



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

¿PARÁBOLAS EN PERSPECTIVA EN PINTURAS  
DEL RENACIMIENTO?  
ÓPTICA GEOMÉTRICA Y REPRESENTACIÓN

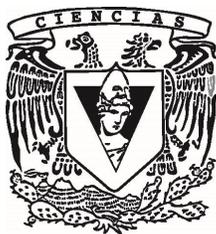
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

VIRGILIO RICARDO LÁZARO ZERMEÑO



DIRECTOR DE TESIS:  
M. EN C. JOSÉ RAFAEL MARTÍNEZ  
ENRÍQUEZ  
CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Agradecimientos

A mi madre, María de Jesús Zermeño Moreno, y a mi pareja Germán Torres Flores quienes siempre han impulsado a superarme.

A mi padre Efrén Lázaro Lopez y mi hermana, la Dra. Julia Lázaro Zermeño, cuyo ejemplo siempre ha sido un faro para mí.

A mi hermana Greta Carolina Lázaro Zermeño por estar ahí en los momentos malos y también en los buenos.

A mis amigos “Los Gordos”: Angel, Tonatiuh, Uriel, Darío, Ada y Victor; y “Los Físicos”: Alejandra, Carlos, Mario (el Koaz), Blas y Juan Manuel, que fueron grandes compañeros con quienes chocar ideas en las tareas de la Facultad y fuera de ella.

A todos mis profesores a lo largo de mi trayectoria académica, en especial a Edgardo Cruz Estrada, quien me inició en las matemáticas de la secu; a Odilio Orozco Magdaleno, mi maestro de Circuitos Eléctricos, tutor de la primera tesis, compañero del baloncesto y amigo de vida; al Dr. Leonid Fridman, por la paciencia que me tuvo en la maestría y también al M. en C. José Rafael Martínez Enríquez por su paciencia, apoyo, disposición y dirección -casi como las de un padre- a lo largo de todos estos años que me llevó desarrollar esta tesis.



# Índice General

Introducción	1
Capítulo 1 - Geometría Prerrenacentista	4
La Geometría como recurso para describir al mundo: el antes y el ahora	4
La óptica y las primeras teorías de la visión	5
De Grecia a Oriente Medio	6
La Perspectiva: Entre Geometría y Mimesis	13
Conclusión	18
Capítulo 2 - La Perspectiva de Alberti y Piero	19
La Construcción de Alberti	19
Las Escuelas de Ábaco	26
Piero della Francesca	26
Trazado del cuadrículado sobre el piso degradado	34
Construcción a Partir del Punto de Distancia	35
Trazado de prismas según el método de Piero.	40
Dibujar un prisma degradado	52
El Cáliz de Ucello	56
Conclusión	60
Capítulo 3 - Concepto y representación de parábolas: algunos resultados geométricos	61
Parábolas en grabados renacentistas	61
Caracterización de parábolas a partir de los resultados de Apolonio	62
Definiciones de diámetro, ordenada y abscisa de una sección cónica	63
Elementos Geométricos para identificar una parábola	65
Lugar Geométrico de una Parábola a Partir de Rectas Tangentes	68
Trazado de una parábola en perspectiva	73
Razón cruzada	80
Razón cruzada sobre una cónica	82
Aplicación de la Proposición de Apolonio a una parábola en perspectiva	86
Conclusión	87
Capítulo 4 - Análisis comparativo de curvas con apariencia de parábola en grabados y pinturas del Renacimiento	88
Introducción	88
Estado del Arte	89
Grabado de Niccolo Tartaglia	90
Grabado de Rubens: Atlas cargando al Mundo	96
Pintura de Artemisia Gentilleschi: Judith decapitando a Holofernes	101
Conclusiones	109
Conclusiones Finales	110
Referencias Bibliográficas	112



## Introducción

El trabajo de tesis que presento surge del interés de realizar un análisis pictórico mediante herramientas computacionales que complementan a las herramientas clásicas que han sido superadas y mejoradas con el paso del tiempo. Después de presentar una visión histórica, conceptual y práctica del *modus operandi* de la geometría y la óptica geométrica por parte de los pintores renacentistas, el objetivo principal al que se avoca el último capítulo es revisar cómo se enlazan los siguientes elementos:

- 1) la fidelidad con la que los pintores retrataban lo que el mundo ofrece a la mirada,
- 2) los recursos técnicos con que contaban y
- 3) el contraste entre ciertas representaciones de curvas que se muestran en varias pinturas –en particular lo que hoy sabemos deberían ser parábolas– con lo que se obtendría a través de construcciones estrictamente geométricas empleando software de modelado en 3D. Esto significa que se analizará que tan apegadas eran las pinturas a la representación correcta de elementos -objetos o procesos- que deben sujetarse a formas plenamente identificadas.

Más en concreto, se dará un vistazo a las concepciones geométricas que tenían los griegos sobre la visión y cómo a partir de las mismas surgieron en el Renacimiento conceptos clave que dieron paso al dibujo en perspectiva que, aplicado a la pintura, buscaban alcanzar el ideal de inmersión visual que en la actualidad se consigue –o se pretende conseguir– con las aplicaciones de Realidad Virtual (RV).

Se investigará el grado de precisión y la intención de los pintores y dibujantes del Renacimiento para plasmar parábolas y/o ciertas situaciones de perspectivas en grabados y pinturas de la época. La investigación irá encausada hacia qué tan bien conseguían los renacentistas imitar la realidad con las herramientas, conceptos y “técnicas” disponibles en ese entonces.

Generando una versión tridimensional de los grabados de Rubens, (Específicamente, su *Atlas cargando al mundo*, el cual figura en el *Opticorum Libri Sex* (Franciscus Aguilonus, 1613.)), Tartaglia y la portada que acompaña a su *Nueva Ciencia* (1537), (*Euclides cuidando las puertas del conocimiento*), se analizará empleando herramientas de cómputo, las habilidades de algunos de los renacentistas más representativos para plasmar la realidad, desde las trayectorias físicas de las balas hasta las disposiciones de las fuentes de luz en los correspondientes grabados, Todo lo anterior con base en los conceptos de perspectiva que se hicieron populares en esa época.

Finalmente se presentará una comparativa con una versión tridimensional de *Judith decapitando a Holofernes* de Artemisia Gentileschi (1612 - 1613). De especial interés es la curva que describe la sangre que brota como fuente de la herida.

Los programas de cómputo gráfico actuales permiten construir objetos en un espacio simulado con precisión matemática. En particular, los modelos en 3D generados para ser utilizados principalmente en arquitectura o ingeniería, emplean estos programas (también conocidos como CAD) y ofrecen resultados mucho más realistas.

Existen también programas de modelado en 3D (Maya, Blender, 3DSMAX) cuya finalidad es acaso más artística. Estos programas han sido alimentados a lo largo de su historia con las características que el ojo (interpretado por la cámara) y la luz habrían de tener en el entorno simulado que proponen. Sorprenderá –o quizás no– descubrir que muchos conceptos ideados mucho tiempo atrás por la cultura griega mantienen su vigencia y son tomados en cuenta entre las herramientas de cómputo gráfico actuales.

El texto que presento como tesis está dividido en cuatro capítulos, cuyos contenidos nuestro a modo de esbozo a continuación:

- Capítulo 1: Se presenta un recuento de las ideas que nos heredaron los griegos respecto de la visión y su paso por la Edad Media hasta llegar al Renacimiento.
- Capítulo 2: Se analizan las metodologías de dibujo en perspectiva que surgieron en el Renacimiento, así como sus resultados pictóricos y limitaciones.
- Capítulo 3. Se presenta una metodología que permite construir parábolas y se combinan con los métodos mostrados en el capítulo 2 para producir parábolas en perspectiva.
- Capítulo 4: Finalmente se comparan algunos grabados y pinturas del Renacimiento que presenten descripciones de lo que hoy sabemos deberían ser parábolas. Se agrega una sección con trabajos pictóricos así como imágenes que presentan fuentes de luz con dudoso comportamiento y se contrastan con sus representaciones computarizadas. A partir de ello se plantean las diferencias entre ambas prácticas.

Al emplear las herramientas computacionales comunes en el presente, es fácil perder de vista que no siempre fue sencillo lograr representaciones realistas de objetos en perspectiva. Mientras percibimos cómo los renacentistas y los griegos hacían lo mejor que podían de acuerdo con sus capacidades y herramientas de la época, no debemos olvidar que es gracias al esfuerzo temprano de estos mismos ancestros que eventualmente nuestra modernidad cuenta con toda esta matemática computacional tan sofisticada.

A lo largo de nuestro estudio del origen de la teoría que se empleará en el análisis comparativo, se mencionará cómo determinados conceptos históricos han engendrado los conceptos modernos. Al contrario de los prejuicios contemporáneos, “lo viejo” ha poseído y posee todavía mucha fortaleza, validez y utilidad si se sabe interpretar. Más aun, se pueden extraer beneficios de carácter didáctico, además de culturales, si se logra contrastar adecuadamente con “lo nuevo”, permitiendo así también un mejor entendimiento de un concepto que quizás parezca nuevo, pero que seguramente su estado actual comenzó a gestarse mucho tiempo atrás en la historia de nuestra civilización.

# Capítulo 1

## Geometría Prerrenacentista

### La Geometría como recurso para describir al mundo: el antes y el ahora.

Las matemáticas son fundamentales para comprender el universo. Pitágoras, a pesar de ser una figura cubierta por un velo de misterio, es uno de los primeros filósofos en dar cuenta de ello: la matemática, los números, las proporciones y la geometría eran para los pitagóricos cuestiones que extendían los vínculos entre la realidad y las creencias religiosas.

Posteriormente, Platón integra a su filosofía muchas de las ideas pitagóricas, a tal grado que en ciertos aspectos llega a ser difícil discernir entre sus planteamientos y los preceptos pitagóricos.

Según Platón, el mundo físico está compuesto por lo perecedero, lo que cambia; a su vez, su contraparte, el mundo de las ideas, es eterno y es el *modelo* del que se deriva el mundo físico. A Platón le interesaba contar con ideas, definiciones exactas y fijas que permitiesen describir el mundo físico, que en contraste siempre está en constante cambio. La *Academia*, el círculo de intelectuales que gravitaban alrededor de Platón, dialogando y aprendiendo, influye en este aspecto de manera decisiva en lo que siglos más tarde formaría parte del llamado método científico y en particular el pensamiento matemático occidental. (Wade, 2015. p 12)

Esta corriente de ideas que permite conceptualizar estilos de pensamiento y concepciones del mundo ha perdurado ya bastante tiempo, adoptando variados matices, y se refleja en campos tan modernos como las Ciencias de la Computación. En la programación orientada a objetos, por ejemplo, una *clase* es una especie de receta fija que indica a la computadora la forma en cómo debe construir un *objeto*, mismo que es operado y afectado por el entorno programático y, finalmente, destruido cuando ya ha cumplido con su cometido o deja de ser útil.

Platón propone que el mundo físico está compuesto de partículas elementales, las cuales poseen la forma de los poliedros regulares hoy conocidos como *Sólidos Platónicos*, que son poliedros cuyas caras son todas iguales. Así, las partículas de aire son representadas por el octaedro, las de la tierra por el cubo, el fuego es un tetraedro y el agua un icosaedro. Nuevamente volteando a ver a la época actual, hoy en día las supercomputadoras corren simulaciones numéricas de fluidos en movimiento o de edificios derrumbándose considerando que dichos objetos están contruidos a partir de pequeños tetraedros que obedecen reglas que tienden a minimizar el tiempo de cálculo de dichas simulaciones. Esta estrategia es conocida como Método de Elemento Finito y es ampliamente utilizada en simulaciones como las antes mencionadas, entre otras.

## La óptica y las primeras teorías de la visión

Los griegos trataron de construir mediante la geometría un marco teórico que justificara cómo vemos las cosas. El *summum* de esta corriente se aprecia en la *Óptica* de Euclides. Como en muchas ocasiones ocurría con las diversas ramas de la matemática, no era un interés bien definido el emplear lo que hoy conocemos como óptica geométrica para hacer representaciones de la realidad, sino solamente era una serie de resultados que básicamente estaban contenidos en dicha obra para explicar las proposiciones de índole espacial, es decir, dar cuenta de la transmisión de la forma de los objetos del mundo visible a nuestros órganos de percepción y los supuestos procesos que daban lugar a su interpretación. La aplicación de dicha teoría parece que tenía lugar en algunas expresiones pictóricas de las culturas griega y romana para luego, terminando la hegemonía de Roma en occidente, pasar al olvido. Su empleo retornaría, casi como si fuera algo nuevo, hasta finales del siglo XIV.

La vista tomaría mayor importancia como sentido sensorial puesto que la mayor parte de la información –incluso aquella contenida en este texto– llega a la mente mediante la visión. Tal es la primacía de este sentido que Platón afirma que las ideas son estructuras mentales captadas solamente por *el ojo de la mente*. Es difícil saber si esta afirmación era de carácter meramente metafórico, o hasta que nivel se pensaba que se ajustaba a la realidad.

El término *fantasía*, originalmente “presencia bajo la luz”, pasó a transformarse en “traer hacia la luz”, haciendo así referencia al proceso mental de usar esta suerte de ojo platónico captador de ideas como medio para traer a la existencia un concepto, al menos en el plano racional. De esta manera el pintor cumple su tarea de artista evocando objetos en tres dimensiones para plasmarlos sobre un plano bidimensional, haciendo presente lo que de otra manera estaría ausente.

La pintura y la poesía eran, para los griegos, e incluso hasta para un gran número de eruditos del siglo XVI, artes hermanas. A pesar de que su medio de expresión era distinto, su propósito y naturaleza fundamental eran los mismos. La narrativa tiene su encanto y fuerza propia para evocar imágenes en la mente del lector. Es ahí donde reside la importancia de la pintura: incluso para hacer notar la fuerza de evocación que produce la literatura en el ser humano resulta más simple *hablar* de una imagen, de lo que “se ve”, de lo que capta el ojo. (Martínez, 2013, p. 43) Esta metáfora permea toda nuestra cultura occidental desde la antigüedad griega. No extraña que algunos autores, entre ellos Leonardo da Vinci, hayan dedicado un cierto número de párrafos para contrastar las características de ambas disciplinas (Farago, 1992. pp 4-7) Los contrastes y excelencias de la disciplina eran expuestos en textos denominados *Paragone*.

A la luz de las filosofías prevaletentes, durante el auge de la civilización griega existían dos teorías o corrientes similares en cuanto su empleo de la geometría para explicar cómo ve el ojo humano pero que sin embargo difieren en cuanto a su explicación del proceso. Estas las podemos clasificar como teoría extromisionista y teoría intromisionista de la visión. (Martínez, 2013. p 53)

La teoría extromisionista de la visión afirmaba que el ojo lanzaba rayos visuales que alcanzaban a un objeto, así se estableció el contrato para que, mediante una especie de “tacto visual” se percibiera el objeto. Por otro lado, la teoría intromisionista sostenía que el objeto era el que enviaba lo que en griego se denominaba *eidolas* –una especie de cúmulos o copias de sí mismo– al ojo. (Lindberg, 1976, p.1-11) A pesar de que en la antigüedad existieron teorías de la visión diferentes en los sentidos citados, ambas coincidían en establecer el proceso de conexión entre el objeto y su percepción por el sujeto empleando rayos o rectas y los ángulos o conos de visión a los que daban lugar. Estas ideas se mantienen a lo largo de la Edad Media gracias a los árabes, quienes eventualmente las llevaron (S. XI y S. XII d.c.) a Europa para que siglos más tarde contribuyeran a eso que hoy llamamos el Renacimiento.

### **De Grecia a Oriente Medio**

Después de los holocaustos de Alejandría, los trabajos de los griegos quedaron en manos del mundo musulmán. Sabiendo atesorar su herencia, los árabes traducen, revisan y apuntalan los textos griegos y además realizan sus propias contribuciones.

La vida académica en la Edad Media islámica se gestaba en los entornos de palacios y cortes del mundo musulmán, de manera similar a como posteriormente ocurrió en Europa. Los eruditos se esforzaban por alcanzar renombre hasta lograr atraer la atención de un mecenas que se interesara en ellos y los llamasen para ejercer como astrólogos, fisiatras o simplemente para *embellecer* su corte. Mientras el sabio cumpliera con los encargos del cortesano y agradara a éste (y mantuviese su desempeño como investigador y estatus de erudito, por supuesto), todo su tiempo libre lo podía dedicar a investigar sobre su tema predilecto.

Sin embargo, ocurría que algunas veces el tema no era de tan libre elección. Llámese cristianismo, llámese Islam, las religiones influían en los temas que pudiesen resultar de interés. En el caso del mundo árabe, si los temas de estudio o su filosofía no seguían la ley islámica, se consideraban no islámicos y eran menospreciados por los patrones y mecenas. Peor aún, si resultaba que el enfoque o el contenido iban en contra de la ley islámica se consideraban anti islámicos y se desfavorecían rotundamente. En general, si el tema de estudio no servía directamente a intereses religiosos se le consideraba banal y se menospreciaba por completo. (Smith, 2015, p18)

La óptica era entendida como una “ciencia mixta”. Era una ciencia que echaba mano de una “ciencia pura” –la Geometría en este caso– para ocuparse de cuestiones del mundo natural, es decir, por su materialidad, su sentido aplicado y alejado de lo platónico, le hacían caer en ese terreno donde convivían las reglas del mundo infralunar con que se sometía a la razón, es decir, las ideas. Tanto la Astronomía –que gozaba de mejor posición que la óptica– como la *Armónica* –ciencia que analiza los fenómenos acústicos– resultaban ser “ciencias medias” o “mixtas”.

Si bien la óptica no enseñaba nada en contra del Islam, inicialmente tampoco le redituaba grandes beneficios a dicha religión. Es por ello que parecía estar fuera del interés del islamismo. En este contexto surge el *De Aspectibus* de Alhazen (Conocido en la cultura árabe como *ibn al-Haytham. Su Kitab Al-Manazir*), que llega a Europa mediante traducciones hechas en España. Lamentablemente, los manuscritos de la época de los que se tiene noticia muestran un texto incompleto si se comparan con las versiones en árabe que aún se conservan.

Alhazen opina que para el estudio de la óptica basta considerar los rayos visuales a los que Euclides se refería en cuanto a su tratamiento geométrico, tal y como se usaban en los textos de óptica y catóptrica que le eran atribuidos.

Para los musulmanes, al igual que para los griegos, el término *Óptica* incluye también los aspectos del funcionamiento del ojo. Por ello no sorprende que en el *De Aspectibus* de Alhazen aparezcan imágenes que dan cuenta de esto. Evidentemente, Alhazen no parte de la nada; se le considera uno de los pensadores más profundos del Islam, y que retomó las ideas de muchos de los más reconocidos autores clásicos. Todo ello gracias a que tenía a su disposición gran parte de la producción filosófica griega y latina. Con ello se hacía pasar a segundo plano la discusión acerca de la procedencia de algunas de las alternativas más extremas, la intromisionista y la extromisionista, y lo mismo se validó para propuestas intermedias o vertientes como la que presenta Aristóteles respecto de qué era lo que consistía eso que llamamos luz (Lindberg, 1976. p. 61),

Entre los que mayor influencia ejercieron sobre él, intervienen Aristóteles y Galeno, en particular sobre cuestiones asociadas con la visión. Esta última en el caso de la óptica, contaba como principal autor a Claudio Ptolomeo, el también autor del *Almagesto* o *Sintaxis Matemática*, el texto que guió a esta disciplina a lo largo de lo que restaba de la antigüedad y toda la Edad Media. Sólo hasta después de Copérnico, en el siglo XVI empezaría a caer en desuso.

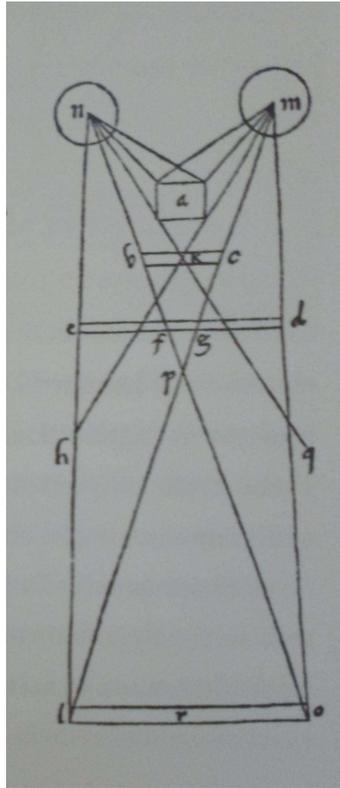


Fig. 1.1

Galeno de Pérgamo (130-210 d.c.) ya se había ocupado de la visión, tanto de la producida por un solo ojo –analizando cómo funciona éste– como de la visión binocular (y antes que él, Herophilus y Erasistratus también lo habían hecho (Smith, 2015, p. 42) . Su principal contribución fue reunir en un todo coherente una colección de teorías que posteriormente dominaron la escena europea durante mucho tiempo.

Respecto de la visión binocular, Galeno menciona lo siguiente al final del décimo libro de su *De Usu Partium* dirigiéndose a aquellos que “conocen lo que los círculos, conos, ejes y otras cosas por el estilo son”, es decir, su público lector lo componían quienes han estudiado geometría, quienes en ocasiones eran rechazados por “la mayoría de las personas que pretenden tener algo de educación” (Lindberg, 1976. p 11, 12) Con ello enfatizó que la matemática no era un tema que atrajera a todos, ni siquiera entre aquellos que habían recibido una educación privilegiada.

Sin embargo, los conceptos de geometría han sido siempre necesarios, ya sea para medir extensiones de terreno, para mantener la orientación en los navíos o para representar y estudiar situaciones tridimensionales en un espacio bidimensional.

Galeno, en el *De Usu Partium*, comienza con la descripción de un cono con vértice en la pupila y un círculo como su base, que determina la superficie visualizada. Según Galeno, este cono está hecho de una multitud *densa* –en el sentido moderno– de una especie de filamentos a los que nombra *rayos visuales*.

A manera de ejemplo de como Galeno modela geoméricamente la estructura diagramática de la visión, considere el campo de visión  $EF$  (en figura 1.2) visto con ambos ojos colocados respectivamente en  $A$  y  $B$ , esto es, considere un cono visual para cada ojo con vértices en  $A$  y  $B$  precisamente. Justo frente a dicho campo anteponga un objeto  $CD$ . Los filamentos o rayos visuales se extienden hasta chocar con el objeto mencionado. El ojo en  $A$  percibirá el objeto  $CD$  con un ángulo  $\sphericalangle CAD$ . Así mismo, el ojo en  $B$  percibirá el objeto a partir del cono de percepción  $\sphericalangle CBD$ . Los ejes de ambos conos se cortarán en el punto central  $O$  del objeto. Cada ojo verá de manera distinta al objeto  $CD$ . En general la distancia  $\overline{AB}$  es relativamente pequeña respecto de los objetos observados y por ello las imágenes vistas por cada ojo no difieren demasiado como para que el cerebro interprete que son dos objetos distintos. Según Galeno, los ejes del cono de visión o *Frustum* llegan al ojo que corresponde y lo que sea que portan para que ocurra la visión pasa a los nervios ópticos que transmiten el efecto producido por el objeto hasta el cerebro. Poco antes de llegar al cerebro ambos nervios se fusionan en el llamado *chiasma* óptico y con ello al cerebro llega un solo canal que lleva en su interior las imágenes superpuestas de lo captado por los dos ojos. Los detalles sobre cómo se produce el cono, cómo se recoge y transmite lo que interpreta como imagen, y cómo es que el cerebro “traduce” lo que presenta el nervio óptico después del *chiasma* es algo que dista mucho de haber sido esclarecido en los textos galénicos y en los inspirados en ellos a lo largo de la historia. Con todo, la óptica continúa siendo estudiada en la Edad Media, sobretodo gracias a Avicena y Averroes, quienes transmitieron y comentaron las aportaciones griegas a esta disciplina (Lindberg, 1976, pp. 43 - 57) .

El gran salto en occidente respecto de los estudios ópticos se dió en Grecia, a la llegada del occidente medieval, a fines del siglo XII o principios del XIII, de los escritos ópticos de Alhazen, en particular el *Kitab al-Manazir*

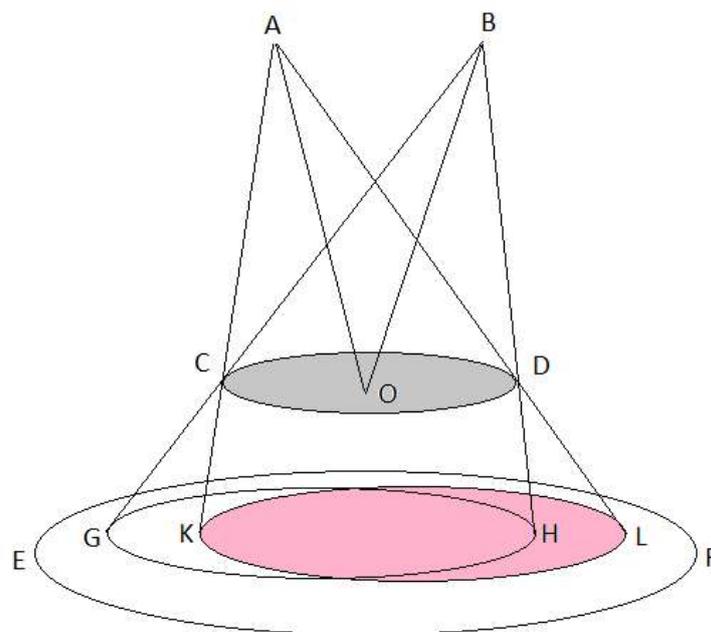


Fig. 1.2



en aparecer quien tradujera las reglas de las construcciones en perspectiva en algoritmos computacionales. Con ello, todo un abanico de profesionistas, desde artistas visuales, pasando por arquitectos y hasta ingenieros, tienen ahora acceso a herramientas gráficas que permiten construir objetos con un alto grado de precisión en la perspectivas con uno, dos o tres puntos de fuga, ya bien como desarrollos arquitectónicos, expresiones artísticas o aplicaciones lúdicas.

Los programas de modelado de objetos tridimensionales (Blender, Maya, 3DSMAX) y los motores de programación de videojuegos actuales (Unity, Unreal, Lumberyard, Godot) presentan sus cámaras empleando el concepto de la pirámide de visión de manera intuitiva en un ambiente en 3D. La cámara –y su pirámide– se puede cambiar de posición y manipular mediante los dispositivos de entrada de la computadora. Se puede extender también el alcance de la cámara, así como el ángulo de visión de la misma.

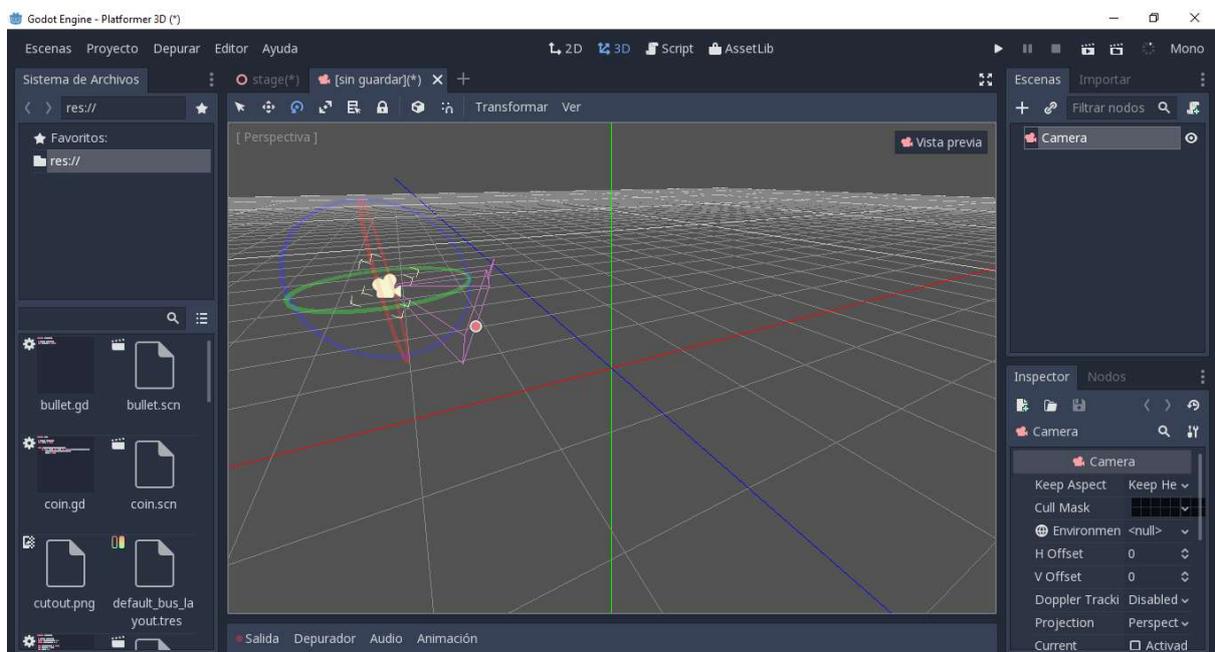


Fig. 1.4

En la figura 1.4 se aprecia una escena vacía del motor de videojuegos Godot únicamente con una cámara ubicada en un ambiente 3D, y cuya pirámide de visión figura con un contorno de color morado.

La compañía Sharp puso en el mercado en el año 2006 un sistema que permite presentar imágenes estereoscópicas sin necesidad de lentes especiales. Las imágenes en 3D se generan empleando un sistema de paralaje directamente sobre un LCD (Pantalla de Cristal Líquido, por sus siglas en inglés) y considerando que los ojos se encuentran separados entre sí 65mm aproximadamente. Los diagramas que se muestran en su página web (ver figura 1.5) explicando el funcionamiento de la mencionada tecnología son muy parecidos a los de Galeno y Alhazen, e incluso se muestran líneas de visión. (Se–Um et al 2016)

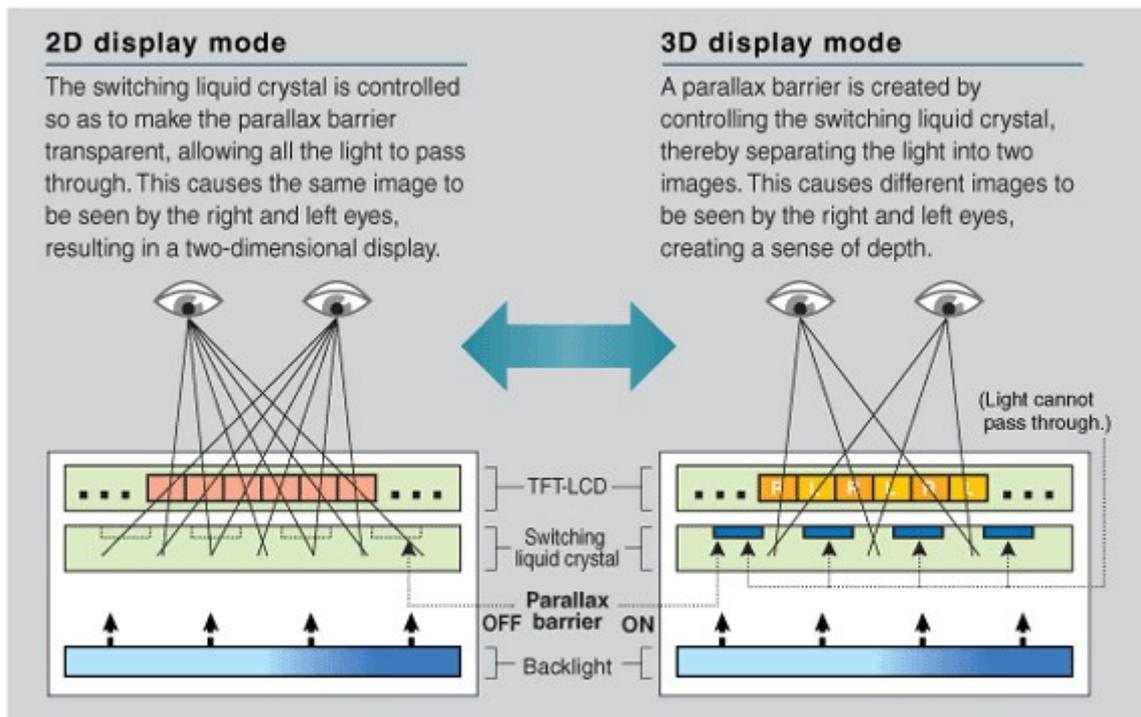


Fig. 1.5

Hay otras maneras de producir imágenes en tercera dimensión que son relativamente sencillas de implementar aprovechando los mencionados motores para aplicaciones visuales y la tecnología de los teléfonos celulares actuales. Dichas implementaciones emplean al celular como un visor de realidad virtual y los sensores de movimiento permiten controlar la cámara para ver el entorno simplemente moviendo la cabeza. El celular presenta en su pantalla orientada de forma horizontal una imagen para cada ojo por separado, mismas que provienen de dos cámaras generadas por separado en un ambiente virtual similar al de la figura 1.6



Fig. 1.6

Estos resultados no son sino la culminación de los esfuerzos iniciados a finales del siglo XIV, y que tuvieron un gran momento en el siglo XV. Al lograr procesar geometrías sistemáticas, apoyados en la óptica geométrica de los antiguos, para generar la ilusión de perspectiva en las pinturas o murales. Esto tenía como objetivo impartir un alto grado de realismo a las imágenes, mostrando así la capacidad creativa del artista, lo cual venía a apoyar con mayor vigor el reclamo de Giovanni (Pico de la Mirándula) que en su *Oratio de Hominus Dignitate* (Discurso sobre la dignidad del hombre) (1486) reclama para el hombre el poder alcanzar la capacidad creativa de la divinidad.

### **La Perspectiva: Entre Geometría y Mimesis**

Platón, en el libro X de *La República* menciona mediante una conversación entre Sócrates y Glaucón la idea de la *mimesis* o imitación. Para Platón, el pintor y el poeta engañan a los sentidos imitando algo que muy probablemente desconocen.

“[...] Estamos suficientemente de acuerdo en que el imitador no tiene un conocimiento suficiente de las cosas que imita [...]

La misma grandeza no aparece igual según se la presente ante nuestros ojos de cerca o de lejos [...] quebradas o derechas según se las miren dentro o fuera del agua, cóncavas o convexas siguiendo otra ilusión visual producida por los colores [...] ¿Acaso no se descubrieron contra eso convenientes remedios en la medida, el número y el peso, de manera que lo que prevalece en nosotros no es la apariencia variable de la grandeza o pequeñez, de cantidad o de peso, sino la facultad que cuenta, mide y pesa?”

Así, Platón establece que la geometría es la herramienta que conduce a la verdad, mientras que la pintura y la poesía buscan engañar a los sentidos aprovechándose de la facilidad con que el hombre cae en las emociones viscerales.

¿Y que pasaría si para sacar de esta cualidad de espejismo a la pintura, se le hiciera hacer pasar por el tamiz de la geometría? ¿Dejaría entonces de ser la pintura un producto enajenante y se podría representar la realidad acaso más fielmente?

La llamada *perspectiva artificial*, o *perspectiva lineal* o *de los pintores*, comienza a surgir en la primera mitad del siglo XV como resultado de una amalgama de prácticas artesanales aderezadas o derivadas de planteamientos teóricos de la filosofía natural, llegando a adquirir un estatus similar al de la arquitectura.

Para evitar confusiones respecto al uso del término *perspectiva*, hay que aclarar que en el siglo XIV los conceptos filosóficos y los que hoy tenemos como nociones anatómicas, fisiológicas y físicas que regulan la visión, estaban acompasadas por lo que se llamó *Perspectiva Communis*, pero aquellas que desde finales del XIV y a lo largo del XV giraban en torno de construcciones geométricas quedaron englobadas bajo el nombre de *Perspectiva Artificialis*.

En las primeras décadas del renacimiento preguntas tales como ¿Qué es la luz? ¿Qué es el color? seguían estando vigentes, convirtiéndose en una de las principales preocupaciones de los filósofos de aquel entonces. Poco a poco se fueron sumando los cuestionamientos de pintores y arquitectos que de una u otra manera estaban involucrados o presentaban interés en estas interrogantes.

A inicios del siglo XV comienza a surgir en los talleres florentinos la idea de unificar las *artes mecánicas*, las que en dichos centros se practicaban, con las ya mencionadas ciencias medias. Hacía falta entonces determinar una metodología a modo de resaltar importancia, y proveer de formalidad y fundamento a los trabajos de los practicantes.

Si bien en el *Trecento* las representaciones de figuras de humanos y de animales eran lo suficientemente buenas como para identificar lo que el pintor pretende plasmar a través de ellas, al observar las pinturas del mencionado periodo en el contexto en que se encontraban carecían de sentido espacial es decir, la imagen que ofrecían al espectador no parecía presentar los objetos del mundo tal y como son vistos a través de la visión directa, esto es, no reflejaban la realidad. No tenían tampoco el sentido de la iluminación –en ocasiones los personajes retratados parecían algo planos– ni de la proporción –usualmente los santos eran retratados como gigantes respecto de los humanos–. Lo representado era una especie de colección de objetos colocados a modo en un espacio pero sin que hubiera correlación de proporcionalidad y de posición entre ellos.

Como resultado de esto, en el Renacimiento emergen corrientes que consisten en aplicaciones prácticas de las matemáticas, y en particular, la pintura se ve especialmente beneficiada gracias a la geometría. Las nuevas representaciones pictóricas surgen a partir de un afán naturalista, si bien afín a la mimesis griega, es decir, al intento de representar la realidad de la manera más fiel, tal y como ésta se mostraba ante los ojos. La *perspectiva artificial* el conjunto de técnicas geométricas que dan lugar a esta reproducción de lo visto, se convierte en herramienta popular y comienza a ser empleada para plasmar esta realidad.

En este contexto aparece, en 1435, un texto escrito por Leon Battista Alberti (1404 – 1472), conocido como *De Pictura* (Trad. de J. R. Martínez, 1996), dirigido a pintores y practicantes de disciplinas ligadas con la representación –escultores, arquitectos, ilustradores de libros, etc.– pero apreciado también por filósofos y amantes de los estudios clásicos. Dicho tratado presenta una gran influencia de los *Elementos* de Euclides, y sin embargo posee personalidad propia. Alberti aparentemente retoma las experiencias sobre perspectiva de Filippo Brunelleschi, a quien también dedica su obra. En dicho trabajo se muestra la forma de construir un objeto visto en perspectiva. En principio, cualquier objeto puede ser construido mediante esta técnica, desde un piso cuadrulado a la manera de un tablero de ajedrez, pasando por vistas de edificios, hasta objetos tridimensionales más complicados, como vasijas o incluso personas.

El libro de Alberti ofrece argumentos para hacer de la pintura un arte liberal, y por esto requiere el concurso de las matemáticas. Y en efecto, el capítulo I de *De la pintura* se ocupa de ofrecer las instrucciones que conducen a representar un piso cuadrulado en perspectiva. Sin embargo, dado a que no incluyó diagramas, hay ciertos pasajes un tanto ambiguos. Los de capítulos restantes son rápidos en ofrecer elementos históricos y mitológicos para justificar –y reclamar– que la persona culta debe poseer un vocabulario técnico acerca del arte del pintar y le ofrece criterios que muestran que en los tiempos clásicos de Grecia y Roma las personas educadas podían emitir opiniones bien argumentadas acerca de las virtudes o efectos de una obra filosófica.

Gracias al tratado de Alberti, precursor también del uso de la óptica para sustentar sus métodos de representación, la perspectiva comienza a adquirir importancia similar a la que tenían ya la astronomía o la música.

Poco después, Piero della Francesca (1416 – 1492) redactó una especie de manual para guiar de manera práctica a quienes buscaran recurrir a las estrategias geométricas para hacer los trazos de pisos ajedrezados, techos cubiertos con paneles, horizontales o curvos, edificios, vistas interiores, todo trazo de objetos y hasta rostros humanos. Todo esto a través de pasos precisos para la construcción de líneas que demarcarían la estructura geométrica del ente representado. El libro de Piero, conocido como *De Prospectiva Pingendi* (della Francesca, 2005) escrito entre las décadas de los 80 o 90 del siglo XV, se inspira y sigue sin reservas la idea Albertiana pero, al contrario de

Alberti, della Francesca, además del diseño -representación de los diferentes objetos que aparecen en una pintura-, la “mensuración” -como distribuir objetos de manera que realmente parezca ocupar lugares precisos en el espacio- y el color, dedica una sección muy grande, por mucho la más interesante, a los trazos geométricos que conducen a la representación precisa, geométrica, de los objetos. Los ejemplos se han vuelto icónicos del arte renacentista y son fácilmente reconocidos por quienes se han interesado en la historia del arte o en el uso de las matemáticas en la pintura o el dibujo. Piero escribió también dos libros sobre matemática: el *Libellus de quinque corporibus regularibus* -Librillo de los cinco sólidos regulares- *Trattato dell'abaco* -Tratado de ábaco-, un manual de aritmética elemental para ser utilizado en los talleres donde entrenaban para el oficio los futuros pintores, arquitectos, orfebres, contadores y comerciantes. Por lo anterior, Piero es hoy día recordado como el primero -y tal vez el único además de, efectivamente, Leonardo Da Vinci- de los grandes pintores matemáticos.

Los textos de della Francesca inspiraron a otros matemáticos hoy más conocidos que el propio Piero. Destaca entre ellos Luca Pacioli, autor de *De divina proportione* (1486-88) y del muy conocido, al menos durante el siglo XVI, *Summa de Arithmetica Geometrica, Proportione et Proportionalita* (1494) Es muy sabido que en el *De divina proportione* Luca retoma casi como un plagio, parte del contenido sobre perspectiva y las figuras de polígonos que habían sido representadas por della Francesca. Luego vendrían otros textos de otros autores como Guidobaldo del Monte, y Jacopo Barozzi da Vignola. Este último escribió un texto de perspectiva que no llegó a publicar. Sin embargo, Egnazio Danti lo hizo por el bajo el título *Le due regole della prospettiva pratica di H. Iacomo Barozzi da Vignola* (Danti 1583)

Egnazio Danti cita a Piero della Francesca en el *Le due regole della prospettiva pratica* donde extiende y profundiza los trabajos de Vignola (y por ello se atribuye a este último): “El primero de su época que escribiese acerca de esto con el mejor método y forma, a partir del cual tenemos hoy día escritos tres excelentes libros de dibujo” (Centofanti 2016)

Los trabajos de Alberti y Piero tuvieron una gran influencia sobre los arquitectos de la época. Para los investigadores del siglo XV, la perspectiva era considerada un método de representación del espacio, es decir, una herramienta. Brunelleschi fue de los primeros arquitectos, junto con L.B. Alberti en considerar de manera científica las leyes que gobiernan a las construcciones en perspectiva para satisfacer la necesidad de representar espacios tridimensionales empleando dibujos y diseños bidimensionales en papel. Más allá de la posible necesidad utilitaria que podría tener la perspectiva en la pintura, en la arquitectura se volvía una herramienta necesaria.

Hay que señalar que las laboriosas técnicas de Della Francesca pasaron a segundo término pues resultaba más simple confiar en la habilidad del pintor para representar la realidad que intentar plasmar un rostro humano en perspectiva. A pesar de tener un

sustento geométrico resultaba exageradamente laborioso –si no es que imposible–, y por ello poco práctico, ejecutar representaciones del rostro humano en perspectiva, para entender la complejidad basta con ver algunas de las ilustraciones que nos legó Piero. Sin embargo, para edificios arquitectónicos la metodología resultaba bastante convincente.

Muchos aspectos de la realidad no son tan simples como para ser plasmados por medio de la perspectiva. No es una mala metodología pero la ejecución sin las herramientas adecuadas castiga mucho al ejecutante.

Varios grabados y dibujos de la época prescinden de la perspectiva renacentista sin que ello implique abandonar la idea de plasmar la realidad. Por ejemplo, los estudios sobre balística y dinámica de fluidos de Leonardo Da Vinci ofrecen un lujo de detalles respecto de las turbulencias y las trayectorias de las balas y sin que para ello haga falta recurrir a una infraestructura geométrica basada en las reglas de la perspectiva.

Sin embargo, ¿Qué tanta habilidad tendrían los renacentistas para plasmar las trayectorias de las balas? ¿De que manera reconocían o sabían cómo eran estas trayectorias? ¿qué métodos y procedimientos seguían para evitar que los personajes de su obra presentasen el mismo aspecto plano que ofrecía el lienzo sobre el cual dibujaban?

