Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El teorema de Haar y su inverso

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Saúl Pilatowsky Cameo

TUTORA

Dra. Natalia Jonard Pérez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2021

Aunque te tuviste que ir, me dejaste todo lo que me hace ser.

A la memoria de mi querida mamá,
Esther Cameo

Agradecimientos

Elaborar esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de la Dra. Natalia Jonard Pérez. Su interés y extensa ayuda fueron fundamentales. Sobre todo, le agradezco infinitamente el haber confiado en mí y el haberme enseñado tanto: primero como su alumno, luego como su ayudante y ahora también como su tesista.

Agradezco también a mis sinodales por sus valiosas correcciones que mejoraron enormemente la calidad de este trabajo: Al Dr. Pierre Michel Bayard, a la Dra. Judith Campos Cordero, al M. en C. Fernando Javier Nuñez Rosales, y al Dr. Juan Carlos Fernández Morelos, muchas gracias.

Agradecimientos personales

Han iluminado mi vida tantas personas increíbles que sería imposible ponerlas a todas en una página. Aunque hice mi mejor esfuerzo, irremediablemente esta lista está incompleta.

Agradezco:

A mi papá, Mauricio, porque fuiste el mejor. Me enseñaste que lo más importante es encontrar lo que me hiciera feliz y te encargaste de que tuviera todas las puertas abiertas para poder hacerlo.

A mi hermana, Eynel, por siempre cuidarme y aconsejarme. Por estar ahí para mí. Por las incontables pláticas y reflexiones que siempre me ayudan a ser una mejor persona.

A mi familia Pilatowsk[y,i], por cuidarme y quererme, cuando más lo necesitaba.

A mi familia Cameo, abuelos, tíos, tías y primas. Por siempre recibirme con tanto amor.

A mis amixes Puro Rostros, por haber crecido conmigo a través de tantas aventuras. Porque sí *son igual que ella*.

A mis amixes de la Facultad, por ser lo más importante que me dejó la carrera. Por tantas pláticas, historias y risas. A D. M., por darme tu compañía y hacerme tan feliz en estos tiempos difíciles.

Al Dr. Jorge Hirsch, por su apoyo tan fundamental, y a todo el equipo Dicke, por enseñarme mucho más que solo física.

Introducción

Las matemáticas más interesantes aparecen en la intersección de áreas que tradicionalmente se trabajan por separado. Allí entre el álgebra y la topología se encuentran unos espacios llamados grupos topológicos. Estos son grupos equipados con una topología en la cual las operaciones algebraicas son continuas. La mezcla entre álgebra y topología trae consigo relaciones muy interesantes, y el estudio se vuelve aún más rico si además incorporamos al análisis matemático. Como en cualquier otro espacio topológico, se puede definir una medida sobre los conjuntos de Borel de un grupo topológico. Así como la topología es compatible con la estructura algebraica, uno quisiera pedir que medida lo fuera también. Una medida de Haar es aquella invariante bajo las traslaciones que resultan de aplicar la operación del grupo. Asombrosamente, tan solo pidiendo una condición topológica –compacidad local–, el teorema de Haar [5, 6, 14, 36] garantiza la existencia de dichas medidas.

La unicidad de la medida de Haar en un grupo topológico localmente compacto también está garantizada por el teorema de Haar (salvo por múltiplos reales positivos). El hecho de que a partir de una topología localmente compacta se pueda construir prácticamente una única medida invariante sugiere que podría ocurrir lo inverso. Si se posee una medida invariante, ¿es posible construirle al grupo una topología localmente compacta? La respuesta, con algunos detalles de por medio, es afirmativa, y queda formalizada en lo que hoy se conoce como el teorema de Haar inverso, enunciado originalmente por Weil en 1940 [36].

El objetivo de esta tesis es estudiar el vaivén que ocurre entre las topologías localmente compactas y las medidas invariantes que se pueden definir en un grupo. Para este propósito, hemos dividido este trabajo en tres capítulos.

El capítulo 1 contiene todas las definiciones y resultados preliminares que requeriremos para abordar el resto del análisis. Empezamos definiendo el concepto de grupo topológico y explorando algunas de las propiedades más básicas de estos espacios. Luego definimos una integral en un espacio topológico como un funcional positivo de ciertas funciones continuas del espacio a $\mathbb{C}$, para después conectar estos objetos con las llamadas medidas de Radon [12, 27] a través del teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani (RMK) [19, 23, 28]. Cerramos el capítulo introduciendo los conceptos de conjuntos y medidas de Baire [2, 16] y exploramos la relación que estas guardan con las medidas de Radon.

El capítulo 2 está dedicado al teorema de Haar. Lo enunciamos y demostramos con cuidado. La demostración que presentamos fue dada por Bredon [5] y difiere bastante de las demostraciones que se encuentran en los libros de texto [7, 8, 11, 16, 17]. En esta primera parte del capítulo trabajamos exclusivamente con integrales como las definimos en el capítulo 1. En la segunda parte utilizamos el teorema de representación de RMK para enunciar los resultados en términos de medidas de Radon.

Finalmente, en el capítulo 3 presentamos el teorema de Haar inverso. Primero definimos los grupos medibles y exploramos algunas de sus propiedades. En estos grupos es posible definir una medida invariante. Demostramos que si se tiene una medida invariante, σ-finita y *separadora* [16] en un grupo medible, entonces existe una topología para el grupo que lo convierte en un grupo topológico densamente encajable en otro localmente compacto, de tal manera que la medida de Haar de la extensión coincide con la medida invariante en los conjuntos de Baire restringidos al grupo original.

Índice general

Nota preliminar

A continuación, damos un breviario de los conceptos y resultados básicos que utilizaremos en este trabajo. Aprovechamos también para establecer las notaciones que decidimos adoptar.

Cuestiones topológicas [10, 24]

Espacios topológicos

Un **espacio topológico** es un conjunto X equipado con una **topología**, una familia τ_X de subconjuntos de X tal que $X, \emptyset \in \tau_X$, donde $\emptyset$ es el **conjunto vacío**, y τ_X es cerrada bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias. A los elementos de τ_X los llamamos conjuntos **abiertos** y a sus complementos conjuntos **cerrados**.

Un espacio topológico X es **discreto** si todo $A \subseteq X$ es abierto.

Subconjuntos de espacios topológicos

Un subconjunto A de un espacio topológico X es un espacio topológico con la **topología de subespacio** que hereda de X,

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau_X\}.$$

Dado $A \subseteq X$, denotamos por $\mathrm{int}A$ al **interior** de A, el conjunto abierto más grande contenido en A; y por $\mathrm{cl}A$ a la **cerradura** de A, el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A. Decimos que A es **denso** en X si $\mathrm{cl}A = X$ y que A es $\boldsymbol{G_\delta}$ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos.

Bases, vecindades y bases locales

Una **base** para la topología de X es una familia $\mathscr{B} \subseteq \tau_X$ tal que para todo $U \in \tau_X$ y $x \in U$ existe $B \in \mathscr{B}$ con $x \in B \subseteq U$. Dado $x \in X$, una **vecindad** de x es un conjunto $V \subseteq X$ tal que $x \in \mathrm{int}V$. Una **base local** para $x \in X$ es una familia $\mathcal{V}(x)$ de vecindades de x tal que si V es una vecindad de x, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ con $V_x \subseteq V$.

Un espacio topológico X es **metrizable** si en él se puede definir una métrica tal que para todo $x \in X$, las bolas abiertas centradas en x forman una base local para x. Si X es metrizable, todo cerrado es G_δ.

Continuidad

Una función $f\colon X \to Y$ entre dos espacios topológicos es **continua** si para todo $U \in \tau_Y$, se tiene $f^{-1}(U) \in \tau_X$; es **abierta** si para todo $U \in \tau_X$, se tiene $f(U) \in \tau_Y$, donde $f^{-1}(U)$ $[f(U)]$ es la **imagen inversa [directa]** de U bajo f. Si una función es continua, biyectiva y abierta, diremos que es un **homeomorfismo**.

Propiedades de compacidad

Un subconjunto A de un espacio topológico X es **compacto** si para cada cubierta $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$, $(A \subseteq \bigcup \mathcal{U})$ existe una subcubierta finita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, $(A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}$ finito). La imagen de un compacto bajo una función continua es compacta, y todo cerrado dentro de un compacto es compacto. Decimos que A es $\boldsymbol{\sigma}$**-compacto** si es la unión numerable de conjuntos compactos. Un espacio topológico X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$ existe una base local de vecindades compactas de x.

Axiomas de separación

Un espacio topológico X es $\boldsymbol{T_0}$ si dados dos puntos diferentes existe una vecindad de alguno que no contiene al otro; es **de Hausdorff** si dados dos puntos diferentes existen vecindades de cada uno que sean ajenas; y es **normal** si para cualesquiera cerrados ajenos existen abiertos ajenos que los contienen. Si X es compacto y de Hausdorff, entonces es normal.

Topología producto

Dado un conjunto de índices J, el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ de espacios topológicos X_α carga la **topología producto**, que es la topología más pequeña donde las proyecciones son funciones continuas, y cuya base es

$$\left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \;\middle|\; U_\alpha \in \tau_{X_\alpha},\, U_\alpha \neq X_\alpha \text{ solo para un número finito de } \alpha \in J \right\}.$$

El producto de espacios compactos [de Hausdorff] es compacto [de Hausdorff], y el producto finito de espacios localmente compactos [σ-compactos] es localmente compacto [σ-compacto]. Un espacio topológico X es de Hausdorff si y solamente si la diagonal $D_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

Cuestiones de medida [4, 7, 31]

Conjuntos y funciones medibles

Dado un conjunto X, una $\boldsymbol{\sigma}$**-álgebra** es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementación ($X \setminus A \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \mathcal{A}$) y uniones numerables ($\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ si $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$). A los elementos de $\mathcal{A}$ los llamamos **conjuntos medibles**.

Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de X, denotamos por $\sigma(\mathcal{F})$ a la **$\boldsymbol{\sigma}$-álgebra generada** por $\mathcal{F}$, que es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{F}$.

Una función entre conjuntos $f\colon X \to Y$ con σ-álgebras $\mathcal{A}_X$ para X y $\mathcal{A}_Y$ para Y es **medible** si dado $A \in \mathcal{A}_Y$, se tiene $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$.

Conjuntos de Borel

Si X es un espacio topológico, los **conjuntos de Borel** de X forman la σ-álgebra generada por la topología de X, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau_X)$. Los conjuntos de Borel también son generados por los cerrados de X, y los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) son generados por los intervalos de la forma $[a, \infty)$ ($[a, \infty]$) para $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$).

Cuando hablemos de funciones medibles $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$), especificaremos cuál es la σ-álgebra para el dominio pero no para el contradominio, dado que siempre tomaremos a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$) como la σ-álgebra para $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Con esta convención, toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es medible respecto a $\mathcal{B}(X)$.

Medidas e integrales de Lebesgue

Una **medida** es una función $\mu\colon \mathcal{A}_X \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y para toda familia numerable de conjuntos ajenos $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}_X$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si $g\colon X \to [0, \infty]$ es medible, la **integral de Lebesgue** de g está definida como

$$\int g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_k \in \mathbb{R}, \quad E_k \in \mathcal{A}_X, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \forall x \in X\colon\ \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) \le g(x) \end{array} \right\},$$

donde $\chi_E\colon X \to \{0, 1\}$ es la **función característica** de $E \in \mathcal{A}_X$, que siempre es una función medible.

Si $f\colon X \to Y$ es medible y $\mu\colon \mathcal{A}_X \to [0, \infty]$ es una medida, entonces la función $\mu \circ f^{-1}\colon \mathcal{A}_Y \to [0, \infty]$ dada por

$$(\mu \circ f^{-1})(A) = \mu\big(f^{-1}(A)\big)$$

es una medida llamada la **medida imagen** de μ bajo f. Más aún, para cada función medible $g\colon Y \to [0, \infty]$, la función $g \circ f\colon X \to [0, \infty]$ es medible y

$$\int (g \circ f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int g(y)\,\mathrm{d}(\mu \circ f^{-1})(y).$$

Propiedades de finitud

Una medida en X es **semifinita** si todo conjunto de medida infinita tiene un subconjunto de medida finita y positiva, y es **σ-finita** si X es la unión numerable de conjuntos medibles y de medida finita. Si una medida es σ-finita, entonces es semifinita.

Producto de dos σ-álgebras

Si X y Y son conjuntos cualesquiera y $E \subseteq X \times Y$, las **secciones** de E son

$$E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \qquad \text{y} \qquad E^y = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}.$$

La **σ-álgebra producto** de dos σ-álgebras $\mathcal{A}_X$ (sobre X) y $\mathcal{A}_Y$ (sobre Y) es

$$\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y = \sigma\big(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}_X, B \in \mathcal{A}_Y\}\big).$$

Si $E \in \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$, entonces $E_x \in \mathcal{A}_Y$ y $E^y \in \mathcal{A}_X$ para cualesquiera $x \in X$ y $y \in Y$.

Medidas producto

Dadas dos medidas σ-finitas $\mu_X\colon \mathcal{A}_X \to [0,\infty]$ y $\mu_Y\colon \mathcal{A}_Y \to [0,\infty]$, existe una única medida $\mu_X \times \mu_Y\colon \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y \to [0,\infty]$, llamada la **medida producto** de μ_X y μ_Y, tal que $(\mu_X \times \mu_Y)(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B)$ para cualesquiera $A \in \mathcal{A}_X$ y $B \in \mathcal{A}_Y$.

Bajo los supuestos anteriores, si $f\colon X \times Y \to [0,\infty]$ es medible (respecto a $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$), el **teorema de Fubini** establece que $x \mapsto f(x,y)$ y $y \mapsto f(x,y)$ son medibles para todo $x \in X$ y $y \in Y$ y además

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu_X \times \mu_Y)(x,y) = \iint f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_X(x)\,\mathrm{d}\mu_Y(y) = \iint f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_Y(y)\,\mathrm{d}\mu_X(x).$$

Cuestiones algebraicas [29]

Grupos

Un **grupo** es un conjunto G equipado con una operación binaria asociativa $(x,y) \mapsto xy$ tal que existe un **elemento neutro** $e \in G$ ($\forall x \in G\colon ex = xe = x$), y para cada $x \in G$ existe un **inverso** $x^{-1} \in G$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Un grupo es **abeliano** si $xy = yx$ para cualesquiera $x, y \in G$. Un subconjunto de un grupo es un **subgrupo** si es en sí mismo un grupo. El producto cartesiano de una familia arbitraria de grupos forma un grupo llamado el **producto directo**, tomando la operación componente a componente.

Homomorfismos entre grupos

Una función entre grupos $f\colon G \to H$ es un **homomorfismo** si para cualesquiera $x, y \in G$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Un homomorfismo biyectivo es un **isomorfismo**.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo sentaremos las bases necesarias para estudiar el teorema de Haar y su inverso. Estos resultados tocan diferentes áreas de la matemática: teoría de la medida, topología y teoría de grupos. Por ello, es necesario introducir varios conceptos de estas distintas ramas.

En la sección 1.1 definimos el concepto de grupo topológico y presentamos algunas propiedades importantes de estos objetos. En la sección 1.2 estudiaremos los funcionales positivos que tienen como dominio el espacio de funciones continuas y de soporte compacto de un espacio topológico. Llamaremos integrales a estos objetos. La sección 1.3 está dedicada a las medidas de Radon definidas sobre los conjuntos de Borel de un espacio topológico y al teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani, que conecta estas medidas con las integrales de la sección 1.2. Finalmente, en la sección 1.4, presentamos a los conjuntos de Baire. Sobre ellos definiremos a las medidas de Baire, y veremos cómo estas se relacionan con las medidas de Radon.

1.1. Grupos topológicos

Lo presentado en esta sección fue tomado de las referencias [8, 12, 17, 18]. Imaginemos que tenemos un grupo equipado con una topología. Si queremos que la estructura topológica sea compatible con la estructura algebraica, debemos pedir que las operaciones de grupo la preserven. Es decir, las operaciones de grupo deben ser continuas.

Definición 1.1.1 (grupo topológico). Sea G un grupo equipado con alguna topología. Decimos que G es un **grupo topológico** si satisface:

(I) Las funciones $x \mapsto x^{-1}$ y $(x, y) \mapsto xy$ son continuas en G y $G \times G$, respectivamente, donde $G \times G$ tiene la topología producto usual.

(II) G es un espacio T_0.

La propiedad (II) nos asegura el mínimo grado de separación, y de hecho implica un grado separación mayor.

Proposición 1.1.2. *Todo grupo topológico G es de Hausdorff.*[1]

Demostración. Primero veamos que $\{e\}$ es cerrado. Sea $x \neq e$. Como G es T_0, existe una vecindad abierta V de e tal que $x \notin V$ o una vecindad abierta V de x tal que $e \notin V$. El segundo caso implica directamente que $x \notin \mathrm{cl}\{e\}$. Si ocurre lo primero, consideremos la función $f\colon G \to G$ dada por $f(y) = y^{-1}x$. Esta es continua porque es la composición de funciones continuas $y \mapsto y^{-1} \mapsto (y^{-1}, x) \mapsto y^{-1}x$. Así, es fácil ver que $W = f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de x tal que $e \notin W$, pues $f(e) = x$ y $f(x) = e$. En cualquier caso, $x \notin \mathrm{cl}\{e\}$, y por lo tanto $\mathrm{cl}\{e\} \subseteq \{e\}$.

Para demostrar que G es de Hausdorff, basta que verifiquemos que la diagonal $D_G = \{(x, x) \mid x \in G\}$ es cerrada en $G \times G$. Si consideramos la función $g\colon G \times G \to G$ dada por $g(x, y) = xy^{-1}$, entonces g es continua pues es la composición de funciones continuas $(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto xy^{-1}$. Como $D_G = g^{-1}(\{e\})$ con $\{e\}$ cerrado, D_G es cerrada. □

Ejemplos 1.1.3 (Grupos topológicos).

(I) Los números reales positivos $G = (0, \infty)$ con el producto y la topología heredada de $\mathbb{R}$ es un grupo topológico.

(II) Cualquier grupo se puede convertir en un grupo topológico, equipándolo con la topología discreta.

[1] Más aún, G no es solo de Hausdorff (T_2), sino que además es completamente regular ($T_{3\frac{1}{2}}$). La demostración se puede encontrar en la referencia [18, teo. 5, p. 49]. Nosotros no utilizaremos este resultado.

(III) El **grupo circular** $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ con el producto usual y la topología heredada de $\mathbb{C}$ es un grupo topológico que, de hecho, es compacto, pues es cerrado y acotado en $\mathbb{C}$.

(IV) Si $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces denotamos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ al espacio vectorial de matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$. A través de la biyección que a cada matriz $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ le asocia el vector $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{F}^{n^2}$ con entradas $b_{i+(j-1)n} = a_{ij}$, podemos equipar a $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ con la topología euclideana de $\mathbb{F}^{n^2}$. De esta manera, el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es homeomorfo a $\mathbb{F}^{n^2}$, y por lo tanto no es compacto, pero sí localmente compacto y σ-compacto. Más aún, es fácil verificar que las operaciones $((a_{ij}), (b_{ij})) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})$ y $(a_{ij}) \mapsto (-a_{ij})$ son continuas con esta topología T_0, por lo que $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es un grupo topológico abeliano con la suma de matrices.

Con el producto de matrices, sin embargo, $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ no es ni siquiera un grupo, pues no todas las matrices tienen inverso multiplicativo. Sin embargo, el conjunto $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \mid M \text{ es invertible}\}$ sí es un grupo topológico llamado el **grupo general lineal**. Este es la preimagen del abierto $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ bajo la función continua $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, y por lo tanto es abierto. Como la compacidad local se hereda a abiertos en espacios de Hausdorff [9, p. 239], $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ es un grupo topológico localmente compacto.

