(k, j) + o(h). \quad (1.38)$$

Deduzcamos (1.37),

$$\begin{aligned} p_{t+h}(i, j) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_t(i, k)p_h(k, j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_t(i, k) (krp_{j-k+1}h + (1 - krh)\mathbb{I}_{\{j=k\}}) + o(h) \\ &= (1 - jrh)p_t(i, j) + rh \sum_{k=0}^{\infty} p_t(i, k)p_{j-k+1} + o(h) \\ &= (1 - jrh)p_t(i, j) + rh \sum_{k=1}^{j+1} p_t(i, k)p_{j-k+1} + o(h), \end{aligned}$$

de manera similar para (1.38),

$$\begin{aligned}
p_{t+h}(i, j) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_h(i, k) p_t(k, j) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (ir p_{k-i+1} h + (1 - irh) \mathbb{I}_{\{k=i\}}) p_t(k, j) + o(h) \\
&= (1 - irh) p_t(i, j) + irh \sum_{k=0}^{\infty} p_{k-i+1} p_t(k, j) + o(h) \\
&= (1 - irh) p_t(i, j) + irh \sum_{k=i-1}^{\infty} p_{k-i+1} p_t(k, j) + o(h).
\end{aligned}$$

Restando $p_t(i, j)$ y considerando el límite,

$$\frac{d}{dt} p_t(i, j) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{t+h}(i, j) - p_t(i, j)}{h}$$

podemos deducir las ecuaciones *Forward* y *Backward* de Kolmogorov,

$$\frac{d}{dt} p_t(i, j) = -jr p_t(i, j) + r \sum_{k=1}^{j+1} k p_t(i, k) p_{j-k+1}, \quad (1.39)$$

$$\frac{d}{dt} p_t(i, j) = -ir p_t(i, j) + ir \sum_{k=i-1}^{\infty} p_{k-j+1} p_t(k, j), \quad (1.40)$$

con condición de frontera $p_0(i, j) = \delta_0(i, j)$. Por el teorema A.3 existe p_t solución de (1.39) y (1.40) no negativa, continuamente diferenciable y tal que satisface,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_t(i, j) \leq 1,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Notemos que la existencia de esta solución no garantiza que p_t satisfaga la relación (1.35), pero más adelante aclararemos por que se satisface y encontraremos condiciones necesarias y suficientes para que la solución sea única. Con este fin, además del cálculo de momentos y la probabilidad de extinción nos es necesario introducir la función generadora del proceso

$$\begin{aligned}
F(s, t) &= \mathbb{E}[s^{Z_t}] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_t(1, j) s^j;
\end{aligned}$$

y la función generadora del proceso comenzando con i individuos

$$\begin{aligned} F^i(s, t) &= \mathbb{E}^i[s^{Z_t}] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_t(i, j) s^j. \end{aligned}$$

Notemos que si (1.35) se cumple entonces tendremos que

$$F^i(s, t) = F(s, t)^i \quad (1.41)$$

y de hecho si (1.41) se mantiene implica que (1.35) también.

En el caso discreto la técnica de componer la función generadora resultaba de utilidad para muchas demostraciones, notemos que al no tener pasos unitarios estamos frente al problema de cómo definir la n -ésima composición cuando n no es un entero. La relación que buscamos ahora es

$$F(s, t + u) = F(F(s, t), u), \quad (1.42)$$

con $|s| \leq 1$ y $t, u \geq 0$. Veamos que esta igualdad se cumple:

$$\begin{aligned} F(s, t + u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{1k}(t + u) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_{1j}(u) \mathbb{P}_{jk}(t) s^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_{1j}(u) (F(s, t))^j \\ &= F(F(s, t), u). \end{aligned}$$

Lema 1.3. *Sea $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ un proceso de ramificación a tiempo continuo, con función generadora $F(s, t)$. Sea $\delta > 0$, definamos a $\widehat{\mathcal{Z}} = (\widehat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Z_{\delta n})_{n \in \mathbb{N}}$. El proceso $\widehat{\mathcal{Z}}$ es un proceso Galton-Watson y $F(s, \delta)$ es la función generadora asociada a su mecanismo de ramificación.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^i[s^{\widehat{Z}_n}] &= \mathbb{E}^i[s^{Z_{\delta n}}] \\ &= F^i(s, \delta n) \\ &= (F(s, \delta n))^i \\ &= (\mathbb{E}^1[s^{Z_{\delta n}}])^i \\ &= (\mathbb{E}^1[s^{\widehat{Z}_n}])^i, \end{aligned}$$

por la observación 1.1 tenemos que la propiedad de ramificación se satisface. Si definamos a $f(s) = F(s, \delta)$, si f_n es la n -ésima composición de f entonces por (1.42) tenemos que $f_n(s) = F(s, \delta n)$, análogamente si $f^i(s) = F^i(s, \delta)$ tendremos que $f_n^i(s) = F^i(s, \delta n)$. \square

El resultado anterior es de interés pues nos permite estudiar el proceso a partir del caso discreto. En lo que resta del capítulo optamos por desarrollar nuevas técnicas para el análisis del proceso en tiempo continuo. Para esto definimos a f como la función generadora del mecanismo de ramificación, dada por

$$f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \quad (1.43)$$

con $|s| \leq 1$. Además definamos a u como

$$u(s) := r(f(s) - s),$$

con $|s| \leq 1$. Así función generadora queda en términos de las probabilidades de transición, y utilizando las ecuaciones (1.39) y (1.40) podemos encontrar las ecuaciones diferenciales *Forward* y *Backward* para la función generadora

$$\frac{d}{dt} F(s, t) = u(s) \frac{d}{ds} F(s, t), \quad (\text{Forward}) \quad (1.44)$$

$$\frac{d}{dt} F(s, t) = u[F(s, t)], \quad (\text{Backward}) \quad (1.45)$$

con la condición de frontera $F(s, 0) = s$.

Deduzcamos la ecuación *Forward*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(s, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dt} p_t(i, j) s^j \\ &= -r \sum_{j=0}^{\infty} j p_t(1, j) s^j + r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j+1} k p_t(1, k) p_{j-k+1} s^j \\ &= -rs \sum_{j=0}^{\infty} j p_t(i, j) s^{j-1} + r \sum_{k=0}^{\infty} k s^{k-1} p_t(1, k) \sum_{j=k-1}^{\infty} p_{j-k+1} s^{j-k+1} \\ &= -rs \sum_{j=0}^{\infty} p_t(1, j) \frac{ds^j}{ds} + r f(s) \sum_{k=0}^{\infty} p_t(1, j) \frac{ds^j}{ds} \\ &= -rs \frac{d}{ds} \sum_{j=0}^{\infty} p_t(1, j) s^j + r f(s) \frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} p_t(1, j) s^j \\ &= -rs \frac{d}{ds} F(s, t) + r f(s) \frac{d}{ds} F(s, t) \\ &= r(f(s) - s) \frac{d}{ds} F(s, t) \\ &= u(s) \frac{d}{ds} F(s, t). \end{aligned}$$

Empleando un procedimiento análogo podemos encontrar la ecuación *Backward*. A partir de este punto nos referiremos como ecuación *Forward* a la ecuación de la función generadora, análogamente lo haremos para la *Backward*. La manera de demostrar que $F^i(s, t) = (F(s, t))^i$ es a través de la unicidad de la solución de la ecuación *Backward*, no exhibimos este procedimiento. En su lugar empleamos la ecuación *Backward* para encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una única solución. Como paso previo notemos que si $|s| < 1$ y $t \leq t_0 < \infty$ entonces

$$|F(s, t)| < 1, \quad (1.46)$$

utilizando el resultado A.1 tenemos que

$$p_t(x, x) \geq e^{q(x, x)t},$$

por lo que

$$\begin{aligned} |F(s, t)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} p_t(1, n) s^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} p_t(1, n) |s|^n \\ &= p_t(1, 1) |s| + \sum_{n \neq 1} p_t(1, n) |s|^n \\ &= p_t(1, 1) |s| + 1 - p_t(1, 1) \\ &= 1 - p_t(1, 1) (1 - |s|) \\ &\leq 1 - e^{q(x, x)t} (1 - |s|). \end{aligned}$$

Por último notemos que $0 < e^{q(x, x)t} < 1$, por tanto si $|s| < 1$ tenemos que $|F(s, t)| < 1$.

Lema 1.4 (Condición de no explosión). *El proceso \mathcal{Z} es minimal, $F(1, t) = 1$, si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ se cumple que*

$$\int_{1-\epsilon}^1 \frac{ds}{f(s) - s} = \infty. \quad (1.47)$$

Demostración. Notemos que la ecuación *Backward*, en un intervalo adecuado, es equivalente a

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\frac{d}{dt} F(s, t)}{f(F(s, t)) - F(s, t)} dt &= rt \\ \int_s^{F(s, t)} \frac{dx}{f(x) - x} &= rt, \end{aligned}$$

por lo que si el proceso es minimal entonces $\sum_{n=1}^{\infty} p_t(1, n) = F(1, t) = 1$, por tanto la integral es indefinida e igual a infinito. Por otra parte si la integral

diverge implica que $F(1, t) = 1$. La doble implicación es clara, veamos que dicho intervalo adecuado realmente existe. Sea $0 < s_0 < 1$ tal que $f(x) - x$ no toca el 0 para $s_0 \leq x < 1$, además elijamos $s_0 < s_1 < 1$ y t_0 tales que $s_1 - rt_1 > s_0$. La ecuación *Backward* implica que $|\frac{d}{dt}F(s, t)| \leq r$, por lo que

$$-rt \leq F(s, t) - s \leq rt \quad (1.48)$$

y por tanto si $t \leq t_1$, $s_1 < s < 1$ tendremos que $s_0 < s_1 - rt \leq F(s, t)$. Además por (1.46) tenemos que $F(s, t) < 1$ y por tanto la función $f(x) - x$ no se desvanece en el intervalo $[s, F(s, t)]$. \square

La esperanza y los momentos superiores del proceso de ramificación a tiempo continuo pueden ser obtenidos a través de la función generadora apoyándonos de las ecuaciones de Kolmogorov. Definamos a m y σ^2 como la esperanza y varianza del mecanismo de ramificación, para encontrar una forma explícita para el primer momento. Tenemos que

$$m_1(t) := \mathbb{E}[Z_t] = \left. \frac{d}{ds}F(s, t) \right|_{s=1},$$

y diferenciando la ecuación *Backward* respecto a s , obtenemos

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} F(s, t) = \frac{d}{ds} u(F(s, t)) = r(f'(F(s, t)) - 1) \frac{d}{ds} F(s, t)$$

y evaluando en $s = 1$, resulta

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = r(m - 1)m_1(t)$$

con la condición de frontera $m_1(0) = 1$, ecuación diferencial ordinaria cuya solución está dada por,

$$m_1(t) = e^{r(m-1)t}.$$

Existen diferentes comportamientos que pueden ser expresados en términos de m . Si $m < 1$ tenemos decrecimiento exponencial, si $m > 1$ tenemos crecimiento exponencial y si $m = 1$ la esperanza es constante. Para el cálculo del segundo momento $m_2(t) := \mathbb{E}[Z_t^2]$ repetimos el procedimiento para encontrar una ecuación diferencial, derivando dos veces la ecuación *Backward* respecto a s y evaluando en $s = 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds^2} \frac{d}{dt} F(s, t) &= \frac{d}{ds} r(f'(F(s, t)) - 1) \frac{d}{ds} F(s, t) \\ &= r f''(F(s, t)) \frac{d}{ds} F(s, t) + r(f'(F(s, t)) - 1) \frac{d^2}{ds^2} F(s, t). \end{aligned}$$

Evaluando y sustituyendo la forma explícita de m_1 , obtenemos

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = r f''(1) e^{r(m-1)t} + r(m-1)m_2(t) \quad (1.49)$$

Notemos que el caso $m = 1$ es simple pues el lado derecho es constante respecto a t . Si $m \neq 1$ tenemos una ecuación de primer grado no homogénea, obteniendo

$$m_2(t) = \begin{cases} \frac{f''(1)}{m-1} e^{r(m-1)t} (e^{r(m-1)t} - 1) & \text{si } m \neq 1 \\ f''(1)t & \text{si } m = 1 \end{cases}. \quad (1.50)$$

Estudiemos la probabilidad de extinción, la idea que el proceso se extinga en tiempo continuo es clara: queremos encontrar la probabilidad de que el proceso llegue eventualmente al 0. Para estudiar esto haremos uso de la función generadora. Primero definamos a los siguientes conjuntos

$$A = \{Z_t \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty\} \quad (1.51)$$

$$B = \{Z_t \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}. \quad (1.52)$$

Estudiemos entonces la probabilidad de que el proceso generado por un individuo se extinga, es decir

$$q := \mathbb{P}[B|Z(0) = 1]. \quad (1.53)$$

Teorema 1.5. *La probabilidad de extinción q es la raíz más pequeña de la ecuación $u(s) = r(f(s) - s) = 0$.*

Demostración. Este es un resultado análogo al caso discreto. Para demostrarlo, analizaremos la probabilidad de que el proceso sea 0 al tiempo t , es decir

$$q(t) := \mathbb{P}[Z(t) = 0|Z(0) = 1] = F(0, t).$$

Al evaluar en $s = 0$ la ecuación *Backard* encontramos que

$$\frac{d}{dt}q(t) = u(q(t)), \quad (1.54)$$

que es equivalente a la ecuación integral

$$q(t) = \int_0^t u(q(y))dy, \quad (1.55)$$

ya que $q(0) = 0$. Sea q^* la raíz más pequeña de $u(s) = 0$. La estrategia para esta demostración será mostrar que sí

$$q := \lim_{t \rightarrow \infty} q(t),$$

entonces $q = q^*$. Para esto primero demostraremos que $q^* \geq q$. Notemos que, $q(t)$ es una función creciente, por tanto su derivada es no negativa y por (1.54) tenemos que $u(q(t)) \geq 0$, lo que implica que $f(q(t)) \geq q(t)$. Si

f_n es la n -ésima composición de f , análogamente a lo estudiado en el caso discreto, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = q^*,$$

para todo $0 \leq s < 1$. Lo anterior implica que $q^* \geq q(t)$, y al tomar el límite cuando t tiende a infinito concluimos que $q^* \geq q$.

Ahora demostremos que $q^* = q$. Supongamos la desigualdad estricta $q^* > q$, lo que implica que $u(q) > 0$ y por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|q - s| < \varepsilon$ entonces $u(s) > 0$. Ya que q es el límite monótono de $q(t)$ tenemos que existirá $T > 0$ tal que si $t > T$ entonces $|q - q(t)| < \varepsilon$. Utilizando esto y la ecuación (1.55) tenemos que

$$\begin{aligned} q &= \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u(q(y)) dy \\ &= \int_0^T u(q(y)) dy + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_T^t u(q(y)) dy \\ &= \infty, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto podemos concluir que $q = q^*$. \square

Observación 1.4. *Al igual que en el caso discreto tenemos que*

$$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] = 1. \tag{1.56}$$

Además como la probabilidad de extinción es el punto fijo más pequeño de f , tenemos que $q = 1$ si y sólo si $f'(s) \leq 1$.

Ejemplo 1.3. *Ilustremos el proceso de ramificación a tiempo continuo utilizando el mecanismo de ramificación del proceso de nacimiento y muerte.*

$$f(s) = p_0 + p_1 s^2 \tag{1.57}$$

La esperanza del proceso estará determinada por:

$$\mathbb{E}[Z_t] = e^{r(2p_1 - 1)t} \tag{1.58}$$

Sabemos que la probabilidad de extinción está determinada por la raíz más pequeña de la ecuación $u(s) = 0$ por el Teorema 1.5, que al igual que en el caso discreto se reduce a resolver la ecuación $f(s) = s$. Si $p_0 \geq p_2$ entonces $q = 1$, mientras que si $p_0 < p_2$ entonces $q = \frac{p_2}{p_0}$.

Construyamos la función generadora del proceso, de nacimiento y muerte resolviendo la ecuación Backward de Kolmogorov,

$$\frac{d}{dt} F(s, t) = r(p_0 + p_1 F^2(s, t) - F(s, t)) \tag{1.59}$$

con condición inicial $F(s, 0) = s$. Esta ecuación es equivalente a

$$\int_s^{F(s,t)} \frac{1}{p_0 - p_1 u^2 - u} du = rt, \quad (1.60)$$

cuya solución es:

$$F(s, t) = \frac{p_0(s-1) + e^{rt(p_0-p_1)}(p_0-p_1s)}{p_1(s-1) + e^{rt(p_0-p_1)}(p_0-p_1s)}. \quad (1.61)$$

1.2.2. Ramificación Multitipo a tiempo continuo

En esta última sección presentaremos al modelo más complejo de procesos de ramificación, que podemos pensar como la versión continua de los procesos Galton-Watson multitipo. Además de los diferentes mecanismos de ramificación, también deberemos considerar ahora que los tiempos de vida de cada individuo cambian según su clase. Durante esta sección consideraremos K tipos de individuos.

Definición 1.10. Decimos que el proceso estocástico $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un **proceso de ramificación multitipo a tiempo continuo** si

1. Su espacio de estados es \mathbb{N}^K ,
2. Es una cadena de Markov estacionaria respecto a la σ -álgebra $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s, s \leq t)$,
3. Las probabilidades de transición satisfacen

$$\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} = \prod_{k=1}^K \left[\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(e_k, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right]^{i_k}, \quad (1.62)$$

con $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^K$ y $\mathbf{s} \in [0, 1]^K$.

Esta definición muestra explícitamente que la población generada por una configuración inicial de \mathbf{i} individuos tiene la misma distribución que una población generada por i_k poblaciones con un individuo inicial del tipo k para cada uno de los tipos. Demos una definición alternativa en términos de la descripción infinitesimal.

Definición 1.11. Decimos que \mathcal{Z} es un **proceso de ramificación multitipo**, con $(p^k)_{k=1}^K$ mecanismos de ramificación y $(r_k^{-1})_{k=1}^K$ tiempos medios de vida, si \mathcal{Z} es una cadena de Markov en \mathbb{N}^K cuyo generador está dado por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^K r_k \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p^k(\mathbf{j}) [f(\mathbf{z} + \mathbf{j} - e_k) - f(\mathbf{z})] \quad (1.63)$$

con $f \in C(\mathbb{N}^K)$.

Podemos interpretar el generador de la siguiente manera: dado que estamos en un estado \mathbf{z} , existe la posibilidad de ir a un estado $\mathbf{z} + \mathbf{j} - e_k$ si un individuo del tipo k muere y deja \mathbf{j} descendientes, salto que tiene una tasa infinitesimal $r_k p^k(\mathbf{j})$. La primera suma considera que cualquier individuo de cualquier tipo puede morir mientras que la segunda nos da los posibles hijos que cada individuo puede tener. Nos referiremos al proceso según sus entradas como

$$Z_t = (Z_{1t}, \dots, Z_{Kt}). \quad (1.64)$$

Hagamos la construcción del proceso a partir de sus parámetros infinitesimales. Sean $(p^k)_{k=1}^K$ los mecanismos de ramificación y $(r_k^{-1})_{k=1}^K$ los tiempos medios de vida. Adoptaremos además la notación empleada para procesos multitypo a tiempo discreto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r_1, \dots, r_K), \\ \mathbf{p}(\mathbf{j}) &= (p^1(\mathbf{j}), \dots, p^K(\mathbf{j})). \end{aligned}$$

La probabilidad de pasar de un estado \mathbf{i} a uno \mathbf{j} con $\mathbf{j} \geq \mathbf{i} - e_k$ en un intervalo $[0, h)$ es igual a considerar que algún individuo del tipo k muera dejando $\mathbf{j} - \mathbf{i} - e_k$ nuevos individuos. Adicionalmente, si $\mathbf{j} = \mathbf{i}$ existe la posibilidad de que ningún individuo muera, y tenemos entonces que

$$p_h(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = t \sum_{k=1}^K i_k r_k p^k(\mathbf{j} - \mathbf{i} - e_k) + (1 - i_k r_k h) \mathbb{I}_{\{\mathbf{i}=\mathbf{j}\}} + o(h),$$

probabilidad que nos permitiría hacer un tratamiento análogo al caso unidimensional y derivar las ecuaciones (1.38) y (1.37). En esta sección presentaremos las ecuaciones análogas a las *Forward* y *Backward* ahora en varias dimensiones. Primero definamos la función generadora del proceso comenzando en un estado $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^K$ como,

$$F^{\mathbf{i}}(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}}.$$

En lo que sigue será de nuestro interés con el vector de las funciones generadoras comenzando con un individuo de cada tipo

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}, t) = (F^{e_1}(\mathbf{s}, t), \dots, F^{e_K}(\mathbf{s}, t))$$

y por la propiedad de ramificación tenemos que

$$F^{\mathbf{i}}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{s}, t)^{\mathbf{i}}. \quad (1.65)$$

En efecto, para hacer notar esta la relación basta utilizar (1.62), ya que

$$\begin{aligned}
F^{\mathbf{i}}(\mathbf{s}, t) &= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= \prod_{k=1}^K \left[\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(e_k, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right]^{i_k} \\
&= \prod_{k=1}^K (F^{e_k}(\mathbf{s}, t))^{i_k} \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{s}, t)^{\mathbf{i}}.
\end{aligned}$$

Lema 1.5. *Sea \mathcal{Z} un proceso de ramificación multitipo a tiempo continuo con función generadora $\mathbf{F}(\mathbf{s}, t)$. Sea $\delta > 0$, si $\widehat{\mathcal{Z}} = (Z_{\delta n})_{n \in \mathbb{N}}$ entonces $\widehat{\mathcal{Z}}$ es un proceso Galton-Watson multitipo cuyas funciones generadoras de los mecanismos de ramificación están dadas por $\mathbf{F}(\mathbf{s}, \delta)$.*

Demostración. Tenemos que $\widehat{\mathcal{Z}}$ es una cadena de Markov al ser una discretización de una cadena de Markov a tiempo continuo. Por (1.65) tenemos que

$$\begin{aligned}
F^{\mathbf{i}}(\mathbf{s}, \delta) &= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_{\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{s}, \delta)^{\mathbf{i}},
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$p_{\delta}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \text{coeficiente de } \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \text{ en } \mathbf{F}(\mathbf{s}, \delta)^{\mathbf{i}}.$$

Así la propiedad de ramificación se satisface y concluimos que $\widehat{\mathcal{Z}}$ es un proceso Galton-Watson multitipo. \square

Otra propiedad análoga al caso unidimensional es la composición de funciones generadoras

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}, u + t) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{s}, u), t). \quad (1.66)$$

Para demostrar esta igualdad hagamos notar que $F^{e_i}(s, u+t) = F^{e_i}(\mathbf{F}(\mathbf{s}, u), t)$

para todo $i \in \{1, \dots, K\}$.

$$\begin{aligned}
F^{e_i}(\mathbf{s}, u+t) &= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_{t+u}(e_i, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_t(e_i, \mathbf{k}) p_u(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_t(e_i, \mathbf{k}) \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_u(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_t(e_i, \mathbf{k}) \prod_{l=1}^K \left[\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_u(e_l, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right]^{k_l} \\
&= \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p_t(e_i, \mathbf{k}) \mathbf{F}(\mathbf{s}, u)^{\mathbf{k}} \\
&= F^{e_i}(\mathbf{F}(\mathbf{s}, u), t).
\end{aligned}$$

Definamos también

$$f^i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p^i(\mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}}; \quad u^i(\mathbf{s}) = r_i(f^i(\mathbf{s}) - s_i),$$

con $i \in \{1, \dots, K\}$, y su forma vectorial,

$$\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^K); \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^K).$$

Podemos emplear las funciones definidas anteriormente para formular entonces las ecuaciones *Forward* y *Backward* de Kolmogorov, de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} F^{e_i}(\mathbf{s}; t) = \sum_{j=1}^K u^{(j)}(\mathbf{s}) \frac{d}{ds_j} F^{e_i}(\mathbf{s}; t) \quad (1.67)$$

$$\frac{d}{dt} F(i, \mathbf{s}; t) = u^{(i)}(\mathbf{F}(\mathbf{s}; t)). \quad (1.68)$$

Por el teorema A.3 tenemos que existe p_t una solución a las ecuaciones (1.67) y (1.68), no negativa, continuamente diferenciable y tal que satisface

$$\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \leq 1,$$

para todo $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^K$. Una condición suficiente para la existencia de una solución minimal es que

$$\frac{d}{ds_j} f^i(\mathbf{1}) < \infty \quad (1.69)$$

para todas $i, j \in \{1, \dots, \infty\}$, que es interpretable como que la media de hijos de cualquier tipo existe. Esta condición garantiza que para todo tiempo finito

tendremos un número finito de individuos. Recalquemos que la condición (1.69) es suficiente mas no necesaria.

