Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Aplicaciones de la Técnica de Forcing a la Topología y el Análisis Real

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Luis Ricardo López Villafán

TUTOR

Dr. Salvador García Ferreira

Ciudad Universitaria, CDMX, 2021

Agradecimientos y dedicatorias

Este trabajo es el producto final en mi carrera, y es la suma de los intereses que desarrollé, y las habilidades que obtuve a lo largo de la licenciatura. También es el resultado de la instrucción que he recibido de mis profesoras y profesores, y el apoyo y amor que me han brindado las personas de mi vida.

Agradezco a mamá y a papá por brindarme todas las oportunidades y condiciones para llegar hasta este punto. A mamá, por toda la paciencia que tuvo para ayudarme con cada tarea y cada trabajo cuando era chico, y sentarse conmigo a explicarme las cosas hasta que me quedaran claras. A papá, por llevarme indefectiblemente a cada partido y entrenamiento de béisbol, por practicar conmigo y siempre alentarme a mejorar, a entrenar más duro y no rendirme hasta convertirme en un buen jugador y hacerle sentir orgulloso. A mamá, por ayudarme a elegir esta carrera que disfruto tanto, y a papá, por apoyarme cuando le dije que no quería más ser beisbolista, pues ahora quería ser matemático. También agradezco a Alejandra, mi hermana, y a Claudia, mi tía, porque ellas han sido mi familia más cercana durante la carrera, siempre dispuestas a apoyarme en los detalles de la vida que en soledad, son tan insípidos, y en familia, son tan amenos. Ellas me han enseñado el significado de familia que quiero llevar en mi corazón toda la vida.

Agradezco al Doctor Salvador García Ferreira por darme la oportunidad de realizar el servicio social y hacer esta tesis bajo su atenta asesoría, por su paciencia para explicarme las ideas complicadas con las que me tropecé, por su interés en buscar artículos y referencias que pudieran enriquecer este trabajo, por tenerme la confianza para permitirme trabajar en su oficina todo el tiempo que necesitara, y por darse el tiempo cada día para continuar trabajando, incluso después de que iniciara la contingencia sanitaria y tuviéramos que adaptarnos a trabajar a distancia, lo cual fue complicado pues ambos estábamos acostumbrados a disertar con un pizarrón frente a nosotros para aclarar las ideas, pero nunca fue una excusa para dejar de vernos. En definitiva, este trabajo no habría sido posible sin su dirección.

Agradezco a las profesoras, profesores y ayudantes que tuve en toda la carrera. Cada una de las clases que tomé, las llevé con mucho cariño e interés, y definieron el perfil de mis habilidades como matemático. En particular, quiero agradecer a la Maestra Mariana Martínez y al Maestro Rodrigo Cepeda, con quienes llevé mis primeros cursos de Teoría de Conjuntos, a la Maestra María de la Asunción Preisser y al Maestro Luis Turcio, con quienes llevé mis cursos de lógica, y que desde el inicio de mi carrera se perfilaron como mis intereses más importantes en matemáticas. Al Doctor Roberto Pichardo, con quien llevé mis clases más avanzadas de Teoría de Conjuntos, y que siempre tuvo una exposición tan clara, que su forma de dar clase se ha vuelto para mí un definitivo ejemplo de cómo dar una clase de un tema complicado y hacerlo ameno. Al Doctor Alejandro Dario Rojas, por sus clases magistrales, que normalmente tomábamos más por placer que por obligación. Al maestro Luis Paredes, porque gracias a él he conocido muchísimos temas de Topología. Al Doctor Javier Páez, porque su manera de impartir el curso de Cálculo es algo que quisiera replicar si tengo oportunidad de ser profesor algún día. Al Maestro Fernando Nuñez, pues con él llevé un curso de Teoría descriptiva de Conjuntos que, sin dudas, ha sido de mis cursos favoritos en la carrera, pues la manera en que llevamos el curso es la forma en que siempre pensé que se debe de aprender matemáticas; sus clases siempre fueron más una invitación a un seminario pequeño para platicar de ejercicios muy complicados que eventualmente eran resueltos. Un ambiente tan fraterno que llegar a esa clase era más un gusto que una responsabilidad. A todos ellos, que me ofrecieron tanto, que esperaban tanto de mí y les di tan poco, que este trabajo sirva de evidencia de que sus esfuerzos en el aula no fueron en vano.

Quiero agradecer también al Doctor David Meza, al Doctor Rodrigo Hernández, y nuevamente al Doctor Roberto Pichardo y al Maestro Fernando Nuñez por ser los sinodales para este trabajo y por sus valiosos consejos y observaciones en la elaboración del mismo. Si esta tesis tiene un buen nivel, es gracias a sus observaciones y a las observaciones del Doctor Salvador.

La primera dedicatoria va para cada uno de ellos.

La segunda dedicatoria va para todos los amigos que me han acompañado durante toda la carrera.

Quiero dedicarle este trabajo a Jorge, porque me ha acompañado en tantas aventuras épicas, porque todas las anécdotas interesantes de mi vida las he vivido con su compañía. Por haberme explicado muchas cosas cuando fue ayudante y mi compañero de clase. Por mostrarme que la amistad es un concepto que se ejerce de maneras tan distintas, desde enseñarme a jugar billar o videojuegos, hacer retos vergonzosos o salir a comer tortas en Morelia, a explicarme artículos complicadísimos un fin de semana por la noche, o debatir por horas sobre asuntos de aparente nimiedad que logramos desentrañar en complejidad y sutilezas. Jorge me ha enseñado que la suerte es en realidad tomar las riendas del asunto sin temor a quedar en ridículo, porque al final, sólo las historias míticas son las que vale la pena contar. Ser amigo de Jorge es una de las cosas más increíbles que me han sucedido en la vida, y me siento muy contento de que haya participado tanto y con tanto entusiasmo en el desarrollo de esta tesis, me ayudó a decidir qué temas ser+ian incluidos, y muchos problemas pude entenderlos y resolverlos gracias a él. Jorge es el mejor amigo que se pudiera tener, y me siento muy honrado de que su aporte en esta tesis haya sido esencial.

La dedicatoria final, y que tiene un significado muy especial, es para Itzel, y va dividida en dos partes. La primera es porque ella tocó mi corazón tan profundamente y, sin equivocación, puedo asegurar que el terminar escribiendo una tesis de matemáticas fue en gran medida gracias al efecto que ella le ha dado a mi vida. Ignoro si todas las personas que hacen matemática, llevan siempre en su mente y en su corazón a alguna persona mientras desempeñan su trabajo. Yo la llevo a ella. Tengo la convicción de que la matemática más hermosa que alguien puede hacer, solamente puede pensarse

cuando el corazón ha experimentado emociones intensas y apasionadas. El mío lo sintió y fue gracias a ella. La segunda parte es también agradecimiento, por pasar tantas noches enteras en vela acompañándome mientras terminaba la parte final de este trabajo. Este trabajo se pudo haber extendido por muchas semanas más de lo que tomó, producto del hartazgo de tantas semanas en encierro, de no haber sido por la motivación que tuve de su paciente compañía durante las noches de invierno. A ella va toda esta dedicatoria.

Índice general

Introducción

Existe una cita famosa entre los filósofos del lenguaje que reza:

Los límites de mi lenguaje son los límites de mi universo.

Esta cita pertenece al *Tractatus Logico-Philosophicus* de Ludwig Wittgenstein, un hombre que, junto con Gottlob Frege y Bertrand Russell, trabajó e hizo aportaciones filosóficas sobre los fundamentos de las matemáticas. Frege, por otro lado, es conocido por ser la primera persona en dedicar su trabajo a proponer bases generales para toda la matemática. La conocida *paradoja de Russell* es originalmente una crítica que el filósofo hace a Frege después de que su obra *The foundations of arithmetic* [8] fuera publicada con los resultados obtenidos sobre sus investigaciones en los fundamentos de las matemáticas. En esta época (finales del siglo XIX y principios del siglo XX), David Hilbert se vio interesado en contribuir con el proyecto de dar un fundamento a la matemática. En su perspectiva, la manera de lograr este proyecto era construir reglas generales para la obtención de teoremas en cualquier rama de las matemáticas. Es conocido que esta estrategia se vio truncada por los *teoremas de incompletitud* de Gödel y la irresolubilidad del *problema de la detención* de Alonzo Church. Este cambio de paradigma en el quehacer matemático no desmotivó los intentos por resolver los problemas puestos en la mesa por Hilbert, sino que incentivó a los matemáticos a plantear nuevas estrategias para su solución, en virtud de que no había seguridad de encontrar una demostración para cualquier verdad matemática.

Uno de estos problemas -quizás, el más importante para el mismo Hilbert- fue el primer problema de la lista presentada en el congreso internacional de matemáticos de París de 1900: la hipótesis del continuo. Esta afirmación se deriva del hecho establecido por Georg Cantor de que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. La hipótesis del continuo es la afirmación de que

No existe un cardinal κ *tal que* $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$.

La hipótesis del continuo fue uno de los problemas más abordados de las matemáticas modernas, lo que se puede juzgar estudiando todo el conocimiento desarrollado a partir de los intentos de verificar o desmentir el enunciado. Con lo que respecta a este problema, Kurt Gödel demostró que la hipótesis del continuo es *consistente* con los axiomas de *ZFC*. Probablemente el más notable descubrimiento que se obtuvo al atacar el problema de la hipótesis del continuo fue la técnica de *forcing*, inventada por Paul Cohen, y sobre la cual, esta tesis presenta una breve introducción. La técnica consiste considerar *modelos de la teoría de conjuntos* (i.e. porciones pequeñas del universo de los conjuntos que, de hecho, son conjuntos, y tienen suficientes elementos para satisfacer los axiomas de *ZFC* dentro de su "universo a escala"), y a partir de estos modelos, generar "modelos más grandes". Específicamente, se trata de introducir "nuevos" conjuntos al universo representado por un *modelo base* de los conjuntos. Con la técnica de forcing, Paul Cohen demostró que la hipótesis del continuo es consistente con *ZFC*.

Esta tesis fue escrita pensando en que será leída por estudiantes que por curiosidad quieren conocer del tema. El objetivo principal es dar una introducción al método de forcing através de aplicaciones que ha encontrado en las últimas décadas a problemas de topología general. Por interés del autor de esta tesis, todas las aplicaciones revisadas giran alrededor de el problema sobre *la existencia de* L*-espacios y* S*-espacios*. Los L-espacios son espacios regulares y hereditariamente Lindelöf que no son hereditariamente separables, y los S-espacios son espacios regulares y hereditariamente separables que no son hereditariamente Lindelöf. Este problema tiene su origen en los años 1920's, a partir del estudio de la *hipótesis de Suslin*. En [26], D. Kurepa muestra que la *línea de Suslin* es un S-espacio. Otra clase de espacios topológicos, estudiados en los capítulos 3 y 4, son los *espacios de Luzin*, que resultan ser espacios hereditariamente Lindelöf y, como veremos en el cuarto capítulo de la tesis, a partir de estos se puede obtener un L-espacio. Para percibir el papel que estos espacios juegan en esta historia, en el artículo de 1914 [27], N. Luzin demuestra que bajo la hipótesis del continuo, existen espacios de Luzin. Como corolario de esto, *CH* implica la existencia de L-espacios y, como veremos más adelante, también la existencia de S-espacios. Los propósitos para los que Luzin construye ese espacio no corresponden a lo que desarrollaremos en la tesis, pero es interesante conocer que la mayoría de los conceptos con los que trabajaremos fueron ideados en diferentes momentos del siglo pasado a partir de los intentos por demostrar o refutar la hipótesis del continuo.

La finalidad de estas aplicaciones es que el estudiante pueda ver cómo construir ejemplos y contraejemplos utilizando forcing.

En el capítulo inicial se recuerdan definiciones y lemas básicos de teoría de conjuntos, para fijar la notación y que los lectores que tengan a la mano los requisitos más elementales para proceder con un estudio más formal del forcing. En la primera sección se fija la noción de *modelo de la teoría de conjuntos*, el significado de *relativizar una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos* a un conjunto (o modelo) M, se enuncia el teorema de Löwenheim-Skolem y se dan algunos ejemplos de los conceptos.

Dentro de la segunda sección de los preliminares se recuerdan los conceptos básicos de conjuntos como ordinales y cardinales.

En la tercera sección se hace el recordatorio de conceptos básicos relacionados con órdenes parciales, además se definen conceptos fundamentales en el forcing como el de *filtro genérico*, *conjunto denso* y *anticadena*, y se prueban los lemas técnicos necesarios sobre estos conceptos. Un teorema importante de esta sección es el teorema de Rasiowa-Sikorksi.

La siguiente sección introduce la noción de $\mathbb{P}$-*nombre*, que es una de las nociones más importantes y, en opinión del autor, más complicadas de entender cuando se estudian por prinera vez. Se prueban resultados básicos relacionados con los $\mathbb{P}$-nombres, se dan ejemplos sencillos y se define el concepto de *extensión genérica de un modelo*.

Continuamos la cuarta sección hablando del *lenguaje de forcing*, se define el concepto de *forzar una verdad* (o el significado de que una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos sea satisfecha en la extensión genérica de un modelo base), se prueban propiedades fundamentales del forcing, y se enuncian (sin demostración) los lemas más importantes que son el lema de la verdad y el lema de la definibilidad.

En la quinta sección, se definen los *encajes entre órdenes parciales*, y se da una caracterización de cuándo dos órdenes parciales *inducen la misma extensión genérica sobre un modelo base.*

Se concluye el capítulo de preliminares con la sexta sección, en donde se define el concepto de *producto cartesiano de órdenes parciales* que será muy importante para hablar del *Lema de la Partición del forcing de Cohen*, un resultado que se prueba en el segundo capítulo.

En lo que respecta al segundo capítulo, hablaremos del *forcing de Cohen* que es el orden parcial específico con el que Paul Cohen aplicó la técnica de forcing. Se demuestran lemas y propiedades básicas sobre este orden parcial que serán utilizadas para los capítulos posteriores (por ejemplo, el ya mencionado lema de la partición del forcing de Cohen), y se demuestra que la hipótesis del continuo y su negación son consistentes con los axiomas de *ZFC.*

Dentro del tercer capítulo, hablamos de algunas consecuencias del forcing de Cohen sobre el análisis real. Se dará la definición de *real de Cohen* y se demuestra que el forcing de Cohen “agrega reales de Cohen al modelo base”. Se demuestra que los conjuntos no numerables de reales de Cohen forman espacios de *Luzin.*

Iniciamos el cuarto capítulo con algunas propiedades básicas de los L-espacios y S-espacios. En la segunda sección daremos la demostración de la existencia de un L-espacio en un modelo que se obtiene de forzar con Cohen. En la segunda sección, daremos una forma alternativa de demostrar la consistencia de la existencia de un L-espacio, a partir de la existencia de un conjunto de *Luzin.*

El quinto capítulo es dedicado a revisar una aplicación a la teoría de grupos topológicos en la resolución de un problema que duró bastantes años abierto. Usando un real de Cohen se construye un grupo topológico G hereditariamente separable y tal que $G \times G$ tiene estrechez no numerable.

Concerniente al útlimo capítulo, se demuestra que un principio combinatorio conocido como el *axioma (t)*, que es un debilitamiento del famoso axioma $\clubsuit$, se satisface en cualquier modelo extendido con el forcing de Cohen y, por lo tanto, en estos modelos existe un *espacio de Ostaszewski*, lo cual es una implicación del axioma *(t).* Cabe mencionar que el espacio de Ostaszewski que se construye en este capítulo no es hereditariamente Lindelöf.

Al inicio de cada capítulo se dará una descripción del contexto histórico dentro del cual surgieron las preguntas que fueron contestadas con el uso de la técnica de forcing, de manera que no parezcan resultados aislados y sea posible notar la interconexión que guardan dentro de la historia de las investigaciones sobre la hipótesis del continuo. Es importante destacar que todos los resultados demostrados en esta tesis fueron tomados de artículos que son apropiadamente citados en cada capítulo. Cabe destacar que el autor V.I Malykhin, citado varias veces, tiene artículos muy interesantes y útiles para las y los estudiantes que están aprendiendo forcing, pues demuestra teoremas profundos con ideas muy ingeniosas, cuya comprensión representa un reto para el entendimiento de los conceptos más básicos del forcing. Consideramos que las demostraciones y presentación de los teoremas de esta tesis facilitan la comprensión de los mismos en comparación con las fuentes originales que fueron consultadas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos y hechos básicos a partir de los cuales se construyen las herramientas que constituirán los elementos del forcing que necesitaremos. La mayor parte de estos hechos son ampliamente conocidos y pueden consultarse en [12] o en las notas [10] que serán publicadas proximamente.

Enseguida recordamos los axiomas que constituyen ZFC:

Axioma de Existencia:

$$\exists x\big[x = x\big].$$

Axioma de Extensionalidad:

$$\forall x\,\forall y\big[\forall z[z \in x \leftrightarrow z \in y] \to x = y\big].$$

Axioma del Par:

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\big[x \in z \wedge y \in z\big].$$

Axioma de la Unión:

$$\forall w\,\exists A\,\forall x\,\forall y\,\big[(x \in y \wedge y \in w) \to x \in A\big].$$

Axioma de Buena Fundación:

$$\forall x\Big[\exists y\,[y \in x] \to \exists y\,\big[y \in x\ \wedge\ \neg\exists z[z \in x\ \wedge\ z \in y]\big]\Big].$$

Esquema de comprensión: *Para cada fórmula* ϕ *con variables libres* $x, w_1, \ldots, w_n$*,*

$$\forall z\,\forall w_1, \ldots, w_n\,\exists y\,\forall x\,\big[x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi(x, w_1, \ldots, w_n))\big].$$

Axioma de la Potencia:

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,\big[z \subseteq x \to z \in y\big].$$

Esquema de Reemplanzo: *Para* ϕ *fórmula con variables libres* $x, y, A, w_1, \ldots, w_n$*,*

$$\forall A\,\forall w_1, \ldots, w_n\,\big[(\forall x \in A\,\exists!y\,\phi) \to (\exists Y\,\forall x \in A\,\exists y \in Y\,\phi)\big].$$

Axioma de Infinito:

$$\exists x\Big[\big(\emptyset \in x\big) \;\wedge\; \big(\forall y \in x[y \cup \{y\} \in x]\big)\Big].$$

Axioma de Elección :

$$\forall x\Big[\emptyset \notin x \to \exists f\Big[\big(f \;\; \textit{es una función}\big) \wedge \big(dom(f) = x\big) \wedge \big(\forall y \in x\,[f(y) \in y]\big)\Big]\Big].$$

El sistema axiomático *ZFC* será el mínimo requisito que satisfarán los *modelos* sobre los cuales todos nuestros resultados serán establecidos. Como es habitual en Teoría de Conjuntos, se convendrá que el universo en el que estaremos trabajando es la clase de todos los conjuntos:

$$V = \langle x : x = x\rangle.$$

1.1. Modelos

La intuición fundamental del método de forcing es que con esta técnica se construye un "universo más grande" que el universo V añadiendo ciertos conjuntos determinados por un orden parcial al que llamaremos forcing. Para que el forcing pueda ser considerado como una estrategia válida en matemáticas es necesario que tenga una interpretación formal dentro de la teoría de conjuntos. Por esto es necesario hablar sobre *modelos de la teoría de conjuntos*. Recordamos los conceptos y teoremas que serán necesarios en el desarrollo de este trabajo. Para un estudio más detenido, un buen texto para comenzar es [31].

- Un *lenguaje* $\mathcal{L}$ consiste de símbolos para constantes, relaciones y funciones.
- Un $\mathcal{L}$-modelo $\mathcal{M}$ correspondiente al lenguaje $\mathcal{L}$ es una pareja (M, I), donde M es un conjunto no vacío y una interpretación I que a cada símbolo de constante, cada símbolo de relación y cada símbolo de función de $\mathcal{L}$, asigne una constante en M, una relación sobre M y una constante en M, respectivamente. Como en los textos estándar sobre el tema, escribiremos M en lugar de $\mathcal{M}$.
- Las fórmulas de un $\mathcal{L}$-modelo M son concatenaciones de símbolos que se construyen usando los símbolos del lenguaje $\mathcal{L}$, símbolos para variables, el símbolo de igualdad $=$, los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\neg$, los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, y los símbolos de agrupación "(", ")", ",".
- El *lenguaje de la teoría de conjuntos* es $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$.
- Un *modelo transitivo para la teoría de conjuntos* es una pareja (M, I) tal que la primera coordenada M es un conjunto transitivo (i.e. si $a \in M$ y $b \in a$, entonces $b \in M$) y la segunda coordenada es una función de interpretación del lenguaje $\mathcal{L}_\in$ en M que interpreta al símbolo $\in$ como la pertenencia de conjuntos.

Un teorema fundamental relacionado con modelos en el que nos basaremos continuamente es el siguiente, el cual nos garantiza el uso de modelos numerables transitivos:

Teorema 1.1.1 (Löwenheim-Skolem). *Sea M un modelo infinito del lenguaje $\mathcal{L}_\in$. Entonces existe un modelo M' de $\mathcal{L}_\in$ tal que $M' \subseteq M$ y M' es numerable.*

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en cualquier libro introductorio de lógica matemática.

Dado M un modelo transitivo y una fórmula ϕ *cerrada* (sin variables libres), decimos que ϕ *es verdad en* M o que *es verdad relativizada a* M, y escribimos

$$M \models \phi$$

si ϕ resulta ser una fórmula verdadera cuando interpretamos los cuantificadores $\forall x$ y $\exists x$ que aparezcan en ϕ como " $\forall x \in M$" y "$\exists x \in M$".

Si ϕ tiene variables libres $x_1, \ldots, x_n$, y $a_1, \ldots, a_n \in M$, entonces escribimos

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

si ϕ resulta ser verdadera cuando los cuantificadores de ϕ son interpretados como ya se ha mencionado, y $x_1, \ldots, x_n$ son interpretadas como $a_1, \ldots, a_n$.

A continuación ejemplificaremos lo dicho anteriormente, y mostraremos una sutileza que distingue el trabajar dentro del universo V con trabajar dentro de un modelo transitivo numerable M.

Ejemplo 1.1.2. Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y consideremos la fórmula $\phi(x, y) \equiv \forall z[z \in y \to z \in x]$. Esta fórmula expresa que $y \subseteq x$. Cuando relativizamos respecto al modelo M fijando dos objetos $a, b \in M$, tenemos que

$$M \models \phi(a, b) \iff \forall c \in M[c \in b \to c \in a].$$

Por transitividad (y el hecho de que $b \in M$), $c \in b \Rightarrow c \in M$. Así, $M \models \phi(a, b)$ si y sólo si $\phi(a, b)$ "se satisface" en el universo V.

Ahora veamos qué sucede con el Axioma del Conjunto Potencia.

Ejemplo 1.1.3. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y consideremos la fórmula $\psi(x, w) \equiv \forall y[y \in w \leftrightarrow \phi(x, y)]$, que expresa que $w = \mathcal{P}(x)$ (w es el conjunto potencia de x). Si $a, d \in M$ están fijos, entonces

$$M \models \psi(a, d) \iff \forall b \in M\,[b \in d \leftrightarrow \phi(a, b)]$$

i.e., en M, $b \in d$ si y sólo si $b \subseteq a$. Ya que $b \in d \Rightarrow b \in M$, entonces todo $b \in d$ es subconjunto de a y todos los subconjuntos de a que están en M también están en d, i.e., $d = M \cap \mathcal{P}(a)$. Pero no necesariamente todos los subconjuntos de a pertenecen a M, así que puede ocurrir que $M \models \psi(a, d)$ sin que $\psi(a, d)$ se satisfaga en cualquier modelo, i.e. puede ocurrir que $d = M \cap \mathcal{P}(a) \neq \mathcal{P}(a)$. Con este razonamiento, podemos concluir que el Axioma de la Potencia:

$$\forall x \exists w\, \psi(x, w)$$

se satisface en M si se cumple que para cualquier $a \in M$ podemos encontrar un $b \in M$ tal que $M \models \psi(a, b)$; o equivalentemente, si se cumple que

$$a \in M \Rightarrow \mathcal{P}(a) \cap M \in M.$$

Notación. Cuando estemos trabajando con algún conjunto a relativizado a un modelo M de *ZFC*, incluiremos la notación a^M para referirnos al conjunto $a \cap M$. Por ejemplo, si a es un conjunto, entonces la potencia de a en M es el conjunto $\mathcal{P}(a) \cap M$ y lo denotamos por $\mathcal{P}^M(a)$.

Las personas que conozcan de lógica matemática saben que existen fórmulas a las cuales les decimos "absolutas" para cualquier modelo M.

Definición 1.1.4. Sea M un conjunto. Una fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ con variables libres $x_1, \dots, x_n$ es *absoluta para* M si para todo $a_1, \dots, a_n \in M$ se cumple que

$$\phi(a_1, \dots, a_n) \iff M \models \phi(a_1, \dots, a_n).$$

Informalmente, las fórmulas absolutas en un lenguaje son aquellas que se satisfacen en cualquier modelo para el lenguaje.

En las demostraciones que se hacen en esta tesis continuamente hacemos referencia a la "absolutez" de las fórmulas con las que estemos trabajando. En particular, estamos haciendo referencia al lema que probaremos más adelante en el que mostramos que cierta clase de fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos son absolutas. Así, cuando en el texto se hablen de fórmulas absolutas, estaremos hablando en realidad de fórmulas que pertenecen a esta clase que definimos a continuación.

Definición 1.1.5. Una fórmula cuyos cuantificadores son acotados se llama Δ_0. Más formalmente: Las fórmulas Δ_0 son aquellas construidas inductivamente por las siguientes reglas:

- " $x \in y$" y "$x = y$" son Δ_0.
- Si ϕ y ψ son Δ_0 entonces $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$ son Δ_0.
- Si ϕ es Δ_0, τ es un término de $\mathcal{L}_\in$ y no contiene a la variable x, entonces "$\exists x\,[x \in \tau \wedge \phi]$" es Δ_0.

Ejemplo 1.1.6.

- La inyectividad de una función es fórmula Δ_0. En efecto, si X y Y son conjuntos y $f : X \to Y$ es función, la inyectividad de f se escribe con la fórmula

  $$\forall x \in X\Big[\forall y \in X\big[f(x) = f(y) \to x = y\big]\Big],$$

  que es equivalente a la fórmula

  $$\neg\exists x \in X\Big[\neg\exists y \in X\big[f(x) = f(y) \wedge \neg(x = y)\big]\Big].$$

  La fórmula "$f(x) = f(y)$" es equivalente a la fórmula

  $$(x, z) \in f \wedge (y, w) \in f \to z = w,$$

  la cual es Δ_0.

- La sobreyectevidad es una fórmula Δ_0. En efecto, esta propiedad queda expresada por la fórmula

  $$\forall y \in Y\Big[\exists x \in X\big[(x, y) \in f\big]\Big],$$

  la cual es equivalente a la fórmula

  $$\neg\exists y \in Y\,\neg\Big[\exists x \in X\big[(x, y) \in f\big]\Big].$$

Lema 1.1.7. *Si M es un conjunto transitivo y ϕ es una Δ_0-fórmula, entonces ϕ es absoluta para M.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre la construcción de las Δ_0-fórmulas. El lema es claro para las fórmulas "$x \in y$" y "$x = y$" .

Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ la Δ_0-fórmula "$\exists x[x \in \tau(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(x, x_1, \ldots, x_n)]$", donde τ es un término de $\mathcal{L}_\in$ que no contiene a la variable x y ψ es una Δ_0-fórmula, y supongamos que el lema es cierto para ψ (i.e. que ψ es una una fórmula absoluta). Hay que demostrar que para cualquier asignación $a_1, \ldots, a_n \in M$ de las variables $x_1, \ldots, x_n$ se tiene que

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff \phi(a_1, \ldots, a_n) \textit{ se satisface } \text{en el universo } V.$$

Sean $a_1, \ldots, a_n \in M$, denotamos al vector $(a_1, \ldots, a_n)$ como $\overline{a}$. Primero supongamos que

$$M \models \exists x \left[x \in \tau(\overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{a})\right].$$

El significado de lo anterior es que $\exists x \in M\, [x \in \tau(\overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{a})]$. Esto implica que $\exists x[x \in \tau(\overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{a})]$.

Ahora supongamos que $\exists x\, [x \in \tau(\overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{a})]$. Como $a_1, \ldots, a_n \in M$, entonces $\tau(\overline{a}) \in M$ (esto no es inmediato, pues es consecuencia de la definición de "término de un lenguaje" cómo se interpretan los "términos" de un lenguaje en una estructura o modelo, pero suponemos que estas nociones son conocidas por las y los lectores). Ya que M es transitivo y $\tau(\overline{a}) \in M$, si $x \in \tau(\overline{a})$, entonces $x \in M$. Por consiguiente, se tiene que

$$\exists x \left[x \in \tau(\overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{a})\right] \Rightarrow \exists x \in M \left[x \in \tau(\overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{a})\right],$$

que era lo que se quería demostrar. Finalmente, es claro que si el lema es cierto para ϕ y ψ, entonces también lo es para $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ y $\phi \leftrightarrow \psi$. □

Resumiendo los resultados anteriores, tenemos que las fórmulas Δ_0 se satisfacen en cualquier modelo transitivo de *ZFC*.

La técnica de *forcing* consiste en trabajar con un modelo inicial que satisfaga los axiomas de *ZFC* (y posiblemente más axiomas) y a partir de un orden parcial que esté definido dentro de este modelo, agregar nuevos conjuntos que nos permitirán demostrar algunos teoremas en el "modelo extendido".

1.2. Teoría básica de conjuntos

En esta sección hacemos un breve recordatorio de los conceptos básicos de teoría de conjuntos que necesitaremos para el desarrollo de la tesis. Comenzamos con algunas definiciones relacionadas a conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1.2.1.

- Un *orden parcial* $\leq$ en un conjunto $\mathbb{P}$ es una relación binaria en $\mathbb{P}$ que satisface las siguientes propiedades:

  - *Reflexividad*: $\forall p \in \mathbb{P}\left[p \leq p\right]$.
  - *Antisimetría*: $\forall p, q \in \mathbb{P}\left[p \leq q \wedge q \leq p \to p = q\right]$.

- *Transitividad*: $\forall p, q, r \in \mathbb{P}\,[p \leq q \wedge q \leq r \to p \leq r]$.

  Si sobre un conjunto $\mathbb{P}$ está definido un orden parcial $\leq$, entonces le llamamos *orden parcial* al conjunto con su orden $(\mathbb{P}, \leq)$ y, si no hay ambiguedad, sólo al conjunto $\mathbb{P}$ le llamamos orden parcial.

- Un *orden total* $\leq$ sobre un conjunto $\mathbb{P}$ es un orden parcial tal que

$$\forall p, q \in \mathbb{P}\,[p \leq q \vee q \leq p].$$

- Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial, entonces $p \in \mathbb{P}$ es $\leq$-*mínimo* ($\leq$-*máximo*) si satisface que

$$\forall q \in \mathbb{P}\,[p \leq q] \quad (\forall q \in \mathbb{P}\,[q \leq p]).$$

- Un *buen orden* $\leq$ sobre un conjunto A es un orden sobre A tal que para todo $B \subseteq A$ subconjunto vació, B tiene elemento $\leq$-mínimo.

- Sean $\mathbb{P}$ un conjunto y $\leq$ una relación en $\mathbb{P}$. Entonces $p \in \mathbb{P}$ es $\leq$-*minimal* ($\leq$-*maximal*) si satisface que

$$\neg\exists q \in \mathbb{P}\,[q < p] \quad (\neg\exists q \in \mathbb{P}\,[p < q]).$$

- Una relación R en un conjunto $\mathbb{P}$ está *bien fundada* si todo subconjunto no vacío de $\mathbb{P}$ tiene un elemento R-minimal.

- Un subconjunto A de un orden parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ es $\leq$-*acotado* si

$$\exists p \in \mathbb{P}\, \forall q \in A\,[a \leq p].$$

- Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial, entonces *el conjunto de predecesores de p* es

$$\downarrow p := \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}.$$

- Sean $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ y $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ órdenes parciales. Una función $f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un *isomorfismo* si f es biyección y

$$\forall p, q \in \mathbb{P}\big[p \leq_{\mathbb{P}} q \leftrightarrow e(p) \leq_{\mathbb{Q}} e(q)\big].$$

En adelante, todo orden parcial considerado $(\mathbb{P}, \leq)$ contará con un elemento máximo (denotado por $1_{\mathbb{P}}$). Llamaremos *condiciones* a los elementos del orden parcial.

Ahora repasamos algunas definiciones relacionadas con números ordinales y cardinales.

Definición 1.2.2.
- Un conjunto α es un *número ordinal* si satisface las siguientes condiciones:

  - El conjunto α es transitivo
  - En α, la relación $\in_\alpha = \{(\beta, \gamma) \in \alpha \times \alpha : \beta \in \gamma\}$ es un buen orden para α.

  Se utilizará el símbolo "$\alpha \in ON$" para decir que α satisface la definición de número ordinal.

- Si $\alpha, \beta \in ON$, entonces $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$.
- Una función $f : \alpha \to \beta$ entre ordinales es *cofinal* si

$$\forall \xi < \beta \, \exists \eta < \alpha \big[\xi \leq f(\eta) \big].$$

- La *cofinalidad* de un ordinal α es

$$cf(\alpha) := \text{mín}\{\delta \in ON : \exists f : \delta \to \alpha \ \textit{cofinal} \ \}.$$

- Un ordinal κ es un *cardinal* si es el mínimo ordinal α tal que existe una biyección $f : \kappa \to \alpha$.
- Sea A un conjunto. La *cardinalidad de* A $|A|$ es el mínimo ordinal κ tal que hay una función biyectiva $f : A \to \kappa$.
- Un cardinal κ es regular si $cf(\kappa) = \kappa$ y singular si $cf(\kappa) < \kappa$.

Las definiciones de ordinal y función cofinal se pueden expresar como fórmulas Δ_0, por lo que son absolutas entre modelos de *ZFC*. Una definición fundamental que necesitaremos es la de *rango de un conjunto*.

Definición 1.2.3. Se define de manera recursiva el *rango de un conjunto* x:

$$rank(x) := \sup\{rank(y) + 1 : y \in x\}.$$

Se requiere del axioma de buena fundación y del teorema de recursión para justificar que esta definición es formal dentro de *ZFC*. El rango de x es un ordinal que representa la *complejidad* dentro de la jerarquía acumulativa con la que se construye el universo V de los conjuntos. Para más información al respecto y detalles sobre por qué esta noción está bien definida, se puede consultar [24].

Definición 1.2.4. Sea A un conjunto y κ un cardinal.

1. $A^\kappa := \{f \mid f \ \textit{es función con dominio} \ \kappa \ \textit{y contradominio} \ A\}$.
2. $A^{<\omega} := \bigcup_{\lambda<\kappa} A^\lambda$.
3. $[A]^\kappa := \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$.
4. $[A]^{<\kappa} := \{B \subseteq A : |B| < \kappa\}$.

En el texto denotamos con el símbolo ω al conjunto de los ordinales finitos, y con ω_1 al conjunto de los ordinales numerables. También usamos ω junto con $\aleph_0$ para referirnos a la cardinalidad de los naturales, usamos 2^ω, $2^{\aleph_0}$ y $\mathfrak{c}$ para referirnos a la cardinalidad de los números reales, y usamos ω_1 y $\aleph_1$ para referirnos al primer cardinal no numerable.

Lema 1.2.5. *Todo cardinal no numerable es regular o es el supremo de cardinales regulares anteriores.*

1.3. Conjuntos parcialmente ordenados

Como ya hemos anticipado, los órdenes parciales constituyen uno de los objetos principales en el método de forcing. En esta sección ponemos a modo de lista las definiciones y hechos elementales relacionados con el forcing. Sólo demostraremos dos teoremas que serán relevantes para el contenido que procede esta sección: el Teorema de Rasiowa-Sikorski 1.3.5 y el Teorema 1.3.6.6 que hablan de propiedades importantes sobre los *filtros genéricos* de un orden parcial. Nos apegamos fuertemente a la notación utilizada por K. Kunen en [24], así como en la demostración de los lemas y teoremas importantes a partir de esta sección y durante el resto del capítulo, la mayoría de los cuales fueron tomados de esta fuente.

