



Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Física

Criterios teóricos de correlaciones cuánticas mediante el formalismo de valores débiles

T E S I S

que para optar por el grado de
Maestro en Ciencias Físicas

PRESENTA:

Fernando Santiago Zamora Buen Abad

Tutor Principal:

Dra. Andrea Valdés Hernández
Instituto de Física UNAM

Ciudad de México, México. (Mayo) 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

De toda la tesis, esta pequeña sección probablemente es la más importante pues nos recuerda la importancia del agradecimiento. Me gustaría decir más pero acabaría haciendo de esto un poema, así que paso a los agradecimientos directamente.

Agradezco al CONACyT por los dos años de beca, que en muchos casos sin ella no es posible estudiar un posgrado y aunque en algunos otros casos se puede prescindir de ella, sigue siendo realmente de ayuda. Agradezco de forma similar al PAPIIT de la UNAM, IN113720 por una beca de tres meses, por el apoyo económico al CNF del 2020 en Morelia, y creo que porque indirectamente permite que haga este trabajo. Por una parte estos agradecimientos los escribo porque parece ser que son obligatorios, lo cual me molesta, pero por otra parte los escribo porque en verdad estoy agradecido. Los siguientes agradecimientos no son obligatorios y salen completamente de mi corazón.

Agradezco mucho y con mucho cariño a mi tutora Andrea. En este tiempo de conocernos, que ha sido ya bastante, me ha enseñado muchas cosas, me ha tenido paciencia en muchas situaciones, y me ha escuchado en ocasiones importantes. Le deseo que sea feliz y que esté bien.

Agradezco mucho al Dr. Eugenio Ley Koo y al Dr. Eduardo Nahmad (miembros de mi comité tutor) por aceptar ayudarme cuando lo necesité y por su siempre amable y formal respuesta.

Les agradezco a mis sinodales por dar parte de su tiempo a la lectura y comentarios de este trabajo, espero que les haya aportado algo de valor.

Agradezco a mis padres y a mi hermana porque sería un completo ciego si no.

Por último, quiero recordar que aunque el pensamiento lógico parece atractivo y evolucionado, tener en cuenta que es el que sienta la confusión. Que nadie se olvide de amar a los demás y que nadie pierda el amor propio, y si llega a ser posible, recordar que no hay «demás» ni «propio».

Resumen

En esta tesis se propusieron a los valores débiles como nuevas herramientas matemáticas para el estudio de correlaciones cuánticas en estados generales. Para lograr esto, primero se hizo una revisión general de los dos conceptos por separado: valores débiles y correlaciones cuánticas. Sobre esta base teórica se realizó el trabajo original de esta tesis partiendo de la llamada correlación débil definida en [1] como

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w, \quad (1)$$

donde $\langle \hat{S} \rangle_w$ representa el valor débil del operador \hat{S} .

Primero se generalizó el criterio de enredamiento para dos partículas en un estado puro establecido en el mismo artículo a un criterio de enredamiento bipartito para n partículas también en un estado puro. Este resultado sentó las bases para utilizar a los valores débiles en el estudio del enredamiento en estados puros e hizo surgir la pregunta acerca de su posible uso en el estudio de correlaciones generales en estados mezcla. El segundo resultado central de esta tesis se obtuvo al abordar esta pregunta mediante la generalización de la ecuación (1) de dos formas no equivalentes, estudiando la relación entre ambas y su utilidad para la medición de discordia cuántica. Estos resultados se presentan en el capítulo 2.

En este camino a la generalización de (1) a estados mezcla, se estudiaron los valores débiles en estados generales y a su vez se generalizaron algunas de las propiedades que presentaban para el caso de estados puros. Estos resultados se presentan en el capítulo 1 como continuación de la teoría de valores débiles para estados puros ya establecida.

Se probó que en efecto es posible detectar discordia de manera sencilla con las generalizaciones de (1) en estados mezcla, así se pudieron desarrollar dos criterios de correlaciones cuánticas generales (uno por cada generalización). Al final, se logró relacionar uno de los criterios de discordia establecidos en este trabajo con el criterio desarrollado por Guo en [2], reforzando los resultados de esta tesis y a su vez, la utilidad de los valores débiles en el estudio de correlaciones cuánticas de manera teórica.

Índice general

Introducción	1
1. Introducción a los valores débiles y a las correlaciones cuánticas	3
1.1. Teoría de la medición y valores débiles	3
1.1.1. Mediciones proyectivas	3
1.1.2. Un modelo de medición (esquema <i>ancilla</i>)	5
1.1.3. Mediciones débiles en el esquema ancilla	8
1.1.4. Postselección del sistema tras una medición débil.	10
1.2. Introducción a los valores débiles	13
1.2.1. Valores débiles como una corrección a la probabilidad	13
1.2.2. Algunas propiedades de los valores débiles	14
1.3. Valores débiles en estados mezcla	17
1.3.1. Propiedades de los valores débiles para estados mezcla	17
1.4. Correlaciones cuánticas	20
1.4.1. Separabilidad en un sistema de n partes	20
1.4.2. Criterios de enredamiento en sistemas bipartitos	22
1.4.3. Caracterización de enredamiento en sistemas multipartitos	25
1.5. Correlaciones cuánticas sin enredamiento	26
1.5.1. Estados con correlaciones cuánticas sin enredamiento	27
1.5.2. Discordia cuántica	29
2. Estudio de correlaciones cuánticas mediante valores débiles	33
2.1. Criterios de enredamiento en estados puros mediante valores débiles	33
2.1.1. Criterio de enredamiento en biparticiones $1 n-1$	33
2.1.2. Criterio de enredamiento en biparticiones $k n-k$	36
2.2. Correlación débil en estados mezcla	39
2.2.1. Una generalización natural	40
2.2.2. Otra generalización de C_{AB}^w para estados mezcla	47
2.2.3. Criterio de Guo y K_{AB}^w	52
3. Conclusiones	54
3.1. Conclusiones y observaciones finales	54
4. Apéndices	57
4.1. Apéndice A. Cálculo del estado del medidor en una medición débil	57
5. Bibliografía	60

Introducción

Como bien se sabe, una característica esencial que presentan los sistemas cuánticos es la capacidad de estar correlacionados de formas inaccesibles para sistemas clásicos. La primera correlación cuántica conocida desde 1935, y que ha sido la más estudiada en los últimos años es el **entrelazamiento**. Esta correlación se convirtió en un recurso físico muy importante que ha producido un cambio constante en teorías como la computación y la información cuántica, permitiendo diversas aplicaciones prácticas [3][4]. En el ámbito teórico, el enredamiento ha sido centro de muchos debates de naturaleza fundamental. Incluso, se ha llegado a considerar al entrelazamiento como el rasgo característico de la mecánica cuántica, trayendo consigo conceptos como el de no localidad [5][6]. Es por ello que el estudio de estados enredados es de suma importancia en la mecánica cuántica, pues no solo permite aplicaciones prácticas, sino también permite entender y avanzar a nivel fundamental sobre esta teoría.

Aún más, recientemente se ha encontrado que el enredamiento no es la única correlación no clásica que puede existir en un sistema cuántico compuesto. Hoy es bien reconocido que existen distintas nociones de correlaciones cuánticas en estados mezcla [7], y en general estas son englobadas por la **discordia cuántica** [8][9]. La consideración del enredamiento como rasgo fundamental de la mecánica cuántica puede entonces extenderse a correlaciones más generales sin equivalente clásico. El entendimiento de estas correlaciones trae luz sobre las características fundamentales que distinguen el mundo cuántico del mundo clásico [7] y la discordia de los estados cuánticos ha servido para aplicaciones en criptografía, computación cuántica y metrología, entre otros [10].

El objetivo de esta tesis, es entonces, dar herramientas matemáticas para determinar teóricamente si un estado dado posee correlaciones cuánticas. En la literatura se han desarrollado distintas formas de hacerlo, por ejemplo para el enredamiento, en [11][4][12] se pueden encontrar algunos criterios y medidas basados en testigos de enredamiento, operadores positivos, descomposición de Schmidt, etc. Para correlaciones distintas del enredamiento, existen criterios basados en de la discordia cuántica, y algunas de ellas se pueden encontrar en [6][7]. La novedad de este trabajo será la utilización de **valores débiles** en la detección teórica de correlaciones no clásicas.

Los valores débiles fueron introducidos por primera vez en 1988 por Aharonov, Albert y Reidman [13]. Se introdujeron junto con la idea de medición débil como herramienta para entender las propiedades de un sistema cuántico a lo largo de su evolución entre un estado inicial y otro final, y posteriormente se han encontrado diversas aplicaciones prácticas de estas cantidades [14][15]. En la teoría han servido para explicar aspectos fundamentales, como la determinación de trayectorias bohmianas [16], y han traído a discusión diversas paradojas de origen interpretativo [15][17]. Un aspecto central para el aprovechamiento práctico de los valores débiles, es que a pesar de ser cantidades complejas, su parte real e imaginaria pueden ser medidas en el laboratorio. Esta propiedad invita a utilizar a los valores débiles en el estudio de otras cantidades, que en lo que a esta tesis concierne, se enfocan en establecer criterios de correlaciones cuánticas, con la perspectiva de que en trabajos futuros se exploren a detalle las formas de medir las cantidades matemáticas aquí

presentadas mediante experimentos. Recientemente, en [1] se ha empleado el formalismo de valores débiles para desarrollar un criterio de enredamiento en sistemas de dos partículas en estados puros. Motivados por esos resultados, y como parte del objetivo de la tesis, buscaremos generalizar el criterio de enredamiento desarrollado en [1] en dos direcciones. La primera es la de extender el sistema de dos partículas a sistemas compuestos de n partes en un estado puro, y la segunda se refiere a considerar sistemas bipartitos en estados mezcla. El desarrollo de dichas generalizaciones nos permitirá evaluar la utilidad de la llamada **correlación débil**, definida en [1], para certificar la existencia de correlaciones cuánticas en un estado arbitrario.

Para comenzar, en las secciones 1.1 y 1.2, se presenta un resumen de lo que son las mediciones débiles y cómo es que los valores débiles aparecen en este contexto. Se discutirá el significado de estos valores débiles y algunas de sus propiedades. Después, en la sección 1.4 y 1.5 se abordará el tema de las correlaciones no clásicas. Se revisará el concepto de enredamiento, comentando algunos de los principales criterios que permiten detectarlo. Se enfatizará que el enredamiento no es la única correlación sin análogo clásico, lo que dará pie a introducir la idea de correlaciones cuánticas en estados separables.

Una vez presentadas en el capítulo 1 las dos nociones centrales para esta tesis, la de valores débiles y la de correlaciones cuánticas, se presentará el trabajo original de la tesis en el capítulo 2, donde se utilizarán los valores débiles para estudiar correlaciones cuánticas en estados generales. Primero, en la sección 2.1 se estudia y generaliza el criterio desarrollado en [1] para n partículas en estados puros. Con esto se mostrará la utilidad de los valores débiles en la detección de enredamiento para estados puros. Una vez desarrollado el criterio para estos estados, a partir de la sección 2.2 se analizarán dos generalizaciones para estados mezcla de la correlación débil y se discutirá su capacidad para determinar la existencia de correlaciones cuánticas en estados generales. Finalmente, en el último capítulo resumiremos los resultados más importantes obtenidos en esta tesis, presentando conclusiones y el posible alcance de las cantidades aquí desarrolladas.

Capítulo 1

Introducción a los valores débiles y a las correlaciones cuánticas

1.1. Teoría de la medición y valores débiles

1.1.1. Mediciones proyectivas

El objetivo de estas primeras secciones es estudiar la teoría de mediciones débiles de manera general y en particular entender qué son y cómo surgen los llamados valores débiles. Sin embargo, para introducir el concepto de las mediciones débiles, es necesario primero hablar de las mediciones proyectivas (mediciones usuales en mecánica cuántica), que es lo que se hará a continuación, basándonos en el artículo [17].

En una medición ideal el objeto a medir es un sistema S que se encuentra en un estado $|s\rangle$, al que se le quiere medir un observable \hat{S} cuyos eigenestados forman una base completa ortonormal $\{|s_i\rangle\}$ con respectivos eigenvalores $\{s_i\}$. A partir de aquí es necesario postular tres reglas para continuar [17]:

- Regla No.1 : Los resultados de las mediciones son eigenvalores s_i del operador \hat{S} .
- Regla No.2: La probabilidad de medir s_i dado que el sistema está en $|s\rangle$ es:

$$P(s_i | |s\rangle) = |\langle s_i | s \rangle|^2 = \langle s | (|s_i\rangle \langle s_i|) | s \rangle = \langle s | s_i \rangle \langle s_i | s \rangle = |\langle s | s_i \rangle|^2. \quad (1.1.1)$$

- Regla No. 3: Después de la medición, si el resultado fue s_i , el sistema queda entonces en el estado $|s_i\rangle$.

Estas reglas están escritas para estados puros, por lo que para describir una medición ideal en un estado mezcla, es necesario reescribir lo anterior en términos del formalismo de la matriz de densidad.

En general, considérese un sistema que tiene probabilidad w_a de estar en el estado $|s^{(a)}\rangle$. Usando el formalismo de matrices de densidad, el estado del sistema puede ser descrito como

$$\hat{\rho}_0 = \sum_a w_a \hat{P}_{s^{(a)}} = \sum_a w_a |s^{(a)}\rangle \langle s^{(a)}|, \quad (1.1.2)$$

con $\hat{P}_{s^{(a)}}$ el proyector en el estado $|s^{(a)}\rangle$ y $w_a \geq 0$ tal que $\sum_a w_a = 1$.

La regla 1 no se ve modificada pues es independiente del estado del sistema. Sin embargo, la regla 2 se traduce a la siguiente probabilidad de medir s_i dado que S está en el estado $\hat{\rho}_0$:

$$P(s_i|\hat{\rho}_0) = \sum_a w_a P(s_i|s^{(a)}) = \sum_a w_a |\langle s^{(a)}|s_i\rangle|^2. \quad (1.1.3)$$

La regla anterior, desde luego, contiene la regla para estados puros (1.1.1) tomando $w_k = 0$ si $k \neq j$ y $w_j = 1$. La relación (1.1.3) se suele reescribir en la siguiente forma:

$$P(s_i|\hat{\rho}_0) = \sum_a w_a \langle s_i|s^{(a)}\rangle \langle s^{(a)}|s_i\rangle = \langle s_i| \left(\sum_a w_a |s^{(a)}\rangle \langle s^{(a)}| \right) |s_i\rangle = \langle s_i|\hat{\rho}_0|s_i\rangle. \quad (1.1.4)$$

De aquí, usando que los estados $\{|s_i\rangle\}$ son ortonormales se encuentra

$$\begin{aligned} P(s_i|\hat{\rho}_0) &= \langle s_i|\hat{\rho}_0|s_i\rangle = \sum_j \langle s_j|s_i\rangle \langle s_i|\hat{\rho}_0|s_j\rangle \langle s_j|s_i\rangle \\ &= \text{Tr}(\hat{P}_{s_i}\hat{\rho}_0\hat{P}_{s_i}) = \text{Tr}(\hat{P}_{s_i}\hat{\rho}_0), \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

donde en la última igualdad se usó que la traza es cíclica y que los proyectores son idempotentes.

Por último, la regla 3 establece cómo cambia el estado después de medir. Primero, si el eigenvalor medido fue s_i entonces la matriz de estado se transforma a

$$\hat{\rho}_0 \longrightarrow \hat{\rho}_1(|s_i\rangle) = \frac{\hat{P}_{s_i}\hat{\rho}_0\hat{P}_{s_i}}{P(s_i|\hat{\rho}_0)}, \quad (1.1.6)$$

ecuación que es llamada regla de Luder. Usando la ecuación (1.1.4) se obtiene

$$\hat{\rho}_1(|s_i\rangle) = \frac{|s_i\rangle \langle s_i|\hat{\rho}_0|s_i\rangle \langle s_i|}{P(s_i|\hat{\rho}_0)} = |s_i\rangle \langle s_i|, \quad (1.1.7)$$

es decir, independientemente de si el estado inicial es mixto o puro, si se registra un eigenvalor s_i de \hat{S} , el estado resultante del sistema al finalizar la medición siempre será el eigenestado asociado a s_i . En el caso de eigenvalores degenerados, simplemente se reemplazan los proyectores sobre estados no degenerados por proyectores sobre el subespacio generado por los eigenvectores asociados al eigenvalor degenerado.

Por otro lado, al permitir estados mezcla, podemos considerar una medición en la que por alguna razón no se registren los eigenvalores resultantes, entonces el estado después de esta medición se puede escribir como

$$\hat{\rho}_1 = \sum_i P(s_i|\hat{\rho}_0)\hat{\rho}_1(|s_i\rangle), \quad (1.1.8)$$

donde $\hat{\rho}_1(|s_i\rangle)$ es el estado después de una medición condicionada, dado por la ecuación (1.1.6). La ecuación (1.1.8) refleja el hecho de que al desconocer los eigenvalores medidos, no se sabe en qué estado ha quedado el sistema, por lo que para describirlo se utiliza una suma estadística sobre los estados resultantes posibles, quedando así un estado mezcla. Usando la regla de Luder en la ecuación (1.1.8) se obtiene

$$\hat{\rho}_1 = \sum_i \hat{P}_{s_i}\hat{\rho}_0\hat{P}_{s_i}. \quad (1.1.9)$$

En resumen, las reglas más generales sobre mediciones ideales empleando el formalismo de la matriz de densidad se pueden enunciar como:

- Regla No.1 : Los resultados de las mediciones son eigenvalores s_i del operador \hat{S} .
- Regla No.2: La probabilidad de medir s_i dado que el sistema está en $\hat{\rho}_0$ es:

$$P(s_i|\hat{\rho}_0) = Tr(\hat{P}_{s_i}\hat{\rho}_0). \quad (1.1.10)$$

- Regla No. 3: Después de la medición, si el resultado fue s_i , el sistema queda entonces en el estado

$$\hat{\rho}_1(|s_i\rangle) = \frac{\hat{P}_{s_i}\hat{\rho}_0\hat{P}_{s_i}}{P(s_i|\hat{\rho}_0)}, \quad (1.1.11)$$

si no se registra el resultado entonces el sistema queda en el estado

$$\hat{\rho}_1 = \sum_i P(s_i|\hat{\rho}_0)\hat{\rho}_1(|s_i\rangle). \quad (1.1.12)$$

Estas reglas rigen el esquema usual de medición en mecánica cuántica. A continuación hablaremos un poco sobre un modelo de medición ancilla e introduciremos las mediciones débiles más adelante.

1.1.2. Un modelo de medición (esquema *ancilla* ¹)

Hasta ahora se ha hablado solamente de lo que sucede con el estado al medirlo, pero no se ha estudiado ningún aspecto sobre la medición en sí misma. Para hablar de ello se suele usar el siguiente modelo [17].

Considérese un sistema S y su correspondiente espacio de Hilbert \mathcal{H}_S con una base $\{|s_i\rangle\}$ de eigenestados de un observable \hat{S} (el observable de interés del sistema). Inicialmente S está en el estado $\hat{\rho}_0$, al cual llamaremos estado de **preselección**.

Ahora, además de considerar al sistema aislado, consideraremos un medidor (indicador) M que va a ser lo que mida al sistema. En este caso M también se modela como un sistema cuántico con su espacio de Hilbert asociado \mathcal{H}_M , y su estado inicial es $\hat{\mu}_0 = |m^0\rangle\langle m^0|$. S y M conforman un sistema total τ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\tau = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$. El estado inicial entonces en este espacio es

$$\hat{\tau}_0 = \hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0. \quad (1.1.13)$$

Consideramos ahora que M y S interactúan por un cierto tiempo : desde $t - \epsilon$ donde el medidor y el sistema comienzan a interactuar hasta el tiempo $t + \epsilon$, donde la interacción finaliza. El hamiltoniano que describirá la evolución del sistema se puede escribir como

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_M + \hat{H}_{int} \quad (1.1.14)$$

con \hat{H}_S el hamiltoniano que describe la evolución libre de S, \hat{H}_M la de M y \hat{H}_{int} la interacción entre los dos. En el esquema de interacción, el hamiltoniano se puede escribir $\hat{H} = \hat{H}_{int}$. Adicionalmente pedimos que la interacción entre S y M no modifique el observable \hat{S} del sistema; esto significa que \hat{S} es una cantidad conservada a lo largo de la evolución, es decir

$$[\hat{H}, \hat{S}] = 0. \quad (1.1.15)$$

¹Este esquema de medición recibe su nombre debido al uso de un medidor como un sistema ancilla (auxiliar) en la medición. Ancilla en latín significa esclava o sirvienta.

Tomando $\hat{H}_S \sim \hat{S}$, la condición (1.1.15) se cumple eligiendo $\hat{H}_{int}(t) = k(t)\hat{S} \otimes \hat{N}$, donde $k(t)$ es un parámetro que mide la intensidad y duración de la interacción y \hat{N} es un observable del medidor.

De esta forma la evolución de $\hat{\tau}_0$ estará dada por el operador de evolución \hat{U} :

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} dt' \hat{H}_{int}(t')\right) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} g \hat{S} \otimes \hat{N}\right), \quad (1.1.16)$$

donde g es la constante de acoplamiento y está dada por,

$$g = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} k(t') dt'. \quad (1.1.17)$$

Para g pequeña la interacción es débil, mientras que para g grande la interacción es fuerte. Al proceso en el cual el indicador y el sistema interactúan y evolucionan vía la evolución temporal unitaria \hat{U} definida por el hamiltoniano \hat{H}_{int} se le llamará **premedición**.

La evolución para este tipo particular de hamiltoniano producirá un cambio en el estado tal que:

$$\hat{U}(|s_i\rangle \otimes |m^0\rangle) = |s_i\rangle \otimes \exp\left(\frac{-ig s_i}{\hbar} \hat{N}\right) |m^0\rangle = |s_i\rangle \otimes |m^i\rangle, \quad (1.1.18)$$

de tal manera que los estados $|m^i\rangle$ (no necesariamente eigenestados de \hat{N}) del medidor M etiquetan a los eigenestados $|s_i\rangle$ de \hat{S} . De esta forma, suponiendo que el sistema a medir está inicialmente en el estado $|s\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle$, con $c_i = \langle s_i | s \rangle$, aplicando la transformación unitaria al sistema total se obtiene

$$\hat{U}(|s\rangle \otimes |m^0\rangle) = \sum_i c_i |s_i\rangle \otimes |m^i\rangle. \quad (1.1.19)$$

Nótese que si bien a cada $|s_i\rangle$ se le asocia un $|m^i\rangle$, puede suceder que como $\langle m^i | m^j \rangle \neq 0$ ($i \neq j$) en general (como los estados $\{|m^i\rangle\}$ no necesariamente son eigenestados de \hat{N} , puede haber traslape entre ellos), entonces el sistema puede ser encontrado en el estado $|s_i\rangle$ tanto si el medidor está en $|m^i\rangle$ como si está en $|m^j\rangle$.

Continuando con el desarrollo, la matriz de densidad del sistema completo tras la premedición es:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0) \hat{U}^\dagger \\ &= \hat{U} (|s\rangle |m^0\rangle \langle s| \langle m^0|) \hat{U}^\dagger \\ &= \sum_{i,j} c_i |s_i\rangle |m^i\rangle c_j^* \langle s_j| \langle m^j| \\ &= \sum_{i,j} \langle s_i | s \rangle |s_i\rangle |m^i\rangle \langle s | s_j \rangle \langle s_j| \langle m^j| \\ &= \sum_{i,j} |s_i\rangle |m^i\rangle \langle s_i | \hat{\rho}_0 | s_j \rangle \langle s_j| \langle m^j| \\ &= \sum_{i,j} |m^i\rangle |s_i\rangle \langle s_i | \hat{\rho}_0 | s_j \rangle \langle s_j| \langle m^j| \\ &= \sum_{i,j} \hat{P}_{s_i} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{s_j} |m^i\rangle \langle m^j|, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

donde usamos que $\hat{\rho}_0 = |s\rangle \langle s|$ y \hat{P}_{s_k} es el proyector en el estado $|s_k\rangle$.

Para determinar cómo evolucionó el sistema individual S se traza parcialmente sobre M con los eigenestados de \hat{N} , $\{|n_i\rangle\}$, obteniendo el estado:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 &= Tr_M \hat{\tau}_1 \\
&= \sum_k \langle n_k | \left(\sum_{i,j} \hat{P}_{s_i} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{s_j} |m^i\rangle \langle m^j| \right) |n_k\rangle \\
&= \sum_{i,j} \sum_k \langle m^j | n_k \rangle \langle n_k | m^i \rangle \hat{P}_{s_i} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{s_j} \\
&= \sum_{i,j} \langle m^j | m^i \rangle \hat{P}_{s_i} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{s_j}.
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Notemos ahora que si no hay traslape entre los estados $\{|m^l\rangle\}$, es decir, si $\langle m^j | m^i \rangle = \delta_{i,j}$, entonces:

$$\hat{\rho}_1 = \sum_i \hat{P}_{s_i} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{s_i}, \tag{1.1.22}$$

que es la ecuación (1.1.8) usando la regla de Luder. Como se puede ver entonces, el permitir en este esquema que $\langle m^j | m^i \rangle \neq 0$ para $i \neq j$, generaliza a las mediciones proyectivas reduciéndose a éstas cuando $\langle m^j | m^i \rangle = \delta_{i,j}$.

Después de acoplar el sistema y el medidor, de la ecuación (1.1.19) se puede ver que cada estado $|s_i\rangle$ está relacionado con al menos un $|m^i\rangle$ por lo que es posible inferir información sobre el sistema S a partir de lo que marca el medidor M. Entonces para conocer información sobre el sistema S hay que medir proyectivamente M. Según la regla 3, ec. (1.1.11), después de una medición ideal (proyectiva) de \hat{N} sobre M donde se registró el valor n_k , denotando la identidad en el espacio \mathcal{H}_S como \hat{I}_S , el estado total $\hat{\tau}_1$ se transforma en:

$$\hat{\tau}_1(|n_k\rangle) = \frac{(\hat{I}_S \otimes \hat{P}_{n_k}) \hat{\tau}_1 (\hat{I}_S \otimes \hat{P}_{n_k})}{P(n_k|\hat{\tau}_1)}, \tag{1.1.23}$$

por lo que el sistema S está entonces en el estado

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1(|n_k\rangle) &= Tr_M \hat{\tau}_1(|n_k\rangle) \\
&= \frac{1}{P(n_k|\hat{\tau}_1)} \sum_j \langle n_j | n_k \rangle \langle n_k | \hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0) \hat{U}^\dagger |n_k\rangle \langle n_k | n_j \rangle \\
&= \frac{1}{P(n_k|\hat{\tau}_1)} \langle n_k | \hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0) \hat{U}^\dagger |n_k\rangle \\
&= \frac{1}{P(n_k|\hat{\tau}_1)} \langle n_k | \hat{U} |m^0\rangle \hat{\rho}_0 \langle m^0 | \hat{U}^\dagger |n_k\rangle \\
&= \frac{1}{P(n_k|\hat{\tau}_1)} K_k \hat{\rho}_0 K_k^\dagger,
\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

donde los operadores $K_k = \langle m_k | \hat{U} |m^0\rangle$ son los operadores de Kraus [3], o en este contexto operadores de medición.