Para esa época todavía no se tenía consciencia del hecho de que la trayectoria de un proyectil lanzado con alguna inclinación respecto de la vertical describe una parábola. Y menos aún se tenía la capacidad de constatar la importancia del movimiento parabólico. Muchas veces, por simplicidad, el ser humano acostumbra dibujar una U invertida o algo que asemeja un segmento de círculo para representar una trayectoria que debería ser parabólica. El cerebro no alcanza, en muchas ocasiones, a distinguir la especificidad de la trayectoria. ¿Se trata de una sección de círculo, de elipse, de parábola, o de conchoide?

## Conclusión

Los renacentistas tienen a bien voltear a ver los trabajos de los griegos, quienes ya contaban con tratados de óptica y debatían cuestiones vinculadas a la perspectiva. Afortunadamente algunos de estos trabajos llegaron a Europa por medio de los árabes. Hay un hueco enorme en la historia –aproximadamente hasta el siglo XII– en el cual no se aprecia el uso de técnicas apropiadas para dibujar *imitando* la realidad. Los tratados *quattrocentistas* de Piero y Alberti, muy técnico el primero, más humanista el segundo, sientan las bases para los tratados de perspectiva de los siglos siguientes gracias a la forma en como hicieron de la geometría una herramienta para lograr mayor realismo en la pintura.

En la actualidad, el empleo de aplicaciones de Diseño Asistido por Computadora ha llegado a sustituir aquellas clases de Dibujo Técnico donde el alumno dibujaba recámaras de viviendas o piezas de mecanismos a tres vistas. Actualmente es posible generar por computadora modelos geométricos en 3D hiperrealistas, ya sea desde el punto de vista visual o de acuerdo a su comportamiento mecánico. Hay dispositivos que permiten ver dichos modelos empleando ambos ojos produciendo así el efecto de profundidad que se genera en la realidad. La humanidad sigue empeñada en reproducir la realidad empleando los medios a su alcance.

Sin embargo, toda la teoría que desde el Renacimiento –y antes– fue surgiendo, es la que da origen a estos modernos programas de cómputo. El uso de la perspectiva no ha disminuido y sigue al servicio de muchos propósitos: analizar algunos supuestos o propuestas de la psicología de la percepción, poner a prueba propuestas de la mercadotecnia, la medicina, etc. Mención aparte merecen las contribuciones del ingenio geométrico a corrientes como el hiperrealismo, que apuntan a reproducir la realidad empleando únicamente la pintura como medio. Así sucede que ni la matemática ni la pintura han dejado de crecer en paralelo.

## Capítulo 2

### La Perspectiva de Alberti y Piero

#### La Construcción de Alberti

Leon Battista Alberti (1404–1472) fue hijo ilegítimo de Lorenzo Alberti, miembro de una antigua familia florentina caída en desgracia por cuestiones políticas. Al ser ilegítimo y viviendo en Génova, tuvo que buscar apoyo económico para encontrar acomodo en algo que estuviese a la par con sus aspiraciones. Lo encontró a fin de cuentas en la burocracia vaticana, llegando a ser secretario personal de tres papas.

Considerado como uno de los más destacados representantes del humanismo, sus contribuciones a la lingüística, arquitectura, pintura, música y arqueología, así como poesía y la tratadística de la moral hicieron que se le considerara un 'Hombre Universal'.

Desde su juventud saltaba a la vista su interés por las matemáticas y las artes visuales. Puesto que Alberti estudiaba leyes en la Universidad de Bolonia, las matemáticas que habría de aprender serían del estilo de la geometría de Euclides o del álgebra de Nicómaco de Gerasa. Las matemáticas que presenta en su tratado *De Pictura* son, en cambio, del estilo de las llamadas metodologías prácticas, las que se usarían en las escuelas del Ábaco, donde los artesanos aprendían las herramientas para realizar sus obras. Sin embargo, no hay pruebas que señalen que Alberti hubiese asistido a dichas escuelas. (Field 1997, p. 62) Usualmente en ellas se aprendía copiando y repitiendo los trabajos del maestro y no a partir de un texto como los que Alberti escribiría posteriormente.

Alberti escribió su *De Pictura* desde un punto de vista 'humanista'. Desde el inicio se sumerge directamente en la filosofía natural y asegura que para poder pintar correctamente se debe comprender la teoría de la visión, que abarca desde las leyes de propagación de la luz así como la anatomía del ojo humano, es decir, la *perspectiva communis*. Todo esto sin hacerlo explícito, dándole prioridad a las justificaciones buscadas en los textos clásicos sobre la geometría y la visión, complementados con elementos mitológicos y la tradición clásica.

La pirámide de visión según Alberti es un manojo de rayos visuales que unen al ojo con todos los puntos del contorno del objeto visto. Entre dicho manojo (no necesariamente al centro) se encuentra el *rayo céntrico*, que es el rayo principal: donde este cae en el objeto, está la parte más claramente percibida. Este manojo es lo que conforma la *pirámide de visión* según Alberti. (Smith, 2015. p 300)

Esta pirámide, o más bien, la base de ella, corresponde a lo que se observa del objeto. Luego Alberti se aventura a aseverar que no importa si la vista procede por emisión de rayos visuales (Extromisionismo) o por recepción de los mismos (Intromisionismo) puesto que la geometría de la pirámide de visión será la misma en cualquier caso.

Después de la descripción de la pirámide de visión, Alberti procede a indicar sin mucho preámbulo que se debe elegir el punto donde el rayo céntrico de la pirámide visual toca al objeto de la pintura. Este punto es posteriormente denominado *punto céntrico*. (Fields, 1997. p 25)

Según (Green, 1987. p. 641), se atribuye a Samuel Edgerton el término *Punto de Distancia* para referirse al punto C (Fig. 2.1) desde el cual Alberti traza líneas a las divisiones de la base. Hay que tener cautela con esta definición pues si se compara con la construcción de Piero, resultan ser construcciones distintas y el significado del término no es el mismo.

*Las distancias entre divisiones de la base eran medidas en unidades denominadas braccia. Usualmente, el cuerpo humano debe tener 3 braccia de altura.*

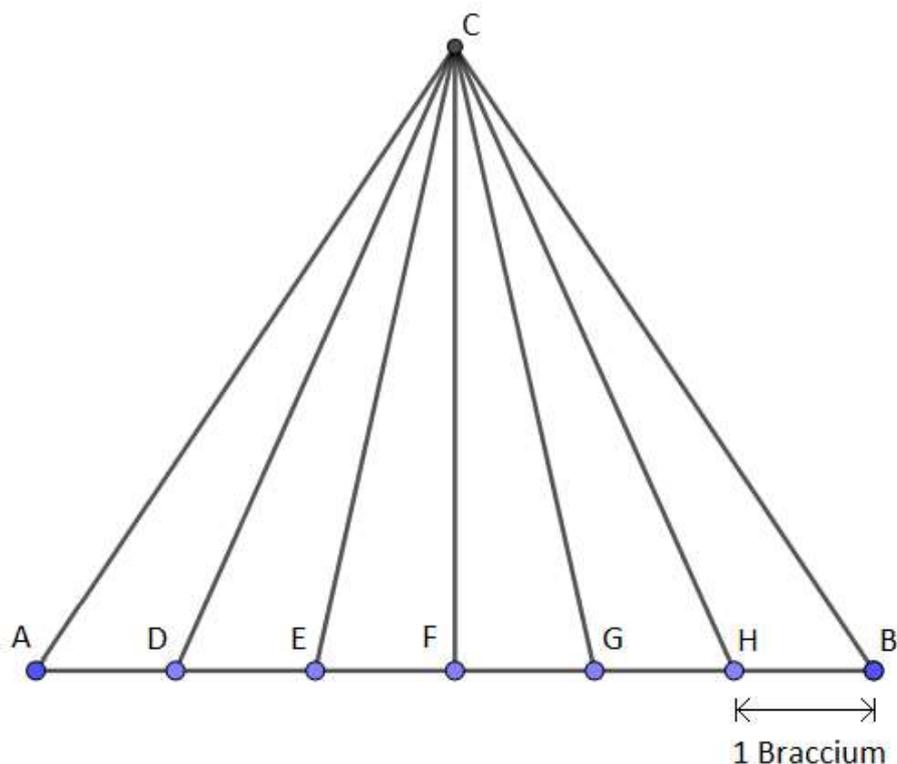


Fig. 2.1

A continuación se presentarán las construcciones de Alberti y Piero para posteriormente compararlas y luego continuar con el trabajo de Piero, que extiende un poco más el trabajo de Alberti y a su vez pavimenta el de Guidobaldo, mismo que vendría una cincuentena de años después.

En términos modernos, la “construcción de Alberti” (como se le conoce hoy día en honor al mismo) que aparece en *De Pictura*, procede como sigue:

Considere un rectángulo  $\square ABJK$  como el área del lienzo destinada al dibujo. Marque en el centro del panel de dibujo un punto  $C$  que será el llamado *Punto Céntrico*. Dicho punto está en posición directamente opuesta al ojo del observador y justamente a la altura del mismo.

Sobre la base inferior  $\overline{AB}$  del rectángulo, márquese el cuadrículado del piso a dibujar. Identifíquese cada marca con una literal (En este caso  $D, E, F, G, H$ ) (Fig. 2.2) En pocas palabras, el procedimiento original de Alberti implicaba replicar la base  $\overline{AB}$  y sobre dicha réplica marcar el cuadrículado a dibujar.

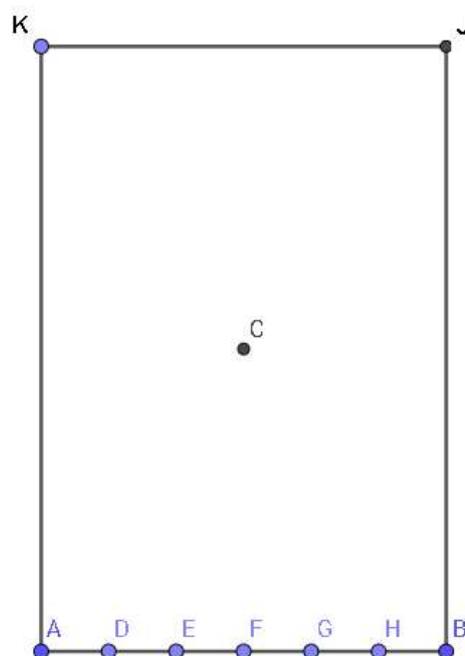


Fig. 2.2

Una vez hechas las marcas anteriores, las líneas que corresponden a las líneas del piso perpendiculares al lienzo son trazadas uniendo las marcas  $A, B, D, E$ , etc, con el punto céntrico  $C$ . (Fig. 2.3)

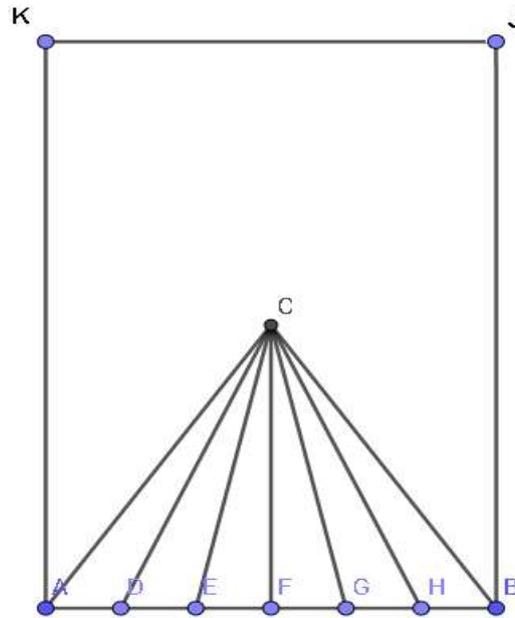


Fig. 2.3

Ahora considere que la posición del ojo del observador ha cambiado, colocándose en el punto  $O$ , a la derecha –o izquierda– del lienzo y a la misma altura que  $C$  (Fig. 2.4). Dibuje una recta  $\overline{OC}$  paralela a  $\overline{AB}$ , de manera que  $\overline{OC}$  sea la distancia del observador frente a él; ahora, desde el punto  $O$  trace líneas que unan cada punto  $A$  hasta  $H$  con  $O$ . Observe que las líneas trazadas cortarán la vertical del rectángulo que define al lienzo situada entre los puntos marcados en la base y el ojo. En el caso de la figura 2.4 la línea es la vertical del lado derecho.

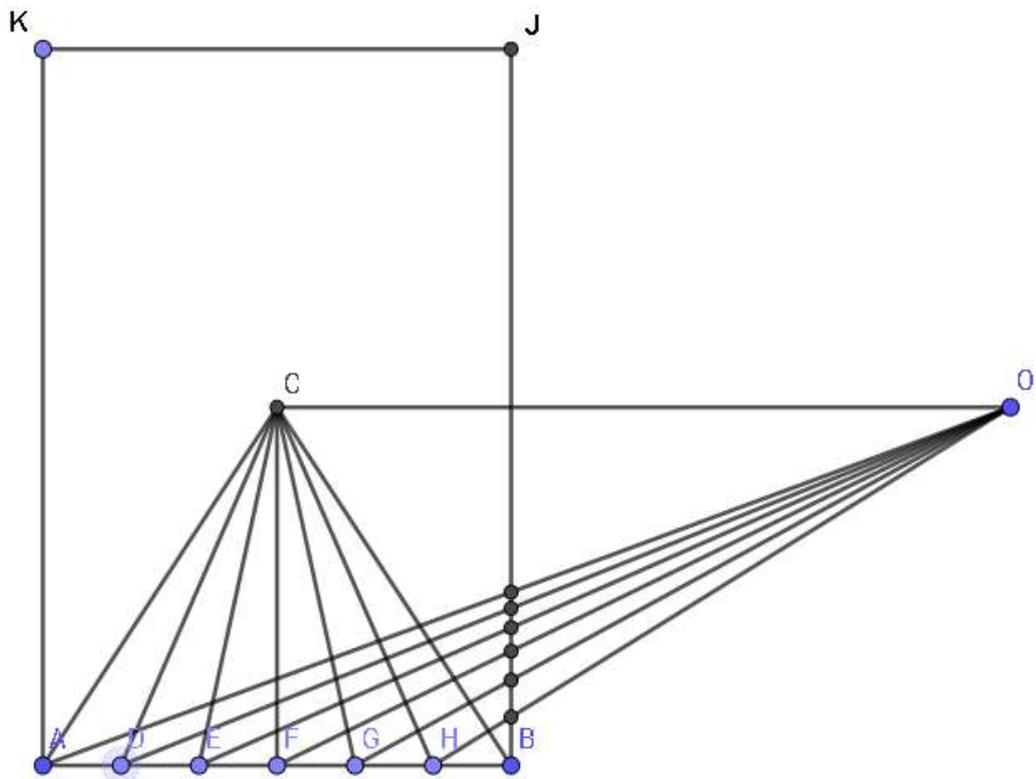


Fig. 2.4

Identifique los puntos de corte de las rectas  $\overline{OA}$  hasta la recta  $\overline{OB}$  con la recta vertical, y trace paralelas a  $\overline{AB}$  pasando por dichos puntos de corte. Sin riesgo de cometer un anacronismo, se presenta a continuación la intersección de diagramas del procedimiento original según Alberti.

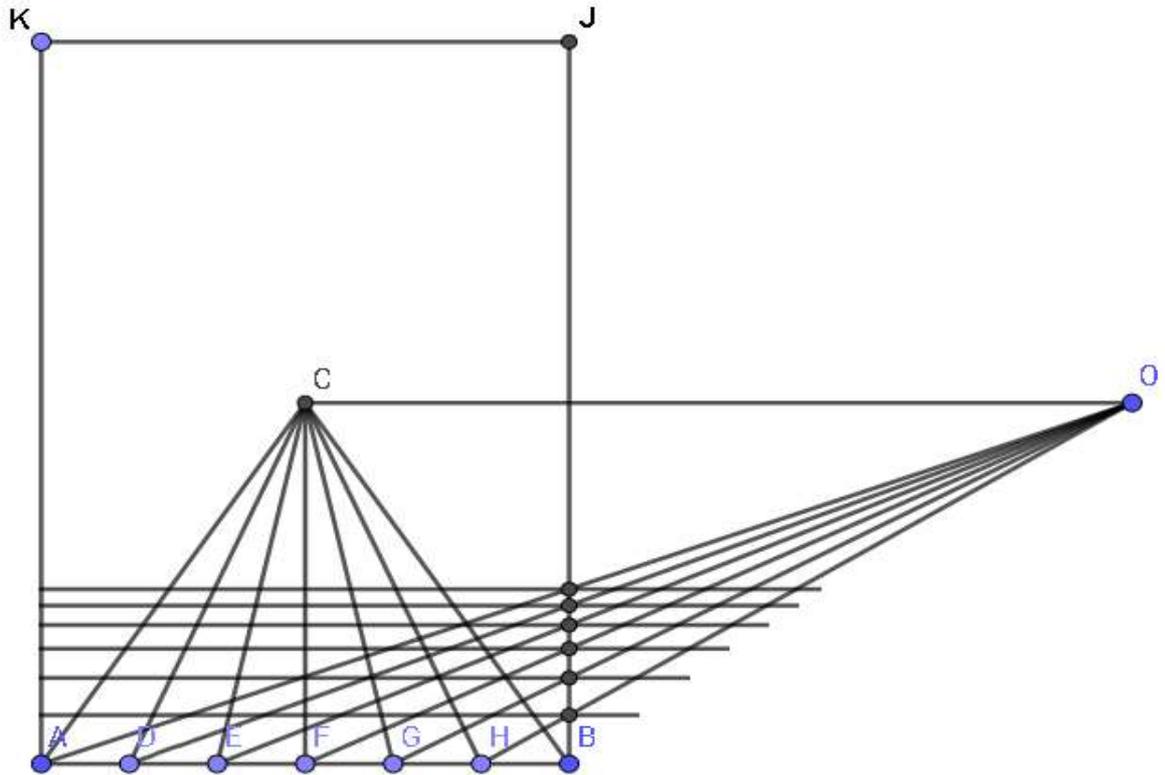


Fig. 2.5

Alberti dibuja por separado las líneas de visión y la intersección de éstas con el plano del cuadro  $\square ABJK$ . El cuadrículado resultante (Fig. 2.5) corresponde a lo que vería el espectador cuyo ojo está situado a la altura de C y ubicado frente al cuadro considerando que el procedimiento de Alberti se realiza siempre sobre  $\square ABJK$ .

Observe que la base de la pintura  $\overline{AB}$  parece fungir como una de las divisiones del piso. Esto depende en realidad de la ubicación del punto O. Alberti no parece dejar en claro la posición de O respecto de las divisiones del piso, solamente busca determinar una distancia entre el espectador y la pintura y ésta queda determinada por la distancia de C a O.

J. V. Field ubica a Donatello (1386 - 1466) y Masaccio (1401 - 1428) entre los primeros en asumir que las líneas perpendiculares al plano de la pintura aparecerán en ésta como líneas que concurren en el punto céntrico. Ambos eran amigos de Brunelleschi (Field, 1997. p 40), a quien sus contemporáneos acreditaban con haber inventado una *regla* que permitía dibujar correctamente pisos (Field, 2005. p 33) Sin embargo, no está claro que clase de *regla* era. El gran interés que mostraba Brunelleschi en las artes visuales le ganó la dedicatoria de *De Pictura* por parte de Alberti (Field, 1997. p 25), quien probablemente atestiguó los trabajos de Brunelleschi en donde destacaba dicha propiedad de convergencia. Alberti no se adjudica la invención de esta propiedad. Tampoco le es atribuída a Brunelleschi. De hecho, se puede deducir fácilmente de las proposiciones 5 y 6 de la Óptica de Euclides. Antes que él lo planteara

por escrito, un fresco de Masaccio (La Santísima Trinidad, fresco que se conserva aún en la iglesia Sta María Novella, en Florencia) ya hace uso de esta propiedad que podría para ese entonces haberse difundido entre algunos miembros del oficio de la pintura y probablemente por ello Alberti no ofrece una justificación matemática de la misma. Asumir que las ortogonales convergen a un punto era una tendencia que prevaleció en la mayoría de los autores que hablaban sobre perspectiva antes del siglo XVII.

Fiel a las prácticas artesanales de las Botteghe o talleres artesanales, tan populares en la Italia renacentista, Alberti describe los procedimientos para llevar a cabo representaciones pictóricas sin ofrecer las justificaciones teóricas –Matemáticas o provenientes de la Filosofía Natural– que justificaran la práctica artesanal.

La primera prueba de que la construcción de Alberti es correcta (y siendo equivalentes también a la de Piero) la escribe Giovanni Battista Benedetti (1530–1590), matemático profesional, y es de los primeros matemáticos que no asume como cierta la construcción de Alberti. Su demostración aparece en *De Rationibus Operationum Perspectivae*, trabajo de 1585. Posteriormente, Guidobaldo del Monte presenta también esta prueba en su *Perspectivae Libri Sex*, publicado en 1600. (Andersen, 2013. p 153)

Alberti menciona que es posible emplear el cuadriculado que nos enseña a dibujar para construir imágenes tridimensionales, sugiriendo una suerte de hilos instalados a modo de rayos visuales e intersectando un plano, lienzo o *velo* que permitan *mapear* (valga el anacronismo) los puntos de la imagen en la intersección de los rayos con el lienzo o velo. Estos aparatos resultaron ser bastante populares entre los artistas. Permitían el manejo de un sistema de coordenadas tridimensionales sin tener que tocar las matemáticas involucradas en ello. Hoy en día los programas de modelado en 3D (Maya, Blender, 3DSMAX), a pesar de estar contruidos sobre bases fuertemente matemáticas, las mismas resultan invisibles al usuario, que por lo regular es un artista visual, mientras que los programadores o ingenieros acaso optarán por herramientas como Ogre, DirectX u OpenGL, más bien pensadas desde el punto de vista de la programación.

Alberti asegura que la pintura es una actividad intelectualmente significativa y lo hace retomando sus fuentes de la antigüedad, y con la más clara intención de revivir los grandes logros artísticos alcanzados por los ancestros. Aunque la anterior intención no precisamente se sostiene hasta nuestros días, sí tuvo bastante impacto en su momento entre los artistas visuales.

## Las Escuelas de Ábaco

Las escuelas de ábaco surgen por la necesidad de educar en la matemática básica a personas que la necesitasen en sus oficios: Lo anterior significa que tanto mercaderes como pintores y arquitectos, además de orfebres, escultores, contadores, agrimensores, eran los usuarios típicos para este tipo de escuelas o talleres de oficios.

Muchos de los ejercicios matemáticos que aprendían a ejecutar seguían los típicos problemas de cuentas de mercado de la primaria y secundaria de nuestros días, y había que repetirlos muchas veces hasta comprender el concepto. Las matemáticas de las escuelas del ábaco, de tradición vernacular, son más bien operativas o aplicadas; mientras que los libros empleados en la universidad, escritos en latín, apuntaban por una matemática más abstracta que el simple cobro de impuestos o regalías.

## Piero della Francesca

A una de tales escuelas del ábaco seguramente acudieron Piero della Francesca y sus hermanos para luego poder ayudar con las labores mercantiles de la familia.

Avezado en las matemáticas, Piero escribe varios ensayos sobre temas tanto novedosos como sofisticados, siendo uno de ellos el *De Prospectiva Pingendi* (1474). Concebido dentro de la misma tradición de los textos del ábaco, se desarrolla a la manera de un manual de geometría y un tanto bajo el enfoque de los *Elementos* de Euclides, aunque este último aspecto se ve opacado por el estilo de presentación de los problemas, mismos que lo hace aparecer como un manual de instrucciones.

En contraste con el estilo humanista de Alberti, Piero escribe sus trabajos al estilo de las escuelas del ábaco. No está bien claro si Piero se dirige a alumnos de este tipo de escuelas o si lo hace para los nuevos aprendices de las Botteghe o talleres/escuela del siglo XIV. Las versiones que se consideran originales están escritas en el vernacular mientras que las versiones en latín presentan modificaciones que adaptan el texto para quienes acostumbran a leer sobre matemática universitaria en la citada lengua. La forma de escribir de Piero es en imperativo, rayando en lo chocante y lo suficientemente repetitivo como para pensar que se había escrito teniendo en cuenta las computadoras que aparecerían 500 años después.

Hay que señalar que aunque los diagramas resultantes en los textos de Piero son matemáticamente equivalentes a los de Alberti, sus procesos son distintos y no precisamente representan lo mismo.

Otra diferencia visible entre Alberti y Piero ocurre en el *Frustum* o pirámide de visión. Mientras que Alberti se refiere a la pirámide pensándola en tres dimensiones, Piero se refiere a la misma tomándola solamente en dos.

Piero menciona en su trabajo que de las tres partes que componen una pintura: *disegno* (dibujo o diseño) *conmesurattio* (proporción) y *colorare* (coloreado) él hablará únicamente de la segunda y un poco de la primera, puesto que sin dibujo es imposible hablar de perspectiva.

El trabajo de Piero sobre perspectiva se compone de tres libros. El primero se ocupa de las superficies degradadas, es decir, superficies representadas en perspectiva; el segundo trata sobre prismas generados a partir de lo que enseña en el primer libro, y el tercero extiende un poco lo visto en el libro dos y muestra cómo representar objetos un poco más complicados.

La versión original fue escrita en el dialecto local de la región, muy parecido al toscano, aunque luego fue traducida al latín por alguien llamado Maestro Matteo, y muy probablemente supervisada por el mismo Piero. Matteo fue amigo cercano de Piero y tenía experiencia en matemáticas.

En la época de Piero, a mediados del siglo XV, no había muchos términos para hablar de Perspectiva, así que Piero escoge con libertad las palabras que usa. Emplea, por ejemplo, *termine* o *terminus* para referirse a un plano, con toda seguridad aludiendo a que éste tiene bordes donde precisamente “termina”.

Las siete primeras proposiciones de su libro son resultados previos de Euclides contenidos en los libros *Elementos* y *Óptica*, este último texto era conocido en latín como *Perspectiva*, que era la forma usual de traducir la palabra del griego al latín. Esto fue antes que la palabra se usara para referirse a la técnica geométrica de la pintura para obtener la ilusión de espacialidad –o profundidad– de una escena.

El primer teorema de óptica/perspectiva original de Della Francesca es la proposición 12, que se enuncia como sigue: *A partir del ojo [posición] dado y en un plano determinado, degradar la superficie asignada.*

En esta oración, el sentido que adquiere “degradar” –que ya se había mencionado previamente, pero sin mucha precisión– es el de modificar una figura para que sea vista en perspectiva, y esto es lo que se conoce como representar algo en perspectiva. El dibujo original es llamado por Piero *Propria Forma* o *Perfetto*.

En la proposición 13 aparece una figura definida. Dicha proposición aborda directamente el *Hacer la superficie degradada (a partir de) un cuadrado*. Después de anunciarlo, pasa luego a citar las instrucciones de construcción de la figura. En términos modernos, los pasos son los siguientes:

Considere la recta  $\overline{DC}$ . Marque  $B \in \overline{DC}$  y sea entonces  $\overline{BC}$  el piso -donde puede aparecer una imagen o un objeto plasmado en esa superficie- a degradar observado desde el ojo puesto en A. (Fig. 2.6)

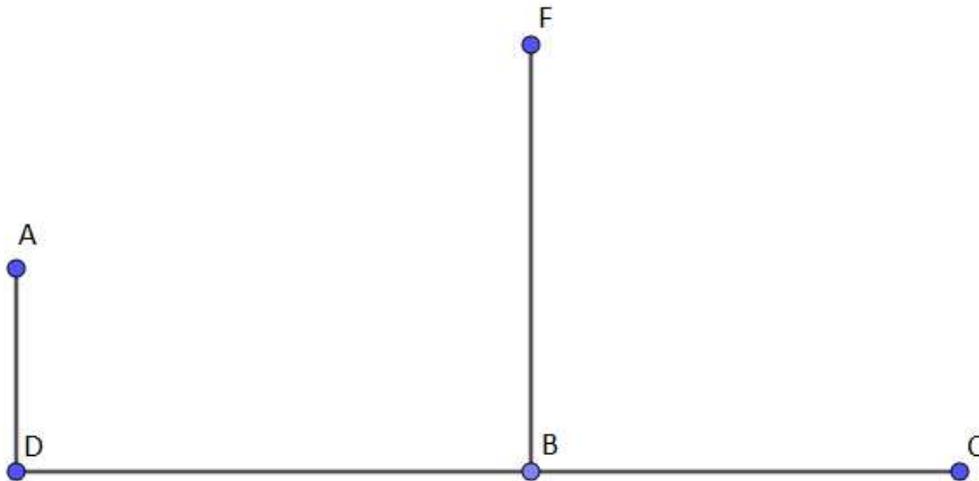


Fig. 2.6

Levante dos rectas  $\overline{AD}$  y  $\overline{BF}$ , tales que  $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ ,  $\overline{BF} \perp \overline{DC}$  y  $\overline{BF} = \overline{BC}$ . D denota el pie o posición del observador cuyo ojo se encuentra en A y  $\overline{BF}$  denota el plano de la pintura. (fig. 2.6) Levante  $\overline{GC}$  paralela a  $\overline{BF}$  y del mismo tamaño que ésta.  $\overline{GC}$  comprende a la escena -vista de perfil- que se pretende recoger sobre la pintura cuyo perfil se muestra como  $\overline{BF}$ . Uniendo G con F se completa el cuadrado  $\square BCGF$ . De esta manera, la construcción resulta como en la figura 2.7.

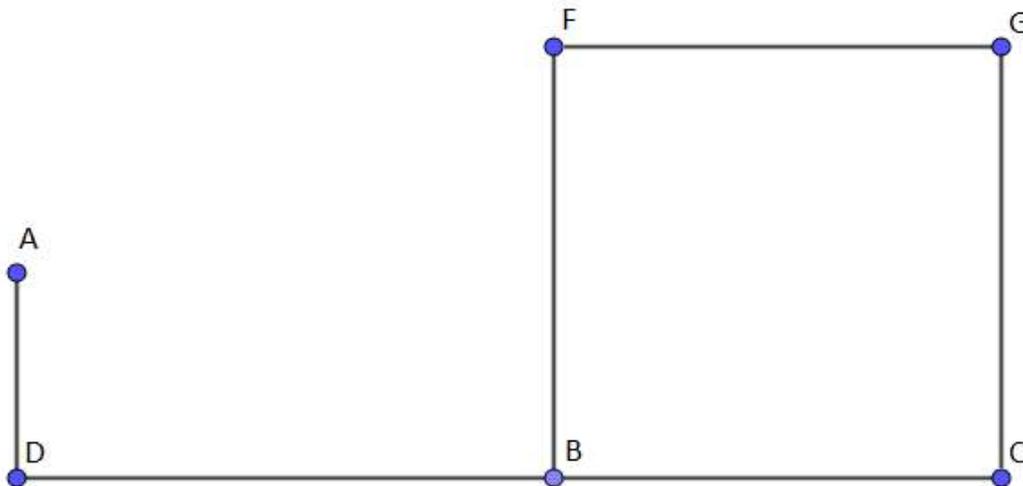


Fig. 2.7

Levántese una bisectriz  $\overline{IA'}$  sobre  $\overline{BC}$ , con  $A'$  a la misma altura que  $A$ . (Fig. 2.8).

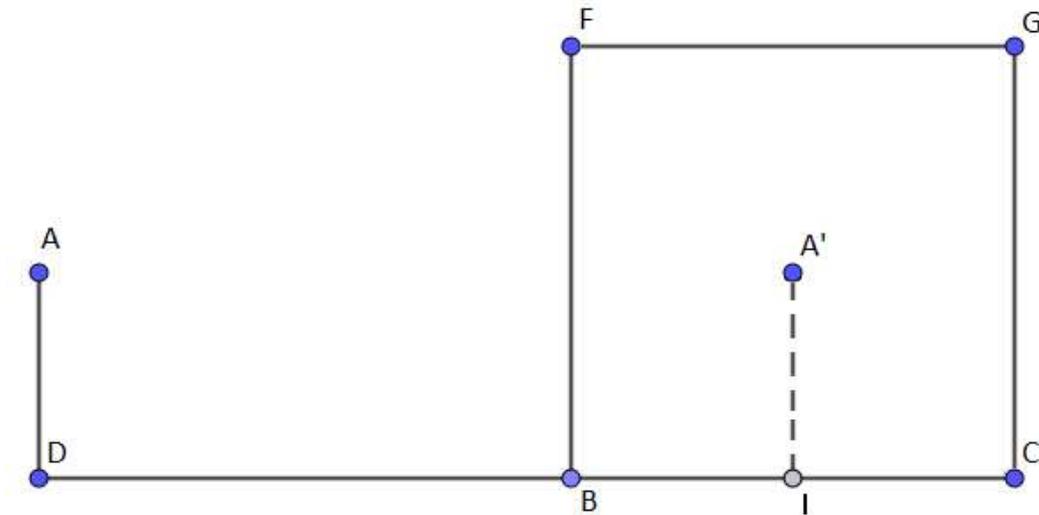


Fig. 2.8

Piero es claro al momento de mencionar que el punto  $A$  es la posición del ojo, tanto respecto de la pintura en  $\overline{BF}$  como del cuadrado  $\square BCGF$ . Sin embargo no resulta evidente (a menos que se hagan por cuenta propia unos cuantos cálculos de proporciones de triángulos) que en realidad Piero intenta *aplastar* una situación tridimensional en el plano bidimensional del papel, además de que el diagrama muestra simultáneamente dos situaciones: una en la que el plano de la pintura,  $\overline{BF}$ , está siendo visto de perfil, y otra en la que el mismo plano, ahora  $\square BCGF$ , está siendo contemplado desde el frente. La idea última es que el dibujo final *degradado* quede plasmado sobre  $\square BCGF$ . Finalmente, uniendo  $A'$  con  $B$  y  $A'$  con  $C$  se obtiene  $\triangle A'BC$ . (Fig. 2.9).

En la actualidad toda persona con conocimiento básico de pintura o arquitectura sabe que *todo conjunto de rectas paralelas que se alejan en la realidad del observador, converge a un punto en el llamado horizonte si dicho conjunto es representado en perspectiva*. Sin embargo, no fue Piero quien demostró esto –al menos no abiertamente– sino el matemático y astrónomo Guidobaldo del Monte (1454 – 1607) quien lo exhibe en su *Perspectivae Libri Sex*, publicado en Pésaro en el año de 1600. Piero recurre a Euclides para suplir esta “carencia” y justificar la construcción de dicho triángulo. En todo caso,  $\triangle A'BC$  servirá como base para crear el cuadrado degradado. Para ello se hace lo siguiente:

Únase  $A$  con  $C$  y márquese el punto  $E = \overline{AC} \cap \overline{BF}$  (Fig. 2.9).

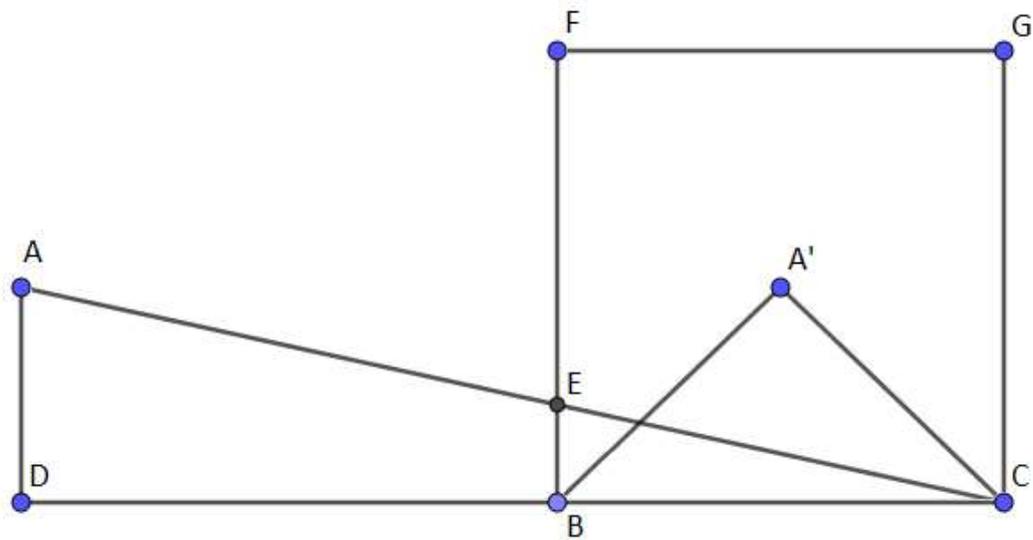


Fig. 2.9

Luego, se traza una línea  $\overline{EK}$  paralela a  $\overline{BC}$  y que pase por  $E$  (Fig 2.10).

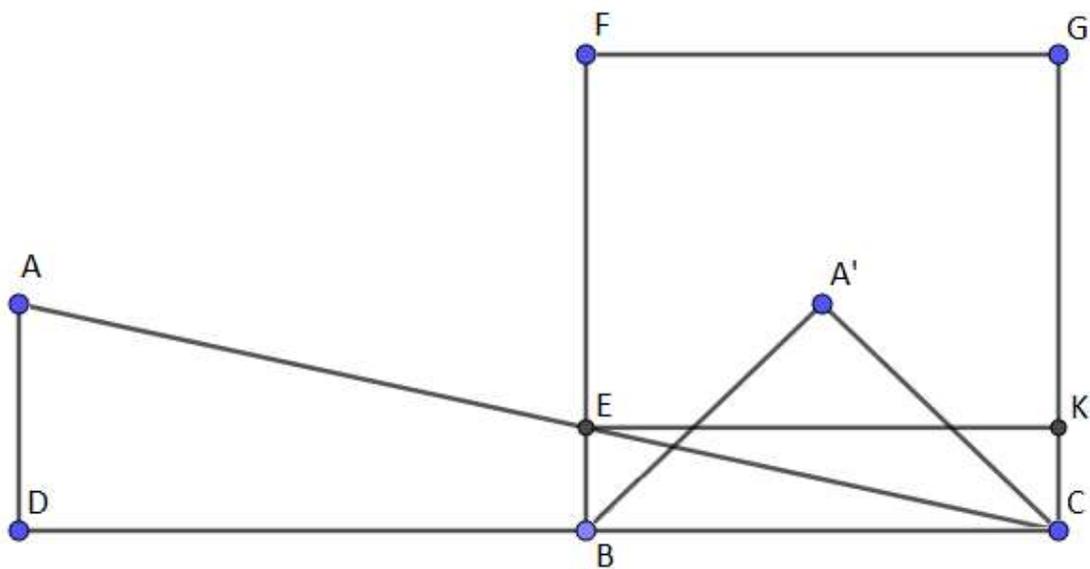


Fig. 2.10

Marque  $D' = \overline{A'B} \cap \overline{EK}$  y  $E' = \overline{A'C} \cap \overline{EK}$ . Una  $D'$  con  $E'$  (Fig. 2.11).

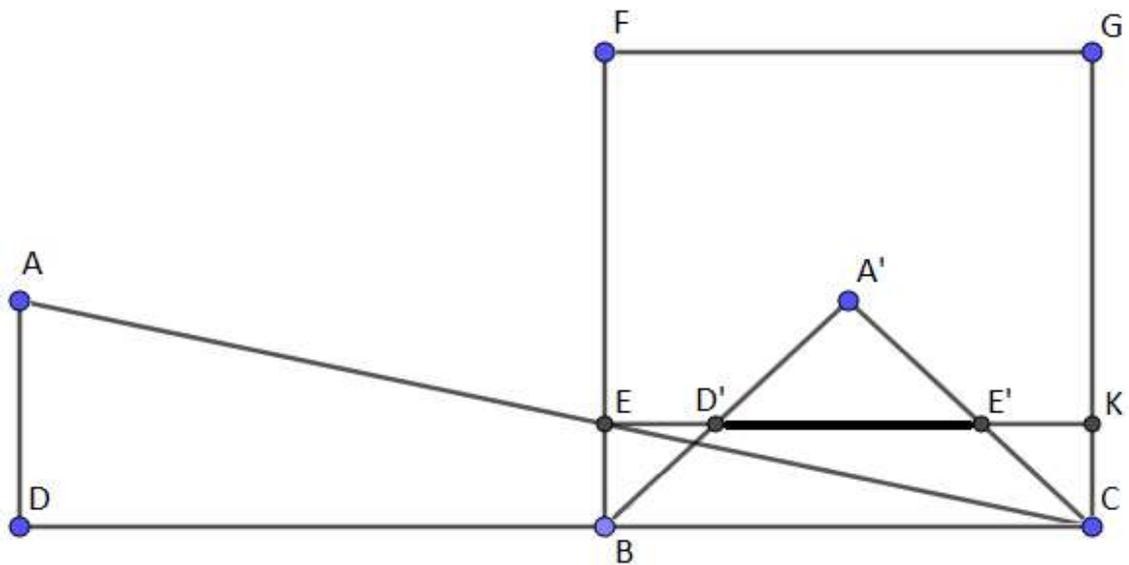


Fig. 2.11

Finalmente, una  $A$  con  $G$ . Marque  $H = \overline{AG} \cap \overline{BF}$  (Fig 2.12).

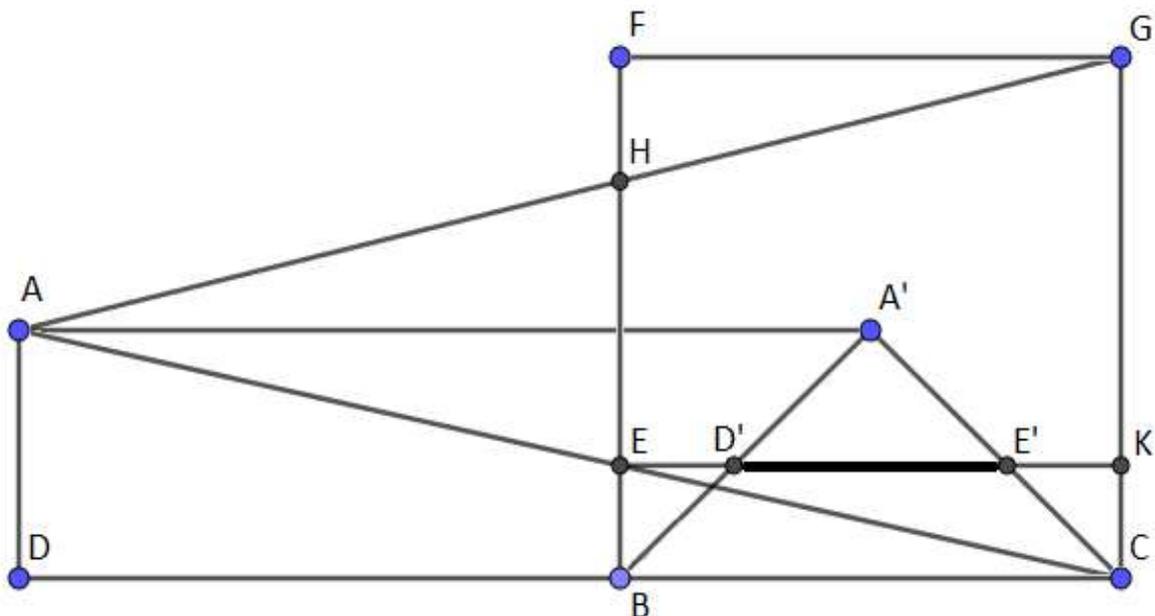


Fig. 2.12

Esta última figura muestra una versión simplificada de la construcción final de Piero.

Piero inicia con la construcción del cuadrado a degradar. Luego muestra que el lado más alejado,  $\overline{CG}$ , aparecerá para el ojo en  $A$ , de tamaño  $\overline{EH}$ . es decir,  $\overline{CG}$  se observa con el tamaño que aparenta  $\overline{EH}$  situado como parte de  $\overline{BF}$ . Nótese que si tomamos a  $\sphericalangle GAC$  como el ángulo de visión, tanto  $\overline{EH}$  como  $\overline{CG}$  subtenden el mismo ángulo con vértice en  $A$ .