Los momentos del proceso pueden ser calculados por las derivadas de las funciones generadoras de los mecanismos de ramificación, es decir $M(t)$ es la matriz cuadrada cuyas entradas están dadas por

$$m_{ij}(t) = \mathbb{E}^{e_i}[Z_{jt}] = \frac{d}{ds_j} F^{e_i}(\mathbf{1}, t), \quad (1.70)$$

con $i, j \in \{1, \dots, K\}$. Recordando que la esperanza define un semigrupo de Feller, tenemos que la matriz M satisface

$$M(t+u) = M(t)M(u), \quad (1.71)$$

los procesos de ramificación multitipo nos permiten verificar esta igualdad utilizando la propiedad de ramificación. Primero notemos que podemos reescribir a los hijos del tipo j generados por un individuo del tipo i al tiempo $t+u$ como

$$Z_{j(t+u)}^{e_i} \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^K \sum_{\alpha=1}^{Z_{kt}^{e_i}} Z_{ju}^{e_{k,\alpha}},$$

donde el superíndice α sirve para señalar que tenemos procesos de ramificación independientes entre sí, y con los mismos parámetros infinitesimales. Utilizando la esperanza condicional podemos deducir que

$$\begin{aligned} m_{ij}(t+u) &= \mathbb{E}^{e_i}[Z_{j(t+u)}] \\ &= \mathbb{E}^{e_i} \left[\sum_{k=1}^K \sum_{\alpha=1}^{Z_{kt}^{e_i}} Z_{ju}^{e_{k,\alpha}} \right] \\ &= \mathbb{E}^{e_i} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^K \sum_{\alpha=1}^{Z_{kt}^{e_i}} Z_{ju}^{e_{k,\alpha}} \middle| Z_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^{e_i} \left[\sum_{k=1}^K Z_{kt}^{e_i} \mathbb{E} [Z_{ju}^{e_{k,\alpha}}] \right] \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbb{E}^{e_i} [Z_{kt}] \mathbb{E}^{e_k} [Z_{ju}] \\ &= \sum_{k=1}^K m_{ik}(t) m_{kj}(u) \end{aligned}$$

es decir la entrada $m_{ij}(t+u)$ es el resultado de multiplicar el i -ésimo renglón de la matriz $M(t)$ por la j -ésima columna de la matriz $M(u)$.

Estudiemos la probabilidad de extinción. Al igual que en el caso discreto, definiremos

$$q_i := \mathbb{P}[Z_t = 0 \text{ p.a. } t \in \mathbb{N} | Z_0 = e_i] = \lim_{t \rightarrow \infty} F^{e_i}(t, \mathbf{0}),$$

y $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K)$.

Lema 1.6 (Teorema de Kingman.). *Sea f una función continua en $(0, \infty)$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta) = c(\delta),$$

existe para todo $\delta > 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$$

existe y $c(\delta) = c$ para todo $\delta > 0$.

Observación 1.5. *Por el Teorema 1.5 del apéndice tenemos que*

$$M(t) = T(t) = e^{\mathcal{G}_t \mathbf{x}}. \quad (1.72)$$

La matriz exponencial puede definirse de una manera alternativa como

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad (1.73)$$

con A la forma matricial de \mathcal{G}_Z , es decir tiene entradas

$$a_{ij} = r_i(m_{ij} - \delta_0(i, j)),$$

con

$$m_{ij} = \frac{d}{ds_j} f^i(\mathbf{1}).$$

Teorema 1.6 (Probabilidad de extinción). *Sea $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un proceso de ramificación multitipo a tiempo continuo no singular con $t_0 > 0$ tal que $M(t_0)$ es positiva. Si λ es el valor propio más grande de la forma matricial del generador*

1. *Si $\lambda \leq 0$ entonces $\mathbf{q} = \mathbf{1}$,*
2. *Si $\lambda > 0$, entonces $\mathbf{0} \leq \mathbf{q} < \mathbf{1}$ y \mathbf{q} satisface*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q},$$

3. *Si $\mathbf{s} \in [0, 1]^K$ con $\mathbf{s} \neq \mathbf{1}$ entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{q}.$$

Demostración. Para esta demostración buscaremos reducir el problema al caso discreto, utilizando el lema de Kingman. Las funciones de nuestro interés serán

$$q_i(t) := \mathbb{P}[Z_t = \mathbf{0} | Z_0 = e_i] = F^{e_i}(\mathbf{0}, t) \quad (1.74)$$

para todo $i \in \{1, \dots, K\}$. Notemos que al ser probabilidades de extinción estas funciones son crecientes. Dado $\delta > 0$, demostremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_i(n\delta)$$

existe para todo $i \in \{1, \dots, K\}$. Para esto, recordemos que por el lema 1.5 podemos definir un proceso de *Galton-Watson* multitipo como $\widehat{Z} = (\widehat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Z_{n\delta})_{n \in \mathbb{N}}$. Veamos que es positivo regular. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 \leq N\delta$, notemos que

$$0 < M(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0^k}{k!} A^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N\delta)^k}{k!} A^k = M(N\delta),$$

teniendo que $M(\delta)$ es estrictamente positiva por tanto el proceso \widehat{Z} es positivo regular y no singular. Por el teorema 1.4 tenemos entonces que la probabilidad de extinción existe y está dada por

$$q_i(\delta) := \lim_{n \rightarrow \infty} q_i(n\delta),$$

y cualquier punto inicial en $[0, 1]^K$ tenderá al punto fijo más pequeño de \mathbf{f} . Notemos que la elección de $\delta > 0$ fue arbitraria, y por el lema de Kingman tenemos que existe \mathbf{q} tal que satisface $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\delta)$ para toda $\delta > 0$. Particularmente, si consideramos $\delta = 1$ y ρ es el valor máximo de $M(1)$ tendremos que el máximo valor propio de A está dado por $\log(\rho)$. Por tanto $\rho \leq 1$ si y solo si $\lambda \leq 0$. Por último notemos que $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, y por la ecuación *Backward* podemos deducir una ecuación diferencial para $q_i(t)$, dada por

$$\frac{d}{dt} q_i(t) = u^i(\mathbf{q}(t)), \quad (1.75)$$

con $i \in \{1, \dots, K\}$ y $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_K(t))$. Ya que el límite cuando t tiende a infinito es constante entonces $\frac{d}{dt} q_i(t) = u^i(\mathbf{q}(t)) = 0$ y por tanto $f^i(\mathbf{q}) = q_i$. \square

Ejemplo 1.4. *Ilustremos esta sección con el proceso de nacimiento y muerte ahora con banco de semillas a tiempo continuo. Recordando la función generadora del mecanismo de ramificación de los individuos activos está dada por*

$$f^1(s_1, s_2) = p_0 + p_1 s_2 + p_2 s_1^2.$$

Mientras que la función generadora de los individuos inactivos está dada por

$$f^2(s_1, s_2) = s_1.$$

Consideraremos a $0 < r_1^{-1}, r_2^{-1} < \infty$ los tiempos de medios de vida para los individuos activos e inactivos respectivamente.

El generador del proceso en forma matricial está dado por

$$A = \begin{bmatrix} r_1(2p_2 - 1) & r_1p_1 \\ r_2 & -r_2 \end{bmatrix}; \quad (1.76)$$

la matriz de esperanza del proceso estará dada por,

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} r_1(2p_2 - 1) & r_1p_1 \\ r_2 & -r_2 \end{bmatrix}^k; \quad (1.77)$$

y los vectores propios de la matriz A están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{2p_2r_1 - (r_1 + r_2) \pm \sqrt{(2p_2r_1 - (r_1 + r_2))^2 + 4r_1r_2(p_2 - p_0)}}{2}. \quad (1.78)$$

Encontremos ahora una condición necesaria y suficiente para que λ_1 sea mayor que 0. Comencemos notando que si $p_2 > p_0$ entonces $\lambda_1 > 0$. Ahora supongamos que $\lambda_1 > 0$, dividamos esta deducción en dos partes, según el valor de $2p_2r_1 - (r_1 + r_2)$:

1. Si $2p_2r_1 - (r_1 + r_2) \geq 0$ entonces

$$r_1(2p_2 - 1) \geq r_2 > 0.$$

Lo que implica que $p_2 > \frac{1}{2}$ y por tanto $p_2 > p_0$.

2. Si $2p_2r_1 - (r_1 + r_2) < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{(2p_2r_1 - (r_1 + r_2))^2 + 4r_1r_2(p_2 - p_0)} &> -2p_2r_1 + r_1 + r_2 \\ (2p_2r_1 - (r_1 + r_2))^2 + 4r_1r_2(p_2 - p_0) &> (2p_2r_1 - (r_1 + r_2))^2 \\ 4r_1r_2(p_2 - p_0) &> 0 \\ p_2 &> p_0. \end{aligned}$$

Por tanto $\lambda_1 > 0$ si y sólo si $p_2 > p_0$. La probabilidad de extinción está determinada por la raíz más pequeña de $\mathbf{u}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$, que se reduce a la encontrada en el caso discreto, por tanto,

$$\mathbf{q} = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } p_2 \leq p_0 \\ \left(\frac{p_0}{p_2}, \frac{p_0}{p_2}\right) & \text{si } p_2 > p_0 \end{cases}.$$

Capítulo 2

Procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial

Sabemos que los individuos tienen un entorno que los condiciona y limita. Incluso existen ambientes desfavorables para los individuos. Tenemos el ejemplo de las bacterias causantes de enfermedades en cuyo tratamiento la temperatura alta o antibióticos representan escenarios adversos para la sobrevivencia de las bacterias. Sabemos también que evolutivamente los organismos han desarrollado estrategias para resistir ambientes hostiles. Siguiendo esta idea, permitiremos a los procesos de ramificación ser afectados por razones externas a la población y después analizaremos una estrategia de respaldo.

2.1. Procesos de ramificación con desastres del tipo binomial

Durante esta sección analizaremos procesos de ramificación con un caso particular de ambientes con desastres. Abordaremos la construcción del proceso y su comportamiento en media. Los resultados presentados en esta sección están basados en [7]. Comencemos describiendo el proceso, imaginemos un proceso de ramificación unidimensional a tiempo continuo. Simultáneamente en el tiempo y de manera independiente tenemos un proceso de Poisson, en el que en cada ocurrencia cada uno de los individuos puede morir según una variable de tipo Bernoulli. La población sobreviviente será una variable binomial de parámetros dados por el tamaño de la población hasta el instante anterior y la probabilidad de supervivencia.

Definición 2.1. Sean $\lambda > 0$, $r > 0$, $p \in [0, 1]$ y $(p_k)_{k \geq 0}$ una distribución. Decimos que $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ es un **proceso de ramificación con desastres**

del tipo binomial si \mathcal{Z} es un proceso de Markov en \mathbb{N} con generador,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}f(z) = rz \sum_{k=0}^{\infty} p_k (f(z-1+k) - f(z)) + \lambda \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k} (f(k) - f(z)) \quad (2.1)$$

con $f \in C(\mathbb{N})$. Al igual que con los procesos de ramificación r corresponde a la tasa de reproducción, $(p_k)_{k \geq 0}$ es el mecanismo de ramificación, λ es la tasa de desastres y p la probabilidad de supervivencia.

La primera parte del generador corresponde a la ramificación del proceso y la segunda a los efectos del desastre. Nos referiremos al proceso de ramificación con desastres del tipo binomial como *BPBD* por sus siglas en inglés. De ser necesario haremos referencia a que un *BPBD* tiene tasa de ramificación r , tasa de desastres λ , probabilidad de supervivencia p y función generadora del mecanismo de ramificación h como $\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h}$.

Demos la construcción del modelo según sus parámetros infinitesimales: Sean $r > 0$, $(p_k)_{k \geq 0}$ una distribución, $p \in [0, 1]$ y $\lambda > 0$. La probabilidad de ir de un estado i a uno j en ese intervalo $[0, h)$ será igual al de un proceso de ramificación sí no ocurre ningún desastre en este intervalo. Si hay un desastre podemos acceder a estados $j \leq i$ con una probabilidad dada por una variable aleatoria *Binomial*(i, p). En el caso que $i = j$ entonces existe la posibilidad de que ningún evento reproductorio o desastre ocurra en el intervalo. Todas estas consideraciones son englobadas en la relación

$$\begin{aligned} p_h(i, j) = & (1 - (ri + k)h) \mathbb{I}_{\{j=i\}} + rihp_{j-i+1} \mathbb{I}_{\{j \geq i-1\}} \\ & + \lambda h \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \mathbb{I}_{\{j \leq i\}} + o(h). \end{aligned} \quad (2.2)$$

A partir de (2.2) y las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* podemos deducir las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} p_{t+h}(i, j) &= \sum_{m=0}^{\infty} p_h(i, m) p_t(m, j) \\ &= rih \sum_{m=i-1}^{\infty} p_{m-i+1} p_t(m, j) + \lambda h \sum_{m=1}^i \binom{i}{m} p^m (1-p)^{i-m} p_t(m, j) \\ &\quad + (1 - (ri + \lambda)h) p_t(i, j) + o(h), \\ p_{t+h}(i, j) &= \sum_{m=0}^{\infty} p_t(i, m) p_h(m, j) \\ &= rh \sum_{m=1}^{j+1} m p_t(i, m) p_{j-m+1} + \lambda h \sum_{m=j}^{\infty} p_t(i, m) \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \\ &\quad + p_t(i, j) (1 - (rj + \lambda)h) + o(h). \end{aligned}$$

Restando $p_t(i, j)$ en ambas identidades y considerando el límite cuando h tiende a 0 deducimos las ecuaciones *Backward* y *Forward* de Kolmogorov para las probabilidades de transición, dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_t(i, j) &= -(ir + \lambda)p_t(i, j) + ir \sum_{m=i-1}^{\infty} p_{m-i+1}p_t(m, j) \\ &\quad + \lambda \sum_{m=1}^i \binom{i}{m} p^m (1-p)^{i-m} p_t(m, j), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_t(i, j) &= -(jr + \lambda)p_t(i, j) + r \sum_{m=1}^{\infty} mp_{j-m+1}p_t(i, m) \\ &\quad + \lambda \sum_{m=j}^{\infty} p_t(i, m) \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por el teorema A.3 garantizamos la existencia de una solución, no negativa, continuamente diferenciable y subestocástica para estas ecuaciones.

A lo largo del trabajo nos será de utilidad comparar los *BPBD* y los procesos de ramificación, para esto emplearemos los procesos acoplados. Dado Z un *BPBD* diremos que \hat{Z} es el proceso de ramificación acoplado a Z si su construcción esta dada por las mismas variables del numero de hijos y tiempo de vida para cada individuo. Podemos imaginar al proceso de ramificación acoplado a Z como el proceso de ramificación que Z sería si no se viera afectada por las catástrofes.

Lema 2.1. *Sea \mathcal{Z} un BPBD con $r > 0$, h una función generadora, $\lambda > 0$ y $p \in [0, 1]$. Si $\hat{\mathcal{Z}}$ es el proceso de ramificación acoplado a \mathcal{Z} entonces tenemos que*

$$\mathcal{Z} \leq \hat{\mathcal{Z}} \text{ c.s.} \quad (2.5)$$

Este lema es inmediato pues $\hat{\mathcal{Z}}$ considera la descendencia de aquellos individuos que mueren en \mathcal{Z} debido a desastres. Empleando este lema la existencia de la solución minimal es garantizada si para todo $\varepsilon > 0$ se satisface que

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x}{h(x) - x} = \infty.$$

por la condición de no explosión del lema 2.4.

Definamos ahora la función generadora de probabilidad para el proceso

$$F(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_t(i, j) s^j, \quad (2.6)$$

y deduzcamos las ecuaciones *Forward* y *Backward* para esta función generadora, dadas por

$$\frac{d}{dt}F(s, t) = r(h(s) - s)\frac{d}{ds}F(s, t) - \lambda(1 - p)F(s, t), \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt}F(s, t) = r(h(F(s, t)) - F(s, t)) + \lambda(F(sp + (1 - p), t) - F(s, t)). \quad (2.8)$$

Primero notemos que (2.3) y (2.4) coinciden con (2.37) y (2.38) en los términos relacionados a la ramificación, por lo que solo analizaremos las partes asociadas a los desastres.

Ecuación *Forward*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda \binom{1}{1} p^1 (1-p)^{1-1} p_t(1, j) s^j - \lambda p_t(1, j) s^j &= \lambda p \sum_{j=0}^{\infty} p_t(1, j) s^j - \lambda F(s, t) \\ &= \lambda(1 - p)F(s, t) \end{aligned}$$

Ecuación *Backward*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=j}^{\infty} \lambda p_t(1, m) \binom{m}{j} p^{m-j} (1-p)^j s^j - \lambda p_t(1, j) s^j \\ &= \lambda \sum_{m=0}^{\infty} p_t(1, m) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (sp^j) (1-p)^{m-j} - \lambda F(s, t) \\ &= \lambda \sum_{m=0}^{\infty} p_t(1, m) (sp + (1-p))^m - \lambda F(s, t) \\ &= \lambda(F(ps + (1-p)) - F(s, p)). \end{aligned}$$

Si la probabilidad de supervivencia es uno, es decir $p = 1$, entonces rescataremos las ecuaciones del proceso de ramificación, lo cual es consistente con que si los desastres no afectan a la población tenemos simplemente un proceso de ramificación usual.

Estudiaremos el comportamiento en esperanza del *BPBD* apoyándonos en lo que conocemos del proceso de ramificación sin desastres y el proceso de Poisson.

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{Z} = (Z)_{t \geq 0}$ un BPBD con $0 < r < \infty$, h una función generadora, $0 < \lambda < \infty$ y $p \in [0, 1]$. Si $\widehat{\mathcal{Z}} = (\widehat{Z})_{t \geq 0}$ es el proceso de ramificación a tiempo continuo asociado a \mathcal{Z} y $\mathcal{N} = (N_t)_{t \geq 0}$ es el proceso de Poisson que dicta los desastres entonces dado*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, s \leq t\}$$

tenemos que

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_t] = p^{N_t} \mathbb{E}[\widehat{Z}_t]. \quad (2.9)$$

Demostración. Notemos que Z_t puede ser reescrito como,

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\widehat{Z}_t} \eta_i,$$

con

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si los ancestros del individuo } i \text{ en el proceso } \widehat{Z}_t \\ & \text{sobrevivieron a los } N_t \text{ desastres} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Notemos que las variables $(\eta_i)_{i=1}^{\widehat{Z}_t}$ solo dependen del número de desastres que han ocurrido hasta el tiempo t , es decir

$$\mathbb{E}[\eta|\mathcal{F}_t] = 1\mathbb{P}[\eta = 1|\mathcal{F}_t] + 0\mathbb{P}[\eta = 0|\mathcal{F}_t] = p^{N_t};$$

y por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{Z}_t} \eta_i \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}[\eta|\mathcal{F}_t]\mathbb{E}[\widehat{Z}_t] \\ &= p^{N_t}\mathbb{E}[\widehat{Z}_t]. \end{aligned}$$

□

El teorema anterior implica directamente, por las propiedades de la esperanza condicional, que

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[p^{N_t}]\mathbb{E}[\widehat{Z}_t]. \quad (2.10)$$

Observación 2.1. Sea $\mathcal{Z} = (Z)_{t \geq 0}$ un BPBD con $0 < r < \infty$, h una función generadora, $0 < \lambda < \infty$ y $p \in [0, 1]$. Si $h'(1) \leq 1$ entonces $\mathcal{Z} \rightarrow 0$ casi seguramente si $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $\widehat{\mathcal{Z}} = (\widehat{Z})_{t \geq 0}$ el proceso de ramificación a tiempo continuo asociado a \mathcal{Z} por (2.5), tenemos que

$$Z_t \leq \widehat{Z}_t \text{ c.s.}$$

y por la observación 1.4 tenemos que si $h'(1) \leq 1$ entonces $\widehat{\mathcal{Z}}$ tiende a 0 casi seguramente si t tiende a infinito. □

La observación 2.1 simplemente señala que un BPBD cuyo proceso de ramificación asociado es subcrítico se extinguirá, ya que el proceso ya estaba destinado a desaparecer, y los desastres simplemente aceleran la muerte.

Observación 2.2. Sea $\mathcal{Z} = (Z)_{t \geq 0}$ un BPBD con $0 < r < \infty$, h una función generadora, $0 < \lambda < \infty$ y $p = 0$ entonces $\mathcal{Z} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

Este resultado es trivial pues la probabilidad de supervivencia es 0 y por tanto en la primera ocurrencia catastrófica el proceso de extinguirá, de hecho si $T := \inf\{t | Z_t = 0\}$ entonces T se distribuye exponencial del parámetro λ . Las observaciones 2.1 y 2.2 señalan que los casos interesantes a estudiar se reducen a cuando la función generadora del proceso satisface que $h'(1) > 1$ y $p \in (0, 1)$.