Definición 1.3.1. Sean M un modelo de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial:

- Una *cadena* en $\mathbb{P}$ es un conjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ tal que

$$\forall p, q \in C \left[p \leq q \,\vee\, q \leq p\right].$$

- Dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ cualesquiera son *compatibles* si

$$\exists r \in \mathbb{P} \left[r \leq p \,\wedge\, r \leq q\right],$$

- Dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ son *incompatibles* si no son compatibles, y esto lo denotamos como $p \perp q$ ó $q \perp p$.
- Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* en $\mathbb{P}$ si

$$\forall p \in \mathbb{P}\, \exists q \in D \big[q \leq p\big].$$

- Un subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* en $\mathbb{P}$ si satisface las siguientes propiedades:
    - $1_{\mathbb{P}} \in G$.
    - $\forall p, q \in G\, \exists r \in G\, [r \leq p \,\wedge\, r \leq q]$.
    - $\forall r \in G\, \forall p \in \mathbb{P}\, [r \leq p \rightarrow p \in G]$.
- Un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ es $\mathbb{P}$-*genérico sobre* M si para todo $D \in M$ se tiene que

$$M \models D \textit{ es denso en } \mathbb{P} \quad \Rightarrow \quad G \cap D \neq \emptyset.$$

- Decimos que un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso debajo de* $p \in \mathbb{P}$ si

$$\forall q \in \mathbb{P}\, \exists r \in D \big[q \leq p \rightarrow r \leq q\big].$$

- Una *anticadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que

$$\forall p, q \in A \left[p \neq q \rightarrow p \perp q\right].$$

- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena maximal* si A anticadena y no es un subconjunto propio de otra anticadena en $\mathbb{P}$.

- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena debajo de* $p \in \mathbb{P}$ si A es anticadena y se queda contenida en $\downarrow p$.
- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena maximal debajo de* $p \in \mathbb{P}$ si A es anticadena y se cumple que

$$\forall q \leq p\, \exists r \in A\, \big[q \not\perp r\big].$$

- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es *predenso*, si

$$\forall q \in \mathbb{P}\, \exists r \in A\big[q \not\perp r\big].$$

- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es *predenso debajo de* p si

$$\forall q \in \mathbb{P}\, \exists r \in A\big[q \leq p \rightarrow q \not\perp r\big]$$

- Un subconjunto $U \subseteq \mathbb{P}$ es *abierto* si

$$\forall p \in U\, \forall q \in \mathbb{P}\, \big[q \leq p \rightarrow q \in U\big].$$

- Un elemento p de $\mathbb{P}$ es llamado *átomo* si

$$\neg \exists q, r \in \mathbb{P}\, \big[q \leq p \,\wedge\, r \leq p \,\wedge\, q \perp r\big].$$

- $\mathbb{P}$ es *no atómico* o *separativo* si $\mathbb{P}$ no tiene átomos.

El orden parcial en el que nos enfocaremos en esta tesis es el *forcing de Cohen*, que podemos definir ahora, y que estudiaremos con un poco más de detalle en el siguiente capítulo.

Definición 1.3.2 (Forcing de Cohen)**.** Sean I, J conjuntos no vacíos. Definimos el conjunto

$$Fn(I, J) := \{p : p \text{ es una función finita} \wedge dom(p) \subseteq I \,\wedge\, ran(p) \subseteq J\},$$

con el orden en $Fn(I, J)$ definido por: $p \leq q \iff q \subseteq p$, para cada p, $q \in Fn(I, J)$.

Ponemos el siguiente ejemplo elemental para ilustrar los conceptos definidos hasta ahora.

Ejemplo 1.3.3. Consideremos $Fn(I, J)$ con $I = \omega$ y $J \neq \emptyset$. Para cada $n \in \omega$ definimos

$$D_n := \{p \in Fn(\omega, J) : n \in dom(p)\}.$$

Notemos que los D_n son densos en $Fn(\omega, J)$ pues dados $p \in Fn(\omega, J)$ y $n \in \omega$, si $n \notin dom(p)$ entonces fijamos $q := p \cup \{(n, j)\}$ con $j \in J$. Es claro que $q \in D_n$.

Así, un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M interseca a cada D_n, por lo que la unión será una función f de ω en J, i.e., $f \in J^\omega$.

Ya mencionamos en la introducción de esta sección que el Teorema de Rasiowa-Sikorski es un resultado muy importante para la teoría que sigue. Dicho teorema es un resultado clásico que trata sobre álgebras booleanas: Bajo ciertas condiciones, asegura la existencia de un filtro en el álgebra booleana. El teorema original puede ser enunciado simplemente para órdenes parciales y dice así:

Teorema 1.3.4 (Rasiowa-Sikorski)**.** *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial, $p \in \mathbb{P}$ y $\mathcal{D}$ una familia numerable de conjuntos $\mathbb{P}$-densos. Entonces existe un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que interseca a todos los conjuntos en $\mathcal{D}$ y tal que $p \in G$.*

Como hemos mencionado antes, muchos teoremas cuyas demostraciones se realizan utilizando cuantificadores en el universo V de la teoría de conjuntos, serán adaptados y enunciados de manera relativizada a un modelo transitivo de *ZFC*. El Teorema de Rasiowa-Sikorski en forma relativizada es el siguiente:

Teorema 1.3.5 (Rasiowa-Sikorski)**.** *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, y sea $\mathcal{D} = \{D \in M : M \models D \text{ es denso en } \mathbb{P}\}$. En estas condiciones, para cada $p \in \mathbb{P}$ siempre es posible encontrar un filtro genérico G sobre M tal que $p \in G$.*

Demostración. Como M es numerable, entonces $\mathcal{D}$ es a lo más numerable, así que podemos escribir al conjunto como $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$. Hacemos la siguiente recursión: Para empezar, fijamos $p_0 := p$. Luego supongamos que se ha definido p_n. Por densidad, existe $q \in D_{n+1}$ tal que $q \leq p_n$. Dicha condición q será nuestro p_{n+1}, y con esta recursión podemos hablar de la colección $\{p_n : n \in \omega\}$. Consideremos el conjunto $G := \big\{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\big[p_n \leq q\big]\big\}$. Observe que $p_n \in G$ para cada natural n. En particular, $p_0 = p \in G$ y

$$\forall n < \omega\left[p_n \in G \cap D_n\right],$$

lo cual es probaría que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Resta probar que G es filtro:

- Como $p \in G$ y $p \leq 1_{\mathbb{P}}$, entonces $1_{\mathbb{P}} \in G$.
- Si tenemos dos condiciones $q, r \in G$, entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $p_n \leq q$ y $p_m \leq r$. Es claro que por construcción se tiene que $p_{n+m} \leq p_n, p_m$, por lo que $p_{n+m} \leq q, r$. Además $p_{n+m} \in G$.
- Sean $q \in G$ y $r \in \mathbb{P}$ tales que $q \leq r$. Entones existe $n \in \omega$ tal que $p_n \leq q$. Por la transitividad de la relación $\leq$, se tiene que $p_n \leq r$, por lo que $r \in G$.

Por lo tanto, G es filtro $\mathbb{P}$-genérico. $\square$

El siguiente teorema nos garantizará que, trabajando con órdenes no atómicos (como el forcing de Cohen) los filtros que se obtienen del teorema anterior no pertenecen al modelo base. En otras palabras, el modelo obtenido a partir de dicho filtro es una extensión "propia" del modelo inicial.

Teorema 1.3.6. *Sean M un modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial no atómico. Para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M se tiene que $G \notin M$.*

Demostración. Supongamos que $G \in M$. Como la diferencia de conjuntos es absoluta, entonces $D = \mathbb{P} \setminus G \in M$. Fijemos $p \in \mathbb{P}$, entonces podemos encontrar $q, r \in \mathbb{P}$ tales que $q, r \leq p$ *y* $q \perp r$. Por lo tanto, no puede ocurrir que $q \in G$ y $r \in G$.

Sin pérdida de generalidad, $q \in D$ y $q \leq p$. Esto basta para demostrar que D es denso en $\mathbb{P}$. Como G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $G \cap D = G \cap (\mathbb{P} \setminus G) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. $\square$

En el Teorema de Rasiowa-Sikorski 1.3.5, podría parecer que el filtro G fue definido en M y que, por lo tanto, es un objeto de M. Sin embargo, notemos que, aunque la familia $\mathcal{D}$ está contenida en M, ésta no necesariamente es un objeto en M, y es "posible" que M "no reconozca qué propiedades son satisfechas por la familia $\mathcal{D}$" (por ejemplo, que $\mathcal{D}$ es numerable). Así, la enumeración que se usó en la demostración puede ser una función $f : \omega \to \mathcal{D}$ que no está en el modelo M.

Los órdenes parciales en los que nos interesaremos a lo largo del texto serán no atómicos, de moodo que por el Teorema 1.3.6, los filtros genéricos sobre un modelo transitivo M contenidos en dichos órdenes no son objetos de M.

1.4. $\mathbb{P}$-nombres

En esta sección definimos los $\mathbb{P}$-nombres y estudiamos sus propiedades. Partiendo de un modelo transitivo M, un orden parcial $\mathbb{P} \in M$ y un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, usando los $\mathbb{P}$-nombres, mostramos la forma de construir un modelo transitivo que extienda a M y que dependerá del filtro G. Es por esta razón que a dicha extensión se le llama la *extensión genérica de M,* $M[G]$.

Definición 1.4.1. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Definimos recursivamente a la clase $V_\alpha^{\mathbb{P}}$:

- $V_0^{\mathbb{P}} = \emptyset$.
- $V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \{x : x \subseteq V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}\} = \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$.
- Si α es ordinal límite, entonces $V_\alpha^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{\mathbb{P}}$.

$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha^{\mathbb{P}}$ es llamada *la clase de los* $\mathbb{P}$*-nombres.* Si M es un modelo transitivo de ZFC, entonces definimos $M^{\mathbb{P}} = M \cap V^{\mathbb{P}} = \{\tau \in M : M \models \tau \textit{ es un } \mathbb{P}\textit{-nombre}\}$.

Definición 1.4.2. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos recursivamente la *interpretación respecto al filtro G del* $\mathbb{P}$*-nombre* τ:

- $i_G(\emptyset) := \emptyset$
- Si α es un ordinal mayor a 0 y para todo $\beta < \alpha$ y todo $\mathbb{P}$-nombre $\sigma \in V_\beta^{\mathbb{P}}$, se ha definido $i_G(\sigma)$, entonces definimos
$$i_G(\tau) := \big\{i_G(\sigma) : \exists p \in G\,\big[(\sigma, p) \in \tau\big]\big\}.$$

A continuación ejemplificamos la interpretación de un $\mathbb{P}$-nombre particular:

Ejemplo 1.4.3. Sean M un modelo transitivo numerable de *ZFC*, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Notemos que si $p \in \mathbb{P}$, entonces $\{(\emptyset, p)\} \in V_2^{\mathbb{P}} \cap M$. Así, tenemos que

$$i_G(\{(\emptyset, p)\}) = \begin{cases} \{\emptyset\}, & \text{si } p \in G, \\ \emptyset, & \text{si } p \notin G. \end{cases}$$

La siguiente es la definición del conjunto que resultará ser la extensión de un modelo M a partir de un filtro genérico G sobre M.

Definición 1.4.4. Sean M un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos la *extensión genérica del modelo M respecto al filtro G como*

$$M[G] := \{i_G(\tau) : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Entre la clase de los $\mathbb{P}$-nombres existen algunos nombres *canónicos* para los objetos del modelo inicial M, que nos permitirán asegurar que tales objetos se preservarán en la extensión genérica.

Definición 1.4.5. Sea $\mathbb{P}$ orden parcial y x un conjunto. Definimos recursivamente el $\mathbb{P}$-*nombre canónico del conjunto* x, el cual denotamos por $\check{x}$:

- $\check{\emptyset} = \emptyset$.
- Supongamos que α es un ordinal mayor a 0 y ya se ha definido $\check{y}$, para todo y con $rank(y) < \alpha$. Si $rank(x) = \alpha$, entonces
$$\check{x} := \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}.$$

Veamos cómo funciona la interpretación de los nombres canónicos de dos objetos sencillos:

Ejemplo 1.4.6. Se tiene que

- $\check{1} = \{(\check{x}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in 1\} = \{(\emptyset, 1_{\mathbb{P}})\}$,
- $\check{2} = \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in 2\} = \{(\check{0}, 1_{\mathbb{P}}), (\check{1}, 1_{\mathbb{P}})\} = \{(\emptyset, 1_{\mathbb{P}}), (\{(\emptyset, 1_{\mathbb{P}})\}, 1_{\mathbb{P}})\}$.

Como era de esperarse, se demuestra por inducción que $\check{x}$ es, en efecto, un $\mathbb{P}$-nombre.

Lema 1.4.7. *Si M es un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial, y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

- $\forall x \in M[\check{x} \in M^{\mathbb{P}} \wedge i_G(\check{x}) = x)]$;
- $M \subseteq M[G]$.

Demostración.

- Es fácil demostrar por recursión sobre el rango de x que $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$, para todo $x \in M$. Sólo demostraremos que para cualquier $x \in M$, se da la igualdad $i_G(\check{x}) = x$, y esto lo hacemos por inducción sobre el rango de x:
  - $i_G(\check{\emptyset}) = i_G(\emptyset) = \emptyset$.

- Sea α ordinal y supongamos que si $y \in M$ y $rank(y) < \alpha$, entonces es cierto que $i_G(\check{y}) = y$. Fijamos $x \in M$ con rango $rank(x) = \alpha$. Sabemos que $\check{x} = \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} i_G(\check{x}) &= \left\{ i_G(\sigma) : \exists p \in G \left[(\sigma, p) \in \check{x} \right] \right\} \\ &= \{ i_G(\check{y}) : y \in x \} \\ &= \{ y : y \in x \} \\ &= x. \end{aligned}$$

- Es inmediato del primer inciso.

$\square$

Ya hemos visto que si tenemos un orden parcial $\mathbb{P}$ en un modelo M de *ZFC* y un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, entonces G usualmente no va a ser un objeto de dicho modelo. Sin embargo, será posible hablar de propiedades que cumplirá el filtro G en la extensión genérica $M[G]$ desde el modelo M, utilizando el siguiente conjunto $\Gamma := \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$, el cual satisface las siguientes condiciones:

- Γ es un $\mathbb{P}$-nombre.
- $i_G(\Gamma) = G$.
- $G \in M[G]$.

Una propiedad muy importante que, como veremos en el siguiente teorema, es satisfecha por la extensión genérica $M[G]$ de un modelo M, es una especie de *minimalidad*[1] entre modelos que extienden a M y tienen al filtro G como objeto.

Teorema 1.4.8. *Sean M un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico. Si N es un modelo transtivo de ZFC con $M \subseteq N$ y $G \in N$, entonces $M[G] \subseteq N$.*

Demostración. Basta con demostrar que si $\tau \in N^{\mathbb{P}}$, entonces $i_G(\tau) \in N$. Para la demostración, procederemos por inducción sobre los estratos de $N^{\mathbb{P}}$. Primero, sabemos que $i_G(\emptyset) = \emptyset \in N$. Ahora supongamos que $\alpha > 0$ y para todo $\beta < \alpha$ y todo $\sigma \in N \cap V_\beta^{\mathbb{P}}$, se tiene que $i_G(\sigma) \in N$, y consideremos $\tau \in N \cap V_\alpha^{\mathbb{P}}$. La fórmula que define al conjunto $i_G(\tau) = \left\{ i_G(\sigma) : \exists p \in G \left[(\sigma, p) \in \tau \right] \right\}$ es Δ_0 y tiene parámetros en N. Por consiguiente, y ya que N satisface el esquema de reemplazo, se tiene que $i_G(\tau) \in N$. Finalmente, observemos que $M \subseteq N$, lo cual implica que $M^{\mathbb{P}} \subseteq N^{\mathbb{P}}$. $\square$

Al considerar modelos de *ZFC* con cierta cardinalidad es uno podría preguntarse de manera natural *cuáles son los ordinales que estarán en M*. Notemos que si $|M| = \kappa$, entonces no es posible que $\kappa^+ \in M$. Así, podemos considerar el siguiente conjunto para cada modelo M:

$$O(M) := \text{mín}\{\alpha \in ON : \alpha \notin M\}.$$

Algunos hechos elementales de $M[G]$ son los siguientes:

[1] En estricto sentido, no es posible hablar formalmente del concepto de minimalidad dado en la sección 1.2, pues para esto es necesario contar con un conjunto parcialmente ordenado (en este caso, la contención), y esto es imposible porque la clase de los modelos que tienen al filtro G como elemento es una clase propia.

Lema 1.4.9. *Si M es un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial, y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

- *$M[G]$ es un conjunto transitivo,*
- *$\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}[rank(i_G(\tau)) \leq rank(\tau)]$,*
- *$O(M[G]) = O(M)$.*

Demostración.

- Se sigue inmediatamente de la definiciones de $M[G]$ y $i_G(\tau)$, $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.
- Para la demostración de este inciso procederemos por inducción sobre el rango de los $\mathbb{P}$-nombres: Para el paso base, notemos que $rank(i_G(\emptyset)) = 0 = rank(\emptyset)$. Para el paso inductivo, sea α un ordinal y supongamos que para todo $\mathbb{P}$-nombre σ con $rank(\sigma) < \alpha$, se tiene que $rank(i_G(\sigma)) \leq rank(\sigma)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} rank(i_G(\tau)) &= \bigcup \{rank(z) + 1 : z \in i_G(\tau)\} \\ &= \bigcup \big\{rank(i_G(\sigma)) + 1 : \exists p \in G\, \big[(\sigma, p) \in \tau\big]\big\} \\ &\leq \bigcup \big\{rank(\sigma) + 1 : \exists p \in G\, \big[(\sigma, p) \in \tau\big]\big\}. \end{aligned}$$

  Por otro lado, sabemos que $\sigma \in \{\sigma\} \in \{\{\sigma\}, \{\sigma, p\}\} = (\sigma, p)$. Por lo tanto, si $(\sigma, p) \in \tau$, entonces $rank(\sigma) < rank((\sigma, p)) < rank(\tau)$. De esta manera, $rank(i_G(\tau)) \leq rank(\tau)$.

- Por $rank^M(x)$ nos referimos a $rank(x) \cap M$. Supongamos que la siguiente afirmación es verdadera:

$$\textit{Si } x \in M, \ \textit{entonces } rank(x) = rank^M(x) \in M \tag{1.4.9.1}$$

  lo cual argumentaremos más adelante. Por definición, sabemos que $O(M)$ es el mínimo ordinal α tal que $\alpha \notin M$, por lo que $O(M) \leq O(M[G])$. Si ocurre que $O(M) < O(M[G])$, entonces existe $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $i_G(\tau) = O(M)$. Por el segundo inciso y la propiedad (1.4.9.1), tenemos que

$$O(M) = rank(O(M)) = rank(i_G(\tau)) \leq rank(\tau) \in M,$$

  lo que es una contradicción. De esta manera obtenemos que $O(M) = O(M[G])$.

  Ahora veamos que en efecto se satisface la afirmación (1.4.9.1). La prueba se hace por inducción sobre el rango de los elementos de M. Para comenzar,

$$rank(\emptyset) = 0 = rank(\emptyset) \cap M$$

  y $0 \in M$. Luego supongamos que $x \in M$, $rank(x) = \alpha$ y para cada $\beta < \alpha$ y cada $y \in M$ tal que $rank(y) = \beta$, se tiene que $rank(y) = rank^M(y)$ y $rank^M(y) \in M$. Es claro que $rank^M(x) \subseteq rank(x)$. Sea $\beta \in rank(x)$. Entonces existe un $y \in x$ con $\beta = rank(y) + 1 = rank^M(y) + 1 \in M$. Por lo tanto, $rank(x) = rank^M(x)$. Para ver que $rank^M(x) \in M$, notemos que

$$\{rank^M(y) + 1 : y \in x\} = \{rank^M(y) + 1 : y \in x \cap M\}$$

  porque $x \in M$. Ya que M satisface el esquema de reemplazo, entonces deducimos que $\{rank^M(y) + 1 : y \in x \cap M\} \in M$.

$\square$

1.5. Lenguaje del forcing y propiedades básicas

En las siguientes dos secciones presentamos el método de forcing. La primera definición es el concepto central de la teoría sobre la que sustentan los resultados expuestos en esta tesis.

Definición 1.5.1. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, ϕ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos $\mathcal{L}_\in$ con variables libres $x_1, ..., x_n$, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, $p \in \mathbb{P}$ y $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. Entonces decimos que *la condición p fuerza la verdad de la fórmula ϕ con la asignación* $\tau_1, \ldots, \tau_n$, lo que denotamos por

$$p \Vdash_{(\mathbb{P},M)} \phi(\tau_1, ..., \tau_n),$$

si todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M con $p \in G$ es tal que

$$M[G] \models \phi(i_G(\tau_1), \ldots, i_G(\tau_n)).$$

Para que el lector que no conozca esta definición comience a familiarizarse con su significado y la forma en que se utiliza, damos unos ejemplos elementales:

Ejemplo 1.5.2. Sea M modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P}$ un orden parcial en M con $\mathbb{P} \in M$.

- Si tenemos un par de conjuntos $a, b \in M$, entonces se tiene que $1_{\mathbb{P}} \Vdash \check{a} \in \check{b}$ si y sólo si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, se tiene que
$$M[G] \models a \in b.$$
- Se cumple que $1_{\mathbb{P}} \Vdash \phi(\tau_1, ..., \tau_n)$ si y sólo si para cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M,
$$M[G] \models \phi(i_G(\tau_1), ..., i_G(\tau_n)).$$
- Consideremos un par de condiciones $p, q \in \mathbb{P}$. Si $p \leq q$, entonces $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$. En efecto, pues si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$, tenemos que $M[G] \models q \in G$.
- Si $p \perp q$, entonces $p \Vdash \check{q} \notin \Gamma$, pues como G es filtro, entonces $p \in G$ implica que $q \notin G$.

Los siguientes dos teoremas son muy importantes en el forcing, y son conocidos como el *lema de la verdad* y el *lema de la definibilidad*. El primero de ellos nos dice que *toda verdad en la extensón genérica de $M[G]$ de un modelo M es forzada por alguna condición del forcing con el que estemos trabajando*. El segundo teorema nos dice que si trabajamos en un modelo M y definimos un conjunto utilizando parámetros en M y la relación de *forzar* definida en 1.5.1, entonces el conjunto definido es un objeto de M. Omitiremos las demostraciones pues no entra dentro de los objetivos de esta tesis, sin embargo el lector interesado puede consultar las demostraciones en [24].

Teorema 1.5.3 (lema de la verdad)**.** *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P}$ un orden parcial en M, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. Si ϕ una fórmula con variables libres $x_1 \ldots, x_n$, entonces $M[G] \models \phi\big(i_G(\tau_1), \ldots, i_G(\tau_n)\big)$ si y sólo si existe $p \in G$ tal que*

$$p \Vdash_{(\mathbb{P},M)} \phi(\tau_1, ..., \tau_n). \qquad \square$$

Teorema 1.5.4 (lema de la definibilidad)**.** *A cada fórmula ϕ con variables libres $x_1, \ldots, x_n$ podemos asociar una fórmula ϕ' con variables libres $x_1, \ldots, x_n, x, z$ de modo que si M es modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial, $p \in \mathbb{P}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ son $\mathbb{P}$-nombres, entonces se tiene que*

$$p \Vdash_{(\mathbb{P},M)} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \iff M \models \phi'(\tau_1, \ldots, \tau_n, p, \mathbb{P}). \qquad \square$$

Definición 1.5.5. Sean $p \in \mathbb{P}$ y ϕ una fórmula. *Decimos que p decide a ϕ* si

$$p \Vdash \phi \quad \text{ó bien} \quad p \Vdash \neg\phi.$$

En seguida, enlistamos lemas técnicos cuya demostración se omite pues la comprobación es muy sencilla.

Lema 1.5.6. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, y ϕ, ψ, ϕ_1,..., ϕ_n fórmulas. Entonces las siguientes son verdaderas:*

- *Si $p \Vdash \phi_1, \ldots, p \Vdash \phi_n$ y $\phi_1 \wedge, \ldots, \wedge \phi_n \rightarrow \phi$, entonces $p \Vdash \phi$.*
- *Si $q \leq p$ y $p \Vdash \phi$ entonces $q \Vdash \phi$;*
- *$p \Vdash \phi$ y $p \Vdash \psi$ si y sólo si $p \Vdash \phi \wedge \psi$.;*
- *Si $p \Vdash \phi$ y $q \Vdash \neg\phi$ entonces $p \perp q$;*
- *Ningún p puede forzar simultáneamente a ϕ y $\neg\phi$.*
- *Si $a \in M$, entonces $p \Vdash \forall x \in \check{a}\, \phi(x)$ si y sólo si $\forall b \in a\, [p \Vdash \phi(\check{b})]$.*

Gracias al segundo inciso del lema anterior podemos ver que siempre que dos condiciones cumplan $p \leq q$, entonces p *es una condición más fuerte que* q.

Lema 1.5.7. *Sea M un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y $D \subseteq \mathbb{P}$, $D \in M$. Si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

- *$G \cap D \neq \emptyset$, o bien $\exists q \in G\, \forall r \in D\, [r \perp q]$,*
- *Si $p \in G$ y D es denso debajo de p, entonces $G \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración. Para la primera afirmación, consideramos el conjunto

$$D' = \{p' \in \mathbb{P} : \exists r \in D\, [p' \leq r]\} \cup \{q \in \mathbb{P} : \forall r \in D\, [r \perp q]\}.$$

Afirmamos que D' es denso. Efectivamente, si $q \in \mathbb{P}$ y $q \notin D'$, entonces existe $r \in D$ tal que r y q son compatibles, i.e., $\exists p' \in \mathbb{P}$ tal que $p' \leq r$ y $p' \leq q$. Entonces $p' \in D'$. Así, D' es denso, por lo que $D' \cap G \neq \emptyset$, lo que prueba el primer inciso.

Para la segunda afirmación, supongamos que $G \cap D = \emptyset$. Entonces existe $q \in G$ tal que para todo $r \in D$, $r \perp q$, por el primer inciso. Sea $t \in G$ tal que $t \leq q \wedge t \leq p$. Como D es denso debajo de p, entonces existe $r \in D$ tal que $r \leq t$, por lo que $r \leq q$, lo cual contradice que $r \perp q$.

□

Lema 1.5.8. *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial y $p \in \mathbb{P}$. Si $D \subseteq \mathbb{P}$ es un subconjunto de $\mathbb{P}$ denso debajo de p y $A \subseteq D$ es una anticadena debajo de p, tenemos entonces que*

- *A es una anticadena maximal debajo de p si y sólo si*

$$D_A = \{q \leq p : \exists r \in A\,[q \leq r]\}$$

  es denso debajo de p;

- *Si G es $\mathbb{P}$-genérico, $p \in G$ y A es una anticadena maximal entonces $|G \cap A| = 1$.*

Demostración. Probamos la primera afirmación. $\Rightarrow$: Supongamos que $q \leq p$. Ya que A es anticadena maximal, entonces existe $r \in A$ tal que q y r son compatibles. Así, podemos encontrar una condición $s \in \mathbb{P}$ con $s \leq r$ y $s \leq q$. De la definición de D_A, concluímos que $s \in D_A$. Por lo tanto, D_A es denso debajo de p.

$\Leftarrow$: Basta probar que

$$\forall q \in \mathbb{P} \setminus A\left[q \leq p \rightarrow \exists q' \in A\,[q \not\perp q']\right].$$

Tomamos $r \in D_A$ tal que $r \leq q$. Por definición, existe $q' \in A$ tal que $r \leq q'$. Por lo tanto, q y q' son compatibles.

Ahora procedemos con la demostración del segundo inciso. Del primer inciso se tiene que D_A es denso debajo de p. Entonces existe $q \in G \cap D_A$, en virtud del Lema 1.5.7. Por lo tanto, existe una condición $r \in A$ con $q \leq r$. Como G es filtro, entonces $r \in G \cap A$. Por último, $|G \cap A| = 1$ porque A es anticadena.

□

Lema 1.5.9. *Sea M un modelo transitivo numerable, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y ϕ una fórmula. Entonces el conjunto*

$$D_\phi = \{p \in \mathbb{P} : p \text{ decide a } \phi\}$$

es denso en $\mathbb{P}$.

Demostración. Sean $p \in \mathbb{P}$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p \in G$. Consideremos la afirmación

$$M[G] \models \phi \vee \neg\phi.$$

En virtud del lema de la verdad 1.5.3, podemos fijar una condición $r \in G$ tal que $r \Vdash \phi \vee \neg\phi$. Como $p, r \in G$ fijamos una $q \in G$ con $q \leq p$ y $q \leq r$. Por el segundo inciso del Lema 1.5.6, tenemos que $q \in D_\phi$, lo cual se quería demostrar □

Lema 1.5.10. *Sean $\mathbb{P} \in M$ un conjunto parcialmente ordenado, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y $p \in \mathbb{P}$.*

- *Si $A \subseteq \mathbb{P}$ es predenso, entonces $A \cap G \neq \emptyset$;*

- *Si* $A \subseteq \mathbb{P}$ *es predenso debajo de* p *y* $p \in G$*, entonces* $A \cap G \neq \emptyset$.

Demostración. Sólo probamos el segundo inciso, pues la prueba para el primero es completamente análoga. Sea $A \subseteq \mathbb{P}$ un conjunto predenso debajo de p, y supongamos que $p \in G$. Consideremos el conjunto

$$D_A = \{q \leq p : \exists r \in A\,[q \leq r]\}.$$

Como A es predenso debajo de p, entonces D_A es denso debajo de p. Luego, en virtud del Lema 1.5.7, existe $q \in D_A \cap G$. Por lo tanto, podemos elegir un $r \in A$ tal que $q \leq r$. Ya que G es filtro, entonces $r \in G$. $\square$

Hacemos notar que si $D \subseteq \mathbb{P}$ es un subconjunto denso (debajo de p) y $A \subseteq D$ es una anticadena maximal, entonces A es un conjunto predenso (debajo de p, respectivamente).

Las afirmaciones del siguiente lema son muy básicas, por cual se omiten sus demostraciones, que se pueden encontrar ya sea en [10] o en [24].

Lema 1.5.11. *Sean* M *un modelo transitivo numerable de ZFC,* $\mathbb{P} \in M$ *un orden parcial y* $p, q, r \in \mathbb{P}$*. Si* ϕ *y* ψ *son fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos y* $\tau, \gamma \in M^{\mathbb{P}}$ *son* $\mathbb{P}$*-nombres en* $M^{\mathbb{P}}$*, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- $p \Vdash \neg\phi \iff \forall q \left[q \leq p \rightarrow q \nVdash \phi\right]$.
- *Si* $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash \phi\}$ *es denso debajo de* $p \in \mathbb{P}$*, entonces* $p \Vdash \phi$.
- $p \Vdash \phi \vee \psi \iff \forall q \leq p\, \exists r \leq q \left[r \Vdash \phi \vee r \Vdash \psi\right]$.
- *Si* $a \in M$*, entonces* $p \Vdash \exists x \in \check{a}\, \phi(x) \iff \forall q \leq p\, \exists r \leq q\, \exists b \in a \left[r \Vdash \phi(\check{b})\right]$.
- $p \Vdash \exists x\, \phi(x) \iff \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} \left[p \Vdash \phi(\sigma)\right]$.
- $p \Vdash \gamma \in \tau \iff \forall q \leq p\, \exists q' \in \mathbb{P} \left[q' \Vdash \gamma \in \tau \wedge q \not\perp q'\right]$.
- $p \Vdash \gamma \notin \tau \iff \forall q \leq p \forall q' \in \mathbb{P} \left[q' \Vdash \gamma \in \tau \rightarrow q \perp q'\right]$.

Para el mejor entendimiento del método de forcing, puede uno llevar acabo la verificación de que todos los axiomas de *ZFC* se satisfacen en la extensión $M[G]$ de un modelo M que ya satisface ZFC, donde G es el filtro $\mathbb{P}$-genérico respecto a un orden parcial $\mathbb{P} \in M$. Este resultado es, a estas alturas, esperado pues ya hemos comentado que la técnica de forcing sirve para “agrandar” modelos con los que se trabajen.

Teorema 1.5.12. *Sean* M *un modelo transitivo numerable de* ZFC*,* $\mathbb{P} \in M$ *un orden parcial y* G *un filtro genérico sobre* M*. Entonces* $M[G]$ *satisface los axiomas de* ZFC*.*

La demostración se puede consultar en [10] y [24].

1.6. Encajes e isomorfismos de órdenes parciales

En el forcing se recurre constantemente a una estrategia que consiste en considerar órdenes parciales definidos aparentemente de manera distinta pero que agregan los mismos conjuntos, y es por eso que esa clase de órdenes parciales se consideran *equivalentes*. En esta sección definimos los conceptos y probamos los lemas necesarios para usar libremente esta idea en las demostraciones de algunos teoremas.

Definición 1.6.1.

- Sean $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}})$ y $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}})$ órdenes parciales. Decimos que una función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo si se cumplen las siguientes condiciones.

  i) $\forall p, p' \in \mathbb{P}\, [p \leq_{\mathbb{P}} p' \to e(p) \leq_{\mathbb{Q}} e(p')]$,

  ii) $\forall p, p' \in \mathbb{P}\, [p \perp p' \leftrightarrow e(p) \perp e(p')]$,

  iii) $\forall q \in \mathbb{Q}\, \exists p \in \mathbb{P}\, \forall p' \in \mathbb{P}\, [p' \leq_{\mathbb{P}} p \to e(p') \not\perp q]$.

  iv) $e(1_{\mathbb{P}}) = 1_{\mathbb{Q}}$.

- Si en el tercer inciso $p \in \mathbb{P}$ satisface la propiedad enunciada, decimos que p es una r*educción* de q a $\mathbb{P}$.

- Sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ órdenes parciales. Decimos que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son nociones equivalentes de forcing ($\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$) si para cada filtro $\mathbb{P}$-genérico G existe un filtro $\mathbb{Q}$-genérico H tal que $M[G] = M[H]$.

Notación. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ órdenes parciales. Escribimos $\mathbb{P} \subset_c \mathbb{Q}$ si $\mathbb{P}$ es un suborden de $\mathbb{Q}$ y la función inclusión de $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ es un encaje completo.

Probamos el siguiente lema para ocuparlo en el teorema que le sigue. Aunque el enunciado pareciera completamente trivial, observe el lector que en la lista de propiedades que aparece en el lema, el primer inciso es similar a una de las condiciones requeridas en la definición de ser filtro en un orden parcial, sin embargo existe una sutil diferencia que se propone dejar al lector como ejercicio en la definición de filtro.

Lema 1.6.2. *Supongamos que $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial. Entonces G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M si y sólo si*

- $\forall p, q \in G\, \exists r \in \mathbb{P}\, \big[r \leq p \wedge r \leq q\big]$*;*
- $\forall p \in G\, \forall q \in \mathbb{P}\, \big[q \geq p \to q \in G\big]$*;*
- *Si $D \in \mathcal{P}(\mathbb{P}) \cap M$ y $M \models \big[D$ es denso en $\mathbb{P}\big]$, entonces $G \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración. $\Rightarrow$: Es inmediato.

$\Leftarrow$: Supongamos que $G \subseteq \mathbb{P}$ satisface las tres condiciones. Sólo necesitamos probar que

$$\forall p, q \in G\, \exists r \in G\, \big[r \leq p \wedge r \leq q\big].$$

Para esto, definimos

$$D := \{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}$$

donde $p, q \in G$ son fijos. Es evidente que D es denso y $D \in M$, así que por el tercer inciso, fijamos $r \in G \cap D$. En virtud del primer inciso, los elementos de G son compatibles por parejas, por lo tanto $r \leq p$ y $r \leq q$. $\square$

El siguiente teorema nos da condiciones para saber cuándo un orden parcial agrega conjuntos que, a su vez, pueden ser agregados por otro orden.