La recta transversal  $\overline{D'E'}$  representa el borde posterior del cuadrado degradado. Ahora hace falta mostrar que este borde en efecto corresponde al borde posterior y posee la proporción adecuada en el dibujo degradado. Esto se puede justificar por semejanza de triángulos tal como sigue:

El ángulo de visión  $\sphericalangle GAC$  subtiende al tramo  $\overline{CG}$ , pero frente a dicho ángulo se interpone  $\overline{BF}$  como si fuera un *obstáculo*. Dicho *obstáculo* corta a la pirámide de visión con dicho ángulo de visión, y la *visión efectiva* queda reducida al tramo  $\overline{EH}$  en el plano cortado por  $\overline{BF}$ . Dicho tramo es pues visto desde A con el ángulo  $\sphericalangle HAE$ .

Luego, el ángulo  $\sphericalangle GAC$  es congruente con  $\sphericalangle HAE$  y como las líneas  $\overline{BF}$  y  $\overline{CG}$  son paralelas, se tiene que los triángulos  $\triangle ACG$  y  $\triangle AEH$  son semejantes.

Nótese que el *fondo* del cuadro (Fig. 2.12 nuevamente), es decir, la parte más alejada del observador ubicado en A corresponde a  $\overline{CG}$ .  $\overline{CG}$ , a su vez, como lo establece la *óptica* de Euclides será visto en el "plano"  $\overline{BF}$  de tamaño  $\overline{EH}$ .

Al considerar A'' no necesariamente sobre el plano de la figura a degradar, Piero está asumiendo que dicho punto no es coplanar a  $\square BCGF$ , cosa que no es precisamente evidente en, digamos, la figura 2.12, por ejemplo. Más aún, la prueba por semejanza sirve incluso si el punto A no es perpendicular a  $\overline{BF}$  en el pinto medio, siempre que no se salga de los límites impuestos por dicho segmento. Esto es algo que Piero ya había vislumbrado más no lo discute. Lo anterior se menciona en aras de simplificar su argumento. El siguiente modelo propuesto por (Field, 1997. p 89) y (Field, 2005. p 144) intenta arrojar luz sobre esta situación.

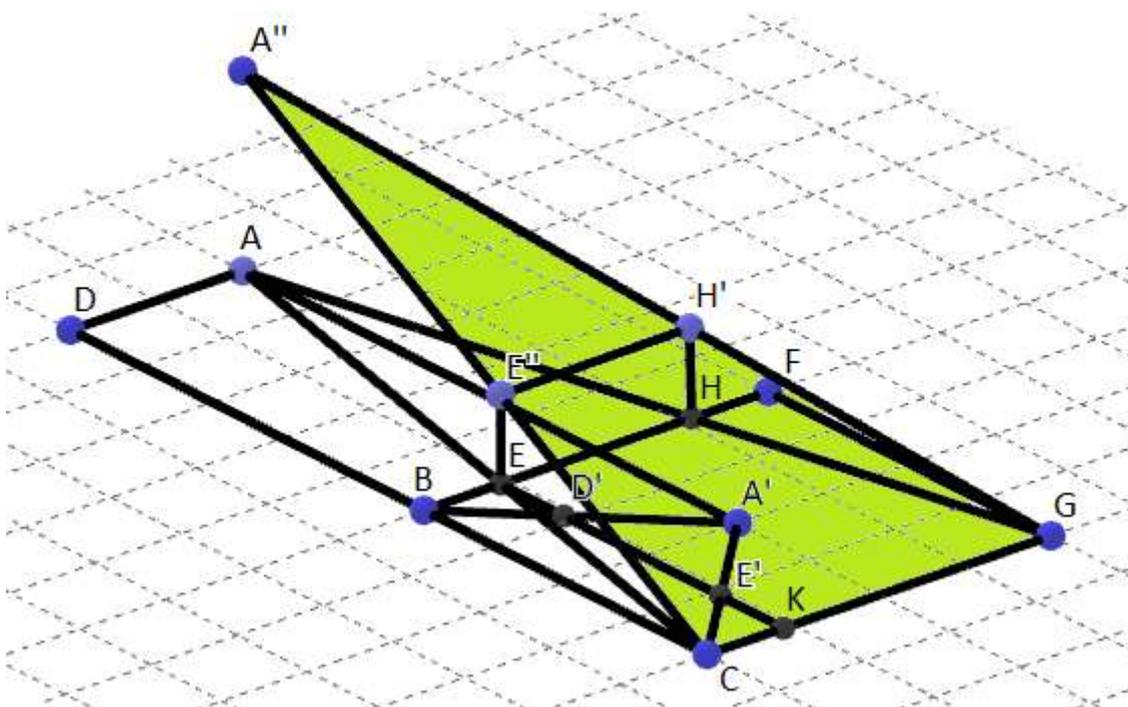


Fig. 2.13

El cuadro de la pintura tiene como base a  $\overline{BC}$  –tal como aparece en la figura 2.12– y el ojo del observador relativo a la base del cuadro está realmente en  $A'$  –Aunque dicho punto pareciera ser coplanar a  $\square BCGF$ , como en 2.13–. Entonces, si visto desde  $A'$   $\overline{E''H'}$  es el borde más lejano, correspondientemente  $\overline{D'E'}$  debe ser el borde más lejano visto desde  $A'$ , siendo pues el borde formal del cuadrado degradado. Lo anterior se logra por semejanza de triángulos de la siguiente manera.

Refiérase nuevamente a la Figura 2.12.  $\triangle A'BC$  y  $\triangle A'D'E'$  son semejantes. Se tiene que

$$\frac{\overline{D'E'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'E'}}{\overline{A'C}}$$

Análogamente,  $\triangle AA'C$  y  $\triangle EE'C$  son semejantes. Por lo mismo

$$\frac{\overline{CE'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}}$$

Por último, respecto de  $\triangle AEH$  y  $\triangle ACG$  se tiene

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{CG}}$$

A partir de estas tres relaciones anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{D'E'}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{A'E'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A'C} - \overline{E'C}}{\overline{A'C}} \\ &= 1 + \frac{\overline{CE'}}{\overline{CA'}} = 1 + \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = 1 - \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} \\ &= 1 - \frac{\overline{AC} - \overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{\overline{D'E'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{GC}} \text{ implica que } \frac{\overline{D'E'}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{GC}}$$

que era la razón que queríamos encontrar.

## Trazado del cuadrículado sobre el piso degradado

Para trazar un cuadrículado sobre el piso ya degradado, en este caso el trapecio  $D'BCE'$ , identifique las muescas  $L, M, N, P$  y trace las rectas que se interpretan como perpendiculares al lienzo uniendo cada muesca con el punto  $A'$ , a saber:  $\overline{A'L}, \overline{A'M}, \overline{A'N}$  y  $\overline{A'P}$  (Fig. 2.14).

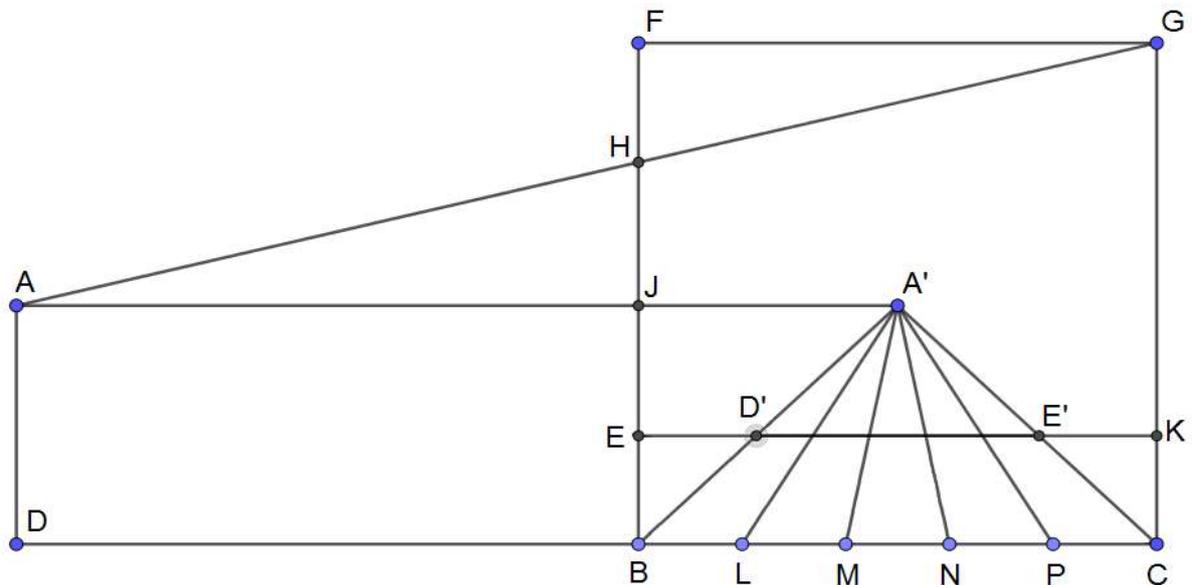


Fig. 2.14

Luego, trace la diagonal  $\overline{BE'}$  (Fig. 2.15)

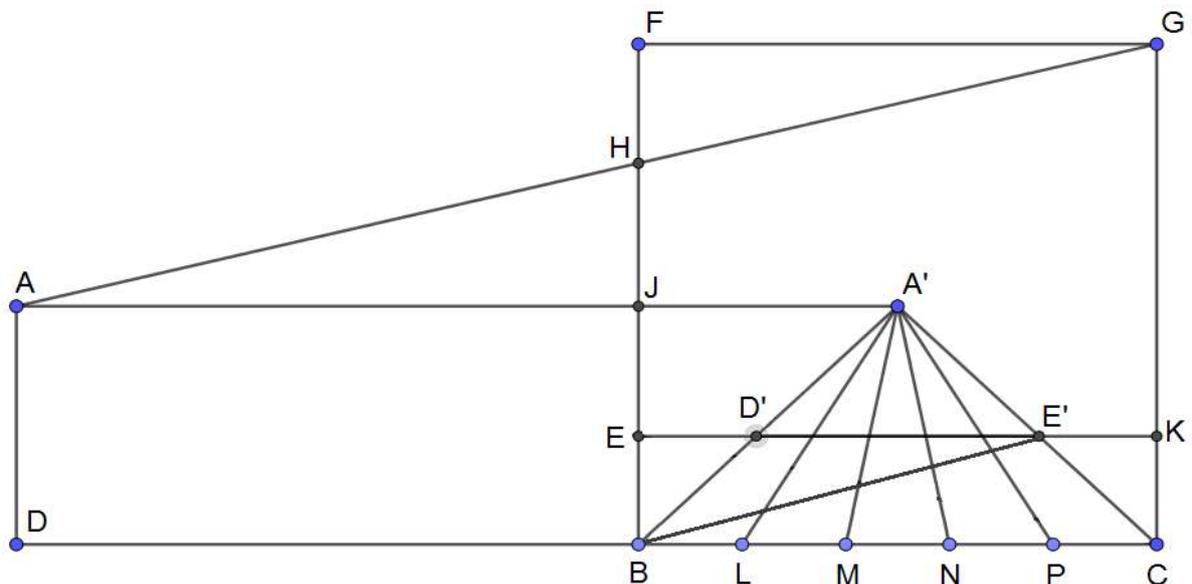


Fig. 2.15

En el mismo tratado Piero demuestra que es posible construir las paralelas a  $\overline{BC}$  como rectas que pasen por los puntos de intersección de la diagonal  $\overline{BE'}$  con las llamadas ortogonales. Hecho lo anterior, finalmente, el piso degradado con su cuadrículado aparece en la Fig. 2.16.

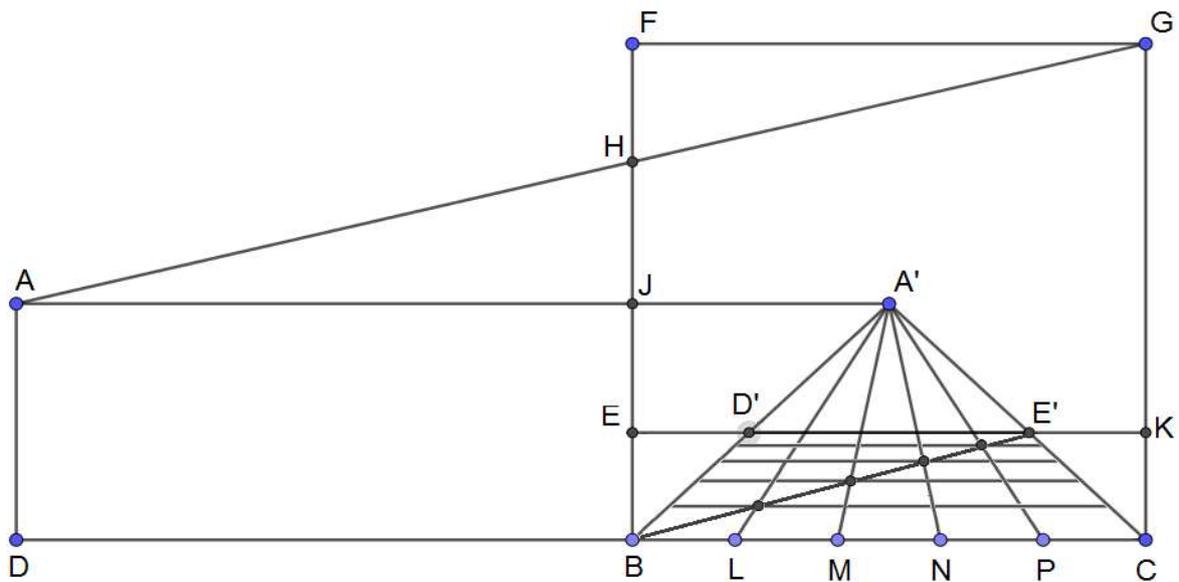


Fig. 2.16

Alcanzada esta etapa, las diferencias principales apreciables entre los métodos de construcción de pisos cuadriculados en perspectiva de Alberti y los de Piero son:

1. Alberti traza primero las líneas ortogonales y después traza todas las transversales paralelas a la base del rectángulo que contiene a la pintura.
2. Piero determina primero el borde posterior del piso a partir de la posición del observador y luego traza las ortogonales tal como lo propone Alberti. Posteriormente Piero traza sus transversales a partir del cruce de la diagonal mayor del piso con las ortogonales.

### Construcción a Partir del Punto de Distancia

Mientras que Alberti emplea la diagonal del piso degradado, únicamente para comprobar que la construcción es correcta, Fields asevera que Piero emplea el trazo mencionado por Alberti en su tratado una vez que ha presentado su método de *degradado* como parte de un método más simple para realizar la construcción (Fields, 1997. p. 91).

El método de Alberti resulta más fácil de entender y de hacer encajar con los conceptos de óptica de ese entonces, que era también lo que Piero buscaba en su *De Prospectiva Pingendi*. Por otra parte, el punto de distancia es más fácil de implementar.

Quizás por eso Piero usa primero el método de Alberti y luego el del punto de distancia, que recurre a la diagonal: a modo de un maestro que enseña los temas en determinado orden y con determinada intención, Piero decide mostrar primero una construcción que pueda justificarse a partir de los conceptos acerca del frustum de visión, para luego

proceder a mostrar un método práctico equivalente y que resulte más simple de implementar.

El *Método del Punto de Distancia* consiste en lo siguiente:

A partir de los pasos de construcción de Piero, avanzar hasta levantar el cuadro tal como aparece en la figura 2.8.

Una  $A$  con  $A'$ . Ubique el punto de distancia  $O$  sobre la recta  $\overline{AA'}$  de la siguiente manera:

marque  $J = \overline{AA'} \cap \overline{BF}$ , haga  $\overline{OA'} = \overline{AJ}$  (Fig. 2.17).

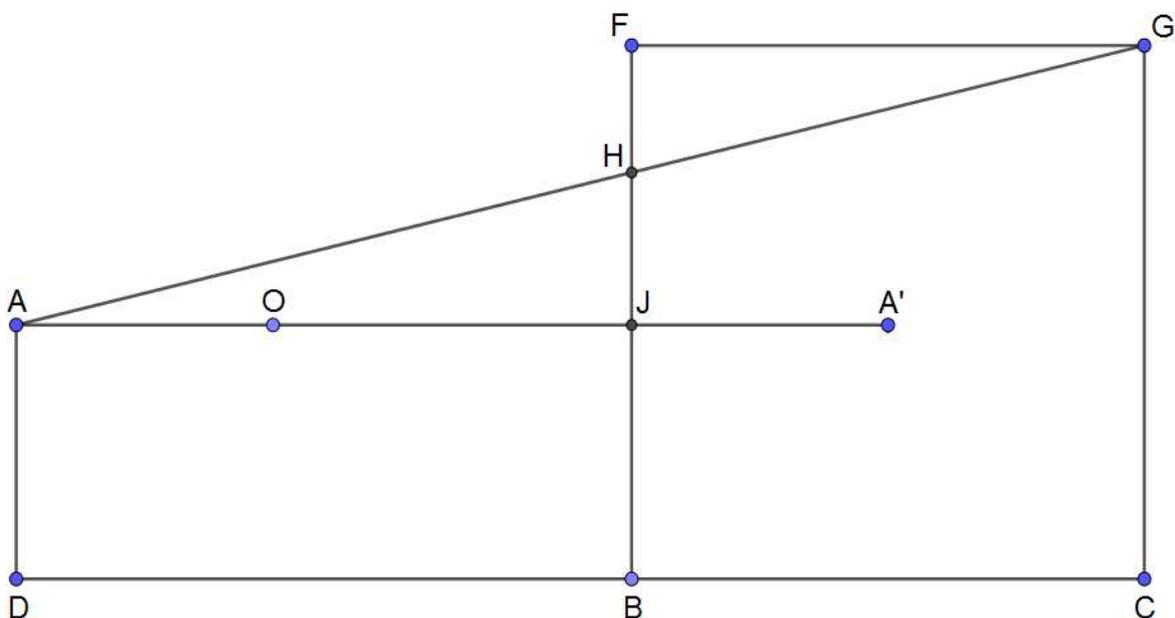


Fig. 2.17

Marque las divisiones del pavimento  $L, M, N, P$ , fijando como unidad de medida el braccio  $\overline{BL}$ . Una  $A, B, L, M, N, P$  y  $C$  con  $A'$  (Fig. 2.18).

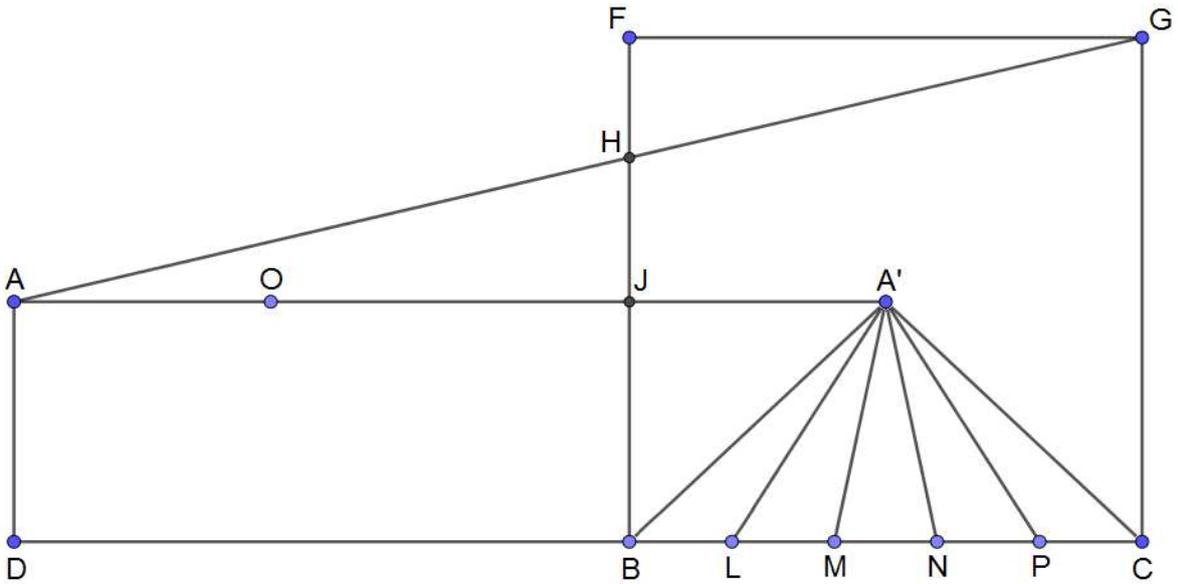


Fig. 2.18

Una el punto de distancia  $O$  con la esquina  $C$ . El borde posterior del pavimento, es decir, la horizontal más lejana desde el punto de vista del observador, estará dado por la recta paralela a  $\overline{BC}$  que pasa por el punto de cruce  $D' = \overline{OC} \cap \overline{A'B}$  (Fig. 2.19)

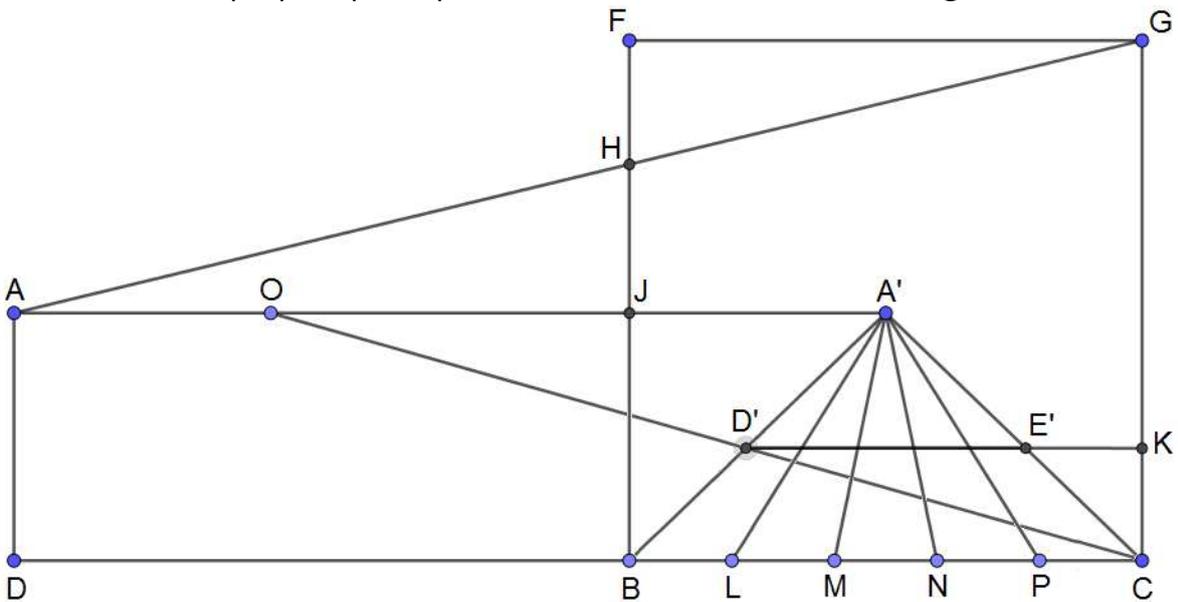


Fig. 2.19

Cada uno de los puntos donde  $\overline{OC}$  cruza –en el orden de las rectas  $\overline{A'L}$ ,  $\overline{A'M}$ ,  $\overline{A'N}$  y  $\overline{A'P}$ – con los otros rayos con fuente en  $A'$  determina la ubicación sucesiva de las transversales paralelas a  $\overline{BC}$  y que pasan por la recta ortogonal correspondiente (Fig. 2.20)-

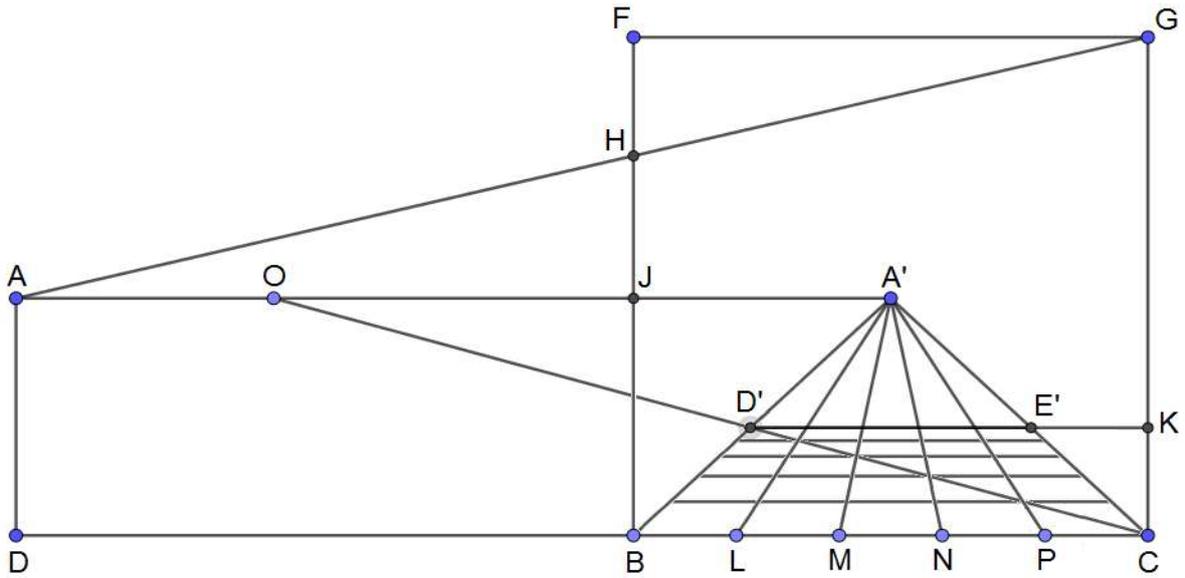


Fig. 2.20

Finalmente, hay que hacer notar que si ahora se traza  $\overline{AC}$  y se marca el punto  $E = \overline{AC} \cap \overline{BF}$ , también es posible obtener  $\overline{ED'}$  que cumple que  $\overline{BC} \parallel \overline{ED'}$  (Fig. 2.21)

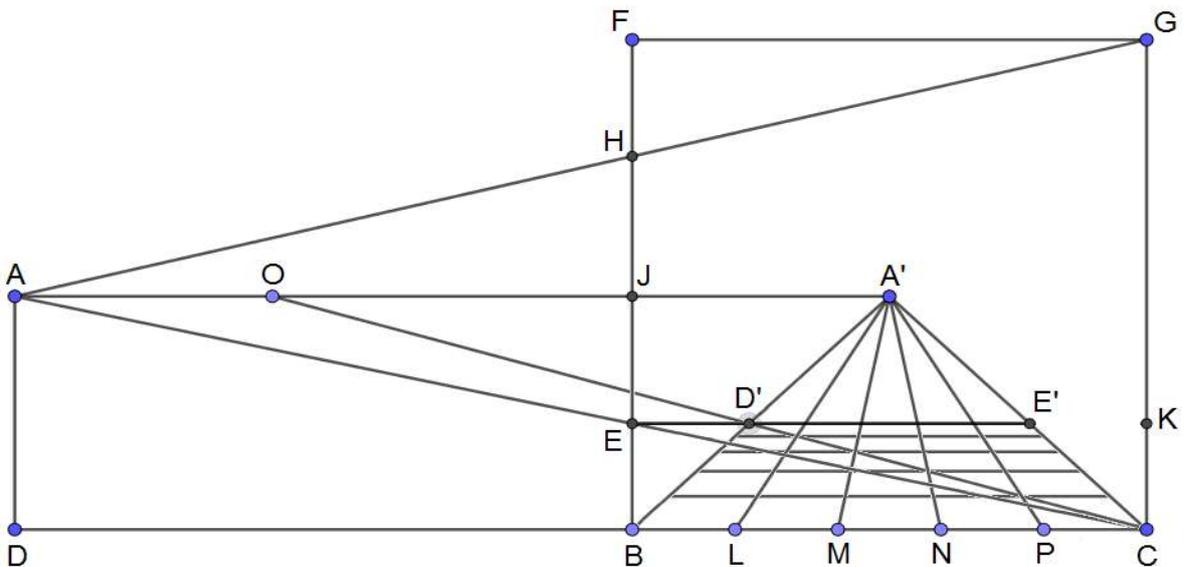


Fig. 2.21

Si ahora se traza  $\overline{AP}$ , se toma el punto  $I = \overline{AP} \cap \overline{BF}$  y se traza una paralela a  $\overline{BC}$  que pase por  $I$  (Fig 2.22), se obtiene la misma paralela que resulta de tomar aquella que pasa por  $\overline{OP} \cap \overline{A'L}$ . Siguiendo este procedimiento se corrobora, en la práctica, que el pavimento construido con este método resulta ser el mismo que el construido con el método de Alberti.

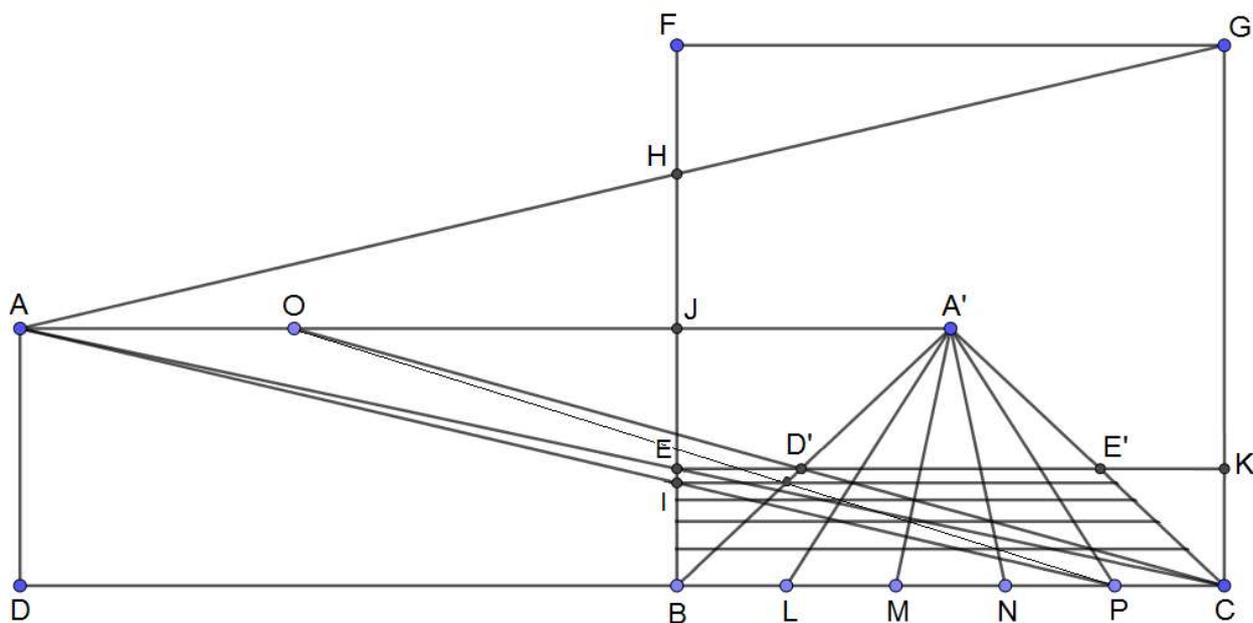


Fig. 2.22

Se ha exhibido que la identidad entre diagramas se comprende mediante un ejercicio de superposición. Un matemático se plantea, sin embargo, el ofrecer una demostración de su equivalencia matemática y esto justo se demuestra como sigue:

A partir de la figura 2.22 se tiene que por construcción

$$\overline{AA'} \parallel \overline{ED'} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta OA'D' \sim \Delta D'BC$$

de donde también resulta que

$$\Delta AJE \sim \Delta EBC$$

Entonces se cumple que

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{JE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{BC}}$$

de donde  $\overline{JA} = \overline{OA'}$ ,

es decir, las distancias del ojo A a la pintura,  $\overline{JA}$ , y del punto de distancia O al punto céntrico A, son iguales, y por tanto las construcciones son equivalentes.

Como ya antes se había mencionado, la pintura está sobre  $\overline{BF}$  (con  $\overline{BF}$  visto de perfil) y el observador en A (Vea Fig. 2.21). Físicamente la distancia entre el observador y la pintura es  $\overline{AJ}$ , pero la construcción que propone Piero no parte de A, sino de O, y por ello debe realizar una construcción diferente que le permita obtener los trazos correctos sobre el plano pictórico atravesado por  $\overline{BF}$ , que corresponda a la misma escena que se observa desde A. Para Piero, basta con que la distancia  $\overline{OA'}$  sea igual a  $\overline{AJ}$  para poder conseguir una construcción geoméricamente equivalente. Esto permite utilizar una superficie más restringida para realizar los trazos constructivos de

la perspectiva, lo cual es una ventaja pues no siempre se cuenta con el suficiente espacio exterior al cuadro o pintura para realizar los trazos auxiliares que generan la imagen en perspectiva.

### **Trazado de prismas según el método de Piero.**

El segundo libro de *De Prospectiva Pingendi* versa sobre cómo trazar prismas a partir de lo visto en el primer libro. La idea es construir las bases de dichos prismas empleando lo aprendido en el primer libro y luego dibujar planos verticales para generar la forma sólida.

Para dibujar las bases de los prismas se emplea un esquema que involucra al mismo tiempo el plano original y su forma degradada. Considerando la base del prisma en el plano original, ésta se copia al plano degradado, resultando una base degradada debido al método empleado para copiarlo.

Las proposiciones 9, 10 y 11 del libro 1 muestran cómo *calcar* proporciones –es decir, cómo construir segmentos que guarden una proporción dada– a partir de un cuadrilátero y su diagonal. La forma de realizar esta construcción es como sigue:

Sean dos magnitudes  $\overline{PC}$  y  $\overline{PD}$ . Construir dos magnitudes proporcionales tales que una de ellas mida  $\overline{PD'}$

Considere  $\square PQRS$  y dos muescas  $C, D$  sobre  $\overline{PQ}$  que denoten las mencionadas magnitudes  $\overline{PC}$  y  $\overline{PD}$  (Fig. 2.23).

Trace paralelas a  $\overline{QR}$  por  $C$  y  $D$  que corten a la diagonal  $\overline{PR}$  en  $A$  y  $B$  respectivamente.

Trace paralelas a  $\overline{PQ}$  que pasen por  $A$  y  $B$  hasta cortar  $\overline{PS}$ . Marque los puntos de intersección como  $C'$  y  $D'$  respectivamente.

Resulta que

$$\triangle PCA \sim \triangle PDB \Rightarrow \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$$

y también

$$\triangle PC'A \sim \triangle PD'B \Rightarrow \frac{\overline{PD'}}{\overline{PC'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$$

y por tanto

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD'}}{\overline{PC'}}$$

Así, las distancias de las muescas  $C'$  y  $D'$  a  $P$  sobre  $\overline{PS}$ , son proporcionales a las distancias desde  $P$  a las muescas  $C$  y  $D$  sobre  $\overline{PQ}$

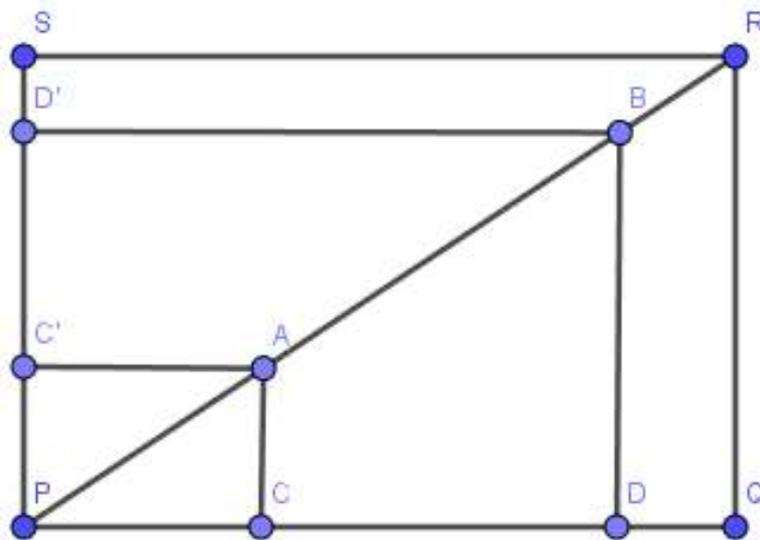


Fig. 2.23

En las proposiciones 14 y 15 del libro 1 se menciona cómo trazar cuadrículados en perspectiva en un piso degradado a partir de una vista superior del mismo.

El siguiente diagrama (Fig. 2.24, izquierda) es una réplica simplificada del diagrama de Piero mostrado en la proposición 15, libro 1 (Fig. 2.25). Es de notar que el diagrama muestra al mismo tiempo el plano *Perfecto* –o *En Forma Propia*– en la parte inferior, y su equivalente degradado en la parte superior.

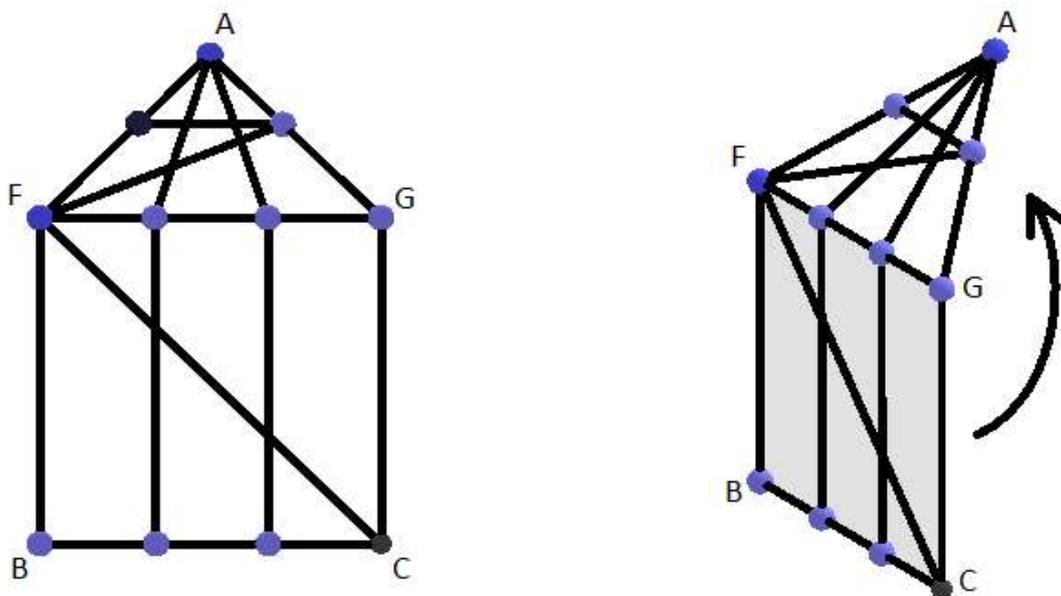


Fig. 2.24

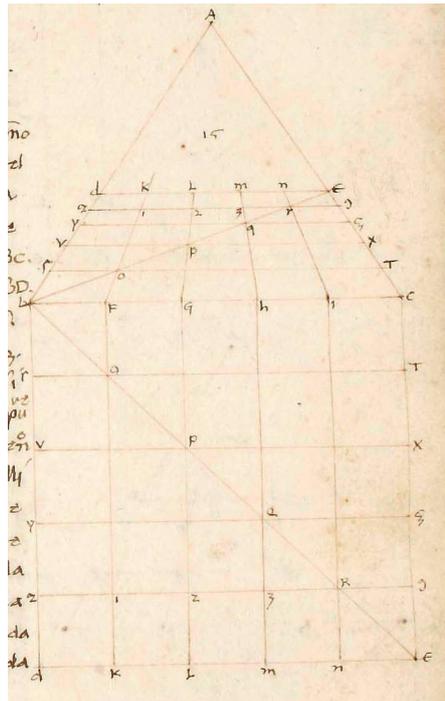


Fig. 2.25

Piense el diagrama como si sobre la línea  $\overline{GF}$  hubiese un espejo inclinado (Fig. 2.24, derecha) y que de esta manera se consigue calcar la información del plano perfecto a una forma degradada; aunque en realidad lo que se obtiene es una imagen reflejada, es posible mostrar que el reflejo degradado es exactamente igual al degradado original, como se verá a continuación.

(Field, 2005. p. 148) se encarga de sintetizar el método con el cual Piero transcribe o calca puntos de un plano en *propia forma* a un plano degradado, idea que reiteradamente emplea en las proposiciones mencionadas. De hecho, esa era la forma de fijar un concepto según los libros del ábaco: hacer muchos ejercicios con determinada metodología intrínseca hasta dominarla.

El procedimiento para calcar puntos es como sigue:

Partiendo del plano perfecto  $\square BCGF$  se debe obtener el cuadrilátero degradado  $\square FGE'D'$  (ubicado en la parte superior de la figura 2.26) efectuando el proceso que conduce justamente a la figura 2.21, donde aparece el cuadrilátero marcado como  $\square BCE'D'$ , producto de degradar el  $\square BCGF$  de la figura citada. Será necesario también conservar el llamado punto céntrico A en el diagrama pues es a partir del cual se obtiene el cuadrilátero degradado  $\square FGE'D'$ .

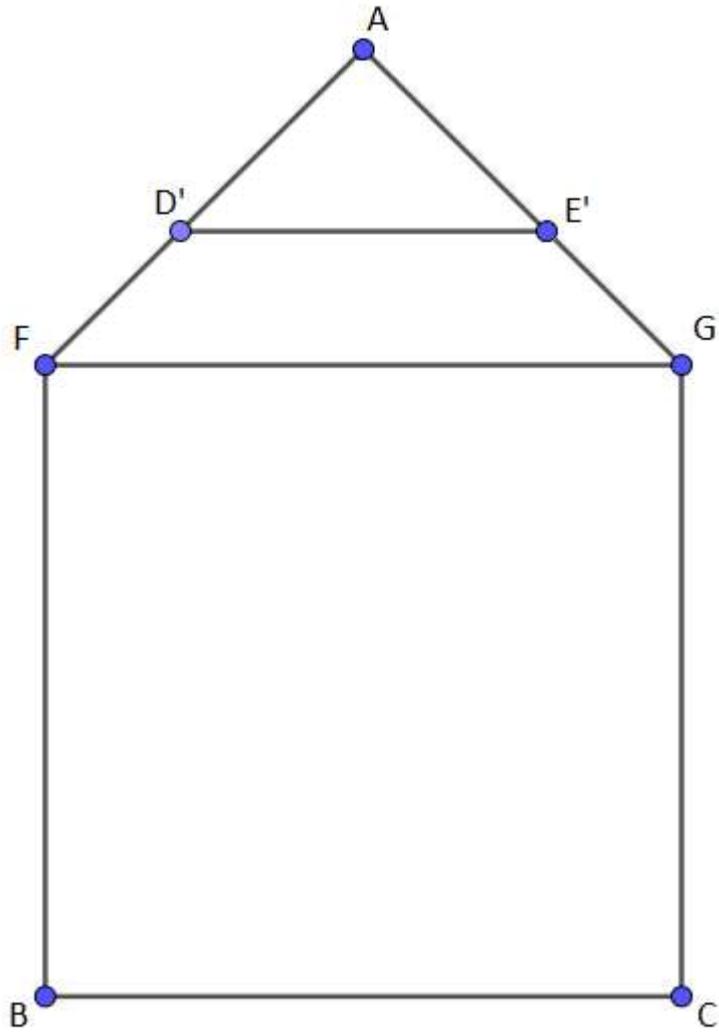


Fig 2.26

Habiendo trazado los cuadriláteros  $\square BCGF$  y  $\square FGE'D'$  dispuestos como muestra la figura 2.26, ubique el punto  $X$  en el plano *perfecto*. (Fig. 2.27).

Luego, trace una perpendicular a  $\overline{GF}$  que pase por el punto X. Llámese R el punto donde corte a  $\overline{GF}$ . Una el punto R al punto céntrico A (Fig. 2.27).

