



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS EN TEORÍAS  
TELEPARALELAS A LA GRAVEDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
FÍSICO

PRESENTA

GEOVANNY ALEXANDER RAVE FRANCO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Rave  
Franco  
Geovanny Alexander  
5538378674  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
417490816
2. Datos del Tutor  
Dra.  
Celia del Carmen  
Escamilla  
Rivera
3. Datos del sinodal 1  
Dr.  
Erick Leonardo  
Patiño  
Jaidar
4. Datos del sinodal 2  
Dr.  
Roberto Allan  
Sussman  
Livovsky
5. Datos del sinodal 3  
Dr.  
Sergio  
Mendoza  
Ramos
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Saúl Noé  
Ramos  
Sánchez
7. Datos del trabajo escrito  
Análisis de sistemas dinámicos en teorías teleparalelas a la gravedad  
120  
2021

## Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia, a mi mamá Carolina y mi tita Maribel por, a pesar de los errores y dificultades, haberme criado como una persona con valores, respetuosa y de bien, en un entorno lleno de amor, paz, tranquilidad y apoyo sin el cual no creo haber podido llegar hasta aquí. A mi tío, Andrés, el cual me dio la oportunidad de migrar hacia un nuevo país y del cual he recibido un apoyo sin igual en los últimos años, desde económico hasta emocional y quien se ha vuelto una figura paternal y un modelo a seguir como persona para mí. De la misma forma un enorme agradecimiento a Daniela, la esposa de mi tío, de quién también recibí apoyo tanto económico como moral.

Quiero agradecer a todas las personas que he conocido y amigos que he hecho durante la carrera, en especial un agradecimiento enorme a César, Fabián, Gabriela y Martín, con quienes he compartido los últimos años de la carrera, los cuales me han apoyado en discusiones y materias en las que sentía morir de aburrimiento y por las noches de juegos y risas durante la pandemia, sin las cuales mi salud mental no se hubiera mantenido fuerte.

Agradezco a los profesores que me han dado clase durante la carrera los cuales no solamente me han enseñado física de gran calidad, sino también ética profesional y una forma de ver la vida diferente a cómo la solía ver, en especial, quiero agradecer a mi asesora la Dra. Celia Escamilla, la cual me ha apoyado muchísimo durante mi tiempo trabajando con ella y ha depositado una enorme confianza en mí y que sin su dirección, este proyecto de tesis no hubiera podido dar luz, por lo cual le estoy infinitamente agradecido.

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA100220 “Cosmología estadística para modelos de gravedad”, por lo que agradezco a la DGAPA por la beca recibida.

## Introducción

El estudio de sistemas dinámicos consiste en estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  al analizar las propiedades de los puntos críticos del sistema dados por  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . En este trabajo, revisamos cómo se hacen análisis en sistemas dinámicos para las ecuaciones de Friedmann que provienen de distintas teorías modificadas de la gravedad, particularmente en las teorías modificadas tipo escalares - tensoriales y teorías extendidas tipo gravedad teleparalela.

En el capítulo 1 revisamos los conceptos básicos sobre Relatividad General, cómo se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein a partir del límite Newtoniano y a través del principio variacional, hablamos del teorema de Lovelock el cual nos establece que para poder obtener una teoría distinta a Relatividad General debemos de cumplir ciertas condiciones. Finalmente en ese capítulo revisamos los elementos de cosmología básica como lo son las ecuaciones de Friedmann con algunas de sus soluciones y finalizamos con una pequeña discusión de las ventajas y desventajas de la teoría y el por qué resulta necesario buscar nueva física más allá de Relatividad General.

En el capítulo 2 revisamos uno de los primeros intentos para modificar la Relatividad General, la teoría de Brans-Dicke, la cual trata de incorporar más a fondo las ideas de Mach a un modelo gravitacional al proponer que la constante de gravitación universal de Newton dependa del inverso de un campo escalar que depende de la distribución de materia lejana. Revisamos las ecuaciones de campo a través del método variacional para esta teoría y finalmente analizamos las ecuaciones de Friedmann y algunas de las soluciones importantes.

En el capítulo 3 revisamos brevemente la teoría de Horndeski la cual es la teoría tipo escalar - tensorial más general de todas que nos evita inestabilidades tipo Ostrogradsky, es decir, que nos regresa ecuaciones de campo de segundo orden al hacer variaciones a la acción. Posteriormente nos enfocamos a discutir un subconjunto de la teoría de Horndeski, las teorías  $f(R)$  las cuales son una de las formas más directas de modificar a la gravedad y la cual ha mostrado ser eficiente a la hora de contrastar con los datos observacionales, revisamos las ecuaciones de campo y cómo esta es equivalente a la teoría de Brans-Dicke. Finalmente vemos las ecuaciones de Friedmann en las teorías tipo  $f(R)$  y algunas de las soluciones a ellas de importancia cosmológica.

En el capítulo 4 revisamos una de las teorías extendidas a la gravedad, gravedad teleparalela, la cual consiste en trabajar con un objeto matemático llamado *tétrada* en lugar de trabajar con la métrica. En esta teoría la gravedad es modelada a través de la torsión en lugar de la curvatura, pues la variedad en la que se trabaja es globalmente plana. Al llevarlo a nivel de la acción, vemos que existe una equivalente teleparalela a la gravedad – TEGR – la cual, como su nombre indica, es exactamente igual a Relatividad General, gozando de las mismas ventajas y desventajas que ella, por lo cual resulta necesario modificar la acción, por ello al final de la sección analizamos una de las formas generales de modificar la equivalente teleparalela a través de una funcional general que dependa de la torsión y de un término de frontera que es la divergencia covariante de la torsión, la cual nos recupera otras teorías de gravedad teleparalela.

En el capítulo 5 revisamos finalmente cómo hacer uso de sistemas dinámicos para estudiar las ecuaciones de Friedmann de las distintas teorías alternativas a la gravedad anteriormente descritas, las cuales resultan en general difíciles de resolver analíticamente. Analizamos la estabilidad de los puntos críticos en estos modelos, los cuales bajo ciertas condiciones son capaces de reproducir escenarios cosmológicos viables como puntos atractores estables que están de acuerdo con los datos observacionales y analizamos también bajo qué condiciones nos dan

resultados que no estén de acuerdo a los datos. Se estudia particularmente la estabilidad de distintos modelos de gravedad  $f(T, B)$  bajo cierta condición y se estudia la estabilidad en el caso general para un modelo particular de  $f(T, B)$ . Estudiamos soluciones analíticas aproximadas del sistema dinámico en una vecindad del punto crítico y usando datos observacionales, vemos el rango de corrimiento al rojo en el que estas soluciones son válidas, lo que nos permite obtener algunas cantidades importantes, en particular, el valor del parámetro de Hubble al día de hoy. Finalmente, en la sección 6 hacemos un resumen de lo discutido en este trabajo, la importancia de los resultados, las ventajas y desventajas de cada uno de los modelos estudiados con sistemas dinámicos y la perspectiva sobre futuros trabajos relacionados al tema.

En el apéndice A mostramos los elementos de geometría y topología necesarios para entender las teorías gravitacionales, las definiciones, teorema y corolarios necesarios relacionados al tema. En el apéndice B vemos las definiciones y teoremas necesarios sobre análisis funcional y cálculo de variaciones los cuales son necesarios para entender los métodos variacionales con lo que se obtienen las ecuaciones de campo. Por último en el apéndice C vemos los elementos y las propiedades básicas de los sistemas dinámicos, lo cual consiste en la herramienta teórica principal de este trabajo. Vemos los teoremas y propiedades necesarios para efectuar dichos análisis.

## Lista de publicaciones

En la sección 5, específicamente en la subsección 5.6 se presentan cálculos nuevos que dieron origen a las publicaciones:

1. Geovanny A. Rave Franco, Celia Escamilla-Rivera y Jackson Levi Said. *Stability analysis for cosmological models in  $f(T, B)$  gravity*. Eur. Phys. J. C 80, 677 (2020). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8253-7>.
2. Geovanny A. Rave-Franco, Celia Escamilla-Rivera y Jackson Levi Said. *Dynamical complexity of the Teleparallel gravity cosmology*. Phys. Rev. D. 2021, 103, 084017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.084017>.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>Lista de publicaciones</b>	<b>V</b>
<b>1. Relatividad General y Cosmología Estándar</b>	<b>1</b>
1.1. ¿Por qué Relatividad General? . . . . .	1
1.2. Fundamentos de la Relatividad General . . . . .	2
1.3. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	3
1.3.1. Límite Newtoniano . . . . .	3
1.3.2. Principio variacional y el teorema de Lovelock . . . . .	5
1.3.3. Formalismo de Palatini . . . . .	8
1.4. Cosmología Estándar . . . . .	9
1.4.1. Métrica FLRW y ecuaciones de Friedmann . . . . .	9
1.4.2. Soluciones a las ecuaciones de Friedmann . . . . .	11
1.5. Ventajas y desventajas de Relatividad General . . . . .	13
<b>2. Teoría de Brans-Dicke</b>	<b>15</b>
2.1. Principio de Mach . . . . .	15
2.2. La acción de Brans-Dicke y las ecuaciones de campo . . . . .	16
2.3. Ecuaciones de Friedmann en la teoría de Brans-Dicke . . . . .	18
2.3.1. Obtención de las ecuaciones . . . . .	18
2.3.2. Soluciones analíticas . . . . .	19
<b>3. Teoría de Horndeski y <math>f(R)</math></b>	<b>22</b>
3.1. La acción de Horndeski . . . . .	22
3.2. $f(R)$ como un caso importante de Horndeski . . . . .	23
3.2.1. La acción de $f(R)$ . . . . .	23
3.2.2. Las ecuaciones de campo en $f(R)$ . . . . .	24
3.3. Formalismo de Palatini en $f(R)$ . . . . .	25
3.3.1. Transformaciones conformes . . . . .	25
3.3.2. Variación en el formalismo de Palatini . . . . .	26
3.4. Equivalencia entre Brans-Dicke y $f(R)$ . . . . .	27
3.5. Ecuaciones de Friedmann en $f(R)$ . . . . .	28
3.5.1. Deducción de las ecuaciones . . . . .	28
3.5.2. Energía oscura geométrica . . . . .	30
3.6. Soluciones a las ecuaciones de Friedmann en $f(R)$ . . . . .	31
<b>4. Gravedad Teleparalela</b>	<b>34</b>
4.1. La tétrada . . . . .	34
4.1.1. Justificación a partir de Relatividad General . . . . .	34
4.1.2. Marcos ortonormales . . . . .	35
4.2. Estructuras matemáticas de Gravedad Teleparalela . . . . .	37
4.2.1. El haz fibrado tangente . . . . .	37



4.2.2.	Conexión de espín . . . . .	38
4.2.3.	Torsión y curvatura . . . . .	39
4.3.	Gravedad Teleparalela como una teoría de Gauge . . . . .	41
4.3.1.	Conexión de espín totalmente inercial . . . . .	41
4.3.2.	Conexión de Weitzenböck . . . . .	43
4.4.	Equivalente Teleparalela de Relatividad General . . . . .	44
4.4.1.	La acción . . . . .	44
4.4.2.	Las ecuaciones de campo . . . . .	45
4.5.	Gravedad $f(T, B)$ . . . . .	47
4.6.	Ecuaciones de Friedmann en $f(T)$ . . . . .	49
4.7.	Ecuaciones de Friedmann en $f(T, B)$ . . . . .	50
<b>5.</b>	<b>Análisis de sistemas dinámicos</b>	<b>52</b>
5.1.	Justificación . . . . .	52
5.2.	Relatividad General con un campo escalar . . . . .	52
5.3.	Teoría de Brans-Dicke . . . . .	56
5.3.1.	Sistema dinámico con un potencial arbitrario $V(\phi)$ . . . . .	56
5.3.2.	$V(\phi) = V_0\phi^2$ . . . . .	58
5.4.	Teorías $f(R)$ . . . . .	60
5.5.	Gravedad $f(T)$ . . . . .	63
5.6.	Gravedad $f(T, B)$ . . . . .	66
5.6.1.	Construcción del sistema dinámico . . . . .	66
5.6.2.	Modelo de expansión en Taylor . . . . .	68
5.6.3.	Ley de potencias . . . . .	69
5.6.4.	Ley de potencias mixtas . . . . .	75
5.6.5.	Implicaciones cosmológicas . . . . .	78
5.6.6.	Análisis con $\lambda$ variable . . . . .	80
5.6.7.	Soluciones linealizadas cerca al punto crítico . . . . .	85
5.6.8.	Caso $\alpha \geq 0$ . . . . .	86
5.6.9.	Caso $\alpha < 0$ . . . . .	88
5.6.10.	Pistas fenomenológicas sobre la tensión del valor de $H_0$ a partir del análisis dinámico en gravedad $f(T, B)$ . . . . .	89
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>94</b>
<b>A.</b>	<b>Elementos de geometría diferencial y topología</b>	<b>96</b>
<b>B.</b>	<b>Cálculo de variaciones</b>	<b>104</b>
B.1.	Elementos de análisis funcional . . . . .	104
B.2.	La derivada funcional en física . . . . .	105
B.2.1.	Identidades útiles en física . . . . .	106
<b>C.</b>	<b>Sistemas dinámicos</b>	<b>107</b>

# 1. Relatividad General y Cosmología Estándar

## 1.1. ¿Por qué Relatividad General?

Entre los años 1564 y 1642 *Galileo Galilei* descubrió que, al dejar caer objetos a través de planos inclinados en un campo gravitacional, los cuerpos caen con la misma aceleración independientemente de sus masas [1]. Esta observación le sirvió a *Isaac Newton* para darse cuenta que, usando dos de las leyes de movimiento que llevan su apellido, la fuerza gravitacional que experimenta un cuerpo es  $|\mathbf{F}| \propto m_s m_c$  con  $m_s$  la masa de la fuente del campo gravitacional y  $m_c$  la masa del cuerpo; Sin embargo, Newton consideraba que era posible que esto fuese solamente una aproximación y que era posible que la masa que aparece en la segunda ley de Newton, la masa inercial  $m_i$ , fuese distinta a la masa que hace que los cuerpos caigan, la masa gravitacional  $m_g$ , por lo que sería posible experimentalmente observar que algunos cuerpos caerían de manera distinta a otros dependiendo del factor  $m_i/m_g$  [2]. Algunos experimentos se realizaron para buscar esta diferencia y el resultado, debido a Eötvös [3], que se encontró fue que de haber diferencia entre la masa inercial y la gravitacional, esta es menor que una parte en  $10^9$ . Experimentos más modernos han encontrado que esta diferencia es aún más baja, del orden de  $10^{-13}$  [4].

Con base en estos resultados resultaba natural poder tomar  $m_i = m_g \equiv m$  como la masa de un cuerpo, lo cual es el origen del *Principio de Equivalencia débil*. Finalmente, Newton con base en más observaciones logró encontrar una expresión para la fuerza gravitacional que experimenta un cuerpo de masa  $m$  respecto a otros  $n$  cuerpos de masas  $m_i$  con  $i = 0, \dots, n$ , conocida como *ley de gravitación universal*, la cual viene dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = G \sum_{i=0}^n \frac{m_i m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i), \quad (1)$$

con  $\mathbf{r}_i$  el vector de posición del  $i$ -ésimo cuerpo y  $G$  la constante de gravitación universal.

Con esta descripción, Newton logró explicar una gran cantidad de fenómenos, entre ellos vale la pena señalar la observación de Galileo de que los cuerpos caen con la misma aceleración independientemente de sus masas, las leyes de Kepler de los movimientos de planetas, etc. Sin embargo esta descripción de la fuerza gravitacional presentó problemas en predecir la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, la cual al ser medida resulta más rápida que la calculada con la ley de la gravitación universal, aproximadamente  $43''/\text{siglo}$  [5], lo cual nos indica que una teoría más general que la gravitación newtoniana debe ser tomada en cuenta.

Por otro lado, en 1887, Michelson y Morley [5], realizaron un experimento basado en interferometría para mostrar la existencia del *éter*, una supuesta sustancia que llenaba el universo en el que la luz se desplazaba, el cual debía presentar una velocidad de arrastre en la dirección opuesta al movimiento de la tierra, sin embargo, no se observó dicho arrastre sino todo lo contrario, la luz llegaba al mismo tiempo independiente del camino que seguía. Varios intentos por explicar estos resultados se hicieron para que la teoría del éter sobreviviera, sin embargo, la solución final a dicho paradigma fue tomar la velocidad de la luz como una constante, lo cual resulta en acuerdo a la teoría electromagnética pero en contra de la física newtoniana. Aunado a lo anterior, las ecuaciones de Maxwell resultan no ser invariantes ante transformaciones Galileanas, presentando más problemas a la física clásica. Estas dos observaciones mostraron, de nuevo, que la teoría newtoniana debe ser corregida.

Einstein, en 1905, propuso la *teoría de la Relatividad Especial*, la cual nos permite solucionar la invariancia de las ecuaciones de Maxwell y los resultados de Michelson y Morley al tomar en

cuenta la velocidad de la luz como una constante en todos los marcos inerciales. La Relatividad Especial se basa en los siguientes postulados:

1. Las leyes de la física son las mismas para cualquier marco de referencia inercial.
2. La rapidez de la luz en todos los sistemas de referencia inerciales, en el vacío, es la misma.
3. El espacio es homogéneo, isótropo y continuo.

Con estos postulados, podemos encontrar las transformaciones que nos permite describir la física que se observa en un marco inercial con la que se observaría en otro sistema de referencia inercial, las llamadas *transformaciones de Lorentz*. Las transformaciones de Lorentz forman un subgrupo propio ortócrono  $SO^+(3, 1)$ , el cual incluye a los *boosts de Lorentz* y rotaciones.

Es entonces así que, con este grupo de transformaciones y los postulados de la Relatividad Especial, se solucionaron muchos de los problemas que la teoría Newtoniana presentaba, pues las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante el grupo de Lorentz y además, al ser la velocidad de la luz constante, los resultados del experimento de Michelson y Morley quedaban explicados. Sin embargo, aún faltaba solucionar los demás problemas que la teoría Newtoniana presenta y más aún, faltaba el poder extender la Relatividad Especial a cualquier sistema de referencia, dado que, como se tiene en los postulados, esta solamente es válida en sistemas de referencia inerciales. La Teoría de la Relatividad General es entonces la teoría que nos permite hacer esto, nos permite extender la Relatividad Especial a cualquier marco de referencia los cuales, localmente, recuperan la Relatividad Especial y además nos soluciona los problemas inherentes a la gravedad Newtoniana.

## 1.2. Fundamentos de la Relatividad General

Como se mencionó anteriormente, los resultados experimentales muestran que de haber diferencia entre las masa inercial y gravitacional de un cuerpo, esta diferencia es muy pequeña. Este resultado experimental le sirvió a Einstein para formular lo que se conoce como *Principio de Equivalencia*.

Actualmente, sabemos que el Principio de Equivalencia tiene tres formulaciones, a saber, el Principio de Equivalencia *débil*, el Principio de Equivalencia de *Einstein* y el Principio de Equivalencia *fuerte*, siendo el Principio de Equivalencia de Einstein el que jugó un papel muy relevante en el desarrollo de la Relatividad General. Estas tres formulaciones del Principio de Equivalencia son las siguientes [6]:

1. **Principio de Equivalencia débil:** Todas las partículas de prueba, sin carga, en caída libre siguen la misma trayectoria una vez las condiciones iniciales se hayan fijado, es decir, el movimiento que siguen las partículas en caída libre es universal. Esta formulación se puede entender como la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitacional.
2. **Principio de Equivalencia de Einstein:** El Principio de Equivalencia débil es correcto y además, en cualquier sistema de referencia en caída libre se debe recobrar, localmente, la Relatividad Especial, independientemente de la posición o velocidad.
3. **Principio de Equivalencia fuerte:** El Principio de Equivalencia débil es correcto incluso para objetos muy masivos, no necesariamente partículas de prueba, y además, en cualquier sistema de referencia en caída libre se debe recobrar, localmente, la Relatividad Especial, independientemente de la posición o velocidad.

Cualquier teoría de gravitación debe de cumplir, al menos, los principios de equivalencia débil y de Einstein, pues son los que experimentalmente han mostrado tener un cierto rango de validez [6], la isotropía del espacio y la compatibilidad con las distintas observaciones astrofísicas y cosmológicas.

La Relatividad General de Einstein es la teoría que satisface todo lo anteriormente mencionado, incluso satisface el Principio de Equivalencia fuerte, y que además corrige los problemas de la mecánica Newtoniana y tiene a la Relatividad Especial como parte de su descripción al tratar sistemas de referencia inerciales [7][6].

La Relatividad General describe al espacio-tiempo como una variedad pseudoriemanniana, ver apéndice A.44, sin torsión, ver apéndice A.36 (es decir, con la conexión de Levi-Civita, ver apéndice A.46), de esta forma, debido a la estructura pseudoriemanniana de la teoría, la trayectoria de todas las partículas de prueba son geodésicas, ver apéndice A.33, satisfaciendo el Principio de Equivalencia débil y además, existe un conjunto de coordenadas llamado *coordenadas normales de Riemann*[8] que, junto al hecho de que es una variedad pseudoriemanniana sin torsión, ver apéndice A.38, y de tomar una base coordenada, ver apéndice A.18 y A.16, permiten describir localmente a la variedad como plana permitiendo recobrar así la Relatividad Especial y por lo tanto satisfaciendo el Principio de Equivalencia de Einstein de manera natural. De esta forma, con la estructura pseudoriemanniana, las leyes físicas quedan escritas en términos de tensores, y dada la regla de transformación de las componentes de un tensor, ver apéndice A.13 y A.11, las leyes de la física resultan ser invariantes ante cambios de coordenadas relacionadas por difeomorfismos, a esto se le conoce como el *principio de covariancia generalizada*, por lo cual las ecuaciones y leyes físicas adquieren la misma forma en cualquier marco de referencia.

Finalmente, lo principal que describe a la Relatividad General son las llamadas *ecuaciones de campo*, las cuales nos relaciona a la curvatura del espacio tiempo con la materia que en él hay, y de esta forma la curvatura del espacio-tiempo describe los efectos gravitacionales de la materia con la que la curvatura está relacionada. Hay distintas formas de obtener las ecuaciones de Einstein de las cuales dos serán discutidas a continuación.

## 1.3. Ecuaciones de campo de Einstein

### 1.3.1. Límite Newtoniano

Considerando un espacio-tiempo descrito en Relatividad General con un campo gravitacional débil y estático, podemos ver qué forma tienen las ecuaciones de campo de Einstein si estudiamos la geodésica de una partícula en un campo gravitacional débil con simetría esférica, como la tierra, y comparar este movimiento geodésico con lo que sabemos de física Newtoniana, como veremos a continuación. Dado que el campo gravitacional es débil, la métrica será una pequeña desviación de la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \text{ con } |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2)$$

en donde las partículas se mueven a bajas velocidades  $|\mathbf{u}| \ll 1$  y además es estático  $g_{\mu\nu,0} = 0$ . Por lo tanto, la ecuación de las geodésicas a primer orden en  $h_{\mu\nu}$  que siguen las partículas en

este espacio tiempo es <sup>1</sup>

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} h_{00,\lambda} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (3)$$

por lo cual, la coordenada temporal de manera explícita satisface que  $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$  mientras las coordenadas espaciales satisfacen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{1}{2} h_{00,i} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \approx \frac{1}{2} \nabla h_{00}, \quad (4)$$

en donde se ha aplicado la regla de la cadena  $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ . Esta última expresión se puede relacionar con la gravitación Newtoniana (1), al considerar que la ley de gravitación universal se puede escribir como  $\mathbf{F} = -m\nabla\phi$ , en donde  $\phi$  es un campo escalar. Con lo cual, vemos que al hacer  $h_{00} = -2\phi$  ambas ecuaciones resultan idénticas. Así, observamos que se puede relacionar al campo gravitacional con la métrica de la variedad, es decir, muestra que existe una relación entre la geometría de la variedad la cual está totalmente determinada por la métrica y el campo gravitacional generado por una fuente, por ejemplo el planeta tierra, en donde se tiene que

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (5)$$

Por otro lado, se sabe que el potencial Newtoniano  $\phi$  satisface una ecuación tipo Poisson dada por

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho. \quad (6)$$

Recordando que el tensor de energía-momento de un fluido perfecto tiene la forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (7)$$

en donde  $\rho$  es la densidad del fluido perfecto,  $P$  la presión y  $u_\mu$  la 4-velocidad del fluido normalizada tal que  $u^\mu u_\mu = -1$ . Para materia no relativista este tensor resulta apropiado para su descripción, entonces  $T_{00} = \rho$ ,  $P = 0$ , y como  $h_{00} = -2\phi$ , entonces obtenemos que

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi T_{00}. \quad (8)$$

Esto nos da la pista de que las ecuaciones más generales que nos describen la relación entre la geometría y la gravitación deben de tener al lado izquierdo derivadas de, a lo más, segundo orden en la métrica y del lado derecho deben de depender del tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  de la fuente del campo gravitacional.

Más aún, dado que del lado derecho debe de depender de  $T_{\mu\nu}$  y sabemos que  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  nos da la conservación de energía-momento, entonces el lado derecho también debe de satisfacer que su divergencia covariante sea cero. Varias propuestas se pueden hacer, sin embargo la condición de que la divergencia covariante sea cero restringe mucho las opciones que se pueden proponer. La mejor propuesta que se obtiene para poder satisfacer (8) son las *ecuaciones de campo de Einstein* [9], las cuales están dadas por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (9)$$

---

<sup>1</sup>De ahora en adelante se trabaja con la convención de sumas de Einstein y consideramos unidades naturales, en donde  $c = G = \hbar = 1$ .

en donde  $R_{\mu\nu}$  y  $G_{\mu\nu}$  son los tensores de Ricci y Einstein, ver apéndice A.49, respectivamente y  $R$  es el escalar de Ricci, y además  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ , que nos da la condición de conservación requerida, se obtiene de la definición de la conexión de Levi-Civita y de las identidades de Bianchi, ver apéndice A.40, contraídas. Así, dado que en el límite débil vimos que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  y, como se debe cumplir que  $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$ , entonces  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h_{\mu\nu}$ , por lo tanto  $g_{00} = -1 + h_{00}$  y  $g^{00} = -1 - h_{00}$ . Así, al contraer las ecuaciones de Einstein obtenemos  $R = -8\pi T$ , por lo tanto, las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser reescritas como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (10)$$

con  $T = g^{00}T_{00} = -T_{00}$  es la traza del tensor al orden más bajo no trivial. De esta forma, obtenemos de la ecuación (10) que

$$R_{00} = 4\pi T_{00}, \quad (11)$$

y por otro lado, de la forma del tensor de Riemann, ver apéndice A.39, en términos de los símbolos de Christoffel eligiendo una base coordenada, ver apéndice A.6, obtenemos que

$$R_{00} = R_{0i0}^i = -\frac{1}{2}\partial^i\partial_i h_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}, \quad (12)$$

y así, de (11) vemos que se cumple (8), por lo tanto las ecuaciones de campo de Einstein nos dan el resultado esperado y además nos da la relación general entre la curvatura y el campo gravitacional producido por una fuente con un tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  asociado.

Sin embargo, esta forma de obtener las ecuaciones de Einstein, si bien nos da una intuición física de cómo obtenerlas y qué nos dice, no es la más formal de todas pues depende de las aproximaciones de campo débil y de considerar un sistema de simetría esférica, como lo es el planeta tierra, por lo que podría surgir la pregunta de ¿cómo obtener de forma general las ecuaciones de campo de Einstein? y la respuesta a esto es a través del método variacional.

### 1.3.2. Principio variacional y el teorema de Lovelock

El principio variacional o *principio de acción estacionaria* consiste en, dada una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , considerar a la funcional  $S$  dada por

$$S = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (13)$$

llamada *la acción* y pedir que sea estacionaria, es decir, pedir que su primer variación, ver apéndice B.7, sea cero

$$0 = \delta S. \quad (14)$$

La acción para obtener las ecuaciones de campo de Einstein es<sup>2</sup>

$$S[g_{\mu\nu}, \psi] = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g}d^4x + S_{\text{matt}}[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (15)$$

<sup>2</sup>En general, la acción de materia también puede depender de campos de materia  $\psi$ , de ahí la dependencia explícita en la forma de la acción.

en donde,

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g}d^4x, \quad (16)$$

es la acción de Einstein-Hilbert,  $S_{\text{matt}} = \int \mathcal{L}_M\sqrt{-g}d^4x$  es la acción de materia tal que, el tensor de energía momento es

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (17)$$

con  $\kappa = 8\pi$  y  $\sqrt{-g} = \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante de la métrica.

De esta forma, al hacer la variación de la acción (15) respecto a los componentes de la métrica, se obtiene

$$0 = \delta S[g^{\mu\nu}, \delta g^{\mu\nu}] \equiv \delta S = \frac{1}{2\kappa} \left[ \int (\delta R)\sqrt{-g}d^4x + \int R(\delta\sqrt{-g})d^4x \right] + \int \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (18)$$

$$\stackrel{\text{De B.2.1}}{=} \frac{1}{2\kappa} \left[ \int R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int \sqrt{-g}(-\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu})d^4x - \int \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x \right] + \int \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x,$$

sin embargo, el término  $-\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} = \nabla_\alpha(-\nabla_\beta\delta g^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu})$  es una divergencia total, por lo que bajo condiciones de frontera la integral que lleva este término se hace cero, con lo cual tenemos que

$$0 = \delta S = \int \left( \frac{1}{2\kappa} \left[ R_{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\sqrt{-g} \right] + \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (19)$$

y por lo tanto, del lema fundamental del cálculo variacional, ver apéndice B.8, obtenemos que

$$\frac{1}{2\kappa} \left[ R_{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\sqrt{-g} \right] + \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \quad (20)$$

la cual, dividiendo entre  $\sqrt{-g}$ , despejando el término de materia del lado derecho y usando (17) obtenemos finalmente las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (21)$$

Esa última forma de obtener las ecuaciones de campo de Einstein pareciera *Ad Hoc* en el sentido de que la acción de Einstein-Hilbert no tiene justificación a priori y en principio nada nos prohíbe usar otra acción y de esta forma, se podría pensar, obtener un conjunto totalmente diferente de ecuaciones de campo; sin embargo, la conclusión final de este razonamiento es incorrecto, pues existe un teorema, llamado *teorema de Lovelock* [10][11][6], que nos establece que las únicas ecuaciones de Euler-Lagrange de segundo orden y libres de divergencia que pueden ser obtenidas, en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, de una acción con una

densidad Lagrangiana de la forma  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}^{(1)}, g_{\mu\nu}^{(2)})$ , en donde  $g_{\mu\nu}^{(1)}$  significa derivadas de primer orden de la métrica y  $g_{\mu\nu}^{(2)}$  derivadas de segundo orden en la métrica, son las ecuaciones de campo de Einstein con una posible constante cosmológica, es decir, si

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}^{(1)}, g_{\mu\nu}^{(2)}) d^4x, \quad (22)$$

entonces, al variar  $0 = \delta S$  se obtiene

$$0 = \alpha \sqrt{-g} \left[ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] + \lambda g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad (23)$$

con  $\alpha$  y  $\lambda$  constantes. De esta forma, si a esta acción se le agrega una acción de materia y tomando  $\alpha = \frac{1}{2\kappa}$ ,  $\lambda = \Lambda$  se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica <sup>3</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (24)$$

Así, vemos que el haber obtenido las ecuaciones de campo de Einstein a través de la acción de Einstein-Hilbert no es un resultado *Ad Hoc* sino que proviene de un resultado mucho más fundamental y por lo tanto usar en particular la acción de Einstein-Hilbert nos permite obtenerlas de forma fácil y directa las ecuaciones de campo, dado que es la acción más sencilla que satisface las condiciones del teorema de Lovelock.

De esta forma, si se quiere construir una teoría gravitacional cuyas ecuaciones de campo sean distintas a las ecuaciones de campo de Einstein, se debe de satisfacer alguno de los siguientes puntos [6][12]:

1. Considerar una densidad Lagrangiana que dependa de más campos y no solamente de la métrica, e.g, teorías escalares-tensoriales [13].
2. Hacer que la densidad Lagrangiana dependa de derivadas de la métrica de orden mayor a dos, e.g, teorías  $f(R)$  [14].
3. Trabajar en un espacio-tiempo de más de 4 dimensiones, e.g, teorías de Kaluza-Klein [15].
4. Considerar no-localidad, e.g, gravedad Gauss-Bonnet [16].

Por lo tanto, mientras no se satisfagan alguna de esas condiciones, las ecuaciones de campo de Einstein son las únicas ecuaciones que se obtiene de un principio variacional.

Sin embargo, otra pregunta puede surgir, pues para obtener la variación de la acción (15) usamos la dependencia explícita del tensor de Ricci en términos de la métrica, lo cual es cierto para la conexión de Levi-Civita, sin embargo, ¿Qué se obtendría al relajar la suposición de una conexión métrica y permitir a la acción depender ahora de los coeficientes de la conexión  $\Gamma$ ? De esta forma, estaríamos permitiendo la dependencia  $S = S(g_{\mu\nu}, \Gamma)$  y por lo tanto estaríamos en el primer punto que nos permite salir del teorema de Lovelock. A esta proposición de considerar a la métrica un campo diferente a la conexión se conoce como *formalismo de Palatini*.

<sup>3</sup>La constante cosmológica  $\Lambda$  se puede obtener del método variacional si a la acción de Einstein-Hilbert se le agrega un término de la forma  $-2\Lambda$ , sin embargo en el caso cosmológico, como vamos a ver, la constante cosmológica se puede añadir como un fluido perfecto de densidad  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$  y presión  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , en unidades naturales.



### 1.3.3. Formalismo de Palatini

En este formalismo se consideran a los campos  $g_{\mu\nu}$  y  $\Gamma$  independientes, con lo que

$$S[g_{\mu\nu}, \psi, \Gamma] = \frac{1}{2\kappa} \int \mathcal{R}(g_{\mu\nu}, \Gamma) \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matt}}[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (25)$$

en donde  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma)$  con  $\mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma)$  es el tensor de Ricci en término de la conexión  $\Gamma$  que se toma como independiente de Levi-Civita, y en donde consideramos a la acción de materia como independiente de la conexión y solamente dependiente de la métrica.

Al variar esta acción respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtienen las ecuaciones de campo

$$\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (26)$$

las cuales difieren un poco de las ecuaciones de campo de Einstein, pues  $g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{(\mu\nu)}$  con  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$  la parte simétrica del tensor, ver apéndice A.14, el cual, dado que la conexión no es de Levi-Civita, en general no es simétrico.

Sin embargo, el resultado más importante del formalismo de Palatini es al tomar la primera variación de la acción respecto a la conexión  $\Gamma$  y minimizarla [17][18]

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \Gamma} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_{\lambda}^{\Gamma}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}^{\Gamma}(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu})] d^4x, \quad (27)$$

con  $\nabla^{\Gamma}$  la derivada covariante respecto a la conexión  $\Gamma$ . Al integrar por partes obtenemos

$$0 = \int \nabla_{\lambda}^{\Gamma} [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})] d^4x - \int \nabla_{\lambda}^{\Gamma} [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta_{\alpha}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta_{\alpha}^{\nu})] \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} d^4x, \quad (28)$$

y observamos que la primer integral es una derivada total, por lo que al integrar con condiciones de frontera la hacemos cero, y usando el Lema fundamental del cálculo de variaciones en la segunda integral, obtenemos que

$$\nabla_{\lambda}^{\Gamma} [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta_{\alpha}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta_{\alpha}^{\nu})] = 0, \quad (29)$$

y así, haciendo  $\nu = \alpha$  en (29) y sumando, se obtiene que

$$\nabla_{\alpha}^{\Gamma} (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) = 0, \quad (30)$$

y sustituyendo esto en (29) se obtiene finalmente

$$\nabla_{\lambda}^{\Gamma} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0, \quad (31)$$

lo cual nos dice que  $\nabla^{\Gamma}$  es compatible con  $g^{\mu\nu}$ , es decir, se obtiene a través de un principio variacional que  $\Gamma$  es la conexión de Levi-Civita de  $g_{\mu\nu}$  y por lo tanto,  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$  y por lo tanto obtenemos Relatividad General. En pocas palabras, el formalismo de Palatini y el formalismo métrico (es decir, suponiendo  $\nabla g = 0$  desde un inicio), son iguales para Relatividad General. Esto último no pasa para funcionales de  $R$  mucho más complicadas como se verá más adelante.

Ya que hemos obtenido de forma general las ecuaciones de campo de Einstein, nos toca ahora discutir sobre las soluciones a las ecuaciones de Einstein, particularmente aquellas que nos permitan estudiar la dinámica del universo.

## 1.4. Cosmología Estándar

### 1.4.1. Métrica FLRW y ecuaciones de Friedmann

El estudio de la cosmología moderna parte de lo que se conoce como el *Principio Cosmológico*, que establece que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo, el cual está apoyado por evidencias observacionales [19] [20] que indican que el universo es altamente homogéneo e isótropo a escalas mayores a  $100h^{-1}$  Mpc [21], aunque a pequeñas escalas esto deja de ser cierto.

La métrica que mejor se adapta al Principio Cosmológico además de otras observaciones cosmológicas, como la expansión del universo, es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker (FLRW), la cual viene dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right), \quad (32)$$

en donde  $ds^2$  es el *elemento de línea* dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (33)$$

$k$  es la *curvatura* del espacio, la cual puede tomar como valores  $k = 1, 0, -1$  que representan un espacio cerrado, plano y abierto respectivamente,  $(r, \theta, \varphi)$  son las *coordenadas comóviles*,  $t$  el tiempo propio cosmológico y  $a(t)$  el *factor de escala* <sup>4</sup>.

En esta métrica, los símbolos de Christoffel independientes y distintos de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2}, & \Gamma_{22}^1 &= r(kr^2 - 1), & \Gamma_{33}^1 &= r \sin^2(\theta)(kr^2 - 1), & \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta)\cos(\theta), & \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{32}^3 &= \cot(\theta), & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, & \Gamma_{22}^0 &= r^2 a\dot{a}, \\ \Gamma_{33}^0 &= r^2 a\dot{a} \sin^2(\theta), \end{aligned} \quad (34)$$

y por lo tanto las componentes del tensor de Ricci distintas de cero son

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (35)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2(\theta)(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (36)$$

con lo cual el escalar de Ricci está dado por

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (37)$$

Por otro lado, para poder obtener las ecuaciones de Einstein para esta métrica debemos de proponer un tensor de energía-momento que modele el contenido del Universo. La propuesta más común es considerar a los componentes del universo como fluidos perfectos, con lo cual el tensor de energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (38)$$

<sup>4</sup>De ahora en adelante se considera la convención  $a(t_0) \equiv 1$  con  $t_0$  el tiempo a día de hoy.

en donde el fluido se encuentra en reposo en marco de referencia comóvil, de esta forma la 4-velocidad es  $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ , y la traza del tensor de energía-momento es  $T = T^\mu_\mu = -\rho + 3P$ . La ecuación de conservación para  $T_{\mu\nu}$  es

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (39)$$

en donde  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  es el parámetro de Hubble. Con esto ya podemos calcular las ecuaciones de campo de Einstein (9) para la métrica FLRW.

De (35) y (32) vemos que tanto el tensor de Ricci como el de Einstein son diagonales, por lo tanto, tomando la componente  $G_{00}$  obtenemos la *primera ecuación de Friedmann*

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (40)$$

Considerando las componentes espaciales  $G_{ii}$  obtenemos la *segunda ecuación de Friedmann o ecuación de evolución o ecuación de aceleración*

$$H^2 + \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P). \quad (41)$$

Estas ecuaciones nos describen la dinámica del universo a nivel de fondo, es decir, a distancias tales que el Principio Cosmológico es válido, sin embargo, el sistema de ecuaciones no está cerrado, pues la ecuación de aceleración se puede obtener a partir de la primera ecuación de Friedmann y de la ecuación de conservación, de esta forma, tenemos tres variables por determinar  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  y  $P(t)$  pero solamente dos ecuaciones independientes. Para solucionar este detalle se pueden seguir varios caminos siendo el más común el elegir una *ecuación de estado* para el fluido, esto es, una relación entre  $\rho$  y  $P$  para poder cerrar el sistema de ecuaciones. Una gran cantidad de fluidos relevantes en cosmología tienen una ecuación de estado de la forma

$$\rho = \omega P, \quad (42)$$

en donde, en general  $\omega = \omega(t)$ . Sin embargo, existe una gama de ecuaciones de estado importantes en cosmología que consideran fluidos barotrópicos, i.e. que satisfacen (42), con  $\omega$  constante, los cuales son

$$w = \begin{cases} 1/3 & \text{radiación,} \\ 0 & \text{polvo o materia no relativista,} \\ -1 & \text{Energía oscura.} \end{cases} \quad (43)$$

En general, para las ecuaciones de estado con  $\omega$  constante, la solución a (39) es directa y viene dada por

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (44)$$

en donde  $\rho_0$  es la densidad del fluido al día de hoy  $t = t_0$ . Con esto, en principio, sería posible obtener  $a(t)$  a partir de la primer ecuación de Friedmann, sin embargo, esto solamente se logra de manera analítica para algunos pocos casos.

Para ver estos casos, primero observemos que al introducir la *densidad crítica* con la expresión

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}, \quad (45)$$

la primer ecuación de Friedmann se escribe como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \equiv \Omega - 1, \quad (46)$$

con  $\Omega = \rho/\rho_c$  el *parámetro de densidad*. De esta forma, vemos que si  $\Omega = 1$  estamos en un universo plano, si  $\Omega > 1$  entonces estamos en universo cerrado y si  $\Omega < 1$  entonces estamos en un universo abierto, por lo que, al medir la cantidad de materia en el universo respecto a la densidad crítica  $\Omega$ , es posible determinar la curvatura espacial del universo.

### 1.4.2. Soluciones a las ecuaciones de Friedmann

Pocas soluciones analíticas podemos encontrar a las ecuaciones de Friedmann, sin embargo algunas de ellas tienen particular interés en cosmología.

Las mediciones de la última década [22][23] muestran que el universo es muy cercano a ser plano, de esta forma resulta importante analizar las soluciones con  $k = 0$ .

Considerando el modelo más sencillo, esto es, que el universo tenga un único fluido con ecuación de estado constante  $\omega \neq -1$ , entonces la primer ecuación de Friedmann es

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (47)$$

y dado que el universo es plano, entonces  $\rho_0 = \rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi}$ , así, la primer ecuación de Friedmann queda dada por

$$a^{\frac{3}{2}(1+\omega)-1} \dot{a} = H_0, \quad (48)$$

de donde, integrando de 0 a un tiempo arbitrario  $t$  se obtiene la evolución del factor de escala

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (49)$$

en donde

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{1}{t_0}. \quad (50)$$

De esta forma, si el universo está dominado por radiación  $\omega = 1/3$  entonces  $a(t) = (t/t_0)^{1/2}$ , si está dominado por materia no relativista  $\omega = 0$  se obtiene  $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ , etcétera. Estas soluciones son importantes, pero nos falta la solución para  $\omega = -1$ , la cual fue propuesta por Einstein para obtener un modelo estático del universo con curvatura positiva  $k = 1$  [24], sin embargo, en universo con curvatura plana  $k = 0$  esto deja de ser el caso, pues si  $\omega = -1$ , entonces  $\rho + P = 0$  y por lo tanto  $\dot{\rho} = 0$  lo cual implica  $H = H_0 = \text{constante}$ , con lo cual

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0, \quad (51)$$

la cual se puede integrar directamente, obteniendo lo que se conoce como *Universo tipo de Sitter* cuyo factor de escala tiene la forma

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (52)$$

Este último modela a un universo en expansión acelerada en acuerdo con las observaciones [25], y más aún, está de acuerdo con el *teorema de no-pelo* cósmico, el cuál nos indica que incluso universos homogéneos pero anisótropos evolucionan a tiempo tardío a universos tipo de Sitter [26], es por ello que este resultado es de particular importancia. Sin embargo, estas soluciones son solamente para modelos en donde el universo solamente tiene un fluido, por lo que el modelo más general es considerar al universo con muchos fluidos, de esta forma la  $\rho$  representa una densidad total, con lo cual

$$\rho = \sum_i \rho_i, \quad (53)$$

con  $\rho_i$  la densidad del fluido  $i$ -ésimo.

Existen varios modelos que tienen solución analítica para  $a(t)$  considerando dos fluidos en el universo [24], sin embargo, basado en las observaciones [27] sabemos que el universo está compuesto de muchos fluidos, los cuales podemos clasificar en energía oscura  $\rho_\Lambda$ , materia (que incluye materia oscura y materia bariónica <sup>5</sup>)  $\rho_m$  y radiación (que incluye fotones y neutrinos), y de esta forma  $\rho = \rho_\Lambda + \rho_r + \rho_m$ , a este modelo también se le llama *modelo de Benchmark* [24]. En este modelo, la primera ecuación de Friedmann queda

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{0,r}a^{-4} + \Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}, \quad (54)$$

de donde podemos determinar  $a(t)$  solamente de manera numérica al integrar la expresión

$$\frac{da}{dt} = aH_0\sqrt{\Omega_{0,r}a^{-4} + \Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}}. \quad (55)$$

En general, no es posible medir  $a(t)$  directamente, por lo que en lugar de buscar medir  $a(t)$  se busca medir el *corrimiento al rojo*  $z$ , el cual está relacionado con el factor de escala

$$\frac{a_0}{a(t)} = z + 1, \quad (56)$$

y el cual se puede obtener a través de las observaciones. De esta forma, es posible conocer valores cosmológicos como el tiempo

$$t(z) = \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{dx}{H_0\sqrt{\Omega_{0,r}x^{-2} + \Omega_{0,m}x^{-1} + \Omega_{0,\Lambda}x^2}}, \quad (57)$$

con  $x \equiv a/a_0$ ; la distancia luminosa, distancia angular, etc, sin la necesidad de conocer explícitamente el factor de escala.