En lo que resta de esta sección veremos tres tipos de resultados. Primero veremos un par de proposiciones que muestran que en los grupos topológicos las propiedades topológicas se armonizan de manera natural con las propiedades algebraicas. Después presentaremos algunos teoremas de carácter más técnico relacionados con las bases locales de un grupo topológico. Finalmente, veremos que en estos espacios es posible hablar de continuidad uniforme y de conjuntos totalmente acotados, sin tener que recurrir a una métrica.

Recordamos la siguiente notación que nos permite hablar de operaciones sobre subconjuntos de un grupo.

Definición 1.1.4 (operaciones entre subconjuntos de un grupo).
Sea G un grupo y $A, B \subseteq G$. Escribimos

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \left\{a^{-1} \,\middle|\, a \in A\right\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $A^n = \overbrace{AA \cdots A}^{n \text{ veces}}$ y $A^{-n} = \overbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}^{n \text{ veces}}$ a las potencias de A. También escribiremos aA y Aa en vez de $\{a\}A$ y $A\{a\}$. Finalmente, decimos que A es **simétrico** si $A^{-1} = A$.

Estas operaciones siempre tienen jerarquía sobre las operaciones de conjuntos. Es decir, $aA \cap B = (aA) \cap B$, $A \setminus BC = A \setminus (BC)$, $A \cup B^{-1} = A \cup (B^{-1})$, etc.

El siguiente es un resultado puramente algebraico, pero lo utilizaremos tanto que vale la pena enunciarlo y demostrarlo.

Proposición 1.1.5. *Sean G un grupo, $A, B \subseteq G$ y $x \in G$. Entonces $xA \cap B \neq \emptyset$ si y solamente si $x \in BA^{-1}$.*

Demostración. Tenemos $b \in xA \cap B$ si y solamente si $b \in B$ y existe $a \in A$ tal que $b = xa \in B$, que es equivalente a que $x = ba^{-1} \in BA^{-1}$. □

En un grupo topológico, las operaciones sobre subconjuntos respetan sus propiedades topológicas.

Proposición 1.1.6. *Sea G un grupo topológico. Entonces:*

(I) *Si $U \subseteq G$ es abierto y $A \subseteq G$ no vacío, AU, UA y U^{-1} son abiertos.*

(II) *Si $F \subseteq G$ es cerrado, aF, Fa y F^{-1} son cerrados para cualquier $a \in G$.*

(III) *Si $A \subseteq G$ y $a \in G$,*

$$\begin{array}{llll} \operatorname{int}(aA) = a(\operatorname{int}A), & \operatorname{int}(Aa) = (\operatorname{int}A)a, & & \operatorname{int}(A^{-1}) = (\operatorname{int}A)^{-1}, \\ \operatorname{cl}(aA) = a(\operatorname{cl}A), & \operatorname{cl}(Aa) = (\operatorname{cl}A)a & y & \operatorname{cl}(A^{-1}) = (\operatorname{cl}A)^{-1}. \end{array}$$

(IV) *Si $K, L \subseteq G$ son compactos, KL y K^{-1} son compactos.*

Demostración. Para cada $a \in G$, definamos las funciones $i_a, {}_ai, i^*\colon G \to G$ por $i_a(x) = xa$, ${}_ai(x) = ax$ e $i^*(x) = x^{-1}$. Dado que G es un grupo topológico, estas son continuas, y como $(i_a)^{-1} = i_{a^{-1}}$, $({}_ai)^{-1} = {}_{a^{-1}}i$ e $(i^*)^{-1} = i^*$, son homeomorfismos.

(I) Para cada $a \in A$, es fácil ver que $aU = ({}_{a^{-1}}i)^{-1}(U)$, $Ua = (i_{a^{-1}})^{-1}(U)$ y $U^{-1} = (i^*)^{-1}(U)$. Dado que U es abierto, aU, Ua y U^{-1} son abiertos. Así $AU = \bigcup_{a\in A} aU$ y $UA = \bigcup_{a\in A} Ua$ son abiertos.

(II) Este inciso se sigue de $aF = ({}_{a^{-1}}i)^{-1}(F)$, $Fa = (i_{a^{-1}})^{-1}(F)$ y $F^{-1} = (i^*)^{-1}(F)$ para cada $a \in A$.

(III) Todas las igualdades son una consecuencia de que las funciones i_a, ${}_ai$ e i^* son homeomorfismos. Por ejemplo, $\operatorname{int}(aA) = \operatorname{int}({}_ai(A)) = {}_ai(\operatorname{int}A) = a(\operatorname{int}A)$.

(IV) K^{-1} es compacto pues es la imagen de K bajo i^*. KL es compacto pues es la imagen del compacto $K \times L$ bajo la función continua $(x, y) \mapsto xy$. □

Proposición 1.1.7. *Sea G un grupo topológico y $H \subseteq G$ un subgrupo. Entonces H es un grupo topológico con la topología de subespacio.*

Demostración. Las restricciones de las funciones $x \mapsto x^{-1}$ y $(x, y) \mapsto xy$ de H en H y $H \times H$, respectivamente, heredan la continuidad. Si G es T_0, entonces H es T_0 con la topología de subespacio. □

Ejemplo 1.1.8 (subgrupos del grupo general lineal).
El grupo general lineal $\mathrm{GL}(\mathbb{F}, n)$ de matrices invertibles de $n \times n$ con entradas en el campo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ que presentamos en el ejemplo 1.1.3 (IV) tiene subgrupos muy importantes. En este trabajo no los estudiaremos directamente, pues mantendremos un enfoque más abstracto, pero son utilizados en tantas áreas de las matemáticas y la física, que no podíamos dejarlos fuera:

- El **grupo ortogonal** es $\mathrm{O}(n) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^{\intercal}\}$.
- El **grupo unitario** es $\mathrm{U}(n) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid M^{-1} = M^{\dagger}\}$, donde $M^{\dagger} = \overline{M}^{\intercal}$ es la transpuesta conjugada de M.
- El **grupo especial lineal** es $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \mid \det M = 1\}$.
- El **grupo especial ortogonal** es $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$.
- El **grupo especial unitario** es $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$.

Como la transposición, la conjugación y el determinante son todas operaciones continuas, todos estos subgrupos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ son cerrados y, en consecuencia, localmente compactos. Más aún, se puede verificar que los grupos $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$ son compactos [8, p. 51].

Definición 1.1.9 (isomorfismo topológico). Sean G y G' grupos topológicos, decimos que $f \colon G \to G'$ es un **isomorfismo topológico** si f es un isomorfismo de grupos que además es un homeomorfismo de espacios topológicos. En caso de que exista tal función f diremos que G y G' son **isomorfos topológicamente**.

Los siguientes resultados garantizan la existencia de ciertas vecindades de e que nos serán de extrema utilidad.

Proposición 1.1.10. *Sea G un grupo topológico, $W \subseteq G$ una vecindad de e y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una vecindad $U \subseteq G$ de e abierta y simétrica (i.e. $U^{-1} = U$) tal que $U^n \subseteq W$.*

Demostración. Como $f \colon G^n \to G$ dada por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ es continua, $f^{-1}(W) \subseteq G^n$ es una vecindad de $(e, e, \ldots, e) \in G^n$. Por lo tanto existen $V_1, V_2, \ldots, V_n \subseteq G$ vecindades abiertas de e tales que $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subseteq f^{-1}(W)$. Tomemos $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ vecindad abierta de e. De inmediato

$$V^n = f(V \times V \times \cdots \times V) \subseteq f(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) \subseteq W.$$

Sea $U = V \cap V^{-1}$. Por la proposición 1.1.6, inciso (I), V^{-1} es una vecindad abierta de e, y entonces U también. Ahora, si $x \in U$, entonces $x = v_1 = v_2^{-1}$ con $v_1, v_2 \in W$. Luego $x^{-1} = v_1^{-1} = v_2 \in V^{-1} \cap V = U$, por lo que U es simétrica y $U^n \subseteq V^n \subseteq W$. □

Proposición 1.1.11. *Sea G un grupo topológico localmente compacto, $U \subseteq G$ abierto y $K \subseteq U$ compacto. Entonces existe una vecindad compacta N de e tal que $KN \subseteq U$ y $NK \subseteq U$.*

Demostración. Para cada $x \in K$, $x^{-1}U$ es una vecindad de e. Por la proposición 1.1.10 existe una vecindad abierta V_x de e con $V_x^2 \subseteq x^{-1}U$. Como $K \subseteq \bigcup_{x \in K} xV_x$ y K es compacto, existe $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{x \in F} xV_x$. Sea $V = \bigcap_{x \in F} V_x$ vecindad de e. Entonces

$$KV \subseteq \bigcup_{x \in F} xV_xV \subseteq \bigcup_{x \in F} xV_x^2 \subseteq U.$$

Análogamente, existe una vecindad V' de e tal que $KV' \subseteq U$. Como G es localmente compacto, existe una vecindad compacta $N \subseteq V \cap V'$ de e. De inmediato $KN \subseteq U$ y $NK \subseteq U$. □

Recordemos el siguiente resultado básico de topología. Sean X un conjunto y para cada $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ una familia no vacía de subconjuntos de X tal que: (a) para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$; (b) dados $U, V \in \mathcal{V}(x)$, existe $W \in \mathcal{V}(x)$ con $W \subseteq V \cap U$; (c) para cada $y \in U \in \mathcal{V}(x)$ existe $V \in \mathcal{V}(y)$ con $V \subseteq U$. Entonces existe una única topología para X donde $\mathcal{V}(x)$ es una base local de vecindades abiertas para x.(2) Es posible adaptar este resultado para el caso de grupos topológicos de la siguiente manera.

Proposición 1.1.12. *Sea G un grupo y consideremos una familia no vacía $\mathcal{V}$ de subconjuntos de G tal que:*

(a) *Para todo $V \in \mathcal{V}$, $e \in V$.*

(b) *Dados $U, V \in \mathcal{V}$, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq V \cap U$.*

(c) *Para cada $U \in \mathcal{V}$ y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ con $xV \subseteq U$.*

(d) *Para cada $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$.*

(e) *Dados $U \in \mathcal{V}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq xUx^{-1}$.*

(f) *Si $x \in G \setminus \{e\}$ existe $V \in \mathcal{V}$, tal que $x \notin V$.*

Entonces la familia

$$\mathcal{V}(x) = \{xV \mid V \in \mathcal{V}\}$$

(2)C.f. [10, 1.2.3, p. 21]

es una base local de vecindades abiertas para cada $x \in G$ en una única topología con la cual G es un grupo topológico.

Demostración. Los incisos (a), (b) y (c) garantizan que existe una única topología para G en la cual $\mathcal{V}(x)$ es una base local de vecindades abiertas para $x \in G$. Veamos que, con esta topología, G es un grupo topológico.

Para ver que $x \mapsto x^{-1}$ es continua, basta que veamos que si $U \subseteq G$ es abierto, U^{-1} es abierto. Sea $x \in U^{-1}$. Entonces $x^{-1} \in U$. Por ser $\mathcal{V}(x^{-1})$ base local para x^{-1}, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x^{-1} \in x^{-1}V \subseteq U$. Por la propiedad (e), existe $V' \in \mathcal{V}$ con $xV'x^{-1} \subseteq V$. Luego, por la propiedad (d), existe $W \in \mathcal{V}$ con $WW^{-1} \subseteq V'$. Así,

$$x \in xW \subseteq xWW^{-1} = x(WW^{-1})^{-1} \subseteq xV'^{-1} = (x^{-1}xV'x^{-1})^{-1} \subseteq (x^{-1}V)^{-1} \subseteq U^{-1},$$

y entonces U^{-1} es abierto.

Para ver que $(x, y) \mapsto xy$ es continua, sea $U \subseteq G$ abierto. Debemos ver que $P = \{(x, y) \,|\, xy \in U\}$ es abierto en $G \times G$. Sea $(x, y) \in P$. Basta encontrar dos vecindades $A, B \subseteq G$ de x y y, respectivamente, con $(x, y) \in A \times B \subseteq P$. Es decir, tales que $AB \subseteq U$. Como $xy \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ con $xy \in xyV \subseteq U$. Por la propiedad (d), existe $V'_y \in \mathcal{V}$ con $V'_y V'^{-1}_y \subseteq V$. Volviendo a aplicar la misma propiedad, obtenemos $V_y \in \mathcal{V}$ con $V_y V_y^{-1} \subseteq V'_y$. En particular, se tiene $V_y^2 \subseteq V$. Ahora, por la propiedad (e), existe $V_x \in \mathcal{V}$ con $y^{-1}V_x y \subseteq V_y$. De allí, tenemos que $y^{-1}V_x y V_y \subseteq V_y^2 \subseteq V$. Es decir, si tomamos $A = xV_x$ y $B = yV_y$, se tiene $AB = xV_x yV_y \subseteq xyV \subseteq U$.

Finalmente, la propiedad (f) implica que G es T_0. □

Es un hecho básico del análisis que toda función continua sobre un conjunto compacto es uniformemente continua. En los grupos topológicos, también podemos hablar de continuidad uniforme, y lo mismo es cierto.

Proposición 1.1.13. *Sea G un grupo topológico y $f \in \mathcal{C}_0(G)$. Entonces f es uniformemente continua por la izquierda (derecha). Es decir, para todo ε existe una vecindad abierta V de e tal que para cada $x, y \in G$, si $x \in yV \;\; (Vy)$, entonces $\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$.*

Demostración. Hacemos el caso izquierdo, el otro es análogo. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, para cada $a \in \operatorname{supp} f$, existe una vecindad abierta U_a de a tal que si $y \in U_a$, $|f(a) - f(y)| < \varepsilon/2$. Entonces $V_a = a^{-1}U_a$ es una vecindad de e. Por la proposición 1.1.10, existe W_a una vecindad abierta y simétrica de e tal que $W_a^2 \subseteq V_a$. Ahora, la familia $\{aW_a \mid a \in \operatorname{supp} f\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto $\operatorname{supp} f$. Por lo tanto, existe $F \subseteq G$ finito tal que $\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{a \in F} aW_a$. El conjunto $W = \bigcap_{a \in F} W_a$ es vecindad abierta de e y, por la proposición 1.1.10, existe una vecindad abierta y simétrica V de e tal que $V \subseteq W$.

Demostremos que V es la vecindad buscada. Sean $x, y \in G$ con $x \in yV$ y separemos en casos.

Si $x, y \in G \setminus \operatorname{supp} f$, entonces $f(x) = f(y) = 0$ y trivialmente $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Si $y \in \operatorname{supp} f \subseteq FV$, entonces para algún $a \in F$, $y \in aV \subseteq aW_a \subseteq aV_a = U_a$. Además $x \in yV \subseteq aW_aV \subseteq aW_a^2 \subseteq aV_a = U_a$. Por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(a) - f(x)| + |f(a) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Finalmente, si $x \in \operatorname{supp} f$, tenemos $xy^{-1} \in V$. Como V es simétrica, $yx^{-1} \in V$. Luego $y \in xV$ y podemos aplicar el caso anterior. □

Así como hemos podido hablar de continuidad uniforme en un grupo topológico sin recurrir a una métrica, es posible definir la noción de *conjunto totalmente acotado*.

Definición 1.1.14 (conjunto totalmente acotado y grupo localmente acotado). Sea G un grupo topológico y $A \subseteq G$. Decimos que A es **totalmente acotado** si para cualquier vecindad U de e existe $F \subseteq G$ finito tal que $A \subseteq FU$.

Decimos que G es **localmente acotado** [1] si cada punto de G tiene una vecindad totalmente acotada, o, equivalentemente, si existe una vecindad de e que sea totalmente acotada.

No es difícil verificar que, en el caso en el que el grupo es metrizable, esta definición coincide con la definición usual de conjunto totalmente acotado en espacios métricos.(3) Los grupos localmente acotados tienen una propiedad extremadamente útil: tienen una *completación* localmente compacta.

Teorema 1.1.15. *Sea G un grupo topológico localmente acotado. Entonces existe un único*(4) *grupo topológico $\overline{G} \supseteq G$ localmente compacto del cual G es un subgrupo denso.*

Este resultado fue originalmente demostrado por Weil [35] utilizando la teoría de estructuras uniformes. La demostración es extensa y queda fuera del alcance de este trabajo, pero es posible consultarla directamente en la referencia [35, cap. 3], o un tratamiento más moderno se encuentra en la referencia [1, p. 398]. Utilizaremos el teorema 1.1.15 al final del capítulo 3, para demostrar el teorema 3.3.20.

(3) Un subconjunto A de un espacio métrico es totalmente acotado si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de bolas abiertas de radio ε que cubre a A.

(4) Único salvo isomorfismo topológico.

1.2. Integrales en espacios topológicos

Resulta conveniente, al querer integrar las funciones continuas de un espacio topológico en $\mathbb{C}$, enfocarse en aquellas que son diferentes de cero solo dentro un conjunto compacto.

Definición 1.2.1 (soporte y familias de funciones continuas). Sea X un espacio topológico. Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$, definimos el **soporte** de f como

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{cl}\big(X \setminus f^{-1}(\{0\})\big) = \operatorname{cl}\big\{x \in X \;\big|\; f(x) \neq 0\big\}.$$

Denotamos por $\mathcal{C}(X)$ al conjunto de funcionas continuas de X en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{C}_0(X)$ al conjunto de funciones en $\mathcal{C}(X)$ cuyo soporte es compacto.

Finalmente, escribimos $\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ y $\mathcal{C}_0^{+}(X)$ para denotar a los conjuntos de funciones en $\mathcal{C}_0(X)$ que toman valores reales y que toman valores reales no negativos, respectivamente.

Es fácil verificar que se satisfacen las contenciones $\mathcal{C}_0^{+}(X) \subseteq \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X) \subseteq \mathcal{C}_0(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$. Si X es compacto, se tiene además que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_0(X)$.

Proposición 1.2.2. *Dado un espacio topológico X, los conjuntos $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}_0(X)$ forman espacios vectoriales complejos con la suma y producto escalar usuales, $\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ es un espacio vectorial real y $\mathcal{C}_0^{+}(X)$ es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalares no negativos.*

Demostración. Sabemos que la suma y producto por escalar de funciones continuas resulta en una función continua. Además, si tomamos $f, g \in \mathcal{C}_0(X)$, entonces $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$, y, por lo tanto, $(f+g) \in \mathcal{C}_0(X)$. Similarmente, para todo $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{supp}(cf) \subseteq \operatorname{supp} f$, por lo que $cf \in \mathcal{C}_0(X)$. Las demás aseveraciones son evidentes. $\square$

Definición 1.2.3 (integral en un espacio topológico). Sea X un espacio topológico. Decimos que una función $I\colon \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{C}$, $I\colon \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ o $I\colon \mathcal{C}_0^{+}(X) \to [0,\infty)$ es una **integral** si satisface las siguientes condiciones:

(I) $I(f+g) = I(f) + I(g)$. *(Aditividad)*

(II) $I(cf) = cI(f)$ para todo c en el contradominio de I. *(Homogeneidad)*

(III) $I(f) \in [0,\infty)$ para toda $f \in \mathcal{C}_0^{+}(X)$. *(Positividad)*

Denotamos por $\mathcal{I}(X)$ al conjunto de integrales de la forma $I\colon \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{C}$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ al conjunto de integrales de la forma $I\colon \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{I}_{+}(X)$ al conjunto de integrales de la forma $I\colon \mathcal{C}_0^{+}(X) \to [0,\infty)$.

A continuación, veremos que las integrales que hemos definido se pueden restringir y extender entre los conjuntos $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ e $\mathcal{I}_+(X)$ de manera única.