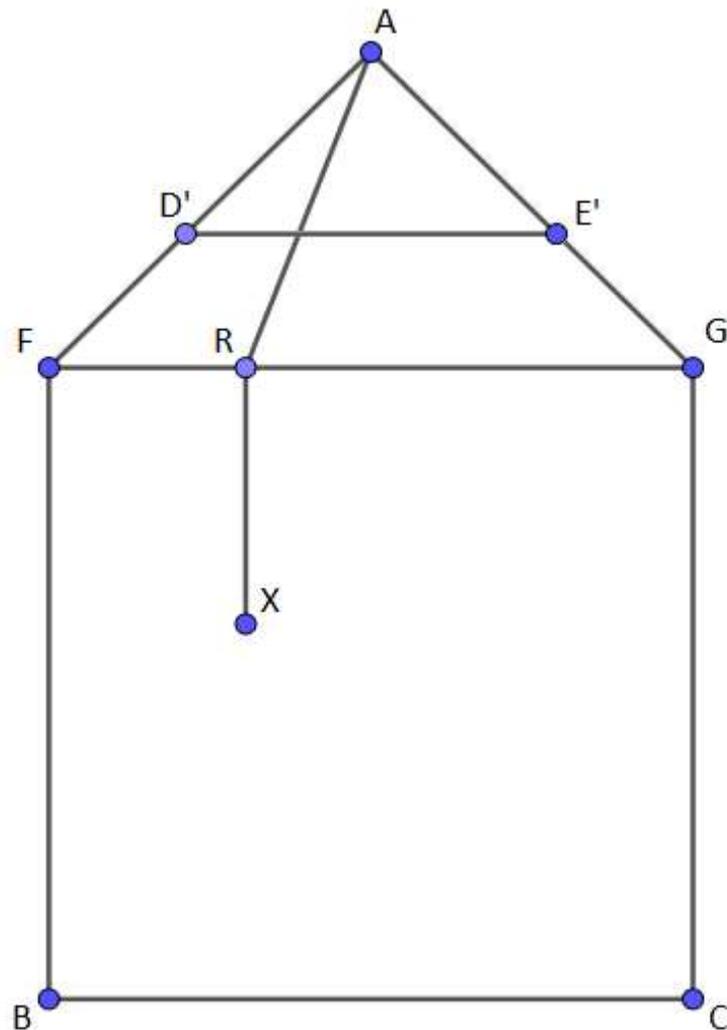


Fig. 2.27

Trace la diagonal  $\overline{BG}$  sobre el plano perfecto. Trace también su correspondiente reflejo  $\overline{GD'}$  sobre el plano degradado. (Fig. 2.28)

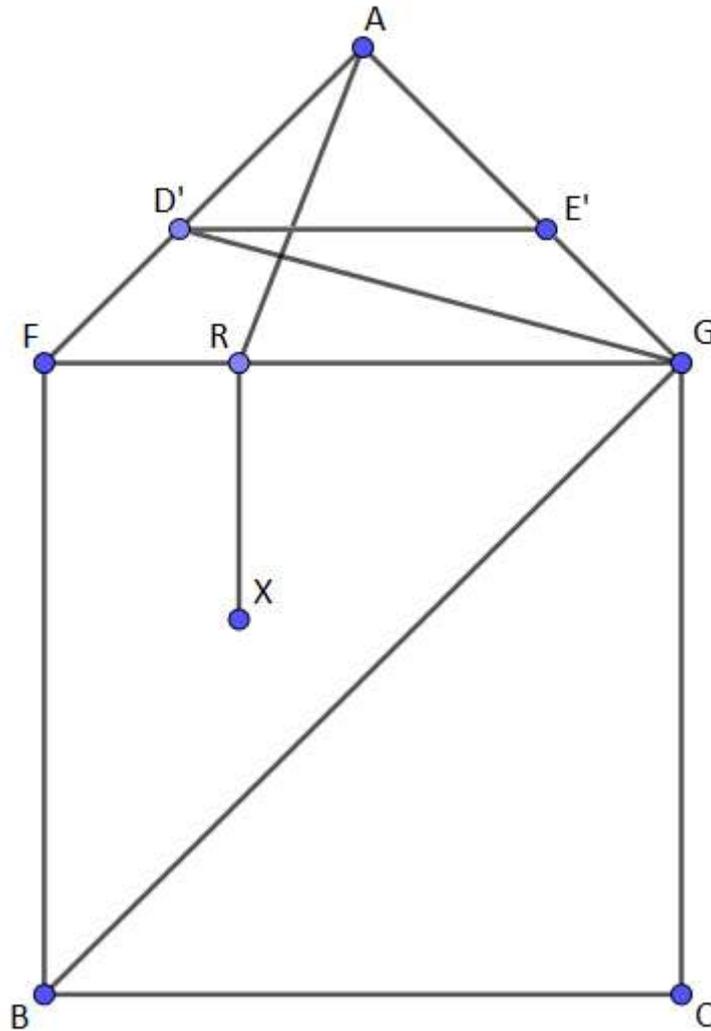


Fig. 2.28

La disposición mostrada en la figura 2.28 permite ubicar primero los puntos de interés en el plano perfecto respecto de la distancia horizontal a la diagonal  $\overline{BG}$ , para luego proceder a copiar la distancia encontrada sobre la orilla común a los planos perfecto y degradado, y finalmente degradar la proporción respecto del punto céntrico A. La diagonal degradada  $\overline{GD'}$  se emplea para ubicar con precisión el punto sobre el plano degradado mediante el proceso siguiente.

Trace una paralela a  $\overline{GF}$  que pase por X y márquese como D el punto en que corta a la diagonal  $\overline{BG}$  (Fig. 2.29).

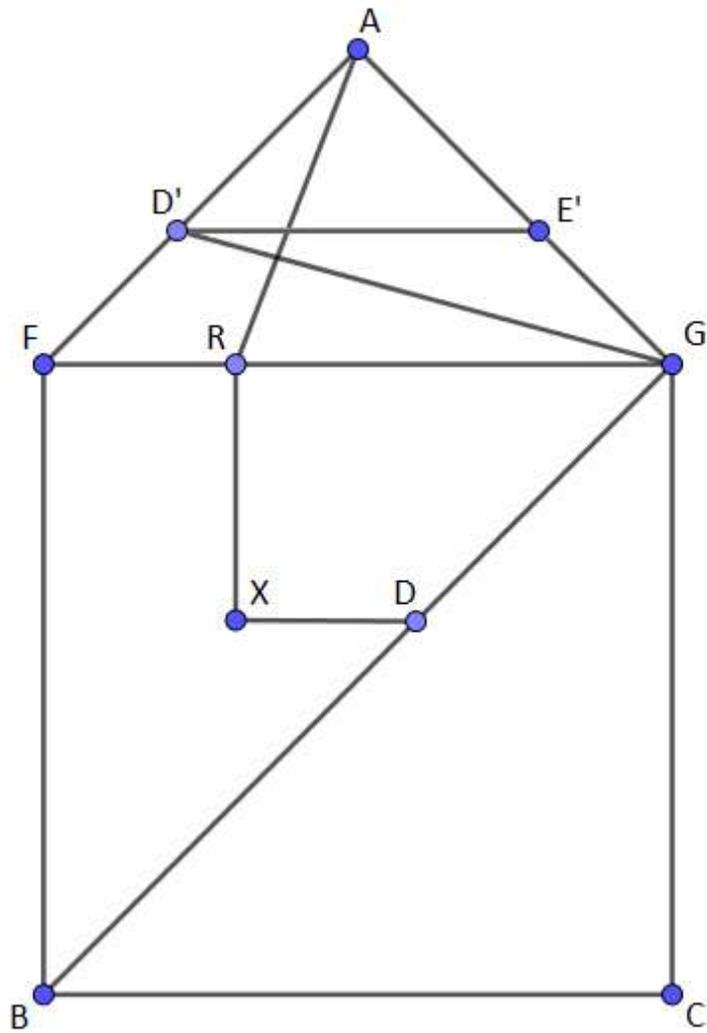


Fig. 2.29

Trace una perpendicular a  $\overline{GF}$  que pase por  $D$ . Llámese  $P$  al punto donde dicha perpendicular corta a  $\overline{GF}$ . Desde el punto  $P$  trace una recta hasta  $A$ . Marque  $Q = \overline{PA} \cap \overline{GD'}$  sobre la diagonal degradada  $\overline{GD'}$  (Fig. 2.30)

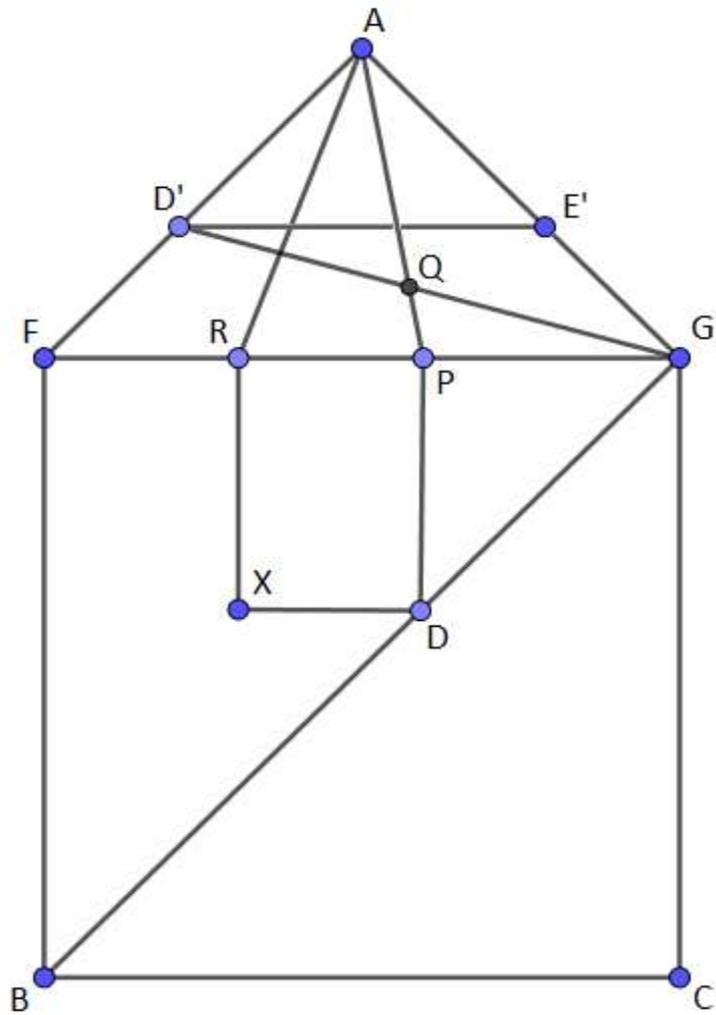


Fig. 2.30

Trace una paralela a  $\overline{GF}$  que pase por  $Q$ . Márquese como  $Y$  al punto donde dicha paralela corte a la recta  $\overline{RA}$ . Dicho punto  $Y$  corresponde al punto  $X$  en el plano degradado. (Fig. 2.31)



Piero no hace comentarios respecto de su construcción reflejada. Sin embargo no es difícil justificar dicha construcción empleando los conocimientos sobre óptica y catóptrica de la época. Dichas leyes de reflexión se dan por conocidas en la *Óptica* de Euclides y se demuestra en su *Especularia* o *Catóptrica*. Es probable que la imagen reflejada y degradada de Piero no causara mucho disgusto pues seguramente también se sabía que *todo espejo plano produce una imagen virtual de un objeto, del mismo tamaño y simétrica respecto del plano del espejo*. Y si la imagen virtual era tal, bien podría uno ahorrarse una reflexión y trabajar con la imagen degradada reflejada sin mayor problema.

A continuación se ilustrará la razón por la cual el reflejo en un espejo es equivalente a la imagen real empleando un objeto muy sencillo y siguiendo un par de proposiciones de la *Catóptrica* de Euclides (Tanto la *Óptica* como la *Catóptrica* de Euclides son en realidad trabajos que se adjudican a Euclides. Si bien de mayor sencillez que los *Elementos*, hay ciertos rasgos característicos, mas nunca concluyentes, en los trabajos mencionados que bien podrían ser de un Euclides menos experimentado que cuando escribió sus *Elementos*). De esta manera se pretende salvar el hecho de que Piero trabaja en su Proposición 15, libro 1, con las reflexiones de los planos degradados y no con los planos degradados originales. La importancia de esta justificación radica en el hecho de que a partir de las proposiciones mencionadas Piero crea todos los prismas degradados de su libro 2.

Considere un espejo  $\overline{GF}$  y un observador viendo desde  $A$ , situado delante del espejo, y un objeto situado en  $D$ . Esto significa que el observador ve el objeto de manera indirecta, mirando su reflejo en el espejo.

Trace un rayo visual desde  $A$  tal que incida sobre el espejo en  $K$  a modo que sea reflejado hasta tocar  $D$  (Fig. 2.32).

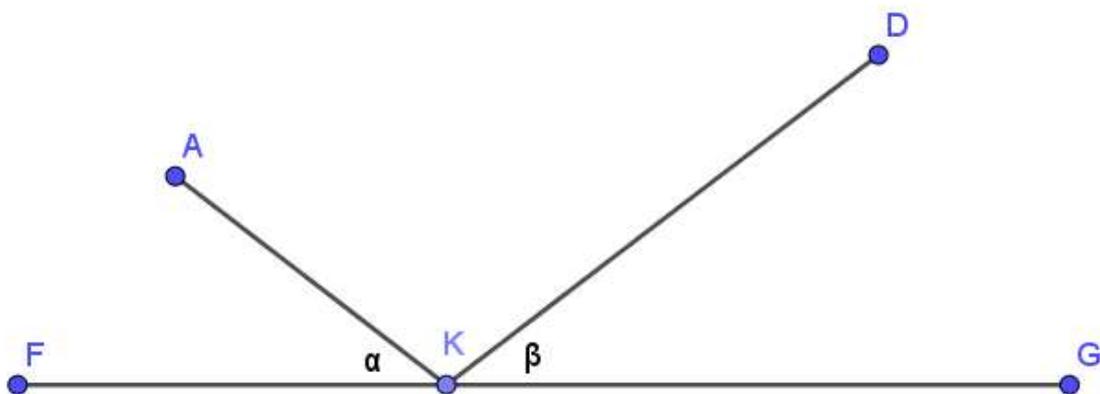


Fig. 2.32

Euclides dice que *los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales*. (Teorema 1 de la *Especularia* de Euclides. de Ondériz, p. 43) Trace ahora las alturas  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$  de los puntos  $B$  y  $C$  correspondientes en el espejo (Fig. 2.33).

Vea que en efecto, empíricamente, resulta que  $\overline{AB}$  es a  $\overline{BK}$ , como  $\overline{DC}$  es a  $\overline{CK}$ . Entonces,  $\Delta ABK$  y  $\Delta DKC$  son triángulos semejantes y por tanto los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales.

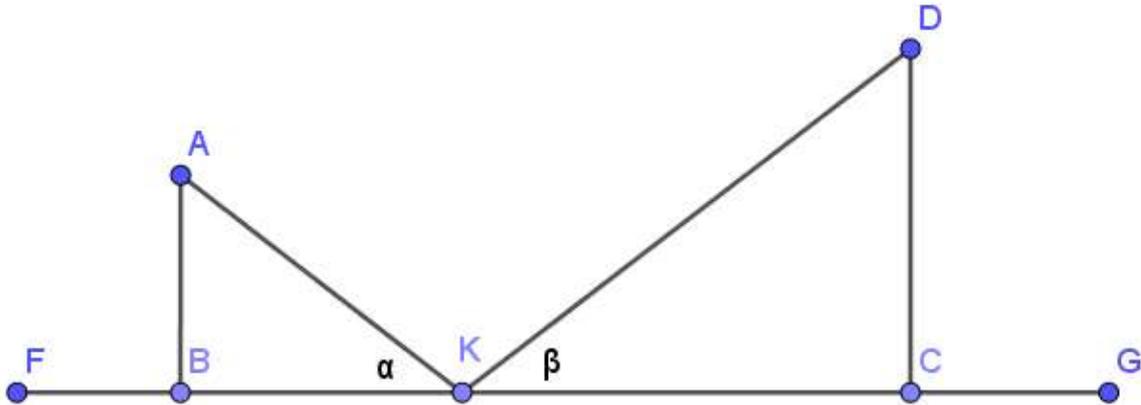


Fig. 2.33

Considere ahora un espejo  $\overline{FG}$  y un observador viendo desde  $A$  y situado delante del espejo. Trace los rayos visuales  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  tales que se reflejen en el espejo y permitan ver a un objeto ("Cosa Vista")  $\overline{DE}$ . (Fig. 2.34)

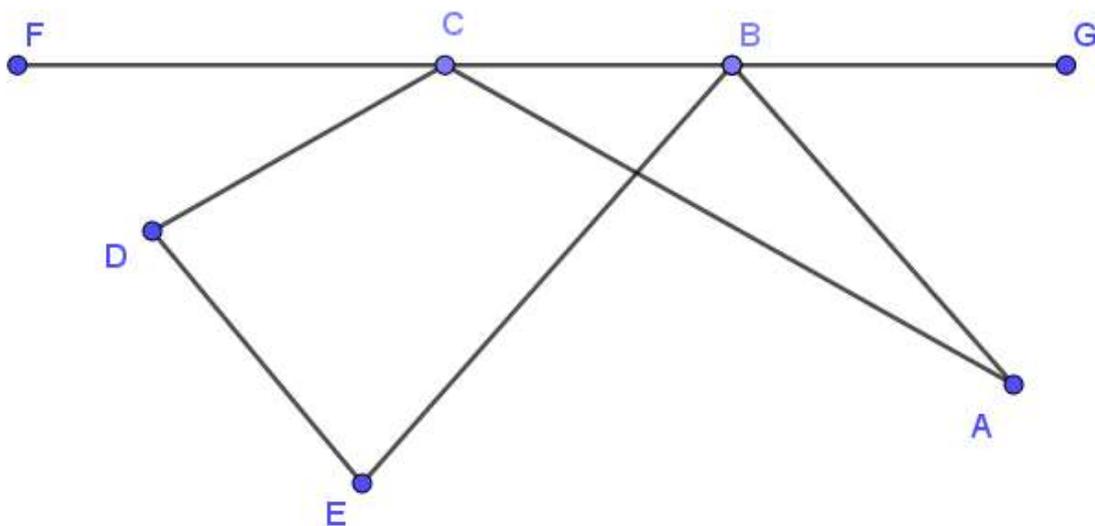


Fig. 2.34

Desde  $D$  y  $E$ , dibújense rectas  $\overline{DQ}$  y  $\overline{EZ}$  perpendiculares al espejo. Extiéndanse más allá del espejo y de igual manera extiéndanse los rayos visuales  $\overline{AB}$  hasta cortar a  $\overline{DQ}$  extendida en  $L$ , y  $\overline{AC}$  hasta cortar a  $\overline{EZ}$  extendido en  $K$ . (Fig. 2.35)

El ángulo en  $\alpha$  es igual al ángulo en  $\beta$  y gracias a que  $\Delta KCZ$  y  $\Delta ZCE$  comparten el lado  $\overline{CZ}$ , las distancias  $\overline{EZ}$  y  $\overline{ZK}$  resultan ser las mismas. Por las mismas razones,  $\overline{DQ}$  es igual a  $\overline{QL}$ . Finalmente, visto en el espejo, las partes derechas –izquierdas si son vistas desde el espejo– aparecen a la izquierda –vistas desde  $A$ – y las partes izquierdas aparecen a la derecha y la imagen es igual a la cosa vista.

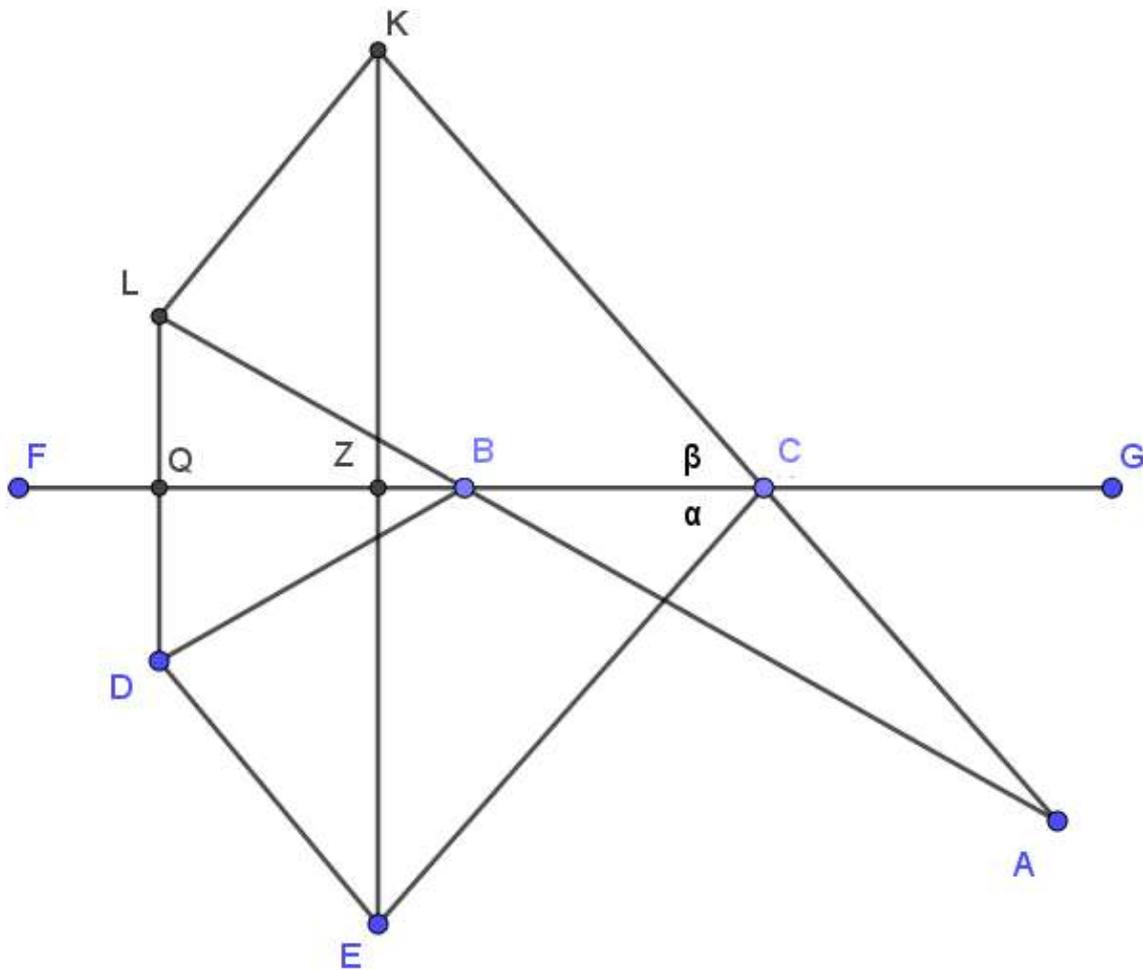


Fig. 2.35

## Dibujar un prisma degradado

Una vez que se conoce el método para degradar un polígono en el piso, Piero procede a mostrar cómo se dibuja un prisma cuya base resulta ser un polígono ya degradado.

Considere el cuadrilátero  $\square abcd$  dibujado sobre el plano degradado  $\square BCED$  (Fig. 2.36)

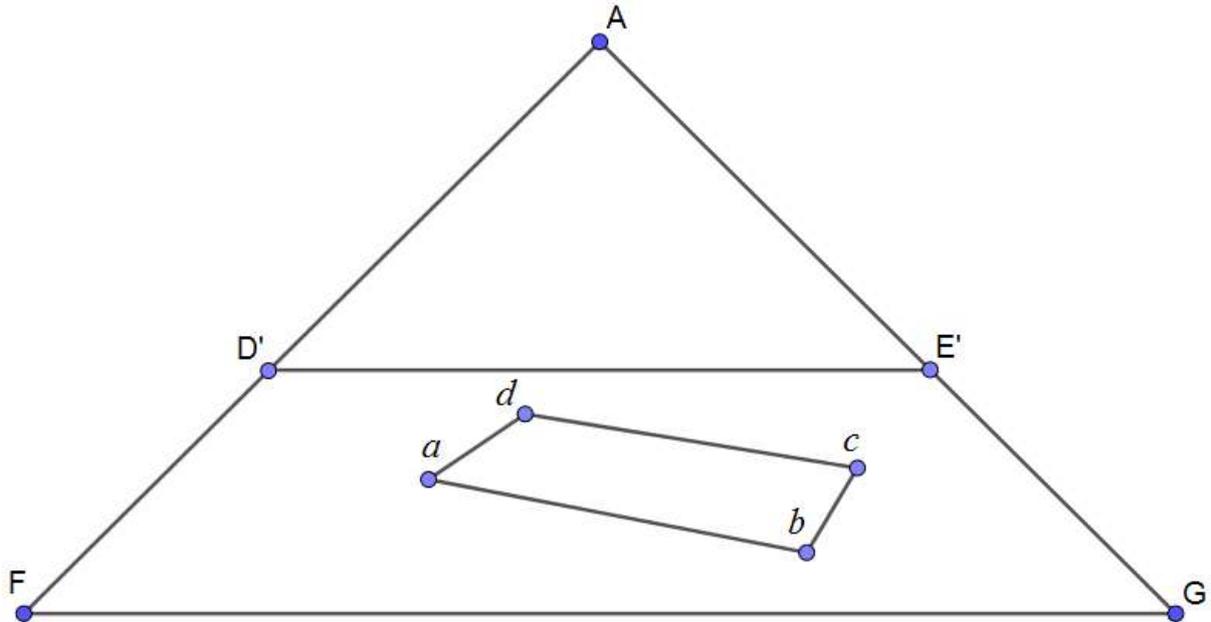


Fig. 2.36

A continuación se dibujará una arista vertical desde  $b$ .

Para ello, trace primero una paralela a  $\overline{FG}$  que pase por  $b$  y corte a  $\overline{FA}$  en  $P$  (Fig. 2.37)

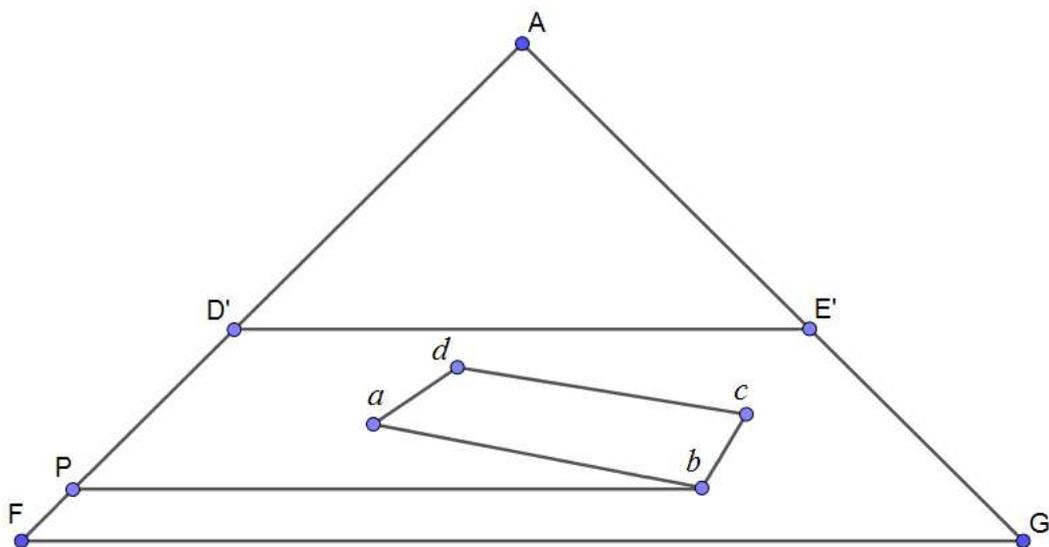


Fig. 2.37

Trace una perpendicular a  $\overline{Pb}$  por  $P$  (Fig. 2.38)

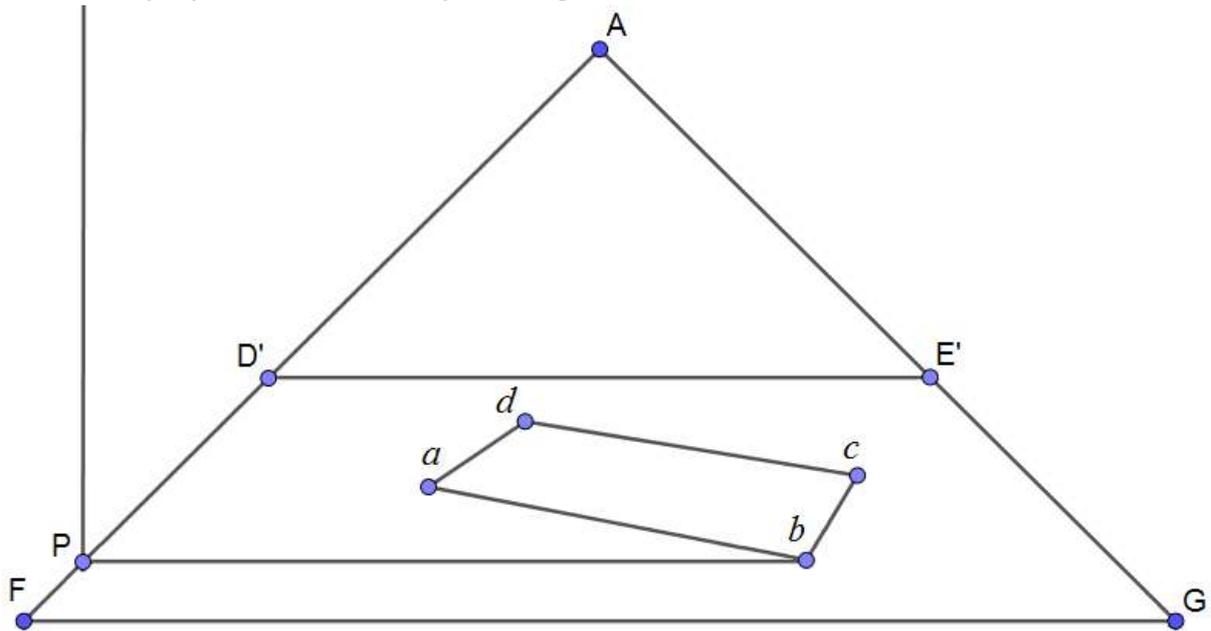


Fig. 2.38

Trace una perpendicular a  $\overline{FG}$  por  $F$  cuya longitud  $\overline{FR}$  sea exactamente la longitud que tendría la arista en *propia forma* (Fig. 2.39) Es decir, como si la arista estuviese colocada sobre el punto  $F$ .

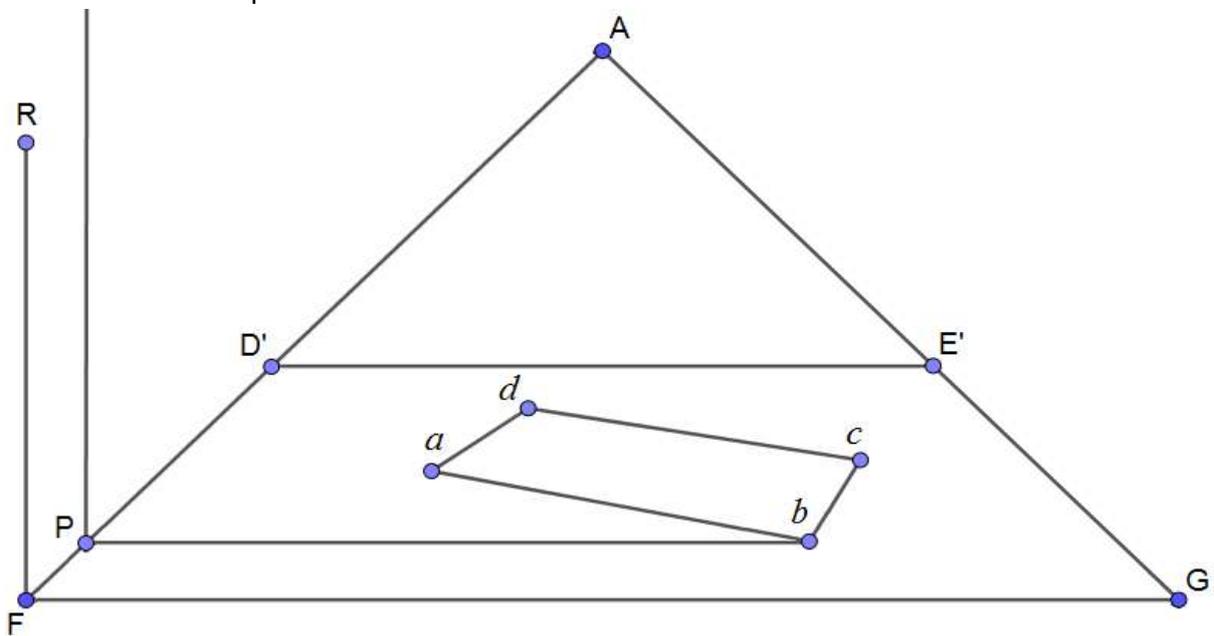


Fig. 2.39

Una al punto  $R$  con  $A$ . Marque como  $T$  al punto donde  $\overline{RA}$  corte a la perpendicular por  $P$  (Fig. 2.40)

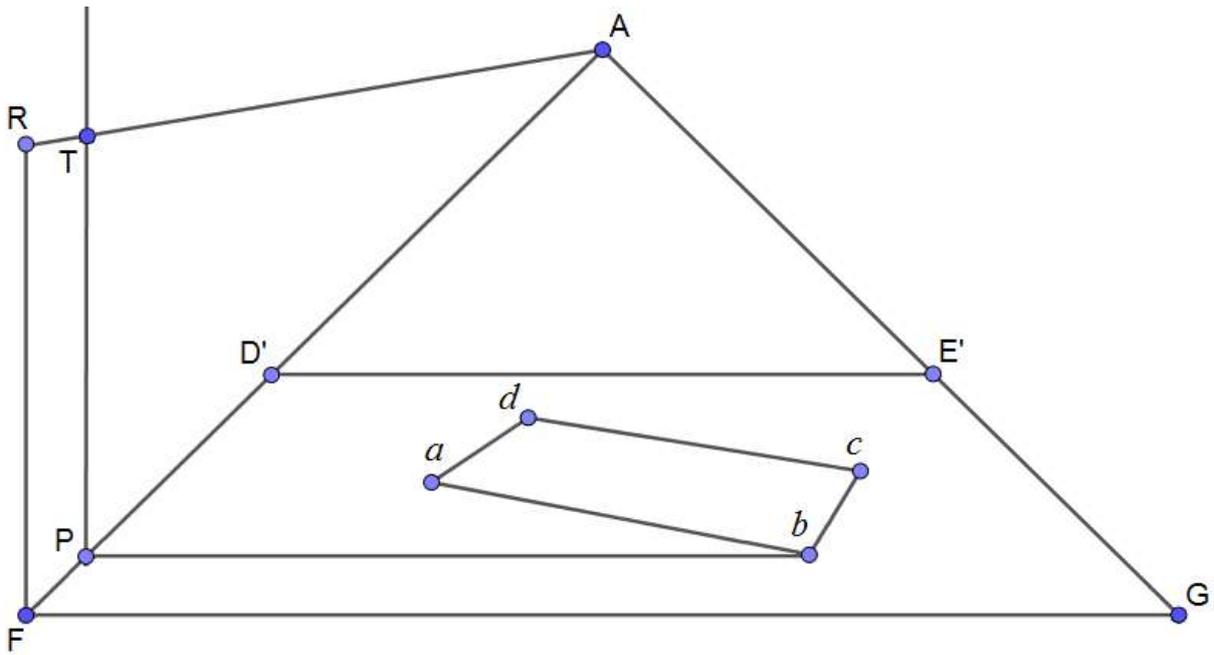


Fig. 2.40

Trace ahora una paralela a  $\overline{PT}$  de longitud indefinida que pase por  $b$  (Fig. 2.41)

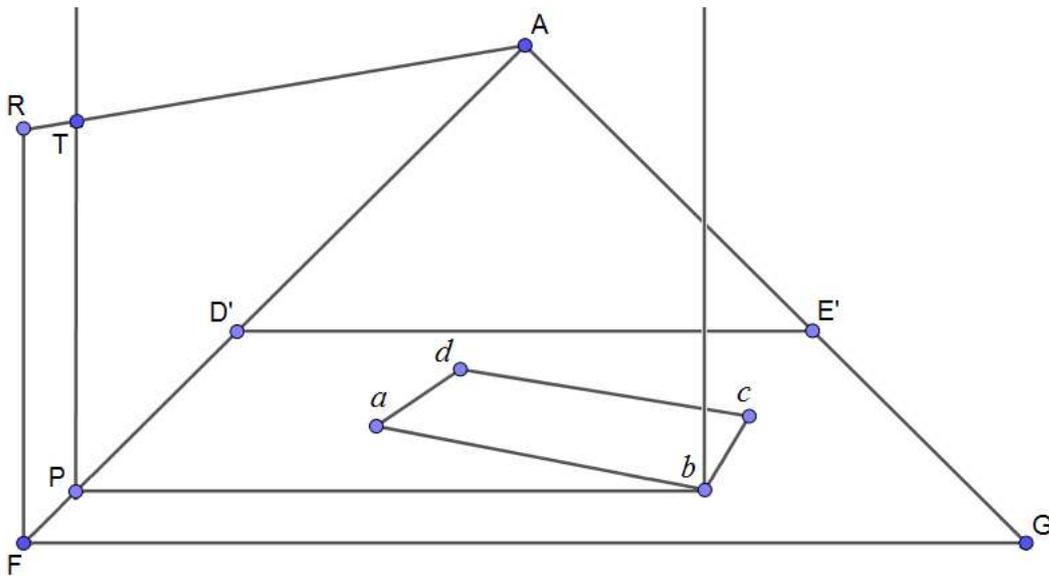


Fig. 2.41

Trace luego una paralela a  $\overline{Pb}$  que pase por  $T$ . Marque como  $L$  al punto donde dicha recta corte a la recta vertical que pasa por  $b$  (Fig. 2.42).

La recta  $\overline{bL}$  es la arista vertical del prisma que se buscaba dibujar. Aquí Piero degrada la arista original  $\overline{FR}$  respecto del punto  $A$  —el punto céntrico—, y apoyándose en los teoremas de la *Especularia* de Euclides y la argumentación geométrica que aparece en esta obra para identificar las figuras semejantes que se obtienen. (Vea también la argumentación que en este capítulo conduce a la Fig. 2.35) Esto último se logra con

base en cómo se ven degradando las alturas de la figura según la profundidad, tal y como se aprecia en la parte izquierda, formada sobre el  $\Delta FRA$  en la figura 2.42.

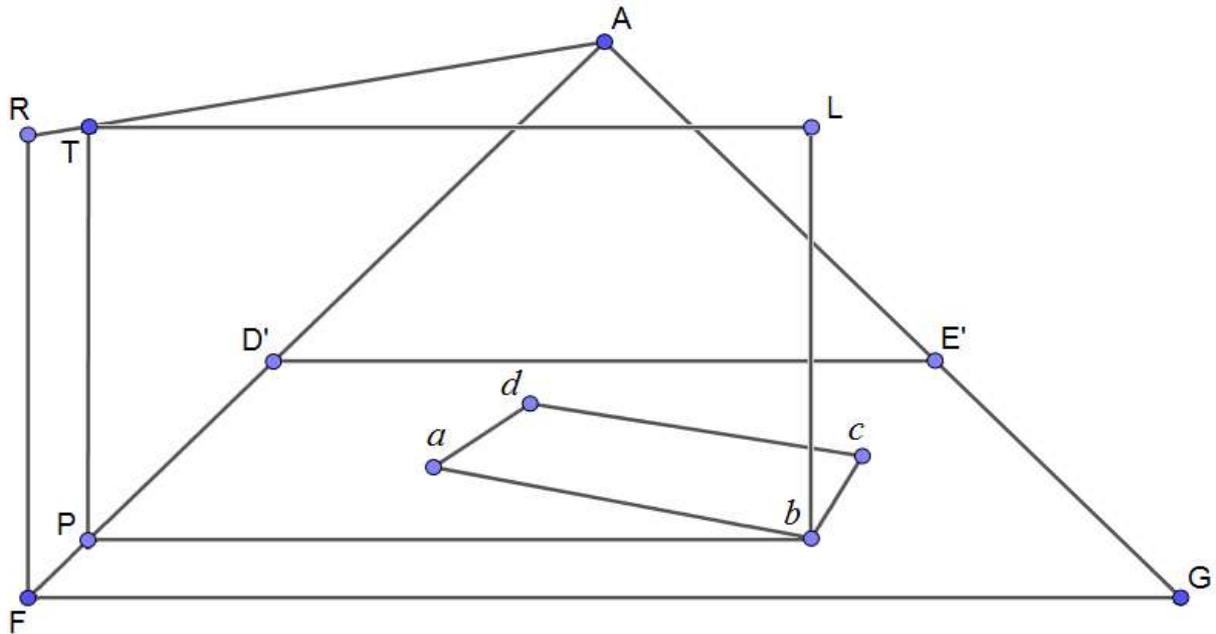


Fig. 2.42

Repetiendo este proceso para cada uno de los vértices se obtiene el prisma degradado (Fig. 2.43)

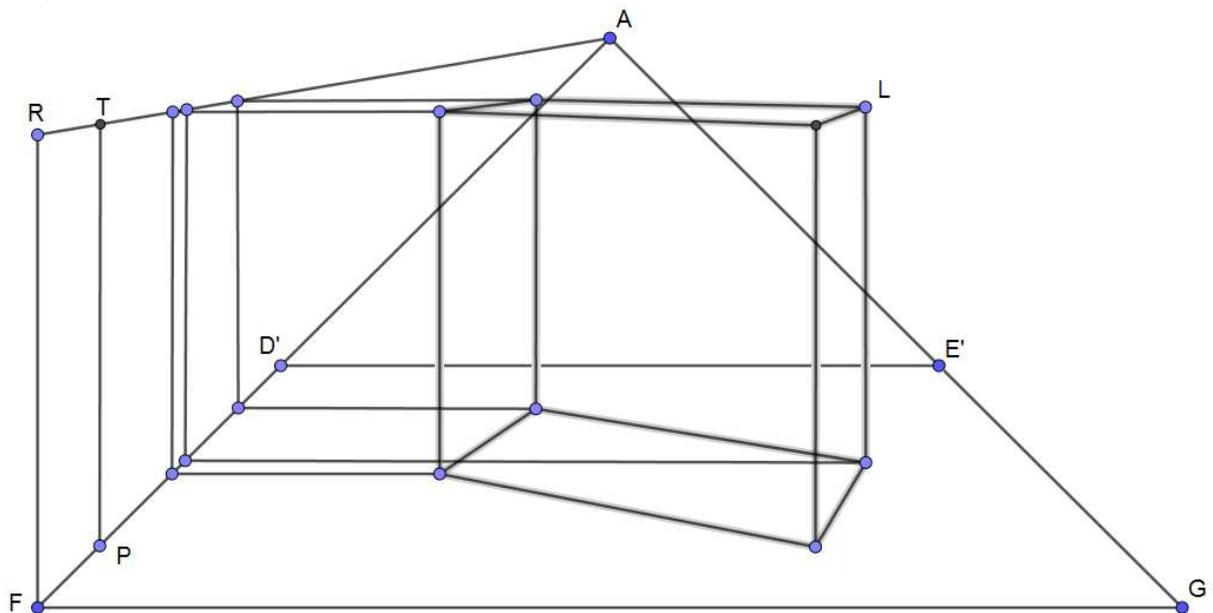


Fig. 2.43

Una vez presentado este método para construir objetos que sirve para degradar cualquier objeto rectilíneo, sin importar la inclinación de las líneas, Piero extiende dicha metodología para dibujar incluso rostros humanos en perspectiva. Para ello se requería aproximar mediante rectas –entre más pequeñas, mejor– las líneas curvas que conforman lo que sea que se desease representar. Desafortunadamente, resulta en un

proceso excesivamente laborioso, más aún, poco conveniente cuando el espacio para dibujar es pequeño. Es preferible en esas ocasiones confiar en las habilidades de dibujo del artista para representar un rostro humano en lugar de intentar proyectarlo con las técnicas descritas por Piero. Faltaba mucho tiempo para que apareciese una herramienta que permitiese dibujar rostros a partir de polígonos de manera semejante a como Piero lo proponía. Esta herramienta depende, básicamente, de la computadora.