Más aún, si consideramos en general que la curvatura espacial  $k$  pueda tomar cualquier valor  $k = 1, 0, -1$ , podemos definir una *densidad de curvatura* dada por

$$\Omega_k = -\frac{k}{H^2a^2}, \quad (58)$$

---

<sup>5</sup>Para la materia oscura una propuesta es  $\omega = 0$  al igual que la materia relativista, sin embargo esta propuesta no es definitiva y existen otras opciones.

de esta forma, se tiene que  $\Omega_{0,k} = -\frac{k}{H_0^2}$ , y por lo tanto la primer ecuación de Friedmann queda

$$\frac{da}{dt} = aH_0\sqrt{\Omega_{0,r}a^{-4} + \Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,k}a^{-2} + \Omega_{0,\Lambda}}, \quad (59)$$

en donde, al resolver numéricamente podemos ver el comportamiento del factor de escala como se muestra a en la figura 1,

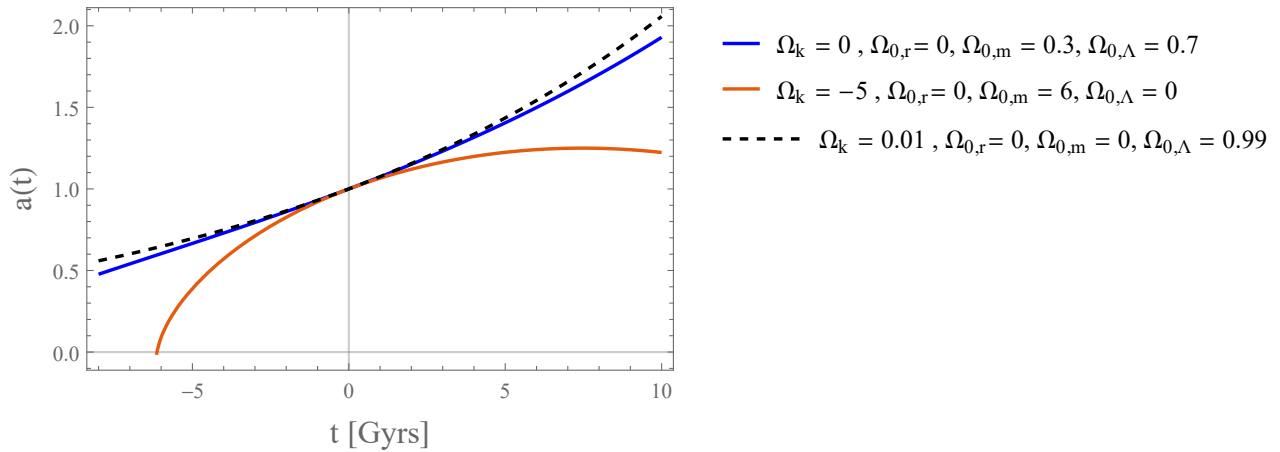


Figura 1: Evolución del factor de escala  $a$  respecto al tiempo  $t$ , medido en giga años [Gyrs] tomando el tiempo al día de hoy como  $t_0 = 0$ , y tomando distintos valores para los parámetros cosmológicos.

y de esta forma, ya conociendo  $a(t)$ , se pueden conocer las distintas características del universo como su expansión y ritmo de expansión, como evolucionan las densidades de los fluidos con el tiempo, y un largo etcétera.

## 1.5. Ventajas y desventajas de Relatividad General

El modelo cosmológico basado en Relatividad General, la métrica de FLRW y un tensor de energía-momento para un fluido perfecto con ecuación de estado barotrópica, logra explicar una gran cantidad de observaciones cosmológicas, como lo es la expansión del universo, el predecir la existencia y estimar la temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB) además de darnos entendimiento de la formación de los elementos ligeros en el universo temprano [28], y en general, el entendimiento de la historia térmica del universo [29]. Este modelo queda corto en explicar varios aspectos del universo, por ejemplo, la dinámica de las galaxias, la expansión acelerada a gran escala del universo y las escalas más bajas en donde la homogeneidad e isotropía del universo dejan de ser válidas. Los dos primeros problemas se han intentado solucionar con algo de éxito a través de la propuesta de la existencia de *materia oscura fría* y de la incorporación de la constante cosmológica, los cuales nos permite estudiar con relativo éxito los problemas anteriormente mencionados [30][31], mientras que por otro lado, el último problema logra resolverse al hacer perturbaciones a la métrica FLRW la cual es la teoría de fondo [28][32] y de esta forma, es posible entender y estudiar la formación de estructura [3][33], las oscilaciones acústicas de bariones [34], y un largo etcétera, dando origen a lo que se conoce como el Modelo Cosmológico Estándar o  $\Lambda$ CDM. Aún así, el modelo sigue presentando problemas

serios, en particular, cuál es la naturaleza de la materia oscura y la constante cosmológica, o mejor conocida como *energía oscura*, el *problema de la planitud* que señala el por qué los datos experimentales indican que la curvatura espacial es cercana a ser plana  $k \approx 0$ , el *problema del horizonte* el cuál cuestiona el hecho de que zonas casualmente desconectadas del universo presentan las mismas características de ser aproximadamente homogéneas e isotropas y más aún, que la radiación de fondo es homogénea lo cual nos dice que la luz que proviene de zonas casualmente desconectadas presentan aproximadamente la misma temperatura [5][24], el *problema de los monopolos* que es la falta de monopolos magnéticos en la naturaleza [24]. Estos últimos pueden ser resueltos en el modelo de  $\Lambda$ CDM, es decir, en el Modelo Cosmológico Estándar anteriormente descrito, a través de lo que se conoce como *inflación* que consiste en agregar un campo escalar  $\phi$  en forma de fluido  $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$  a las ecuaciones de Friedmann, tal que el campo escalar satisface la *condición de rodamiento suave* o condición de *slow-rolling* en la que se pide que  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  lo cual implica que los *parámetros de rodamiento suave*  $\epsilon = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2$ ,  $\eta = \frac{1}{8\pi} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}$  sean pequeños, es decir, que satisfagan  $\epsilon \ll 1$  y  $|\eta| \ll 1$  [24][5][9][35]. De esta forma los problemas de planitud, horizonte y monopolos logran ser resueltos pero deja otro problema por resolver, y esta es la naturaleza del campo escalar  $\phi$  y el cómo detectarlo.

Además de los problemas anteriormente mencionados, recientemente algunas observaciones cruciales han comenzado a mostrar tensiones importantes entre el modelo y la evidencia observacional, que están por fuera de los conocidos problemas teóricos internos de la teoría [36, 37]. En los últimos años, ha habido una disputa prominente, a saber, la tensión en el valor de  $H_0$  en la que las observaciones locales y del Universo temprano predicen diferentes valores del parámetro de Hubble al día de hoy  $H_0$  [38]. Otra tensión creciente en los datos cosmológicos recientes está relacionada con el crecimiento de la estructura a gran escala en el parámetro  $f\sigma_8$  [39]. De esta forma, como el Modelo Cosmológico Estándar basado en Relatividad General presenta serios problemas aún no resueltos, es que distintas propuestas se han hecho para intentar solucionarlos, entre ellas las teorías *alternativas* de la gravedad, que consisten ya sea en modificar la acción (15) al agregar más términos y así salir de la Relatividad General al violar los postulados del teorema de Lovelock o modificar la estructura matemática de la teoría. A continuación presentamos tres ejemplos de cómo se hacen teorías alternativas a la Relatividad General, empezando por las teoría escalares-tensoriales, como son la teoría de Brans-Dicke y Horndeski, esta última con énfasis en las teorías  $f(R)$ , siguiendo con la Gravedad Teleparalela que consiste en el uso de *tétradas* para la descripción del espacio tiempo en lugar del tensor métrico. En cada caso observaremos que obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo en estas teorías es en general muy complicado, de ahí entonces que al final se abordará el uso de sistemas dinámicos para obtener información de las soluciones a las ecuaciones de campo que se presentan en estas teorías y poder estudiar las propiedades de cada una de las distintas teorías alternas a la gravedad previamente presentadas.

## 2. Teoría de Brans-Dicke

### 2.1. Principio de Mach

A lo largo de la historia de la humanidad, ha habido una extensa discusión que empezó como un debate filosófico y terminó siendo un debate muy importante para la física pues determina la forma en que entendemos y expresamos las leyes de la naturaleza, esto es, la discusión de si el espacio es en sí mismo un objeto absoluto e independiente, como si se tratase de un escenario o contenedor en el que todos los objetos materiales se encuentran y en el cual se pueden mover y que a la vez existe independientemente de los objetos que en él se encuentran, o no, es decir, que el espacio sea una simple abstracción que nos sirve para determinar la posición y el movimiento relativo entre objetos existentes y que por lo tanto queda totalmente determinado por la materia existente en él, por lo que entonces no tiene sentido hablar del espacio en sí mismo cuando hay ausencia de materia.

Esta discusión tomó un papel muy importante a la hora de establecer la *mecánica Newtoniana*, en donde Newton propuso como axioma que el espacio y el tiempo fuesen objetos absolutos e independientes, y dado que la mecánica Newtoniana dio resultados experimentalmente comprobables, algunos consideraron que la discusión estaba cerrada y que por lo tanto el espacio y el tiempo eran absolutos e independientes, pero para algunos otros esta discusión no estaba cerrada sino que al contrario, que la mecánica Newtoniana debía ser reformulada [40].

Con esta concepción de la mecánica Newtoniana se podría dar explicación al *experimento del balde con agua*. El experimento consiste en observar que la superficie del agua dentro de un balde en reposo tiene una forma diferente a la superficie del agua dentro del mismo balde en rotación, y que esta diferencia, concluye Newton, es debida a que la rotación del balde es respecto al espacio absoluto y que al estar en reposo lo está también respecto al espacio absoluto [41][40].

Entro los principales detractores de que el espacio fuese una entidad absoluta se encontraba el físico y filósofo Ernst Mach, quien argumentaba que la conclusión de Newton respecto a la diferencia entre la forma de la superficie del agua en el balde en reposo y el balde rotando estaba incompleta pues se basaba en la presunción de la existencia de un universo vacío y que la física en este universo vacío es la misma que la física en nuestro universo lleno de materia. De esta forma, en nuestro universo lleno de materia, la diferencia radica en que uno de los baldes está en reposo respecto a las estrellas lejanas y estáticas y el otro está rotando respecto a las estrellas del cielo. Así, la diferencia entre las formas es únicamente debido al movimiento respecto a la materia en el universo en lugar de un espacio absoluto, y por lo tanto, a la hora de formular leyes y experimentos, estos se deben de hacer respecto a toda la materia del universo y no respecto a un espacio absoluto. Las ideas de Mach influenciaron fuertemente a Einstein para el desarrollo de la Relatividad, siendo este el primero en acuñar el término *Principio de Mach* [42]. Hoy en día, e incluso en su tiempo para el mismo Einstein, existen varias formas de entender y postular el principio de Mach, siendo una de las más comunes la que establece que "*Un marco de referencia local e inercial está determinado por el movimiento de los objetos astronómicos distantes*" [17], sin embargo, esta no es la única forma de plantear el principio de Mach, por ejemplo, Einstein a lo largo de su trabajo formuló el principio de Mach de distintas formas, en particular, la formulación de 1918 establece que [42] "*los campos gravitacionales están condicionados y determinados totalmente por el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$* " lo cual implica directamente que el espacio-tiempo definido por  $g_{\mu\nu}$  debe estar totalmente determinado por la distribución de materia en él  $T_{\mu\nu}$ . Existen otras formas más radicales de establecer el principio de Mach, por ejemplo, al considerarse un universo vacío y una partícula en él, se sigue



de las ideas de Mach [41] que la masa de esta partícula debe ser cero  $m = 0$  y por lo tanto el poder medir la inercia de una partícula depende totalmente de la existencia de materia. De esta forma, el principio de Mach queda descrito como "*no existe inercia en un universo vacío*" [41][43]. En general, no hay una forma única de formular el principio de Mach y cada una de las diferentes formas de hacerlo se encuentra alineada con las ideas de Ernst Mach. Por lo tanto, consideraremos como *Principio de Mach* a la idea de que el espacio-tiempo no es una entidad absoluta sino que este depende de la distribución de materia en él y entonces sus propiedades, como los sistemas de referencia inercial, dependen totalmente del comportamiento, distribución e interacción de la materia que se encuentra en él y que por lo tanto la idea del espacio vacío no tiene sentido ni cabida en una teoría física.

De esta forma, parece que la Relatividad General incorpora bastante bien el Principio de Mach, pues las ecuaciones de campo  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  nos establece que el espacio-tiempo en efecto depende de la distribución de materia en el universo. Sin embargo, la Relatividad General no incorpora totalmente las ideas de Mach, pues por ejemplo el espacio-tiempo de Minkowski tiene una estructura en sí mismo en ausencia de materia  $T_{\mu\nu}$  violando totalmente las ideas de Mach. Relatividad General incorpora parcialmente las ideas de Mach pero no del todo pues esta permite soluciones que van en contra del principio de Mach [44]. Es en este contexto en el que aparece la teoría de Brans-Dicke, la cual es una generalización de la Relatividad General que incorpora aún mas las ideas de Mach en su descripción del espacio-tiempo.

## 2.2. La acción de Brans-Dicke y las ecuaciones de campo

La acción de Brans-Dicke se origina del hecho de observar que la Relatividad General es incapaz de describir correctamente escenarios en donde el principio de Mach se vuelven claramente visibles, tal como se describió al final de la subsección pasada, así, se busca una teoría que implemente más a fondo las ideas de Mach. Para la teoría de Brans-Dicke jugó un papel importante el desarrollo hecho por Sciama [45], el cual, consideró el siguiente experimento mental: considérese un cuerpo de prueba que cae directamente hacia el sol y un sistema de coordenadas en el cual el cuerpo no tiene aceleración, de esta forma, en ese marco de referencia la fuerza gravitacional del sol debe ser cancelada por alguna otra fuerza, para que así, de acuerdo a Newton,  $\mathbf{f} = 0$ . De esta forma, la aceleración del cuerpo puede ser determinada solamente por la distribución de materia en el universo. Por lo que, denotando  $m_s$  la masa del sol, la aceleración del cuerpo se expresa de acuerdo a Newton como  $a = Gm_s/r^2$ , pero, por otro lado, si se usa análisis dimensional se obtiene que la aceleración del cuerpo, en términos de la distribución de masa, tiene la forma de  $a \sim m_s R c^2 / M r^2$ , y así se tiene que  $GM/Rc^2 \sim 1$ , con  $M$  la masa y  $R$  el radio del universo visible. Por lo cual, esto sugiere que o se mantiene la razón  $R/M$  constante, la cual se puede conseguir a través de la imposición de condiciones de frontera a las ecuaciones de campo que incorporen las ideas de Mach lo cual era un problema abierto en la teoría [42][46], o permitir que  $G$  no sea una constante.

Al considerar que  $G$  no fuese una constante quedaba por determinar de qué debería depender, y lo que encontraron Brans y Dicke fue que esta debería depender de una campo escalar  $\phi$  que depende de la distribución de materia lejana y cuya función primaria es dar el valor local de  $G$  [46][17], y de esta forma, la generalización a la Relatividad General que encontraron Brans y Dicke, para incluir las ideas de Mach más fondo en una teoría gravitacional, tiene como acción

$$S_{\text{BD}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) \right] + S_{\text{matt}}, \quad (60)$$

en donde  $S_{\text{matt}}$  es la acción de materia,  $\phi = G_{\text{eff}}^{-1}$  juega el papel de la constante de gravitación universal efectiva,  $\omega$  el *parámetro de Brans-Dicke* el cual es adimensional y debe de tener una magnitud de orden 1,  $V(\phi)$  generaliza el papel de la constante cosmológica y además la materia no se acopla al campo escalar directamente, esto es,  $S_{\text{matt}} = S_{\text{matt}}[g_{\mu\nu}]$ . Así, vemos que la acción (60) nos permite salirnos a una teoría más general que la de Einstein pues depende de tanto el campo escalar como de la métrica y no solamente de esta última, cumpliendo así una de las condiciones necesarias para salirnos del teorema de Lovelock y así poder tener una teoría más allá de Relatividad General.

Al hacer la primer variación de la acción (60) respecto a la métrica obtenemos las ecuaciones de campo para Brans-Dicke, mientras que la hacer la variación respecto a  $\phi$  obtenemos una ecuación tipo *Klein-Gordon* para el campo escalar, veamos.

Variando respecto a  $g^{\mu\nu}$  tenemos

$$0 = \delta S_{\text{BD}}(g^{\mu\nu}; \delta g^{\mu\nu}) \equiv \delta S_{\text{BD}} \quad (61)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^4x \left( \phi \delta(\sqrt{-g}R) - \frac{\omega}{\phi} (\nabla_\nu \phi)(\nabla_\mu \phi) \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) - \delta(\sqrt{-g})V(\phi) \right) \quad (62)$$

$$+ \delta S_{\text{matt}},$$

por lo que, de las identidades 5 y 6 del apéndice B.2.1, se tiene que

$$0 = \int d^4x \left( \phi \left[ \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\square \delta g^{\mu\nu} \right] \right. \quad (63)$$

$$\left. - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\omega}{2\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{V(\phi)}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - 8\pi \mathcal{T}_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \right),$$

y al integrar por partes se obtiene que

$$0 = \int d^4x \left( \phi \left[ \sqrt{-g}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\sqrt{-g} \right] - \sqrt{-g}\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\square \phi \right. \quad (64)$$

$$\left. - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi \sqrt{-g} + \frac{\omega}{2\phi} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \sqrt{-g} g_{\mu\nu} + \frac{V(\phi)}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} - 8\pi \mathcal{T}_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) \delta g^{\mu\nu},$$

y por lo tanto, del lema fundamental del cálculo de variaciones y de despejar el tensor de Einstein, se obtienen las ecuaciones de campo para la teoría de Brans-Dicke dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{\mathcal{T}_{\mu\nu}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) \quad (65)$$

$$+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V(\phi)}{2\phi} g_{\mu\nu},$$

con  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento de materia <sup>6</sup>.

Por otro lado, al hacer la primer variación respecto al campo escalar  $\phi$  se obtiene

$$0 = \delta S_{(\text{BD})}(\phi; \delta \phi) \equiv \delta S_{\text{BD}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R \delta \phi + \left( \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) \delta \phi - 2 \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \delta \phi - V'(\phi) \delta \phi \right]. \quad (66)$$

<sup>6</sup>De aquí en adelante se denotará al con el tensor de energía-momento con la letra  $\mathcal{T}$  para no confundir con aquellas relacionadas con el tensor de torsión del cual se hablará más adelante.

Ahora, vemos que

$$\begin{aligned} -2\frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\delta\phi &= -2\frac{\omega}{\phi}[\nabla_{\nu}(\delta\phi\nabla_{\mu}\phi) - \delta\phi\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\phi] \\ &= g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\left(-\frac{2\omega}{\phi}\delta\phi\nabla_{\mu}\phi\right) - \frac{2\omega}{\phi^2}g^{\mu\nu}(\nabla_{\nu}\phi\nabla_{\mu}\phi)\delta\phi + \frac{2\omega}{\phi}(\square\phi)\delta\phi, \end{aligned} \quad (67)$$

por lo tanto, ingresando (67) en (66) e integrando la divergencia total que aparece en (67), se obtiene que

$$0 = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\alpha}\phi + 2\frac{\omega}{\phi}\square\phi - V'(\phi)\right]\delta\phi, \quad (68)$$

y por lo tanto

$$R - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\alpha}\phi + 2\frac{\omega}{\phi}\square\phi - V'(\phi) = 0. \quad (69)$$

Ahora, podemos hacer aún más explícita esta ecuación al tomar la traza de (65), y así obtenemos que el escalar de Ricci es

$$R = -8\pi\frac{\mathcal{T}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\alpha}\phi + 3\frac{\square\phi}{\phi} + 2\frac{V(\phi)}{\phi}, \quad (70)$$

y entonces, al insertar esta última expresión en (69) se obtiene la ecuación tipo *Klein-Gordon* para el campo escalar

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega + 3}(8\pi\mathcal{T} + \phi V'(\phi) - 2V(\phi)), \quad (71)$$

en donde  $V'(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$ .

Con base en (71) se observa que el campo escalar sí reacciona a la materia que hay en el universo, sin embargo esta reacción es de manera indirecta a través de la geometría del espacio pues  $S_{\text{matt}}$  no está acoplado directamente con el campo escalar.

## 2.3. Ecuaciones de Friedmann en la teoría de Brans-Dicke

### 2.3.1. Obtención de las ecuaciones

Consideramos la métrica de FLRW (32) de donde el tensor de Ricci y el escalar de Ricci vienen dado por (35) y (37) respectivamente, de esa forma el tensor de Einstein es diagonal, al igual que en Relatividad General. Por otro lado, dado que  $\phi = \phi(t)$  y de (34) se obtiene

$$\square\phi = g^{\mu\nu}(\phi_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\phi_{,\alpha}) = -\ddot{\phi} - g^{ii}\Gamma_{ii}^0\phi_{,\alpha} = -(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}), \quad (72)$$

$$\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\alpha}\phi = -(\dot{\phi})^2. \quad (73)$$

Entonces, tomando la componente  $G_{00}$  de (65) y tomando el tensor de energía momento de un fluido perfecto, obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi}{3\phi}\rho + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{k}{a^2} + \frac{V(\phi)}{6\phi}, \quad (74)$$

que es la primer ecuación de Friedmann en la teoría de Brans-Dicke.

La segunda ecuación de Friedmann la obtenemos al tomar cualquier componente espacial  $G_{ii}$  de (65), y así, obtenemos la segunda ecuación de Friedmann en la teoría de Brans-Dicke dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3\phi}(\rho + 3P) - \frac{\omega}{3} \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{2\phi} - \frac{H\dot{\phi}}{2\phi} + \frac{V(\phi)}{6\phi}. \quad (75)$$

Finalmente, la ecuación para  $\phi$  queda dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega + 3} [8\pi(\rho - 3P) - \phi V'(\phi) + 2V(\phi)]. \quad (76)$$

La ecuación (75) puede reescribirse usando la ecuación (76) de la siguiente forma

$$\dot{H} = -\frac{8\pi}{(2\omega + 3)\phi} [(\omega + 2)\rho + \omega P] - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 2H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{k}{a^2} + \frac{1}{2(2\omega + 3)\phi} [\phi V'(\phi) - 2V(\phi)]. \quad (77)$$

Por lo tanto, observamos que el sistema de ecuaciones (74)–(77) es mucho más complicado que el sistema de ecuaciones de Relatividad General, pues tenemos una ecuación extra, la ecuación para  $\phi$ , acoplada con las ecuaciones para el parámetro de Hubble. Encontrar soluciones analíticas para este sistema es complicado en general, sin embargo se pueden obtener algunas soluciones particulares de manera analítica.

### 2.3.2. Soluciones analíticas

A diferencia de las ecuaciones de campo de Relatividad General en la que solamente es necesario especificar  $(a_0, \dot{a}_0, \phi_0 = G^{-1})$  para así poder determinar las soluciones a las ecuaciones de campo, aquí es necesario especificar un valor más, el de  $\dot{\phi}_0$  pues la constante de gravitación universal es ahora descrita por un campo escalar que en general no es constante. Esta necesidad de requerir especificar  $\dot{\phi}_0$  se puede eliminar al pedir que [17][46][47]

$$\lim_{t \rightarrow 0} [\dot{\phi} a^3] = 0, \quad (78)$$

sin embargo, en general, se necesitan todos los valores  $(a_0, \dot{a}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0)$  al obtener las soluciones a las ecuaciones de campo en Brans-Dicke, además de especificar la forma del potencial  $V(\phi)$ .

Un procedimiento común para obtener soluciones exactas en Brans-Dicke es proponer una ley de potencias, ya sea para  $a(t)$  o para  $\phi(t)$  y a partir de ahí obtener los demás parámetros que queden libres [17], por ejemplo, si se propone al factor de escala en forma de ley de potencias

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^q, \quad (79)$$

con  $q$  el exponente, se obtiene que

$$H = \frac{q}{t}. \quad (80)$$

Además, considerando que la ecuación de estado para el fluido es

$$\rho = \omega P = (\gamma - 1)P, \quad (81)$$

con el fin de evitar confusiones con el parámetro de Brans-Dicke  $\omega$ , y considerar  $V(\phi) \equiv 0$  obtenemos entonces que la ecuación para  $\phi$  es

$$\ddot{\phi} + 3\frac{q}{t}\dot{\phi} = \frac{8\pi\rho}{2\omega + 3}(4 - 3\gamma). \quad (82)$$

Por otro lado, de acuerdo a (44), si  $\gamma \neq 0$  entonces  $\rho = \rho_0 a^{-3\gamma} = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-3q\gamma}$  así, la ecuación para  $\phi$  queda

$$\ddot{\phi} + 3\frac{q}{t}\dot{\phi} = \frac{8\pi\rho_0}{2\omega + 3}(4 - 3\gamma) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-3q\gamma}, \quad (83)$$

que es una ecuación de segundo orden no homogénea cuya solución general es la suma  $\phi = \phi_p + \phi_G$  de una solución particular  $\phi_p$  del sistema no homogéneo más la solución general  $\phi_G$  del sistema homogéneo.

La solución particular a considerar es

$$\phi_p(t) = At^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-3\gamma q}, \quad (84)$$

la cual, al ingresar en la ecuación (83) nos da que

$$A = \frac{8\pi\rho_0(4 - 3\gamma)}{(2\omega + 3)(2 - 3\gamma q)[1 + 3q(1 - \gamma)]}, \quad (85)$$

mientras que la solución general al sistema homogéneo  $\ddot{\phi} + 3\frac{q}{t}\dot{\phi} = 0$  es

$$\phi(t) = \phi_0 t^s, \quad (86)$$

en donde  $s = 0$  ó  $s = 1 - 3q$ .

Por lo tanto, la solución general de (83) es

$$\phi(t) = \phi_0 t^s + \frac{8\pi\rho_0(4 - 3\gamma)}{(2\omega + 3)(2 - 3\gamma q)[1 + 3q(1 - \gamma)]} t^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-3\gamma q}. \quad (87)$$

Bajo esta misma idea de proponer soluciones como leyes de potencias existen varios resultados, por ejemplo, la solución de O'Hanlon y Tuper [17][48] en el que consideran un universo vacío y plano,  $V(\phi) \equiv 0$  y  $\omega > \frac{-3}{4}$  y  $\omega \neq 0, -\frac{4}{3}$  y cuya soluciones son de la forma

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{q_{\pm}} \quad \phi(t) = \phi_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{s_{\pm}}, \quad (88)$$

en donde

$$q_{\pm} = \frac{1}{3\omega + 4} \left( w + 1 \pm \sqrt{\frac{2\omega + 3}{3}} \right), \quad (89)$$

$$s_{\pm} = \frac{1 \mp \sqrt{3(2\omega + 3)}}{3\omega + 4}, \quad (90)$$

los cuales satisfacen que  $3q_{\pm} + s_{\pm} = 1$ . Otro ejemplo es la solución dada por Brans y Dicke para un universo plano dominado por polvo [46][17] en el que

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^q \quad \text{y} \quad \phi(t) = \phi_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^r, \quad (91)$$

con

$$q = \frac{2(\omega + 1)}{3\omega + 4}, \quad (92)$$

$$r = \frac{2}{3\omega + 4}, \quad (93)$$

$$\phi_0 = 8\pi \left[ \frac{4 + 3\omega}{2(3 + 2\omega)} \right] \rho_0 t_0^2, \quad (94)$$

satisfaciendo  $3q + r = 2$ . Un ejemplo importante es la solución de Nariai [17] [49] la cual obtiene como caso particular a la solución de Brans-Dicke de un universo dominado por polvo. Soluciones más recientes se han encontrado en otros contextos, por ejemplo al agregar otro campo escalar acoplado de manera mínima a la gravedad [50], al considerar a la constante cosmológica y a la gravitacional que decaigan linealmente con el parámetro de Hubble [51], considerando campos complejos [52], y un largo etcétera. Sin embargo, se puede observar que todas estas soluciones parten del hecho de proponer ya sea  $a(t)$  o  $\phi(t)$  a priori, por lo que no representan soluciones generales al problema pues estas son mucho más difíciles de encontrar.

### 3. Teoría de Horndeski y $f(R)$

#### 3.1. La acción de Horndeski

En la primera sección vimos que para poder obtener una teoría más allá de Relatividad General es necesario salirnos de las hipótesis del teorema de Lovelock al cumplir con algunos de los puntos mencionados en la subsección 1.3.2, sin embargo esto no es posible hacerlo a la ligera pues si la Lagrangiana depende de derivadas de orden mayor o igual a dos pueden presentar inestabilidades en el hamiltoniano conocidas como *Inestabilidades de Ostrogradsky* [53][13][54] las cuales provienen del teorema de Ostrogradsky [53] el cual nos establece que si un lagrangiano depende de derivadas superiores o iguales a dos de una variable, digamos  $\ddot{x}$ , y que además es no degenerado  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}^2} \neq 0$ , entonces el hamiltoniano correspondiente es lineal en una de las variables generalizadas permitiendo así que la energía del sistema no esté acotada inferiormente y por lo tanto sea inestable [55] [56]. Sin embargo, existe la posibilidad de evitar las inestabilidades de Ostrogradsky a la hora de construir la Lagrangiana, esto es al hacer que la Lagrangiana sea degenerada y por lo tanto las ecuaciones de campo sean a lo más de segundo orden [57] evitando así que el hamiltoniano sea lineal en cualquiera de las coordenadas generalizadas y por lo tanto obligando a que haya una cota mínima para la energía o hamiltoniano del sistema, evitando así inestabilidades tipo Ostrogradsky. La Relatividad General y la teoría de Brans-Dicke son teorías libres de inestabilidades tipo Ostrogradsky pues como se puede observar de las ecuaciones de campo (9) y (65) respectivamente, estas son de a lo más segundo orden, por lo tanto, aunque la Lagrangiana de ambas teorías depende de segundas derivadas, este es degenerado y así entonces se evitan las inestabilidades de Ostrogradsky.

La teoría escalar-tensorial más general que evita inestabilidades tipo Ostrogradsky es la teoría de Horndeski, es decir, es la teoría escalar tensorial cuyas ecuaciones de campo son a lo más de segundo orden y cuya Lagrangiana depende tanto de la métrica como de un campo escalar  $\phi$ . La acción de Horndeski es la única que, de acuerdo al teorema de Horndeski [58], determina la teoría cuatro dimensional, covariante, más general del tipo escalar-tensorial la cual, después de variarla, nos da ecuaciones de campo de segundo orden [55].

La acción de Horndeski viene dada por

$$S_H[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i + S_{\text{matt}}, \quad (95)$$

en donde  $S_{\text{matt}}$  es la acción de materia y

$$\mathcal{L}_2 = G_2(X, \phi), \quad (96)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(X, \phi) \square \phi, \quad (97)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(X, \phi) R - 2G_{4,X}(X, \phi) [(\square \phi)^2 - \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}], \quad (98)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(X, \phi) G_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} - \frac{1}{6} G_{5,X}(X, \phi) [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi) \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + 2\phi_{\alpha}^{\mu} \phi_{\beta}^{\alpha} \phi_{\mu}^{\beta}], \quad (99)$$

en donde, las funciones  $G_i$  son funciones arbitrarias del campo escalar  $\phi$  y de su parte cinética  $X = -\frac{1}{2} \nabla^{\mu} \phi \nabla_{\mu} \phi$ , y en donde hemos usado la notación  $\phi_{\mu} = \nabla_{\mu} \phi$  y  $\phi_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi$ .

Cuando se dice que es la teoría más general es porque cualquier otra teoría escalar-tensorial, cuyas ecuaciones de campo sean a lo más de segundo orden, se puede expresar con la acción de

Horndeski [59], por ejemplo, si se toman

$$G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{1}{16\pi}, \quad G_5 = 0, \quad (100)$$

se obtiene la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi} + G_2(X, \phi) \right] + S_m, \quad (101)$$

que corresponde a modelos de k-esencia, es decir, Relatividad General con un campo escalar en donde se consideran términos no lineales en la parte cinética del campo escalar, los cuales sirven para explicar de manera natural la energía oscura y también para explicar inflación sin necesidad de considerar un potencial dependiente del campo escalar en la acción [60][61], y en particular, los modelos de quintaesencia, que es un mecanismo similar a la inflación con slow-rolling para explicar la energía oscura [62], se recuperan tomando  $G_2 = X - V(\phi)$ .

Otro ejemplo de importancia es la teoría de Brans-Dicke la cual se recupera de la teoría de Horndeski al tomar

$$G_2 = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega}{\phi} X - V(\phi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{1}{16\pi} \phi, \quad G_5 = 0. \quad (102)$$

Los galileones covariantes son un ejemplo de particular interés dentro de la teoría de Horndeski [59] [63], la cual se recupera al considerar

$$G_2 = \beta_2 X - m^3 \phi, \quad G_3 = \beta_3 X, \quad G_4 = \frac{1}{16\pi} + \beta_4 X^2, \quad G_5 = \beta_5 X^2. \quad (103)$$

Este modelo permite describir a un universo en expansión acelerada sin la necesidad de introducir ningún tipo de constante cosmológica a las ecuaciones además de estar en total acuerdo con las observaciones del fondo cósmico de microondas (CMB), las oscilaciones acústicas de bariones y con las mediciones locales de  $H_0$  [63].

Otros modelos se pueden obtener a partir de la teoría de Horndeski, entre ellos se puede señalar la teoría de derivadas acopladas, Gauss-Bonnet,  $f(\mathcal{G})$ , etcétera, en donde un resumen con discusión de estas a partir de Horndeski se puede encontrar en [59].

Entre todas las teorías que se pueden obtener a partir de la teoría de Horndeski nos enfocaremos en hablar con un poco más de profundidad sobre las teorías  $f(R)$ .

## 3.2. $f(R)$ como un caso importante de Horndeski

### 3.2.1. La acción de $f(R)$

Las teorías  $f(R)$  consideran dentro de la acción de Einstein-Hilbert (16), en lugar de una funcional lineal  $f(R) = R$  como lo hace Relatividad General, una funcional general de  $R$ . La acción para las teorías  $f(R)$  se puede obtener a partir de Horndeski al tomar

$$G_2 = -\frac{1}{16\pi} [Rf_R(R) - f(R)], \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{1}{16\pi} f_R(R), \quad G_5 = 0, \quad (104)$$

y de esta forma, la acción es

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_{\text{matt}}, \quad (105)$$



con  $\kappa = 8\pi$  y  $f_R = \frac{df}{dR}$ . De acuerdo a [12], la importancia de  $f(R)$  es que logra recuperar resultados de Relatividad General en regiones con curvatura muy alta y a la vez logra resolver problemas a escalas cosmológicas, con las desventaja de estar en desacuerdo con los análisis Post-Newtonianos.

### 3.2.2. Las ecuaciones de campo en $f(R)$

Para obtener las ecuaciones de campo procedemos como siempre, es decir, calculando la variación de (105) respecto a la métrica e igualando a cero, de esta forma

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta [\sqrt{-g}f(R)] + \delta S_{\text{matt}} = 0, \quad (106)$$

en donde

$$\delta [\sqrt{-g}f(R)] = (\delta\sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} (\delta f(R)). \quad (107)$$

Pero, de B.2.1 vemos que

$$\delta [\sqrt{-g}f(R)] = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} f(R) + f_R(R)\delta R \right], \quad (108)$$

con  $f_R = \frac{d}{dR}f$ . Por otro lado, dado que  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ , entonces

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (109)$$

y otra vez, usando la última identidad de B.2.1 esto es

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu}, \quad (110)$$

por lo tanto, la primer variación nos queda como

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f_R(R)R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} f_R(R) [-\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu}] + 2\kappa\delta S_{\text{matt}}. \quad (111)$$

Por otro lado, integrando por partes la segunda integral de (112) se tiene

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} f_R(R) (-\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu}) &\stackrel{\text{por partes}}{=} \int d^4x \nabla_\mu [\sqrt{-g}f_R(R)] (\nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - g_{\alpha\beta}\nabla^\mu \delta g^{\alpha\beta}) \\ &\stackrel{\text{por partes}}{=} \int d^4x \nabla^\rho \nabla_\rho [\sqrt{-g}f_R(R)] g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - \int d^4x g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla_\sigma [\sqrt{-g}f_R(R)] \delta g^{\sigma\nu}, \end{aligned} \quad (112)$$

de esta forma, se tiene que

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (113)$$

$$+ \int d^4x [g_{\mu\nu}\nabla^\rho \nabla_\rho (\sqrt{-g}f_R(R)) - g_{\mu\nu}\nabla^\mu \nabla_\sigma (\sqrt{-g}f_R(R))] \delta g^{\sigma\nu} + 2\kappa\delta S_{\text{matt}}, \quad (114)$$

y por lo tanto, del lema fundamental del cálculo de variaciones obtenemos

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) = \nabla_\mu \nabla_\nu f_R(R) - g_{\mu\nu}\square f_R(R) + \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (115)$$

Estas son las ecuaciones de campo en  $f(R)$ , sin embargo es posible reescribir estas ecuaciones en una forma más familiar, con el tensor de Einstein del lado izquierdo de las ecuaciones, para ello basta agregar un cero de la forma  $\frac{f_R(R)}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{f_R(R)}{2}g_{\mu\nu}R$ . Así, se obtiene que

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{f_R(R)} \left\{ \nabla_\mu \nabla_\nu f_R(R) - g_{\mu\nu}\square f_R(R) + g_{\mu\nu} \left[ \frac{f(R) - f_R(R)R}{2} \right] \right\} + \frac{\kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}}{f_R(R)}. \quad (116)$$

Esta forma de escribir las ecuaciones de campo para  $f(R)$  es más familiar a las ecuaciones de campo de Relatividad General, sin embargo vale la pena volverlas a reescribir considerando que al tomar la traza de (115) se obtiene

$$f_R(R)R - 2f(R) + 3\square f_R(R) = \kappa\mathcal{T}, \quad (117)$$

de donde, despejando  $\square f_R(R)$  tenemos

$$\square f_R(R) = \frac{1}{3}[\kappa\mathcal{T} - f_R(R)R + 2f(R)]. \quad (118)$$

Por último, vemos que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu f_R(R) &= \nabla_\mu [f_{RR}(R)\partial_\nu R] = \partial_\mu [f_{RR}(R)\partial_\nu R] - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda f_{RR}(R)\partial_\lambda R \\ &= f_{RRR}(R)(\partial_\mu R)(\partial_\nu R) + f_{RR}(R)\partial_\mu \partial_\nu R - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda f_{RR}(R)\partial_\lambda R \\ &= f_{RRR}(R)(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) + f_{RR}\nabla_\mu \nabla_\nu R, \end{aligned} \quad (119)$$

de esta forma, ingresando (118) y (119) en (116) obtenemos que

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R(R)} \left[ f_{RRR}(R)(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R) + f_{RR}(R)\nabla_\mu \nabla_\nu R - \frac{g_{\mu\nu}}{6} \{Rf_R(R) + f(R) + 2\kappa\mathcal{T}\} + \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu} \right], \quad (120)$$

que constituyen la forma más general de las ecuaciones de campo en  $f(R)$ .

### 3.3. Formalismo de Palatini en $f(R)$

#### 3.3.1. Transformaciones conformes

Formalmente, una transformación conforme entre dos variedades pseudoriemannianas se define como [64]

**Definición 3.1.** Sean  $(M, g_{\mu\nu})$  y  $(N, h_{\mu\nu})$  dos variedades pseudoriemannianas suaves. Decimos que  $F : M \rightarrow N$  es una *transformación conforme* entre  $M$  y  $N$  si  $\forall X, Y \in T_p(M)$  se satisface que

$$h_{F_p}(dF_p(X), dF_p(Y)) = \alpha^2 g_p(X, Y)$$

con  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  suave.

Sin embargo, para términos prácticos el reescalamiento puntual de la métrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \quad (121)$$

con el *factor conforme*  $\Omega(x)$  una función distinta de cero en todo su dominio y regular, es lo que llamaremos transformación conforme. Las transformaciones conformes preservan la estructura causal de la variedad, es decir, los intervalos luminosos se preservan y lo único que cambian de los intervalos espaciales y temporales es su norma. Bajo transformaciones conformes, la inversa de la métrica y sus determinantes se transforman por

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}g^{\mu\nu} \text{ y } \tilde{g} = \Omega^{2n}g, \quad (122)$$

con  $n$  la dimensión de la variedad.

En general las componentes de un tensor no son invariantes antes transformaciones conformes, sin embargo existe un tensor que es naturalmente invariante bajo transformaciones conformes [17], es el tensor de Weyl cuyas componentes están dadas por [9]

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{n-2} (g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R, \quad (123)$$

el cual, como mencionamos anteriormente, satisface  $\tilde{C}_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{\rho\sigma\mu\nu}$ . En cuatro dimensiones, el escalar de Ricci bajo transformaciones conformes es

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \left[ R - 6\frac{\square\Omega}{\Omega} \right]. \quad (124)$$

Para más identidades útiles de cómo se transforman ciertos tensores importantes como el tensor de Ricci, el tensor de energía momento, etcétera, bajo transformaciones conformes, se puede ver [17].

### 3.3.2. Variación en el formalismo de Palatini

Consideramos entonces que la conexión  $\Gamma$  es un campo independiente de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , de esta forma, el escalar de Ricci es  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(\mu\nu)}g^{\mu\nu}$  con  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma)$ . Así, tomando la variación de (105) respecto a la métrica e igualando a cero se obtiene que

$$0 = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})f(\mathcal{R}) + \sqrt{-g}\delta f(\mathcal{R})] + \delta S_{\text{matt}} \quad (125)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}f(\mathcal{R}) + f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right] + \delta S_{\text{matt}}, \quad (126)$$

y por lo tanto, del lema fundamental del cálculo de variaciones, se obtienen las ecuaciones de campo para  $f(R)$  en el formalismo de Palatini

$$f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}f(\mathcal{R}) = \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (127)$$

Por otro lado, al tomar la primer variación respecto a  $\Gamma$ , siguiendo el mismo procedimiento que en 1.3.3, se obtiene

$$\nabla_{\lambda}^{\Gamma} [\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})g^{\mu\nu}] = 0. \quad (128)$$

Con base en esta última ecuación, vemos que si definimos una nueva métrica  $h_{\mu\nu}$  tal que

$$\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})g^{\mu\nu} = \sqrt{-h}h^{\mu\nu}, \quad (129)$$

entonces de (122) vemos que  $h_{\mu\nu}$  se relaciona con  $g_{\mu\nu}$  a través de la transformación conforme

$$h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}, \quad (130)$$

y por lo tanto, de (128) vemos que  $\Gamma$  es la conexión de Levi-Civita de la métrica en el marco conforme  $h_{\mu\nu}$  con lo cual  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}(\Gamma) = \mathcal{R}_{\mu\nu}(h)$ .

A diferencia de lo que sucede en Relatividad General, vemos que en  $f(R)$  el formalismo de Palatini no es igual al formalismo métrico de la teoría, sin embargo estos se encuentran relacionados a través de una transformación conforme, lo cual nos permite estudiar aspectos de la teoría en cierto formalismo y poder mapear estos resultados al marco conforme. Vale la pena mencionar que existe una discusión la cual no será abordada aquí sobre cuál es el marco *físicamente* correcto para trabajar, es decir, si el marco conforme, también conocido como *marco de Einstein*, es el que tiene sentido físico, o es el marco no conforme, también conocido como *marco de Jordan*, el que lo tiene [17].

### 3.4. Equivalencia entre Brans-Dicke y $f(R)$

Para ver la equivalencia entre Brans-Dicke y  $f(R)$  introducimos un campo escalar  $\phi$  auxiliar en la acción (105) tal que

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\psi(\phi)R - V(\phi)] + S_{\text{matt}}, \quad (131)$$

en donde

$$\psi(\phi) = F'(\phi) \text{ y } V(\phi) = \phi F'(\phi) - F(\phi), \quad (132)$$

con  $F(\phi)$  una función arbitraria del campo  $\phi$  tal que  $F' = \frac{dF}{d\phi}$  y  $F'' \neq 0$ .

De esta forma, al hacer la variación de (131) respecto a  $\phi$  e igualar a cero obtenemos que

$$R\psi'(\phi) - V'(\phi) = (R - \phi)F''(\phi) = 0, \quad (133)$$

y como  $F'' \neq 0$  entonces  $\phi = R$ , de donde vemos directamente que la acción (131) es igual a la acción de  $f(R)$  (105) con el campo satisfaciendo  $\phi = R$ . La acción (131) tiene la forma

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \psi R - \frac{\omega}{2} \nabla^\mu \psi \nabla_\mu \psi - U(\psi) \right] + S_{\text{matt}},$$

con  $\omega = 0$  la cual es la acción de Brans-Dicke con  $\psi$  siendo ahora el campo de Brans-Dicke con potencial  $U$ . Por lo tanto, vemos que el formalismo métrico de  $f(R)$  es igual a la teoría de Brans-Dicke con parámetro  $\omega = 0$  y campo  $\psi$ . Este resultado no solamente se limita al formalismo métrico de  $f(R)$  sino que también se extiende al formalismo de Palatini del mismo, pues al proponer ahora un campo  $\chi$  en la acción de tal forma que

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(\mathcal{R} - \chi)] + S_{\text{matt}}, \quad (134)$$

al hacer la variación respecto a  $\chi$  se obtiene que  $\chi = \mathcal{R}$ , de donde la acción de  $f(R)$  en el formalismo de Palatini se recupera, sin embargo, el análisis hecho para el formalismo métrico no funciona aquí, pues tenemos todo en términos del tensor de Ricci  $\mathcal{R}$  que depende de la conexión  $\Gamma$  y para poder mostrar la equivalencia entre la versión de Palatini de  $f(R)$  con Brans-Dicke debemos tener en la acción al tensor de Ricci  $R$  que depende de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y no de la conexión  $\Gamma$  como un campo separado.