Teorema 2.2. Sea $\mathcal{Z} = (Z)_{t \geq 0}$ un BPBD con $0 < r < \infty$, h una función generadora, $0 < \lambda < \infty$, $p \in (0, 1)$ tal que $m = h'(1) > 1$. Sea

$$\gamma = \lambda \log(p) + r(m - 1),$$

1. Si $\gamma < 0$ entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_t] = 0 \text{ c.s.}$$

2. Si $\gamma > 0$ entonces

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_t] = \infty \text{ c.s.}$$

Demostración. Sea $\widehat{\mathcal{Z}} = (\widehat{Z})_{t \geq 0}$ el proceso de ramificación a tiempo continuo asociado a \mathcal{Z} , cuya esperanza está dada por

$$\mathbb{E}[\widehat{Z}_t] = e^{r(m-1)t}.$$

Además sabemos que el proceso de Poisson satisface que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \text{ c.s.,}$$

por tanto $N_t \sim \lambda t$. Utilizando (2.10) obtenemos que

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[p^{N_t}] \mathbb{E}[\widehat{Z}_t] \sim p^{\lambda t} e^{r(m-1)t} = e^{(\lambda \log p + r(m-1))t},$$

lo que implica que si $\gamma > 0$ tendremos que la esperanza es comparable a un crecimiento exponencial, por tanto

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_t] = \infty; \tag{2.11}$$

análogamente si $\gamma < 0$ tenemos un decrecimiento exponencial. \square

Notemos que las herramientas de procesos de ramificación desarrolladas hasta el momento son insuficientes para asegurar el comportamiento casi seguro del proceso. En el próximo capítulo encontraremos técnicas que desde una nueva perspectiva nos permitirán retomar el análisis del comportamiento del proceso.

Ejemplo 2.1. *Utilicemos el mecanismo de nacimiento y muerte para ilustrar los resultados de esta sección. Recordando la función generadora del proceso está dada por*

$$h(s) = p_0 + p_2 s^2 \quad (2.12)$$

Consideremos una media de vida $0 < r < \infty$, tasa de desastres $0 < \lambda < \infty$ y probabilidad de supervivencia $p \in (0, 1)$. Sean $\widehat{Z} = (\widehat{Z}_t)_{t \geq 0}$ el proceso de ramificación acoplado a \mathcal{Z} y $\mathcal{N} = (N_t)_{t \geq 0}$ el proceso de Poisson que dicta los desastres. Si $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s | s \leq t\}$ entonces

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_t] = p^{N_t} \mathbb{E}[\widehat{Z}_t] = p^{N_t} e^{r(2p_2-1)}, \quad (2.13)$$

y además

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[p^{N_t}] e^{r(2p_2-1)} = e^{-\lambda(1-p)+r(2p_2-1)}. \quad (2.14)$$

Sea $\gamma = \lambda \log(p) + r(2p_2 - 1)$. Por el teorema 2.2 tenemos que

1. *Si $p_2 \leq p_0 + \frac{\lambda}{r} \log(\frac{1}{p})$ entonces*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_t] = 0 \text{ c.s.} \quad (2.15)$$

2. *Si $p_2 > p_0 + \frac{\lambda}{r} \log(\frac{1}{p})$ entonces*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_t] = \infty \text{ c.s.} \quad (2.16)$$

Podemos notar que para que el límite inferior de la esperanza tienda a infinito entonces la probabilidad de reproducirse debe ser mayor que la de morir más un factor que contempla la tasa de reproducción, la tasa de los desastres y la probabilidad de supervivencia.

2.2. Procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial

Para motivar la construcción del modelo, introducimos el concepto de inactividad. Según [8] y [11], la inactividad es una estrategia de cobertura de apuestas en la cual, cuando las condiciones del ambiente son desfavorables para el crecimiento y la reproducción, los organismos optan por entrar en un estado reversible de reducción de su estado metabólico. Los individuos en estado de inactividad representan una reserva que puede reactivar la dinámica de la población, la estrategia se denomina banco de semillas. Cabe destacar que esta estrategia no es libre de gastos energéticos, ya que los individuos deben ser capaces de identificar las condiciones del ambiente para reanimarse. Rescatemos las características fundamentales de esta estrategia. Los individuos tendrán dos posibles tipos, los activos e inactivos. La compensación en esta dinámica es que los individuos activos pueden reproducirse, sin

embargo son afectados por los desastres, mientras que los inactivos pueden sobrevivir a ellas pero sin la habilidad de duplicarse. Por las observaciones señaladas este modelo corresponde a un proceso de ramificación multitypo con desastres del tipo binomial.

Definición 2.2. Sean $0 < r_1, r_2 < \infty$, $(p(\mathbf{j}))_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}}$ una distribución, $p \in [0, 1]$ y $\lambda > 0$. Llamamos **proceso de ramificación con banco de semillas y desastres del tipo binomial** al proceso de Markov \mathcal{Z} en \mathbb{N}^2 con generador

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}f(\mathbf{z}) &= r_1 z_1 \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p(\mathbf{j})(f(\mathbf{z} + \mathbf{j} - e_1) - f(\mathbf{z})) \\ &\quad + r_2 z_2 (f(z_1 + 1, z_2 - 1) - f(\mathbf{z})) \\ &\quad + \lambda \sum_{k=0}^{z_1} \binom{z_1}{k} p^k (1-p)^{z_1-k} (f(k, z_2) - f(\mathbf{z})), \end{aligned}$$

con $f \in C(\mathbb{N}^2)$. Decimos que el proceso tiene una tasa de reproducción r_1 con mecanismo de ramificación de individuos activos $(p(\mathbf{j}))_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}}$, r_2 es la tasa de activación, λ es la tasa de desastres y p es la probabilidad de sobrevivencia.

Podemos leer en el generador que el mecanismo de ramificación del tipo dos señala que solo pueden convertirse en individuos activos, no existe una restricción en el mecanismo de ramificación de los activos y los desastres solo afectan a los individuos activos. Abreviamos al proceso de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial como *BPSBBD* por sus siglas en inglés. De ser necesario haremos referencia a sus parámetros infinitesimales como $\mathcal{Z}_{\lambda, p}^{r, h_1, h_2}$, con h_i la función generadora, para el tipo 1, 2. Hagamos ahora la construcción del proceso según sus parámetros infinitesimales. Dados $0 < r_1, r_2 < \infty$, $(p(\mathbf{j}))_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}}$ una distribución, $p \in [0, 1]$ y $\lambda > 0$, la probabilidad de ir de un estado \mathbf{i} a un estado \mathbf{j} en un intervalo $[0, h)$ es igual al de un proceso de ramificación multitypo sin ninguna ocurrencia catastrófica se presenta en el intervalo. Adicionalmente si $j_1 \leq i_1$ y $j_2 = i_2$ podemos acceder al estado (j_1, i_2) según una variable *Binomial*(i_1, p), teniendo en cuenta el caso especial de $\mathbf{i} = \mathbf{j}$. Todas estas consideraciones están representadas en, la relación

$$\begin{aligned} p_h(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= (1 - (r_1 i_1 + r_2 i_2 + \lambda)h) \mathbb{I}_{\{\mathbf{i}=\mathbf{j}\}} \\ &\quad + r_1 i_1 h p(j_1 - i_1 - 1, j_2 - i_2) \mathbb{I}_{\{j_1 \geq i_1 - 1, j_2 \geq i_2\}} \\ &\quad + r_2 i_2 h \mathbb{I}_{\{j_1 = i_1 + 1, j_2 = i_2 - 1\}} \\ &\quad + \lambda h \binom{i_1}{j_1} p^{j_1} (1-p)^{i_1 - j_1} \mathbb{I}_{\{j_1 \leq i_1, j_2 = i_2\}}. \end{aligned}$$

A través de las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* podemos deducir

las siguientes identidades,

$$\begin{aligned}
p_{t+h}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= \sum_{\mathbf{m} \geq \mathbf{0}} p_h(\mathbf{i}, \mathbf{m}) p_t(\mathbf{m}, \mathbf{j}) \\
&= (1 - (r_1 i_1 + r_2 i_2 + \lambda)h) p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \\
&\quad + r_1 i_1 h \sum_{m_1 \geq i_1 - 1} \sum_{m_2 \geq i_2} p(i_1 - m_1 + 1, i_2 - m_2) p_t(\mathbf{m}, \mathbf{j}) \\
&\quad + r_2 i_2 h p_t((i_1 + 1, i_2 - 1), \mathbf{j}) \\
&\quad + \sum_{m_1=1}^{i_1} \binom{i_1}{m_1} p^{m_1} (1-p)^{i_1-m_1} p_t((m_1, i_2), \mathbf{j}).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
p_{t+h}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= \sum_{\mathbf{m} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{m}) p_h(\mathbf{m}, \mathbf{j}) \\
&= (1 - (r_1 j_1 + r_2 j_2 + \lambda)h) p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \\
&\quad + \sum_{m_1=j_1-1}^{\infty} \sum_{m_2=j_2}^{\infty} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{m}) r m_1 h p(j_1 - m_1 - 1, j_2 - m_2) \\
&\quad + r_2 (j_2 + 1) h p_t(\mathbf{i}, (j_1 - 1, j_2 + 1)) \\
&\quad + \sum_{m_1=j_1}^{\infty} p_t(\mathbf{i}, (m_1, j_2)) \binom{m_1}{j_1} p^{j_1} (1-p)^{m_1-j_1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Definimos también la función generadora del proceso comenzando en el estado \mathbf{i} como

$$F^{\mathbf{i}}(\mathbf{s}, t) = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}},$$

y al vector formado por las funciones generadoras con un solo individuo,

$$F(\mathbf{s}, t) = (F^{e_1}(\mathbf{s}, t), F^{e_2}(\mathbf{s}, t)), \tag{2.19}$$

Utilicemos ahora las ecuaciones (2.17) y (2.18) para deducir las ecuaciones *Backward* y *Forward* de Kolmogorov. Al igual que en el caso unidimensional sólo analizaremos los términos relacionados a los desastres. Comencemos notando que para ambas clases todas las ecuaciones comparten el término $-\lambda p_t(\mathbf{e}_i, \mathbf{j})$, que al multiplicar por $\mathbf{s}^{\mathbf{j}}$ y sumar sobre todos los posibles $\mathbf{j} \geq \mathbf{0}$ genera a $-\lambda F^{e_i}(\mathbf{s}, t)$. Analicemos el último término para ecuación *Forward*.

Para e_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} \binom{1}{\mathbf{j}} p^1 (1-p)^{1-1} p_t(e_1, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} &= \lambda h \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p_t(e_1, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\
&= p \lambda F^{e_1}(\mathbf{s}, t)
\end{aligned}$$

y para e_2 resulta,

$$\sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} \lambda p_t(e_2, \mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} = \lambda F(\mathbf{s}, t).$$

Análogamente veamos la ecuación *Backward*, entonces ambas clases pueden ser analizadas al mismo tiempo, es decir

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=j_1}^{\infty} p_t(e_i, (m_1, j_2)) \binom{m_1}{j_1} p^{j_1} (1-p)^{j_1-m_1} \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{m_1} p_t(e_i, (m_1, j_2)) \binom{m_1}{j_1} (s_1 p)^{j_1} (1-p)^{j_1-m_1} s_2^{j_2} \\ &= \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} p_t(e_i, (m_1, j_2)) (s_1 p + (1-p))^{m_1} s_2^{j_2} \\ &= \lambda F^{e_i}((s_1 p + (1-p), s_2), t). \end{aligned}$$

Definiendo a las funciones generadoras de los mecanismos de ramificación,

$$h_1(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} p(\mathbf{j}) \mathbf{s}^{\mathbf{j}}, \quad h_2(\mathbf{s}) = s_1.$$

Las ecuaciones *Forward* están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F^{e_1}(\mathbf{s}, t) &= r_1(h_1(\mathbf{s}) - s_1) \frac{d}{ds_1} F^{e_1}(\mathbf{s}, t) + r_2(h_2(\mathbf{s}) - s_2) \frac{d}{ds_2} F^{e_1}(\mathbf{s}, t) \\ &\quad - \lambda(1-p) F^{e_1}(\mathbf{s}, t) \\ \frac{d}{dt} F^{e_2}(\mathbf{s}, t) &= r_1(h_1(\mathbf{s}) - s_1) \frac{d}{ds_1} F^{e_2}(\mathbf{s}, t) + r_2(h_2(\mathbf{s}) - s_2) \frac{d}{ds_2} F^{e_2}(\mathbf{s}, t), \end{aligned}$$

mientras que las *Backward* están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F^{e_i}(\mathbf{s}, t) &= r_i(h_i(F(\mathbf{s}, t)) - F^{e_i}(\mathbf{s}, t)) \\ &\quad + \lambda(F^{e_1}(s_1 p + (1-p), s_2, t) - F^{e_i}(\mathbf{s}, t)) \end{aligned}$$

con $i \in \{1, 2\}$. Si $p = 1$, las ecuaciones describen a un proceso de ramificación multitipo con banco de semillas.

Lema 2.2. *Sea \mathcal{Z} un BPSBBD con parámetros infinitesimales $0 < r_1, r_2 < \infty$, h_1 una función generadora de probabilidad, $\lambda > 0$ y $p \in [0, 1]$. Sea $\hat{\mathcal{Z}}$ el proceso de ramificación multitipo asociado a \mathcal{Z} entonces*

$$\mathcal{Z} \leq \hat{\mathcal{Z}} \text{ c.s.} \quad (2.20)$$

La justificación de esta desigualdad es que los procesos están acoplados y los desastres no afectan a los individuos de la población $\hat{\mathcal{Z}}$.

Lema 2.3. *Sea \mathcal{Z} un BPSBBD con parámetros infinitesimales $0 < r_1, r_2 < \infty$, h_1 una función generadora de probabilidad, $\lambda > 0$ y $p \in [0, 1]$. Sea $\widehat{\mathcal{Z}}$ el proceso de ramificación multitipo asociado a \mathcal{Z} . Sean $M(t)$ la matriz de esperanzas y A el generador en forma matricial de $\widehat{\mathcal{Z}}$. Si $\widehat{\mathcal{Z}}$ es no singular, existe $t_0 > 0$ tal que $M(t_0)$ es positiva, y $\omega \leq 0$ es el máximo valor propio de A entonces*

$$\mathcal{Z} \rightarrow 0 \text{ c.s.} \quad (2.21)$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Por el teorema 2.6 tenemos que el proceso $\widehat{\mathcal{Z}}$ se extingue casi seguramente y por (2.20) terminamos. \square

Veamos una cota inferior para la matriz de esperanzas del BPSBBD utilizando un razonamiento análogo a [7] y suponiendo que todos los individuos se ven afectados por los desastres.

Lema 2.4. *Sea \mathcal{Z} un BPSBBD con parámetros infinitesimales $0 < r_1, r_2 < \infty$, h_1 una función generadora de probabilidad, $\lambda > 0$ y $p \in [0, 1]$. Sea $\widehat{\mathcal{Z}}$ el proceso de ramificación multitipo asociado a \mathcal{Z} y $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_t | s \leq t\}$ la sigma álgebra asociada al proceso de Poisson que dicta los desastres. Dado $\widehat{M}(t)$ la matriz de esperanza de $\widehat{\mathcal{Z}}$, si definamos a $M^{\mathcal{F}_t}(t)$ como la matriz cuyas entradas están dadas por*

$$(M^{\mathcal{F}_t}(t))_{ij} = \mathbb{E}^{e_i}[Z_{jt} | \mathcal{F}_t],$$

entonces

$$M^{\mathcal{F}_t}(t) \geq p^{N_t} \widehat{M}(t). \quad (2.22)$$

Demostración. Utilizando la misma idea de Kaplan podemos reescribir a las entradas de $M^{\mathcal{F}_t}(t)$ como

$$Z_{jt}^{e_i} = \sum_{k=0}^{\widehat{Z}_{jt}^{e_i}} \eta_k^{ij}$$

con

$$\eta_k^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los ancestros del } k\text{-ésimo individuo en el proceso } \widehat{\mathcal{Z}}_{jt}^{e_i} \\ & \text{sobrevivieron a los } N_t \text{ desastres,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}.$$

con $k \in \{1, \dots, \widehat{Z}_{jt}^{e_i}\}$, $i, j \in \{1, 2\}$. Por la estrategia de bancos de semillas no podemos calcular explícitamente cuantos desastres afectaron a la genealogía de cada individuo, sin embargo podemos dar una cota inferior de cuantos individuos vivos hay suponiendo que todos los desastres afectaron a todos los individuos, es decir, para que el individuo k esté vivo al momento t su

ancestría tendrá que haber sobrevivido a N_t desastres. Si definimos las variables aleatorias de tipo Bernoulli $\hat{\eta}_k^{ij}$ con probabilidad de éxito p^{N_t} tendremos que

$$\eta_k^{ij} \geq \hat{\eta}_k^{ij} \text{ c.s.}$$

para todo $k \geq 0$ y $i, j \in \{1, 2\}$. Por tanto se cumple

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{e_i}[Z_{jt}|\mathcal{F}_t] &\geq \mathbb{E}[\hat{\eta}^{jt}|\mathcal{F}_t]\mathbb{E}^{e_i}[\hat{Z}_{jt}] \\ &= p^{N_t}\mathbb{E}^{e_i}[\hat{Z}_{jt}]. \end{aligned}$$

□

La utilidad de la estrategia se hace notoria cuando analizamos el caso con probabilidad de supervivencia $p = 0$. Notemos que si al momento de un desastre tenemos individuos inactivos estos sobrevivirán, teniendo la posibilidad de reactivar la dinámica.

Al igual que en el caso unidimensional las técnicas del siguiente capítulo nos permitirán analizar el comportamiento del proceso desde una nueva perspectiva.

Capítulo 3

Dualidad entre procesos de ramificación con desastres y procesos deterministas por partes.

En la primera sección del capítulo introduciremos los procesos p -jump y $2D$ - p -jump analizando su comportamiento en infinito. En la segunda sección haremos uso de la relación de dualidad que existe entre los $BPBD$ y los procesos p -jump para retomar el análisis de la probabilidad de extinción para los $BPBD$. Además mostraremos la relación de dualidad que existe entre los $BPSBBD$ y los procesos $2D$ - p -jump.

3.1. Procesos p -jump y $2D$ - p -jump

En este capítulo estudiaremos dos procesos de Markov deterministas por partes. Los intervalos deterministas están dadas por una ecuación diferencial, y además según las ocurrencias de un proceso de Poisson saltan de su estado actual a una cierta proporción del mismo. Los resultados presentados en esta sección están basados en [5].

Definición 3.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I = [0, L]$ con $L > 0$ o $I = [0, \infty)$ tal que $\alpha(0) \geq 0$ y $\alpha(L) \leq 0$ si I es acotado, $p \in [0, 1]$. Decimos que $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ es un **proceso p -jump** si es un proceso de Markov continuo a la derecha, que realiza saltos de un estado x a px a tasa λ y entre saltos satisface la ecuación diferencial

$$\dot{X}_t = \alpha(X_t).$$

El generador del proceso está dado por

$$\mathcal{G}_X f(x) = \lambda(f(px) - f(x)) + \alpha(x)f'(x),$$

con $f \in C^1(I)$. Diremos que \mathcal{X} es el proceso p -jump con deriva α , saltos de proporción p a tasa λ y punto inicial X_0 .

Bajo ciertas hipótesis podemos describir el comportamiento de los procesos p -jump. Para esto definamos algunas cantidades de interés relacionadas a la deriva, dadas por

$$s_\alpha = \sup_{\alpha(x) > 0} x, \quad \alpha'_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x}, \quad \hat{\alpha} = \sup_{x \in I \setminus \{0\}} \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Además demos la condiciones de continuidad suficientes para que los procesos estén correctamente definidos,

(C₁) α es Lipschitz continua en I , o

(C₂) α es Lipschitz continua en $I \cap [\varepsilon^{-1}, \varepsilon]$, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ y $\alpha'_0 = \infty$.

Teorema 3.1 (Convergencia del proceso p -jump). *Sean I y α como en la definición 3.1, con α tal que satisfaga C_1 o C_2 , $p \in (0, 1)$ y $X_0 \in I$, adicionalmente si $I = \mathbb{R}^+$ supondremos que $s_\alpha < \infty$.*

1. Si $\hat{\alpha} < \log(\frac{1}{p})$ entonces $X_t \rightarrow 0$ c.s. si $t \rightarrow \infty$.
2. Si $\alpha'_0 \in (\log(\frac{1}{p}), \infty]$ entonces \mathcal{X} converge débilmente a X_∞ , con X_∞ tal que $\mathbb{P}[X_\infty \in (0, x_\alpha]] = 1$ con $x_\alpha = \min\{x \in I \setminus \{0\} : \alpha(x) = 0\}$.

Demostración. Comencemos notando que podemos reescribir cualquier deriva α en un intervalo arbitrario I en términos de una función definida en el intervalo $[0, 1]$, definamos a $s := \max\{X_0, s_\alpha\}$ y a la deriva $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$a(x) := \frac{\alpha(sx)}{s}$$

notemos que

$$\hat{a} = \sup_{x \in I \setminus \{0\}} \frac{a(x)}{x} = \sup_{x \in I \setminus \{0\}} \frac{\alpha(sx)}{sx} = \hat{\alpha}$$

análogamente para a'_0 y α'_0

$$a'_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(sx)}{sx} = \alpha'_0.$$

Sea $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ el proceso p -jump con deriva a , saltos de proporción p y punto inicial $\frac{\tilde{X}_0}{s}$. Veamos que el proceso $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0} = (s\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ corresponde al proceso p -jump con deriva α , notemos que satisface la ecuación diferencial deseada

$$\dot{X}_t = s\dot{\tilde{X}}_t = sa(\tilde{X}) = s \frac{\alpha(s\tilde{X})}{s} = \alpha(X_t),$$

y además cumple con la condición inicial $X_0 = s \frac{X_0}{s}$. A lo largo de esta demostración supondremos sin pérdida de la generalidad que $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Veamos que el proceso \mathcal{X} está bien definido bajo cualquiera de las condiciones de continuidad, sea τ_k es el punto donde ocurre el k -ésimo salto,

(C₁) Para todo intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ el problema $\dot{X}_t = \alpha(X_t)$ con condición inicial $X_{\tau_k} = X_{\tau_k-} > 0$ tiene una única solución por el teorema de *Picard-Lindelöf* ya que α es Lipschitz continua en todo el intervalo.