Como se puede ver en este esquema de medición indirecta, el haber encontrado el valor n_k en el medidor, permite obtener el estado (1.1.24) del sistema S condicionado a haber obtenido n_k ;

siendo esta la idea central en el esquema de ancilla: medir indirectamente el sistema S a través del medidor. Este protocolo de medición se muestra en la figura 1.1, donde se esquematizan los pasos en los que consiste una medición en el esquema ancilla.

Por último también es interesante notar que si no registramos el valor de la medición proyectiva en M entonces el estado del sistema $\hat{\rho}_1$ será:

$$\hat{\rho}_1 = \sum_k P(n_k|\hat{\tau}_1)\hat{\rho}_1(|n_k) = \sum_k \langle n_k|\hat{U}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0)\hat{U}^\dagger|n_k\rangle = Tr_M(\hat{\tau}_1), \quad (1.1.25)$$

que es justamente la matriz obtenida para el sistema, después de hacer la premedición, ec. (1.1.21). Esto último muestra que en contraste con la ecuación (1.1.24), si no nos importa el resultado de la medición proyectiva, entonces aunque proyectemos el estado del medidor, el sistema no va a cambiar de estado. ².

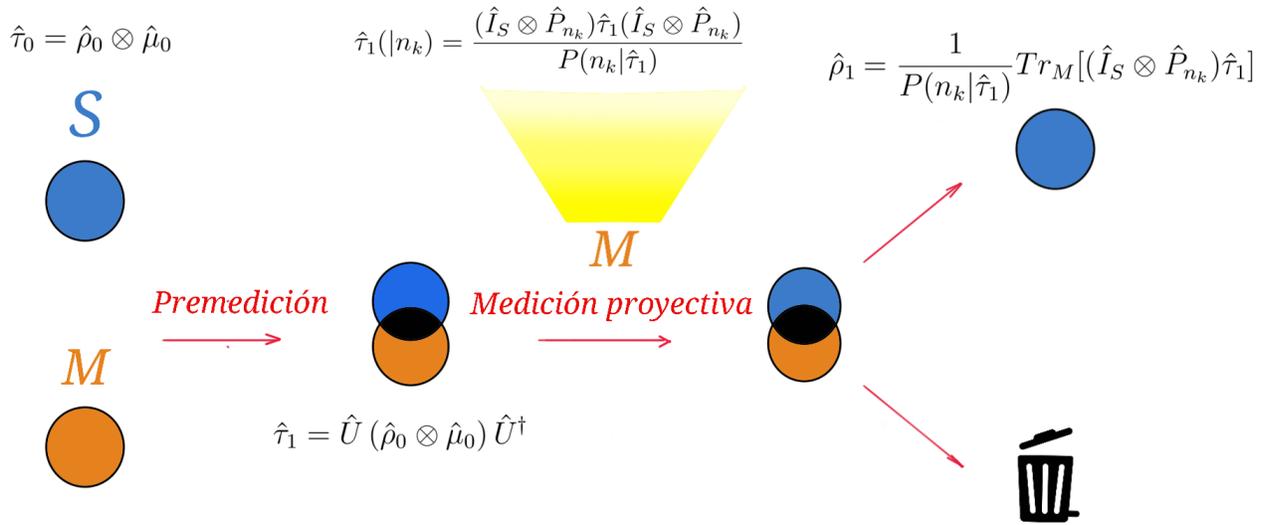


Figura 1.1: Representación esquemática del protocolo de medición ancilla. Se considera el estado inicial del sistema(S)-medidor(M) $\hat{\tau}_0 = \hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0$. Primero se hacen interactuar a S y M mediante un operador unitario \hat{U} , proceso llamado premedición. Después, para obtener información del sistema se realiza una medición proyectiva sobre el medidor. Finalmente, el estado de S correspondiente al eigenvalor n_k del medidor (resultado de la medición proyectiva) se obtiene trazando sobre los estados de M.

1.1.3. Mediciones débiles en el esquema ancilla

Ahora pasaremos a un caso particular del esquema ancilla considerando que la interacción entre el sistema S y el medidor M es débil[17]. Esto es lo que se conoce como **mediciones débiles** y en ellas, más adelante, aparecerán los valores débiles que serán una cantidad central en este trabajo.

Se comienza tomando de nuevo el sistema total (sistema-medidor) en el estado inicial:

$$\hat{\tau}_0 = \hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0. \quad (1.1.26)$$

²Esta reflexión refuerza la interpretación de un estado cuántico como la información, conocimiento o creencia que un observador tiene sobre el sistema

La evolución del sistema estará dada de nuevo por \hat{U} escrita en la ecuación (1.1.16). Para simplificar las cuentas se define $\hat{X} = g\hat{S} \otimes \hat{N}$. Ahora consideramos que g es suficientemente pequeña para que la aproximación

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{X}\right) \approx 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{X} - \frac{\hat{X}^2}{2\hbar^2} \quad (1.1.27)$$

sea válida. De esta forma el estado del sistema total tiene la siguiente forma después de la evolución

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \hat{U}\hat{\tau}_0\hat{U}^\dagger \\ &\approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{X} - \frac{\hat{X}^2}{2\hbar^2}\right)\hat{\tau}_0\left(1 + \frac{i}{\hbar}\hat{X} - \frac{\hat{X}^2}{2\hbar^2}\right) \\ &= \hat{\tau}_0 + \frac{i}{\hbar}\hat{\tau}_0\hat{X} - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{\tau}_0\hat{X}^2 - \frac{i}{\hbar}\hat{X}\hat{\tau}_0 + \frac{1}{\hbar^2}\hat{X}\hat{\tau}_0\hat{X} - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{X}^2\hat{\tau}_0 + O(\hat{X}^3) \\ &= \hat{\tau}_0 + \frac{i}{\hbar}[\hat{\tau}_0, \hat{X}] - \frac{1}{2\hbar^2}[[\hat{\tau}_0, \hat{X}], \hat{X}]. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

La ecuación anterior es un caso particular de la ecuación (1.1.20) en donde se considera una interacción suficientemente débil para poder quedarse con la expansión de la exponencial hasta orden g^2 . Trazando parcialmente sobre el medidor obtenemos el estado de S tras la premedición (hasta orden g^2) :

$$\hat{\rho}_1 = Tr_M\hat{\tau}_1 = Tr_M\left(\hat{\tau}_0 + \frac{i}{\hbar}[\hat{\tau}_0, \hat{X}] - \frac{1}{2\hbar^2}[[\hat{\tau}_0, \hat{X}], \hat{X}]\right). \quad (1.1.29)$$

Notando que $Tr_M\hat{\tau}_0 = \hat{\rho}_0$, y recordando que la única parte del operador \hat{X} que actúa sobre los estados del medidor es \hat{N} , podemos calcular los otros dos términos

$$Tr_M[\hat{\tau}_0, \hat{X}] = g\hat{\rho}_0\hat{S}Tr_M(\hat{\mu}_0\hat{N}) - g\hat{S}\hat{\rho}_0Tr_M(\hat{N}\hat{\mu}_0) = g[\hat{\rho}_0, \hat{S}]\langle\hat{N}\rangle_0, \quad (1.1.30)$$

y

$$\begin{aligned} Tr_M[[\hat{\tau}_0, \hat{X}], \hat{X}] &= gTr_M(\hat{\tau}_0\hat{X}^2 - 2\hat{X}\hat{\tau}_0\hat{X} + \hat{X}^2\hat{\tau}_0) \\ &= g^2\hat{\rho}_0\hat{S}^2\langle\hat{N}^2\rangle_0 - 2g^2\hat{S}\hat{\rho}_0\hat{S}\langle\hat{N}^2\rangle_0 + g^2\hat{S}^2\hat{\rho}_0\langle\hat{N}^2\rangle_0 \\ &= g^2[[\hat{\rho}_0, \hat{S}], \hat{S}]\langle\hat{N}^2\rangle_0, \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

donde $\langle\cdot\rangle_0$ denota el valor medio en el estado inicial. De esta forma, sustituyendo en (1.1.29) obtenemos

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_0 + \frac{ig}{\hbar}[\hat{\rho}_0, \hat{S}]\langle\hat{N}\rangle_0 - \frac{g^2}{2\hbar^2}\langle\hat{N}^2\rangle_0[[\hat{\rho}_0, \hat{S}], \hat{S}]. \quad (1.1.32)$$

Esta ecuación muestra la corrección del estado inicial de S a primer y segundo orden en g ; se nota que a medida que la interacción entre el sistema y medidor es más débil (si g es más y más pequeña), entonces el estado del sistema a medir casi no cambia, que es lo esperado.

Por último se muestra cómo es el traslape entre los estados $|m^i\rangle$ del medidor, definidos a partir de la ecuación (1.1.18). Para ello consideramos el elemento de matriz

$$\langle s_i | \hat{\rho}_1 | s_j \rangle = \langle s_i | \hat{\rho}_0 | s_j \rangle \left[1 + \frac{ig}{\hbar}(s_i - s_j)\langle\hat{N}\rangle_0 - \frac{g^2}{2\hbar^2}\langle\hat{N}^2\rangle_0(s_i - s_j)^2 \right], \quad (1.1.33)$$

donde se usó que $|s_i\rangle$ es eigenestado de \hat{S} con eigenvalor s_i . De esta forma comparando con el correspondiente elemento de matriz obtenido a partir de la ecuación (1.1.21), encontramos que el traslape de los estados del medidor es :

$$\langle m^i | m^j \rangle = 1 + \frac{ig}{\hbar} (s_i - s_j) \langle \hat{N} \rangle_0 - \frac{g^2}{2\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 (s_i - s_j)^2. \quad (1.1.34)$$

En esta última ecuación se observa explícitamente cómo los estados del medidor en general no son ortogonales, y a medida que g tiende a cero (sin llegar a ser cero, pues en ese caso no hay premedición y por lo tanto M y S están desacoplados de tal forma que no se puede obtener la ecuación 1.1.34), entonces $\langle m^i | m^j \rangle \rightarrow 1$ para toda i y j , por lo que los estados del medidor son cada vez menos distinguibles entre sí, lo que reduce la capacidad de determinar el estado de S.

Las observaciones anteriores sobre las ecuaciones (1.1.32) y (1.1.34) son las características más destacadas de una medición débil: a medida que la interacción es menos fuerte se logra no perturbar al sistema S, sin embargo, también disminuye la capacidad de extraer información de él a través del medidor. Un equilibrio adecuado de estas dos situaciones se puede obtener mediante el control de la intensidad en la interacción entre el sistema y el medidor de tal forma que mediante muchas repeticiones del mismo experimento se pueda obtener la información deseada del sistema habiéndolo perturbado mínimamente. Ahora pasamos a ver cómo surgen los valores débiles y cómo es que estos pueden ser medidos.

1.1.4. Postselección del sistema tras una medición débil.

En la subsección anterior se obtuvo que el estado inicial $\hat{\tau}_0$ del sistema total tras una medición débil se convierte en el estado $\hat{\tau}_1$:

$$\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_0 + \frac{i}{\hbar} [\hat{\tau}_0, \hat{X}] - \frac{1}{2\hbar^2} [[\hat{\tau}_0, \hat{X}], \hat{X}]. \quad (1.1.35)$$

donde recordamos que $\hat{X} = g\hat{S} \otimes \hat{N}$. Ahora lo que se hará es medir proyectivamente a S sobre el estado $|f\rangle$; a este proceso se le llama **postselección**, y es el que permitirá el surgimiento de los valores débiles en las mediciones débiles. Al estado $|f\rangle$ se le llama **estado de postselección**, es eigenestado de otro observable \hat{F} del sistema distinto de \hat{S} , y es el estado al que S llega al final de todo el proceso. Este estado, igual que el estado de preselección $|s\rangle$, es impuesto por el experimentador previamente a las mediciones. La postselección junto con la preselección se pueden pensar como las condiciones iniciales y finales impuestas sobre el sistema S: debe de empezar en $\hat{\rho}_0 = |s\rangle \langle s|$ y nos interesa al final su proyección sobre $|f\rangle$.

Lo que nos interesa es estudiar el estado del medidor después de haber postseleccionado al sistema S en $|f\rangle$. Para ello aplicamos la regla de Luder (1.1.6) a la ecuación (1.1.35), obteniendo el estado

$$\frac{(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M) \hat{\tau}_1 (\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)}{P(f|\hat{\tau}_1)}, \quad (1.1.36)$$

y luego trazamos sobre S para obtener la matriz del estado final del medidor, $\hat{\mu}_f$. Usando la ciclicidad de la traza y que los proyectores son idempotentes se obtiene:

$$\hat{\mu}_f = \frac{1}{P(f|\hat{\tau}_1)} \text{Tr}_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1], \quad (1.1.37)$$

donde \hat{P}_f es el proyector sobre el estado $|f\rangle$ del sistema, \hat{I}_M la identidad que actúa sobre \mathcal{H}_M y $P(f|\hat{\tau}_1)$ la probabilidad de obtener el valor f (eigenvalor del observable \hat{F}) al medir el sistema dado que el sistema-medidor está en el estado (1.1.35). En contraste con la ecuación 1.1.23 en donde la medición proyectiva se realiza sobre el medidor, la postselección es una medición proyectiva sobre el sistema. En el esquema ancilla, lo que se hizo fue obtener el estado de S a través del medidor, mientras que en este caso se quiere ver cómo el estado del medidor contiene información de S después de hacerse una medición proyectiva sobre el sistema. En la figura 1.2 se muestra el protocolo de medición débil de manera condensada ilustrando las diferencias con lo realizado en el esquema ancilla, figura 1.1.

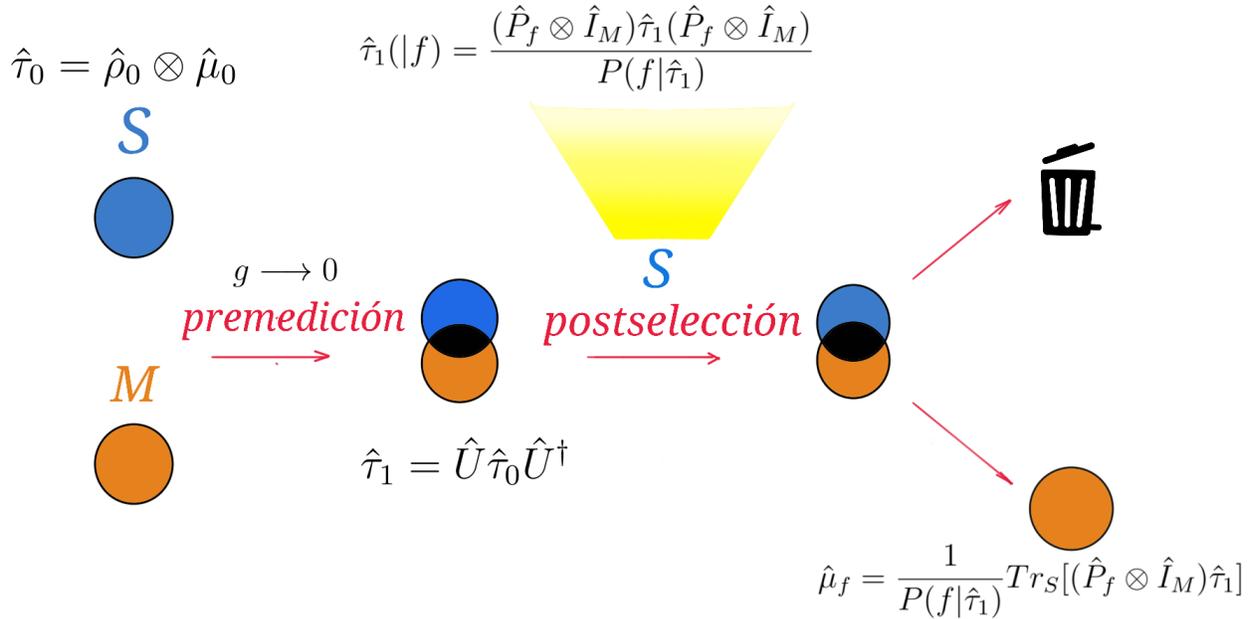


Figura 1.2: Representación esquemática de una medición débil. Se considera el estado inicial del sistema(S)-medidor(M) $\hat{\tau}_0 = \hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0$. Primero se aplica una interacción débil regida por el operador \hat{U} dado por (1.1.27), proceso llamado premedición. Después el estado resultante $\hat{\tau}_1$ se somete a una postselección, es decir el sistema S es proyectado en el estado $|f\rangle$. Finalmente, es posible obtener información de S a través del estado del medidor $\hat{\mu}_f$. Para obtener este último estado, se traza sobre los estados de S en el estado postseleccionado.

El cálculo detallado del estado $\hat{\mu}_f$ tomando el estado inicial $\hat{\rho}_0 = |s\rangle\langle s|$ se presenta en el Apéndice A (4.1), y el resultado es:

$$\hat{\mu}_f = \frac{1}{D} \left[\mu_0 + \frac{2g}{\hbar} \text{Im} \left(\langle \hat{S} \rangle_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) - \frac{g^2}{\hbar^2} \text{Re} \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} \right) \right], \quad (1.1.38)$$

con

$$D = \left[1 - \frac{g^2}{\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 \text{Re} \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \right) \right]. \quad (1.1.39)$$

Para obtener ese último resultado se ha definido el **valor débil** de orden n del operador \hat{S} como

$$\langle \hat{S}^n \rangle_w = \frac{\langle f | \hat{S}^n | s \rangle}{\langle f | s \rangle}, \quad (1.1.40)$$

y las cantidades

$$Im(\hat{A}) = \frac{i}{2}[\hat{A}^\dagger - \hat{A}], \quad (1.1.41)$$

$$Re(\hat{A}) = \frac{1}{2}[\hat{A}^\dagger + \hat{A}]. \quad (1.1.42)$$

Además se ha supuesto que el valor medio del operador \hat{N} en el estado inicial $\hat{\mu}_0$ es cero.

De la ecuación 1.1.38 se ve que el medidor está relacionado con el sistema a través de los valores débiles del observable \hat{S} . En particular esto permite medir la parte real e imaginaria de $\langle \hat{S} \rangle_w$ y $\langle \hat{S} \rangle_w^2$. Para verlo, consideramos otro observable \hat{L} del medidor, de tal forma que el valor esperado de \hat{L} en el estado $\hat{\mu}_f$ es:

$$\begin{aligned} D \langle \hat{L} \rangle_f &= DTr(\hat{\mu}_f \hat{L}) \\ &= \langle \hat{L} \rangle_0 + \frac{2g}{\hbar} Tr \left[\hat{L} Im \left(\langle \hat{S} \rangle_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) \right] - \frac{g^2}{\hbar^2} Tr \left[\hat{L} Re \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.1.43)$$

que después de calcular las trazas se puede reescribir como

$$\begin{aligned} D \langle \hat{L} \rangle_f &= \langle \hat{L} \rangle_0 + \frac{ig}{\hbar} \left[\langle \hat{S} \rangle_w^* \langle \hat{N} \hat{L} \rangle_0 - \langle \hat{S} \rangle_w \langle \hat{L} \hat{N} \rangle_0 \right] \\ &\quad - \frac{g^2}{2\hbar^2} \left[\langle \hat{S}^2 \rangle_w \langle \hat{L} \hat{N}^2 \rangle_0 + \langle \hat{S}^2 \rangle_w^* \langle \hat{N}^2 \hat{L} \rangle_0 \right] + \frac{g^2}{\hbar^2} |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \langle \hat{N} \hat{L} \hat{N} \rangle_0. \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

Por último cambiamos los productos de los operadores por su expresión en términos de conmutadores y anticonmutadores, $\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}([\hat{A}, \hat{B}] + \{\hat{A}, \hat{B}\})$. Después de factorizar y reordenar los términos adecuadamente podemos separar la parte real e imaginaria de los valores débiles de \hat{S} y \hat{S}^2 obteniendo la expresión:

$$\begin{aligned} D \langle \hat{L} \rangle_f &= \langle \hat{L} \rangle_0 + \frac{ig}{\hbar} [Re \langle \hat{S} \rangle_w \langle [\hat{N}, \hat{L}] \rangle_0 - i Im \langle \hat{S} \rangle_w \langle \{\hat{N}, \hat{L}\} \rangle_0] \\ &\quad - \frac{g^2}{2\hbar^2} [Re \langle \hat{S}^2 \rangle_w \langle \{\hat{N}^2, \hat{L}\} \rangle_0 - i Im \langle \hat{S}^2 \rangle_w \langle [\hat{N}^2, \hat{L}] \rangle_0] \\ &\quad + \frac{g^2}{\hbar^2} |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \langle \hat{N} \hat{L} \hat{N} \rangle_0. \end{aligned} \quad (1.1.45)$$

En esta expresión final, notamos que conociendo los conmutadores y anticonmutadores entre \hat{N} y \hat{L} en principio se puede determinar el valor débil de \hat{S} y \hat{S}^2 . Por ejemplo, a orden g basta con elegir \hat{L} tal que su conmutador o su anticonmutador con \hat{N} sea cero para determinar la parte imaginaria o real de $\langle \hat{S} \rangle_w$ (si se conoce de antemano $\langle L \rangle_0$ y $\langle L \rangle_f$), respectivamente. Observamos entonces que mediante una elección apropiada del operador \hat{L} del medidor M podemos obtener información sobre S. Esta información del sistema serán los valores débiles del operador \hat{S} .

Sabiendo ahora una forma en la que pueden surgir los valores débiles y habiendo notado su utilidad por ser cantidades medibles en el laboratorio, llevaremos estas cantidades mas allá de la teoría de la medición para examinar su posible aplicación en el estudio de correlaciones cuánticas. Antes de ello veremos algunas de sus propiedades.

1.2. Introducción a los valores débiles

En el desarrollo anterior se introdujeron los valores débiles, los cuales fueron presentados por primera vez en 1988 por Aharonov, Albert y Raidman [19]. Fueron introducidos inicialmente, junto con la idea de medición débil, como una herramienta para entender las propiedades de un sistema cuántico a lo largo de su evolución entre un estado inicial (preselección) y otro final (postselección). Como se vio en (1.1.40), el valor débil de orden n asociado al observable \hat{S} dado el estado de preselección $|s\rangle$ y el de postselección $|f\rangle$, suponiendo que no son ortogonales entre sí, se define como el siguiente número complejo [13][14]:

$$\langle \hat{S}^n \rangle_w = \frac{\langle f | \hat{S}^n | s \rangle}{\langle f | s \rangle}. \quad (1.2.1)$$

Las formas más usuales de introducir los valores débiles son mediante el esquema ancilla como se vio en la sección anterior, o como una corrección a la probabilidad como se muestra a continuación [14].

1.2.1. Valores débiles como una corrección a la probabilidad

Considérese un experimento en el que se prepara al sistema S en el estado inicial $|s\rangle$. La probabilidad P_0 de detectar a S en el estado final $|f\rangle$ está dada por

$$P_0 = |\langle f | s \rangle|^2. \quad (1.2.2)$$

Supongamos ahora que antes de hacer la medición se perturba al sistema. Esta perturbación puede ser descrita por una transformación unitaria $\hat{U}(\epsilon) = e^{-i\epsilon\hat{S}}$, con ϵ un parámetro cuyo sentido físico depende del sentido físico de \hat{S} (por ejemplo, si $\hat{S} = \hat{H}$ es el hamiltoniano, ϵ será proporcional al tiempo). El parámetro ϵ contiene la intensidad de interacción g descrita en secciones anteriores. La probabilidad P de medir el estado final $|f\rangle$ después de la perturbación es:

$$P = |\langle f | \hat{U}(\epsilon) | s \rangle|^2. \quad (1.2.3)$$

Desarrollando la exponencial se obtiene

$$\begin{aligned} P &= |\langle f | \hat{U}(\epsilon) | s \rangle|^2 = |\langle f | e^{-i\epsilon\hat{S}} | s \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^n}{n!} \langle f | \hat{S}^n | s \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

que dividido por $P_0 = |\langle f | s \rangle|^2$, la probabilidad de obtener $|f\rangle$ sin perturbar el sistema, resulta en:

$$\frac{P}{P_0} = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^n}{n!} \langle \hat{S}^n \rangle_w \right|^2 = \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^n}{n!} \langle \hat{S}^n \rangle_w \right|^2. \quad (1.2.5)$$

La ec. (1.2.5) muestra que el cambio en la probabilidad de medir el estado de postselección $|f\rangle$ está determinado por los valores débiles de orden n , $\langle \hat{S}^n \rangle_w$. Para perturbaciones débiles se tiene $\epsilon^2 \approx 0$ y la ecuación (1.2.5) se reduce a

$$\frac{P}{P_0} = |1 - i\epsilon \langle \hat{S} \rangle_w|^2, \quad (1.2.6)$$

siendo el valor débil $\langle \hat{S} \rangle_w$ el que determina completamente (a primer orden) la corrección a P_0 . Como se aprecia, esta forma de introducir los valores débiles los muestra desde un punto de vista diferente, aunque de igual forma está ligada con la probabilidad de medir un cierto estado.

1.2.2. Algunas propiedades de los valores débiles

En esta subsección se estudian algunas propiedades de los valores débiles en general. En lo que sigue \hat{S} es un operador hermitiano que representa algún observable de un sistema S, y $\langle \hat{S} \rangle_w$ es su valor débil (de primer orden) correspondiente, con estados de preselección y postelección $|s\rangle$ y $|f\rangle$, respectivamente.

Lo primero a notar de los valores débiles es que son cantidades complejas. En muchos casos se tratan la parte real y la imaginaria de $\langle \hat{S} \rangle_w$ por separado (por ejemplo véase la ecuación (1.1.45)), por lo que es conveniente estudiar cada parte un poco más.