Para esto, hacemos la transformación conforme

$$h_{\mu\nu} = f'(\mathcal{R})g_{\mu\nu}, \quad (135)$$

la cual, según vimos anteriormente, nos implica que  $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}(\Gamma) = \mathcal{R}_{\mu\nu}(h)$ . De esta forma, podemos calcular usando (124) el escalar de Ricci en el formalismo de Palatini para poder ver la equivalencia con Brans-Dicke. Sin embargo hay que hacer una observación,  $\mathcal{R}$  no es el escalar de Ricci del marco conforme con la métrica (135) pues este último es  $\tilde{R} = h^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}$  mientras que el escalar de Ricci en Palatini, que es el que debemos de calcular, tiene la forma  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}$ , por lo tanto, de (135), la relación entre estos para este caso es  $\mathcal{R} = \phi\tilde{R}$  con  $\phi = f'(\mathcal{R})$ . De esta forma, usando (124) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{1}{\phi} \left[ R - 6 \frac{\square\sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi}} \right] = \frac{1}{\phi} \left[ R - 6 \left( \frac{1}{\sqrt{\phi}} \nabla^\beta \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\phi}} \nabla_\beta \phi \right\} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\phi} \left[ R - \frac{6}{\sqrt{\phi}} \left( \frac{\square\phi}{2\sqrt{\phi}} - \frac{1}{4\phi^{3/2}} \nabla^\beta \phi \nabla_\beta \phi \right) \right] = \frac{1}{\phi} \left[ R - \frac{3\square\phi}{\phi} + \frac{3}{2\phi^2} \nabla^\beta \phi \nabla_\beta \phi \right], \end{aligned} \quad (136)$$

por lo tanto

$$\mathcal{R} = R - 3 \frac{\square\phi}{\phi} + \frac{3}{2\phi^2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi. \quad (137)$$

Y de esta forma, al integrar la divergencia total  $\square\phi$ , obtenemos que la acción (134) queda escrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R + \frac{3}{2\phi} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - V(\phi) \right] + S_{\text{matt}}, \quad (138)$$

con  $V(\phi) = \phi\chi(\phi) - f(\chi(\phi))$ . La acción (138) es de la forma de la acción de Brans-Dicke (60) con el parámetro  $\omega = -\frac{3}{2}$  y el campo de Brans-Dicke dado por  $\phi = f'(\mathcal{R})$ . De esta forma vemos que en ambas formulaciones, tanto en la métrica como en la de Palatini,  $f(R)$  es equivalente a Brans-Dicke con cierto valor del parámetro  $\omega$ .

## 3.5. Ecuaciones de Friedmann en $f(R)$

### 3.5.1. Dedución de las ecuaciones

Ya que se han sentado las bases de las teorías  $f(R)$  como un caso importante de la teoría de Horndeski y que hemos visto como se ve la teoría en distintos formalismos y cómo esta se relaciona con Brans-Dicke, es hora de ver la cosmología que nos provee la teoría. Considerando la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (32) vamos a calcular de manera explícita las ecuaciones de campo de  $f(R)$  (120) para el caso de un universo espacialmente plano  $k = 0$

[14]. De (118) podemos obtener una ecuación diferencial de segundo orden para el escalar de Ricci. Calculando explícitamente  $\square f_R(R)$  tenemos

$$\begin{aligned}\square f_R(R) &= \nabla^\mu \nabla_\mu f_R(R) = \nabla^\mu (f_{RR}(R) \nabla_\mu R) = \nabla^\mu (f_R R(R)) \nabla_\mu R + f_{RR} \square R \\ &= f_{RRR}(R) (\nabla^\mu R) (\nabla_\mu R) + f_{RR} \square R.\end{aligned}\quad (139)$$

Pero, de (37) vemos que este solamente depende del tiempo, por lo que

$$(\nabla^\mu R)(\nabla_\mu R) = -\dot{R}^2, \quad (140)$$

y también

$$\nabla^\mu \nabla_\mu R = \nabla^\mu (\partial_\mu R) = g^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 R - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda R = -\ddot{R} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda R, \quad (141)$$

pero, de (34) vemos que

$$-g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda R = -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \dot{R} = -(g^{11} \Gamma_{11}^0 + g^{22} \Gamma_{22}^0 + g^{33} \Gamma_{33}^0) = -\dot{R} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \equiv -3\dot{R}H. \quad (142)$$

Por lo tanto, obtenemos de manera explícita que

$$\square f_R(R) = -f_{RRR} \dot{R}^2 - f_{RR} \ddot{R} - 3f_{RR} \dot{R}H. \quad (143)$$

Así, sustituyendo (143) en (118) y despejando  $\ddot{R}$  obtenemos

$$\ddot{R} = -3\dot{R}H - \frac{1}{3f_{RR}} \left[ 3f_{RRR} \dot{R}^2 + \kappa \mathcal{T} - f_R R + 2f \right], \quad (144)$$

en donde, al considerar un fluido perfecto,  $\mathcal{T} = -\rho + 3P$ .

La primer ecuación de Friedmann la obtenemos al tomar la componente  $G_{00}$  de (120), en donde, del lado izquierdo tenemos que

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = -3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \equiv 3H^2, \quad (145)$$

y del lado derecho, usando (144) se tiene

$$\begin{aligned}& \frac{1}{f_R} \left[ f_{RRR} \dot{R}^2 + f_{RR} \ddot{R} + \frac{1}{6} R f_R + \frac{1}{6} f + \frac{\kappa \mathcal{T}}{3} + \kappa \mathcal{T}_{00} \right] \\ & \stackrel{(144)}{=} \frac{1}{f_R} \left[ f_{RRR} \dot{R}^2 - 3f_{RR} \dot{R}H - f_{RRR} \dot{R}^2 - \frac{\kappa \mathcal{T}}{3} + \frac{R f_R}{3} - \frac{2}{3} f + \frac{1}{6} R f_R + \frac{1}{6} f + \frac{\kappa \mathcal{T}}{3} + \kappa \mathcal{T}_{00} \right] \\ & = \frac{1}{f_R} \left[ -3f_{RR} \dot{R}H + \frac{1}{2} R f_R - \frac{1}{2} f + \kappa \mathcal{T}_{00} \right]\end{aligned}$$

y como  $\mathcal{T}_{00} = \rho$ , obtenemos que la primer ecuación de Friedmann en  $f(R)$  es

$$H^2 = -\frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} H \dot{R} + \frac{1}{6} (f - f_R R) - \frac{\kappa \rho}{3} \right]. \quad (146)$$

Para obtener la segunda ecuación de Friedmann en  $f(R)$  se puede tomar cualquiera de las componentes espaciales  $G_{ii}$  de (120), en particular, si tomamos  $G_{11}$  se tiene

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_1(\partial_1 R) - \frac{g_{11}}{6} (Rf_R + f + 2\kappa\mathcal{T}) + \kappa\mathcal{T}_{11} \right] \\ &= -\frac{g_{11}}{6}R + \frac{1}{f_R} \left[ -f_{RR}\Gamma_{11}^0\dot{R} - \frac{g_{11}}{6} (f + 2\kappa\mathcal{T}) + \kappa\mathcal{T}_{11} \right] \\ \Rightarrow R_{11} - \frac{1}{3}g_{11}R &= \frac{1}{f_R} \left[ -f_{RR}a\dot{a}\dot{R} - \frac{a^2}{6} (f + 2\kappa\mathcal{T}) + \kappa\mathcal{T}_{11} \right], \end{aligned} \quad (147)$$

pero de (37) tenemos

$$R_{11} - \frac{1}{3}R = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 2a\dot{a} - 2\dot{a}^2 = -a\ddot{a}, \quad (148)$$

por lo tanto, de (147) obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} + \frac{f}{6} - \frac{\kappa\rho}{3} \right], \quad (149)$$

reescribiendo en términos de  $H$  obtenemos que la segunda ecuación de Friedmann en  $f(R)$  es

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR}H\dot{R} + \frac{f}{6} - \frac{\kappa\rho}{3} \right]. \quad (150)$$

La ecuación (150) se puede reescribir para que aparezca la presión de manera explícita, usando (144) y sustituyendo en (150) se obtiene

$$-\left(3H^2 + 2\dot{H}\right) f_R = \kappa P + \frac{1}{2} (f - Rf_R) + \dot{R}^2 f_{RRR} + 2H\dot{R}f_{RR} + \ddot{R}f_{RR}. \quad (151)$$

### 3.5.2. Energía oscura geométrica

Las ecuaciones de Friedmann en  $f(R)$  se pueden reescribir de tal forma que, en un símil con el caso plano de Relatividad General, los términos extras debidos a derivadas de  $f(R)$  se puedan interpretar como un fluido extra en las ecuaciones. Para ello buscamos escribir la primera ecuación de Friedmann como

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} (\rho + \rho_X) = \frac{\kappa}{3} \rho_{\text{tot}}, \quad (152)$$

de tal forma que el fluido extra  $\rho_X$  debido a las derivadas de  $f(R)$  queda determinado por

$$\rho_X \equiv \frac{3H^2}{\kappa} - \rho. \quad (153)$$

Así, usando (146) y sustituyendo en (153) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_X &= -\frac{1}{\kappa f_R} \left[ 3f_{RR}H\dot{R} + \frac{1}{2} (f - f_R R) - \kappa\rho \right] - \rho \\ &= -\frac{1}{\kappa f_R} \left[ 3f_{RR}H\dot{R} + \frac{1}{2} (f - f_R R) - \kappa\rho(1 - f_R) \right], \end{aligned} \quad (154)$$

la cual corresponde a la densidad de energía del fluido extra.

En el mismo espíritu buscamos ahora escribir la segunda ecuación de Friedmann en  $f(R)$  como

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{6} [\rho + \rho_X + 3(P + P_X)], \quad (155)$$

para ello sustituimos (153) en (155), así

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{6} \left[ \frac{3}{\kappa} H^2 + 3(P + P_X) \right], \quad (156)$$

y entonces, despejando  $P_X$  se tiene que

$$P_X = -\frac{1}{\kappa} \left( 2\dot{H} + 3H^2 + \kappa P \right). \quad (157)$$

Sustituyendo (146) y (150) en (156) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} H \dot{R} + \frac{f}{6} + \frac{\kappa T}{3} - \kappa P \right] &= -\frac{\kappa}{6} \left( -\frac{3}{\kappa f_R} \left[ f_{RR} H \dot{R} + \frac{1}{6} (f - f_R R) - \frac{\kappa \rho}{3} \right] + 3P + 3P_X \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\kappa f_R} \left[ -6f_{RR} H \dot{R} - f - 2\kappa T + 6\kappa P + 3f_{RR} H \dot{R} + \frac{1}{2} (f - f_R R) - \kappa \rho \right] &= 3P + 3P_X, \end{aligned}$$

por lo tanto, la presión del fluido extra queda dada por

$$P_X = -\frac{1}{3\kappa f_R} \left[ 3f_{RR} H \dot{R} + \frac{1}{2} (f + f_R R) - \kappa (\rho - 3P f_R) \right], \quad (158)$$

la cual, dado que el escalar de Ricci es (37) en la métrica FLRW, se puede reescribir como

$$P_X = -\frac{1}{\kappa} \left( \frac{R}{3} - 4H^2 + 3H^2 + \kappa P \right) = -\frac{1}{3\kappa} (R - 3H^2 + 3\kappa P), \quad (159)$$

y de esta forma obtenemos una *ecuación de estado* para el fluido extra, la cual usando (159), (153), (154) y (158), queda dada por

$$\omega_X = \frac{P_X}{\rho_X} = \frac{3H^2 - 3\kappa P - R}{3(3H^2 - \kappa\rho)} = \frac{\frac{1}{2}(f + f_R R) - \kappa(\rho - 3P f_R) + 3f_{RR} H \dot{R}}{\frac{1}{2}(f - f_R R) - \kappa\rho(1 - f_R) + 3f_{RR} H \dot{R}}. \quad (160)$$

Este fluido extra, bajo ciertas formas de la funcional  $f(R)$ , puede explicar y reproducir la aceleración cósmica a tiempo tardío, es decir, la energía oscura, con bastante éxito [65][14], es por ello que al fluido extra  $\rho_X$  se le denomina como *energía oscura geométrica*, pues juega el papel de la energía oscura como en Relatividad General pero que en lugar de depender de una constante cosmológica, depende solamente de elementos geométricos, en particular, del escalar de Ricci.

### 3.6. Soluciones a las ecuaciones de Friedmann en $f(R)$

En general, encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones de campo (120) es difícil, sin embargo algunos autores han encontrado la forma de obtener, en algunos casos, soluciones analíticas para el caso plano. En [66] se considera un universo vacío y se propone que

$$f(R) = f_0 R^n, \quad a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^\alpha, \quad (161)$$



en donde, al insertar este ansatz en las ecuaciones de campo (120) se obtiene que

$$\alpha = 2, \quad n = -1, 3/2. \quad (162)$$

En donde ambos casos llevan a que el factor de desaceleración sea  $q_0 = -1/2$ , y además de que el valor de  $n = 3/2$  resulta de particular importancia pues en el marco conforme  $\tilde{g}_{\alpha\beta} = f'(R)g_{\alpha\beta}$  se induce un modelo de quintaesencia con potencial exponencial, donde el campo escalar es  $\phi = \sqrt{3/2} \ln f'(R)$  y en el cual, en este marco conforme, la solución al factor de escala es

$$a(t) = \left[ \sum_{i=0}^4 c_i t^i \right]^{1/2}. \quad (163)$$

Otros procedimientos sin dar una forma específica a  $a(t)$  han sido hechos, por ejemplo, en [67], el procedimiento a seguir es considerar solamente las regiones en que el parámetro de hubble es una función monótona, de esta forma podemos escribir  $t = t(H)$ , y dado que el escalar de Ricci es (37), entonces se induce la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} = \dot{H} \frac{d}{dH} = \left( \frac{R}{6} - 2H^2 \right) \frac{d}{dH}, \quad (164)$$

y por lo tanto, la primer ecuación de Friedmann queda como

$$3H \left( \frac{R}{6} - 2H^2 \right) f''(R) \frac{dR}{dH} = \frac{1}{2} (f'(R)R - f(R)) - 3H^2 f'(R), \quad (165)$$

y de esta forma, proponiendo un modelo de  $f(R)$  es posible encontrar solución para el factor de escala  $a(t)$ , por ejemplo, al proponer que  $f(R) = f_0 R^2$ , la ecuación (165) se convierte en

$$(R - 12H^2) \left( H \frac{dR}{dH} - \frac{1}{2} R \right) = 0, \quad (166)$$

en donde, si  $\dot{H} \neq 0$  se reduce aún más a

$$H \frac{dR}{dH} = \frac{1}{2} R, \quad (167)$$

cuya solución es

$$R = R_0 \left( \frac{H}{H_0} \right)^{1/2}, \quad (168)$$

en donde  $R(H_0) = R_0$ . Por lo que, la ecuación (37) queda

$$\frac{dH}{dt} = \frac{R_0}{6} \left( \frac{H}{H_0} \right)^{1/2} - 2H^2, \quad (169)$$

la cual, al resolver para  $H(t)$  y luego para  $a(t)$  se obtiene que

$$H = H_0 \left[ \chi - (\chi - 1) \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \right]^{2/3}, \quad (170)$$

$$a(H) = a_0 \left[ \frac{\chi - (H/H_0)^{3/2}}{\chi - 1} \right]^{-1/3}, \quad (171)$$

con  $\chi = R_0/(12H_0^2)$  y tal que la relación implícita entre  $H$  y  $t$  queda dada por

$$\begin{aligned}
H_0(t - t_0) = & -\frac{1}{6\chi^{2/3}} \ln \frac{(\chi^{1/3} - (H/H_0)^{1/2})^2}{\chi^{2/3} + \chi^{1/3}(H/H_0)^{1/2} + (H/H_0)} \\
& + \frac{1}{\chi^{2/3}\sqrt{3}} \arctan \frac{2(H/H_0)^{1/2} + \chi^{1/3}}{\chi^{1/3}\sqrt{3}} \\
& + \frac{1}{6\chi^{2/3}} \ln \frac{(\chi^{1/3} - 1)^2}{\chi^{2/3} + \chi^{1/3} + 1} - \frac{1}{\chi^{2/3}\sqrt{3}} \arctan \frac{2 + \chi^{1/3}}{\chi^{1/3}\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{172}$$

Otras soluciones analíticas se han encontrado, por ejemplo, para estudiar inflación en el modelo de Starobinsky [68], introduciendo un campo escalar [69][70], a través de simetrías de Nöether [17], etcétera. También ha habido un enorme esfuerzo en obtener soluciones numéricas para poder estudiar la ecuación de estado de la energía oscura geométrica, entre ellos vale la pena resaltar [65] en donde, al considerar modelos cosmológicamente viables de  $f(R)$  se encontró una forma parametrizada de la ecuación de estado de la energía oscura.

## 4. Gravedad Teleparalela

### 4.1. La tétrada

#### 4.1.1. Justificación a partir de Relatividad General

De acuerdo a [8], para una variedad diferenciable  $(M, \Phi)$ , existe un conjunto de coordenadas locales, llamadas *coordenadas normales de Riemann*, las cuales hacen que en cada punto  $p \in M$  en el que están definidas, los coeficientes de la conexión satisfagan

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha = 0. \quad (173)$$

Más aún, si la variedad es pseudoriemanniana, entonces, de manera local en las coordenadas normales de Riemann, la métrica toma la forma [71]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3), \quad (174)$$

$\forall p \in M$  con  $\eta$  la métrica de Minkowski.

En el caso de Relatividad General se trabaja con la conexión de Levi-Civita, por lo cual (173) es igual a  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ , y por lo tanto, en las coordenadas normales de Riemann

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3), \quad (175)$$

es decir, que la variedad es localmente plana. Esto no es más que el Principio de Equivalencia de Einstein, el cual como sabemos se cumple en Relatividad General, por lo cual, denotando  $\{\xi_x^a\}$  al conjunto de coordenadas normales de Riemann fijas para cada punto  $p \in M$  y  $\{x^\mu\}$  al conjunto de coordenadas de la variedad  $M$  inducidas por una carta  $\varphi \in \Phi$ , entonces los componentes de la métrica pseudoriemanniana, con la que se describe el espacio-tiempo en Relatividad General, en las coordenadas  $\{x^\mu\}$  se relaciona con la métrica plana dada localmente por las coordenadas normales de Riemann en  $p$  a través de la igualdad [3]

$$g_{\mu\nu}(p) = e_\mu^a(p)e_\nu^b(p)\eta_{ab}, \quad (176)$$

en donde

$$e_\mu^a(p) = \left( \frac{\partial \xi_x^a(x)}{\partial x^\mu} \right)_{x=p}. \quad (177)$$

Dado que el conjunto de coordenadas normales  $\{\xi_x^a\}$  está fijo, es decir, no depende del conjunto de coordenadas  $\{x^\mu\}$  determinado por la carta  $\phi$  del atlas  $\Phi$ , entonces al hacer un cambio de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$  relacionadas a través de difeomorfismos, tenemos que

$$e_{\mu'}^a = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} e_\mu^a, \quad (178)$$

esto es, ante cambio de coordenadas,  $e_\mu^a$  se transforma como componentes de una 1-forma y no como un tensor de rango  $\left(\frac{1}{1}\right)$ . Por otro lado, dado que las coordenadas normales  $\{\xi_x^a\}$  son localmente inerciales, podemos aplicarles una transformación de Lorentz  $\Lambda_a^{a'}$  tal que el nuevo sistema de coordenadas sigue siendo inercial y por lo tanto todo lo anteriormente descrito se

sigue satisfaciendo, por lo cual observamos que ante transformaciones de Lorentz  $\Lambda_a^{a'}$  tenemos que

$$e_\mu^{a'} = \Lambda_a^{a'} e_\mu^a, \quad (179)$$

es decir, se transforma como las componentes de un vector a través de transformaciones de Lorentz. A los cuatro vectores lorentzianos cuyas componentes son  $e_\mu^a$ , con  $a = 0, 1, 2, 3$ , se les conoce como *tétrada*, los cuales surgen de manera natural en Relatividad General a partir del Principio de Equivalencia.

La anterior discusión nos da una intuición física de qué es la tétrada, sin embargo esta discusión está basada totalmente en una conexión simétrica como la de Levi-Civita para poder usar el Principio de Equivalencia y seguir la discusión, por lo cual es necesario hacer una presentación más rigurosa de la tétrada con el fin de llevarla a teorías que no tengan una conexión simétrica, lo cual se logra a partir de la discusión sobre *marcos ortonormales*, también llamadas *bases ortonormales*.

#### 4.1.2. Marcos ortonormales

Dado un conjunto de coordenadas  $\{x^\mu\}$  sobre una variedad diferenciable  $(M, \Phi)$ , estas nos proveen de una base tanto para el espacio  $\mathcal{X}(M)$ , ver apéndice A.17, como para su espacio dual  $\mathcal{X}^*(M)$  dadas por  $\{\partial_\mu\}$  y  $\{dx^\mu\}$ , es decir, cualquier vector  $V \in \mathcal{X}(M)$ <sup>7</sup> y cualquier 1-forma  $\lambda \in \mathcal{X}^*(M)$  se pueden escribir como  $V = V^\mu \partial_\mu$  y  $\lambda = \lambda_\mu dx^\mu$  respectivamente. Sin embargo, las bases  $\{\partial_\mu\}$  y  $\{dx^\mu\}$  no son únicas, en general si consideramos  $\{e_\mu^a(p)\}$  una matriz invertible  $\forall p \in M$ , entonces podemos construir otra base para, por ejemplo, el espacio de 1-formas dada por

$$e^a := e_\mu^a dx^\mu. \quad (180)$$

En cuatro dimensiones, a las cuatro 1-formas  $e^a$  dadas por (180) son la llamadas *tétradas* las cuales constituyen una nueva base para el espacio de 1-formas y que en general no es una base coordenada [72]. A partir de (180), como  $\{e_\mu^a\}$  es una matriz invertible, podemos encontrar la relación inversa y así poder describir a  $dx^\mu$  en términos de  $e^a$ , la cual directamente es

$$dx^\mu = e_a^\mu e^a, \quad (181)$$

en donde  $\{e_a^\mu\}$  es la inversa de  $\{e_\mu^a\}$ , es decir, se satisface que

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad \text{y} \quad e_b^\mu e_\mu^a = \delta_b^a. \quad (182)$$

Por lo cual, si  $A \in \mathcal{X}^*(M)$  entonces

$$A = A_\mu dx^\mu \stackrel{(181)}{=} A_\mu e_a^\mu e^a \equiv A_a e^a, \quad (183)$$

de donde, las componentes de  $A$  respecto a la tétrada están dadas por

$$A_a = A_\mu e_\mu^a. \quad (184)$$

---

<sup>7</sup>Formalmente  $V$  es un campo vectorial y  $\lambda$  es un campo de 1-formas, sin embargo nos referiremos a los campos vectoriales simplemente como vectores y a los campos de 1-formas como 1-formas para hacer la lectura y discusión más fácil de seguir.

El análisis anterior se puede llevar a cualquier tensor de rango  $\binom{m}{n}$ .

Análogamente podemos definir una base para  $\mathcal{X}(M)$  a través  $\{e_a^\mu\}$  dada por

$$E_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (185)$$

así, si  $V \in \mathcal{X}(M)$ , entonces

$$V = V^a E_a \quad \text{con} \quad V^a = e_a^\mu V^\mu. \quad (186)$$

Como mencionamos anteriormente, el caso más general es que la base  $\{E_a\}$  no sea una base coordenada, por lo cual estas satisfacen la regla de conmutación dada en el apéndice A.16, y por lo tanto las funciones de estructura son, en general, distintas de cero.

Un caso importante para analizar son las componentes del tensor métrico en términos de las tétradas, para ello consideramos el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu e^a e^b \equiv g_{ab} e^a e^b, \quad (187)$$

en donde las componentes del tensor métrico en la base de las tétradas se relacionan con los componentes del tensor métrico en la base coordenada por

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (188)$$

Dada una métrica  $g_{\mu\nu}$  existe una clase de tétradas las cuales diagonalizan a  $g_{\mu\nu}$  es decir, existe una clase de bases especiales  $\{e^a\}$  tales que las coordenadas del tensor métrico en esta base son iguales a las componentes de la métrica de Minkowski

$$g_{ab} = \eta_{ab} = g_{\mu\nu}(p) e_a^\mu(p) e_b^\nu(p), \quad (189)$$

para cada punto de la variedad  $p \in M$ .

Esta clase de bases son las llamadas *bases ortonormales* o *marcos ortonormales* [72], las cuales asocian un espacio abstracto de 1-formas  $e^a$  en cada punto  $p \in M$ , denotados por  $a, b, \dots$  con el espacio concreto de 1-formas del espacio-tiempo en el punto  $p$ , denotados por  $\mu, \nu, \dots$

Los marcos ortonormales no son únicos y dado dos diferentes marcos ortonormales estos están relacionados a través de una transformación de Lorentz. Sabemos que la métrica de Minkowski es invariante ante el grupo de Lorentz  $SO^+(1, 3)$ <sup>8</sup> [5] esto es

$$\eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\rho}^{\mu'} \Lambda_{\sigma}^{\nu'} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (190)$$

con  $\Lambda$  la transformación de Lorentz. Por lo que, si  $\{e_a^\mu\}$  es un marco ortonormal que lleva  $g_{\mu\nu}$  a  $\eta_{\mu\nu}$  y  $\{e_{a'}^\mu\}$  otro marco ortonormal que lleva  $g_{\mu\nu}$  a  $\eta_{\mu'\nu'}$  entonces

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab} = \eta_{a'b'} \Lambda_a^{a'} \Lambda_b^{b'} = g_{\mu\nu} e_{a'}^\mu \Lambda_a^{a'} e_{b'}^\nu \Lambda_b^{b'}, \quad (191)$$

de donde  $e_{a'}^\mu \Lambda_a^{a'} = e_a^\mu$  y  $e_{b'}^\nu \Lambda_b^{b'} = e_b^\nu$ , por lo tanto, la relación entre  $\{e_a^\mu\}$  y  $\{e_{a'}^\mu\}$  está dada a través de la transformación de Lorentz

$$e_{a'}^\mu = \Lambda_a^{a'} e_a^\mu. \quad (192)$$

---

<sup>8</sup>En general es invariante ante  $O(1, 3)$ .

Por otro lado, dado que el tensor métrico (189) no cambia respecto a cambios de coordenadas, se sigue de manera directa que

$$e^a_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} e_\mu. \quad (193)$$

De esta forma, vemos que los marcos ortonormales están relacionados a través de una transformación de Lorentz, y más aún, si  $\{e^\mu_a\}$  es un marco ortonormal este solamente sigue una regla de transformación bajo el grupo de Lorentz, de lo contrario dejaría de ser un marco ortonormal.

Con lo cual, dada una métrica  $g_{\mu\nu}$  no existe un único marco ortonormal que lleva  $g_{\mu\nu}$  a  $\eta_{ab}$  sino un conjunto de marcos ortonormales relacionados a través de transformaciones de Lorentz.

Al revés es diferente, un marco ortonormal determina de manera única a la métrica, pues si  $\{e^a\}$  es un marco ortonormal, entonces

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (194)$$

por lo tanto, las componentes de la métrica están determinados de manera unívoca por

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}. \quad (195)$$

De esta forma, dado que la métrica queda determinada unívocamente a partir del marco ortonormal, se puede elegir como variable dinámica en la descripción del espacio tiempo al marco ortonormal en lugar de la métrica con la diferencia de que ahora, a parte de pedir covariancia en los índices  $\mu, \nu, \dots$  etcétera, hay que pedir invariancia de Lorentz en los índices  $a, b, \dots$

Finalmente, de ahora en adelante cuando hablemos de tétradas nos referiremos a los marcos ortonormales pues estos son los que están en total acuerdo con la justificación a partir de Relatividad General que dimos anteriormente, y además siguiendo la jerga común en los textos de gravitación en los que a los componentes de un tensor se les llama simplemente tensores, aquí a las componentes de las tétradas (180) las llamaremos igualmente tétradas.

## 4.2. Estructuras matemáticas de Gravedad Teleparalela

### 4.2.1. El haz fibrado tangente

En Gravedad Teleparalela, al usar la tétrada como base de  $T_p M$ , los componentes de la métrica son localmente las de Minkowski, esto es, punto a punto, el espacio tangente es el espacio de Minkowski. Formalmente hablando, en Gravedad Teleparalela se trabaja sobre el *haz fibrado tangente*

$$TM = \left\{ (p, T_p M) \in M \times \bigcup_{p \in M} T_p M : X_p \in T_p M \right\}, \quad (196)$$

en donde  $M$  es el espacio-tiempo que sirve como variedad base del haz fibrado y, dada la estructura de espacio afín del espacio-tiempo de Minkowski, se hace la identificación de  $T_p M$  con el espacio de Minkowski como espacio vectorial con origen en  $p \in M$ , así el espacio de Minkowski es la fibra del haz. La idea básica consiste en trabajar en una variedad la cual localmente luce como el producto cruz entre el espacio-tiempo y el espacio de Minkowski pero que globalmente no es el producto cruz, para ello hay que parametrizar localmente a la fibra y es justo la parametrización de  $T_p M$  como espacio tangente en  $p$ , la que nos sirve en esta

descripción. Una discusión introductoria a haces fibrados se puede ver en [73]. De esta forma, el haz fibrado tangente tiene como coordenadas  $\psi = (x^\mu, x^a)$  en donde  $\{x^\mu\}$  son las coordenadas del espacio-tiempo en que estamos trabajando (la variedad base del haz) y  $\{x^a\}$  las coordenadas del espacio de Minkowski (la fibra del haz). Así, la métrica de la fibra y la métrica de la variedad base se relacionan a través de la tétrada por (195). De esta forma, dado que  $e^a = e_\mu^a dx^\mu$  y  $E_a = e_a^\mu \partial_\mu$  son bases para  $T_p^*M$  y  $T_pM$  respectivamente para todo  $p \in M$ , es que la variedad del espacio-tiempo se vuelve una variedad paralelizable [74] y que el concepto de paralelismo se vuelve global [75].

Por otro lado, vale la pena señalar que dado que  $\{x^\mu\}$  es base para el espacio tiempo y  $\{x^a\}$  para el espacio de Minkowski, entonces los tensores dependerán de los índices que en sus componentes aparezcan, por ejemplo,  $A_\mu$  es un escalar de Lorentz pero una 1-forma coordenada,  $A_a$  es un escalar coordenado pero una 1-forma de Lorentz,  $A_\mu^a$  es una 1-forma coordenada pero una vector lorentziano, etcétera, y de esa misma forma las reglas de transformación se siguen trivialmente, en donde los índices  $a, b, c, \dots$  se transforman ante el grupo de Lorentz y los índices  $\mu, \nu, \alpha, \dots$  se transforman ante difeomorfismos del espacio-tiempo.

Finalmente, en el haz fibrado tangente podemos definir una serie de objetos matemáticos que nos son útiles a la hora de trabajar, por ejemplo, la conexión de espín, la torsión, la curvatura, etcétera, que veremos a continuación.

#### 4.2.2. Conexión de espín

Una conexión de espín  $\omega_\mu$ , también conocida como *conexión de Lorentz*, es una 1-forma de la variedad base que toma valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz [76]

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega^{ab}{}_\mu S_{ab}, \quad (197)$$

en donde  $S_{ab}$  son los generadores del grupo de Lorentz. Dado que  $S_{ab}$  son antisimétricos, entonces  $\omega_\mu^{(ab)} = 0$  con el fin de que sea una conexión de espín. Esta conexión nos permite introducir una derivada covariante llamada *derivada de Fock-Ivanenko* [76] la cual está dada por

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_\mu S_{ab}, \quad (198)$$

cuya forma dependerá de la representación de los generadores  $S_{ab}$ . Por ejemplo, para un escalar de Lorentz  $\phi$ , se tiene que  $S_{ab} = 0$  por lo cual  $\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi$ , para un vector de Lorentz  $\phi^c$  se tiene que

$$(S_{ab})^c{}_d = i(\eta_{bd} \delta_a^c - \eta_{ad} \delta_b^c), \quad (199)$$

y por lo cual la derivada de Fock-Ivanenko es para este caso

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu \phi^c + \omega^c{}_{b\mu} \phi^b, \quad (200)$$

etcétera [76].

Así, recordando que la tétrada nos relaciona objetos en la fibra y en la variedad base, tenemos que, por ejemplo, un vector lorentziano y un vector coordenado se relacionan por

$$\phi^\mu = e_a^\mu \phi^a \quad \text{y} \quad \phi^a = e_\mu^a \phi^\mu. \quad (201)$$

Por otro lado, a partir de una conexión de espín es posible inducir una conexión lineal en la variedad base dada por

$$\Gamma_{\nu\mu}^\rho \equiv e_a^\rho \partial_\mu e_\nu^a + e_a^\rho \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = e_a^\rho \mathcal{D}_\mu e_\nu^a, \quad (202)$$

y viceversa, una conexión de espín dada por una conexión lineal es

$$\omega_{b\mu}^a \equiv e_\nu^a \partial_\mu e_b^\nu + e_\nu^a \Gamma_{\rho\mu}^\nu e_b^\rho = e_\nu^a \nabla_\mu e_b^\nu. \quad (203)$$

Estas relaciones son formas de expresar un resultado más general, el cual es que la derivada covariante total de la tetrada es cero considerando a la conexión lineal inducida por la conexión de espín [76]

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\nu\mu}^\rho e_\rho^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = 0. \quad (204)$$

Por último, el pedir que la conexión  $\omega_{\mu}^{ab}$  sea una conexión de espín implica que es antisimétrica en los índices algebraicos  $\{a, b\}$ , lo cual se traduce en

$$\partial_\mu \eta_{ab} - \omega_{a\mu}^d \eta_{db} - \omega_{b\mu}^d \eta_{ad} = 0, \quad (205)$$

y esto, usando (195) y (202), se traduce en que la conexión es compatible con la métrica, es decir, que

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho} = 0. \quad (206)$$

Por lo tanto, el hecho de que  $\omega_{\mu}^{ab}$  sea una conexión de espín, exige que la métrica y la conexión sean compatibles.

### 4.2.3. Torsión y curvatura

Una vez hemos definido y visto las propiedades de la conexión de espín, es conveniente introducir dos objetos matemáticos, la torsión y la curvatura, los cuales son muy importantes en el contexto físico y que son propiedades tensoriales de la conexión de espín [76]. La curvatura de una conexión de espín es una 2-forma, ver apéndice A.19, del espacio-tiempo cuyos coeficientes adquieren valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz [76]

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4} R_{b\nu\mu}^a S_a^b dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (207)$$

y están dados por

$$R_{b\nu\mu}^a = \partial_\nu \omega_{b\mu}^a - \partial_\mu \omega_{b\nu}^a + \omega_{e\nu}^a \omega_{b\mu}^e - \omega_{e\mu}^a \omega_{b\nu}^e, \quad (208)$$

y cuya relación con los coeficientes del tensor de Riemann está dada por

$$R_{\gamma\nu\mu}^\rho = e_a^\rho e_\gamma^b R_{b\nu\mu}^a. \quad (209)$$

Por otro lado, la torsión también es una 2-forma pero toma valores en el álgebra de Lie del grupo de traslaciones [76]

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} T_{\nu\mu}^a P_a dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (210)$$



con  $P_a$  los generadores del grupo de traslaciones, tal que los coeficientes de la 2-forma de torsión están dados por

$$T_{\nu\mu}^a = \partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{c\nu}^a e_\mu^c - \omega_{c\mu}^a e_\nu^c. \quad (211)$$

La relación entre los coeficientes del tensor de torsión con la 2-forma de torsión está dada por

$$T_{\nu\mu}^\rho = e_a^\rho T_{\nu\mu}^a = -2\Gamma_{[\nu\mu]}^\rho. \quad (212)$$

Vale la pena señalar que existe un teorema que nos permite expresar cualquier conexión en términos de la conexión de Levi-Civita, este es el *teorema de Ricci* el cual nos establece que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + K_{\mu\nu}^\rho, \quad (213)$$

en donde  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$  son los símbolos de Christoffel <sup>9</sup> y  $K_{\mu\nu}^\rho$  es el tensor de contorsión el cual está dado por

$$K_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^\rho + T_{\mu\nu}^\rho - T_{\mu\nu}^\rho). \quad (214)$$

De esta forma, usando el teorema de Ricci, los coeficientes del el tensor de Riemann de la conexión  $\Gamma$  se relacionan con los coeficientes del tensor de Riemann de la conexión de Levi-Civita por [77]

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \overset{\circ}{R}_{\beta\mu\nu}^\alpha + \overset{\circ}{\nabla}_\mu K_{\nu\beta}^\alpha - \overset{\circ}{\nabla}_\nu K_{\mu\beta}^\alpha + K_{\mu\rho}^\alpha K_{\nu\beta}^\rho - K_{\nu\rho}^\alpha K_{\mu\beta}^\rho. \quad (215)$$

Con esto, se obtiene que el escalar de Ricci de la conexión  $\Gamma$  se relaciona con el escalar de Ricci de la conexión de Levi-Civita por [77][75][78]

$$R = \overset{\circ}{R} + T - B, \quad (216)$$

en donde  $T$  es el *escalar de torsión*, el cual está dado por

$$T = \frac{1}{4} T^{\mu\nu\lambda} T_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu\lambda} T_{\nu\mu\lambda} - T^\mu T_\mu, \quad (217)$$

tal que  $T_\mu = T_{\lambda\mu}^\lambda$ , y  $B$  es el *término de frontera* o *boundary term* en inglés, el cual está dado por

$$B = \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu) = 2 \nabla_\mu T^\mu, \quad (218)$$

y tal que

$$e = \det(e_\lambda^a) = \sqrt{-g}. \quad (219)$$

Aquí vale la pena definir el *superpotencial*

$$S_\alpha^{\sigma\rho} = \frac{1}{4} (T_\alpha^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma}_\alpha - T^{\sigma\rho}_\alpha - 2T^{\lambda\sigma}_\lambda \delta_\alpha^\rho + 2T^{\lambda\rho}_\lambda \delta_\alpha^\sigma) = \frac{1}{2} (K^{\sigma\rho}_\alpha + T^\sigma \delta_\alpha^\rho - T^\rho \delta_\alpha^\sigma), \quad (220)$$

---

<sup>9</sup>De ahora en adelante denotaremos con un círculo  $\circ$  a los objetos matemáticos relacionados con la conexión de Levi-Civita

tal que el escalar de torsión queda dado por

$$T = T^\alpha_{\sigma\rho} S^\sigma_\alpha. \quad (221)$$

Finalmente, de acuerdo a [76], el tensor de torsión y el tensor de curvatura se relacionan a través de las identidades de Bianchi, las cuales son

$$\nabla_\nu T^\lambda_{\rho\mu} + \nabla_\mu T^\lambda_{\nu\rho} + \nabla_\rho T^\lambda_{\mu\nu} = R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu} + R^\lambda_{\mu\nu\rho} + T^\lambda_{\rho\sigma} T^\sigma_{\mu\nu} + T^\lambda_{\nu\sigma} T^\sigma_{\rho\mu} + T^\lambda_{\mu\sigma} T^\sigma_{\nu\rho}, \quad (222)$$

para la torsión, y

$$\nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = R^\lambda_{\sigma\mu\theta} T^\theta_{\nu\rho} + R^\lambda_{\sigma\nu\theta} T^\theta_{\rho\mu} + R^\lambda_{\sigma\rho\theta} T^\theta_{\mu\nu}, \quad (223)$$

para la curvatura, las cuales se reducen a las identidades de Bianchi usuales en Relatividad General cuando la torsión es idénticamente igual a cero.

### 4.3. Gravedad Teleparalela como una teoría de Gauge

#### 4.3.1. Conexión de espín totalmente inercial

Una teoría de Gauge es una teoría que es invariante ante la acción local de algún grupo de Lie, es decir, que la Lagrangiana del sistema cambia a lo más por una derivada total, en este caso, Gravedad Teleparalela se construye como una teoría de Gauge del grupo de traslaciones [75]. La transformación de gauge la definimos como una traslación infinitesimal de las coordenadas del espacio de Minkowski

$$x^a \longrightarrow x'^a + \epsilon^a(x^\mu), \quad (224)$$

de esta forma, al considerar un campo  $\phi(x^a)$ , el cambio infinitesimal del campo debido a la transformación infinitesimal

$$\phi(x^a) \longrightarrow \phi(x'^a) = \phi(x^a - \epsilon^a), \quad (225)$$

es <sup>10</sup>

$$\delta\phi \equiv \phi(x^a) - \phi(x'^a) = \epsilon^a \partial_a \phi. \quad (226)$$

De esta forma, vemos que, el cambio infinitesimal de  $\partial_\mu \phi$

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \epsilon^a \partial_a \partial_\mu \phi + (\partial_a \phi)(\partial_\mu \epsilon^a), \quad (227)$$

no transforma de manera covariante ante (224). Por lo cual es necesario introducir una derivada que sea covariante ante traslaciones infinitesimales, esto lo logramos al definir el potencial

$$B_\mu = B_\mu^a P_a, \quad (228)$$

en donde  $P_a = \partial_a$  son los generadores del grupo de traslaciones y tal que  $\delta B_\mu^a = -\partial_\mu \epsilon^a$ , e introduciendo la derivada covariante de gauge dada por

$$e_\mu \phi = \partial_\mu \phi + B_\mu^a \partial_a \phi, \quad (229)$$

<sup>10</sup>No confundir con la derivada funcional.

cuyo cambio infinitesimal es

$$\delta(e_\mu\phi) = \epsilon^a\partial_a\partial_\mu\phi, \quad (230)$$

el cual sí transforma de manera covariante bajo el grupo de traslaciones. De esta forma, para construir una teoría que sea covariante ante traslaciones, se debe de hacer la sustitución

$$\partial_\mu \longrightarrow e_\mu, \quad (231)$$

tal que

$$e_\mu = e_\mu^a\partial_a, \quad (232)$$

en donde la tétrada está dada por [75]

$$e_\mu^a = \partial_\mu x^a + B_\mu^a. \quad (233)$$

Sin embargo, como vimos en 4.1, la tétrada no es única, por lo cual, si hacemos una transformación de Lorentz

$$x^a \longrightarrow \Lambda^a_b x^b \quad \text{y} \quad e_\mu^a = \Lambda^a_b e_\mu^b, \quad (234)$$

de (233) vemos que

$$\Lambda^a_b e_\mu^b = \partial_\mu(\Lambda^a_b x^b) + \Lambda^a_b B_\mu^b, \quad (235)$$

por lo cual, obtenemos que

$$\begin{aligned} e_\mu^a &= \partial_\mu x^a + B_\mu^a + (\Lambda^a_b \partial_\mu \Lambda^b_d) x^d \\ &= \partial_\mu x^a + B_\mu^a + \omega^a_{b\mu} x^b, \end{aligned} \quad (236)$$

con

$$\omega^a_{b\mu} = \Lambda^a_d \partial_\mu \Lambda^d_b. \quad (237)$$

La expresión (237) es la conexión de espín con la que se trabaja en Gravedad Teleparalela, y de acuerdo a [76], corresponde a una conexión de espín puramente inercial, esto es, que representa los efectos inerciales en el nuevo marco de referencia y que se obtiene a partir de la transformación de Lorentz de una conexión de espín cero.

Así, la tétrada puede ser reescrita como

$$e_\mu^a = \mathcal{D}_\mu x^a + B_\mu^a, \quad (238)$$

con  $\mathcal{D}_\mu$  la derivada de Lorentz dada por

$$\mathcal{D}_\mu x^a = \partial_\mu x^a + \omega^a_{b\mu} x^b. \quad (239)$$

Vemos que la expresión (239) concuerda con la derivada de Fock-Ivanenko para un vector de Lorentz (200) para la conexión de espín (237). Por lo cual, para hacer que la tétrada se invariante ante el grupo de traslaciones  $\delta e_\mu^a = 0$  debemos pedir que  $\delta B_\mu^a = -\mathcal{D}_\mu \epsilon^a$ .

### 4.3.2. Conexión de Weitzenböck

Como mencionamos anteriormente, la conexión de espín  $\omega_{b\mu}^a = \Lambda_d^a \partial_\mu \Lambda_b^d$  actúa sobre los índices algebraicos o índices de Minkowski, de tal forma que al calcular la derivada covariante total de algún objeto que tienen tanto índices coordinados  $\{\mu, \nu, \dots\}$  como índices algebraicos  $\{a, b, \dots\}$  este aparece en la expresión, por ejemplo, para un tensor  $T^{a\nu}$  la derivada covariante total es

$$\nabla_\mu T^{a\nu} = \partial_\mu T^{a\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu T^{a\rho} + \omega_{\mu c}^a T^{c\nu}, \quad (240)$$

con el fin de que  $\nabla_\mu$  sea covariante ante transformaciones de Lorentz y cambio de coordenadas relacionadas por difeomorfismos. Así, la *conexión de Weitzenböck* es la conexión asociada a la conexión de espín puramente inercial tal que la derivada covariante de la tétrada es cero, es decir

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha e_\alpha^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = 0 \quad (241)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = e_a^\alpha \partial_\mu e_\nu^a + e_a^\alpha \omega_{b\mu}^a e_\nu^b. \quad (242)$$

La expresión (242) son los coeficientes de la conexión de Weitzenböck.