Proposición 1.2.4. *Sea X un espacio topológico. Si $I, I' \in \mathcal{I}(X)$ o $I, I' \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ coinciden para funciones en $\mathcal{C}_0^+(X)$, entonces son iguales.*

Demostración. Solo realizamos el caso en el que $I, I' \in \mathcal{I}(X)$. El otro caso es similar.

Cada función $f \in \mathcal{C}_0(I)$ se puede escribir como $f = f_R^+ - f_R^- + i(f_I^+ - f_I^-)$ con $f_R^+, f_R^-, f_I^+, f_I^- \in \mathcal{C}_0^+(X)$ dadas por

$$f_R^+ = \max\{\mathrm{Re}(f), 0\}, \qquad f_R^- = -\min\{\mathrm{Re}(f), 0\},$$
$$f_I^+ = \max\{\mathrm{Im}(f), 0\} \qquad \text{y} \qquad f_I^- = -\min\{\mathrm{Im}(f), 0\}.$$

De inmediato

$$\begin{aligned} I'(f) &= I'(f_R^+ - f_R^- + i(f_I^+ - f_I^-)) = I'(f_R^+) - I'(f_R^-) + i(I'(f_I^+) - I'(f_I^-)) \\ &= I(f_R^+) - I(f_R^-) + i(I(f_I^+) - I(f_I^-)) \\ &= I(f_R^+ - f_R^- + i(f_I^+ - f_I^-)) = I(f). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.5. *Sea X un espacio topológico.*

(I) *Toda $I \in \mathcal{I}_+(X)$ se extiende de manera única a una integral $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$.*

(II) *Toda $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ se extiende de manera única a una integral $I \in \mathcal{I}(X)$.*

Demostración. Para extender de $\mathcal{C}_0^+(X)$ a $\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$, usamos que cada $f \in \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ se puede escribir como $f = f^+ - f^-$ con $f^+, f^- \in \mathcal{C}_0^+(X)$ dadas por

$$f^+ = \max\{f, 0\} \qquad \text{y} \qquad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

Entonces definimos $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$. Es fácil ver que $I\colon \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ es una integral.

Para extender de $\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ a $\mathcal{C}_0(X)$, definimos $I(f) = I(\mathrm{Re}(f)) + iI(\mathrm{Im}(f))$ para cada $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Igualmente es fácil ver que $I\colon \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{C}$ es una integral. Por la proposición 1.2.4, estas extensiones son únicas. □

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio topológico.*

(I) *La restricción de una integral $I \in \mathcal{I}(X)$ al conjunto $\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ es una integral $I|_{\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)} \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$.*

(II) *La restricción de una integral $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ al conjunto $\mathcal{C}_0^+(X)$ es una integral $I|_{\mathcal{C}_0^+(X)} \in \mathcal{I}_+(X)$.*

Demostración. De la positividad de la integral, si $f \in \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$, entonces $I(f) \in [0, \infty)$ para cualquier $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$, lo que demuestra el inciso (II). Para verificar el inciso (I), tomemos $I \in \mathcal{I}(X)$ y $f \in \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ y veamos que $I(f) \in \mathbb{R}$. Como en la demostración anterior, escribimos $f = f^+ - f^-$ con $f^+, f^- \in \mathcal{C}_0^+(X)$. Por la aditividad y homogeneidad, $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$, y, por la positividad, $I(f^+), I(f^-) \in [0, \infty)$. En consecuencia, se tiene $I(f) \in \mathbb{R}$. $\square$

Corolario 1.2.7. *Sea X un espacio topológico. Existen biyecciones*

$$\mathcal{I}(X) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{\sigma'} \mathcal{I}_+(X)$$

tales que $\sigma(I)(f) = I(f)$ para cada $I \in \mathcal{I}(X)$, $f \in \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ y $\sigma'(I)(f) = I(f)$ para cada $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$, $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$.[5]

De ahora en adelante, omitiremos estas biyecciones en la notación, y hablaremos indistintamente de las integrales en $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ y $\mathcal{I}_+(X)$, entendiendo que se pueden extender y restringir naturalmente unas en las otras.

Proposición 1.2.8. *Sea X un espacio topológico e I una integral en X.*

(I) *Si $f, g \in \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$ satisfacen $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $I(f) \geq I(g)$.*

(II) *Si $f \in \mathcal{C}_0(X)$, entonces $\big|I(f)\big| \leq I(|f|)$.*

Demostración.

(I) Sea $h = f - g \in \mathcal{C}_0^+(X)$. Entonces por la positividad y aditividad de la integral,

$$I(f) = I(g + h) = I(g) + I(h) \geq I(g).$$

(II) Si $f \in \mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(X)$, dado que para todo $x \in X$, $-\big|f(x)\big| \leq f(x) \leq \big|f(x)\big|$, del inciso anterior se tiene $\big|I(f)\big| \leq I(|f|)$.

Ahora, si $I(f)$ es real, entonces tenemos

$$I(f) = I(\mathrm{Re}(f)) + iI(\mathrm{Im}(f)) = I(\mathrm{Re}(f))$$

y por el caso anterior $\big|I(f)\big| = \big|I(\mathrm{Re}(f))\big| \leq I(\big|\mathrm{Re}(f)\big|) \leq I(|f|)$.

Finalmente, en general, existe $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ con $I(e^{i\theta} f) = e^{i\theta} I(f) \in \mathbb{R}$. Por el caso anterior,

$$|I(f)| = |e^{i\theta} I(f)| = |I(e^{i\theta} f)| \leq I(|e^{i\theta} f|) = I(|f|).$$ $\square$

[5] Los conjuntos $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ e $\mathcal{I}_+(X)$ son monoides conmutativos con la suma de funciones usual, y al equiparlos con la multiplicación por escalares no negativos, adquieren estructura de semimódulos. Es sencillo verificar que, de hecho, las biyecciones σ y σ' son isomorfismos de semimódulos.

1.3. El teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani

En la sección anterior hemos llamado *integral* a cualquier funcional positivo de $\mathcal{C}_0(X)$ en $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, pero no hemos hablado de integrales en el sentido usual de Lebesgue. Ni siquiera hemos escrito el símbolo $\int$. Esta breve sección está dedicada mostrar que en un espacio topológico X que sea localmente compacto y de Hausdorff, cada funcional positivo de $\mathcal{I}(X)$, que *a priori* llamamos integral, en efecto es la integral de Lebesgue inducida por cierta medida en $\mathcal{B}(X)$, los conjuntos de Borel de X. Este resultado se conoce como el teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani [19, 23, 28].

La construcción de la medida inducida por una integral es ilustrativa, por lo que la incluimos a continuación, pero omitiremos algunas demostraciones de carácter más técnico. Este tratamiento fue tomado de las referencias [12, 31]. Las demostraciones completas se pueden consultar allí.

Definición 1.3.1 (medida de Radon). Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Una medida $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ es una **medida de Radon** [12, 27] si satisface:

(I) Para $x \in X$ existe $U \in \mathcal{B}(X)$ vecindad de x tal que $\mu(U) < \infty$. *(Finitud local)*

(II) Para todo $E \in \mathcal{B}(X)$ abierto o con $\mu(E) < \infty$,[6]

$$\mu(E) = \sup\bigl\{\mu(K) \bigm| K \subseteq E \text{ compacto}\bigr\}. \qquad \textit{(Regularidad interior)}$$

(III) Para todo $E \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(E) = \text{ínf}\bigl\{\mu(U) \bigm| E \subseteq U \subseteq X, U \text{ abierto}\bigr\}. \qquad \textit{(Regularidad exterior)}$$

La finitud local implica que para cada $K \subseteq X$ compacto, $\mu(K) < \infty$, y si X es localmente compacto, ambas propiedades son equivalentes.

Ejemplo 1.3.2 (la medida de Dirac). Sea X un espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto, y $x \in X$ fijo. La medida de Dirac $\delta_x\colon \mathcal{B}(X) \to \{0,1\}$ está dada por

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E, \\ 1 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

[6] Puede parecer extraño que no pidamos que la regularidad interior se satisfaga para todo $E \in \mathcal{B}(X)$. Resulta que el teorema 1.3.4 deja de ser cierto si pedimos esta regularidad más fuerte. El ejemplo que lo evidencia se puede encontrar en la referencia [31, cap. 2 ej. 17, p. 59]. Cabe mencionar que si al teorema 1.3.4 se le añade la hipótesis de que X sea σ-compacto, entonces la medida sí satisface la regularidad interior para todo $E \in \mathcal{B}(X)$ (c.f. [31, teo. 2.17, p. 48]).

Veamos que δ_x es una medida de Radon; la finitud local se tiene porque $\delta_x(E) \leq 1$ para cualquier $E \in \mathcal{B}(X)$.

Verifiquemos la regularidad interior. Si $x \in E \in \mathcal{B}(X)$, entonces $K_0 = \{x\} \subseteq E$ es compacto y $1 = \delta_x(K_0)$, por lo que $\sup\big\{\delta_x(K) \bigm| K \subseteq E \text{ compacto}\big\} = 1 = \delta_x(E)$. Si, por otro lado, $x \notin E$, entonces para cualquier compacto $K \subseteq E$, $x \notin K$ y por lo tanto $0 = \delta_x(K)$. Así, en este caso $\sup\big\{\delta_x(K) \bigm| K \subseteq E \text{ compacto}\big\} = 0 = \delta_x(E)$.

Finalmente, para la regularidad exterior, si $x \in E \in \mathcal{B}(X)$, y $U \supseteq E$ es abierto, entonces $x \in U$, así que $\delta_x(E) = 1 = \inf\big\{\delta_x(U) \bigm| E \subseteq U \subseteq X, U \text{ abierto}\big\}$. Si, por otro lado, $x \notin E$, como X es de Hausdorff, el conjunto $U_0 = X \setminus \{x\} \supseteq E$ es abierto y $0 = \delta_x(U_0)$, por lo que $\inf\big\{\delta_x(U) \bigm| E \subseteq U \subseteq X, U \text{ abierto}\big\} = 0 = \delta_x(E)$.

Ejemplo 1.3.3 (la medida de conteo en $\mathbb{R}$ no es de Radon).
Sobre $\mathbb{R}$, con la topología euclideana, definamos la medida de conteo $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ dada por $\nu(E) = n$ si E tiene n elementos, y $\nu(E) = \infty$ si E es infinito. Entonces ν no es localmente finita, pues $K = [0, 1]$ es compacto pero $\nu(K) = \infty$. Es fácil verificar que ν sí satisface la regularidad interior, pero no la regularidad exterior, pues $\nu(\{0\}) = 1$ pero para cualquier abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in U$, el conjunto U es infinito.

Las medidas de Radon se relacionan directamente con las integrales que definimos en la sección anterior.

Teorema 1.3.4 (de representación de Riesz-Markov-Kakutani (RMK)).
Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Para cada integral $I \in \mathcal{I}(X)$ existe una única medida de Radon $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ tal que para toda función $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$,

$$I(f) = \int f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Por ejemplo, la medida δ_x del ejemplo 1.3.2 es la medida asociada a la integral $I_x \in \mathcal{I}(X)$ dada por $I_x(f) = f(x)$.

Procedemos a demostrar el teorema de representación de RMK siguiendo el camino de la referencia [31]. Para construir la medida buscada, lo natural sería definir $\mu(A) = I(\chi_A)$, donde χ_A es la función característica de $A \in \mathcal{B}(X)$, pero esto conlleva un problema evidente, dado que difícilmente ocurre $\chi_A \in \mathcal{C}_0(X)$, salvo, claro, que $A = \emptyset$. Por lo tanto, no hay forma de evaluar directamente χ_A en I. Sin embargo, esta no es una mala idea. Lo que haremos es aproximar la función característica de A a través de funciones en $\mathcal{C}_0^+(X)$. Esto nos permitirá definir la integral de χ_A y con ello la medida buscada. Para este propósito, introduciremos la siguiente notación.

Definición 1.3.5. Sea X un espacio topológico, $K \subseteq X$ compacto, $U \subseteq X$ abierto y $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$. Escribimos

$$f \prec U$$

para decir que $\operatorname{supp} f \subseteq U$ y $f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ (y entonces $0 \leq f(x) \leq \chi_U(x)$ para todo $x \in X$). Y escribiremos

$$K \prec f$$

para decir que $\chi_K(x) \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ (y entonces $f(x) = 1$ para todo $x \in K$).

El siguiente es un resultado básico del estudio de espacios de Hausdorff y localmente compactos que utilizaremos repetidamente a lo largo de esta tesis.

Teorema 1.3.6 (versión débil del lema de Urysohn). *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto, $U \subseteq X$ un abierto no vacío y $K \subseteq U$ compacto. Entonces existe $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$ tal que*

$$K \prec f \prec U.$$

Demostración. Para cada $x \in U$ existe $N_x \subseteq U$ una vecindad compacta de x. Entonces $K \subseteq \bigcup_{x \in K} \operatorname{int} N_x$. Por compacidad, existe $F \subseteq K$ finito con

$$K \subseteq V = \bigcup_{x \in F} \operatorname{int} N_x.$$

Además $\operatorname{cl} V \subseteq \bigcup_{x \in F} N_x$, por lo que $\operatorname{cl} V$ es compacto y $K \subseteq V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$. Como $\operatorname{cl} V$ es compacto y Hausdorff, es normal. Entonces, por el lema de Urysohn,[7] existe $f \colon \operatorname{cl} V \to [0,1]$ continua y tal que $f(K) \subseteq \{1\}$ y $f(\operatorname{cl} V \setminus V) \subseteq \{0\}$. Si extendemos a $f \colon X \to [0,1]$ definiendo $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus \operatorname{cl} V$, es fácil verificar que f es continua. Además, tenemos $\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$ y $\chi_K(x) \leq f(x) \leq \chi_U(x)$ para todo $x \in X$. □

La unicidad de la representación de RMK se sigue fácilmente del teorema anterior.

Corolario 1.3.7 (unicidad de la representación de RMK). *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto, $I \in \mathcal{I}(X)$ una integral y $\mu, \mu' \colon \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ medidas de Radon tales que para toda función $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$,*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = I(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu'(x).$$

Entonces $\mu = \mu'$.

---

[7] C.f. [10, 1.5.11, p. 41]

Demostración. Por la regularidad exterior, basta probar que μ y μ' coinciden en los abiertos de X. Sean $U \subseteq X$ abierto y $\varepsilon > 0$. Por la regularidad interior, existe $K \subseteq U$ compacto tal que $\mu(K) + \varepsilon \geq \mu(U)$.

Por la versión débil del lema de Urysohn (teorema 1.3.6), existe $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$ con $K \prec f \prec U$. Luego

$$\begin{aligned}\mu(U) - \varepsilon \leq \mu(K) = \int \chi_K(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = I(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu'(x) \\ \leq \int \chi_U(x)\,\mathrm{d}\mu'(x) = \mu'(U).\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, $\mu(U) \leq \mu'(U)$. Intercambiando μ y μ' en el razonamiento anterior, se obtiene que $\mu'(U) \leq \mu(U)$, por lo que $\mu = \mu'$. $\square$

Fijemos X un espacio de Hausdorff y localmente compacto, y una integral $I \in \mathcal{I}(X)$. Procedemos a construir la medida del teorema de representación de RMK (teorema 1.3.4).

Definimos, para cada abierto $U \subseteq X$,

$$\mu(U) = \sup\bigl\{I(f) \bigm| f \prec U\bigr\}, \tag{$\star$}$$

y en general, para cualquier $E \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(E) = \operatorname{ínf}\bigl\{\mu(U) \bigm| E \subseteq U \subseteq X, U \text{ abierto}\bigr\}. \tag{$\star\star$}$$

En el caso de que E sea abierto, el ínfimo en ($\star\star$) es un mínimo, por lo que las definiciones ($\star$) y ($\star\star$) son consistentes. Construida de esta manera, la función μ inmediatamente satisface la regularidad exterior.

Proposición 1.3.8. *La función $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ definida en ($\star$) y ($\star\star$) satisface:*

(I) *μ es una medida de Radon.*

(II) *Para cada $U \subseteq X$ abierto, $\mu(U) = \sup\bigl\{I(f) \bigm| f \prec U\bigr\}$.*

(III) *Para cada $K \subseteq X$ compacto, $\mu(K) = \operatorname{ínf}\bigl\{I(f) \bigm| K \prec f\bigr\}$.*

(IV) *Para cada $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $I(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.*

La propiedad (II) se tiene directamente de la definición. La demostración del resto de estas propiedades no resulta particularmente ilustrativa para el enfoque de este trabajo, pero el lector que esté interesado en ello puede consultar una demostración detallada en la referencia [31, pp. 42-47]. Las propiedades (I) y (IV) son justamente las enunciadas en el teorema de representación de RMK (teorema 1.3.4).

1.4. La $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Baire

Para ciertos tratamientos, como el que presentaremos en el capítulo 3, la σ-álgebra de Borel resulta demasiado *grande*. La idea de esta sección es explorar hasta qué grado es posible reducir el número de subconjuntos medibles de un espacio localmente compacto y de Hausdorff X, sin sacrificar la mensurabilidad de las funciones en $\mathcal{C}_0^+(X)$.

Dividimos esta sección en dos. En el apartado 1.4.A, definiremos el concepto de conjunto de Baire, y veremos algunas propiedades importantes de estos objetos. En el apartado 1.4.B, veremos cómo las medidas de Baire, que se definen sobre la σ-álgebra de conjuntos de Baire, se conectan con las medidas de Radon que estudiamos en la sección anterior. El tratamiento que presentaremos en ambos apartados está basado en las referencias [16, 30].

1.4.A. Conjuntos de Baire

Definición 1.4.1 (σ-álgebra de Baire). Sea X un espacio topológico. La **$\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Baire**, $\boldsymbol{\mathcal{B}a}(X)$, es la σ-álgebra más pequeña para X en la cual cada $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$ es medible. Es decir, $\boldsymbol{\mathcal{B}a}(X)$ es la σ-álgebra generada por

$$\{f^{-1}([a,\infty)) \mid a \geq 0, f \in \mathcal{C}_0^+(X)\}.$$

A los elementos de $\boldsymbol{\mathcal{B}a}(X)$ los llamamos los **conjuntos de Baire** de X.[(8)]

Dado que las funciones en $\mathcal{C}_0^+(X)$ son medibles respecto a $\mathcal{B}(X)$, todo conjunto de Baire es un conjunto de Borel. Es decir, $\boldsymbol{\mathcal{B}a}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. A continuación, daremos una caracterización de la σ-álgebra de Baire en espacios topológicos de Hausdorff y localmente compactos.

Definición 1.4.2. Sea X un espacio topológico. Denotemos por $G_\delta^0(X)$ a la familia de subconjuntos compactos y G_δ de X.

Lema 1.4.3. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff.*

(I) *Para toda $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$ y $F \subseteq (0,\infty)$ cerrado, $f^{-1}(F) \in G_\delta^0(X)$.*

(II) *Si $C \in G_\delta^0(X)$, existen $f_n \in \mathcal{C}_0^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([1,\infty))$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_C$ (puntualmente).*

(8) Un número considerable de conceptos en topología y análisis llevan el apellido de René-Louis Baire. Los conjuntos de Baire que hemos definido aquí no deben confundirse con los conjuntos que satisfacen la llamada *propiedad de Baire* que, por una desafortunada coincidencia, también forman una σ-álgebra. Nosotros no trabajaremos con la propiedad de Baire (ni con *espacios de Baire*, *funciones de Baire* o el *teorema de categoría de Baire*).

Demostración.

(I) Sea $K = f^{-1}(F)$ con $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$. Dado que F es cerrado en el espacio métrico $\mathbb{R}$, debe ser G_δ. Por continuidad, $f^{-1}(F)$ es G_δ y cerrado en X. Como $0 \notin F$, tenemos que $f^{-1}(F)$ está contenido en el compacto $\operatorname{supp} f$ y entonces $f^{-1}(F)$ es compacto.