Primero se observa que tanto la parte real como la imaginaria de $\langle \hat{S} \rangle_w$ se pueden escribir en términos de los siguientes operadores [13]:

$$\hat{\Pi}_+ = \frac{1}{2} \{ \hat{P}_f, \hat{S} \}, \quad (1.2.7)$$

y

$$\hat{\Pi}_- = \frac{1}{2i} [\hat{P}_f, \hat{S}], \quad (1.2.8)$$

donde recordemos que \hat{P}_f es el operador de proyección en el estado $|f\rangle$. Nótese que los operadores $\hat{\Pi}_\pm$ son hermitianos si \hat{S} también lo es. Suponiendo esto último, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle \hat{S} \rangle_w &= \frac{1}{2} [\langle \hat{S} \rangle_w + \langle \hat{S} \rangle_w^*] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\langle f | \hat{S} | s \rangle}{\langle f | s \rangle} + \frac{\langle s | \hat{S} | f \rangle}{\langle s | f \rangle} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\langle s | f \rangle \langle f | \hat{S} | s \rangle}{\langle s | f \rangle \langle f | s \rangle} + \frac{\langle s | \hat{S} | f \rangle \langle f | s \rangle}{\langle s | f \rangle \langle f | s \rangle} \right] \\ &= \frac{\langle s | \frac{1}{2} [\hat{P}_f \hat{S} + \hat{S} \hat{P}_f] | s \rangle}{|\langle f | s \rangle|^2}, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

por lo que

$$\text{Re} \langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle \hat{\Pi}_+ \rangle_0}{|\langle f | s \rangle|^2}, \quad (1.2.10)$$

y de forma análoga se obtiene:

$$\text{Im} \langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle \hat{\Pi}_- \rangle_0}{|\langle f | s \rangle|^2}, \quad (1.2.11)$$

donde $\langle \cdot \rangle_0$ es el valor esperado en el estado $|s\rangle$.

A partir de la definición de $\langle \hat{S} \rangle_w$, ec. (1.2.1), notamos que si $|s\rangle = |s_i\rangle$, es decir, si el estado de preselección es eigenestado de \hat{S} con eigenvalor s_i , entonces

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \text{Re} \langle \hat{S} \rangle_w = s_i. \quad (1.2.12)$$

Asimismo, si el estado de preselección y postselección coinciden, $|s\rangle = |f\rangle$, entonces:

$$\text{Re} \langle \hat{S} \rangle_w = \langle s | \hat{S} | s \rangle = \langle \hat{S} \rangle_0 \quad \text{y} \quad \text{Im} \langle \hat{S} \rangle_w = 0. \quad (1.2.13)$$

Por esta razón se puede considerar que los valores débiles son una generalización de los valores esperados usuales en mecánica cuántica. En relación con esto, la expresión usual del valor esperado de \hat{S} en un estado $|s\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle$ como $\langle s | \hat{S} | s \rangle = \sum_i |c_i|^2 s_i$, encuentra un análogo en términos de valores débiles como sigue. Usando la relación de completitud de la base $\{|f\rangle\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle s | \hat{S} | s \rangle &= \langle s | \sum_f |f\rangle \langle f| \hat{S} | s \rangle = \sum_f \langle s | f \rangle \langle f | \hat{S} | s \rangle \\ &= \sum_f |\langle f | s \rangle|^2 \frac{\langle f | \hat{S} | s \rangle}{\langle f | s \rangle}, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

es decir,

$$\langle s | \hat{S} | s \rangle = \sum_f P(f | s) \langle \hat{S} \rangle_w. \quad (1.2.15)$$

Esta última ecuación relaciona al valor esperado de \hat{S} (en el estado de preselección) con su valor débil con postselección $|f\rangle$ y preselección $|s\rangle$ mediante las probabilidades $P(f | s) = |\langle f | s \rangle|^2$. En comparación con la expresión $\langle s | \hat{S} | s \rangle = \sum_i |c_i|^2 s_i$, observamos que en (1.2.15) $P(f | s)$ sustituye a las probabilidades $|c_i|^2$, mientras que los valores débiles $\langle \hat{S} \rangle_w$ toman el lugar de los eigenvalores s_i .

Si se considera ahora al sistema en el estado de preselección $|s\rangle = |\psi(t)\rangle$ y utilizamos los elementos de alguna base continua $\{|\phi\rangle\}$ como postselección, entonces podemos escribir la ecuación análoga a (1.2.15), recurriendo a la representación ϕ , como sigue [1].

Observando que la función de onda ψ en la representación ϕ está dada por $\psi(\phi, t) = \langle \phi | \psi \rangle$, y que la representación ϕ del operador \hat{S}_ϕ , es tal que $\hat{S}_\phi \psi(\phi, t) = \langle \phi | \hat{S} | \psi(t) \rangle$, podemos escribir el valor esperado de \hat{S} en el estado $|\psi\rangle$ como

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle &= \langle \psi | \left[\int |\phi\rangle \langle \phi| d\phi \right] \hat{S} | \psi \rangle \\ &= \int \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle d\phi \\ &= \int \psi^*(\phi, t) \hat{S}_\phi \psi(\phi, t) d\phi \\ &= \int \psi^*(\phi, t) \psi(\phi, t) \frac{\hat{S}_\phi \psi(\phi, t)}{\psi(\phi, t)} d\phi. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Identificando $\psi^*(\phi, t) \psi(\phi, t)$ con la densidad de probabilidad $\rho(\phi, t)$ y

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} = \frac{\hat{S}_\phi \psi(\phi, t)}{\psi(\phi, t)}, \quad (1.2.17)$$

como el valor débil, se obtiene

$$\langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle = \int \rho(\phi, t) \langle \hat{S} \rangle_w d\phi, \quad (1.2.18)$$

que es la expresión análoga a la ec. (1.2.15) para una base continua.

Es interesante observar que dado un operador \hat{S} hermitiano, su valor esperado $\langle \hat{S} \rangle$ es real y por lo tanto, a partir de la ecuación (1.2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle &= \int \rho(\phi, t) [Re \langle \hat{S} \rangle_w + i Im \langle \hat{S} \rangle_w] d\phi \\ &= \int \rho(\phi, t) Re \langle \hat{S} \rangle_w d\phi, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

y

$$\int \rho(\phi, t) Im \langle \hat{S} \rangle_w d\phi = 0. \quad (1.2.20)$$

De esta forma, el valor $Re \langle S \rangle_w$ se puede interpretar como el valor ϕ -local de \hat{S} (valor de \hat{S} en cada punto ϕ) en el espacio ϕ . Al tomar el promedio de estos valores locales con distribución de probabilidad $\rho(\phi, t)$ se recupera el valor medio $\langle \hat{S} \rangle$. Un resultado análogo (su versión discreta) a este y al de los párrafos siguientes se obtiene a partir de la ecuación (1.2.15).

Ahora, para ver el rol que juega la parte imaginaria es necesario considerar valores esperados de producto de operadores; por ejemplo, consideremos el valor esperado de dos operadores \hat{A} y \hat{B} hermitianos y que conmutan, así $\hat{A}\hat{B}$ también es hermitiano. Siguiendo la ecuación (1.2.19) el valor esperado se escribe como

$$\langle \psi | \hat{A}\hat{B} | \psi \rangle = \int \rho(\phi, t) Re \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w d\phi. \quad (1.2.21)$$

Lo que haremos ahora es escribir el valor esperado (1.2.21) en términos de los valores débiles de \hat{A} y de \hat{B} . Para ello consideramos la diferencia entre $Re \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w$ y $Re(\langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w)$, dada por

$$Re(\langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w) = Re \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w - Re \langle \hat{A} \rangle_w Re \langle \hat{B} \rangle_w + Im \langle \hat{A} \rangle_w Im \langle \hat{B} \rangle_w. \quad (1.2.22)$$

Definiendo

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w \quad (1.2.23)$$

como la **correlación débil** entre \hat{A} y \hat{B} [1] se puede escribir $Re \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w$ a partir de (1.2.22) como

$$Re \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w = Re(C_{\hat{A}\hat{B}}^w) + Re \langle \hat{A} \rangle_w Re \langle \hat{B} \rangle_w - Im \langle \hat{A} \rangle_w Im \langle \hat{B} \rangle_w, \quad (1.2.24)$$

expresión que al sustituirla en (1.2.21) muestra que la parte imaginaria de $\langle \hat{A} \rangle_w$ aunque no contribuye al valor esperado de \hat{A} , sí contribuye en formas bilineales de operadores. La correlación débil fue definida en [1] mediante la ecuación (1.2.23) para estudiar el enredamiento y será la cantidad central de estudio en el capítulo 2.

Como ejemplo particular de una forma bilineal tenemos a la correlación usual

$$C_{\hat{A}\hat{B}} = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle, \quad (1.2.25)$$

que de nuevo, utilizando (1.2.19) se tiene

$$C_{\hat{A}\hat{B}} = E(Re \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w) - E(Re \langle \hat{A} \rangle_w)E(Re \langle \hat{B} \rangle_w), \quad (1.2.26)$$

donde se ha usado la notación $E(\text{Re} \langle \hat{S} \rangle_w) = \int \rho(\phi, t) \text{Re} \langle \hat{S} \rangle_w d\phi$. Considerando que $E(\text{Im} \langle \hat{S} \rangle_w) = 0$ para \hat{S} hermitiano y siguiendo la ecuación (1.2.24), se puede reescribir la ecuación anterior como

$$C_{\hat{A}\hat{B}} = C_{\text{Re}\langle\hat{A}\rangle_w, \text{Re}\langle\hat{B}\rangle_w} - C_{\text{Im}\langle\hat{A}\rangle_w, \text{Im}\langle\hat{B}\rangle_w} + \text{Re}\left[E(C_{\hat{A}\hat{B}}^w)\right], \quad (1.2.27)$$

donde $C_{fg} = E(fg) - E(f)E(g)$. La expresión (1.2.27) muestra que la parte imaginaria del valor débil (contenido en la correlación $C_{\text{Im}\langle\hat{A}\rangle_w, \text{Im}\langle\hat{B}\rangle_w}$) juega un papel en la diferencia entre la correlación de los valores locales de \hat{A} y de \hat{B} , $C_{\text{Re}\langle\hat{A}\rangle_w, \text{Re}\langle\hat{B}\rangle_w}$, y la correlación de sus valores globales (1.2.25)[1]. Otro ejemplo donde desde luego contribuye la parte imaginaria del valor débil es la varianza de un operador, pues es un caso particular de $C_{\hat{A}\hat{B}}$ cuando $\hat{A} = \hat{B}$,

$$\sigma^2(\hat{A}) = \sigma^2(\text{Re} \langle \hat{A} \rangle_w) - \sigma^2(\text{Im} \langle \hat{A} \rangle_w) + \text{Re}\left[E(C_{\hat{A}\hat{A}}^w)\right], \quad (1.2.28)$$

de modo que la parte imaginaria del valor débil de A contribuye a las fluctuaciones de \hat{A} .

Como vemos, la parte imaginaria del valor débil es importante y también contribuye a las cantidades conocidas en mecánica cuántica pero para notarlo es necesario considerar al menos formas bilineales. En el capítulo 2 estudiaremos la llamada correlación débil, nombrada y definida por su similitud con (1.2.25), y su relación con correlaciones físicas en sistemas compuestos.

1.3. Valores débiles en estados mezcla

En la sección anterior consideramos valores débiles para el caso de estados de postselección y preselección puros. Aquí consideraremos la posible extensión de los valores débiles a estados generales. El valor débil de \hat{S} para estados de preselección $|s\rangle$ y postselección $|f\rangle$, como se vio, está definido por

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle f | \hat{S} | s \rangle}{\langle f | s \rangle}. \quad (1.3.1)$$

Al observar que es posible escribir la cantidad anterior, en términos de las matrices de estado $|f\rangle\langle f|$ y $|s\rangle\langle s|$, de la forma

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle f | \hat{S} | s \rangle \langle s | f \rangle}{|\langle f | s \rangle|^2} = \frac{\text{Tr}\left(|f\rangle\langle f| \hat{S} |s\rangle\langle s|\right)}{\text{Tr}\left(|f\rangle\langle f| |s\rangle\langle s|\right)}, \quad (1.3.2)$$

entonces la generalización a estados mezcla sugerida es [20]

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{S} \hat{\rho}_0)}{\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)}. \quad (1.3.3)$$

En la subsección siguiente se estudiarán algunas de las propiedades que esta definición de valor débil permite como parte del trabajo original de esta tesis.

1.3.1. Propiedades de los valores débiles para estados mezcla

Lo más sencillo de ver es que las ecuaciones (1.2.10) y (1.2.11) mantienen la misma forma:

$$Re \langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle \hat{S} \rangle_w + \langle \hat{S} \rangle_w^*}{2} = \frac{Tr(\hat{\rho}_0 \hat{\Pi}_+)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)}, \quad (1.3.4)$$

y

$$Im \langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\langle \hat{S} \rangle_w - \langle \hat{S} \rangle_w^*}{2i} = \frac{Tr(\hat{\rho}_0 \hat{\Pi}_-)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)}, \quad (1.3.5)$$

con los operadores

$$\hat{\Pi}_+ = \frac{1}{2} \{\hat{\rho}_f, \hat{S}\} \quad y \quad \hat{\Pi}_- = \frac{1}{2i} [\hat{\rho}_f, \hat{S}], \quad (1.3.6)$$

que serán hermitianos siempre que \hat{S} sea hermitiano.

A continuación relacionaremos el valor débil de \hat{S} para el estado mixto de preselección $\hat{\rho}_0 = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ y postselección $\hat{\rho}_f = |f\rangle \langle f|$ con los valores débiles que involucran los estados de preselección $|\psi_i\rangle$, que conforman la descomposición espectral de $\hat{\rho}_0$. Para esto notemos que:

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}_f \hat{S} \hat{\rho}_0) &= \sum_i p_i Tr(|f\rangle \langle f| \hat{S} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \sum_i p_i Tr(|f\rangle \langle f| \hat{S} |\psi_i\rangle \frac{\langle f|\psi_i\rangle}{\langle f|\psi_i\rangle} \langle \psi_i|) \\ &= \sum_i p_i \langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, f)} Tr(|f\rangle \langle f| |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \sum_i p_i \langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, f)} P(f|\psi_i), \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

donde

$$\langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, f)} = \frac{\langle f|\hat{S}|\psi_i\rangle}{\langle f|\psi_i\rangle} \quad (1.3.8)$$

se refiere al valor débil tomado en el estado puro $|\psi_i\rangle$ con postselección $|f\rangle$ y $P(f|\psi_i) = |\langle f|\psi_i\rangle|^2$ es la probabilidad de tener el estado $|f\rangle$, dado el estado $|\psi_i\rangle$.

Como caso particular de (1.3.7) con \hat{S} el operador identidad, se tiene

$$Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0) = \sum_i p_i P(f|\psi_i). \quad (1.3.9)$$

Así, dividiendo la ec. (1.3.7) por la ec. (1.3.9), el valor débil (1,3,3) se escribe como

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \frac{\sum_i p_i \langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, f)} P(f|\psi_i)}{\sum_j p_j P(f|\psi_j)}, \quad (1.3.10)$$

es decir, $\langle \hat{S} \rangle_w$ se puede expresar en términos de los valores débiles de \hat{S} en los estados de preselección que componen a la descomposición espectral de $\hat{\rho}_0$. Una ecuación similar a (1.3.10) se ha encontrado en [21] para el caso en que la postselección no es un estado puro.

Notemos además, que la ecuación (1.3.10) se puede condensar como

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \sum_i W_i(f) \langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, f)}, \quad (1.3.11)$$

definiendo la cantidad

$$W_i(f) = \frac{p_i P(f|\psi_i)}{\sum_j p_j P(f|\psi_j)}, \quad (1.3.12)$$

que puede ser considerada como un peso estadístico, ya que cumple la propiedad de ser un número real tal que $\sum_i W_i(f) = 1$. Este peso es la probabilidad de obtener el estado $|f\rangle$ dado el estado $|\psi_i\rangle$ por la probabilidad de que ocurra el estado $|\psi_i\rangle$.

Podemos recurrir a la ec. (1.3.11) para calcular el valor promedio del observable \hat{S} como se muestra a continuación. El valor esperado de \hat{S} en el estado $\hat{\rho}_0 = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$ se puede escribir como

$$\langle\hat{S}\rangle_0 = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{S}|\psi_i\rangle. \quad (1.3.13)$$

Por otro lado, utilizando la ecuación (1.2.15) (con la notación introducida debajo de la ec. 1.3.7) se tiene

$$\langle\psi_i|\hat{S}|\psi_i\rangle = \sum_f P(f|\psi_i) \langle\hat{S}\rangle_w^{(\psi_i, f)}. \quad (1.3.14)$$

De esta forma, la ec. (1.3.13) se reescribe como

$$\langle\hat{S}\rangle_0 = \sum_{i, f} p_i P(f|\psi_i) \langle\hat{S}\rangle_w^{(\psi_i, f)}, \quad (1.3.15)$$

por lo que si ahora utilizamos la relación (1.3.10) obtenemos el valor promedio de \hat{S} (en el estado $\hat{\rho}_0$) en términos del valor débil de \hat{S} con preselección $\hat{\rho}_0$ y postselección $|f\rangle \langle f|$

$$\langle\hat{S}\rangle_0 = \sum_f \mathcal{W}(f) \langle\hat{S}\rangle_w, \quad (1.3.16)$$

donde la relación está dada mediante la cantidad

$$\mathcal{W}(f) = \sum_i p_i P(f|\psi_i). \quad (1.3.17)$$

Notemos que $\mathcal{W}(f)$ es el factor de normalización de $W_i(f)$ (ec. (1.3.12)) y representa una distribución de probabilidad (sobre $\{f\}$), al ser tal que $\mathcal{W}(f) \geq 0$ y cumplir que

$$\sum_f \mathcal{W}(f) = \sum_i p_i \langle\psi_i|\sum_f |f\rangle \langle f|\psi_i\rangle = \sum_i p_i = 1, \quad (1.3.18)$$

donde se usó la relación de completéz de los estados $|f\rangle$ y la normalización de $|\psi_i\rangle$. La ecuación (1.3.16) es la generalización de (1.2.15) para estados de preselección mezcla.

De manera similar, podemos pensar ahora que $|f\rangle = |\phi\rangle$ es un elemento de una base continua para encontrar la generalización de la ec.(1.2.18). De nuevo, consideremos el valor promedio de \hat{S} en el estado $\hat{\rho}_0 = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$, dado por la ecuación (1.3.13).

Siguiendo la ecuación (1.2.18),

$$\langle\psi_i|\hat{S}|\psi_i\rangle = \int \rho_i(\phi) \langle\hat{S}\rangle_w^{(\psi_i, \phi)} d\phi, \quad (1.3.19)$$

se obtiene que el valor medio $\langle\hat{S}\rangle_0$ se expresa en términos de los valores débiles de los estados que componen al estado mezcla como:

$$\langle \hat{S} \rangle_0 = \sum_i p_i \int \rho_i(\phi) \langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, \phi)} d\phi. \quad (1.3.20)$$

Y ahora a partir de la ecuación (1.3.10) (con $P(\phi | \psi_i) = |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 = \rho_i(\phi)$), se tiene la relación:

$$\langle \hat{S} \rangle_w \sum_j p_j \rho_j(\phi) = \sum_i p_i \rho_i(\phi) \langle \hat{S} \rangle_w^{(\psi_i, \phi)}, \quad (1.3.21)$$

por lo que la ecuación (1.3.20) se reexpresa en la forma

$$\langle \hat{S} \rangle_0 = \int \mathcal{W}(\phi) \langle \hat{S} \rangle_w d\phi, \quad (1.3.22)$$

con $\mathcal{W}(\phi)$ dada por la ecuación (1.3.17). Su normalización para este caso

$$\int \mathcal{W}(\phi) d\phi = \sum_j p_j \langle \psi_j | \int |\phi\rangle \langle \phi| d\phi | \psi_j \rangle = \sum_j p_j = 1, \quad (1.3.23)$$

que es la versión continua de (1.3.18). La ecuación (1.3.22) es la generalización de (1.2.18) para estados de preselección mezcla.

1.4. Correlaciones cuánticas

Ahora presentaremos algunas nociones básicas de correlaciones cuánticas, partiendo primero del enredamiento, que es la correlación cuántica más ampliamente estudiada (y la única presente en estados puros), para luego discutir la noción de correlaciones cuánticas más allá del enredamiento.

1.4.1. Separabilidad en un sistema de n partes

Para describir el entrelazamiento suele ser conveniente definirlo por separado para estados puros y para estados mixtos. Consideremos primero un sistema cuántico S compuesto por n partes en un estado puro donde cada subsistema de S tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H}_i de dimensión d_i ($1 \leq i \leq n$). El estado del sistema completo es un vector en el espacio $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ de dimensión $d = \prod_{i=1}^n d_i$. En términos de los elementos $\{|b_i\rangle\} = \{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |d_i\rangle\}$ de una base del espacio \mathcal{H}_i , el estado puro de S más general es

$$|\psi\rangle = \sum_{b_1, b_2, \dots, b_n} C_{b_1 b_2 \dots b_n} |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \otimes \dots \otimes |b_n\rangle, \quad (1.4.1)$$

donde la suma corre sobre todos los elementos de las bases de los espacios \mathcal{H}_i . En el caso particular en que el estado de S se pueda escribir como un producto de estados de sus n partes

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i) \quad (1.4.2)$$

se dice que el estado es **separable**. En caso contrario (si no existen bases de \mathcal{H}_i tales que $|\psi\rangle$ sea de la forma (1.4.2)), se dice que el estado está **enredado** o **entrelazado**.

En el caso general no sólo se tienen estados puros sino también mezcla (o mixtos), por lo que la definición de enredamiento debe extenderse al formalismo de la matriz de densidad. Un estado $\hat{\rho}$

perteneciente al espacio $D(\mathcal{H})$ de todos los operadores de estado de S es **(totalmente) separable** si puede ser escrito como la suma convexa de estados producto

$$\hat{\rho} = \sum_l p_l \hat{\rho}_1^l \otimes \hat{\rho}_2^l \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_n^l, \quad (1.4.3)$$

con p_l la probabilidad de tener el estado $\hat{\rho}_1^l \otimes \hat{\rho}_2^l \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_n^l$ (tal que $\sum_l p_l = 1$) y $\hat{\rho}_i^l$ un estado del subsistema i , $\hat{\rho}_i^l \in D(\mathcal{H}_i)$. De la misma forma que antes, un estado está enredado si no es totalmente separable.

En el caso bipartito ($n = 2$), el enredamiento del estado implica correlaciones entre las dos partes; sin embargo, para $n > 2$ un estado enredado puede contener subsistemas correlacionados entre sí, y subsistemas descorrelacionados del resto. Así, en un sistema multipartito surgen distintas subclasificaciones de separabilidad. Se dice entonces que un estado $\hat{\rho}$ es **k-separable con respecto a una partición** ($2 \leq k \leq n$) de las n partes en k subpartes [11] si

$$\hat{\rho} = \sum_l p_l \hat{\rho}_{a_1}^l \otimes \hat{\rho}_{a_2}^l \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_{a_k}^l, \quad (1.4.4)$$

para algún $\hat{\rho}_{a_i}^l \in D(\mathcal{H}_{a_i})$ con el subíndice a_i etiquetando ahora a los k subconjuntos, \mathcal{H}_{a_i} el espacio de Hilbert del a_i -ésimo subconjunto y p_l la probabilidad de que el sistema esté en el estado $\hat{\rho}_{a_1}^l \otimes \hat{\rho}_{a_2}^l \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_{a_k}^l$. Como ejemplo, consideremos un sistema 3-partito en el estado $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{12} \otimes \hat{\rho}_3 \in D(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$. Siguiendo la definición (1.4.4), $\hat{\rho}$ es bi-separable ($k = 2$) en la partición 12|3 pues $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{a_1} \otimes \hat{\rho}_{a_2}$ con $\hat{\rho}_{a_1} = \hat{\rho}_{12} \in D(\mathcal{H}_{a_1} = \mathcal{H}_{12})$ y $\hat{\rho}_{a_2} = \hat{\rho}_3 \in D(\mathcal{H}_{a_2} = \mathcal{H}_3)$. Sin embargo, $\hat{\rho}$ no es necesariamente totalmente separable pues $\hat{\rho}_{12}$ puede ser un estado enredado.

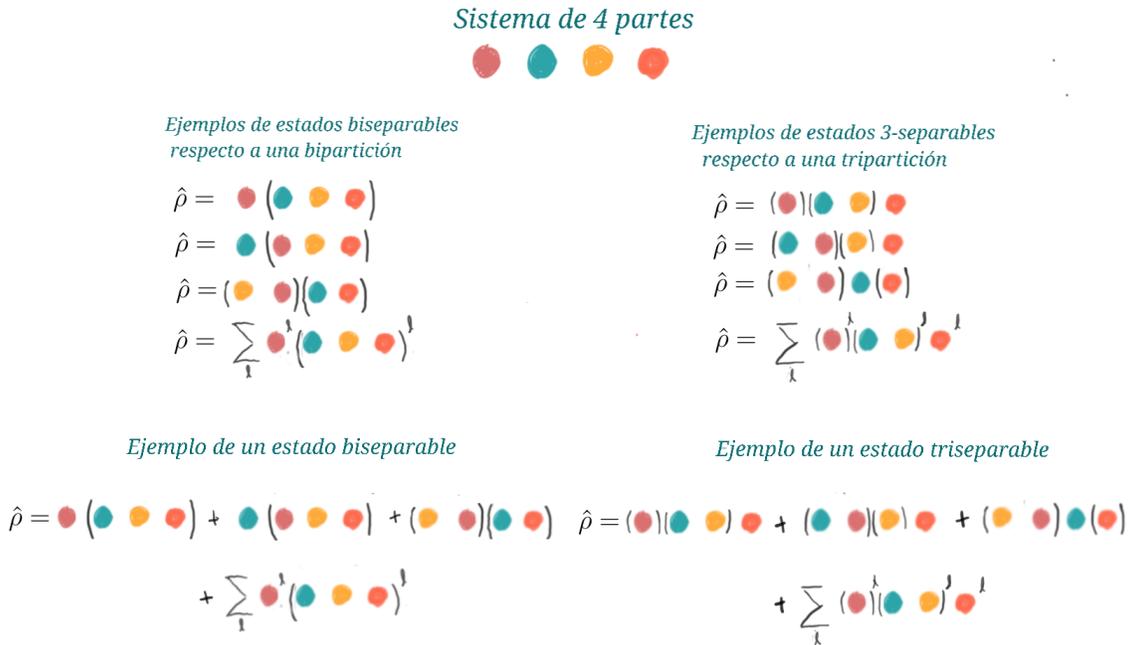


Figura 1.3: Ejemplo de la diferencia entre separabilidad y separabilidad respecto a una partición para un sistema de 4 partes.