Teorema 1.6.3. *Sean* $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ *con* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *órdenes parciales y* $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ *un encaje completo. Si* H *es* $\mathbb{Q}$*-genérico sobre* M*, entonces* $G = e^{-1}[H]$ *es* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *y además,* $M[G] \subseteq M[H]$*.*

Demostración. Verificamos primero que G es, en efecto, $\mathbb{P}$-genérico. Sean $p, q \in G$; ya que $e(p)$ y $e(q)$ son compatibles, entonces p y q son compatibles, por lo que se verifica el primer inciso del Lema 1.6.2. Si $p \leq q$ y $p \in G$, entonces se tiene que $e(p) \leq e(q)$, por lo que $e(q) \in H$ y así, $q \in G$. Para verificar el tercer inciso, fijemos $D \in M$ tal que D es denso en $\mathbb{P}$. Supongamos que $G \cap D = \emptyset$. Por el primer inciso del Lema 1.5.7,

$$\exists q \in H \, \forall r \in D \, [e(r) \perp q],$$

pues $e[D] \cap H = \emptyset$. Consideremos $p \in \mathbb{P}$ una reducción de q. Ya que D es denso en $\mathbb{P}$, podemos encontrar un $r \in D$ tal que $r \leq p$, de este modo $e(r)$ y q son comparables, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $D \cap G \neq \emptyset$. Ahora, como $e \in M$, el hecho de que $H \in M[H]$ implica que

$$e^{-1}[H] = G \in M[H]$$

y, por lo tanto, $M[G] \subseteq M[H]$, en virtud de la minimalidad de $M[G]$. $\square$

El siguiente corolario nos da una situación cuando dos órdenes parciales añaden los mismos conjuntos. La demostración es muy sencilla y la omitimos.

Corolario 1.6.4. *Junto con las hipótesis del teorema anterior, supongamos también que* e *es un isomorfismo. Si* $G \subseteq \mathbb{P}$*, entonces* G *es* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *si y sólo si* $e[G]$ *es* $\mathbb{Q}$*-genérico sobre* M *y, en ese caso, también se cumple que* $M[G] = M\big[e[G]\big]$*.* $\square$

Definición 1.6.5. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ órdenes parciales. Decimos que una función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje denso si

- $\forall p, p' \in \mathbb{P} \, [p \leq_{\mathbb{P}} p' \to e(p) \leq_{\mathbb{Q}} e(p')]$;
- $\forall p, p' \in \mathbb{P} \, [p \perp p' \leftrightarrow e(p) \perp e(p')]$;
- $e[\mathbb{P}]$ es denso en $\mathbb{Q}$.

El siguiente lema es uno de los más importantes dentro de la sección de encajes.

Lema 1.6.6. *Todo encaje denso es completo.*

Demostración. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ órdenes parciales, y fijemos un encaje denso $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ y un $q \in \mathbb{Q}$. Ya que $e[\mathbb{P}]$ es denso en $\mathbb{Q}$, entonces podemos encontrar un $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leq_{\mathbb{Q}} q$. Es fácil notar que p es una reducción de q a $\mathbb{P}$. $\square$

El corolario que sigue es inmediato del teorema anterior.

Corolario 1.6.7. *Si* $\mathbb{P}$ *es un suborden en* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{P}$ *es denso en* $\mathbb{Q}$*, entonces la función inclusión de* $\mathbb{P}$ *en* $\mathbb{Q}$ *es un encaje denso en* $\mathbb{Q}$*.* $\square$

Otro corolario que se sigue fácilmente de la definición de ser encaje denso es

Corolario 1.6.8. *Todo isomorfismo entre órdenes parciales es encaje denso.*

A continuación veamos que los filtros $\mathbb{P}$-genéricos son maximales bajo la contención.

Lema 1.6.9. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial. Supongamos que G_1 y G_2 son filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre M, y que $G_1 \subseteq G_2$. Entonces $G_1 = G_2$.*

Demostración. Supongamos que $p \in G_2 \setminus G_1$. Como $G_1 \cap \{p\} = \emptyset$, por el primer inciso del Lema 1.5.7, sabemos que existe $q \in G_1$ tal que $q \perp p$, lo cual contradice que G_2 sea filtro. □

Teorema 1.6.10. *Supongamos que $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ son órdenes parciales y $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje denso, $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$. Para cada subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ definimos el conjunto $\tilde{e}(G) := \big\{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in G\big[e(p) \leq_{\mathbb{Q}} q\big]\big\}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Si $H \subseteq \mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, entonces $e^{-1}[H]$ es $\mathbb{P}$-genérico sobre M.*
- *Si $G \subseteq \mathbb{P}$ es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $\tilde{e}(G)$ es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M.*
- *En los primeros dos incisos, $H = \tilde{e}\big(e^{-1}[H]\big)$ y $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. Si $G = e^{-1}[H]$ (o, equivalentemente, si $H = \tilde{e}(G)$), entonces $M[G] = M[H]$.*

Demostración. Para el primer inciso, notemos que todo encaje denso es también completo, entonces la afirmación se sigue del Teorema 1.6.3.

Para el segundo inciso, es fácil ver que $\tilde{e}(G)$ es filtro en $\mathbb{Q}$. Para verificar que es $\mathbb{Q}$-genérico, sea $D \in M$ un denso en $\mathbb{Q}$ y consideremos el conjunto

$$D^* := \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in D\, [e(p) \leq q]\}.$$

Afirmamos que D^* es denso en $\mathbb{P}$. En efecto, sean $p \in \mathbb{P}$, $q \in D$ tales que $q \leq e(p)$ y $p' \in \mathbb{P}$ tal que $e(p') \leq q$. Luego $e(p)$ y $e(p')$ son compatibles, por lo cual p y p' son compatibles. Podemos fijar un $p'' \in \mathbb{P}$ tal que $p'' \leq p'$ y $p'' \leq p$. Como $e(p'') \leq q$, entonces $p'' \in D^*$ y $p'' \leq p$. Esto prueba nuestra afirmación. Ahora fijémonos en $p \in D^* \cap G$, podemos encontrar un $q \in D$ tal que $e(p) \leq q$, por lo tanto $q \in D \cap \tilde{e}(G)$, como queríamos probar.

Por último, probamos el tercer inciso. Para ver que $G = e^{-1}\big[\tilde{e}(G)\big]$, ya sabemos que $\tilde{e}(G)$ es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y por lo tanto, que $e^{-1}\big[\tilde{e}(G)\big]$ es $\mathbb{P}$-genérico sobre M. El hecho de que $G \subseteq e^{-1}\big[\tilde{e}(G)\big]$ se sigue de inmediato de las definiciones, la igualdad se sigue del Lema 1.6.9. De manera análoga, se verifica que $H = \tilde{e}\big(e^{-1}[H]\big)$. Finalmente, fijemos $G = e^{-1}(H)$. Por el Teorema 1.6.3, tenemos que $M[G] \subseteq M[H]$. Ya que $H \in M[G]$ y $M \subseteq M[G]$, entonces $M[H] \subseteq M[G]$, por lo que $M[H] = M[G]$. □

El siguiente ejemplo servirá para ilustrar el uso de los encajes entre órdenes parciales. Lo aprovecharemos para introducir el concepto de *producto de órdenes parciales* que revisaremos brevemente en la siguiente sección

Ejemplo 1.6.11. Sean $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1$ órdenes parciales, y sea $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$. Definimos el orden en $\mathbb{Q}$ como $(p,q) \leq_{\mathbb{Q}} (p',q')$ si y sólo si $p \leq_{\mathbb{P}_0} p'$ y $q \leq_{\mathbb{P}_1} q'$, y fijamos los encajes $e_0 : \mathbb{P}_0 \to \mathbb{Q}$ y $e_1 : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{Q}$ como $e_0(p) = (p, 1_{\mathbb{P}_1})$, para cada $p \in \mathbb{P}_1$, y $e_1(p) = (1_{\mathbb{P}_0}, p)$, para cada $p \in \mathbb{P}_1$, respectivamente. Entonces e_0 y e_1 son encajes completos.

Definiremos ahora un conjunto que, veremos, será un $\mathbb{P}$-nombre para la imagen de un encaje entre órdenes parciales.

Definición 1.6.12. Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje completo entre los órdenes parciales $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$. Definimos por recursión sobre $\tau \in M^{\mathbb{P}}$:

$$e_*(\tau) := \{(e_*(\sigma), e(p)) : (\sigma, p) \in \tau\}.$$

Es fácil probar que $e_*(\tau) \in M^{\mathbb{Q}}$ (por recursión sobre $rank(e_*(\tau))$ se demuestra que $e_*(\tau)$ es $\mathbb{Q}$-nombre, y por axioma de reemplazo, se tiene que $e_*(\tau) \in M$), de lo cual se concluye que si $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, e \in M$, entonces e_* es una función que va del conjunto de los $\mathbb{P}$-nombres $M^{\mathbb{P}}$ al conjunto $M^{\mathbb{Q}}$ de los $\mathbb{Q}$-nombres.

En el siguiente resultado veremos el comportamiento de la función e_* y su relación con los encajes completos.

Lema 1.6.13. *Supongamos que $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$, y que $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo en M.*

- *Si H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M entonces*

  $$i_{e^{-1}[H]}(\tau) = i_H(e_*(\tau)).$$

  para cada $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.

- *Si ϕ es una fórmula absoluta para los modelos de ZFC con variables $x_1, \ldots, x_n$, entonces*

  $$p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \iff e(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \phi(e_*(\tau_1), \ldots, e_*(\tau_n)),$$

  para cada $p \in \mathbb{P}$.

- *Si e es un encaje denso y ϕ es cualquier fórmula con variables libres $x_1, \ldots, x_n$, entonces*

  $$p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \iff e(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \phi(e_*(\tau_1), \ldots, e_*(\tau_n)),$$

  para cada $p \in \mathbb{P}$.

Demostración. Para el primer inciso, aplicamos directamente inducción sobre el rango de τ para obtener las identidades

$$\begin{aligned}
i_{e^{-1}[H]}(\tau) &= \{i_{e^{-1}[H]}(\sigma) : \exists p \in e^{-1}[H]\big[(\sigma, p) \in \tau\big]\} \\
&= \{i_H(e_*(\sigma)) : \exists p \in e^{-1}[H]\big[(e_*(\sigma), e(p)) \in e_*(\tau)\big]\} \\
&= \{i_H(\rho) : \exists q \in H\big[(\rho, q) \in e_*(\tau)\big]\} \\
&= i_H(e_*(\tau)).
\end{aligned}$$

De dichas igualdades, la que hace falta justificar es la penúltima. La contención $\subseteq$ es inmediata. Para la otra contención, de la definición de $e_*(\tau)$, implica $(\rho, q) \in e_*(\tau)$, entonces $\rho = e_*(\sigma)$ para algún $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ y $q = e(p)$ para algún $p \in e^{-1}[H]$.

Procedemos a la demostración del segundo inciso:

$\Rightarrow$: Supongamos que $p \in \mathbb{P}$ y $p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, para unos $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. Fijemos un filtro $\mathbb{Q}$-genérico H sobre M con $e(p) \in H$. Sabemos por el Teorema 1.6.3 que $e^{-1}[H]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y como $p \in e^{-1}[H]$, obtenemos

$$M\big[e^{-1}[H]\big] \models \phi(i_{e^{-1}[H]}(\tau_1), \ldots, i_{e^{-1}[H]}(\tau_n)).$$

Por el inciso anterior, esto es equivalente a que

$$M\big[e^{-1}[H]\big] \models \phi(i_H(e_*(\tau_1)), \ldots, i_H(e_*(\tau_n))).$$

Sabemos que $M\big[e^{-1}[H]\big] \subseteq M[H]$, así que por la definición de absolutez y el hecho de que $i_H(e_*(\tau_1), \ldots, i_H(e_*(\tau_n)) \in M[H]$, se tiene que

$$M[H] \models \phi(i_H(e_*(\tau_1)), \ldots, i_H(e_*(\tau_n))).$$

Con esto hemos demostrado que se satisface la afirmación

$$e(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \phi(e_*(\tau_1), \ldots, e_*(\tau_n)).$$

$\Leftarrow$: Supongamos que $p \in \mathbb{P}$ y

$$p \nVdash_{\mathbb{P}} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Por el Lema 1.5.9 y el segundo inciso del Lema 1.5.11, existe $p' \leq p$ de modo que

$$p' \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

y como hemos verificado la dirección opuesta, entonces obtenemos que

$$e(p') \Vdash_{\mathbb{Q}} \neg\phi(e_*(\tau_1), \ldots, e_*(\tau_n)).$$

Ya que $e(p') \leq e(p)$, se concluye que

$$e(p) \nVdash_{\mathbb{Q}} \phi(e_*(\tau_1), \ldots, e_*(\tau_n)).$$

La demostración del tercer inciso es similar a la del segundo inciso, salvo unos detalles que aclararemos:

Sean $p \in \mathbb{P}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ de modo que $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Consideremos H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M tal que $e(p) \in H$. Por el primer inciso del Teorema 1.6.10, sabemos que $e^{-1}[H]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $p \in e^{-1}[H]$, por lo que

$$M\big[e^{-1}[H]\big] \models \phi(i_H(e_*(\tau_1)), \ldots, i_H(e_*(\tau_n))). \tag{1.6.12.1}$$

Como e es encaje denso, podemos aplicar el Teorema 1.6.10 el cual nos dice que $M\big[e^{-1}[H]\big] = M[H]$. Además, por el primer inciso de este lema, tenemos que

$$i_{e^{-1}[H]}(\tau_i) = i_H(e_*(\tau_i)),$$

para cada $i \leq n$. Por lo cual, la afirmación (1.6.12.1) es equivalente a la afirmación

$$M[H] \models \phi(i_H(e_*(\tau_1)), \ldots, i_H(e_*(\tau_n))),$$

que era lo que queríamos demostrar.

$\square$

1.7. Productos de órdenes parciales

Como adelantamos casi al final de la sección anterior (comentario previo al ejemplo 1.6.11), daremos algunas definiciones de los órdenes parciales obtenidos del producto cartesiano de órdenes dados. Uno de los resultados más relevantes de esta sección para nuestros propósitos en esta tesis es la conocida *partición del forcing* $Fn(\omega, 2)$. Entre las particularidades más convenientes a la hora de trabajar con el producto de órdenes parciales es la propiedad relacionada con los filtros genéricos del producto que probamos en el siguiente teorema. Este teorema nos dice que da lo mismo extender un modelo M numerable con un filtro del producto $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, a extender dicho modelo con un filtro $\mathbb{P}$-genérico H, y después extender el modelo obtenido $M[H]$ con un filtro $\mathbb{Q}$-genérico K que pertenecerá al modelo $M[H]$. En textos más avanzados sobre la técnica de forcing, como [24] o [10], se profundiza en esta idea y se estudia el concepto de *iteración* o *forcing iterado* que, a grandes rasgos, consiste en forzar con un orden parcial en cada modelo extendido obtenido por otro orden parcial y repetir este proceso una cantidad finita o *regular* de veces, es decir, el proceso está *indizado* por un cardinal finito o uno regular. El producto de órdenes parciales, como lo hemos definido nosotros, es en particular forcing iterado *de dos pasos*.

Teorema 1.7.1. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ órdenes parciales. Para cada $G \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, se tiene que G es filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M si y sólo si $G = H \times K$, donde H es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y K es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[H]$. Más aún,*

$$M[G] = M[H][K].$$

Demostración. $\Rightarrow$: Supongamos que G es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M. Consideremos los conjuntos

$$H = \big\{p \in \mathbb{P} : \exists q \in \mathbb{Q} \left[(p, q) \in G\right]\big\} \quad \text{y} \quad K = \big\{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{P} \left[(p, q) \in G\right]\big\}.$$

Es claro que $G \subseteq H \times K$. Para ver la otra contención, sea $(p, q) \in H \times K$. Tenemos que $(p, 1_{\mathbb{Q}}) \in G$ y $(1_{\mathbb{P}}, q) \in G$. Como G es filtro, entonces existe $(p', q') \in G$ tal que $(p', q') \leq (1_{\mathbb{P}}, q), (p, 1_{\mathbb{Q}})$ y por lo tanto, $(p', q') \leq (p, q)$. Luego, $(p, q) \in G$. De este modo, se tiene que $G = H \times K$.

Ahora probaremos que H es $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Efectivamente, consideremos un conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{P}$. Entonces $D \times \mathbb{Q} \in M$ y es denso en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, de modo que como G es filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M, podemos encontrar $(p, q) \in G \cap (D \times \mathbb{Q})$. Por lo tanto, $p \in H \cap D$. Esto prueba nuestra afirmación.

Para demostrar que K es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[H]$, fijemos $D \in M[H]$ denso en $\mathbb{Q}$, claramente tenemos que $D = i_H(\mathring{D})$, para algún $\mathbb{P}$-nombre $\mathring{D} \in M^{\mathbb{P}}$. Ya que

$$M[H] \models i_H(\mathring{D}) \text{ es denso en } \mathbb{Q}$$

en virtud del Lema de la Verdad 1.5.3, podemos fijar una condición $p_0 \in H$ tal que

$$p_0 \Vdash \mathring{D} \text{ es denso en } \check{\mathbb{Q}}.$$

Consideremos el conjunto

$$\tilde{D} := \{(p, q) : p \Vdash \check{q} \in \mathring{D} \wedge p \leq p_0\}.$$

Afirmamos que $\tilde{D}$ es denso debajo de $(p_0, 1_{\mathbb{Q}})$ y $\tilde{D} \in M$. Efectivamente, el Lema de la Definibilidad 1.5.4 nos dice que la relación de forzar es definible en M, y ya que la fórmula que define a $\tilde{D}$ toma parámetros en M, se tiene que $\tilde{D} \in M$. Ahora fijemos $(r, s) \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ tal que $(r, s) \leq (p_0, 1_{\mathbb{Q}})$. Como $r \leq p_0$, entonces

$$r \Vdash \mathring{D} \textit{ es denso en } \check{\mathbb{Q}}.$$

Luego

$$r \Vdash \exists \check{s}_1 \in \check{\mathbb{Q}} \left[\check{s}_1 \leq \check{s} \wedge \check{s}_1 \in \mathring{D} \right].$$

En virtud del cuarto inciso del Lema 1.5.11, tomemos $r_1 \leq r$ y $s_1 \in \mathbb{Q}$, de modo que

$$r_1 \Vdash \check{s}_1 \leq \check{s} \wedge \check{s}_1 \in \mathring{D}.$$

Es claro que $(r_1, s_1) \in \tilde{D}$ y $(r_1, s_1) \leq (r, s)$. Esto demuestra que $\tilde{D}$ es denso en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ debajo de $(p_0, 1_{\mathbb{Q}})$. Ya que G es $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M y $(p_0, 1_{\mathbb{Q}}) \in G$, entonces existe $(p, q) \in G \cap \tilde{D}$; luego $p \in H$ y $p \Vdash \check{q} \in \mathring{D}$. Por lo tanto

$$M[H] \models q \in D \cap K.$$

$\Leftarrow$: Es evidente que $G = H \times K$ es filtro. Consideremos un conjunto $D \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ denso con $D \in M$. Mostraremos que $D \cap G \neq \emptyset$. Sea

$$\hat{D} := \left\{ q \in \mathbb{Q} : \exists p \in H \left[(p, q) \in D \right] \right\}.$$

Entonces $\hat{D} \in M[H]$ y $\hat{D} \subseteq \mathbb{Q}$. Afirmamos que $\hat{D}$ es denso en $\mathbb{Q}$. En efecto, fijamos $s \in \mathbb{Q}$ una condición cualquiera. Definimos el conjunto

$$D_s := \left\{ p \in \mathbb{P} : \exists q \in \mathbb{P} \left[q \leq s \ \wedge \ (p, q) \in D \right] \right\}.$$

Es evidente que D_s es denso en $\mathbb{P}$. Entonces existe $p \in D_s \cap H$; luego, existe $q \leq s$ tal que $(p, q) \in D$, i.e., $q \in \hat{D}$ y $q \leq s$. Esto prueba nuestra afirmación. Como K es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[H]$, entonces existe $q \in K \cap \hat{D}$; luego, podemos encontrar una condición $p \in H$ para la cual $(p, q) \in D$, como se deseaba probar.

La igualdad $M[G] = M[H][K]$ se sigue de que $G \in M[H][K]$ y $H \times K \in M[G]$. $\square$

1.8. Propiedades adicionales

En esta breve sección, enunciamos y probamos algunos lemas que serán requeridos en las demostraciones importantes de la tesis, y las ponemos hasta este momento porque involucran todos los conceptos definidos hasta ahora. El primer lema que demostraremos es una propiedad muy conocida del Forcing de Cohen. La utilidad de este lema es que, de manera intuitiva, nos permite estudiar "modelos intermedios" entre un modelo de *ZFC* y la extensión genérica obtenida de este a partir de forzar con el orden de Cohen.

Lema 1.8.1. *Sean I, J conjuntos tales que $J \subseteq I$. Entonces la función*

$$e : Fn(I, 2) \to Fn(I \setminus J, 2) \times Fn(J, 2)$$

dada por

$$e(p) := \left(p\restriction_{dom(p) \setminus J}, p\restriction_{dom(p) \cap J} \right),$$

para cada $p \in Fn(I, 2)$ es un isomorfismo.

Demostración. Veamos primero que la función así definida es biyectiva. Para la inyectividad, sean $p, q \in Fn(I, 2)$ un par de condiciones distintas. Si $dom(p) = dom(q)$, entonces existe un $i \in dom(p)$ tal que $p(i) \neq q(i)$. Existen dos posibilidades: $i \in J$ ó $i \in I \setminus J$. En cualquiera de los dos casos, lo anterior implica que

$$\big(p\restriction_{dom(p)\setminus J}, p\restriction_{dom(p)\cap J}\big) \neq \big(q\restriction_{dom(q)\setminus J}, q\restriction_{dom(q)\cap J}\big).$$

Si ocurre que $dom(p) \neq dom(q)$, sin pérdida de generalidad podemos escoger un $i \in dom(p) \setminus dom(q)$. Luego, se tiene que $dom(p) \cap J \neq dom(q) \cap J$, en caso de que $i \in J$, o bien, sucede que $dom(p) \setminus J \neq dom(q) \setminus J$, si $i \in I \setminus J$.

Para asegurarnos de que la función es sobreyectiva, sólo hace falta observar que si $(p, q) \in Fn(I \setminus J, 2) \times Fn(J, 2)$, entonces $e(p \cup q) = (p, q)$.

Finalmente, para ver que se preserva el orden en ambas direcciones de la correspondencia, sean $p, q \in Fn(I, 2)$ dos condiciones, con $p \leq q$. En particular, se tiene que $dom(q) \subseteq dom(p)$ y para todo $i \in dom(q)$, $q(i) = p(i)$. Luego, para todo $i \in dom(q) \cap J$, se cumple que $i \in dom(p) \cap J$ y $q(i) = p(i)$, y para todo $i \in dom(q) \setminus J$, tenemos que $i \in dom(p) \setminus J$ y $q(i) = p(i)$. Así, en $Fn(I \setminus J, 2) \times Fn(J, 2)$

$$\big(q\restriction_{dom(q)\setminus J}, q\restriction_{dom(q)\cap J}\big) \leq \big(p\restriction_{dom(p)\setminus J}, p\restriction_{dom(p)\cap J}\big).$$

Ahora, si $(p, p'), (q, q') \in Fn(I \setminus J, 2) \times Fn(J, 2)$ y son tales que $(p, p') \leq (q, q')$, entonces $p \leq q$ en $Fn(I \setminus J, 2)$, y $p' \leq q'$ en $Fn(J, 2)$. Por lo tanto, $q \subseteq p$ y $q' \subseteq p'$. Así, $q \cup q' \subseteq p \cup p'$. Como $p \cup p'$ y $q \cup q'$ son condiciones en $Fn(I, 2)$, entonces en $Fn(I, 2)$, se tiene que $e^{-1}(p, p') = p \cup p' \leq q \cup q' = e^{-1}(q, q')$. $\square$

En lo posterior, cuando citemos este resultado (ver demostración del Teorema 3.2.2) nos referiremos a dicho encaje como *la partición canónica de $Fn(I, 2)$ determinada por $J \subseteq I$* donde I será un conjunto previamente especificado.

Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial no atómico y $p \in \mathbb{P}$, entonces cualquier anticadena maximal debajo de p debe de ser infinita. Para ver esto, hagamos la siguiente recursión: Fijamos $A_0 := \{p\}$. Ahora, suponiendo que para un $n < \omega$ y $0 \leq j \leq n$, se han definido conjuntos A_j tales que

- Cada $q \in A_j$ extiende a p.
- Si $s \in 2^j$, entonces $q_{s\frown 0}$ y $q_{s\frown 1}$ son incompatibles y extienden a q_s.

Definimos $A_{n+1} := \{q_{s\frown i} : s \in 2^n \wedge i \in 2\}$, donde para cada sucesión finita $s \in 2^n$, se tiene que $q_{s\frown 0} \perp q_{s\frown 1}$, y ambas condiciones extienden a q_s. Considere $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$, y observe que el conjunto $C := \{q_s \in A : s = (1, 1, \ldots, 1, 0)\} \cup \{q_{(0)}\}$ es anticadena infinita debajo de p.

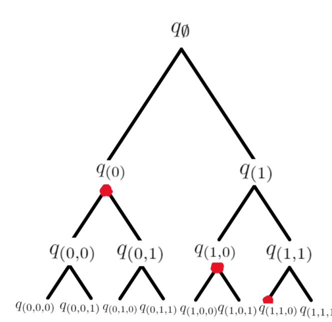


Figura 1.1: $q_\emptyset := p$.

El siguiente lema nos dice que todos los órdenes parciales no atómicos y numerables producen las mismas extensiones genéricas, pues esencialmente estaremos forzando con $\omega^{<\omega}$, el conjunto de las sucesiones finitas de naturales, ordenado de la siguiente manera: Para cada $s, t \in \omega^{<\omega}$, $s \leq t$ si t es un segmento inicial de s.

Lema 1.8.2. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial numerable y no atómico. Entonces existe un encaje denso desde $\omega^{<\omega}$ en $\mathbb{P}$.*

Demostración. Como antes, suponemos que nuestro orden parcial tiene un elemento máximo $1_{\mathbb{P}}$. Ya que $\mathbb{P}$ es numerable, lo escribimos como $\{p_n : n < \omega\}$. Para ahorrar notación, supondremos que $p_0 = 1_{\mathbb{P}}$. Haremos una recursión sobre la longitud de las sucesiones finitas en ω, similar a la de arriba: Fijamos $\mathcal{A}_0$ una anticadena maximal en $\mathbb{P}$. Luego, supongamos que $n < \omega$ está fijo y para cada $0 \leq j \leq n$ ya hemos fijado una familia $\mathcal{A}_j = \{p_s : s \in \omega^j\}$, y para cada $j < n$ y cada $s \in \omega^j$, una familia $\mathcal{A}_s$, de manera que se satisfagan las siguientes cláusulas:

- $\mathcal{A}_s := \{p_{s^\frown k} : k < \omega\}$ es una anticadena maximal debajo de p_s.
- Si $j < n$, entonces $\mathcal{A}_{j+1} = \bigcup_{s\in\omega^j} \mathcal{A}_s$ y es anticadena maximal en $\mathbb{P}$.
- Si $j < n$, entonces existe un $p \in \mathcal{A}_{j+1}$ tal que $p \leq p_j$.
- Si $t \subseteq s$ y $s, t \in \omega^{<n+1}$, entonces $p_s \leq p_t$.

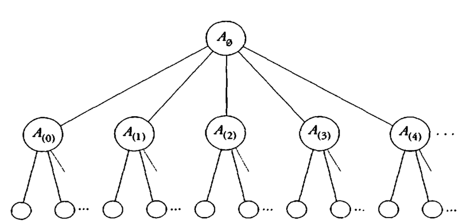
Procedemos a construir el conjunto $\mathcal{A}_{n+1}$ de modo que se satisfagan las condiciones requeridas arriba. Primero, como $\mathcal{A}_n$ es anticadena maximal por hipótesis, entonces existe un $t \in \omega^n$ tal que $p_t \not\perp p_n$. Sea $q \in \mathbb{P}$ una condición tal que $q \leq p_t, p_n$. Ahora tomaremos una anticadena maximal debajo de p_s, para cada $s \in \omega^n$, como es requerido por el primer inciso. Si $s \in \omega^n \setminus \{t\}$, fijamos $\mathcal{A}_s = \{p_{s^\frown k} : k < \omega\}$ una anticadena maximal debajo de p_s, lo cual podemos hacer porque $\mathbb{P}$ es no atómico. Si $s = t$, tomamos de manera análoga una anticadena maximal $\mathcal{A}_s = \{p_{s^\frown k} : k < \omega\}$ debajo de la condición q que es el testigo de que $p_t \not\perp p_n$. Finalmente, definimos

$$\mathcal{A}_{n+1} := \bigcup_{s\in\omega^n} \mathcal{A}_s.$$

Es claro que se satisfacen el primer, tercer y cuarto inciso de los requisitos de la hipótesis inductiva. Falta demostrar que $\mathcal{A}_{n+1}$ es anticadena maximal. Para ver que es anticadena, sean $s, t \in \omega^{n+1}$ distintos. Si $p_s \not\perp p_t$, y $j < n+1$, entonces $p_{s\restriction_j} \not\perp p_{t\restriction_j}$, esto implica que $p_{s\restriction_j} = p_{t\restriction_j}$ porque cada $\mathcal{A}_j$ es anticadena por hipótesis. Entonces p_s, $p_t \in \mathcal{A}_{s\restriction_n}$. Como $\mathcal{A}_{s\restriction_n}$ es anticadena y $s \neq t$, entonces $p_s \perp p_t$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, si $s \neq t$, entonces $p_s \perp p_t$. Para ver la maximalidad, sea $q_0 \in \mathbb{P}$ una condición fija. Como $\mathcal{A}_n$ es anticadena maximal, entonces existe un $s \in \omega^n$ tal que $p_s \not\perp q_0$. Sea $p \in \mathbb{P}$ con $p \leq p_s, q_0$. Ya que $\mathcal{A}_s$ es anticadena maximal debajo de p_s, entonces existe un $k < \omega$ de modo que $p_{s^\frown k} \not\perp p$. Esto implica que $p_{s^\frown k} \not\perp q_0$. Claramente, $p_{s^\frown k} \in \mathcal{A}_{n+1}$. Finalmente, definimos

$$\mathbb{T} := \bigcup_{n<\omega} \mathcal{A}_n.$$



Consideremos la función $\psi : \omega^{<\omega} \to \mathbb{T}$ definida como $\psi(s) := p_s$, para cada $s \in \omega^{<\omega}$. Esta función es un encaje denso. $\square$

Se sigue del Lema 1.8.2 que si $\mathbb{P}$ es un orden parcial numerable y no atómico, entonces $Fn(\omega, 2)$, $Fn(\omega, \omega)$ y $\mathbb{P}$ producen las mismas extensiones genéricas.

Capítulo 2

El forcing de Cohen y la hipótesis del continuo

En este capítulo veremos la primera aplicación histórica de la técnica de forcing con el orden parcial $Fn(I, J)$: *Consistentemente hay un subconjunto de reales cuyo cardinal es mayor a $\aleph_0$ y menor que $2^{\aleph_0}$*. Esta demostración apareció por primera vez (con diferente lenguaje) en [3, 4]. Para llegar a la demostración de este hecho, además verificaremos algunas propiedades del forcing de Cohen que serán utilizadas en capítulos posteriores.

Los teoremas presentados en este capítulo se pueden encontrar en diversos textos dedicados al Forcing, pero basamos las proposiciones expuestas y sus demostraciones en [24]. Para que el texto esté lo más "autocontenido" posible, decidimos incluir en este capítulo los teoremas básicos que vamos a utilizar en capítulos posteriores. Las personas interesadas en conocer más sobre la historia de la hipótesis del continuo, puede consultar [5, 45]

2.1. Propiedades básicas del forcing de Cohen

Comenzamos esta sección definiendo lo que es un Δ-sistema y enunciando el conocido Lema del Δ-sistema sin demostración, la cual se puede consultar en [24] o en [10].

Definición 2.1.1. Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es (o forma) un Δ-*sistema* si existe un conjunto fijo r, llamado *raíz* del Δ-sistema, tal que para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ distintos, $a \cap b = r$.

El siguiente resultado es fundamental en el estudio del forcing de Cohen.

Teorema 2.1.2 (Lema del Δ-sistema)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto tal que*

1. *Para todo $x \in \mathcal{A}$, x es finito.*
2. $|\mathcal{A}| = \omega_1$.

Entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \omega_1$ y $\mathcal{B}$ forma un Δ-sistema.

Ahora definimos una propiedad llamada la *condición de la cadena contable* que, de hecho, caracterizará al forcing de Cohen cuando el contradominio de las funciones es un conjunto numerable.

Definición 2.1.3. Decimos que un orden parcial $\mathbb{P}$ satisface la *condición de la cadena contable* (*ccc*) si toda anticadena maximal en $\mathbb{P}$ es numerable. Si κ es un cardinal infinito no numerable, entonces decimos que el orden $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa-cc$ si toda anticadena maximal tiene tamaño menor que κ.

Probaremos que el forcing de Cohen satisface la *ccc* siempre que el contradiminio de las funciones finitas sea un conjunto numerable.

Lema 2.1.4. *Sean I, J conjuntos con J numerable y de modo que $|Fn(I,J)| = \omega_1$. Entonces $Fn(I,J)$ satisface la ccc.*

Demostración. Consideremos $\{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq Fn(I,J)$, y para cada $\alpha < \omega_1$ fijamos $a_\alpha = dom(p_\alpha)$. Por el Lema del Δ-sistema, existe $X \subseteq \omega_1$ no numerable y de modo que el conjunto $\{a_\alpha : \alpha \in X\}$ forma un Δ-sistema con una raíz r. Como J es numerable, entonces también el conjunto J^r es numerable. Consideremos la función $\psi : X \to J^r$ definida por $\psi(\alpha) = p_\alpha{\restriction_r}$. Ya que X es no numerable, podemos encontrar un $\alpha < \omega_1$ de modo que

$$|\psi^{-1}(p_\alpha{\restriction_r})| > \omega.$$

Pongamos $Y = \psi^{-1}(p_\alpha{\restriction_r})$ y notemos que para todos los $\beta, \gamma \in Y$, se tiene que $p_\beta{\restriction_r} = p_\alpha{\restriction_r} = p_\gamma{\restriction_r}$. Las funciones p_α, con $\alpha \in Y$, son compatibles. En efecto, si $\alpha, \beta \in Y$, definimos la función $q : a_\alpha \cup a_\beta \to J$ como

$$q(x) = \begin{cases} p_\alpha(x) & \text{si } x \in a_\alpha, \\ p_\beta(x) & \text{si } x \in a_\beta. \end{cases}$$

Es claro que $q \in Fn(I,J)$ y que $q \leq p_\alpha, p_\beta$. Por lo tanto, concluímos que no puede existir una familia $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de tal cardinalidad que consista de condiciones incompatibles. $\square$

El siguiente lema es una propiedad muy importante que cumplen los filtros genéricos en $Fn(I,J)$.