La conexión de Weitzenböck y la conexión de espín son objetos fundamentales para Gravedad Teleparalela, con ellos podemos calcular expresiones que nos son de utilidad y obtener resultados importantes. Por ejemplo, los componentes de la 2-forma de curvatura están dados en términos de la conexión de espín (208), por lo la cual, usando la conexión de espín puramente inercial  $\omega_{b\mu}^a = \Lambda_d^a \partial_\mu \Lambda_b^d$ , podemos calcular las componentes de la 2-forma de curvatura de la siguiente forma:

$$R_{b\nu\mu}^a = \partial_\nu \omega_{b\mu}^a - \partial_\mu \omega_{b\nu}^a + \omega_{e\nu}^a \omega_{b\mu}^e - \omega_{e\mu}^a \omega_{b\nu}^e \quad (243)$$

$$= \partial_\nu (\Lambda_d^a \partial_\mu \Lambda_b^d) - \partial_\mu (\Lambda_d^a \partial_\nu \Lambda_b^d) + (\Lambda_d^a \partial_\nu \Lambda_e^d) (\Lambda_e^c \partial_\mu \Lambda_b^c) - (\Lambda_d^a \partial_\mu \Lambda_e^d) (\Lambda_e^c \partial_\nu \Lambda_b^c)$$

$$= \partial_\nu \Lambda_d^a \partial_\mu \Lambda_b^d - \partial_\mu \Lambda_d^a \partial_\nu \Lambda_b^d + \Lambda_c^a \Lambda_e^c \partial_\nu \Lambda_e^d \partial_\mu \Lambda_b^d - \Lambda_c^a \Lambda_e^c \partial_\mu \Lambda_e^d \partial_\nu \Lambda_b^d$$

$$= \partial_\nu \Lambda_d^a \partial_\mu \Lambda_b^d - \partial_\mu \Lambda_d^a \partial_\nu \Lambda_b^d - \delta_d^c (\partial_\nu \Lambda_c^a \partial_\mu \Lambda_b^d - \partial_\mu \Lambda_c^a \partial_\nu \Lambda_b^d) = 0$$

$$\therefore R_{b\nu\mu}^a = 0, \quad (244)$$

y por lo tanto, dado que la 2-forma de curvatura y el tensor de Riemann están relacionados por (209), obtenemos que

$$R_{\rho\nu\mu}^\alpha = 0, \quad (245)$$

es decir, no hay curvatura en Gravedad Teleparalela, mientras que al calcular los coeficientes de la 2-forma de torsión se tiene que

$$T_{\nu\mu}^a = \partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{f\nu}^a e_\mu^f - \omega_{f\mu}^a e_\nu^f \neq 0. \quad (246)$$

Es aquí en donde radica la gran diferencia entre Relatividad General y Gravedad Teleparalela, pues el primero los efectos gravitacionales son efectos de la geometría no trivial de la variedad del espacio-tiempo representado a través de la curvatura, mientras que en Gravedad Teleparalela el espacio-tiempo es globalmente plano pero con geometría no-trivial representada a través de la

torsión, de esta forma el campo gravitacional deja de ser un efecto de la curvatura del espacio-tiempo y pasa a ser un efecto de la torsión del mismo, en donde el tensor de torsión queda dado trivialmente por la parte antisimétrica de la conexión de Weitzenböck

$$T^{\rho}_{\nu\mu} = -2\Gamma^{\rho}_{[\nu\mu]}. \quad (247)$$

Finalmente, de la ecuación (241), tenemos que si la conexión de espín es cero, entonces

$$e^a_{\nu}\partial_{\mu}e^{\nu}_b + e^a_{\nu}\Gamma^{\nu}_{\rho\mu}e^{\rho}_b = e^a_{\nu}\nabla_{\mu}e^{\nu}_b = 0. \quad (248)$$

La ecuación (248) es lo que se conoce como *condición teleparalela*, pues esta es una condición de paralelismo distante, es decir, que la tétrada es transportada paralelamente por la conexión de Weitzenböck. Siguiendo el trabajo estándar que se encuentra en la literatura, de ahora en adelante trabajaremos en un marco de referencia tal que la conexión de espín se hace cero y por lo tanto la condición teleparalela se satisface.

## 4.4. Equivalente Teleparalela de Relatividad General

### 4.4.1. La acción

De la ecuación (216) tenemos que  $R = \mathring{R} + T - B$  mientras que de la ecuación (244) tenemos que el tensor de Riemann, al usar la conexión de espín puramente inercial, se hace cero, lo que implica que  $R = 0$  y por lo tanto

$$\mathring{R} = -T + B. \quad (249)$$

Por lo cual, el escalar de Ricci calculado con la conexión de Levi-Civita es igual a la torsión más un término de frontera, por lo cual, si la acción en Relatividad General está dada por (15), entonces la acción de la Equivalente Teleparalela de Relatividad General, TEGR de ahora en adelante, está dada, usando (249), por

$$S_{\text{TEGR}} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \mathring{R} d^4x + S_{\text{matt}} = \frac{1}{2\kappa} \int e(-T + B) d^4x + S_{\text{matt}}, \quad (250)$$

y al integrar el término de frontera obtenemos que la acción de la Equivalente Teleparalela de Relatividad General es [77]

$$S_{\text{TEGR}} = -\frac{1}{2\kappa} \int eT d^4x + S_{\text{matt}}. \quad (251)$$

Así, vemos que la Lagrangiana de Relatividad General y de TEGR solamente difieren por un término de frontera, por lo cual al hacer variaciones de (251) respecto a la tétrada, esta nos debe regresar las mismas ecuaciones de campo que nos da Relatividad General, por lo cual se deja a total interpretación el hecho de si la gravedad es mediada por curvatura y por torsión, dado que ambas formulaciones son equivalentes [75].

### 4.4.2. Las ecuaciones de campo

Para encontrar las ecuaciones de campo en TEGR se procede de la manera usual, con la diferencia de que ahora las variaciones son respecto a la tétrada  $e_\lambda^a$  en lugar de la métrica, pues hemos adoptado el enfoque de considerar a la tétrada como variable dinámica de la teoría. De esta forma, si pedimos que

$$\delta S_{TEGR} = 0, \quad (252)$$

entonces

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^4x [e\delta T + T\delta e] = \delta S_{\text{matt}}, \quad (253)$$

por lo cual es necesario calcular  $\delta T$  y  $\delta e$ , en donde  $\delta$  representa la primer variación respecto a la tétrada  $\frac{\delta}{\delta e_\lambda^a}$ . Dado que  $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ , y  $e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a$ , es fácil mostrar que

$$\delta g_{\mu\nu} = -(g_{\mu\lambda} e_\nu^a + g_{\nu\lambda} e_\mu^a) \delta e_\lambda^a, \quad (254)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -(g^{\nu\lambda} e_\lambda^\mu + g^{\mu\lambda} e_\lambda^\nu) \delta e_\lambda^a, \quad (255)$$

$$\delta e = e e_\lambda^a \delta e_\lambda^a, \quad (256)$$

$$\delta e_a^\sigma = -e_b^\sigma e_a^\rho \delta e_\rho^b, \quad (257)$$

$$\partial_\nu e_a^\sigma = -e_b^\sigma e_a^\rho \partial_\nu e_\rho^b, \quad (258)$$

por lo cual, obtenemos que

$$T\delta e = e T e_\lambda^a \delta e_\lambda^a. \quad (259)$$

Por otro lado, debemos calcular

$$\delta T = \frac{1}{4} \delta(T^{\mu\nu\lambda} T_{\mu\nu\lambda}) + \frac{1}{2} \delta(T^{\mu\nu\lambda} T_{\nu\mu\lambda}) - \delta(T^\mu T_\mu). \quad (260)$$

Para esto primero calculamos  $\delta T_{\mu\nu}^\lambda$  y  $\delta T^\mu$ .

De (210) y (211), recordando que trabajamos en un marco con la conexión de espín igual a cero, obtenemos que

$$\delta T_{\mu\nu}^\lambda = T_{\mu\nu}^a \delta e_\lambda^a + e_\lambda^a \delta T_{\mu\nu}^a, \quad (261)$$

y como la primer variación y la derivada parcial conmutan, y usando la ecuación (257), obtenemos que

$$\delta T_{\mu\nu}^\lambda = -e_d^\lambda T_{\mu\nu}^\rho \delta e_\rho^d + e_\lambda^a (\partial_\mu \delta e_\nu^a - \partial_\nu \delta e_\mu^a). \quad (262)$$

Por otro lado

$$\delta T^\mu = \delta(T^\lambda{}^\mu) = \delta(g^{\mu\nu} T_{\lambda\nu}^\lambda) = T_{\lambda\nu}^\lambda \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta T_{\lambda\nu}^\lambda, \quad (263)$$

y usando (255), obtenemos que

$$\delta T^\mu = -(g^{\mu\alpha} T_\alpha + T^\alpha e_\alpha^\mu + T^\alpha{}_\mu) \delta e_\alpha^a + g^{\mu\beta} e_\alpha^\nu (\partial_\nu \delta e_\beta^a - \partial_\beta \delta e_\nu^a). \quad (264)$$

Finalmente, usando las ecuaciones (262) y (264), obtenemos que <sup>11</sup>

$$\delta(T^{\alpha\mu\nu}T_{\alpha\mu\nu}) = -4T^{\alpha\mu\nu}T_{\alpha\mu\beta}e_a^\beta\delta e_\nu^a + 4T_\beta^{\mu\nu}e_a^\beta\partial_\mu\delta e_\nu^a, \quad (265)$$

$$\delta(T^{\mu\alpha\nu}T_{\alpha\mu\nu}) = 2(T^{\nu\alpha\lambda} - T^{\lambda\alpha\nu})T_{\alpha\nu a}\delta e_\lambda^a + 2(T_a^{\alpha\lambda} - T_a^{\lambda\alpha})\partial_\alpha\delta e_\lambda^a, \quad (266)$$

$$\delta(T^\mu T_\mu) = -2(T^\alpha T_a + T_{a\mu}^\alpha T^\mu)\delta e_\alpha^a + 2(T^\alpha e_a^\lambda - T^\lambda e_a^\alpha)\partial_\lambda\delta e_\alpha^a. \quad (267)$$

Por lo tanto, la variación del escalar de torsión es

$$\begin{aligned} \delta T &= -T^{\alpha\mu\nu}T_{\alpha\mu\beta}e_a^\beta\delta e_\nu^a + T_\beta^{\mu\nu}e_a^\beta\partial_\mu\delta e_\nu^a + (T^{\lambda\alpha\nu} - T^{\nu\alpha\lambda})T_{\alpha\nu a}\delta e_\lambda^a + (T_a^{\alpha\lambda} - T_a^{\lambda\alpha})\partial_\alpha\delta e_\lambda^a \\ &\quad + 2(T^\alpha T_a + T_{a\mu}^\alpha T^\mu)\delta e_\alpha^a - 2(T^\alpha e_a^\lambda - T^\lambda e_a^\alpha)\partial_\lambda\delta e_\alpha^a \\ &= T_{\mu a}^\alpha [-T_\alpha^{\mu\lambda} + T_\alpha^{\lambda\mu} - T_\alpha^{\mu\lambda} + 2(\delta_\alpha^\mu T^\lambda - \delta_\alpha^\lambda T^\mu)]\delta e_\lambda^a \\ &\quad + [T_a^{\alpha\lambda} + T_a^{\alpha\lambda} - T_a^{\lambda\alpha} + 2T^\alpha e_a^\lambda - 2T^\lambda e_a^\alpha]\partial_\alpha\delta e_\alpha^a, \end{aligned}$$

con lo cual, usando la definición del superpotencial (220), obtenemos que la variación del escalar de torsión es

$$\delta T = -4T_{\mu a}^\alpha S_\alpha^{\mu\lambda}\delta e_\lambda^a + 4S_a^{\mu\lambda}\partial_\mu\delta e_\lambda^a. \quad (268)$$

Así, despreciando derivadas totales, las ecuaciones de campo son

$$-4T_{\mu a}^\alpha S_\alpha^{\mu\lambda} - \frac{4}{e}\partial_\mu(eS_a^{\mu\lambda}) + Te_a^\lambda = 2\kappa\theta_a^\lambda, \quad (269)$$

en donde

$$\theta_a^\lambda = \frac{1}{e}\frac{\delta(e\mathcal{L}_{\text{matt}})}{\delta e_\lambda^a}. \quad (270)$$

Contrayendo con  $e_\nu^a$ , podemos reescribir estas ecuaciones en una forma más familiar, dada por

$$\overset{\circ}{G}_\nu^\lambda \equiv \kappa\mathcal{T}_\nu^\lambda = \frac{2}{e}e_\nu^a\partial_\mu(eS_a^{\lambda\mu}) - 2T_{\mu\nu}^\alpha S_\alpha^{\mu\lambda} + \frac{1}{2}T\delta_\nu^\lambda, \quad (271)$$

en donde,  $\overset{\circ}{G}_\nu^\lambda$  es el tensor de Einstein calculado con la conexión de Levi-Civita y  $\mathcal{T}_\nu^\lambda = e_\nu^a\theta_a^\lambda$  es el tensor de energía momento.

Las ecuaciones (271) son las ecuaciones de campo de TEGR las cuales nos dan la misma dinámica del universo que las ecuaciones de campo de Relatividad General, así, TEGR sufre de las mismas ventajas y desventajas que tiene Relatividad General [75], por lo cual, siguiendo las mismas ideas que surgieron con Relatividad General, una forma de corregir las desventajas de TEGR es al modificar la acción con Lagrangianas más generales, en este caso, una de las lagrangianas más generales con la que podemos extender a TEGR es considerando una función  $f(T, B)$  del escalar de torsión  $T$  y del término de frontera  $B$  en la acción de la teoría, pues esta nos recupera como casos particulares otras teorías alternativas y modificadas.

<sup>11</sup>La obtención de estas ecuaciones es directo teniendo en cuenta la antisimetría del tensor de torsión en sus últimos dos índices.

### 4.5. Gravedad $f(T, B)$

Hay varias formas de generalizar la Lagrangiana de TEGR, una de ellas es considerar una funcional  $f(T, B)$  del escalar de torsión y del término de frontera  $B$ . De esta forma, la Lagrangiana es

$$S_{f(T,B)} = \frac{1}{2\kappa} \int e f(T, B) d^4x + S_{\text{matt}}. \quad (272)$$

Por lo cual, al tomar la primer variación de la acción (272), tenemos

$$\delta S_{f(T,B)} = \int \frac{1}{2\kappa} [f\delta e + e f_B \delta B + e f_T \delta T + 2\kappa \delta(e\mathcal{L}_{\text{matt}})] d^4x, \quad (273)$$

en donde  $f_B = \partial_B f(T, B)$ ,  $f_T = \partial_T f(T, B)$  y  $f = f(T, B)$ . De (256) y (268) tenemos, despreciando divergencias totales, que

$$e f_T = 4 [-f_T \partial_\mu (e S_a^{\mu\lambda}) - \partial_\mu (f_T) e S_a^{\mu\lambda} + e f_T T_{\mu\alpha}^{\alpha} S_a^{\lambda\mu}] \delta e_\lambda^a, \quad (274)$$

$$f\delta e = e f e_\lambda^a \delta e_\lambda^a. \quad (275)$$

Sin embargo, aún nos falta calcular  $\delta B$ , para esto, recordamos que

$$B = \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu), \quad (276)$$

y dado que la derivada parcial conmuta con la derivada funcional, entonces

$$\delta B = -\frac{2}{e^2} \partial_\mu (e T^\mu) \delta e + \frac{2}{e} \partial_\mu (e \delta T^\mu + T^\mu \delta e), \quad (277)$$

por lo cual, se tiene que

$$e f_B \delta B = -e [f_B B + 2T^\mu \partial_\mu f_B] e_\lambda^a \delta e_\lambda^a - 2e \partial_\mu f_B [- (g^{\mu\alpha} T_\alpha + T^\alpha e_\alpha^\mu + T^\alpha e_\alpha^\mu) \delta e_\alpha^a + g^{\mu\beta} e_\alpha^\nu (\partial_\nu \delta e_\beta^a - \partial_\beta \delta e_\nu^a)]. \quad (278)$$

Ahora, observamos que, al integrar por partes e ignorando derivadas totales, tenemos

$$e g^{\mu\beta} \partial_\mu f_B e_\alpha^\nu (\partial_\nu \delta e_\beta^a - \partial_\beta \delta e_\nu^a) = [\partial_\nu (e_\alpha^\lambda e g^{\mu\nu} \partial_\mu f_B) - \partial_\nu (e_\alpha^\nu e^{\mu\lambda} \partial_\mu f_B)] \delta e_\lambda^a. \quad (279)$$

Para poder continuar, debemos observar que al trabajar con una conexión de espín, como vimos en la subsección 4.2.2, esta implica que la métrica y la conexión de Weitzenböck sean compatibles, es decir

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0, \quad (280)$$

de donde, al despejar  $\partial_\lambda g^{\mu\nu}$  se obtiene que

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -(\Gamma^{\mu\nu}_\lambda + \Gamma^{\nu\mu}_\lambda), \quad (281)$$

y entonces, al recordar que  $e = \sqrt{-g}$ , obtenemos

$$\partial_\lambda e = e \Gamma^\mu_{\mu\lambda}. \quad (282)$$



Por lo cual, usando las ecuaciones (281), (282), el conjunto de ecuaciones (254) - (258) y el teorema de Ricci, obtenemos por un lado que

$$\partial_\nu(e_a^\lambda e g^{\mu\nu} \partial_\mu f_B) = e e_a^\lambda g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\square} f_B - e(\partial_\mu f_B) (-e_a^\lambda \Gamma_{\rho}^{\rho\ \mu} + e_a^\lambda \Gamma^{\nu\ \mu}_{\ \nu} + \Gamma_a^{\lambda\ \mu} + e_a^\lambda K^{\mu\nu}_{\ \nu}), \quad (283)$$

y por otro lado

$$\partial_\nu(e_a^\nu e g^{\mu\lambda} \partial_\mu f_B) = e e_a^\nu \overset{\circ}{\nabla}^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\nu f_B + e(\partial_\mu f_B) (g^{\mu\lambda} \Gamma_{\rho a}^\rho - \Gamma_a^{\mu\lambda} - \Gamma_a^{\lambda\mu} - \Gamma_{a\nu}^\nu g^{\mu\lambda} + \Gamma_a^{\mu\ \lambda} - K_a^{\mu\ \lambda}). \quad (284)$$

Así, al usar las ecuaciones (283) y (284) obtenemos que

$$\partial_\nu(e_a^\lambda e g^{\mu\nu} \partial_\mu f_B) - \partial_\nu(e_a^\nu e g^{\mu\lambda} \partial_\mu f_B) = e e_a^\lambda \overset{\circ}{\nabla} f_B - e e_a^\nu \overset{\circ}{\nabla}^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\nu f_B - e(\partial_\mu f_B) (-T_a^{\lambda\ \mu} - T_a^{\mu\ \lambda} - g^{\mu\lambda} T_a - k_a^{\mu\ \lambda}), \quad (285)$$

con lo cual, de la simetría de los símbolos de Christoffel  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ , obtenemos finalmente que

$$e f_B \delta B = -e f_B B e_a^\lambda - 2e e_a^\lambda \overset{\circ}{\square} f_B + 2e e_a^\nu \overset{\circ}{\nabla}^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\nu f_B + 4e(\partial_\mu f_B) S_a^{\lambda\mu}. \quad (286)$$

Por lo tanto, minimizando la acción (272), encontramos que las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} -e f_B B e_a^\lambda - 2e e_a^\lambda \overset{\circ}{\square} f_B + 2e e_a^\nu \overset{\circ}{\nabla}^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\nu f_B - 4e(\partial_\mu f_B) S_a^{\mu\lambda} \\ - 4\partial_\mu(f_T) e S_a^{\mu\lambda} - 4f_T \partial_\mu(e S_a^{\mu\lambda}) + 4e f_T T_{\mu\alpha}^\alpha S_a^{\lambda\mu} + e f e_a^\lambda = -2e \kappa \theta_a^\lambda, \end{aligned} \quad (287)$$

las cuales, al multiplicar por  $-1/2e$  y contraer con  $e_\nu^a$ , las podemos reescribir en términos del tensor de Einstein calculado con la conexión de Levi-Civita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{G}_\nu^\lambda \equiv \kappa \mathcal{T}_\nu^\lambda = \delta_\nu^\lambda \overset{\circ}{\square} f_B - \overset{\circ}{\nabla}^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\nu f_B + \frac{1}{2} f_B B \delta_\nu^\lambda + 2[\partial_\mu f_B + \partial_\mu f_T] S_\nu^{\mu\lambda} + \frac{2}{e} e_\nu^a f_T \partial_\mu(e S_a^{\mu\lambda}) \\ - 2f_T T_{\mu\nu}^\alpha S_\alpha^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} f \delta_\nu^\lambda. \end{aligned} \quad (288)$$

Las ecuaciones (288) son las ecuaciones de campo de Gravedad  $f(T, B)$  las cuales nos pueden recuperar las ecuaciones de campo de otras teorías de Gravedad Teleparalela, por ejemplo, si  $f(T, B) = f(T)$ , es decir,  $f_B = 0$ , entonces estas se reducen a

$$\overset{\circ}{G}_\nu^\lambda \equiv \kappa \mathcal{T}_\nu^\lambda = 2(\partial_\mu f_T) S_\nu^{\mu\lambda} + \frac{2}{e} e_\nu^a f_T \partial_\mu(e S_a^{\mu\lambda}) - 2f_T T_{\mu\nu}^\alpha S_\alpha^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} f \delta_\nu^\lambda, \quad (289)$$

que son las ecuaciones de campo de Gravedad  $f(T)$  y más aún, si  $f(T) = -T$  entonces

$$\overset{\circ}{G}_\nu^\lambda \equiv \kappa \mathcal{T}_\nu^\lambda = \frac{2}{e} e_\nu^a \partial_\mu(e S_a^{\lambda\mu}) + 2T_{\mu\nu}^\alpha S_\alpha^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} T \delta_\nu^\lambda, \quad (290)$$

que son las ecuaciones de campo de la Equivalente Teleparalela de Relatividad General (271).

La ventaja que tiene el caso general  $f(T, B)$  sobre los demás es que puede recuperar teorías  $f(\overset{\circ}{R})$  si  $f(T, B) = f(-T + B)$ , lo cual no se puede lograr con  $f(T)$  ni con TEGR. Así, ya contamos con las ecuaciones de campo de dos manera de extender TEGR, a saber, Gravedad  $f(T, B)$  y el caso particular de Gravedad  $f(T)$ , por lo que ya estamos en posición de ver las ecuaciones de FLRW en estas teorías.

## 4.6. Ecuaciones de Friedmann en $f(T)$

En esta teoría, usualmente se trabaja con la signatura  $(+, -, -, -)$  de la métrica de Friedmann, es decir, consideramos la métrica FLRW plana dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (291)$$

de esta forma, una de las tétrada que diagonaliza a la métrica FLRW es

$$e_\mu^a = \text{diag}(1, a(t), a(t), a(t)). \quad (292)$$

La tétrada (292) de acuerdo a [75], es una *tétrada buena* en el sentido que no constriñe a la función  $f(T)$  ni al escalar  $T$  y que además cumple con el Principio Cosmológico. Con esta tétrada vemos que

$$T_{\mu\nu}^0 = 0, \quad (293)$$

para cualquier  $\mu, \nu$ .

Por otro lado, dada la antisimetría del tensor de torsión en sus dos últimos índices, tenemos que las componentes independientes distintas de cero del tensor de torsión son

$$T_{j0}^i = -\delta_j^i H, \quad (294)$$

y análogamente

$$T_i^{j0} = -\delta_i^j H. \quad (295)$$

Por lo cual, tenemos que

$$T = \frac{1}{4}T^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu\lambda}T_{\nu\mu\lambda} - T^\mu T_\mu = \frac{1}{4}(T_{j0}^i T_i^{j0} + T_{0j}^i T_i^{0j}) + \frac{1}{2}(T_{j0}^i T_i^{j0}) - T^0 T_0 \quad (296)$$

$$= \frac{1}{4}(6H^2) + \frac{1}{2}(3H^2) - 9H^2 = -6H^2. \quad (297)$$

De esta forma, las ecuaciones de Friedmann que provienen de las ecuaciones de campo (289), considerando un tensor de energía momento para un fluido ideal, son

$$6H^2 f_T + \frac{1}{2}f = \kappa\rho, \quad (298)$$

$$2(3H^2 + \dot{H})f_T + 2H\dot{f}_T + \frac{1}{2}f = -\kappa P. \quad (299)$$

Con estas ecuaciones, se ha podido mostrar que para ciertos modelos de  $f(T)$  se puede reproducir la aceleración cósmica tardía sin la necesidad de energía oscura [79], también se ha mostrado que puede reproducir inflación sin la necesidad de introducir el inflatón [80][81], etcétera. Exponer a detalle esos resultados aquí se salen del propósito del trabajo, por lo que aquí solamente nos limitamos a presentar el sistema de ecuaciones (298) y (299) del cual más adelante estudiaremos sus propiedades dinámicas, lo cual se abordará en la siguiente sección en el cual se obtendrán resultados importantes para cosmología.

### 4.7. Ecuaciones de Friedmann en $f(T, B)$

Para esta teoría se ha trabajado con las dos convenciones para la signatura de la métrica, por lo que aquí elegiremos la convención

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (300)$$

tal que la tétrada, al igual que en el caso de  $f(T)$ , está dada por

$$e_\mu^a = \text{diag}(1, a(t), a(t), a(t)). \quad (301)$$

En esta convención, es fácil de ver que ahora el escalar de torsión cambia de signo, por lo que

$$T = 6H^2. \quad (302)$$

Por otro lado, el término de frontera lo podemos calcular como

$$B = \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu) = 2\partial_0 (T^0) + 2\frac{T^0}{e} \partial_0 e = 6(3H^2 + \dot{H}). \quad (303)$$

De aquí, observamos que la ecuación (249) se mantiene pues

$$\dot{R} = -T + B = 6(2H^2 + \dot{H}), \quad (304)$$

lo cual, efectivamente, coincide con (37), que es el escalar de Ricci calculado con la conexión de Levi-Civita.

Con esto, las ecuaciones de Friedmann dadas por las ecuaciones de campo (288), considerando un tensor de energía-momento de un fluido perfecto, son

$$-3H^2(3f_B + 2f_T) + 3H\dot{f}_B - 3\dot{H}f_B + \frac{1}{2}f = \kappa\rho, \quad (305)$$

$$-\left(3H^2 + \dot{H}\right)(3f_B + 2f_T) - 2H\dot{f}_T + \ddot{f}_B + \frac{1}{2}\dot{f} = -\kappa P. \quad (306)$$

Las ecuaciones (305) y (306) se pueden reescribir de una forma más familiar al hacer el mapeo

$$\tilde{f}(T, B) \longrightarrow -T + f(T, B), \quad (307)$$

de esta forma las ecuaciones (305) y (306) quedan dadas por

$$3H^2 = \kappa(\rho + \rho_{\text{eff}}), \quad (308)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\kappa(P + P_{\text{eff}}), \quad (309)$$

tal que definimos un fluido efectivo que contiene la información de la extensión de la teoría, es decir

$$\kappa\rho_{\text{eff}} = 3H^2(3f_B + 2f_T) - 3H\dot{f}_B + 3\dot{H}f_B - \frac{1}{2}f, \quad (310)$$

$$\kappa P_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\dot{f} - \left(3H^2 + \dot{H}\right)(3f_B + 2f_T) - 2H\dot{f}_T + \ddot{f}_B. \quad (311)$$

Dado que  $f(T, B)$  no depende explícitamente del tiempo, el fluido efectivo satisface directamente la ecuación de conservación, es decir, satisface que

$$\dot{\rho}_{\text{eff}} + 3H(\rho_{\text{eff}} + P_{\text{eff}}) = 0, \quad (312)$$

de la cual podemos definir una ecuación de estado para el fluido efectivo, la cuál está dada por

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -1 + \frac{\ddot{f}_B - 3H\dot{f}_B - 2\dot{H}f_T - 2H\dot{f}_T}{3H^2(3f_B + 2f_T) - 3H\dot{f}_B + 3\dot{H}f_B - \frac{1}{2}\dot{f}}. \quad (313)$$

De la ecuación (313), podemos ver que en el caso en que  $\omega_{\text{eff}} = -1$  recuperamos el escenario estándar de  $\Lambda$ CDM, el cual corresponde a apagar los términos  $T$  y  $B$ , es decir,  $f(T, B) = \text{constante}$ .

Finalmente, vale la pena mencionar los trabajos que se han realizado en el contexto de Gravedad  $f(T, B)$ . Se ha contrastado a la teoría con datos observacionales, encontrando que esta teoría puede proveer una explicación del carácter oscilatorio de la ecuación de estado de la energía oscura [82], por otro lado, se han encontrado soluciones a las ecuaciones a través del uso de simetrías de Noether [83], se ha estudiado la termodinámica de la teoría y su reconstrucción [84], etcétera. Al igual que con  $f(T)$ , explicar a detalle estos resultados aquí se sale del propósito del trabajo, por lo que solamente nos limitamos a presentar las ecuaciones de las cuales, en el siguiente capítulo, estudiaremos su estructura dinámica y obtendremos resultados importantes sobre los parámetros cosmológicos.

## 5. Análisis de sistemas dinámicos

### 5.1. Justificación

Como se ha visto en las secciones anteriores, las ecuaciones de Friedmann, tanto en Relatividad General como en cada uno de los intentos por modificar la Teoría de la Relatividad General, resultan ser complicadas de resolver de manera analítica, por lo que se vuelve necesario emplear otras herramientas matemáticas que nos permitan obtener información relevante al estudiar la cosmología relacionada a estas teorías. Una de las herramientas que nos permiten estudiar las ecuaciones de Friedmann sin tener que resolverlas explícitamente, pues se reduce a resolver ecuaciones algebraicas, son los sistemas dinámicos, del cual se ha hecho un breve resumen de los teoremas, definiciones y propiedades que tienen en el apéndice C y del cual adoptaremos la notación y usaremos la información que ahí se encuentra a lo largo de esta sección. A continuación se hará uso de los sistemas dinámicos para el estudio de las teorías alternativas a la gravedad, es decir, aquellas que nos permiten salir del teorema de Lovelock, considerando la métrica plana de FLRW. Hablaremos brevemente de cómo se han usados sistemas dinámicos en distintas teorías y hacia el final de la sección hablaremos en detalle de cómo se hace uso en Gravedad  $f(T, B)$ , que es el propósito principal de esta tesis.

### 5.2. Relatividad General con un campo escalar

Los resultados presentados en esta subsección hacen parte del artículo [85]. Como mencionamos hacia el final de la sección 1, al introducir un campo escalar es posible afrontar con Relatividad General el problema de la inflación, sin embargo, este no es el único uso que puede surgir al considerar un campo escalar, sino que también con ayuda de un campo escalar es posible estudiar la aceleración tardía del universo, es decir, la energía oscura.

La idea básica es agregar a la acción (15) un término que va como

$$S_\phi = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi d^4x, \quad (314)$$

en donde  $\mathcal{L}_\phi$  es la Lagrangiana de un campo escalar

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \epsilon \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (315)$$

tal que  $\epsilon = 1$  para un campo escalar estándar, y  $\epsilon = -1$  para un campo escalar *fantasma*, y se hace uso de la métrica plana de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (316)$$

De esta forma, las ecuaciones de Friedmann, al variar la acción resultante respecto a la métrica, quedan dadas por

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left[ \frac{1}{2} \epsilon \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho \right] = \frac{\kappa}{3} [\rho_\phi + \rho], \quad (317)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2} \left[ \epsilon \dot{\phi}^2 + (1 + \omega)\rho \right] = -\frac{\kappa}{2} [P_\phi + \rho_\phi + (1 + \omega)\rho], \quad (318)$$

en donde  $\rho$  es la densidad energía de un fluido cuya ecuación de estado es del tipo barotrópica  $P = \omega\rho$ , y en donde se ha definido

$$P_\phi = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (319)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (320)$$

Por otro lado, al variar respecto al campo escalar  $\phi$  se obtiene

$$\epsilon(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (321)$$

Al introducir el campo  $\phi$  vemos que se satisface una de las primeras condiciones que nos permite salir de Relatividad General de acuerdo al teorema de Lovelock.

Ahora, como se puede observar, las ecuaciones de Friedmann (317) y (318), más la ecuación tipo Klein-Gordon (321), son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, lo que hace a su solución muy complicada de encontrar. Por lo cual llevaremos a este grupo de ecuaciones a un sistema dinámico autónomo, para esto es necesario definir un conjunto de variables  $\{x, y, z, \dots\}$  tal que el sistema de ecuaciones diferenciales (317)-(321) se puedan reescribir de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Al dividir la ecuación (317) por  $H^2$ , vemos que

$$1 = \epsilon \frac{\kappa\dot{\phi}^2}{6H^2} + \frac{\kappa V}{3H^2} + \frac{\kappa\rho}{3H^2}, \quad (322)$$

el cual motiva la definición de las variables  $\{x, y, \lambda\}$  y el parámetro  $\Gamma$ , dados por

$$x \equiv \frac{\sqrt{\kappa\dot{\phi}}}{\sqrt{6}H}, \quad y \equiv \frac{\sqrt{\kappa V}}{\sqrt{3}H}, \quad \lambda \equiv -\frac{V_{,\phi}}{\sqrt{\kappa V}}, \quad \Gamma \equiv \frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2}, \quad (323)$$

tal que, la ecuación (322) queda dada por

$$1 = \epsilon x^2 + y^2 + \frac{\kappa\rho}{3H^2}, \quad (324)$$

la cual constituye una constricción del sistema. Usando las ecuaciones (317) - (321), podemos escribir el sistema dinámico respecto a las variables  $\{x, y, \lambda\}$  definidas, el cual queda dado por

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\epsilon\lambda y^2 + \frac{3}{2}x [(2 - \gamma)\epsilon x^2 + \gamma(1 - y^2)], \quad (325)$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y [(2 - \gamma)\epsilon x^2 + \gamma(1 - y^2)], \quad (326)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2(\Gamma - 1)x, \quad (327)$$

tal que se ha hecho el cambio de variable  $N = \ln a$ <sup>12</sup>, y se ha definido  $\gamma \equiv 1 + \omega$ , tal que los fluidos en los que estamos interesados son aquellos con ecuación de estado  $P = (\gamma - 1)\rho$  con  $0 < \gamma < 2$ .

<sup>12</sup>Este cambio de variable es usual en este tipo de trabajos por lo cual se usará de ahora en adelante.

Con esto, podemos definir una ecuación de estado efectiva, la cual está dada por

$$\omega_{\text{eff}} \equiv \frac{P + P_\phi}{\rho + \rho_\phi} = \omega + (1 - \omega)\epsilon x^2 - (1 + \omega)y^2, \quad (328)$$

tal que el universo está en expansión si  $\omega_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ , y definimos también

$$\gamma_\phi \equiv 1 + \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = 1 + \frac{\epsilon x^2 - y^2}{\epsilon x^2 + y^2}, \quad (329)$$

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\kappa \rho_\phi}{3H^2} = \epsilon x^2 + y^2. \quad (330)$$

Así, vemos que el sistema dinámico es de la forma  $(x, y, \lambda) = (f_1(x, y, \lambda), f_2(x, y, \lambda), f_3(x, y, \lambda))$ , en donde  $f_1(x, y, \lambda) = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\epsilon\lambda y^2 + \frac{3}{2}x[(1 - \omega)\epsilon x^2 + (1 + \omega)(1 - y^2)]$ ,  $f_2(x, y, \lambda) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y[(1 - \omega)\epsilon x^2 + (1 + \omega)(1 - y^2)]$  y  $f_3(x, y, \lambda) = -\sqrt{6}\lambda^2(\Gamma - 1)x$ .

Para analizar los puntos críticos y la estabilidad de estos, nos enfocaremos en el caso de un campo escalar estándar  $\epsilon = 1$  y analizamos el caso  $\lambda = \text{constante}$ .

El caso de  $\lambda$  constante corresponde a un potencial de la forma

$$V(\phi) = V_0 e^{-\kappa\lambda\phi}, \quad (331)$$

el cual hace que el parámetro  $\Gamma$  sea igual a uno  $\Gamma = 1$ . Por lo cual, el sistema dinámico queda restringido únicamente a las variables  $\{x, y\}$  y a las ecuaciones (325) y (326). para encontrar los puntos críticos, hay que hacer  $(x, y) = (f_1, f_2) = (0, 0)$ , lo cual nos deja con el sistema de ecuaciones algebraico

$$-3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x[(2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2)] = 0, \quad (332)$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y[(2 - \gamma)\epsilon x^2 + \gamma(1 - y^2)] = 0, \quad (333)$$

cuyos ceros son justamente los puntos críticos del sistema, los cuales están dados en la tabla 1.

Punto	$x$	$y$	Existencia
(a)	0	0	$\forall \lambda \text{ y } \gamma$
(b1)	1	0	$\forall \lambda \text{ y } \gamma$
(b2)	-1	0	$\forall \lambda \text{ y } \gamma$
(c)	$\lambda/\sqrt{6}$	$\sqrt{1 - \lambda^2/6}$	$\lambda^2 < 6$
(d)	$\sqrt{3/2}\gamma/\lambda$	$\sqrt{3(2 - \gamma)\gamma/2\lambda^2}$	$\lambda^2 > 3\gamma$

Tabla 1: Puntos críticos del sistema de ecuaciones (325) y (326).

Ahora, debemos analizar la estabilidad de estos puntos críticos, para ello primero calculamos la matriz de estabilidad  $\mathcal{M} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , luego evaluamos en los puntos críticos y obtenemos los eigenvalores con los cuales haremos el análisis.

La matriz de estabilidad es

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 3(2 - \gamma)x^2 + \frac{3}{2}((2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2)) - 3 & \sqrt{6}\lambda y - 3\gamma xy \\ 3(2 - \gamma)xy - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y & \frac{3}{2}((2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2)) - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x - 3\gamma y^2 \end{pmatrix}, \quad (334)$$

y por lo tanto, tenemos que:

1. Para el punto (a), los eigenvalores de la matriz de estabilidad (334) son

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}(2 - \gamma), \quad \mu_2 = \frac{3}{2}\gamma. \quad (335)$$

Vemos que como estamos interesados en fluidos con  $0 < \gamma < 2$ , entonces  $\text{Re}(\mu_1) < 0$  y  $\text{Re}(\mu_2) > 0$  por lo cual el punto (a) es un punto silla. En este punto,  $\gamma_\phi$  no está definido,  $\Omega_\phi = 0$  y  $\omega_{\text{eff}} = \gamma - 1$ .

2. Para el punto (b1) los eigenvalores de la matriz de estabilidad son

$$\mu_1 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad \mu_2 = 3(2 - \gamma). \quad (336)$$

Por lo cual, tenemos que  $\text{Re}(\mu_2) > 0$ . Así, el punto (b1) a lo mas puede ser un punto silla o un punto inestable. Es un punto silla si  $\lambda > \sqrt{6}$  y un punto inestable si  $\lambda < \sqrt{6}$ . Aquí, tenemos que  $\gamma_\phi = 2$ ,  $\Omega_\phi = 1$  y  $\omega_{\text{eff}} = 1$ .

3. Para el punto (b2) los eigenvalores de la matriz de estabilidad son

$$\mu_1 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad \mu_2 = 3(2 - \gamma). \quad (337)$$

Nuevamente, dado que  $\text{Re}(\mu_2) > 0$ , el punto solamente puede ser a lo más un punto silla o un punto inestable. Es inestable si  $\lambda > -\sqrt{6}$  y es un punto silla si  $\lambda < -\sqrt{6}$ . En este punto se tiene que  $\gamma_\phi = 2$ ,  $\Omega_\phi = 0$  y  $\omega_{\text{eff}} = 1$ .

4. Para el punto (c) los eigenvalores de la matriz de estabilidad son

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6), \quad \mu_2 = \lambda^2 - 3\gamma. \quad (338)$$

Dado que este punto existe solamente si  $\lambda^2 < 6$ , entonces  $\text{Re}(\mu_1) < 0$ , por lo cual este punto es a lo más estable o punto silla. Es estable si  $\lambda^2 < 3\gamma$  y es un punto silla si  $\lambda^2 > 3\gamma$ , en donde siempre tenemos la constricción  $\lambda^2 < 6$ . En este punto, se tiene que  $\gamma_\phi = \lambda^2/3$ ,  $\Omega_\phi = 1$  y  $\omega_{\text{eff}} = -1 + \lambda^2/3$ .

5. Para el punto (d) los eigenvalores de la matriz de estabilidad están dados por

$$\mu_{1,2} = -\frac{3(2 - \gamma)}{4} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2 - \gamma)}} \right]. \quad (339)$$

Para este punto, tenemos que es estable si  $3\gamma < \lambda^2 < 24\gamma^2/(9\gamma - 2)$  y más aún, es un punto espiral estable si  $\lambda^2 > 24\gamma^2/(9\gamma - 2)$ . Para este caso, tenemos que  $\gamma_\phi = \gamma$  y  $\Omega_\phi = 3\gamma/\lambda^2$ .



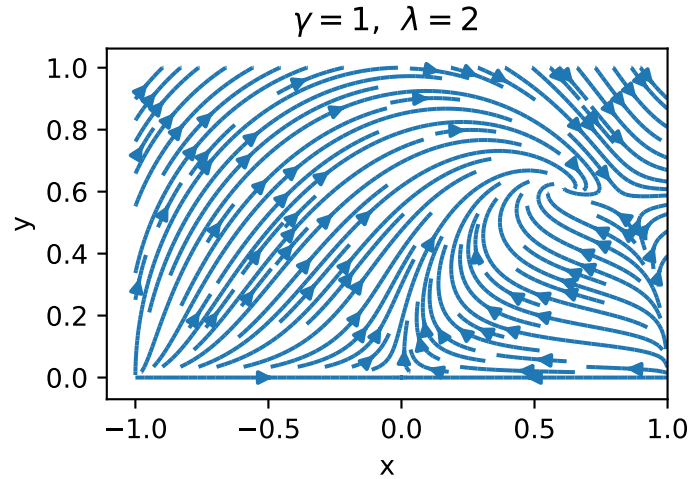


Figura 2: Diagrama del campo de velocidad del sistema dinámico (325) y (326) con  $\gamma = 1$  y  $\lambda = 2$ .

Con lo cual, podemos observar que el punto (a) es una solución que plantea a un universo dominado por el fluido  $\rho$  pero el cual es un punto silla. El punto (c) es un punto estable con  $\lambda^2 < 3\gamma$ , y dado que  $\omega_{\text{eff}} = -1 + \lambda^2/3$ , entonces tenemos un universo en aceleración si  $\lambda^2 < 2$ . El último punto corresponde a una solución de escala en la cual la densidad de energía del campo escalar decrece con el fluido, pues  $\gamma_\phi = \gamma$ . El punto (d) es silla en el caso en que  $\lambda^2 < 3\gamma$ , pero este caso no es físico pues la restricción (324) no se satisface.

El anterior análisis nos muestra que podemos obtener expansión acelerada al introducir un campo escalar a Relatividad General, pues las soluciones del sistema se acercan al punto crítico estable (c) con  $\lambda^2 < 2$ , en donde el estado final del universo es tal que el campo escalar domina  $\Omega_\phi = 1$ . Hay que señalar que el caso del punto crítico (d) no es viable para explicar la energía oscura, pues la densidad de energía decae al igual que el fluido barotrópico  $\rho$ . Finalmente, si la  $\lambda$  fuese dinámica tal que, para tiempos cercanos satisfaga  $\lambda^2 < 2$ , entonces tendríamos una transición de fase del régimen en donde la energía del campo escalar decae como el fluido barotrópico y se aproxima al punto (c) que corresponde a un universo acelerado y dominado por  $\phi$ , sin embargo esto recae en la necesidad de considerar  $\lambda$  diferente a una constante. Esta discusión y la discusión del caso con  $\lambda$  no constante se encuentra en [85], otros ejemplos del estudio de sistemas dinámicos en Relatividad General con un campo escalar se encuentran en [86].

## 5.3. Teoría de Brans-Dicke

### 5.3.1. Sistema dinámico con un potencial arbitrario $V(\phi)$

Existen varios trabajos los cuales hacen un análisis de sistemas dinámicos para la cosmología en la teoría de Brans-Dicke [86] [87][88], entre muchos otros. En esta subsección abordaremos la discusión hecha en [89] en la cual se construye el sistema dinámico para un potencial arbitrario  $V(\phi)$  y posteriormente se analizará el caso particular de un potencial cuadrático. Considerando el caso plano de la métrica FLRW, las ecuaciones de Friedmann en la teoría de Brans-Dicke

son

$$H^2 = \frac{8\pi}{3\phi}\rho + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{V(\phi)}{6\phi}, \quad (340)$$

$$\dot{H} = -\frac{8\pi}{(2\omega+3)\phi}[(\omega+2)\rho + \omega P] - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + 2H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{2(2\omega+3)\phi}[\phi V'(\phi) - 2V(\phi)], \quad (341)$$

y la ecuación tipo Klein-Gordon para el campo escalar es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega+3}[8\pi(\rho - 3P) - \phi V'(\phi) + 2V(\phi)]. \quad (342)$$

Así, se definen las variables dinámicas como

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\phi H}, \quad y \equiv \sqrt{\frac{V(\phi)}{6\phi}} \frac{1}{H}, \quad \lambda \equiv -\phi \frac{V'(\phi)}{V(\phi)}, \quad (343)$$

en donde la prima denota la derivada respecto al campo escalar.