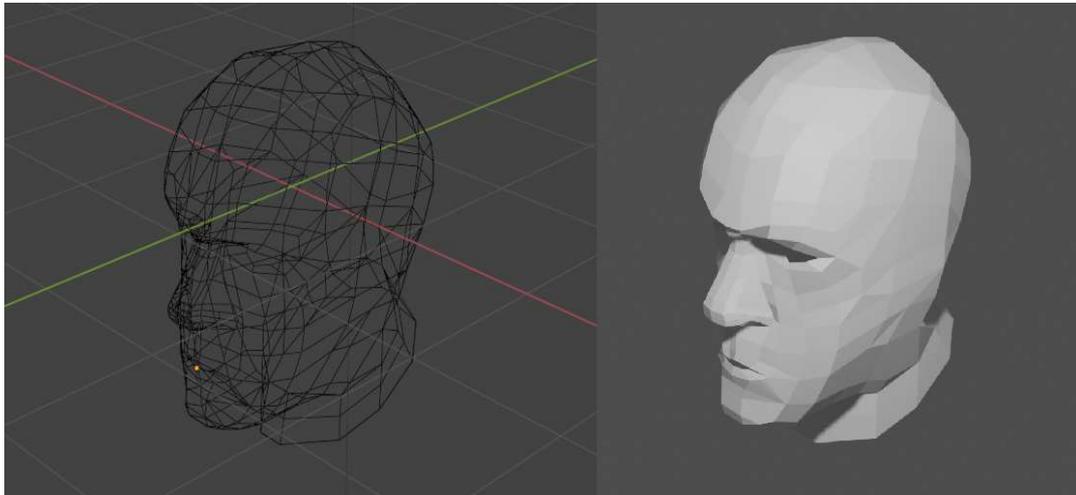


Fig. 2.44

### **El Cáliz de Ucello**

Uno de los trabajos en perspectiva más famosos –e impresionantes– es el llamado Cáliz de Ucello. Dibujado en tinta, el cáliz cuenta con tres *Mazzocchios* (una suerte de toros poligonales), cada uno construido a partir de 32 hexágonos regulares distribuidos de manera igualmente regular a lo largo de la mencionada estructura geométrica. Hecho a la manera de los perspectivistas representaba un reto, y quienes lo hacían era más por mostrar su habilidad como geómetras que porque resultara necesario.

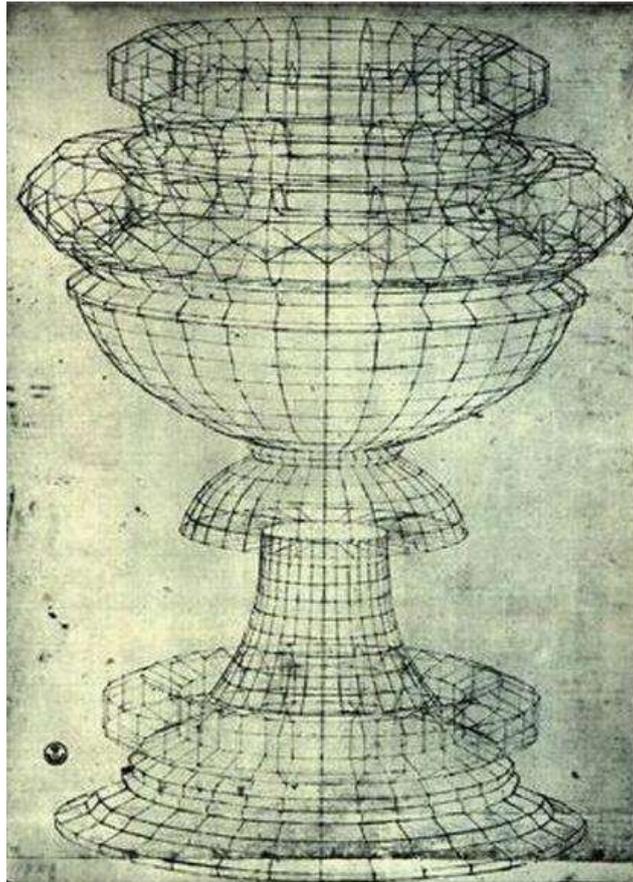


Fig. 2.45

Con un poco de dedicación, hoy en día cualquiera puede reproducir el Cáliz empleando programas de modelado 3D de manera mucho más simple que intentando seguir los métodos de Alberti, Piero y Ucello, y por ello mismo es realmente admirable la habilidad y precisión de Ucello que le permitieron reproducir el caliz a mano y con gran exactitud.

A manera de ejercicio se presenta a continuación una descripción de los pasos que se siguieron para en esta tesis realizar el trazo del caliz recurriendo a la computadora y a las facilidades que ofrecen los algoritmos constructivos de imagen.

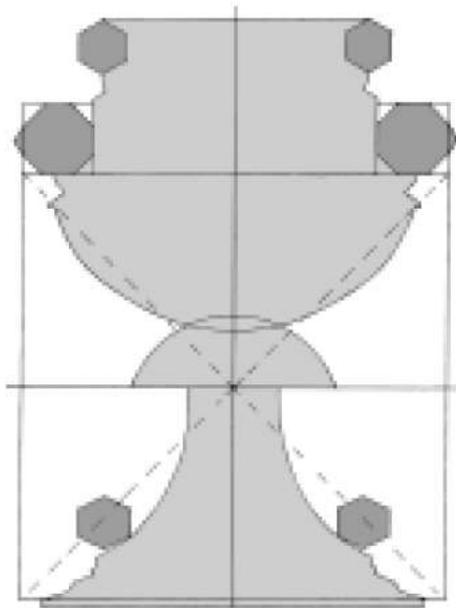


Fig. 2.46

Para realizar el modelado se empleó el corte isométrico del cáliz (Fig. 2.46) que presenta (Talbot, 2002. p 130). A partir de la mencionada figura se dibujó un hexágono que se reprodujo 31 veces para formar el Mazzocchio superior (Fig. 2.47).

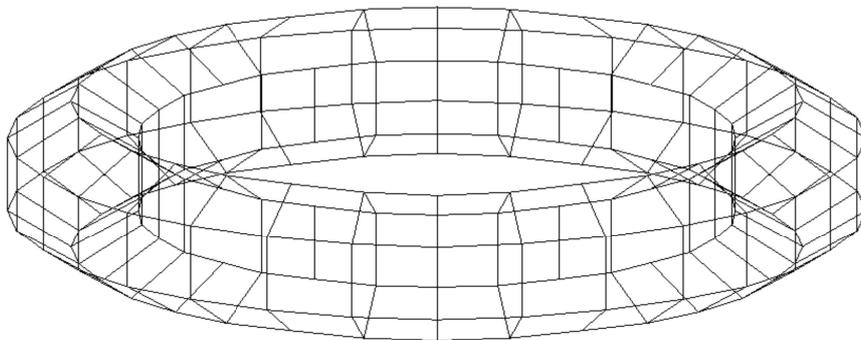


Fig. 2.47

A partir del Mazzocchio se “estiraron” las aristas inferiores para generar la parte superior de la copa, luego del tallo y de la base. Se reutilizó el Mazzocchio superior para la base, y se adaptó un Mazzocchio Heptagonal a partir del modelo hexagonal para la parte media.

Finalmente, para evitar que el modelo quedase con la apariencia gris que de inicio traen todas las figuras primarias que genera el programa (planos, cubos, cilindros, conos, etc.) se agregó una textura de cuerno con la cual se cubre la figura, lo cual le da una apariencia un poco más realista. En esa época era común emplear oro, plata, cuerno o madera en la construcción de los cálices. Esto producía, en menor o mayor grado, juegos de luces y sombras para un espectador que se coloca en una u otra posición. Para reproducir este efecto se agregaron también fuentes de luz que simulan la iluminación del objeto, realzando la geometría y ofreciendo una “rendero” mas realista, mismo que puede apreciarse en la figura 2.48.

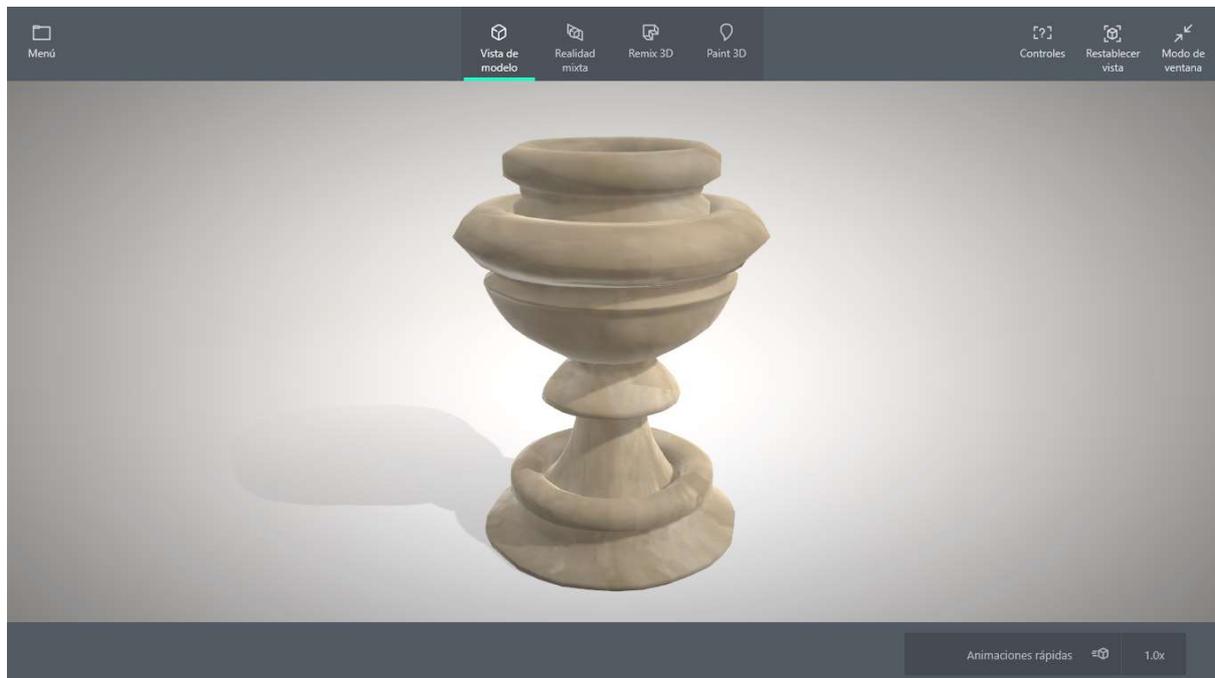
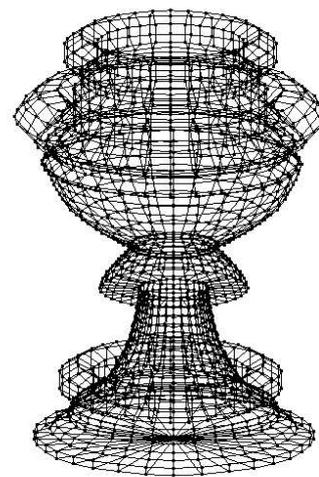
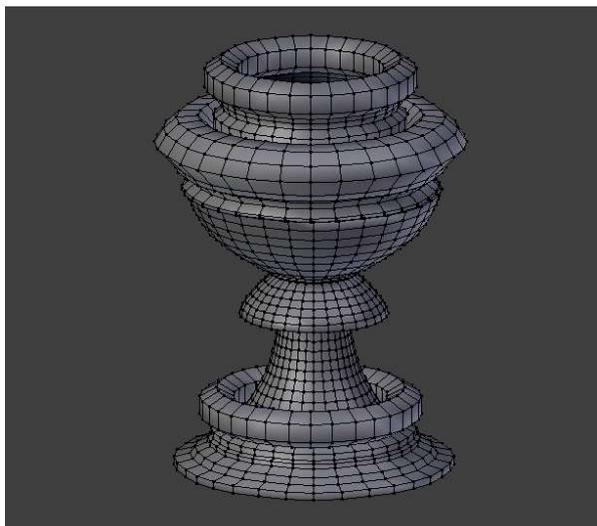


Fig. 2.48

## Conclusión

En este capítulo se presentó brevemente la metodología de las construcciones geométricas clásicas del siglo XV.

Dos de los precursores de la perspectiva y la óptica actuales abordan el tema del dibujo en perspectiva de manera distinta. Mientras que Alberti lo hace desde el punto de vista del humanista, el enfoque de Piero es más bien técnico. Si bien sus métodos son distintos y presentan diferencias respecto a la ubicación del punto céntrico, es posible mostrar que son equivalentes mediante la semejanza de triángulos.

Estas metodologías tenían sus alcances y limitaciones. Mientras más intrincado fuese el objeto a dibujar, mayor cantidad de tiempo había que emplear para obtener un degradado que correspondiese a la realidad del objeto. A pesar de que Piero presenta una metodología para trabajar con rostros, resulta casi imposible aplicar la metodología puesto que el espacio que le corresponde al rostro de una persona en la pintura es muy pequeño.

Sin embargo, el límite de la complejidad geométrica no termina allí. Figuras posteriores tales como Egnazio Danti, Guidobaldo del Monte y Giacomo Vignola se vieron beneficiadas por la acumulación de experiencias del siglo XV en el trazo de perspectivas, y gracias a sus conocimientos matemáticos pudieron entender y expresar mejor la realidad mediante sus modelos geométricos.

En la actualidad, los programas de modelado y de diseño cuentan con todo un arsenal de leyes geométricas y de reflexión y refracción de luz ya programados, los cuales facilitan al artista, ingeniero o arquitecto, la construcción de modelos en perspectiva, muchas veces más complicados que los Mazzocchios del Renacimiento.

## Capítulo 3

### Concepto y representación de parábolas: algunos resultados geométricos.

#### Parábolas en grabados renacentistas

Una revisión amplia de pinturas y grabados del Renacimiento permite detectar muchas representaciones de objetos lanzados al aire con trayectorias que desde el siglo XVII se sabe deberían ser parabólicas. Los ejemplos de este tipo exhiben una suerte de arcos cuyos trazos asemejan parábolas. Sin embargo, la filosofía natural hasta antes de la primera mitad del siglo XV no recoge ningún testimonio, menos aún argumentación, de que tales trayectorias deberían seguir las curvas analizadas por Apolonio. Si acaso, hubo quienes representaron estas trayectorias curvilíneas como secciones de círculo. Tal es el caso de Tartaglia en la *Nueva Ciencia*, o Leonardo al ilustrar los disparos de morteros. Por lo que se pretende recoger de la realidad hoy sabemos que dichas trayectorias deberían ser parábolas, por lo que deberían ser presentadas ya fuera como tales o vistas desde algún otro ángulo.

Una pregunta que nos planteamos es si el pintor, a sabiendas nuestras de que no posee los conocimientos teóricos que le conducirían a elegir representar un arco parabólico bajo una perspectiva, ¿podría simplemente siguiendo sus dotes observacionales y artísticas, estar mostrando un trazo que correspondiera a una parábola?

En este capítulo se presentará una manera de dibujar parábolas en perspectiva empleando los conocimientos disponibles en el Renacimiento. Parte de la investigación consistirá en reproducir en modelos computarizados dichos grabados o pinturas y analizar qué tanto se parecían esas curvas dibujadas a mano alzada a las trayectorias parabólicas que en realidad describen los misiles en cuestión. Dando el beneficio de la duda, uno podría pensar que quizás las curvas fueron dibujadas en perspectiva bajo el impulso de algún capricho o de la creatividad del artista.

Veamos primero cómo caracterizar a una parábola empleando conocimientos afines a la época de los grabados y pinturas mencionados en la introducción del presente trabajo de tesis, esto es, desde el siglo XV y hasta inicios del siglo XVII.

## Caracterización de parábolas a partir de los resultados de Apolonio

Para determinar el lugar geométrico de una cónica, es posible emplear los teoremas de Pascal (1623 – 1662) o de Pappus (c. 290 – c. 350). Sin embargo, el primer escrito del que se tiene noticia sobre cónicas, y cuyo estudio conduciría a la resolución del mencionado problema fue el de Apolonio de Perga (c. 262 – c. 190).

Las *Cónicas* de Apolonio, junto con los *Elementos* de Euclides, son dos de los libros más importantes de las matemáticas desarrollados por los griegos. Las *Cónicas* fueron traducidas al latín por primera vez por el matemático Federico Commandino –quien también era un excelente traductor– y publicadas en 1566. A su vez estos textos sirvieron a Kepler para sus trabajos sobre órbitas elípticas. Se sabe que originalmente las *Cónicas* constaban de ocho libros. Durante el Renacimiento cuatro de ellos fueron recuperados en griego y tres más en traducciones al árabe. El octavo libro no llegó al Renacimiento y se cree era una suerte de apéndice. El segundo texto de Apolonio que se conserva hasta nuestros días es anterior a las *Cónicas* y más breve. Conocido como *De Sectione Rationis*, fue traducido del árabe al latín por Edmond Halley en 1706. (Zerlenga, 2016. p. 121)

De haber sido lo suficientemente conocidos, los textos de Apolonio habrían sido de vital importancia al momento de hablar sobre cónicas en el Renacimiento. Comparados con los *Elementos* de Euclides, tratado que ha tenido y conservado gran influencia en los textos modernos de geometría, la influencia de las *Cónicas* de Apolonio en la actualidad –a pesar de ser un trabajo destacable– ha sido prácticamente nula.

Según lo expresa Heath (1896. p vii), en gran medida la falta de popularidad de los mencionados libros reside en la redacción poco accesible con la que originalmente fueron escritos, llevando a Apolonio a ocupar incluso media página para enunciar una proposición, misma que convendría recordar pues posteriormente sería empleada para demostrar otra proposición enunciada en una extensión de texto similar. Además tampoco utilizaba una notación uniforme. Por ejemplo, en cada proposición Apolonio emplea una letra distinta para el mismo punto. Esto sólo por citar algunos detalles que dificultaban su lectura.

Versiones modernas de Halley, Balsam y Heath (Heath, 1896. p ix) han solventado los vericuetos mencionados del texto original, conservando las ideas que Apolonio inicialmente planeaba plasmar y ofreciendo así versiones legibles para los matemáticos contemporáneos.

En la siguiente sección se presentarán algunos conceptos que Apolonio introduce y a los que posteriormente hace referencia cuando presenta sus proposiciones. Estas proposiciones se emplearán para identificar si determinado dibujo es en realidad una cónica o simplemente una mera representación visual de una curva que uno interpreta como la manera en que el observador percibe el movimiento que el artista captura a mano alzada.

### Definiciones de diámetro, ordenada y abscisa de una sección cónica

En vista del uso que se les dará páginas más adelante conviene recordar algunos conceptos. Considere un cono simple tal como los conocemos hoy en día. Hágase a dicho cono un corte con un plano  $p$  que pase sin tocar su vértice y que corte perpendicularmente el plano de la base  $\overline{BC}$ . Sea  $\overline{DME}$  la intersección del plano  $p$  – por él pasan los puntos  $D, Q, P, E, M$  – con el plano de la base  $BC$ , con  $M \in \overline{BC}$ . (Fig 3.3)

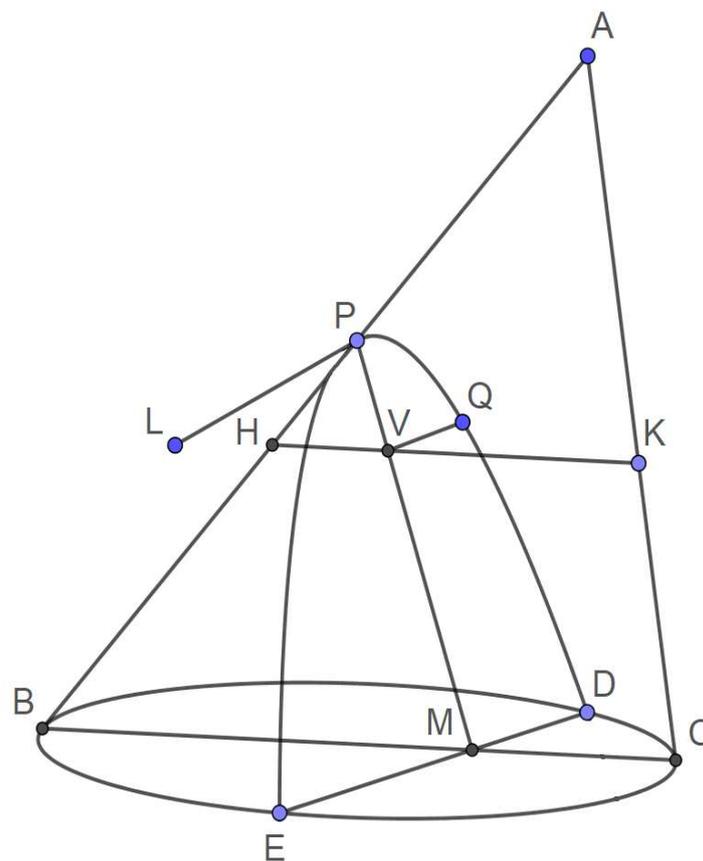


Fig. 3.3

Sea ahora  $\widehat{DPE}$  la sección cónica definida por el corte del cono con el plano  $p$  (Fig. 3.3). Vea que la recta  $\overline{PM}$  cortará cualquier cuerda paralela a  $\overline{DE}$  en el plano  $DPE$ . Una línea recta que biseca cualquier cuerda de una determinada sección cónica se conoce como *diámetro*. A partir del diámetro es posible caracterizar las distintas secciones cónicas producidas al cortar un cono.

Una segunda recta que resulta importante, nombrada por Apolonio como *recta dibujada en sentido ordenado* o simplemente la *ordenada*, se traza de la siguiente manera:

Suponga (Fig. 3.4) un cono cortado por un plano que pasa por  $\overline{DME}$  a la altura de su base  $\overline{BC}$  -que además es diámetro de la base mencionada- y con triángulo axial  $\triangle ABC$ .

Considere ahora un plano  $p$  que hace un corte  $\overline{PP'}$  al cono. Si la recta  $\overline{BC}$  biseca en ángulo recto a  $\overline{DME}$  por  $M$ , y el plano  $\overline{PP'}$  se encuentra en tal disposición que la línea  $\overline{PM}$  resulta de la intersección entre  $\overline{PP'}$  y  $\triangle ABC$ , entonces  $\overline{PP'}$  es un diámetro de la sección cónica resultante por el corte  $\overline{PM}$  y bisecará a todas las cuerdas de la sección trazadas paralelas a  $\overline{DE}$ .

Suponga ahora  $\overline{QQ'}$  como una de las cuerdas mencionadas. Sea  $V$  el punto del diámetro que biseca a  $\overline{QQ'}$ . Entonces,  $\overline{QV}$  es la ordenada al diámetro  $\overline{PP'}$ . (Fig. 3.4)

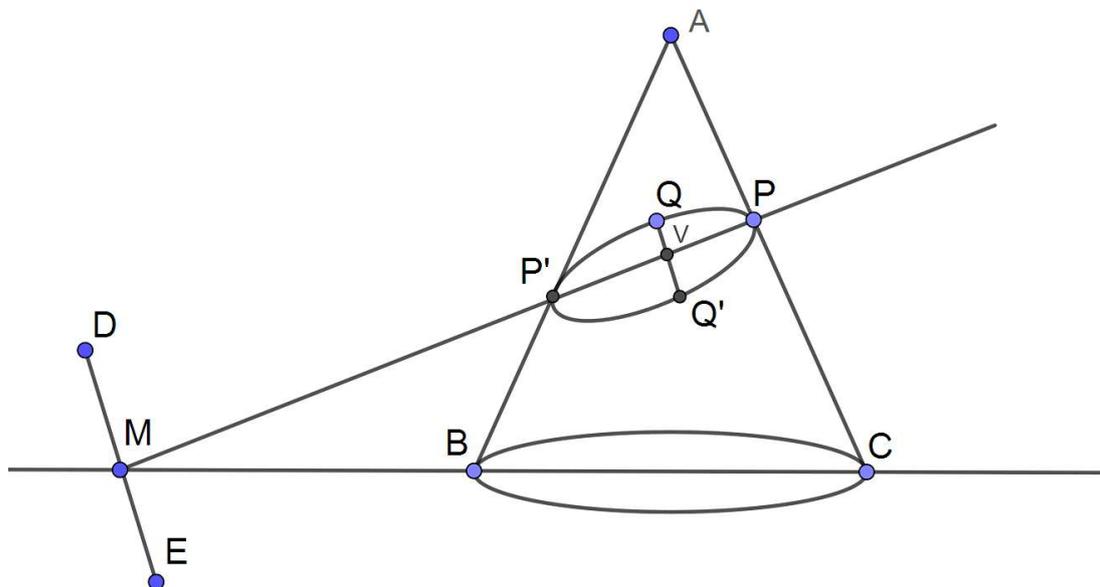


Fig. 3.4

Finalmente, aprovechando la construcción anterior, la recta  $\overline{P\bar{V}}$  es a la que Apolonio llama *abscisa* a  $\overline{Q\bar{V}}$ . (Fig. 3.4)

Con base en esta identificaciones Apolonio caracteriza a la parábola en la proposición 11 del libro I de las *Cónicas*. Dicha proposición enuncia lo siguiente:

Proposición 11, libro 1, Sea  $\overline{PM}$  el diámetro de la sección, trazado paralelo al lado  $\overline{AC}$  del triángulo axial, y sea  $\overline{Q\bar{V}}$  cualquier ordenada a  $\overline{PM}$ . Entonces, si una recta  $\overline{PL}$  perpendicular a  $\overline{PM}$  se traza de longitud tal que  $\frac{\overline{PL}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BA} \overline{AC}}$ , entonces esto prueba que  $\overline{Q\bar{V}^2} = \overline{PL} \cdot \overline{P\bar{V}}$

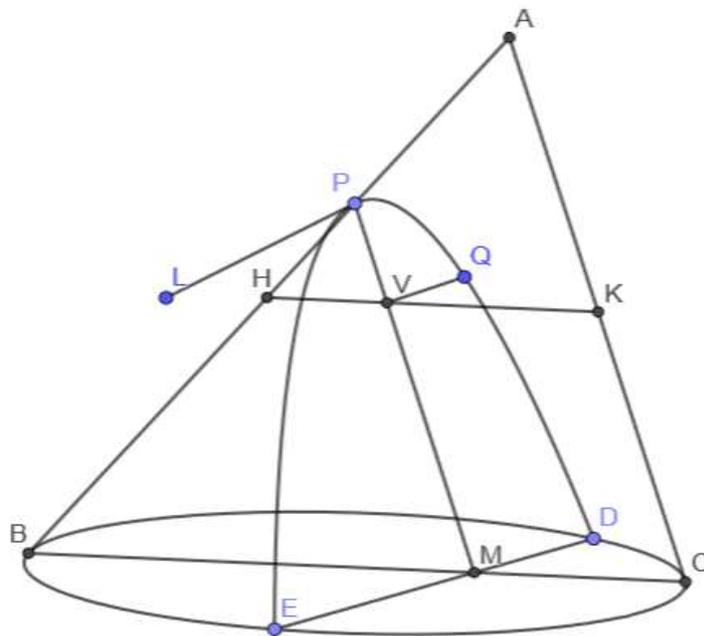


Fig. 3.5

Esta caracterización no favorece el trabajo de identificación de una curva si esta curva la observamos en un dibujo o cuadro pictórico, y por ello hay que utilizar otros resultados que den pie a una metodología que permita dilucidar si una curva dada representa o no una parábola. Esto es lo que se hará en el resto de este capítulo.

### Elementos Geométricos para identificar una parábola

Para alcanzar criterios que permitan identificar como parábola a una curva trazada sobre un plano se presentarán a continuación algunos resultados. Apolonio explica en la proposición 29 de su libro II la manera de trazar un diámetro a una sección cónica empleando rectas tangentes que se cruzan. Dicha proposición se reproduce a continuación.

Proposición 29, Libro II, *Dadas dos tangentes a una cónica  $\overline{TQ}$  y  $\overline{TQ'}$  –con Q y Q' en la cónica y T el punto de intersección de las tangentes–, si V es el punto medio de la cuerda definida por  $\overline{QQ'}$ , entonces  $\overline{TV}$  es el diámetro de la cónica.* (Fig 3.6)

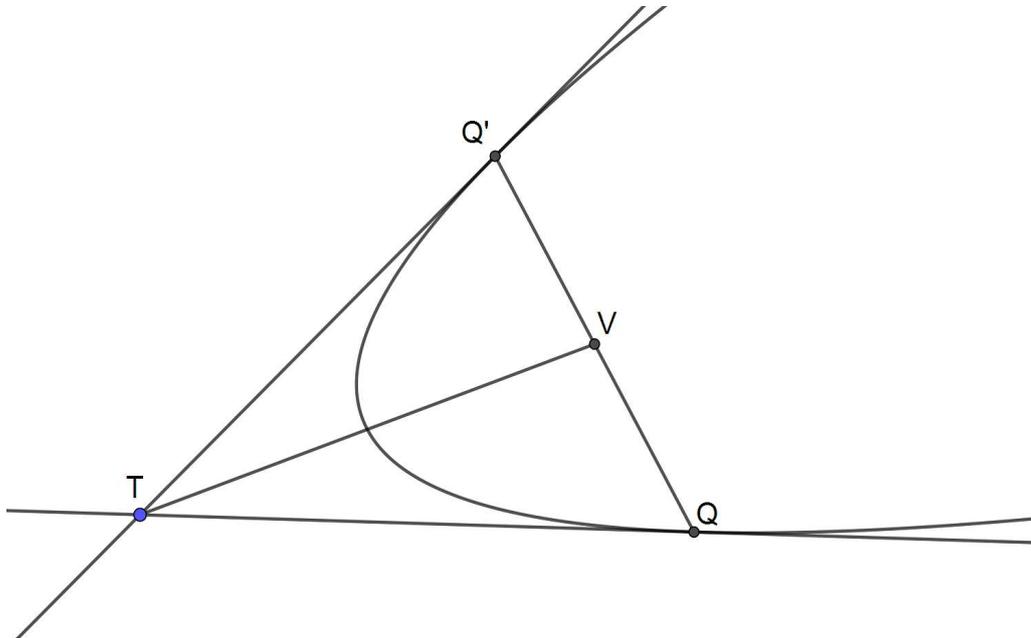


Fig. 3.6

Suponga que  $\overline{TV}$  no es el diámetro de la cónica (Fig. 3.7). Sea pues  $\overline{VE}$  un diámetro que toca a  $\overline{TQ'}$  en E, con  $E \neq T$ . Una E con Q y marque como R el punto donde  $\overline{EQ}$  corte a la curva. Dibuje ahora la cuerda  $\overline{RR'}$  paralela a  $\overline{QQ'}$  y que toca a  $\overline{EV}$  y  $\overline{EQ'}$  en K y H respectivamente.

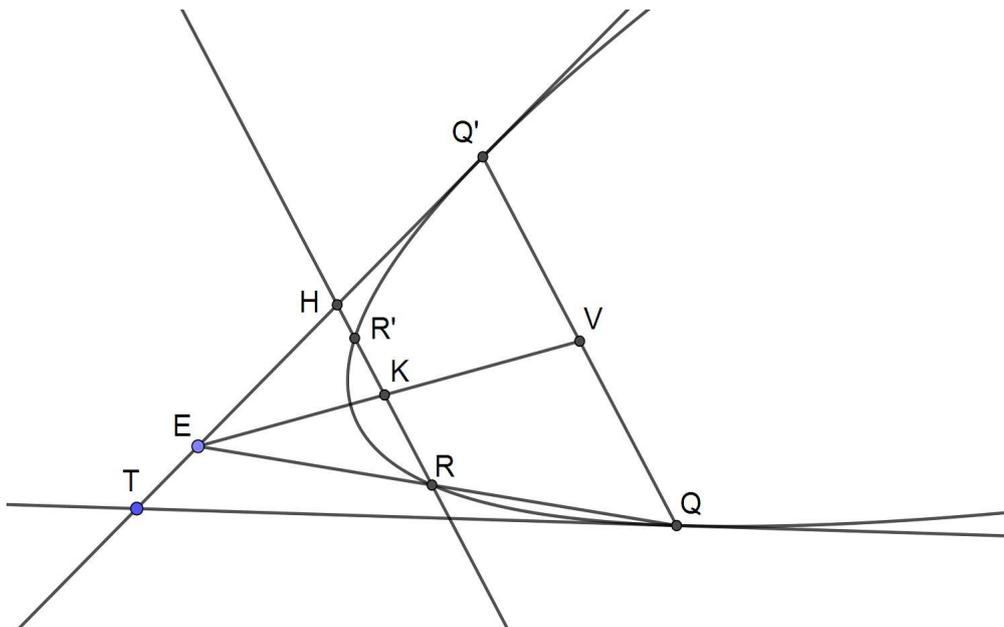


Fig. 3.7

Entonces, puesto que  $\overline{RH}$  es paralela a  $\overline{QQ'}$ , y además  $\overline{QV} = \overline{Q'V}$ , se tiene que  $\overline{RK} = \overline{KH}$ . Además, como  $\overline{RR'}$  es una cuerda paralela a  $\overline{QQ'}$  y bisecada por el diámetro  $\overline{EV}$  –por definición de diámetro–, entonces  $\overline{RK} = \overline{KR'}$ . Por lo tanto,  $\overline{KR'} = \overline{KH}$ , lo cual es imposible, y por tanto,  $\overline{EV}$  no es un diámetro. En sentido opuesto, el diámetro de una cónica dibujado a partir del punto  $T = \overline{TQ} \cap \overline{TQ'}$  –esto es, la intersección de las tangentes– biseca a la cuerda de contacto  $\overline{QQ'}$ . (Fig. 3.7)

Respecto del diámetro y la ordenada, una característica de la parábola que vale la pena destacar, y que se deduce empleando las definiciones, aparece en la proposición 35 del libro I. Se enuncia de la siguiente manera:

Sea  $\overline{TQ}$  una tangente a una parábola tal que  $\overline{TQ}$  corta al diámetro en  $T$ , con  $T$  fuera de la sección. La ordenada desde el punto de tangencia  $Q$  cortará al diámetro en  $V$  de tal manera que  $\overline{TB} = \overline{BV}$ , siendo  $B$  el punto donde el diámetro corta a la parábola (Fig. 3.8)

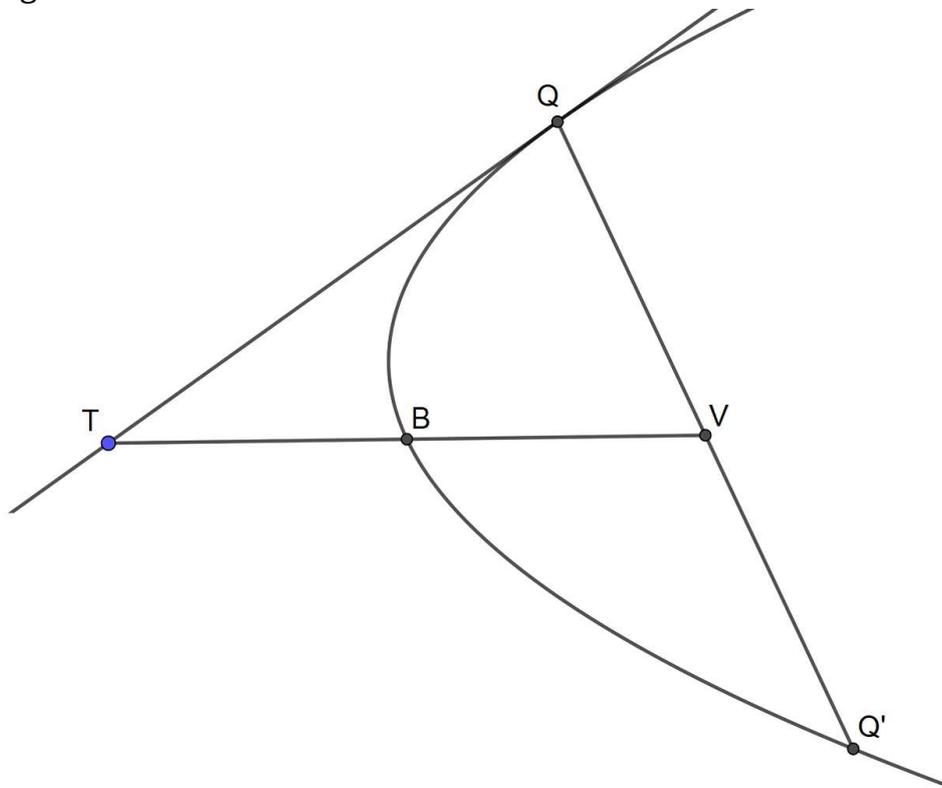


Fig. 3.8

Para mostrar que así sucede, suponga que no ocurre así, es decir, que  $\overline{TB} \neq \overline{BV}$  (Fig. 3.9) Construya  $K$  de tal manera que  $\overline{TB} = \overline{BK}$  y levante la ordenada desde  $K$  hasta cortar la parábola en  $R$ , con  $R \neq Q$  ya que  $K \neq V$ , y  $Q$  y  $R$  se obtienen como el corte con la parábola de las ordenadas por  $K$  y por  $V$ . Al unir  $T$  con  $R$  se aprecia que, si bien  $\overline{TR}$  sí corta al diámetro fuera de la sección, resulta que no es una tangente, pues el punto de tangencia  $Q$  de la recta que pasa por  $T$  es único.

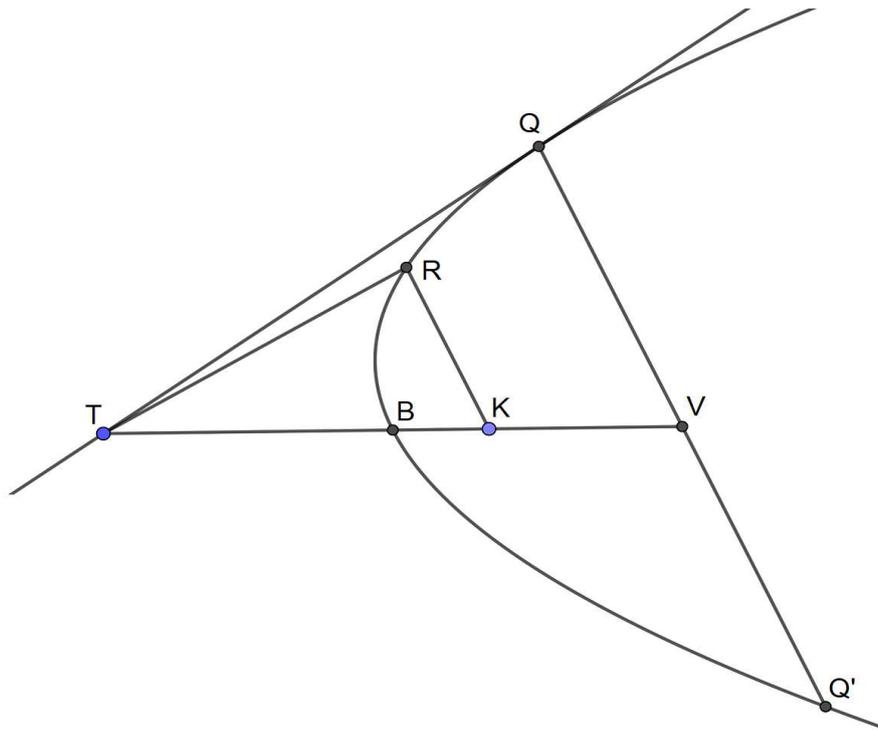


Fig. 3.9

### Lugar Geométrico de una Parábola a Partir de Rectas Tangentes

Las proposiciones 41, 42 y 43 del Libro III de Apolonio hablan sobre cómo describir una cónica a partir de sus tangentes; y así lo hace para la parábola, la elipse y la hipérbola respectivamente. La proposición que resulta de interés para este trabajo es precisamente la proposición 41, que se refiere a parábolas.

La proposición 41 del libro III de Apolonio, reescrita en estilo moderno, enuncia: *Si las tangentes a una parábola en los puntos P, Q, R forman un triángulo pqr, las tres tangentes están divididas en la misma proporción, a saber (ver Fig 3.10):*

$$\overline{Pr} : \overline{rQ} = \overline{rQ} : \overline{Qp} = \overline{qp} : \overline{pR}$$

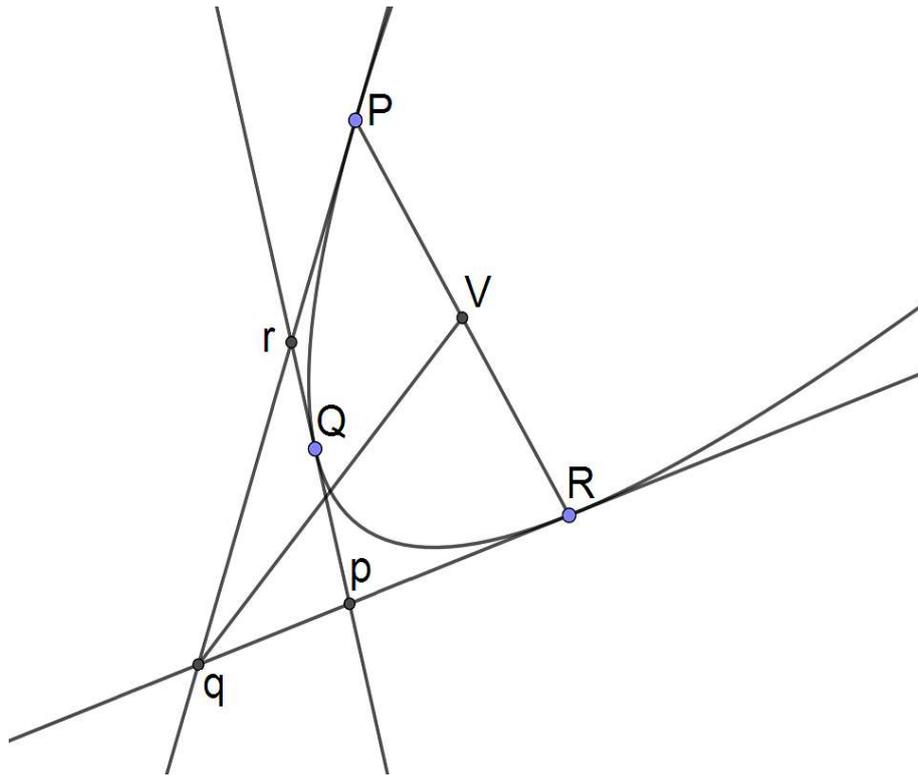


Fig. 3.10

Trace una recta  $l$ , paralela a  $\overline{qV}$  y que pase por  $Q$  (Fig. 3.11). Por construcción,  $l$  resulta ser también un diámetro (Proposición 29, Libro II).

Llámense ahora  $T=l \cap \overline{Pq}$ ,  $T'=l \cap \overline{qR}$  y  $O=l \cap \overline{PR}$ . (Fig. 3.11)

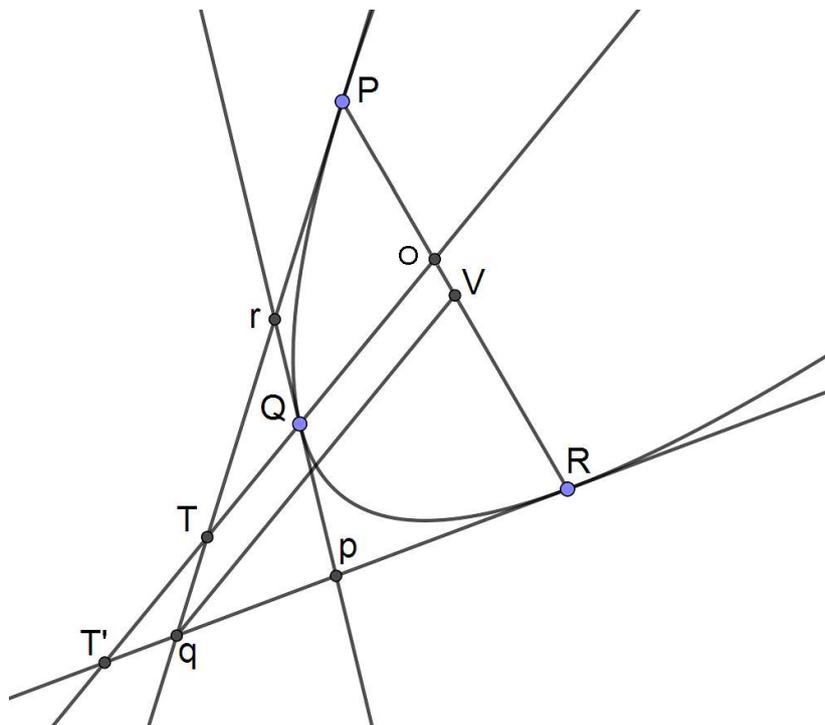


Fig. 3.11

Dibuje las rectas  $\overline{PP'}$  y  $\overline{R'R}$ , paralelas a  $\overline{pr}$ . Construidas así, las ordenadas  $\overline{PU}$  y  $\overline{RW}$  por  $U$  y  $W$  respectivamente, resultan ser rectas paralelas a  $\overline{pr}$  (Fig. 3.12).