(C₂) Si $\alpha'_0 = \infty$ y $\alpha(0) \geq 0$ entonces existirá un $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(x) > 0$ para todo $x \in (0, \varepsilon]$, por lo que para todo intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ si consideramos a α^k la restricción de α al intervalo $[\min(X_{\tau_k-}, \varepsilon), 1]$ tendremos que la ecuación diferencial $\dot{X}_t = \alpha^k(X_t)$ con condición inicial $X_{\tau_k} = X_{\tau_k-} > 0$ tendrá una única solución por el teorema de *Picard-Lindelöf* ya que α^k es Lipschitz continua en el intervalo $[\min(X_{\tau_k-}, \varepsilon), 1]$.

Notemos que el proceso no abandona el intervalo $[0, 1]$ por el comportamiento asintótico de la ecuación $\dot{X}_t = \alpha(X_t)$ con $\alpha(0) \geq 0$ y $\alpha(1) \leq 0$.

1. Consideremos la transformación $\mathcal{Y} = -\log(\mathcal{X})$, el generador de esta transformación está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}g(y) &= \mathcal{G}_{\mathcal{X}}(g \circ (-\log))(e^{-y}) \\ &= g(-\log(pe^{-y})) - g(y) - \frac{\alpha(e^{-y})}{e^{-y}}g'(y) \\ &= g\left(y + \log\left(\frac{1}{p}\right)\right) - g(y) - \beta(y)g'(y), \end{aligned}$$

con $g \in C^1(\mathbb{R})$ y $\beta(y) := \frac{\alpha(e^{-y})}{e^{-y}}$. Interpretando el generador de \mathcal{Y} tenemos un proceso que da saltos de y a $y + \log\left(\frac{1}{p}\right)$ a tasa unitaria y entre saltos satisface la ecuación diferencial $\dot{Y}_t = -\beta(Y_t)$. Utilizaremos el proceso de Poisson $\mathcal{N} = (N_t)_{t \geq 0}$ acoplado a los saltos del proceso \mathcal{Y} para estudiar su comportamiento en infinito. Primero notemos que $\hat{\alpha}$ puede ser visto como $\hat{\alpha} = \sup\{\beta(y) : y \geq 0\}$, por hipótesis $\hat{\alpha} < \log\left(\frac{1}{p}\right)$, por tanto $\beta(y) \leq \hat{\alpha} \leq \log\left(\frac{1}{p}\right)$ para todo $y > 0$. Si consideramos al proceso

$$N_t \log\left(\frac{1}{p}\right) - t\hat{\alpha},$$

tenemos que siempre realizará saltos simultáneos con \mathcal{Y} además de que en todo punto tiene una deriva menor, que β por lo que podemos concluir que

$$N_t \log\left(\frac{1}{p}\right) - t\hat{\alpha} \leq Y_t \text{ c.s.}$$

Por la ley fuerte de los grandes números tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \rightarrow 1$ c.s., por lo que considerando el límite inferior tenemos que

$$0 < \log\left(\frac{1}{p}\right) - \hat{\alpha} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \log\left(\frac{1}{p}\right) - \hat{\alpha} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_t}{t} \quad (3.1)$$

concluyendo que $\mathcal{Y} \rightarrow \infty$ c.s. si t tiende a infinito, lo que implica que

$$\mathcal{X} \rightarrow 0 \text{ c.s. si } t \rightarrow \infty.$$

2. Para la demostración de este punto nos será necesario emplear la teoría de regeneración, los resultados empleados pueden ser encontrados en [3]. Comencemos encontrando un conjunto de regeneración, es suficiente mostrar un punto $z \geq 0$ tal que si

$$T_z = \inf\{t \geq 0 | Y_t = z\},$$

entonces

- (I) $\mathbb{E}[T_z | Y_0 = z] < \infty$.
- (II) $\mathbb{P}[T_z | Y_0 = y] = 1$ para todo $y \geq 0$.

Primero construyamos el candidato a z . Ya que $\alpha_0' \in (\log(\frac{1}{p}), \infty]$ entonces existen $\epsilon, \delta > 0$ tales que $\frac{\alpha(x)}{x} > (1 + \epsilon) \log\left(\frac{1}{p}\right)$ si $x \in (0, \delta]$. Proponemos a

$$z = -\log(\delta) < \infty.$$

reescribiendo la hipótesis tenemos que $\beta(y) \geq (1 + \epsilon) \log\left(\frac{1}{p}\right) = \zeta$ si $y \geq z$.

La estrategia para demostrar (I) y (II) es mostrar que si $y \leq z$ entonces eventualmente llegas al intervalo $(z, z + \log\left(\frac{1}{p}\right)]$ y una vez en este intervalo, o cualquier punto superior a z entonces regresas a z . Notemos que el proceso \mathcal{Y} no es continuo por lo que podrías acceder al intervalo $(z, z + \log\left(\frac{1}{p}\right)]$ sin haber tocado a z . Definamos a

$$S = \inf\left\{t : z < Y_t \leq z + \log\left(\frac{1}{p}\right)\right\} \quad (3.2)$$

veamos que si $y \leq z$ entonces $E[S | Y_0 = y] < \infty$. El proceso \mathcal{Y} esta acotado inferiormente por 0 y la probabilidad de dar al menos $\hat{n} = \lceil \frac{z}{\log(\frac{1}{p})} \rceil$ saltos en un intervalo de tiempo con longitud ϵ' es positiva, ya que es equivalente a que un proceso Poisson de tasa 1 tenga al menos \hat{n} observaciones. Si definimos a $G \sim geo(\hat{p})$ con $\hat{p} = \sum_{i=\hat{n}}^{\infty} e^{-\epsilon' \frac{i}{\hat{n}}}$, esta variable aleatoria es equivalente al experimento de teselar a los reales positivos en intervalos de longitud ϵ' y

tirar variables de tipo Bernoulli con probabilidad \hat{p} hasta obtener un éxito. Notemos que cuando tengamos un éxito estamos seguros de que el proceso \mathcal{X} estuvo en el intervalo $(z, z + \log(\frac{1}{p}))$, por lo que

$$\mathbb{P}[S \leq n\epsilon' | Y_0 = y] \leq \mathbb{P}[G \leq n].$$

Por la finitud de la esperanza de las variables geométricas concluimos que $E[S | Y_0 = y] < \infty$ si $y \leq z$. Ahora veamos que para todo $y > z$ tendremos que $\mathbb{E}^y[T_z] < \infty$, lo cual implicaría (I) y (II).

Comparemos el proceso \mathcal{Y} con el proceso \mathcal{R} definido como

$$R_t = N_t \log\left(\frac{1}{p}\right) - \zeta t,$$

con generador dado por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}g(y) = g\left(y + \log\left(\frac{1}{p}\right)\right) - g(y) - \zeta g'(y). \quad (3.3)$$

Recordando que $\beta(y) > \zeta$ tenemos que

$$Y_t \leq R_t \text{ c.s.}$$

y considerando el límite, superior podemos deducir que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1}{p}\right) \frac{N_t}{t} - \zeta = -\epsilon < 0,$$

lo que implica que $R_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ c.s. y por tanto si definimos a

$$T_z^{\mathcal{R}} = \inf\{t \geq 0 | R_t = z\}$$

tendremos que $T_z \leq T_z^{\mathcal{R}} < \infty$ c.s. si $R_0 = y > z$. Para demostrar que $\mathbb{E}[T_z^{\mathcal{R}}] < \infty$ utilizaremos el teorema de paro opcional para martingalas al proceso $\mathcal{M} = (M_t)_{t \geq 0} = \left(R_t - R_0 + t\left(\zeta - \log\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right)_{t \geq 0}$. Primero notemos que M_t efectivamente es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, s \leq t\}$.

- La esperanza de \mathcal{M} es finita,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t] &= \mathbb{E}\left[N_t \log\left(\frac{1}{p}\right) - \zeta t - R_0 + t\left(\zeta - \log\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right] \\ &= t\left(\log\left(\frac{1}{p}\right) - \zeta\right) + t\left(\zeta - \log\left(\frac{1}{p}\right)\right) - R_0 \\ &= -R_0 \\ &< \infty \end{aligned}$$

- El proceso \mathcal{M} cumple la propiedad de martingala,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[N_t \log \left(\frac{1}{p} \right) - \zeta t - R_0 + t \left(\zeta - \log \left(\frac{1}{p} \right) \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \log \left(\frac{1}{p} \right) \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s] - R_0 - t \log \left(\frac{1}{p} \right) \\
&= \log \left(\frac{1}{p} \right) (t - s) + \log \left(\frac{1}{p} \right) N_s - R_0 - t \log \left(\frac{1}{p} \right) \\
&= \log \left(\frac{1}{p} \right) N_s - R_0 - s \log \left(\frac{1}{p} \right) \\
&= R_s - R_0 + s \left(\zeta - \log \left(\frac{1}{p} \right) \right) \\
&= M_s.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que \mathcal{M} satisface las hipótesis del teorema de paro opcional, recordemos que $T_z^{\mathcal{R}}$ es finito

-

$$\mathbb{E}[|R_{T_z^{\mathcal{R}}}|] = \mathbb{E}[|z|] = z < \infty$$

-

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[R_t \mathbb{I}_{\{T_z^{\mathcal{R}} > t\}}] = 0$$

pues $R_0 > z$, $R_t \rightarrow -\infty$ c.s. y las trayectorias decrecientes del proceso son continuas.

Utilizando el teorema de paro opcional obtenemos que $\mathbb{E}[M_t] = 0$ o equivalentemente

$$\begin{aligned}
R_0 - z &= \mathbb{E}[R_0 - R_{T_z^{\mathcal{R}}}] \\
&= t \left(\zeta - \log \left(\frac{1}{p} \right) \right) \mathbb{E}[T_z^{\mathcal{R}}] \\
&= \epsilon \log \left(\frac{1}{p} \right) \mathbb{E}[T_z^{\mathcal{R}}]
\end{aligned}$$

por tanto tenemos que $\mathbb{E}[T_z] \leq \mathbb{E}[T_z^{\mathcal{R}}] \leq \frac{1}{\epsilon} < \infty$. Lo que implica (I) y (II). Recapitulando, tenemos un proceso regenerativo con retraso cuyos ciclos de regeneración comienzan en z , y cuya esperanza es finita, por lo que el proceso es recurrente positivo. Además ya que la probabilidad de llegar a z en tiempo finito a partir de cualquier otro estado es 1, tendremos que el retraso es finito c.s. por lo que utilizando el teorema de convergencia de procesos regenerativos tenemos que existe Y_∞ , tal que \mathcal{Y} converge débilmente a Y_∞ , lo que implica que existe X_∞ tal que X_t converge débilmente a X_∞ . Por último veamos que $\mathbb{P}[X_\infty \in (0, x_\alpha]] = 1$, recordando que $x_\alpha = \min\{x > 0 :$

$\alpha(x) = 0\}$, x_α está bien definido ya que $\alpha(x) > 0$ para $(0, \delta)$ y $\alpha(1) \leq 0$. Definamos a

$$T_\delta^{\mathcal{X}} = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = \delta\},$$

ya que $\mathbb{E}[T_z] < \infty$ y $z = -\log(\delta)$ entonces $\mathbb{E}[T_\delta^{\mathcal{X}}] < \infty$, si $\delta < x_\alpha$ tenemos que el tiempo en que el proceso \mathcal{X} llega al intervalo $(0, x_\alpha]$ es finito c.s. Por último notemos que

$$\mathbb{P}[X_\infty \in (0, x_\alpha]] = 1,$$

por el comportamiento asintótico de la ecuación diferencial $\dot{X}_t = \alpha(X_t)$ con condición inicial en el intervalo $(0, x_\alpha]$, y ya que una vez que el proceso ha llegado al intervalo $(0, x_\alpha]$ no lo abandona. \square

Lema 3.1. *Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Si α es cóncava y $\alpha(0) = 0$ entonces*

$$\alpha'_0 = \hat{\alpha}.$$

Demostración. Recordemos que si α es cóncava entonces

$$\alpha(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t\alpha(x_1) + (1-t)\alpha(x_2)$$

para todo $x_1, x_2, t \in [0, 1]$. Sea $x \in (0, 1)$, si consideramos a $x_1 = 1$, $t = x$ y $x_2 = 0$, tenemos que

$$\alpha(x) \geq x\alpha(1)$$

y por tanto $\frac{\alpha(x)}{x} \geq \frac{\alpha(1)}{1}$. Considerando a $x_1 = t = x$, $x_2 = 0$ tenemos que,

$$\alpha(x^2) \geq x\alpha(x),$$

obteniendo que $\frac{\alpha(x^2)}{x^2} \geq \frac{\alpha(x)}{x}$. De manera iterativa podemos ver que $(\frac{\alpha(x^n)}{x^n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente. Además, ya que para todo $x \in (0, 1)$ tenemos que $x^n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\alpha'_0 = \lim_{x \in I \setminus \{0\}} \frac{\alpha(x)}{x} = \sup_{x \in I \setminus \{0\}} \frac{\alpha(x)}{x} = \hat{\alpha}.$$

\square

Los procesos *p-jump* parecen ser ajenos a los procesos de ramificación sin embargo en la siguiente sección encontraremos su relación con los *BPBD*. En el caso de los *BPSBBD* también encontraremos una relación con un proceso cuya descripción es parecida a los procesos *p-jump* pero ahora en dos dimensiones. Los procesos a los que hacemos referencia son los procesos *2D-p-jump* que son procesos de Feller en $R \subset \mathbb{R}^2$, deterministas por partes y tienen saltos del estado (x, y) a (px, y) según un proceso de Poisson de tasa λ , con $p \in [0, 1]$. Demos su definición concreta:

Definición 3.2. Sea $R = [0, L_1] \times [0, L_2]$ o $R = (\mathbb{R}^2)^+$. Sean $\alpha_i : R \rightarrow \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2\}$, tales que $\alpha_1(0, x_2), \alpha_2(x_1, 0) \geq 0$ y $\alpha_1(L_1, x_2), \alpha_2(x_1, L_2) \leq 0$ si R es acotado, para todo $x_1, x_2 \in R$. Decimos que $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ es un **proceso 2D-p-jump** si es un proceso de Markov continuo a la derecha, que realiza saltos de un estado (x_1, x_2) a (px_1, x_2) a tasa λ y entre saltos satisface la ecuación diferencial

$$\dot{X}_t = \alpha(X_t).$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. El generador del proceso está dado por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}) = \lambda(f(px_1, x_2) - f(\mathbf{x})) + \alpha(\mathbf{x})f'(\mathbf{x}),$$

con $f \in C^1(R)$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Haremos referencia a las entradas del proceso *2D-p-jump* como

$$X_t = (X_{1t}, X_{2t}).$$

Notemos que los procesos *2D-p-jump* extienden parcialmente a los procesos *p-jump* a dos dimensiones. Podríamos considerar un segundo porcentaje tal que afecte a la segunda coordenada, sin embargo para el análisis de los *BPSBBD* es suficiente considerar a los procesos propuestos. El análisis de este proceso es mas complejo por la nueva dimensión, a pesar de ello la sola definición será de utilidad en las próximas secciones.

3.2. Dualidad

La dualidad es una herramienta importante para el estudio de procesos de Markov, cuando existe una relación de dualidad entre dos procesos nos permite hacer cálculos de uno en términos del otro. El objetivo de esta sección es mostrar las relaciones de dualidad que existen entre los *BPBD* y los procesos *p-jump* y entre los *BPSBBD* y los procesos *2D-p-jump*.

Definición 3.3 (Dualidad). Supongamos que $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ y $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ son procesos de Feller o cadenas de Markov con espacio de estados S_1, S_2 , no explosivos. Sea $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función, decimos que \mathcal{X} y \mathcal{Z} son duales respecto a H si,

$$\mathbb{E}^z[H(Z_t, x)] = \mathbb{E}^x[H(z, X_t)] \quad (3.4)$$

para todo $x \in \Omega, z \in \Omega'$.

La definición establece la relación de dualidad desde los semigrupos de los procesos, es de utilidad poder determinar la dualidad entre los procesos desde el generadores.

Teorema 3.2 (Dualidad desde generadores). Sean $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ y $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ procesos de Feller o cadenas de Markov no explosivas con espacio de estados S_1, S_2 , con generadores $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}, \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}$ respectivamente. Sea $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si los generados satisfacen que $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}H(\cdot, z)(x)$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}H(x, \cdot)(z)$ existen para todo $x \in S_1, z \in S_2$ y

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}}H(\cdot, z)(x) = \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}H(x, \cdot)(z), \quad (3.5)$$

para todo $x \in S_1, z \in S_2$ entonces \mathcal{X}, \mathcal{Z} son duales respecto a H .

Demostración. Para los intereses de este trabajo buscamos estudiar la dualidad entre procesos cuando uno de ellos es de Feller y el otro una cadena de Markov. Por lo que durante esta demostración supondremos que \mathcal{X} es un proceso de Feller con semigrupo $T(t)$ mientras que \mathcal{Z} es una cadena de Markov a tiempo continuo con función de transición $p_t(x, y)$ y tasas infinitesimales $q(x, y)$. Sea

$$u(t, x, z) = \mathbb{E}^x[H(X_t, z)].$$

Utilizando el teorema A.5.b) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, x, z) &= T(t)\mathcal{G}_{\mathcal{X}}H(x, \cdot)(z) \\ &= T(t) \sum_{y \in S_2} q(z, y)H(x, y) \\ &= \sum_{y \in S_2} q(z, y)T(t)H(\cdot, y)(x) \\ &= \sum_{y \in S_2} q(z, y)u(t, x, y) \end{aligned}$$

ecuación diferencial cuya única solución con condición inicial $u(0, x, z) = H(x, z)$, para cada $x \in S_1$, está dada por

$$u(t, x, z) = \sum_{y \in S_2} p_t(z, y)H(x, y) = \mathbb{E}^z[H(x, Z_t)],$$

por el lema A.5. Concluyendo que

$$\mathbb{E}^z[H(x, Z_t)] = \mathbb{E}^x[H(X_t, z)].$$

□

Una relación de dualidad importante está dada por los momentos, es decir la función, $H : [0, 1] \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x, z) = (1 - x)^z, \quad (3.6)$$

si dos procesos son duales respecto esta función diremos que son momento duales.

3.2.1. Dualidad entre procesos BPBD y p-jump

En esta sección estudiaremos la dualidad en los momentos que existe entre los procesos de ramificación con desastres del tipo binomial y los procesos p -jump.

Lema 3.2. *Sea $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ un proceso de ramificación con desastres tipo binomial, con tiempo medio de vida $0 < r^{-1} < \infty$, tasa de desastres $0 < \lambda < \infty$, probabilidad de supervivencia $p \in [0, 1]$ y función generadora del mecanismo de ramificación h . Si $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso p -jump con saltos proporcionales p a tasa de λ y deriva*

$$\alpha(x) := r(1 - x - h(1 - x)),$$

entonces \mathcal{X} , \mathcal{Z} son momento duales.

Demostración. Veamos que sus generadores coinciden utilizando la función de momentos. Recordemos que el generador de \mathcal{Z} está dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h}} H(x, \cdot)(z) &= rz \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (H(x, z+k-1) - H(x, z))}_{\text{I}} + \\ &\quad \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k} (H(x, k) - H(x, z))}_{\text{II}}. \end{aligned}$$

Analicemos cada parte.

Parte I

$$\begin{aligned} & rz \sum_{k=0}^{\infty} p_k (H(x, z+k-1) - H(x, z)) \\ &= rz \sum_{k=0}^{\infty} p_k ((1-x)^{z+k-1} - (1-x)^z) \\ &= rz(1-x)^{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} p_k ((1-x)^k - (1-x)) \\ &= -r \frac{d}{dx} (1-x)^z (h(1-x) - (1-x)) \\ &= r(1-x-h(1-x)) \frac{d}{dx} H(x, z). \end{aligned}$$

Parte II

$$\begin{aligned}
\lambda \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k} (H(x, k) - H(x, z)) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k} ((1-x)^k - (1-x)^z) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} (p(1-x))^k (1-p)^{z-k} - (1-x)^z \\
&= \lambda ((p(1-x) + (1-p))^z - (1-x)^z) \\
&= \lambda (H(px, z) - H(x, z)).
\end{aligned}$$

Uniendo ambas partes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h}} H(x, \cdot)(z) &= \lambda (H(px, z) - H(x, z)) + r(1-x - h(1-x)) \frac{d}{dx} H(x, z) \\
&= \mathcal{G}_{\mathcal{X}} H(\cdot, z)(x),
\end{aligned}$$

ya que sus generadores son iguales utilizando la función de momentos por el teorema 3.2 tenemos que son momento duales. \square

El lema anterior nos muestra la dualidad para procesos cuya frecuencia de desastres es unitaria sin embargo es suficiente considerar a desastres de tasa unitaria para rescatar procesos con cualquier otra tasa de ocurrencia. Hagamos notar que si $\lambda > 0$ y $\mathcal{Z}_{1,p}^{r,h} = (Z_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de ramificación con desastres de tipo binomial entonces el proceso $\widehat{\mathcal{Z}} = (Z_{\lambda t})_{t \geq 0}$ también es un proceso de ramificación con desastres del tipo binomial con el mismo mecanismo de ramificación y probabilidad de muerte, ahora con tiempo medio de vida r^{-1} y tasa de desastres λ , para esto veamos el generador de $\widehat{\mathcal{Z}}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\widehat{\mathcal{Z}}} f(z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_z[f(Z_{\lambda t})] - f(z)}{t} \\
&= \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_z[f(Z_{\lambda t})] - f(z)}{\lambda t} \\
&= \lambda \mathcal{G}_{\mathcal{Z}_{1,p}^{r,h}} f(z) \\
&= rz \sum_{k=0}^{\infty} p_k (f(z-1+k) - f(z)) \\
&\quad + \lambda \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k} (f(k) - f(z)).
\end{aligned}$$

Teorema 3.3. Sea $\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h} = (Z_t)_{t \geq 0}$ un proceso de ramificación con desastres del tipo binomial,

1. Si $h'(1) \leq 1 + \frac{\lambda}{r} \log\left(\frac{1}{p}\right)$, entonces $\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h}$ se extingue casi seguramente,
2. Si $h'(1) > 1 + \frac{\lambda}{r} \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces $\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h}$ sobrevive con una probabilidad positiva menor o igual que q con q la raíz más pequeña de la ecuación $h(q) = q$.

Demostración. Por el lema 3.2 tenemos que el proceso $\mathcal{Z}_{1,p}^{\frac{r}{\lambda},h} = (Z_{\lambda t})_{t \geq 0}$ es momento dual al proceso p-jump, $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ con saltos de proporción p y deriva

$$\alpha(x) = \frac{r}{\lambda}(1 - x - h(1 - x)).$$

Notemos que α es cóncava pues

$$\alpha''(x) = -\frac{r}{\lambda}h''(x) \leq 0,$$

por tanto $\hat{\alpha} = \alpha'_0$ por el lema 3.1. Utilizando el teorema 3.1 de convergencia de procesos p-jump tenemos que

- a) Si $\frac{r}{\lambda}(h'(1) - 1) \leq \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces $X_t \rightarrow 0$ c.s. si $t \rightarrow \infty$,
- b) Si $\frac{r}{\lambda}(h'(1) - 1) > \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces \mathcal{X} converge débilmente a una variable X_∞ con $\mathbb{P}[X_\infty \in (0, x_\alpha]] = 1$ y x_α la raíz más pequeña de $\alpha(x) = 0$.