Lema 2.1.5. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $I, J \in M$ con $|I| \geq \omega$ y $J \neq \emptyset$. Para todo filtro $Fn(I,J)$-genérico G sobre M, se tiene que $\bigcup G$ es una función sobreyectiva de I a J.*

Demostración. Es claro que $\bigcup G$ es función, esto se sigue del hecho de que las funciones del filtro son compatibles. Definimos $f := \bigcup G$. A continuación veamos que el dominio de f es I. En efecto, consideremos el conjunto $D_i := \{p \in Fn(I,J) : i \in dom(p)\}$, para cada $i \in I$. Ya que $J \neq \emptyset$, entonces para cada $i \in I$, D_i es denso. Más aún, por estar definido en términos absolutos, $D_i \in M$. Por hipótesis tenemos que G es filtro $Fn(I,J)$-genérico, entonces para cada $i \in I$, $G \cap D_i \neq \emptyset$, por lo que $dom(f) = I$. Ahora probaremos que el rango de f es igual a J, para cada $j \in J$, consideremos el conjunto $E_j := \{p \in Fn(I,J) : j \in ran(p)\}$. Como I es infinito, entonces E_j es denso en $Fn(I,J)$, para cada $j \in J$. De manera análoga, se tiene que $E_j \in M$. Entonces para todo $j \in J$, $E_j \cap G \neq \emptyset$, por lo que $ran(f) = J$. $\square$

Una propiedad muy importante y que se utiliza constantemente en los resultados de esta tesis, es que el forcing de Cohen con contradominio numerable hace que las cardinalidades sean preservadas entre un modelo y la extensión genérica inducida.

Definición 2.1.6. Sean M un modelo transitivo numerable de *ZFC*, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

1. Decimos que $\mathbb{P}$ *preserva cofinalidades* si para cualquier ordinal límite γ tal que $\omega < \gamma < O(M)$ se tiene que
$$cf(\gamma)^M = cf(\gamma)^{M[G]}.$$
2. Decimos que $\mathbb{P}$ *preserva cardinales* si para todo $\beta < O(M)$
$$M \models \beta \textit{ es un cardinal} \iff M[G] \models \beta \textit{ es un cardinal} .$$

En este punto cabe mencionar que un ordinal en M que sea un cardinal puede dejar de ser cardinal en la extensión genérica. Sin embargo, es una observación elemental que se cumple $cf(\alpha)^{M[G]} \leq cf(\alpha)^M$, para todo ordinal $\alpha \in M$. Veremos que en el forcing de Cohen, se preservan los cardinales.

Lema 2.1.7. *Es suficiente que $\mathbb{P}$ preserve cofinalidades para que preserve cardinales.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades, y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Sea $\alpha \in O(M)$ tal que $\omega \leq \alpha$. Veamos que
$$M[G] \models \alpha \textit{ es un cardinal} \quad \Rightarrow \quad M \models \alpha \textit{ es un cardinal.}$$
Si $M \models \alpha$ *no es cardinal*, entonces existen $\beta < \alpha$ y $f \in M$ de modo que
$$M \models f : \alpha \to \beta \textit{ es biyección.}$$
Por el Ejemplo 1.1.6, sabemos que la propiedad de ser biyectiva es absoluta entre modelos transitivos de *ZFC*, por lo que se tiene que
$$M[G] \models f : \alpha \to \beta \textit{ es biyección.}$$
Para continuar con la demostración, supongamos $M \models \alpha$ *es un cardinal.* Si pasa que $M \models \alpha$ *es regular*, entonces
$$\alpha = cf(\alpha)^M = cf(\alpha)^{M[G]}$$
así que α es un cardinal regular de $M[G]$. Si $M \models \alpha$ *no es regular*, entonces
$$\begin{aligned} \alpha &= \bigcup \{\beta < \alpha : M \models \beta \textit{ es cardinal regular}\} \\ &= \bigcup \{\beta < \alpha : M[G] \models \beta \textit{ es cardinal regular}\}. \end{aligned}$$

Como la unión de cardinales es nuevamente cardinal y la unión es absoluta para los modelos transitivos de ZFC, tenemos entonces que
$$M[G] \models \alpha = \sup\{\beta < \alpha : cf(\beta) = \beta\}$$
por lo que $M[G] \models \alpha$ *es un cardinal.* Así, todo cardinal infinito de M también es cardinal de $M[G]$. $\square$

Más adelante, veremos que los órdenes parciales que cumplen la $\kappa - cc$ preservan cofinalidades mayores o iguales a κ.

Existen ejemplos de órdenes parciales que preservan cardinales sin preservar cofinalidades, para esto el lector puede consultar el artículo [39].

El siguiente teorema es técnico, pero será muy importante para los resultados del capítulo 3.

Teorema 2.1.8. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\kappa \in M$ tal que $M \models [\kappa$ es regular$]$, $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa - cc$, $A, B \in M$ y $f : A \to B$ es una función en $M[G]$, entonces existe $g \in M$ tal que $M \models g : A \to [B]^{<\kappa}$ y $f(a) \in g(a)$, para cada $a \in A$.*

Demostración. Por el lema de la verdad 1.5.3, existe una condición $p \in G$ de modo que $p \Vdash \mathring{f} : \check{A} \to \check{B}$. En particular, tenemos que

$$\forall a \in A\, [p \Vdash \mathring{f}(a) \in \check{B}].$$

Para cada $a \in A$, sea $E_a = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p \wedge \exists b_q \in B\, [q \Vdash \mathring{f}(a) = \check{b_q}]\}$ y sea C_a una anticadena maximal con la contención entre las anticadenas contenidas en E_a. Para cada $a \in A$, sea $g(a) = \{b_q : q \in C_a\}$. Por el Lema de Definibilidad 1.5.4 y el axioma de elección, tenemos que $g : A \to [B]^{<\kappa}$ está en M. Sólo resta probar que

$$\forall a \in A \left[f(a) \in g(a)\right].$$

Para esto, fijemos $a \in A$. Ya que $M[G] \models f(a) = b$, entonces

$$\exists q \in G \left[q \leq p \,\wedge\, q \Vdash \mathring{f}(a) = \check{b}\right].$$

Como C_a es anticadenta maximal, entonces existe una condición $r \in C_a$ tal que r y q son compatibles. Sea $s \in \mathbb{P}$ que satisface que $s \leq r \wedge s \leq q$. Entonces

$$s \Vdash \mathring{f}(a) = \check{b_r} \quad \text{y} \quad s \Vdash \mathring{f}(a) = \check{b}.$$

Esto implica que $b = b_r \in g(a)$, que era lo que queríamos demostrar. $\square$

Corolario 2.1.9. *Sean $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, G un $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y $\kappa \in M$ tal que $M \models [\kappa$ es regular$]$. Si $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa - cc$, entonces*

$$\forall \alpha \in M \left[cf(\alpha)^M \geq \kappa \to cf(\alpha)^{M[G]} = cf(\alpha)^M\right].$$

Demostración. Siempre es cierto que $cf(\alpha)^{M[G]} \leq cf(\alpha)^M$, lo cual se sigue del hecho de que el conjunto $\left\{\beta < \alpha : \exists f \in M\left[M \models f : \beta \to \alpha \text{ es cofinal}\right]\right\}$ está contenido en $\left\{\beta < \alpha : \exists f \in M[G]\left[M[G] \models f : \beta \to \alpha \text{ es cofinal}\right]\right\}$. Para comprobar la otra desigualdad, supongamos que no se cumple, i.e. $cf(\alpha)^{M[G]} < cf(\alpha)^M$. Así, existen un ordinal β con $\beta < cf(\alpha)^M$ y $f \in M[G]$ de modo que $M[G] \models f : \beta \to \alpha$ *es cofinal*. Por el Teorema 2.1.8, existe una $g \in M$ tal que

- $M \models g : \beta \to [\alpha]^{<\kappa}$ y
- para cada $\gamma \in \beta$, $f(\gamma) \in g(\gamma)$.

Consideremos la unión

$$S = \bigcup \{g(\gamma) : \gamma < \beta\}.$$

Del segundo inciso se tiene que $M[G] \models S$ *es cofinal en* α, y ya que la propiedad de que un subcojunto sea cofinal es absoluta entre modelos de *ZFC* y $g \in M$, se tiene que $S \in M$ y $M \models S$ *es cofinal en* α. Por lo tanto, $M \models cf(\alpha)^M \leq |S|$. Por otro lado, sabemos que $\beta < cf(\alpha)^M$ y

$$M \models \forall \gamma < \beta \left[|g(\gamma)| < \kappa \leq cf(\alpha)^M \right].$$

Así, ya que $M \models cf(\alpha)^M$ *es regular*, se tiene que $M \models S$ *no es cofinal en* $cf(\alpha)^M$, por lo cual $M \models |S| < cf(\alpha)^M$, pero esto nos lleva a una contradicción. □

De todo lo anterior, se tiene que el forcing de Cohen con rango numerable preserva cardinales

Teorema 2.1.10. *Si $\mathbb{P} \in M$ tiene la ccc, entonces $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades y, por lo tanto, cardinales.*

Demostración. Es un corolario del Lema 2.1.7 y Corolario 2.1.9. □

El lema que se demuestra a continuación es necesario para probar el Teorema de P. Cohen.

Lema 2.1.11. *Si $\kappa \in M$ y G es $Fn(\kappa \times \omega, 2)$-genérico sobre M, entonces*

$$M[G] \models |\kappa| \leq 2^{\aleph_0}.$$

Demostración. Consideremos la función $f = \bigcup G : \kappa \times \omega \to 2$, que es sobreyectiva de $\kappa \times \omega$ en 2, en virtud del Lema 2.1.5. Para cada $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$, definimos $f_\alpha : \omega \to 2$ como $f_\alpha(n) = f(\alpha, n)$. Por absolutez, la sucesión $\{f_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ está en $M[G]$. Más aún, si $\alpha \neq \beta$ entonces $f_\alpha \neq f_\beta$. Para ver esto, fijemos α y β distintos, y sea

$$D_{\alpha,\beta} := \Big\{ p : \exists n \in \omega \Big[\big((\alpha, n) \in dom(p)\big) \wedge \big((\beta, n) \in dom(p)\big) \wedge \big(p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\big) \Big] \Big\}.$$

Es evidente que $D_{\alpha,\beta}$ está en M y es denso, por lo que $G \cap D_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$, lo que implica que $f_\alpha \neq f_\beta$. Por lo tanto,

$$M[G] \models |\kappa| = |\{f_\alpha : \alpha \in \kappa\}| \leq 2^{\aleph_0}.$$

□

El siguiente teorema es tomado del libro de P. Cohen [5].

Teorema 2.1.12 (Paul Cohen, 1964)**.** *Existe un modelo M de ZFC tal que*

$$M \models \neg CH.$$

Demostración. Sea $\mathbb{P} = Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$. Entonces $\mathbb{P}$ tiene la *ccc* en M y preserva cardinales en virtud del Teorema 2.1.10, por lo que $\aleph_2^M = {\aleph_2}^{M[G]}$. Se sigue del Lema 2.1.11 que $M[G] \models \aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$, para cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M. Por lo tanto, $M[G] \models \neg CH$, para cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M. □

Probaremos más adelante que el cardinal del continuo puede ser tan grande como uno desee. Para este propósito, necesitaremos la siguiente noción:

Definición 2.1.13. Sean M un modelo transitivo numerable $\mathbb{P}$ un orden parcial y $A \in M$. Un nombre $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ es un *nombre ameno* para un subconjunto de A si

$$\sigma = \{(\check{a}, p) : p \in I_a \wedge a \in A\}$$

donde I_a es una anticadena en $\mathbb{P}$, para cada $a \in A$.

Nota 2.1.14. Si $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ es un nombre ameno para un subconjunto de A, entonces $i_G(\sigma) = \{a \in A : I_a \cap G \neq \emptyset\}$.

Lema 2.1.15. *Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico y $A \in M$. Si $B \in M[G]$ y $M[G] \models B \subseteq A$, entonces B tiene un nombre ameno i.e.,*

$$\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} \, [\sigma \textit{ es nombre ameno } \wedge i_G(\sigma) = B].$$

Demostración. Sea $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $i_G(\tau) = B$. Por el lema de la verdad, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau \subseteq \check{A}$. Para cada $a \in A$, fijamos el conjunto $E_a := \{q : q \leq p \wedge q \Vdash \check{a} \in \tau\}$, y tomemos una anticadena maximal $I_a \subseteq E_a$. Definimos

$$\sigma = \{(\check{a}, r) : r \in I_a \wedge a \in A\}.$$

Notemos que σ es un nombre ameno para un subconjunto de A. Afirmamos que $i_G(\sigma) = i_G(\tau)$. En efecto, si $a \in i_G(\sigma)$ entonces $I_a \cap G \neq \emptyset$, así que existe $q \leq p$ tal que $q \in G$ y $q \Vdash \check{a} \in \tau$, por lo que $M[G] \models a \in i_G(\tau)$.

Para la otra contención consideremos $a \in i_G(\tau)$. Entonces existe $q \in G$ tal que $q \leq p$ y $q \Vdash \check{a} \in \tau$. Tomemos el conjunto

$$S := \{r \in \mathbb{P} : r \leq p \wedge \exists t \in I_a \, [r \leq t]\}.$$

Afirmamos que S es denso debajo de q. Para demostrarlo, fijemos una condición $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq q$. Como $r \in E_a$ y I_a es anticadena maximal, entonces existen $r_1 \in I_a$ y $r_2 \in \mathbb{P}$ tales que $r_2 \leq r_1$ y $r_2 \leq r$, y entonces $r_2 \in S$ y $r_2 \leq r$. Esto prueba la afirmación. Por lo tanto, es posible tomar una condición $s \in S \cap G$. Así, existe $t \in I_a$ para el cual $s \leq t$. Luego, $t \in I_a \cap G$ y, por consiguiente, $a \in i_G(\sigma)$ (por la Nota 2.1.14). Esto termina la demostración de la igualdad. $\square$

Teorema 2.1.16. *Sean $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico y $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ cardinales en M. Supongamos que $M \models [\nu = \kappa^{\lambda\mu} \wedge |\mathbb{P}| = \kappa \wedge \mathbb{P}$ es $\lambda^+ - cc]$. Entonces*

$$M[G] \models 2^\mu \leq \nu.$$

Demostración. En M, el número de anticadenas de $\mathbb{P}$ es κ^λ, dado que $\mathbb{P}$ es $\lambda^+ - cc$. Como el conjunto $dom(\check{\mu}) = \{\check{\xi} : \xi < \mu\}$ tiene cardinalidad μ, entonces a lo más existen $(\kappa^\lambda)^\mu = \nu$ nombres amenos para subconjuntos de μ, por lo cual, aplicando el axioma de elección, podemos numerar en M a los nombres amenos para subconjuntos de μ con $\{\tau_\xi : \xi < \nu\}$. Definamos la función $f : \nu \to 2^\mu$ por $f(\xi) = i_G(\tau_\xi)$, para cada $\xi \in \nu$. Dicha función está bien definida en M, por lo que también $f \in M[G]$ y, además, en virtud del Lema 2.1.15, se tiene que $M[G] \models f$ *es sobreyectiva.* Así, usando nuevamente el axioma de elección, tenemos que $M[G] \models 2^\mu \leq \nu$. $\square$

Teorema 2.1.17. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y κ un cardinal infinito de M tal que $M \models \kappa^{\aleph_0} = \kappa$. Si G es un filtro $Fn(\kappa \times \omega, 2)$-genérico sobre M, entonces $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$.*

Demostración. Aplicando el Teorema 2.1.16 con $\lambda = \omega = \mu$, podemos concluir que $M[G] \models 2^{\aleph_0} \leq \kappa$. Por el lema 2.1.11 tenemos que $M[G] \models \kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, $M[G] \models \kappa = 2^{\aleph_0}$. □

Hacemos la observación de que podemos utilizar el orden $Fn(\kappa, 2)$ en lugar de $Fn(\kappa \times \omega, 2)$ para obtener el mismo resultado que en el lema anterior. Para esto sólo necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1.18. *Si κ es un cardinal infinito, entonces $Fn(\kappa \times \omega, 2)$ es isomorfo a $Fn(\kappa, 2)$.*

Demostración. Fijemos una partición de κ en ω partes, $\{A_n : n < \omega\}$, de modo que $|A_n| = \kappa$, para cada $n < \omega$, y fijamos una biyección $f_n : \kappa \to A_n$. La función $f : \kappa \times \omega \to \kappa$ dada por

$$f(\alpha, n) = f_n(\alpha)$$

es una biyección. Es un ejercicio rutinario comprobar que la función

$$e : Fn(\kappa \times \omega, 2) \to Fn(\kappa, 2)$$

dada por $e(p) = q$ si y sólo si $dom(q) = f[dom(p)]$ y tal que si $a \in dom(q)$, entonces $q(a) = p(f^{-1}(a))$, para cada $p \in Fn(\kappa \times \omega, 2)$, es un isomorfismo de órdenes parciales. □

Corolario 2.1.19. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y $\kappa \in M$ tal que $M \models$ [κ es un cardinal infinito]. Si G es un filtro $Fn(\kappa, 2)$-genérico sobre M, entonces*

$$M[G] \models \kappa \leq 2^{\aleph_0}.$$

Demostración. Se sigue del Lema 2.1.18, el Teorema 1.6.10 y el Teorema 2.1.17. □

Finalizamos este capítulo con un teorema que será utilizado en cada uno de los capítulos siguientes de esta tesis. Lo enunciamos ahora porque se requiere de todos los conceptos introducidos hasta este punto.

Teorema 2.1.20. *Sean M un modelo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ tal que $M \models$ [$\mathbb{P}$ es numerable], G un filtro $\mathbb{P}$-genérico, $J \in M$ y $E' \in \mathcal{P}(J)^{M[G]}$ tal que $M[G] \models |E'| = \omega_1$. Entonces existe $E \subseteq E'$ de cardinalidad ω_1 en M.*

Demostración. Sea $\mathring{E}'$ un $\mathbb{P}$-nombre para E'. Para cada $e \in J$ tal que $M[G] \models e \in E'$, existe un $p \in G$ y e tiene un $\mathbb{P}$-nombre $\check{e}$ de modo que

$$p \Vdash \check{e} \in \mathring{E}'.$$

Como $\mathbb{P}$ es un forcing numerable, entonces podemos pensar que $\{p_n : n < \omega\} \subseteq G$ es exactamente el conjunto de las condiciones p en el filtro para los cuales existe algún $e \in E'$ tal que $p \Vdash \check{e} \in \mathring{E}'$. Para cada $n < \omega$ definimos los conjuntos

$$E_n := \{e \in J : p_n \Vdash \check{e} \in \mathring{E}'\}.$$

En virtud del Lema de Definibilidad que nos dice que la relación de forzar es definible en M, entonces los E_n son conjuntos definidos con parámetros en M, por lo que cada $E_n \in M$. Afirmamos que $M[G] \models E' = \bigcup_{n<\omega} E_n$. En efecto, si $M[G] \models e \in E'$, entonces existe una condición en el filtro que fuerza esto, y por cómo tomamos en forma de lista a los elementos de G, lo anterior quiere decir que existe un $n < \omega$ tal que $p_n \Vdash \check{e} \in \mathring{E}'$. Por lo tanto, se tiene que $M[G] \models e \in E_n$. Ahora, si $M[G] \models e \in \bigcup_{n<\omega} E_n$, entonces existe un $m < \omega$ tal que $M[G] \models e \in E_m$. Como $E_m \in M$ y la pertenencia entre conjuntos es una fórmula Δ_0, entonces $M \models e \in E_m$. Así, $p_m \Vdash \check{e} \in \mathring{E}'$. Por consiguiente, $M[G] \models e \in E'$. Finalmente, como $M[G] \models |E'| = \omega_1$, entonces $M[G] \models |\bigcup_{n<\omega} E_n| = \omega_1$, y ya que $\mathbb{P}$ es un forcing que preserva cofinalidades, podemos encontrar un $n_0 < \omega$ tal que

$$M[G] \models |E_{n_0}| = \omega_1.$$

El conjunto E_{n_0} es el que buscábamos. $\square$

Capítulo 3

Algunas consecuencias del forcing de Cohen sobre subconjuntos de números reales

En este capítulo, veremos dos formas en que se pueden obtener resultados con el Forcing. El primero de ellos es el Teorema de Vop̌enka, y muestra que si se "agregan" muchos *reales* a un modelo, el conjunto formado por esos reales es un *espacio de Luzin*. El corolario de esto (que veremos formalmente en el siguiente capítulo) es que en una extensión de Cohen existen espacios de Luzin y, por lo tanto, L-espacios. El segundo teorema que se demuestra en el capítulo afirma que si existe un espacio de Luzin en un modelo, y se usa el forcing de Cohen sobre dicho modelo, entonces el espacio de Luzin original sigue siendo espacio de Luzin en la extensión genérica. Los espacios de Luzin jugaron un papel importante en las investigaciones al inicio del siglo pasado sobre la Hipótesis del Continuo. Esta clase de espacios fue presentada primero por N. Luzin en [27]. Al inicio del sigo XX, René Baire se dedicó a estudiar una clasificación de funciones reales en una jerarquía, las funciones en un estrato son límites puntuales de funciones en estratos previos. La condición necesaria que cumple cada función dentro de la jerarquía es que dado cualquier conjunto perfecto P existiera un conjunto magro M relativo a P, de manera que la función fuera continua en la restricción a $P \setminus M$. La función característica de un espacio de Luzin cumple con esta propiedad, sin embargo, como muestra Luzin en [27], no es suficiente para que dicha función pertenezca a la jerarquía, y éste fue el propósito de su construcción. Las personas interesadas en conocer más sobre espacios de Luzin pueden consultar en [2, 27], y para un panorama histórico, pueden consultar [45].

Las ideas principales para desarrollar esta sección se obtuvieron del artículo de V. I. Malykhin [28].

3.1. Reales de Cohen

Esta sección contiene algunos resultados técnicos que se utilizarán para probar los teoremas principales del capítulo.

Definición 3.1.1. Para cada $p \in Fn(\omega, 2)$, definimos *el cono de* p:

$$[p] := \{f \in 2^\omega : p \subseteq f\}.$$

Recordamos que el *espacio de Cantor* 2^ω es un espacio completamente metrizable, separable, 0-dimensional, y el conjunto de conos $\{[p] : p \in Fn(\omega, 2)\}$ constituye una base de abiertos-cerrados para su topología. Desde este momento y para el resto del capítulo, fijamos una biyección $\hat{\imath} : \omega \to Fn(\omega, 2)$.

En la teoría descriptiva de conjuntos se trabaja con los *códigos de Borel*, que son funciones computables que describen numéricamente la complejidad y la posición de un *conjunto boreliano* dentro de la *jerarquía de Borel*. Aunque no usaremos dicho concepto, definimos a continuación una reminiscencia de lo que es un *código (de Borel)* para un abierto en 2^ω. El lector interesado puede consultar sobre este tema en [15] y [9].

Definición 3.1.2. Sea $V \subseteq 2^\omega$ un conjunto abierto. Una función $\gamma \in \omega^\omega$ es un *código* para V si

$$V = \bigcup_{n<\omega} [\hat{\imath}(\gamma(n))].$$

Los lemas que presentamos a continuación describen propiedades básicas de los conos que requeriremos posteriormente.

Lema 3.1.3. *Sean M un modelo de ZFC, $\hat{\imath}_M : \omega \to Fn(\omega, 2)$ biyección en M y $\gamma : \omega \to \omega$ una función en M. Entonces $M \models \bigcup \left\{ \left[\hat{\imath}_M\big(\gamma(n)\big)\right]^M : n < \omega \right\}$ es abierto en 2^ω.*

Lema 3.1.4. *Sean p, $q \in Fn(\omega, 2)$. Entonces p y q son compatibles si y sólo si $[p] \cap [q] \neq \emptyset$.*

Demostración. $\Rightarrow$: Como p y q son compatibles, entonces existe un $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$. Definimos

$$f(n) := \begin{cases} r(n) & \text{si } n \in dom(r) \\ 0 & \text{si } n \notin dom(r). \end{cases}$$

Así, si $n \in dom(p)$ entonces $p(n) = r(n) = f(n)$, y si $n \in dom(q)$ entonces $q(n) = r(n) = f(n)$; por lo tanto $f \in [p] \cap [q]$.

$\Leftarrow$: Si $f \in [p] \cap [q]$, y $m < \omega$ es tal que $m > |p|$ y $m > |q|$, entonces $f{\restriction}_m \leq p, q$. $\square$

Lema 3.1.5. *Sea $D = \{q_n : n \in \omega\} \subseteq Fn(\omega, 2)$. Entonces D es predenso en $Fn(\omega, 2)$ si y sólo si $V = \bigcup\{[q_n] : n \in \omega\}$ es denso en 2^ω.*

Demostración. $\Rightarrow$: Probaremos que cualquier abierto básico tiene intersección no vacía con V: Consideremos el abierto básico $[p]$, con $p \in Fn(\omega, 2)$. Ya que D es predenso, existe $n < \omega$ tal que p y q_n son compatibles. Así, $[p] \cap [q_i] \neq \emptyset$. Por lo tanto, V es denso en 2^ω.

$\Leftarrow$: Sea $p \in Fn(\omega, 2)$. Como V es denso en 2^ω, entonces existe $n \in \omega$ tal que $[p] \cap [q_n] \neq \emptyset$; entonces p y q_n son compatibles. $\square$

Presentamos una definición muy importante y fundamental en el estudio del Forcing, la de *real de Cohen*. Luego estudiamos la relación del forcing de Cohen con ciertos subconjuntos de los números reales que nos permitirán apreciar una demostración sobre una afirmación de consistencia respecto a algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Nota 3.1.6. Si M es un modelo de ZFC y $V \subseteq 2^\omega$ es un conjunto abierto, entonces $V^M = \bigcup_{n<\omega}[p_{\gamma(n)}]^M$, donde $\gamma \in (\omega^\omega)^M$ es un código para V en M.

Definición 3.1.7. Sean M y N modelos transtivos de ZFC tales que $M \subseteq N$. Decimos que una función $f \in (2^\omega)^N$ es un *real de Cohen sobre* M si para todo abierto no vacío $V \subseteq 2^\omega$ se satisface la siguiente implicación:

$$M \models V^M \textit{ es abierto denso en } 2^\omega \quad \Rightarrow \quad N \models f \in V^N.$$

Una observación importante sobre la definición anterior: Es posible (y, de hecho, ocurrirá en general) que, al ser N una extensión de M, V^M no sea abierto en N, pues N agrega conjuntos que M no tiene. En particular, la interpretación de V en N, V^N, tiene más elementos que V^M. Con la Nota 3.1.6, nos aseguramos no sólo de tomar la interpretación del objeto V del universo que corresponde al modelo en el que nos encontramos: Además, gracias a que el código de V en M es también código de V en N, se tiene que $N \models V^N$ *es abierto de* 2^ω. Cuando sea claro del contexto, escribiremos V en lugar de V^M.

El siguiente teorema es conocido y nos dice que cuando forzamos con $Fn(\omega, 2)$ sobre un modelo, algunos de los objetos que se "agregan" son reales de Cohen. Desde este punto, denotamos por $\mathbb{P}$ a $Fn(\omega, 2)$.

Teorema 3.1.8. *Sean M, N modelos transitivos de ZFC, con $\mathbb{P} \in M$. Entonces $f \in 2^\omega \cap N$ es un real de Cohen sobre M si y sólo si existe $G \in N$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $f = \bigcup G$ y $M[G] \subseteq N$.*

Demostración. $\Rightarrow$: Sea $f \in 2^\omega \cap N$ un real de Cohen sobre M. Definimos el conjunto $G := [f]^{<\omega} = \{p \in \mathbb{P} : p \subseteq f\}$. Notemos que $G \in N$, porque hemos usado parámetros en N y fórmulas absolutas para los modelos de ZFC. Veamos primero que G es filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M:

- Es claro que $1_\mathbb{P} \in G$.
- Si $p, q \in G$, no es complicado ver que $f \in [p] \cap [q]$, y por el Lema 3.1.4, concluimos que p y q son compatibles. Sea $r' \in \mathbb{P}$ tal que $r' \leq p, q$. Definimos $r = r' \cap f$. Se sigue que $r \leq p, q$ y $r \in G$. Por lo tanto, p y q son compatibles en G.
- Sean $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leq q$. Entonces $q \subseteq p = f\restriction_{dom(p)} \subseteq f$, lo cual implica que $q \in G$.
- Sea $D \in M$ un conjunto $\mathbb{P}$-denso. Es claro que un conjunto denso en $\mathbb{P}$ es predenso en $\mathbb{P}$. Por el Lema 3.1.5 sabemos que

  $$M \models V^M = \bigcup\{[q]^M : q \in D\} \textit{ es denso en } 2^\omega.$$

  Por hipótesis, f es un real de Cohen sobre M, así que $N \models f \in V^N$. Por consiguiente, existe un $q \in D$ tal que $f \in [q]$. Luego $q \in G$. Por lo tanto $G \cap D \neq \emptyset$.

Hemos, así, demostrado que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Ahora veamos que $f = \bigcup G$:

$\subseteq$: Si $n \in \omega$, entonces de la definición de G, se tiene que $\{(n, f(n))\} \in G$; así, $\{(n, f(n))\} \subseteq \bigcup G$ y, por lo tanto, $(n, f(n)) \in \bigcup G$.

$\supseteq$: Sea $(n, i) \in \bigcup G$, entonces existe un $q \in G$ tal que $(n, i) \in q$; así, como $q \subseteq f$, entonces $(n, i) \in f$.

Por último, tenemos que $M[G] \subseteq N$ porque $M[G]$ es minimal entre los modelos transitivos de *ZFC* que poseen la propiedad de tener a G como objeto.

$\Leftarrow$: Sean $f = \bigcup G \in N$, $V \subseteq 2^\omega$ tal que $M \models V^M$ *es abierto denso en* 2^ω y $\gamma \in \omega^\omega$ un código para V. Se tiene que $M \models \{p_{\gamma(n)} : n < \omega\}$ *es predenso en* $\mathbb{P}$, por el Lema 3.1.5. Y en virtud del Lema 1.5.10, existe un $m \in \omega$ con $p_{\gamma(m)} \in D \cap G$. Así, $N \models \exists n < \omega \left[f \in [p_{\gamma(n)}]\right]$. Por lo tanto, $N \models f \in V^N$, i.e., f es un real de Cohen sobre M. $\square$

Cabe mencionar que dada la equivalencia probada en el teorema anterior, uno puede usar cualquiera de las dos propiedades como definición de real de Cohen, según convenga el caso.

El siguiente lema es conocido y tiene versiones más generales. Una demostración de éste se encuentra en la tesis de licenciatura [38]. Sin embargo nosotros incluiremos una demostración sin recurrir a resultados fuera de lo visto hasta este punto. Tengamos en mente lo siguiente: Si I es un conjunto y $J \subseteq I$, entonces, en virtud del Lema 1.8.1, hay un isomorfismo de órdenes parciales

$$Fn(I, 2) \to Fn(J, 2) \times Fn(I \setminus J, 2),$$

y por el Lema 1.6.6, el Corolario 1.6.4 y el Teorema 1.7.1, si G es un filtro $Fn(I, 2)$-genérico, entonces podemos pensar a G como un filtro $H \times H'$ en el producto, y $M[G] = M[H \times H'] = M[H][H']$. En este contexto, diremos que $H = \pi_1[G]$ y $H' = \pi_2[G]$. Hacemos este pequeño abuso de notación para que procurar que la lectura no se vuelva demasiado pesada.

Lema 3.1.9. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, $A, B, I, Fn(I, 2) \in M$ de modo que $M \models |I| > \omega_1 \wedge |A| \leq \omega$, G un filtro $Fn(I, 2)$-genérico sobre M, y $f : A \to B$ con $f \in M[G]$. Entonces existe un $J \in [I]^\omega \cap M$ tal que $f \in M[H]$, donde H es la proyección de G sobre $Fn(J, 2)$.*

Demostración. Como $M[G] \models f : A \to B$, entonces existe una $p_0 \in G$ tal que

$$p_0 \Vdash \mathring{f} : \check{A} \to \check{B},$$

y como habíamos visto en la demostración del Teorema 2.1.8, esto implica que

$$\forall a \in A\, [p_0 \Vdash \mathring{f}(a) \in \check{B}].$$

Para cada $a \in A$, definimos el conjunto

$$E_a := \left\{q \leq p_0 : \exists q' \in \mathbb{P}\, \exists b_q \in B \left[q' \Vdash \mathring{f}(a) = \check{b_q} \wedge q \not\perp q'\right]\right\}.$$

Puesto que E_a ha sido definido usando parámetros en M, entonces $E_a \in M$. Así, como M es un modelo del axioma de elección, en virtud del Lema de Zorn podemos elegir una anticadena maximal $C_a \subseteq E_a$ para cada $a \in A$ y tal que $C_a \in M$. Luego definimos

$$J' := \{dom(q) : \exists a \in A \left[q \in C_a\right]\},$$

y $J := \bigcup J'$, la unión de los dominios de las funciones en $\bigcup_{a \in A} C_a$. Como pedimos que A fuera numerable en M, y ya que $\mathbb{P}$ es *ccc*, entonces cada C_a es numerable, por lo que

$$M \models \left|\bigcup_{a \in A} C_a\right| \leq \omega,$$

y así, $M \models |J| \leq \omega$. Ya que $\mathbb{Q} := Fn(J, 2) \times Fn(I \setminus J, 2)$ es un orden parcial numerable, entonces hay un isomorfismo $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$. Fijemos una notación para las proyecciones del filtro G, $H := \pi_1[G]$ y $H' := \pi_2[G]$. Observe que el conjunto

$$F = \{(a, b) : \exists q \in H \left[q \Vdash \mathring{f}(\check{a}) = \check{b}\right]\}$$

es igual a la función f. En efecto, es claro que $F \subseteq f$; por otro lado, si $(a, b) \in f$, entonces existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \mathring{f}(\check{a}) = \check{b}$. Dado que p y p_0 están en G, son compatibles, así que podemos suponer que $p \leq p_0$, y ya que C_a es anticadena maximal debajo de p_0, entonces existe algún $q \in C_a \cap G$, y por consiguiente es compatible con p, por lo que $q \Vdash \mathring{f}(\check{a}) = \check{b}$. Además, se tiene que $dom(q) \in J'$, lo que implica que $dom(q) \subseteq J$. Con esto demostramos que $q \in H$. De este modo, q atestigua que $(a, b) \in F$.

Finalmente, notemos que F está definido usando parámetros en $M[H]$; así podemos concluir que la función f es un objeto en $M[H]$. $\square$

3.2. Conjuntos de Luzin

En esta sección definimos formalmente a los *conjuntos o espacios de Luzin*, y probamos que el conjunto formado por una cantidad no numerable de reales de Cohen en 2^ω es de Luzin, y que si un subconjunto de 2^ω es de Luzin en un modelo M de *ZFC*, entonces dicho conjunto será de Luzin en cualquier extensión genérica obtenida a partir del forcing de Cohen. La existencia de un conjunto de Luzin fue una hipótesis utilizada por varios matemáticos en el siglo pasado para estudiar distintas implicaciones de la hipótesis del continuo. Entre ellos Sierpiński menciona la propiedad en su libro [44] dedicado al estudio de la Hipótesis del Continuo y sus equivalencias conocidas hasta ese momento. Los teoremas que probaremos pueden ser considerados parte del inmenso estudio que se ha hecho sobre la relación entre subconjuntos de los reales y la Hipótesis del Continuo.

La fuente principal para esta sección es el artículo de V.I. Malykhin [28], aunque el primer teorema que se demuestra se debe a P. Vop̌enka y K. Hrbáček, quienes lo enuncian en [48].

Definición 3.2.1. Un espacio topológico es *de Luzin* si no tiene puntos aislados y todo subconjunto denso en ninguna parte es numerable.

El siguiente teorema cuya demostración se toma de [28] pero que aparece en el artículo de Vopěnka y Hrbáček [48] y nos dice que si M' es el modelo obtenido de forzar con $Fn(\kappa \times \omega, 2)$, donde κ es un cardinal regular no numerable, entonces el conjunto de reales de Cohen agregados constituye un conjunto *de Luzin* en M'. Dentro de los objetivos de este trabajo está el escribir la demostración de manera que fuera accesible para los lectores que se inician en el tema de Forcing.