Si  $\overline{qV}$  pasase por  $Q$ , entonces dicha recta cortaría de forma simétrica a la parábola y las proporciones que se buscan determinar, esto es  $\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}}$ ,  $\frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}}$  y  $\frac{\overline{qp}}{\overline{pR}}$  resultan iguales trivialmente.

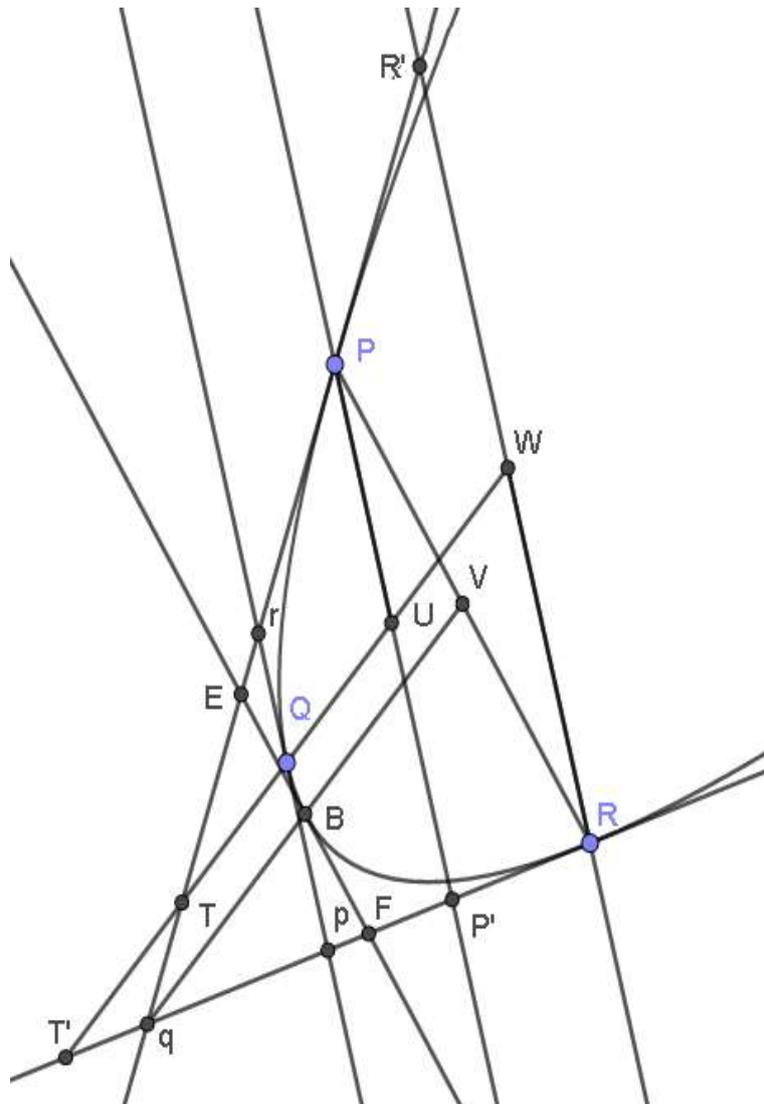


Fig. 3.12

En caso contrario, márchese como  $B$  el punto donde la recta  $\overline{qV}$  corta a la parábola y trace una tangente  $\overline{EBF}$  por dicho punto. Por propiedades de las tangentes (Proposición 35 del libro I de Apolonio) se tiene que

$$\overline{TQ} = \overline{QU}, \quad \overline{T'Q} = \overline{QW} \quad \text{y} \quad \overline{qB} = \overline{BV},$$

mientras que gracias a las paralelas  $\overline{T'W}$  y  $\overline{qV}$  se tiene que

$$\overline{Pr} = \overline{rT}, \quad \overline{T'p} = \overline{pR} \quad \text{y} \quad \overline{qF} = \overline{FR}.$$

$\overline{qV}$  está trazado tal que funge como un lado de  $\Delta PqV$  y al mismo tiempo de  $\Delta VqR$ . Entonces también se cumple que

$$\overline{qE} = \overline{EP}$$

además, como  $\overline{PT} = \overline{Pr} + \overline{rT}$  y  $\overline{qP} = \overline{qE} + \overline{EP}$ , se cumple la relación

$$\overline{rP} : \overline{PT} = \overline{EP} : \overline{Pq} = 1 : 2$$

Dicha relación se mantiene si se intercambian antecedentes, es decir, despejando:

$$\frac{\overline{rP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{TP}}{\overline{Pq}}$$

y nuevamente, por proporcionalidad de los triángulos  $\Delta PTO$  y  $\Delta PqV$  se tiene

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{Pq}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PV}}$$

por proporcionalidad entre  $\Delta PqR$  y  $\Delta PqV$  se tiene

$$\frac{\overline{rP}}{\overline{Pq}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PR}},$$

y con un despeje sencillo y sabiendo que  $\overline{Pq} = \overline{Pr} + \overline{rq}$  y  $\overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR}$ :

$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{OR}} \quad \text{-----} \quad (1)$$

Luego, como  $\overline{rp} \parallel \overline{PU} \parallel \overline{RW}$  se tiene

$$\frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{RW}}$$

La relación 1 a 2 se cumple también sobre  $\Delta rTQ$  y  $\Delta PTU$ , así también sobre  $\Delta T'WR$  y  $\Delta T'Qp$ . De aquí surge que  $\overline{PU} = 2\overline{rQ}$ , y  $\overline{RW} = 2\overline{pQ}$ .

Luego, de  $\Delta OPU$  y  $\Delta ORW$  se tiene que

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{RW}}$$

Y por tanto,

$$\frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{OR}} \quad \text{-----} \quad (2)$$

Y de  $\Delta T'WR$  y  $\Delta qVR$ , se tiene

$$\frac{\overline{FR}}{\overline{Rq}} = \frac{\overline{1}}{\overline{2}} = \frac{\overline{pR}}{\overline{RT'}}$$

o bien, intercambiando antecedentes

$$\frac{\overline{FR}}{\overline{Rp}} = \frac{\overline{qR}}{\overline{RT'}}$$

y a su vez con  $\Delta T'WR$  y  $\Delta T'OR$ , se obtiene

$$\frac{\overline{qR}}{\overline{RT'}} = \frac{\overline{VR}}{\overline{RO}}$$

Ahora, ubique  $\Delta qRP$  y  $\Delta pRO$  en 3.12. De dichos triángulos se tiene que

$$\frac{\overline{qR}}{\overline{Rp}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RO}}$$

Y como

$$\overline{qR} = \overline{qp} + \overline{pR} \quad \overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR}$$

se tiene que

$$\frac{\overline{qp}}{\overline{pR}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{OR}} \quad \text{-----} \quad (3)$$

Finalmente, de (1), (2) y (3) se sigue que

$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = \frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = \frac{\overline{qp}}{\overline{pR}}$$

En otro tratado de Apolonio, *De Sectione Rationis*, se menciona la manera de encontrar cualquier cantidad de tangentes a una cónica, dadas dos de ellas. En particular, para el caso de la parábola se tiene que, dadas dos tangentes  $\overline{qP}$  y  $\overline{qR}$ , y los puntos de contacto con la parábola,  $P$  y  $R$  respectivamente, se busca trazar una línea recta  $\overline{rp}$  tal que

$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = \frac{\overline{qp}}{\overline{pR}}$$

o bien

$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{Pq}} = \frac{\overline{qp}}{\overline{qR}}$$

De esta última igualdad resulta que la relación

$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{qp}} = \frac{\overline{Pq}}{\overline{qR}}$$

debe mantenerse constante. Este resultado, como veremos a continuación, resulta muy relevante para determinar si una curva es o no es una parábola.

### **Trazado de una parábola en perspectiva**

Una vez que se ha presentado un método para trazar rectas tangentes a parábolas, acorde con las prácticas y los textos disponibles en la segunda mitad del siglo XV, y mencionado una manera de encontrar cualesquier cantidad de tangentes a una curva, adquiere sentido preguntarse si las curvas presentadas en los grabados del citado periodo son parábolas trazadas en perspectiva, si fueron trazadas siguiendo alguna metodología o si simplemente se trazaron a mano alzada curvas que semejan lo que captaba un observador de un objeto lanzado al aire en una trayectoria diferente a la vertical.

En la Proposición 54 del Libro III de Apolonio se menciona que con dos rectas tangentes  $\overline{qP}$  y  $\overline{qR}$  fungiendo como envolventes a una parábola (Refiriéndose a la fig. 3.12), y un punto Q sobre la mencionada curva, dicho punto es empleado para encontrar una tercera recta que es tangente a la parábola en otro punto B (Refiérase a Q y B en Fig. 3.12 también). La proposición 41 del libro III supone la mencionada tangente en B ya determinada -aunque no necesariamente fija-. A partir de cualquiera de las dos proposiciones es posible encontrar tres puntos del lugar geométrico de una parábola. Sin embargo, quizás tres puntos del lugar geométrico no sean suficientes para trazar una parábola. Una solución simple sería dejar fijas las dos tangentes que menciona la proposición 54 y variar la recta tangente al interior de las envolventes de modo que se respete la proporción mencionada en la proposición 41 y así ir generando más puntos que pertenezcan al lugar geométrico de la parábola.

Ya existe en la actualidad una metodología similar aunque es relativamente moderna. Fue ideada por Pierre Bézier en 1960, a su vez, como aplicación de los polinomios de Bernstein, mismos que se conocen desde 1912. Originalmente Bézier empleó sus *Curvas de Bézier* para hacer diseños en los coches de la compañía Renault; sin embargo su metodología se popularizó y se emplea actualmente en cómputo gráfico para dibujar curvas de orden superior y *Splines*, o *Caminos*, mismos que pueden ser tan sinuosos como el grado del polinomio que les describe.

En lo que respecta a este trabajo es interesante exhibir que se puede ofrecer respuesta al problema con los elementos disponibles desde la época de Apolonio, y que para fines del siglo XVI ya circulaban en los círculos académicos europeos. En nuestro caso concreto se trata de trazar parábolas tal y como serían percibidas desde distintos puntos de vista, es decir, una vez hecho el trazo de una parábola sobre una superficie, ¿cómo se vería desde diferentes posiciones del observador?

La metodología propuesta para trazar parábolas en perspectiva se presenta a continuación:

Dibuje dos rectas no paralelas. Prolongue las rectas hasta que se corten en un punto  $q$ . Estas rectas serán las envolventes de la parábola. Trace una recta  $\overline{rp}$  tal que corte a las dos rectas concurrentes del paso anterior.

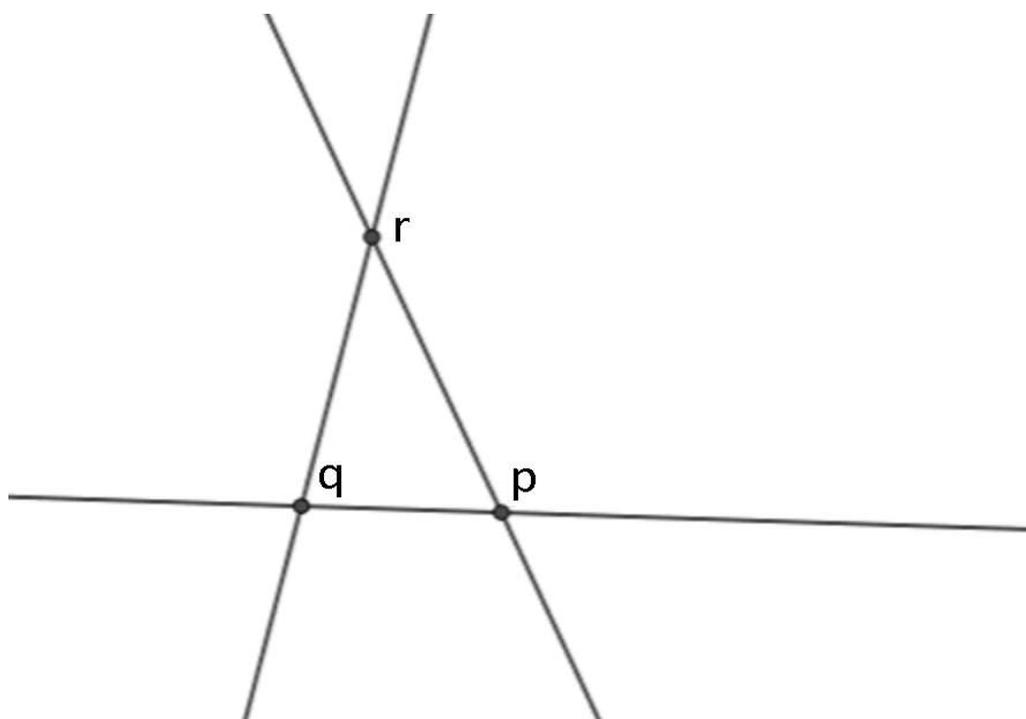


Fig. 3.13

Ahora marque dos puntos  $P$  y  $R$ , y uno más,  $Q \in \overline{rp}$ , tales que cumplan la proporción referida en la proposición 41, Libro III, esto es:  $\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = \frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = \frac{\overline{qp}}{\overline{pR}}$

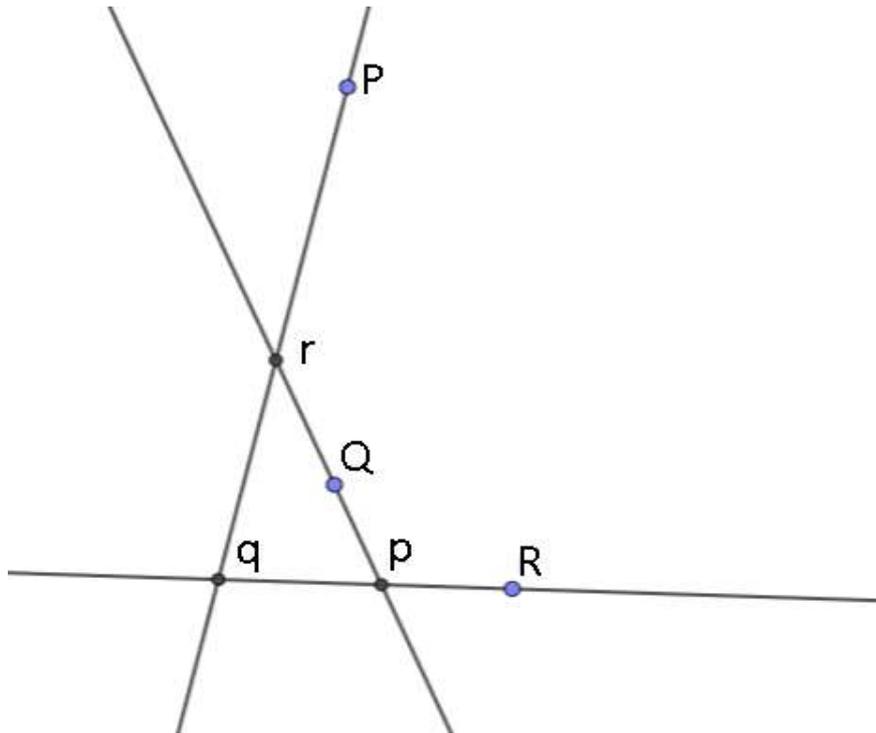


Fig. 3.14

Construido así, el punto Q estará en una recta que también es tangente a la parábola que pasase por P y R.

Si se repite esta operación, fijadas las rectas  $\overline{Pq}$  y  $\overline{qR}$  es posible encontrar una cantidad de puntos suficientes como para trazar una parábola correctamente moviendo  $r$  y  $p$  a lo largo de las rectas (lo cual afectará la posición de Q) con la condición de que se conserve la proporción de la proposición 41-III. A mayor cantidad de puntos Q localizados mientras se mueve  $\overline{rp}$ , considerándola una recta rígida cuyos ejes son  $\overline{Pq}$  y  $\overline{qR}$ , mayor resolución tendrá la parábola. (Fig. 3.15)

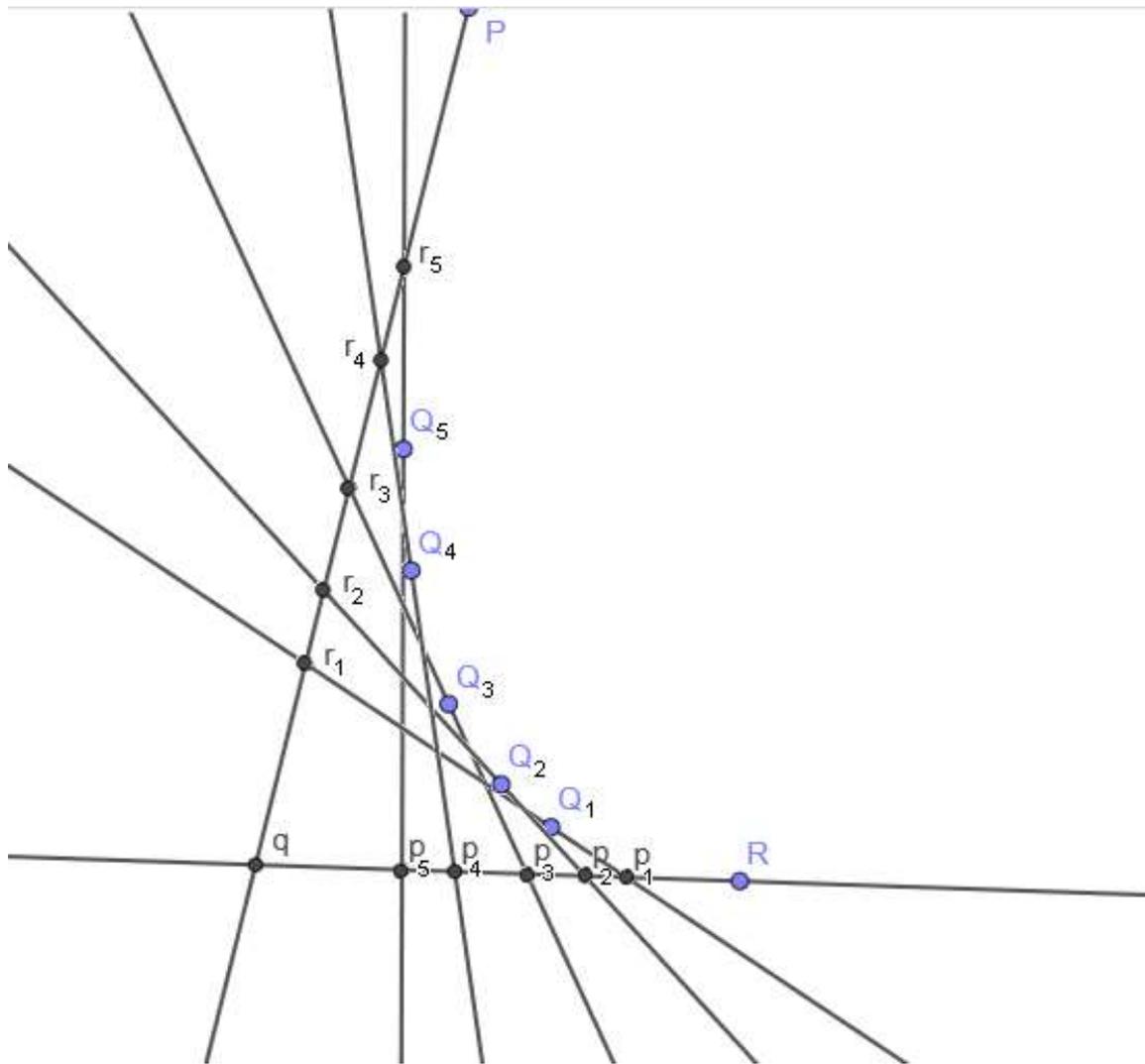


Fig. 3.15

Una vez determinada una cantidad suficiente de puntos que caen en el lugar geométrico de la parábola se procede a proyectar dichos puntos en un plano degradado empleando la metodología de Piero della Francesca presentada en el capítulo 2. (Fig. 3.16, 3.17 y 3.18) La corrección de aspecto -reflexión- presentada en la fig. 3.18 fue hecha gracias a un programa de cómputo.

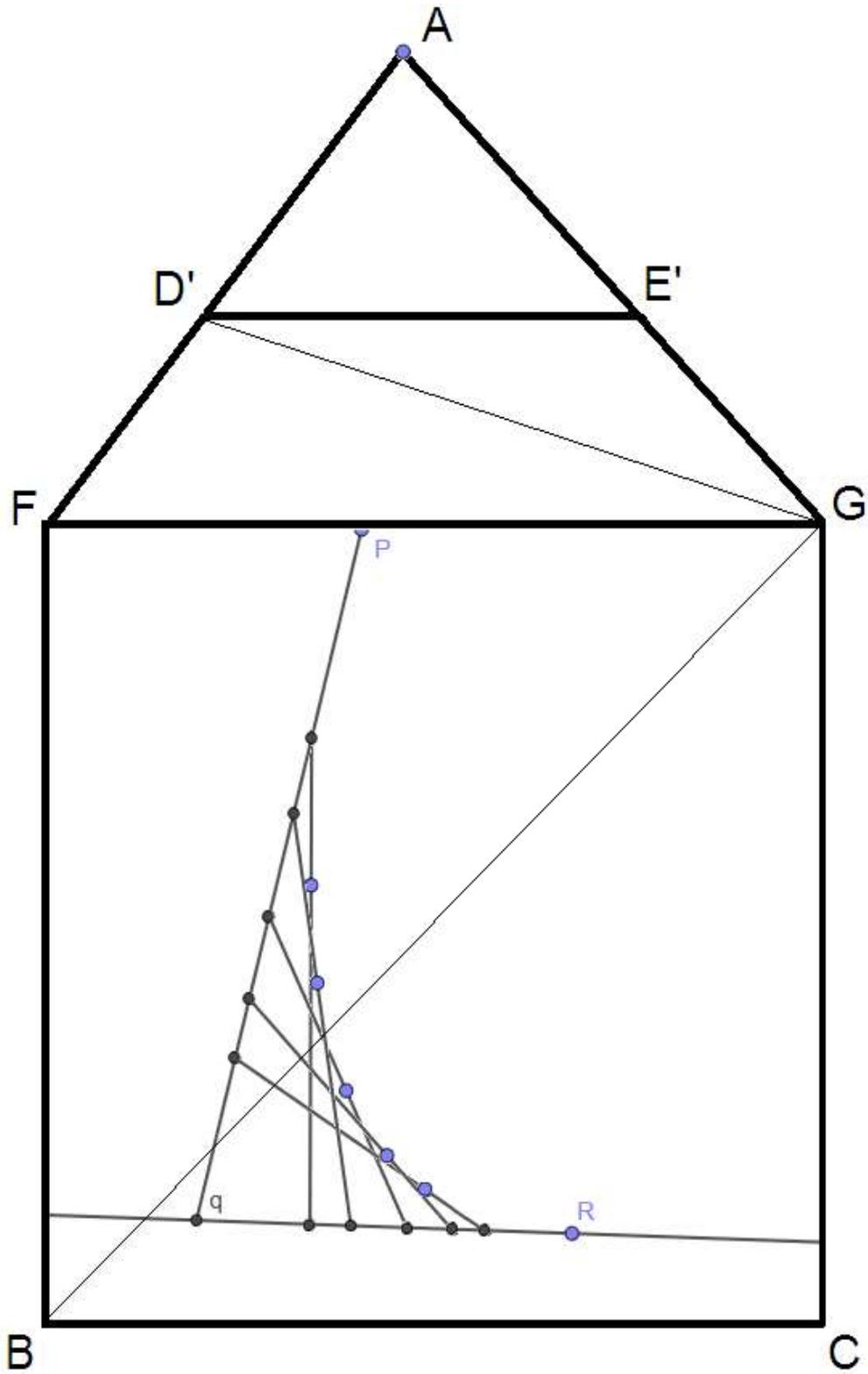


Fig 3.16

Parábola construida siguiendo la metodología basada en las proposiciones 41 y 54, libro III, de las *Cónicas* de Apolonio

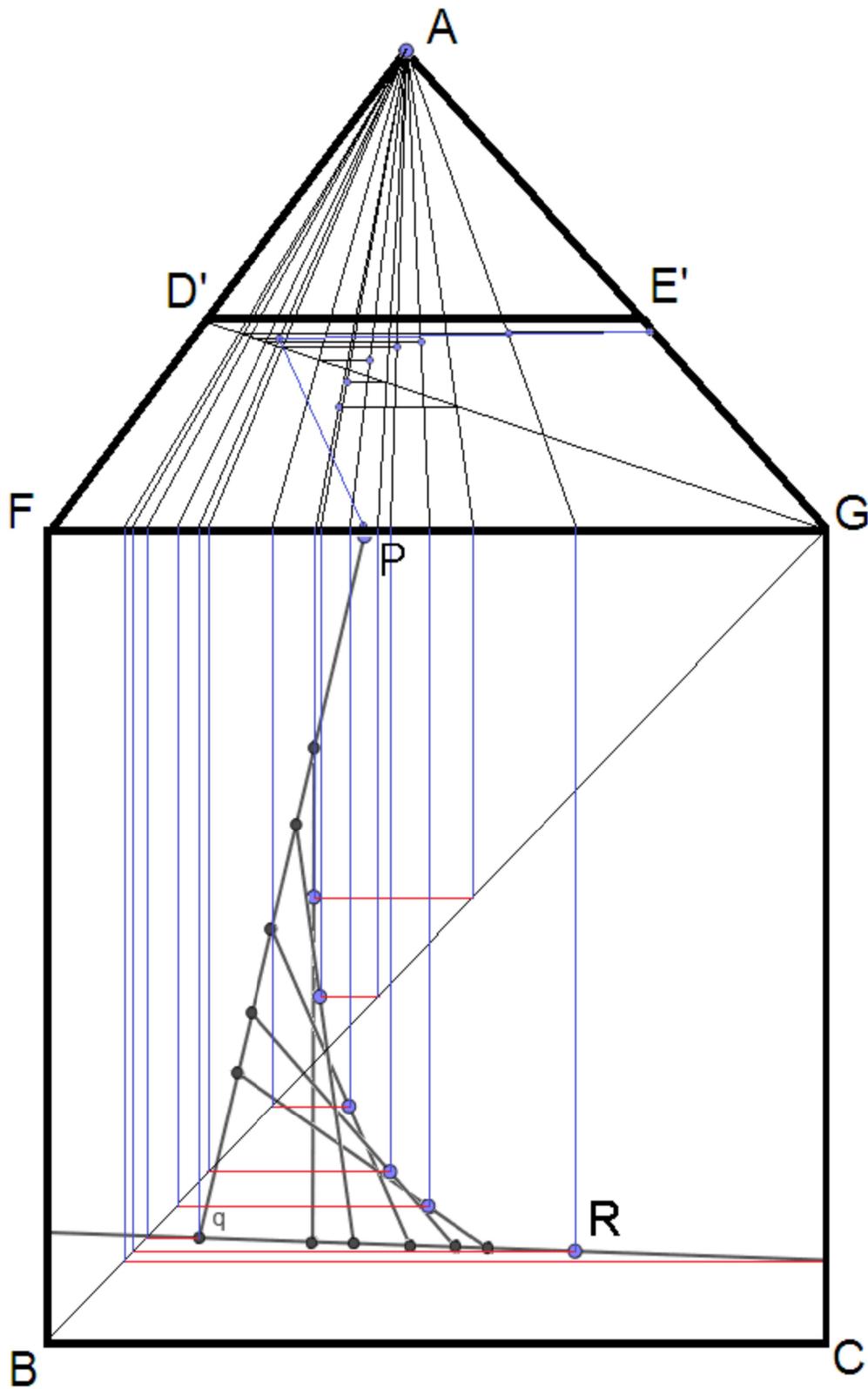


Fig. 3.17

Enmarcada en FD'E'G aparece la parábola degradada según el método de Piero della Francesca

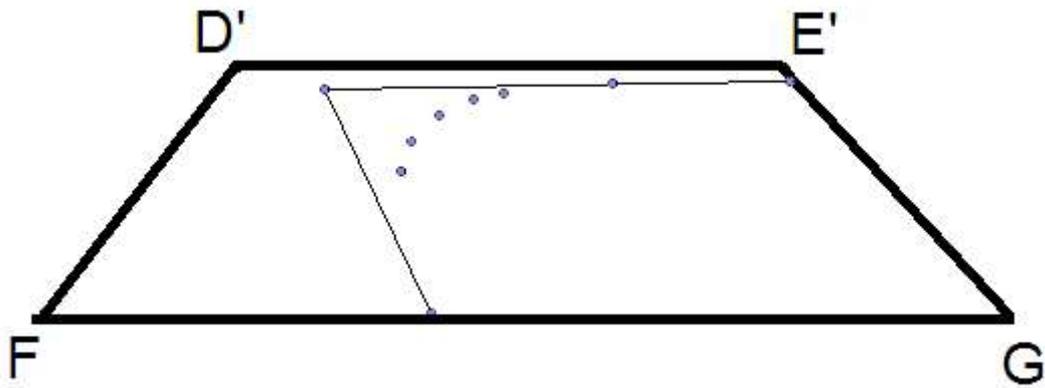


Fig 3.18 (a)

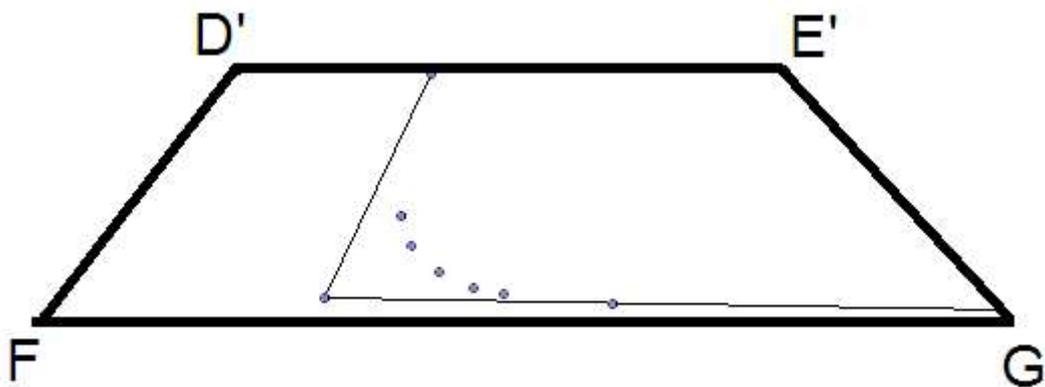


Fig.3.18 (b)

En (b) se muestra la reflexión de la parábola presentada en (a)

Para analizar una parábola que presuntamente se dibujó en un plano degradado es necesario recordar que *degradar* una imagen -una *Perspectividad*, como en la actualidad se conoce- no es una transformación rígida. Por lo tanto no se podría asegurar que las proporciones de la parábola original se preservan al degradar una imagen y si esto sucedía se perdía la proporción de la proposición 41-III.

En el caso de la geometría Euclidiana, nos son familiares los conceptos de *invariantes* bajo determinadas transformaciones. Si pensamos en las transformaciones dadas por rotación y por traslación, los invariantes mas importantes son distancias y ángulos. Para las transformaciones proyectivas, como resulta ser el caso de nuestro *degradado* de imágenes, un invariante fundamental resulta ser la *razón cruzada*.

## Razón cruzada

(Brady, 2017) Defínase una *razón* como la relación que existe respecto de tres puntos colineales distintos entre sí,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tales que

$$(A, B; C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = k_0$$

donde  $k_0$  es un real positivo si  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  están dirigidas en la misma dirección, negativo en caso contrario.

La *razón cruzada* se define entre cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  sobre una recta, distintos entre si, como

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)} = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}}{\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}} = \frac{\overline{AC} \times \overline{DB}}{\overline{AD} \times \overline{CB}}$$

Por principio de dualidad, es posible definir la razón cruzada entre cuatro rectas  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{PC}$ ,  $\overline{PD}$ , distintas entre si, que pasan por un punto  $P$ , como

$$(\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC}, \overline{PD}) = \frac{(\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC})}{(\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PD})} = \frac{\frac{\frac{\text{sen } \angle \overline{PA} \overline{PC}}{\overline{PC}}}{\frac{\text{sen } \angle \overline{PC} \overline{PB}}{\overline{PB}}}}{\frac{\frac{\text{sen } \angle \overline{PA} \overline{PD}}{\overline{PD}}}{\frac{\text{sen } \angle \overline{PD} \overline{PB}}{\overline{PB}}}}$$

Si se traza una recta  $l$  que corte al haz de rectas  $(\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC}, \overline{PD})$  y se marcan los puntos de corte como  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $D'$ , (Fig. 3.19) entonces es posible conectar las versiones de razones cruzadas entre puntos y rectas simplemente como

$$(A, B; C, D) = (\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC}, \overline{PD}) = (A', B'; C', D')$$

o abreviando notación

$$(A, B; C, D) \stackrel{P}{=} (A', B'; C', D')$$

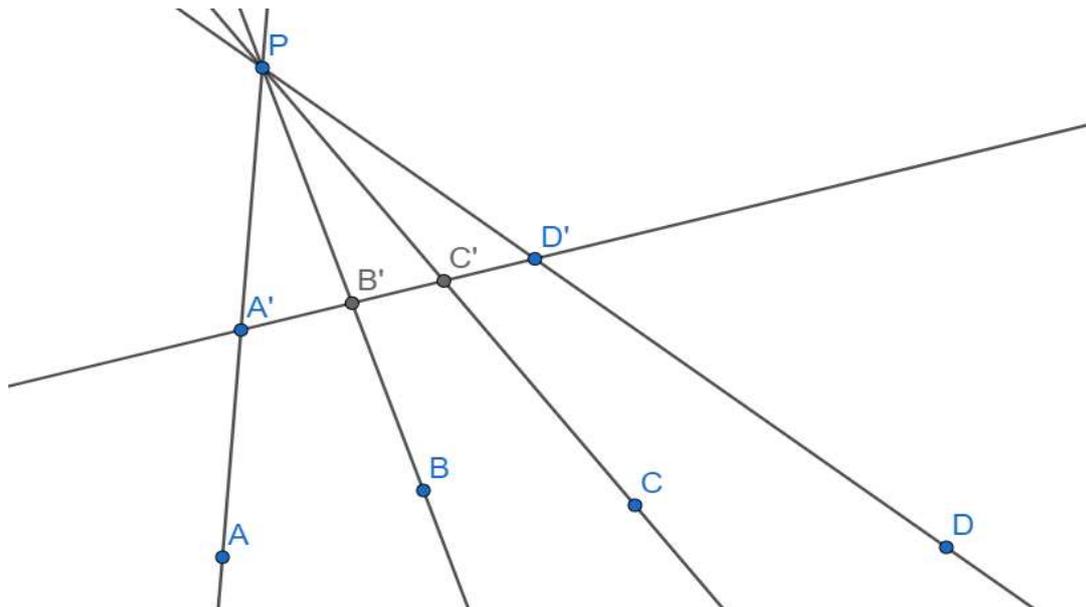


Fig. 3.19

Finalmente, el *Teorema Fundamental de la Razón Cruzada* (TFRC) cita lo siguiente:

Sean  $A, B, C$  y  $D$  cuatro puntos sobre una recta y distintos entre si. Sea  $E$  un punto que no está sobre la recta. Entonces se cumple que

$$(\overline{EA}, \overline{EB}; \overline{EC}, \overline{ED}) = (A, B; C, D)$$

### Razón cruzada sobre una cónica

(Brady, 2017) Considere ahora cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$ , esta vez sobre una circunferencia  $\omega$  (Fig. 3.20). Suponga que los arcos dirigidos  $\widehat{AC}, \widehat{CB}, \widehat{BD}, \widehat{DA}$  de  $\omega$  tienen ángulos de tamaños  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ .

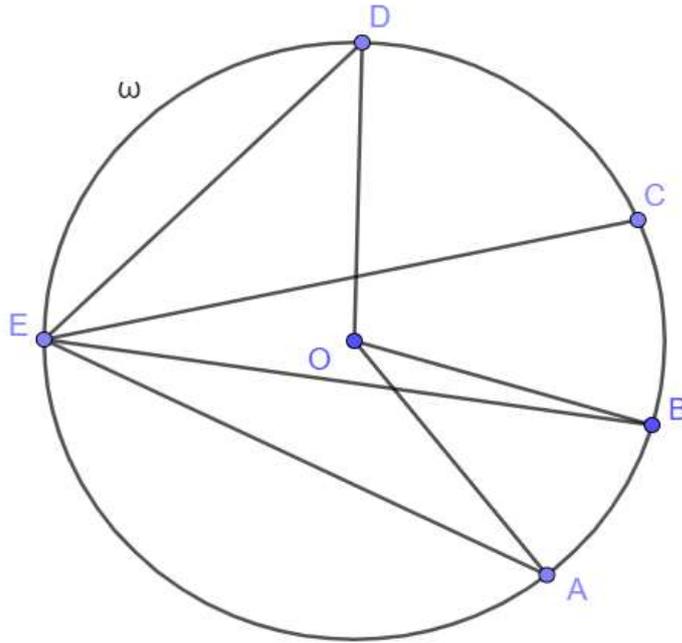


Fig 3.20

Sea  $E$  otro punto sobre  $\omega$  Entonces

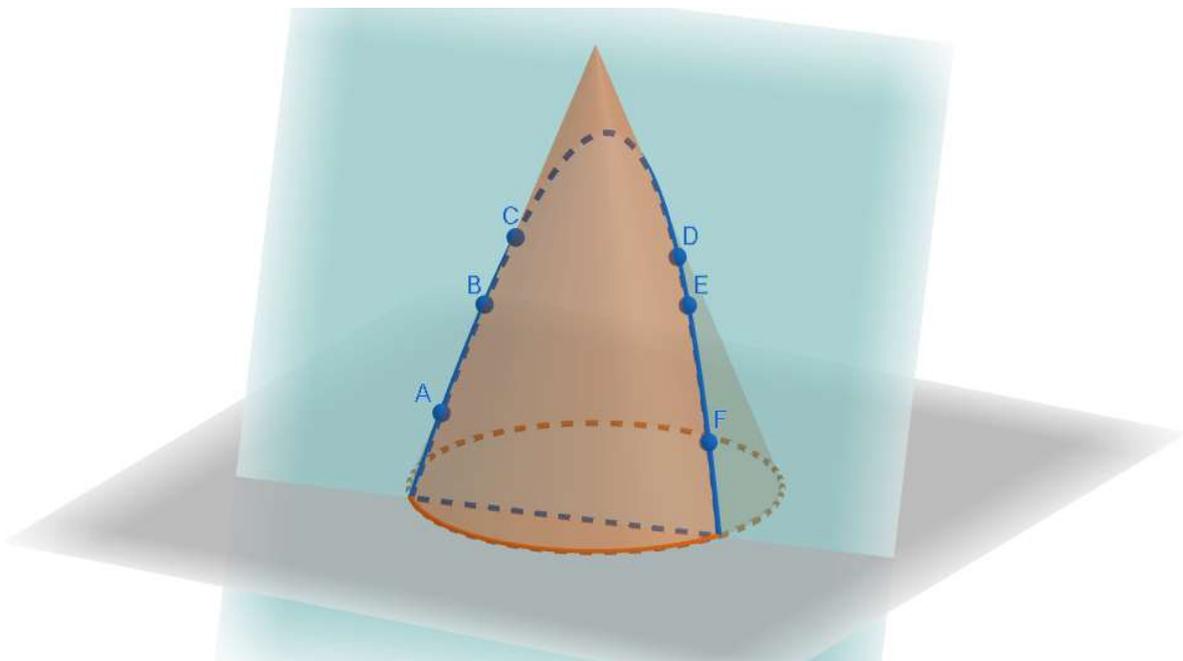
$$(\overline{EA}, \overline{EB}; \overline{EC}, \overline{ED}) = -\frac{\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}}{\frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \gamma}}$$

y por el teorema fundamental de la razón cruzada, se puede escribir como

$$(\overline{EA}, \overline{EB}; \overline{EC}, \overline{ED}) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{AD} \times \overline{BC}}$$

De esto resulta que la razón cruzada es invariante, independientemente de la posición del punto  $E$ . Basta con que se encuentre sobre el círculo  $\omega$

Para el caso de una cónica cualesquiera  $\Omega$  se procede de la siguiente manera. Recordar



que toda cónica es resultado de la intersección de un plano  $p$  con un cono  $C$ . En este caso, habremos de considerar también el punto desde donde el observador ve la cónica, mismo que habremos de etiquetarlo como  $O$ . Considere seis puntos  $A, B, C, D, E$  y  $F$  sobre la cónica  $\omega$  que en este caso será una parábola. (Fig. 3.21)

Fig. 3.21

Suponga ahora un segundo plano  $p'$ , tal que al cortar a  $C$  produzca un círculo  $\omega'$ . Sean  $A', B', C', D'$  y  $E'$  las intersecciones de las rectas  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}$  con el plano  $p'$ . (Fig. 3.22)

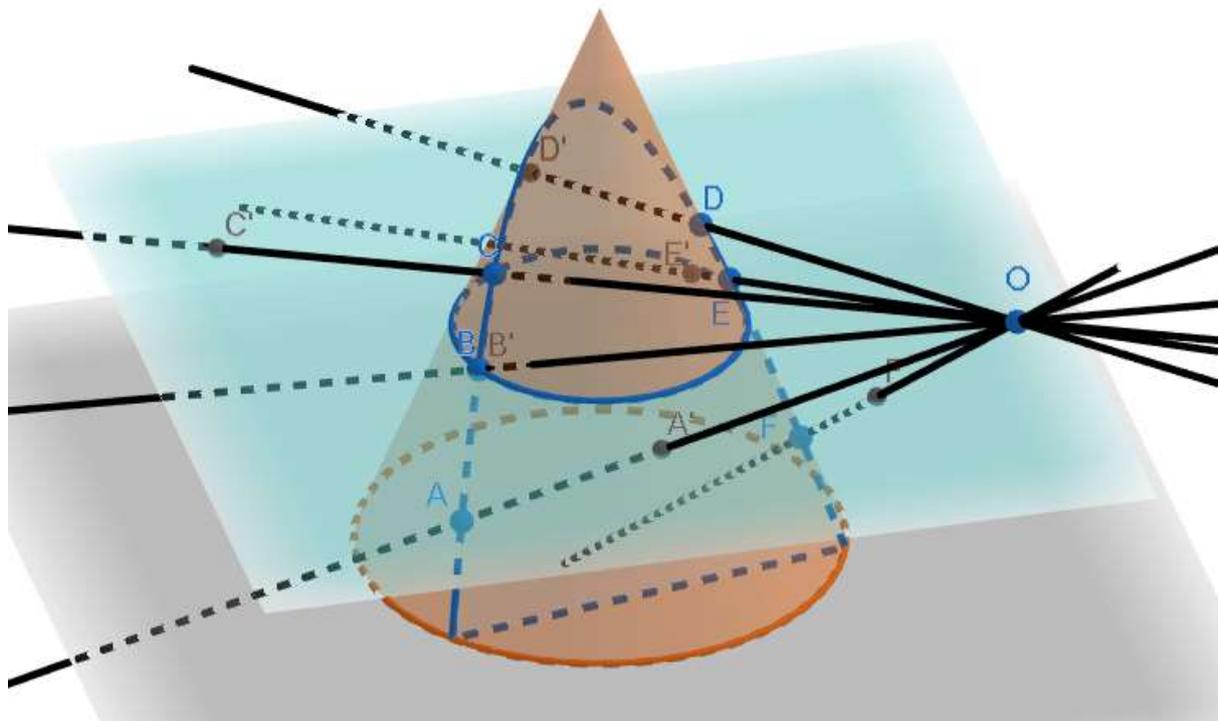


Fig. 3.22

Luego, respecto de  $O$  se cumple la razón cruzada

$$(\overline{EA}, \overline{EB}; \overline{EC}, \overline{ED}) \stackrel{O}{=} (\overline{E'A'}, \overline{E'B'}; \overline{E'C'}, \overline{E'D'})$$

y análogamente,

$$(\overline{FA}, \overline{FB}; \overline{FC}, \overline{FD}) \stackrel{O}{=} (\overline{F'A'}, \overline{F'B'}; \overline{F'C'}, \overline{F'D'})$$

Esto gracias al corte que provoca el plano  $p'$  sobre el haz de rectas por  $O$

Ahora, sobre el plano  $p'$  se encuentran todos los puntos  $\{A', B', C', D', E', F'\}$  y el círculo  $\omega'$ . Basta con trazar tangentes a  $\omega'$  desde  $\{A', B', C', D'\}$  (Fig. 3.24), determinar los puntos de tangencia sobre  $\omega'$  y mostrar que estos puntos también determinan una razón cruzada, justamente como se hizo al principio de este apartado.