Por la relación de dualidad,

$$\mathbb{E}^x[(1 - X_t)^z] = \mathbb{E}^z[(1 - x)^{Z_t}]$$

concluimos que si $h'(1) \leq 1 + \frac{\lambda}{r} \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces $Z_t \rightarrow 0$ casi seguramente por la convergencia de \mathcal{X} a 0, y si $h'(1) > 1 + \frac{\lambda}{r} \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces el proceso $\mathcal{Z}_{\lambda,p}^{r,h}$ no se extingue con una probabilidad positiva. El estado 0 es absorbente por tanto

$$\mathbb{P}[Z_t \text{ p.a. } t > 0] = \mathbb{P}[\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = 0] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_t = 0] = \lim_{t \rightarrow \infty} F(0, t),$$

Utilizando la relación de dualidad con $Z_0 = 1$ y $X_0 \in (0, 1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1 - X_\infty] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(1 - X_t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[0^{Z_t}] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} F(0, t) \end{aligned}$$

Por tanto si q es la raíz más pequeña de $h(s) = s$ tendremos que $x_\alpha = 1 - q$ y ya que $X_\infty \leq 1 - q$ tendremos que

$$q \geq \mathbb{P}[Z_t \text{ p.a. } t > 0].$$

□

Ejemplo 3.1. *Utilicemos el mecanismo de nacimiento y muerte para ilustrar los resultados de esta sección. Sea $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ el BPBD con tiempo medio de vida $0 < r^{-1} < \infty$, tasa de desastres $0 < \lambda < \infty$, probabilidad de supervivencia $p \in [0, 1]$ y mecanismo de ramificación dado por la función generadora,*

$$h(s) = p_0 + p_2 s^2$$

Si \mathcal{X} es el proceso de ramificación con deriva

$$\alpha(x) = r(1 - x - p_0 - p_2(1 - x)^2) = rx(p_2(1 - x) - p_0)$$

y saltos de proporción p , entonces \mathcal{X} y \mathcal{Z} son momento duales. Por el teorema 3.3, tenemos que

1. Si $p_2 \leq p_0 + \frac{\lambda}{r} \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces el proceso $\mathcal{Z} \rightarrow 0$ c.s. si $t \rightarrow \infty$.
2. Si $p_2 \geq p_0 + \frac{\lambda}{r} \log\left(\frac{1}{p}\right)$ entonces el proceso $\mathcal{Z} \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$ con una probabilidad mayor o igual que $1 - \frac{p_0}{p_2}$.

3.2.2. Dualidad entre procesos BPSBBD y 2D-p-jump

En esta sección estudiaremos la dualidad que existe entre los procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial y los procesos 2D-p-jump. Definimos a la función de dualidad de los momentos en dos dimensiones, $H : [0, 1]^2 \times \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$H(x, y, z, w) = (1 - x)^z (1 - y)^w.$$

Lema 3.3. *Sea \mathcal{Z} un BPSBBD, con tiempos medios de vida $0 < r_1^{-1}, r_2^{-1} < \infty$, tasa de desastres $0 < \lambda < \infty$, probabilidad de supervivencia $p \in [0, 1]$ y función generadora del mecanismo de ramificación de los individuos activos h_1 . Si \mathcal{X} es un proceso 2D-p-jump, tal que da saltos de (x, y) a (px, y) a tasa λ con deriva*

$$\alpha(x_1, x_2) = (r_1(1 - x_1 - h_1(1 - x_1, 1 - x_2)), r_2(1 - x_2 - (1 - x_1))),$$

entonces \mathcal{X} y \mathcal{Z} son momento duales.

Demostración. Al igual que en el caso unidimensional mostremos que sus

generadores coinciden,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_Z H(x_1, x_2, \cdot, \cdot)(z_1, z_2) = & \\
& \underbrace{r_1 z_1 \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p(k_1, k_2) (H(x_1, x_2, z_1 - 1 + k, z_2) - H(x_1, x_2, z_1, z_2))}_{\text{I}} \\
& + \underbrace{r_2 z_2 (H(x_1, x_2, z_1 + 1, z_2 - 1) - H(x_1, x_2, z_1, z_2))}_{\text{II}} \\
& + \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^{z_1} \binom{z_1}{k} p^k (1-p)^{z_1-k} (H(x_1, x_2, k, z_2) - H(x_1, x_2, z_1, z_2))}_{\text{III}}.
\end{aligned}$$

Mostremos que cada parte corresponde con algún término del generador del proceso $2D$ - p -*jump*.

Parte I

$$\begin{aligned}
& r_1 z_1 \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p(k_1, k_2) (H(x_1, x_2, z_1 - 1 + k_1, z_2 + k_2) - H(x_1, x_2, z_1, z_2)) \\
& = r_1 z_1 \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p(k_1, k_2) ((1-x_1)^{z_1+k_1-1} (1-x_2)^{z_2+k_2} - (1-x_1)^{z_1} (1-x_2)^{z_2}) \\
& = r_1 z_1 (1-x_1)^{z_1-1} (1-x_2)^{z_2} \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} p(k_1, k_2) ((1-x_1)^{k_1} (1-x_2)^{k_2} - (1-x_1)) \\
& = -r_1 \frac{d}{dx} H(x_1, x_2, z_1, z_2) [h_1(1-x_1, 1-x_2) - (1-x_1)] \\
& = r_1 [1-x_1 - h_1(1-x_1, 1-x_2)] \frac{d}{dx_1} H(x_1, x_2, z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Parte II

$$\begin{aligned}
& r_2 z_2 (H(x_1, x_2, z_1+1, z_2-1) - H(x_1, x_2, z_1, z_2)) \\
& = r_2 z_2 ((1-x_1)^{z_1+1} (1-x_2)^{z_2-1} - (1-x_1)^{z_1} (1-x_2)^{z_2}) \\
& = r_2 z_2 (1-x_1)^z (1-x_2)^{z_2-1} ((1-x_1) - (1-x_2)) \\
& = -r_2 \frac{d}{dx_2} H(x_1, x_2, z_1, z_2) [1-x_1 - (1-x_2)] \\
& = r_2 [x_2 - x_1] \frac{d}{dx_2} H(x_1, x_2, z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Parte III

$$\begin{aligned}
& \lambda \sum_{k=0}^{z_1} \binom{z_1}{k} p^k (1-p)^{z_1-k} (H(x_1, x_2, k, z_2) - H(x_1, x_2, z_1, z_2)) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{z_1} \binom{z_1}{k} p^k (1-p)^{z_1-k} ((1-x_1)^k (1-x_2)^{z_2} - (1-x_1)^{z_1} (1-x_2)^{z_2}) \\
&= \lambda (1-x_2)^{z_2} \left(\sum_{k=0}^{z_1} \binom{z_1}{k} (p(1-x_1))^k (1-p)^{z_1-k} - (1-x_1)^{z_1} \right) \\
&= \lambda (1-x_2)^{z_2} ((1-x_1)p + (1-p))^{z_1} - (1-x_1)^{z_1} \\
&= \lambda (H(px_1, x_2, z_1, z_2) - H(x_1, x_2, z_1, z_2)).
\end{aligned}$$

Si consideramos a $\nabla H = (\frac{dH}{dx_1}, \frac{dH}{dx_2})$ entonces

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}_{\mathcal{Z}} H(x_1, x_2, \cdot, \cdot)(z_1, z_2) \\
&= \lambda (H(px_1, x_2, z_1, z_2) - H(x_1, x_2, z_1, z_2)) \\
&\quad + r_1 [(1-x_1) - h_1(1-x_1, 1-x_2)] \frac{d}{dx_1} H(x_1, x_2, z_1, z_2) \\
&\quad + r_2 [x_2 - x_1] \frac{d}{dx_2} H(x_1, x_2, z_1, z_2) \\
&= \lambda (H(px_1, x_2, z, w) - H(x_1, x_2, z_1, z_2)) \\
&\quad + \nabla H(x_1, x_2, z_1, z_2) \cdot (r_1(1-x_1 - h_1(1-x_1, 1-x_2)), r_2(x_2 - x_1)) \\
&= (\mathcal{G}_{\mathcal{X}} H(\cdot, \cdot, z_1, z_2))(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Ya que sus generadores coinciden, por el teorema 3.2 los procesos \mathcal{X} y \mathcal{Z} son momento duales. \square

Al igual que en el caso unidimensional las probabilidades de extinción de los *BPSBBD* pueden ser calculadas en términos del comportamiento de los procesos *2D-p-jump* en infinito, notemos que por la relación de dualidad tenemos que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in [0, 1]$ entonces

$$\mathbb{E}^{(n,m)}[(1-x)^{Z_{1t}}(1-y)^{Z_{2t}}] = \mathbb{E}^{(x,y)}[(1-X_{1t})^n(1-X_{2t})^n]. \quad (3.7)$$

Ya que el estado $\mathbf{0}$ es absorbente tenemos que si $x, y \in (0, 1]$ entonces

$$\begin{aligned}
q_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} F(e_1, t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{(x,y)}[(1-X_{1t})^1(1-X_{2t})^0] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{(x,y)}[1-X_{1t}],
\end{aligned}$$

de manera análoga tenemos que

$$\begin{aligned} q_2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} F(e_2, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{(x,y)}[(1 - X_{1t})^0(1 - X_{2t})^1] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{(x,y)}[1 - X_{2t}]. \end{aligned}$$

Lema 3.4. *Sea \mathcal{Z} un proceso de ramificación con banco de semillas, con tiempos medios de vida $0 < r_1^{-1}, r_2^{-1} < \infty$ y función generadora del proceso de ramificación de los individuos activos h_1 . Si \mathcal{X} es un proceso de Markov, cuyo generador está dado por*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}}(x) = \alpha(x)f'(x)$$

con

$$\alpha(x_1, x_2) = (r_1(1 - x_1 - h_1(1 - x_1, (1 - x_2)), r_2(1 - x_2 - (1 - x_1)))$$

entonces \mathcal{Z} y \mathcal{X} son momento duales.

Demostración. Por el teorema 3.3 podemos considerar al proceso \mathcal{Z} como un BPSBBD con tasa arbitraria de desastres y probabilidad de supervivencia $p = 1$. \square

El lema anterior y la observación sobre las probabilidades de extinción nos permiten analizar el comportamiento de los procesos de ramificación ahora desde un enfoque determinista.

Ejemplo 3.2. *Utilicemos el lema 3.4 para rescatar el comportamiento subcrítico y supercrítico del proceso de ramificación con bancos de semillas desde la dualidad. Utilizaremos el mecanismo de ramificación de vida y muerte.*

Ya que estamos en el caso determinista del proceso $2D$ - p -*jump* podemos escribir

$$\begin{aligned} (q_1(t), q_2(t)) &= (\mathbb{E}[1 - X_{1t}], \mathbb{E}[1 - X_{2t}]) \\ &= (1 - X_{1t}, 1 - X_{2t}). \end{aligned}$$

Encontremos las probabilidades de extinción a partir del comportamiento de las ecuaciones en infinito. Recordando que si A es la forma matricial del generador del proceso entonces si λ , el mayor valor propio de A , es mayor que 0 entonces tenemos que el proceso se extingue con probabilidad $\frac{p_2}{p_0}$; y si $\lambda \leq 0$ el proceso se extingue casi seguramente. Reescribamos esta propiedad en términos de nuestro sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{X}_t^1 &= r_1(1 - X_t^1) - p_0 - p_2(1 - X_t^1)^2 - p_1(1 - X_t^2) \\ \dot{X}_t^2 &= r_2(X_t^1 - X_t^2) \end{aligned}$$

cuyos puntos críticos del sistema están dados por las raíces de la ecuación

$$\begin{aligned} 1 - X_t^1 &= p_0 + p_2(1 - X_t^1)^2 + p_1(1 - X_t^2) \\ 1 - X_t^2 &= 1 - X_t^1 \end{aligned}$$

es decir $(0, 0)$ y $(1 - \frac{p_0}{p_2}, 1 - \frac{p_0}{p_2})$. Como es clásico en sistemas de ecuaciones no lineales estudiaremos la linealización del sistema alrededor de los puntos críticos. La linealización alrededor del origen está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_t^1 \\ \dot{X}_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(2p_2 - 1) & r_1p_1 \\ r_2 & -r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{bmatrix}$$

y los vectores propios del generador están dados por,

$$\lambda_{1,2} = \frac{2p_2 - (r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 + r_2 - 2p_2)^2 + 4r_1r_2(p_2 - p_0)}}{2}. \quad (3.8)$$

Por otra parte la linealización del punto $(1 - \frac{p_0}{p_2}, 1 - \frac{p_0}{p_2})$ esta dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_t^1 \\ \dot{X}_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(2p_0 - 1) & r_1p_1 \\ r_2 & -r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{bmatrix}$$

con valores propios

$$\lambda_{3,4} = \frac{2p_0 - (r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 + r_2 - 2p_0)^2 + 4r_1r_2(p_0 - p_2)}}{2}. \quad (3.9)$$

Por tanto las condiciones equivalentes en términos de los puntos críticos son:

1. Si $\lambda_1 > 0$ entonces el punto $(1 - \frac{p_0}{p_2}, 1 - \frac{p_0}{p_2})$ es atractor y $(0, 0)$ es un punto silla,
2. Si $\lambda_1 < 0$ entonces el punto $(1 - \frac{p_0}{p_2}, 1 - \frac{p_0}{p_2})$ es un punto silla y $(0, 0)$ es un punto atractor.

Demostremos estos enunciados. Para cada uno de los casos buscaremos mostrar que el comportamiento de la linealización corresponde con el sistema real haciendo notar que los puntos son no hiperbólicos para utilizar el teorema de *Hartman-Grobman*.

1. Si $\lambda_1 > 0$ entonces $p_2 > p_0$ lo que implica que $\lambda_2 < 0$, por tanto el punto es silla. Veamos cual es el comportamiento del segundo punto, primero notemos que

$$2p_0r_1 - (r_1 + r_2) < 0$$

pues de lo contrario tendríamos que

$$r_1(2p_0 - 1) \geq r_2 > 0 \quad (3.10)$$

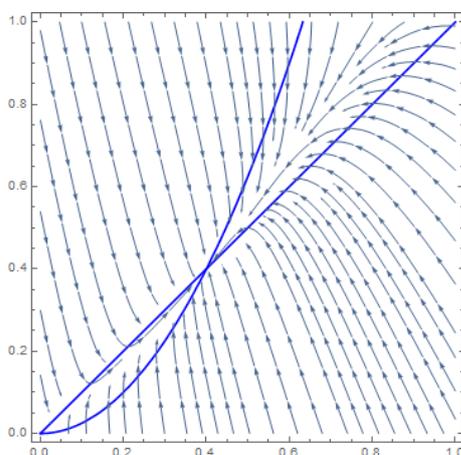


Figura 3.1: Plano fase, caso supercrítico. $h_1(s_1, s_1) = 0.5 + 0.3s_1^2 + 0.3s_2$, $h_2(s_1, s_2) = s_1 - s_2$.

y por tanto $2p_0 > 1$ lo que implica que $p_0 \geq \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción ya que $p_2 > p_0$. Lo que implica que $Re(\lambda_{3,4}) < 0$, el comportamiento del punto será una espiral atractora o un punto atractor, en cualquiera de los casos tenemos un punto no hiperbólico.

2. Recordando λ_1 es el mayor de los valores propios, por tanto tenemos que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, concluyendo que el punto es atractor. Ya que $\lambda_1 < 0$ tenemos que $p_0 > p_2$ y por tanto $\lambda_3 > 0$ y $\lambda_4 < 0$ teniendo un punto silla y por tanto no hiperbólico.

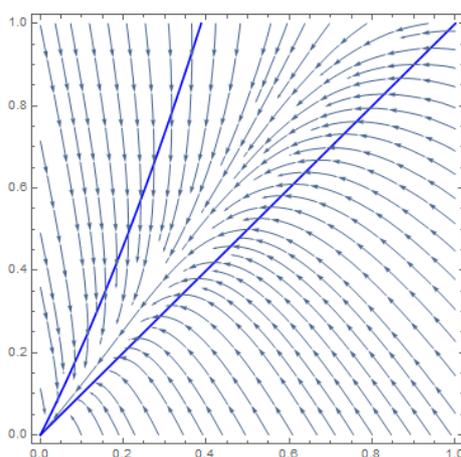


Figura 3.2: Plano fase, caso subcrítico. $h_1(s_1, s_1) = 0.3 + 0.5s_1^2 + 0.3s_2$, $h_2(s_1, s_2) = s_1 - s_2$.

De esta manera en el caso supercrítico con condición inicial $x_1, x_2 \in (0, 1]$

tenemos que

$$\begin{aligned}(q_1, q_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - X_{1t}, 1 - X_{2t}) \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right), 1 - \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \right) \\ &= \left(\frac{p_0}{p_2}, \frac{p_0}{p_2} \right).\end{aligned}$$

Capítulo 4

Simulación

En este capítulo simularemos los procesos *p-jump* y *2D-p-jump*. Por dualidad obtendremos el comportamiento de los procesos de ramificación con desastres de tipo binomial y los procesos de ramificación con bancos de semillas y desastres del tipo binomial. Acoplamos las ocurrencias de los desastres al método explícito de Euler, con el fin de simular simultáneamente las partes deterministas de los procesos y los descensos del proceso en tiempos aleatorios.

4.1. Método de Euler

Comencemos recordando el método Euler. Sea $\Delta t > 0$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las condiciones de continuidad del teorema 3.1. El método de Euler nos permite construir de manera numérica la solución a una ecuación diferencial,

$$\frac{d}{dt}X_t = \alpha(X_t), \quad (4.1)$$

con condición inicial $X_0 = x_0$. El objetivo del método es aproximar la solución a partir de una discretización en el tiempo en puntos de la forma $n\Delta t$. Escribiremos el valor de la solución en el paso $(n+1)\Delta t$ en términos de la solución en el punto $n\Delta t$, para esto aproximamos a la derivada,

$$\frac{dX_t}{dt} \approx \frac{X_{(n+1)\Delta t} - X_{n\Delta t}}{\Delta t} = \alpha(X_{n\Delta t}), \quad (4.2)$$

con el objetivo de simplificar la notación definamos $X_n := X_{n\Delta t}$. De esta manera podemos encontrar la relación recursiva

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t \alpha(X_n), \quad (4.3)$$

si la función α es Lipschitz continua entonces tenemos una buena aproximación de primer orden, $O(\Delta t)$, a la solución real.

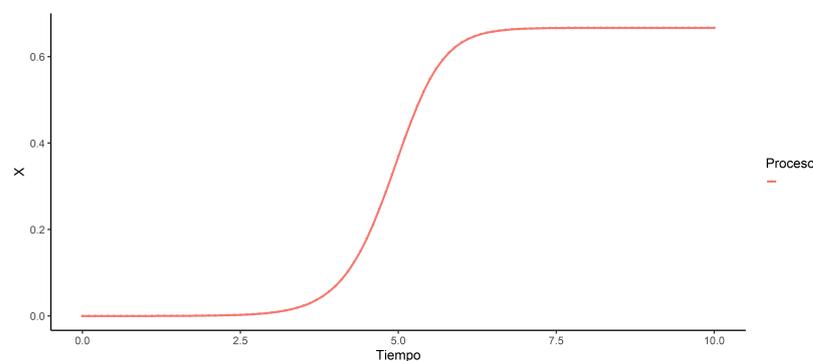


Figura 4.1: Método de Euler
 $\alpha(x) = 1 - x - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 - x)^2\right)$
 $X_0 = 0.005$

Análogamente si α_1 y α_2 son funciones con las condiciones de continuidad del teorema *p-jump* podemos hacer uso de la discretización del tiempo para construir una solución numérica a la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_t^1 &= \alpha_1(X_t^1, X_t^2) \\ \frac{d}{dt}X_t^2 &= \alpha_2(X_t^1, X_t^2)\end{aligned}$$

con condición inicial $(X_0^1, X_0^2) = (x_0^1, x_0^2)$. Aproximando la derivada por su análogo discreto y escribiendo el punto $n + 1$ en términos del n ,

$$\begin{aligned}X_{n+1}^1 &= X_n^1 + \Delta t \alpha_1(X_n^1, X_n^2) \\ X_{n+1}^2 &= X_n^2 + \Delta t \alpha_2(X_n^1, X_n^2)\end{aligned}$$

con $X_0 = \mathbf{x}_0$. Este esquema es suficiente para poder rescatar los procesos en cualquier intervalo determinista en que las funciones sean lo suficientemente continuas.

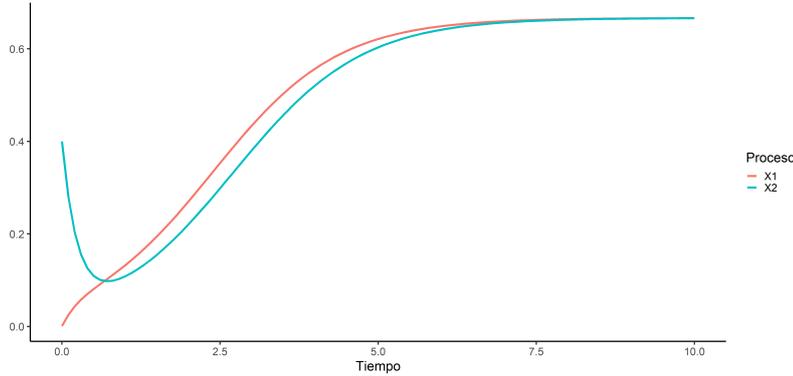


Figura 4.2: Método de Euler
 $\alpha_1(x, y) = 1 - x - \left(\frac{2}{10} + \frac{2}{10}(1 - y) + \frac{6}{10}(1 - x)^2\right)$
 $\alpha_2(x, y) = x - y$
 $X_{1t} = 0.1; X_{2t} = 0.4$

4.2. Método de Euler acoplado a desastres

Hasta el momento hemos cubierto la simulación de los procesos en intervalos deterministas, veamos cuales son las implicaciones de agregar desastres al esquema de Euler. Tenemos dos problemas a solucionar,

1. Los desastres interrumpen la dinámica de la ecuación diferencial,
2. Los desastres rompen la discretización del método de Euler.

Para el primer punto. Rescatando la notación utilizada para procesos *p-jump*, decimos que $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son los tiempos donde ocurren los desastres. Si nosotros conocemos los tiempos en que se dan los desastres entonces el problema es solucionado al considerar un método de Euler en cada intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ con la condición inicial pX_{τ_k-} . Las condiciones de continuidad garantizan la convergencia en primer orden para cada uno de los intervalos.