Teorema 3.2.2 (P. Vopěnka, K. Hrbáček, [48], [28])**.** *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y κ un cardinal no numerable en M y tal que $Fn(\kappa \times \omega, 2) \in M$. Si G es un filtro $Fn(\kappa\times\omega, 2)$-genérico sobre M, entonces los reales de Cohen en $M[G]$ forman un conjunto de Luzin en 2^ω.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$, fijamos $r_\alpha = \bigcup G\restriction_{\{\alpha\}\times\omega}$, y $S = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Desde luego, $S \in M[G]$. Fijemos también un $V \subseteq 2^\omega$ de modo que

$$M[G] \models V^{M[G]} \textit{ es abierto denso de } 2^\omega.$$

Buscamos demostrar que

$$M[G] \models |S \cap (2^\omega \setminus V)| \leq \omega.$$

En $M[G]$, fijamos una biyección $\hat{\imath} : \omega \to Fn(\omega, 2)$. Como ya se había observado antes, esto nos permite considerar un código $\gamma \in (\omega^\omega)^{M[G]}$ para V. Definamos en $M[G]$ la función $f : Fn(\omega, 2) \times \omega \to 2$ como

$$f(q, n) = 1 \iff M[G] \models [q] \cap [p_{\gamma(n)}] \neq \emptyset.$$

Como V es abierto denso en $M[G]$, se tiene que $1 \in f[\{q\} \times \omega]$, para toda condición $q \in Fn(\omega, 2)$. También observemos que $Fn(\omega, 2) \times \omega \in M$ y $f \in M[G]$, así que estamos en condiciones de aplicar el Lema 3.1.9. Sean $J \in [\kappa \times \omega]^\omega \cap M$, y H un filtro $Fn(J, 2)$-genérico, de modo que $\hat{\imath}, f \in M[H]$. Entonces γ es un código para V en $M[H]$ y f nos dice que

$$M[H] \models V \textit{ es abierto denso de } 2^\omega. \tag{3.2.2.1}$$

Denotemos por I al conjunto $(\kappa \times \omega) \setminus J$ y fijemos K la proyección de G sobre $Fn(I, 2)$. Ahora notemos lo siguiente: Dado un $\alpha < \kappa$ fijo tal que $\alpha > \sup \pi_1[J]$, nosotros podemos tomar la partición

$$Fn(\{\alpha\} \times \omega, 2) \times Fn(I \setminus (\{\alpha\} \times \omega), 2)$$

del orden $Fn(I, 2)$. Denotemos por K_α a la proyección de K sobre $Fn(\{\alpha\} \times \omega, 2)$, y por K'_α a la proyección de K sobre $Fn(I \setminus (\{\alpha\} \times \omega), 2)$. Por el Lema 1.6.6, el Corolario 1.6.4 y el Teorema 1.8.1, sabemos que K_α es un filtro $Fn(\{\alpha\} \times \omega, 2)$-genérico sobre $M[H]$, K'_α es un filtro $Fn(I \setminus (\{\alpha\} \times \omega), 2)$-genérico sobre $M[K_\alpha]$, y $M[K] = M[K_\alpha][K'_\alpha]$. De este modo, obtenemos la igualdad

$$M[G] = M[H][K_\alpha][K'_\alpha].$$

También es inmediato ver que $\bigcup K_\alpha = \bigcup G\restriction_{\{\alpha\}\times\omega} = r_\alpha$: Esto es porque K_α es una proyección de K que, a su vez, es una proyección de G.

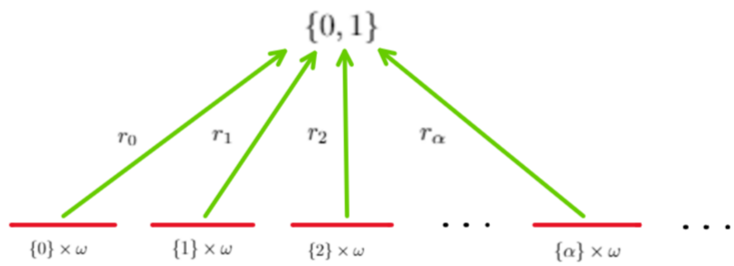


Figura 3.1: Cada r_α es una función que se agrega al forzar con un orden isomorfo a $Fn(\omega,2)$. Las líneas rojas representan las copias de ω indizadas por κ.

Luego, por la definición de real de Cohen y de (3.2.2.1), se tiene que

$$M[H][K_\alpha] \models r_\alpha \in V.$$

Además, tenemos que $V^{M[H][K_\alpha]} \subseteq V^{M[G]}$, por lo que $M[G] \models r_\alpha \in V$. De aquí, concluímos que para cualquier $\alpha < \kappa$ que supere a la proyección de J sobre sus primeras coordenadas, ocurre que $M[G] \models r_\alpha \in V$. Ya que J es numerable, entonces el argumento anterior es válido para a lo más, un subconjunto numerable de S. Por consiguiente, tenemos que

$$M[G] \models |S \setminus V| \leq \omega,$$

que era lo que queríamos demostrar. $\square$

3.3. Preservación de espacios de Luzin de 2^ω con el forcing de Cohen

El siguiente resultado que buscamos demostrar es que si en un modelo de ZFC existe un espacio de Luzin contenido en el producto 2^ω, entonces dicho espacio permanece con esta propiedad después de forzar con $Fn(\omega, 2)$. Proponemos este teorema porque nos pareció que muestra otro ejemplo del tipo de resultados que se pueden obtener usando Forcing: Que alguna propiedad que sea verdadera para un conjunto en el modelo base sea también verdadera para el mismo conjunto en la extensión genérica. La demostración fue tomada del artículo de V. I. Malykhin, [28].

Haremos algunas convenciones antes de comenzar: Para que la notación no sea confusa, denotaremos por $\mathcal{B}$ a la base de conos $\{[p] : p \in Fn(\omega, 2)\}$ de 2^ω. Siempre que consideremos un modelo M de ZFC, asumiremos que existe una función biyectiva $\hat{\imath} : \omega \to \{B^M : B \in \mathcal{B}\}$ en dicho modelo, y para cada $n < \omega$, en lugar de poner $\hat{\imath}(n)$, para referirnos al n-ésimo elemento de $\mathcal{B}$ simplemente escribimos B^M_n. Cuando sea claro el modelo en el que estamos haciendo el razonamiento, escribimos B_n en lugar de B^M_n. Recordamos que por $\mathbb{P}$, nos referimos a $Fn(\omega, 2)$.

Ahora, dado un modelo M de ZFC y un $\mathbb{P}$-nombre τ, definimos $O^M(\tau)$ el conjunto de las condiciones $p \in \mathbb{P}$ que satisfacen la siguiente propiedad:

$$\forall n < \omega\, \forall q \leq p\, \exists m < \omega\, \exists r, s \in \mathbb{P}\left[B^M_n \cap B^M_m \neq \emptyset \,\wedge\, r \Vdash \check{m} \in \tau \,\wedge\, s \leq q, r\right]. \quad (3.3.0.1)$$

Comenzamos demostrando una serie de lemas técnicos que nos permitan demostrar el teorema principal de la sección.

Lema 3.3.1 (V. I. Malykhin, [28] Proposición 11)**.** *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC con $\mathbb{P} \in M$ y $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ un nombre para un subconjunto de ω. Si para cada $n < \omega$, β_n es un $\mathbb{P}$-nombre para B_n y*

$$\pi = \big\{(\sigma, p) : \exists(\check{n}, q) \in \tau \, \exists r \in \mathbb{P} \left[(\sigma, r) \in \beta_n \, \wedge \, p \leq q \, \wedge \, p \leq r\right]\big\},$$

entonces

1. *π es un $\mathbb{P}$-nombre.*
2. *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se tiene que $i_G(\pi) = \bigcup_{n \in i_G(\tau)} B_n$.*
3. *$O^M(\tau) = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \pi$ es denso en $2^\omega\}$.*

Demostración. Primero, es claro que $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ pues sus elementos son parejas donde la primera entrada es un $\mathbb{P}$-nombre y la segunda es una condición de $\mathbb{P}$. Para la siguiente parte del teorema, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces

$$\begin{aligned} i_G(\sigma) \in i_G(\pi) &\iff \exists p \in G \left[(\sigma, p) \in \pi\right] \\ &\iff \exists p \in G \, \exists(\check{n}, q) \in \tau \, \exists r \in \mathbb{P} \left[(\sigma, r) \in \beta_n \, \wedge \, p \leq q, r\right] \\ &\iff \exists n \in i_G(\tau) \, \wedge \, i_G(\sigma) \in B_n \\ &\iff i_G(\sigma) \in \bigcup_{n \in i_G(\tau)} B_n. \end{aligned}$$

Procedemos a demostrar el último inciso. $\subseteq$: Sean $p \in O^M(\tau)$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico tal que $p \in G$. Probaremos que, en $M[G]$, cada abierto básico de 2^ω tiene intersección no vacía con $i_G(\pi)$:

Fijamos $n < \omega$ y definimos el conjunto

$$A_n := \big\{s \leq p : \exists m < \omega \big[B_n^M \cap B_m^M \neq \emptyset \, \wedge \, s \Vdash \check{m} \in \tau\big]\big\}.$$

Afirmamos que está en M y es denso debajo de p: En efecto, cada A_n es un elemento de M porque para definirlos solamente se ocupan fórmulas absolutas y la relación de forzar que es definible en M. Ahora, tomemos fijo un $q \leq p$; como $p \in O^M(\tau)$, entonces existen $m < \omega$ y $r, s \in \mathbb{P}$ tales que

$$B_n^M \cap B_m^M \neq \emptyset \quad \wedge \quad r \Vdash \check{m} \in \tau \quad \wedge \quad s \leq q, r,$$

lo que implica que $s \in A_n$, y como $s \leq q$, entonces se cumple la afirmación.

Para $n < \omega$, existe un $s_n \in A_n \cap G$. Por lo tanto, $M[G] \models m \in i_G(\tau) \wedge B_n \cap B_m \neq \emptyset$. Se sigue de lo anterior que

$$M[G] \models B_n \cap \Big(\bigcup\{B_m : m \in i_G(\tau)\}\Big) \neq \emptyset.$$

Finalmente, si $V \subseteq 2^\omega$ es un abierto no vacío en $M[G]$, entonces existe un $n < \omega$ tal que $B_n \subseteq V$, por lo que $M[G] \models V \cap \big(\bigcup\{B_m : m \in i_G(\tau)\}\big) \neq \emptyset$.

$\supseteq$: Supongamos, para proceder por contraposición, que $p \notin O^M(\tau)$. Entonces para p se satisface la negación de la fórmula que define a $O^M(\tau)$, i.e.

$$\exists q \leq p \, \exists n < \omega \, \forall m < \omega \, \forall q' \leq q \, \forall r \left[B_n^M \cap B_m^M \neq \emptyset \, \wedge \, r \Vdash \check{m} \in \tau \rightarrow r \perp q' \right]. \quad (3.3.1.1)$$

Fijemos una $q \leq p$ y una $n < \omega$ que satisfagan (3.3.1.1). Por el séptimo inciso del Lema 1.5.11, concluímos que

$$\forall m < \omega \left[B_m^M \cap B_n^M \neq \emptyset \rightarrow q \Vdash \check{m} \notin \tau \right].$$

Ahora consideremos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M que contenga a q. Deducimos que

$$M[G] \models B_n \cap \left(\bigcup \{ B_m : m \in i_G(\tau) \} \right) = \emptyset.$$

Como $q \leq p$, entonces $p \in G$. Por consiguiente, $p \nVdash \pi$ *es denso en* 2^ω. $\square$

En un modelo M de *ZFC*, dados un par de $\mathbb{P}$-nombres τ y ε de modo que ε es el nombre para una función en 2^ω, denotamos por $O^M(\tau, \varepsilon)$ al conjunto de las condiciones $p \in \mathbb{P}$ que satisfacen la siguiente propiedad:

$$\forall q \leq p \, \exists m < \omega \, \exists r, s, t \in \mathbb{P} \left[r \Vdash \varepsilon \in \beta_m \, \wedge \, s \Vdash \check{m} \in \tau \, \wedge \, t \leq q, r, s \right]. \quad (3.3.1.2)$$

Lema 3.3.2 (V. I. Malykhin, [28] Proposición 12)**.** *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC con $\mathbb{P} \in M$ y ε, $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Si π es como en el Lema 3.3.1, entonces $F^M(\varepsilon, \pi) := \{ p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varepsilon \in \pi \}$ es denso debajo de $O^M(\tau, \varepsilon)$, i.e. para cada $p \in O^M(\tau, \varepsilon)$, existe un $q \in F^M(\varepsilon, \pi)$ tales que $q \leq p$.*

Demostración. Sean $p \in O^M(\tau, \varepsilon)$, entonces existen $m < \omega$ y $r, s, t \in \mathbb{P}$ tales que

$$r \Vdash \varepsilon \in \beta_m \quad \wedge \quad s \Vdash \check{m} \in \tau \quad \wedge \quad t \leq p, r, s.$$

Queremos encontrar una condición $q' \leq p$ tal que $q' \Vdash \varepsilon \in \pi$, i.e., si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $q' \in G$, entonces

$$M[G] \models i_G(\varepsilon) \in i_G(\pi).$$

Nuestro candidato es la condición $t \leq p$ dada por (3.3.1.2). Como $t \leq s$, se cumple que $t \Vdash \check{m} \in \tau$, así que m es testigo de que $t \Vdash \varepsilon \in \beta_m \wedge \check{m} \in \tau$. Ahora, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $t \in G$. Entonces $M[G] \models i_G(\varepsilon) \in B_m \wedge m \in i_G(\tau)$, por lo que

$$M[G] \models i_G(\varepsilon) \in \bigcup_{n \in i_G(\tau)} B_n.$$

Sabemos que $M[G] \models i_G(\pi) = \bigcup_{n \in i_G(\tau)} B_n$. Luego, se tiene que $t \Vdash \varepsilon \in \pi$, así que $t \in F^M(\varepsilon, \pi)$. Por consiguiente, $F^M(\varepsilon, \pi)$ es denso debajo de $O^M(\tau, \varepsilon)$ $\square$

Si $M[G] \models V$ *es abierto denso de* 2^ω, y nosotros fijamos un $\mathbb{P}$-nombre π para V y un código τ para V, entonces podríamos encontrar una condición $p \in G$ de modo que $p \Vdash \pi$ *es denso en* 2^ω. Si ε es un $\mathbb{P}$-nombre y se diera el caso que $O^M(\tau, \varepsilon)$ es denso debajo de $O^M(\tau)$, entonces $G \cap O^M(\tau, \varepsilon) \neq \emptyset$, por lo que podríamos concluir que $M[G] \models i_G(\varepsilon) \in V$. Si esto se cumple para todos, salvo una cantidad numerable de elementos de un conjunto en $M[G]$, entonces dicho conjunto es de Luzin en la extensión. Establecemos estas ideas en el siguiente lema. Para usar notación estándar, en lugar de decir "para todo elemento $x \in X$, salvo una cantidad numerable", escribiremos "$\forall^\infty x \in X$".

Lema 3.3.3 (V. I. Malykhin, [28] "La condición suficiente"). *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC con $\mathbb{P} \in M$ y $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un subespacio de 2^ω. Supongamos que la siguiente afirmación es verdadera en M: Si $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y π son como en el Lema 3.3.1, entonces $\forall^\infty \varepsilon \in \pi_1[\sigma] \left[O^M(\tau, \varepsilon) \text{ es denso debajo de } O^M(\tau)\right]$. Se tiene entonces que $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash \sigma \text{ es subespacio de Luzin en } 2^\omega\}$ es denso en $\mathbb{P}$.*

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa. Por el primer inciso del Lema 1.5.11, existe un $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \Vdash \sigma$ *no es subespacio de Luzin en* 2^ω. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $r \in G$. Entonces

$$M[G] \models i_G(\sigma) \text{ no es espacio de Luzin.}$$

Así, podemos encontrar un $V \subseteq 2^\omega$ tal que $M[G] \models V$ *es abierto denso de* 2^ω y $M[G] \models |i_G(\sigma) \setminus V| > \omega$. Fijamos $\gamma \in \omega^\omega \cap M[G]$ un código para V en $M[G]$, τ un $\mathbb{P}$-nombre para $\gamma[\omega]$ y π un $\mathbb{P}$-nombre para V. Para cada $f \in (2^\omega)^{M[G]}$ tal que $M[G] \models f \in i_G(\sigma) \setminus V$, fijamos un nombre $\mathring{f} \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $i_G(\mathring{f}) = f$. Consideremos

$$R := \{(\mathring{f}, p) \in \sigma : p \in G \wedge p \Vdash \mathring{f} \notin \pi\}.$$

Se tiene entonces que $R \in M[G]$ y $M[G] \models R$ *es no numerable*. Además, se tiene que $R \subseteq \{(\mathring{f}, p) \in \sigma : p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash \mathring{f} \notin \pi\}$. Ya que la relación de forzar es definible en M, entonces el conjunto de la derecha es un objeto en M. Así, estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.1.20. De esta manera fijamos un conjunto $S \in M$ tal que $S \subseteq R$ y $M \models S$ *es no numerable*. Como $\mathbb{P}$ es numerable en M, entonces $M \models |\pi_2[S]| \leq \omega$. Así, es posible encontrar una $p_0 \in G$ tal que el conjunto $\tilde{U} := \{(\mathring{f}, p_0) \in S : p_0 \Vdash \mathring{f} \notin \pi\}$ es no numerable en M. Observemos que $\tilde{U} \in M^{\mathbb{P}}$. Además, como todos los elementos de G son compatibles y $M[G] \models V$ *es abierto denso de* 2^ω, entonces podemos suponer también que $p_0 \Vdash \pi$ *es denso en* 2^ω, i.e. $p_0 \in O^M(\tau)$. Sabemos que $F^M(\mathring{f}, \pi)$ es denso debajo de $O^M(\tau, \mathring{f})$ por el Lema 3.3.2. Si $O^M(\tau, \mathring{f})$ es denso debajo de $O^M(\tau)$, resulta entonces que $F^M(\mathring{f}, \pi)$ es denso debajo de $O^M(\tau)$. Esto es imposible si $\mathring{f}$ es tal que $(\mathring{f}, p_0) \in \tilde{U}$, pues para todo $q \in \mathbb{P}$, si $q \leq p_0$, entonces $q \nVdash \mathring{f} \in \pi$. Por consiguiente,

$$\forall \mathring{f} \in \pi_1[\tilde{U}] \left[O^M(\tau, \mathring{f}) \text{ no es denso debajo de } O^M(\tau)\right],$$

lo cual implica que

$$\exists^\infty \mathring{f} \in \pi_1[\sigma] \left[O^M(\tau, \mathring{f}) \text{ no es denso debajo de } O^M(\tau)\right],$$

pero esto es claramente una contradicción. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash \sigma \text{ es subespacio de Luzin de } 2^\omega\}$ es denso en $\mathbb{P}$. $\square$

La idea para demostrar el teorema principal de la sección es que si un subconjunto de 2^ω en un modelo es de Luzin, entonces para casi todo elemento f de $\mathcal{L}$, nosotros podremos probar que $O^M(\tau, \mathring{f})$ es denso como orden parcial en $O^M(\tau)$, donde τ sería el nombre del código de un abierto denso y $\mathring{f}$ un nombre para f. Y la manera de hacer esto es definir en M un abierto denso de 2^ω a partir de $O^M(\tau)$.

Teorema 3.3.4 (V. I. Malykhin, [28] Teorema 10). *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC con $\mathbb{P} \in M$ y $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(2^\omega)^M$, tal que $M \models \mathcal{L}$ es de Luzin. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $M[G] \models \mathcal{L}$ es de Luzin.*

Demostración. Sea $V \subseteq 2^\omega$ tal que $M[G] \models V$ *es abierto denso en* 2^ω. Queremos demostrar que $M[G] \models |\mathcal{L} \setminus V| \leq \omega$. Fijemos $\gamma \in \omega^\omega \cap M[G]$ un código para V, y $\pi, \tau, \sigma, \mathring{f} \in M^{\mathbb{P}}$ $\mathbb{P}$-nombres para V, $\gamma[\omega]$, $\mathcal{L}$, y cada $f \in \mathcal{L}$, respectivamente. En virtud del Lema 3.3.3, nos bastará con probar que

$$M \models \forall^\infty f \in \mathcal{L} \left[O^M(\tau, \mathring{f}) \text{ es denso debajo de } O^M(\tau) \right].$$

En virtud del Lema 3.3.1, se tiene que $O^M(\tau) = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \pi \text{ es denso en } 2^\omega\}$. Fijemos $p \in O^M(\tau)$, y sean $q \leq p$ y $n < \omega$, entonces por la definición de $O^M(\tau)$, es posible encontrar un $m < \omega$ testigo de que se satisface la siguiente fórmula:

$$\varphi(\tau, q, n, m) \equiv \exists r, s \in \mathbb{P} \left[B_n^M \cap B_m^M \neq \emptyset \wedge r \Vdash \check{m} \in \tau \wedge s \leq q, r \right].$$

Notemos que la fórmula $\varphi(\tau, q, n, m)$ tiene parámetros en M. Definimos para cada $q \leq p$ y cada $n < \omega$ a los conjuntos

$$b_q^n := \{m < \omega : \varphi(\tau, q, n, m)\},$$

y $b_q := \bigcup \left\{ b_q^n : n < \omega \right\}$. Nuevamente, observe que $b_q \in M$ para cada $q \leq p$. Definimos el conjunto

$$U_q := \bigcup_{n \in b_q} B_n.$$

Afirmamos que $B_m \subseteq U_q$. En efecto, el natural m es testigo de que para τ, q, n y m se satisface $\varphi(\tau, q, n, m)$, por lo que $m \in b_q$. Por consiguiente, de la definición de U_q se tiene que B_m es uno de los uniendos que forman a U_q, de modo que $B_m \subseteq U_q$.

Ahora veamos que en M, cada U_q es abierto denso de 2^ω: En efecto, claramente son abiertos. Para verificar que son densos, consideremos $q \leq p$ y $n < \omega$. Como $q \leq p$ y $n < \omega$, entonces podemos encontrar un natural $m < \omega$ y condiciones $r, s \in \mathbb{P}$ tales que $B_n \cap B_m \neq \emptyset$, $r \Vdash \check{m} \in \tau$ y $s \leq q, r$. Por la afirmación previa, se tiene $B_n \cap U_q \neq \emptyset$. Finalmente definimos

$$V_p := \bigcup_{q \leq p} U_q = \bigcup_{\substack{q \leq p \\ n \in b_q}} \{B_m : \varphi(\tau, q, n, m)\}.$$

Es inmediato ver que en M, V_p es abierto denso de 2^ω. Luego,

$$M \models |\mathcal{L} \setminus V_p| \leq \omega.$$

Afirmamos lo siguiente:

$$M \models \forall f \in \mathcal{L} \left[f \in V_p \to O^M(\tau, \check{f}) \text{ es denso debajo de } O^M(\tau) \right]. \tag{3.3.4.1}$$

En efecto, sea $f \in V_p$. Esto quiere decir que existe un $q \leq p$ tal que $f \in U_q$. Por definición de U_q, existen $n < \omega$ y $m \in b_q^n$ de modo que $f \in B_m$. Notemos que, por definición de b_q^n, m es testigo de que se satisface la fórmula $\varphi(\tau, q, n, m)$. Esto implica que existe un $s \leq q$ tal que

$$s \Vdash \check{f} \in \beta_m \wedge \check{m} \in \tau.$$

Por lo tanto, $s \in O^M(\tau, \check{f})$. Así, ya que $s \leq q \leq p$, entonces la afirmación queda demostrada, y con esto concluímos la prueba del teorema. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones al problema de la existencia de *L*-espacios

Decimos que un espacio X es *hereditariamente separable* si todo subespacio no vacío de X es separable, y decimos que X es *hereditariamente Lindelöf* si todo subespacio de X es Lindelöf. Ambas propiedades son consecuencia de que un espacio tenga peso numerable (recordemos que el peso de un espacio X, $w(X)$, es el mínimo cardinal κ tal que existe una base para X de tamaño κ). Un espacio regular es L-espacio si es hereditariamente Lindelöf y no hereditariamente seperable. De manera dual, un espacio regular es un S-espacio si es hereditariamente separable y no hereditariamente Lindelöf. Estos conceptos se habían estudiado desde inicios del siglo pasado. D, Kurepa mostró en 1935 que una línea de Suslin (un orden total completo, denso en sí mismo, sin extremos y que satisface la *ccc*) es un L-espacio [26]. Algunas preguntas naturales que se hicieron varios topólogos fueron:

¿Cuándo es equivalente la existencia de un L-espacio a la existencia de un S-espacio? ¿Existe un L-espacio bajo los axiomas de ZFC? ¿Existe un S-espacio? ¿Bajo qué axiomas ser hereditariamente separable implica ser hereditariamente Lindelöf? ¿Bajo qué axiomas ser hereditariamente Lindelöf implica ser hereditariamente separable? ¿Bajo cuáles axiomas estas nociones son equivalentes?

Estas preguntas fueron abordadas entre los años 60's y 70's por I. Juhasz y A. Hajnal, entre otras personalidades de la topología. Para muestra del trabajo desarrollado en este contexto, pueden consultarse [18, 19, 20, 21, 22]. Notemos que el resultado de D. Kurepa sobre la línea de Suslin sólo diría que si la negación de la Hipótesis de Suslin fuera consistente, entonces bajo tales condiciones la propiedad de ser hereditariamente Lindelöf no implica la de ser hereditariamente separable. En 1967 T. Jech demostró que consistentemente existe una línea de Suslin [14], así se supo que la existencia de un L-espacio es consistente con *ZFC*. En 1972, M.E. Rudin demostró [43] que consistentemente existe un S-espacio, y lo obtuvo a partir de forzar con Cohen sobre un modelo en el que existe un árbol de Suslin. En [46], S. Todorčević muestra que a partir de un espacio de Luzin es posible construir un L-espacio (esto lo presentamos en la última sección de este capítulo). Junto con el resultado probado por N. Luzin [27] de que bajo la *CH* existen espacios de Luzin, lo anterior implica que bajo CH existen L-espacios. En el artículo de 1979 [41], J. Roitman usa el forcing de Cohen para probar que consistentemente existe un subespacio de 2^{ω_1} tal que todas sus potencias finitas son L-espacios (revisamos esta construcción en este capítulo para el caso $n = 1$). Años más adelante, se demostró que la existencia de L-espacios y S-espacios es independiente de la existencia de una línea de Suslin. De hecho, se demostró que es posible construir ejemplos de L-espacios y S-espacios en modelos de la Hipótesis del Continuo o de su negación. S. Todorčević construyó un S-espacio en [47] suponiendo *Axioma de Martin* $+ \neg CH$. En vista de estos (y otros) resultados positivos sobre la consistencia de la existencia de L-espacios y S-espacios, las personas que investigaron este problema se preguntaron si acaso se podría probar la consistencia de la no existencia de alguna de esta clase de espacios, y qué tanto podría "dualizarse" lo que se llegara a obtener. En [46], S. Todorčević muestra que, bajo un axioma conocido como *Proper Forcing Axiom* es consistente que no existan S-espacios, además su prueba no se dualiza a L-espacios. En 2005 se supo que la existencia de un L-espacio no era solamente consistente con los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos, sino consecuencia de estos, cuando J. Moore demostró bajo ZFC que existe un L-espacio [33].

Abrimos esta sección con algunas propiedades básicas de los L-espacios y S-espacios. Como ya adelantamos, en la segunda sección daremos la demostración de la existencia de un L-espacio en un modelo que se obtiene de forzar con Cohen. En la tercera sección, daremos una forma alternativa de demostrar la consistencia de la existencia de un L-espacio, a partir de la existencia de un conjunto de *Luzin* en un modelo obtenido de forzar con Cohen, visto en el Teorema de Vopěnka. Este capítulo está basado en el artículo de J. Roitman [41] y en el libro de S. Todorčević [46].

En adelante supondremos que los espacios considerados son Hausdorff y regulares.

4.1. Propiedades básicas

Definición 4.1.1 (J. Roitman, [42]).
1. Decimos que X es un S-*espacio* si X es herieditariamente separable (hS) y no es hereditariamente Lindelöf (hL).
2. Decimos que X es un L-*espacio* si X es hereditariamente Lindelöf y no es hereditariamente separable.

Los L- y S-espacios son estudiados de manera más accesible a través de los siguientes conceptos:

Definición 4.1.2. Sea $(A, \leq)$ un orden total. Si $a \in A$, el *segmento inicial determinado por* a es el conjunto $(\leftarrow, a] := \{b \in A : b \leq a\}$. El *segmento final determinado por* a es el conjunto $[a, \rightarrow) := \{b \in A : a \leq b\}$. Un *segmento inical en* A es un segmento inicial determinado por algún elemento de A. Un *segmento final en* A es un segmento final determinado por algún elemento de A.

Definición 4.1.3 (J. Roitman, [42]). Sea (X, τ) un espacio y κ un cardinal infinito.

1. Decimos que X es un *espacio separado derecho de tipo* κ si existe un buen orden de tipo κ para X tal que todo segmento inicial es un abierto de la topología original[1].

[1] Traducción de *Right separated space of order type* κ.

2. Decimos que X es un *espacio*[2] *separado izquierdo de tipo* κ si existe un buen orden de tipo κ para X tal que todo segmento final es un abierto de τ.

El siguiente lema es una caracterización muy útil de los espacios hS y hL, que nos permitirá deducir la mayor parte de las propiedades que necesitaremos de dichos espacios para estudiar el problema que nos concierne, y que presentaremos más adelante.

Lema 4.1.4 (J. Roitman, [42], Teorema 3.1)**.** *Sea X un espacio topológico.*

1. *X es hS si y sólo si no contiene subespacios separados izquierdos de tipo ω_1.*
2. *X es hL si y sólo si no contiene subespacios separados derechos de tipo ω_1.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$: Procediendo por contraposición, consideremos un espacio separado izquierdo de tipo ω_1, $Y = \{x_\xi : \xi < \omega_1\} \subseteq X$. Notemos que si $D \subseteq Y$ es un subconjunto numerable, entonces el supremo de D, $\sup D \in Y$, digamos $x_\alpha = \sup D$, para un $\alpha < \omega_1$. De aquí, se obtiene que $D \cap [x_{\alpha+1}, \rightarrow) = \emptyset$.
$\Leftarrow$: Supongamos que Y es un subespacio no vacío de X que no es separable. Definimos por recursión un subespacio $Z \subseteq Y$ separado izquierdo de tipo ω_1 de la siguiente manera: Fijemos $x_0 \in Y$. Ahora, supongamos que $\alpha < \omega_1$ y hemos definido $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Como Y no es separable, entonces dicho conjunto no es denso en Y, por lo que hay un abierto no vacío $U_\alpha \subseteq Y$ de modo que $U_\alpha \cap \{x_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$. Fijamos $x_\alpha \in U_\alpha$. Es claro ver que $Z = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ es un subespacio separado izquierdo de tipo ω_1.

2. $\Rightarrow$: Procediendo por contraposición, sea $Y = \{x_\xi : \xi < \omega_1\} \subseteq X$ un subespacio separado derecho de tipo ω_1. Entonces $\{[x_0, x_\xi) : \xi < \omega_1\}$ es una cubierta abierta de Y sin subcubiertas numerables.
$\Leftarrow$: Supongamos que $Y \subseteq X$ no es Lindelöf y es de tamaño ω_1. Consideremos una cubierta abierta de Y $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi < \omega_1\}$ sin subcubiertas numerables. Para cada $\alpha < \omega_1$, fijamos $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi$. Entonces $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ es separado derecho de tipo ω_1.

□

4.2. Existencia de un L-espacio en una extensión genérica de Cohen

El Teorema que se demostrará en esta sección es la existencia de un L-espacio en 2^{ω_1}. Comenzamos dando los elementos para construir el L-espacio en una extensión genérica, y continuaremos con dos lemas técnicos que nos serán de gran utilidad para los teoremas que queremos establecer.

Como hemos hecho antes, $\mathbb{P}$ denota al orden parcial $Fn(\omega, 2)$. Durante la presente sección, pensaremos fijo a un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre un modelo de *ZFC* M. Además fijaremos en M un conjunto $\mathcal{A} := \{\theta_\alpha : \alpha \to \omega \mid \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ de funciones inyectivas. Así, cuando consideremos una función inyectiva θ_γ con $\gamma < \omega_1$, estaremos refiriéndonos al elemento de $\mathcal{A}$ con el índice γ.

[2] Traducción de *Left separated space of order type* κ.

Dado un real de Cohen $r \in 2^\omega$, para cada $\alpha \in \omega_1 \backslash \omega$ definimos la función $g_\alpha : \omega_1 \to 2$ como

$$g_\alpha(\gamma) = \begin{cases} r(\theta_\alpha(\gamma)) & \text{si } \gamma < \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha \leq \gamma. \end{cases} \tag{4.2.0.1}$$

El espacio $X := \{g_\alpha \in 2^{\omega_1} : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ será el L-espacio en $M[G]$ que buscamos.

A continuación probaremos algunos lemas que serán usados para establecer nuestra meta principal.

Lema 4.2.1 (J. Roitman, [42])**.** *Sea X un espacio no numerable. Entonces X no contiene subespacios derechos no numerables de tipo ω_1 si y sólo si para todo $Y \in [X]^{\omega_1}$ y para toda cubierta abierta no numerable $\mathcal{U}$ de Y, existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $|Y \cap U| = \omega_1$.*

Demostración. $\Rightarrow$: Procederemos por contrapuesta. Consideremos $Y \in [X]^{\omega_1}$ y una cubierta no numerable de abiertos numerables de Y, $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$; probaremos que existe en Y un subespacio derecho no numerable de tipo ω_1. Notemos que como Y es no numerable y los abiertos de $\mathcal{U}$ son numerables, entonces la colección de los $\alpha < \omega_1$ tales que

$$U_\alpha \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \right) \neq \emptyset$$

forma un subconjunto no numerable de ω_1. Enumeremos este subconjunto de la cubierta como $\{U_{\alpha_\gamma} \mid \gamma < \omega_1\}$ tales que $U_{\alpha_\gamma} \setminus (\bigcup_{\lambda<\gamma} U_{\alpha_\lambda}) \neq \emptyset$ para cada $\gamma < \omega_1$, y si $\delta < \gamma < \omega_1$ entonces $\alpha_\delta < \alpha_\gamma$. Entonces, para cada $\gamma < \omega_1$, fijamos

$$y_\gamma \in U_{\alpha_\gamma} \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha_\gamma} U_\beta \right).$$

Claramente, la familia $\{y_\gamma \mid \gamma < \omega_1\}$ es no numerable de tipo ω_1 y es separada derecha.

$\Leftarrow$: Procederemos también por contraposición. Supongamos que existe un subespacio $Y = \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ separado derecho de tipo ω_1. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea U_α un abierto básico tal que $x_\alpha \in U_\alpha \subseteq [x_0, x_\alpha]$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es una cubierta de Y conformada con abiertos numerables. $\square$

Lema 4.2.2 (J. Roitman, [41])**.** *Sean $\{\sigma_n \mid n < \omega\} \in M$ una familia en $Fn(\omega, 2)$ con dominios ajenos y $r \in 2^\omega$ un real de Cohen. Entonces*

$$M[G] \models r \in \bigcup_{n<\omega} [\sigma_n],$$

donde $M[G]$ es la extensión genérica obtenida de agregar a M el real r.

Demostración. Afirmamos que $M \models \bigcup_{n\in\omega}[\sigma_n]$ *es denso en* 2^ω. En efecto, si consideramos una $\varepsilon \in Fn(\omega, 2)$, como los dominios de las σ_n's son ajenos, entonces existe una $n \in \omega$ tal que $dom(\sigma_n) \cap dom(\varepsilon) = \emptyset$. Por lo tanto, $M \models [\varepsilon] \cap [\sigma_n] \neq \emptyset$. La conclusión se obtiene de la definición de real de Cohen. $\square$

El siguiente lema nos permitirá encontrar en X un subespacio separado izquierdo de tipo ω_1, lo cual, con ayuda del Lema 4.1.4, nos dirá que X no es hereditariamente separable.