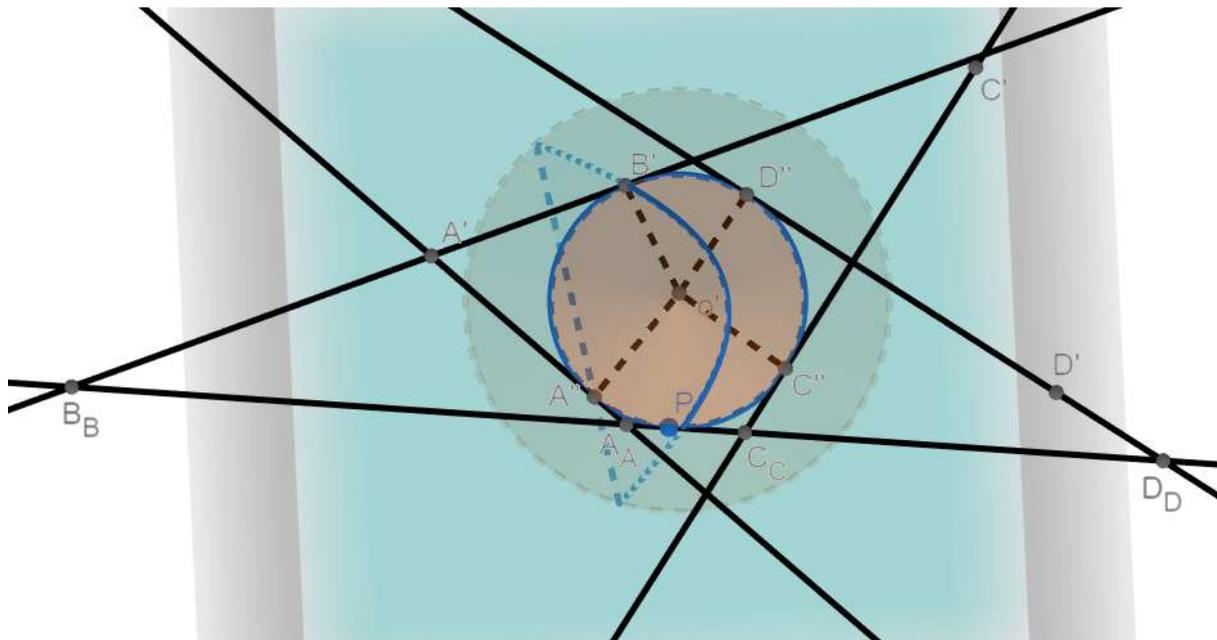


Fig. 3.23

Finalmente, por el Teorema Fundamental de la Razón cruzada, se tiene que

$$(E'A', E'B'; E'C', E'D') = (A', B'; C', D') = (F'A', F'B'; F'C', F'D')$$

Debido a lo anterior, la razón cruzada sobre cualquier cónica  $\Omega$  tampoco depende de la elección del quinto punto. Entonces es posible establecer la siguiente definición:

Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos sobre una cónica  $\Omega$ . La razón cruzada sobre  $\Omega$  eligiendo un quinto punto  $E$ , estará dada por

$$(A, B; C, D)_{\Omega} = (EA, EB; EC, ED)$$

Esto muestra que sin importar el punto  $E$ , que entonces es arbitrario –debido al (TFRC)–, y como tampoco importa la ubicación del punto de vista  $O$ , se puede concluir que la razón cruzada cumple con ser un invariante, independientemente del punto de vista respecto del cual se está degradando la cónica.

El resultado anterior sustenta que, incluso si la parábola está degradada, ésta se puede identificar como tal, es decir, que es posible determinar si un determinado conjunto de puntos es parte del lugar geométrico correspondiente a una parábola. Entonces es posible aplicar 41-III (sobre las proporciones en que se dividen las 3 tangentes a una parábola. Ver pág 63 de esta tesis) *directamente* sobre la parábola degradada y ver si la proporción se cumple como ocurre en la proposición original.

### Aplicación de la Proposición de Apolonio a una parábola en perspectiva

Considere la siguiente parábola, misma que fue reconstruida empleando el programa de cómputo Geogebra a partir del grupo de puntos que fueron determinados en la figura 3.18, y que corresponde a la versión *degradada* de la Fig. 3.16. (Fig. 3.26)

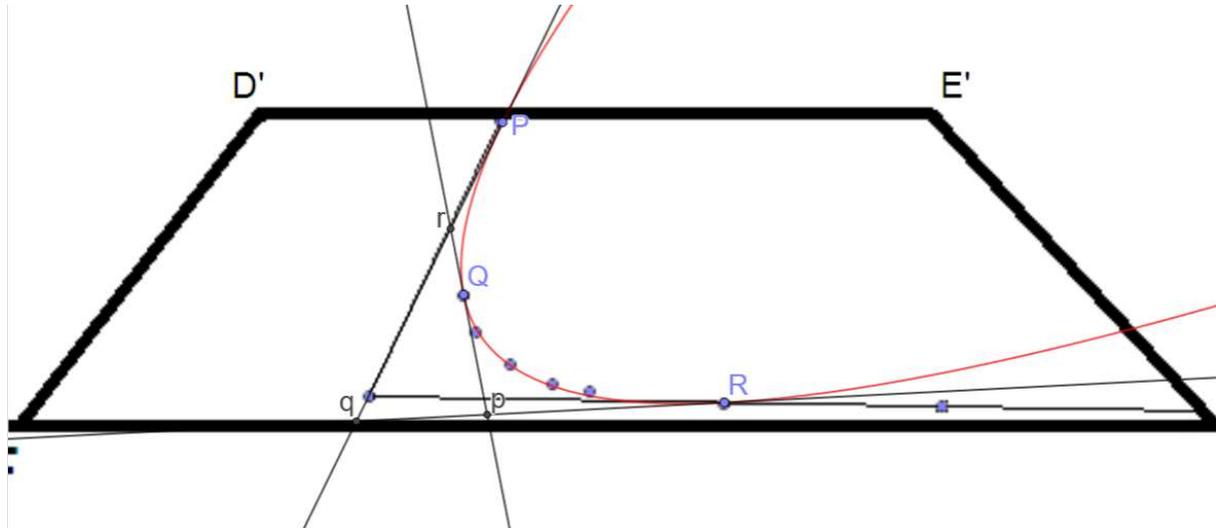


Fig. 3.24

En la Fig. 3.26 se trazaron dos rectas tangentes a la curva por  $P$  y  $R$ , y una tercera recta por  $Q$ , también tangente a la curva, y cortando a las primeras dos tangentes en  $r$  y  $p$ .

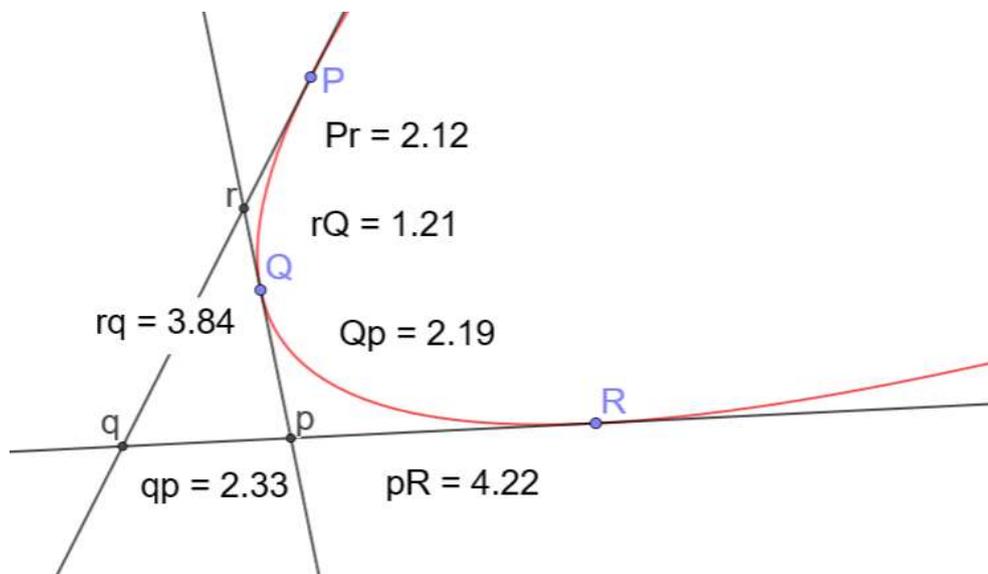


Fig. 3.25

Empleando una de las herramientas del programa, se midieron los segmentos  $\overline{Pr}$ ,  $\overline{r\bar{q}}$ ,  $\overline{q\bar{p}}$ ,  $\overline{p\bar{R}}$ ,  $\overline{p\bar{Q}}$ ,  $\overline{Qr}$ , tal como se presenta en la figura 3.27. Gracias a la citada herramienta, se logró determinar que

$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{r\bar{q}}} = \frac{\overline{r\bar{Q}}}{\overline{Qp}} = \frac{\overline{q\bar{p}}}{\overline{p\bar{R}}} = 0.552$$

cumpliéndose así lo que la proposición 41-III establece como propiedad de una parábola degradada, y que por propiedades proyectivas, permanece invariante.

En el siguiente capítulo se usará este mismo procedimiento para el análisis de varios grabados y se compararán resultados contra modelos en tres dimensiones de los grabados en cuestión.

## Conclusión

Apolonio en realidad no explica cómo encontrar una cónica a partir de 4 rectas. Sin embargo, la forma en que va presentando sus proposiciones apunta a que es posible realizar esto, y que además es posible encontrar el lugar geométrico de una cónica que pase por cinco puntos. Para los griegos, en realidad, esto se presentaría como 3 problemas distintos -uno por cada cónica- pues consideraban las secciones como problemas o casos separados. (Heath, 1896. p. *cli*) Por ejemplo, para el caso de la parábola, bastan 4 puntos para determinarla por completo. Si el 5to no cayera sobre el lugar geométrico de la parábola se podría interpretar como que en este caso no existe solución e incluso se podría considerar como una supuesta falta de generalidad, y no como que se tratase de otra cónica.

Una vez mostrada la manera en que se medirán los trazos de los grabados y pinturas por estudiar, mismos que identificamos en la actualidad con algo que a primera vista parece una parábola, se procederá en el siguiente capítulo a medir los mencionados trazos a partir de representaciones tridimensionales. Utilizando el criterio aquí descrito podemos responder a la pregunta de si los diferentes autores han representado una parábola en la obra analizada en este trabajo.

## Capítulo 4

### Análisis comparativo de curvas con apariencia de parábola en grabados y pinturas del Renacimiento

#### Introducción

El nivel de realismo de las aplicaciones de cómputo visual actuales llega a ser tan sorprendente que bien se podría pensar a los entornos virtuales como la cumbre de una acumulación de conocimientos y prácticas que encuentra una expresión en las ideas de los renacentistas y la producción de la ilusión de la realidad en su máxima expresión.

Los diversos usos de los entornos virtuales van desde las aplicaciones militares hasta los usos recreativos pasando por las simulaciones físicas, matemáticas y de cualquier proceso.

Más allá de la mera simulación que se utiliza en entornos académicos con sus variables y parámetros perfectamente especificados, una simulación virtual permite al espectador sumergirse por completo en un entorno específico y conectar a un nivel emotivo con la idea que dicho entorno intenta transmitir. La simulación del comportamiento de las variables físicas (iluminación, gravedad, etc.) queda sujeto a los principios y los mecanismos que asumimos gobiernan el cambio y situación que se pretende analizar.

Este capítulo presenta los análisis comparativos realizados a partir de un grabado de Rubens, (*Atlas cargando al mundo*), de una imagen contenida en un libro de Tartaglia (*Euclides cuidando las puertas del conocimiento*), y otro más de una pintura de Artemisia Gentileschi (*Judith decapitando a Holofernes*), todos ellos recreados en tres dimensiones a partir de las versiones originales de los mencionados trabajos pictóricos.

Estas imágenes fueron seleccionadas en tanto que muestran de manera muy evidente situaciones donde la geometría y las leyes de movimiento se conjugan para ofrecer evidencia sobre las doctrinas “científicas” de la época y las representaciones de procesos naturales, como es el caso del lanzamiento de un proyectil, o la proyección de sombras producidas sobre una superficie debido a la interferencia que un objeto opaco produce al ser colocado frente a una fuente lumínica.

## Estado del Arte

El 10 de abril de 2010 se abrió una exhibición en Assisi, la cual gira en torno de la restauración de un fresco de Giotto pintado en la basílica de San Francisco y dañado por un terremoto en el año de 1997. Dicha exhibición presenta un modelo en 3D realizado a partir de un análisis de la perspectiva de un fresco que adorna dicho recinto. El modelo intenta replicar la pintura de la manera más fiel posible implementando una perspectiva realista. (Pietroni, E. (2010))



Fig, 4.1

A Pietroni le interesaba corregir la perspectiva de la pintura analizada empleando las reglas geométricas del software empleado en la reproducción. El resultado de su análisis le llevó a presentar el diseño que aparece a la derecha de la fig. 4.1 En nuestro caso, la intención era realizar una versión tridimensional del cuadro o grabado tal cual se encuentra, respetando los detalles de la perspectiva a la que están sujetos, pero centrándonos en reproducir de la manera más fiel la imagen, incluida la curva que se va a analizar. Una vez realizado esto se llevaron a cabo las mediciones de los parámetros cuyos valores nos interesan determinar de acuerdo con los criterios estipulados en el capítulo 3 para establecer si una curva es una parábola.

Los modelos que se presentarán a continuación fueron realizados empleando el programa informático de licencia libre conocido como Blender, y montados en el Motor de programación de videojuegos Unity3D.

## Grabado de Niccolo Tartaglia



Fig. 4.2

El primer caso que se analiza es el grabado que aparece como frontispicio de la *Nova Scientia*, texto en el que su autor, Nicola Tartaglia, pretende sentar la base teórica que sustenta el arte de la atillería. En este estudio no se analizarán los aspectos físico-teóricos que Tartaglia presenta sobre la trayectoria de proyectiles lanzada por un cañón -puesto que tal cosa no es nuestro objetivo-, y sólo nos ocuparemos de los aspectos geométricos de la curva representada en la imagen (Fig. 4.2)

Este grabado (Figura 4.2) aparece en la edición de la *Nova Scientia* de 1537. En el figura Euclides a la entrada del Primer Círculo del Conocimiento, lugar donde se encuentran el propio Tartaglia rodeado de las musas de la música, la aritmética, la geometría y la

astromía entre otras. Un poco más arriba aparecen Aristóteles y Platón custodiando el Segundo Círculo del Conocimiento, justo frente a la entrada al recinto donde la *dama Filosofía* ocupa el trono.

Quien observa detenidamente la manera como los personajes del grabado se encuentran dispuestos -quizás a propósito- a los lados de las entradas de los círculos, concluirá que resulta un poco difícil determinar con precisión la ubicación y tamaño de las mismas.

Justo a la izquierda de la primer puerta, dentro del primer círculo, se logra distinguir una bombardarda disparando hacia arriba, con un pequeño ángulo respecto de la vertical, lo que hoy en día podría asumirse como una trayectoria parabólica.

Como se muestra, la bala cae un poco al lado de la dirección del eje del cañón. Ello lleva a pensar que probablemente la curva que describe la bala corresponde a la representación en perspectiva de la curva.

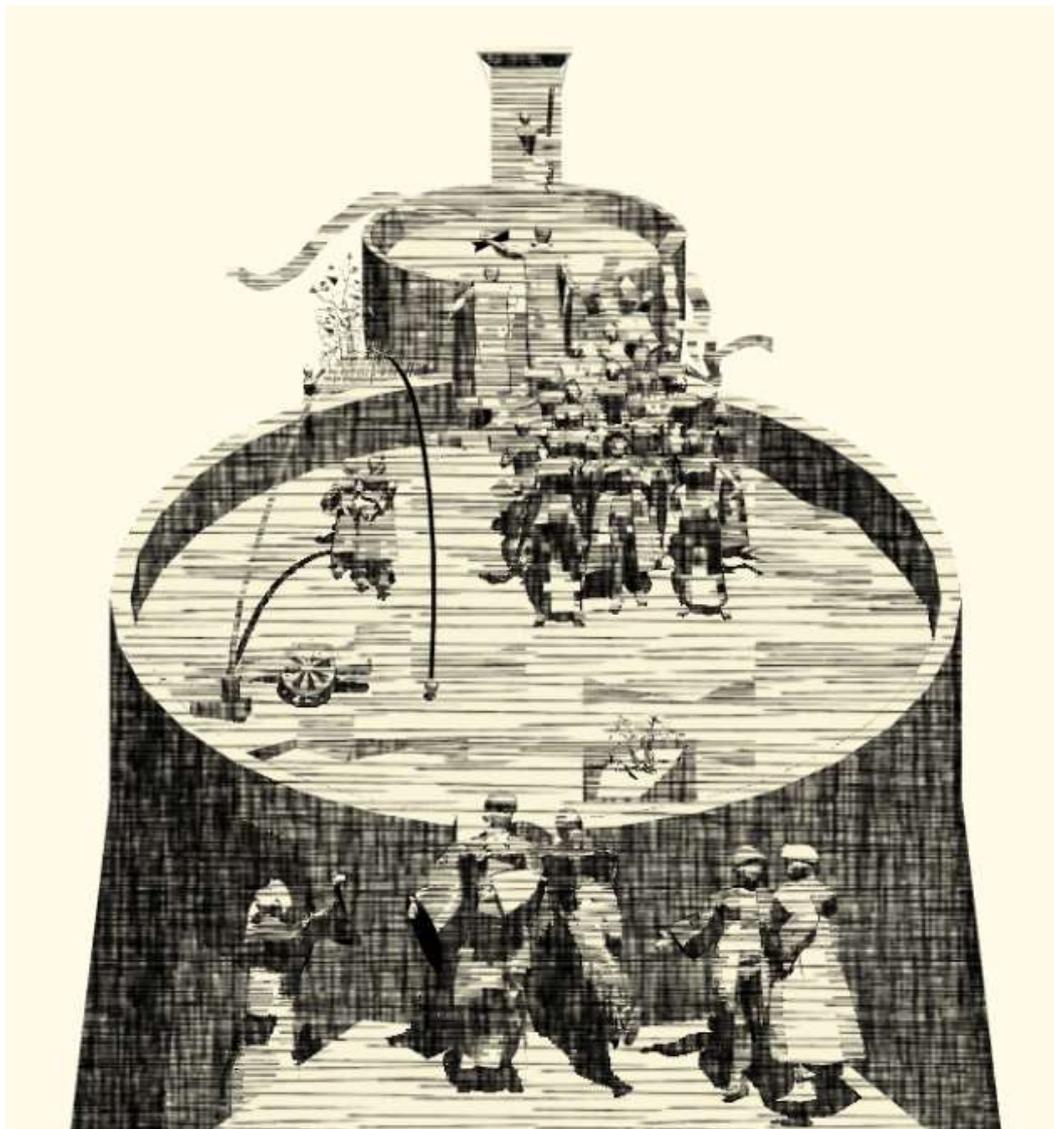


Fig. 4.3

La Fig 4.3 muestra la versión digital del grabado y en particular de la curva que describe el desplazamiento de la bala. La metodología del diseño del modelo radica en respetar el grabado tanto como sea posible, y suponer que la imagen que nos presenta no contiene distorsión respecto del original publicado, esto es, el modelo tridimensional imita geoméricamente al grabado original sin importar si las proporciones de los personajes o las perspectivas a partir de determinado punto de vista son correctas o realistas en términos de los trazos realizados por el grabador.

Para recrear a los personajes del grabado se trazaron primero a mano los elementos “metricos” de Euclides a partir del grabado original para con ello establecer los tamaños proporcionales de los elementos restantes del grabado. Luego se generó la ropa empleando el sistema de simulación física del programa Blender. También se recurrió a un proceso para surcir la tela mediante puntos, un poco parecido a la costura de telas reales. Una vez vestido, se agregó un esqueleto al modelo del personaje, mismo que permite colocarlo en la posición que se desee. Este proceso se repitió para los 27 personajes que componen al grabado. Una vez terminado el modelo completo, se agregó un efecto de achurado empleando el programa Unity3D con un componente adicional llamado *NPRSketchEffect*.

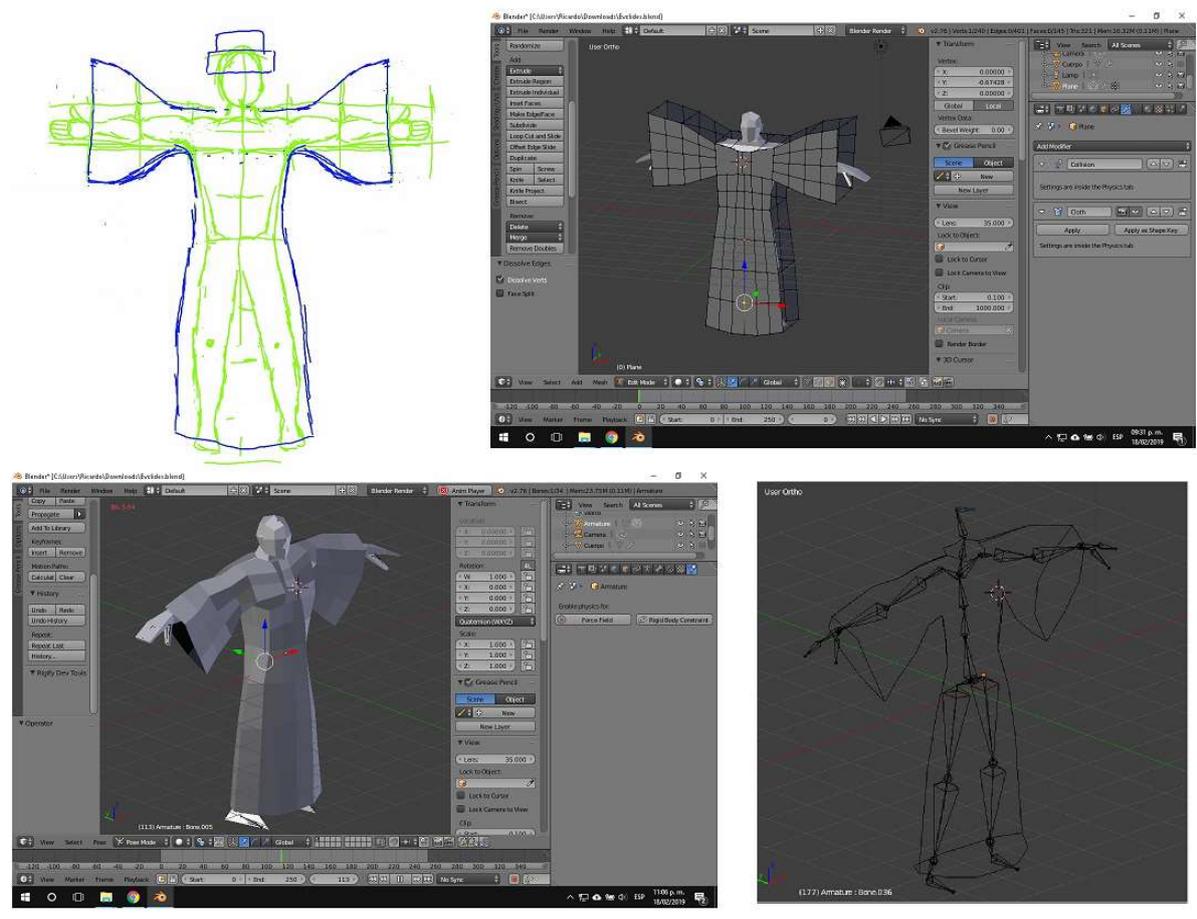


Fig . 4.4

La parte que nos interesa es la curva que dibuja la trayectoria de la bala de cañón en el primer círculo. Siguiendo la metodología de diseño del modelo se recreó exactamente la misma curva del grabado, considerando que está dibujada paralela al plano del grabado original.

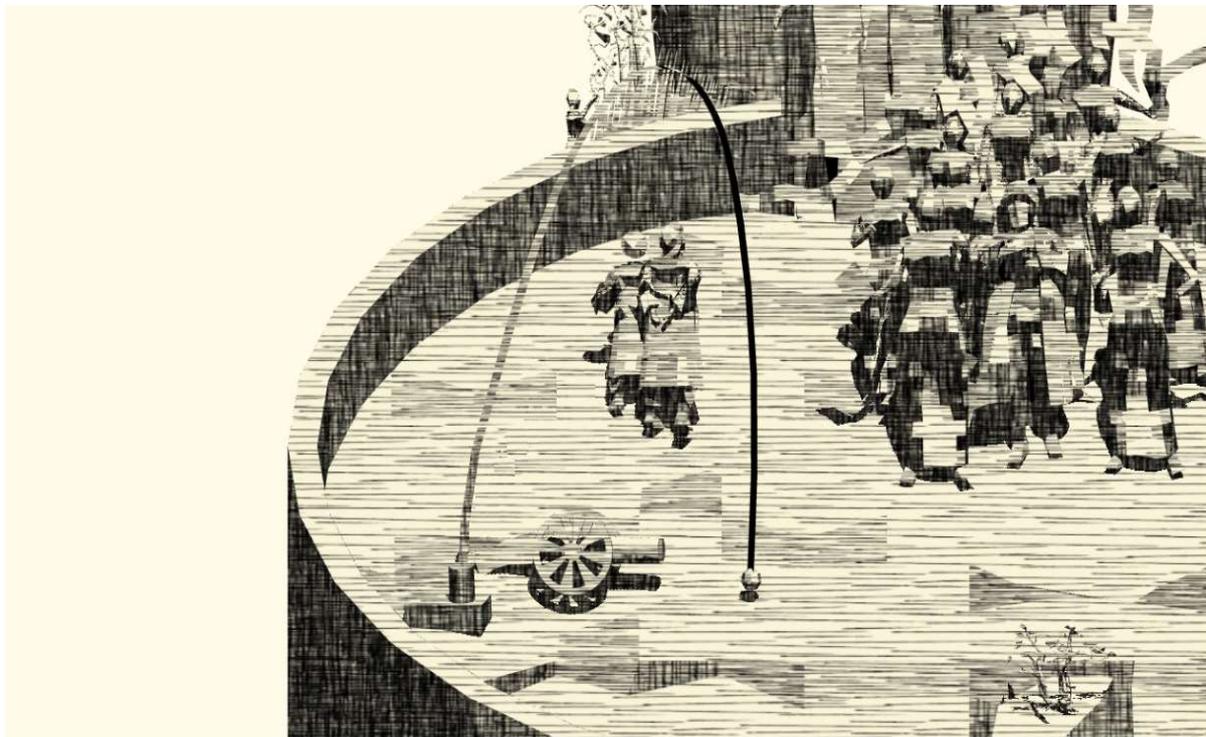


Fig 4.5

Sobre esta curva se hicieron las mediciones correspondientes empleando la metodología del capítulo anterior referida a la proposición 41 del libro III de las *Cónicas* de Apolonio.

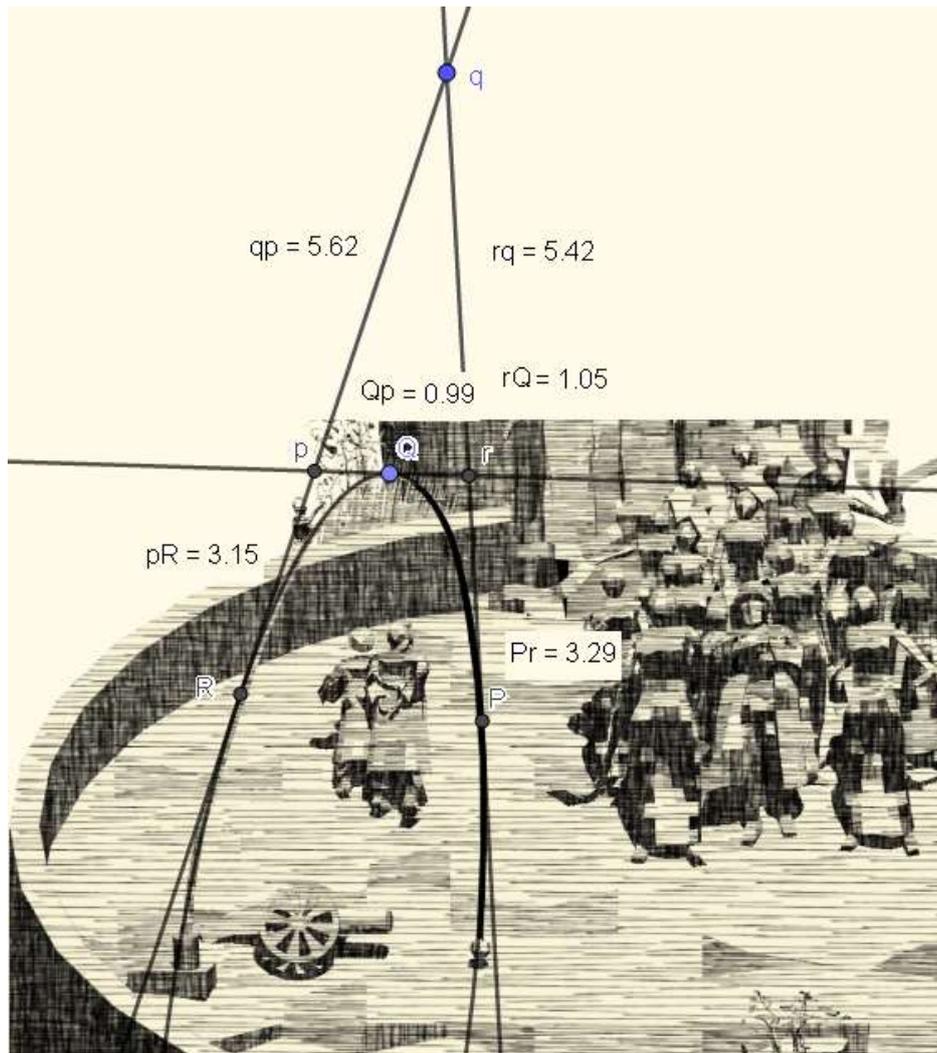


Fig. 4.6

Una vez trazadas dos tangentes, de manera que una esté a la izquierda del diámetro y la otra a la derecha, se midieron las proporciones y se encontró que  $\frac{Pr}{rq} = 0.607$ ,

$\frac{rQ}{Qp} = 1.06$  y  $\frac{qp}{pR} = 1.78$  Estos valores muestran que la curva en cuestión no es una parábola.

El modelo tridimensional se puede rotar y así cambiar el punto desde donde se observa la curva que describe la bala, y así “medirla” desde otra perspectiva.

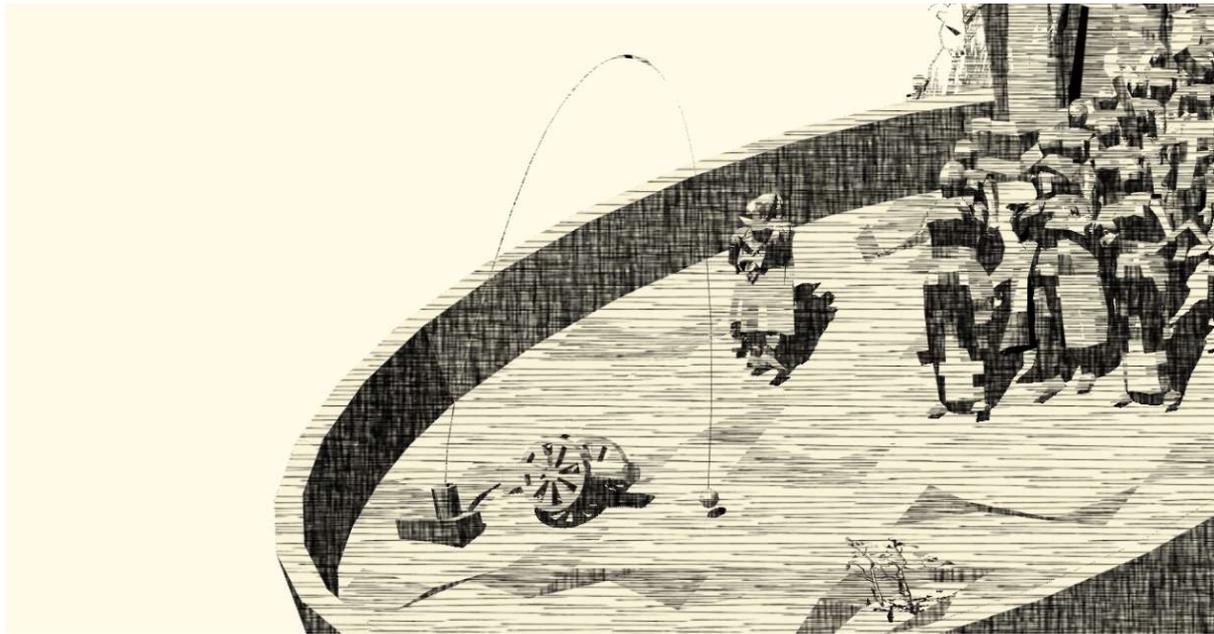
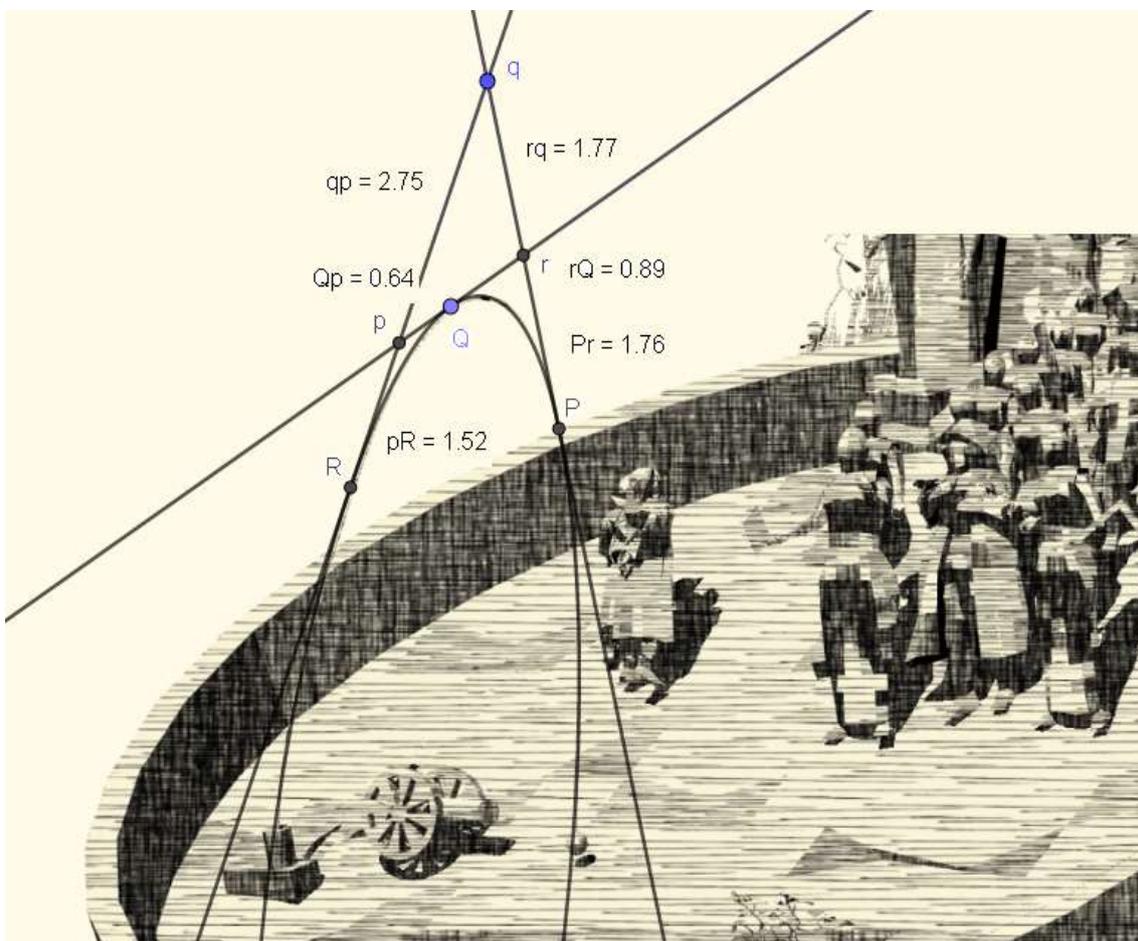


Fig. 4.7

A la manea de un ejercicio más, se volvió a realizar la construcción de las tangentes de igual manera que en el caso previo, y se volvieron a establecer las proporciones correspondientes.



Se encontró que  $\frac{\overline{Pr}}{r\overline{q}}=0.99$  ,  $\frac{r\overline{Q}}{Q\overline{p}}=1.39$  y  $\frac{\overline{qp}}{p\overline{R}}=1.80$  por lo que se concluye que el trazo, en efecto, tampoco es el de una parábola, lo cual era de esperarse en función de lo presentado en el capítulo anterior.

### Grabado de Rubens: Atlas cargando al Mundo

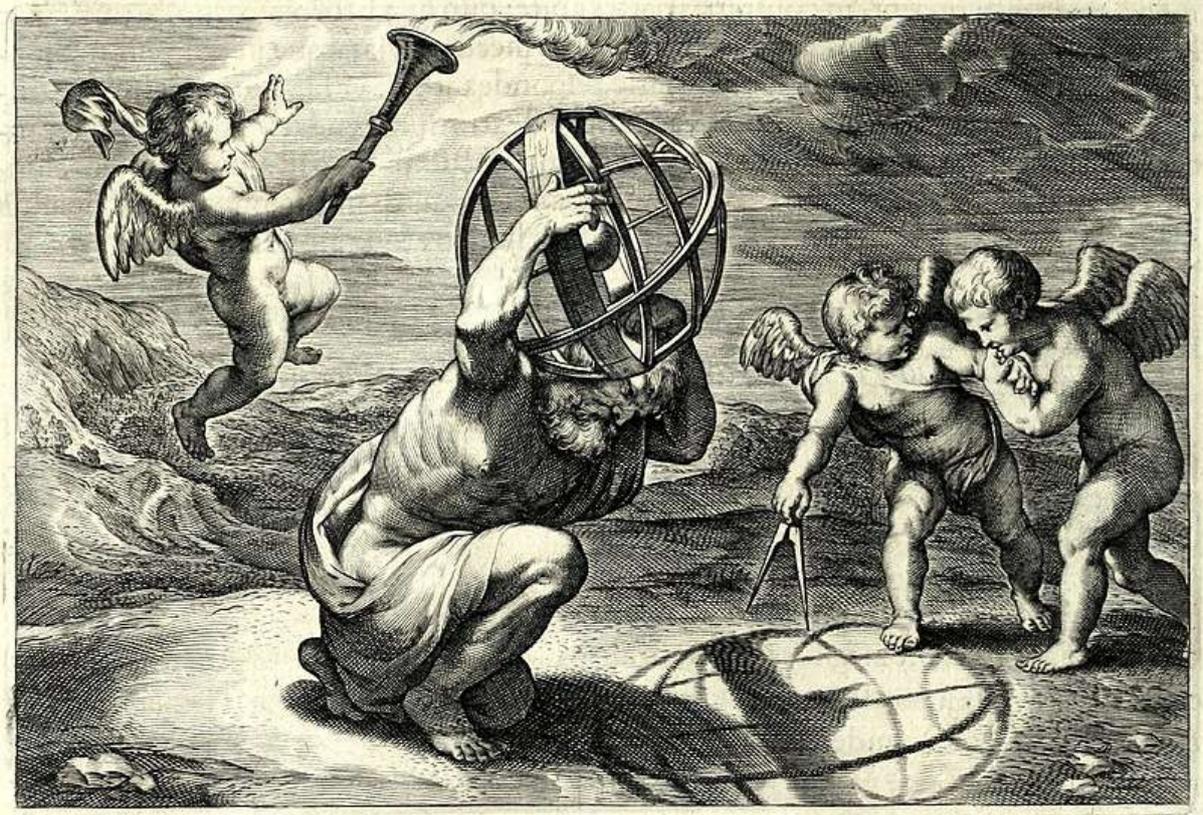


Fig. 4.9

La Fig. 4.9 muestra un grabado de Paul Rubens<sup>1</sup>, en donde se aprecia a Atlas cargando una esfera, -misma que simula ser el “mundo”, entendido como el universo- acompañado de tres ángeles. Uno de ellos porta un compás y apunta al piso, señalando la sombra del mundo, producida a su vez por la antorcha que porta el ángel flotando a la izquierda. En principio, dicha antorcha habría de ser la fuente de luz que genera la sombra del mundo en cuestión. Comparado con el grabado anterior, en éste es un poco más evidente que no hubo un método para trazar la sombra a partir de un supuesto objeto original, como a continuación se mostrará.

Para generar la versión tridimensional de este grabado se midieron las proporciones de Atlas y de uno de los ángeles. Se generó el modelo tridimensional de los cuatro personajes, se agregaron los “huesos” y se colocaron en las posiciones que originalmente tienen en el grabado.

<sup>1</sup> La imagen aparece al inicio del Libro VI del Opticorum Libri Sex, de Francisco Aguillionus, p. 452.

Para este modelo se dibujó un achurado sencillo directamente sobre los personajes, respetando la perspectiva desde la que son vistos. Para ello se establece algo que se llama *material* en el programa Blender, sobre el cual se monta una *textura*, y encima de dicha textura se dibuja en formato bidimensional. Los dibujos se hicieron empleando una tableta de dibujo para introducirlos como información a la computadora de la manera más natural posible. En la Fig. 4.10 se pueden apreciar algunas capturas de pantalla mostrando algunos pasos de creación de los modelos. Primero se buscó erguir artificialmente a los modelos recortando sus extremidades a partir del grabado original y reacomodándolas a modo de piezas. Luego, se calcó un “*Blueprint*” o plano a partir del cual se modela el personaje tridimensional empleando dos vistas, y después de haberles agregado una armazón para ponerlos en posición, se procedió a pintar manualmente la pieza. Se pintó únicamente la cara visible para acelerar el tiempo de producción del diorama digital.