Con esto, la ecuación (340) queda dada por

$$\frac{8\pi\rho}{3\phi H^2} - x + \frac{\omega}{6}x^2 + y^2 = 1, \quad (344)$$

la cual constituye una restricción para las variables dinámicas.

Al reescribir la ecuación (341) en términos de las variables dinámicas, esta nos queda dada por

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = 2x - \frac{\omega}{2}x^2 - \frac{3}{3+2\omega}y^2(2+\lambda) - 3\left(1+x - \frac{\omega}{6}x^2 - y^2\right)\frac{2+\omega\gamma}{3+2\omega}, \quad (345)$$

en donde se ha considerado un fluido barotrópico con ecuación de estado  $P = (\gamma - 1)\rho$ . De esta forma, el sistema dinámico que describe la evolución cosmológica en la teoría de Brans-Dicke con un campo escalar  $V(\phi)$  y un fluido barotrópico tiene la forma

$$\frac{dx}{dN} = -3x - x^2 - x\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{6}{3+2\omega}y^2(2+\lambda) + 3\left(1+x - \frac{\omega}{6}x^2 - y^2\right)\frac{4-3\gamma}{3+2\omega}, \quad (346)$$

$$\frac{dy}{dN} = -y\left(\frac{1}{2}x(1+\lambda) + \frac{\dot{H}}{H^2}\right), \quad (347)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = x\lambda(1 - \lambda(\Xi - 1)), \quad (348)$$

tal que

$$\Xi = \frac{V''(\phi)V(\phi)}{V'(\phi)^2}. \quad (349)$$

Con lo cual, para poder obtener los puntos críticos del sistema y analizar su estabilidad, debemos de dar una forma específica al parámetro  $\Xi$ , que se traduce en dar una forma particular al potencial  $V(\phi)$ . Al proponer un potencial de en forma de ley de potencias  $V(\phi) = V_0\phi^n$ , al analizar la ecuación (345), se puede observar que solamente los valores  $n = 1, 2$  pueden reproducir una expansión tipo de Sitter. Más aún, el caso lineal  $n = 1$  toma valores finitos en el marco de Einstein, mientras que en el marco de Jordan es del tipo Taquión, mientras que el caso cuadrático  $n = 2$  es el único que permite al campo  $\phi$  tomar un rango infinito en ambos marcos [89].

### 5.3.2. $V(\phi) = V_0\phi^2$

Consideremos entonces un potencial de la forma  $V(\phi) = V_0\phi^2$ . Por lo cual, de acuerdo a (343),  $\lambda = -2$ , de esta forma el sistema dinámico se reduce a dos dimensiones. Por lo tanto, el sistema dinámico para un potencial cuadrático está dado por

$$\frac{dx}{dN} = -3x \left( 1 + x - \frac{\omega}{6}x^2 - \left[ 1 + x - \frac{\omega}{6}x^2 - y^2 \right] \frac{2 + \omega\gamma}{3 + 2\omega} \right) + 3 \left( 1 + x - \frac{\omega}{6}x^2 - y^2 \right) \frac{4 - 3\gamma}{3 + 2\omega}, \quad (350)$$

$$\frac{dy}{dN} = 3y \left( -\frac{x}{2} + \frac{\omega}{6}x^2 + \left[ 1 + x - \frac{\omega}{6}x^2 - y^2 \right] \frac{2 + \omega\gamma}{3 + 2\omega} \right). \quad (351)$$

Con lo cual, al buscar puntos que satisfagan  $(x', y') = (0, 0)$ , los puntos críticos son

Nombre	$x$	$y$	$\mu_1$	$\mu_2$
A	$\frac{3 \pm \sqrt{3(3+2\omega)}}{2}$	0	$3(2 - \gamma) + x$	$3 + \frac{3}{2}x$
B	$\frac{\omega}{1 + \omega(2 - \gamma)}$	0	$-\frac{3}{2}(2 - \gamma) - \frac{x}{2}$	$\frac{3\gamma}{2} + x$
C	0	$\pm 1$	-3	$-3\gamma$
D	$-\frac{3}{2}\gamma$	$\pm \sqrt{\frac{8 - 3\gamma + 3\omega(1 - (\gamma - 1)^2)}{8}}$	$-\frac{3}{8}(4 - 3\gamma) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$	$-\frac{3}{8}(4 - 3\gamma) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

Tabla 2: Tabla con los puntos críticos del sistema (350)-(351), y con los eigenvalores de la matriz de estabilidad evaluada en esos puntos, tal que  $\Delta = \frac{9}{16}(4 - 3\gamma)^2 + 36(y_D)^2\gamma$ , donde  $y_D$  es el valor de la variable  $D$  del punto crítico D.

Un muy extenso análisis de la estabilidad de los puntos críticos de la tabla 2, junto con su implicación en los parámetros cosmológicos y soluciones en una vecindad de ellos, se encuentra en [89], por lo que aquí veremos un poco más a detalle uno de ellos el cual tiene importancia cosmológica.

El punto crítico  $C_2$  que está dado por  $x = 0$ ,  $y = 1$ , es un punto crítico estable para cualquier fluido barotrópico más allá de un fluido tipo fantasma, es decir, con  $\gamma > 0$ .

En este punto, podemos observar que  $\frac{\dot{H}}{H^2} = 0$ , con lo cual  $H = H_0$ , y por lo tanto el factor de escala es

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}, \quad (352)$$

el cual corresponde a un universo tipo de Sitter. Así, esto muestra que la teoría de Brans-Dicke nos provee de un punto crítico el cual a tiempo tardío nos da un universo en expansión acelerada tipo de Sitter, independientemente de las condiciones iniciales.

Más aún, al considerar las soluciones linealizadas cercanas a este punto crítico<sup>13</sup>, encontramos que el factor de Hubble toma la forma

$$\left( \frac{H(a)}{H_0} \right)^2 \approx 1 - \Omega_{DM,0} - \Omega_{M,0} + \Omega_{DM,0}a^{-3} + \Omega_{M,0}a^{-3\gamma}, \quad (353)$$

<sup>13</sup>Las soluciones linealizadas están basadas en el Teorema de Hartmann-Grobmann que se puede encontrar en [90] entre otras fuentes y el cual más adelante abordaremos.

en donde

$$\Omega_{\text{DM},0} = -\frac{4}{3} \left( \Delta x + \frac{1}{3+2\omega} \frac{4-3\gamma}{\gamma-1} \Omega_{\text{m},i} \right) \left( \frac{1}{a_3^{(i)}} \right)^{-3}, \quad (354)$$

$$\Omega_{\text{M},0} = \left( 1 + \frac{1}{3+2\omega} \frac{(4-3\gamma)(1+3\gamma)}{3\gamma(\gamma-1)} \right) \Omega_{\text{m},0}, \quad (355)$$

tal que  $a_3^{(i)}$  es una condición inicial,  $H_0 = H(a_0)$  con  $a_0 = 1$ ,  $\Delta x = x_3^{(i)}$  otra condición inicial, y  $\Omega_{\text{m},0}$  la cantidad de materia al día de hoy. De esta forma, en la solución linealizada, la constricción del sistema (344) nos queda

$$\Omega_{\text{m},0} \approx (\Delta x - 2\Delta y) \left( \frac{1}{a_3^{(i)}} \right)^{-3\gamma} = \Omega_{\text{m},i} \left( \frac{1}{a_3^{(i)}} \right)^{-3\gamma}, \quad (356)$$

tal que  $\Delta y = y_3^{(i)} - 1$  y  $\Omega_{\text{m},i}$  son condiciones iniciales.

Por lo cual, el parámetro de Hubble (353) representa una solución cerca al atractor tipo de Sitter, la cual se asemeja al parámetro de Hubble del modelo  $\Lambda$ CDM en donde el parámetro  $\Omega_{\text{DM},0}$  juega el papel del parámetro de densidad de la materia oscura. Si se considera un  $\gamma = 0$  nos llevaría a un caso en el que tenemos un sistema inestable, y el caso con  $\gamma = 1$  nos llevaría a una degeneración de los puntos críticos en el que ambos eigenvalores adquieren el mismo valor, con lo cual en el parámetro de Hubble linealizado aparecería términos proporcionales a un logaritmo natural [89].

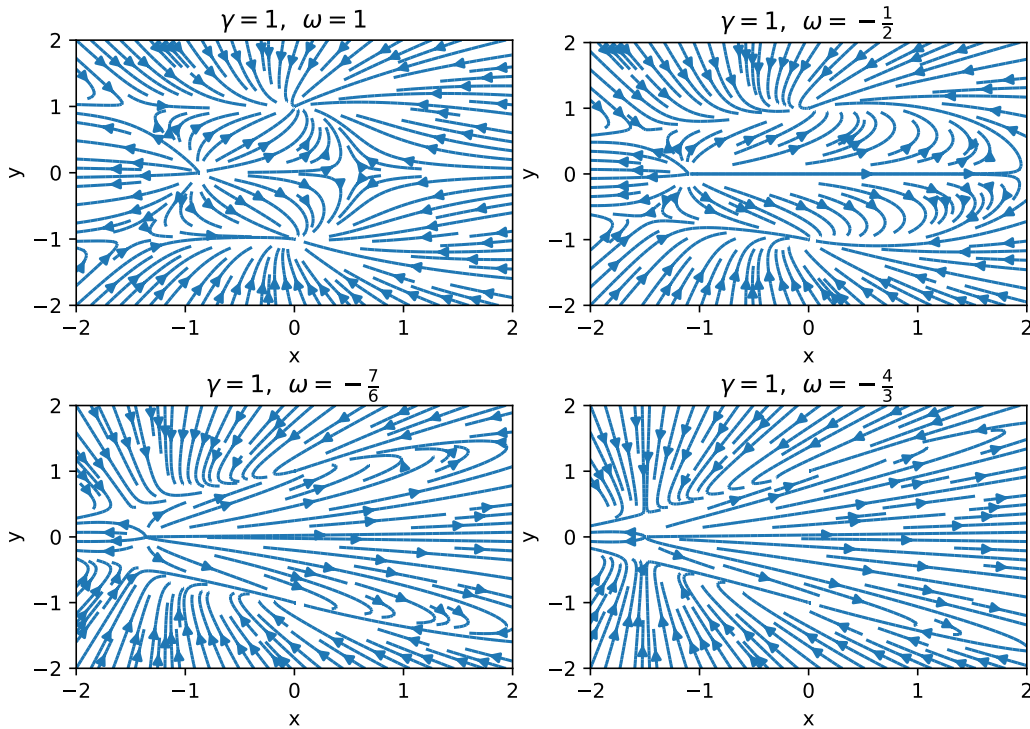


Figura 3: Gráfica del espacio fase del sistema dinámico (350)-(351) para distintos valores del parámetro de Brans-Dicke, y para un fluido barotrópico no relativista.

### 5.4. Teorías $f(R)$

Existen diversos trabajos en donde se usa análisis de sistemas dinámicos en teorías  $f(R)$ , por ejemplo en [91][92][93][94] entre muchos otros, por lo que aquí expondremos el análisis hecho en [95] en el cual consideraremos una curvatura  $k$  arbitraria en la métrica FLRW.

Primero, se definen los siguientes parámetros

$$\mathfrak{q} = \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \mathfrak{j} = \frac{\ddot{H}}{H^2} - \frac{\dot{H}^2}{H^3}, \quad (357)$$

con los cuales se pueden definir las variables dinámicas

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\equiv \frac{R}{6H^2}, \quad \mathbb{K} \equiv \frac{k}{a^2 H^2}, \quad \Omega = \frac{\rho}{3H^2 f_R}, \\ \mathbb{J} &= \frac{\mathfrak{j}}{4}, \quad \mathbb{Q} = \frac{3}{2}\mathfrak{q}, \quad \mathbb{A} = R_0 H^2, \end{aligned} \quad (358)$$

con  $R_0 > 0$  tal que  $RR_0$  es adimensional. La primera ecuación de Friedmann(146) y la forma explícita del escalar de Ricci (37) quedan dadas en términos de las variables dinámicas por

$$1 = \Omega - \mathbb{K} + \mathbb{R} - X - \left[ \left( 1 + \frac{\mathbb{Q}}{9} \right) \mathbb{Q} - \frac{\mathbb{R}}{2} + \mathbb{J} + 1 \right] Y, \quad (359)$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{K} + \frac{2}{3}\mathbb{Q} + 2, \quad (360)$$

en donde

$$X = \frac{f}{6H^2 f_R}, \quad Y = \frac{24H^2 f_{RR}}{f_R}. \quad (361)$$

Con base en las ecuaciones (359) y (360), vemos que las variables  $\mathbb{J}$  y  $\mathbb{Q}$  no son independientes, con lo cual el sistema dinámico está definido solamente en términos de las variables dinámicas independientes  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{A}$  y  $\Omega$ . Por lo cual, las ecuaciones de Friedmann (146), (150) pueden ser reescritas en forma de sistema dinámico como

$$\frac{d\mathbb{R}}{dN} = 2\mathbb{R}(\mathbb{K} - \mathbb{R} + 2) - \frac{4}{Y}(X + \mathbb{K} - \mathbb{R} - \Omega + 1), \quad (362)$$

$$\frac{d\mathbb{K}}{dN} = 2\mathbb{K}(\mathbb{K} - \mathbb{R} + 1), \quad (363)$$

$$\frac{d\mathbb{A}}{dN} = -2\mathbb{A}(2 + \mathbb{K} - \mathbb{R}), \quad (364)$$

$$\frac{d\Omega}{dN} = \Omega(2 - 3\omega + X + 3\mathbb{K} - 3\mathbb{R} - \Omega). \quad (365)$$

Observemos que para poder cerrar el sistema, debemos expresar a los parámetros  $X$  e  $Y$  en términos de las variables dinámicas, lo cual dependerá de la forma de la función  $f(R)$  a considerar. Para el caso de una función de la forma  $f(R) = R + \alpha R^n$ , los parámetros  $X, Y$ , de acuerdo a (361), quedan dados por

$$X = \frac{\mathbb{R}}{n} + \frac{(n-1)\mathbb{A}\mathbb{R}^2}{n(\mathbb{A}\mathbb{R} + \alpha n 6^{n-1} \mathbb{A}^n \mathbb{R}^n)}, \quad (366)$$

$$Y = \frac{4(n-1)}{\mathbb{R}} \left[ 1 - \frac{\mathbb{A}\mathbb{R}}{\mathbb{A}\mathbb{R} + \alpha n 6^{n-1} \mathbb{A}^n \mathbb{R}^n} \right], \quad (367)$$

con lo cual, el sistema dinámico (362) - (365) quedado dado por

$$\frac{d\mathbb{R}}{dN} = \frac{\mathbb{R} [n(2n-3)\mathbb{K} - (2n^2+3n+1)\mathbb{R} + n\Omega + 4n^2 - 5n]}{n(n-1)} - \frac{\mathbb{K} - \Omega + 1}{6^{n-1}\alpha(n-1)n\mathbb{A}^{n-1}\mathbb{R}^{n-2}}, \quad (368)$$

$$\frac{d\mathbb{K}}{dN} = 2\mathbb{K}(\mathbb{K} - \mathbb{R} + 1), \quad (369)$$

$$\frac{d\mathbb{A}}{dN} = -2\mathbb{A}(2 + \mathbb{K} - \mathbb{R}), \quad (370)$$

$$\frac{d\Omega}{dN} = \Omega \left[ 3\mathbb{K} + \left( \frac{1}{n} - 3 \right) \mathbb{R} - \Omega + 2 - 3\omega - \frac{(n-1)\mathbb{A}\mathbb{R}^2}{n(\mathbb{A}\mathbb{R} + \alpha n 6^{n-1} \mathbb{A}^n \mathbb{R}^n)} \right]. \quad (371)$$

Una vez tenemos el sistema dinámico, podemos encontrar sus puntos críticos. Para el sistema (368) - (371), los puntos críticos están dados en la tabla 3.

Punto	$\{\mathbb{R}, \mathbb{K}, \Omega, \mathbb{A}\}$	Existencia
A	$\{0, -1, 0, 0\}$	$n < 1/2$
B	$\{0, -1, -1 - 3\omega, 0\}$	$n < 1/2$
C	$\{n(1-n), 2(n-1)n-1, 0, 0\}$	$n < 1$
D	$\{0, 0, 2 - 3\omega, 0\}$	$n < 1/2$
E	$\{0, 0, 0, 0\}$	$n < 1/2$
F	$\left\{ \frac{(5-4n)n}{4n^2-6n+2}, 0, 0, 0 \right\}$	$n < 1$
G	$\left\{ \frac{3-4n+3\omega}{4n}, 0, \frac{6n^2\omega+8n^2-9n\omega-13n+3\omega+3}{2n^2}, 0 \right\}$	$n < 1$
H	$\{2, 0, 0, 12^{1-n}\sqrt{\alpha(n-2)}\}$	$\alpha(n-2) > 0$

Tabla 3: Puntos críticos del sistema (368) - (371).

Los puntos críticos A - G son los mismo puntos críticos que se obtienen al proponer  $f(R) = R^n$ , y esto se puede entender pensando que en las regiones cercanas a  $\mathbb{A} = 0$  la función  $f \propto R^n$ , por lo cual estos puntos aparecen en ambas teorías. Con los puntos críticos obtenidos, podemos ver en qué valores del parámetro  $n$  son estables, tomando el caso  $\omega = 0$  para hacer más fáciles los cálculos, e incluso obtener una solución al factor de escalar cerca a estos puntos.

1. Los puntos A, B y C son puntos silla para  $n < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) < n < 0$ ,  $0 < n$ ,  $n_1$  y  $n_1 < n < 1/2$ , en donde  $n_1$  es la solución real más pequeña de  $256n^3 - 608n^2 + 417n - 81 = 0$ . El punto C es también punto silla para  $1/2 < n < 1$ . Cerca de estos puntos el factor de escala está dado de manera implícita por

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_1}{a} + a^{1/2} \left[ H_2 \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} \log a \right) + H_3 \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} \log a \right) \right], \quad (372)$$

con  $H_1, H_2, H_3$  constantes.

2. Los puntos D y E son igualmente puntos silla para  $n < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) < n < 0$ ,  $0 < n, n_1$  y  $n_1 < n < 1/2$ , con la diferencia de que el factor de escala cerca a estos puntos es

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_1}{a^2} + a \left[ H_2 \sin \left( \sqrt{3} \log a \right) + H_3 \cos \left( \sqrt{3} \log a \right) \right]. \quad (373)$$

3. Los puntos F y G son también puntos silla para  $n < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) < n < 0$ ,  $0 < n, n_1$ ,  $n_1 < n < 1/2$  y  $1/2 < n < 1$ . Cerca del punto F el factor de escala toma la forma

$$a = a_0(t - t_0)^{\frac{(1-n)(1-2n)}{n-2}}, \quad (374)$$

mientras que para el punto G toma la forma

$$a = a_0(t - t_0)^{\frac{2n}{3(\omega+1)}}. \quad (375)$$

Finalmente, el punto crítico H es de particular importancia. Es silla para  $\alpha = 2, -1$  y  $n = -2, -1$ , atractor para  $\alpha = 1$  y  $n = -2, n = 1$  y silla de nuevo para  $\alpha = 2$  y  $n = 3/2, 5/2$ . En este punto el factor de escala está dado por

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ \frac{\sqrt{4H_2H_0 - H_1^2}}{2H_2} \tan \left[ \frac{1}{2}(t - t_0) \sqrt{4H_2H_0 - H_1^2} \right] - \frac{H_1}{2H_2} \right\}, \quad (376)$$

el cual podemos analizar por partes. Si  $4H_0H_2 - H_1^2 > 0$  el factor de escalar es monótonamente creciente con dos puntos de inflexión

$$t = t_{1,2}^* = t_0 \pm \frac{\arcsin \left( -\frac{\sqrt{4H_0H_2 - H_1^2}}{3H_2} \right)}{\sqrt{4H_0H_2 - H_1^2}} + 2k\pi, \quad (377)$$

además de mostrar una discontinuidad en

$$t = \bar{t} = t_0 - \frac{\pi}{\sqrt{4H_0H_2 - H_1^2}} + k\pi, \quad (378)$$

con  $k \in \mathbb{N}$ . De acuerdo a [95], cuando el tiempo se acerca a la discontinuidad por la derecha  $t \rightarrow \bar{t}^+$  el factor de escala crece exponencialmente, mientras que cuando se acerca a  $t_1^*$  cambia a una expansión desacelerada. Después de pasar el valor  $t_2^*$ , la expansión desacelerada es seguida por otra vez una expansión acelerada.

Observemos que cuando  $H_{1,2} = 0$  la solución es simplemente un universo tipo de Sitter, lo cual muestra que las teorías  $f(R)$  proveen una solución tipo de Sitter.

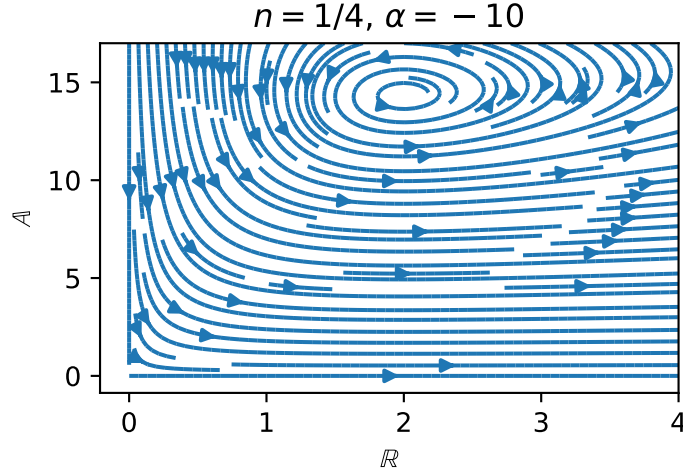


Figura 4: Gráfica del espacio fase del sistema (368) - (361) en la subvariedad invariante  $\Omega = 0$ ,  $\mathbb{K} = 0$  con  $n = 1/4$  y  $\alpha = -10$  [95].

## 5.5. Gravedad $f(T)$

En esta subsección discutiremos el procedimiento hecho en [96] para el análisis dinámico de teorías  $f(T)$  en gravedad teleparalela. Gravedad  $f(T)$  es el caso particular en el que  $f(T, B) = f(T)$ , tal que las ecuaciones de Friedmann para el caso plano están dadas por (298) y (299). Al hacer el mapeo  $f(T) \rightarrow T + f(T)$  estas ecuaciones se pueden reescribir como

$$H^2 = \frac{\kappa\rho}{3} - 2H^2 f_T - \frac{1}{6} f_T, \quad (379)$$

$$(H^2)' = \frac{2\kappa P + 6H^2 + f + 12H^2 f_T}{24H^2 f_{TT} - 2 - 2f_T}, \quad (380)$$

en donde la prima denota la derivada respecto a  $N = \ln a$ .

Consideremos el caso de un universo compuesto por materia no relativista y radiación, es decir, tal que

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \quad P = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (381)$$

De esta forma, a partir de las ecuaciones (379) y (380), podemos definir un fluido efectivo que juegue el papel de una energía oscura efectiva, tal que su densidad de energía y ecuación de estado están dadas por

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa} (-f + 2T f_T), \quad (382)$$

$$\omega_{\text{eff}} = -\frac{f/T - f_T + 2T f_{TT} + \frac{1}{3} \frac{\kappa\rho_r}{3H^2} (f_T + 2T f_{TT})}{(1 + f_T + 2T f_{TT})(f/T - 2f_T)}. \quad (383)$$

Así, definimos las variables dinámicas del sistema como

$$x \equiv -\frac{f}{6H^2}, \quad y \equiv \frac{T f_T}{3H^2}, \quad z \equiv \Omega_r \equiv \frac{\kappa\rho_r}{3H^2}, \quad (384)$$



en donde recordamos que al usar la signatura  $(+, -, -, -)$  el escalar de torsión es  $T = -6H^2$ . Por lo cual, usando las variables (384), podemos escribir el sistema de ecuaciones (379) - (380) en forma de sistema dinámico como

$$\frac{dx}{dN} = -(2x + y) \frac{z + 3 - 3x - 3y}{2my - 2 + y}, \quad (385)$$

$$\frac{dy}{dN} = 2my \frac{z + 3 - 3x - 3y}{2my - 2 + y}, \quad (386)$$

$$\frac{dz}{dN} = -4z - 2z \frac{z + 3 - 3x - 3y}{2my - 2 + y}, \quad (387)$$

en donde se ha definido el parámetro

$$m \equiv \frac{T f_{TT}}{f_T}. \quad (388)$$

Vemos que para cerrar el sistema, debemos poder escribir al parámetro  $m$  en términos de las variables dinámicas. En general, si definimos  $r \equiv -2 \frac{T f_T}{f} = \frac{y}{x}$ , es posible escribir a  $T$  como función de  $r$ , con lo cual, para ciertos modelos de  $f(T)$ , el parámetro  $m$  queda dado en términos de las variables dinámicas del sistema con una clara dependencia en  $r$ , por ejemplo, el caso  $f(T) = \alpha [(-T)^p - \beta]^q$  nos da  $m(r) = (1 - q)r/2q + p - 1$ . Con las variables dinámicas (384) podemos reescribir a la densidad de energía y a la ecuación de estado de la energía oscura efectiva (382) y (383) como

$$\Omega_{\text{eff}} = x + y + z = 1 - \Omega_m, \quad (389)$$

$$\omega_{\text{eff}} = -\frac{x + y/2 - my}{(1 - y/2 - my)(x + y)}, \quad (390)$$

en donde  $\Omega_m = \frac{\kappa \rho_m}{3H^2}$ .

Al exigir que el sistema dinámico (385) - (387) satisfaga  $(x', y', z') = (0, 0, 0)$ , encontramos que existen dos puntos críticos y una línea recta de puntos críticos en el espacio fase, los cuales son

1. Punto A:  $x = 0, y = 0, z = 1$ .
2. Punto B:  $x = 0, y = 0, z = 0$ .
3. Línea C:  $x = 1 - y, z = 0$ .

En el punto A, tenemos que

$$\Omega_r = 1, \quad (391)$$

el cual corresponde a un universo dominado por radiación. Al calcular la matriz de estabilidad del sistema (385) - (387) en el punto crítico A, obtenemos que los eigenvalores son

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_{2,3} = 2 \left( 2 - m \pm \sqrt{1 + 2m + m^2 + m'} \right), \quad (392)$$

con  $m' = \frac{dm}{dr}$ . vemos que dado que el eigenvalor  $\mu_1$  es positivo, este punto es a lo más silla o inestable, es decir, nunca es un punto estable.

En el punto B tenemos que

$$\Omega_m = 1, \quad (393)$$

es decir, corresponde a un universo dominado por materia no relativista. Los eigenvalores de la matriz de estabilidad asociados a este punto son

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_{2,3} = 2 - 2m \pm 2\sqrt{1 + 2m + m^2 - 2m'}. \quad (394)$$

Este último caso nos sirve para distinguir modelos cosmológicamente viables de  $f(T)$ , en particular aquellos puntos que le asocien un valor a  $m$  tal que alguno de los eigenvalores  $\mu_{2,3}$  sea positivo, haciendo así que el punto B sea silla lo que permite al universo salir de el estado dominado por materia no relativista.

Finalmente, en la línea C tenemos que

$$\Omega_m = \Omega_r = 0, \quad \text{y} \quad \omega_{\text{eff}} = -1, \quad (395)$$

y al sustituir en (380) obtenemos que

$$(H^2)' = 0. \quad (396)$$

Por lo tanto, la línea de puntos críticos C corresponde a un universo tipo de Sitter, es decir, un universo dominado por la energía oscura efectiva. En esta línea de puntos, los eigenvalores de la matriz de estabilidad son

$$\mu_1 = -4, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = -3. \quad (397)$$

De acuerdo a [96], cada punto en esta línea de puntos críticos es estable, por lo cual, se observa que para una forma dada de  $f(T)$ , el universo entra a una fase de aceleración tipo de Sitter.

Al considerar en particular un modelo tipo ley de potencias  $f(T) = \alpha(-T)^n$ , con  $\alpha$  y  $n \neq 1$  parámetros de la teoría, la línea C nos implica que el parámetro de Hubble no es constante, en particular, corresponde justamente a una expansión tipo de Sitter [96]. Por otro lado, para este modelo en particular tenemos que el parámetro  $m$  toma la forma  $m = -1 + n$  con  $m' = 0$ , y así, los eigenvalores del punto crítico B son

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = 2, \quad \mu_3 = -2n, \quad (398)$$

lo cual implica, para el caso  $n > 0$ , que el punto B es siempre inestable, por lo cual, el modelo tipo ley de potencias con  $n > 0$  y  $n \neq 1$ , permite al universo puede evolucionar de una época de dominación de radiación, a una época de dominación de materia no relativista y entrar finalmente a una época de expansión tipo de Sitter [96].

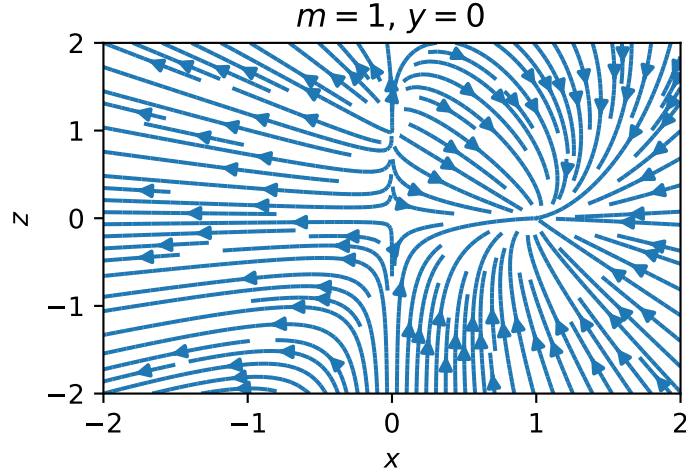


Figura 5: Gráfica del espacio fase del sistema dinámico (385) - (387) con un corte en  $y = 0$  para el caso  $f(T) = \alpha(-T)^n$  con  $n = 2$  que corresponde a  $m = 1$ .

Existen otros trabajos relacionados al uso de sistemas dinámicos en gravedad  $f(T)$ , por ejemplo, en [97] se analizan los puntos no hiperbólicos usando teoría de variedad centro, en [98] se hizo un análisis de sistemas dinámicos para constreñir los modelos cosmológicamente viables de  $f(T)$  en forma de ley de potencias, etcétera.

## 5.6. Gravedad $f(T, B)$

### 5.6.1. Construcción del sistema dinámico

A diferencia de los caso anteriores, en esta subsección abordaremos a detalle la discusión sobre sistemas dinámicos en gravedad  $f(T, B)$  presentado por primera vez en nuestro reciente artículo [99].

Comenzamos recordando que las ecuaciones de Friedmann en gravedad  $f(T, B)$  están dadas por

$$3H^2 = \kappa(\rho + \rho_{\text{eff}}), \quad (399)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\kappa(P + P_{\text{eff}}), \quad (400)$$

en donde la presión y densidad de energía del fluido efectivo están definidas como

$$\kappa\rho_{\text{eff}} = 3H^2(3f_B + 2f_T) - 3H\dot{f}_B + 3\dot{H}f_B - \frac{1}{2}f, \quad (401)$$

$$\kappa P_{\text{eff}} = \frac{1}{2}f - (3H^2 + \dot{H})(3f_B + 2f_T) - 2H\dot{f}_T + \ddot{f}_B, \quad (402)$$

tal que satisfacen

$$\dot{\rho}_{\text{eff}} + 3H(\rho_{\text{eff}} + P_{\text{eff}}) = 0, \quad (403)$$

con una ecuación de estado dada por

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -1 + \frac{\ddot{f}_B - 3H\dot{f}_B - 2\dot{H}f_T - 2H\dot{f}_T}{3H^2(3f_B + 2f_T) - 3H\dot{f}_B + 3\dot{H}f_B - \frac{1}{2}f}. \quad (404)$$

Al introducir el cambio de variable  $N = \ln a$ , las ecuaciones (399) y (400) quedan dadas como

$$\Omega + \Omega_{\text{eff}} = 1, \quad (405)$$

$$3 + 2 \left( \frac{H'}{H} \right) = -3\omega\Omega - \frac{3f}{6H^2} + 9f_B + 6f_T + 3 \left( \frac{H'}{H} \right) f_B + 2 \left( \frac{H'}{H} \right) f_T + 2f'_T \quad (406)$$

$$- \left( \frac{H'}{H} \right) f'_B - f''_B,$$

en donde

$$\Omega = \frac{\kappa\rho}{3H^2}, \quad (407)$$

$$\Omega_{\text{eff}} = 3f_B + 2f_T - f'_B - \frac{f}{6H^2} + \left( \frac{H'}{H} \right) f_B, \quad (408)$$

y tal que  $P = \omega\rho$ . En general, podemos hacer el análisis para un universo con algún fluido con ecuación de estado arbitraria, sin embargo, si queremos estudiar la aceleración tardía del universo, consideramos que  $\rho$  es la densidad de energía de materia no relativista y de materia oscura fría  $\rho = \rho_m + \rho_{\text{DM}}$ , con esto, consideramos la ecuación de estado  $\omega = 0$  que nos sirve para modelar ambos fluidos de acuerdo a las observaciones [100], con lo cual el término  $-3\omega\Omega$  en la ecuación (406) es cero.

Por otro lado, al calcular de manera explícita la ecuación (403) en términos del parámetro  $N = \ln a$ , obtenemos que

$$6 \left( \frac{H'}{H} \right) f_B + 2 \left( \frac{H'}{H} \right) f_T + \left( \frac{H'^2}{H^2} + \frac{H''}{H} \right) f_B - \frac{f'}{6H^2} = 0. \quad (409)$$

Ahora, con el fin de construir un sistema dinámico que sea autónomo, siguiendo un razonamiento similar a [91] y [94], introducimos el parámetro

$$\lambda = \frac{\ddot{H}}{H^3} = \frac{H'^2}{H^2} + \frac{H''}{H}. \quad (410)$$

El parámetro (410) es en general dependiente de la variable  $N$ , sin embargo, de acuerdo a [91] y [94], el caso en que  $\lambda = \text{constante}$  es cosmológicamente viable pues casos importantes como dominación de materia  $\lambda = 9/2$ , universos tipo de Sitter y cuasi de Sitter  $\lambda = 0$ , etc, se recuperan. Es por ello que se considerará a  $\lambda$  como constante a lo largo de esta discusión.

Por lo tanto, definimos las variables dinámicas del sistema como

$$x \equiv f_B, \quad y \equiv f'_B, \quad z \equiv \frac{H'}{H} = \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad w \equiv -\frac{f}{6H^2}, \quad (411)$$

tal que la ecuación (405) queda dada por

$$\Omega + 3x + 2f_T - y + w + zx = 1, \quad (412)$$

la cual constituye la constricción del sistema, y tal que el sistema dinámico queda dado por

$$z' = \lambda - 2z^2, \quad (413)$$

$$x' = y, \quad (414)$$

$$w' = -6zx - 2zf_T - \lambda x - 2zw, \quad (415)$$

$$y' = 3w + (9 + 3z)x + f_T(6 + 2z) + 2f'_T - zy - 3 - 2z, \quad (416)$$

en donde la prima denota la derivada respecto a  $N$ . Observemos que para cerrar totalmente el sistema es necesario escribir a  $f_T$  ya sea como una variable autónoma, encontrar su derivada con respecto a  $N$  y escribir esa derivada en términos de las otras variables del sistema, o no considerarla como variable dinámica independiente y escribirla en términos de las variables  $x, y, z, w$  ya definidas. Esto último es posible considerando un modelo específico de  $f(T, B)$ , en particular, de acuerdo a [82] existen ciertos modelos de  $f(T, B)$  que son cosmológicamente viables, entre ellos, discutiremos el análisis dinámico para el modelo de expansión de Taylor, el modelo de ley de potencias y el modelo de ley de potencias mixtas.

Antes de proceder a analizar detalladamente esos casos, observemos que las ecuaciones (413) y (414) son independientes de la forma que elijamos de  $f(T, B)$ , por lo cual, al imponer que  $(x', y', z', w') = (0, 0, 0, 0)$  siempre obtendremos las soluciones

$$z = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad y = 0, \quad (417)$$

mientras que los resultados para  $w' = 0$  y  $y' = 0$  sí dependen de la forma en particular de  $f(T, B)$ .

Por otro lado, al calcular la matriz de estabilidad  $\mathcal{M} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$  con  $f_1 = \lambda - 2z^2$ ,  $f_2 = y$ ,  $f_3 = -6zx - 2zf_T - \lambda x - 2zw$  y  $f_4 = 3w + (9 + 3z)x + f_T(6 + 2z) + 2f'_T - zy - 3 - 2z$ , vemos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = -4z\delta_j^1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_j} = \delta_j^4, \quad (418)$$

con lo cual, para cualquier modelo de  $f(T, B)$ , la matriz de estabilidad tiene la forma

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -4z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 & \partial_4 f_3 \\ \partial_1 f_4 & \partial_2 f_4 & \partial_3 f_4 & \partial_4 f_4 \end{pmatrix}, \quad (419)$$

por lo que, a la hora de calcular el determinante  $\det(\mathcal{M} - \lambda I) = 0$  y expandir por cofactores respecto a la primera fila, vemos que diagonalizar la matriz es equivalente a diagonalizar

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} -4z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 & \partial_4 f_3 \\ 0 & \partial_2 f_4 & \partial_3 f_4 & \partial_4 f_4 \end{pmatrix}, \quad (420)$$

la cual llamaremos la *matriz de estabilidad reducida* de la cual vemos directamente que, de acuerdo a (417), uno de los eigenvalores siempre es  $\mu_1 = \mp 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}$ .

### 5.6.2. Modelo de expansión en Taylor

En [101] se presentó un modelo particular de  $f(T, B)$  basado en una expansión en series de Taylor

$$f(T, B) = f(T_0, B_0) + f_T(T_0, B_0)(T - T_0) + f_B(T_0, B_0)(B - B_0) + \frac{1}{2!}f_{TT}(T_0, B_0)(T - T_0)^2 + \frac{1}{2!}f_{BB}(T_0, B_0)(B - B_0)^2 + f_{TB}(T_0, B_0)(T - T_0)(B - B_0) + \mathcal{O}(T^3, B^3), \quad (421)$$

la cual, al considerar  $T_0 = B_0 = 0$ , puede reescribirse como

$$f(T, B) \simeq A_0 + A_1T + A_2T^2 + A_3B^2 + A_4TB, \quad (422)$$

tomando los término lineales del término de frontera iguales a cero [101]. Con base en (422), observamos que cuando  $T = 0 = B$   $f(0, 0) = A_0$  lo cual, en la acción (272) corresponde a introducir un constante cosmológica  $A_0 \approx \Lambda$ , por lo que, al hacer  $A_0 = 0$  estaríamos considerando una expansión acelerada ocasionada solamente por los términos extra de  $T$  y  $B$ . Por lo cual, fijando  $A_0 = 0$ , obtenemos que

$$f_T = -(3 + z)x - 2w - A_1. \quad (423)$$

Al introducir (423) en (415) y (416), se obtiene que los puntos críticos del sistema están dados por <sup>14</sup>

$$w = -A_1, \quad x = \frac{A_1 - 1}{3 \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (424)$$

Por lo cual, los eigenvalores de la matriz de estabilidad reducida en estos puntos críticos están dados por

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -3 \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, & \mu_2 &= -3 \mp 2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \\ \mu_3 &= \mp 4\sqrt{\frac{\lambda}{2}}, & \mu_4 &= \pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \end{aligned} \quad (425)$$

Al evaluar la constricción (412) en los puntos críticos se obtiene que  $\Omega = 0$ . Por otro lado, vemos de (425) que para el caso de puntos hiperbólicos  $\text{Re}(\mu_3) = -\text{Re}(\mu_4) \neq 0$ , lo cual implica que todos los puntos críticos del sistema dinámico (413) - (416) son puntos silla, jamás son estables. En la figura 6 mostramos gráficas dos dimensionales del espacio fase del sistema dinámico cuatro dimensional tomando distintos cortes.

### 5.6.3. Ley de potencias

Si consideramos una forma de  $f(T, B)$  en forma de ley de potencias separadas tanto para la torsión como para el término de frontera obtenemos que [83]

$$f(T, B) = b_0B^k + t_0T^m. \quad (426)$$

De acuerdo a [102] este modelo tiene la particularidad de reproducir una aceleración tardía cuando  $m < 0$ , mientras que si  $m > 0$  hay un impacto relacionado con el universo temprano, esto cuando despreciamos el término de frontera, es decir, en gravedad  $f(T) = t_0T^m$ , por lo que a la hora de tomar en cuenta al término de frontera, podemos analizar este sistema y mostrar qué tipo de evolución cosmológica nos da este modelo de  $f(T, B)$ . De esta forma, obtenemos que

$$f_T = -mw - \frac{m}{k}(3 + z)x, \quad (427)$$

<sup>14</sup>De ahora en adelante, al reportar los puntos críticos escribiremos solamente los valores para  $w$  y  $x$  pues de acuerdo a (417), siempre tendremos los mismos valores para  $z = \pm\sqrt{\lambda/2}$  y  $y = 0$ .

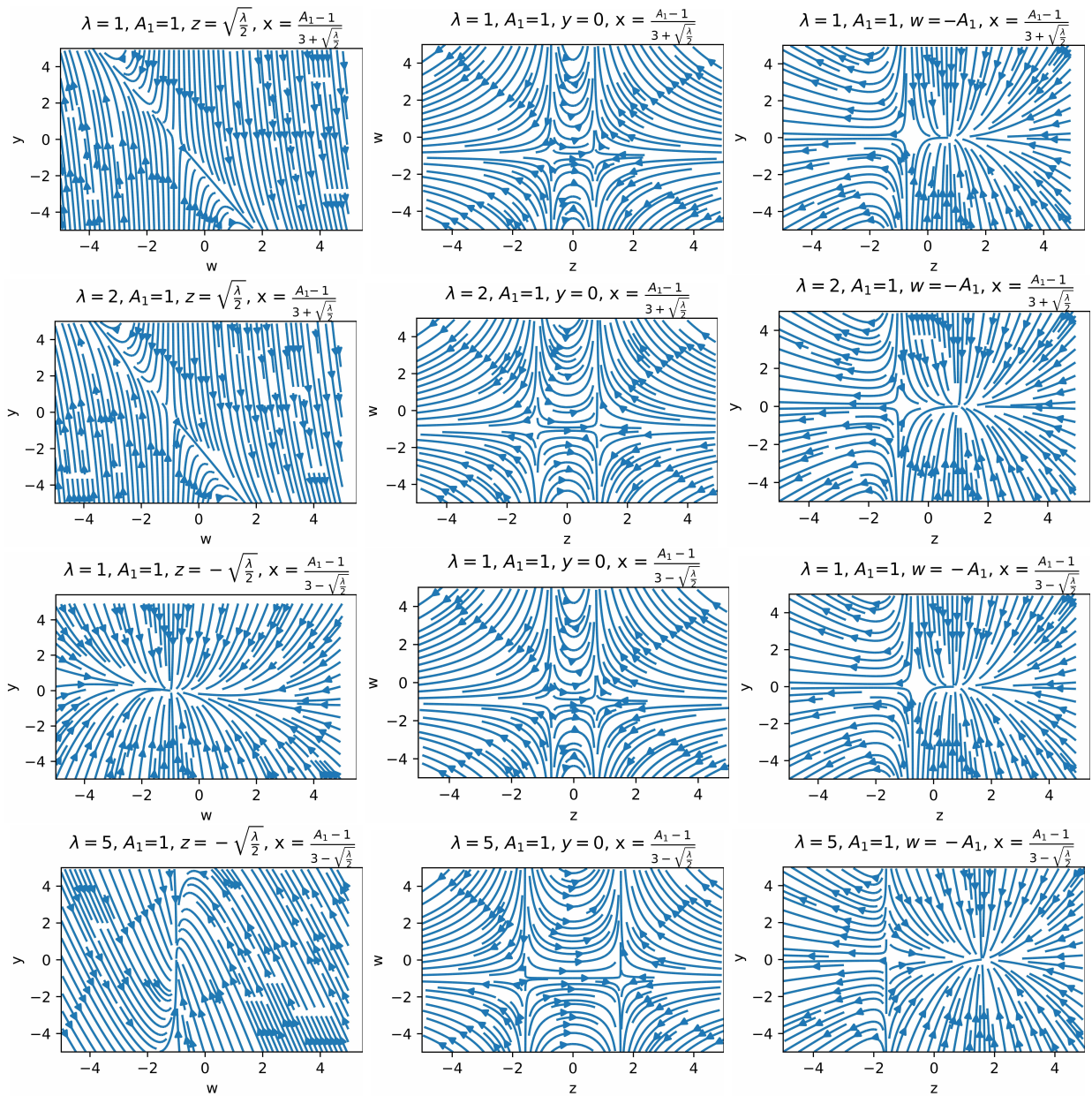


Figura 6: Gráficas dos dimensionales del espacio fase del sistema dinámico (413) - (415). Las flechas representan la dirección del campo de velocidades y las trayectorias de estas muestran la estabilidad de los puntos críticos.

con lo cual, los puntos críticos están dados por

$$w = \frac{k - m}{m(1 - k)}, \quad x = -\frac{k}{m} \left( \frac{m - 1}{k - 1} \right) \frac{1}{3 \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (428)$$

Al evaluar la constricción (412) en estos puntos críticos, se obtiene que  $\Omega = 0$ , por lo que el universo está dominado por el fluido efectivo. Por otro lado, dado que  $z = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  tenemos dos ramas de soluciones, la solución con signo positivo y la solución con signo negativo. Para este modelo, el análisis de estabilidad es conveniente hacerlo por separada para la rama positiva de soluciones y la rama negativa de soluciones.