(II) Sea $C \in G_\delta^0(X)$. Por ser G_δ, tenemos que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ donde $V_n \subseteq X$ es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $U_n = \bigcap_{i=1}^n V_i$, de manera que $U_{n+1} \subseteq U_n$ y $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Por la versión débil del lema de Urysohn (teorema 1.3.6), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in \mathcal{C}_0^+(X)$ con $f_n(C) \subseteq \{1\}$, $f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ y $\operatorname{supp} f_n \subseteq U_n$. De inmediato concluimos que $C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(\{1\})$. Inversamente, si $f_n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} f_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = C.$$

Con ello $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(\{1\}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([1,\infty))$. Evidentemente $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_C$ (puntualmente). □

Proposición 1.4.4. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Entonces $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ es la σ-álgebra generada por $G_\delta^0(X)$.*

Demostración. Denotemos por $\sigma(G_\delta^0(X))$ a la σ-álgebra generada por $G_\delta^0(X)$.

Sea $C \in G_\delta^0(X)$. Por el lema 1.4.3 (II), existen $f_n \in \mathcal{C}_0^+(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ tales que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([1,\infty)) \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Esto muestra que $\sigma(G_\delta^0(X)) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$.

Para la otra contención, sea $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$. Por el lema 1.4.3 (I), para cada $a > 0$, $f^{-1}([a,\infty)) \in G_\delta^0(X)$. Además, si $a = 0$, entonces $f^{-1}([a,\infty)) = X$. En cualquier caso se cumple que $f^{-1}([a,\infty)) \in \sigma(G_\delta^0(X))$ y por lo tanto $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \subseteq \sigma(G_\delta^0(X))$. □

Ejemplo 1.4.5 (los números reales). Resulta que $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En efecto, por la proposición 1.4.4,

$$\mathcal{B}\boldsymbol{a}(\mathbb{R}) = \sigma(G_\delta^0(\mathbb{R})),$$

pero, como $\mathbb{R}$ es metrizable, todos sus subconjuntos cerrados son G_δ, y entonces $G_\delta^0(\mathbb{R})$ es solo el conjunto de compactos de $\mathbb{R}$. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra generada por los cerrados de $\mathbb{R}$, para ver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\mathbb{R})$, basta que veamos que todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$ es σ-compacto (unión numerable de compactos). Pero esto es cierto, pues

$$F = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F \cap [-m, m],$$

donde cada $F \cap [-m, m]$ es cerrado y acotado.

Si bien en $\mathbb{R}$ los conjuntos de Baire y de Borel coinciden, esto no ocurre siempre. Hay espacios topológicos donde son muy diferentes.

Ejemplo 1.4.6 (espacios discretos). Sea X un espacio topológico discreto. Entonces $\mathcal{B}(X)$ contiene a todos los subconjuntos de X, puesto que todos son abiertos. Por otro lado, como todos los compactos de X son finitos, $G_\delta^0(X) = \{F \subseteq X | F \text{ es finito}\}$, y entonces de la proposición 1.4.4 deducimos que

$$\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) = \sigma(G_\delta^0(X)) = \{N \subseteq X \mid N \text{ es numerable o } X \setminus N \text{ es numerable}\}.$$

Por lo tanto, si X es discreto, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ ocurre si y solamente si X es numerable.

Los conjuntos de Baire guardan relaciones especiales con las bases y los homeomorfismos de los espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff. Además, a diferencia de la σ-álgebra de Borel, la σ-álgebra de Baire se comporta bien con los productos topológicos. En lo que resta de este apartado, precisaremos y demostraremos estas relaciones. Para poder hacer esto, debemos primero estudiar algunas propiedades de los conjuntos en $G_\delta^0(X)$.

Proposición 1.4.7. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Sea U un abierto y $C \subseteq U$ compacto. Entonces existen $K \in G_\delta^0(X)$ y V abierto σ-compacto tales que*

$$C \subseteq V \subseteq K \subseteq U.$$

Demostración. Por la versión débil del lema de Urysohn (teorema 1.3.6), existe una función $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$ con $\operatorname{supp} f \subseteq U$, $f(C) \subseteq \{1\}$ y $f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. Sean

$$V = f^{-1}((1/2, 2)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, 2 - \frac{1}{n}\right]\right)$$

y $K = f^{-1}([1/2, 2])$, que por el lema 1.4.3 (i) son σ-compactos y compacto G_δ, respectivamente. De inmediato se satisfacen las contenciones del enunciado. □

Proposición 1.4.8. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff.*

(i) *Si $K \in G_\delta^0(X)$, entonces existe una familia numerable $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de abiertos σ-compactos tal que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Más aún, cada V_n está contenido en un conjunto compacto y G_δ.*

(ii) *Si $V \subseteq X$ es abierto y σ-compacto, entonces existe una familia numerable $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq G_\delta^0(X)$ tal que $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Más aún, cada K_n contiene un conjunto abierto y σ-compacto.*

Demostración.

(I) Como K es G_δ, entonces $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ para algunos abiertos U_n. Por la proposición 1.4.7, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $K_n \in G_\delta^0(X)$ y V_n abierto σ-compacto con

$$K \subseteq V_n \subseteq K_n \subseteq U_n.$$

Luego $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

(II) Como V es σ-compacto, entonces $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ para algunos compactos C_n. Por la proposición 1.4.7, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $K_n \in G_\delta^0(X)$ y V_n abierto σ-compacto con

$$C_n \subseteq V_n \subseteq K_n \subseteq V.$$

Luego $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.(9) □

Corolario 1.4.9. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Entonces si $V \subseteq X$ es abierto y σ-compacto, $V \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$.*

Demostración. Es una consecuencia directa del inciso (II) de la proposición 1.4.8. □

Con los resultados anteriores, podemos mostrar las relaciones que guardan los conjuntos de Baire con las topologías localmente compactas y de Hausdorff. Primero veamos que la σ-álgebra de Baire siempre está contenida en cualquier σ-álgebra generada por una base para la topología.

Proposición 1.4.10. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Si $\mathscr{B}$ es una base para X, entonces $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \subseteq \sigma(\mathscr{B})$.*

Demostración. Sea $K \in G_\delta^0(X)$. Digamos que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ para algunos abiertos $U_n \subseteq X$. Como $\mathscr{B}$ es una base, para cada $x \in K \subseteq U_n$ existe $B_x^{(n)} \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x^{(n)} \subseteq U_n$. Dado que K es compacto y $K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_x^{(n)}$, existe un subconjunto finito $F_n \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{x\in F_n} B_x^{(n)} \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in F_n} B_x^{(n)} \in \sigma(\mathscr{B}).$$

Por la proposición 1.4.4, $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \subseteq \sigma(\mathscr{B})$. □

Otra propiedad importante es que las σ-álgebras de Baire se preservan bajo homeomorfismos entre espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff.

(9)Hay una interesante simetría entre los incisos (I) y (II). Los enunciados y sus demostraciones son casi idénticos, solo intercambiando la palabra *abierto* con la palabra *compacto* y el símbolo $\bigcap$ con el símbolo $\bigcup$. En espacios localmente compactos y de Hausdorff, hay una evidente dualidad entre la propiedad "abierto y σ-compacto" y la propiedad "compacto y G_δ".

Proposición 1.4.11. *Sean X y Y espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff. Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f(A) \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$ si y solamente si $A \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$.*

Demostración. Definamos $f(\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)) = \{f(A) \mid A \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)\}$. Es fácil verificar que $f(\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X))$ es una σ-álgebra. Ahora, si $K \in G_\delta^0(Y)$, entonces por ser f homeomorfismo, $f^{-1}(K) \in G_\delta^0(X) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. De inmediato $K \in f(\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X))$ y entonces $f(\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$. Aplicando el mismo argumento para f^{-1}, se verifica que $f^{-1}(\mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$, y entonces $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y) = f(\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X))$. □

Finalmente, veamos que la σ-álgebra de Baire se comporta bien con los productos topológicos. Si dos espacios X y Y no tienen bases numerables, entonces puede haber conjuntos en $\mathcal{B}(X \times Y)$ que no estén en $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, incluso en espacios compactos.

Ejemplo 1.4.12 (no necesariamente $\mathcal{B}(X \times X) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$).
Sea X un espacio compacto y de Hausdorff con cardinalidad mayor que la del conjunto de números reales (por ejemplo, $X = T^{\mathbb{R}} = \prod_{x\in\mathbb{R}} T$ con $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$ compacto). Consideremos la diagonal

$$D_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$

Como X es de Hausdorff, D_X es cerrada y entonces $D_X \in \mathcal{B}(X \times X)$. Veamos que D_X no es un elemento de $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Si lo fuera, debería existir una familia numerable de rectángulos $R_n = A_n \times B_n \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$ con $D_X \in \sigma(\mathscr{R})$, la σ-álgebra generada por $\mathscr{R} = \{R_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.(10) Si definimos la familia

$$\mathscr{L} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

tenemos que $D_X \in \sigma(\mathscr{L}) \otimes \sigma(\mathscr{L})$, y entonces cada sección de D_X está en $\sigma(\mathscr{L})$. Pero $\sigma(\mathscr{L})$ tiene a lo más cardinalidad $|\mathscr{L}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$,(11) y la cardinalidad del conjunto de secciones de D_X es $|X| > |\mathbb{R}|$, una contradicción.

En espacios localmente compactos, σ-compactos y de Hausdorff, este obstáculo desaparece si en vez trabajamos con la σ-álgebra de Baire.

Teorema 1.4.13. *Sean X y Y espacios topológicos localmente compactos, σ-compactos y de Hausdorff. Entonces $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y) = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y)$*

Demostración. Por la proposición 1.4.4, $\sigma(G_\delta^0(X)) = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ y $\sigma(G_\delta^0(Y)) = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$.

(10)Si E es elemento de la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$, entonces existe $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$ numerable y tal que $E \in \sigma(\mathcal{N})$. Esto dado que la unión de todas las σ-álgebras generadas por subconjuntos numerables de $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra contenida en $\sigma(\mathcal{F})$ que contiene a $\mathcal{F}$.
(11)C.f. [16, sec. 5 ej. 9c, p. 26]

Entonces se tiene que $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y) = \sigma(\mathscr{R})$ donde

$$\mathscr{R} = \{A \times B \mid A \in G_\delta^0(X) \cup \{X\}, B \in G_\delta^0(Y) \cup \{Y\}\}.$$

Sean $A \in G_\delta^0(X)$ y $B \in G_\delta^0(Y)$. De inmediato $A \times B \in G_\delta^0(X \times Y)$. Además, como Y es σ-compacto, por la proposición 1.4.8 (II), $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ con $K_n \in G_\delta^0(Y)$. Entonces

$$A \times Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \times K_n \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y).$$

Similarmente se verifica que $X \times B, X \times Y \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y)$, y por lo tanto tenemos $\mathscr{R} \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y)$ y entonces $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y)$.

Inversamente, si $U \subseteq X \times Y$ es abierto y $(x, y) \in U$, existe un rectángulo $U_X \times U_Y \subseteq U$ con $x \in U_X$ y $y \in U_Y$ abiertos no vacíos de X y Y, respectivamente. Por la proposición 1.4.7, existen $V_X \subseteq U_X$ y $V_Y \subseteq U_Y$ abiertos σ-compactos tales que $x \in V_X$ y $y \in V_Y$, y entonces $(x, y) \in V_X \times V_Y \subseteq U$. Esto muestra que el conjunto

$$\mathscr{B} = \{V_X \times V_Y \mid V_X \subseteq X, V_Y \subseteq Y \text{ son abiertos y } \sigma\text{-compactos}\}$$

es una base para $X \times Y$. Por la proposición 1.4.10, $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y) \subseteq \sigma(\mathscr{B})$. Además, si $V_X \times V_Y \in \mathscr{B}$, el corolario 1.4.9 garantiza que $V_X \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ y $V_Y \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$, y entonces $\sigma(\mathscr{B}) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$. Por lo tanto, $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$. □

1.4.B. Medidas de Baire

Así como hicimos con las medidas de Radon definidas sobre la σ-álgebra de Borel, resulta interesante estudiar medidas localmente finitas (finitas en compactos) definidas sobre la σ-álgebra de Baire. En esta sección veremos que estas medidas tienen propiedades muy útiles, y además guardan una relación estrecha con las medidas de Radon.

Definición 1.4.14 (medida de Baire). Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Una medida $\mu\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \to [0, \infty]$ es una **medida de Baire** si para todo compacto $C \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ se cumple que $\mu(C) < \infty$.

Proposición 1.4.15. *Sean X y Y espacios topológicos σ-compactos, localmente compactos y de Hausdorff y $\mu_X\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \to [0, \infty]$, $\mu_Y\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y) \to [0, \infty]$ medidas de Baire. Entonces la medida producto $\mu_X \times \mu_Y\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y) \to [0, \infty]$ es una medida de Baire.*

Demostración. Primero notemos que $\mu_X \times \mu_Y\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y) \to [0, \infty]$ está bien definida. Para que exista la medida producto, μ_X y μ_Y deben ser σ-finitas. Dado que los espacios X y Y son σ-compactos, por la proposición 1.4.8 (II) existen cubiertas numerables $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ y $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ con $K_n \in G_\delta^0(X)$ y $L_n \in G_\delta^0(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como μ_X y μ_Y son medidas de Baire, tenemos que $\mu_X(K_n) < \infty$ y $\mu_Y(L_n) < \infty$ y por lo tanto μ_X y μ_Y son σ-finitas. Además, la medida producto está naturalmente definida sobre $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(Y)$, el cual es igual a $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y)$ por el teorema 1.4.13.

Ahora sí, demostremos que $\mu_X \times \mu_Y \colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y) \to [0,\infty]$ es una medida de Baire. Si $C \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X \times Y)$ es compacto, entonces $C \subseteq C_X \times C_Y$, donde $C_X = \pi_X(C)$ y $C_Y = \pi_Y(C)$ son compactos dado que las proyecciones $\pi_X \colon X \times Y \to X$ y $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$ son continuas. Por la proposición 1.4.7 existen $K_X \in G_\delta^0(X)$ y $K_Y \in G_\delta^0(Y)$ tales que $C_X \subseteq K_X$ y $C_Y \subseteq K_Y$. Luego $C \subseteq K_X \times K_Y$ y por lo tanto

$$(\mu_X \times \mu_Y)(C) \leq (\mu_X \times \mu_Y)(K_X \times K_Y) = \mu_X(K_X)\mu_Y(K_Y) < \infty. \qquad \square$$

La proposición 1.4.15 muestra una de las ventajas de trabajar con medidas de Baire. Al construir la medida producto en espacios localmente compactos, σ-compactos y de Hausdorff, esta naturalmente vuelve a ser una medida de Baire. Esto no sucede necesariamente con las medidas de Radon, ya que están definidas sobre la σ-álgebra de Borel, que no se comporta bien con los productos topológicos (ver ejemplo 1.4.12). Otra ventaja que tienen estas medidas es que, si bien tuvimos que pedir la regularidad en la definición de medida de Radon, en el caso de las medidas de Baire, la regularidad viene *incluida*.

Teorema 1.4.16. *Sean X un espacio topológico localmente compacto, σ-compacto y de Hausdorff y $\mu \colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \to [0,\infty]$ una medida de Baire. Entonces μ es regula, es decir, para cada $E \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ se satisfacen las siguientes dos condiciones.*

(I) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in G_\delta^0(X), K \subseteq E\}$. (Regularidad interior) [(12)]

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \supseteq E$ abierto y σ-compacto con $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$.* (Regularidad exterior)

Demostración. Demostremos primero la siguiente afirmación.

Afirmación 1. *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ con $\mu(E_n) < \infty$ satisface las regularidades interior y exterior, entonces $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ también las satisface.*

[(12)]Puede parecer restrictivo que solo tomemos el supremo sobre $K \in G_\delta^0(X)$ y no sobre todos los compactos de $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Sin embargo, esta restricción es solo aparente; si X es localmente compacto y de Hausdorff, y $K \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ es compacto, entonces $K \in G_\delta^0(X)$. La demostración se realiza escribiendo a K como la preimagen continua de un compacto en un espacio métrico. La construcción de tal espacio métrico no es trivial. Los detalles se pueden encontrar en la referencia [16, sec. 51, teo. D]. Nosotros no utilizaremos este resultado.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de E_n, existe $K_n \in G_\delta^0(X)$ y U_n abierto σ-compacto con

$$\mu(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} > \mu(E_n) \qquad \text{y} \qquad \mu(U_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

y $K_n \subseteq E_n \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es abierto, σ-compacto y $A \cap K \subseteq U$. Además

$$\mu(U \setminus E) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus E\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus E_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Con esto, E satisface la regularidad exterior.

Para verificar la regularidad interior, definamos $M_N = \bigcup_{n=1}^N K_n \in G_\delta^0(X)$. Tenemos $M_N \subseteq E$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) \leq \mu(M_N) + \sum_{n=1}^{N} \big(\mu(E_n) - \mu(K_n)\big) < \mu(M_N) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Si $\mu(E) = \infty$, tomando el límite cuando $N \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{N\to\infty} \mu(M_N) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) = \mu(E) = \infty,$$

y entonces $\lim_{N\to\infty} \mu(M_N) = \infty$, dándonos la regularidad interior.

Si $\mu(E) < \infty$, sea $M = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} M_N \subseteq E$ de medida finita. Entonces $\mu(M) = \lim_{N\to\infty} \mu(M_N)$ y para alguna N_0 suficientemente grande, $\mu(M_{N_0}) + \varepsilon/2 > \mu(M)$. Luego

$$\begin{aligned}\mu(E) - \mu(M_{N_0}) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(M) &= \frac{\varepsilon}{2} + \lim_{N\to\infty} \left(\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) - \mu(M_N)\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

En ambos casos, E satisface la regularidad interior, lo cual prueba la afirmación. ■

Sea $\mathcal{R}$ la familia de conjuntos $A \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ tales que para todo $K \in G_\delta^0(X)$, $E = A \cap K$ cumple las dos condiciones de regularidad. Demostraremos que $\mathcal{R} = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Por la proposición 1.4.4, basta que verifiquemos que $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra que contiene a

$G^0_\delta(X)$. Sean $A, K \in G^0_\delta(X)$. Entonces $E = A \cap K \in G^0_\delta(X)$, por lo que E satisface la regularidad interior. Verifiquemos la regularidad exterior. Por la proposición 1.4.8 (I), existen abiertos σ-compactos U_n tales que $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Más aún, cada U_n está contenido en un conjunto compacto y G_δ, y por lo tanto $\mu(U_n) < \infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $U_{n+1} \subseteq U_n$. Entonces

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n)$$

y obtenemos la regularidad exterior, por lo que efectivamente $A \in \mathcal{R}$ y entonces $G^0_\delta(X) \subseteq \mathcal{R}$.

Veamos que $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra. Si $A_n \in \mathcal{R}$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces, por la afirmación 1, $A \cap K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap K$ satisface las regularidades para cada $K \in G^0_\delta(X)$. Inmediatamente deducimos que $A \in \mathcal{R}$. Ahora sea $A \in \mathcal{R}$ y verifiquemos que $X \setminus A \in \mathcal{R}$. Sea $K \in G^0_\delta(X)$. Debemos ver que $K \setminus A$ satisface las regularidades. Tomemos $\varepsilon > 0$.

Como $A \cap K$ satisface la regularidad exterior, existe U abierto y σ-compacto con $A \cap K \subseteq U$ y $\mu(U) - \varepsilon < \mu(A \cap K)$. Sea $M = K \setminus U \subseteq K \setminus A$. Como M es cerrado en el compacto K, es compacto. Y como U es σ-compacto, es fácil ver que M es un G_δ. Además

$$\mu(M) + \varepsilon > \mu(K \setminus U) + \mu(U) - \mu(A \cap K) \geq \mu(K) - \mu(A \cap K) = \mu(K \setminus A).$$

Entonces $K \setminus A$ cumple la regularidad interior.