Por otro lado, un estado $\hat{\rho}$ es **k-separable** ($2 \leq k \leq n$) si puede ser escrito como una suma convexa

de estados k -separables respecto a las posibles particiones en k partes [11][22]. Como ejemplo de un estado biseparable, consideremos otra vez un sistema 3-partito en el estado

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}[\hat{\rho}_{12} \otimes \hat{\rho}_3 + \hat{\rho}_{23} \otimes \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_{13} \otimes \hat{\rho}_2], \quad (1.4.5)$$

donde $\hat{\rho}_{12}$, $\hat{\rho}_{23}$ y $\hat{\rho}_{13}$ son estados entrelazados. En la figura 1.3 se muestran más ejemplos de estados biseparables y triseparables para un sistema de 4 partes. Además se representa esquemáticamente la diferencia entre estados k -separables respecto a una partición y k -separables (para $k = 2$ y $k = 3$). Dada la definición de k -separabilidad entonces a un estado totalmente separable (1.4.3) también se le puede llamar n -separable. Además hacemos notar que si un estado es k -separable, también automáticamente es k' separable para todo $k' < k$. En particular, si el estado es k -separable para alguna k entonces es biseparable. En la figura 1.4 se muestra gráficamente que un estado k -separable es biseparable, mientras que un estado biseparable no necesariamente es k -separable para alguna $k > 2$. De la misma forma, la figura ilustra que un estado n -separable es k -separable para todo k , pero al revés no necesariamente es cierto.

La existencia de subclasificaciones de separabilidad trae consigo subclasificaciones de enredamiento. Por ejemplo, como se mencionó en el párrafo anterior, dado que un estado k -separable es biseparable, por contraposición, un estado que no es biseparable tampoco es k -separable para ninguna k y entonces se dice que el estado está **genuinamente enredado** o **n-enredado**; por lo tanto, un estado genuinamente enredado no puede ser escrito como una suma convexa de estados biseparables respecto a ninguna bipartición. Dicho de otra forma, un estado está genuinamente enredado si hay enredamiento **entre** (o a través de) todas sus biparticiones. Notemos que pueden existir estados que tengan enredamiento **en** sus biparticiones, pero aún así ser biseparables y por lo tanto no estar genuinamente enredados, un ejemplo de ello es el estado (1.4.5) que por definición es biseparable, pero tiene enredamiento (k -separabilidad no implica k' -separabilidad, para $k < k'$) [11].

Usar estas definiciones para determinar si un estado está enredado suele ser impráctico, pues la negación de alguna forma de separabilidad requiere probar que el estado no es expresable como alguna suma convexa de estados producto. Se llega entonces a la pregunta fundamental al estudiar el enredamiento: ¿Cómo determinar si un estado está entrelazado, y en su caso qué tan enredado está?

1.4.2. Criterios de enredamiento en sistemas bipartitos

La respuesta al preguntar si un estado está entrelazado o no, solo tiene respuesta simple en algunos casos. Por ejemplo, en sistemas multipartitos de bajas dimensiones, o en sistemas bipartitos suele ser más sencillo encontrar criterios de separabilidad [23]. En esta sección comentaremos sobre algunos de los criterios que más aparecen en la literatura para sistemas bipartitos ($n = 2$).

De nuevo, comencemos considerando un estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. En este caso la condición de entrelazamiento se reduce a:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (1.4.6)$$

Una forma de determinar si el estado $|\psi\rangle$ está enredado, es recurriendo a su *descomposición de Schmidt*. Todo estado puro bipartito se puede descomponer como sigue[3][4]

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^r \sqrt{\lambda_k} |\varphi_k\rangle \otimes |\phi_k\rangle, \quad (1.4.7)$$



Figura 1.4: Jerarquía de los estados de un sistema n -partito según su separabilidad.

donde $r = \min(d_1, d_2)$ y los vectores $|\varphi_k\rangle$ y $|\phi_k\rangle$ son elementos de la base de eigenestados de $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ (respectivamente), las matrices de densidad reducidas del sistema,

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2 |\psi\rangle \langle \psi| = \sum_{k=1}^r \lambda_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|, \quad (1.4.8)$$

y

$$\hat{\rho}_2 = \text{Tr}_1 |\psi\rangle \langle \psi| = \sum_{k=1}^r \lambda_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k|. \quad (1.4.9)$$

Los coeficientes λ_k son llamados *coeficientes de Schmidt* y son los eigenvalores de $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ (no negativos), tales que $\sum_i \lambda_i = 1$. Un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ es separable si y solo si solamente uno de los coeficientes de Schmidt es diferente de cero (e igual a uno) [4].

Por otro lado, considerando las matrices reducidas (1.4.8) y (1.4.9) se observa que si $|\psi\rangle$ es separable con el único coeficiente distinto de cero $\lambda_{k'} = 1$, entonces $\hat{\rho}_1 = |\varphi_{k'}\rangle \langle \varphi_{k'}|$ y $\hat{\rho}_2 = |\phi_{k'}\rangle \langle \phi_{k'}|$ son estados puros. De forma inversa, si $|\psi\rangle$ está enredado, entonces existen al menos dos coeficientes de Schmidt distintos de cero, y por lo tanto los estados reducidos son mezcla. Esto define por lo tanto un criterio de separabilidad para sistemas bipartitos en un estado puro $\hat{\rho}$ [4]:

$$\text{Tr} \hat{\rho}_i^2 = 1 \iff \hat{\rho} \text{ es separable}, \quad (1.4.10)$$

donde $\hat{\rho}_i$ representa cualquiera de las matrices reducidas (1.4.8) o (1.4.9). Para estados puros bipartitos la descomposición de Schmidt proporciona entonces un criterio de separabilidad necesario y suficiente[4]. Para estos estados, la separabilidad está indicada por el grado de pureza de los estados reducidos.

Para estados mezcla, en general no existe una descomposición de Schmidt equivalente. Sin embargo, existen dos herramientas importantes para determinar la separabilidad de un estado:

testigos de enredamiento y mapeos positivos.

Un testigo de enredamiento \hat{W} es un operador hermitiano actuando en \mathcal{H} que no es positivo definido, pero cumple que para cualquier estado separable $\hat{\rho}_s$, tiene un valor medio no negativo ³ [11][4][23]:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_s \hat{W}) \geq 0, \quad (1.4.11)$$

por lo que si para algún estado $\hat{\rho}$ se cumple que

$$\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{W}) < 0, \quad (1.4.12)$$

entonces dicho estado no es separable, o bien, está enredado y se dice que \hat{W} es testigo de $\hat{\rho}$ [11].

Notemos que encontrar un operador \hat{W} que sea testigo de $\hat{\rho}$ puede ser difícil, y que el no encontrarlo no necesariamente implica que $\hat{\rho}$ sea separable. Una propiedad importante de los testigos de enredamiento es que en ocasiones pueden ser obtenidos directamente en el laboratorio como valores de expectación de observables físicos [11].

Otra herramienta importante para determinar la separabilidad de un estado son los mapas positivos. Para definir éstos, recordemos que un operador lineal \hat{S} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un operador positivo si satisface

$$\langle x | \hat{S} | x \rangle \geq 0, \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}, \quad (1.4.13)$$

condición que implica que además de ser hermitiano, sus eigenvalores son no negativos. Se dice entonces que Λ es un mapa positivo si para todo operador positivo \hat{S} que actúa sobre \mathcal{H} , entonces también $\Lambda(\hat{S})$ es positivo. En particular para $\hat{\rho} \in D(\mathcal{H})$, $\Lambda(\hat{\rho})$ también es positivo, lo que garantiza que el estado transformado pueda representar un estado físico.

Consideremos ahora un sistema bipartito en el estado $\hat{\rho} \in D(\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ al cual se le aplica el mapa $\Lambda = \Lambda_A \otimes I_B$, con Λ_A un mapa positivo sobre \mathcal{H}_A . En general la extensión Λ no es un mapeo positivo [4], pues pueden existir $\hat{\sigma} \in D(\mathcal{H})$ tales que $\Lambda(\hat{\sigma})$ no es positivo. Sin embargo, para cualquier estado separable $\hat{\rho}_s$ se verifica que

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{\rho}_s) &= \Lambda\left(\sum_l p_l \hat{\rho}_A^l \otimes \hat{\rho}_B^l\right) \\ &= \sum_l p_l \Lambda_A(\hat{\rho}_A^l) \otimes \hat{\rho}_B^l \\ &= \hat{\rho}'_s, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

por lo que si Λ_A es positivo entonces Λ es positivo para estados biseparables. De esta forma, si se encuentra que $\Lambda(\hat{\rho})$ tiene al menos un eigenvalor negativo, entonces podemos asegurar que el estado $\hat{\rho}$ está enredado.

³La razón por la que existen los testigos de enredamiento es debido a que el conjunto de estados separables es convexo, por lo que siempre existe un conjunto de hiperplanos que lo separan del resto de estados. Notando que $\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})$ se puede ver como un producto interior de Hilbert-Schmidt, un hiperplano en el conjunto de estados del sistema $D(\mathcal{H})$ está definido por $\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{W}) = 0$. La idea entonces es encontrar un \hat{W} óptimo tal que separe al conjunto de estados separables por un lado del hiperplano, dejando del otro sólo estados no separables.

Desde luego, se necesita una infinidad de hiperplanos para delimitar completamente a los estados separables, sin embargo, para determinar si $\hat{\rho}$ está enredado es suficiente encontrar un \hat{W} tal que se cumpla la ec. (1.4.12) para este estado, pero $\text{Tr}(\hat{\rho}_s \hat{W}) \geq 0$ para todo estado separable.

Un ejemplo de un mapa positivo es el operador T_A de transposición, cuyo efecto es transponer parcialmente el estado $\hat{\rho}$ respecto a A :

$$\langle j_A | \langle j_B | T_A(\hat{\rho}) | j'_A \rangle | j'_B \rangle = \langle j'_A | \langle j_B | \hat{\rho} | j_A \rangle | j'_B \rangle. \quad (1.4.15)$$

Lo anterior implica que si $\hat{\rho}$ es un estado separable, entonces $\Lambda(\hat{\rho}) = T_A \otimes I_B(\hat{\rho})$ es un operador positivo, o en forma equivalent si $\Lambda(\hat{\rho})$ tiene eigenvalores negativos, entonces $\hat{\rho}$ está enredado. A este criterio se le conoce como criterio PPT (positive partial transpose), y a los estados que lo satisfacen se les llama estados PPT. En el caso más general este criterio da una condición necesaria pero no suficiente de separabilidad [24], sin embargo en el caso particular de sistemas bipartitos n -dimensionales en estados puros o sistemas de dimensión 2×2 y 2×3 en estados generales, el criterio PPT establece condiciones necesarias y suficientes para que un estado esté enredado[12].

En general para sistemas bipartitos, debido a que sus estados solo pueden ser biseparables o en caso contrario están enredados, la caracterización del enredamiento suele ser más directa. Por completez, en la siguiente sección se hablará brevemente del caso multipartito.

1.4.3. Caracterización de enredamiento en sistemas multipartitos

Como ya se vio en el caso bipartito, en especial para estados puros, el enredamiento está bien caracterizado. Por el contrario, para sistemas multipartitos, el desarrollo de criterios de enredamiento es más complicado debido a la posible separabilidad parcial de un estado.

En algunos casos, ciertos criterios de biseparabilidad pueden ser extendidos a sistemas multipartitos. Por ejemplo, como el conjunto de estados k -separables también es convexo, es posible generalizar el criterio basado en testigos de enredamiento a estados k -separables. Así, para cada estado $\hat{\rho} \in D(\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n)$ no k -separable con $2 \leq k \leq n$, existe un operador Hermitiano \hat{W}_k actuando sobre \mathcal{H} tal que

$$Tr(\hat{W}_k \hat{\rho}_s) \geq 0 \quad (1.4.16)$$

para cualquier $\hat{\rho}_s$ k -separable, mientras que

$$Tr(\hat{W}_k \hat{\rho}) < 0. \quad (1.4.17)$$

Similarmente se puede obtener un criterio de separabilidad para el caso multipartito a través de mapeos positivos: Un estado $\hat{\rho} \in D(\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n)$ es completamente separable si y solo si $I_1 \otimes \Lambda_{2\dots n}(\hat{\rho}) \geq 0$ para todo mapeo lineal positivo $\Lambda_{2\dots n}$ en estados producto[25].

Por lo que respecta al caso de estados puros, si bien estos son en cierta forma más sencillos de tratar que los estados mezcla, la caracterización de enredamiento multipartito es menos directa que en el caso bipartito, como veremos a continuación. En general, la descomposición de Schmidt de un estado n -partito $|\psi\rangle$, análoga a la descomposición (1.4.7), y dada por

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} |e_1^i\rangle \otimes \dots \otimes |e_n^i\rangle, \quad (1.4.18)$$

con $r = \min\{d_1, \dots, d_n\}$ no es válida [23] y solo algunos estados la admiten. Uno de ellos es el estado GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger), que para un sistema compuesto por n partes donde

cada una de ellas sólo puede tener dos estados posibles, $|0\rangle$ y $|1\rangle$, es de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{GHZ} &= |GHZ\rangle\langle GHZ| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\dots 0\rangle_n + |1\dots 1\rangle_n) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0\dots 0|_n + \langle 1\dots 1|_n) \\ &= \frac{1}{2}(|0\dots 0\rangle_n \langle 0\dots 0|_n + |0\dots 0\rangle_n \langle 1\dots 1|_n + |1\dots 1\rangle_n \langle 0\dots 0|_n + |1\dots 1\rangle_n \langle 1\dots 1|_n).\end{aligned}\tag{1.4.19}$$

Notemos que al tomar la traza parcial sobre cualquier conjunto de $n - m$ partes obtenemos el estado

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_m &= Tr_{n-m}\hat{\rho}_{GHZ} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-m}=0}^1 \langle i_1 i_2 \dots i_{n-m} | \hat{\rho}_{GHZ} | i_1 i_2 \dots i_{n-m} \rangle \\ &= \frac{1}{2}(|0\dots 0\rangle_m \langle 0\dots 0|_m + |1\dots 1\rangle_m \langle 1\dots 1|_m),\end{aligned}\tag{1.4.20}$$

que es un estado mezcla ($Tr\hat{\rho}_m^2 < 1$) para cualquier bipartición $m|(n - m)$ con $m = 1, 2, \dots, n - 1$. A partir del criterio (1.4.10), concluimos entonces que el estado $\hat{\rho}$ está enredado en cualquier bipartición y por lo tanto tiene enredamiento genuino. Notemos también que el estado reducido $\hat{\rho}_m$ es totalmente separable. Esto es debido a que cualquier estado que admita una descomposición de Schmidt de la forma (1.4.18) posee estados reducidos que son totalmente separables de modo que el enredamiento de $\hat{\rho}$ es poco robusto frente a la pérdida de un subsistema. En contraposición con lo anterior, consideremos el estado W :

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{W_n} &= |W_n\rangle\langle W_n| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(|10\dots 0\rangle_n + |01\dots 0\rangle_n + \dots + |00\dots 1\rangle_n) \frac{1}{\sqrt{n}}(\langle 10\dots 0|_n + \langle 01\dots 0|_n + \dots + \langle 00\dots 1|_n) \\ &= \frac{1}{n}(|10\dots 0\rangle_n \langle 10\dots 0|_n + |10\dots 0\rangle_n \langle 01\dots 0|_n + \dots + |00\dots 1\rangle_n \langle 00\dots 1|_n).\end{aligned}\tag{1.4.21}$$

El estado de cualquier subconjunto de m partes del sistema n -partito en un estado $|W_n\rangle$ no es totalmente separable, y por tanto $|W_n\rangle$ no admite descomposición de Schmidt [23]. Sin embargo el estado W también tiene enredamiento genuino. Para verlo, procedemos de manera similar a como se hizo con el estado GHZ. Dividimos al sistema en dos partes: $m|(n - m)$, con $m = 1, \dots, n - 1$, obteniendo de esta forma los siguientes estados reducidos de m partes

$$\hat{\rho}_m = Tr_{n-m}\hat{\rho}_{W_n} = \frac{n - m}{n} |0\dots 0\rangle_m \langle 0\dots 0|_m + \frac{m}{n} |W_m\rangle\langle W_m|.\tag{1.4.22}$$

Notamos que los estados reducidos $\hat{\rho}_m$ son mezcla para cualquier valor posible de m , es decir para cualquier bipartición. Usando de nuevo el criterio (1.4.10), se concluye que $\hat{\rho}_{W_m}$ está enredado en toda bipartición, y por lo tanto tiene enredamiento genuino.

Los dos ejemplos de estados puros que hemos presentado muestran la existencia de diferentes tipos de enredamiento, aún en estados que globalmente tienen el mismo tipo de enredamiento: enredamiento genuino. Esto, entre otras cosas, dificulta la caracterización del enredamiento en sistemas multipartitos.

1.5. Correlaciones cuánticas sin enredamiento

En la sección anterior se habló sobre el enredamiento en estados puros y mezcla. El enredamiento para estados puros es la única correlación no clásica que existe [7], por lo que cuando se habla

de correlaciones cuánticas se suele hacer referencia a éste. Sin embargo, cuando uno trata con estados generales, considerando estados mezcla, el enredamiento es sólo un tipo de correlación cuántica, existiendo otras formas de correlaciones no clásicas presentes incluso en estados que no están enredados. En esta sección se da una introducción a los estados separables que exhiben correlaciones cuánticas, enfocándose en las diferencias entre un estado con dichas correlaciones y un estado con sólo correlaciones clásicas.

Consideraremos entonces un sistema compuesto por dos subsistemas A y B , cada uno asociado con un espacio de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B . Como ya se vio, los estados

$$\hat{\rho} \in \mathcal{S}_{AB} = \{ \hat{\rho} \mid \hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i \}, \quad (1.5.1)$$

son los estados biseparables, aquellos sin entrelazamiento entre los subsistemas A y B [7]. Aquí \mathcal{S}_{AB} denota al conjunto de estados biseparables (en esta sección serán llamados simplemente separables, pues nos restringiremos sólo a sistemas compuestos por 2 partes).

1.5.1. Estados con correlaciones cuánticas sin enredamiento

Para comenzar, pensemos en un sistema físico compuesto por un subsistema (A) clásico de dos niveles (por ejemplo una moneda) y un subsistema (B) cuántico también de dos niveles (por ejemplo un átomo de dos niveles). La diferencia esencial entre la moneda y el átomo, es que la moneda sólo puede estar en uno de dos estados: cara o cruz, mientras que el átomo, siendo un sistema cuántico, puede estar no sólo en uno de sus dos estados energéticos definidos, sino en una superposición de ellos. En general si el estado del sistema clásico es desconocido, podemos describir el estado del sistema completo como:

$$\hat{\rho} = p_0 |0\rangle \langle 0|_A \otimes \hat{\rho}_B^0 + p_1 |1\rangle \langle 1|_A \otimes \hat{\rho}_B^1, \quad (1.5.2)$$

donde el subíndice A indica que el estado es del subsistema clásico y el subíndice B indica que el estado es del subsistema cuántico. Aquí p_i ($i = 0, 1$) denota la probabilidad de que el sistema clásico esté en el estado $|i\rangle$ mientras que el cuántico está en el estado $\hat{\rho}_B^i$, y $p_0 + p_1 = 1$. Llamamos a $\hat{\rho}$ un estado clásico en A , enfatizando el hecho de que A solo puede estar en uno de dos estados distinguibles, y no en una superposición de ellos.

Podemos extender lo anterior a sistemas de mayor dimensión y definir un estado clásico en A como sigue: Dado un sistema cuántico bipartito $A + B$, si los estados que toma el subsistema A pueden ser representados por proyectores de una base ortonormal $\{|i\rangle_A\}$, es decir, si existe una base de \mathcal{H}_A con respecto a la cual el estado $\hat{\rho}$ es localmente incoherente en A (sus términos no diagonales, o coherencias, en dicha base son nulos), entonces se dice que $\hat{\rho}$ es un estado **clásico en A** y se puede escribir como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|_A \otimes \hat{\rho}_B^i. \quad (1.5.3)$$

El conjunto de los estados clásicos en A se denotará como

$$\mathcal{C}_A = \{ \hat{\rho} \mid \hat{\rho} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|_A \otimes \hat{\rho}_B^i \}, \quad (1.5.4)$$

con $\sum_i p_i = 1$. Análogamente si existe una base $\{|i\rangle_B\}$ de \mathcal{H}_B con respecto a la cual el estado bipartito es incoherente en B , este estado será **clásico en B** y el conjunto de dichos estados será denotado como

$$\mathcal{C}_B = \{\hat{\rho} \mid \hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes |i\rangle \langle i|_B\}, \quad (1.5.5)$$

con $\sum_i p_i = 1$.

Por último, si existen bases $\{|i\rangle_A\}$ y $\{|j\rangle_B\}$ de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B en las que el sistema es incoherente simultáneamente en A y B, entonces el estado será llamado **estado clásico en A y en B** (o clásico-clásico) y tiene la forma :

$$\hat{\rho} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle \langle i|_A \otimes |j\rangle \langle j|_B, \quad (1.5.6)$$

donde $\sum_{ij} p_{ij} = 1$. El conjunto de todos los estados clásico-clásico se denotará como :

$$\mathcal{C}_{AB} = \{\hat{\rho} \mid \hat{\rho} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle \langle i|_A \otimes |j\rangle \langle j|_B\}. \quad (1.5.7)$$

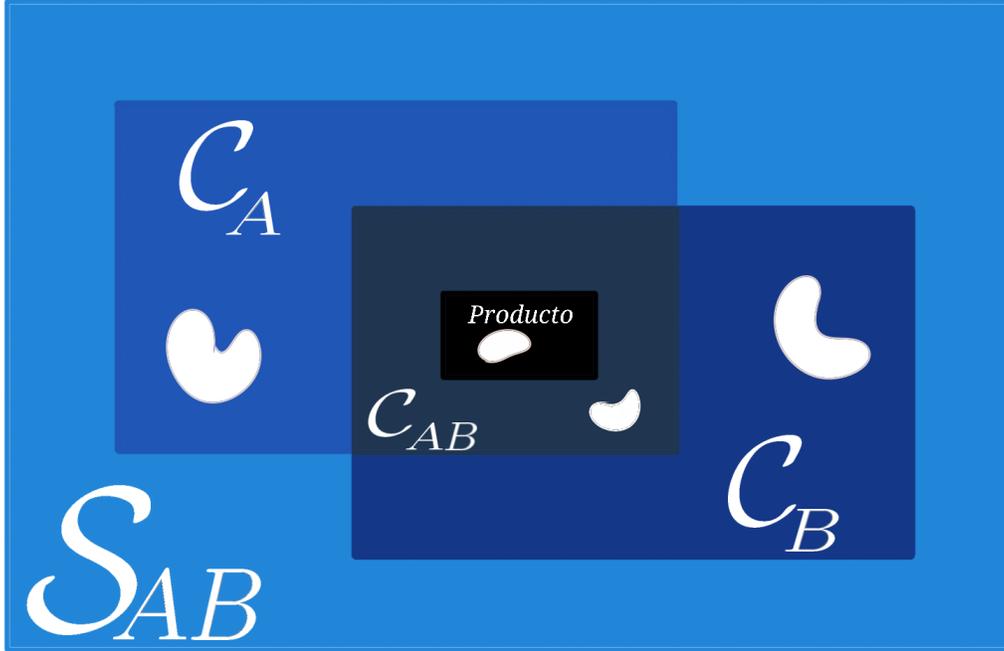


Figura 1.5: Subconjuntos de estados contenidos en el conjunto de estados separables respecto a la bipartición $A|B$. Los conjuntos \mathcal{C}_A , \mathcal{C}_B , \mathcal{C}_{AB} son de medida cero y no densos [7]. Los huecos blancos dibujados en estos conjuntos representan su no convexidad.

Observemos que un estado clásico en A (B) es un estado separable donde la matriz $\hat{\rho}_A^i$ ($\hat{\rho}_B^i$) en la ec. (1.5.1) es el proyector $|i\rangle \langle i|_A$ ($|i\rangle \langle i|_B$). De aquí que si denotamos con \mathcal{D}_{AB} al conjunto de todos los estados $\hat{\rho}$ posibles del sistema, es claro entonces que

$$\mathcal{C}_{AB} \subset \{\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B\} \subset \mathcal{S}_{AB} \subset \mathcal{D}_{AB}, \quad (1.5.8)$$

donde los estados con enredamiento están en el conjunto $\mathcal{D}_{AB} - \mathcal{S}_{AB}$. En la figura 1.5 se ilustran los subconjuntos de estados clásicos unilaterales y bilaterales y los estados producto. Como se observa, un estado producto es un estado clásico-clásico. Los huecos blancos en la figura representan la no convexidad de estos conjuntos.

Debido a que los estados de \mathcal{C}_{AB} pueden ser simulados por sistemas físicos clásicos, entonces toda correlación que aparezca en estos estados constituye una correlación clásica. Por el contrario, los estados pertenecientes a los conjuntos $\tilde{\mathcal{C}}_A = \mathcal{C}_A - \mathcal{C}_{AB}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_B = \mathcal{C}_B - \mathcal{C}_{AB}$ describen a un sistema que contiene una parte que no puede ser descrita clásicamente, y la *cuanticidad* de éste puede generar correlaciones cuánticas en estos estados, las cuales no son reproducibles en sistemas clásicos [7]. Estas correlaciones son entonces correlaciones de naturaleza cuántica, y diferentes al enredamiento, pues aparecen en estados separables. Vemos entonces que en general, en estados mezcla, la separabilidad no necesariamente implica la ausencia de correlaciones cuánticas.

1.5.2. Discordia cuántica

La medida de correlación cuántica más conocida y que detecta correlaciones incluso en estados separables es la **discordia cuántica**. Dado un sistema bipartito, se define un estado $\hat{\rho}$ con discordia cuántica (o un estado discordante) como cualquier estado no clásico [10]. A diferencia del enredamiento, la discordia puede ser generada actuando localmente sobre estados clásicamente correlacionados. Bajo esta definición, todo estado enredado es un estado discordante.