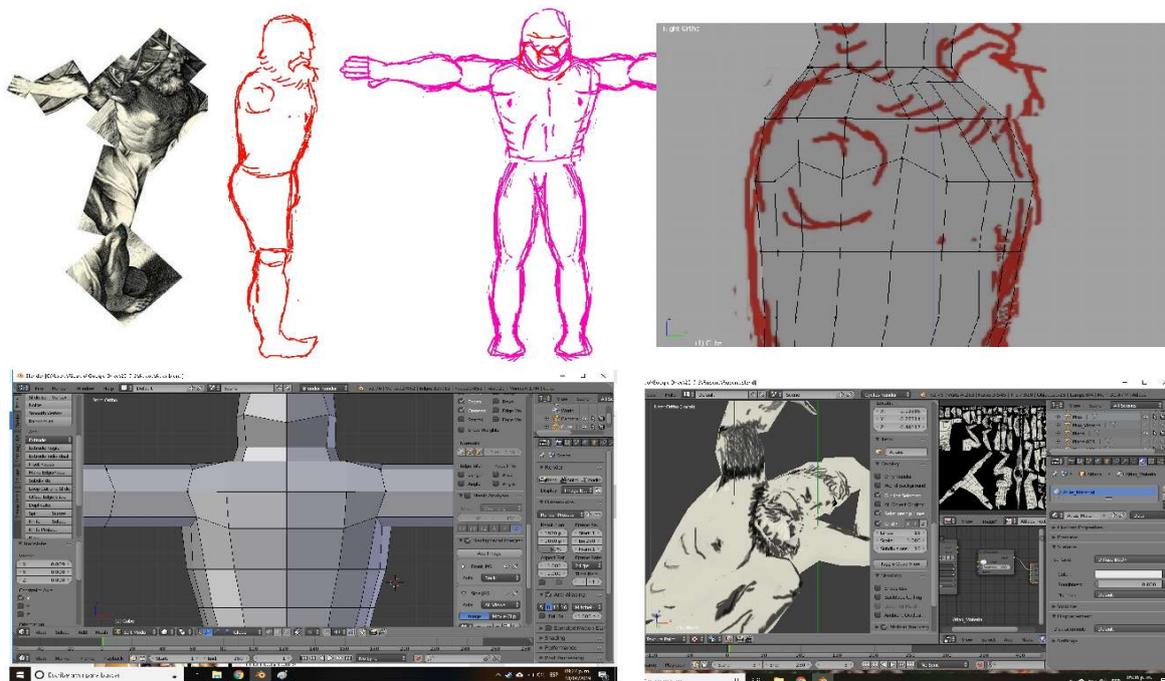


Fig 4.10

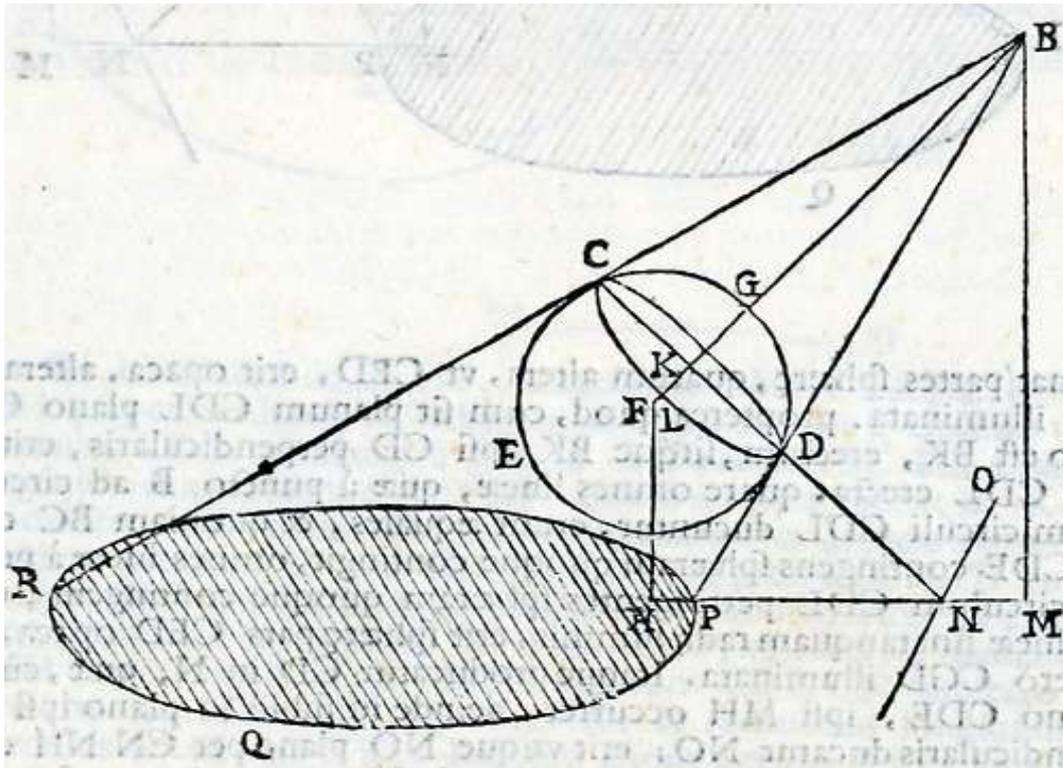
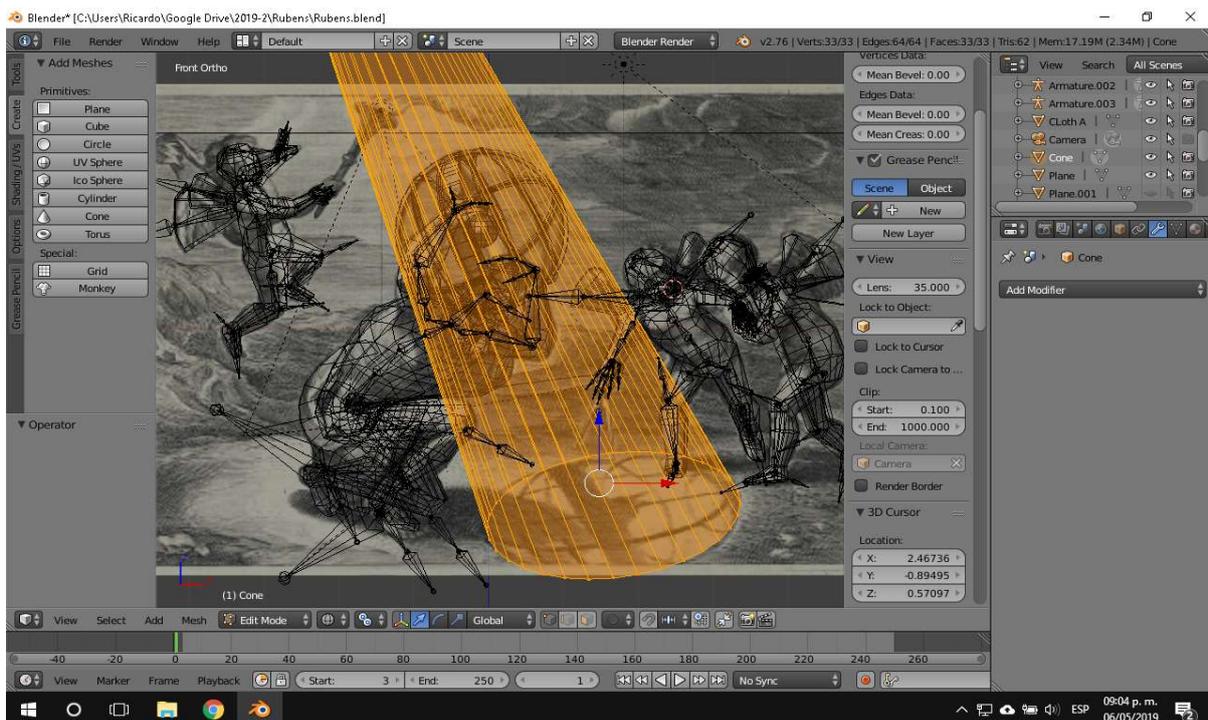


Fig. 4.11

La Fig 4.11 muestra un diagrama del *Perspectivae Libri Sex* (p. 273) de Guidobaldo del Monte, en donde se estudia la sombra que genera un objeto esférico  $GCED$ , misma que posteriormente se reduce al corte  $CLD$  del cono  $BRQP$ . Siguiendo esta idea, la sombra proyectada en el piso -en el grabado de Rubens- deberá coincidir con el círculo achurado  $RQP$ , y la fuente de luz que la proyecta tendrá que estar en el vértice  $B$  del cono.



La Fig 4.12 muestra cómo se colocó el cono de luz (resaltado en naranja) haciéndole pasar por la esfera que carga Atlas y, al mismo tiempo, haciéndole coincidir con la sombra proyectada en el piso. El resultado es que la fuente de luz necesaria para que se genere esta situación, debería estar muy por encima de donde se estipula en el grabado original. (ver Fig. 4.13. La fuente de luz está marcada con un círculo rojo)

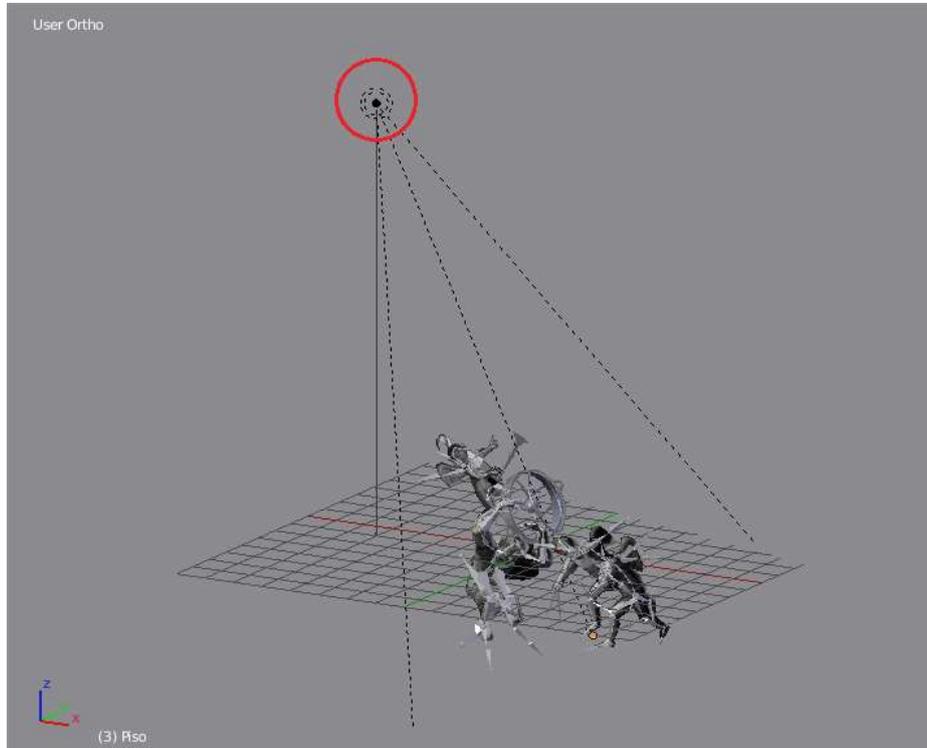


Fig. 4.13

La reproducción final en tres dimensiones de este grabado se muestra en la Fig. 4.14



Fig. 4.14

Comparativamente, es posible apreciar que la ilustración original muestra elementos – específicamente, el juego de luces y sombras– que no corresponden a lo que se logra apreciar a partir del modelo tridimensional con sus luces y sombras calculadas por computadora. Lo relevante de este ejemplo es, por un lado, mostrar la capacidad de las nuevas tecnologías para analizar la geometría de situaciones reales y contrastarla con las representaciones que de ella nos ofrecen los pintores de épocas pasadas. Por el otro lado, exhibe que nuestro aparato perceptivo – nuestra mirada y los juicios que a partir de ella elabora nuestro cerebro-- es capaz de emular como “correctas” situaciones pictóricas que no corresponden a los fenómenos y cómo estos se producen. En particular, en este grabado de Rubens, nuestra mirada lo interpreta como un ejemplo notable de ilustración de una proyección, además de admirar el logro artístico y las sensaciones de realismo que nos producen. Y sin embargo, la ilustración es fallida en cuanto que no recoge con fidelidad los juegos de luces y de sombras. Con esta experiencia tan ilustrativa, podemos pasar a analizar otra pintura, una en la que se nos ofrece una imagen con trayectorias que parecerían recordar tiros parabólicos.

## Pintura de Artemisia Gentilleschi: Judith decapitando a Holofernes



Fig. 4.15

En la Fig. 4.15 se muestra el cuadro original de Judith decapitando a Holofernes, de Artemisia Gentilleschi. Para crear el modelo en tres dimensiones del cuadro de Artemisia se emplearon un modelo masculino y dos femeninos. Se crearon las ropas que visten empleando el motor de física de telas de Blender y haciendo modificaciones manuales. Las texturas se crearon a partir de la pintura. Parte del proceso de

construcción del modelo se presenta en las figuras 4.16 y 4.17. El modelo tridimensional se muestra en la Fig 4.16

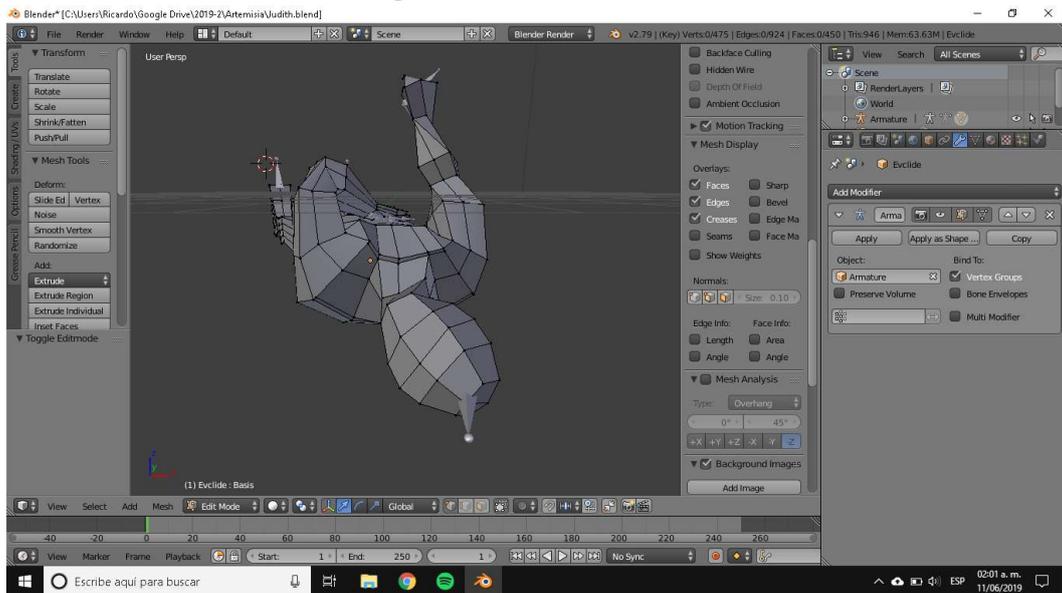


Fig. 4.16



Fig. 4.17



Fig. 4.18

En términos históricos, Tanto Stillman Drake (Drake, 1982. p. 390) como R. H. Naylor (Naylor, 1976. pp. 153 y 160 ) coinciden en que para 1609 Galileo había desarrollado la mayor parte de su teoría del movimiento parabólico, y concuerdan en que desde 1605 había iniciado, según lo atestigua el llamado folio f.81, depositado en la Biblioteca Nacional de Florencia. El estudio de la trayectoria de proyectiles concluye con un patrón de movimiento que seguía una forma parabólica.

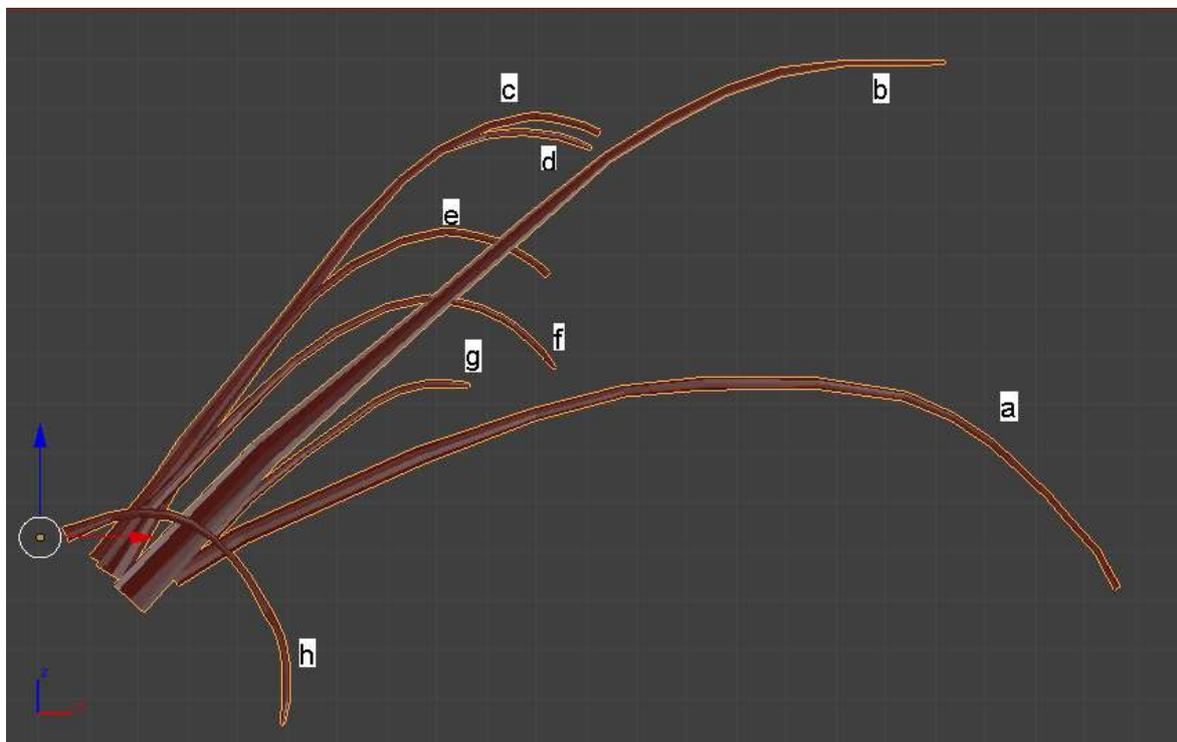
Gentileschi, siguiendo la escuela del realismo de Caravaggio por un lado, y dado que mantenía contacto epistolar justamente con Galileo, bien pudo haber tenido conocimiento de los resultados experimentales y elucubraciones de Galileo.

Artemisa pinta este cuadro en una fecha cercana a 1620, mientras que Caravaggio presenta su versión de Judith y Holofernes, incluyendo también un chorro de sangre, en 1599. Uno podría llegar a preguntarse si las trayectorias que sigue la sangre en la pintura son parábolas, si fueron quizá dibujadas tomando esto en cuenta, o simplemente fueron dibujadas intentando reproducir lo que se observaba en las fuentes de agua, lo cual daría una impresión muy similar a lo que hoy conocemos como parábolas.



Fig 4.19

En la Fig. 4.19 se muestra un acercamiento sobre el grupo de chorros de sangre que se desea analizar. Se descartaron aquellos brotes que no presentan un trazo continuo y se consideraron aquellos que tienen gran parte continua y se completaron los fragmentos restantes. Si bien algunos parecen hacer un arco que definitivamente no tiene aspecto parabólico, hay otros que incluso hacen a uno dudar si acaso se trata de parábolas dibujadas bajo alguna metodología.

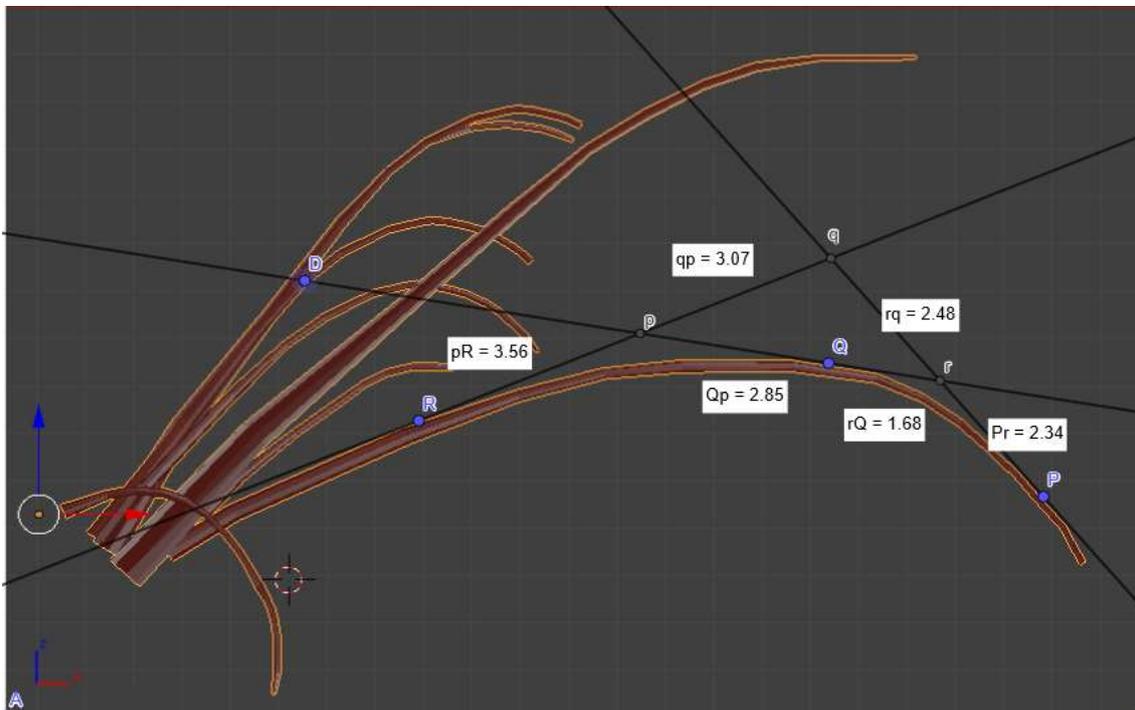


Se aisló de la imagen principal el grupo de curvas y se etiquetaron las curvas de interés de la *a* a la *h*. Se realizaron mediciones sobre las parábolas que conforman el conjunto de curvas de interés utilizando el programa informático Geogebra y empleando el método derivado de la proposición 41-III de Apolonio, mismo que fue presentado en el capítulo anterior. A partir de ello se obtuvieron los resultados siguientes:

(En lo subsecuente, se presentan cuatro de las imágenes que muestran el análisis de algunas de las curvas que se identifican con la letra correspondiente)

### Curva *a*

La curva *a* se presenta ligeramente deforme del lado derecho. El análisis bajo la metodología revela las siguientes proporciones:

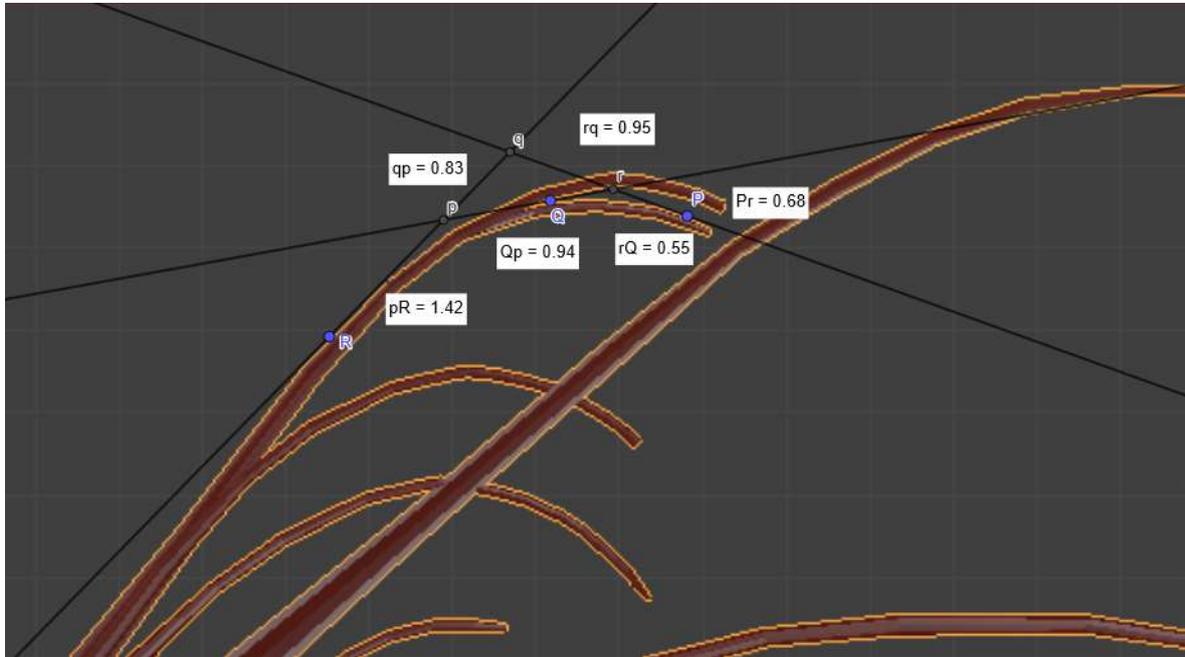


$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = 0.9435, \quad \frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = 0.5894 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{qp}}{\overline{pR}} = 0.8623$$

A partir de los datos obtenidos, se aprecia que a pesar de que las proporciones presentan valores cercanos entre sí, resultan solamente aproximados, y no exactamente iguales a cuatro decimales como en la figura 3.25 (Capítulo 3), ni siquiera intentando sintonizar los puntos de tangencia *R*, *Q*, *P*.

## Curva d

La curva *d* resulta un poco laboriosa de medir, pero a la vez interesante puesto que parece más una parábola que las curvas *a* o *h*. La medición de las proporciones reportó los siguientes resultados:

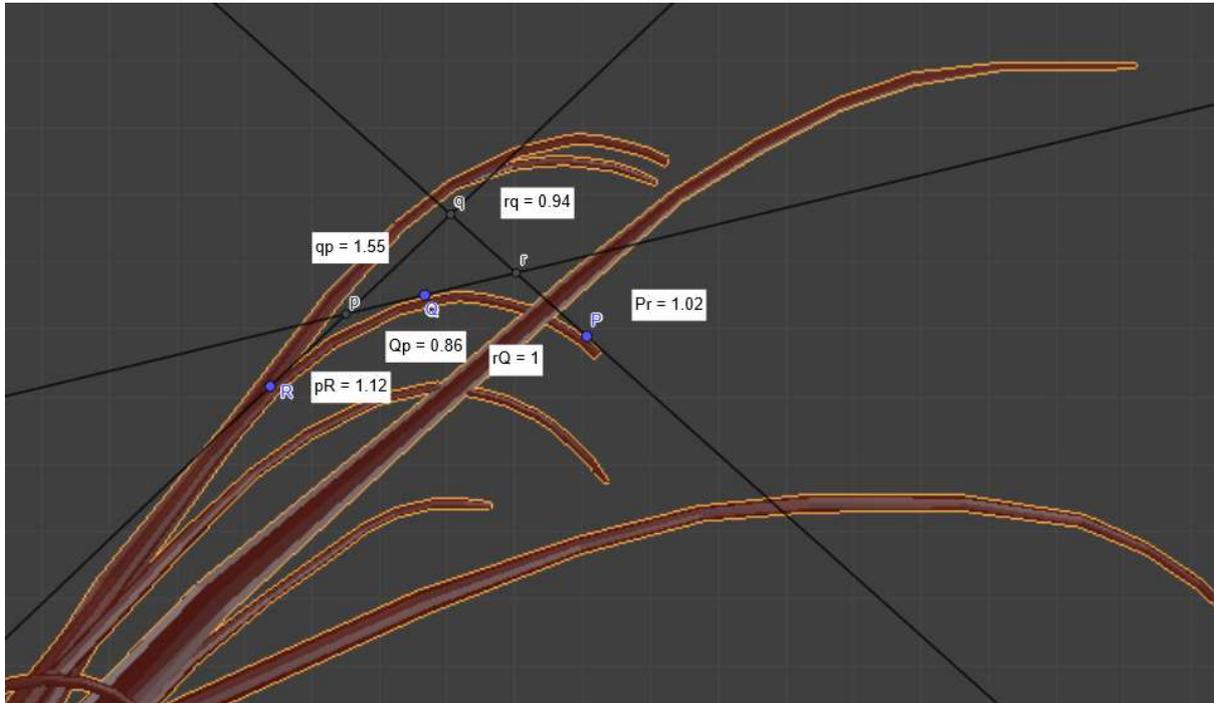


$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = 0.7157, \quad \frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = 0.5851 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{qp}}{\overline{pR}} = 0.5845$$

Todo indica que mientras menor sea la diferencia de las proporciones, más se acercará la curva a ser una parábola.

## Curva e

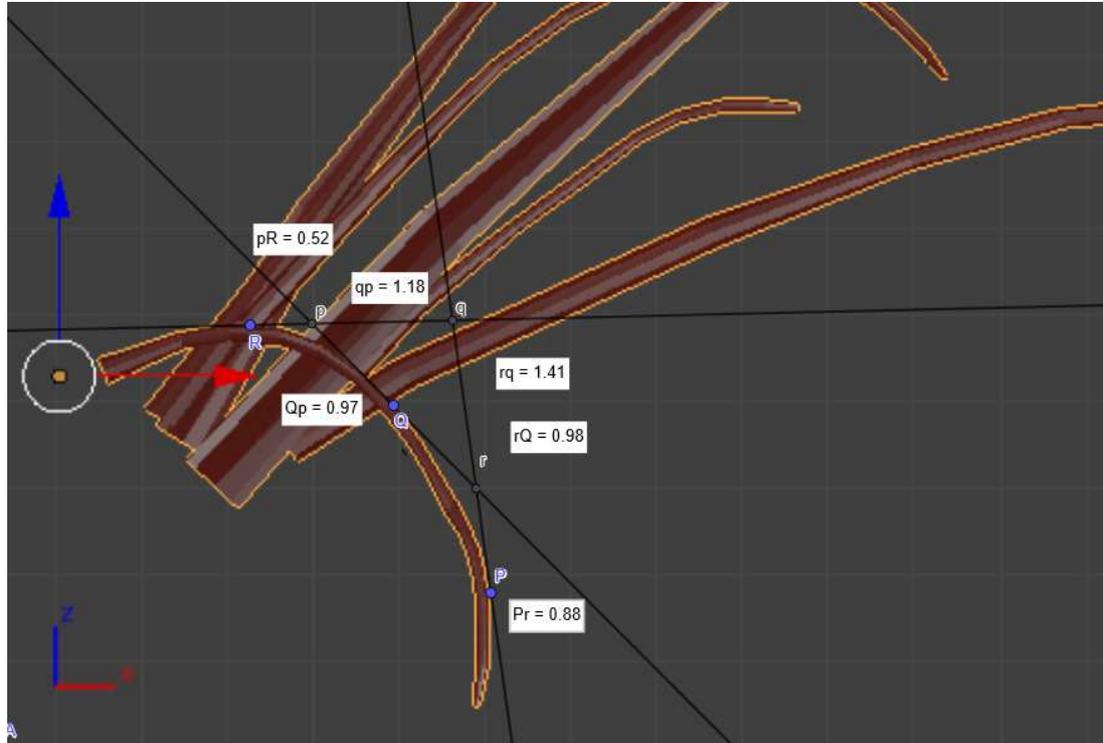
Esta curva también es similar a la curva *d*. Los valores de las proporciones a continuación mostradas resultaron ser bastante próximos entre si. Sin embargo, al no ser iguales, se sigue descartando la idea de que sea una parábola y se queda simplemente en una representación muy cercana a serlo.



$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = 1.085, \quad \frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = 1.162 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{qP}}{\overline{pR}} = 1.383$$

## Curva h

Esta curva parece más un arco o un segmento de circunferencia deforme antes que una parábola, y por lo mismo resulta de interés averiguar qué datos arroja el análisis, los cuales se muestran a continuación



$$\frac{\overline{Pr}}{\overline{rq}} = 0.6241, \quad \frac{\overline{rQ}}{\overline{Qp}} = 1.01 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{qp}}{\overline{pR}} = 2.269$$

Para este caso, coincide el hecho de tener diferencias marcadas entre las proporciones medidas con la forma que tiene la curva, bastante alejada ya de parecer una parábola.

## Conclusiones

La curva que describe la bala en el grabado de Tartaglia aparenta ser una parábola. La parte final de la trayectoria resulta un poco vertical para ser una parábola, por lo que se ajustó un poco la perspectiva de la versión tridimensional al punto de que resultara más parecida a una parábola. Se volvió a realizar la medición y se corroboró que los valores de las proporciones según Apolonio 41-III siguen discrepando. Por lo tanto, la curva, tal y como fue trazada, no corresponde a una parábola, incluso intentando medirla desde otra perspectiva. Destaca, sin embargo, la capacidad del artista de lograr curvas cercanas a la parábola empleando solamente su sentido artístico, logrando mejores representaciones que las propuestas geométricas de la época, que se limitaban a ser dos rectas unidas por un arco de circunferencia.

Empleando programas de modelado en tres dimensiones fue posible recrear el grabado de Rubens donde figuran Atlas y unos ángeles. Así mismo, a partir de los conceptos establecidos por Guidobaldo del Monte, fue posible recrear la sombra que produce en el piso la estructura esférica que carga Atlas, concluyendo que la sombra no es producida por las fuentes de luz presentadas en la escena.

Es probable que Rubens tuviese que adaptarse al espacio que tenía disponible para realizar el grabado. A juzgar por sus otros trabajos pictóricos, Rubens parece tener el intelecto suficiente como para interpretar un texto sobre proyecciones de sombras como el de Guidobaldo.

Respecto a la pintura de Artemisia Gentilleschi, una vez que se midieron las 8 curvas de la pintura, se concluye que las curvas *c* y *d* son las que se podrían considerar más cercanas a ser una parábola, tanto por lo que a simple vista se logra apreciar como por los valores que reportó la medición.

Hay curvas, como la curva *h*, sobre la cual no era necesario realizar una medición, pues era posible, a simple vista, juzgar que no se trataba de una parábola. Esto se ve justificado a partir de los datos que se obtuvieron durante las mediciones de las proporciones.

A pesar de que Artemisia y Galileo Galilei mantenían correspondencia, y que la pintura analizada fue posterior a los trabajos de Galileo sobre trayectorias parabólicas, todo apunta a que, incluso de haber sido consciente, Artemisia no buscaba plasmar parábolas perfectas como trayectorias de la sangre en sus pinturas. Sin embargo, su pericia para retratar la realidad mediante sus técnicas pictóricas la llevó a obtener representaciones muy cercanas a parábolas.

La metodología de análisis propuesta no solamente permite identificar si determinada curva es una parábola. También proporciona un criterio numérico que podría ser aplicado como métrica que permitiese determinar qué tanto dista determinada curva de ser una parábola analizando cuanto difieren entre si los valores de las proporciones obtenidas en la medición.

## **Conclusiones Finales**

En el presente trabajo de tesis se analizaron tres trabajos pictóricos del periodo Renacentista que presentaban curvas dando la impresión de ser parábolas en perspectiva.

En el presente trabajo de tesis, la teoría inicia presentando las ideas griegas empleadas para representar la realidad y se abordaron brevemente los conceptos árabes respecto de la visión. Se presentaron las herramientas geométricas con que se contaba en el Renacimiento para plasmar objetos en perspectiva, y se revisaron también las herramientas matemáticas con que hubiesen podido contar los artistas de dicho periodo para trazar parábolas en perspectiva.

Luego de determinar en el capítulo 3 una metodología para el trazado de parábolas en perspectiva, y de identificar un criterio para determinar si las curvas que aparecen en los cuadros son o no son parábolas, se generaron y presentaron en el capítulo 4, las versiones tridimensionales de los grabados a estudiar para así poder comparar las curvas de interés desde diferentes puntos de vista rotando los mencionados modelos.

Aplicando la metodología sobre los modelos tridimensionales, se determinó que las curvas pensadas como parábolas son en realidad representaciones que los pintores consideraban reproducían mejor el efecto apreciado en realidad. A partir de nuestro análisis sobre los ejemplos que presentamos ya determinamos que no corresponden geoméricamente con lo que hoy sabemos resultan ser trayectorias parabólicas. Sin embargo, estas representaciones eran la mejor aproximación a lo que lograban vislumbrar los artistas plásticos de los siglos XV y XVI. También para ellos la determinación o intuición de la verdadera forma de la trayectoria era algo que no se interpretaba como un problema cuya solución debiera estar sujeta a una cuantificación de exactitud que fuera más allá de una aproximación cualitativa. Sin embargo, y con el afán de lograr reproducir de mejor manera lo que observaban, los pintores buscaron herramientas matemáticas que les permitiesen representar de mejor manera la realidad en sus pinturas y grabados. Si bien en ocasiones las herramientas terminaban abigarrando el proceso –los rostros en perspectiva de Piero, por ejemplo– había también ocasiones en que la herramienta matemática no representaba fielmente la realidad –se creía que la trayectoria de una bala estaba definida por dos rectas unidas por un arco de circunferencia–, y entonces las observaciones del artista podrían ser mas precisas, tal y como lo presenta Tartaglia en el grabado de la Nova Scientia.

Ya en el Renacimiento –e incluso antes– se apreciaba la inclinación del hombre por intentar representar el mundo que le rodea desde el punto de vista científico o artístico. Algunas veces los artistas buscaban el apoyo de la ciencia para mejorar sus representaciones, mientras que en otras tantas fueron los científicos quienes resultaron beneficiados por el “saber” plasmado en las expresiones artísticas. Hoy día esta relación entre ciencia y arte continúa más vigente que nunca.

## Referencias Bibliográficas

K. Andersen «Guidobaldo: The Father of the Mathematical Theory of Perspective», aparece en *Guidobaldo del Monte (1545–1607) : Theory and Practice of the Mathematical Disciplines from Urbino to Europe*, A. Becchi, D.Meli, E. Gamba (eds.), Alemania, Edition Open-Access, 2013, pp. 145–166.

Z. E. Brady, *Cross Ratios for High School Students* Disponible en: <https://math.mit.edu/~notzeb/cross.pdf> [Consultado: 19 de noviembre, 2019].

M. Bourne, *Is the Gateway Arch a Parabola?* Disponible en: <https://www.intmath.com/blog/mathematics/is-the-gateway-arch-a-parabola-4306> [Consultado: 4 de noviembre, 2019].

X. Castañer, «El Espacio Real y el Ficticio en el Contexto Barroco: Aspectos Teóricos y Aplicaciones Prácticas», *KOBIE (Serie Bellas Artes)*, No. VII, 1990, pp. 85–103.

M. Centofanti, «Egnazio Danti (1536 – 1586)», aparece en: «Distinguished Figures in Descriptive Geometry and Its Applications for Mechanism Science. From the Middle Ages to the 17<sup>th</sup> Century, M.Ceccarelli (ed.)», *History of Mechanism and Machine Science*, Vol 30, Cassino, Springer, 2016, pp. 129–180.

H. S. M. Coxeter. *Geometry Revisited*. Washington D.C., The Mathematical Association of America, 1967. pp. 103 – 111 y 132 – 146.

F. d'Aguilon, *Opticorum libri sex philosophis juxta ac mathematicis utiles* [1613], [Libro Electrónico], Amberes, 2015.  
Disponible en: <https://archive.org/details/opticorumlibrise00agui/page/452> [Consultado: 23 de marzo, 2019] p. 452.

P. Della Francesca, *De Prospectiva Pingendi* [1474]. Venecia, Filologie Medievali e Moderne Serie occidentale, Edizioni Ca'Foscari Digital Publishing, 2016, pp. 364 – 374.

G. P. Della Mirandola, *Oratio de hominis dignitate*, [en latín, 1486], *Discurso sobre la dignidad de hombre*, con presentación de Carlos Llano Cifuentes, Pequeños Grandes Ensayos Universidad Nacional Autónoma de México. 2004. p. 19.

\_\_\_\_\_, *De pictura* [en latín, 1435], *Della pittura* [en italiano, 1436], *De la pintura*, en español, con Introducción y notas de J. V. Field y estudio introductorio y traducción de J. Rafael Martínez, Colección Mathema, México: Facultad de Ciencias, UNAM, 1996.

C. Farago, *Leonardo da Vinci's Paragone: a critical with a new edition of the text in the Codex Urbinas*. Netherlands, Brill's Studies in Intellectual History, 1992, pp. 1-25.

J. Field, *Piero Della Francesca. A Mathematician's Art*, Londres, Yale University Press, 2005, pp. 129–181.

J. Field «Alberti, The Abacus and Piero Della Francesca's Proof of Perspective» *Renaissance Studies*, Oxford University Press, Vol. 2, 1997, pp. 61–88.

J. Field, *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford, Oxford University Press, 1997, pp. 20–40, 62–102.

J. Green, P. Green, «Alberti's Perspective: A Mathematical Comment» *The Art Bulletin*, College Art Association, Vol. 69, No. 4, 1987, pp. 641–645.

Apollonius Pergaeus, *Conicorum libri quattuor: una cum Pappi Alexandrini lemmatibus, et commentariis Eutocii Ascalonitae. Sereni Antinensis philosophi libri duo ... quae omnia nuper Federicus Commandinus Vrbinas mendis quampluris expurgata e Graeco conuertit, & commentariis illustravit (in Ancient Greek and Neo-Latin)*, A presentation of the first four books of Conics in Greek by Fredericus Commandinus with his own translation into Latin and the commentaries of Pappus of Alexandria, Eutocius of Ascalon and Serenus of Antinouplis, Bononiae: Ex officina Alexandri Benatii.1566.

Apollonius of Perga *Treatise on Conic Sections*, Trans. by T. Heath, Cambridge, Cambridge University Press, 1896.

V. Hoffman, «Giotto and the Renaissance Perspective», *Nexus Network Journal*, Vol. 12, 2010, pp. 5–32.

D. C. Lindberg, «Alhazen's Theory of Vision and its Reception in the West» *Isis*, Vol 58, No 3, 1967, pp. 321–341.

D. C. Lindberg, *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*, Chicago, The University of Chicago Press, 1976, pp. 1 – 8.

J. R. Martínez, P. Amaya, «La Geometrización de la Pintura en el Renacimiento: El Contexto Cultural» *Miscelánea Matemática 57*, Sociedad Matemática Mexicana, 2013, pp. 39–62.

J. R. Martínez, «Para Entender la Perspectiva. Historia, Pintura, Geometría y Literatura». *Ludus Vitalis*, Vol. XIX, No. 35, 2011, pp. 223–226.

H. Mendell, (ed.) *Vignettes of Ancient Mathematics: Euclid, Catoptrics (Mirrors) 19*

Disponible en:

<https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Euclid/Catoptrics/Catoptrics.19/Catoptrics.19.html>

[Accedido 24 de marzo, 2018] p. 1

\_\_\_\_\_, *La Espeularia de Euclides* [en lengua llana 1584], traducido por Pedro Ambrosio de Ondérez, México CINVESTAV, IPN, 1986.

G del Monte, *Pespectivae Libri Sex* [1600] Ed. Facsímil, Pésaro, Scuola Normale Superiore di Pisa, p. 6.

A. Perciaccante, et al «"There will be blood". Differences in the pictorial representation of the arterial spurt of blood in Caravaggio and followers», *European Journal of Internal Medicine*. 2016, pp. 1–2.

E. Pietroni, F. Antinucci «The Approval of the Franciscan Rule. *Virtual Experience among the Characters of Giotto's Work* », aparece en The 11th International Symposium on Virtual Reality, Archaeology and Cultural Heritage, A. Artusi, M. Joly–Parvex, G. Lucet, A. Ribes, and D. Pitzalis (eds.)» VAST, 2010 , pp. 1–4.

J. Richter–Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, Berlín, Springer Verlag, 2011, pp. 149–157, 163.

R. Talbot, «Design and Perspective Construction: Why is the Chalice the shape it is?» *Nexus VI, Architecture and Mathematics*, Kim Williams Books, 2002, pp. 121–134.

C. Taliaferro, *On Conic Sections by Apollonius of Perga*, 1a reimpression de la ed. de 1939, aparece en: *Great Books of the Western World*, R. Hutchins, M. Adler, W. Brockway. (eds.), Vol. 11, Chicago, Enciclopedia Británica, 1952, pp. 603–804.

N. Tartagliò, *Nova Scientia*, versión digital de la ed. de 1537, Vinegia, publicada por Stephano da Sabio, p. 11. Disponible en:

<https://library.si.edu/digital-library/book/novascientia00tart>

Consultado: 30 de enero 2020.

K. Se–Um, K. Jiyeon, S. Jeng–Hun, N. Jun–Hee, L. Sin–Doo, «Concept of Active Parallax Barrier on Polarizing Interlayer for Near–Viewing Autostereoscopic Displays», *Optics Express* Vol. 24, No. 22, 2016, pp. 25010–25018.

M. Smith, *From Sight to Light*, Chicago, The University of Chicago Press, 2015, pp. 1–22 y 29–61.

A. Treibergs, *The Geometry of Perspective Drawing on the Computer*, Disponible en: <https://www.math.utah.edu/~treiberg/Perspect/Perspect.htm> [Consultado: 4 de noviembre, 2019].

D. Wade, *Geometría y Arte. Influencia de las Matemáticas durante el renacimiento*, México, Librero, 2015, pp. 9–16, 24–49.

O. Zerlenga, «Federico Commandino (1509 – 1575)», aparece en: «Distinguished Figures in Descriptive Geometry and Its Applications for Mechanism Science. From the Middle Ages to the 17<sup>th</sup> Century, M.Ceccarelli (ed.)» *History of Mechanism and Machine Science*, vol 30. Cassino, Springer, 2016, pp. 99–128.