Por otro lado, como $A \cap K$ satisface la regularidad interior, existe $M \in G^0_\delta(X)$ con $M \subseteq A \cap K$ y $\mu(M) + \varepsilon/2 > \mu(A \cap K)$. Además, por la regularidad exterior de K, existe un abierto σ-compacto V con $K \subseteq V$ y $\mu(V \setminus K) < \varepsilon/2$. Sea $U = V \setminus M$ abierto. Utilizando que $U \subseteq V$ y M es G_δ, es fácil ver que U es σ-compacto. Luego, tenemos $K \setminus A \subseteq U$ y

$$\mu(U) - \varepsilon < \mu(V \setminus M) + \mu(M) - \mu(A \cap K) - \mu(V \setminus K) \leq \mu(K) - \mu(A \cap K) = \mu(K \setminus A).$$

Y por lo tanto $K \setminus A$ cumple la regularidad exterior.

Con lo anterior hemos demostrado que $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra que contiene a $G^0_\delta(X)$ y entonces $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) = \mathcal{R}$. Ahora, usaremos que X es σ-compacto para demostrar que cada $E \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ cumple las regularidades. Por la proposición 1.4.8 (II), sabemos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con $X_n \in G^0_\delta(X)$. Así, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n = E \cap X_n$ que satisface las regularidades. Por la afirmación 1, E satisface las regularidades. $\square$

Parece que trabajar con medidas de Baire tiene múltiples ventajas sobre las medidas de Radon. Pero no nos serviría de nada si es que perdemos la diversidad de posibles medidas de Radon en $\mathcal{B}(X)$ al restringirnos solo a las medidas de Baire en $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$.

Afortunadamente, en espacios localmente compactos, σ-compactos y de Hausdorff, la familia de medidas de Radon es justamente la familia de medidas de Baire, en el siguiente sentido.

Teorema 1.4.17. *Sea X un espacio topológico localmente compacto, σ-compacto y de Hausdorff. Toda medida de Radon en $\mathcal{B}(X)$ es una medida de Baire al restringirse a $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Inversamente, toda medida de Baire en $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ se extiende a una única medida de Radon en todo $\mathcal{B}(X)$.*

Demostración. La primera parte es evidente.

Para demostrar la segunda parte, sea $\mu\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \to [0,\infty]$ una medida de Baire. Definimos $I(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ para cada $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$. Evidentemente I es una integral, y por el teorema de representación de RMK (teorema 1.3.4), existe una medida única medida de Radon $\overline{\mu}\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ tal que $I(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(x)$ para cada $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Veamos que $\overline{\mu}(E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Por la regularidad interior de μ (teorema 1.4.16), basta demostrarlo solo para $E \in G_\delta^0(X)$. Por el lema 1.4.3 (II), existe una sucesión $f_n \in \mathcal{C}_0^+(X)$ con $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([1,\infty))$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_E$ (puntualmente). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si no, basta redefinir, $f_n' = \min\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$. Por el teorema de convergencia monótona para sucesiones decrecientes,[13]

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(x) = \overline{\mu}(E).$$

Finalmente, para verificar la unicidad, supongamos que $\overline{\mu}'\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ es otra medida de Radon que también coincide con μ en $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Para cada $f \in \mathcal{C}_0^+(X)$, las integrales $\int f(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(x)$ y $\int f(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}'(x)$ solo dependen de los valores de las medidas en $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ y, por lo tanto, son iguales.[14] Por la unicidad del teorema de representación de RMK (teorema 1.3.4), $\overline{\mu} = \overline{\mu}'$. □

Definición 1.4.18 (contracción de Baire). Sean X un espacio localmente compacto, σ-compacto y de Hausdorff y $\overline{\mu}\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ una medida de Radon. Llamamos a $\mu = \overline{\mu}|_{\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)}$ la **contracción de Baire** de $\overline{\mu}$.

Observación 1.4.19. Sea X un espacio topológico localmente compacto, σ-compacto y de Hausdorff. Una medida de Radon $\overline{\mu}$ en X es σ-finita si y solamente si su contracción de Baire μ lo es.

(13) C.f. [31, teo. 1.26 (p. 21) y ej. 1.7 (p. 32)]

(14) Una manera sencilla de verificar este hecho es notar que las medidas imagen de $\overline{\mu}$ y $\overline{\mu}'$ bajo la función identidad $i\colon (X,\mathcal{B}(X)) \to (X,\mathcal{B}\boldsymbol{a}(X))$ son iguales. Es decir, $\overline{\mu}\circ i^{-1} = \overline{\mu}'\circ i^{-1}\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X) \to [0,\infty]$. Así, $\int f(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(x) = \int (f\circ i)(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}(\overline{\mu}\circ i^{-1})(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}(\overline{\mu}'\circ i^{-1})(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}'(x)$.

Demostración. Si μ es σ-finita evidentemente $\overline{\mu}$ también. Inversamente, supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n \in \mathcal{B}(X)$ y $\overline{\mu}(E_n) < \infty$. Por la regularidad interior de $\overline{\mu}$ (teorema 1.4.16), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un compacto $C_n \subseteq E_n$ con $\overline{\mu}(E_n \setminus C_n) < 1/2^n$. Por la proposición 1.4.7, existe $K_n \in G^0_\delta(X)$ con $C_n \subseteq K_n$. Sea $K_0 = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$. Entonces

$$\mu(K_0) \leq \overline{\mu}\Big(X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big) \leq \overline{\mu}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \setminus C_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Por lo tanto, $X = K_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ con $K_n \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(X)$ y $\mu(K_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Cerramos esta sección con una nota de carácter histórico. El nombre de conjuntos *de Baire* viene heredado del análisis funcional, donde se estudia el concepto de *función de Baire* [2]. Estas funciones forman la familia más pequeña que contiene a las funciones continuas y es cerrada bajo convergencia puntual. Es sencillo verificar –utilizando la proposición 1.4.4 y el inciso (ii) del lema 1.4.3– que si un conjunto es de Baire en un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, su función característica es una función de Baire. Inversamente, si el espacio es además σ-compacto, los conjuntos de Baire son los únicos conjuntos de Borel cuya función característica es de Baire, aunque la demostración de este segundo hecho resulta más complicada (c.f. [16, sec. 52 ej. 6, p. 223]). Si bien no hablaremos más de funciones de Baire en este trabajo, los conjuntos y medidas de Baire nos resultarán bastante útiles en el capítulo 3.

Capítulo 2

El teorema de Haar

En un grupo topológico G, así como en cualquier espacio topológico, es posible definir integrales de funciones en $\mathcal{C}_0(G)$. Consideremos, por ejemplo, el grupo de los números reales $G = \mathbb{R}$ con la suma. Tenemos la integral usual dada por $I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ para cada $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Esta integral es invariante bajo *traslaciones*. Es decir, para cada $r \in \mathbb{R}$, la función ${}_rf \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ dada por ${}_rf(x) = f(r + x)$ satisface que

$$I({}_rf) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r + x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = I(f).$$

Ahora, si pensamos en el grupo $G = (0, \infty)$ con el producto y no la suma, la misma integral $I(f) = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ no es invariante respecto a esta operación. Es decir, si tomamos $r > 0$, la función ${}_rf = f(rx)$ satisface ${}_rf \in \mathcal{C}_0(G)$, pero usando el teorema de cambio de variable con $u = rx$, se obtiene

$$I({}_rf) = \int_0^{\infty} f(rx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{r} I(f).$$

Sin embargo, podemos definir otra integral, un poco menos usual, $H(f) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\,\mathrm{d}x$, de tal manera que

$$H({}_rf) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(rx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} f(u)\,\mathrm{d}u = H(f).$$

Es natural preguntarse si se puede hacer esto siempre. ¿Qué condiciones hay que pedirle al grupo para poder encontrar una integral invariante? El teorema de Haar establece que lo único necesario es compacidad local. Y más aún, en este caso la integral invariante es única salvo por múltiplos reales positivos.

Este capítulo contiene dos secciones. En la sección 2.1 enunciaremos y demostraremos el teorema de Haar siguiendo un camino diferente al que se encuentra en la mayoría de los libros de texto. La sección 2.2 está dedicada a reescribir todos los resultados obtenidos en la sección 2.1 para hablar de medidas de Radon en vez de integrales. Esto es posible gracias al teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani.

2.1. La integral de Haar

Primero generalicemos las notaciones que introducimos en la discusión anterior.

Definición 2.1.1 (traslación de una función). Sea G un grupo, A un conjunto arbitrario y $f\colon G \to A$. Dado $x \in G$, denotamos a la **traslación izquierda** de f por x como ${}_xf\colon G \to A$ dada por ${}_xf(y) = f(xy)$ para cada $y \in G$. Análogamente, la **traslación derecha** es $f_x\colon G \to A$ dada por $f_x(y) = f(yx)$ para cada $y \in G$.

Ejemplo 2.1.2. En el grupo de los números reales con la suma, consideremos la función $\mathrm{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces para cada $y \in \mathbb{R}$,

$$ {}_{\pi/2}\mathrm{sen}(y) = \mathrm{sen}(\pi/2 + y) = \cos(y). $$

Por lo que ${}_{\pi/2}\mathrm{sen} = \cos$.

Del inciso (III) de la proposición 1.1.6 se sigue que, en el caso en el que G es un grupo topológico y $f\colon G \to \mathbb{C}$,

$$ \mathrm{supp}({}_xf) = x^{-1}(\mathrm{supp} f) \quad \text{y} \quad \mathrm{supp}(f_x) = (\mathrm{supp} f)x^{-1} $$

para todo $x \in G$. Por lo que si f es un elemento de $\mathcal{C}_0(G)$, $\mathcal{C}_0^+(G)$ o $\mathcal{C}_0^{\mathbb{R}}(G)$, entonces ${}_xf$ y f_x vuelven a ser un elemento de la misma familia de funciones.

Definición 2.1.3 (integral de Haar). Sea G un grupo topológico. Una **integral izquierda (derecha) de Haar** en G es una integral H en $\mathcal{I}(G)$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(G)$ o $\mathcal{I}_+(G)$ que es no nula e invariante bajo traslaciones izquierdas (derechas). Es decir, $H({}_xf) = H(f)$ ($H(f_x) = H(f)$) para toda f en el dominio de H y $x \in G$.

Las biyecciones entre las familias $\mathcal{I}(G)$, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(G)$ e $\mathcal{I}_+(G)$ dadas por el corolario 1.2.7 envían integrales de Haar en integrales de Haar, por lo que podemos hablar de una integral de Haar en G sin especificar a cuál de estas familias de integrales pertenece.

Ejemplo 2.1.4. Consideremos un grupo cualquiera G con la topología discreta. Si $f \in \mathcal{C}_0(G)$, entonces $S_f = \mathrm{supp} f$ es finito dado que es compacto y discreto. La integral

$$ H(f) = \sum_{y \in S_f} f(y) $$

es una integral de Haar izquierda y derecha. En efecto, para $x \in G$,

$$ H({}_xf) = \sum_{y \in x^{-1}S_f} f(xy) = \sum_{y \in S_f} f(xx^{-1}y) = \sum_{y \in S_f} f(y) = H(f) $$

y similarmente $H(f_x) = H(f)$.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos el grupo circular $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. La integral dada por

$$H(f) = \int_0^{2\pi} f\bigl(e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta,$$

para cada $f \in \mathcal{C}_0^+(T)$, es una integral de Haar izquierda y derecha. En efecto, sea $f \in \mathcal{C}_0^+(T)$ y $z \in T$. Entonces $z = e^{i\alpha}$ para algún $\alpha \in [0, 2\pi)$ y, por lo tanto,

$$H({}_zf) = \int_0^{2\pi} f\bigl(ze^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} f\bigl(e^{i(\alpha+\theta)}\bigr)\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^{2\pi+\alpha} f\bigl(e^{i\beta}\bigr)\,\mathrm{d}\beta = H(f),$$

donde la última igualdad se sigue de que $\beta \mapsto f\bigl(e^{i\beta}\bigr)$ es periódica con periodo 2π. Como T es abeliano, ${}_zf = f_z$, por lo que $H(f_z) = H(f)$ también se satisface.

Estamos listos para enunciar el teorema de Haar. Lo trabajaremos en el caso de integrales izquierdas. Estudiaremos el caso de integrales derechas en la sección 2.1.B.

Teorema 2.1.6 (de Haar para integrales izquierdas). *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una integral de Haar izquierda H en G que es única salvo por múltiplos reales positivos. Es decir, si H' es otra integral de Haar izquierda en G, existe $c > 0$ tal que $H' = cH$.*

La primera demostración de la existencia de la integral de Haar, en el caso de grupos localmente compactos y segundo numerables, fue dada originalmente por Haar en 1933 [14]. En 1940, Weil [36] demostró el teorema de Haar como lo hemos enunciado arriba. La demostración de Weil utiliza el axioma de elección.(1) Sin embargo, el teorema de Haar no requiere del axioma de elección. La demostración que lo evidencia fue dada por Cartan en 1940 [6]. Nosotros seguiremos un camino similar al de Cartan, que tampoco requiere del axioma de elección, dado por Bredon en 1963 [5].

El resto de esta sección está dedicada a demostrar el teorema de Haar. Fijemos un grupo topológico localmente compacto G. Nos enfocaremos en las funciones de $\mathcal{C}_0^+(G)$, dado que estas determinan completamente los valores de cualquier integral (corolario 1.2.7).

Definición 2.1.7. Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Escribiremos $f \sim g$ si existen funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_0^+(G)$ y puntos $x_1, \dots, x_n \in G$ tales que $f = \sum_{i=1}^n f_i$ y $g = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$.(2)

(1) Weil utiliza el teorema de Tychonoff para garantizar que el producto $\prod_{f\in\mathcal{C}_0^+(G)} I_f$ de ciertos intervalos cerrados $I_f \subseteq \mathbb{R}$ es compacto. Después encuentra la integral de Haar como un punto en ese producto gigantesco. Esta demostración se puede consultar en [8, 7.2, p. 190].

(2) Un buen nombre para esta relación es *congruencia a trozos*. Este concepto se suele definir para conjuntos, en vez de funciones. Dos conjuntos $A, B \subseteq G$ son congruentes a trozos si existe una partición finita $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de A y $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ tales que $\{x_1A_1, \dots, x_nA_n\}$ es partición de B. La paradoja de Banach-Tarski establece que la esfera unitaria es congruente a trozos con dos copias de sí

Observación 2.1.8. Supongamos que existe una integral de Haar izquierda H en G. Si $f \sim g$,

$$H(g) = H\left(\sum_{i=1}^{n} {}_{x_i}f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} H({}_{x_i}f_i) = \sum_{i=1}^{n} H(f_i) = H\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) = H(f).$$

La relación $\sim$ tiene una extensa lista de propiedades que nos serán de utilidad.

Proposición 2.1.9. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Entonces:*

(I) *Para todo $x \in G$, $f \sim {}_xf$.*

(II) *Si $f \sim f'$, entonces $f \sim {}_xf'$ para todo $x \in G$.*

(III) *$f \sim g$ si y solo si $g \sim f$.*

(IV) *Si f es nula y $f \sim g$, entonces g es nula.*

(V) *Si $f \sim f'$ y $g \sim g'$, entonces $(f+g) \sim (f'+g')$.*

(VI) *Si $f \sim g$ y $s > 0$, entonces $sf \sim sg$.*

(VII) *Si $g = \sum_{i=1}^n g_i$ donde $g_i \in \mathcal{C}_0^+(G)$, entonces $f \sim g$ si y solo si $f = \sum_{i=1}^n f_i$ con $f_i \sim g_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.*

(VIII) *Si $U \subseteq G$ es un abierto no vacío, existe $f' \sim f$ con* $\operatorname{supp} f' \subseteq U$.

Demostración.

(I) Se infiere directamente de la definición, tomando $f_1 = f$ y $x_1 = x$.

(II) Si $f = \sum_{i=1}^n f_i$ y $f' = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$ se tiene que ${}_xf' = \sum_{i=1}^n {}_{xx_i}f_i$.

(III) Si $f = \sum_{i=1}^n f_i$ y $g = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$, entonces haciendo $g_i = {}_{x_i}f_i$ y $y_i = x_i^{-1}$ tenemos $g = \sum_{i=1}^n g_i$ y $f = \sum_{i=1}^n {}_{y_i}g_i$.

(IV) Si $f = \sum_{i=1}^n f_i \in \mathcal{C}_0^+(G)$ es nula, cada $f_i \in \mathcal{C}_0^+(G)$ debe ser nula, y entonces $g(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i x) = 0$ para todo $x \in G$.

(V) Si $f = \sum_{i=1}^n f_i$, $f' = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$ y $g = \sum_{j=1}^m g_j$, $g' = \sum_{j=1}^m {}_{y_j}g_j$, las igualdades $f + g = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{j=1}^m g_j$ y $f' + g' = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i + \sum_{j=1}^m {}_{y_j}g_j$ nos dicen que $(f+g) \sim (f'+g')$.

(VI) Si $f = \sum_{i=1}^n f_i$, $g = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$, entonces $sf = \sum_{i=1}^n sf_i$ y $sg = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}(sf_i)$ y por lo tanto $sf \sim sg$.

misma (respecto al grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$).

(VII) Si $f \sim g$, existen $g'_1, \ldots, g'_m \in \mathcal{C}_0^+(G)$ y $x_1, \ldots, x_m \in G$ tales que $g = \sum_{j=1}^m g'_j$ y $f = \sum_{j=1}^m {}_{x_j}g'_j$. Como $g_i(x)g'_j(x) \leq g^2(x)$ para todo $x \in G$, las funciones $g_{i,j}\colon G \to [0, \infty)$, dadas por

$$g_{i,j}(x) = \begin{cases} g_i(x)g'_j(x)/g(x) & \text{si } g(x) > 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

son continuas. Además, $\operatorname{supp} g_{i,j} \subseteq \operatorname{supp} g$, por lo que $g_{i,j} \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Si hacemos $f_i = \sum_{j=1}^m {}_{x_j}g_{i,j} \sim \sum_{j=1}^m g_{i,j} = g_i$, obtenemos que

$$f = \sum_{j=1}^m {}_{x_j}g'_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n {}_{x_j}g_{i,j} = \sum_{i=1}^n f_i.$$

La implicación inversa es una consecuencia directa del inciso (V).

(VIII) Como G es localmente compacto, existen abiertos V y W de cerradura compacta tales que

$$W \subseteq \operatorname{cl}W \subseteq V \subseteq \operatorname{cl}V \subseteq U.$$

Dado que $\{xW \mid x \in G\}$ es una cubierta abierta del compacto $\operatorname{supp} f$, existe $F \subseteq G$ finito con

$$\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{x \in F} xW.$$

Ahora, como G es de Hausdorff y localmente compacto, por la versión débil del lema de Urysohn (teorema 1.3.6), para cada $x \in F$ existe una función $h^{(x)} \in \mathcal{C}_0^+(G)$ tal que $h^{(x)}(x\operatorname{cl}W) \subseteq \{1\}$ y $h^{(x)}(G \setminus xV) \subseteq \{0\}$. Así,

$$\operatorname{supp}(h^{(x)}) \subseteq x\operatorname{cl}V \subseteq xU.$$

Definamos $h = \sum_{x \in F} h^{(x)}$. Evidentemente $h(y) \geq 1$ para cada $y \in \operatorname{supp} f$. Entonces la función

$$f^{(x)}(y) = \begin{cases} f(y)h^{(x)}(y)/h(y) & \text{si } y \in \operatorname{supp} f, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

está en $\mathcal{C}_0^+(G)$, $\sum_{x \in F} f^{(x)} = f$ y $\operatorname{supp}(f^{(x)}) \subseteq \operatorname{supp}(h^{(x)}) \subseteq xU$.