El origen de la discordia cuántica proviene de la generalización de medidas de información clásica a medidas de información cuántica [8][9][10]. Para ver esta generalización recordemos primero que la forma clásica de medir la falta de información (o incertidumbre) de una distribución de probabilidad $P_x = \{p_x\}$, está dada por la entropía de Shannon

$$H(x) = H(P_x) = - \sum_x p_x \log(p_x). \quad (1.5.9)$$

Por ejemplo, la distribución de probabilidad de una moneda cargada con probabilidad p de encontrar sol y $1 - p$ de encontrar águila, será de mínima información (máxima entropía) si $p = \frac{1}{2}$, pues los dos resultados tienen la misma probabilidad de encontrarse, y tendrá máxima información (mínima entropía) si $p = 0, 1$ pues es posible determinar con certeza el resultado de la moneda.

A partir de la entropía de Shannon, en la teoría clásica se define la llamada *información mutua* entre dos variables a y b de dos formas que son completamente equivalentes [10][6],

$$I(a : b) = H(a) + H(b) - H(ab), \quad (1.5.10)$$

y

$$J(b|a) = H(b) - \sum_a p_a H(P_{b|a}). \quad (1.5.11)$$

Para explicar las cantidades anteriores, definamos la distribución de probabilidad conjunta (clásica) $P_{ab} = \{p_{ab}\}$ de las variables a y b . La distribución marginal de cualquiera de las dos variables se obtiene sumando sobre todos los valores de la otra, $P_a = \{\sum_b p_{ab}\}$ y $P_b = \{\sum_a p_{ab}\}$, y la distribución de probabilidad condicional se obtiene de la forma $P_{b|a} = \{\frac{P_{ab}}{P_a}\}$. Así, lo que representa la información mutua (1.5.10) es la falta de información en las distribuciones marginales en comparación con la información que se tiene en la distribución conjunta [10][27]. Clásicamente, la información mutua cumple $I(a : b) \geq 0$, desigualdad que refleja el hecho intuitivo de que la suma de las partes individuales de un sistema físico contiene menos información que el sistema en conjunto para el caso en que las variables estén correlacionadas. Si están descorrelacionadas, la información contenida tanto en la suma de las partes individuales como en el sistema en conjunto es la misma y en ese caso $I(a : b) = 0$.

La equivalencia clásica de las ecuaciones (1.5.10) y (1.5.11) proviene del hecho de que dada la distribución de probabilidad condicional $P_{b|a}$ entonces la entropía

$$H(b|a) = \sum_a p_a H(P_{b|a}), \quad (1.5.12)$$

interpretada como la información total que se puede tener de b si se conoce el valor de a , pesado por la probabilidad de obtener ese valor (el valor a -ésimo) coincide con

$$H(b|a) = H(ab) - H(a), \quad (1.5.13)$$

que mide qué tanto de b se conoce si se tiene conocimiento de a . En el caso clásico esto es fácil de comprobar, solo hay que sustituir $P_{b|a} = \{\frac{p_{ab}}{p_a}\}$ en (1.5.12) y simplificar para obtener (1.5.13).

Al momento de generalizar la información mutua al caso cuántico, las distribuciones de probabilidad P_x se reemplazan por los operadores de estado $\hat{\rho}$ (*i.e.* $P_{ab} \rightarrow \hat{\rho}_{AB}$, $P_{a(b)} \rightarrow \hat{\rho}_{A(B)} = Tr_{B(A)}\hat{\rho}_{AB}$, etc.) y la entropía de Shannon, por la entropía de Von Neumann

$$S(\hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho} \log \hat{\rho}). \quad (1.5.14)$$

Notemos que el hecho de que $I(a : b)$ coincida con $J(b|a)$ es consecuencia de poder expresar a $H(b|a)$ a través de la ecuación (1.5.12) y de forma equivalente con la ecuación (1.5.13). Sin embargo, al generalizar por separado al caso cuántico cada una de estas ecuaciones resulta que no son equivalentes. La primera generalización a partir de (1.5.13) se puede hacer de forma inmediata

$$S(B|A) = S(\hat{\rho}_{AB}) - S(\hat{\rho}_A). \quad (1.5.15)$$

Ahora, para generalizar al caso cuántico la ecuación (1.5.12) consideramos una medición de un observable \hat{A} con eigenestados $\{|a\rangle\}$ en el subsistema A [10]. El estado del sistema cambiará entonces a

$$\hat{\rho}_{AB} \rightarrow \sum_a \hat{P}_a \otimes \hat{I}_B \hat{\rho}_{AB} \hat{P}_a \otimes \hat{I}_B = \sum_a p_a |a\rangle \langle a| \otimes \hat{\rho}_B(|a\rangle) \quad (1.5.16)$$

donde \hat{P}_a son proyectores en el estado $|a\rangle$ y p_a es la probabilidad de medir el eigenvalor a de \hat{A}

$$p_a = Tr(\hat{P}_a \hat{\rho}_{AB}), \quad (1.5.17)$$

mientras que

$$\hat{\rho}_B(|a\rangle) = \frac{Tr_A(\hat{P}_a \hat{\rho}_{AB})}{p_a}, \quad (1.5.18)$$

es el estado del subsistema B cuando se mide a en el subsistema A . De esta forma, la generalización de (1.5.12) queda como:

$$S'(B|A) = \sum_a p_a S(\hat{\rho}_B(|a\rangle)). \quad (1.5.19)$$

A partir del procedimiento para obtener esta última ecuación es claro por qué no van a coincidir $S(B|A)$ y $S'(B|A)$: para obtener $S'(B|A)$ a partir de (1.5.12) fue necesario hacer una medición en el subsistema A , mientras que para obtener la cantidad $S(B|A)$ a partir de (1.5.13) no hubo ninguna medición involucrada. Debido a que en el caso cuántico el estado cambia después de una medición, las generalizaciones de las dos formas equivalentes de $H(b|a)$ del caso clásico no serán iguales y por lo tanto existirán dos expresiones en general diferentes para la información mutua cuántica, a saber

$$I(A : B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}), \quad (1.5.20)$$

y

$$J_{\hat{\rho}_A}(B|A) = S(\hat{\rho}_B) - \sum_a p_a S(\hat{\rho}_B(|a)). \quad (1.5.21)$$

La diferencia entre estas dos cantidades es lo que históricamente se definió como discordia cuántica [10] [8][9][6]:

$$\begin{aligned} D(B|A) &= I(A : B) - J_{\hat{\rho}_A}(B|A) \\ &= S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_{AB}) + \sum_a p_a S(\hat{\rho}_B(|a)) \\ &= S'(B|A) - S(B|A), \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

que no es más que la diferencia entre las dos generalizaciones cuánticas de $H(b|a)$.

En general, se suele presentar a la discordia cuántica como el mínimo de (1.5.22) respecto a todas las mediciones posibles sobre A , obteniendo así una cantidad independiente de la medición [8]

$$D(B|A) = \min_{P_A} \{I(A : B) - J_{\hat{\rho}_A}(B|A)\}. \quad (1.5.23)$$

Notemos que al tomar la definición de esta forma, calcular la discordia en estados arbitrarios puede ser un problema muy complejo debido a la optimización. Debido a esta dificultad, como se menciona en [28], se han desarrollado medidas alternativas de correlaciones cuánticas, algunas basadas en la definición de discordia original como la discordia térmica [29], o el déficit cuántico [30]. Algunas otras son medidas geométricas como la discordia cuántica geométrica [6], etc. Sin embargo, muchas de las medidas alternativas que se han desarrollado siguen involucrando optimizaciones o presentan otro tipo de dificultades para ser calculadas en estados generales. No obstante, hay casos particulares para los que se ha podido calcular la discordia analíticamente: mezclas arbitrarias de estados diagonales de Bell y los estados X de 2 qubits. Otro resultado importante se puede encontrar en [31], en este trabajo se desarrolla una medida tipo discordia que se puede calcular de manera cerrada analíticamente para sistemas bipartitos, donde uno de los dos subsistemas tiene 2 niveles y el otro d niveles. Pero como se ve, estos ejemplos son de baja dimensionalidad de tal forma que la optimización se simplifica. Por esta razón, buscar formas prácticas, y que no involucren optimización para determinar la existencia de discordia en un estado general sigue siendo un trabajo necesario e importante.

Regresando a la definición de la discordia, es importante notar que la ecuación (1.5.22) (al igual que la definición optimizada) no es simétrica, es decir,

$$D(B|A) \neq D(A|B), \quad (1.5.24)$$

pues la entropía condicional $S'(B|A)$ no es simétrica al contener una traza parcial e involucrar mediciones sobre A . Esto es importante pues trae consigo la idea de una direccionalidad en las correlaciones. Por ejemplo, un estado en \mathcal{C}_A tendrá $D(B|A) = 0$ pues al ser clásico en A , la medición sobre la parte A no modificará el estado del sistema. Por el contrario si se calcula $D(A|B)$ para el mismo estado, la medición deberá hacerse sobre el subsistema B , por lo que si el estado es sólo A -clásico, este cambiará y $D(A|B) \neq 0$ en general. De esta forma, un estado \mathcal{C}_{AB} tendrá $D(A|B) = D(B|A) = 0$, mientras que un estado en $\tilde{\mathcal{C}}_A$ cumplirá que $D(B|A) = 0$ pero $D(A|B) \neq 0$.

Para finalizar, cabe mencionar que la discordia para estados puros $|\psi\rangle$ coincide con el enredamiento de formación,

$$E(|\psi\rangle) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B), \quad (1.5.25)$$

con $\hat{\rho}_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)} |\psi\rangle \langle\psi|$. Como el enredamiento de formación es una medida de enredamiento, entonces el hecho de que la discordia coincida con esta medida para estados puros, verifica que la única correlación cuántica en estos estados es el enredamiento.[32]

Ahora que ya se ha dado una introducción a cada tema por separado (a los valores débiles y a las correlaciones cuánticas) en el capítulo siguiente veremos cómo se pueden utilizar los valores débiles para establecer criterios de enredamiento y de correlaciones cuánticas más allá del enredamiento.

Capítulo 2

Estudio de correlaciones cuánticas mediante valores débiles

En este capítulo se presentan los resultados originales de la tesis, desarrollando y discutiendo la posibilidad de utilizar los valores débiles como indicadores de la existencia de correlaciones cuánticas en algún sistema de interés. Para motivar esta idea se parte del trabajo [1], en donde se establece un criterio de enredamiento en estados puros de 2 partículas sin espín con masa, basado en el formalismo de valores débiles. En la sección siguiente se generaliza dicho criterio para un sistema de n partículas.

2.1. Criterios de enredamiento en estados puros mediante valores débiles

2.1.1. Criterio de enredamiento en biparticiones $1|n-1$

Consideremos un sistema acotado de n partículas sin espín, cuya función de onda se puede escribir como

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)} e^{iS(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)}, \quad (2.1.1)$$

con \mathbf{x}_i la posición de la partícula i -ésima, con masa m_i , $\rho = \psi^* \psi$ y S una función real. Primero notemos que la aplicación del operador de momento de la partícula i , $\hat{\mathbf{p}}_i = -i\hbar \nabla_i$, sobre esta función de onda da

$$\hat{\mathbf{p}}_i \psi = -i\hbar \nabla_i \psi = m_i(\mathbf{v}_i - i\mathbf{u}_i) \psi, \quad (2.1.2)$$

donde

$$\mathbf{v}_i = \frac{\hbar}{m_i} \nabla_i S, \quad (2.1.3)$$

y

$$\mathbf{u}_i = \frac{\hbar}{2m_i} \frac{\nabla_i \rho}{\rho}, \quad (2.1.4)$$

son conocidas, respectivamente, como velocidad de flujo y velocidad difusiva ¹.

Ahora, al calcular el valor débil $\langle \hat{\mathbf{p}}_i \rangle_w$ del operador de momento $\hat{\mathbf{p}}_i$ con postselección $|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n\rangle$ y preselección $|\psi\rangle$ vemos que está dado justamente por las cantidades anteriores

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{p}}_i \rangle_w &= \frac{\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n | \hat{\mathbf{p}}_i | \psi \rangle}{\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n | \psi \rangle} = \frac{-i\hbar \nabla_i \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)}{\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)} \\ &= m_i(\mathbf{v}_i - i\mathbf{u}_i), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

expresión que no es sino un caso particular de la ecuación (1.2.17) usando la base continua $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n\rangle$. Debido a esto, es interesante explorar la separabilidad del estado en términos de cantidades que involucren a \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i , pues así se podría relacionar el enredamiento de las partículas del sistema con los valores débiles de sus momentos. En esta dirección, tomemos un estado totalmente separable. Como se vio en la subsección 1.4.1, ψ es totalmente separable si y sólo si $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ (ec. (1.4.2)), de modo que

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \prod_{i=1}^n \psi_i(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.1.6)$$

donde $\psi_i = \langle \mathbf{x}_i | \psi_i \rangle$ representa el estado de la partícula i . Escribiendo estos estados como

$$\psi_i(\mathbf{x}_i, t) = \sqrt{\rho_i(\mathbf{x}_i, t)} e^{iS(\mathbf{x}_i, t)}, \quad (2.1.7)$$

la ecuación (2.1.6) se traduce en las condiciones:

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \prod_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{x}_i, t), \quad (2.1.8)$$

$$y$$

$$S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{x}_i, t). \quad (2.1.9)$$

La violación de estas dos igualdades definen dos tipos de enredamiento diferente. La invalidez de la condición (2.1.8) implica que el estado ψ está enredado vía la no factorizabilidad de la distribución de probabilidad ρ ; a este enredamiento se le llamará *enredamiento tipo A*. De manera similar la violación de la condición (2.1.9) también implica que el sistema está enredado, pero esta vez el enredamiento se encuentra codificado en la fase S y se le llamará *enredamiento tipo P*.

Ahora bien, si la función de onda ψ es tal que se cumple la ecuación (2.1.8) entonces se encuentra que (tomando $i \neq j$)

$$\begin{aligned} \nabla_i \cdot \mathbf{u}_j &= \frac{\hbar}{2m_j} \nabla_i \cdot \left(\frac{\nabla_j \rho}{\rho} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2m_j} \nabla_i \cdot \frac{(\rho_1(\mathbf{x}_1, t) \cdots \nabla_j \rho_j(\mathbf{x}_j, t) \cdots \rho_n(\mathbf{x}_n, t))}{\prod_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{x}_i, t)} \\ &= \frac{\hbar}{2m_j} \nabla_i \cdot \left(\frac{\nabla_j \rho_j(\mathbf{x}_j, t)}{\rho_j(\mathbf{x}_j, t)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

¹La velocidad de flujo se relaciona directamente con la corriente de probabilidad a través de $\mathbf{j}_i = \rho \mathbf{v}_i$, la cual aparece en la ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \nabla_i \cdot \mathbf{j}_i = 0$, y está asociada con el valor medio de $\hat{\mathbf{p}}_i$, $\langle \hat{\mathbf{p}}_i \rangle = m_i \int \rho \mathbf{v}_i d\mathbf{x}_i$. Por su parte, la velocidad difusiva se relaciona con la existencia de fluctuaciones del momento, de acuerdo con $\sigma_{\hat{\mathbf{p}}_i}^2 = \langle \hat{\mathbf{p}}_i^2 \rangle - \langle \hat{\mathbf{p}}_i \rangle^2 = m_i \sigma_{\mathbf{v}_i}^2 + m_i^2 \langle \mathbf{u}_i^2 \rangle$ [1][33]

y si se satisface (2.1.9) de forma similar se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_i \cdot \mathbf{v}_j &= \frac{\hbar}{m_j} \nabla_i \cdot (\nabla_j S) \\
&= \frac{\hbar}{m_j} \nabla_i \cdot \left(\nabla_j \sum_{l=1}^n S_l(\mathbf{x}_l, t) \right) \\
&= \frac{\hbar}{m_j} \nabla_i \cdot (\nabla_j S_j(\mathbf{x}_j, t)) = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Observemos que las ecuaciones (2.1.10) y (2.1.11) son condiciones de separabilidad en términos de \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i , sin embargo, involucran derivadas de estas cantidades, lo que sugiere considerar la doble aplicación de operadores de momento al estado ψ . Para ello recurrimos a la ecuación (2.1.2) para obtener

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \psi &= \hat{\mathbf{p}}_i \cdot m_j (\mathbf{v}_j - i\mathbf{u}_j) \psi \\
&= (m_i m_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) \psi + (\pi_{ij}^{uu} + i\pi_{ij}^{uv}) \psi,
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{uu} &= -m_i m_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j - \hbar m_j \nabla_i \cdot \mathbf{u}_j, \\
\pi_{ij}^{uv} &= -m_i m_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j) - \hbar m_j \nabla_i \cdot \mathbf{v}_j.
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Vemos que aparecen términos con $\nabla_i \cdot \mathbf{u}_j$ y $\nabla_i \cdot \mathbf{v}_j$ que es lo que se buscaba. Ahora el objetivo es aislar estos términos y para ello notamos que la expresión (2.1.12) se puede reordenar como:

$$\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \psi = m_i (\mathbf{v}_i - i\mathbf{u}_i) \cdot m_j (\mathbf{v}_j - i\mathbf{u}_j) \psi - \hbar m_j (\nabla_i \cdot \mathbf{u}_j + i\nabla_i \cdot \mathbf{v}_j) \psi. \tag{2.1.14}$$

Así, tomando en cuenta que el valor débil de $\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j$ (de nuevo con estado de preselección $|\psi\rangle$ y postselección $|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n\rangle$) es

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \rangle_w = \frac{\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n | \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j | \psi \rangle}{\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n | \psi \rangle} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \psi}{\psi}, \tag{2.1.15}$$

y usando la ecuación (2.1.5) se llega a la expresión

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \rangle_w = \langle \hat{\mathbf{p}}_i \rangle_w \cdot \langle \hat{\mathbf{p}}_j \rangle_w - \hbar m_j (\nabla_i \cdot \mathbf{u}_j + i\nabla_i \cdot \mathbf{v}_j). \tag{2.1.16}$$

Esta ecuación se puede escribir de manera más compacta introduciendo la correlación débil (ec. (1.2.23)) entre dos operadores $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ como [1]:

$$C_{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}}^w = \langle \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \rangle_w - \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle_w \cdot \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle_w, \tag{2.1.17}$$

definida en analogía con la correlación usual mediante valores promedio

$$C_{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}} = \langle \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \rangle - \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle, \tag{2.1.18}$$

y será analizada a detalle en secciones posteriores. Por ahora, permite escribir la ecuación (2.1.16) como:

$$C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^w = -\hbar m_j (\nabla_i \cdot \mathbf{u}_j + i\nabla_i \cdot \mathbf{v}_j). \tag{2.1.19}$$

Notemos que $m_j \nabla_i \cdot \mathbf{v}_j = m_i \nabla_j \cdot \mathbf{v}_i$ y $m_j \nabla_i \cdot \mathbf{u}_j = m_i \nabla_j \cdot \mathbf{u}_i$ son cantidades simétricas bajo el intercambio de i por j pues las derivadas y el producto punto son conmutativos. Esto implica que la correlación débil es simétrica, y $C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw} = C_{\hat{\mathbf{p}}_j \hat{\mathbf{p}}_i}^{rw}$.

A partir de los resultados anteriores, podemos establecer un criterio de enredamiento en términos de la cantidad $C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw}$, notando que si el estado ψ es totalmente separable, entonces las ecuaciones (2.1.10) y (2.1.11) se satisfacen para toda pareja de partículas, obteniendo que, a partir de (2.1.19), $C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw} = 0$ para cualquier pareja i, j con $i \neq j$. Por lo tanto, por contraposición, el criterio de entrelazamiento se enuncia como sigue:

- Si $Re(C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw}) \neq 0$ para alguna i, j ($i \neq j$) $\implies \nabla_i \cdot \mathbf{u}_j \neq 0 \implies$ la expresión (2.1.8) no es válida y por lo tanto el estado no es totalmente separable, y además posee enredamiento tipo A. Más aún, la distribución de probabilidad no puede factorizarse en ninguna de las formas

$$\rho = \rho_i(\mathbf{x}_i) \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \quad \rho = \rho_j(\mathbf{x}_j) \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.1.20)$$

y por lo tanto

$$\rho \neq \rho_i(\mathbf{x}_i) \rho_j(\mathbf{x}_j) \rho(\{\mathbf{x}_{l \neq i, j}\}), \quad (2.1.21)$$

lo que significa que tanto la partícula i -ésima como la j -ésima están enredadas con el resto del sistema, o de forma equivalente, que existe enredamiento en las biparticiones $i|\{k\}$ con $k \neq i$, y $j|\{l\}$ con $l \neq j$.

- Si $Im(C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw}) \neq 0$ para alguna i, j ($i \neq j$) $\implies \nabla_i \cdot \mathbf{v}_j \neq 0 \implies$ la expresión (2.1.9) no es válida y por lo tanto el estado no es totalmente separable y además posee enredamiento tipo P. Más aún, la fase no puede expresarse en ninguna de las formas:

$$S = S_i(\mathbf{x}_i) + S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \quad S = S_j(\mathbf{x}_j) + S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.1.22)$$

y por lo tanto

$$S \neq S_i(\mathbf{x}_i) + S_j(\mathbf{x}_j) + S(\{\mathbf{x}_{l \neq i, j}\}), \quad (2.1.23)$$

lo que de nuevo significa que tanto la partícula i -ésima como la j -ésima están enredadas con el resto del sistema, o equivalentemente, hay enredamiento en las biparticiones $i|\{k\}$ con $k \neq i$, y $j|\{l\}$ con $l \neq j$.

Notemos que este criterio establece condiciones suficientes para verificar enredamiento en biparticiones del tipo $1|n-1$. Las condiciones en general no son necesarias pues si $Re(C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw})$ o $Im(C_{\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j}^{rw})$ son cero, ello no implica nada sobre el enredamiento del sistema. Solo cuando el sistema se compone de dos partículas unidimensionales, el criterio es necesario y suficiente [1]. En dicho caso ($n=2$) el criterio determina la separabilidad o no del estado, pues solo hay una bipartición posible. Esto invita a generalizar aún más este criterio, de manera que puedan considerarse biparticiones arbitrarias del sistema n -partito.

2.1.2. Criterio de enredamiento en biparticiones $k|n-k$

El criterio que se desarrolla aquí busca generalizar al de la subsección anterior, para ello se considera el mismo sistema de n partículas pero biparticiones más generales del tipo $k|n-k$, es

decir, particiones que definan dos subsistemas A y B, tales que A contiene k partículas y B las $n - k$ restantes, con $k \geq n - k$. En esta ocasión, escribiremos el estado del sistema como

$$\psi(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, t)} e^{iS(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, t)}, \quad (2.1.24)$$

donde \mathbf{x}_A denota las coordenadas de las primeras k partículas ($\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$) del subsistema A y \mathbf{x}_B denota las coordenadas de las $n - k$ partículas ($\mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n$) del subsistema B. Consideremos entonces el momento total en A

$$\hat{\mathbf{p}}_A = \sum_{i_A=1}^k \hat{\mathbf{p}}_{i_A}, \quad (2.1.25)$$

donde i_A etiqueta a cada una de las k partículas del subsistema A y calculemos su valor débil en el estado de preselección $|\psi\rangle$ y postselección $|\mathbf{x}_A \mathbf{x}_B\rangle = |\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n\rangle$:

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_A \rangle_w = \frac{\langle \mathbf{x}_A \mathbf{x}_B | \hat{\mathbf{p}}_A | \psi \rangle}{\langle \mathbf{x}_A \mathbf{x}_B | \psi \rangle} = \sum_{i_A=1}^k \frac{\langle \mathbf{x}_A \mathbf{x}_B | \hat{\mathbf{p}}_{i_A} | \psi \rangle}{\langle \mathbf{x}_A \mathbf{x}_B | \psi \rangle}. \quad (2.1.26)$$

Como $\hat{\mathbf{p}}_{i_A}$ es el operador de momento de solo una partícula, podemos utilizar la ecuación (2.1.5) para obtener que el valor débil del momento total en A es la suma de los valores débiles de los momentos de cada una de sus partículas

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_A \rangle_w = \sum_{i_A=1}^k \langle \hat{\mathbf{p}}_{i_A} \rangle_w = \sum_{i_A=1}^k m_{i_A} (\mathbf{v}_{i_A} - i \mathbf{u}_{i_A}). \quad (2.1.27)$$

Es interesante notar que al definir la velocidad de flujo y la velocidad difusiva del centro de masa

$$\mathbf{v}_A = \frac{1}{M_A} \sum_{i_A=1}^k m_{i_A} \mathbf{v}_{i_A} \quad y \quad \mathbf{u}_A = \frac{1}{M_A} \sum_{i_A=1}^k m_{i_A} \mathbf{u}_{i_A} \quad (2.1.28)$$

con masa total $M_A = \sum_{i_A=1}^k m_{i_A}$, entonces el valor débil del momento total se puede escribir de forma equivalente a (2.1.5) como

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_A \rangle_w = M_A (\mathbf{v}_A - i \mathbf{u}_A), \quad (2.1.29)$$

de donde se observa que $\langle \hat{\mathbf{p}}_A \rangle_w$ hace referencia a las velocidades del centro de masa del subsistema A y no a las velocidades de alguna partícula en específico. De manera totalmente análoga se puede escribir el valor débil del momento total del subsistema B, con masa total $M_B = \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B}$ como

$$\langle \hat{\mathbf{p}}_B \rangle_w = M_B (\mathbf{v}_B - i \mathbf{u}_B) = \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B} (\mathbf{v}_{i_B} - i \mathbf{u}_{i_B}), \quad (2.1.30)$$

con la velocidad de flujo y la velocidad difusiva del centro de masa del subsistema B dadas por

$$\mathbf{v}_B = \frac{1}{M_B} \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B} \mathbf{v}_{i_B} \quad y \quad \mathbf{u}_B = \frac{1}{M_B} \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B} \mathbf{u}_{i_B}. \quad (2.1.31)$$

De forma similar al criterio de la subsección 2.1.1, nos interesa el valor débil de la doble aplicación de los momentos $\hat{\mathbf{p}}_A$ y $\hat{\mathbf{p}}_B$, pues buscamos expresiones que contengan derivadas de las velocidades