**Rama positiva:** Para el caso con  $z = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ , los eigenvalores de la matriz estabilidad en este punto crítico son

$$\mu_1 = -\sqrt{2}\sqrt{\lambda} - 3, \quad (429)$$

$$\mu_2 = -2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}, \quad (430)$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{4k} \left( \sqrt{\alpha - \beta + \gamma} + k \left( \sqrt{2}\sqrt{\lambda}(1 - 2m) - 6 \right) + 2 \left( \sqrt{2}\sqrt{\lambda} + 6 \right) m \right), \quad (431)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{4k} \left( \sqrt{\alpha - \beta + \gamma} + k \left( \sqrt{2}\sqrt{\lambda}(2m - 1) + 6 \right) - 2 \left( \sqrt{2}\sqrt{\lambda} + 6 \right) m \right), \quad (432)$$

en donde

$$\alpha = 2k^2 \left( \lambda(2m + 1)^2 + 6\sqrt{2}\sqrt{\lambda}(6m - 1) + 18 \right), \quad (433)$$

$$\beta = 8km \left( \lambda + 6\sqrt{2}\sqrt{\lambda}(m + 1) + 2\lambda m + 18 \right), \quad (434)$$

$$\gamma = 8 \left( \lambda + 6\sqrt{2}\sqrt{\lambda} + 18 \right) m^2. \quad (435)$$

Dado que  $\text{Re}(\mu_1) < 0$  los puntos críticos para esta rama son atractores o puntos sillas, sin embargo, primero debemos observar los casos en que el punto crítico es un punto no hiperbólico, es decir, en que casos  $\text{Re}(\mu_3) = 0$  y en casos  $\text{Re}(\mu_4) = 0$ .

- Para el caso en que  $\text{Re}(\mu_3) = 0$  obtenemos las siguientes regiones para los parámetros libres  $k, m, \lambda$  <sup>15</sup>

1.

$$k = 1 \wedge 0 < m < \frac{1}{2} \wedge 0 < \lambda < 72m^2 - 72m + 18, \quad (436)$$

2.

$$0 < m < \frac{1}{2} \wedge 2m < k \leq 1 \wedge \lambda = \frac{18(k - 2m)^2}{(-2km + k + 2m)^2}, \quad (437)$$

- Para el caso  $\text{Re}(\omega_4) = 0$  los parámetros libres deben de estar en las siguientes regiones:

<sup>15</sup>Aquí, usamos los operadores lógicos  $\vee$  como “O” y usamos  $\wedge$  como “Y”.



1.

$$k = 1 \wedge \left[ \left( 0 < m < \frac{1}{2} \wedge \lambda > 72m^2 - 72m + 18 \right) \vee \left( m \geq \frac{1}{2} \wedge \lambda > 0 \right) \right], \quad (438)$$

2.

$$0 < m < \frac{1}{2} \wedge 2m < k \leq 1 \wedge \lambda = \frac{18(k - 2m)^2}{(-2km + k + 2m)^2}. \quad (439)$$

■ Finalmente, el caso en que el punto es atractor está dado por las regiones:

1.

$$0 < m \leq \frac{1}{2} \wedge 0 < k < 1 \wedge \lambda > 18, \quad (440)$$

2.

$$m > \frac{1}{2} \wedge 0 < k < 1 \wedge \lambda > 0, \quad (441)$$

y entonces las regiones en que es punto silla quedan determinadas indirectamente como las regiones complemento a las anteriormente descritas.

De acuerdo a [82], este modelo debe seguir una serie de propiedades que deben ser rescatables del análisis dinámico, estas son

- Si  $m > k$  la ecuación de estado efectiva es  $\omega_{\text{eff}} < -1/3$ .
- Si  $m < k$  entonces se debe recuperar  $\Lambda\text{CDM}$ .
- Si  $b_0 \neq t_0$  entonces tenemos que la ecuación de estado cruza varias línea  $\omega_{\text{eff}} = -1$ .
- Finalmente debe de recuperarse una aceleración tardía tipo  $\Lambda\text{CDM}$ .

Sin embargo, dado que en nuestro análisis de sistema dinámico, el parámetro  $\lambda$  está intrínsecamente relacionado con la forma que tenga el parámetro de Hubble, entonces estas condiciones se traducen en poder recuperarlas para ciertas combinaciones de  $\lambda$ ,  $k$  y  $m$  dadas del análisis de estabilidad.

**Rama negativa:** Para el caso  $z = -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ , los eigenvalores de la matriz de estabilidad para este punto crítico están dados por

$$\mu_1 = \sqrt{2}\sqrt{\lambda} - 3, \quad (442)$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}, \quad (443)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{4k} \left( -\sqrt{\frac{\gamma k^2}{4m^2} + \eta} \right) + \zeta, \quad (444)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{4k} \left( \sqrt{\frac{\gamma k^2}{4m^2} + \eta} \right) + \zeta. \quad (445)$$

con

$$\zeta = \frac{1}{4k} \left( k \left( \sqrt{2}\sqrt{\lambda}(1-2m) + 6 \right) + 2 \left( \sqrt{2}\sqrt{\lambda} - 6 \right) m \right), \quad (446)$$

$$\eta = 8m^2 \left( \lambda(k-1)^2 + 6\sqrt{2}\sqrt{\lambda}(k-1) + 18 \right) - 8mk \left( 3\sqrt{2}\sqrt{\lambda}(3k-2) - k\lambda + \lambda + 18 \right). \quad (447)$$

Observemos que, con base en los eigenvalores  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , el punto crítico asociado a la rama negativa corresponde a un escenario en donde el universo no se expande sino que se contrae, y la contracción es acelerada si  $\lambda > 2$ , pero este representa un punto silla. Por otro lado, de acuerdo a  $\mu_1$ , si  $0 < \lambda < \frac{9}{2}$  el punto es hiperbólico y es un punto silla. Ahora, falta analizar los casos en que aunque la parte real de los primeros dos eigenvalores sean positivos, algunos de los últimos eigenvalores tenga signo negativo, para esto primero hay que ver en qué regiones de los parámetros libres  $\lambda, k, m$  la parte real de alguno de los eigenvalores se haga cero, lo que correspondería a un punto crítico no hiperbólico.

- El caso en que  $Re(\omega_3) = 0$  se satisface en las regiones:

1.

$$0 < m < 1 \wedge \left( (0 < k < 1 \wedge \lambda = 18) \vee (k = 1 \wedge \lambda > 72m^2 - 72m + 18) \vee (k > 1 \wedge \lambda = 18) \right), \quad (448)$$

2.

$$k = 1 \wedge \left[ (m \geq 1 \wedge \lambda \geq 72m^2 - 72m + 18) \vee \left( \frac{3}{4} < m < 1 \wedge \lambda = 72m^2 - 72m + 18 \right) \right], \quad (449)$$

3.

$$0 < k < 1 \wedge \left( m \geq 1 \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km + k + 2m)^2} \right), \quad (450)$$

4.

$$1 < k < 2 \wedge \left( \frac{3k}{2k+2} < m \leq 1 \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km + k + 2m)^2} \right), \quad (451)$$

5.

$$k = 2 \wedge m = 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda \leq 18, \quad (452)$$

6.

$$k > 2 \wedge 1 \leq m < \frac{3k}{2k+2} \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km + k + 2m)^2}, \quad (453)$$

7.

$$k < 0 \wedge \left[ (m > 1 \wedge \lambda = 18) \vee \left( 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km + k + 2m)^2} \right) \right], \quad (454)$$

8.

$$m > \frac{3}{2} \wedge -\frac{2m}{2m-3} < k < 0 \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2}, \quad (455)$$

■ La condición  $Re(\omega_4) = 0$  se satisface si:

1.

$$k = 1 \wedge \frac{3}{4} < m \leq 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda \leq 72m^2 - 72m + 18, \quad (456)$$

2.

$$\begin{aligned} & \left[ m \geq 1 \wedge 0 < k < 1 \wedge \left( \lambda = 18 \vee \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2} \right) \right] \\ & \vee \left( m > 1 \wedge k = 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda < 72m^2 - 72m + 18 \right) \\ & \vee (k > 1 \wedge \lambda = 18), \end{aligned} \quad (457)$$

3.

$$1 < k < 2 \wedge \left[ \left( \frac{3k}{2k+2} < m < 1 \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2} \right) \vee (m = 1 \wedge \lambda = 18) \right], \quad (458)$$

4.

$$k = 2 \wedge m = 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda \leq 18, \quad (459)$$

5.

$$k > 2 \wedge \left( 1 \leq m < \frac{3k}{2k+2} \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2} \right), \quad (460)$$

6.

$$k < 0 \wedge \left[ (0 < m < 1 \wedge \lambda = 18) \vee \left( 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2} \right) \right], \quad (461)$$

7.

$$m > \frac{3}{2} \wedge -\frac{2m}{2m-3} < k < 0 \wedge \lambda = \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2}. \quad (462)$$

■ Ahora, el caso en que el punto crítico es un punto silla es tal que  $Re(\omega_3), Re(\omega_4) > 0$ , y esto se satisface si

1.

$$0 < m < \frac{1}{2} \wedge \left[ (0 < k < 1 \wedge \lambda > 18) \vee \left( k > 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda < 18 \right) \right], \quad (463)$$

2.

$$m = \frac{1}{2} \wedge \left[ (0 < k < 1 \wedge \lambda > 18) \vee \left( k > 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda < 18 \right) \right], \quad (464)$$

3.

$$\frac{1}{2} < m < 1 \wedge 0 < k < 1 \wedge \lambda > 18, \quad (465)$$

4.

$$m \geq 1 \wedge \left[ \left( 0 < k < \frac{2m}{1+2m} \wedge \lambda > 18 \right) \vee \left( k > \frac{2m}{1+2m} \wedge \lambda > 18 \right) \right], \quad (466)$$

5.

$$1 < m < \frac{3}{2} \wedge k > -\frac{2m}{2m-3} \wedge \frac{9}{2} < \lambda < \frac{18(k-2m)^2}{(-2km+k+2m)^2}, \quad (467)$$

6.

$$k < 0 \wedge \left[ \left( 0 < m < 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda < 18 \right) \wedge \left( m > 1 \wedge \frac{9}{2} < \lambda < \frac{18(k-2m)^2}{(k+2m-2km)^2} \right) \right]. \quad (468)$$

En la figura 7 mostramos gráficas dos dimensionales del espacio fase del sistema dinámico (413) - (416).

#### 5.6.4. Ley de potencias mixtas

En lugar de proponer un modelo de ley de potencias para  $f(T, B)$  con la torsión y el término de frontera separados, podemos proponer que estos estén acoplado de la siguiente forma [83]

$$f(T, B) = f_0 B^k T^m, \quad (469)$$

con  $f_0, k, m$  constantes libres del sistema. El caso particular en que  $k = 0 = m$  hace que  $f = \text{constante}$  lo que en la acción (272) jugaría el papel de una constante cosmológica con lo cual se recupera el modelo de  $\Lambda$ CDM. Para este modelo tenemos que

$$f_T = -mw. \quad (470)$$

Sin embargo, a diferencia de los anteriores modelos, este tiene la particularidad de que

$$x = f_B = k f_0 B^{k-1} T^m = \frac{k}{B} f = \frac{k}{6(3H^2 + \dot{H})} f = \frac{f}{6H^2} \frac{k}{3 + \frac{\dot{H}}{H^2}} = -\frac{wk}{3+z}, \quad (471)$$

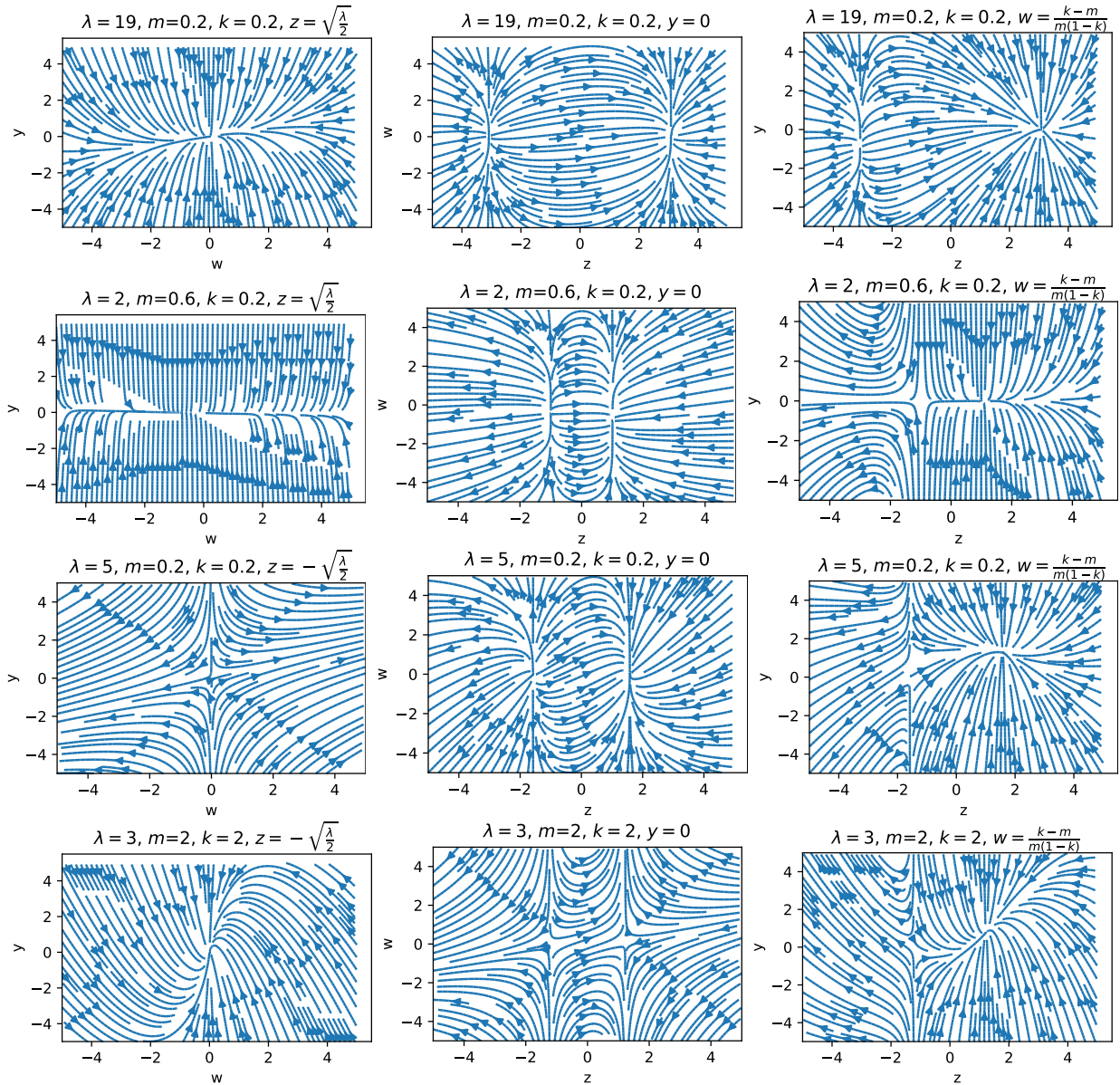


Figura 7: Gráficas dos dimensionales del espacio fase del sistema dinámico (413) - (416) para el modelo de ley de potencias con distintos valores de los parámetros libres  $\lambda, k, m$  con el corte  $x = -\frac{k}{m} \left( \frac{m-1}{k-1} \right) \frac{1}{3+z}$ .

es decir, la variable dinámica  $x$  no es una variable independiente, y más aún, dado que  $y = x'$ , con base en la ecuación (415), vemos que la variable  $y$  tampoco es una variable independiente pues  $y = y(w, z)$ . Por lo cual, el sistema dinámico cuatro dimensional con las variables dinámicas se reduce a un sistema dinámico dos dimensional con  $z, w$  como variables dinámicas independientes. Con lo cual, al reescribir al sistema dinámico tomando en cuenta las anteriores observaciones, se obtiene el sistema dinámico dos dimensional:

$$z' = \lambda - 2z^2, \quad w' = w \left[ \frac{6z(k + m - 1) + \lambda k + 2z^2(m - 1)}{3 + z} \right]. \quad (472)$$

Para el sistema dinámico (472) los puntos críticos hiperbólicos son

$$z = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad \text{and} \quad w = 0. \quad (473)$$

Para este modelo la matriz de estabilidad está dada por

$$M = \begin{pmatrix} -4z & 0 \\ g(z, w) & \frac{k\lambda}{z+3} + \frac{6kz}{z+3} + 2mz - 2z \end{pmatrix} \quad (474)$$

en donde  $g(z, w)$  es una función particular de  $z$  y  $w$ . De nueva cuenta, para analizar la estabilidad de los puntos críticos, debemos de analizar por separado tanto la rama positiva como la rama negativa.

**Rama positiva:** Para el caso  $z = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  los eigenvalores de la matriz de estabilidad son

$$\mu_1 = -2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}, \quad (475)$$

$$\mu_2 = (k + m - 1) \frac{6\sqrt{\frac{\lambda}{2}} + \lambda}{3 + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (476)$$

Dado que para obtener un parámetro de Hubble que no sea imaginario, hemos trabajado a lo largo de la sección con  $\lambda > 0$  implícitamente, con lo cual, los eigenvalores  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son reales. Por otro lado, dado que  $\text{Re}(\mu_1) < 0$ , entonces el punto crítico es o atractor o punto silla, en particular, es atractor si  $k < 1 - m$  y silla  $k > 1 - m$ . El caso  $k = 1 - m$  corresponde a un punto no hiperbólico.

**Rama negativa:** Para el caso  $z = -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ , lo eigenvalores de la matriz de estabilidad son

$$\omega_1 = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}, \quad (477)$$

$$\omega_2 = (k + m - 1) \frac{-6\sqrt{\frac{\lambda}{2}} + \lambda}{3 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (478)$$

Con lo cual vemos que el punto crítico es repulsor o silla, en particular, es repulsor si  $k < 1 - m$  y  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 18$  y es silla si  $k > 1 - m$  con  $\lambda > 0$  y  $\lambda \neq 18$ .

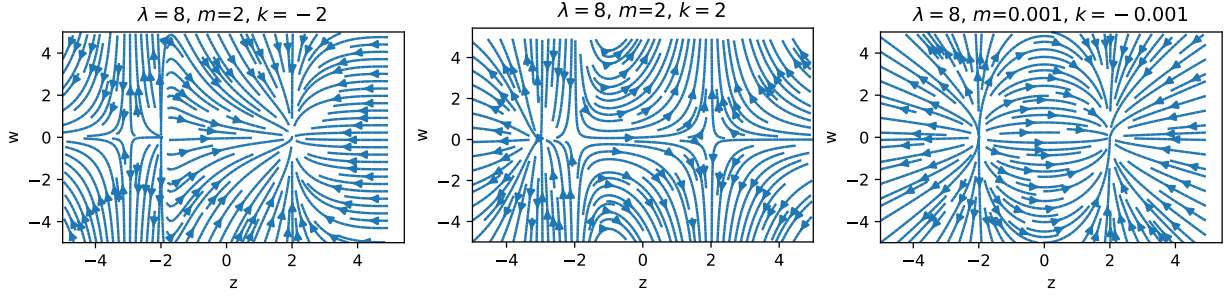


Figura 8: Gráficas del espacio fase del sistema dinámico para el modelo de potencias mixtas (472) para distintos valores de  $\lambda, m, k$ .

### 5.6.5. Implicaciones cosmológicas

Al analizar el modelo de potencias mixtas se observa que los puntos críticos son silla, lo cual nos permite descartar a nivel dinámico al modelo de expansión en Taylor pues no es capaz de reproducir expansión acelerada como un atractor estable. Para los casos de ley de potencias mixtas y ley de potencias separadas, vemos que es posible obtener expansión acelerada como atractor estable. Más aún, si analizamos la ecuación de estado efectiva (404) en los puntos críticos para cada uno de los modelos, se obtiene que para los modelos de expansión en Taylor y ley de potencias, este toma la forma

$$\omega_{\text{eff}} = -1 \mp \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad (479)$$

en donde observamos que para  $\lambda \approx 0$ ,  $\omega_{\text{eff}} \approx -1$ , con lo cual, para valores cercanos a cero del parámetro  $\lambda$ , pero no idénticamente igual a cero pues esto haría los puntos críticos sean no hiperbólicos, ambos modelos pueden reproducir una ecuación de estado correspondiente a una constante cosmológica y con lo cual ambos modelos imitarían un comportamiento tipo  $\Lambda$ CDM, sin embargo el modelo de Taylor es inestable, en el sentido de punto silla, en este estado y a cualquier perturbación de las condiciones iniciales el universo dejaría de estar en esta fase de aceleración tipo  $\Lambda$ CDM, mientras que el modelo de potencias separadas sí permite que el universo se mantenga en este estado a pesar de que existan pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales pues es un atractor.

Por otro lado, para el modelo de potencias mixtas se tiene <sup>16</sup>

$$\omega_{\text{eff}} \xrightarrow{w \rightarrow 0} -1 \mp \frac{2}{3} (k + m) \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \quad (480)$$

La ecuación (480) recupera el caso estándar  $k = 0 = m$  mencionado anteriormente en donde  $f = \text{constante}$  y por lo tanto el modelo es idéntico a Relatividad General con una constante cosmológica, pues en ese caso  $\omega_{\text{eff}} = -1$ .

Por otro lado, al definir los parámetros cosmográficos, en particular el parámetro de desaceleración  $q$  y el jerk  $j$

$$q = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1, \quad j = \frac{\ddot{a}}{aH^3}, \quad (481)$$

<sup>16</sup>Formalmente colocamos el límite con el fin de evitar una indeterminación tipo 0/0, sin embargo es posible trabajar con la extensión continua de la ecuación de estado y colocar un signo de igualdad.

es posible escribirlos en términos de la variable dinámica  $z$  evaluada en el punto crítico como  $z = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  los cuales quedan dados por

$$q = -1 \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad j = \lambda \mp 3\sqrt{\frac{\lambda}{2}} + 1, \quad (482)$$

los cuales cuando  $\lambda \approx 0$  se aproximan a  $q \approx -1$  y  $j \approx 1$  cuyos valores son correspondientes a  $\Lambda$ CDM.

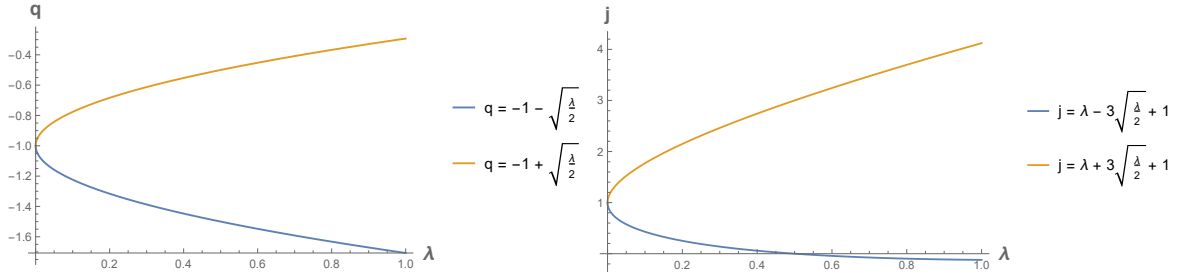


Figura 9: Gráficas de los parámetros de desaceleración  $q$  y del jerk  $j$  para ambas ramas de  $z = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  como función del parámetro  $\lambda$ .

En general, el análisis de la estabilidad de los puntos críticos en gravedad  $f(T, B)$  para los distintos modelos cosmológicamente viables arriba descrito nos permite discriminar entre los distintos modelos como vimos anteriormente, pues dependiendo del modelo es posible ver qué tipo de universo nos da como estable, en particular, al comparar con las observaciones, solamente dos de ellos de los tres analizados describen un universo como un universo en expansión acelerada y estable lo cual permite enfocar futuros estudios en analizar principalmente los modelos de leyes de potencias tanto mixtas como separadas pues son los únicos que nos dan la dinámica requerida por las observaciones, sin embargo, para estudiar más a detalle y poder discriminar más a profundidad un modelo de otro a partir de sistemas dinámicos, es necesario considerar el caso de  $\lambda \neq \text{constante}$ , lo cual se puede hacer de diferentes formas, una de ellas es a través del estudio de sistemas no autónomos, pues al no ser constante el parámetro  $\lambda$  tenemos una dependencia explícita de  $N = \ln a$  en el sistema dinámico, y otra es para el caso particular del modelo de potencias mixtas, pues dada la degeneración de variables libres, es posible proponer a  $\lambda$  como una variable dinámica extra y obtener su derivada respecto a  $N$  en términos de las variables  $z, w, \lambda$  al usar la segunda ecuación de Friedmann. Finalmente, vale la pena observar que los resultados basados en datos observacionales hechos en [82] muestran consistencia con los resultados aquí obtenidos, pues por ejemplo señalan que una ecuación de estado tipo fantasma  $\omega_{\text{eff}} < -1$  se debe obtener para el modelo de potencias mixtas y modelos de potencias separadas para los casos en que  $k < m$  o  $k > m$  lo cual está de acuerdo con el caso particular en que  $k < 1 - m < m$  con  $m > 1/2$  para ciertos valores de  $\lambda$  el punto crítico asociado a estos modelos se vuelve inestable, lo cual nos evita estos estados en la que la ecuación de estado efectiva modela un fluido tipo fantasma, para el caso de Taylor, se encontró que cuando el corrimiento al rojo se aproxima a uno, que corresponde con  $\lambda$  pequeños, pues a corrimientos al rojo cercanos a cero entonces  $\lambda \approx 0$ , cuando el término de frontera domina, la ecuación de estado  $\omega_{\text{eff}}$  se aproxima a  $\Lambda$ CDM que corresponde a un universo acelerado, lo cual con cuerda con la ecuación (480). Sin



embargo el análisis dinámico hecho muestra que, en el modelo de Taylor, el universo tendería a salirse de este estado dado que no es un estado estable en este modelo.

### 5.6.6. Análisis con $\lambda$ variable

Como veremos más adelante, en este análisis es posible ligar algunos resultados de manera directa con las observaciones [103], por lo que es conveniente reescribir las variables dinámicas en mayúsculas

$$X \equiv f_B, \quad Y \equiv f'_B, \quad Z \equiv \frac{H'}{H} = \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad W \equiv -\frac{f}{6H^2}, \quad (483)$$

para evitar confusiones entre la variable  $Z = \frac{H'}{H}$  y el corrimiento al rojo  $z$ .

En las subsecciones anteriores, vimos que el modelo de potencias mixtas presenta una degeneración en el número de variables independientes. En efecto, vemos que

$$X = f_B = kf_0 B^{k-1} T^m = \frac{k}{B} f = \frac{k}{6(3H^2 + \dot{H})} f = \frac{f}{6H^2} \frac{k}{3 + \frac{\dot{H}}{H^2}} = -\frac{Wk}{3 + Z}, \quad (484)$$

con lo cual  $X$  deja de ser una variable dependiente. Bajo el mismo análisis es fácil ver que la variable  $Y = f'_B$  tampoco es una variable independiente. Por lo cual, hay dos formas de abordar el caso de  $\lambda = \frac{\dot{H}}{H^3}$  variable para este modelo, el primero es considerando a  $\lambda$ ,  $Z$  y  $W$  como variables dinámicas, lo cual en la práctica resulta pesado y tedioso de trabajar, por lo que trabajaremos con una segunda manera la cual es más fácil de llevar a cabo y la cual es totalmente equivalente a la primera, que consiste en ver que para el caso  $Z \neq -3$ , el cual es equivalente a evitar que el término de frontera se haga igual a cero  $B \neq 0$ , podemos reescribir la ecuación (484) como

$$W = -\frac{X}{k}(Z + 3), \quad (485)$$

y de esta forma, considerar a  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  como variables independientes y a  $W$  y  $\lambda$  como variables dependientes. Al trabajar de esta forma en el modelo de potencias mixtas, encontramos que el parámetro  $\lambda$  que habíamos dejado constante anteriormente lo podemos expresar en términos de las variables  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  como:

$$\lambda = \frac{1}{1-k} \left( 6kZ + 2(m-1)(Z+3)Z - \frac{Y(Z+3)}{X} + 2Z^2 \right). \quad (486)$$

Con esto en mente, podemos ir más lejos y considerar ahora un universo con dos fluidos  $\rho = \rho_\omega + \rho_r$ , en donde  $\rho_\omega$  es un fluido perfecto con una ecuación de estado  $\omega$  no necesariamente cero y  $\rho_r$  radiación. De esta forma, las variables dinámicas son

$$X \equiv f_B, \quad Y = f'_B, \quad Z = \frac{H'}{H} = \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad V \equiv \Omega_r \equiv \frac{\kappa\rho_r}{3H^2}, \quad (487)$$

con las cuales, podemos escribir las ecuaciones de Friedmann en gravedad  $f(T, B)$  (305) y (306) en forma de sistema dinámico como

$$Z' = \lambda - 2Z^2, \quad (488)$$

$$X' = Y, \quad (489)$$

$$Y' = -3\omega\Omega_\omega - V + 3W + (9 + 3Z)X + f_T(6 + 2Z) + 2f'_T - ZY - 3 - 2Z, \quad (490)$$

$$V' = -4V - 2ZV, \quad (491)$$

con  $f_T = -mW$ ,  $W$  y  $\lambda$  dadas por las ecuaciones (485) y (486) respectivamente, y

$$\Omega_\omega = 1 - V - \Omega_{\text{eff}}, \quad (492)$$

en donde

$$\Omega_{\text{eff}} = (3 + Z)X + 2f_T - Y + W. \quad (493)$$

Así, el punto crítico del sistema dinámico (491) está dado por

$$\mathbf{x}_* = (Z, X, Y, V) = \left(0, \frac{k}{3(k+2m-1)}, 0, 0\right), \quad (494)$$

y en donde, la matriz de estabilidad evaluada en el punto crítico está dada por

$$\mathcal{M}|_{\mathbf{x}_*} = \begin{pmatrix} -\frac{6m}{k-1} - 6 & 0 & \frac{9(k+2m-1)}{(k-1)k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2m}{k-1} + \omega - 1 & \frac{9(\omega+1)(k+2m-1)}{k} & \frac{6m}{k-1} - 3\omega & 3\omega - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (495)$$

Con lo cual, los eigenvalores de la matriz de estabilidad (495) están dados por

$$\mu_1 = -4, \quad (496)$$

$$\mu_2 = -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)}\right), \quad (497)$$

$$\mu_3 = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)}\right), \quad (498)$$

$$\mu_4 = -3(1 + \omega), \quad (499)$$

en donde  $\alpha = (k-1)k(9k^2 + 24(k-1)m - 17k + 16m^2 + 8)$ . Ahora, para poder obtener un punto crítico estable usando teoría lineal de sistemas dinámicos, es necesario primero encontrar los valores para  $k$ ,  $m$  y  $\omega$  los cuales hagan que la parte de real de los eigenvalores se haga cero, es decir, que el punto crítico sea no hiperbólico y entonces la teoría lineal no sea válida. Del eigenvalor  $\mu_4$  vemos que el caso  $\omega = -1$  nos da un punto no hiperbólico, por lo cual la condición  $\omega \neq -1$  es necesaria.

Por otro lado, observemos que el caso  $\alpha < 0$  nos deja a todos los eigenvalores con parte real distinta de cero, por lo cual debemos enfocarnos en el caso  $\alpha > 0$ . Ahora, veamos que bajo la condición  $\omega \neq -1$ , los eigenvalores  $\mu_1$  y  $\mu_4$  nunca son cero, por lo que debemos dividir los caso en  $\mu_2 = 0$  o  $\mu_3 = 0$ . Las regiones de valores para  $k$  y  $m$  tales que  $\mu_2 = 0$  o  $\mu_3 = 0$  son:

■  $\mu_2 = 0$ :

1.

$$0 < m < \frac{1}{2} \wedge (k = 1 - 2m \vee k = 1 - m). \quad (500)$$

2.

$$\frac{1}{2} \leq m < 1 \wedge k = 1 - m. \quad (501)$$

■  $\mu_3 = 0$ :

1. 
$$m < 0 \wedge (k = 1 - m \vee k = 1 - 2m). \quad (502)$$

2. 
$$\frac{1}{2} < m \leq 1 \wedge k = 1 - 2m. \quad (503)$$

3. 
$$m > 1 \wedge (k = 1 - 2m \vee k = 1 - m). \quad (504)$$

Ahora, ya que tenemos caracterizadas las regiones en las que alguno de los eigenvalores tenga parte real igual a cero, debemos encontrar las regiones de valores que nos den un punto estable. En este análisis, no se harán explícitas las regiones que den origen a alguna inestabilidad, ya sea repulsora o tipo silla, pues como se verá, el punto crítico estable corresponde a una fase de aceleración tipo de Sitter, por lo que cualquier tipo de inestabilidad no está apoyada por las observaciones.

Como se mencionó anteriormente, el caso  $\alpha \leq 0$  nos da, sin imponer ningún tipo de condición extra, un punto crítico estable y, con base en el eigenvalor  $\mu_4$ , para obtener un punto estable es necesario imponer que  $\omega > -1$ . Con lo cual, cualquier fluido tipo fantasma nos da inevitablemente una inestabilidad en el punto crítico.

Por otro lado, las regiones de valores sobre  $k$  y  $m$  tales que caemos en el caso  $\alpha \leq 0$ , están dadas por:

1. 
$$m \leq -\frac{1}{48} \wedge 0 < k < 1. \quad (505)$$

2. 
$$-\frac{1}{48} < m < 0 \wedge \left( 0 < k \leq \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \vee \frac{1}{18}(17 - 24m) + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \leq k < 1 \right). \quad (506)$$

3. 
$$m = 0 \wedge 0 < k \leq \frac{8}{9}. \quad (507)$$

4. 
$$0 < m < \frac{1}{2} \wedge \left( 0 \leq k \leq \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \vee \frac{1}{18}(17 - 24m) + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \leq k \leq 1 \right). \quad (508)$$

5.

$$m = \frac{1}{2} \wedge \frac{5}{9} \leq k < 1. \quad (509)$$

6.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} < m < 1 \wedge \\ & \left( \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \leq k < 0 \vee \frac{1}{18}(17 - 24m) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \leq k < 1 \right). \end{aligned} \quad (510)$$

7.

$$m = 1 \wedge -\frac{7}{9} \leq k < 1. \quad (511)$$

8.

$$\begin{aligned} & m > 1 \wedge \\ & \left( \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \leq k \leq \frac{1}{18}(17 - 24m) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \vee 0 < k < 1 \right). \end{aligned} \quad (512)$$

Por otra parte, el caso  $\alpha > 0$  nos deja con un conjunto de eigenvalores reales, por lo cual debemos analizar las regiones tales que  $\mu_2$  y  $\mu_3$  sean menor que cero. Estas regiones están dadas por:

1.

$$m \leq -\frac{1}{48} \wedge 1 - m < k < 1 - 2m. \quad (513)$$

2.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{48} < m \leq 0 \wedge \left( \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} < k < \frac{1}{18}(17 - 24m) + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \vee \right. \\ \quad \left. 1 - m < k < 1 - 2m \right). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 0 < m \leq \frac{1}{2} \wedge \left( \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} < k < 1 - 2m \vee \right. \\ \quad \left. 1 - m < k < \frac{1}{18}(17 - 24m) + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \right). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < m \leq 1 \wedge \left( 1 - 2m < k < \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \vee \right. \\ \quad \left. 1 - m < k < \frac{1}{18}(17 - 24m) + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \right). \end{aligned}$$

5.

$$m > 1 \wedge \left( 1 - 2m < k < \frac{1}{18}(17 - 24m) - \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} \vee \frac{1}{18}(17 - 24m) + \frac{1}{18}\sqrt{48m + 1} < k < 1 - m \right).$$

Cualquier región distinta a las que se mencionaron anteriormente nos da como resultado a algún tipo de inestabilidad, ya sea tipo silla o repulsora. Por otro lado, al evaluar el parámetro de densidad del fluido efectivo, dado por la ecuación (493), en el punto crítico, se obtiene que

$$\Omega_{\text{eff}} = 1, \quad (514)$$

con  $\Omega_r = 0$  y  $\Omega_\omega = 0$ . Con lo cual el punto crítico corresponde a una época en la que el fluido efectivo domina, particularmente, como  $Z = 0$  en el punto crítico y  $Z = \frac{H}{H^2}$ , entonces  $H = H_0$ , lo que corresponde a un universo tipo de Sitter. Al evaluar el parámetro de desaceleración  $q = -\ddot{a}/\dot{a}^2$  y el parámetro jerk  $j = \ddot{a}/aH^3$  en el punto crítico, se obtiene que

$$q = -1, \quad j = 1, \quad (515)$$

respectivamente. Y es aquí donde se encuentra la radical diferencia entre lo que se encontró en la subsección 5.6.4, pues ahí vimos que cuando nos restringimos al caso de  $\lambda$  constante, los puntos críticos correspondientes son puntos de dominación de materia mientras que aquí observamos que al dejar a  $\lambda$  variar dinámicamente respecto a  $N = \ln a$ , estos puntos críticos se trasladan a ser un único punto crítico pero ahora tipo de Sitter. Por lo cual, vemos que el modelo de potencias mixtas sí recupera como punto estable una época tardía de aceleración cósmica tipo de Sitter, como era de esperar. En la figura 10 se muestra una gráfica del espacio de fase reducido a dos dimensiones con el fin de visualizar el comportamiento del campo de velocidades del sistema autónomo cuatro dimensional (491) cercano al punto crítico.

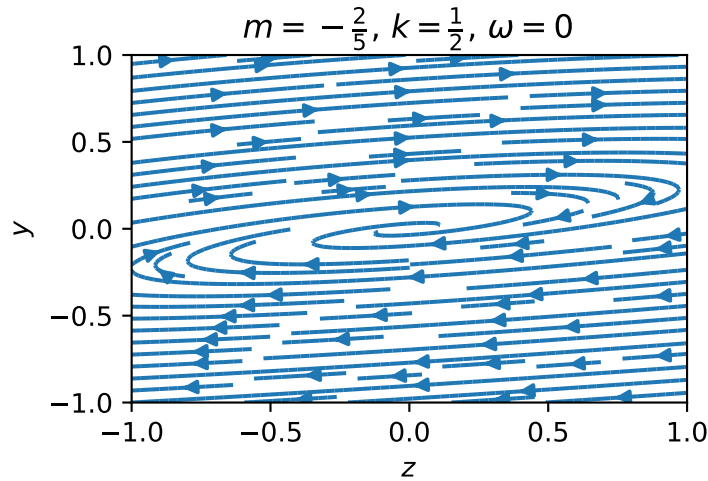


Figura 10: Gráfica del espacio fase del sistema dinámico (491) reducido a dos dimensiones tal que  $m = -2/5$ ,  $k = 1/2$  y  $\omega = 0$  en donde  $X = \frac{k}{3(-1+k+2m)}$ ,  $V = 0$ , con el fin de observar la naturaleza atractora del punto crítico.

### 5.6.7. Soluciones linealizadas cerca al punto crítico

Supongamos un sistema dinámico autónomo de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (516)$$

en donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0$  es un punto crítico del sistema autónomo y  $\mathbf{f} \in C^r(U_{\mathbf{x}_0})$ ,  $r \geq 1$  con  $U_{\mathbf{x}_0}$  una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Como  $\mathbf{f} \in C^r(U_{\mathbf{x}_0})$  es posible aproximar a  $\mathbf{f}$  en una vecindad  $U_{\mathbf{x}_0}$  por un polinomio de Taylor, con lo cual tenemos que el sistema dinámico autónomo es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{M}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2), \quad (517)$$

donde  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  es la matriz de estabilidad o matriz Jacobiana evaluada en el punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ . Dado que  $\mathbf{x}_0$  es un punto crítico, entonces  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ , por lo cual, cerca al punto crítico, el sistema dinámico que en general es no lineal (516) se puede aproximar por un sistema lineal dado por

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \mathcal{M}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T. \quad (518)$$

Este aparente resultado intuitivo fue demostrado por Hartmann y Grobmann de manera separada y es conocido como el teorema de Hartmann-Grobmann [90, 104] o teorema de linealización. El teorema señala que si  $\mathbf{x}_0$  es un punto crítico no hiperbólico del sistema dinámico no lineal (516), entonces el sistema dinámico no lineal y su linealización dada por (518) son topológicamente equivalentes, i.e., existe un homeomorfismo  $H : U_{\mathbf{x}_0} \rightarrow V$ ,  $V$  un abierto que contiene al origen, que mapea trayectorias de (516) en  $U_{\mathbf{x}_0}$  en trayectorias de (518) en  $V$  preservando la orientación. Un teorema incluso más fuerte que este fue probado por Hartmann y señala que si  $\mathbf{f} \in C^2(U_{\mathbf{x}_0})$  y el punto crítico es hiperbólico, entonces es posible encontrar un difeomorfismo de clase  $C^1$  entre el sistema dinámico no lineal y su linealización, con lo cual la estructura diferencial se preserva. Este teorema nos permite estudiar las soluciones linealizadas del sistema dinámico (491) cuando el universo se encuentra cercano a una fase de aceleración tipo de Sitter. Un tratamiento similar se hizo en el artículo [89] en el contexto de la teoría de Brans-Dicke.

Observemos que la función vectorial que aparece del lado derecho del sistema dinámico (491) es de clase  $C^\infty$  en una vecindad del punto crítico (494) cuando  $k \neq 0$ , por lo cual es posible usar los teoremas de linealización en este contexto. La linealización del sistema dinámico (491) en una vecindad del punto crítico (494), definiendo  $\tilde{X} \equiv X - \frac{k}{3(k+2m-1)}$ , está dada por

$$\begin{pmatrix} Z' \\ \tilde{X}' \\ Y' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6m}{k-1} - 6 & 0 & \frac{9(k+2m-1)}{(k-1)k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2m}{k-1} + \omega - 1 & \frac{9(\omega+1)(k+2m-1)}{k} & \frac{6m}{k-1} - 3\omega & 3\omega - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \tilde{X} \\ Y \\ V \end{pmatrix}. \quad (519)$$

Para poder soluciones no complejas del parámetro de Hubble, debemos separar en dos casos el análisis:  $\alpha \geq 0$  y  $\alpha < 0$ , como veremos a continuación.

**5.6.8. Caso  $\alpha \geq 0$** 

Si  $\alpha \geq 0$  las soluciones del sistema linealizado (519) están dadas por

$$Z(N) \approx be^{-3N(\omega+1)} + Fe^{-4N} + c \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right] + d \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right], \quad (520)$$

$$X(N) \approx \frac{k}{3(k+2m-1)} - \frac{1}{18(k+2m-1)} \left( -\frac{2bke^{-3N(\omega+1)}(k\omega - k - 2m - \omega + 1)}{\omega + 1} + \frac{ck(\sqrt{\alpha} + k(-3k - 4m + 5) + 4m - 2) \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right]}{k + 2m - 1} - \frac{dk(\sqrt{\alpha} + k(3k + 4m - 5) - 4m + 2) \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right]}{k + 2m - 1} + Fke^{-4N}(k + 3m - 1) \right), \quad (521)$$

$$Y(N) \approx \frac{(k-1)k}{9(k+2m-1)} \left( \frac{3be^{-3N(\omega+1)}(-k\omega + k + 2m + \omega - 1)}{k-1} - \frac{3c(\sqrt{\alpha} + k(-3k - 4m + 3)) \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right]}{2(k-1)k} + \frac{3d(\sqrt{\alpha} + k(3k + 4m - 3)) \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right]}{2(k-1)k} + Fe^{-4N} \left( \frac{6m}{k-1} + 2 \right) \right), \quad (522)$$

$$V(N) \equiv \Omega_r(N) \approx \Omega_{0,r} \exp(-4N), \quad (523)$$

con  $b, c, d$  constantes de integración y

$$F = \frac{18\Omega_{0,r}(k+2m-1)}{7k^2 + 27km - 16k + 18m^2 - 27m + 9}. \quad (524)$$

Recordemos que estas soluciones son solamente válidas en una vecindad del punto crítico, i.e., cuando  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$  con  $\mathbf{x} = (Z, X, Y, V)$ . Con base en estas soluciones, es posible calcular algunos parámetros cosmológicos como funciones de  $N = \ln a$ . De la ecuación (523) podemos ver directamente que la evolución del parámetro de densidad en una vecindad del punto crítico es

$$\Omega_r(N) = \Omega_{0,r} \exp(-4N), \quad (525)$$

con  $\Omega_{0,r}$  la densidad de radiación al día de hoy. Cuando hacemos explícito el cambio de variable  $N = \ln a$ , la ecuación queda dada por:

$$\Omega_r(a) = \frac{\Omega_{0,r}}{a^4}, \quad (526)$$

lo cual corresponde a la evolución del parámetro de densidad de radiación en un universo tipo de Sitter respecto al factor de escala. Hay que observar que como las soluciones son válidas en una vecindad del punto crítico, entonces cualquier término no lineal en los parámetros cosmológicos se hacen cero dejando solamente soluciones lineales.