Haciendo $f' = \sum_{x \in F} {}_x f^{(x)} \sim f$, tenemos

$$\operatorname{supp} f' \subseteq \bigcup_{x \in F} \operatorname{supp}({}_x f^{(x)}) = \bigcup_{x \in F} x^{-1}\operatorname{supp}(f^{(x)}) \subseteq \bigcup_{x \in F} x^{-1}xU = U. \qquad \square$$

Corolario 2.1.10. *La relación $\sim$ es de equivalencia.*

Demostración. Del inciso (I), tomando $x = e$, obtenemos la reflexividad, y del inciso (III) obtenemos la simetría. Resta verificar la transitividad. Si $f \sim g$, se tiene $f = \sum_{i=1}^n f_i$ y $g = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$. Ahora, si $g \sim h$, por el inciso (VII), $h = \sum_{i=1}^n h_i$ con $h_i \sim {}_{x_i}f_i$. Luego, por el inciso (II), $h_i \sim f_i$ y, usando nuevamente el inciso (VII), concluimos que $f \sim h$. □

Las integrales de Haar cumplen una positividad mucho más fuerte que la que pedimos en la definición.

Proposición 2.1.11. *Si H es una integral de Haar izquierda y $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ es no nula, entonces $H(f) > 0$.*

Demostración. Como f es no nula, $f(x) > 0$ para algún $x \in G$. Por la continuidad de f existe una vecindad abierta $U \subseteq G$ de x y $\varepsilon > 0$ con $f(u) \geq \varepsilon$ para todo $u \in U$.

Como H es una integral de Haar, en particular es no nula. Es decir, existe $g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ tal que $H(g) > 0$. Por la proposición 2.1.9 (VIII), existe $g' \sim g$ con $\operatorname{supp} g' \subseteq U$. Sea $c = \max g'(G) > 0$. Luego $\varepsilon g'(x) \leq c f(x)$ para todo $x \in G$. Por lo tanto

$$0 < \frac{c}{\varepsilon} H(g) = \frac{c}{\varepsilon} H(g') \leq H(f).$$ □

Definición 2.1.12. Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Escribiremos $f \gtrsim g$ si existen $f' \sim f$ y $g' \sim g$ tales que $f'(x) \geq g'(x)$ para todo $x \in G$. Escribiremos $f \lesssim g$ si $g \gtrsim f$.

Observación 2.1.13. Si $f \gtrsim g$ y H es una integral de Haar izquierda, entonces $H(f) \geq H(g)$.

Demostración. Se sigue directamente de la observación 2.1.8 y del inciso (I) de la proposición 1.2.8. □

Proposición 2.1.14. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Entonces:*

(I) *$f \gtrsim g$ si y solamente si existe $h \in \mathcal{C}_0^+(G)$ tal que $f = g' + h$ con $g' \sim g$ (o $f' = g + h$ con $f' \sim f$)*

(II) *$f \gtrsim g$ si y solamente si existe $g' \sim g$ tal que $f(x) \geq g'(x)$ (o $f' \sim f$ tal que $f'(x) \geq g(x)$) para todo $x \in G$.*

(III) *Si f es nula y $f \gtrsim g$, entonces g es nula.*

(IV) *Para todo $s \geq 1$, se tiene $sf \gtrsim f$.*

(V) *Si $f \gtrsim f'$ y $g \gtrsim g'$, entonces $(f + g) \gtrsim (f' + g')$.*

(VI) *Si* $f \gtrsim g$ *y* $s > 0$, *entonces* $sf \gtrsim sg$.

(VII) *Si* $f \gtrsim g$ *y* $g \gtrsim h$, *entonces* $f \gtrsim h$.

(VIII) *Si* g *es no nula, existe algún* $s > 0$ *tal que* $sg \gtrsim f$.

Demostración.

(I) El regreso es evidente. Si $f' \sim f$ y $g'' \sim g$ satisfacen que $f'(x) \geq g''(x)$ para todo $x \in G$, entonces $f' = g'' + h'$ con $h' \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Por la propiedad (VII) de la proposición 2.1.9, $f \sim g' + h$ con $g' \sim g'' \sim g$ y $h \sim h'$. La otra versión es análoga.

(II) Se obtiene directamente de la propiedad (I).

(III) Por el inciso (II), se tiene $0 = f(x) = g'(x) + h(x)$ para $g' \sim g$, $h \in \mathcal{C}_0^+(G)$ y $x \in G$. Entonces g' es nula y por el inciso (IV) de la proposición 2.1.9, g también.

(IV) Si $s \geq 1$, entonces $sf(x) \geq f(x)$ para todo $x \in G$, y por lo tanto $sf \gtrsim f$.

(V) Se sigue inmediatamente de la propiedad (V) de la proposición 2.1.9.

(VI) Basta aplicar la propiedad (VI) de la proposición 2.1.9.

(VII) Usando la propiedad (II), tenemos que $f'(x) \geq g(x) \geq h'(x)$ para $f' \sim f$ y $h' \sim h$, que nos dice directamente que $f \gtrsim h$.

(VIII) Sea $U = \{x \in G \mid g(x) > 0\}$ abierto no vacío. Usando la propiedad (VII) de la proposición 2.1.9, obtenemos $f' \sim f$ con $\operatorname{supp} f' \subseteq U$. Sean

$$m = \min\{g(x) \mid x \in \operatorname{supp} f'\} > 0 \quad \text{y} \quad M = \max\{f'(x) \mid x \in \operatorname{supp} f'\} > 0.$$

Haciendo $s = M/m$, obtenemos que

$$sg(x) \geq g(x)f'(x)/m \geq f'(x)$$

para todo $x \in G$. □

Por el inciso (VIII) de la proposición anterior, si $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con g no nula, existen

$$\sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} \qquad \text{e} \qquad \inf\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\}.$$

Pero ocurre más. Estos dos números son siempre iguales, y justamente son la integral de Haar que buscamos.

Teorema 2.1.15. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con g no nula. Entonces*

$$\sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} = \operatorname{ínf}\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\}.$$

La demostración de este teorema requiere una serie de pasos a los cuales dedicamos la sección 2.1.A. Veamos primero cómo este resultado nos permite demostrar directamente el teorema de Haar.

Demostración del teorema de Haar para integrales izquierdas (2.1.6).

Existencia. Fijemos una $g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula. Como anticipamos, definamos

$$H(f) = \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\}$$

para cada $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Afirmamos que H es una integral de Haar izquierda en G. Debemos ver que H es una función positiva, homogénea, invariante izquierda y no nula. La positividad es evidente.

Para verificar la homogeneidad, sea $c > 0$. Entonces, usando la propiedad (VI) de la proposición 2.1.14,

$$\begin{aligned} cH(f) &= \sup\big\{cs \bigm| s \geq 0, sg \lesssim f\big\} = \sup\Big\{s' \geq 0 \Bigm| \frac{s'}{c} g \lesssim f\Big\} \qquad (s' = cs) \\ &= \sup\big\{s' \geq 0 \bigm| s'g \lesssim cf\big\} = H(cf). \end{aligned}$$

Para demostrar la invarianza, sea $x \in G$. Por la propiedad (I) de la proposición 2.1.9,

$$H({}_x f) = \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim {}_x f\} = \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} = H(f).$$

La aditividad es lo único para lo cual necesitamos el teorema 2.1.15. De la propiedad (V) de la proposición 2.1.14 se sigue que si $tg \lesssim f$ y $t'g \lesssim h$, entonces $(t + t')g \lesssim f + h$ y por lo tanto

$$H(f + h) = \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f + h\} \geq t + t'.$$

Luego

$$\begin{aligned} H(f + h) &\geq \sup\big\{t + t' \bigm| t'g \lesssim f, tg \lesssim h\big\} \\ &= \sup\{t \geq 0 \mid tg \lesssim f\} + \sup\big\{t' \geq 0 \bigm| t'g \lesssim h\big\} = H(f) + H(h). \end{aligned}$$

Por el teorema 2.1.15, $H(f) = \operatorname{ínf}\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\}$, de donde se obtiene análogamente

$$H(f + h) \leq H(f) + H(h).$$

Así $H(f+h) = H(f) + H(h)$

Finalmente, el hecho de que H es no nula se sigue de que $1 \cdot g = g \lesssim g$, y entonces $H(g) = \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim g\} \geq 1$.[(3)]

Unicidad. Sea H' otra integral de Haar izquierda en G. Sea $c = H'(g)$. Por la proposición 2.1.11, $c > 0$. Veamos que $H' = cH$. Por la observación 2.1.13, tenemos que $\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} \subseteq \big\{s \geq 0 \,\big|\, H'(sg) \leq H'(f)\big\}$ y entonces

$$\begin{aligned} H(f) &= \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} \leq \sup\big\{s \geq 0 \,\big|\, H'(sg) \leq H'(f)\big\} \\ &= \sup\{s \geq 0 \mid sc \leq H'(f)\} = \sup\{s'/c \mid 0 \leq s' \leq H'(f)\} \qquad (s' = sc) \\ &= \sup\{s' \mid 0 \leq s' \leq H'(f)\}/c = H'(f)/c. \end{aligned}$$

Análogamente, utilizando el teorema 2.1.15,

$$\begin{aligned} H(f) &= \operatorname{ínf}\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\} \geq \operatorname{ínf}\{s \geq 0 \mid sc \geq H'(f)\} \\ &= \operatorname{ínf}\{s'/c \mid s' \geq H'(f)\} = \operatorname{ínf}\{s' \mid s' \geq H'(f)\}/c = H'(f)/c. \end{aligned}$$ □

2.1.A. Demostración de Bredon del teorema 2.1.15

Continuamos con un grupo topológico G localmente compacto. Introduciremos algunas notaciones que nos serán de utilidad. Consideremos $U \subseteq G$ de interior no vacío y $K \subseteq G$ de cerradura compacta. Entonces

$$K \subseteq \mathrm{cl}K \subseteq G = \bigcup_{x \in G} x \,\mathrm{int}U.$$

Como $\mathrm{cl}K$ es compacto y cada $x \,\mathrm{int}U$ es abierto, existe $F \subseteq G$ finito tal que

$$K \subseteq \mathrm{cl}K \subseteq \bigcup_{x \in F} x \,\mathrm{int}U \subseteq \bigcup_{x \in F} xU.$$

Por lo tanto, el conjunto $\big\{|F| \,\big|\, F \subseteq G, K \subseteq \bigcup_{x \in F} xU\big\} \subseteq \mathbb{N}$ tiene un mínimo.

Definición 2.1.16. Sea $U \subseteq G$ con interior no vacío y $K \subseteq G$ con cerradura compacta. Denotamos al **índice de cubierta** de K respecto a U por

$$[U : K] = \operatorname{mín}\Big\{|F| \,\Big|\, F \subseteq G, K \subseteq \bigcup_{x \in F} xU\Big\} \in \mathbb{N},$$

que indica el tamaño de una cubierta de tamaño mínimo para K formada por tras-

(3) Usando el teorema 2.1.15 se puede ver que, de hecho, $H(g) = 1$.

laciones izquierdas de U. La familia

$$\operatorname{mincov}(U,K) = \Big\{ F \subseteq G \;\Big|\; |F| = [U:K], K \subseteq \bigcup_{x\in F} xU \Big\} \neq \emptyset$$

contiene todos los conjuntos $F \subseteq G$ tales que $\{xU \mid x \in F\}$ forma una cubierta de tamaño mínimo para K.

Proposición 2.1.17. *Sean $U \subseteq G$ con interior no vacío, $K \subseteq G$ con cerradura compacta y $Q \subseteq G$ con ambas propiedades.*

(I) *Si $F \subseteq G$ finito satisface que $K \subseteq \bigcup_{x\in F} xU$, entonces $|F| \geq [U:K]$.*

(II) $[Q:Q] = 1$.

(III) $[U:Q][Q:K] \geq [U:K]$.

(IV) *Para todo $a \in G$, $[U:aK] = [U:K] = [aU:K]$.*

(V) *Para todo $a \in G$,*

$$F \in \operatorname{mincov}(U,K) \iff aF \in \operatorname{mincov}(U,aK) \iff Fa^{-1} \in \operatorname{mincov}(aU,K).$$

Demostración. Sea

$$\operatorname{cov}(U,K) = \Big\{ F \subseteq G \;\Big|\; K \subseteq \bigcup_{x\in F} xU \Big\}.$$

Entonces $\operatorname{mincov}(U,K) \subseteq \operatorname{cov}(U,K)$ y $[U:K] = \min\Big\{ |F| \;\Big|\; F \in \operatorname{cov}(U,K) \Big\}$.

(I) Directamente se tiene $F \in \operatorname{cov}(U,K)$ y entonces, por la minimalidad,

$$|F| \geq [U:K].$$

(II) De la definición, $[Q:Q] \geq 1$. Sustituyendo $F = \{e\}$ en el inciso anterior, $[Q:Q] \leq 1$.

(III) Sean $F \in \operatorname{mincov}(U,Q)$ y $E \in \operatorname{mincov}(Q,K)$. Entonces

$$K \subseteq \bigcup_{x\in E} xQ \subseteq \bigcup_{x\in E} x\Big(\bigcup_{y\in F} yU\Big) \subseteq \bigcup_{z\in EF} zU,$$

por lo que $EF \in \operatorname{cov}(U,K)$. Por el inciso (I),

$$[U:Q][Q:K] = |E||F| \geq |EF| \geq [U:K].$$

(IV) y (V). Sea $F \in \operatorname{mincov}(U,K)$. Entonces $aK \subseteq a\bigcup_{x\in F} xU = \bigcup_{x\in aF} xU$, por lo que $aF \in \operatorname{cov}(U, aK)$ y $[U : K] = |F| = |aF| \leq [U : aK]$. De regreso, sea $E \in \operatorname{mincov}(U, aK)$ y $E = a^{-1}E$, de tal manera que $aE \in \operatorname{mincov}(U, aK)$. Entonces $K \subseteq a^{-1} \bigcup_{x \in aE} xU = \bigcup_{x \in E} xU$, y por lo tanto $E \in \operatorname{cov}(U, K)$ y $[U : aK] = |aE| = |E| \leq \operatorname{mincov}(U, K)$.

Con esto, tenemos que $[U : K] = [U : aK]$, dándonos la primera igualdad del inciso (IV). Inmediatamente, esto implica que $aF \in \operatorname{mincov}(U, aK)$ y $E \in \operatorname{mincov}(U, K)$, demostrando la primera equivalencia del inciso (V). Las otras partes de los incisos (V) y (IV) se verifican análogamente. $\square$

Requerimos de un resultado clásico de la combinatoria: el teorema de Hall [15].

Teorema 2.1.18 (de Hall). *Sean A y B conjuntos con A finito. Para cada $a \in A$, sea $B_a \subseteq B$ cualquiera. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(I) *Existe una función inyectiva $\sigma\colon A \to B$ tal que para todo $a \in A$, $\sigma(a) \in B_a$.*

(II) *Para todo $C \subseteq A$ se satisface la condición de Hall:*

$$\left| \bigcup_{a \in C} B_a \right| \geq |C|.$$

La demostración del teorema de Hall puede consultarse en el apéndice.

Lema 2.1.19. *Sean $N, K \subseteq G$ compactos, $U \subseteq N$ una vecindad simétrica de e y $F \in \operatorname{mincov}(U, KN)$. Si para cada $z \in G$ definimos*

$$F(z) = \{x \in F \mid zx \in K\},$$

existe una función inyectiva $\sigma\colon F(z) \to F$ tal que $\sigma(x) \in zxU^2$ para todo $x \in F(z)$.

Demostración. Usemos el teorema de Hall (teorema 2.1.18). Definamos, para cada $a \in F(z)$,

$$B_a = \left\{x \in F \;\middle|\; xU \cap zaU \neq \emptyset\right\}.$$

Sea $C \subseteq F(z)$. Veamos que se satisface la condición de Hall, $|D| \geq |C|$, donde $D = \bigcup_{a \in C} B_a$. Para ello, veamos primero que $\bigcup_{a \in C} zaU \subseteq \bigcup_{x \in D} xU$. En efecto, sean $a \in C$ y $y \in zaU$. Como $a \in F(z)$, tenemos $za \in K$ y entonces

$$y \in KU \subseteq KN \subseteq \bigcup_{x \in F} xU.$$

Por lo tanto, $y \in xU$ para algún $x \in F$. Dado que $y \in xU \cap zaU$, deducimos que $x \in B_a \subseteq D$. Así, tenemos $\bigcup_{a \in C} zaU \subseteq \bigcup_{x \in D} xU$.

Multiplicando por la izquierda por z^{-1}, obtenemos que $\bigcup_{a \in C} aU \subseteq \bigcup_{x \in D} z^{-1}xU$, y entonces

$$KN \subseteq \bigcup_{a\in F} aU \subseteq \bigcup_{x\in D} z^{-1}xU \ \cup \bigcup_{a\in F\setminus C} aU = \bigcup\big\{xU \bigm| x \in z^{-1}D \cup (F\setminus C)\big\}.$$

Luego, por la proposición 2.1.17 (I), se tiene que

$$|F| = [U : KN] \le \left|z^{-1}D \cup (F\setminus C)\right| \le |D| + |F| - |C|.$$

Es decir $|C| \le |D|$, como queríamos. Por el teorema de Hall (teorema 2.1.18), existe una función inyectiva $\sigma\colon F(z) \to F$ tal que para todo $x \in F(z)$, $\sigma(x) \in B_x$. Es decir, $\sigma(x)U \cap zxU \neq \emptyset$ y entonces se deduce que $\sigma(x) \in zxUU^{-1} = zxU^2$ de la proposición 1.1.5. □

Usaremos el lema anterior para encontrar un conjunto finito de puntos $F \subseteq G$ de tal forma que obtengamos una suma *casi* invariante, $\sum_{x\in F} f(zx) \approx \sum_{x\in F} f(x)$ para cada función $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Con estas sumas *casi* invariantes aproximaremos la integral de Haar izquierda. En las demostraciones clásicas de Weil [36] y Cartan [6] se construyen objetos que son directamente invariantes pero *casi* aditivos.[(4)] En el caso de la demostración de Bredon [5] que presentamos aquí, la aditividad ya la tenemos directamente, pero debemos aproximar la invarianza.

Proposición 2.1.20. *Sean $C \subseteq G$ compacto, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0^+(G)$ un conjunto finito de funciones no nulas y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $F \subseteq G$ finito tal que para todo $z \in C$ y $f \in \mathcal{C}$,*

$$\left|\frac{\sum_{x\in F} f(zx)}{\sum_{x\in F} f(x)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Demostración. Para cada $f \in \mathcal{C}$, definamos $K_f = \operatorname{supp} f \cup (C^{-1}\operatorname{supp} f)$. Llamemos $a_f = \sup\{f(x) \mid x \in G\}$,

$$V_f = \left\{x \in G \,\middle|\, f(x) \ge \frac{2a_f}{3}\right\} \qquad y \qquad W_f = \left\{x \in G \,\middle|\, f(x) \ge \frac{a_f}{3}\right\}.$$

Como $V_f \subseteq \operatorname{supp} f$, $\operatorname{cl} V_f$ es compacto. Por la proposición 1.1.11, existe $N_f \subseteq G$ una vecindad compacta de e tal que $\operatorname{cl}(V_f)N_f \subseteq \operatorname{int} W_f$. En particular $V_f N_f \subseteq W_f$. Sean $K = \bigcup_{f\in\mathcal{C}} K_f$ compacto y $N = \bigcap_{f\in\mathcal{C}} N_f$ vecindad compacta de e. Definamos $\delta_f > 0$ tal que $\delta_f < a_f\varepsilon/(3[V_f : KN])$.