\mathbf{u}_{i_μ} y \mathbf{v}_{i_μ} ($\mu = A, B$) para utilizar las condiciones (2.1.10) y (2.1.11). Calculando la doble aplicación de los momentos totales se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_A \cdot \hat{\mathbf{p}}_B \psi &= \sum_{i_A=1}^k \hat{\mathbf{p}}_{i_A} \cdot \left(\sum_{i_B=k+1}^n \hat{\mathbf{p}}_{i_B} \psi \right) \\ &= \sum_{i_A=1}^k \sum_{i_B=k+1}^n \hat{\mathbf{p}}_{i_A} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{i_B} \psi,\end{aligned}\tag{2.1.32}$$

que al observar de nuevo que $\hat{\mathbf{p}}_{i_A}$ y $\hat{\mathbf{p}}_{i_B}$ son operadores de momento de partículas individuales, entonces podemos utilizar la ecuación (2.1.14) para reescribir a (2.1.32) como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_A \cdot \hat{\mathbf{p}}_B \psi &= \sum_{i_A=1}^k \sum_{i_B=k+1}^n \left[m_{i_A}(\mathbf{v}_{i_A} - i\mathbf{u}_{i_A}) \cdot m_{i_B}(\mathbf{v}_{i_B} - i\mathbf{u}_{i_B}) \psi \right. \\ &\quad \left. - \hbar m_{i_B}(\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{u}_{i_B} + i\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{v}_{i_B}) \psi \right].\end{aligned}\tag{2.1.33}$$

Notamos que el primer sumando de la ecuación anterior corresponde al producto de los valores débiles (2.1.27) y (2.1.30) por lo que podemos escribir a $\langle \hat{\mathbf{p}}_A \cdot \hat{\mathbf{p}}_B \rangle_w$ como

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{p}}_A \cdot \hat{\mathbf{p}}_B \rangle_w &= \sum_{i_A=1}^k m_{i_A}(\mathbf{v}_{i_A} - i\mathbf{u}_{i_A}) \cdot \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B}(\mathbf{v}_{i_B} - i\mathbf{u}_{i_B}) \\ &\quad - \sum_{i_A=1}^k \sum_{i_B=k+1}^n \hbar m_{i_B}(\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{u}_{i_B} + i\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{v}_{i_B}) \\ &= \langle \hat{\mathbf{p}}_A \rangle_w \cdot \langle \hat{\mathbf{p}}_B \rangle_w - \sum_{i_A=1}^k \sum_{i_B=k+1}^n \hbar m_{i_B}(\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{u}_{i_B} + i\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{v}_{i_B}).\end{aligned}\tag{2.1.34}$$

En esta última ecuación, por medio de (2.1.19), podemos identificar a

$$C_{\hat{\mathbf{p}}_{i_A} \hat{\mathbf{p}}_{i_B}}^w = -\hbar m_{i_B}(\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{u}_{i_B} + i\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{v}_{i_B}),\tag{2.1.35}$$

como la correlación débil entre el momento de la partícula i_A en el subsistema A con el momento de la partícula i_B en el subsistema B . Así, definiendo la correlación débil entre el momento total de A y el momento total de B como

$$C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w = \langle \hat{\mathbf{p}}_A \cdot \hat{\mathbf{p}}_B \rangle_w - \langle \hat{\mathbf{p}}_A \rangle_w \cdot \langle \hat{\mathbf{p}}_B \rangle_w,\tag{2.1.36}$$

entonces la ecuación (2.1.34) se reescribe de la forma

$$C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w = \sum_{i_A=1}^k \sum_{i_B=k+1}^n C_{\hat{\mathbf{p}}_{i_A} \hat{\mathbf{p}}_{i_B}}^w,\tag{2.1.37}$$

que muestra con claridad que la correlación débil entre los momentos totales de A y B , no es más que la suma de correlaciones débiles entre todos los momentos de las partículas en A y los momentos de las partículas en B . Además, a través del criterio desarrollado en 2.1.1, si todas las partículas de A son separables de las de B , entonces $C_{\hat{\mathbf{p}}_{i_A} \hat{\mathbf{p}}_{i_B}}^w = 0$ para todo subíndice i_A e i_B , y entonces a partir de (2.1.37) se tiene que $C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w = 0$. Físicamente, dado que si ninguna partícula del subsistema A está enredada con el subsistema B , entonces se espera que el subsistema A no tenga enredamiento con el subsistema B , diremos por esta razón que la condición $C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w = 0$ representa

la separabilidad de la bipartición $A|B$. Como es esperado, la correlación entre los subsistemas es simétrica, $C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w = C_{\hat{\mathbf{p}}_B \hat{\mathbf{p}}_A}^w$, ya que como se mencionó en la subsección 2.1.1, las correlaciones referentes a las partículas individuales son cantidades simétricas bajo el intercambio de índice, $C_{\hat{\mathbf{p}}_{i_A} \hat{\mathbf{p}}_{i_B}}^w = C_{\hat{\mathbf{p}}_{i_B} \hat{\mathbf{p}}_{i_A}}^w$.

Lo anterior nos permite ya establecer un criterio de enredamiento bipartito, pero antes es interesante reescribir (2.1.37) utilizando las velocidades de difusión y flujo (2.1.31) como sigue:

$$\begin{aligned}
C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w &= \sum_{i_A=1}^k \sum_{i_B=k+1}^n -\hbar m_{i_B} (\nabla_{i_A} \cdot \mathbf{u}_{i_B} + i \nabla_{i_A} \cdot \mathbf{v}_{i_B}) \\
&= -\hbar \sum_{i_A=1}^k (\nabla_{i_A} \cdot \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B} \mathbf{u}_{i_B} + i \nabla_{i_A} \cdot \sum_{i_B=k+1}^n m_{i_B} \mathbf{v}_{i_B}) \\
&= -\hbar \sum_{i_A=1}^k (\nabla_{i_A} \cdot M_B \mathbf{u}_B + i \nabla_{i_A} \cdot M_B \mathbf{v}_B)
\end{aligned} \tag{2.1.38}$$

que al considerar (2.1.25) en la representación de coordenadas, o considerando el gradiente total en A , $\nabla_A = \sum_{i_A=1}^k \nabla_{i_A}$, la correlación entre los subsistemas de la bipartición $A|B$ se puede escribir como

$$C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w = -\hbar M_B (\nabla_A \cdot \mathbf{u}_B + i \nabla_A \cdot \mathbf{v}_B), \tag{2.1.39}$$

que es la ecuación análoga a (2.1.19), pero ahora depende de las cantidades totales (que incluyen la información de las coordenadas y momentos de todas las partículas) de los subsistemas A y B . A partir de la ecuación anterior podemos utilizar las definiciones de enredamiento tipo P y tipo A dado en la subsección 2.1.1 para el estado (2.1.24) y establecer el siguiente criterio:

- Si $Re(C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w) \neq 0 \implies \nabla_A \cdot \mathbf{u}_B \neq 0 \implies \nabla_{i_A} \cdot \mathbf{u}_{i_B} \neq 0$ para algún $i_A, i_B \implies$ el sistema tiene enredamiento bipartito en la bipartición $A|B$ y además el enredamiento es tipo A.
- Si $Im(C_{\hat{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{p}}_B}^w) \neq 0 \implies \nabla_A \cdot \mathbf{v}_B \neq 0 \implies \nabla_{i_A} \cdot \mathbf{v}_{i_B} \neq 0$ para algún $i_A, i_B \implies$ el sistema tiene enredamiento bipartito en la bipartición $A|B$ y además el enredamiento es tipo P.

Estas dos últimas subsecciones son un ejemplo del uso de los valores débiles para determinar la existencia de enredamiento en estados puros y motivan su posible utilización para la caracterización de correlaciones cuánticas en general. En la siguiente sección se definirán dos generalizaciones a estados mezcla a partir de la correlación débil para estados puros y se estudiará su capacidad para detectar correlaciones cuánticas en estados generales.

2.2. Correlación débil en estados mezcla

A lo largo de esta sección se estudiarán dos generalizaciones de la correlación débil para estados puros

$$C_{\hat{A} \hat{B}}^w = \frac{\langle f|AB|s \rangle}{\langle f|s \rangle} - \frac{\langle f|A|s \rangle \langle f|B|s \rangle}{\langle f|s \rangle^2}, \tag{2.2.1}$$

y se discutirá en qué grado pueden detectar correlaciones cuánticas en estados generales, así como las diferencias y similitudes que tienen entre sí. Comenzaremos con una generalización obtenible de manera directa a partir de los valores débiles para estados mezcla tratados en la subsección 1.3.

2.2.1. Una generalización natural

Tomemos un sistema bipartito $A + B$ en un estado de preselección $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_A^0 \otimes \hat{\rho}_B^0$ ($\hat{\rho}_A^0$ representa el estado inicial del subsistema A y $\hat{\rho}_B^0$ el del subsistema B) y veamos qué sucede con el valor débil con postselección $\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_A^f \otimes \hat{\rho}_B^f$ de un producto de operadores $\hat{A} = \hat{a} \otimes \hat{I}_B$ y $\hat{B} = \hat{I}_A \otimes \hat{b}$. A partir de la generalización (1.3.3) de valor débil para estados mixtos se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w &= \frac{\text{Tr}[(\hat{\rho}_A^f \otimes \hat{\rho}_B^f)(\hat{a} \otimes \hat{b})(\hat{\rho}_A^0 \otimes \hat{\rho}_B^0)]}{\text{Tr}[(\hat{\rho}_A^f \otimes \hat{\rho}_B^f)(\hat{\rho}_A^0 \otimes \hat{\rho}_B^0)]} \\ &= \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_A^f \hat{a} \hat{\rho}_A^0 \otimes \hat{\rho}_B^f \hat{b} \hat{\rho}_B^0)}{\text{Tr}(\hat{\rho}_A^f \hat{\rho}_A^0 \otimes \hat{\rho}_B^f \hat{\rho}_B^0)}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Escribiendo el operador de traza $\text{Tr}[M] = \text{Tr}_A[\text{Tr}_B[M]]$, entonces es claro que

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w &= \frac{\text{Tr}_A(\hat{\rho}_A^f \hat{a} \hat{\rho}_A^0) \text{Tr}_B(\hat{\rho}_B^f \hat{b} \hat{\rho}_B^0)}{\text{Tr}_A(\hat{\rho}_A^f \hat{\rho}_A^0) \text{Tr}_B(\hat{\rho}_B^f \hat{\rho}_B^0)} \\ &= \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Por lo tanto si el estado de preselección y el de postselección son estados producto, entonces

$$\langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w = \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w. \quad (2.2.4)$$

Este resultado muestra que al definir la correlación débil para estados mezcla (que es la generalización directa de la correlación débil para el caso de estados puros analizada en la sección 2.1),

$$\begin{aligned} C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w \\ &= \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0)}{\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} - \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{A}\hat{\rho}_0) \text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{B}\hat{\rho}_0)}{(\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0))^2}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

es una cantidad útil para descartar si un estado mezcla de $A + B$ es un estado producto. En efecto, como acabamos de ver, si $C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_A^f \otimes \hat{\rho}_B^f) \neq 0$ para algún \hat{A}, \hat{B} entonces $\hat{\rho}_0 \neq \hat{\rho}_A^0 \otimes \hat{\rho}_B^0$. En lo que sigue exploraremos algunas de sus propiedades y su utilidad para detectar correlaciones cuánticas en general.

Lo primero que podemos observar es que para el caso en que el estado de postselección y el de preselección son iguales se puede reescribir la correlación (2.2.5) como:

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_0) = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_0^2 \hat{A}\hat{B})}{\text{Tr}(\hat{\rho}_0^2)} - \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_0^2 \hat{A})}{\text{Tr} \hat{\rho}_0^2} \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_0^2 \hat{B})}{\text{Tr} \hat{\rho}_0^2}, \quad (2.2.6)$$

que recuerda a

$$C_{\hat{A}\hat{B}} = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_0 - \langle \hat{A} \rangle_0 \langle \hat{B} \rangle_0 = \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{A}\hat{B}) - \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{A}) \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{B}), \quad (2.2.7)$$

la correlación usual entre los operadores \hat{A} y \hat{B} dado que el sistema está en el estado $\hat{\rho}_0$. La ecuación (2.2.6) coincide con la ecuación (2.2.7) solo para $\hat{\rho}_0$ puro, ($\hat{\rho}_0^2 = \hat{\rho}_0$), como es de esperar, pues en ese caso (preselección y postselección puros e iguales) se tiene $\langle \hat{S} \rangle_w = \langle \hat{S} \rangle_0$. Sin embargo aún en el caso mezcla, ($\hat{\rho}_0^2 \neq \hat{\rho}_0$) podemos interpretar a (2.2.6) como la correlación usual

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_0) = \text{Tr}(\hat{\rho}' \hat{A}\hat{B}) - \text{Tr}(\hat{\rho}' \hat{A}) \text{Tr}(\hat{\rho}' \hat{B}) = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_{\hat{\rho}'} - \langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}'} \langle \hat{B} \rangle_{\hat{\rho}'}, \quad (2.2.8)$$

pues

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{\rho}_0^2}{Tr \hat{\rho}_0^2}, \quad (2.2.9)$$

cumple las propiedades de estado cuántico. En este sentido, la definición (2.2.5) generaliza la correlación cuántica usual al permitir la postselección del sistema en un estado distinto al de preselección.

Como segundo punto de interés reescribiremos la correlación débil (2.2.5) tomando los estados de postselección $\hat{\rho}_f = \sum_i a_i |f_i\rangle \langle f_i|$ y preselección $\hat{\rho}_0 = \sum_i c_i |s_i\rangle \langle s_i|$. De forma similar a como se obtuvo la ecuación (1.3.11) el valor débil de \hat{S} se escribe

$$\langle \hat{S} \rangle_w = \sum_{i,j} W_{ij} \langle \hat{S} \rangle_w^{(f_j, s_i)}, \quad (2.2.10)$$

donde esta vez

$$W_{ij} = \frac{c_i a_j |\langle f_j | s_i \rangle|^2}{\sum_{k,l} c_k a_l |\langle f_l | s_k \rangle|^2}, \quad (2.2.11)$$

es la expresión del peso estadístico correspondiente y los valores débiles $\langle \hat{S} \rangle_w^{(f_j, s_i)}$ ahora están en términos de los estados de la descomposición espectral tanto de $\hat{\rho}_0$ como de $\hat{\rho}_f$

$$\langle \hat{S} \rangle_w^{(f_j, s_i)} = \frac{\langle f_j | \hat{S} | s_i \rangle}{\langle f_j | s_i \rangle}. \quad (2.2.12)$$

Utilizando este resultado podemos escribir la correlación débil como

$$\begin{aligned} C_{\hat{A}\hat{B}}^w &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w \langle \hat{B} \rangle_w \\ &= \sum_{i,j} W_{ij} \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w^{(f_j, s_i)} - \sum_{ijkl} W_{ij} W_{kl} \langle \hat{A} \rangle_w^{(f_j, s_i)} \langle \hat{B} \rangle_w^{(f_l, s_k)}, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

que al recordar que la correlación débil para estados puros es

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^{w(f_j, s_i)} = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_w^{(f_j, s_i)} - \langle \hat{A} \rangle_w^{(f_j, s_i)} \langle \hat{B} \rangle_w^{(f_j, s_i)}, \quad (2.2.14)$$

conduce a

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \sum_{i,j} W_{ij} C_{\hat{A}\hat{B}}^{w(f_j, s_i)} + \sum_{ij} W_{ij} \langle \hat{A} \rangle_w^{(f_j, s_i)} \left(\langle \hat{B} \rangle_w^{(f_j, s_i)} - \sum_{kl} W_{kl} \langle \hat{B} \rangle_w^{(f_l, s_k)} \right). \quad (2.2.15)$$

Debido a que un estado separable $\hat{\rho} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$ siempre se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{iab} p_i c_a h_b |\psi_a^i\rangle |\phi_b^i\rangle \langle \psi_a^i| \langle \phi_b^i| \\ &= \sum_{iab} p_i c_a h_b |s_{ab}^i\rangle \langle s_{ab}^i|, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

con $|s_{ab}^i\rangle = |\psi_a^i\rangle |\phi_b^i\rangle$ y donde se escribió

$$\hat{\rho}_A^i = \sum_a c_a |\psi_a^i\rangle \langle \psi_a^i| \quad y \quad \hat{\rho}_B^i = \sum_b h_b |\phi_b^i\rangle \langle \phi_b^i|, \quad (2.2.17)$$

entonces si $\hat{\rho}_0$ y $\hat{\rho}_f$ son separables, $|s_i\rangle$ y $|f_j\rangle$ son estados producto por lo que $C_{\hat{A}\hat{B}}^{w(f_j, s_i)} = 0$ para toda i, j y por lo tanto

$$\sum_{i,j} W_{ij} C_{\hat{A}\hat{B}}^{w(f_j, s_i)} = 0, \quad (2.2.18)$$

De esta forma, podemos observar que la correlación débil (2.2.15) tiene un término que detecta únicamente enredamiento

$$\sum_{i,j} W_{ij} C_{\hat{A}\hat{B}}^{w(f_j, s_i)}, \quad (2.2.19)$$

mientras que el término restante

$$\sum_{ij} W_{ij} \langle \hat{A} \rangle_w^{(f_j, s_i)} \left(\langle \hat{B} \rangle_w^{(f_j, s_i)} - \sum_{kl} W_{kl} \langle \hat{B} \rangle_w^{(f_l, s_k)} \right) \quad (2.2.20)$$

es el responsable de detectar correlaciones cuánticas en estados separables, pues en general no será cero para estos estados mezcla. Así, $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ en principio es una cantidad que permite medir correlaciones cuánticas distintas del entrelazamiento.

Basados en los resultados de la sección 2.1, en los que la correlación débil en estados puros nos permitió establecer criterios de enredamiento, nos gustaría emplear la expresión (2.2.5) para establecer algún criterio de correlaciones cuánticas en estados mezcla. Para ello, notemos primero que el valor de $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$, al ser una cantidad compuesta por valores débiles, depende de dos estados, $\hat{\rho}_0$ y $\hat{\rho}_f$. De esta forma, si se quieren conocer las correlaciones en el estado $\hat{\rho}_0$, es conveniente elegir un estado de postselección $\hat{\rho}_f$ producto, así aseguramos que cualquier correlación que detecte $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ proviene de $\hat{\rho}_0$. Eligiendo entonces $\hat{\rho}_f$ como un estado producto, la expresión (2.2.4) asegura que la correlación débil será nula para estados $\hat{\rho}_0$ producto, de modo que podemos distinguir entre estados totalmente descorrelacionados de aquellos correlacionados. Sin embargo, como se muestra en el ejemplo que sigue, $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ no necesariamente discrimina entre estados clásica y cuánticamente correlacionados, de modo que para tener un criterio de correlaciones cuánticas con esta cantidad no basta con considerar estados $\hat{\rho}_f$ producto. Este ejemplo servirá para ver la importancia que juega el estado de postselección en la detección de correlaciones cuánticas. En la siguiente sección se verá una elección particular de $\hat{\rho}_f$ que permitirá usar $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ para detectar estados con discordia. Por el momento veamos que tomar un estado de postselección totalmente descorrelacionado no es suficiente para distinguir correlaciones cuánticas en el estado de preselección.

Consideremos el caso extremo en el que $\hat{\rho}_f$ es un estado producto y es proporcional a la identidad, $\hat{\rho}_f = \frac{1}{d_A} \hat{I}_A \otimes \frac{1}{d_B} \hat{I}_B = \frac{1}{d} \hat{I}$ con $d_{A(B)}$ la dimensión del espacio de Hilbert asociado a $A(B)$ y $d = d_A d_B$. En este caso $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ se reduce también a la correlación cuántica usual (2.2.7). Consideremos además un sistema de 2 espines $\frac{1}{2}$, y los siguientes dos estados expresados en las bases de eigenestados de \hat{S}_z , $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de cada espín:

- Un estado mezcla separable, con sólo correlaciones clásicas

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \left(|++\rangle \langle ++| + |--\rangle \langle --| \right). \quad (2.2.21)$$

- Un estado puro máximamente enredado

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \left(|++\rangle \langle ++| + |+-\rangle \langle +-| + -+\rangle \langle -+| + |--\rangle \langle --| \right). \quad (2.2.22)$$

Lo que haremos será calcular la correlación débil (2.2.5) para cada uno de estos estados de preselección, utilizando el estado de postselección producto:

$$\hat{\rho}_f = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \hat{I} \quad (2.2.23)$$

donde \hat{I} es la identidad actuando sobre el espacio de Hilbert del sistema completo. Lo haremos en notación matricial con la identificación

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.24)$$

es decir, en la base usual. Como operadores, consideramos

$$\hat{A} = \hat{\sigma}_z \otimes \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.25)$$

y

$$\hat{B} = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.26)$$

donde \hat{I}_1 y \hat{I}_2 son las identidades que actúan sobre los espacios de Hilbert de las partículas 1 y 2 respectivamente y $\hat{\sigma}_z$ es la matriz de Pauli z .

Escribiendo al primer estado de preselección como :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0 &= \frac{1}{2} (|++\rangle \langle ++| + |--\rangle \langle --|) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

notamos que

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\rho}_0, \quad (2.2.28)$$

y

$$\hat{A}\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.29)$$

por lo que la correlación (2.2.5) resulta:

$$\begin{aligned} C_{\hat{A}\hat{B}}^{cw} &= \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} - \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{A}\hat{\rho}_0)Tr(\hat{\rho}_f \hat{B}\hat{\rho}_0)}{(Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0))^2} \\ &= \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} - \frac{Tr(\frac{1}{4}\hat{I}\hat{A}\hat{\rho}_0)Tr(\frac{1}{4}\hat{I}\hat{B}\hat{\rho}_0)}{(Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0))^2} \\ &= 1 - \frac{1}{16} \frac{Tr(\hat{A}\hat{\rho}_0)Tr(\hat{B}\hat{\rho}_0)}{(Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0))^2} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

pues $Tr(\hat{A}\hat{\rho}_0) = 0$ como se ve de la ecuación (2.2.29).

Ahora para el segundo estado:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0 &= \frac{1}{2} \left(|++\rangle \langle ++| + |++\rangle \langle --| + |--\rangle \langle ++| + |--\rangle \langle --| \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

de nuevo se tiene

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\rho}_0, \quad (2.2.32)$$

y

$$\hat{A}\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.33)$$

por lo que al calcular la correlación (2.2.5) para este segundo estado de manera exactamente igual que se hizo en el primero, se obtiene de nuevo:

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = 1. \quad (2.2.34)$$

Este ejemplo muestra que un estado de postselección descorrelacionado (producto) no necesariamente hace que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ distinga entre estados clásica y cuánticamente correlacionados, ya que como acabamos de ver, existen operadores \hat{A} y \hat{B} para los cuales $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ coincide para dos estados que tienen correlaciones fundamentalmente diferentes. Desde luego, la razón de esto es que en el ejemplo empleamos un estado de postselección proporcional a la identidad en cuyo caso la correlación débil se reduce a la correlación usual, la cual no distingue correlaciones cuánticas de clásicas. Pero esto muestra la virtud de $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$: el que generalice la correlación usual al permitir considerar diferentes estados de postselección permite la posibilidad de distinguir correlaciones clásicas de correlaciones cuánticas en el estado de preselección.

Para mostrar que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ efectivamente puede distinguir correlaciones clásicas de cuánticas partamos de la definición original (2.2.5)

$$\begin{aligned} C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) &= \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{B} \hat{\rho}_0)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} - \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{\rho}_0) Tr(\hat{\rho}_f \hat{B} \hat{\rho}_0)}{(Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0))^2} \\ &= \frac{1}{(Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0))^2} [Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{B} \hat{\rho}_0) Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0) - Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{\rho}_0) Tr(\hat{\rho}_f \hat{B} \hat{\rho}_0)] \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

y tomemos el estado de preselección separable

$$\hat{\rho}_0^{sep} = \sum_n p_n \hat{\rho}_A^n \otimes \hat{\rho}_B^n, \quad (2.2.36)$$

y el estado de postselección producto $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$, con $\hat{\sigma}_A$ y $\hat{\sigma}_B$ arbitrarios. Siendo $\hat{A} = \hat{a} \otimes I_B$ y $\hat{B} = I_A \otimes \hat{b}$, substituyendo estos estados y operadores en la primera traza de(2.2.35) se obtiene

$$Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{B} \hat{\rho}_0) = \sum_n p_n Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{a} \hat{\rho}_A^n) Tr_A(\hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^n), \quad (2.2.37)$$

donde se ha usado la linealidad de la traza y la propiedad $Tr(\hat{S}) = Tr_A(Tr_B \hat{S})$. Haciendo lo análogo para cada término en (2.2.35) se encuentra que la correlación débil se puede escribir como

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0^{sep}, \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = \frac{1}{P^2} \sum_{nm} p_n p_m Tr_A(\sigma_A \hat{a} \rho_A^n) Tr_A(\sigma_A \hat{a} \rho_A^m) T_{nm}^B. \quad (2.2.38)$$

En esta última expresión se ha escrito $P = Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)$ y se ha definido la cantidad antisimétrica (en n y m)

$$T_{nm}^B = Tr_B(\hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^n) Tr_B(\hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^m) - Tr_B(\hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^m) Tr_B(\hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^n). \quad (2.2.39)$$

De esta forma, utilizando que $T_{nm}^B = -T_{mn}^B$, al intercambiar los índices (mudos) n por m en (2.2.38) y sumando la expresión resultante con (2.2.38) se puede simetrizar la ecuación respecto a A y B notando que

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0^{sep}, \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = \frac{1}{2}(C_{\hat{A}\hat{B}}^w + C_{\hat{B}\hat{A}}^w) = \frac{1}{2P^2} \sum_{nm} p_n p_m T_{nm}^A T_{nm}^B, \quad (2.2.40)$$

donde T_{nm}^A se definió análogamente a (2.2.39). Utilizando (2.2.40) se puede encontrar un estado de postselección que hace que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$, $\forall \hat{A}$ y \hat{B} , si el estado de preselección es $A(B)$ -clásico. Consideremos por ejemplo que $\hat{\rho}_0$ es A -clásico, entonces para cada $\hat{\rho}_A^n$ en la ec. (2.2.36)

$$\hat{\rho}_A^n = |n\rangle_A \langle n|_A = \hat{P}_n \quad (2.2.41)$$

para alguna base ortonormal $\{|n\rangle_A\}$ (ver la definición de estado A -clásico (ec.1.5.4)). En este caso,

$$T_{nm}^A = Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{A} \hat{P}_n) Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{P}_m) - Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{A} \hat{P}_m) Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{P}_n). \quad (2.2.42)$$

Al notar que una forma de anular $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ es pidiendo que $T_{nm}^A T_{nm}^B \sim \delta_{nm} T_{nm}^{A(B)}$ (pues $T_{nm}^{A(B)}$ es antisimétrico y al tomar la suma en (2.2.40) resultaría $C_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$), entonces dado que $\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{nm} \hat{P}_m$ para proyectores de la misma base, se observa a partir de (2.2.42) que si $\hat{\sigma}_A = |l\rangle_A \langle l|_A$ con $|l\rangle_A \in \{|n\rangle_A\}$ se tiene,

$$\begin{aligned} T_{nm}^A &= Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{A} \hat{P}_n) Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{P}_m) - Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{A} \hat{P}_m) Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{P}_n) \\ &= Tr_A(\delta_{nl} \hat{A} \hat{P}_n) Tr_A(\delta_{ml} \hat{P}_m) - Tr_A(\delta_{ml} \hat{A} \hat{P}_m) Tr_A(\delta_{nl} \hat{P}_n) \\ &= \delta_{nl} \delta_{ml} [Tr_A(\hat{A} \hat{P}_n) Tr_A(\hat{P}_m) - Tr_A(\hat{A} \hat{P}_m) Tr_A(\hat{P}_n)] \\ &= \delta_{nm} [Tr_A(\hat{A} \hat{P}_n) - Tr_A(\hat{A} \hat{P}_m)], \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

al sustituir en (2.2.40) y sumar sobre n y m se obtiene

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0. \quad (2.2.44)$$

Se puede obtener un resultado análogo para estados B -clásicos, donde ahora el estado de postselección será $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes |l\rangle_B \langle l|_B$ con $|l\rangle_B$ un estado de la base ortonormal $\{|n\rangle_B\}$ en la que $\rho_B^n = |n\rangle_B \langle n|_B$. En conclusión, se ha mostrado que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ puede detectar estados $A(B)$ -clásicos con la elección adecuada de $\hat{\rho}_f$. Por contraposición podemos enunciar el resultado obtenido de la siguiente forma

- Dado $\hat{\rho}_f = |l\rangle_A \langle l|_A \otimes \hat{\sigma}_B$ donde $|l\rangle_A$ es un eigenestado de $\hat{\rho}_0^A = Tr_B(\hat{\rho}_0)$, entonces

$$Si \ C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) \neq 0 \ p.a. \ \hat{A}, \hat{B} \implies D_{\hat{\rho}_0}(B|A) \neq 0. \quad (2.2.45)$$

Es decir $\hat{\rho}_0$ no es A -clásico y tiene discordia $D(B|A)$.