El parámetro de densidad del fluido efectivo está dado por

$$\Omega_{\text{eff}} = 3f_B + 2f_T - f'_B - \frac{f}{6H^2} + \left(\frac{H'}{H}\right) f_B, \quad (527)$$

que en términos de las variables dinámicas del sistema es

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{(3+Z)}{k} \tilde{X}(k+2m-1) + \frac{3+Z}{3} - Y, \quad (528)$$

por lo cual, la solución linealizada de este parámetro es

$$\Omega_{\text{eff}} \approx 1 + \frac{1}{3} b e^{-3N(\omega+1)} \left( \frac{(k-1)k\omega}{k+2m-1} - \frac{2(k+m-1)}{\omega+1} \right) - \Omega_{0,r} e^{-4N}. \quad (529)$$

Análogamente, dado que la primera ecuación de Friedmann (305) en gravedad  $f(T, B)$  es de la forma  $\Omega_\omega + \Omega_r + \Omega_{\text{eff}} = 1$ , tenemos que

$$\Omega_\omega \approx -\frac{1}{3} b e^{-3N(\omega+1)} \left( \frac{(k-1)k\omega}{k+2m-1} - \frac{2(k+m-1)}{\omega+1} \right) \equiv \Omega_{0,\omega} e^{-3N(\omega+1)}. \quad (530)$$

Por otro lado, la ecuación para el factor de Hubble es

$$\begin{aligned} \frac{H'}{H} = Z(N) \approx & b e^{-3N(\omega+1)} + c \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right] + \\ & d \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)} \right) N \right] + F e^{-4N}, \end{aligned} \quad (531)$$

por lo cual, integrando ambos lados de las ecuaciones y aplicando la función exponencial, encontramos que la solución linealizada del parámetro de Hubble para este caso es:

$$\frac{H(N)}{H_i} \approx 1 - \frac{b e^{-3N(\omega+1)}}{3(\omega+1)} - \frac{2c e^{-\frac{3}{2}N\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{(k-1)k}+1\right)}}{3\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{(k-1)k}+1\right)} - \frac{2d e^{-\frac{3}{2}N\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{k-k^2}+1\right)}}{3\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{k-k^2}+1\right)} - \frac{1}{4} F e^{-4N}, \quad (532)$$

en donde  $H_i$  es otra constante de integración.

Finalmente, dado que la ecuación de estado para el fluido efectivo está dada por

$$\omega_{\text{eff}} = -1 + \frac{\ddot{f}_B - 3H\dot{f}_B - 2\dot{H}f_T - 2H\dot{f}_T}{3H^2(3f_B + 2f_T) - 3H\dot{f}_B + 3\dot{H}f_B - \frac{1}{2}f}, \quad (533)$$

que en términos de las variables dinámicas del sistema es

$$\omega_{\text{eff}} = -1 + \frac{Y' + Y(Z-3) - \frac{2mXZ}{k}(3+Z) - \frac{2m}{k}[Y(3+Z) + X(\lambda - 2Z^2)]}{\frac{3}{k}(3+Z)(k+2m-1) - 3Y}, \quad (534)$$



tenemos que su solución linealizada está dada por

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{eff}} \approx & -1 + \\
& \left( -\frac{4e^{-4N} (18(k+1)m^2 + 3(k(2k+7) - 3)m + 7(k-1)k) \Omega_{0,r}}{7k^2 + 27(k-1)m - 16k + 18m^2 + 9} \right. \\
& + \frac{be^{-3N(\omega+1)} ((k-1)k(2m+1)\omega - 2(k+2m-1)(km+k+m) + (k-1)k\omega^2)}{k+2m-1} \\
& + \frac{c(-3k^2m + k((3-4m)m-2) + (\sqrt{\alpha}-4)m+2) \exp\left[-\frac{3}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)}\right)N\right]}{k+2m-1} \\
& \left. - \frac{d(3k^2m + k(m(4m-3)+2) + (\sqrt{\alpha}+4)m-2) \exp\left[-\frac{3}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{k(k-1)}\right)N\right]}{k+2m-1} \right) \div \\
& \left( \frac{be^{-3N(\omega+1)} (-2(k+m-1)(k+2m-1) + (k-1)k\omega^2 + (k-1)k\omega)}{(\omega+1)(k+2m-1)} \right. \\
& \left. - 3\Omega_{0,r}e^{-4N} + 3 \right). \tag{535}
\end{aligned}$$

### 5.6.9. Caso $\alpha < 0$

En este caso, las soluciones del sistema linealizado (519) que dan como resultados soluciones reales, no complejas, en los parámetros cosmológicos, son

$$Z(N) \approx be^{-3N(\omega+1)} + 2ce^{-3N/2} \cos(N\epsilon) + Fe^{-4N}, \tag{536}$$

$$\begin{aligned}
X(N) \approx & \frac{bke^{-3N(\omega+1)}(k(\omega-1) - 2m - \omega + 1)}{9(\omega+1)(k+2m-1)} - \frac{Fke^{-4N}(k+3m-1)}{18(k+2m-1)} \\
& + e^{-3N/2} \left( \frac{c(k-1)k(3k+4m-2) \cos(\epsilon N)}{9(k+2m-1)^2} - \frac{\sqrt{|\alpha|}ck \sin(\epsilon N)}{9(k+2m-1)^2} \right), \tag{537}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(N) \approx & \frac{bke^{-3N(\omega+1)}(-k\omega + k + 2m + \omega - 1)}{3(k+2m-1)} + \frac{2Fke^{-4N}(k+3m-1)}{9(k+2m-1)} \\
& + e^{-3N/2} \left( \frac{ck(3k+4m-3) \cos(\epsilon N)}{3(k+2m-1)} - \frac{\sqrt{|\alpha|}c \sin(\epsilon N)}{3(k+2m-1)} \right), \tag{538}
\end{aligned}$$

$$V(N) \equiv \Omega_r(N) \approx \Omega_{0,r}e^{-4N}, \tag{539}$$

en donde definimos el parámetro

$$\epsilon = \frac{3\sqrt{|\alpha|}}{2(k-1)k}, \tag{540}$$

y la misma restricción (524) en  $F$  se mantiene.

En este caso, los parámetros de densidad están dados por

$$\Omega_{\text{eff}} \approx 1 + \frac{be^{-3N(\omega+1)}(-2(k+m-1)(k+2m-1) + (k-1)k\omega^2 + (k-1)k\omega)}{3(\omega+1)(k+2m-1)} \quad (541)$$

$$- \Omega_{0,r}e^{-4N},$$

$$\Omega_{\omega} \approx -\frac{be^{-3N(\omega+1)}(-2(k+m-1)(k+2m-1) + (k-1)k\omega^2 + (k-1)k\omega)}{3(\omega+1)(k+2m-1)}, \quad (542)$$

$$\Omega_r \approx \Omega_{0,r}e^{-4N}, \quad (543)$$

y el parámetro de Hubble queda como

$$\frac{H(N)}{H_i} \approx 1 - \frac{be^{-3N(\omega+1)}}{3(\omega+1)} + \frac{4ce^{-3N/2}(2\epsilon \sin(N\epsilon) - 3 \cos(N\epsilon))}{4\epsilon^2 + 9} - \frac{1}{4}Fe^{-4N}. \quad (544)$$

La ecuación de estado del fluido efectivo en este caso queda dada por

$$\begin{aligned} \omega_{\text{eff}} \approx & -1 + \left( -\frac{4e^{-4N}(18(k+1)m^2 + 3(k(2k+7) - 3)m + 7(k-1)k)\Omega_{0,r}}{7k^2 + 27(k-1)m - 16k + 18m^2 + 9} \right. \\ & + \frac{be^{-3N(\omega+1)}((k-1)k\omega(k-2m-1) - 2((k-1)k - m)(k+2m-1) + (k-1)^2k\omega^2)}{(k-1)(k+2m-1)} \\ & \left. + e^{-3N/2} \left( \frac{2\sqrt{\alpha}cm \sin(N\epsilon)}{k+2m-1} - \frac{2c(k(m(3k+4m-3) + 2) + 4m-2) \cos(N\epsilon)}{k+2m-1} \right) \right) \div \\ & \left( \frac{be^{-3N(\omega+1)}(-2(k+m-1)(k+2m-1) + (k-1)k\omega^2 + (k-1)k\omega)}{(\omega+1)(k+2m-1)} \right. \\ & \left. - 3\Omega_{0,r}e^{-4N} + 3 \right). \quad (545) \end{aligned}$$

Tenemos que tener en mente que, las soluciones para ambos casos  $\alpha \geq 0$  y  $\alpha < 0$  son solamente válidas en una vecindad del punto crítico, i.e., describen la dinámica de un universo cercano a un de Sitter total, lo que en términos del parámetro  $N = \ln a$  corresponde a  $N \rightarrow \infty$  o que en términos del corrimiento al rojo corresponde a  $z \rightarrow -1$ . La teoría de sistemas dinámicos no nos puede asegurar que las soluciones encontradas sean válidas para un amplio rango de corrimientos al rojo, sin embargo sí nos lo garantiza para un rango más estrecho, en particular, como veremos, cuando contrastamos con los datos observacionales, podemos ver que algunos modelos de  $f(T, B)$  pueden describir la dinámica del universo al día de hoy e incluso dar algún vistazo a la solución de la tensión sobre el valor del parámetro  $H_0$  en el sentido que nos provee un valor aproximado de este bajo ciertas consideraciones.

### 5.6.10. Pistas fenomenológicas sobre la tensión del valor de $H_0$ a partir del análisis dinámico en gravedad $f(T, B)$

En la subsección 1.5, se menciona que uno de los recientes problemas del Modelo Cosmológico Estándar es la tensión en el valor de la parámetro  $H_0$ . En esta sección, con la ayuda de sistemas dinámicos, veremos como podemos obtener, a través de ajustar las soluciones aproximadas encontradas anteriormente a los datos observacionales, valores de  $H_0$  en distintos casos de gravedad  $f(T, B)$  en potencias mixtas.

Como se discutió anteriormente, la teoría de sistemas dinámicos, particularmente los teoremas de linealización mencionados, solamente garantizan que las ecuaciones obtenidas anteriormente son soluciones de las ecuaciones de Friedmann en gravedad  $f(T, B)$  solamente en el régimen de  $N \rightarrow \infty$ , o equivalentemente  $z \rightarrow -1$  en términos del corrimiento al rojo. Por lo cual, es conveniente estudiar estas ecuaciones en escenarios fenomenológicos en el que podamos ligar estos resultados con las observaciones y ver en qué rangos del corrimiento al rojo estas pueden describir la dinámica del universo.

En esta subsección, usaremos las soluciones linealizadas encontradas y trataremos de ligarlas con los datos observacionales del parámetro de Hubble respecto al corrimiento al rojo  $H(z)$  para encontrar el rango de valores en el cual estas soluciones siguen siendo válidas, principalmente en qué rango de corrimiento al rojo podemos modelar el comportamiento de  $H(z)$  y a partir de eso obtener posibles valores de  $H_0$ <sup>17</sup>.

Como un primer paso en esta dirección, consideraremos mediciones del parámetro de Hubble  $H(z)$  reportadas en [105], las cuales consisten en 51 mediciones en un rango de corrimientos al rojo de  $0.07 < z < 2.0$ , de las cuales 31 de ellos corresponden a cronómetros cósmicos y el restante de estimaciones de oscilaciones acústicas de bariones, BAO. Con base en esto, obtendremos valores estimados para  $\Omega_{0,r}$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $\omega$  y para las constantes de integración, este análisis se hará particularmente para los resultados obtenidos de  $\alpha < 0$  con el fin de asegurar que los valores de  $k$  y  $m$  nos den un punto crítico estable.

Para obtener un conjunto apropiado de parámetros libres, parámetros que aparecen en (544), debemos hacer el cambio de variable  $N = \ln \frac{1}{1+z}$  con el fin de obtener las ecuaciones en términos del corrimiento al rojo y así poder ajustar la ecuación (544) con los datos del artículo [105]. Si dejamos el conjunto de parámetros libres sin ninguna restricción a la hora de ajustar, valores sin sentido físico pueden ser obtenidos para estos parámetros, por ejemplo un valor negativo para el valor medio de la densidad de radiación al día de hoy  $\Omega_{0,r}$  o una ecuación de estado para la materia menor que  $-1$  la cual fue excluida previamente pues nos genera inestabilidades, por nombrar algunas, con lo cual un ajuste un poco más consciente se debe de realizar. Entonces, para poder obtener un conjunto de valores con sentido físico, debemos de restringir y/o asociar ciertos valores a los parámetros libres, específicamente, dado que se ha mostrado que la densidad de radiación al día de hoy tiene un valor pequeño  $\Omega_{0,r} \approx 10^{-5}$  [106], para simplificar el modelo, podemos considerar  $\Omega_{0,r} = 0$ . Por otro lado, basado en observaciones [107, 108, 109], podemos restringir a  $H_0$  que varíe en un rango de valores de  $60 \leq H_0 \leq 90$ . Con estas consideraciones, es posible evitar ajustar a  $k$  y  $m$  directamente, lo cual es una ventaja pues la raíz cuadrada en (544) puede generar problemas a la hora de ajustar, con lo cual podemos en su lugar ajustar  $\epsilon$  y así, con base en (540), obtener valores para  $k$  and  $m$  en la curva de nivel del valor obtenido de  $\epsilon$ . Con base en estas consideraciones, los parámetros que se obtienen son

$$\begin{aligned} \omega &= 0.000 \pm 2.951, & \epsilon &= 1.749 \pm 5.671, & b &= -0.200 \pm 2.735, \\ c &= -0.213 \pm 2.221, & H_i &= 60.000 \pm 10.973, \end{aligned} \quad (546)$$

de donde, un posible conjunto de valores para  $k$  y  $m$  en la curva de nivel  $\epsilon(k, m) = 1.749$  son

$$k \approx -0.294, \quad m = 0.75. \quad (547)$$

Al evaluar el parámetro de Hubble (544) con los parámetros (546) al día de hoy  $z = 0$ , obtenemos que  $H_0 \approx 71.236 \pm 144.229$ . En la figura 11, la evolución de la solución aproximada del parámetro

<sup>17</sup> $H_0$  es el valor del parámetro de Hubble al día de hoy, i.e.,  $H(z)$  con  $z = 0$  en términos del corrimiento al rojo.

de Hubble (544) con los parámetros justados (546) y los datos observacionales de [105] se muestran mientras que en la figura 12 se muestra la evolución de los parámetros de densidad bajo estos mismos ajustes.

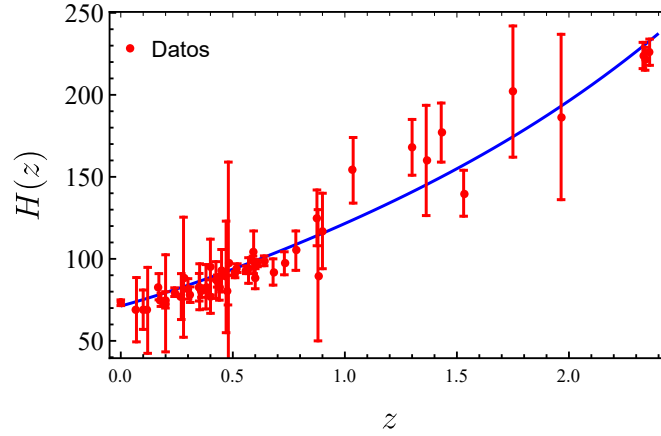


Figura 11: Evolución de  $H(z)$  con los parámetros ajustados (546) dado por (544) (línea sólida azul) en comparación con los datos observacionales descritos en [105, 110] (puntos de color rojo con barras de error).

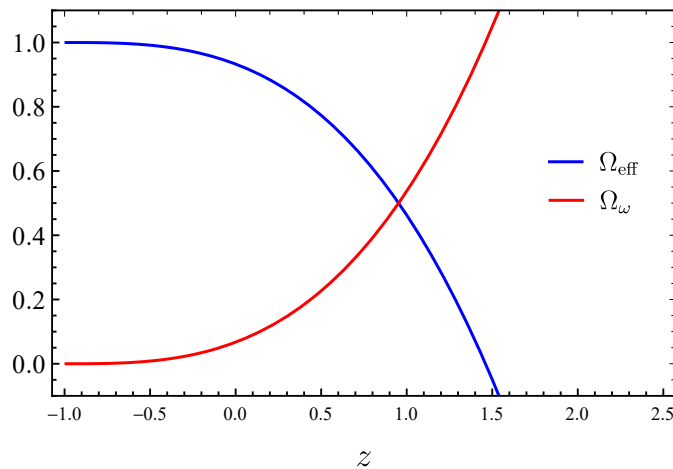


Figura 12: Evolución de los parámetros de densidad con los ajustes encontrados en (546).

La forma descrita arriba para ligar los resultados con los datos observacionales nos da como resultado unas barras de error enormes tanto en los parámetros ajustados como en el valor de  $H_0$  obtenido, y esto es debido al alto número de parámetros libres a ajustar comparado con la poca cantidad de datos observacionales. Una forma un poco distinta de ligar las observaciones con las ecuaciones obtenidas se puede realizar con el fin de reducir el tamaño de las barras de error. Para ello, podemos aprovecharnos del análisis de estabilidad hecho en 5.6.6 y elegir valores para  $k$  y  $m$  de ese análisis y así reducir el número de parámetros libres a la hora de ajustar, sin embargo, esto no es suficiente pues se siguen obteniendo barras de error muy grandes para

los parámetros libres que quedan. Para poder seguir reduciendo el tamaño de las barras de error, debemos de asignar de manera fija algunos valores a algunos de los parámetros libres, por ejemplo, al hacer  $\omega = 0$  que corresponde a un modelo de un universo con polvo, se reducen las barras de error de los parámetros libres y del valor de  $H_0$  correspondiente.

Por ello, en la figura 13 se muestra una gráfica con distintos valores de  $H_0$  obtenidos bajo diferentes condiciones y para distintos valores de  $k$  y  $m$  obtenidos del análisis de estabilidad. La región de color cyan muestra distintos valores de  $H_0$  para un modelo tipo polvo  $\omega = 0$  y sin radiación  $\Omega_{0,r} = 0$  en donde los parámetros ajustados satisfacen  $-0.580 \leq c \leq -0.006$ ,  $-0.449 \leq b \leq -0.017$  y  $42.21 \leq H_i \leq 75.670$ .

La región de color rosa muestra distintos valores de  $H_0$  para un modelo tipo polvo con radiación. Para este caso los parámetros ajustados satisfacen  $-0.078 \leq c \leq 0.292$ ,  $-0.944 \leq b \leq -0.024$ ,  $51.789 \leq H_i \leq 85.471$  y  $0 \leq \Omega_{0,r} \leq 0.029$ .

En la zona gris solamente se muestra un valor de  $H_0$ , esto debido a que no hay valores definidos a priori, lo que hace que las barras de error se hagan muy grandes, por lo cual solamente se muestra un valor para mostrar el hecho de que las barras de error se hacen muy grandes si no imponemos valores al inicio. Para este caso, el valor obtenido de  $H_0$  corresponde a los parámetros ajustados  $b = -1.229 \pm 3.464$ ,  $c = 0.203 \pm 1.916$ ,  $H_i = 46.178 \pm 15.736$ ,  $\Omega_{0,r} = 0.013 \pm 0.023$  y  $\omega = -0.297 \pm 1.961$ .

En las regiones cyan y rosa se mencionan las regiones de valores en las que viven los parámetros ajustados para todos los valores de  $H_0$  en lugar de colocar uno por uno con el fin de no saturar la imagen y que se enfoque en los valores de  $H_0$  que es resultado más importante.

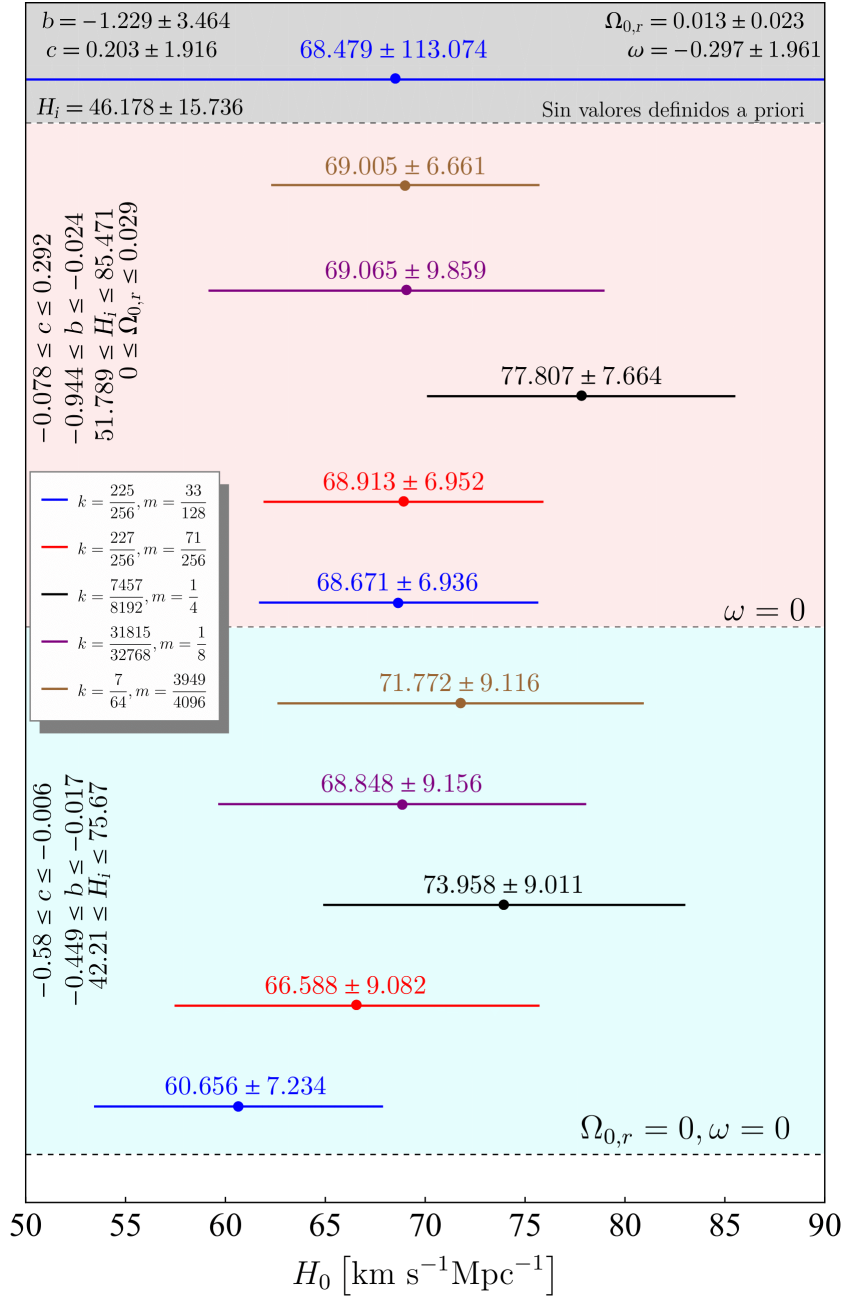


Figura 13: Valores obtenidos de  $H_0$  para valores particulares de  $k$  y  $m$  obtenidos del análisis dinámico los cuales se observan en un recuadro dentro de la figura. *Superior*: El mejor valor obtenido de  $H_0$  con todos los parámetros libres sin valores definidos inicialmente. *Intermedio*: Mejores valores de  $H_0$  para un modelo de polvo  $\omega = 0$  con radiación. *Bottom*: Mejores valores de  $H_0$  para un modelo de polvo  $\omega = 0$  sin radiación  $\Omega_{0,r} = 0$ .

## 6. Conclusiones

De la primera sección de este trabajo, vemos que la Relatividad General es un marco teórico sobre la gravedad bastante exitoso pero no perfecto, pues tiene muchos problemas por resolver, es por ello que resulta ser necesario buscar nueva física, en particular, teorías alternativas a esta. Entre las distintas formas de buscar teorías alternativas a la gravitación, están las teorías modificadas y las teorías extendidas, de las cuales revisamos algunos de los modelos en este trabajo. En los capítulos 2, 3 y 4 revisamos algunas de estas teorías que intentan modificar y extender a la teoría de la gravitación. Discutimos brevemente la teoría de Brans-Dicke y una subsección de la teoría de Horndeski, mostrando también algunos de los resultados cosmológicos básicos que se obtienen de estos modelos. Después analizamos una de las teorías extendidas llamada Gravedad Teleparalela, que consiste en considerar una estructura matemática distinta que nos permite trabajar en espacios-tiempo globalmente planos pero con torsión, siendo esta última la responsable del campo gravitacional. En todas estas teorías observamos que las ecuaciones de Friedmann resultan ser ecuaciones diferenciales no lineales y hasta acopladas cuando se considera campos escalares, las cuales resultan muy difícil de resolver de manera analítica, por lo cual el uso de herramientas matemáticas más avanzadas se vuelve necesario con el fin de poder analizar propiedades de estos modelos sin tener que resolver las ecuaciones. Aquí es donde el uso de sistemas dinámicos se vuelve importante, pues nos sirve de herramienta para estudiar las ecuaciones de Friedmann y las propiedades de las soluciones a estas ecuaciones sin tener que resolverlas analíticamente, esto al introducir un conjunto de variables independientes llevando a las ecuaciones de Friedmann a un sistema de ecuaciones basadas en estas nuevas variables y analizando la estabilidad de los puntos críticos en el espacio fase. En el capítulo 5 vemos cómo el análisis dinámico en cada uno de los intentos para modificar la gravedad nos muestra que estos modelos son cosmológicamente viables, y en algunos casos recuperan muchos de los resultados más importantes del modelo estándar  $\Lambda$ CDM. En particular los resultados sobre Gravedad Teleparalela tipo  $f(T, B)$  es de tomar en cuenta, pues además de la elegancia matemática de la teoría, este tipo de extensiones permiten recuperar teorías  $f(R)$  cuando  $f(T, B) = f(-T + B)$ , lo cual no puede ser recuperado por las teorías  $f(T)$ . El análisis empleado tuvo como propósito analizar la estabilidad de los puntos críticos para tres modelos cosmológicamente viables con el fin de poder discriminar entre ellos basado en qué tipo de soluciones nos dan estos modelos como puntos estables, es decir, hacia qué estados evoluciona el universo en cada uno de los modelos. Encontramos que a pesar de que todos los modelos puedan permitir universos en expansión acelerada, solamente dos de los modelos logran que el universo evolucione y permanezca en un fase de de Sitter sin salirse de él, estos modelos son los modelos de ley de potencias mixtas y separadas, mientras que el modelo de Taylor genera siempre estados del universo inestables pues para  $\lambda \approx 0$  los puntos críticos permanecen siendo puntos sillas, con lo cual podemos descartar este modelo como posible modelo que pretenda explicar la aceleración tardía salvo por condiciones muy exactas que permitirían, dada la naturaleza silla, que el universo evolucione a este estado, aunque es necesario llevarlo a nivel perturbativo para obtener un marco más completo sobre las propiedades cosmológicas de este modelo. Por otro lado, la degeneración de variables independientes del modelo  $f(T, B) = f_0 B^k T^m$  nos permite hacer el análisis de  $\lambda$  variable y permanecer en la teoría de sistemas dinámicos autónomos, mientras que para el caso de potencias separadas no es tan sencillo y uno de los posibles intentos a realizar es hacer el estudio en sistemas no autónomos con el fin de desvelar más a profundidad las propiedades cosmológicas del modelo. Retomando el caso de potencias mixtas, es posible escribir a  $\lambda$  en tér-

minos de las variables dinámicas y explotar más a profundidad sus propiedades, por ejemplo, buscando soluciones linealizadas a las variables dinámicas y contrastar estas soluciones con las observaciones. Este último caso lo estudiamos en la parte final de la subsección 5.6, en donde a parte del análisis estándar de estabilidad del sistema, estudiamos las soluciones linealizadas las cuales, al contrastar con los datos experimentales, nos modela la dinámica del universo al día de hoy. Ese mismo análisis nos permite ajustar el valor de  $H_0$ , sin embargo como se puede observar, hacerlo en general resulta en errores muy grandes, esto debido a la gran cantidad de parámetros libres y la poca cantidad de datos observacionales, sin embargo, al tomar casos particulares de  $k$  y  $m$  provenientes del análisis de estabilidad y considerando modelos como polvo o un universo sin radiación, estos valores y sus errores concuerdan con los que se obtienen de distintos experimentos, por ejemplo, aquellos reportados por Planck [107]. De acuerdo a este análisis fenomenológico, es posible encontrar un conjunto óptimo de casos donde la tensión en el valor de  $H_0$  se puede aliviar utilizando valores específicos para el modelo de potencias mixtas en  $f(T, B)$ . Con base en esto, los casos con  $k < 0.9$  muestran estar de acuerdo con los datos de Planck 2018 sobre  $H_0$  a  $1 - \sigma$ , mientras que como observamos, al dejar sin valor a priori el modelo muestra una propagación de error enorme en el valor de  $H_0$ . En conclusión, esta última parte muestra que el modelo de ley de potencias mixtas analizado es novedoso en el sentido de que no es reproducido por ninguna teoría  $f(R)$  ni  $f(T)$ , y se muestra prometedor en la reproducción de valores de parámetros cosmológicos que concuerdan con las observaciones actuales, dando la motivación para más estudios en esta dirección. Finalmente algunas otras ideas es llevar este estudio a nivel perturbaciones y ver qué propiedades se obtienen para el universo temprano. Para todos estos posibles futuros trabajos el análisis realizado sirve de base para contrastar los resultados y constituye un punto de partida, pues son las primeras discusiones sobre sistemas dinámicos para los modelos de gravedad teleparalela tipo  $f(T, B)$ .



## A. Elementos de geometría diferencial y topología

**Definición A.1.** Sea  $M$  un conjunto. Decimos que  $(M, \mathcal{T})$  es un *espacio topológico* con topología, o estructura topológica,  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(M)$  si y solo si

1.  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$  con  $I$  un conjunto de índices  $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .
2.  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$  con  $I$  un conjunto de índices finito  $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .
3.  $\emptyset$  y  $M \in \mathcal{T}$ .

En donde, decimos que  $U \in \mathcal{T}$  es un *conjunto abierto en  $M$*  y  $V$  es un *conjunto cerrado en  $M$*  si y solo si  $V^c \in \mathcal{T}$ .

**Definición A.2.** Sea  $(M, \mathcal{T})$  un espacio topológico.  $(M, \mathcal{T})$  es un *espacio de Hausdorff* si y solamente si  $\forall x, y \in M, x \neq y, \exists U, V \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definición A.3.** Sea  $M$  un conjunto. Decimos que una colección  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $M$  es un *base de  $M$*  si y solo si

1.

$$M = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

2.  $\forall B_i$  y  $B_j \in \mathcal{B}$  tal que  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  entonces  $\forall x \in B_i \cap B_j \exists B_k$  tal que  $x \in B_k \subset B_i \cap B_j$ .

**Definición A.4.** Sean  $(M, \mathcal{T}_1)$  y  $(N, \mathcal{T}_2)$  espacios topológicos, y sean  $U \in \mathcal{T}_1$  y  $V \in \mathcal{T}_2$ . Decimos que la función  $\varphi : U \rightarrow V$  es un *homeomorfismo de  $U$  a  $V$*  si es continua (es decir, la imagen inversa de un abierto es abierto), biyectiva y con inversa continua. Si  $U = M$  y  $N = V$  decimos que  $M$  y  $N$  son *homeomórficos*, es decir, son topológicamente equivalentes.

**Definición A.5.** Sea  $(M, \mathcal{T})$  un espacio topológico de Hausdorff que permita una base numerable y sea  $\Phi := \{\varphi \mid \varphi : U \in \mathcal{T} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n, V \text{ abierto}\}$  tal que

1.

$$M \subseteq \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{Dom}(\varphi).$$

2. Todo  $\varphi \in \Phi$  es un homeomorfismo de  $U$  en  $V$ .

3. Para cualesquiera  $\varphi$  y  $\psi \in \Phi$  tal que  $\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi) \neq \emptyset$ , entonces

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi)) \rightarrow \psi(\text{Dom}(\varphi) \cap \text{Dom}(\psi)),$$

es de clase  $C^k$ .

Decimos entonces que  $(M, \Phi)$  es una *variedad diferenciable  $n$ -dimensional de clase  $C^k$* ,  $\Phi$  es un *atlas* en  $M$ , y  $\varphi \in \Phi$  una *carta* o *sistema local de coordenadas*. Si  $k \rightarrow \infty$  decimos que la variedad es una *variedad suave*.

**Definición A.6.** Sean  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable n-dimensional de clase  $C^k$ ,  $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  una carta y

$$\begin{aligned} r^i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a^1, \dots, a^n) &\longmapsto a^i. \end{aligned}$$

Definimos a la *i-ésima función coordenada* de  $\varphi$  como

$$x^i = r^i \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

**Definición A.7.** Sean  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable n-dimensional de clase  $C^k$ ,  $A \subset M$  un conjunto abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos que  $f$  es *de clase  $C^l$*  con  $l \leq k$  si y solo si para todo  $x \in A \exists \varphi \in \Phi$  de una vecindad  $U$  de  $x$  tal que

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A \cap U)} \in C^l.$$

si  $l = k \rightarrow \infty$  decimos que la función es *suave*.

**Definición A.8.** Sea

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

una función de un abierto  $I$  sobre una variedad diferenciable n-dimensional  $(M, \Phi)$ . Llamamos a  $\alpha$  una *curva de clase  $C^k$*  si  $\forall \varphi \in \Phi$  entonces  $\varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^k$ .

**Definición A.9.** Sean  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable,  $\alpha$  una curva tal que para  $p \in M \exists x_0 \in \text{Dom}(\alpha)$  tal que  $\alpha(x_0) = p$  y  $C^k(M, \mathbb{R}^n) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}^n | f \in C^k\}$ . Definimos

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_p : C^k(M, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_p \end{aligned}$$

como el *vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $p$* . Al conjunto de todo los vectores tangentes de  $M$  en  $p$  se le llama *espacio tangente  $T_p(M)$* . A la unión de todos los espacios tangentes

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

, se le llama *haz tangente en  $M$* .

**Definición A.10.** Sea  $(M, \Phi)$  una variedad diferenciable.<sup>18</sup> Definimos al *espacio dual* de  $T_p(M)$  (también llamado *espacio cotangente*) como

$$T_p^*(M) = \{f : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}.$$

A los elementos del espacio cotangente se les llama *1-formas*.

**Definición A.11.** Sea  $S : \underbrace{T_p(M) \times \dots \times T_p(M)}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{T_p^*(M) \times \dots \times T_p^*(M)}_{m \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo multilinear. Decimos entonces que  $S$  es un *tensor* de rango  $\binom{m}{n}$ .

<sup>18</sup>De aquí en adelante, todas las definiciones son sobre una variedad diferenciable  $(M, \Phi)$  por lo cual esta a primera oración será omitida.

**Definición A.12.** Si  $S$  es un tensor de rango de rango  $\binom{m}{n}$  y  $T$  un tensor de rango  $\binom{p}{q}$  entonces  $U = S \otimes T$  dado por

$$U : T_p(M)^{m+p} \times T_p^*(M)^{n+q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

con

$$U(v^1, \dots, v^{m+p}, w_1, \dots, w_{n+q}) = S(v^1, \dots, v^m, w_1, \dots, w_n)T(v^{m+1}, \dots, v^{m+p}, w_{n+1}, \dots, w_{n+q})$$

es un tensor de rango  $\binom{m+p}{n+q}$  llamado *producto tensorial*.

**Teorema A.13.** Sea  $S = S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} e_{\nu_1} \otimes \dots \otimes e_{\nu_m} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n}$  un tensor de rango  $\binom{m}{n}$ . Ante cambios de coordenadas  $x^\mu \mapsto y^\mu(x^\nu)$  las componentes  $S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m}$  de  $S$  se transforman como

$$S_{\mu'_1 \dots \mu'_n}^{\nu'_1 \dots \nu'_m} = \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\nu'_m}^{\nu_m} \Lambda_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\mu'_n}^{\mu_n} S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m},$$

con  $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ .

*Observación.* La regla de transformación en A.13 nos da también la regla de transformación para vectores y 1-formas.

**Definición A.14.** Sea  $T$  un tensor de Rango  $\binom{0}{n}$ . La *parte simétrica* del tensor respecto al conjunto de índices  $I = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  está dada por

$$T_{(\mu_1, \dots, \mu_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{P \in G} T_{\mu_{P_1}, \dots, \mu_{P_n}}$$

y la parte antisimétrica es

$$T_{[\mu_1, \dots, \mu_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{P \in G} \text{Sgn}(P) T_{\mu_{P_1}, \dots, \mu_{P_n}}$$

con  $G$  el grupo de permutaciones de  $I$  y  $\text{Sgn}(P) = (-1)^{N(P)}$  la paridad de la permutación. La generalización a cualquier conjunto de índices y a cualquier tensor es directa.

**Definición A.15.** Sea

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow T(M) \\ p &\longmapsto X_p \in T_p(M). \end{aligned}$$

$X$  es llamado *campo vectorial en  $M$* . La definición de *campo de 1-formas*, y en general de *campo tensorial*, es similar.

**Definición A.16.** Sea  $\{e_\mu\}$  una base de  $T_p(M)$ . Definimos a las *funciones de estructura*  $\gamma_{\mu\nu}^\sigma$  como  $[e_\mu, e_\nu] = \gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma$ , con  $[e_\mu, e_\nu]$  el conmutador de  $e_\mu$  y  $e_\nu$ .

**Definición A.17.** Al conjunto  $\mathcal{X}(M) = \{X \mid X \text{ es un campo vectorial en } M\}$  se le conoce como *espacio de campos vectoriales en  $M$* .

*Observación.*  $\mathcal{X}(M)$  es un espacio vectorial.

**Teorema A.18.** Una base  $\{e_\mu\}$  de  $\mathcal{X}(M)$  es una base coordenada (es decir, que se pueden escribir como la derivada de una coordenada) si y solo si  $[e_\mu, e_\nu] = 0$ .

**Definición A.19.** Sea  $\Lambda^k(M) = \{f : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es antisimétrica y } k\text{-lineal}\}$ .

A los elementos de  $\Lambda^k(M)$  se les llaman *k-formas diferenciales*.

**Definición A.20.** Sean  $w$  una  $k$ -forma diferencial y  $\lambda$  una  $l$ -forma diferencial. Entonces el *producto cuña o producto exterior* ente  $w$  y  $\lambda$  es una  $(k+l)$ -forma diferencial definida por

$$w \wedge \lambda(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{P \in G} \text{Sgn}(P) w(v_{P(1)}, \dots, v_{P(k)}) \lambda(v_{P(k+1)}, \dots, v_{P(k+l)}).$$

**Definición A.21.** Sea  $\mathcal{G} = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(M)$ . Definimos a la *derivada exterior* como el mapeo lineal  $d : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  que satisface

1.  $d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$ .
2. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $d(f) = df$  es la diferencial de la función la cual es una  $1$ -forma.
3.  $d^2 \equiv d \circ d = 0$ .

**Teorema A.22.** La derivada exterior existe y es única.

*Observación.*  $(\mathcal{G}, \wedge)$  forman un álgebra llamada *álgebra de Grassmann* y a los elementos de  $\mathcal{G}$  se les llaman *formas diferenciales en M*.

**Definición A.23.** Sea  $\lambda$  una forma diferencial.

1. Decimos que  $\lambda$  es *cerrada* si  $d\lambda = 0$ .
2. Decimos que  $\lambda$  es *exacta* si  $\exists \mu \in \mathcal{G}$  tal que  $\lambda = d\mu$ .

**Corolario A.23.1.** Toda forma cerrada es exacta.

**Definición A.24.** Sea  $X$  un campo vectorial de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Decimos que una curva  $\alpha$  en  $M$  es una *curva integral de X* si  $\forall p \in \text{Im}(\alpha)$ ,  $\dot{\alpha}(p) = X_p$ .

**Teorema A.25.** Para cada campo vectorial  $X$  existe una única curva integral  $\alpha$  tal que  $\alpha(0) = p \in M$ ,  $\forall p$ .

**Definición A.26.**  $\alpha(\tau)$  es una *curva integral completa* en  $M$  si y solo si está definida  $\forall \tau$ . Una *congruencia* es un conjunto de curvas integrales.

**Definición A.27.** Definimos a la *conexión lineal* en  $M$  como la función

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

tal que, si  $X, Y$  y  $Z$  son campos vectoriales de clase  $C^1$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  entonces

1.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ .

2.  $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ .
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$ .
4.  $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ .

*Observación.*  $\nabla$  no es un tensor pues no es lineal en todos sus argumentos, sin embargo  $\nabla Y$  sí es un tensor y se llama *derivada covariante de Y*. A  $\nabla_X Y$  se le llama la *derivada covariante de Y respecto a X*.

**Definición A.28.** Sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales en  $M$ . Decimos que  $Y$  es *transportado paralelamente a lo largo de X* si  $\nabla_X Y = 0$ .

**Definición A.29.** Sea  $\{e_\mu\}$  una base para  $\mathcal{X}(M)$  y  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . Definimos a los *coeficientes de la conexión*  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  como

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda.$$

**Teorema A.30.** Sea  $\{e_\mu\}$  una base para  $\mathcal{X}(M)$  y  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . Los coeficientes  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  bajo cambio de coordenadas  $x^\mu \mapsto x^{\mu'}(x^\nu)$  se transforman como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}, \end{aligned}$$

de donde vemos que  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  no son coeficientes de un tensor.

**Definición A.31.** Sean  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Definimos entonces a la *derivada covariante de f respecto a X* como

$$\nabla_X f \equiv X(f).$$

**Lema A.32.** Sean  $A \in \mathcal{X}^*(M)$  una 1-forma,  $X \in \mathcal{X}(M)$  un campo vectorial y  $\{e_\mu\}$  una base de  $\mathcal{X}(M)$ . Entonces, los coeficientes de la *derivada covariante de A respecto a un elemento  $e_\mu$*  de la base, son

$$A_{\nu;\mu} \equiv \nabla_\mu A_\nu \equiv \nabla_{e_\mu} A_\nu = e_\mu(A_\nu) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho. \quad (548)$$

Los coeficientes de la *derivada covariante de X respecto a un elemento  $e_\mu$*  de la base, son

$$X^\nu_{;\mu} \equiv \nabla_\mu X^\nu \equiv \nabla_{e_\mu} X^\nu = e_\mu(X^\nu) + \Gamma_{\rho\mu}^\nu A^\rho.$$

Y directamente, si  $T$  es un tensor de rango  $\binom{m}{n}$ , entonces

$$\begin{aligned} T_{\mu_1 \dots \mu_n; \alpha}^{\nu_1 \dots \nu_m} &= e_\alpha(T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m}) + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu_1} T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\sigma \dots \nu_m} + \dots + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu_m} T_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \sigma} \\ &\quad - \Gamma_{\mu_1\alpha}^\lambda T_{\lambda \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} - \dots - \Gamma_{\mu_n\alpha}^\lambda T_{\mu_1 \dots \lambda}^{\nu_1 \dots \nu_m}. \end{aligned}$$

**Definición A.33.** Sea  $\alpha$  un curva suave en  $M$ . Decimos que  $\alpha$  es una *geodésica* si y solo si

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0 \quad \forall t,$$

o de manera equivalente, si  $\varphi$  es un sistema coordenado en  $U \subset M$ , entonces  $\alpha$  es una geodésica si y solo si la  $\mu$ -ésima función coordenada satisface

$$\frac{d^2(x^\mu \circ \alpha)}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{d(x^\nu \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^\sigma \circ \alpha)}{dt} = 0.$$

**Teorema A.34.** Sea  $X$  un campo vectorial y sea  $\alpha$  una curva integral de  $X$  con  $p \in \text{Im}(\alpha) \subset M$ . Si  $\alpha$  es una geodésica entonces  $\alpha$  es única.

**Teorema A.35.** Sea  $U \subset M$  una vecindad y  $p_1, p_2 \in U$  dos puntos distintos en esa vecindad. Entonces existe una única geodésica  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ .

**Definición A.36.** Definimos

$$\begin{aligned} T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

Entonces a la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^*(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y, \lambda) &\longmapsto \lambda(T(X, Y)), \end{aligned}$$

la llamamos *tensor de torsión* y es un tensor de rango  $\binom{1}{2}$  cuyos coeficientes están dados por

$$T_{\alpha\beta}^\mu \equiv \nabla_\alpha e_\beta - \nabla_\beta e_\alpha - [e_\alpha, e_\beta].$$

**Teorema A.37.** Sea  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . La conexión es simétrica (es decir,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ ) si y solo si  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$  se cumple que  $T(X, Y) = 0$ .

**Lema A.38.** Sea  $\{e_\mu\}$  una base para  $\mathcal{X}(M)$ . Entonces, los coeficientes del tensor de torsión se pueden escribir como

$$T_{\alpha\beta}^\mu = -2\Gamma_{[\alpha\beta]}^\mu - \gamma_{\alpha\beta}^\mu,$$

en donde  $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$  son las funciones de estructura.

**Teorema A.39.** Definimos

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{R} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^*(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y, Z, \lambda) &\longmapsto \lambda(R(X, Y, Z)), \end{aligned}$$

es un tensor, llamado *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann*, cuyos coeficientes están dado por

$$R_{\alpha\mu\nu}^\beta = e_\mu(\Gamma_{\alpha\nu}^\beta) - e_\nu(\Gamma_{\alpha\mu}^\beta) - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta.$$

**Teorema A.40.** los coeficientes del tensor de Riemann satisfacen

$$R_{\alpha[\mu\nu;\sigma]}^{\beta} = 0.$$

A esta relación se le conoce como *identidad de Bianchi*.