(4) Se define $(f : g) = \inf\{\sum_{i=1}^n c_i \mid \forall x \in G\colon f(x) \le \sum_{i=1}^n c_i g(h_i x),\ c_1,\dots,c_n \ge 0,\ g_1,\dots,g_n \in G\}$ para cualesquiera funciones $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Los objetos invariantes pero *casi* aditivos son los cocientes $(f : g)/(h : g)$, donde h está fija y se aproxima la integral de f haciendo que el soporte de g sea muy pequeño (c.f. [8, pp. 191-195]).

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_f \mid f \in \mathcal{C}\}$. Por la proposición 1.1.13, para cada $f \in \mathcal{C}$ existe una vecindad abierta $U_f' \subseteq G$ de e tal que si $x \in yU_f$, $\big|f(x) - f(y)\big| < \delta$. Por la proposición 1.1.10, existe $U \subseteq G$ una vecindad simétrica de e tal que $U^2 \subseteq \bigcap_{f\in\mathcal{C}} U_f \cap N$. Entonces, si $x \in yU^2$, $\big|f(x) - f(y)\big| < \delta$ para toda $f \in \mathcal{C}$.

Consideremos
$$F \in \operatorname{mincov}(U, KN)$$
cualquiera. Veamos que se satisface la propiedad deseada. Sean $z \in C$ y $f \in \mathcal{C}$. Tomemos $F(z) \subseteq F$ como en el lema 2.1.19 y $\sigma\colon F(z) \to F$ tal que $\sigma(x) \in zxU^2$ para todo $x \in F(z)$.

Como $\operatorname{supp} f \subseteq K_f \subseteq K$, si $f(zx) \neq 0$ para $x \in F$, entonces $zx \in K$ y por lo tanto $x \in F(z)$. En este caso, $\sigma(x) \in zxU^2$ y por lo tanto $|f(\sigma(x)) - f(zx)| < \delta$. Entonces
$$\begin{aligned}\sum_{x\in F} f(zx) &\leq \sum_{x\in F(z)} \delta + f(\sigma(x)) \leq \sum_{x\in F} \delta + f(x) = \sum_{x\in F} f(x) + \delta|F| \\ &\leq \sum_{x\in F} f(x) + \delta_f[U : KN].\end{aligned}$$

Tomando $E = \big\{x \in F \bigm| xU \cap V_f \neq \emptyset\big\}$, como
$$V_f \subseteq \operatorname{supp} f \subseteq K_f \subseteq K \subseteq KN \subseteq \bigcup_{x\in F} xU,$$
se tiene que
$$V_f \subseteq \bigcup_{x\in E} xU,$$
y entonces por la proposición 2.1.17 (I), $|E| \geq [U : V_f]$. Pero si $x \in E$,
$$x \in V_f U^{-1} = V_f U \subseteq V_f U^2 \subseteq V_f N \subseteq V_f N_f \subseteq W_f$$
y por la definición de W_f, $f(x) \geq a_f/3$. Así,
$$\sum_{x\in F} f(x) \geq \sum_{x\in E} f(x) \geq \frac{a_f}{3}|E| \geq \frac{a_f}{3}[U : V_f].$$
Utilizando la proposición 2.1.17 (III),
$$\frac{\sum_{x\in F} f(zx)}{\sum_{x\in F} f(x)} - 1 \leq \frac{\delta_f[U : KN]}{(a_f/3)[U : V_f]} \leq \frac{3\delta_f[V_f : KN]}{a_f} < \varepsilon.$$

Por otro lado, notemos que $\operatorname{supp} f \subseteq zK^{-1}\operatorname{supp} f \subseteq zK_f \subseteq zK$. Por la proposición 2.1.17, (IV) y (V), $zF \in \operatorname{mincov}(U, zKN)$ y $[U : zKN] = [U : KN]$. Calcando el argumento con $F' = zF$, $K' = zK$ y $z' = z^{-1}$ obtenemos que

$$\frac{\sum_{x\in zF} f(z^{-1}x)}{\sum_{x\in zF} f(x)} - 1 < \varepsilon$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\sum_{x\in F} f(zx)}{\sum_{x\in F} f(x)} - 1 = \frac{\sum_{x\in zF} f(x)}{\sum_{x\in zF} f(z^{-1}x)} - 1 > -\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} > -\varepsilon. \qquad \square$$

La proposición anterior tiene un equivalente *derecho*, que resulta de cambiar zx por xz. La demostración es la misma, cambiando el orden de todos los productos.

Corolario 2.1.21. *Si $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ son tales que $f \sim g$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subseteq G$ tal que*

$$\left|\frac{\sum_{x\in F} g(x)}{\sum_{x\in F} f(x)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Demostración. Consideremos $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}_0^+(G)$ y puntos $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que $f = \sum_{i=1}^n f_i$ y $g = \sum_{i=1}^n {}_{x_i}f_i$. Sea $\varepsilon > 0$ y apliquemos la proposición 2.1.20 a $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Obtenemos un conjunto $F \subseteq G$ finito con

$$\left|\frac{\sum_{x\in F} f_i(x_i x)}{\sum_{x\in F} f_i(x)} - 1\right| < \varepsilon$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$\left|\frac{\sum_{x\in F} g(x)}{\sum_{x\in F} f(x)} - 1\right| = \left|\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{x\in F} f_i(x_i x)}{\sum_{i=1}^n \sum_{x\in F} f_i(x)} - 1\right| < \varepsilon,$$

pues si $a_i, b_i > 0$ son tales que $\left|a_i/b_i - 1\right| < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\left|\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \varepsilon \sum_{i=1}^n b_i$$

y por lo tanto $\left|\sum_{i=1}^n a_i / \sum_{i=1}^n b_i - 1\right| < \varepsilon$. $\square$

Corolario 2.1.22. *Sean $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$, $\varepsilon > 0$ y $V \subseteq G$ una vecindad de e. Entonces existe una vecindad simétrica $U \subseteq V$ de e tal que para cualquier $g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula y con $\operatorname{supp} g \subseteq U$, existe un conjunto finito $F \subseteq G$ y números $c(x) \geq 0$ $(x \in F)$ tales que $\operatorname{supp}(\sum_{x\in F} c(x)({}_x g)) \subseteq \operatorname{supp}(f)U^2$ y, para todo $z \in G$,*

$$\left|f(z) - \sum_{x\in F} c(x) g(xz)\right| < \varepsilon.$$

Demostración. Sea $a = \sup\{f(x) \,|\, x \in G\}$ y $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' a + \varepsilon'(\varepsilon' + 1) < \varepsilon$. Por la proposición 1.1.13, existe una vecindad W de e tal que si $x \in yW$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon'$. Como G es localmente compacto podemos suponer sin pérdida de generalidad que W es compacta.

Por la proposición 1.1.10 existe una vecindad simétrica U de e tal que $U^2 \subseteq (W \cap V)$. Sea $C = \mathrm{supp}(f)W$ compacto y $g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula y con $\mathrm{supp} g \subseteq U$. Por la proposición 2.1.20 (en su versión derecha), existe un conjunto finito $F' \subseteq G$ tal que para todo $z \in C$

$$\left| \frac{\sum_{x \in F'} g(xz)}{\sum_{x \in F'} g(x)} - 1 \right| < \varepsilon'.$$

Entonces

$$\left| f(z) - \frac{\sum_{i=1}^{n} f(z) g(x_i z)}{\sum_{x \in F'} g(x)} \right| < \varepsilon' f(z) \leq \varepsilon' a$$

para todo $z \in C$. Si $x \in F'$ es tal que $g(xz) \neq 0$, se tiene $xz \in \mathrm{supp} g \subseteq U^2 \subseteq W$ y luego $z \in x^{-1}W$. Así, $|f(x^{-1}) - f(z)| < \varepsilon'$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{x \in F'} g(xz) f(z)}{\sum_{x \in F'} g(x)} - \frac{\sum_{x \in F'} g(xz) f(x^{-1})}{\sum_{x \in F'} g(x)} \right| &= \frac{\sum_{x \in F'} |f(x^{-1}) - f(z)| g(xz)}{\sum_{x \in F'} g(x)} \\ &< \varepsilon'(\varepsilon' + 1). \end{aligned}$$

Si definimos $c(x) = f(x^{-1}) / \sum_{y \in F'} g(y)$,

$$\left| f(z) - \sum_{x \in F'} c(x) g(xz) \right| = \left| f(z) - \frac{\sum_{x \in F'} g(xz) f(x^{-1})}{\sum_{x \in F'} g(x)} \right| < \varepsilon' a + \varepsilon'(\varepsilon' + 1) < \varepsilon$$

para todo $z \in C$.

Ahora notemos que si $x_0 \in F'$ satisface que $\mathrm{supp}({}_{x_0}g) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$, entonces $g(x_0 z) = 0$ para todo $z \in \mathrm{supp}(f)$. En este caso,

$$\left| f(z) - \sum_{x \in F' \setminus \{x_0\}} c(x) g(xz) \right| \leq \left| f(z) - \sum_{x \in F'} c(x) g(xz) \right| < \varepsilon$$

para todo $z \in C$. Por lo tanto, si definimos

$$F = \left\{ x \in F' \,\middle|\, \mathrm{supp}({}_x g) \cap \mathrm{supp}(f) \neq \emptyset \right\}$$

se tiene

$$\left| f(z) - \sum_{x \in F} c(x) g(xz) \right| < \varepsilon$$

para todo $z \in C$.

Resta probar que $\text{supp}(\sum_{x\in F} c(x)(_x g)) \subseteq \text{supp}(f)U^2$ y con esto tendremos la desigualdad anterior para todo $z \in G$, pues para $z \notin \text{supp}(f)U^2 \subseteq C$ el lado izquierdo será cero.

En efecto, si $x \in F$ y $z \in \text{supp}(_x g) \subseteq x^{-1}\text{supp}g \subseteq x^{-1}U$, entonces $z = x^{-1}u$ para algún $u \in U$. Así,

$$\text{supp}(_x g) = x^{-1}\text{supp}g = zu^{-1}\text{supp}g \subseteq zu^{-1}U \in zU^{-1}U = zU^2.$$

Como tenemos $\text{supp}(_x g) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$, se satisface $zU^2 \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$ y entonces, por la proposición 1.1.5, $z \in \text{supp}(f)U^2$. Con ello

$$\text{supp}\Big(\sum_{x\in F} c(x)(_x g)\Big) \subseteq \bigcup_{x\in F} \text{supp}(_x g) \subseteq \text{supp}(f)U^2. \qquad \square$$

Lema 2.1.23. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ tales que para cualquier $x \in G$, $f(x) \geq g(x)$ y con $f \neq g$. Entonces existe una función $f' \sim f$ tal que $f'(y) > g(y)$ para todo $y \in \text{supp}g$.*

Demostración. Sea $h = f - g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula. Entonces existe un abierto $U \subseteq \text{supp}h$ tal que para todo $x \in U$, $h(x) > 0$. Tomemos $F \in \text{mincov}(U, \text{supp}g)$. Si definimos $h' = \sum_{x\in F} {}_{x^{-1}}h/|F|$, evidentemente $h \sim h'$. Y si definimos $f' = h' + g$, por la proposición 2.1.9 (v), se satisface $f \sim f'$. Además, si $y \in \text{supp}g \subseteq \bigcup_{x\in F} xU$, entonces $y = x_0 u$ para algún $x_0 \in F$ y $u \in U \subseteq \text{supp}h$. Luego

$$h'(y) = \frac{1}{|F|}\sum_{x\in F} h(x^{-1}y) \geq \frac{1}{|F|}h(x_0^{-1}y) = \frac{1}{|F|}h(u) > 0.$$

Así, $f'(y) = g(y) + h'(y) > g(y)$ para todo $y \in \text{supp}g$. $\square$

Lema 2.1.24. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con f no nula.*

(i) *Si $s > 0$ satisface que $f \gtrsim sf$, entonces $s \leq 1$.*

(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $t > 0$ tal que $g \lesssim tf \lesssim (1+\varepsilon)g$.*

Demostración.

(i) Si tenemos $f \gtrsim sf$, entonces existe $f' \in \mathcal{C}_0^+(G)$ tal que $f \sim f'$ y $f'(x) \geq sf(x)$ para todo $x \in G$. Por el corolario 2.1.21, para cada $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq G$ finito con

$$\left|\frac{\sum_{x\in F} f'(x)}{\sum_{x\in F} f(x)} - 1\right| < \varepsilon,$$

y entonces

$$1+\varepsilon > \frac{\sum_{x\in F} f'(x)}{\sum_{x\in F} f(x)} \geq \frac{\sum_{x\in F} sf(x)}{\sum_{x\in F} f(x)} = s.$$

(II) Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 2.1.23, tomando $\varepsilon' > 0$ tal que $(1+\varepsilon')^2 = 1+\varepsilon$, existen funciones $h \sim (1+\varepsilon')f$ y $k \sim (1+\varepsilon')h$ con $h(y) > (1+\varepsilon')f$ para todo $y \in \operatorname{supp} f$ y $k(y) > (1+\varepsilon')h(y)$ para todo $y \in \operatorname{supp} h$. Así, $k \sim (1+\varepsilon')^2 f = (1+\varepsilon)f$.

Notemos que $\operatorname{supp} h \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{supp} k)$. En efecto, si $x \in \operatorname{supp} h$, tenemos $k(x) > 0$. Por continuidad, existe una vecindad abierta W de x tal que $k(w) > 0$ para todo $w \in W$. Entonces $W \subseteq \operatorname{supp} k$. Luego $x \in \operatorname{int}(\operatorname{supp} k)$. Un argumento de cubierta, utilizando la compacidad local de G, muestra que existe un compacto $C \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{supp} k)$ tal que $\operatorname{supp} h \subseteq \operatorname{int} C$. Y por las proposiciones 1.1.10 y 1.1.11 existe V, vecindad de e, tal que $\operatorname{supp}(h)V^2 \subseteq C$.

Tomemos

$$0 < \delta < \min\Big\{\inf\big\{h(y) - f(y) \,\big|\, y \in \operatorname{supp} f\big\}, \inf\big\{k(y) - h(y) \,\big|\, y \in \operatorname{supp} h\big\}\Big\}.$$

Por el corolario 2.1.22 existe una vecindad simétrica $U \subseteq V$ de e tal que para toda $g' \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con $\operatorname{supp} g' \subseteq U$, existe un conjunto $F \subseteq G$ y números $c(x) \geq 0$ para cada $x \in F$ tales que

$$\operatorname{supp}\Big(\sum_{x\in F} c(x)({}_x g')\Big) \subseteq \operatorname{supp}(h)U^2 \subseteq C \quad \text{y} \quad \Big|h(y) - \sum_{x\in F} c(x)g'(xy)\Big| < \delta$$

para todo $y \in G$. Por la propiedad (VIII) de la proposición 2.1.9, existe $g' \sim g$ tal que $\operatorname{supp} g' \subseteq U$. Inmediatamente obtenemos que, para cada $y \in G$,

$$f(y) \leq h(y) - \delta \leq \sum_{x\in F} c(x)g'(xy) \leq h(y) + \delta \leq k(y),$$

y entonces haciendo $t = \sum_{x\in F} c(x)$, tenemos que $tg \sim \sum_{x\in F} c(x)({}_x g')$. Dado que $k \sim (1+\varepsilon)f$, se tiene $f \lesssim tg \lesssim (1+\varepsilon)f$. $\square$

El lema anterior implica directamente el teorema 2.1.15.

Demostración del teorema 2.1.15. Sea $f, g \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con g no nula.

Veamos primero que

$$\sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} \leq \inf\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\}.$$

Si f es nula lo anterior es evidente, pues el conjunto de la izquierda es $\{0\}$. En caso contrario, sean $s, t \geq 0$ tales que $sg \lesssim f$ y $tg \gtrsim f$. Entonces se tiene $t > 0$ y, además, por la transitividad demostrada en la proposición 2.1.14 (vii), $sg \lesssim tg$. Luego, por la misma proposición, inciso (vi), $g \gtrsim \frac{s}{t}g$. Aplicando el lema 2.1.24 (i), se deduce que $s \leq t$, dándonos la desigualdad deseada.

Ahora veamos que

$$\sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} \geq \text{ínf}\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 2.1.24 (ii) existe $t > 0$ tal que $f \lesssim tg$ y $\frac{t}{(1+\varepsilon)}g \lesssim f$ (usando de nuevo la proposición 2.1.14 (vi)). Con ello, $\text{ínf}\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\} \leq t$ y $\frac{t}{(1+\varepsilon)} \leq \sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\}$. Entonces

$$(1+\varepsilon)\sup\{s \geq 0 \mid sg \lesssim f\} \geq \text{ínf}\{s \geq 0 \mid sg \gtrsim f\}$$

para todo $\varepsilon > 0$. □

Esto completa la demostración del teorema de Haar para integrales izquierdas. A continuación, presentamos una breve discusión sobre el caso de integrales derechas y analizamos cuándo coinciden.

2.1.B. Integrales de Haar derechas y bi-invariantes

Es posible repetir toda la construcción anterior para integrales de Haar derechas, invirtiendo el orden de todos los productos. Sin embargo, esto no es necesario. Podemos construir una integral de Haar derecha a partir de una integral de Haar izquierda, y viceversa.

Definición 2.1.25. Para cada $f \in \mathcal{C}_0(G)$, denotamos por f^* a la función dada por $f^*(x) = f(x^{-1})$, y para cada $I \in \mathcal{I}(G)$ denotamos por I^* a la integral dada por $I^*(f) = I(f^*)$.

Si tenemos una integral de Haar izquierda L, dado que

$$(f_x)^*(y) = f((yx)^{-1}) = f(x^{-1}y^{-1}) = {}_{x^{-1}}(f^*)(y),$$

tenemos

$$L^*(f_x) = L({}_{x^{-1}}(f^*)) = L(f^*) = L^*(f),$$

es decir, L^* es una integral de Haar derecha.

Por otro lado, si tenemos una integral de Haar derecha R, análogamente se verifica que R^* es una integral de Haar izquierda.

Con estos dos argumentos, hemos demostrado el siguiente corolario del teorema de Haar.

Corolario 2.1.26 (teorema de Haar para integrales derechas). *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una integral de Haar derecha R en G que es única salvo por múltiplos reales positivos. Es decir, si R' es otra integral de Haar derecha en G, existe $c > 0$ tal que $R' = cR$.*

En grupos abelianos, las integrales izquierdas y derechas de Haar evidentemente coinciden. Son múltiplos reales positivos unas de otras. Pero esto no ocurre siempre.

Ejemplo 2.1.27 (las integrales de Haar izquierda y derecha no siempre coinciden). Consideremos el grupo

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

con el producto

$$(x, y)(a, b) = (xa, xb + y)$$

y la topología heredada de $\mathbb{R}^2$. No es difícil ver que en efecto G es un grupo topológico con $(x, y)^{-1} = (1/x, -y/x)$ y $e = (1, 0)$.

Para $(a, b) \in G$ fijo, consideramos las transformaciones de G en G dadas por

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (x, y)(a, b) = (xa, xb + y), \\ S(x, y) &= (a, b)(x, y) = (ax, ay + b). \end{aligned}$$

Derivando, obtenemos $\det(T') = \det\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) = a$ y $\det(S') = \det\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) = a^2$. Por lo tanto, si consideramos las integrales

$$L(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{y} \quad R(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

aplicando el cambio de variable $(u, v) = S(x, y) = (ax, ay + b)$, tenemos que

$$\begin{aligned} L({}_{(a,b)}f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f(ax, ay + b)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{|\det(S')|}{(xa)^2} f(S(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2} f(u, v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = L(f) \end{aligned}$$

y similarmente $R(f_{(a,b)}) = R(f)$. Es decir, R y L son las integrales de Haar derecha e izquierda de G, respectivamente. Veamos que no ocurre $R = cL$ para ninguna $c > 0$. Dada $c > 0$, buscamos $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ tal que $R(f) \neq cL(f)$. Definamos

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2(x - c)(2c - x)(y - 1)(2 - y) & \text{si } x \in [c, 2c] \text{ y } y \in [1, 2], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $f\colon G \to [0, \infty)$ es continua y $\operatorname{supp} f = [c, 2c] \times [1, 2]$ es compacto.