Lema 4.2.3 (J. Roitman, [41])**.** *Sea $\alpha < \omega_1$. Entonces*

$$M[G] \models \exists \gamma < \alpha \, \exists \beta > \gamma \left[g_\alpha(\beta) = 1 - g_\alpha(\gamma) \right].$$

Más aún, si α es límite, entonces

$$M[G] \models \forall \gamma < \alpha \, \exists \beta > \gamma \left[g_\alpha(\beta) = 1 \right].$$

Demostración. Para la primera parte, supongamos que $A = ran(\theta_\alpha)$. Entonces del Lema 4.2.2, se tiene que

$$M[G] \models r \in \left(\bigcup_{n \in A} \left[\{(n,0)\} \right] \right) \cap \left(\bigcup_{n \in A} \left[\{(n,1)\} \right] \right) \tag{4.2.3.1}$$

Por la definición de g_α y ya que tomamos a θ_α inyectiva, entonces (4.2.3.1) implica lo que queríamos demostrar.

Para la segunda parte, consideremos una sucesión creciente $\alpha_n \to \alpha$. Entonces se tiene nuevamente por el Lema 4.2.2 que

$$M[G] \models \forall n < \omega \left[r \in \bigcup_{j > n} \left[\{(\theta_\alpha(\alpha_j), 1)\} \right] \right].$$

$\square$

El siguiente Lema nos dirá que a partir de un ordinal $\alpha < \omega_1$ suficientemente grande, es posible cubrir los siguientes elementos de X con una familia numerable de conos $[\sigma_n]$ de modo que los dominios de las σ_n's son ajenos. Nos apoyaremos de este lema y de la caracterización 4.2.1 para probar que X es hereditariamente Lindelöf.

Lema 4.2.4 (J. Roitman, [41])**.** *Sean $A = \{A_n \mid n < \omega\} \in M$ una familia numerable de conjuntos finitos y ajenos de ordinales en ω_1, sea r un real de Cohen, y consideremos $X = \{g_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ el espacio que definimos al inicio de la sección. Supongamos que $\{\sigma_n : n < \omega\} \subseteq Fn(\omega_1, 2)$ es una familia de funciones con $dom(\sigma_n) = A_n$. Si $\{\sigma_n : n < \omega\} \in M$, entonces*

$$M[G] \models g_\alpha \in \bigcup_{n \in \omega} [\sigma_n]$$

para todo $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha > \sup_{n<\omega} A_n$.

Demostración. Consideremos $\theta_\alpha \in \mathcal{A}$ con $\alpha > \sup_{n<\omega} A_n$. Definiremos una familia de funciones $\{\varepsilon_n : n < \omega\} \subseteq Fn(\omega, 2)$ de la siguiente manera: Para cada $n < \omega$, $\varepsilon_n : \theta_\alpha[A_n] \to 2$ estará definida por

$$\varepsilon_n(k) := \sigma_n(\theta_\alpha^{-1}(k)).$$

Como θ_α es una función inyectiva y las A_n's son ajenas, entonces las funciones ε_n tienen dominios ajenos. Aplicando el Lema 4.2.2, se tiene que $M[G] \models r \in \bigcup_{n\in\omega}[\varepsilon_n]$. Recordemos que queremos demostrar que $M[G] \models g_\alpha \in \bigcup_{n\in\omega}[\sigma_n]$. Para ver esto, fijemos $n < \omega$ tal que $M[G] \models r \in [\varepsilon_n]$ y sean $\gamma \in A_n$ y $k = \theta_\alpha(\gamma)$. Entonces deducimos que $k \in dom(\varepsilon_n)$. Se tiene que $r(k) = \varepsilon_n(k) = \sigma_n(\theta_\alpha^{-1}(k)) = \sigma_n(\gamma)$. Por la definición de g_α, se tiene que $g_\alpha(\gamma) = r(\theta_\alpha(\gamma)) = r(k) = \sigma_n(\gamma)$. Por consiguiente, $M[G] \models g_\alpha \in [\sigma_n]$. □

La idea clave para la demostración de nuestro teorema principal es el siguiente corolario, obtenido de manenera directa de los lemas anteriores.

Corolario 4.2.5. *Bajo las hipótesis del lema anterior, se tiene que*

$$M[G] \models \left| X \setminus \bigcup_{n<\omega} [\sigma_n] \right| \leq \omega.$$

Teorema 4.2.6 (J. Roitman, [41])**.** *Se tiene que*

$$M[G] \models X \text{ es un } L\text{-espacio.}$$

Demostración. Para probar que no es hereditariamente separable demostraremos que contiene un subespacio no numerable separado por la izquierda de tipo ω_1, y aplicaremos la primera parte del Lema 4.1.4.

Es importante mencionar que la demostración que detallamos a continuación ocurre en $M[G]$, dado que $X \in M[G]$. Veamos que X no es hS: Afirmamos que el subespacio

$$Y = \{g_{\lambda+\omega} : \lambda \in \omega_1 \setminus \omega \ \wedge \ \lambda \text{ es ordinal límite}\}$$

ordenado por

$$g_\alpha < g_\beta \iff \alpha < \beta,$$

es un subespacio separado izquierdo de tipo ω_1. En efecto, si $\lambda \in \omega_1 \setminus \omega$ es un ordinal límite y $\alpha = \lambda + \omega$, consideremos la función finita $\sigma_\alpha = \{(\mu, 1)\}$, donde

$$\mu = \text{mín}\{\xi \in \alpha \setminus \lambda : g_\alpha(\xi) = 1\},$$

el cual existe en virtud de la segunda parte del Lema 4.2.3. Notemos que $g_\alpha \in [\sigma_\alpha]$, y si $\gamma < \lambda$ es un ordinal límite, entonces $\gamma + \omega \leq \lambda$ y por la definición de las funciones se tiene que $g_{\gamma+\omega}(\mu) = 0$. Por consiguiente, $g_{\gamma+\omega} \notin [\sigma_\alpha]$. Finalmente, notemos que Y tiene tipo de orden ω_1.

Ahora veremos que X es hL. Para probar esto, usaremos el Lema 4.2.1 y luego aplicaremos la segunda parte del Lema 4.1.4. Sea $Y = \{g_{\alpha_\gamma} : \gamma < \omega_1\} \subseteq X$ y consideremos una cubierta $\mathcal{U} = \{[\sigma_\gamma] : \gamma < \omega_1\}$ de Y. Sin pérdida de generalidad, pensaremos que la numeración de $\mathcal{U}$ está dada de tal forma que el abierto $[\sigma_\gamma]$ contiene al γ-ésimo elemento de Y, así que para cada $\beta < \omega_1$, se cumple que

$$\{g_{\alpha_\gamma} : \gamma < \beta\} \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} [\sigma_\gamma].$$

Entonces hay dos opciones, en un paso $\alpha < \omega_1$ se cubre a un subconjunto no numerable de Y, o para cada $\alpha < \omega_1$, lo que cubren los primeros α abiertos es una parte numerable de Y. Si ocurriera lo primero, entonces podríamos encontrar un $\gamma < \omega_1$ de modo que $[\sigma_\gamma]$ cubra a una cantidad no numerable de puntos de Y, que es la conclusión buscada. Por lo tanto, podemos suponer que nos encontramos en el segundo caso. Sin pérdida de generalidad, también podemos suponer que para cada $\gamma < \omega_1$,

$$Y \setminus \bigcup \{[\sigma_\xi] : \xi < \omega_1 \wedge \xi \neq \gamma\} \neq \emptyset.$$

Como consecuencia de esto, podemos adoptar la siguiente hipótesis:

$$\textit{Cualquier subconjunto no numerable de } \mathcal{U} \textit{ cubre } \omega_1 \textit{ puntos de } Y. \tag{4.2.6.1}$$

Se tienen dos casos:

Caso 1: Existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ numerable, tal que $|Y \cap (\bigcup \mathcal{W})| = \omega_1$. Notemos que si éste fuera el caso, entonces existiría una función parcial finita σ tal que $[\sigma] \in \mathcal{W}$ y $|Y \cap [\sigma]| = \omega_1$, que es lo que se quería demostrar.

Caso 2: Para cada $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ numerable, $|Y \cap (\bigcup \mathcal{W})| < \omega_1$. Consideremos el conjunto $\hat{\mathcal{D}} := \{dom(\sigma_\alpha) : \alpha < \omega_1\} \in M[G]$. Por el Lema del Δ-sistema 2.1.2, existe un conjunto $\hat{\mathcal{D}}' \in M[G]$ tal que

$$M[G] \models \hat{\mathcal{D}}' \textit{ es un } \Delta\textit{-sistema contenido en } \hat{\mathcal{D}} \textit{ con raíz } \rho.$$

Como $\hat{\mathcal{D}}'$ es no numerable y dado que suponemos (4.2.6.1), se tiene entonces que $\{[\sigma] \in \mathcal{U} : dom(\sigma) \in \hat{\mathcal{D}}'\}$ es un subconjunto no numerable de $\mathcal{U}$ que cubre a una cantidad no numerable de puntos de Y. Para ser completamente formales, tendríamos que restringir el estudio a la parte de Y que es cubierta por esta colección de abiertos, pero para que la notación no se vuelva demasiado tediosa, supondremos que $\hat{\mathcal{D}}$ ya es un Δ-sistema. Sea $S = \{\sigma : [\sigma] \in \mathcal{U}\}$. Como la raíz ρ del Δ-sistema es un conjunto finito y S es no numerable, entonces podemos encontrar un subconjunto $S' = \{\sigma_{\alpha_\beta} : \beta < \omega_1\}$ de modo que para cualesquiera $\alpha, \beta < \omega_1$ se tenga que

$$\sigma_\alpha \restriction_\rho = \sigma_\beta \restriction_\rho.$$

y además se sigue cumpliendo que $|Y \cap \bigcup \{[\sigma] : \sigma \in S'\}| = \omega_1$, por lo que nuevamente, para ahorrar notación, supondremos que todas las funciones en S coinciden en la raíz ρ. Ahora, definimos para cada $\alpha < \omega_1$ las funciones

$$\sigma_\alpha^* := \sigma_\alpha \restriction_{dom\left(\sigma_\alpha\right) \setminus \rho} \quad y \quad \varepsilon := \sigma_\alpha \restriction_\rho,$$

y tomamos al conjunto $\mathcal{V} := \{[\sigma_\alpha^*] : \alpha < \omega_1\} \in M[G]$. Por el Lema 2.1.20, podemos encontrar un conjunto $\mathcal{V}' \in M$ tal que

$$M \models \mathcal{V}' \textit{ es no numerable} \quad y \quad M[G] \models \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}.$$

De aquí, tomamos un subconjunto $\mathcal{W} = \{[\sigma_{\alpha_n}^*] : n < \omega\} \in \mathcal{P}(\mathcal{V}')^M$. Notemos que con $\mathcal{W}$ se satisfacen las hipótesis del Lema 4.2.4, y además el Corolario 4.2.5, por lo que $M[G] \models \left|Y \setminus \bigcup \mathcal{W}\right| \leq \omega$. Afirmamos que

$$M[G] \models Y \setminus \left(\bigcup_{n<\omega} [\sigma_{\alpha_n}^*] \cap [\varepsilon] \right) = Y \setminus \left(\bigcup_{n<\omega} [\sigma_{\alpha_n}^*] \right).$$

Es inmediato ver que la contención $\supseteq$ se da. Para ver la otra contención, notemos que

$$M[G] \models \bigcup_{\alpha<\omega_1} [\sigma_\alpha] \subseteq [\varepsilon].$$

Por consiguiente, $[\varepsilon] \subseteq Y$. Sea

$$f \in Y \setminus \left(\bigcup_{n<\omega} [\sigma^*_{\alpha_n}] \cap [\varepsilon] \right).$$

Como $[\varepsilon] \subseteq Y$, entonces

$$f \in Y \setminus \left(\bigcup_{n<\omega} [\sigma^*_{\alpha_n}] \right).$$

Con esto establecenmos la contención $\subseteq$. Observe además que

$$M[G] \models \bigcup_{n\in\omega} [\sigma_{\alpha_n}] = \bigcup_{n<\omega} [\sigma^*_{\alpha_n}] \cap [\varepsilon].$$

Por lo tanto, se tiene que

$$M[G] \models \left| Y \setminus \bigcup_{n<\omega} [\sigma_{\alpha_n}] \right| \leq \omega,$$

así que la familia $\{[\sigma_{\alpha_n}] : n < \omega\}$ contiene al elemento de $\mathcal{U}$ buscado. Así, para el caso 2, en virtud de los Lemas 4.2.1 y 4.1.4, el teorema es verdadero.

□

4.3. Espacios de Luzin y L-espacios

Concluímos este capítulo con el estudio de la relación entre los L-espacios y los espacios de Luzin. En la sección de Aplicaciones a subconjuntos de los reales, uno de los teoremas que probamos fue que los subconjuntos no numerables de reales de Cohen constituyen un conjunto de Luzin (ver Teorema 3.2.2). En este capítulo, damos la demostración de un teorema que indica una manera alternativa de obtener un L-espacio. Dicho teorema (4.3.18) es el enunciado principal de esta sección y se puede encontrar en el libro [46] (Teorema 6.8).

Para nuestra tarea, es necesario tener en mente dos resultados: Primero, tener en conocimiento el resultado de J. Moore [34] sobre la existencia de un L-espacio en *ZFC*. Segundo, recordar que en la sección anterior se dio la demostración presentada por J. Roitman en [41]: En una extensión genérica de un modelo obtenida de forzar con Cohen, existe un L-espacio "fuerte" (i.e. un espacio tal que todas sus potencias finitas son L-espacios)[3]. Es claro que el resultado de J. Moore es más potente (y más reciente) que el obtenido por J. Roitman. El teorema principal de este capítulo, cuya demostración tomamos enteramente de [46], es que partiendo de un espacio de Luzin,

[3] En dicho artículo, Roitman demuestra que esto también es cierto si se fuerza con el orden parcial $Fn(\omega, \omega)$ de las funciones finitas cuyo dominio y contradominio son subconjuntos de ω.

bajo algunas hipótesis que en su momento serán mencionadas, es posible definir una topología para obtener un L-espacio.

Comenzamos enunciando y probando algunos lemas elementales para concluir que todo espacio de Luzin es hL.

Lema 4.3.1. *Sea X un espacio topológico sin puntos aislados. Si $Y \subseteq X$ es un subespacio discreto, entonces Y es denso en ninguna parte.*

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ un subespacio discreto, y sea $\{U_x : x \in Y\}$ la familia de abiertos en X que atestiguan esta propiedad, i.e. $U_x \cap Y = \{x\}$ para todo $x \in Y$. Supongamos que Y no es un subespacio denso en ninguna parte. Esto significa que $int(cl(Y)) \neq \emptyset$. Tomemos $V \subseteq int(cl(Y))$ un abierto no vacío, luego Y es denso en V. Ahora tomamos $x \in Y \cap V$. Como X es en particular T_2 y no tiene puntos aislados, entonces $V \cap U_x \cap Y$ es infinito, lo cual es una contradicción, pues este conjunto coincide con $\{x\}$. $\square$

Lema 4.3.2. *Los espacios de Luzin no tienen subespacios que son discretos, cerrados y no numerables.*

Demostración. Los espacios de Luzin no tienen puntos aislados y sus subconjuntos densos en ninguna parte son a lo más numerables. Aplicando el Lema 4.3.1 se tiene el resultado. $\square$

Nos será útil en lo que sigue considerar a la topología de un espacio X sin el conjunto vacío, $\tau_X \setminus \{\emptyset\}$, y con el orden parcial inducido por la cocntención. Dicho conjunto parcialmente ordenado será denotado por $(\tau^*_X, \subseteq)$.

Lema 4.3.3. *Sea X un espacio topológico sin puntos aislados. El orden parcial $(\tau^*_Y, \subseteq)$ de cualquier subespacio $Y \subseteq X$ satisface la ccc si y sólo si X no contiene espacios discretos y no numerables.*

Demostración. $\Rightarrow$: Sea $Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un subespacio discreto de X y supongamos que $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es la familia de abiertos en X que atestiguan lo anterior y cumplen que $U_\alpha \cap Y = \{x_\alpha\}$, para cada $\alpha < \omega_1$. Entonces para cada $\alpha < \beta < \omega_1$ se tiene que $Y \cap U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, de modo que la familia $\{U_\alpha \cap Y : \alpha < \omega_1\}$ es una antirama no numerable en $(\tau^*_Y, \subseteq)$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$: Sean $Y \subseteq X$ de modo que el orden parcial $(\tau^*_Y, \subseteq)$ contiene una anticadena no numerable $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, entonces eligiendo un punto $x_\alpha \in U_\alpha \cap Y$ obtenemos un subespacio discreto no numerable. $\square$

Como consecuencia de los Lemas 4.3.2 y 4.3.3, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 4.3.4. *Los espacios de Luzin son hereditariamente ccc, i.e., todo subespacio de un espacio de Luzin satisface la propiedad ccc.*

Ahora mostramos con ayuda de los dos lemas anteriores que todo espacio de Luzin es hL. También es necesario recordar el Lema 4.2.1.:

Lema 4.2.1. *Si $X \subseteq 2^{\omega_1}$ es un subespacio no numerable, entonces X no contiene a un subespacio derecho no numerable de tipo ω_1 si y sólo si para todo $Y \in [X]^{\omega_1}$ y para toda cubierta abierta no numerable $\mathcal{U}$ de Y, existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $|Y \cap U| = \omega_1$.*

Lema 4.3.5. *Los espacios de Luzin son hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. Sea X un espacio de Luzin. Consideremos un subespacio $Y \subseteq X$ no numerable y una familia $\mathcal{U}$ no numerable de abiertos en X que cubra a Y. Fijemos una base $\mathcal{B}$ para X. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{U}$ cumple la siguiente propiedad:

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

2. Si $U \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{B}$ y $B \subseteq U$, entonces $B \in U$.

Esto lo podemos hacer porque si mostramos que hay un abierto básico $B \in \mathcal{U}$ tal que la intersección $B \cap Y$ es no numerable, entonces para el abierto $U \in \mathcal{U}$ que contenga a B también se cumple que $U \cap Y$ es no numerable, y terminamos la demostración basándonos en el lema anterior. Consideremos el subespacio $Z = \bigcup \mathcal{U}$. Primero vamos a demostrar que existe un subconjunto numerable $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{V}$ es denso en el subespacio Z. Dicho conjunto numerable no necesariamente consiste de conjuntos ajenos entre sí. La forma en que procederemos será suponer que la afirmeción no se cumple y generar una familia no numerable de abiertos que sí serán ajenos entre sí y estén contenidos en Z, lo que nos llevará a una contradicción con el Corolario 4.3.4. Esto lo haremos con una recursión de tamaño ω_1. Primero fijamos $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{U}$ un subconjunto numerable, y llamamos $\mathcal{V}_0 := \left\{ \bigcup \mathcal{W}_0 \right\}$. Para el paso sucesor, supongamos que $\gamma < \omega_1$ y que para todo $\beta < \gamma$ hemos fijado una familia de abiertos $\mathcal{V}_\beta$ tal que

1. $\mathcal{V}_\beta$ es numerable.

2. Los elementos de $\mathcal{V}_\beta$ son abiertos no vacíos, ajenos entre sí y contenidos en Z.

3. Si $\xi < \eta < \alpha$, entonces $\mathcal{V}_\eta \subseteq \mathcal{V}_\xi$.

Si α es límite, entonces definimos $\mathcal{V}_\gamma := \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{V}_\beta$. Supongamos que $\gamma = \alpha+1$. Sabemos que V_α es numerable. También tenemos que el conjunto

$$S = \mathcal{W}_0 \cup \left\{ V \in \mathcal{V}_\alpha : V \neq \bigcup \mathcal{W}_0 \right\}$$

está contenido en $\mathcal{U}$ y es numerable, además $\bigcup S = \bigcup \mathcal{V}_\alpha$, por lo que

$$Z \setminus \overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha} \neq \emptyset.$$

Así, podemos encontrar un abierto no vacío $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $U \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}_\alpha$. Como la intersección

$$U_\alpha \cap \left(Z \setminus \overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha} \right)$$

es un abierto no vacío, entonces podemos encontrar un básico $B_\alpha \in \mathcal{B}$ que se queda contenido en dicho conjunto. En particular, se tiene que $B_\alpha \subseteq U_\alpha$, por lo que $B_\alpha \in \mathcal{U}$. Definimos entonces

$$V_\gamma := \mathcal{V}_\alpha \cup \{B_\alpha\}.$$

Notemos que B_α es ajeno a $\mathcal{V}_\alpha$, $\mathcal{V}_\gamma$ es numerable y $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\gamma$, i.e. $\mathcal{V}_\gamma$ así definida satisface las hipótesis de la recursión. Finalmente, definimos $\mathcal{V}_{\omega_1} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{V}_\alpha$. Dicho conjunto consiste de abiertos no vacíos y ajenos entre sí, además es no numerable, lo cual nos lleva a una contradicción porque Z es *ccc* en virtud del Corolario 4.3.4.

Entonces la afirmación es cierta, por lo que fijamos un subconjunto numerable $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ cuya unión sea densa en Z. Observe que

$$Y \setminus \bigcup \mathcal{V} \subseteq Z \setminus \bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U} \setminus \bigcup \mathcal{V} \subseteq Fr\Big(\bigcup \mathcal{V}\Big).$$

Ya que Z es espacio de Luzin, $Y \setminus \cup \mathcal{V}$ es numerable ya que $Fr(\bigcup \mathcal{V})$ es denso en ninguna parte. Finalmente, como Y tiene ω_1 puntos, en virtud de que $\mathcal{V}$ cubre a todos salvo una cantidad numerable, entonces podemos encontrar un $U \in \mathcal{V}$ tal que $|U \cap Y| = \omega_1$. □

Ahora, supongamos que (X, τ) es un espacio topológico y que $\leq$ es una relación transitiva y reflexiva en X. Denotemos como $X_{\leq}$ al espacio topológico que consiste del conjunto X equipado con la topología generada por

$$\tau \cup \{(\leftarrow, x]_{\leq} : x \in X\},$$

en donde para cada $x \in X$, $(\leftarrow, x]_{\leq} := \{y \in X : y \leq x\}$. De manera análoga, definimos el espacio topológico $X_{\geq}$.

Lema 4.3.6 (S. Todorčević, [46])**.** *Sea $\leq$ una relación reflexiva y transitiva definida en un espacio X. Si $Y \subseteq X$ es un conjunto bien fundado respecto a la relación $\leq$, entonces Y es un conjunto separado derecho en $X_{\leq}$ y es separado izquierdo en $X_{\geq}$.*

Demostración. Si Y está bien ordenado con el orden $\leq$, entonces

$$\{(\leftarrow, x]_{\leq} : x \in Y\}$$

es una familia de abiertos que atestigua que $Y_{\leq}$ es separado derecho. Análogamente, la familia de abiertos $\{[x, \rightarrow)_{\leq} : x \in Y\}$ es una colección de conjuntos abiertos que verifican que $Y_{\geq}$ es separado izquierdo. □

Es un teorema conocido que ω^ω con la topología producto es un espacio topológico completamente metrizable, y es homeomorfo al subespacio de los números irracionales en $\mathbb{R}$. Para facilitar el uso de argumentos combinatorios, en algunos casos identificaremos a los irracionales directamente con ω^ω. Recordemos que en el espacio ω^ω, la relación de *dominancia* $\leq$ está definida para cada $f, g \in \omega^\omega$ por

$$f \leq g \iff \forall n < \omega \big[f(n) \leq g(n)\big].$$

La relación de *eventual dominancia* en ω^ω está definida para cada $f, g \in \omega^\omega$ por

$$f \leq^* g \iff \exists m < \omega \, \forall n > m \big[f(n) \leq g(n)\big].$$

Una consecuencia importante del Lema 4.3.6 es el siguiente lema técnico:

Lema 4.3.7 (S. Todorčević, [46])**.** *Si A es un subconjunto no numerable de funciones en ω^ω y bien ordenado por la relación de eventual dominancia $\leq^*$, entonces $A_{\leq}$ es un espacio separado derecho de tipo de orden $|A|$ y $A_{\geq}$ es un espacio separado izquierdo de tipo de orden $|A|$.*

Demostración. Basta con demostrar que el orden $\leq$ en A está bien fundado. Si esto no fuera así, entonces podemos fijar un subconjunto no vacío $B \subseteq A$ sin elementos $\leq$-minimales. Recursivamente, construimos una cadena decendiente $\{f_n\}_{n<\omega} \subseteq A$. Primero, fijamos $f_0 \in A$. Luego, supongamos que para un $n < \omega$, ya tenemos a f_n. Como f_n no es $\leq$-minimal, existe un $f_{n+1} < f_n$. También observemos que si $f \leq g$ entonces $f \leq^* g$. Como A está bien ordenado con $\leq^*$, entonces no puede tener cadenas decrecientes infinitas, y esto es una contradicción. □

Un concepto muy conocido en combinatoria infinita y cardinales característicos del continuo es el cardinal $\mathfrak{b}$ (ver el artículo [7]) es el mínimo cardinal de una familia no acotada en ω^ω con la relación $\leq^*$.

Existen una clase de conjuntos que fueron estudiados en la primera mitad del siglo XX dentro de los esfuerzos por refutar la hipótesis del continuo. A dichos conjuntos se les conoce como *conjuntos concentrados de reales alrededor de algún subconjunto dado*. Las primeras propiedades de estos conjuntos fueron investigados por N. Luzin y F. Rothberger. Una de ellas, que es de suma importancia para nuestros propósitos, está relacionada con el número cardinal

$$\mathfrak{b} = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega \text{ } y \text{ } \mathcal{B} \text{ } es \text{ } no \leq^*\text{-}acotado\}.$$

No es difícil ver que todo subconjunto numerable de ω^ω es acotado con el orden $\leq^*$, usando un proceso estándar de diagonalización. Por lo cual $\omega_1 \leq \mathfrak{b}$.

Definición 4.3.8. Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto numerable. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es *concentrado alrededor de* D si para todo abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $D \subseteq V$ se tiene que $X \setminus V$ es numerable.

Para lo que sigue, nos guiaremos de lemas que fueron consultados del artículo [7] de E. van Douwen.

Lema 4.3.9 (E. van Douwen, [25])**.** *Sea $B \subseteq \omega^\omega$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *B es acotado.*

2. *Existe un conjunto σ-compacto $S \subseteq \omega^\omega$ tal que $B \subseteq S$.*

3. *Si $h : \omega^\omega \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un homeomorfismo, entonces $\mathbb{Q}$ es un conjunto G_δ en el subespacio $h[B] \cup \mathbb{Q}$, visto como subespacio de $\mathbb{R}$.*

A nosotros nos interesa solamente conocer la demostración de que el primer inciso implica el segundo, y que el segundo implica el tercero. La demostración completa se puede encuentrar en la referencia dada.

Demostración. $1 \to 2$: Supongamos que $g \in \omega^\omega$ es tal que para toda $f \in B$, $f \leq^* g$.
Definimos el conjunto

$$H := \{h \in \omega^\omega : h(n) = g(n) \text{ } para \text{ } todo \text{ } n < \omega, \text{ } salvo \text{ } una \text{ } cantidad \text{ } finita\}.$$

Como sólo hay una cantidad numerable de subconjuntos finitos de ω, es claro que el conjunto H es numerable. Notemos que para todo f, existe una $h \in H$ tal que $\forall n < \omega[f(n) \leq h(n)]$. Luego, si hacemos

$$S = \bigcup_{h \in H} \left(\prod_{n<\omega} [0, h(n)] \right)$$

el resultado se sigue.

2→3 : Sabemos que en $\mathbb{R}$, los conjuntos F_σ coinciden con los conjuntos σ-compactos. Luego, del segundo inciso, sabemos que hay un subconjunto σ-compacto $S \subseteq \omega^\omega$ tal que $B \subseteq S$. Así, $h[B] \subseteq h[S] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en particular $(h[B] \cup \mathbb{Q}) \cap h[S] = h[B]$. Como $h[S]$ es F_σ, entonces $h[B]$ es un subconjunto F_σ de $h[B] \cup \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es G_δ en $h[B] \cup \mathbb{Q}$.

$\square$

El siguiente lema establece la relación que necesitaremos entre los conjuntos concentrados de reales y el cardinal $\mathfrak{b}$.

Lema 4.3.10 (F. Rothberger)**.** *Si existe un subconjunto de reales de tamaño ω_1 concentrado alrededor de $\mathbb{Q}$, entonces $\mathfrak{b} = \omega_1$, i.e. existe un conjunto $B \subseteq \omega^\omega$ no acotado con el orden $<^*$ y de cardinalidad igual a ω_1.*

Demostración. Sea $B \subseteq X \setminus \mathbb{Q}$ un subconjunto no numerable, y $h : \omega^\omega \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un homeomorfismo. Afirmamos que $h^{-1}[B]$, que es subespacio de ω^ω, es no $\leq^*$-acotado. En efecto, si fuera acotado, en virtud del Lema 4.3.9 resulta que B es F_σ visto como subespacio de $B \cup \mathbb{Q}$, i.e. existe una familia de cerrados $\{C_m \in \mathcal{P}(B \cup \mathbb{Q}) : m < \omega\}$ tales que $B = \bigcup_{m<\omega} C_m$. Como B es no numerable, entonces existe un $n < \omega$ tal que C_n es no numerable. Notemos que $X \cap C_n$ es un cerrado ajeno a $\mathbb{Q}$ y que es no numerable. Por otro lado, como X es concentrado alrededor de $\mathbb{Q}$, en virtud de que $\mathbb{Q} \subseteq X \setminus C_n$ y que $X \setminus C_n$ es abierto, se tiene que $X \cap C_n$ es numerable, una contradicción. $\square$

Corolario 4.3.11. *Si existe un subconjunto de números reales de tamaño ω_1 concentrado alrededor de un subconjunto numerable de $\mathbb{Q}$, entonces $\mathfrak{b} = \omega_1$.*

Para seguir con el desarrollo de esta sección, hablaremos un poco de los *árboles de Suslin*. Un árbol de Suslin es un árbol de altura ω_1 con ramas y antiramas numerables. La *hipótesis de Suslin* es una pregunta que fue estudiado desde 1920 por Mikhail Suslin quien, sabiendo sobre la caracterización de $\mathbb{R}$ como el único orden lineal separable completo, denso y sin extremos, se preguntó si podría debilitar la propiedad de ser separable y solamente suponer la propiedad *ccc*. Esto es lo que motivó la definición de *línea de Suslin*, que es un espacio linealmente ordenado, completo, denso y sin extremos que no es homomorfo a los reales. La hipótesis de Suslin es la afirmación de que no existen líneas de Suslin. Una respuesta para este problema es equivalente a una solución para la pregunta sobre la existencia de un objeto que satisfaga la definición de ser línea de Suslin pero no sea isomorfo a los reales. El conocimiento necesario para conocer la respuesta tardaría varias décadas en desarrollarse. Uno de los resultados más útiles para atacar la pregunta fueron precisamente los árboles de

Suslin, introducidos por D. Kurepa en la década de 1930, pues se demostró que la existencia de un árbol de Suslin es equivalente a la existencia de una *línea de Suslin* [24]. Los árboles de Suslin son objetos muy interesantes porque atrapan todas las propiedades combinatorias de las líneas de Suslin. Desde 1967 se dieron los primeras demostraciones de que consistentemente existen los árboles de Suslin [14]. En el libro [10] se presenta la demostración de S. Todorćevič en la que, usando el forcing $Fn(\omega,\omega)$, construye un árbol de Suslin.

Para continuar con nuestra meta, necesitamos enunciar el siguiente juego topológico introducido por Choquet.

Definición 4.3.12. Sea X un espacio topológico. El *Juego de Choquet de* X se define como sigue: Dos jugadores I y II toman turnos para "escoger" abiertos no vacíos de manera alternada

I	V_0		V_1		$\dots$
II		W_0		W_1	$\dots$

de modo que

$$V_0 \supseteq W_0 \supseteq V_1 \supseteq W_1 \supseteq \dots$$

Decimos que I *gana la partida* si $\bigcap_{n<\omega} V_n = \emptyset$, y II *gana* si $\bigcap_{n<\omega} W_n \neq \emptyset$.

El siguiente teorema es muy conocido, y se le debe a J. C. Oxtoby.

Teorema 4.3.13 (Teorema de Oxtoby)**.** *Un espacio topológico es de la segunda categoría si y sólo si el jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego de Choquet de X.*

Los lectores interesados en consultar más información sobre el juego de Choquet, pueden consultar el texto de J. Oxtoby [37] o el texto clásico de teoría descriptiva de conjuntos [23].

Introducimos ahora el concepto de *esquema de Luzin sobre un conjunto* X, y posteriormente probamos el Lema 4.3.15, que será requerido para uno de los pasos en la demostración del teorema principal de la sección.

Definición 4.3.14. Sea X un conjunto. Un *esquema de Luzin sobre* X es una familia de conjuntos no vacíos $\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ que cumple las siguientes condiciones:

- Si $s \in \omega^{<\omega}$ y $n < m$, entonces $A_{s^\frown n} \cap A_{s^\frown m} = \emptyset$.
- Si $s \in \omega^{<\omega}$ y $n < \omega$, entonces $A_{s^\frown n} \subseteq A_s$.

El siguiente lema se encuentra como una afirmación en la demostración del Teorema 4.3.18 en el libro [46]. Al no encontrar una demostración en la literatura, optamos por diseñar una que, creemos, debe ser la original.

Lema 4.3.15 (S. Todorčević, [46])**.** *Supongamos que*

1. *X es un espacio de Luzin sin puntos aislados.*
2. *X no contiene L-espacios.*
3. *No existen árboles de Suslin.*

Entonces hay un subespacio $X_0 \subseteq X$ de Luzin, y una función $\varphi : X_0 \to \mathbb{R}$ continua e inyecitva, tal que $\varphi[X_0]$ está contenida en los irracionales.

Demostración. En realidad, la función que obtendremos tiene como contradominio al espacio ω^ω. Pero esto no representa ningún problema porque sabemos que hay un encaje $h : \omega^\omega \to \mathbb{R}$.

Construiremos un esquema de Luzin sobre X cuyos elementos sean abiertos no vacíos de X. Para la construcción, primero obtendremos un árbol T contenido en τ_X^* que será no atómico y numerable, para después obtener el esquema aplicando el Lema 1.8.2. Antes de proceder con la construcción, probaremos la siguiente

Afirmación. Si para cada rama $\{V_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de T, existe un $\alpha < \gamma$ tal que para todo $\beta \in \gamma \setminus \alpha$, $X \setminus \overline{V_\beta} \neq \emptyset$, entonces T es numerable.

Prueba de la afirmación. En efecto, de nuestra tercera hipótesis se deduce que T no puede ser un árbol de Suslin. Esto significa que T no satisface alguna de las propiedades que definen a dicha clase de árboles. Primero veamos que X no tiene ramas no numerables: Si $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una rama de T, entonces el subespacio

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} X \setminus \overline{V_\alpha}$$

no es Lindelöf, pues por la hipótesis adicional de la afirmación, la familia de abiertos $\{X \setminus \overline{V_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ resulta ser una cubierta abierta sin subcubiertas numerables, lo cual es una contradicción pues en virtud del Lema 4.3.5, X es hL ya que es de Luzin. Por consiguiente, todas las ramas de T son numerables. Recordemos que X satisface la *ccc*, por lo cual T no puede tener anticadena no numerables. Entonces T debe de fallar con la otra condición que define a los árboles de Suslin, i.e., debe de tener altura numerable. Así, T es numerable. $\square$

Procedemos a construir el árbol T: Para comenzar, fijamos a $V_\emptyset = X$ como el nodo inicial del árbol. Luego, supongamos que $\alpha < \omega_1$ y $s : \alpha \to \omega_1$ es una función tal que si $\beta < \alpha$, entonces $V_{s\restriction_\beta}$ es un elemento del nivel T_β, y si $\xi < \eta < \alpha$, entonces $V_{s\restriction_\eta} \subseteq V_{s\restriction_\xi}$. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si $int\big(\bigcap_{\gamma<\alpha} V_{s\restriction_\gamma}\big) = \emptyset$, entonces la rama determinada por s es maximal, y ya terminamos.