- Dado $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes |l\rangle_B \langle l|_B$ donde $|l\rangle_B$ es un eigenestado de $\hat{\rho}_0^B = Tr_A(\hat{\rho}_0)$, entonces

$$Si \ C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) \neq 0 \ p.a. \ \hat{A}, \hat{B} \implies D_{\hat{\rho}_0}(A|B) \neq 0. \quad (2.2.46)$$

Es decir $\hat{\rho}_0$ no es B -clásico y tiene discordia $D(A|B)$.

Este resultado muestra la capacidad de $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ de detectar discordia; sin embargo, tienen el inconveniente de que es necesario conocer a los estados reducidos del sistema de estudio, y por lo tanto el resultado pierde generalidad. Desde luego, el estado de postselección se obtuvo a partir de considerar una sola forma de tantas posibles en las que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$. Quizá haciendo un análisis más profundo sobre esta correlación débil se puede determinar un estado de postselección más general que permita los mismos (o aún más generales) resultados.

A pesar de que esto último es en principio posible, debido a la dificultad del problema, creemos que es más conveniente e ilustrativo buscar otra generalización de la correlación débil en estados puros que permita detectar estados con discordia sin tener que recurrir a la base de estados que diagonalizan a $\hat{\rho}_0^A$. En la siguiente subsección desarrollamos esta cantidad alternativa.

2.2.2. Otra generalización de $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ para estados mezcla

Partamos de nuevo de la correlación débil para estados puros

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{\langle f|\hat{A}\hat{B}|s\rangle}{\langle f|s\rangle} - \frac{\langle f|\hat{A}|s\rangle}{\langle f|s\rangle} \frac{\langle f|\hat{B}|s\rangle}{\langle f|s\rangle}. \quad (2.2.47)$$

Multiplicando por la unidad se puede reescribir la ecuación anterior como

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{\langle s|f\rangle \langle f|s\rangle \langle s|f\rangle \langle f|\hat{A}\hat{B}|s\rangle}{|\langle f|s\rangle|^4} - \frac{\langle s|f\rangle \langle f|\hat{A}|s\rangle \langle s|f\rangle \langle f|\hat{B}|s\rangle}{|\langle f|s\rangle|^4}, \quad (2.2.48)$$

la cual, utilizando $\hat{\rho}_0 = |s\rangle\langle s|$ (preselección), $\hat{\rho}_f = |f\rangle\langle f|$ (postselección) y $P = |\langle f|s\rangle|^2 = \text{Tr}(\hat{\rho}_f\hat{\rho}_0)$, se puede reescribir

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f\hat{\rho}_0\hat{\rho}_f\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0)}{P^2} - \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_f\hat{A}\hat{\rho}_0\hat{\rho}_f\hat{B}\hat{\rho}_0)}{P^2} \quad (2.2.49)$$

que usando la ciclicidad de la traza, se reduce a la expresión

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) = \frac{1}{P} \langle \hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0\hat{\rho}_f] \rangle_w. \quad (2.2.50)$$

Esta última ecuación permite generalizar $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ a estados mezcla de manera alternativa a (2.2.5), por lo que llamaremos a esta nueva cantidad $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$,

$$\begin{aligned} K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) &= \frac{1}{P} \langle \hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0\hat{\rho}_f] \rangle_w \\ &= \frac{1}{P^2} \text{Tr}(\hat{\rho}_f\hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0\hat{\rho}_f]\hat{\rho}_0) \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

con $P = \text{Tr}(\hat{\rho}_0\hat{\rho}_f)$. En particular la correlación (2.2.51) coincide con la generalización (2.2.5) en el caso en que $\hat{\rho}_0$ o $\hat{\rho}_f$ son puros. Por ejemplo, si $\hat{\rho}_f$ es puro, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, |f\rangle\langle f|) &= \frac{1}{P^2} Tr\left(|f\rangle\langle f| \hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0 |f\rangle\langle f|] \hat{\rho}_0\right) \\
&= \frac{1}{P^2} \left[Tr\left(|f\rangle\langle f| \hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0 |f\rangle\langle f| \hat{\rho}_0\right) - Tr\left(|f\rangle\langle f| \hat{A}\hat{\rho}_0 |f\rangle\langle f| \hat{B}\hat{\rho}_0\right) \right] \\
&= \frac{1}{P^2} \left[\langle f| \hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0 |f\rangle \langle f| \hat{\rho}_0 |f\rangle - \langle f| \hat{A}\hat{\rho}_0 |f\rangle \langle f| \hat{B}\hat{\rho}_0 |f\rangle \right] \\
&= \frac{1}{Tr^2(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} \left[Tr(\hat{\rho}_f \hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0) Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0) - Tr(\hat{\rho}_f \hat{A}\hat{\rho}_0) Tr(\hat{\rho}_f \hat{B}\hat{\rho}_0) \right] \\
&= C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, |f\rangle\langle f|).
\end{aligned} \tag{2.2.52}$$

Esta cantidad es diferente en esencia a $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ (ec. (2.2.5)). Lo primero que se puede notar es que esta nueva generalización en el caso en que $\hat{\rho}_0$ y $\hat{\rho}_f$ sean el mismo estado mezcla, $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_f$, a saber,

$$\begin{aligned}
K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_0) &= \frac{1}{Tr(\hat{\rho}_0^2)} Tr\left(\hat{\rho}_0 \hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0 \hat{\rho}_0] \hat{\rho}_0\right) \\
&= \frac{1}{Tr(\hat{\rho}_0^2)} \left[Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0^4) - Tr(\hat{A}\hat{\rho}_0^2 \hat{B}\hat{\rho}_0^2) \right],
\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

recuerda a la correlación de Wigner-Yanase definida en [34] como

$$Corr_{\hat{\rho}}(\hat{A}, \hat{B}) = Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}) - Tr(\hat{A}\hat{\rho}^{1/2} \hat{B}\hat{\rho}^{1/2}). \tag{2.2.54}$$

En efecto, haciendo

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{\rho}_0^4}{Tr(\hat{\rho}_0^4)}, \tag{2.2.55}$$

se obtiene

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_0) = \frac{Tr(\hat{\rho}_0^4)}{(Tr(\hat{\rho}_0^2))^2} Corr_{\hat{\rho}'}(\hat{A}, \hat{B}), \tag{2.2.56}$$

por lo que para estados de postselección y preselección iguales $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ es equivalente a la correlación de Wigner-Yanase. Por lo tanto a diferencia de $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$, que generaliza a la correlación usual (2.2.7), $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ generaliza a (2.2.54) permitiendo que el estado de postselección sea diferente al de preselección.

La relación entre $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ y la correlación de Wigner-Yanase es muy importante pues como se menciona en [34], la correlación Wigner-Yanase distingue los estados (2.2.21) y (2.2.22) resultando en $Corr_{\hat{\rho}}(\hat{A}, \hat{B}) = 0$ para el primero y $Corr_{\hat{\rho}}(\hat{A}, \hat{B}) = 1$ para el segundo, con $\hat{A} = \hat{\sigma}_z \otimes \hat{I}_2$ y $\hat{B} = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_z$. De hecho, al tomar $\rho_f = \frac{1}{4}\hat{I}$ la correlación (2.2.51) se expresa también como una correlación Wigner-Yanase

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \frac{1}{4}\hat{I}) = Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}_0^2 - \hat{A}\hat{\rho}_0 \hat{B}\hat{\rho}_0) = Tr(\hat{\rho}_0^2) Corr_{\tilde{\rho}}(\hat{A}, \hat{B}), \tag{2.2.57}$$

con $\tilde{\rho} = \frac{\hat{\rho}_0^2}{Tr(\hat{\rho}_0^2)}$ y si se calcula utilizando de nuevo los operadores $\hat{A} = \hat{\sigma}_z \otimes \hat{I}_2$ y $\hat{B} = \hat{I}_1 \otimes \hat{\sigma}_z$ se obtiene, como es de esperarse, que para el estado de preselección (2.2.21),

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0, \tag{2.2.58}$$

mientras que para el estado (2.2.22),

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 1, \tag{2.2.59}$$

a diferencia de $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ que en los dos casos tomaba el valor de 1. En este sentido uno podría decir que $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ es una mejor cantidad que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ pues puede distinguir entre estados con correlaciones cuánticas y estados con correlaciones clásicas sin necesidad de conocer los eigenvectores de los estados reducidos $\hat{\rho}_0^{A(B)}$ del estado de preselección, como ocurría para $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$.

En efecto, podemos probar que utilizando el estado de postselección $\hat{\rho}_f = \frac{1}{d_{A(B)}} \hat{I}_{A(B)} \otimes \hat{\sigma}_{B(A)}$ entonces $K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$ si $\hat{\rho}_0$ es $A(B)$ -clásico. Para verlo, tomemos inicialmente de nuevo $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$ y el estado separable (2.2.36). Sustituyendo estos estados en la definición (2.2.51) y considerando $\hat{A} = \hat{a} \otimes \hat{I}_B$ y $\hat{B} = \hat{I}_A \otimes \hat{b}$ se obtiene

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0^{sep}, \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = \frac{1}{P^2} \sum_{nm} p_n p_m \text{Tr}_A(\hat{\sigma}_A \hat{a} \hat{\rho}_A^n \hat{\sigma}_A \hat{\rho}_A^m) \left[\text{Tr}_B(\hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^n \hat{\sigma}_B \hat{\rho}_B^m) - \text{Tr}_B(\hat{\sigma}_B \hat{\rho}_B^n \hat{\sigma}_B \hat{b} \hat{\rho}_B^m) \right], \quad (2.2.60)$$

que al usar la ciclicidad de la traza en B se puede escribir como

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{1}{P^2} \sum_{nm} p_n p_m \text{Tr}_A(\hat{\sigma}_A \hat{a} \hat{\rho}_A^n \hat{\sigma}_A \hat{\rho}_A^m) \mathcal{J}_{nm}^B, \quad (2.2.61)$$

donde se ha definido

$$\mathcal{J}_{nm}^B = \text{Tr}_B(\hat{b}[\hat{\rho}_B^n \hat{\sigma}_B, \hat{\rho}_B^m \hat{\sigma}_B]). \quad (2.2.62)$$

\mathcal{J}_{nm}^B es una cantidad antisimétrica bajo el intercambio de índices n por m , $\mathcal{J}_{nm}^B = -\mathcal{J}_{mn}^B$, por lo que al igual que se hizo para $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ es posible simetrizar a $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ respecto a A y B . Al intercambiar n por m en (2.2.61), la expresión resultante puede ser sumada con (2.2.61) para obtener

$$\begin{aligned} K_{\hat{A}\hat{B}}^w &= \frac{1}{2} (K_{\hat{A}\hat{B}}^w + K_{\hat{A}\hat{B}}^w) \\ &= \frac{1}{2P^2} \sum_{nm} p_n p_m \mathcal{J}_{nm}^A \mathcal{J}_{nm}^B, \end{aligned} \quad (2.2.63)$$

que es una expresión análoga a (2.2.40) para $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$. Similarmente a como se hizo antes, si $\mathcal{J}_{nm}^{A(B)} \sim \delta_{nm}$, entonces $K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$ (pues $\mathcal{J}_{nm}^{A(B)}$ son antisimétricos). Consideremos entonces que $\hat{\rho}_0$ es A -clásico, es decir, $\hat{\rho}_A^n = |n\rangle_A \langle n|_A = \hat{P}_n$ para alguna base ortonormal $\{|n\rangle_A\}$. De esta forma

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{nm}^A &= \text{Tr}(\hat{a}[\hat{\rho}_A^n \hat{\sigma}_A, \hat{\rho}_A^m \hat{\sigma}_A]) \\ &= \text{Tr}(\hat{a}[\hat{P}_n \hat{\sigma}_A, \hat{P}_m \hat{\sigma}_A]), \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

que desde luego, una forma de hacer esta cantidad proporcional a la identidad es tomar $\hat{\sigma}_A = \hat{P}_l$ con \hat{P}_l un proyector en la base $\{|n\rangle_A\}$, pero de nuevo requiere conocer los eigenestados de la matriz reducida de $\hat{\rho}_0$, lo que no aporta nada nuevo. Sin embargo, esta vez, al considerar $\hat{\sigma}_A = \frac{1}{d_A} \hat{I}_A$ (d_A la dimensión del espacio de Hilbert asociado a A), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{nm}^A &= \frac{1}{d_A^2} \text{Tr}(\hat{a}[\hat{P}_n, \hat{P}_m]) \\ &= \frac{1}{d_A^2} \text{Tr}(\hat{a}[\delta_{nm} \hat{P}_m - \delta_{mn} \hat{P}_n]) \\ &= \frac{1}{d_A^2} \delta_{nm} \text{Tr}(\hat{a}[\hat{P}_m - \hat{P}_n]), \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

que al sustituir en (2.2.63) y tomar la suma sobre n y m resulta en

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0. \quad (2.2.66)$$

Dado que (2.2.63) es simétrica respecto a A y B , se puede obtener un resultado análogo para B . En resumen lo que se ha probado es que si $\hat{\rho}_f = \frac{1}{d_{A(B)}} \hat{I}_{A(B)} \otimes \hat{\sigma}_{B(A)}$, entonces para $\hat{\rho}_0$ $B(A)$ -clásico entonces $K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$. Por contraposición podemos enunciar el siguiente resultado

- Dado $\hat{\rho}_f = \frac{\hat{I}_A}{d_A} \otimes \hat{\sigma}_B$ para cualquier $\hat{\sigma}_B$, entonces

$$Si \ K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) \neq 0 \text{ p.a. } \hat{A}, \hat{B} \implies D_{\hat{\rho}_0}(B|A) \neq 0. \quad (2.2.67)$$

Es decir $\hat{\rho}_0$ no es A -clásico y tiene discordia $D(B|A)$ no nula.

- Dado $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \frac{\hat{I}_B}{d_B}$ para cualquier $\hat{\sigma}_A$, entonces

$$Si \ K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_f) \neq 0 \text{ p.a. } \hat{A}, \hat{B} \implies D_{\hat{\rho}_0}(A|B) \neq 0. \quad (2.2.68)$$

Es decir $\hat{\rho}_0$ no es B -clásico y tiene discordia $D(A|B)$ no nula.

Un resultado particular que conjunta tanto (2.2.67) como (2.2.68) se obtiene al tomar $\hat{\rho}_f = \frac{1}{d_A} \hat{I}_A \otimes \frac{1}{d_B} \hat{I}_B = \frac{1}{d} \hat{I}$. Para este estado de postselección, como se comentó en párrafos anteriores, $K_{\hat{A}\hat{B}}^w = Tr(\hat{\rho}_0^2) Corr_{\tilde{\rho}}(\hat{A}, \hat{B})$, con $\tilde{\rho} = \frac{\hat{\rho}_0^2}{Tr(\hat{\rho}_0^2)}$ y se anula tanto para $\hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_A$ como para $\hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_B$, es decir, para estados con correlaciones clásicas. En la tabla 2.1 se sintetizan los resultados comparativos entre $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ y $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ mostrando para qué estados de postselección detectan discordia y en la figura 2.1 se resume esquemáticamente la conexión entre estas dos cantidades.

Comparación entre $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ y $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$			
Correlación	Postselección $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$	$\hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_A$	$\hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_B$
$C_{\hat{A}\hat{B}}^w, K_{\hat{A}\hat{B}}^w$	$\hat{\sigma}_A$ proyector sobre vec. propios de $Tr_B \hat{\rho}_0$	= 0	
$C_{\hat{A}\hat{B}}^w, K_{\hat{A}\hat{B}}^w$	$\hat{\sigma}_B$ proyector sobre vec. propios de $Tr_A \hat{\rho}_0$		= 0
$K_{\hat{A}\hat{B}}^w$	$\hat{\sigma}_A = \frac{1}{d_A} \hat{I}_A$	= 0	
$K_{\hat{A}\hat{B}}^w$	$\hat{\sigma}_B = \frac{1}{d_B} \hat{I}_B$		= 0

Tabla 2.1: Resultados para $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ y $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ para estados separables con distintas correlaciones cuánticas.

Como nota final, es interesante observar que al tomar el estado de postselección con $\hat{\sigma}_A = |l\rangle_A \langle l|_A$ se obtiene (véanse las ecuaciones (2.2.39) y (2.2.62))

$$\begin{aligned} T_{nm}^A &= Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{a} \hat{\rho}_A^n) Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{\rho}_A^m) - Tr_B(\hat{\sigma}_A \hat{a} \hat{\rho}_A^m) Tr_A(\hat{\sigma}_A \hat{\rho}_A^n) \\ &= Tr(\hat{a}[\hat{\rho}_A^n \hat{\sigma}_A, \hat{\rho}_A^m \hat{\sigma}_A]) \\ &= \mathcal{J}_{nm}^A, \end{aligned} \quad (2.2.69)$$

y desde luego, si se toma $\hat{\sigma}_B = |k\rangle_B \langle k|_B$ se tiene también $T_{nm}^B = \mathcal{J}_{nm}^B$ y por lo tanto

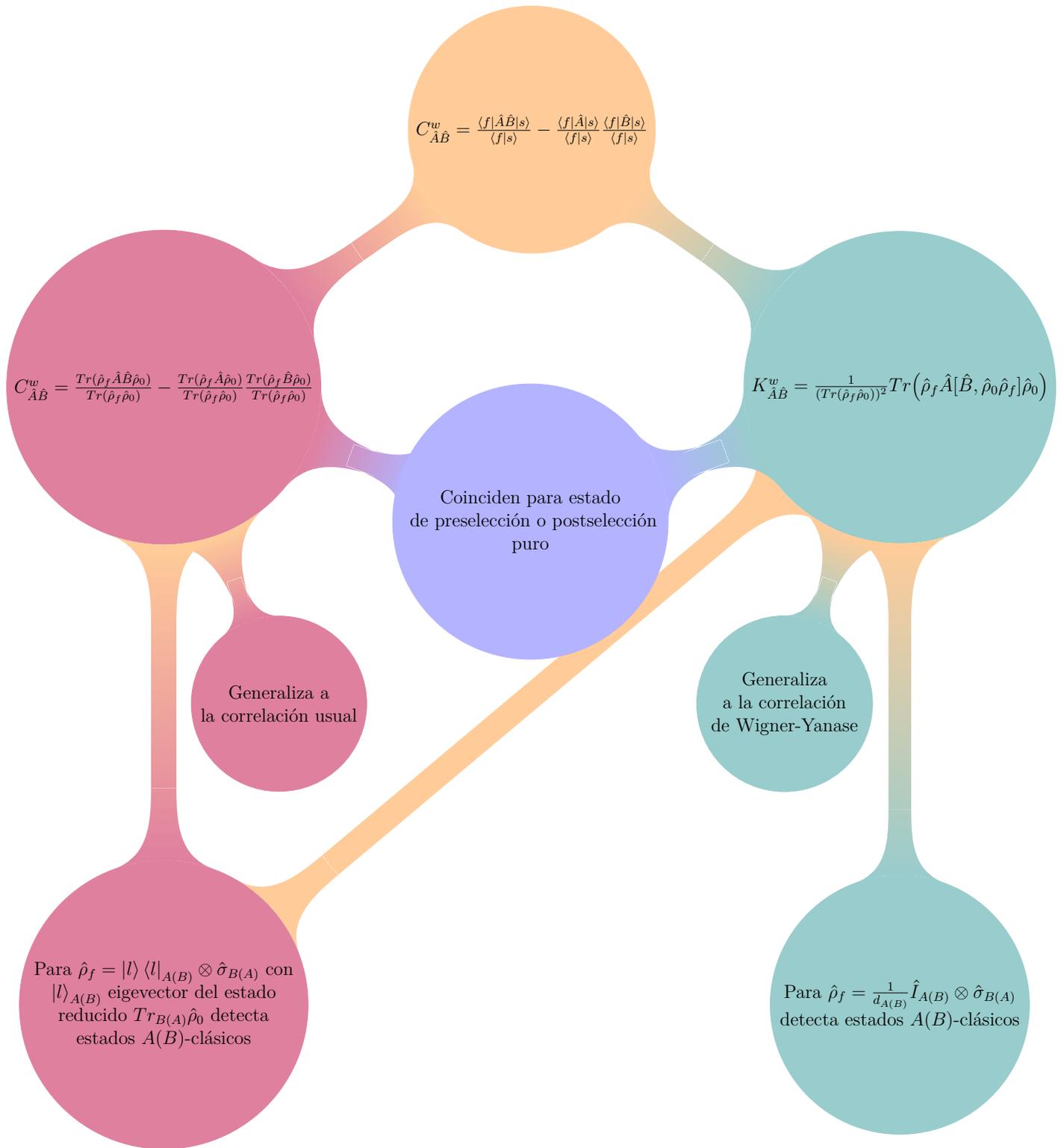


Figura 2.1: Esquema de las cantidades propuestas para detectar correlaciones cuánticas y resultados obtenidos en este trabajo. Hasta arriba está la correlación débil para estados puros, y se divide en las dos generalizaciones desarrolladas para estados mezcla.

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0^{sep}, |l\rangle_A \langle l|_A \otimes |k\rangle_B \langle k|_B) = C_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0^{sep}, |l\rangle_A \langle l|_A \otimes |k\rangle_B \langle k|_B), \quad (2.2.70)$$

que es un caso particular (para $\hat{\rho}_0$ separable) de la ecuación (2.2.52), pues en tal caso $\hat{\rho}_f$ es puro.

Lo que llama la atención de la ecuación (2.2.69) es que recordando que el estado de postselección que se encontró para $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$, aquel que permitió detectar correlaciones cuánticas con $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$, justamente es un estado con $\hat{\sigma}_A$ puro. Siguiendo la ecuación (2.2.69) se tiene en este caso que T_{nm}^A se reduce a \mathcal{J}_{nm}^A . Pareciera ser entonces que la cantidad a través de la cual se está detectando discordia es \mathcal{J}_{nm}^A . En la siguiente sección veremos que en efecto, el criterio establecido para $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ estará relacionado con el criterio de correlaciones cuánticas desarrollado en [2] a través de \mathcal{J}_{nm}^A .

2.2.3. Criterio de Guo y $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$

Por último, para reforzar la validez de la cantidad $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ como viable para detectar correlaciones cuánticas, en esta sección se presenta la consistencia con otro criterio de correlaciones cuánticas desarrollado en la referencia [2]. En ese trabajo se considera un sistema bipartito, con partes A y B , cuyo estado es $\hat{\rho}_0$, y se definen los operadores

$$\hat{A}_{ij} = \langle i_B | \hat{\rho}_0 | j_B \rangle, \quad (2.2.71)$$

que actúan sobre \mathcal{H}_A y

$$\hat{B}_{ij} = \langle i_A | \hat{\rho}_0 | j_A \rangle, \quad (2.2.72)$$

que actúan en \mathcal{H}_B , con $\{|i_A\rangle\}$ y $\{|i_B\rangle\}$ bases ortonormales de dichos espacios respectivamente. En [2], Guo encuentra que

$$\hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_A \iff [\hat{A}_{ij}, \hat{A}_{kl}] = 0, \quad (2.2.73)$$

para todo i, j, k, l . Similarmente

$$\hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_B \iff [\hat{B}_{ij}, \hat{B}_{kl}] = 0, \quad (2.2.74)$$

para todo i, j, k, l . Este criterio, en particular, implica el criterio desarrollado para $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ con $\hat{\sigma}_{(A)B}$ proporcional a la identidad, enunciado en (2.2.67) y (2.2.68). Para verlo, tomamos el estado de preselección en su forma más general

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0 &= \sum_i |i_B\rangle \langle i_B| \hat{\rho}_0 \sum_j |j_B\rangle \langle j_B| \\ &= \sum_{ij} \langle i_B | \hat{\rho}_0 | j_B \rangle |i_B\rangle \langle j_B| \\ &= \sum_{ij} \hat{A}_{ij} \otimes |i_B\rangle \langle j_B| \\ &= \sum_{ij} \hat{A}_{ij} \otimes \hat{F}_{ij}^B, \end{aligned} \quad (2.2.75)$$

donde se ha definido $\hat{F}_{ij}^B = |i_B\rangle \langle j_B|$, con $\{|i_B\rangle\}$ una base de \mathcal{H}_B . Sustituyendo $\hat{\rho}_0$ en (2.2.51) con el estado de postselección $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$ se obtiene

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = \frac{1}{P^2} \text{Tr} \left(\hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B \hat{A} \left[\hat{B}, \sum_{ij} (\hat{A}_{ij} \otimes \hat{F}_{ij}^B) (\hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B) \right] \sum_{lm} \hat{A}_{lm} \otimes \hat{F}_{lm}^B \right). \quad (2.2.76)$$

De manera similar a antes, podemos separar aquellos términos que operan sobre \mathcal{H}_A de aquellos términos que operan sobre \mathcal{H}_B de tal forma que

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = \frac{1}{P^2} \sum_{ijlm} Tr_A(\hat{a}\hat{\mathcal{A}}_{ij}\hat{\sigma}_A\hat{\mathcal{A}}_{lm}\hat{\sigma}_A)\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^B \quad (2.2.77)$$

donde esta vez se ha definido

$$\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^B = Tr_B(\hat{b}[\hat{F}_{ij}^B\hat{\sigma}_B, \hat{F}_{lm}^B\hat{\sigma}_B]). \quad (2.2.78)$$

Nótese que (2.2.78) es análoga a (2.2.62), con la diferencia de que el lugar que tomaban los operadores $\hat{\rho}_B^n$ en (2.2.62) es ocupado aquí por los operadores \hat{F}_{ij}^B . Intercambiando los índices $(ij) \leftrightarrow (lm)$ en (2.2.77) y sumando el resultado con (2.2.77), al notar que $\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^B = -\mathcal{J}_{(lm)(ij)}^B$ podemos obtener

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{1}{2P^2} \sum_{ijlm} \mathcal{J}_{(ij)(lm)}^A \mathcal{J}_{(ij)(lm)}^B, \quad (2.2.79)$$

con

$$\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^A = Tr_A(\hat{a}[\hat{\mathcal{A}}_{ij}\hat{\sigma}_A, \hat{\mathcal{A}}_{lm}\hat{\sigma}_A]). \quad (2.2.80)$$

Notemos que esta vez la ecuación (2.2.79) no es simétrica respecto A y B pues los operadores $\hat{\mathcal{A}}_{ij}$ en la traza $\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^A$ contienen ahora toda la información del estado $\hat{\rho}_0$, mientras que $\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^B$ solo depende de \hat{b} y $\hat{\sigma}_B$.