Para el segundo punto. Un primer acercamiento es considerar un esquema de Euler para cada intervalo $[\tau_k, \tau_{k+1})$ truncando al tiempo τ_{k+1} y comenzando uno nuevo. Sin embargo, notemos que esto haría incomparables diferentes trayectorias ya que los desastres están dados en tiempos aleatorios y por tanto los puntos donde tenemos información son diferentes para cada trayectoria. En orden de solucionar este problema recordemos que los tiempos $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son dictados por un proceso Poisson de parámetro λ por tanto la diferencia entre tiempos consecutivos, $\tau_{k+1} - \tau_k$, tiene distribución exponencial de tasa λ .

Lema 4.1. Sea $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de variables aleatorias geoméricamente distribuidas de parámetro, $p_n = \frac{\lambda}{n}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{n} \stackrel{d}{=} Y, \quad (4.4)$$

con Y una variable aleatoria exponencial de tasa λ .

Recordando que una variable aleatoria geométrica puede ser vista como el número de realizaciones de variables tipo *Bernoulli* hasta tener un éxito, si nosotros consideramos a la variable $\frac{Y_N}{N}$ entonces el experimento es equivalente a en cada paso tirar una variable tipo *Bernoulli* con probabilidad $p_N = \frac{\lambda}{N}$ y en el caso de tener un éxito entonces convertimos el punto X_n en pX_n . Por tanto, si $\Delta t = \frac{1}{N}$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ podemos acoplar variables geométricas que converjan a la exponencial deseada y al mismo tiempo tener la malla del esquema de Euler. Estas ideas están plasmadas en los siguientes pseudo códigos.

Algoritmo 1: Proceso p-jump

Entrada: α : Función Lipschitz,
 x_0 : Condición inicial,
 p : Probabilidad de supervivencia
 dt : Tamaño de malla
 t : Tiempo a simular

Salida : Una trayectoria del proceso *2D-p-jump*.

inicio

```

   $X \leftarrow$  Arreglo vacio
   $X[0] \leftarrow x_0$ 
   $n \leftarrow 0$ 
1  mientras  $n * dt \leq t$  hacer
     $aux \leftarrow \text{Bernoulli}(dt)$ 
    si  $aux == 1$  entonces
       $X[n + 1] \leftarrow p * X[n]$ 
    en otro caso
       $X[n + 1] \leftarrow X[n] + dt * \alpha(X[n])$ 
       $n \leftarrow n + 1$ 
  devolver  $X$ 

```

Generemos una trayectoria de un proceso *p-jump* cuya deriva está dada por la función

$$\alpha(x) = 5 \left(1 - x - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1-x)^2 \right) \right) \quad (4.5)$$

con saltos de proporción $p = 0.5$ y tasa de ocurrencia de desastres $\lambda = 1$.

La figura 4.3 es muy ilustrativa en el sentido de ubicar el conjunto de regeneración para este proceso. Al principio la ecuación se comporta según un régimen decreciente en el que se acerca asintóticamente al punto $1 - \frac{1}{3}$ que corresponde a la menor raíz de α . Después de la primera ocurrencia tenemos que el comportamiento de la trayectoria cambia, teniendo ahora que es creciente entre ocurrencias catastróficas. En este caso tendremos que

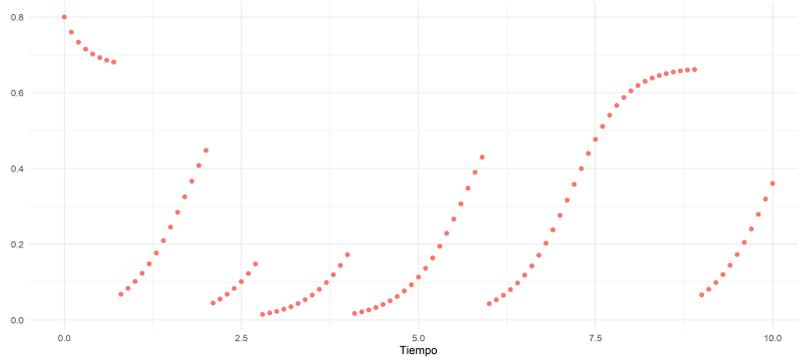


Figura 4.3: p -jump
 $X_0 = 0.9$

después de la primera ocurrencia la trayectoria ya no abandona el intervalo $[0, 1 - \frac{1}{3})$.

Algoritmo 2: Proceso 2D-p-jump

Entrada: α_1, α_2 : Funciones Lipschitz,
 x_0^1, x_0^2 : Condiciones iniciales,
 p : Probabilidad de supervivencia
 dt : Tamaño de malla
 t : Tiempo a simular

Salida : Una trayectoria del proceso p -jump.

inicio

```

 $X^1, X^2 \leftarrow$  Arreglos vacios
 $X^1[0] \leftarrow x_0^1$ 
 $X^2[0] \leftarrow x_0^2$ 
 $n \leftarrow 0$ 
1 mientras  $n * dt \leq t$  hacer
     $aux \leftarrow Bernoulli(dt)$ 
    si  $aux == 1$  entonces
         $X^2[n + 1] \leftarrow X^2[n] + dt * \alpha_2(X^1[n], X^2[n])$ 
         $X^1[n + 1] \leftarrow p * X^1[n]$ 
    en otro caso
         $X^1[n + 1] \leftarrow X^1[n] + dt * \alpha_1(X^1[n], X^2[n])$ 
         $X^2[n + 1] \leftarrow X^2[n] + dt * \alpha_2(X^1[n], X^2[n])$ 
     $n \leftarrow n + 1$ 
devolver  $X^1, X^2$ 

```

Utilizamos el algoritmo 2 para generar la trayectoria de un proceso 2D-

p -jump con deriva dada por las funciones

$$\alpha_1(x_1, x_2) = 5 \left(-x_1 - \left(\frac{2}{10} + \frac{2}{10}(1 - x_2) + \frac{6}{10}(1 - x_1)^2 \right) \right)$$

$$\alpha_2(x_1, x_2) = 5(x_1 - x_2),$$

cuyos saltos son de proporción $p = 0.5$, y los desastres ocurren a tasa $\lambda = 1$. La figura 4.4 nos muestra un comportamiento similar a al proceso unidi-

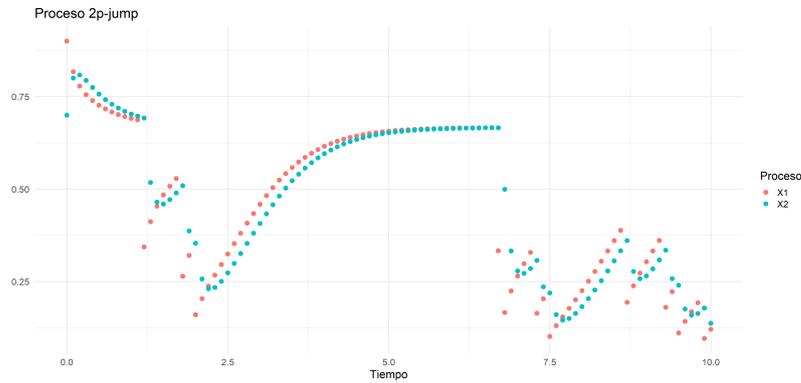


Figura 4.4: $2D$ - p -jump
 $X_{10} = 0.9$; $X_{20} = 0.7$

mensional, ambas trayectorias comienzan con un acercamiento asintótico al punto $1 - \frac{1}{3}$. Como observación el punto $(1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3})$ es una raíz de α_1 . Una vez dentro del intervalo $[0, 1 - \frac{1}{3})$ la trayectoria de X_1 se comporta de manera creciente entre ocurrencias mientras que X_2 es decreciente si $X_2 \geq X_1$ y creciente una vez se ha colocado por debajo de la curva X_1 .

Ambos algoritmos representan una herramienta de comparación entre estrategias, nos permite variar las funciones generadoras del mecanismo de ramificación, los tiempos medios de vida, las tasas de ocurrencia de catástrofes y la probabilidad supervivencia.

4.3. BPBD vs BPSBBD

Nuestro objetivo es mostrar numéricamente, condiciones bajo las cuales los procesos de ramificación se beneficien de la estrategia de bancos de semillas. A lo largo de esta sección nos interesamos en comparar los procesos de ramificación binarios, recordando la función generadora del mecanismo de ramificación para el caso unidimensional esta dada por

$$f(s) = p_0 + p_2 s^2. \quad (4.6)$$

Mientras que las funciones generadoras para los mecanismos de ramificación del proceso con semillas están dadas por

$$g_1(s_1, s_2) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 s_2 + \hat{p}_2 s_1^2 \quad (4.7)$$

$$g_2(s_1, s_2) = s_1. \quad (4.8)$$

Comencemos dando algunas relaciones para que un proceso de ramificación con bancos de semillas sea comparable a uno unidimensional. Un primer acercamiento es considerar a procesos de ramificación tales que tengan la misma probabilidad de extinción. Hipótesis que en el caso binario se traduce a la igualdad

$$q := \frac{p_0}{p_2} = \frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_2}. \quad (4.9)$$

Si además suponemos que la probabilidad de ir al banco de semillas está dada por γ . Entonces podemos reescribir a las probabilidades en términos de q y γ como

$$p_0 = \frac{q}{1+q}; \quad p_2 = \frac{1}{1+q}; \quad \hat{p}_0 = \frac{q(1-\gamma)}{1+q}; \quad \hat{p}_1 = \gamma; \quad \hat{p}_2 = \frac{1-\gamma}{1+q} \quad (4.10)$$

Notemos que estas relaciones excluyen totalmente los tiempos medios de vida dado que las probabilidades de extinción no se ven influidas por estos. Sin embargo, el comportamiento del *BPBD* sí se ve influenciado por el tiempo medio de vida de los organismos. Por esta razón una segunda condición para la comparación entre procesos es pedir que los eventos de reproducción ocurran a una misma tasa. Es decir si r_1^{-1} es el tiempo medio de vida del *BPBD* entonces la tasa de reproducción de los individuos activos deberá estar dada por

$$\frac{r_1}{1-\gamma}.$$

Si r_2 es la tasa de activación de los individuos inactivos entonces todos los parámetros y respectivos dominios para la comparación están dados por

$$q \in [0, 1]; \quad \gamma \in (0, 1); \quad r_1, r_2 \in (0, \infty).$$

Por último recordemos las relaciones entre las probabilidades de extinción y los procesos *p-jump*. Primero para el caso unidimensional, por la dualidad entre el *BPBD* y el proceso *p-jump* con deriva

$$\alpha(x) = r_1(1-x-f(1-x)), \quad (4.11)$$

la probabilidad de extinción para en caso supercrítico está dada por

$$q^* := \mathbb{E}[1 - X_\infty] \quad (4.12)$$

donde X_∞ es la variable aleatoria a la que el proceso p -jump converge débilmente. De una manera similar y por la dualidad de los procesos $2D$ - p -jump y los $BPSBD$ podemos estimar la probabilidad de extinción como

$$q_1^* := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x[1 - X_{1t}]; \quad q_2^* := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^y[1 - X_{2t}]$$

con $x, y \in [0, 1]$.

Las imágenes presentadas de este punto en adelante son obtenidas al calcular la media de 100 estimaciones de la esperanza de los procesos utilizando 100 trayectorias para cada conjunto de parámetros en el tiempo $t = 100$. Comencemos analizando las interacciones entre las variables q y γ para valores fijos de p, λ, r_1 y r_2 . Primero como prueba de cordura consideremos una probabilidad de supervivencia $p = 1$. Adicionalmente el renglón inferior corresponde a la probabilidad de extinción del $BPBD$.

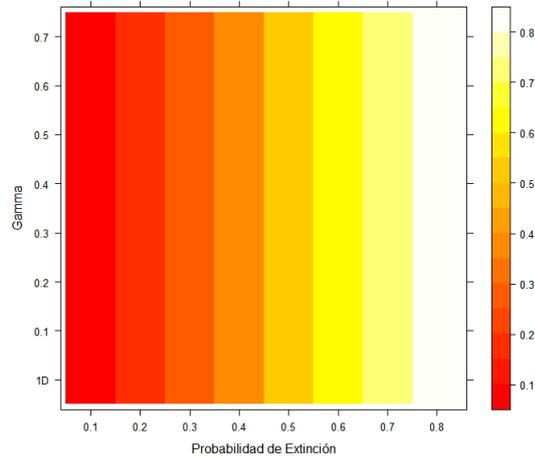


Figura 4.5: Probabilidad de extinción
 $p = 1, \lambda = 1, r_1 = r_2 = 5$.

La figura 4.5 es consistente con el hecho de que si el proceso no se ve afectado por las ocurrencias catastróficas entonces la probabilidad de extinción están determinadas por q , es decir el eje inferior. Ahora veamos como incrementa la probabilidad de extinción conforme la probabilidad de supervivencia disminuye.

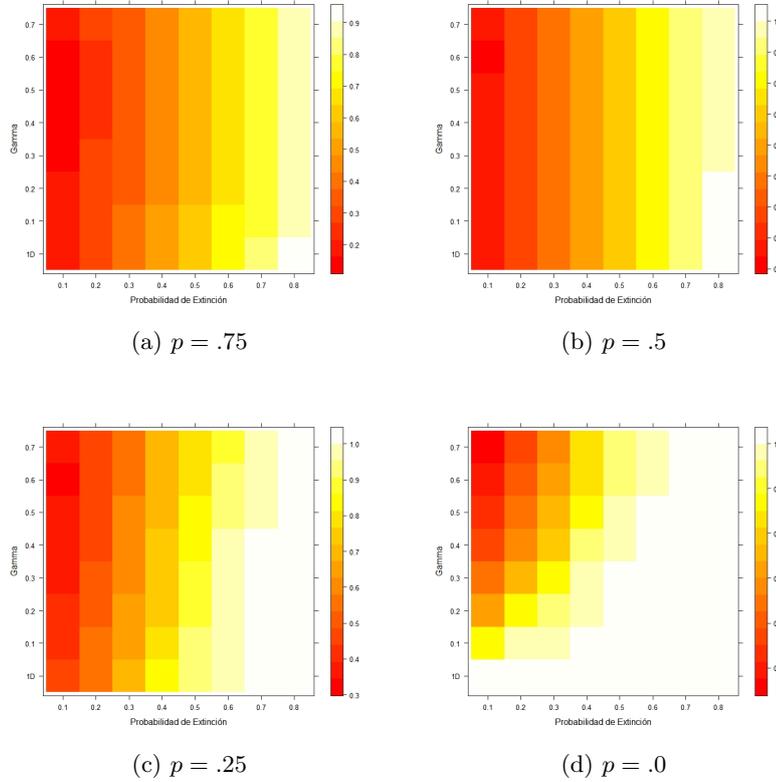


Figura 4.6: Probabilidad de extinción
 $\lambda = 1, r_1 = r_2 = 5$.

La figura (4.6), muestra la probabilidad de extinción de los procesos *BPBD* y *BPSBBD* con diferentes valores de la probabilidad de supervivencia. Como es de esperar la región de parámetros tales que la probabilidad de extinción es menor que 1 disminuye conforme la probabilidad de supervivencia también disminuye. Podemos observar que la estrategia de bancos de semillas siempre representa una ventaja respecto al proceso unidimensional. Teniendo que incluso los casos extremos en que la probabilidad de supervivencia es igual a 0 la probabilidad de ir al banco de semillas puede reducir la probabilidad de extinción a casi 0.5. Es importante recalcar que estas imágenes fueron construidas tomando la esperanza del proceso al tiempo 100, por tanto la probabilidad de extinción real es mayor.

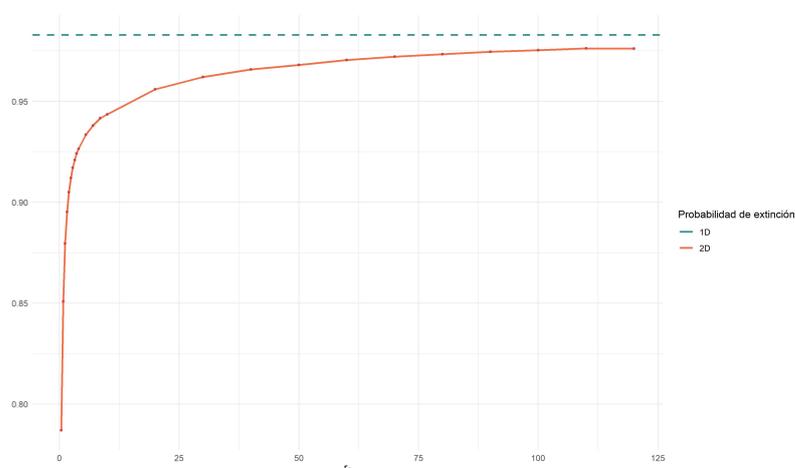


Figura 4.7: Comparación probabilidad de extinción y esperanza de vida.
 $q = 0.75, p = 0.5, r_1 = 7, \gamma = 0.5$

Finalmente analicemos la influencia que la esperanza de vida de los individuos inactivos tiene en la probabilidad de extinción. La figura 4.7 compara la probabilidad extinción del *BPSBBD* conforme la tasa de reproducción de los individuos inactivos aumenta, además se muestra la probabilidad de extinción del *BPSB*. De manera consistente si la tasa r_2 aumenta entonces la probabilidad de extinción decrece ya que el tiempo medio de vida de los individuos inactivos también lo hace. Adicionalmente, esta imagen es interesante por dos razones, primero muestra la relación no lineal que existe entre r_2 y q^* . Segundo sugiere un comportamiento asintótico a la probabilidad de extinción del *BPBD* conforme la tasa de activación aumenta.

Los experimentos realizados en esta sección confirman que bajo las condiciones de comparabilidad la estrategia de bancos de semillas efectivamente corresponden a una ventaja sobre poblaciones las poblaciones sin una estrategia de respaldo.

4.4. Conclusión y posibles ramificaciones

Los procesos de ramificación con bancos de semillas y catástrofes del tipo binomial representan una herramienta fundamental en el estudio de la *inactividad metabólica* como estrategia de respaldo de individuos en medios hostiles al presentar un marco que permite estudiar, y comparar la probabilidad de extinción y así determinar estrategias dominantes para la supervivencia de los individuos.

En este sentido, notemos que los experimentos numéricos mostrados a lo largo del capítulo confirman la ventaja que presuponía la estrategia con bancos de semillas además, para el caso particular del mecanismo de ramificación empleado, sugiere un comportamiento asintótico al modelo sin bancos de semillas conforme el tiempo medio de vida de las semillas disminuye.

Existen dos posibles direcciones de profundización para el trabajo. Primero, enfocado en aspectos teóricos, se podría continuar con el estudio de las condiciones necesarias para la extinción del proceso añadiendo la componente estocástica a las linealizaciones de los sistemas resultantes de los procesos *2D-p-jump*. Segundo, con un acercamiento más aplicado, utilizando datos de una bacteria que presente la estrategia de bancos de semillas, podemos buscar calibrar los parámetros correspondientes al *BPSBBD*.

Se espera que el presente trabajo sirva como una introducción a los procesos de ramificación, los *BPBD* y los *BPSBBD*. Además de ser una guía para la simulación de probabilidades de extinción vía los procesos *p-jump* y *2D-p-jump*.

Apéndice A

Procesos de Markov a tiempo continuo

En este apéndice reuniremos la teoría y resultados de procesos de Markov a tiempo continuo necesarios para este trabajo. Toda la teoría enunciada esta basada en [4], [6], [9] y [10].

A.1. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Las cadenas de Markov a tiempo continuo son procesos estocásticos, en un conjunto contable S que al igual que su análogo en estados discretos, modelan la dinámica de fenómenos cuyo posible comportamiento a futuro puede ser deducido a partir de la información en un tiempo previo ignorando la historia anterior. Sin embargo existen diferencias importantes relacionadas a su construcción matemática, por lo que en esta sección introduciremos la teoría correspondiente a su construcción y su caracterización empleando la evolución temporal del proceso y su descripción infinitesimal. Comencemos con un acercamiento a partir de las probabilidades de transición. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico. La propiedad de Markov puede traducirse a tiempo continuo como

$$\mathbb{P}[X_{t+s} = y | X_s = x, \dots, X_{t_1} = x_1, X_0 = x_0] = \mathbb{P}[X_{t+s} = y | X_s = x] \quad (\text{A.1})$$

con $x_0, \dots, x_{n-1}, x, y \in S$ estados, $0 < t_1 < \dots < t_n = s$ y $t > 0$. Notemos que esta descripción solo considera información acerca de un número finito de pasos y estados al tiempo s . Particularmente nos interesará estudiar el caso homogéneo, definiendo la función de transición

$$p_t(x, y) := \mathbb{P}[X_{t+s} = y | X_s = x] = \mathbb{P}[X_t = y | X_0 = x] \quad (\text{A.2})$$

con la delta de Kronecker en $t = 0$

$$p_0(x, y) = \delta_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Definición A.1. Una *cadena de Markov a tiempo continuo* \mathcal{X} es un proceso estocástico en S tal que satisface la propiedad de Markov (A.1).

Intuitivamente podemos pensar a una trayectoria de una cadena de Markov a tiempo continuo de la siguiente manera, supongamos que comienza en el estado $x \in S$, en el que permanecerá por un tiempo aleatorio T_x , para después saltar a un nuevo estado $y \in S$, con y distinto de x , donde se mantendrá por un tiempo T_y , posteriormente salta y elige un nuevo estado. Repitiendo sucesivamente este procedimiento, obtenemos una posible trayectoria. En otras palabras, dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S , los tiempos aleatorios $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asociados a los elementos de la sucesión y definiendo $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$, la cadena de Markov puede ser vista como

$$X_t = \begin{cases} x_1 & \text{si } 0 \leq t < S_1 \\ x_2 & \text{si } S_1 \leq t < S_2 \\ x_3 & \text{si } S_2 \leq t < S_3 \\ \vdots & \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Hagamos notar algunas características de los tiempos $(T_x)_{x \in S}$ entre estados. Estos tiempos son independientes entre sí; T_x podría ser infinito si la cadena no abandona nunca el estado x ; y la distribución de T_x no puede ser arbitraria por la propiedad de Markov, de hecho corresponde a una distribución exponencial de parámetro $c(x)$ entendiendo como $c(x) = 0$ para el caso en que $T_x = \infty$ casi seguramente. Esta construcción a partir de los saltos entre estados está incompleta, ya que nos es necesario especificar como se elige el siguiente estado, lo cual se realiza a través de las probabilidades infinitesimales de transición. Dado que estamos en el estado x la probabilidad de saltar a un estado y estará dada por $p(x, y)$, con $(p(x, y))_{y \in S}$ una distribución de probabilidad tal que $p(x, x) = 0$. Estas probabilidades de transición son independientes de los tiempos de estancia.