Caso 2: Si el interior de $\bigcap_{\gamma<\alpha} V_\gamma$ es no vacío, entonces consideramos una familia de abiertos no vacíos y ajenos entre sí, $\{V_{s^\frown n} : n < \omega\}$, tal que la unión $\bigcup_{n<\omega} V_{s\restriction_\gamma}$ sea densa en el interior de dicha intersección. Dicha familia serán los nodos siguientes para V_s.

Ya que X es Hausdorff y hereditariamente *ccc*, podemos entonces hacer este procedimiento y eventualmente llegaremos al primer caso después de una cantidad numerable de pasos. El árbol T obtenido de esta manera es numerable en virtud de la afirmación anterior, además de que es un orden parcial no atómico. Por lo tanto, el Lema 1.8.2 nos dice que existe un encaje denso entre órdenes parciales $h : \omega^{<\omega} \to T$, denotando $h(s) = U_s$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$. El encaje h satisface las siguientes condiciones:

i. Si $s \in \omega^{<\omega}$ y $j \in \omega$, entonces $U_{s^\frown j} \subseteq U_s$.

ii. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, se tiene que $\{U_{s^\frown m} : m < \omega\}$ es una familia de abiertos no vacíos ajenos entre sí cuya unión es densa en U_s.

iii. Para cada $k \in \omega$, la unión $\bigcup_{s\in\omega^k} U_s$ es densa en X.

iv. Para toda $f \in \omega^\omega$, $int(\bigcap_{n<\omega} U_{f|_n}) = \emptyset$.

v. La unión $\bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} \left(\bigcup_{j<\omega} U_{s^\frown j}\right)$ es denso en X.

Las propiedades i. a iv. y la vi. están dadas por las propiedades del encaje denso h, y la propiedad v. se deduce de ii. y el supuesto de que $U_\emptyset = X$.

A continuación veremos que la parte del espacio que queda cubierta por los elementos del esquema de Luzin es un conjunto no numerable y, por consiguiente, un subespacio de Luzin de X, esto es por el Lema 1.1 del artículo [25]. Para llevar a cabo esto, definimos para cada $n < \omega$ y $s \in \omega^n$

$$W_s := \overline{U_s} \setminus \left(\bigcup_{j<\omega} U_{s^\frown j}\right) \quad \text{y} \quad \hat{W}_n := \bigcup_{s\in\omega^n} W_s.$$

Observemos que para cada $s \in \omega^n$ y $n < \omega$, W_s es un conjunto denso en ninguna parte. Por ello, W_s es numerable y, por lo tanto, cada $\hat{W}_n$ es numerable, para cada $n < \omega$. Notemos además que, para cada $n < \omega$ se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$X \setminus \left(\bigcup_{s\in\omega^{n+1}} U_s\right) = \bigcup_{j\leq n} \hat{W}_n.$$

Ya que el conjunto $\bigcup_{n<\omega} \hat{W}_n$ es numerable, entonces

$$X \setminus \bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} U_s$$

es a lo más numerable. Esto implica que la parte que queda cubierta por el esquema de Luzin es no numerable y, por consiguiente es un subespacio de Luzin.

Consideramos ahora el conjunto

$$P := \left\{ f \in \omega^\omega : \forall n < \omega \left[\bigcap_{n<\omega} U_{f|_n} \neq \emptyset \right] \right\}.$$

Afirmamos que el conjunto P es no numerable. Para ver esto, primero notemos que dada una rama $f \in \omega^\omega$, si

$$\bigcap_{k<\omega} U_{f|_k} \neq \emptyset,$$

entonces dicha intersección es un conjunto denso en ninguna parte, por el inciso iv de las características descritas arriba que satisface el encaje h y, por consiguiente, es a lo más numerable. Supongamos que existe una enumeración $P = \{f_l : l \in \omega\}$, vamos a llegar a una contradicción. Entonces se tiene que el conjunto

$$Z_0 = \bigcup_{l<\omega} \left(\bigcap_{k<\omega} U_{f_l|_k}\right)$$

es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, por lo que también es numerable. Así, $X \setminus Z_0$ es también un espacio de Luzin por el Lema 1.1 del artículo [25]. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Z_0 = \emptyset$ y $P = \emptyset$. Con esto estamos suponiendo que para cualquier rama de T, la intersección es vacía. Mostraremos una contradicción construyendo una estrategia ganadora para el jugador I en el juego de Choquet:

Primero, el jugador I elige abierto $V_0 = X$. Supongamos que el jugador II elige un abierto $W_0 \subseteq V_0$. Sabemos $\{U_{0^\frown n} : n \in \omega\} \subseteq T$ es la familia de abiertos ajenos entre sí cuya unión es densa en X. Entonces el jugador I toma en cuenta un $n_0 \in \omega$ tal que

$$W_0 \cap U_{0^\frown n_0} \neq \emptyset.$$

Dicha intersección es en particular un conjunto abierto, que es precisamente el siguiente tiro del jugador I. De esta forma, el jugador I estará eligiendo los abiertos de su estrategia para esta partida. Al final de la partida, las selecciones del primer jugador estarán condicionadas por una familia $\{U_{f\restriction_n} : n < \omega\}$, en donde $f \in \omega^\omega$, de tal forma que $V_n = W_n \cap U_{f\restriction_n} \neq \emptyset$, por lo que $\bigcap_{n<\omega} W_n = \emptyset$, ya que cada rama de T tiene intersección vacía. Esto determina una estrategia ganadora para el jugador I en el juego de Choquet, lo que es una contradicción al Teorema de Oxtoby, pues X es de la segunda categoría. Por consiguiente, la afirmación es verdadera, y el conjunto P es no numerable.

Usando el axioma de elección, para cada $f \in P$, elegimos un $x_f \in \bigcap_{n<\omega} U_{f|n}$, y definimos el siguiente subespacio que resultará ser el que buscamos:

$$X_0 := \{x_f : f \in P\}.$$

Como X_0 es no numerable, entonces es de Luzin. Además, ya que X es de Luzin, entonces es hereditariamente *ccc* por el Corolario 4.3.4, así que X_0 puede tener a lo más una cantidad numerable de puntos aislados. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que no tiene puntos aislados: Si los tuviera, consideramos

$$N = \{x \in X_0 : x \textit{ tiene una vecindad numerable}\}.$$

Dicho conjunto es numerable. En efecto, si $|N| > \omega$, y para cada $x \in N$, V_x es una vecindad numerable de x, entonces $\{V_x \cap N : x \in N\}$ es una cubierta para el subespacio N sin subcubiertas numerables, lo cual es una contradicción con el Lema 4.3.5. Así, tomamos el conjunto $X_0 \setminus N$, que es conocido como el *kernel perfecto de* X_0, el cual es no numerable y, por lo tanto, subespacio de Luzin de X_0. Finalmente, la función $\varphi : X_0 \to \omega^\omega$ que se requiere está dada por la correspondencia

$$x_f \overset{\varphi}{\mapsto} f,$$

para todo $f \in P$. No es difícil ver que esta función es continua e inyectiva. □

Lema 4.3.16. *Sea $B \subseteq \omega^\omega$ con $|B| = \omega_1$ y tal que $B_\geq$ es un espacio separado izquierdo de tipo ω_1, donde $\leq$ es la relación de dominancia en ω^ω. Entonces B es hL.*

Demostración. Sea $A \subseteq B$ y supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta no numerable para A. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2,$$

de modo que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ sean no numerables, los elementos de $\mathcal{U}_1$ sean abiertos de A visto como subespacio de ω^ω y $\mathcal{U}_2 \subseteq \{[b, \rightarrow)_\leq \cap A : b \in A\} \setminus \{\emptyset\}$. Como ω^ω es métrico separable, entonces es hL, particularmente $\bigcup \mathcal{U}_1$ es Lindelöf, y ya que $\mathcal{U}_1$ es una cubierta abierta para dicho subespacio, entonces es posible encontrar una subcubierta numerable $\mathcal{V}_1$ para $\bigcup \mathcal{U}_1$. Para continuar con el argumento, si fijamos

$$b_0 = \min\{b \in A : [b, \rightarrow)_\leq \cap A \in \mathcal{U}_2 \setminus \{\emptyset\}\},$$

entonces $\bigcup \mathcal{U}_2 \subseteq [b_0, \rightarrow)_\leq \cap A$. Así, $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}_1 \cup ([b_0, \rightarrow) \cap A)$ y $\mathcal{V}_1 \cup \{[b_0, \rightarrow) \cap A\}$ es un subconjunto numerable de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, A es Lindelöf. □

En este punto, hacemos un breve comentario sobre una propiedad que cumple $\mathbb{R}$ y todos los espacios separables.

Definición 4.3.17. Un espacio separable X es *cdh (por countable dense homogeneous, que se puede traducir como homogéneo de denso numerable)* si para cualesquiera dos subconjuntos densos numerables A, $B \subseteq X$, existe un automorfismo $g : X \to X$ de modo que $g[A] = B$.

Las personas interesadas en conocer más sobre esta clase de espacios puede consultar el survey [1]. Como mencionamos anteriormente, $\mathbb{R}$ es un ejemplo de un espacio *cdh.*

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.3.18 (S. Todorčević, [46])**.** *Supongamos que*

1. (X, τ) *es un espacio de Luzin sin puntos aislados.*
2. X *no contiene L-espacios.*
3. $(\omega^\omega)_\leq$ *no contiene L-espacios.*
4. *No existen árboles de Suslin.*

Entonces existen un subespacio (Y, τ_Y) *de* X *con* $|Y| = \omega_1$ *y una topología* τ' *en* Y *que refina a* τ_Y *tal que* (Y, τ') *es un L-espacio.*

Demostración. La estrategia para demostrar el teorema es construir un espacio de la forma

$$Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$$

y tal que para cada $\alpha < \omega_1$, exista un abierto U_α de X tal que $x_\alpha \in U_\alpha$ y se cumplan las siguientes propiedades:

- $\forall \xi < \alpha \left[x_\xi \notin U_\alpha\right]$.
- $Y \cap \left(\overline{U_\alpha} \setminus U_\alpha\right) = \emptyset$.

Primero pedimos estas condiciones para el conjunto Y y veremos cómo construir una topología τ' en Y para obtener el contraejemplo buscado. Después de convencernos de esto, procederemos a la construcción del conjunto Y. Consideraremos la topología τ' en Y generada por la siguiente familia de subconjuntos de X:

$$\{U_\alpha \cap Y : \alpha < \omega_1\} \cup \{Y \setminus U_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Es claro que τ' es regular, $\tau_Y \subseteq \tau'$ y que el espacio (Y, τ') es imagen continua (bajo la función identidad) de (Y, τ_Y), esto es cierto por el segundo inciso de las condiciones requeridas para los abiertos U_α's. Para ver que es T_2, consideremos x, $y \in Y$. Como (Y, τ_Y) es T_2, entonces existen $U_x\, U_y \in \tau_Y$ ajenos con $x \in U_x$ y $y \in U_y$. Como $\tau' \subseteq \tau_Y$, entonces U_x, $U_y \in \tau'$. Recordemos que los espacios de Luzin son hL (Lema 4.3.5). Así, el subespacio (Y, τ_Y) es hL, y como (Y, τ') es imagen continua de (Y, τ_Y), entonces (Y, τ') también es hL.

El espacio (Y, τ') no es separable. En efecto, supongamos que existe un subconjnuto $W = \{w_n : n < \omega\} \subseteq Y$ que es τ'-denso. La familia que genera a la topología τ' es no numerable, por lo que

$$\exists n < \omega\, \exists J \in [\omega_1]^{\omega_1} \Big[\alpha \in J \to w_n \in U_\alpha\Big].$$

Sea $\beta < \omega_1$ tal que $w_n = x_\beta$. Como J es no numerable, entonces existe un $\alpha \in J$ tal que $\alpha > \beta$, lo que implica

$$\exists \alpha < \omega_1 \Big[\alpha > \beta \,\wedge\, x_\beta \in U_\alpha\Big].$$

Esto lleva a una contradicción con el primer inciso que deben cumplir los U_α's. Por lo cual, se obtiene que el espacio (Y, τ') no es separable.

Procedemos a construir el conjunto Y que buscamos. Por el Lema 4.3.15, existe una función φ continua e inyectiva de un subespacio de Luzin de X a los reales. Sin pérdida de generalidad, supongamos que dicha función φ está definida en todo X. Recordemos que X mismo es un espacio de Luzin. Probemos lo siguiente:

Afirmación. Para cada subconjunto numerable $D \subseteq X$, existe un abierto V que contiene a D y tal que $X \setminus V$ es no numerable.

Demostración de la afirmación. Supongamos que la afirmación no es cierta, i.e. existe un conjunto numerable $D \subseteq X$ tal que para todo abierto V con $D \subseteq V$, se tiene que $X \setminus V$ es numerable. Como φ es continua, entonces para cada abierto U de $\mathbb{R}$ que contiene a $\varphi[D]$, se tiene que $|X \setminus \varphi^{-1}[U]| \leq \omega$. Por lo cual, se tiene que $|\varphi[X] \setminus U| \leq \omega$. Como $\mathbb{R}$ es *cdh*, entonces podemos fijar un homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que $g[\mathbb{Q} \cup \varphi[D]] = \mathbb{Q}$. En particular, $g[\varphi[D]] \subseteq \mathbb{Q}$. Así, $g[\varphi[X]]$ es un subconjunto de reales de tamaño ω_1 y concentrado alrededor de $g[\varphi[D]]$, que es un subconjunto numerable de $\mathbb{Q}$. Aplicando el Corolario 4.3.11, podemos encontrar un subconjunto B de ω^ω que no es $<^*$-acotado y de tipo de orden ω_1. Por el Lema 4.3.7, si $\leq$ es la relación de dominancia en ω^ω, entonces $B_\geq$ es un separado izquierdo de tipo ω_1, por lo que no es hereditariamente separable, en virtud del Lema 4.1.4. Por otro lado, $B_\geq$ es hL en virtud del Lema 4.3.16. Esto es una contradicción con el tercer inciso de las hipótesis del teorema. Por lo tanto, la afirmación es verdadera. □

Usando la afirmación anterior, construimos las sucesiones de x_α's y U_α's recursivamente:

$$D_\alpha := \{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \bigcup \{\overline{U_\xi} \setminus U_\xi : \xi < \alpha\}.$$

Como X es Luzin, entonces cada D_α es numerable. En virtud de la afirmación de arriba, para cada α existe un abierto V_α que contiene a D_α y tal que $F_\alpha = X \setminus V_\alpha$ es no numerable. Por lo tanto, F_α no puede ser denso en ninguna parte, así que contiene un abierto U_α en su interior. Entonces procedemos a elegir un punto $x_\alpha \in U_\alpha$. Es fácil ver que los dos incisos requeridos se satisfacen. Por lo tanto, si hay un espacio de Luzin, entonces hay un L-espacio. $\square$

Capítulo 5

Una aplicación a la teoría de grupos topológicos

Decimos que un espacio X es de *Fréchet-Urysohn* o que satisface la *propiedad de Fréchet-Urysohn* si para todo $Y \subseteq X$ y todo $x \in \overline{Y}$ existe una sucesión $\{x_n\}_n \subseteq Y$ tal que $x_n \to x$. Un espacio X tiene *estrechez numerable en un punto x* si existe un $A \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $x \in \overline{A}$, y decimos que el espacio tiene estrechez numerable si todos sus puntos tienen estrechez numerable. Todo espacio primero numerable y T_1 es de Fréchet-Urysohn, y todo espacio de Fréchet tiene estrechez numerable. Pensando en esto, no es difícil convencerse que las propiedades de ser Fréchet-Urysohn y tener estrechez numerable tienen algo en común con los espacios métricos separables: Nos dicen que se puede "aproximar" cualquier punto del espacio con una sucesión, lo cual no es una observación trivial en general, pues existen espacios en los que sólo se pueden aproximar a sus puntos a través de redes indizadas con conjuntos dirigidos no numerables, por ejemplo l_∞. Uno de los enfoques que se toman en topología es si cierta propiedad topológica se preserva en el producto de espacios que la cumplen. Nosotros estaremos interesados en estas propiedades "de convergencia", y desde la segunda mitad del siglo pasado se tenía conocimiento de que estas propiedades no son "multiplicativas". Por ejemplo, en el artículo [2] de A. Arkhangel'skii se demuestra la existencia de un espacio de Fréchet X tal que $X \times X$ no es Fréchet. A su vez, se observó que en grupos topológicos, varias de estas propiedades de convergencia se "fortalecen". Por ejemplo, es un teorema conocido que todo grupo topológico primero numerable es metrizable, mientras que la recta de Sorgenfrey es un espacio primero numerable y no metrizable. En contraste con el resultado de A. Arkhangel'skii, P.J. Nyikos demuestra en [35] que todo grupo topológico Fréchet de hecho cumple una propiedad más fuerte que ser Fréchet. Así que uno trabajando con estos conceptos podría intuir que estas propiedades de convergencia se preservan en el producto de grupos topológicos. Sin embargo, esto no ocurre así: En [29], V.I. Malykhin construye un grupo topológico Fréchet G tal que $G \times G$ no tiene estrechez numerable. En este capítulo, usando el forcing de Cohen, daremos la construcción que da V.I Ma;ykhin en [30] de un grupo topológico G hereditariamente separable y tal que $G \times G$ no tiene estrechez numerable.

5.1. Un grupo topológico G hereditariamente separable tal que $G \times G$ tiene estrechez no numerable

En este capítulo detallaremos la construcción del grupo que se menciona en la primera parte del artículo de Malykhin [30]. Nuestra exposición es muy clara, lo cual ayudará al lector para entender las construcciones que se llevan a cabo usando reales de Cohen, que es una de las finalidades de esta tesis. La estrategia que llevó a cabo Malykhin fue que partir de un real de Cohen construyó el grupo deseado como un subgrupo de 2^{ω_1} mediante la definición de sus coordenadas usando dicho real.

Como hemos hecho hasta ahora, si $A \subseteq \omega \times 2$, entonces denotaremos a la proyección de W en ω como

$$\pi_1[W] = \{n < \omega : \exists i < 2\, [(n, i) \in W]\}.$$

Para constuir un grupo topológico que es hereditariamente separable, consideraremos el orden parcial

$$\mathbb{P} = \{p \in Fn(\omega \times 2, 2) : \forall k \in \pi_1[dom(p)]\, [p(k, 0) = 1 \vee p(k, 1) = 1]\}$$

y el orden en $\mathbb{P}$ será el heredado de $Fn(\omega \times 2, 2)$, i.e., la contención invertida. Se sigue del hecho de que $\mathbb{P}$ y $Fn(\omega \times 2, 2)$ son numerables, del Lema 1.8.2, el Corolario 1.6.8 y el Teorema 1.6.10, que inducen la misma extensión genérica. El lector debe de observar que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces $r = \bigcup G \in M[G]$ es un real de Cohen con la siguiente propiedad:

$$\forall k < \omega\, [r(k, 0) = 1 \vee r(k, 1) = 1]. \tag{5.1.0.1}$$

Construcción del grupo.

En todo lo siguiente, fijaremos un modelo transitivo numerable de ZFC M, y en M un conjunto $\mathcal{A} := \{\theta_\alpha : \alpha \to \omega \mid \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ de funciones inyectivas, de modo que $\mathcal{R} := \{ran(\theta_\alpha) : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ sea una familia casi ajena. Así, cuando consideremos una función inyectiva θ_γ con $\gamma < \omega_1$, estaremos refiriéndonos al elemento de $\mathcal{A}$ con el índice γ.

El grupo que construiremos será el generado por un subconjunto particular Y de funciones de 2^{ω_1}, cuyos elementos dependerá de un real de Cohen en su definición como se describe a continuación:

Si r es un real de Cohen que satisface (5.1.0.1), entonces para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$ e $i < 2$ la función $y_{\beta,i} : \omega_1 \to 2$ estará dada por

$$y_{\beta,i}(\gamma) = \begin{cases} r(\theta_\gamma(\beta), i) & \text{si } \beta < \gamma \\ 0 & \text{si } \gamma \leq \beta. \end{cases} \tag{5.1.0.2}$$

Así, nuestro conjunto Y consistirá de las funciones $y_{\beta,i}$'s. En los siguientes lemas, hablaremos de las funciones $y_{\beta,i}$'s sin saber exactamente qué objetos son, pues su definición dependerá de un filtro $\mathbb{P}$-genérico. Para comodidad del lector que se esté introduciendo en la técnica de forcing, explicaremos por qué se puede hacer esto mediante los siguientes $\mathbb{P}$-nombres de las funciones $y_{\beta,i}$'s:

Consideramos el $\mathbb{P}$-nombre para r:

$$\mathring{r} = \{(((\check{n}, \check{i}), \check{j}), p) : ((\check{n}, \check{i}), \check{j}) \in p\}. \tag{5.1.0.3}$$

Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \mathring{r} = \bigcup \Gamma\}$ es denso en $\mathbb{P}$. Ahora, para cada $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$ y $i < 2$, propondremos un $\mathbb{P}$-nombre para la función $y_{\beta,i}$. Comenzamos fijando para cada par de ordinales γ, β, con $\omega < \beta < \gamma \leq \omega_1$, y cada $i < 2$, un $\mathbb{P}$-nombre $\tau_{\gamma,\beta,i}$ para $r(\theta_\gamma(\beta), i)$. Definimos entonces la siguiente función $\rho_{\beta,i} : \omega_1 \to M^{\mathbb{P}}$, dada por

$$\rho_{\beta,i}(\gamma) = \begin{cases} \tau_{\gamma,\beta,i} & \text{si } \beta < \gamma \\ \check{0} & \text{si } \beta \geq \gamma. \end{cases} \tag{5.1.0.4}$$

Con esto, ya podemos dar el nombre para $y_{\beta,i}$:

$$\mathring{y_{\beta,i}} := \left\{\left\langle \check{d}, p\right\rangle \mid d = (\gamma, j) \,\wedge\, \gamma < \omega_1 \,\wedge\, j < 2 \,\wedge\, p \Vdash \rho_{\beta,i}(\gamma) = \check{j}\right\}.$$

El lema de definibilidad 1.5.4 nos garantiza que $\mathring{y_{\beta,i}}$ es un $\mathbb{P}$-nombre en M. Ahora, veamos que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces

$$i_G(\mathring{y_{\beta,i}}) = y_{\beta,i}$$

donde $y_{\beta,i}$ es la función dada en (5.1.0.2) relativa al real $r = \bigcup G$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico; por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} i_G(\mathring{y_{\beta,i}}) &= \left\{d = (\gamma, j) \mid \exists p \in G\left[\left\langle \check{d}, p\right\rangle \in \mathring{y_{\beta,i}}\right]\right\} \\ &= \left\{(\gamma, j) \mid \exists p \in G\left[p \Vdash \rho_{\beta,i}(\gamma) = \check{j}\right]\right\} \end{aligned}$$

que, por el lema de la verdad 1.5.3, es igual al conjunto

$$\{(\gamma, j) \mid M[G] \models y_{\beta,i}(\gamma) = j\} = y_{\beta,i}$$

que era lo que se buscaba.

Con esto, siempre que hablemos de un filtro G genérico y la función $y_{\beta,i}$ relativa al real $r = \bigcup G$, formalmente nos estaremos refiriendo al conjunto $i_G(\mathring{y_{\beta,i}})$. De esta forma, el conjunto Y que buscamos queda bien determinado por un filtro genérico G, pues se cumple la igualdad

$$Y := \{i_G(\mathring{y_{\beta,i}}) : \beta \in \omega_1 \setminus \omega \,\wedge\, i < 2\}.$$

Por comodidad (y esperando que el lector tenga en mente qué lo discutido anteriormente), de ahora en adelante simplemente escribiremos

$$Y = \{y_{\beta,i} : \beta \in \omega_1 \setminus \omega \,\wedge\, i < 2\}.$$

Recordemos que la suma en el grupo topológico 2^{ω_1} está dada por

$$h(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) \pmod 2, \gamma < \omega_1.$$

El grupo que buscamos es el grupo $\mathcal{G}$ que consiste de todas las sumas finitas de elementos de Y con la suma en 2^{ω_1}:

$$\mathcal{G} = \left\{ g \in 2^{\omega_1} \quad \middle| \quad \exists a \in [(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]^{<\omega} \left[g = \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i} \right] \right\}.$$

El grupo $\mathcal{G}$ es hS: En esta parte, demostraremos que el grupo topológico $\mathcal{G}$ es hereditariamente seperable. El lector es prevenido de que la demostración de esta afirmación es un largo camino, en el cual estableceremos 5 lemas, algunos de los cuales son bastante técnicos, y que dependen cada uno del anterior.

Para facilitar la demostración de que un subconjunto de 2^{ω_1} es *hS*, utilizaremos el siguiente concepto:

Definición 5.1.1.

1. Un conjunto $X \subseteq 2^{\omega_1}$ es *finalmente denso* si y sólo si existe $\delta < \omega_1$ tal que para cada $p \in Fn(\omega_1 \setminus \delta, 2)$ se cumple que $[p] \cap X \neq \emptyset$.
2. Un conjunto $X \subseteq 2^{\omega_1}$ es *hereditaria y finalmente denso* (o *HFD*) si y sólo si cada $Z \in [X]^{\omega_1}$, Z es finalmente denso.
3. Diremos que un conjunto $X \subseteq 2^{\omega_1}$ es *débilmente hereditaria y finalmente denso* (o *wHFD*) si para cada $Z \in [X]^{\omega_1}$ existe $W \in [Z]^{\omega}$ finalmente denso.

El concepto de espacio *HFD* fue introducido por I. Juhász y A. Hajnal en [20], en donde también se demuestra que todo espacio *HFD* es hereditariamente separable. Si hay un $X \subseteq 2^I$ *HFD* y para cada $f \in X$, existe $f' \in 2^I$ tal que $|\{i \in I \mid f(i) \neq f'(i)\}| \leq \omega$, entonces $X' = \{f' : f \in X\}$ también resulta ser *HFD*. Esto tiene como corolario que si existe un subespacio de 2^I que es *HFD*, entonces es posible obtener un subespacio de 2^I que sea *S*-espacio. Se demuestra también en este artículo que bajo *CH*, existe un espacio *HFD* no numerable[1].

Para ver que un subespacio de 2^{ω_1} de cardinalidad ω_1 es hS, basta con comprobar que es *wHFD*, como lo establece el siguiente lema. Este hecho se aplicará al caso de nuestro grupo topológico.

Lema 5.1.2. *Si $X \subseteq 2^{\omega_1}$ es wHFD y $|X| = \omega_1$, entonces X es hS.*

Demostración. Sean $Z \in [X]^{\omega_1}$, $W \in [Z]^{\omega}$ finalmente denso, y $\delta < \omega_1$ el ordinal que atestigua la densidad final de W. Como 2^{ω} es homeomorfo a 2^{δ}, entonces podemos escoger un subconjunto $D' \subseteq 2^{\delta}$ numerable en 2^{δ} y tal que

$$D = \Big(Z \cap D' \Big) \cup W$$

es un conjunto numerable y denso en Z. □

Con los lemas siguientes, probaremos que dado un subconjunto X no numerable de $\mathcal{G}$, existe un subconjunto numerable Z de X de modo que la familia de condiciones $\{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash \mathring{Z}$ *es finalmente denso* $\}$ es $\mathbb{P}$-densa, donde $\mathring{Z}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para Z; de

[1] De hecho, se demuestra algo más fuerte. La *Hipótesis Generalizada del Continuo* (*GCH*) es la afirmación: $\forall \alpha \in ON$, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. Se demuestra que bajo *GCH*, es posible encontrar un subespacio *HFD* de 2^{ω_1} de cardinalidad ω_2.

este modo habremos demostrado que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces existe un $Z \in [X]^\omega$ de modo que

$$M[G] \models Z \textit{ es finalmente denso.}$$

Procederemos de la siguiente manera:

Consideraremos un conjunto $X \in [\mathcal{G}]^{\omega_1}$ arbitrario; después nos fijaremos en un conjunto $A' \in [(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]^{\omega_1}$ que satisface la siguiente propiedad

$$X = \left\{ g \in \mathcal{G} \quad \middle| \quad \exists a \in [A']^{<\omega} \left[g = \sum_{(\beta,i) \in \overline{a}} y_{\beta,i} \right] \right\}.$$

Podemos pensar al conjunto A' como un conjunto de índices para X. Luego nos aseguraremos de encontrar un conjunto $A \in [A']^\omega$ de tal forma que $A \in M$ y si Z tiene al conjunto A como su conjunto de índices, entonces

$$M[G] \models Z \textit{ es finalmente denso.}$$

Así, habremos probado que para cualquier subconjunto X no numerable de $\mathcal{G}$, podemos encontrar un subconjunto $Z \subseteq X$ numerable y finalmente denso en la extensión $M[G]$.

Notación. Si $A \subseteq [(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]$, entonces

$$A^* := \left\{ g \in \mathcal{G} \quad \middle| \quad \exists a \in [A]^{<\omega} \left[g = \sum_{(\beta,i) \in \overline{a}} y_{\beta,i} \right] \right\}.$$

Como una consecuencia del Lema 2.1.20, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.1.3. *Si κ es un ordinal no numerable en M y $E' \in [[\kappa]^{<\omega}]^{\omega_1}$, entonces existe $E \in [E']^{\omega_1}$ con $E \in M$.* □

Del corolario anterior, obtenemos el siguiente resultado que será el que nos ayudará en la demostración:

Corolario 5.1.4. *Supongamos que $A' \subseteq [(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]^{<\omega}$ tal que A' es no numerable y $A' \in M[G]$. Entonces existe $A \in [A']^{\omega_1}$ con $A \in M$.* □

Observemos que si A' es un conjunto no numerable en $M[G]$ entonces existe $A \in [A']^\omega$ tal que $A \in M$; éste es el conjunto de índices buscado y, a su vez, el conjunto $A^* = Z \subseteq X$ será la familia numerable finalmente densa en X. En los siguientes lemas demostraremos que la familia de condiciones que fuerzan que Z es finalmente denso constituyen un conjunto $\mathbb{P}$-denso y, por consiguiente, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces se dará que $M[G] \models Z$ *es finalmente denso.*

Lema 5.1.5 (V.I. Malykhin [30])**.** *Sean $a \in [(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]^{<\omega}$ y $\gamma < \omega_1$ tales que para todo $\beta \in \pi_1[a]$ se tiene que $\beta < \gamma$. Entonces para cada $p \in \mathbb{P}$ y $\alpha \in \pi_1[a]$, existen $s_0 \in \mathbb{P}$ y $k_0 \in 2$ de modo que $s_0 \leq p$, $dom(s_0) = dom(p) \cup (E(a, \alpha, \gamma) \times 2)$ y*

$$s_0 \Vdash \sum_{(\beta,i) \in \overline{a}_\alpha} \rho_{\beta,i}(\gamma) = \check{k_0}, \tag{5.1.5.1}$$

donde $E(a, \alpha, \gamma) := \{\theta_\gamma(\beta) : \beta \in \pi_1[a] \setminus \{\alpha\}\}$ y $a_\alpha = a \setminus \{(\alpha, 0), (\alpha, 1)\}$.

Demostración. Consideremos a la función θ_γ. Elegimos $s_0 \in \mathbb{P}$ de tal modo que $dom(s_0) = dom(p) \cup (E^a_\alpha \times 2)$. Pongamos

$$k_0 := \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_0(\theta_\gamma(\beta), i).$$

Afirmamos que s_0 satisface (5.1.5.1); en efecto, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico que contiene a s_0 como elemento, y sea $r = \bigcup G$. Entonces $s_0 \subseteq r$ y tenemos que

$$M[G] \models k_0 = \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} r(\theta_\gamma(\beta), i) = \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} y_{\beta,i}(\gamma)$$

que era lo que queríamos probar.

□

En el siguiente lema, demostraremos que el conjunto de condiciones que fuerzan la densidad final de Z cuando consideramos funciones parciales finitas constituye una familia $\mathbb{P}$-densa.

Lema 5.1.6 (V. I. Malykhin, [30])**.** *Sean $A \subseteq [(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]^{<\omega}$ un conjunto numerable infinito con $A \in M$ y $\delta = \sup\{\beta : \exists a \in \overline{a}\,[\beta \in \pi_1[a]]\}$. Si $\varepsilon \in Fn(\omega_1 \setminus \delta, 2)$ y $p \in \mathbb{P}$, entonces existen $a \in \overline{a}$ y $q \in \mathbb{P}$ tales que $q \leq p$ y*

$$q \Vdash \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} \rho_{\beta,i} \supseteq \check{\varepsilon}.$$

Demostración. Fijemos $p \in \mathbb{P}$. Supongamos que

$$\varepsilon = \{(\gamma_0, b_0), \ldots, (\gamma_n, b_n)\}.$$

La forma en que procedemos es usar el Lema 5.1.5 para forzar la contención elemento por elemento en ε. Consideremos a las funciones $\theta_{\gamma_0}, \ldots, \theta_{\gamma_n}$, sin pérdida de generalidad, supongamos que existe un $e \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $dom(p) = e \times 2$ y

$$\bigcup_{j<k\leq n} \big(ran(\theta_{\gamma_j}) \cap ran(\theta_{\gamma_k})\big) \subseteq e, \tag{5.1.6.1}$$

si éste no fuera el caso, entonces considereamos una extensión de p que cumpla la contención, lo cual es posible porque los rangos de dichas funciones son elementos de una familia casi ajena. Después tomamos el conjunto

$$c = \bigcup \big\{\theta^{-1}_{\gamma_j}[e] : j \leq n\big\}.$$

Como la preimagen de un conjunto finito bajo una función inyectiva es un conjunto finito, entonces $c \in [\omega]^{<\omega}$. Ya que A es un conjunto infinito de subconjuntos finitos de ω, entonces podemos fijar una $\overline{a} \in \overline{a}$ y un ordinal $\alpha \in \pi_1[\overline{a}] \setminus c$. De la definición de δ, se sigue que $\delta < \gamma_j$, para cada $j \leq n$. Sabemos que para cada $\beta \in \overline{a}$ y cada $j \leq n$, $\beta < \gamma_j$. Observe que ya se satisfacen las hipótesis del Lema 5.1.5 para cada γ_j, el papel de la "a" en cada aplicación del lema es jugado por la $\overline{a}$ que hemos fijado aquí. Entonces, por cada $j \leq n$, podemos tomar $s_j \in \mathbb{P}$ con $s_j \leq p$ y $k_j < 2$ de modo que

$$s_j \Vdash \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} \rho_{\beta,i}(\gamma_j) = k_j.$$

Fijemos $j \leq n$. Afirmamos que existe una condición $q_j \leq p$ de modo que la relación

$$q_j \Vdash \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} \rho_{\beta,i}(\gamma_j) = b_j. \tag{5.1.6.2}$$

se satisface. Para probar esto, recordamos del Lema 5.1.5 que

$$E(\overline{a},\alpha,\gamma_j) = \{\theta_{\gamma_j}(\beta) : \beta \in \pi_1[\overline{a}] \setminus \{\alpha\}\} \quad \text{y} \quad \overline{a}_\alpha = \overline{a} \setminus \{(\alpha,0),(\alpha,1)\},$$

y que $dom(s_j) = dom(p) \cup (E(\overline{a},\alpha,\gamma_j)\times 2)$. Entonces es claro que $\theta_{\gamma_j}(\alpha) \notin E(\overline{a},\alpha,\gamma_j)$. Por otro lado, ya que $\alpha \in \pi_1[\overline{a}]$, se tienen tres posibles casos:

Caso 1: $(\alpha,0)$, $(\alpha,1) \in \overline{a}$. Supongamos primero que $k_j = b_j$. Entonces definimos

$$q_j = s_j \cup \{(((\theta_{\gamma_j}(\alpha),0),1),(((\theta_{\gamma_j}(\alpha),1),1)\}.$$

Notemos que $q_j \leq s_j \leq p$. Luego, consideremos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G tal que $q \in G$, y pongamos que $r = \bigcup G$. Entonces en $M[G]$ las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i}(\gamma_j) &= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} r(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} q(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} q(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha),0) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha),1) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_j(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) + 1 + 1 \\
&= k_j + 0 \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $k_j \neq b_j$. En este caso, definimos

$$q_j = s_j \cup \{(((\theta_{\gamma_j}(\alpha),0),1),(((\theta_{\gamma_j}(\alpha),1),0)\}.$$

También se cumple en estas condiciones que $q \leq s_j \leq p$, y también se satisface la relación (5.1.6.2): Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $q \in G$, entonces $M[G]$ satisface que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i}(\gamma_j) &= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} r(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} q(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} q(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha),0) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha),1) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_j(\theta_{\gamma_j}(\beta),i) + 1 + 0 \\
&= k_j + 1 \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Caso 2: $(\alpha, 0) \in \overline{a}$ y $(\alpha, 1) \notin \overline{a}$. Como hicimos para el caso anterior, supongamos primero que $k_j = b_j$. Definimos la función

$$q_j = s_j \cup \{(((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 0), 0), (((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 1), 1)\}.$$

Verifiquemos que se da la relación (5.1.6.2): Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $q \in G$. En $M[G]$ es verdad que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i}(\gamma_j) &= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} r(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha), 0) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_j(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + 0 \\
&= k_j + 1 \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Si ocurre que $k_j \neq b_j$, entonces definimos

$$q_j = s_j \cup \{(((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 0), 1), (((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 1), 1)\}.$$

Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $q \in G$, entonces $M[G]$ modela que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i}(\gamma_j) &= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} r(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha), 0) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_j(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + 1 \\
&= k_j + 1 \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Caso 3: $(\alpha, 0) \notin \overline{a}$ y $(\alpha, 1) \in \overline{a}$. Si $k_j = b_j$, definimos

$$q_j = s_j \cup \{(((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 0), 1), (((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 1), 0)\}.$$

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $q \in G$. Así, en $M[G]$ es cierto que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i}(\gamma_j) &= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} r(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha), 1) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_j(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + 0 \\
&= k_j + 0 \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Si $k_j \neq b_j$, entonces fijamos

$$q_j = s_j \cup \{(((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 0), 0), (((\theta_{\gamma_j}(\alpha), 1), 1)\}.$$

Si G es un filtro con $q \in G$, se da en $M[G]$ que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i}(\gamma_j) &= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} r(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} q(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + q(\theta_{\gamma_j}(\alpha), 1) \\
&= \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}_\alpha} s_j(\theta_{\gamma_j}(\beta), i) + 1 \\
&= k_j + 1 \\
&= b_j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en cualquier caso, la relación (5.1.6.2) se verifica y la afirmación es cierta.