Ahora, al tomar $\hat{\sigma}_A = \frac{1}{d_A} \hat{I}_A$ se obtiene

$$\mathcal{J}_{(ij)(lm)}^A = \frac{1}{d_A^2} Tr_A(\hat{a}[\hat{\mathcal{A}}_{ij}, \hat{\mathcal{A}}_{lm}]), \quad (2.2.81)$$

traza que contiene justamente el conmutador utilizado en el criterio de Guo, ec. (2.2.73). A partir de este criterio, si $\hat{\rho}_0$ es A -clásico, entonces

$$[\hat{\mathcal{A}}_{ij}, \hat{\mathcal{A}}_{lm}] = 0, \quad (2.2.82)$$

para todo i, j, l, m y a partir de (2.2.81), se concluye mediante (2.2.79) que si $\hat{\rho}_0$ es A -clásico entonces

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \frac{1}{d} \hat{I}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = 0. \quad (2.2.83)$$

El resultado es análogo para B .

Este desarrollo constituye otra prueba para mostrar que eligiendo adecuadamente el estado de postselección, $K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0$ puede anularse para estados clásicos, pero más importante, muestra la consistencia con un criterio ya establecido, lo que refuerza las cantidades estudiadas en este trabajo. Para finalizar, el criterio basado en $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ sería equivalente al criterio de Guo si se probara que

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w(\hat{\rho}_0, \frac{1}{d} \hat{I}_A \otimes \hat{\sigma}_B) = 0 \quad \forall \quad \hat{A}, \hat{B}, \hat{\sigma}_B \implies \hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_A, \quad (2.2.84)$$

pues ello, aunado a (2.2.67), conduciría a que $K_{\hat{A}\hat{B}}^w = 0 \iff \hat{\rho}_0 \in \mathcal{C}_A$. Sobre esto, nuestro análisis apunta a que la ecuación (2.2.84) es cierta, si bien la demostración rigurosa se deja para trabajo futuro.

Capítulo 3

Conclusiones

3.1. Conclusiones y observaciones finales

El presente trabajo tuvo como objetivo desarrollar herramientas matemáticas con base en los valores débiles para la obtención de criterios de correlaciones cuánticas en estados generales. La cantidad central de estudio fue la correlación débil definida por primera vez en [1] como

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{\langle f|\hat{A}\hat{B}|s\rangle}{\langle f|s\rangle} - \frac{\langle f|\hat{A}|s\rangle}{\langle f|s\rangle} \frac{\langle f|\hat{B}|s\rangle}{\langle f|s\rangle}, \quad (3.1.1)$$

donde \hat{A} y \hat{B} representan observables de los correspondientes subsistemas A y B que conforman al sistema compuesto $S = A + B$. El sistema S se encuentra en el estado de preselección $|s\rangle$ y es postseleccionado en el estado $|f\rangle$.

Como primer resultado de este trabajo, se generalizó el criterio de enredamiento presentado en [1] para dos partículas en un estado puro a un criterio de enredamiento bipartito para un sistema de n -partículas también en un estado puro. El criterio generalizado obtenido en la sección (2.1) establece condiciones suficientes para verificar enredamiento en biparticiones del tipo $k|n - k$. Además del resultado en sí mismo, este permite concluir que la correlación débil definida por (3.1.1) es útil para determinar la existencia de enredamiento bipartito en estados puros de sistemas compuestos por n partes, y como consecuencia surgió la pregunta sobre la posibilidad de utilizar la correlación débil para estados más generales.

Encaminados a responder esta pregunta, se utilizó una definición de valores débiles para estados mezcla encontrada en [20]. Usando esta definición, como trabajo original de la tesis, se pudieron generalizar algunas propiedades de los valores débiles en estados generales. Por ejemplo la relación (1.2.15) entre el promedio de un operador \hat{S} en el estado $\hat{\rho}_0 = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ y los valores débiles de \hat{S} con preselección $\hat{\rho}_0$ y postselección $\hat{\rho}_f = |f\rangle \langle f|$,

$$\langle S \rangle_0 = Tr(\hat{\rho}_0 \hat{S}) = \sum_f \mathcal{W}(f) \langle \hat{S} \rangle_w, \quad (3.1.2)$$

con $\mathcal{W}(f) = \sum_i p_i |\langle f|\psi_i\rangle|^2$, o si $f = \phi$ es una variable continua

$$\langle S \rangle_0 = Tr(\hat{\rho}_0 \hat{S}) = \int \mathcal{W}(\phi) \langle \hat{S} \rangle_w d\phi. \quad (3.1.3)$$

Con este estudio de los valores débiles en estados mezcla, fue entonces posible proponer dos generalizaciones de la correlación débil (3.1.1) a estados generales para sistemas bipartitos $A + B$. La

primera de ellas se definió como

$$C_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{B} \hat{\rho}_0)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} - \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{A} \hat{\rho}_0)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)} \frac{Tr(\hat{\rho}_f \hat{B} \hat{\rho}_0)}{Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)}. \quad (3.1.4)$$

Se mostró que la correlación (3.1.4) se puede considerar una generalización de la correlación usual

$$C_{\hat{A}\hat{B}} = Tr(\hat{\rho} \hat{A} \hat{B}) - Tr(\hat{\rho} \hat{A}) Tr(\hat{\rho} \hat{B}), \quad (3.1.5)$$

permitiendo estados de postselección distintos al de preselección. Se observó que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ en general (para postselección arbitraria) no detecta correlaciones cuánticas, aunque sí detecta estados correlacionados (no producto) siempre que $\hat{\rho}_f$ sea un estado producto. A partir de aquí se originó un análisis sobre la forma que debe de tener el estado de postselección $\hat{\rho}_f$ para la correcta detección de correlaciones presentes en el estado de preselección $\hat{\rho}_0$. Se concluyó que para que un estado $\hat{\rho}_f$ sea adecuado para este fin, tiene que ser un estado producto, $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$. A partir de esta observación, como resultado central, se obtuvo que (3.1.4) permite detectar discordia (de forma más directa que empleando otras cantidades que también detectan discordia) mediante una elección apropiada del estado de postselección. En particular, si se toma $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$ donde $\hat{\sigma}_{A(B)}$ es un eigenestado del estado reducido $\hat{\rho}_0^{A(B)} = Tr_{B(A)}(\hat{\rho}_0)$, entonces si $C_{\hat{A}\hat{B}}^w \neq 0$ el estado de preselección $\hat{\rho}_0$ tiene discordia $D(B|A)$ ($D(A|B)$) distinta de cero.

El inconveniente de este resultado es que es necesario conocer y postseleccionar sobre los estados reducidos del sistema de interés. Sin embargo, el hecho de que la correlación (3.1.4) pueda detectar correlaciones cuánticas más allá del enredamiento no cambia, y esto representa un avance y soporte para el significado y utilidad de los valores débiles en el estudio de correlaciones cuánticas. Además, no se descarta la posibilidad de que existan otros estados de postselección que permitan resultados similares o más generales, e incluso se podría tomar en cuenta a los operadores \hat{A} y \hat{B} para detectar correlaciones de manera particular. Este camino se decidió dejar para un futuro trabajo y se continuó con el estudio de otra generalización de la correlación débil en estados puros, camino que pensamos es más rico e ilustrativo a este nivel de conocimiento en relación a la correlación débil (3.1.1).

Esta generalización alternativa está dada por la ecuación

$$K_{\hat{A}\hat{B}}^w = \frac{\langle \hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0 \hat{\rho}_f] \rangle_w}{P} = \frac{1}{P} Tr(\hat{\rho}_f \hat{A}[\hat{B}, \hat{\rho}_0 \hat{\rho}_f] \hat{\rho}_0), \quad (3.1.6)$$

con $P = Tr(\hat{\rho}_f \hat{\rho}_0)$. Las cantidades (3.1.4) y (3.1.6) son esencialmente diferentes en general, si bien coinciden si el estado de postselección $\hat{\rho}_f$ o el estado de preselección $\hat{\rho}_0$ es puro. A diferencia de (3.1.4) que generaliza a la correlación usual, se mostró que $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ generaliza la llamada correlación de Wigner-Yanase definida como

$$Corr_{\hat{\rho}}(\hat{A}\hat{B}) = Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{\rho}) - Tr(\hat{A}\sqrt{\hat{\rho}}\hat{B}\sqrt{\hat{\rho}}). \quad (3.1.7)$$

Como se discutió, la correlación de Wigner-Yanase distingue correlaciones clásicas de cuánticas, y la cantidad (3.1.6) hereda esta propiedad de manera más directa que (3.1.4). En este caso, la correlación $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ también detecta correlaciones cuánticas si en el estado de postselección $\hat{\rho}_f = \hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B$ se toma $\hat{\sigma}_{A(B)}$ como un eigenestado del estado reducido $\hat{\rho}_0^{A(B)} = Tr_{B(A)}(\hat{\rho}_0)$, pero esto no aporta nada nuevo. Sin embargo, en fuerte contraste con $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$, $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ detecta discordia al elegir $\hat{\sigma}_{A(B)} = \frac{1}{d_{A(B)}} \hat{I}_{A(B)}$ ($C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ no detecta discordia para esta postselección). Específicamente, para $\hat{\rho}_f = \frac{1}{d_{A(B)}} \hat{I}_{A(B)} \otimes \hat{\sigma}_{B(A)}$,

si $K_{\hat{A}\hat{B}}^w \neq 0$ para algún \hat{A} y \hat{B} entonces $\hat{\rho}_0$ tiene discordia $D(B|A)(D(A|B))$ distinta de cero.

Por último, se probó que $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ es consistente con el criterio establecido en [2] por Guo, y aún más, se cree que se puede establecer un criterio equivalente basado en la cantidad $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$. La demostración de esto último, es decir, la demostración rigurosa de (2.2.84), quedará como trabajo posterior.

Desde mi punto de vista, $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ es una cantidad con relevancia teórica pues tiene una relación con la correlación de Wigner-Yanase, que a su vez está relacionada fuertemente con cantidades definidas en la teoría de información, como la información de Fisher o la llamada Skew Information (información torcida, información asimétrica, información sesgada) [35][36]. Un estudio posterior de $K_{\hat{A}\hat{B}}^w$ con un enfoque informático podría entonces arrojar luz hacia el significado físico de las correlaciones débiles mencionadas en este trabajo.

Por otro lado, dado que $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ está compuesta por valores débiles de operadores hermitianos, esta cantidad tiene la posibilidad de ser medida experimentalmente y puede ser interesante estudiarla desde otro punto de vista. Como se recalcó en su momento, $C_{\hat{A}\hat{B}}^w$ depende fuertemente del estado de postselección, lo que permite definir una familia de correlaciones débiles en función de la postselección

$$\mathcal{F} = \{C^w(\hat{\rho}_f)_{\hat{A}\hat{B}}\}_{\hat{\rho}_f}. \quad (3.1.8)$$

Es posible que dentro de este conjunto exista alguna correlación débil que permita distinguir estados enredados (o en general, estados discordantes), por lo que un trabajo futuro cuyo objetivo sea estudiar esta familia de correlaciones débiles puede rendir frutos en la caracterización de estados con correlaciones cuánticas. Se enfatiza que las cantidades (3.1.4) y (3.1.6) tienen como característica importante su fácil cálculo analítico, lo cual es una contribución por lo menos interesante para el estudio de correlaciones cuánticas.

Por todo lo anterior, considero que este trabajo es relevante ya que representa los primeros pasos en la construcción de nuevas herramientas matemáticas para el estudio de correlaciones cuánticas en estados generales. Se mostró que las cantidades propuestas en términos de valores débiles permiten detectar discordia cuántica de manera sencilla en estados mezcla, mientras que en estados puros se pudieron utilizar para establecer un criterio de enredamiento bipartito en sistemas de n partes. Continuar con el estudio de las cantidades aquí definidas, posiblemente permita descubrir nuevas propiedades y usos de estas correlaciones débiles en general.

Capítulo 4

Apéndices

4.1. Apéndice A. Cálculo del estado del medidor en una medición débil

Se tiene que el estado del medidor, ec. (1.1.36), es

$$\hat{\mu}_f = \frac{1}{P(f|\hat{\tau}_1)} Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1], \quad (4.1.1)$$

donde \hat{P}_f es el proyector sobre el estado $|f\rangle$ del sistema, \hat{I}_M la identidad que actúa sobre \mathcal{H}_M y $P(f|\hat{\tau}_1)$ la probabilidad de obtener el valor f (eigenvalor del observable \hat{F}) al medir el sistema dado que el sistema-medidor está en el estado (1.1.35).

Ahora calculamos explícitamente (4.1.1) desarrollando los conmutadores en (1.1.35),

$$\begin{aligned} Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1] &= \sum_i \langle s_i | \left[|f\rangle \langle f| \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 + \frac{ig}{\hbar} (|f\rangle \langle f| \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S} \hat{N} - |f\rangle \langle f| \hat{S} \hat{N} \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{2\hbar^2} (|f\rangle \langle f| \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S}^2 \hat{N}^2 - 2|f\rangle \langle f| \hat{S} \hat{N} \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S} \hat{N} + |f\rangle \langle f| \hat{S}^2 \hat{N}^2 \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0) \right] |s_i\rangle \\ &= \sum_i \langle s_i | f \rangle \left[\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 + \frac{ig}{\hbar} (\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S} \hat{N} - \langle f | \hat{S} \hat{N} \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{2\hbar^2} (\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S}^2 \hat{N}^2 - 2 \langle f | \hat{S} \hat{N} \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S} \hat{N} + \langle f | \hat{S}^2 \hat{N}^2 \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0) \right] |s_i\rangle \\ &= \left[\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 + \frac{ig}{\hbar} (\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S} \hat{N} - \langle f | \hat{S} \hat{N} \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{2\hbar^2} (\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S}^2 \hat{N}^2 - 2 \langle f | \hat{S} \hat{N} \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0 \hat{S} \hat{N} + \langle f | \hat{S}^2 \hat{N}^2 \hat{\rho}_0 \hat{\mu}_0) \right] \sum_i |s_i\rangle \langle s_i | f \rangle \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

y usando la relación de completéz para los estados $|s_i\rangle$ queda

$$\begin{aligned} Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1] &= \langle f | \hat{\rho}_0 | f \rangle \hat{\mu}_0 + \frac{ig}{\hbar} (\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{S} | f \rangle \hat{\mu}_0 \hat{N} - \langle f | \hat{S} \hat{\rho}_0 | f \rangle \hat{N} \hat{\mu}_0) - \\ &\quad - \frac{g^2}{2\hbar^2} (\langle f | \hat{\rho}_0 \hat{S}^2 | f \rangle \hat{\mu}_0 \hat{N}^2 - 2 \langle f | \hat{S} \hat{\rho}_0 \hat{S} | f \rangle \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} + \langle f | \hat{S}^2 \hat{\rho}_0 | f \rangle \hat{N}^2 \hat{\mu}_0). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Ahora, para un estado inicial puro del sistema, $\hat{\rho}_0 = |s\rangle\langle s|$, lo anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1] &= |\langle f|s\rangle|^2 \hat{\mu}_0 + \frac{ig}{\hbar} \left(\langle f|s\rangle \langle s|\hat{S}|f\rangle \hat{\mu}_0 \hat{N} - \langle f|\hat{S}|s\rangle \langle s|f\rangle \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) - \\ &- \frac{g^2}{2\hbar^2} \left(\langle f|s\rangle \langle s|\hat{S}^2|f\rangle \hat{\mu}_0 \hat{N}^2 - 2 \langle f|\hat{S}|s\rangle \langle s|\hat{S}|f\rangle \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} + \langle f|\hat{S}^2|s\rangle \langle s|f\rangle \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 \right). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Reescribimos esta expresión definiendo la cantidad

$$\langle \hat{S}^n \rangle_w = \frac{\langle f|\hat{S}^n|s\rangle}{\langle f|s\rangle} \quad (4.1.5)$$

como el **valor débil** de orden n para el observable \hat{S} , quedando de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1] &= |\langle f|s\rangle|^2 \left[\mu_0 + \frac{ig}{\hbar} \left(\langle \hat{S} \rangle_w^* \hat{\mu}_0 \hat{N} - \langle \hat{S} \rangle_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) - \right. \\ &\left. - \frac{g^2}{2\hbar^2} \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w^* \hat{\mu}_0 \hat{N}^2 - 2 |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} + \langle \hat{S}^2 \rangle_w \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

y por último definiendo

$$Im(\hat{A}) = \frac{i}{2} [\hat{A}^\dagger - \hat{A}], \quad (4.1.7)$$

$$Re(\hat{A}) = \frac{1}{2} [\hat{A}^\dagger + \hat{A}], \quad (4.1.8)$$

llegamos a

$$\begin{aligned} Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1] &= |\langle f|s\rangle|^2 \left[\mu_0 + \frac{2g}{\hbar} Im \left(\langle \hat{S} \rangle_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) - \right. \\ &\left. \frac{g^2}{\hbar^2} Re \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Para terminar de calcular el estado $\hat{\mu}_f$ necesitamos calcular $P(f|\hat{\tau}_1)$. Dado que $Tr(\hat{\mu}_f) = 1$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} P(f|\hat{\tau}_1) &= Tr(Tr_S[(\hat{P}_f \otimes \hat{I}_M)\hat{\tau}_1]) \\ &= |\langle f|s\rangle|^2 \left[Tr(\hat{\mu}_0) + \frac{2g}{\hbar} Im \left(\langle \hat{S} \rangle_w Tr(\hat{N} \hat{\mu}_0) \right) - \frac{g^2}{\hbar^2} Re \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w Tr(\hat{N}^2 \hat{\mu}_0) - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 Tr(\hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N}) \right) \right] \quad (4.1.10) \\ &= |\langle f|s\rangle|^2 \left[1 + \frac{2g}{\hbar} Im \left(\langle \hat{S} \rangle_w \langle \hat{N} \rangle_0 \right) - \frac{g^2}{\hbar^2} Re \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w \langle \hat{N}^2 \rangle_0 - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \langle \hat{N}^2 \rangle_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Suponiendo aquí que $\langle N \rangle_0 = 0$, se obtiene:

$$P(f|\hat{\tau}_1) = |\langle f|s\rangle|^2 \left[1 - \frac{g^2}{\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 Re \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \right) \right]. \quad (4.1.11)$$

Por lo tanto, juntando los resultados anteriores, la expresión para la matriz densidad del medidor después de postseleccionar S en el estado $|f\rangle$, asumiendo que inicialmente S está en estado puro $\hat{\rho}_0 = |s\rangle\langle s|$, es (hasta orden g^2):

$$\hat{\mu}_f = \frac{1}{D} \left[\mu_0 + \frac{2g}{\hbar} \text{Im} \left(\langle \hat{S} \rangle_w \hat{N} \hat{\mu}_0 \right) - \frac{g^2}{\hbar^2} \text{Re} \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w \hat{N}^2 \hat{\mu}_0 - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \hat{N} \hat{\mu}_0 \hat{N} \right) \right], \quad (4.1.12)$$

con $D = \left[1 - \frac{g^2}{\hbar^2} \langle \hat{N}^2 \rangle_0 \text{Re} \left(\langle \hat{S}^2 \rangle_w - |\langle \hat{S} \rangle_w|^2 \right) \right]$.

Capítulo 5

Bibliografía

- [1] Valdés A., de la Peña L., and Cetto A.M. (2019). Strong entanglement criterion involving momentum weak values. *Physics Letters A*, 383, 838-842.
- [2] Guo Y. and Hou J. (2012). A class of separable quantum states. *Journal of physics A*, 45, 505303 1-14.
- [3] Nielsen M.A. and Chuang I.L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 171-593
- [4] Buchleitner A., Viviescas C., Tiersch M., and Mintert F. (2009). *Entanglement and Decoherence: Foundations and Modern Trends*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer. pp. 61–86
- [5] Trimmer J.D. (1980). The present situation in quantum Mechanics: A translation of Schrödinger’s “cat paradox paper”. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124, 323-338.
- [6] Modi K., Brodutch A., Cable H., Paterek T., and Vedral V. (2012). The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.*, 84, 1655-1707.
- [7] Adesso G., Bromley T.R., and Cianruso M. (2016). Measures and applications of quantum correlations. *Journal of Physics A*, 49, 1-82.
- [8] Henderson L. and Vedral V. (2001). Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A*, 34, 6899-6905.
- [9] Ollivier H. and Zurek W.H. (2001). Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 017901 1-4 .
- [10] Modi K. (2014). A Pedagogical Overview of Quantum Discord. *Open Systems and Information Dynamics*, 21, 1440006 1-16.
- [11] Aolita L., de Melo F., and Davidovich L. (2014). Open-system dynamics of entanglement: a key issues review. *Rep. Prog. Phys.*, 78, 1-79.
- [12] Horodecki M., Horodecki P., and Horodecki R. (1996). Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223, 1-8.
- [13] Matzkin A. (2019). Weak Values and Quantum Properties. *Foundations of Physics*, 49, 298-316.

- [14] Dressel J., Malik M., Miatto F. M., Jordan A. N., and Boyd R. W. (2014). Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications. *Rev. Mod. Phys.*, 86, 307-316.
- [15] Tamir B. and Cohen E. (2013). Introduction to Weak Measurements and Weak Values. *Quanta*, 2, 7-17.
- [16] Braverman B. and Simon C. (2013). Proposal to Observe the Nonlocality of Bohmian Trajectories with Entangled Photons. *Phys. Rev. Lett.*, 110, 060406 1-5.
- [17] Svensson B.E.Y. (2013). Pedagogical Review of Quantum Measurement Theory with an Emphasis on Weak Measurements. *Quanta*, 2, 18-49.
- [18] Pusey M.F, Barrett J., and Rudolph T.(2012). On the reality of the quantum state. *Nature Physics*, 8, 475-478.
- [19] Aharonov Y., Albert D.Z., and Vaidman L. (1988). How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.*, 60, 1351–1354.
- [20] Lekshmi S., Shaji N., and Shaji A. (2017). Weak measurements and nonClassical correlations. *Annals of Physics*, 376, 448-459.
- [21] Vaidman L., Ben-Israel A., Dziewior J., Knips L., Weißl M., Meinecke J., Schwemmer C., Ber R., and Weinfurter H. (2017). Weak value beyond conditional expectation value of the pointer readings. *Phys. Rev. A*, 96, 032114 1-13.
- [22] Gabriel, A., Hiesmayr B.C., and Huber M. (2010). Criterion for k-separability in mixed multipartite systems. *Quantum Information and Computation*, 10, 829-836.
- [23] Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M., and Horodecki K. (2009). Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81, 865-942.
- [24] Peres A. (1996). Separability Criterion for Density Matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77, 1413-1415.
- [25] Horodecki M., Horodecki P., and Horodecki R. (2001). Separability of n-particle mixed states: necessary and sufficient conditions in terms of linear maps. *Physics Letters A*, 283, 1-7.
- [26] Alves C., (2005). Detection of quantum entanglement in physical systems. PhD Thesis. University of Oxford.
- [27] Castro E., Gómez R., Ladera C. L., and Zambrano A. (2013). Quantum discord with weak measurement operators of quasi-Werner states based on bipartite entangled coherent states. *Proc. SPIE*, 8785, 87858U 1-8.
- [28] Majtey A.P., Bussandri D.G., Osan T., Lamberti P., and Valdés A. (2017). Problem of quantifying quantum correlations with non-commutative discord. *Quantum Information Processing*, 16, 226 1-12.
- [29] Horodecki M., Horodecki K., Horodecki P., Horodecki R., Oppenheim J., Sen A., and Sen U. (2003). Local Information as a Resource in Distributed Quantum Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 90, 100402 1-4.

- [30] Zurek W.H. (2003). Quantum discord and Maxwell's demons. *Phys. Rev. A*, 67, 012320 1-6.
- [31] Girolami D., Tufarelli T., and Adesso G. (2013) Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty. *Phys. Rev. Lett.*, 110, 240402 1-5.
- [32] Bussandri D.G. (2020). Distinguibilidad y correlaciones en sistemas cuánticos bipartitos. Tesis de Doctorado. Universidad Nacional de Córdoba.
- [33] de la Peña L., Cetto A.M., and Valdés A. (2015). *The Emerging Quantum. The Physics Behind Quantum Mechanics*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.
- [34] Luo S. and Luo Y. (2003). Correlation and entanglement. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 19, 581–598.
- [35] Wigner E.P., Yanase M. (1963). Information content of distributions. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 49, 910-918.
- [36] Luo S. (2004). Wigner-Yanase skew information vs. Quantum Fisher Information. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132, 885-890.