Podemos relacionar todos los elementos construidos hasta ahora en la siguiente proposición.

Proposición A.1. Dados $x, y \in S$, $t > 0$, la probabilidad de transición $p_t(x, y)$ satisface

$$p_t(x, y) = \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + c(x)e^{c(x)t} \int_0^t e^{-c(x)s} \sum_{z \neq x} p(x, z)p_s(z, y)ds \quad (\text{A.4})$$

Demostración. En el caso en que x sea un estado absorbente la igualdad se da pues $c(x) = 0$ y $p_t(x, y) = \delta_0(x, y)$. Supongamos que x no es absorbente,

entonces

$$\begin{aligned}
p_t(x, y) &= \mathbb{P}[X_t = y | X_0 = x] \\
&= \mathbb{P}[X_t = y, T_x > t | X_0 = x] + \mathbb{P}[X_t = y, T_x \leq t | X_0 = x] \\
&= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t \mathbb{P}[X_t = y, T_x = u | X_0 = x] du \\
&= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t \sum_{z \neq x} \mathbb{P}[X_t = y, X_u = z, T_x = u | X_0 = x] du
\end{aligned}$$

Podemos descomponer el evento $\mathbb{P}[X_t = y, X_u = z, T_x = u | X_0 = x]$ como un producto de los siguientes términos utilizando probabilidad condicional

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_t = y | T_x = u, X_u = z, X_0 = x] &= p_{t-u}(z, y), \\
\mathbb{P}[X_u = z | T_x = u, X_0 = x] &= p(x, z), \\
\mathbb{P}[T_x = u | X_0 = x] &= c(x)e^{-c(x)u}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
p_t(x, y) &= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t \sum_{z \neq x} \mathbb{P}[X_t = y, X_u = z, T_x = u | X_0 = x] du \\
&= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t \sum_{z \neq x} p(x, z)p_{t-u}(z, y)c(x)e^{-c(x)u} du \\
&= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t \sum_{z \neq x} p(x, z)p_s(z, y)c(x)e^{-c(x)(t-s)} ds \\
&= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + c(x)e^{-c(x)t} \int_0^t e^{c(x)s} \sum_{z \neq x} p(x, z)p_s(z, y) ds
\end{aligned}$$

□

La construcción anterior es intuitiva, sin embargo no nos indica como se obtienen los parámetros dada una cadena de Markov. En las siguientes secciones estudiaremos como obtener dichos parámetros.

A.1.1. De la cadena de Markov a la descripción infinitesimal

Comencemos estudiando la función de transición dada una cadena de Markov. La propiedad de Markov nos permite deducir las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov*, análogas al caso discreto

$$p_{s+t}(x, y) = \sum_{z \in S} p_s(x, z)p_t(z, y) \quad (\text{A.5})$$

para todo $x, y, z \in S, t, s \geq 0$

Demostración.

$$\begin{aligned}
p_{s+t}(x, y) &= \mathbb{P}[X_{s+t} = y | X_0 = x] \\
&= \sum_{z \in S} \mathbb{P}[X_{s+t} = y, X_s = z | X_0 = x] \\
&= \sum_{z \in S} \mathbb{P}[X_s = z | X_0 = x] \mathbb{P}[X_{s+t} = y | X_s = z, X_0 = x] \\
&= \sum_{z \in S} p_s(x, z) p_t(z, y)
\end{aligned}$$

□

Notemos que en (A.5) podemos hacer s tan arbitrariamente pequeña como queramos, lo que nos sugiere estudiar la tasa infinitesimal asociada a las probabilidades de transición,

Definición A.2 (Tasas infinitesimales del proceso). *Dada una función de transición, definimos a las tasas infinitesimales del proceso como*

$$q(x, y) = \left. \frac{d}{dt} p_t(x, y) \right|_{t=0} \quad (\text{A.6})$$

Nos referiremos al arreglo formado por $(q(x, y))_{x, y \in S}$ como la matriz de tasas.

Veamos que dicha matriz está bien definida. Nos es necesario enunciar los siguientes lemas.

Lema A.1. *Supongamos que $p_t(x, y)$ es una función de transición*

1. *Entonces $p_t(x, x) > 0$ para $t \geq 0$ y $x \in S$,*
2. *Sea $x \in S$. Si $p_t(x, x) = 1$ para algún $t > 0$ entonces $p_t(x, x) = 1$ para todo $t \geq 0$,*
3. *Para todo $x, y \in S$, $p_t(x, y)$ es una función uniformemente continua en t , de hecho podemos concluir*

$$|p_t(x, y) - p_s(x, y)| \leq 1 - p_{|t-s|}(x, x)$$

Lema A.2. *Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \infty$ continua a la derecha tal que $f(0) = 0$ y $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$ para todo $s, t \geq 0$ entonces*

$$c = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \quad (\text{A.7})$$

existe y $c = \sup_{t>0} \frac{f(t)}{t} \in (-\infty, \infty]$.

Veamos que las tasas infinitesimales están bien definidas

Teorema A.1. *Sea $p_t(x, y)$ una función de transición*

a) *Para todo x la derivada*

$$-q(x, x) = -\left. \frac{d}{dt} p_t(x, x) \right|_{t=0} \in [0, \infty] \quad (\text{A.8})$$

existe y satisface

$$p_t(x, x) \geq e^{-q(x, x)t} \quad (\text{A.9})$$

b) *Si $-q(x, x) < \infty$ entonces*

$$q(x, y) = \left. \frac{d}{dt} p_t(x, y) \right|_{t=0} \in [0, \infty] \quad (\text{A.10})$$

para todo $y \in S$.

c) *Si para algún $x \in S$, $-q(x, x) < \infty$ y $\sum_{y \in S} q(x, y) = 0$, entonces $p_t(x, y)$ es continuamente diferenciable en t para $x, y \in S$ y satisfacen la ecuación backward de Kolmogorov*

$$\frac{d}{dt} p_t(x, y) = \sum_{z \in S} q(x, z) p_t(z, y) \quad (\text{A.11})$$

Demostración.

a) Definamos a $f(t) = -\log(p_t(x, x))$, por el lema A.1 está bien definido, pues $p_t(x, x) > 0$, además por las ecuaciones de Chapman podemos ver que es subaditiva

$$\begin{aligned} f(t+s) &\leq -\log(p_t(x, x)p_s(x, x)) \\ &= -\log(p_t(x, x)) - \log(p_s(x, x)) \\ &= f(t) + f(s) \end{aligned}$$

por el lema A.2

$$-q(x, x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t} \in [0, \infty]$$

y por tanto

$$f(t) \leq -q(x, x)t$$

equivalente a (A.9).

b) Por a)

$$1 - p_t(x, x) \leq 1 - e^{q(x,x)t} \leq -q(x, x)t$$

por lo que

$$\sum_{y \neq x} \frac{p_t(x, y)}{t} \leq -q(x, x)$$

Lo que implica que

$$\hat{q}(x, y) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} < \infty.$$

Demostremos que el límite inferior es el mismo que el superior. Para esto consideremos $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, la matriz $p_\delta(x, y)$ puede ser vista como una matriz de probabilidades para una cadena de Markov a tiempo discreto y las probabilidades correspondientes del n -ésimo paso están dadas por $p_{n\delta}(x, y)$. Descomponiendo el evento

$$\begin{aligned} p_{n\delta}(x, y) &\geq \sum_{k=0}^{n-1} p_\delta^k(x, x) p_\delta(x, y) p_{(n-k-1)\delta}^k(y, y) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} e^{q(x,x)n\delta} p_\delta(x, y) \inf_{0 \leq s \leq n\delta} p_s(y, y) \\ &= n p_\delta(x, y) e^{q(x,x)n\delta} \inf_{0 \leq s \leq n\delta} p_s(y, y) \end{aligned}$$

ahora consideremos a $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\delta_n \rightarrow 0$, $n\delta_n \rightarrow t$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\delta_n}(x, y)}{\delta_n} = \hat{q}(x, y).$$

Así considerando el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n\delta_n}}{\delta_n} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\delta_n}}{\delta_n} e^{q(x,x)n\delta_n} \inf_{0 \leq s \leq n\delta_n} p_s(y, y) \\ \frac{p_t(x, y)}{t} &\geq \hat{q}(x, y) e^{q(x,x)t} \inf_{0 \leq s \leq t} p_s(y, y) \end{aligned}$$

y considerando el límite inferior

$$\begin{aligned} \liminf_{t \downarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} &\geq \liminf_{t \downarrow 0} \hat{q}(x, y) e^{q(x,x)t} \inf_{0 \leq s \leq t} p_s(y, y) \\ &= \hat{q}(x, y) \end{aligned}$$

concluyendo que el límite existe,

$$q(x, y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t}$$

c) Sea $T \subset S$ finito tal que $x \in T$. Por las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{p_{t+s}(x, y) - p_t(x, y)}{s} - \sum_{z \in S} q(x, z) p_t(z, y) \\ = \sum_{z \in S} \left[\frac{p_s(x, z) - p_0(x, z)}{s} - q(x, z) \right] p_t(z, y) \end{aligned}$$

Notemos que podemos intercambiar la suma sobre todos los estados y el límite, para esto acotemos la suma sobre el complemento del conjunto T ,

$$\begin{aligned} \sum_{z \notin T} \left| \frac{p_s(x, z)}{s} - q(x, z) \right| p_t(z, y) &\leq \sum_{z \notin T} \frac{p_s(x, z)}{s} + \sum_{z \notin T} q(x, z) \\ &= \frac{1}{s} \left(1 - \sum_{z \in T} p_s(x, z) \right) - \sum_{z \in T} q(x, z) \end{aligned}$$

y ya que T es finito podemos tomar el límite cuando s tiende a 0, obteniendo

$$\lim_{s \downarrow 0} \sum_{z \notin T} \left| \frac{p_s(x, z)}{s} - q(x, z) \right| p_t(z, y) \leq -2 \sum_{z \in T} q(x, z)$$

Por tanto si consideramos a conjuntos $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finitos, tales que $T_n \subset T_{n+1}$ y $T_0 = T$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z \in T_n} q(x, z) = \sum_{z \in S} q(x, z) = 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{p_{t+s}(x, y) - p_t(x, y)}{s} = \frac{d}{dt} p_t(x, y) = \sum_{z \in S} q(x, z) p_t(z, y). \quad (\text{A.12})$$

Por tanto la derivada por el lado derecho existe. Notemos que el lado derecho de la igualdad es continuo por el Lema A.2(c), y ya que toda función continua con derivada derecha tiene derivada terminamos la demostración. □

Las ecuaciones *Backward de Kolmogorov* pueden ser deducidas de las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* diferenciando respecto a s en (A.5) y evaluando en $s = 0$. Con un procedimiento análogo podemos obtener las ecuaciones *Forward de Kolmogorov*, ahora tomando el límite cuando t tiende a 0.

$$\frac{d}{ds}p_s(x, y) = \sum_{z \in S} p_s(x, z)q(z, y) \quad (\text{A.13})$$

En la siguiente sección veremos la relación que existe entre $q(x, y)$, $c(x)$ y $p(x, y)$.

A.1.2. De la descripción infinitesimal a la cadena de Markov en tiempo continuo

En esta sección estudiaremos cuando una matriz de tasas infinitesimales determina de manera única a una función de transición y en ese caso como obtener la cadena de Markov asociada.

Teorema A.2. *Supongamos que $p_t(x, y)$ es una función uniformemente acotada en t, x, y . Las siguientes proposiciones son equivalentes*

a) $p_t(x, y)$ es continuamente diferenciable en t y satisface la ecuación Backward (A.11) y $p_0(x, y) = \delta_0(x, y)$ para cada x, y .

b) $p_t(x, y)$ es continua en t y satisface

$$p_t(x, y) = \delta(x, y)e^{q(x, x)t} + \int_0^t e^{q(x, x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_s(z, y)ds \quad (\text{A.14})$$

Recordemos que $\delta_0(x, y) = 0$ si $x \neq y$ y $\delta_0(x, y) = 1$ si $x = y$.

Demostración. a) \rightarrow b) reescribimos la ecuación Backward como

$$\frac{d}{dt}p_t(x, y) - q(x, x)p_t(x, y) = \sum_{z \neq x} q(x, z)p_t(z, y)$$

Considerando al factor de integración $e^{q(x, x)t}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{-q(x, x)t}p_t(x, y) &= e^{-q(x, x)t} \frac{d}{dt}p_t(x, y) - q(x, x)e^{-q(x, x)t}p_t(x, y) \\ &= e^{-q(x, x)t} \left[\frac{d}{dt}p_t(x, y) - q(x, x)p_t(x, y) \right] \\ &= e^{-q(x, x)t} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_t(z, y) \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial

$$p_t(x, y) = \delta_0(x, y)e^{q(x, x)t} + e^{q(x, x)t} \int_0^t e^{-q(x, x)s} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_s(z, y)ds$$

b) \rightarrow a) supongamos que (A.14), al evaluar en 0 tenemos que $p_0(x, y) = \delta_0(x, y)$, ya que el lado derecho de la ecuación (A.14) es continuamente diferenciable entonces $p_t(x, y)$ también lo es. \square

La equivalencia entre la ecuación *Backward* y (A.14) junto con la ecuación (A.4) nos permite relacionar a la evolución infinitesimal del proceso con las tasas cuando $c(x) < \infty$ para todo $x \in S$, encontrando que

$$c(x) = -q(x, x) \quad (\text{A.15})$$

$$p(x, y) = -\frac{q(x, y)}{q(x, x)} \quad (\text{A.16})$$

Ahora nos queda estudiar cuando la matriz de tasas determina de manera única a la cadena de Markov. Comencemos exhibiendo una solución a la ecuación (A.11). Para esto definiremos una sucesión de funciones de manera iterativa a partir de las tasas infinitesimales.

Definición A.3. Definamos la sucesión de funciones $(p_t^{(n)}(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$, con $t \geq 0$ y $x, y \in S$, por

$$p_t^{(0)}(x, y) = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$p_t^{(n+1)}(x, y) = \delta(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_s^{(n)}(z, y)ds \quad (\text{A.18})$$

Lema A.3. La sucesión $(p_t^{(n)}(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene las siguientes propiedades

- a) $p_t^{(n)}(x, y) \geq 0$ para $t \geq 0$, $x, y \in S$; $n \geq 0$.
- b) $\sum_{y \in S} p_t^{(n)}(x, y) \leq 1$ para $t \geq 0$, $n \geq 0$; $x \in S$.
- c) $p_t^{(n+1)}(x, y) \geq p_t^{(n)}(x, y)$ para $t \geq 0$, $n \geq 0$; $x, y \in S$.

Demostración. Sean $x, y \in S$ y $t \geq 0$, cada uno de los incisos se hará por inducción, notemos que el caso base se cumple para cada una de las propiedades pues $p_t^{(0)}(x, y) = 0$.

- a) $p_t^{(n)}(x, y) \geq 0$ implica que $p_t^{(n+1)}(x, y) \geq 0$, ya que $\delta(x, y)e^{-c(x)t} \geq 0$ y $q(x, y) \geq 0$ si $x \neq y$.
- b) Supongamos que $\sum_{y \in S} p_t(x, y) \leq 1$. Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} p_t^{(n+1)}(x, y) &= \sum_{y \in S} \left[\delta(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_s^{(n)}(z, y)ds \right] \\ &= e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} \sum_{y \in S} q(x, z)p_s^{(n)}(z, y)ds \\ &\leq e^{-c(x)t} - q(x, x)e^{-c(x)t} \left(\frac{e^{c(x)s}}{c(x)} \Big|_0^t \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- c) Para este punto nos será necesario utilizar inducción fuerte, por lo que supondremos que $p_t^{(0)}(x, y) \leq \dots \leq p_t^{(n)}(x, y)$, lo que implica que

$$\sum_{z \neq x} q(x, z) p_t^{(n-1)}(z, y) \leq \sum_{z \neq x} q(x, z) p_t^{(n)}(z, y)$$

y por tanto $p_t^{(n)}(x, y) \leq p_t^{(n+1)}(x, y)$.

□

Ahora tenemos que la sucesión $(p_t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y está acotada superiormente por 1, consideremos a la función resultante de tomar el límite sobre n .

$$p_t^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_t^{(n)}(x, y) \quad (\text{A.19})$$

Esta función es nuestra candidata a satisfacer las ecuaciones *Backward* y *Forward*. Para mostrar que $p_t^*(x, y)$ es función de transición nos es necesario demostrar que cumple con las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov*. Para esto denotaremos,

$$\Delta_t^{(n)}(x, y) := p_t^{(n+1)}(x, y) - p_t^{(n)}(x, y). \quad (\text{A.20})$$

Y enunciemos el siguiente lema.

Lema A.4. *Dados $x, y \in S$, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{t+s}^{(n)}$ satisface*

$$\Delta_{t+s}^{(n)}(x, y) = \sum_{z \in S} \sum_{k=0}^n \Delta_s^{(k)}(x, z) \Delta_t^{(n-k)}(z, y) \quad (\text{A.21})$$

Este resultado será fundamental para demostrar las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* para $p_t^*(x, y)$.

Teorema A.3. *La función $p_t^*(x, y)$ tiene las siguientes propiedades*

- a) $p_t^*(x, y) \geq 0$ para $t \geq 0$ y $x, y \in S$,
- b) $\sum_{y \in S} p_t^*(x, y) \leq 1$ para $t \geq 0$ y $x \in S$,
- c) $p_t^*(x, y)$ satisface las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov*, la ecuación *Backward* y (A.14).

Demostración. Notemos que obtenemos a) y b) por el lema A.3 al considerar

el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Para $c)$ por el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
p_{t+s}^*(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{t+s}^n(x, y) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \Delta_{t+s}^j(x, y) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{z \in S} \sum_{k=0}^j \Delta_s^{(k)}(x, z) \Delta_t^{(j-k)}(z, y) \\
&= \sum_{z \in S} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_s^{(k)}(x, z) \Delta_t^{(j-k)}(z, y) \\
&= \sum_{z \in S} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_s^{(k)}(x, z) \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_t^{(j-k)}(z, y) \\
&= \sum_{z \in S} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_s^{(k)}(x, z) p_t^*(z, y) \\
&= \sum_{z \in S} p_s^*(z, y) p_t^*(z, y)
\end{aligned}$$

Ahora por la ecuación (A.18) podemos tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ pues $p_t(x, y)$ está acotado por $\delta(x, y)e^{-c(x)t} + \sum_{z \neq x} q(x, z) \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} ds$ y ya que $p_t^*(x, y)$ satisface (A.14) entonces por el teorema A.2 también satisface (A.11). \square

Notemos que esto asegura que $p_t^*(x, y)$ tiene todas las propiedades para ser una función de transición, a excepción que podría sumar menos que 1. En tal caso llamaremos a la función subestocástica y la solución podría no ser única.

Teorema A.4 (Solución minimal).

- a) Si $p_t(x, y)$ es una solución no negativa de la ecuación backward (A.11) con condiciones de frontera $p_0(x, y) = \delta_0(x, y)$ entonces

$$p_t(x, y) \geq p_t^*(x, y) \quad (\text{A.22})$$

para $t \leq 0$ y $x, y \in S$.

- b) Si

$$\sum_{y \in S} p_t^*(x, y) = 1 \text{ para toda } t \leq 0 \text{ y } x \in S \quad (\text{A.23})$$

entonces $p_t^*(x, y)$ es la única función de transición que satisface (A.11).

Nos referiremos a $p_t^*(x, y)$ como la solución minimal, nombre que toma sentido por a).

Demostración.

- a) Demostremos por inducción que $p_t(x, y) \geq p_t^{(n)}(x, y)$. El caso base es inmediato pues $p_t(x, y) \geq p_t^{(0)}(x, y) = 0$, supongamos que es válido para n , entonces

$$\begin{aligned} p_t^{(n+1)}(x, y) &= \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_s^{(n)}(z, y) ds \\ &\leq \delta_0(x, y)e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x, z)p_s(z, y) ds \\ &= p_t(x, y) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ concluimos que $p_t^*(x, y) \leq p_t(x, y)$.

- b) Por a) tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{y \in S} p_t^*(x, y) \\ &\leq \sum_{y \in S} p_t(x, y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo que implica que $p_t^*(x, y) = p_t(x, y)$.

□

Lema A.5. *Sea $p^*(x, y)$ la solución minimal a (A.11). Dada una función ϕ acotada en S , la única solución acotada de la ecuación diferencial*

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = \sum_{y \in S} q(x, y)u(t, y), \quad (\text{A.24})$$

con condición inicial $u(0, x) = \phi(x)$, esta dada por

$$u(t, x) = \sum_{y \in S} p_t^*(x, y)\phi(y). \quad (\text{A.25})$$

Demostración. Comencemos notando que solucionar la ecuación (A.24), es equivalente a solucionar la ecuación integral,

$$u(t, x) = \phi(x)e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{y \neq x} q(x, y)u(s, y) ds \quad (\text{A.26})$$

Esto se deriva de considerar el factor de integración $e^{c(x)t}$, pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x,t)e^{c(x)t} &= \frac{d}{dt}u(x,t)e^{c(x)t} + c(x)u(x,t)e^{c(x)t} \\ &= \sum_{y \in S} q(x,y)u(t,y)e^{c(x)t} + c(x)u(x,t)e^{c(x)t} \\ &= \sum_{y \neq x} q(x,y)u(t,y)e^{c(x)t} \end{aligned}$$

Por tanto al integrar considerando la condición inicial obtenemos que,

$$u(x,t)e^{c(x)t} - \phi(x) = \int_0^t \sum_{y \neq x} q(x,y)u(t,y)e^{c(x)s} ds.$$

Si consideremos a la sucesión de funciones $(u^n(x,t))_{n \in \mathbb{N}}$ definidas por

$$u^n(x,t) = \sum_{y \in S} p_t^n(x,y)\phi(y),$$

tenemos la siguiente relación recursiva,

$$u^{n+1}(t,x) = \phi(x)e^{-c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x,z)u^n(t,x) ds.$$

Por la definición de $p^n(x,y)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x,t) &= \sum_{y \in S} p_t^{n+1}(x,y)\phi(y) \\ &= \sum_{y \in S} \delta_0(x,y)e^{-c(x)t}\phi(y) \\ &\quad + \sum_{y \in S} \int_0^t e^{c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x,z)p_s^n(z,y) ds \phi(y) \\ &= \phi(x)e^{c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x,z) \sum_y p_s^n(z,y)\phi(y) ds \\ &= \phi(x)e^{c(x)t} + \int_0^t e^{-c(x)(t-s)} \sum_{z \neq x} q(x,z)u^n(z,t). \end{aligned}$$

Considerando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos que la función límite satisface (A.26) y ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in S} p_t^n(x,y)\phi(y) = \sum_{y \in S} p_t^*(x,y)\phi(y) = u(x,t) \quad (\text{A.27})$$

entonces $u(x,t)$ es solución a la ecuación diferencial (A.24), y notemos que la función u es acotada pues ϕ lo es y las tasas suman 0. La unicidad se deriva que $p^*(x,y)$ es la solución minimal. \square

A.2. Procesos de Feller

En esta sección presentaremos una manera de extender la idea de procesos de Markov a tiempo continuo a un espacio de estados más general, haciendo énfasis en la descripción infinitesimal y como está nos permite rescatar el comportamiento del proceso. Los conjuntos de nuestro interés son los procesos de Feller definidos en conjuntos compactos o localmente compactos. Notemos que estos conjuntos engloban a los contables tratados en la sección anterior.