**Teorema A.41.** Sea  $X$  un campo vectorial. Los coeficientes del tensor de Riemann satisfacen

$$R_{\sigma\beta\alpha}^{\mu} X^{\sigma} = X_{;\alpha\beta}^{\mu} - X_{;\beta\alpha}^{\mu}.$$

A esta identidad se le conoce como *identidad de Ricci*.

**Definición A.42.** Definimos al *producto interior* como un tensor de rango  $\binom{0}{2}$  definido por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que sea

1. simétrico,
2. y no degenerado.

**Definición A.43.** Sea  $\mathbb{T}^{(0,2)}$  el espacio de tensores de rango  $\binom{0}{2}$ . Definimos entonces a la *métrica*  $g$  en  $M$  como

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow \mathbb{T}^{(0,2)} \\ p &\longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p, \end{aligned}$$

la cual puede ser escrita como  $g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$  con  $g_{\mu\nu} = \langle e_{\mu}, e_{\nu} \rangle$ .

*Observación.* Si además de las propiedades en A.42 se cumple que sea definido positivo, entonces la métrica se llama *métrica riemanniana*. Si no lo satisface se le llama *métrica pseudo o semi riemanniana*.

**Definición A.44.** Sea  $(M, g)$  una variedad con métrica. Si la métrica es riemanniana entonces a la variedad se le llama *variedad riemanniana* y si la métrica es pseudoriemanniana entonces a la variedad se le llama *variedad pseudo riemanniana* o *variedad lorentziana*.

*Observación.* Dado que  $g$  es no degenerada, esto implica que  $\det(g) \neq 0$ , y por lo tanto tiene inversa, la cual denotamos como  $g^{-1}$  aunque muchas veces se denota simplemente como  $g$  y la diferencia entre la métrica y su inversa se da a través de los índices de sus coeficientes, en donde  $g_{\mu\nu}$  son los coeficientes de la métrica y  $g^{\mu\nu}$  los de la inversa, los cuales satisfacen  $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ .

**Lema A.45.** La métrica  $g$  es un isomorfismo entre el espacio tangente y el espacio cotangente de una variedad tal que  $X^{\mu} = g^{\mu\nu} \lambda_{\nu}$  con  $X \in T_p(M)$  y  $\lambda \in T_p^*(M)$  y viceversa. A esto en física es lo que llamamos *Álgebra de Einstein* que consiste en subir y bajar índices en los coeficientes de los tensores, de esta forma hacemos la identificación  $\lambda^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} \lambda_{\nu}$  y consideramos que ambas son representaciones del mismo objeto matemático  $\lambda$ .

**Teorema A.46.** Sea  $(M, g)$  una variedad con métrica sin torsión. Entonces existe una única métrica que satisface

$$\nabla g = 0,$$

llamada *conexión métrica* o *conexión de Levi-Civita* cuyos coeficientes están determinados de manera única en una base coordenada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}).$$

A los coeficientes de la conexión de Levi-Civita se le llaman *símbolos de Christoffel*.

**Teorema A.47.**  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita  $\iff$  no hay torsión, es decir,  $T(X, Y) = 0 \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

**Teorema A.48.** Sea  $(M, g)$  una variedad con la conexión de Levi-Civita. Entonces, los coeficientes  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}R_{\beta\mu\nu}^{\sigma}$  tiene las siguientes simetrías

1.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$ .
2.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$ .
3.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ .

**Definición A.49.** Definimos al *tensor de Ricci* como  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}$ , al *escalar de Ricci* como  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  y al *tensor de Einstein* como  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ .

*Observación.* Los tensores de Einstein y de Ricci son simétricos en la conexión de Levi-Civita, es decir,  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$  y  $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$  si  $\nabla g = 0$ .

**Corolario A.49.1.** El tensor de Einstein satisface

$$G_{\mu\nu;\nu} = 0.$$

**Definición A.50.** Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  campos vectoriales. Decimos que son *ortogonales* si y solo si

$$\langle X, Y \rangle_p = 0.$$

**Teorema A.51.** Sea  $(M, g)$  una variedad con métrica. La variedad es plana si y solo si el tensor de Riemann es cero.

Las demostraciones de los teoremas aquí mencionados y más definiciones útiles e importantes en geometría diferencial y en topología se pueden ver en [8][111][112][113][114].



## B. Cálculo de variaciones

### B.1. Elementos de análisis funcional

**Definición B.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial. Una *norma* en  $V$  es una función

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\| \end{aligned}$$

que satisface

1.  $\|v\| \geq 0 \forall v \in V$  y  $\|v\| = 0$  si  $v = 0$ .
2.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ , conocida como *desigualdad del triángulo*.
3.  $\|tv\| = |t| \|v\| \forall t \in \mathbb{R}$ .

Un espacio vectorial con una norma  $(V, \|\cdot\|)$  se le llama *espacio normado*.

**Definición B.2.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado. Decimos que  $(V, \|\cdot\|)$  es un *espacio de Banach* si y solo  $\forall \{v_n\}$  sucesión de Cauchy en  $V$  se cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_* \in V$ .

**Definición B.3.** Sean  $V$  y  $W$  espacios de Banach. Definimos

$$\begin{aligned} F : U_1 \subset V &\longrightarrow W \\ f &\longmapsto F[f] \end{aligned}$$

con  $U_1$  abierto, como la *funcional* de  $U_1 \subset V$  en  $W$ .

**Definición B.4.** Sea  $F[f]$  una funcional de  $V$  en  $W$  espacios de Banach. Decimos que  $F[f]$  es *Fréchet diferenciable* si existe un operador lineal  $\delta F_f^F : V \longrightarrow W$  que cumple

$$\lim_{\|\eta\| \rightarrow 0} \frac{\|F[f + \eta] - F[f] - \delta F_f^F[\eta]\|_W}{\|\eta\|_V} = 0.$$

En donde  $\|\cdot\|_V$  es la norma en  $V$  y  $\|\cdot\|_W$  la norma en  $W$ .

Llamamos al operador  $\delta F_f^F$  la *derivada de Fréchet* de  $F[f]$  respecto a  $f$ .

**Definición B.5.** Sea  $F : U \subset V \longrightarrow W$ , con  $V, W$  espacios de Banach y  $U$  un abierto, una funcional Fréchet diferenciable. Definimos a la *derivada de Gâteaux* o *derivada de Fréchet direccional* como el operador

$$\delta F^G[f, \eta] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \varepsilon\eta] - F[f]}{\varepsilon},$$

con  $\eta \in V$ ,  $\|\eta\| = 1$ , el cual es uniforme  $\forall \eta$ .<sup>19</sup>

<sup>19</sup>En general, que una funcional sea Gâteaux diferenciable no implica que sea Fréchet diferenciable, pero toda funcional Fréchet diferenciable es Gâteaux diferenciable por lo que en todo el texto trabajamos con funcionales Fréchet diferenciables para evitar problemas.

**Definición B.6.** Sea  $F : U(f_0) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional con  $V$  un espacio de Banach real y  $U(f_0)$  un vecindad de  $f_0$ . Sea  $\eta \in V$ , entonces definimos

$$\phi(t) := F[f_0 + t\eta]$$

con  $t$  un real en una vecindad del cero.

Definimos la  $n$ -ésima variación  $\delta^n F(f_0; \eta)$  de la funcional  $F$  en el punto  $f_0 \in V$  en la dirección  $\eta$  como

$$\delta^n F(f_0; \eta) \equiv \phi^{(n)}(0).$$

**Teorema B.7.** Sea  $F : U(f_0) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional Fréchet diferenciable. Entonces, la primera variación de  $F$ , o *derivada funcional*, en  $f_0$  en la dirección de  $\eta$  es

$$\delta F(f_0; \eta) = \delta F^G[f_0, \eta] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[f_0 + \varepsilon\eta] - F[f_0]}{\varepsilon}$$

*Observación.* La primer variación y la derivada conmutan.

**Teorema B.8.** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $\Omega$  un abierto.

1. Si  $\int_{\Omega} f(x)\eta(x) \geq 0 \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$  con  $\eta \geq 0$  entonces  $f(x) \geq 0$ .
2. Si  $\int_{\Omega} f(x)\eta(x) = 0 \forall \eta \in C_c^\infty(\Omega)$  entonces  $f(x) = 0$ .

## B.2. La derivada funcional en física

En física es usual buscar la primer variación de funcionales del tipo

$$F : C^\infty(\overline{G}) \subset C(\overline{G}) \rightarrow \mathbb{R} \tag{549}$$

$$g(t) \mapsto \int_G \mathcal{L}(t, g(t), d_t g(t), d_t^2 g(t), \dots, d_t^N g(t)) dt, \tag{550}$$

en donde  $d_t^N c(t) \equiv \frac{d^N}{dt^N} c(t)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^N$  un abierto,  $C(\overline{G})$  es el espacio de Banach de funciones continuas en  $\overline{G}$  y  $C^\infty(\overline{G})$  el espacio de las funciones evaluadas cuyas derivadas de cualquier orden son continuas en  $G$  y pueden ser extendidas continuamente a la cerradura de  $G$ , con  $\mathcal{L} : \overline{G} \times \mathbb{R}^{N+1}$  de clase  $C^1$ . Para ello, se toma

$$\phi(\tau) = \int_G \mathcal{L}(t, c(t) + \tau\delta c(t), d_t c(t) + \tau d_t \delta c(t), d_t^2 c(t) + \tau d_t^2 \delta c(t), \dots, d_t^N c(t) + \tau d_t^N \delta c(t)) dt, \tag{551}$$

en donde  $\delta c(t) \in C^\infty(\overline{G})$  con  $c(t) \in C^\infty(\overline{G})$  dada, y se hace la primer variación igual a cero para minimizar a la funcional, que es lo que se conoce como el *principio de acción estacionaria*. Por lo que, la primer variación igualada a cero da lugar a

$$0 = \delta F(c(t); \delta c(t)) \equiv \delta F = \int_G \left[ \sum_{i=1}^N -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial d_t^i c(t)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial c(t)} \right] \delta c(t) dt, \tag{552}$$

en donde, usando el *lema fundamental del cálculo de variaciones* B.8, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^N -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial d_i^i c(t)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial c(t)} = 0, \quad (553)$$

que son las *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

También existe otra *convención* en física para funcionales distintas a (550) en la que consiste en escribir a la primer variación como

$$\delta F(f; \delta(x - y)) \equiv \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)},$$

y en donde ahora  $\delta f(x) = \epsilon \delta(x - y)$  se usa como *función* de prueba. Entonces, de acuerdo a B.5, la primer variación toma la forma

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon \delta(x - y)] - F[f]}{\epsilon},$$

con  $\delta(x - y)$  la delta de Dirac. Ambas notaciones son usadas indistintamente en donde el contexto da a indicar qué función de prueba se usa.

Por último, cuando la funcional toma varios argumentos de entrada, esta última notación nos ayuda a definir respecto a qué entrada o variable se hace la variación y de esta forma aplicar directamente las ideas ya discutidas a cualquiera de las entradas de la funcional.

### B.2.1. Identidades útiles en física

Sea  $(M, g)$  una variedad pseudoriemanniana y  $F[\phi]$  una funcional Fréchet diferenciable<sup>20</sup>. Tenemos que las siguientes identidades se cumplen

1. Si  $F[\phi] = G[\phi]H[\phi]$  entonces  $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(y)}H[\phi] + G[\phi]\frac{\delta H[\phi]}{\delta \phi(y)}$ .
2. si  $F[\phi] = \int (\phi(x))^n dx$  entonces  $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = n(\phi(y))^{n-1}$ .
3. Si  $F = F[G[\phi]]$  entonces  $\frac{\delta F[G[\phi]]}{\delta \phi(y)} = \delta(F \circ G)(\phi; \delta(x - y)) = \delta F(G; \delta G(\phi; \delta(x - y)))$ .
4. Si  $F[\phi] = \phi(x)$  entonces  $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = \delta(x - y)$ .
5.  $\delta\sqrt{-g} \equiv \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$  con  $\sqrt{-g}$  el determinante del tensor métrico y  $g_{\mu\nu}$  sus componentes.
6.  $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu}$  con  $\square = \nabla^\mu\nabla_\mu$  y  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci.

En general, el tema de la derivada funcional, derivada de Fréchet, etcétera es parte de lo conoce como *análisis funcional* el cual se puede abordar de muchas formas. Para una discusión a profundidad sobre espacios de Banach se pueden revisar [115] y [116], donde este último incluye aplicaciones a la física. Una introducción a las derivadas de Fréchet y Gâteaux se encuentra en [117]. Para una discusión en análisis funcional y cálculo variacional, desde un punto de vista matemático con aplicaciones, se pueden ver [118][119][120] y para una discusión menos rigurosa y hecha desde un punto de vista físico se pueden ver [121] y [122].

<sup>20</sup>Para escribir las relaciones se usarán las dos notaciones vistas para la derivada funcional indistintamente pues en muchos casos, como los que se van a listar, ambas notaciones llevan a los mismos resultados

## C. Sistemas dinámicos

A continuación se presentan las definiciones y teoremas básicos para el estudio de sistemas dinámicos desde un punto de vista no riguroso.

Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto de coordenadas y  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \Omega$ . Un *sistema dinámico autónomo* tiene la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})). \quad (554)$$

A continuación, se presentan las definiciones y teoremas usados para analizar la estabilidad del sistema dinámico las cuales son válidas en las regiones donde  $\mathbf{f}$  es continua <sup>21</sup>.

**Definición C.1.** Sea  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  un sistema dinámico autónomo<sup>22</sup>. Decimos que  $\mathbf{x}_0$  es un *punto crítico* o *punto de equilibrio* si y solo si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ .

**Definición C.2.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Decimos que  $\mathbf{x}_0$  es un *punto estable* si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tal que, si  $\psi(t)$  es una solución al sistema dinámico que cumple  $\|\psi(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$  entonces  $\|\psi(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \forall t > t_0$ . Un *punto inestable* es un punto que no es estable.

**Definición C.3.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico. Decimos que  $\mathbf{x}_0$  es *asintóticamente estable* si  $\exists \delta > 0$  tal que si  $\psi(t)$  es una solución del sistema autónomo y además cumple que  $\|\psi(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \mathbf{x}_0$  <sup>23</sup>.

**Definición C.4.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico  $\mathbf{f}$  una función suficientemente suave. Definimos la *matriz de estabilidad* de  $\mathbf{x}_0$  como

$$J = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right).$$

**Definición C.5.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico. Decimos que  $\mathbf{x}_0$  es un *punto hiperbólico* si  $\forall \omega \in \mathbb{C}$  eigenvalor de la matriz de estabilidad  $J$  de  $\mathbf{x}_0$  se cumple que  $\text{Re}(\omega) \neq 0$ . Si al menos uno de los eigenvalores tiene parte real igual a cero entonces el punto es *no hiperbólico*.

**Teorema C.6.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico y sean  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  los eigenvalores de la matriz de estabilidad  $J$  de  $\mathbf{x}_0$ .

1.  $\mathbf{x}_0$  es un *punto inestable* o *repulsor* si  $\text{Re}(\omega_i) > 0 \forall \omega_i$ .
2.  $\mathbf{x}_0$  es un *punto asintóticamente estable* o *atractor* si  $\text{Re}(\omega_i) < 0 \forall \omega_i$ .
3. Decimos que  $\mathbf{x}_0$  es un *punto silla* si  $\exists \omega_1, \omega_2$  tal que  $\text{Re}(\omega_1) > 0$  y  $\text{Re}(\omega_2) < 0$ .
4. Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto no hiperbólico entonces no podemos decir nada sobre su estabilidad a través de los eigenvalores de  $J$ .

A esta clasificación de la estabilidad de  $\mathbf{x}_0$  se le llama *teoría de estabilidad lineal*. Como se puede observar del punto 4, la teoría de estabilidad lineal no funciona para puntos no hiperbólicos.

<sup>21</sup>En general  $\mathbf{f}$  puede ser discontinua y presentar divergencias, sin embargo en física es usual que esta sea continua.

<sup>22</sup>De aquí en adelante en este apéndice se trabajará con el sistema autónomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  por lo cual esta frase será omitida en las siguientes definiciones y teoremas.

<sup>23</sup>Todo punto asintóticamente estable es estable.

El teorema anterior nos permite determinar fácilmente la estabilidad de puntos hiperbólicos pero no nos dice nada sobre puntos no hiperbólicos. Para ver la estabilidad de estos últimos hay diferentes métodos, entre ellos hay dos bastante útiles llamados *método de Lyapunov* y *teoría de variedad centro*.

**Definición C.7.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico. Definimos la *función de Lyapunov* de  $\mathbf{x}_0$  como una función  $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U(\mathbf{x}_0)$  una vecindad de  $\mathbf{x}_0$  y de clase  $C^1$  que cumple

1.  $V(\mathbf{x}) > V(\mathbf{x}_0)$ .
2.  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in U^\circ(\mathbf{x}_0)$ .

Esta última condición se puede escribir como  $\nabla V \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ .

**Teorema C.8.** Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico. Si existe  $V$  la función de Lyapunov de  $\mathbf{x}_0$  tal que  $\dot{V} \leq 0$  entonces  $\mathbf{x}_0$  es estable. Si existe  $V$  la función de Lyapunov de  $\mathbf{x}_0$  y  $\dot{V} < 0$  entonces  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable.

**Definición C.9.** Sean  $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  un punto crítico y  $J$  la matriz de estabilidad de  $\mathbf{x}_0$ . Consideramos a  $\{e_1, \dots, e_s\}$  como los eigenvectores de  $J$  con eigenvalores asociados con parte real negativa,  $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$  como los eigenvectores de  $J$  con eigenvalores asociados con parte real positiva, y a  $\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$  como los eigenvectores de  $J$  con eigenvalores asociados con parte real igual a cero tal que  $s + c + u = n$ . Entonces podemos escribir

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^c,$$

en donde  $\mathbb{E}^s = \text{span}\{e_1, \dots, e_s\}$ ,  $\mathbb{E}^u = \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$  y  $\mathbb{E}^c = \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$  son los espacios *estable*, *inestable* y *centro* respectivamente.

*Observación.* Si  $\mathbb{E}^u \neq \emptyset$  entonces el punto crítico  $\mathbf{x}_0$  no puede ser estable independientemente si es hiperbólico o no.

La teoría de variedad centro nos ayuda a analizar la estabilidad del punto crítico no hiperbólico  $\mathbf{x}_0$  con la consideración  $\mathbb{E}^u = \emptyset$ .

**Teorema C.10.** Sean  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  un sistema dinámico autónomo y  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico y  $J$  la matriz de estabilidad de  $\mathbf{x}_0$ . Si  $\mathbb{E}^u = \emptyset$  entonces existe un cambio de coordenadas que nos permite escribir al sistema dinámico como

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + g(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad (555)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = B\mathbf{w} + h(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad (556)$$

con  $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$  y tal que

$$g(0, 0) = h(0, 0) = \nabla g(0, 0) = \nabla h(0, 0) = 0,$$

con  $A$  una matriz  $c \times c$  con eigenvalores con parte real igual a cero y  $B$  una matriz  $s \times s$  con eigenvalores con parte real negativa.

**Definición C.11.** Consideremos un sistema dinámico autónomo escrito en la forma de (555). Una variedad centro es un espacio geométrico el cual puede ser escrito localmente como

$$C^0 = \{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{z}), \text{ para } |\mathbf{x}| < \delta \text{ con } L(0) = 0, \nabla L(0) = 0\},$$

tal que  $\delta$  es un número pequeño y  $L(\mathbf{z})$  una función analítica, simplemente valuada y acotada en todas sus derivadas.

**Teorema C.12.** Si  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es un sistema autónomo que se pueda escribir como (555), entonces siempre existe una variedad centro para este sistema dinámico y su dinámica queda restringida a la variedad centro a través del campo vectorial

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} + g(\mathbf{u}, L(\mathbf{u})). \quad (557)$$

con  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^c$  suficientemente pequeño.

**Teorema C.13.** Si la solución de (557) es estable (inestable) entonces la solución del sistema dinámico escrito como (555) es estable (inestable). Más aún, si la solución de (557) es estable entonces, si  $(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t))$  es solución de (555) con  $(\mathbf{z}(0), \mathbf{w}(0))$  pequeño, entonces  $\mathbf{u}(t)$  es solución de (557) tal que al tomar  $t \rightarrow \infty$  y  $\gamma > 0$  entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \mathbf{u}(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \\ \mathbf{w}(t) &= L(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}). \end{aligned}$$

*Observación.* La función  $L(\mathbf{z})$  no puede ser cualquier función arbitraria sino que debe de satisfacer la ecuación diferencial

$$\mathcal{N}(L(\mathbf{z})) \equiv \nabla L(\mathbf{z}) [A\mathbf{z} + g(\mathbf{z}, L(\mathbf{z}))] - BL(\mathbf{z}) - h(\mathbf{z}, L(\mathbf{z})) = 0. \quad (558)$$

**Teorema C.14.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$  una función de clase  $C^1$  tal que  $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$  y tal que  $\mathcal{N}(\phi(\mathbf{z})) = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^q)$ , con  $q > 1$  y  $\mathbf{z} \rightarrow 0$ . Entonces

$$|L(\mathbf{z}) - \phi(\mathbf{z})| = \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^q),$$

con  $|\mathbf{z}| \rightarrow 0$ .

Este último teorema nos dice que conocer de manera aproximada a la variedad centro nos da la misma información sobre la estabilidad del sistema dinámico original que la solución exacta. Esto es de gran utilidad pues a la hora de hacer las cuentas podemos proponer una expansión en serie Taylor de  $L(\mathbf{z})$  alrededor de cero, e insertar esta expansión en (558) y así analizar la estabilidad del punto no hiperbólico  $\mathbf{x}_0$ .

Para una discusión matemática más a fondo sobre sistemas dinámicos se puede consultar [123] y [90], para una discusión no tan rigurosa y con muchos ejemplos aplicados a cosmología se puede ver [86].

## Referencias

- [1] G. Galilei. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Collezione Filo di perle. Studio Tesi, 1992. ISBN 9788876921100.
- [2] Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. William Dawson & Sons Ltd., London, 1687.
- [3] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1972. ISBN 0471925675.
- [4] S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T. A. Wagner, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger. Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. *Physical Review Letters*, 100(4), jan 2008. doi:[10.1103/physrevlett.100.041101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.100.041101).
- [5] S. Ramos-Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*. Textos contemporáneos. Copit-ArXives, 2018. ISBN 9781938128189.
- [6] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, 513(1-3):1–189, mar 2012. doi:[10.1016/j.physrep.2012.01.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001).
- [7] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Pr., 1984. ISBN 0226870332.
- [8] Eduardo Nahmad-Achar. *Differential Topology and Geometry with Applications to Physics*. Institute of Physics Publishing, 2018.
- [9] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004. ISBN 9780805387322.
- [10] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the Einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, jun 1972. doi:[10.1063/1.1666069](https://doi.org/10.1063/1.1666069).
- [11] David Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, mar 1971. doi:[10.1063/1.1665613](https://doi.org/10.1063/1.1665613).
- [12] Celia Escamilla-Rivera and Júlio C. Fabris. A non-lagrangian theory of gravity. URL <https://arxiv.org/abs/2005.09739>.
- [13] Tsutomu Kobayashi. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, 82(8):086901, jul 2019. doi:[10.1088/1361-6633/ab2429](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab2429). URL <https://doi.org/10.1088%2F1361-6633%2Fab2429>.
- [14] Luisa G. Jaime, Leonardo Patino, and Marcelo Salgado. f(r) cosmology revisited. June 2012. URL <https://arxiv.org/abs/1206.1642>.
- [15] D. Bailin and A. Love. Kaluza-klein theories. *Reports on Progress in Physics*, 50(9):1087–1170, sep 1987. doi:[10.1088/0034-4885/50/9/001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/50/9/001).
- [16] Dražen Glavan and Chunshan Lin. Einstein-gauss-bonnet gravity in four-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 124(8), feb 2020. doi:[10.1103/physrevlett.124.081301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.124.081301).

- [17] Valerio Faraoni and Salvatore Capozziello. *Beyond Einstein Gravity*. Springer Netherlands, 2011. doi:[10.1007/978-94-007-0165-6](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0165-6).
- [18] Jimin Wu, Guangjie Li, Tiberiu Harko, and Shi-Dong Liang. Palatini formulation of  $f(R, T)$  gravity theory, and its cosmological implications. *The European Physical Journal C*, 78(5), may 2018. doi:[10.1140/epjc/s10052-018-5923-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5923-9).
- [19] Ofer Lahav. Observational tests for the cosmological principle and world models. In *Structure Formation in the Universe*, pages 131–142. Springer Netherlands, 2001. doi:[10.1007/978-94-010-0540-1\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-010-0540-1_7).
- [20] Ofer Lahav. Testing homogeneity on large scales. *ASP Conf. Ser.*, 201:377, 2000.
- [21] Keith Horne. Lecture 9: The Hot Big Bang. Lecture Notes, November 2011. URL <http://star-www.st-and.ac.uk/~kdh1/eg/>.
- [22] P.M. Okouma, Y. Fantaye, and B.A. Bassett. How flat is our universe really? *Physics Letters B*, 719(1-3):1–4, feb 2013. doi:[10.1016/j.physletb.2012.12.070](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.12.070).
- [23] Benjamin L’Huillier and Arman Shafieloo. Model-independent test of the FLRW metric, the flatness of the universe, and non-local estimation of  $H_0$ . *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(01):015–015, jan 2017. doi:[10.1088/1475-7516/2017/01/015](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/01/015).
- [24] B. Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107154834.
- [25] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565–586, June 1999. doi:[10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221). URL <https://doi.org/10.1086/307221>.
- [26] Robert M. Wald. Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant. *Physical Review D*, 28(8):2118–2120, oct 1983. doi:[10.1103/physrevd.28.2118](https://doi.org/10.1103/physrevd.28.2118).
- [27] P. A. R. Ade et al. Planck2015 results. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, sep 2016. doi:[10.1051/0004-6361/201525830](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525830).
- [28] Jean-Philippe Uzan. The big-bang theory: construction, evolution and status. In *L’UNIVERS, Séminaire Poincaré XX*, 6 2016.
- [29] G F R Ellis and W Stoeger. The ‘fitting problem’ in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 4(6):1697–1729, nov 1987. doi:[10.1088/0264-9381/4/6/025](https://doi.org/10.1088/0264-9381/4/6/025). URL <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F4%2F6%2F025>.
- [30] Laura Baudis. Dark matter detection. *J. Phys.*, G43(4):044001, 2016. doi:[10.1088/0954-3899/43/4/044001](https://doi.org/10.1088/0954-3899/43/4/044001).



- [31] S. Weinberg. *Cosmology*. Cosmology. OUP Oxford, 2008. ISBN 9780191523601. URL <https://books.google.com.mt/books?id=nqQZdg020fsC>.
- [32] George Ellis. The standard cosmological model: Achievements and issues. *Foundations of Physics*, 48(10):1226–1245, jun 2018. doi:[10.1007/s10701-018-0176-x](https://doi.org/10.1007/s10701-018-0176-x).
- [33] P.J.E. Peebles. *The Large-scale Structure of the Universe*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1980. ISBN 9780691082400.
- [34] Bruce Bassett and Renée Hlozek. Baryon acoustic oscillations. In Pilar Ruiz-Lapuente, editor, *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches*, pages 246–278. Cambridge University Press, 2010. doi:[10.1017/cbo9781139193627.010](https://doi.org/10.1017/cbo9781139193627.010).
- [35] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2015. ISBN 9781118690253.
- [36] Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989. doi:[10.1103/RevModPhys.61.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.1).
- [37] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1–189, 2012. doi:[10.1016/j.physrep.2012.01.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001).
- [38] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology Intertwined II: The Hubble Constant Tension. 8 2020.
- [39] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology Intertwined III:  $f\sigma_8$  and  $S_8$ . 8 2020.
- [40] Herbert Lichtenegger and Bahram Mashhoon. Mach’s principle. In *The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise*, chapter 2, pages 13–25. Nova Publishers, 2007.
- [41] J. V. Narlikar. Mach’s principle. *Resonance*, 16(4):310–321, apr 2011. doi:[10.1007/s12045-011-0037-9](https://doi.org/10.1007/s12045-011-0037-9).
- [42] J.B. Barbour and H. Pfister. *Mach’s Principle: From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*. Einstein Studies. Birkhäuser Boston, 1995. ISBN 9780817638238.
- [43] V. M. Lipunov. Mach’s principle and cosmology term. 2002. URL <https://cds.cern.ch/record/583883/files/0210013.pdf>.
- [44] Bahram Mashhoon. Electrodynamics in a rotating frame of reference. *Physics Letters A*, 139(3-4):103–108, jul 1989. doi:[10.1016/0375-9601\(89\)90338-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90338-1).
- [45] D.W. Sciama. *The Unity of the Universe*. Dover science books. Dover Publications, 2009. ISBN 9780486472058.
- [46] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 124(3):925–935, nov 1961. doi:[10.1103/physrev.124.925](https://doi.org/10.1103/physrev.124.925).
- [47] José P. Mimoso and David Wands. Massless fields in scalar-tensor cosmologies. *Physical Review D*, 51(2):477–489, jan 1995. doi:[10.1103/physrevd.51.477](https://doi.org/10.1103/physrevd.51.477).

- [48] J. O’Hanlon and B. O. J. Tupper. Vacuum-field solutions in the Brans-Dicke theory. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 7(2):305–312, feb 1972. doi:[10.1007/bf02743602](https://doi.org/10.1007/bf02743602).
- [49] Hidekazu Nariai. On the Green’s function in an expanding universe and its role in the problem of Mach’s principle. *Progress of Theoretical Physics*, 40, 1968.
- [50] Andronikos Paliathanasis. Conservation laws and exact solutions in Brans-Dicke cosmology with a scalar field. *General Relativity and Gravitation*, 51(8), aug 2019. doi:[10.1007/s10714-019-2585-3](https://doi.org/10.1007/s10714-019-2585-3).
- [51] A E Montenegro and S Carneiro. Exact solutions of Brans-Dicke cosmology with decaying vacuum density. *Classical and Quantum Gravity*, 24(2):313–327, dec 2006. doi:[10.1088/0264-9381/24/2/004](https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/2/004).
- [52] Metin Arik, Mehmet Çalık, and Nihan Katırcı. A cosmological exact solution of generalized Brans-Dicke theory with complex scalar field and its phenomenological implications. *Open Physics*, 9(6), jan 2011. doi:[10.2478/s11534-011-0067-7](https://doi.org/10.2478/s11534-011-0067-7).
- [53] Richard Woodard. Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8):32243, 2015. doi:[10.4249/scholarpedia.32243](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.32243).
- [54] Hayato Motohashi and Teruaki Suyama. Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability. *Physical Review D*, 91(8), apr 2015. doi:[10.1103/physrevd.91.085009](https://doi.org/10.1103/physrevd.91.085009).
- [55] Miguel Zumalacárregui and Juan García-Bellido. Transforming gravity: From derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian. *Physical Review D*, 89(6), mar 2014. doi:[10.1103/physrevd.89.064046](https://doi.org/10.1103/physrevd.89.064046).
- [56] Ravi P. Agarwal and Donal O’Regan. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Springer New York, 2008. doi:[10.1007/978-0-387-71276-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-71276-5).
- [57] Marco Crisostomi, Matthew Hull, Kazuya Koyama, and Gianmassimo Tasinato. Horndeski: beyond, or not beyond? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(03):038–038, mar 2016. doi:[10.1088/1475-7516/2016/03/038](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/03/038).
- [58] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10(6):363–384, sep 1974. doi:[10.1007/bf01807638](https://doi.org/10.1007/bf01807638).
- [59] Ryotaro Kase and Shinji Tsujikawa. Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review. *International Journal of Modern Physics D*, 28(05):1942005, apr 2019. doi:[10.1142/s0218271819420057](https://doi.org/10.1142/s0218271819420057).
- [60] C. Armendáriz-Picón, T. Damour, and V. Mukhanov.  $k$ -inflation. *Physics Letters B*, 458(2-3):209–218, jul 1999. doi:[10.1016/s0370-2693\(99\)00603-6](https://doi.org/10.1016/s0370-2693(99)00603-6).
- [61] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. Essentials of  $k$ -essence. *Physical Review D*, 63(10), apr 2001. doi:[10.1103/physrevd.63.103510](https://doi.org/10.1103/physrevd.63.103510).
- [62] Ishwaree P Neupane and Christoph Scherer. Inflation and quintessence: theoretical approach of cosmological reconstruction. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(05):009, may 2008. doi:[10.1088/1475-7516/2008/05/009](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2008/05/009).

- [63] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy after GW170817: Dead ends and the road ahead. *Physical Review Letters*, 119(25), dec 2017. doi:[10.1103/physrevlett.119.251304](https://doi.org/10.1103/physrevlett.119.251304).
- [64] Wolfgang Kühnel and Hans-Bert Rademacher. Conformal Transformations of Pseudo-Riemannian manifolds. In *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys.* (Eur. Math. Soc., Zürich), 2008.
- [65] Luisa G. Jaime, Mariana Jaber, and Celia Escamilla-Rivera. New parametrized equation of state for dark energy surveys. *Physical Review D*, 98(8), oct 2018. doi:[10.1103/physrevd.98.083530](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.083530).
- [66] S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi. Quintessence without scalar fields. *Recent Res. Dev. Astron. Astrophys*, 2003.
- [67] SILVIJE DOMAZET, VOJA RADOVANOVIĆ, MARKO SIMONOVIĆ, and HRVOJE ŠTEFANČIĆ. ON ANALYTICAL SOLUTIONS OF  $f(R)$  MODIFIED GRAVITY THEORIES IN FLRW COSMOLOGIES. *International Journal of Modern Physics D*, 22(02):1350006, feb 2013. doi:[10.1142/s0218271813500065](https://doi.org/10.1142/s0218271813500065).
- [68] Andronikos Paliathanasis. Analytic solution of the starobinsky model for inflation. *The European Physical Journal C*, 77(7), jul 2017. doi:[10.1140/epjc/s10052-017-5009-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5009-0).
- [69] S. D. Maharaj, R. Goswami, S. V. Chervon, and A. V. Nikolaev. Exact solutions for scalar field cosmology in  $f(R)$  gravity. *Modern Physics Letters A*, 32(30):1750164, sep 2017. doi:[10.1142/s0217732317501644](https://doi.org/10.1142/s0217732317501644).
- [70] Dilek K. Çiftci and Valerio Faraoni. Perfect fluid solutions of brans-dicke and  $f(R)$  cosmology. *Annals of Physics*, 391:65–82, apr 2018. doi:[10.1016/j.aop.2018.02.002](https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.02.002).
- [71] John Douglas Moore. Lectures on Differential Geometry. Technical report, Department of Mathematics, University of California, June 2011. URL <http://web.math.ucsb.edu/~moore/riemanniangeometry2011.pdf>.
- [72] Matthias Blau. Lecture Notes on General Relativity. Technical report, Albert Einstein Center for Fundamental Physics, University of Bern, 2011. URL <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>.
- [73] Paul Duffell. Geometric Concepts in Physics. Lecture Notes. URL <http://duffell.org/>.
- [74] Richard L. Bishop. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Publications Inc., 1980. ISBN 0486640396. URL [https://www.ebook.de/de/product/3303071/richard\\_l\\_bishop\\_tensor\\_analysis\\_on\\_manifolds.html](https://www.ebook.de/de/product/3303071/richard_l_bishop_tensor_analysis_on_manifolds.html).
- [75] Sebastián Bahamonde. *Modified Teleparallel theories of gravity*. PhD thesis, University College London, 2018.
- [76] Ruben Aldrovandi and José Geraldo Pereira. *Teleparallel Gravity*. Springer Netherlands, 2013. doi:[10.1007/978-94-007-5143-9](https://doi.org/10.1007/978-94-007-5143-9).

- [77] Alexey Golovnev, Tomi Koivisto, and Marit Sandstad. On the covariance of teleparallel gravity theories. *Classical and Quantum Gravity*, 34(14):145013, June 2017. doi:[10.1088/1361-6382/aa7830](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa7830). URL <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa7830>.
- [78] Konstantinos F. Dialektopoulos. *Geometric Foundations of Gravity and Applications*. PhD thesis, Università degli Studi di Napoli Federico II, 2018.
- [79] Gabriel R. Bengochea and Rafael Ferraro. Dark torsion as the cosmic speed-up. *Physical Review D*, 79(12), jun 2009. doi:[10.1103/physrevd.79.124019](https://doi.org/10.1103/physrevd.79.124019).
- [80] Rafael Ferraro and Franco Fiorini. Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton. *Physical Review D*, 75(8), apr 2007. doi:[10.1103/physrevd.75.084031](https://doi.org/10.1103/physrevd.75.084031).
- [81] Rafael Ferraro and Franco Fiorini. Born-infeld gravity in weitzenböck spacetime. *Physical Review D*, 78(12), dec 2008. doi:[10.1103/physrevd.78.124019](https://doi.org/10.1103/physrevd.78.124019).
- [82] Celia Escamilla-Rivera and Jackson Levi Said. Cosmological viable models in  $f(T, B)$  theory as solutions to the  $H_0$  tension. *Classical and Quantum Gravity*, 37(16):165002, jul 2020. doi:[10.1088/1361-6382/ab939c](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab939c).
- [83] Sebastian Bahamonde and Salvatore Capozziello. Noether symmetry approach in  $f(T, B)$  teleparallel cosmology. *The European Physical Journal C*, 77(2), feb 2017. doi:[10.1140/epjc/s10052-017-4677-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4677-0).
- [84] Sebastian Bahamonde, M. Zubair, and G. Abbas. Thermodynamics and cosmological reconstruction in  $f(T, B)$  gravity. *Physics of the Dark Universe*, 19:78–90, mar 2018. doi:[10.1016/j.dark.2017.12.005](https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.12.005).
- [85] EDMUND J. COPELAND, M. SAMI, and SHINJI TSUJIKAWA. DYNAMICS OF DARK ENERGY. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935, nov 2006. doi:[10.1142/s021827180600942x](https://doi.org/10.1142/s021827180600942x).
- [86] Sebastian Bahamonde, Christian G. Böhrer, Sante Carloni, Edmund J. Copeland, Wei Fang, and Nicola Tamanini. Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity. *Physics Reports*, 775-777:1–122, nov 2018. doi:[10.1016/j.physrep.2018.09.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.09.001).
- [87] Nandan Roy and Narayan Banerjee. Generalized Brans-Dicke theory: A dynamical systems analysis. *Physical Review D*, 95(6), mar 2017. doi:[10.1103/physrevd.95.064048](https://doi.org/10.1103/physrevd.95.064048).
- [88] Caroline Santos and Ruth Gregory. Cosmology in Brans-Dicke Theory with a Scalar Potential. *Annals of Physics*, 258(1):111–134, jul 1997. doi:[10.1006/aphy.1997.5691](https://doi.org/10.1006/aphy.1997.5691).
- [89] Orest Hrycyna and Marek Szydłowski. Dynamical complexity of the Brans-Dicke cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(12):016–016, dec 2013. doi:[10.1088/1475-7516/2013/12/016](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/12/016).
- [90] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag GmbH, 2008. ISBN 0387951164. URL [https://www.ebook.de/de/product/1410390/lawrence\\_perko\\_differential\\_equations\\_and\\_dynamical\\_systems.html](https://www.ebook.de/de/product/1410390/lawrence_perko_differential_equations_and_dynamical_systems.html).

- [91] S.D. Odintsov and V.K. Oikonomou. Autonomous dynamical system approach for  $f(R)$  gravity. *Physical Review D*, 96(10), nov 2017. doi:[10.1103/physrevd.96.104049](https://doi.org/10.1103/physrevd.96.104049).
- [92] Parth Shah and Gauranga C. Samanta. Stability analysis for cosmological models in  $f(R)$  gravity using dynamical system analysis. *The European Physical Journal C*, 79(5), may 2019. doi:[10.1140/epjc/s10052-019-6934-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6934-x).
- [93] Genly Leon and Emmanuel N. Saridakis. Dynamical behavior in mimetic  $F(R)$  gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(04):031–031, apr 2015. doi:[10.1088/1475-7516/2015/04/031](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/04/031).
- [94] S.D. Odintsov and V.K. Oikonomou. Dynamical systems perspective of cosmological finite-time singularities in  $f(R)$  gravity and interacting multifluid cosmology. *Physical Review D*, 98(2), jul 2018. doi:[10.1103/physrevd.98.024013](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.024013).
- [95] S. Carloni. A new approach to the analysis of the phase space of  $f(R)$ -gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(09):013–013, sep 2015. doi:[10.1088/1475-7516/2015/09/013](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/09/013).
- [96] Puxun Wu and Hongwei Yu. The dynamical behavior of  $f(T)$  theory. *Physics Letters B*, 692(3):176–179, aug 2010. doi:[10.1016/j.physletb.2010.07.038](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.07.038).
- [97] Sudip Mishra and Subenoy Chakraborty. Stability and bifurcation analysis of interacting  $f(T)$  cosmology. *The European Physical Journal C*, 79(4), apr 2019. doi:[10.1140/epjc/s10052-019-6839-8](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6839-8).
- [98] Behrouz Mirza and Fatemeh Oboudiat. Constraining  $f(T)$  gravity by dynamical system analysis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(11):011–011, nov 2017. doi:[10.1088/1475-7516/2017/11/011](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/11/011).
- [99] Geovanny A. Rave Franco, Celia Escamilla-Rivera, and Jackson Levi Said. Stability analysis for cosmological models in  $f(T, B)$  gravity. *The European Physical Journal C*, 80(7), jul 2020. doi:[10.1140/epjc/s10052-020-8253-7](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8253-7).
- [100] Suresh Kumar and Lixin Xu. Observational constraints on variable equation of state parameters of dark matter and dark energy after Planck. *Physics Letters B*, 737:244–247, oct 2014. doi:[10.1016/j.physletb.2014.08.059](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.08.059).
- [101] Gabriel Farrugia, Jackson Levi Said, Viktor Gakis, and Emmanuel N. Saridakis. Gravitational waves in modified teleparallel theories. *Physical Review D*, 97(12), jun 2018. doi:[10.1103/physrevd.97.124064](https://doi.org/10.1103/physrevd.97.124064).
- [102] Jackson Levi Said. Reconstruction from scalar–tensor theory and the inhomogeneous equation of state in  $f(T)$  gravity. *The European Physical Journal C*, 77(12), dec 2017. doi:[10.1140/epjc/s10052-017-5460-y](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5460-y).
- [103] Geovanny A. Rave-Franco, Celia Escamilla-Rivera, and Jackson Levi Said. Dynamical complexity of the teleparallel gravity cosmology. January 2021. URL <https://arxiv.org/abs/2101.06347>.

- [104] D. Arrowsmith and C.M. Place. *Dynamical Systems: Differential Equations, Maps, and Chaotic Behaviour*. Chapman Hall/CRC Mathematics Series. Taylor & Francis, 1992. ISBN 9780412390807. URL <https://books.google.com.mx/books?id=8qCcP7KNaZ0C>.
- [105] Juan Magaña, Mario H Amante, Miguel A Garcia-Aspeitia, and V Motta. The car-dassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernova data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476 (1):1036–1049, February 2018. doi:10.1093/mnras/sty260. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/sty260>.
- [106] Ofer Lahav and Andrew R. Liddle. *The Cosmological Parameters* (2019). 12 2019.
- [107] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, September 2020. doi:10.1051/0004-6361/201833910. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- [108] R. Abbott et al. GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object. *The Astrophysical Journal*, 896 (2):L44, June 2020. doi:10.3847/2041-8213/ab960f. URL <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab960f>.
- [109] S. H. Suyu et al. H0LiCOW I.  $H_0$  lenses in COSMOGRAIL’s wellspring: program overview. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468(3):2590–2604, February 2017. doi:10.1093/mnras/stx483. URL <https://doi.org/10.1093/mnras/stx483>.
- [110] Celia Escamilla-Rivera, A. Hernández-Almada, Miguel A. García-Aspeitia, and V. Motta. Linear perturbations spectra for dynamical dark energy inspired by modified gravity. 5 2020.
- [111] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Wm. C. Brown, 1989. ISBN 9780697068897.
- [112] A.A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Dover Book on Mathematics. Dover Publications, 2007. ISBN 9780486462448.
- [113] A.H. Wallace. *Differential Topology: First Steps*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2006. ISBN 9780486453170.
- [114] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103, Volume 103 (Pure and Applied Mathematics)*. Academic Press, 1983. ISBN 0125267401.
- [115] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. Springer International Publishing, 2016. doi:10.1007/978-3-319-31557-7.
- [116] Eberhard Zeidler. *Applied Functional Analysis - Applications to Mathematical Physics*. Springer New York, 1995. doi:10.1007/978-1-4612-0815-0.
- [117] Daryoush Behmardi and Encyeh Dehghan Nayeri. Introduction of fréchet and gâteaux derivative. *Applied Mathematical Sciences*, 2(20):975 – 980, 2008.

- [118] Eberhard Zeidler. *Applied Functional Analysis - Main Principles and Their Applications*. Springer New York, 1995. doi:[10.1007/978-1-4612-0821-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0821-1).
- [119] Francis Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer London, 2013. doi:[10.1007/978-1-4471-4820-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3).
- [120] Mariano Giaquinta and Stefan Hildebrandt. *Calculus of Variations I*. Springer Berlin Heidelberg, 2004. doi:[10.1007/978-3-662-03278-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03278-7).
- [121] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field Quantization*. Springer Berlin Heidelberg, 1996. doi:[10.1007/978-3-642-61485-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61485-9).
- [122] Reiner M. Dreizler Eberhard Engel. *Density Functional Theory*. Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 3642140904.
- [123] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer New York, 1990. doi:[10.1007/978-1-4757-4067-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7).