Para concluir con la demostración del lema, es suficiente comprobar que las condiciones $q_0, \ldots, q_n$ son compatibles. Sean $j < k \leq n$. Para esto, argumentaremos que

$$dom(q_j) \cap dom(q_k) = dom(p).$$

Es clara la contención $\supseteq$. Para ver la otra contención, supongamos que $(m, i) \in dom(q_j) \cap dom(q_k)$. Si $(m, i) \notin dom(p)$, se tiene de la forma en que construimos $dom(q_j)$ y $dom(q_k)$ que existen $\xi < \gamma_j$ y $\eta < \gamma_k$ de modo que $\theta_{\gamma_j}(\xi) = m = \theta_{\gamma_k}(\eta)$. Esto, junto con (5.1.6.1), implican que $(m, i) \in dom(p) = e \times 2$. Con lo anterior, podemos concluir que $q := q_0 \cup \ldots \cup q_n$ es una función en $\mathbb{P}$ tal que $q \leq p$ y

$$q \Vdash \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} \rho_{\beta,i} \supseteq \check{\varepsilon},$$

que era lo que deseábamos probar. $\square$

De esta manera, obtenemos la primera propiedad buscada de nuestro grupo $\mathcal{G}$:

Teorema 5.1.7 (V.I. Malykhin [30]). *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces*

$$M[G] \models \mathcal{G} \text{ es wHFD.}$$

Demostración. Sean $X \in [\mathcal{G}]^{\omega_1}$ y $B \in \left[[(\omega_1 \setminus \omega) \times 2]^{<\omega}\right]^{\omega_1}$ tal que $X = B^*$. Por el Lema 5.1.4, existe $A \in [B]^\omega$ con $A \in M$. Fijemos $\delta = \sup\{\beta : \exists a \in \overline{a}\,[\beta \in \pi_1[a]]\}$, y consideremos $\varepsilon \in Fn(\omega_1 \setminus \delta, 2)$. El Lema 5.1.6, existe un $a \in \overline{a}$ y un $q \in G$ tales que

$$q \Vdash \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} \mathring{y_{\beta,i}} \in [\check{\varepsilon}].$$

De aquí, se obtiene que $M[G] \models \sum_{(\beta,i)\in\overline{a}} y_{\beta,i} \in [\varepsilon]$. Por consiguiente

$$M[G] \models Z = A^* \text{ es finalmente denso },$$

con lo cual hemos demostrado que para todo $X \in [\mathcal{G}]^{\omega_1}$,

$$M[G] \models \exists Z \in [X]^\omega \text{ finalmente denso,}$$

que era lo que buscábamos probar. □

Para finalizar con el propósito de esta sección, demostraremos la siguiente propiedad topológica buscada del grupo $\mathcal{G}$:

Teorema 5.1.8 (V.I. Malykhin [28]). *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

$$M[G] \models \mathcal{G} \times \mathcal{G} \text{ tiene estrechez no numerable.}$$

Demostración. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico. Según la definición de estrechez, para probar nuestra afirmación, debemos encontrar en $M[G]$ un subconjunto X de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ y un elemento $x \in cl_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(X)$ tales que si $Z \in [X]^\omega$, entonces $g \notin cl_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(Z)$; nuestra x será la pareja $(0,0)$, y el conjunto X será $\{(y_{\beta,0}, y_{\beta,1}) \mid \beta < \omega_1\}$. Recordemos que el elemento neutro de $\mathcal{G}$ es la función constante 0; por lo tanto, $(0,0) \in \mathcal{G}\times\mathcal{G}$. Afirmamos que $(0,0) \in cl_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(X)$. En efecto, consideremos $\varepsilon \in Fn(\omega_1, 2)$ tal que $0 \in [\varepsilon]$; esto quiere decir que para todo $\beta \in dom(\varepsilon)$, $\varepsilon(\beta) = 0$. Fijemos

$$\gamma = \text{máx}\Big(dom(\varepsilon)\Big).$$

Para cada $\lambda > \gamma$ e $i < 2$, se tiene que $y_{\lambda,i} \in [\varepsilon]$, pues por definición de las funciones, como $\lambda > \beta$, para cada $\beta \in dom(\varepsilon)$, entonces $y_{\lambda,i}(\beta) = 0$. De este modo

$$[\varepsilon] \cap Y \neq \emptyset,$$

así que $(0,0) \in cl_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(X)$. Para la siguiente parte de la demostración, consideremos un conjunto $Z \in [X]^\omega$; probaremos que $(0,0) \notin cl_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(Z)$. Para esto, elegimos $\delta < \omega_1$ de modo que

$$\text{si} \quad (y_{\beta,0}, y_{\beta,1}) \in Z, \quad \text{entonces} \quad \beta < \delta.$$

Recordemos que si $r = \bigcup G$, entonces

$$\forall k < \omega \left[r(k,0) = 1 \vee r(k,1) = 1 \right].$$

Esto, junto con la definición de las funciones $y_{\beta,i}$, implica que $y_{\beta,0}(\delta) = 1$, ó bien $y_{\beta,1}(\delta) = 1$. Consideremos al conjunto $V = [\{(\delta,0)\}] \times [\{(\delta,0)\}]$ que es vecindad de $(0,0)$. Notemos que, por definición de las $y_{\beta,i}$'s,

$$\text{si} \quad y_{\beta,i} \in Z \quad \text{entonces} \quad y_{\beta,i}(\delta) = 1 \quad \text{para algún } i < 2,$$

por lo que $(y_{\beta,0}, y_{\beta,1}) \notin V$. Así, en $M[G]$ la pareja ordenada $(0,0) \notin cl_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(Z)$, que era lo que se quería demostrar. □

5.2. Comentarios adicionales

Haremos en esta sección comentarios finales sobre los conceptos de este capítulo. No se harán argumentos formales.

En el artículo [30] se avanza un poco más con el grupo que construimos.

Definición 5.2.1.

- Si X es un espacio y $x \in X$, entonces el *carácter de x* es

$$\chi(x) := \text{mín}\{\kappa : \textit{Existe una base local para } x \textit{ de cardinalidad } \kappa\}.$$

- El *carácter de un espacio X* es $\chi(X) := \sup\{\chi(x) : x \in X\}$.
- Un conjunto S es *centrado* si para todo $A \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, se tiene que $\bigcap A$ es infinito.
- Dado un conjunto S, una *pseudointersección* de S es un conjunto infinito B tal que para todo $A \in S$, $B \setminus A$ es finito.
- $\mathfrak{p} := \text{mín}\{|A| : A \subseteq [\omega]^\omega \textit{ es centrado y sin pseudointersecciones}\}$.

Es sabido que $\omega_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$, lo cual puede ser consultado en [7].

Resulta que el grupo construido en la sección anterior tiene carácter $< \mathfrak{c}$. Si se asume la afirmación $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, entonces todo espacio de carácter $< \mathfrak{c}$ es Fréchet. Además, si se supone $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ como axioma de M, entonces en cualquier extensión de M obtenida de forzar con Cohen se sigue cumpliendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Esto nos dice lo siguiente: Si la construcción anterior se hace a partir de un modelo de $ZFC + \mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, entonces en $M[G]$, el grupo $\mathcal{G}$ es Fréchet, y $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ no lo es.

Posterior a esto, se utiliza el espacio construido por J. Roitman en [41] y que presentamos en la segunda sección del capítulo 4 para demostrar que el producto de espacios hereditariamente Lindelöf no necesariamente es Lindelöf. Lo que se hace es considerar al espacio X construido por J. Roitman, se define $X' = \{1 - g : g \in X\}$ que también resulta ser un L-espacio, y se demuestra que $X \times X'$ no es Lindelöf.

En 1987, V.I Malykhin se hizo la pregunta de si existe un grupo topológico separable y Fréchet que no fuera metrizable. En [13], los autores construyen un modelo en el que todo grupo spearable y Fréchet es metrizable. Compárese este resultado con el grupo $\mathcal{G}$ que es separable y Fréchet, y el grupo $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ que no es Fréchet ni separable.

Capítulo 6

Espacios de Ostaszewski

En 1972, R. Jensen publicó el artículo [16], en el que demuestra que en el *universo construible de Gödel* $(V = L)$[1], que es el modelo en el que K. Gödel prueba la consistencia de la hipótesis del continuo, existen árboles de Suslin. Para su demostración, introduce un axioma conocido como el *principio* $\diamond$ *de Jensen*, que también se satisface en $V = L$. Sea κ un cardinal de cofinalidad no numerable. Un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es *club* si es cerrado en κ con la topología inducida por el orden, y no acotado. Un subconjunto $S \subseteq \kappa$ es *estacionario* si S interseca a todo club en κ. El principio $\diamond$ de Jensen es la afirmación

Existe una sucesión $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ *de modo que* $S_\alpha \subseteq \alpha$*, para todo* $\alpha < \omega_1$ *y si* $A \subseteq \omega_1$*, entonces el conjunto* $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = S_\alpha\}$ *es estacionario en* ω_1.

En [36], A. Ostaszewski utiliza el principio $\diamond$ de Jensen para contestar a una pregunta que algunos matemáticos discutían en la década de los 70'2: *Todo espacio perfectamente normal y numerablemente compacto es compacto?* (ver, por ejemplo, el artículo de V. I. Malykhin y B. È. Shapirovskii [32]). Usando este axioma, Ostaszewski define una topología en ω_1 que es T_2, no compacta, perfectamente normal, numerablemente compacta, localmente compacta y hereditariamente separable. En dicho artículo, introduce un debilitamiento de $\diamond$, que denota como $\clubsuit$, y es la afirmación

Existe una sucesión $\{S_\lambda : \lambda$ *es un ordinal límite numerable* $\}$ *de modo que* S_λ *es un subcojunto cofinal a* λ *de tipo de orden* ω *y para todo subconjunto no numerable* $A \subseteq \omega_1$*, existe un* $\lambda < \omega_1$ *tal que* $S_\lambda \subseteq A$.

Usando dicho principio, demuestra que es posible definir una topología en ω_1 que cumpla todas las propiedades descritas anteriormente, excepto la compacidad numerable. Dicho espacio es conocido como *espacio de Ostaszewski*. También observa que esta propiedad se puede obtener suponiendo la hipótesis del continuo en conjunción con $\clubsuit$. En [6], K. Devlin da una prueba de que $\diamond$ es equivalente a $\clubsuit + CH$.

Se tenía la pregunta de si era posible realizar la construcción de un espacio de Ostaszewski en un modelo de *CH* sin axiomas adicionales. Sin embargo, J. Roitman y T. Eisworth probaron en 1999 que existen modelos de solamente *CH* en los que no hay espacios de Ostaszewski [40].

[1]En el artículo [11], K. Gödel presenta su modelo construible.

Existe otro principio combinatorio conocido como el axioma (t), que es con el que trabajaremos en esta sección. Fue propuesto por I. Juhasz [17] y es un debilitamiento del axioma $\clubsuit$, es decir $\clubsuit$ implica el principio (t) pero no son equivalentes. Más aún, en [17] se demuestra que basta suponer el axioma (t) para construir un espacio de Ostaszewski en ω_1.

Nos damos a la tarea de estudiar una de las muchas aplicaciones a la combinatoria infinita del forcing de Cohen: probaremos que el axioma (t) es preservado en extensiones de modelos de *ZFC* después de agregar reales de Cohen. Después se demostrará la existencia de un espacio de Ostaszewski como consecuencia del axioma (t). De esta forma se tendrá que existe esta clase de espacios en extensiones de modelos de *ZFC* inducidas por el forcing de Cohen.

6.1. El axioma (t)

A continuación, para iniciar la sección, presentamos el ya mencionado axioma (t).

Definición 6.1.1 (I. Juhasz, [17]).

- $L(\omega_1) := \{\lambda < \omega_1 : \lambda \textit{ es ordinal límite}\}$
- Por (t) nos referiremos a la siguiente afirmación:

  Existe una sucesión $\{S_\lambda : \lambda \in L(\omega_1)\}$ *tal que para todo* $\lambda \in L(\omega_1)$, $S_\lambda \subseteq \lambda$ *es un orden de tipo* ω *cofinal en* λ *y tiene una partición* $S_\lambda = \bigcup_{n\in\omega} S_\lambda^n$, *de modo que para cada* $X \subseteq \omega_1$ *no numerable, existe un* $\lambda < \omega_1$ *tal que* $\forall n < \omega\big[|X \cap S_\lambda^n| = \omega\big]$.

En el siguiente Teorema, se demuestra que el axioma (t) se cumple cuando forzamos con Cohen. En particular, esto significa que dicho axioma es consistente con *ZFC*. Específicamente, forzaremos con un suborden denso de $Fn(\omega_1 \times \omega, \omega)$. La estrategia será agregar ω_1 funciones crecientes $g_\lambda : \omega \to \lambda$, con $\lambda \in L(\omega_1)$, a un modelo transitivo de *ZFC*. Las imágenes de dichas funciones conformarán la sucesión de conjuntos requerida por el axioma (t). Probaremos después que el resto de las condiciones establecidas por (t) son deducidas de la inyectividad de las funciones y la cofinalidad de la imagen en un ordinal límite. El lector podrá notar en la primera parte de la demostración cierta similitud con la manera de proceder en la prueba del Teorema de Vopěnka y Hrbáček 3.2.2. Para comenzar, en lo subsecuente nos referiremos por $\mathbb{P}$ al conjunto

$$\{p \in Fn(\omega_1 \times \omega, \omega) : p \textit{ es estrictamente creciente}\},$$

con el orden usual, i.e. la contención invertida.

Teorema 6.1.2 (I. Júhasz, [17]). *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC con $\mathbb{P} \in M$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces*

$$M[G] \models (t).$$

Demostración. Fijemos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M. Sabemos, por el Lema 2.1.4, el Lema 2.1.7 y el Corolario 2.1.9, que $\mathbb{P}$ preserva cardinalidades y cofinalidades, por lo cual se cumple la igualdad $L(\omega_1)^{M[G]} = L(\omega_1)^M$. En M, para cada $\lambda \in L(\omega_1)$ definimos

$$\mathbb{P}_\lambda := \{p \in \lambda^{<\omega} \mid p \textit{ es estrictamente creciente}\},$$

con el orden: $p \leq q \iff q \subseteq p$. Para cada $\lambda \in L(\omega_1)$ se cumple que $|\mathbb{P}_\lambda| = \omega$ y $\mathbb{P}_\lambda$ es no atómico. Así, por el Lema 1.8.2 para cada $\lambda \in L(\omega_1)$ podemos fijar un encaje denso $e_\lambda : Fn(\omega, \omega) \hookrightarrow \mathbb{P}_\lambda$. Ponemos $G_\lambda = \tilde{e_\lambda}(G)$, para cada $\lambda \in L(\omega_1)$. Por el Teorema 1.6.10, G_λ es un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M y $M[G_\lambda] = M\big[G\restriction_{\{\lambda\}\times\omega}\big]$, para cada $\lambda \in L(\omega_1)$. Consideremos para cada $\lambda \in L(\omega_1)$ el real de Cohen

$$g_\lambda = \bigcup G_\lambda : \omega \to \lambda.$$

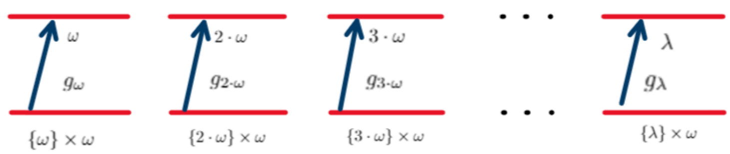


Figura 6.1: Cada g_λ es esencialmente un real de Cohen obtenido de forzar con un orden parcial equivalente a $Fn(\omega, \omega)$.Las líneas abajo representan a las copias de ω indizadas por $L(\omega_1)$, y las líneas arriba representan los ordinales límite que indizan las líneas de abajo.

Es claro que cada g_λ es una función estrictamente creciente y, como veremos a continuación, también es cofinal en λ. En efecto, fijemos $\beta < \lambda$ y consideremos el conjunto

$$D_\beta := \big\{p \in \mathbb{P}_\lambda : \exists i \in dom(p)\ \big[\beta < p(i)\big]\big\}.$$

Es fácil ver que D_β es denso en $\mathbb{P}_\lambda$, así que $D_\beta \cap G \neq \emptyset$ y, por lo tanto

$$\exists i \in dom(g_\lambda)\ \big[\beta < g_\lambda(i)\big].$$

Ahora, fijemos una partición de ω en conjuntos infinitos, $\{A_n : n \in \omega\}$, y para $n < \omega$ definimos

$$S^n_\lambda := g_\lambda[A_n].$$

Notemos que $S^n_\lambda \in M[G]$, para cada $n < \omega$, y $\{S^n_\lambda : n < \omega\}$ es una familia de conjuntos ajenos por parejas porque g_λ es inyectiva. Así, la primera parte de (t) se satisface, ya que λ fue elegido de manera arbitraria. Para probar que se satisface el resto de la definición, supongamos que $X \in M[G]$ y

$$M[G] \models X \in [\omega_1]^{\omega_1}.$$

En virtud del Lema 2.1.20, podemos encontrar un conjunto $Y \in M$ de modo que

$$M \models |Y| = \omega_1 \quad y \quad M[G] \models Y \subseteq X.$$

Tomemos un ordinal λ punto de acumulación de Y. Ahora fijemos un $n < \omega$, y para cada $k < \omega$, definimos el conjunto

$$D_{n,k} := \big\{p \in \mathbb{P}_\lambda : |\{i \in dom(p) \cap A_n : p(i) \in Y\}| > k\big\}.$$

Describimos cómo se hace inducción sobre k para ver que $D_{n,k}$ es denso en $\mathbb{P}_\lambda$. Supongamos que para un k se satisface la densidad, y sea $p \in \mathbb{P}$. Fijemos $q \in D_{n,k}$ y supongamos que $q \notin D_{n,k+1}$. Como A_n es un subconjunto infinito, existe un $m \in A_n \setminus dom(q)$. Definimos la extensión q' de q por medio de la asignación $i \mapsto q'(i)$, para cada $i < \omega$ con $\max(dom(q)) < i \leq m$, y tal que $\{q'(i) : \max(dom(q)) < i \leq m\} \subseteq Y$ es una sucesión creciente por debajo de λ y por arriba de $q(j)$, para cada $j \in dom(q)$. Es claro entonces que $q' \in D_{n,k+1}$.

Así, en virtud de la genericidad del filtro G_λ, se tiene que $G_\lambda \cap D_{n,k} \neq \emptyset$. De esto, podemos concluir que

$$M[G] \models \forall k < \omega \big[|S_\lambda^n \cap Y| > k \big],$$

lo cual basta para asegurar que, en $M[G]$, $|S_\lambda^n \cap Y| = \omega$, para cada $n < \omega$, tal y como se deseaba. Esto demuestra que el segundo requisito de (t) se cumple y, por lo tanto, en las extensiones genéricas producidas al forzar con Cohen, el axioma (t) se satisface. □

6.2. Espacios de Ostaszewski

A continuación presentamos formalmente la definición de *espacio de Ostaszeski*. Para comodidad del lector, vamos a recordar que un espacio topológico es *separado derecho de tipo* κ si existe un buen orden de tipo κ para dicho espacio de modo que todo segmento inicial sea un abierto del espacio.

Definición 6.2.1. Un espacio topológico X es de *Ostaszewski* si es un espacio no numerable, regular, localmente compacto, separado por la derecha de tipo ω_1 y tal que todo abierto es numerable o tiene complemento numerable.

De la caracterización 4.1.4, se sigue que los espacios de Ostaszewski no son hereditariamente Lindelöf.

En el siguiente teorema expondremos la construcción dada por I. Júhasz [17] de un espacio de Ostaszewski utilizando el axioma (t).

Teorema 6.2.2. *El principio* (t) *implica la existencia de un espacio de Ostaszewski.*

Demostración. Supongamos el principio (t), i.e. existe una sucesión

$$\{S_\lambda : \lambda \in L(\omega_1)\}$$

tal que para cada λ, $S_\lambda \subseteq \lambda$ es un suborden de tipo ω, y existe una partición

$$S_\lambda = \bigcup_{n \in \omega} S_\lambda^n$$

de modo que si $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ entonces existe un $\lambda \in L(\omega_1)$ tal que $|X \cap S_\lambda^n| = \omega$ para todo $n \in \omega$.

La manera de construir el espacio que buscamos es construir recursivamente una topología τ_λ sobre cada ordinal límite $\lambda < \omega_1$ tal que

1. τ_λ es localmente compacta,

2. τ_λ es T_2.

3. Para todo $\mu \in \lambda \cap L_1$, $\tau_\mu = \tau_\lambda \cap \mathcal{P}(\mu)$.

Al final la topología generada por la unión de las τ_λ será la topología buscada en ω_1. Primero definimos $\tau_\omega = \mathcal{P}(\omega)$, claramente τ_ω es una topología localmente compacta T_2. Si λ es un límite de ordinales límites numerables μ para los que ya se ha definido una topología τ_μ, entonces τ_λ es la topología generada por $\bigcup_{\mu<\lambda} \tau_\mu$. Si $\lambda = \mu + \omega$, con μ un ordinal límite numerable para el que ya se tenga definida una topología localmente compacta T_2, y separada derecha τ_μ. Para cada $\alpha \in S_\mu$, elegimos una vecindad compacta para α, K_α de modo que los elementos del conjunto $\{K_\alpha : \alpha \in S_\mu\}$ sean ajenos entre sí; es posible elegir a dichos conjuntos de esta manera porque S_μ es un subespacio cerrado y discreto en (μ, τ_μ) (por ser un orden de tipo ω). Con esto en mente definimos una base para cada $\mu + n$, donde $n \in \omega$: Fijamos $F \in [S_\mu^n]^{<\omega}$, y definimos el básico

$$B_n(F) := \{\mu + n\} \cup \bigcup \{K_\alpha : \alpha \in S_\mu^n \setminus F\}.$$

Entonces una base para $\mu + n$ es el conjunto $\mathcal{B}_n := \{B_n(F) : F \in [S_\mu^n]^{<\omega}\}$. Así construimos la topología τ_λ.

1. Observe que cada $B_n(F)$ es compacto en τ_λ. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para $B_n(F)$. Sea $U \in \mathcal{U}$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mu + n \in U$. Entonces existe un $F' \in [S_\mu^n]^{<\omega}$ tal que $\mu + n \in B_n(F') \subseteq U$. Si $F' \subseteq F$, entonces $\{U\}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$. De lo contrario, consideremos el conjunto $\bigcup_{\alpha \in F' \setminus F} K_\alpha$ que es una unión finita de compactos y, por lo tanto, compacto. Entonces existe una subcubierta finita $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ para dicho compacto. Entonces $\mathcal{U}' \cup \{U\}$ es una subcubierta finita para $B_n(F)$.

2. También es claro que cada τ_λ es una topología T_2 (esto se da por que los K_α son ajenos) y es topología separada derecha (la unión de los básicos en cada segmento incial devuelve el mismo segmento inicial).

3. Es claro que $\tau_\mu = \tau_\lambda \cap \mathcal{P}(\mu)$, para $\mu \in \lambda \cap L_1$.

Se sigue entonces que la topología τ_{ω_1} generada por la unión de las τ_λ es localmente compacta, T_2 y separada por la derecha. Ahora veremos que todo abierto es numerable o conumerable. La estrategia es tomar un subconjunto no numerable $X \subseteq \omega_1$ y probar de manera inductiva que para un $\mu \in L(\omega_1)$, se tiene que $[\mu, \omega_1) \subseteq \overline{X}$. De esta manera, si un abierto U tiene complemento no numerable, entonces $\omega_1 \setminus U$ es un cerrado no numerable, por lo que contiene a un segmento final de ω_1, lo que implica que U está contenido en un segmento inicial de ω_1.

Para comenzar con el paso base, supongamos que X es un subconjunto no numerable de ω_1. Por *(t)*, podemos encontrar un ordinal límite μ tal que $|X \cap S_\mu^n| = \omega$ para cada $n < \omega$. Notemos que cada S_μ^n es una sucesión que convergea $\mu + n$, según la topología τ_{ω_1}. Por consiguiente, se cumple que $[\mu, \mu + n) \subseteq \overline{X}$, para cada $n < \omega$. Concluímos entonces que $[\mu, \mu + \omega) \subseteq \overline{X}$.

Supongamos ahora que para un $\alpha < \omega_1$, se tiene que $[\mu, \mu + \alpha \cdot \omega) \subseteq \overline{X}$. Fijemos un natural $n < \omega$; veremos que $\mu + \alpha \cdot \omega + n \in \overline{X}$. Para esto, consideremos el básico

$$B_n(F) = \{\mu + \alpha \cdot \omega + n\} \cup \bigcup \{K_\alpha : \alpha \in S_{\mu+\alpha\cdot\omega}^n \setminus F\}, \quad F \in [S_{\mu+\alpha\cdot\omega}^n]^{<\omega}.$$

Como $S_{\mu+\alpha\cdot\omega}$ es cofinal en $\mu+\alpha\cdot\omega$ y además $S^n_{\mu+\alpha\cdot\omega}$ es un subconjunto infinito de $S_{\mu+\alpha\cdot\omega}$, entonces $S^n_{\mu+\alpha\cdot\omega}$ también es cofinal en $\mu+\alpha\cdot\omega$, por lo que podemos encontrar un $\beta \in S^n_{\mu+\alpha\cdot\omega}$ tal que $\mu < \beta$ y $\max F < \beta$. De lo anterior se sigue que

$$\beta \in [\mu, \mu+\alpha\cdot\omega),$$

así que $\beta \in \overline{X}$. Por consiguiente, $K_\beta \cap X \neq \emptyset$. Observe también que $K_\beta \subseteq B_n(F)$, pues $\max F < \beta$. De esta manera, se tiene que $B_n(F) \cap X \neq \emptyset$, y concluímos que $\mu+\alpha\cdot\omega+n \in \overline{X}$. Así,

$$[\mu, \mu+(\alpha+1)\cdot\omega) \subseteq \overline{X}.$$

Por lo tanto, se tiene que $[\mu, \omega_1) \subseteq \overline{X}$.

□

Corolario 6.2.3. *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC. Entonces para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G, $M[G] \models$ Existe un espacio de Ostaszewski.*

Bibliografía

[1] A.V. Arhangel'skii y Jan van Mill. «Topological Homogeneity». En: *Recent Progress in General Topology III* (ene. de 2014). DOI: `10.2991/978-94-6239-024-9_1`.

[2] A.V. Arkhangel'skii. «Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants». En: *Russ. Math. Surv.* 33.6 (1978), págs. 33-96.

[3] P.J. Cohen. «The Independence of the Continuum Hypothesis». En: *Proceedings of the National Academy of Science* 50.6 (dic. de 1963), págs. 1143-1148. DOI: `10.1073/pnas.50.6.1143`.

[4] P.J. Cohen. «The Independence of the Continuum Hypothesis, II». En: *Proceedings of the National Academy of Science* 51.1 (ene. de 1964), págs. 105-110. DOI: `10.1073/pnas.51.1.105`.

[5] P.J. Cohen. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2008. ISBN: 9780486469218.

[6] K. J. Devlin. «Variations on $\diamond$». En: *The Journal of Symbolic Logic* 44.1 (1979), págs. 51-58. ISSN: 00224812. URL: `http://www.jstor.org/stable/2273703`.

[7] E.K. van Douwen. «The integers and topology». En: *Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984), págs. 111-164.

[8] G. Frege y J.L. Austin. *The Foundations of Arithmetic: A Logico-Mathematical Enquiry Into the Concept of Number*. Northwestern University Press, 1980. ISBN: 9780810106055. URL: `https://books.google.com.mx/books?id=z0KtOtNYMEQC`.

[9] S. Gao. *Invariant Descriptive Set Theory*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 2008. ISBN: 9781584887942. URL: `https://books.google.com.mx/books?id=VfiOZWY282QC`.

[10] S. García Ferreira y L.R. López Villafán. *Una breve introducción al método de Forcing*. En proceso. UNAM, 2020.

[11] K. Godel. «The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 24.12 (1938), págs. 556-557. ISSN: 00278424. URL: `http://www.jstor.org/stable/87239`.

[12] F. Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos: una introducción*. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2003. ISBN: 9789703213924.

[13] M. Hrušák y U.A. Ramos García. «Malykhin's problem». En: *Advances in Mathematics* 262 (2014), págs. 193-212. ISSN: 0001-8708. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.05.009. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870814001753.

[14] T. Jech. «Non-provability of Souslin's hypothesis». En: *Comment. Math. Univ. Carolinae* 8 (1967), págs. 291-305.

[15] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition.* Springer, 2003.

[16] R.B. Jensen. «The fine structure of the constructible hierarchy». En: *Annals of Mathematical Logic* 4.3 (1972), págs. 229-308. ISSN: 0003-4843. DOI: https://doi.org/10.1016/0003-4843(72)90001-0. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003484372900010.

[17] I. Juhász. «A weakening of $\clubsuit$, with applications to topology». En: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 29.4 (1988), págs. 767-773.

[18] I. Júhasz. «A survey of S- and L-spaces». En: *Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978).* Colloq. Math. Soc. János Bolyai 23 (1980), págs. 675-688.

[19] I. Juhász y A. Hajnal. «On discrete subspaces of topological spaces». En: *Indag. Math.* 39 (1967), págs. 343-356.

[20] I. Juhász y A. Hajnal. «On hereditarily α-Lindelöf and hereditarily α-separable spaces». En: *Annales Univ. Sci. Budapest* 9 (1968), págs. 115-124.

[21] I. Juhász y A. Hajnal. «On first countable non-Lindelöf S spaces». En: *Coll. Math. Soc. János Bolyai* 10 (1973), págs. 837-852.

[22] I. Juhász y A. Hajnal. «A separable normal topological group need not be Lindelöf». En: *Gen. Topology Appl.* 6 (1976), págs. 199-205.

[23] A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461241904.

[24] K. Kunen. *Set Theory.* Studies in logic. North Holland. College Publications, 2011. ISBN: 9781848900509.

[25] K. Kunen y J.E. Vaughan. *Handbook of Set-theoretic Topology.* North Holland, 1984.

[26] D. Kurepa. «Ensembles ordonnés et ramifiés». En: *Publ. Math. Univ. Belgrade* 4 (1935), págs. 1-138.

[27] N. Lusin. «Sur un problème de M. Baire». En: *Comtes Rendus des Seances de l'Académie des Sciences.* Série I. Mathématique 158 (1914), págs. 1258-1261.

[28] V. I. Malykhin. «Topological properties of Cohen generic extensions». En: *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 52 (1989), págs. 3-33.

[29] V.I. Malykhin. «An example of a topological group». En: *Topological spaces and their mappings (E. L. Engel'son, editor)* (1981), págs. 120-123.

[30] V.I. Malykhin y D. Shakhmatov. «Cartesian products of Fréchet topological groups and function spaces». En: *Acta Math. Hungarica* 60 (1992), págs. 207-215.

[31] D. Marker. *Model Theory : An Introduction.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2002. ISBN: 9780387987606.

[32] «Martin's axiom and properties of topological spaces. I». En: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 213 (3 1973), págs. 532-535.

[33] J.T. Moore. «A solution to the L space problem». En: *Journal of the American Mathematical Society* 19.3 (dic. de 2005), págs. 717-736. ISSN: 1088-6834. DOI: 10.1090/s0894-0347-05-00517-5. URL: http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-05-00517-5.

[34] J.T. Moore. «A solution to the L space problem». En: *Journal of the American Mathematical Society* 19 (2006), págs. 717-736. DOI: 10.1090/S0894-0347-05-00517-5.

[35] P.J. Nyikos. «Metrizability and the Fréchet-Urysohn property in topological groups». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 83.4 (1981), págs. 793-801.

[36] A. Ostaszewski. «On countably compact, perfectly normal spaces». En: *J.London Math. Soc.* 14 (1976), págs. 503-516.

[37] J.C. Oxtoby. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1971. ISBN: 9780387900254.

[38] L. F. Pardo Sixtos. *El Axioma de forcing propio, un camino desde los principios*. Tesis para obtener el título de licenciado en Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias. 2018.

[39] K. Prikry. «Changing measurable into accesible cardinals». En: *Diss. Math.* 68 (1970), págs. 5-52.

[40] J. Roitma y T. Eisworth. «CH with no Ostaszewski Spaces». En: *Trans. of the American Math. Soc.* 351.7 (1999), págs. 2675-2693.

[41] J. Roitman. «Adding a random or a Cohen real: topological consequences and the effect on Martin's axiom». En: *Fundamenta Mathematicae* 103.1 (1979), págs. 47-60. URL: http://eudml.org/doc/211043.

[42] J. Roitman. «Basic S and L». En: *Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984), págs. 295-324.

[43] M.E. Rudin. «A normal hereditarily separable non-Lindelöf space». En: *Illinois J. Math.* 16 (1972), págs. 621-626.

[44] W. Sierpiński. *Hypothèse du continu*. Monografie matematyczne. Sém. de Math. Univ., 1934.

[45] J. Steprāns. «History of the Continuum in the 20th Century». En: *Handbook of the History of Logic* 6 (2012), págs. 1-57. DOI: 10.1016/B978-0-444-51621-3.50002-5.

[46] S. Todorcevic. *Partition Problems in Topology*. Contemporary mathematics. American Mathematical Society, 1989. ISBN: 9780821850916.

[47] S. Todorčević y U. Abraham. «Martin's Axiom and First-Countable S- and L-Spaces». En: *Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984).

[48] P. Vopěnka y K. Hrbáček. «The consistency of some theorems on real numbers». En: *Bull. Acad. Polon. Sci.* Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), págs. 107-111.

Índice alfabético