A lo largo de la sección consideraremos que S es un espacio métrico compacto o localmente compacto, separable y emplearemos el espacio de funciones $C(S)$ definido como:

- El conjunto de las funciones reales continuas con soporte en S si S es compacto, o como
- El conjunto de las funciones reales continuas con soporte en S que se desvanecen en infinito si S es localmente compacto,

en cualquiera de los casos brindaremos al espacio $C(S)$ de la norma dada por

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

A manera observación, recordemos que esto garantiza que $C(S)$ es un espacio métrico completo.

Motivemos la definición de un proceso de Feller. Por simplicidad supongamos que S es compacto, y su métrica esta dada por $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$. Algunas propiedades que un proceso de Markov $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ con espacio de estados S debería satisfacer son:

(C₁) Dado $t \geq 0$. $X_t^x \xrightarrow{d} X_t^y$ si $x \rightarrow y$.

(C₂) Dado $x \in S$. $X_t^x \rightarrow x$ casi seguramente si t tiende a 0.

(C₃) $\sup_{x \in S} \mathbb{E}^x [\text{máx}(\rho(X_s, X_t), 1)] \rightarrow 0$ si $s - t \rightarrow 0$.

Propiedades interpretables como que la distribución es continuamente dependiente de la condición inicial, las trayectorias son continuas en $t = 0$ y la esperanza vista como una función en el tiempo es uniformemente continua en el origen.

Definición A.4. Definimos al *semigrupo de probabilidad* de un proceso $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$, como

$$T(t)f(x) := \mathbb{E}^x[f(X_t)] \tag{A.28}$$

para toda $f \in C(S)$.

En términos del semigrupo de probabilidad, y considerando S un conjunto compacto o localmente compacto, las propiedades C_1, C_2, C_3 son equivalentes a

(\widehat{C}_1) Para toda $f \in C(S)$ y $t \geq 0$ tenemos que $\mathbb{E}^x[f(X_t)] \in C(S)$.

(\widehat{C}_2) Para toda $f \in C(S)$ y $x \in C(S)$, $\mathbb{E}^x[f(X_t)] \rightarrow f(x)$ si $t \rightarrow 0$.

(\widehat{C}_3) Para toda $f \in C(S)$, $\mathbb{E}[f(X_t)] \rightarrow f$, si $t \rightarrow 0$.

Definición A.5. Decimos que un semigrupo T_t satisface la **propiedad de semigrupo** si para toda $f \in C(S)$ y $s, t \geq 0$ tenemos que

$$T_{t+s}f = T(t)T(s)f. \quad (\text{A.29})$$

Esta propiedad nos será de utilidad para decir que un proceso es de Markov a través de la siguiente proposición.

Proposición A.2. Las probabilidades de transición asociadas a $T(t)$ satisfacen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov si y sólo si $T(t)$ satisface la propiedad de semigrupo.

Definición A.6. Decimos que $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ es un **proceso de Feller** si su semigrupo asociado $T(t)$ satisface las propiedades $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{C}_3$ y la propiedad de semigrupo.

Hasta el momento nos hemos enfocado en definir el proceso de Feller, comencemos a hacer un estudio intuitivo de su comportamiento. Notemos que el semigrupo engloba la descripción del proceso según sus probabilidades de transición, ahora estudiemos su evolución infinitesimal.

Definición A.7. Sea un proceso de Feller, $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$, con semigrupo $T(t)f$, definimos al **generador infinitesimal** del proceso como el operador

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}}f := \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}, \quad (\text{A.30})$$

con el dominio

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_{\mathcal{X}}) := \{f : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe}\}. \quad (\text{A.31})$$

El generador infinitesimal describe el comportamiento del proceso. Comencemos encontrando e interpretando el generador de una cadena de Markov.

Observación A.1. Dado una cadena de Markov, $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ en S , un conjunto contable, con función de transición $p_t(x, y)$ el semigrupo del proceso tiene la forma

$$T(t)f(x) = \sum_{y \in S} p_t(x, y)f(y) \quad (\text{A.32})$$

con $f \in C(S)$.

Observación A.2. Sea $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ una cadena de Markov en S un conjunto contable, con función de transición $p_t(x, y)$ y tasas infinitesimales $q(x, y)$, por la observación A.1 conocemos el semigrupo del proceso, supongamos que f es tal que

$$\lim_{t \downarrow 0} \sum_{y \in S} \frac{p_t(x, y)}{t} [f(y) - f(x)] = \sum_{y \in S} \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} [f(y) - f(x)].$$

Calculemos el generador del proceso

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{X}} f(x) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{y \in S} p_t(x, y) f(y) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \sum_{y \in S} \frac{p_t(x, y)}{t} [f(y) - f(x)] \\ &= \sum_{y \in S} q(x, y) [f(y) - f(x)], \end{aligned}$$

las restricciones necesarias sobre f para garantizar la convergencia de

$$\sum_{y \in S} q(x, y) f(y)$$

serán sugeridas por las tasas del proceso. Notemos que la forma del generador es muy descriptiva, dado que estamos en el estado x la expresión relaciona el saltar a cualquier estado y con su correspondiente tasa $q(x, y)$.

A.2.1. Relaciones entre el semigrupo y el generador

En esta sección deduciremos las relaciones que se pueden encontrar entre el semigrupo y generador, buscaremos las ecuaciones *Backward* y *Forward* equivalentes a las de cadenas de Markov. Para esto demostraremos los siguientes lemas.

Lema A.6. Sea $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Feller, su semigrupo $T(t)$ es una contracción, es decir

$$\|T(t)f\| \leq \|f\| \tag{A.33}$$

con $f \in C(S)$.

Demostración. Sea $f \in C(S)$. Notemos que para toda $x \in S$, por la desigualdad de Jensen

$$|T(t)f(x)| = |\mathbb{E}^x[f(X_t)]| \leq \mathbb{E}^x[|f(X_t)|] \leq \mathbb{E}^x[\|f\|] = \|f\|,$$

por tanto $\|T(t)f\| \leq \|f\|$. □

Definición A.8. Sea \mathcal{X} un proceso de Feller con semigrupo $T(t)$, definimos al **resolvente** del proceso de Feller como la transformación de Laplace del semigrupo.

$$R_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) f dt, \quad \alpha > 0. \quad (\text{A.34})$$

con $f \in C(S)$.

La transformación está bien definida ya que $\|e^{-\alpha t} T(t) f\| \leq \|e^{-\alpha t} f\|$ pues $T(t)$ es una contracción.

Lema A.7. Sea \mathcal{X} un proceso de Feller. El resolvente del proceso \mathcal{X} satisface

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha R_\alpha f = f, \quad (\text{A.35})$$

con $f \in C(S)$.

Demostración. Veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha R_\alpha f &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) f dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-s} T\left(\frac{s}{\alpha}\right) f ds \\ &= \int_0^\infty \lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-s} T\left(\frac{s}{\alpha}\right) f ds = \int_0^\infty e^{-s} T(0) f ds \\ &= f \int_0^\infty e^{-s} ds = f. \end{aligned}$$

Observemos que el procedimiento es valido, ya que $\|\alpha R_\alpha f\| \leq \|f\|$ pues

$$\|\alpha R_\alpha f\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\alpha t} f dt \right\| \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} \|f\| dt \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|.$$

□

Lema A.8. Sea \mathcal{X} es un proceso de Feller con generador $\mathcal{G}_\mathcal{X}$. Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_\mathcal{X})$ y g es tal que $g = f - \lambda \mathcal{G}_\mathcal{X} f$ con $\lambda > 0$ entonces

$$\|f\| \leq \|g\|. \quad (\text{A.36})$$

Demostración. Primero demostremos que

$$\inf_{x \in S} f(x) \geq \inf_{x \in S} g(x), \quad (\text{A.37})$$

para esto definamos a

$$g_t = \left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) f - \frac{\lambda}{t} T(t) f = f - \lambda \frac{T(t) f - f}{t},$$

notemos que $\lim_{t \downarrow 0} g_t = f - \lambda \mathcal{G}_X f = g$ y

$$\left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) \inf_{x \in S} f(x) \geq \inf_{x \in S} \frac{\lambda}{t} T(t)f(x) + \inf_{x \in S} g_t(x) \geq \inf_{x \in S} \frac{\lambda}{t} f(x) + \inf_{x \in S} g_t(x),$$

lo que implica que

$$\inf_{x \in S} f(x) \geq \lim_{t \downarrow 0} \inf_{x \in S} g_t(x) = \inf_{x \in S} g(x)$$

por tanto

$$\inf_{x \in S} g(x) \leq \inf_{x \in S} f(x) \leq \sup_{x \in S} f(x) \leq \sup_{x \in S} g(x),$$

lo que nos permite concluir que $\|f\| \leq \|g\|$. \square

Teorema A.5. *Sea \mathcal{X} un proceso de Feller con semigrupo $T(t)$ y generador \mathcal{G}_X entonces*

- a) *Para toda $g \in C(S)$ y $\alpha > 0$, $f = \alpha R_\alpha g$ si y solo si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_X)$ y satisface $f - \alpha^{-1} \mathcal{G}_X f = g$.*
- b) *Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_X)$, entonces $T(t)f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_X)$ es continuamente diferenciable y satisface las ecuaciones Backward y Forward.*

$$\frac{d}{dt} T(t)f = T(t)\mathcal{G}_X f = \mathcal{G}_X T(t)f \quad (\text{A.38})$$

- c) *Para toda $f \in C(S)$ y $t > 0$,*

$$T(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} \mathcal{G}_X \right)^{-n} f = e^{t\mathcal{G}_X} f. \quad (\text{A.39})$$

Recordemos que podemos definir a la exponencial de un funcional, \mathcal{L} , posiblemente no acotado, como

$$e^{t\mathcal{L}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} \mathcal{L} \right)^{-n}.$$

Demostración.

- a) Supongamos que $f = \alpha R_\alpha g$ con $g \in C(S)$, veamos que forma toma el semigrupo aplicado a f

$$\begin{aligned} T(t)f &= T(t)\alpha R_\alpha g = \alpha T(t)R_\alpha g = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} T(t)T(s)g ds \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} T(t+s)g ds = \alpha \int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)} T(r)g dr \end{aligned}$$

lo que nos permite escribir

$$\begin{aligned}\frac{T(t)f - f}{t} &= \frac{\alpha}{t} \int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)} T(r) g dr - \frac{\alpha}{t} \int_0^\infty e^{-\alpha r} T(t) g dr \\ &= \alpha \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} \int_t^\infty e^{-\alpha r} T(r) g dr - \frac{\alpha}{t} \int_0^t e^{-\alpha r} T(r) g dr,\end{aligned}$$

expresiones cuyo límite existe, por lo que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_\mathcal{X})$. Tomando el límite,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\mathcal{X} f &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \alpha \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} \int_t^\infty e^{-\alpha s} T(s) g ds - \lim_{t \downarrow 0} \frac{\alpha}{t} \int_0^t e^{-\alpha s} T(s) g ds \\ &= \alpha^2 R_\alpha g - \alpha e^{-\alpha 0} T(0) g \\ &= \alpha f - \alpha g \\ &= \alpha(f - g)\end{aligned}$$

por tanto $f - \alpha^{-1} \mathcal{G}_\mathcal{X} f = g$.

Ahora supongamos que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_\mathcal{X})$ y satisface $f - \alpha^{-1} \mathcal{G}_\mathcal{X} f = g$. Por la primera parte de la demostración si definimos a $h = \alpha R_\alpha g$ satisface $h - \alpha^{-1} \mathcal{G}_\mathcal{X} h = g$. Definamos a $\psi = f - h$ y notemos que $\psi - \lambda \mathcal{G}_\mathcal{X} \psi = 0$ y por el lema A.6 tenemos que $\|\psi\| \leq 0$ concluyendo que $f = h = \alpha R_\alpha g$.

b) Las siguientes igualdades se dan por la propiedad de semigrupo

$$\frac{T(t+h)f - T(h)f}{t} = T(t) \frac{T(h)f - f}{h} = \frac{T(h)T(t)f - T(t)f}{h}$$

y ya que $T(t)$ es una contracción y $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_\mathcal{X})$ tenemos que el límite

$$\lim_{h \downarrow 0} T(t) \frac{T(h)f - f}{h}$$

existe. Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} T(t)f &= \lim_{h \downarrow 0} T(t) \frac{T(h)f - f}{h} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(h)T(t)f - T(t)f}{h} \\ &= T(t) \mathcal{G}_\mathcal{X} f = \mathcal{G}_\mathcal{X} T(t)f,\end{aligned}$$

este resultado muestra cómo los operadores permutan. Ahora ya que $\mathcal{G}_\mathcal{X} f \in C(S)$ tenemos que $T(t) \mathcal{G}_\mathcal{X} f \in C(S)$ por lo que $\frac{d}{dt} T(t)f$ es continua.

c) Para este punto buscamos demostrar que

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(I - \frac{t}{n} \mathcal{G}_\mathcal{X} \right)^{-n} f = T(t)f,$$

y ya que por a) $(I - \alpha^{-1}\mathcal{G}_X)^{-1}f = \alpha R_\alpha f$, es equivalente a demostrarlo con $\alpha^n R_\alpha^n f$. Primero demostremos por inducción la siguiente identidad

$$\alpha^n R_\alpha^n f = \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} T(s) f ds. \quad (\text{A.40})$$

El caso base se reduce a la definición del resolvente. Supongamos válido para n y veamos para $n+1$

$$\begin{aligned} R_\alpha^{n+1} f &= R_\alpha R_\alpha^n f \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} T(s) f ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha(s+t)} T(t) T(s) f ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha(s+t)} T(s+t) f ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha r} T(r) f dr dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha r} T(r) f dt dr \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{(r-t)^n}{(n)!} \right) \Big|_0^r e^{-\alpha r} T(r) f dr \\ &= \int_0^\infty \frac{r^n}{n!} e^{-\alpha r} T(r) f dr \end{aligned}$$

Notemos que el kernel utilizado en esta expresión corresponde a una variable aleatoria $\text{Gamma}(1, n)$ por lo que si consideramos $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro 1 entonces podemos escribir

$$\mathbb{E} \left[T \left(\frac{\sum_{k=1}^n \zeta_{n,t}}{n} \right) f \right] = \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} T(s) f ds.$$

Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_X)$ utilizando b y el hecho que $T(t)$ es una contracción podemos deducir

$$\|T(t)f - T(s)f\| \leq \|\mathcal{G}_X f\| |t - s|.$$

Empleando estas relaciones encontramos que

$$\begin{aligned}
\left\| \left(I - \frac{t}{n} \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \right)^{-n} - T(t)f \right\| &= \left\| \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} (T(s)f - T(t)f) ds \right\| \\
&\leq \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} \|T(s)f - T(t)f\| ds \\
&\leq \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} \|\mathcal{G}_{\mathcal{X}} f\| |t-s| ds \\
&= t \|\mathcal{G}_{\mathcal{X}} f\| \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha s} \left| \frac{s}{t} - 1 \right| ds \\
&= t \|\mathcal{G}_{\mathcal{X}} f\| \mathbb{E} \left[\left| \frac{\sum_{k=1}^n \zeta_k}{n} - 1 \right| \right],
\end{aligned}$$

empleando la ley fuerte de los grandes números concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \right)^{-n} f = T(t)f.$$

□

Lema A.9 (Unicidad). *Dado un proceso de Feller \mathcal{X} su semigrupo de probabilidad $T(t)$ esta determinado únicamente por su generador.*

Demostración. Sea $f \in C(S)$. Tenemos que $R_\alpha f$ determina de manera única a la distribución de $T(t)f$ por la unicidad de la transformada de Laplace y notemos que por el teorema A.5.a) $R_\alpha = (\alpha - \mathcal{G}_{\mathcal{X}})^{-1}$, es decir que para todo $\lambda > 0$ el generador determina la transformada de Laplace. □

A.2.2. Ejemplos

Exploremos algunos ejemplos con la finalidad de relacionar el comportamiento del proceso con la forma del generador

Ejemplo A.1 (Proceso Poisson). *Sea $\mathcal{N} = (N_t)_t$ un proceso Poisson de tasa $\lambda > 0$, su semigrupo esta dado por*

$$T(t)f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n+k) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

con $f \in C(\mathbb{R})$. Por la observación A.2 tenemos que su generador está dado por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{N}} f(n) = \lambda [f(n+1) - f(n)]$$

con $f \in C(\mathbb{R})$. Hagamos el cálculo explícito para obtener el generador

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_N f(n) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(n+k) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - f(n)}{t} \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} [f(n+k) - f(n)]}{t} \\
&= \lambda [f(n+1) - f(n)] + \lim_{t \downarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} [f(n+k) - f(k)] \\
&= \lambda [f(n+1) - f(n)].
\end{aligned}$$

Ejemplo A.2. Supongamos que tenemos un proceso estocástico, $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ en $[0, 1]$ tal que salta de un estado x a px con $p \in [0, 1]$ a una tasa $\lambda > 0$. El proceso \mathcal{X} no es una cadena de Markov, sin embargo notemos que el proceso \mathcal{X} tiene asociado un proceso Poisson, $\mathcal{N} = (N_t)_{t \geq 0}$, de tasa λ que cuenta el número de saltos que ha dado el proceso. Teniendo esto en cuenta encontremos el semigrupo y el generador del proceso

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \mathbb{P}[X(t) = p^n x], \quad (\text{A.41})$$

haciendo uso de esta relación podemos escribir al semigrupo del proceso como

$$T(t)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

con $f \in C([0, 1])$. Calculando el generador del proceso \mathcal{X} de manera análoga al proceso Poisson

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_X f(x) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f(p^n x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [f(p^n x) - f(x)]}{t} \\
&= \lambda [f(px) - f(x)] + \lim_{t \downarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} [f(p^n x) - f(x)] \\
&= \lambda [f(px) - f(x)].
\end{aligned}$$

Podemos dar una interpretación análoga al generador de las cadenas de Markov. Comenzando de x el estado accesible es px y está multiplicado por la tasa en que ocurre el salto.

Ejemplo A.3 (Ecuación diferencial). Encontremos a un proceso de Feller determinista, \mathcal{X} , cuyo semigrupo este dado por

$$T(t)f(x) = f(X_t) \quad (\text{A.42})$$

donde X_t es solución a la ecuación diferencial

$$\dot{X}_t = \frac{d}{dt}X_t = \mu(X_t) \quad (\text{A.43})$$

con $\mu \in C(\mathbb{R})$ y condición inicial x . Veamos que \mathcal{X} es un proceso de Feller,

1. Sea $x \in \mathbb{R}$. La medida de probabilidad \mathbb{P}^x esta determinada por

$$\mathbb{P}^x[X_t = y] = \mathbb{I}_{\{y=X_t\}},$$

con X_t la solución de (A.43) y condición inicial x .

2. Si X_t es solución de (A.43) entonces X_t es continua pues es derivable y por tanto $f \circ X_t \in C(S)$.
3. La propiedad de Markov se deriva de que el proceso es determinista, además ya que x es la condición inicial tenemos que $\mathbb{P}^x[X_0 = x] = 1$.

Por tanto el proceso \mathcal{X} es de Feller, calculemos su generador, sea $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{X}}f(x) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(X_t) - f(X_0)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\int_0^t f'(X_s)ds}{t} \\ &= f'(X_s) \frac{d}{dt}X_s \Big|_{s=0} \\ &= f'(x)\mu(x). \end{aligned}$$

Podemos interpretar a μ como la deriva del proceso, la tendencia determinista que lleva. Análogamente las soluciones de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n también serán un procesos de Feller. Sea $\widehat{\mathcal{X}}$ el proceso Feller determinista cuyo semigrupo esta dado por

$$T(t)f(\widehat{x}) = f(\widehat{X}_t) \quad (\text{A.44})$$

con \widehat{X}_t solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\widehat{X}}_t = \widehat{\mu}(\widehat{X}_t) \quad (\text{A.45})$$

con $\widehat{\mu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y condición inicial \widehat{x} . Calculemos el generador

del proceso utilizando la regla de la cadena en varias variables

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{\hat{x}}f(\hat{x}) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f(\hat{X}_t) - f(X_0)}{t} \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\hat{X}_t) - f(X_0)}{t} \\
 &= \nabla f(\hat{X}_t) \cdot \dot{\hat{X}}_t|_{t=0} \\
 &= \nabla f(\hat{X}_t) \cdot \hat{\mu}(\hat{X}_t)|_{t=0} \\
 &= \nabla f(\hat{x}) \cdot \hat{\mu}(\hat{x})
 \end{aligned}$$

con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Los procesos de Feller que estudiaremos a lo largo de este trabajo serán resultado de combinar los generadores de los ejemplos analizados.

Bibliografía

- [1] K.B. Athreya and A.N. Vidyashankar. Branching processes. In *Stochastic Processes: Theory and Methods*, volume 19 of *Handbook of Statistics*, pages 35 – 53. Elsevier, 2001.
- [2] M. Bartlett. *The Theory of Branching Processes*. 1964.
- [3] M. Bladt and B. F. Nielsen. *Regeneration and Harris Chains*. 2017.
- [4] R. Durrett. *Essentials of Stochastic Processes*. Springer-Verlag New York, 1999.
- [5] F. Hermann and P. Pfaffelhuber. Markov branching processes with disasters: Extinction, survival and duality to p-jump processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 130(4):2488–2518, 2020.
- [6] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Springer-Verlag, 2002.
- [7] N. Kaplan, A. Sudbury, and T. S. Nilsen. A branching process with disasters. *Journal of Applied Probability*, 12:47–59, 1975.
- [8] J. Lennon and S. E. Jones. Microbial seed banks: the ecological and evolutionary implications of dormancy. *Nature Reviews Microbiology*, 9:119–130, 2011.
- [9] T. Liggett. *Continuous Time Markov Processes: An Introduction*. 2010.
- [10] L. Rincon. *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2012.
- [11] W. R. Shoemaker and J. Lennon. Evolution with a seed bank: The population genetic consequences of microbial dormancy. *Evolutionary Applications*, 11:60 – 75, 2018.