Además,

$$L(f) = \int_c^{2c} (x-c)(2c-x)\,\mathrm{d}x \int_1^2 (y-1)(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{c^3}{36}$$
$$R(f) = \int_c^{2c} x\,(x-c)(2c-x)\,\mathrm{d}x \int_1^2 (y-1)(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{c^4}{24},$$

por lo que $cL(f) = c^4/36 \neq c^4/24 = R(f)$.

Definición 2.1.28 (integral bi-invariante). Sea G un grupo topológico. Decimos que H es una **integral bi-invariante** si es una integral de Haar izquierda y derecha.

Si G es localmente compacto y tiene una integral bi-invariante, entonces, por unicidad, toda integral de Haar es bi-invariante. Es decir, en este caso, el conjunto de integrales de Haar izquierdas es el mismo que el de integrales de Haar derechas. Esto ocurre, por ejemplo, si el grupo es abeliano. Resulta que sucede lo mismo en un grupo compacto. Dedicamos lo que resta de esta sección a demostrar este hecho.

Definición 2.1.29 (traslación de una integral). Sea G un grupo topológico localmente compacto. Para cada integral I y $x \in G$, denotamos ${}_xI$ y I_x a las integrales dadas por ${}_xI = I({}_xf)$ y $I_x = I(f_x)$. Con esta notación, I es una integral de Haar izquierda (derecha) si y solamente si ${}_xI = I$ ($I_x = I$) para todo $x \in G$.

Si G es localmente compacto y L es una integral de Haar izquierda, para $x \in G$ fijo, la integral L_x vuelve a ser una integral de Haar izquierda. Por el teorema de Haar, existe $\Delta(x) > 0$ tal que $L = \Delta(x)L_x$. Más aún, $\Delta(x)$ no depende de la elección de L. Si tomamos cualquier otra integral de Haar izquierda $L' = cL$, se sigue satisfaciendo que $L' = \Delta(x){L'}_x$.

Definición 2.1.30 (módulo de Haar). Sea G un grupo topológico localmente compacto. A la función $\Delta\colon G \to (0,\infty)$ tal que $L = \Delta(x)L_x$, para toda integral de Haar izquierda L y $x \in G$, se le conoce como el **módulo de Haar**. En el caso en el que $\Delta(x) = 1$ para todo $x \in G$, decimos que G es **unimodular**. [17]

Ejemplo 2.1.31 (todo grupo discreto es unimodular).
Sea G un grupo discreto. Para cada $x \in G$, $\chi_{\{x\}} \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Sea L una integral de Haar izquierda y $k = L(\chi_{\{e\}}) > 0$. Por invarianza, $L(\chi_{\{x\}}) = L({}_{x^{-1}}(\chi_{\{e\}})) = k$ para todo $x \in G$. Luego

$$k = L(\chi_{\{e\}}) = \Delta(x)L_x(\chi_{\{e\}}) = \Delta(x)L((\chi_{\{e\}})_x) = \Delta(x)L(\chi_{\{x^{-1}\}}) = \Delta(x)k.$$

Por lo tanto, $\Delta(x) = 1$ para todo $x \in G$.

Proposición 2.1.32. *Sea G un grupo localmente compacto. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(I) *G es unimodular.*

(II) *Las integrales de Haar en G son bi-invariantes.*

(III) *Las integrales de Haar en G son invariantes bajo inversiones. Es decir, para toda integral de Haar H en G (izquierda o derecha), $H^* = H$* (ver 2.1.25).

Demostración.

(I) ⇒(II) Sea L integral de Haar izquierda. Si G es unimodular, entonces para todo $x \in G$ se tiene $L = L_x$, por lo que L es una integral de Haar derecha y entonces es bi-invariante.

(II) ⇒(III) Sea H una integral bi-invariante. En partcular, H es una integral de Haar izquierda. Pero H^* también es una integral de Haar izquierda. Por unicidad, existe $c > 0$ tal que $H = cH^*$. Sea $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula, y definamos $g = f + f^* \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Evidentemente $g = g^*$. Por lo tanto,

$$H(g) = cH^*(g) = cH(g^*) = cH(g).$$

Inmediatamente deducimos que $c = 1$ y $H = H^*$.

(III) ⇒(I) Sea $x \in G$. Veamos que $\Delta(x) = 1$. Si L es una integral de Haar izquierda que es invariante bajo inversiones,

$$L = L^* = \Delta(x)(L_x)^* = \Delta(x)\left({}_{x^{-1}}(L^*)\right) = \Delta(x)\left({}_{x^{-1}}L\right) = \Delta(x)L,$$

por lo que $\Delta(x) = 1$. □

Proposición 2.1.33. *Consideremos G un grupo topológico localmente compacto. El módulo de Haar $\Delta\colon G \to (0, \infty)$ es un homomorfismo continuo.*

Demostración. Sean $x, y \in G$. Tomemos L integral de Haar izquierda y $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula. Tenemos, en particular, $\Delta(y) = L(f)/L(f_y)$ y $\Delta(x) = L(g)/L(g_x)$ con $g = f_y$. Pero $f_{xy} = (f_y)_x = g_x$ y entonces

$$\Delta(xy) = \frac{L(f)}{L(f_{xy})} = \frac{L(g)}{L(g_x)}\frac{L(f)}{L(f_y)} = \Delta(x)\Delta(y).$$

Resta verificar la continuidad. Primero veamos que Δ es continua en e. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\Delta(e) = 1$, buscamos una vecindad U de e tal que $|\Delta(x) - 1| < \varepsilon$ si $x \in U$. Como G es localmente compacto, existe una vecindad compacta K de e. Por la versión débil del lema de Urysohn (teorema 1.3.6) existe $h \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con $h(\mathrm{supp}(f)K) \subseteq \{1\}$.

Evidentemente $\operatorname{supp}(f)K \subseteq \operatorname{supp} h$. Ahora, por la proposición 1.1.13, existe una vecindad abierta V de e tal que si $x \in yV$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon L(f)/(2L(h))$.

Sea $U = V^{-1} \cap K$. Veamos que es la vecindad deseada. Sea $x \in U$ y $z \in G$. Si $z \notin \operatorname{supp}(f)K$, entonces $f(z) = 0$ y $f(zx^{-1}) = 0$, pues $zx^{-1} \notin \operatorname{supp}(f)$. Y si $z \in \operatorname{supp}(f)K$, entonces $h(z) = 1$ y además, dado que $x \in V^{-1}$, tenemos $zx^{-1} \in zV$, por lo que $|f(z) - f(zx^{-1})| < \varepsilon L(f)/(2L(h))$. En ambos casos,

$$|f(z) - f(zx^{-1})| \leq \varepsilon \frac{h(z)L(f)}{2L(h)}.$$

Aplicando L,

$$|L(f_{x^{-1}}) - L(f)| = |L(f_{x^{-1}} - f)| \leq L(|f_{x^{-1}} - f|) \leq \varepsilon L(f)/2 < \varepsilon L(f).$$

Por lo que

$$\left|\Delta(x) - 1\right| = \left|\frac{1}{\Delta(x^{-1})} - 1\right| = \left|\frac{L(f_{x^{-1}})}{L(f)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Finalmente, para ver que Δ es continua en un punto $y \in G$ cualquiera, usamos el caso anterior. Dado $\varepsilon > 0$, existe U vecindad de e tal que $\left|\Delta(x) - 1\right| < \varepsilon/\Delta(y)$ si $x \in U$. Así, yU es una vecindad de y tal que para todo $z = yx \in yU$,

$$\left|\Delta(z) - \Delta(y)\right| = \Delta(y)\left|\Delta(x) - 1\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Teorema 2.1.34. *Sea G un grupo compacto. Entonces G es unimodular.*

Demostración. Tenemos, por continuidad, que $\Delta(G)$ es un compacto de $(0, \infty)$. En particular, $\Delta(G)$ es acotado. Sea $x \in G$ arbitrario. Veamos que $\Delta(x) = 1$. Como Δ es un homomorfismo, $\Delta(x^n) = \Delta(x)^n$ para cualquier entero n. Es decir,

$$\left\{\Delta(x)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \Delta(G).$$

Pero $\left\{\Delta(x)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ es acotado si y solamente si $\Delta(x) = 1$. $\square$

Corolario 2.1.35. *Sea G un grupo compacto. Entonces las integrales de Haar en G son bi-invariantes (y entonces invariantes bajo inversiones).*

Si G es un grupo compacto, $\mathcal{C}_0(G) = \mathcal{C}(G)$, por lo que tenemos integrales bi-invariantes definidas sobre todo $\mathcal{C}(G)$. Más aún, es natural pedir que la integral de la función $\mathbf{1}\colon G \to \{1\}$ sea 1. Es decir, consideremos la única integral bi-invariante H tal que $H(\mathbf{1}) = 1$. Esta se puede obtener a partir de otra integral bi-invariante H' por $H = H'/H'(\mathbf{1})$. En grupos compactos, a la integral H se le llama la **integral de Haar normalizada de G**.

2.2. Medidas de Haar

Las definiciones de invarianza que hemos dado sobre integrales en grupos topológicos se pueden reescribir en términos de medidas.

Definición 2.2.1 (medida de Haar). Sea G un grupo topológico y $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ una medida. Decimos que μ es una **medida de Haar izquierda (derecha)** si μ es una medida de Radon no nula e invariante izquierda (derecha). Es decir, para todo $A \in \mathcal{B}(G)$ y $x \in G$, $\mu(xA) = \mu(A)$ ($\mu(Ax) = \mu(A)$). Decimos que μ es una **medida de Haar bi-invariante** si es a la vez una medida de Haar derecha e izquierda.

A través del teorema de representación de RMK (teorema 1.3.4), tenemos la siguiente equivalencia.

Proposición 2.2.2. *Sean G un grupo topológico, $I \in \mathcal{I}(G)$ y $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ la única medida de Radon tal que $I(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ para toda $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$. Entonces μ es una medida de Haar izquierda (derecha) si y solamente si I es una integral de Haar izquierda (derecha).*

Demostración. Primero notemos que μ es no nula si y solamente si I es no nula. Esto dado que la representación de RMK es única, y la medida nula se corresponde con la integral nula.

Verifiquemos que I es invariante izquierda si y solamente si μ es invariante izquierda. El caso derecho es análogo. Supongamos que I es invariante izquierda en G. La regularidad exterior de la medida nos dice que para todo $E \in \mathcal{B}(G)$,

$$\mu(E) = \operatorname{ínf}\big\{\mu(U) \bigm| E \subseteq U \subseteq G, U \text{ abierto}\big\}.$$

Por lo tanto, basta demostrar que μ es invariante izquierda sobre los abiertos de G. Sea $U \subseteq G$ abierto y $x \in G$. Por la proposición 1.3.8,

$$\mu(U) = \sup\big\{I(f) \bigm| f \prec U\big\} \quad \text{y} \quad \mu(xU) = \sup\big\{I(f) \bigm| f \prec xU\big\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ con $f \prec U$ tal que $I(f)+\varepsilon \geq \mu(U) \geq I(f)$. Recordemos que $f \prec U$ significa que $\operatorname{supp} f \subseteq U$ y $f(y) \leq 1$ para todo $y \in G$. Entonces, tenemos que $\operatorname{supp}({}_{x^{-1}}f) = x(\operatorname{supp} f) \subseteq xU$, por lo que ${}_{x^{-1}}f \prec xU$. Con ello

$$\mu(xU) + \varepsilon \geq I({}_{x^{-1}}f) + \varepsilon = I(f) + \varepsilon \geq \mu(U),$$

y por lo tanto $\mu(xU) \geq \mu(U)$. Aplicando el mismo argumento a $U' = xU$ y $x' = x^{-1}$, obtenemos que $\mu(U) \geq \mu(xU)$, por lo que $\mu(xU) = \mu(U)$.

Inversamente, supongamos que μ es invariante izquierda. Sea $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ y $z \in G$ y veamos que $I(f) = I({}_zf)$. Si definimos la función ${}_zi\colon G \to G$ por ${}_zi(y) = zy$ para cada $y \in G$, entonces ${}_zf = f \circ {}_zi$. Además, como μ es invariante izquierda,

$$(\mu \circ ({}_zi)^{-1})(E) = \mu(({}_zi)^{-1}(E)) = \mu(z^{-1}E) = \mu(E)$$

para todo $E \in \mathcal{B}(G)$, es decir, $\mu \circ ({}_zi)^{-1} = \mu$ y por lo tanto

$$I({}_zf) = \int (f \circ {}_zi)(y) \,\mathrm{d}\mu(y) = \int f(y) \,\mathrm{d}(\mu \circ ({}_zi)^{-1})(y) = \int f(y) \,\mathrm{d}\mu(y) = I(f). \quad \square$$

Corolario 2.2.3 (teorema de Haar para medidas). *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Existe una medida de Haar izquierda (derecha) $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ que es única salvo por múltiplos reales positivos. Es decir, si tenemos otra medida de Haar izquierda (derecha) $\mu'\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$, existe $c > 0$ tal que $\mu' = c\mu$.*

Demostración. Se sigue del teorema de Haar para integrales (teorema 2.1.6 y corolario 2.1.26) y la proposición anterior. $\square$

Corolario 2.2.4. *Sea G un grupo localmente compacto y $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ una medida de Haar izquierda (derecha). Entonces si $U \subseteq G$ es abierto y no vacío, $\mu(U) > 0$.*

Demostración. Hacemos solo el caso izquierdo, el otro es análogo. Sea $H(f) = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$ la integral de Haar asociada a μ. Por la versión débil del lema de Urysohn (teorema 1.3.6) y la compacidad local, existe $f \in \mathcal{C}_0^+(G)$ no nula con $f(x) \leq \chi_U(x)$ para todo $x \in G$. Así, por la proposición 2.1.11, $\mu(U) \geq H(f) > 0$. $\square$

Corolario 2.2.5. *Sea G un grupo unimodular (por ejemplo G compacto o abeliano). Entonces G tiene medidas de Haar bi-invariantes. Si G es compacto, existe una única medida de Haar bi-invariante μ tal que $\mu(G) = 1$, es decir, una probabilidad.*

Demostración. Si G es unimodular, las integrales de Haar son bi-invariantes, por lo que las medidas de Haar que las inducen son bi-invariantes. Más aún, si G es compacto y H es la integral bi-invariante normalizada de G, entonces la correspondiente medida μ satisface $\mu(G) = H(\mathbf{1}) = 1$ con $\mathbf{1} \in \mathcal{C}_0^+(G)$ dada por $\mathbf{1}(x) = 1$. $\square$

Cerramos este capítulo con un teorema que limita lo pequeños que pueden ser los grupos compactos infinitos y cuya prueba es muy sencilla usando la medida de Haar.

Teorema 2.2.6. *No existen grupos topológicos infinitos, compactos y numerables.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo infinito, compacto y numerable. Sea $k = \mu(\{e\}) \geq 0$, donde μ es la probabilidad de Haar bi-invariante en G. Para todo $x \in G$, $\mu(\{x\}) = \mu(x\{e\}) = \mu(\{e\}) = k$. Como G es infinito pero numerable, obtenemos una contradicción:

$$1 = \mu(G) = \sum_{x \in G} \mu(\{x\}) = \sum_{x \in G} k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ \infty & \text{si } k > 0. \end{cases} \quad \square$$

Capítulo 3

El teorema de Haar inverso

La medida de Haar surge a partir de las propiedades topológicas de un grupo G. Conociendo la topología τ de G, primero generamos una σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(G)$ a partir de τ. Luego, si τ es localmente compacta, podemos construir una medida de Haar $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ para el grupo. Este capítulo está dedicado a explorar el proceso inverso. Es decir, si para empezar tenemos un grupo (sin topología) con alguna σ-álgebra $\mathcal{A}$ y una medida invariante $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, ¿existen condiciones sobre $\mathcal{A}$ y μ que nos permitan construir una topología τ para G, de tal manera que este sea un grupo topológico localmente compacto y que la medida de Haar coincida con μ?

Dividimos este capítulo en tres secciones. La sección 3.1 contiene una breve discusión sobre la σ-finitud de las medidas de Haar. En la sección 3.2 introduciremos el concepto de *grupo medible*. En estos espacios es posible definir medidas invariantes sin necesidad de una topología. En la sección 3.3 demostramos el teorema de Haar inverso de Weil, que afirma que a todo grupo medible con cierta medida invariante se le puede construir una topología que lo convierte en un grupo topológico. La topología que construimos, llamada topología de Weil, no es localmente compacta, pero sí localmente acotada. Por lo que, en la topología de Weil inducida por una medida invariante, es posible completar densamente al grupo en uno localmente compacto, y, más aún, la integral de Haar de la extensión resulta coincidir con la integral dada por la medida invariante original.

3.1. Medidas de Haar σ-finitas

Dado que tendremos que lidiar con medidas producto más adelante, resulta conveniente limitar nuestra discusión al caso en que la medida de Haar es σ-finita. Veremos que hay una la relación entre la σ-finitud de la medida de Haar y la propiedad de σ-compacidad en un grupo topológico localmente compacto. [(1)]

Proposición 3.1.1. *Sean G un grupo topológico localmente compacto y $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$ o $\mathcal{B} = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$. Supongamos que existe una medida $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) *Si $C \in \mathcal{B}$ es compacto, $\mu(C) < \infty$.*

(b) *Si $U \in \mathcal{B}$ es abierto y no vacío, $\mu(U) > 0$.*

(c) *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ es una familia de conjuntos disjuntos de medida positiva y finita, entonces $\mathcal{F}$ es numerable.* (Condición de la cadena numerable)

Entonces G es σ-compacto.

Demostración. Como G es localmente compacto, por la proposición 1.4.7, existe una vecindad G_δ y compacta C de e. Por las proposiciones 1.1.10 y 1.4.7 podemos construir una vecindad abierta y σ-compacta U de e tal que $UU^{-1} \subseteq C$. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$, evidentemente $U \in \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{B}$. En caso de que $\mathcal{B} = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$, el corolario 1.4.9 y la proposición 1.4.4 garantizan que lo mismo sucede, respectivamente.

Por el lema de Zorn, existe $A \subseteq G$ un conjunto maximal tal que $\{xU \mid x \in A\}$ es una familia de conjuntos disjuntos. Veamos que $AC = G$. Sea $x \in G$. Si $x \in A$, inmediatamente se obtiene que $x \in AC$. Por otro lado, si $x \notin A$, por la maximalidad de A, existe $a \in A$ con $xU \cap aU \neq \emptyset$. Por la proposición 1.1.5, $x \in aUU^{-1} \subseteq aC \subseteq AC$. Con ello $AC = G$.

Para ver que G es σ-compacto, basta demostrar que A es numerable. Haciendo $\mathcal{F} = \{xU \mid x \in A\}$ y usando la contención $xU \subseteq xC$, tenemos que $\mu(xU) \leq \mu(xC)$ para todo $xU \in \mathcal{F}$. Como $y \mapsto xy$ es un homeomorfismo, $xU \in \mathcal{B}$ es un abierto no vacío y $xC \in \mathcal{B}$ es compacto. Por las propiedades (a) y (b), $0 < \mu(xU) < \infty$. Entonces, por la propiedad (c), $\mathcal{F}$ es numerable. Por lo tanto A es numerable. $\square$

[(1)] Si bien es mucho más general que el enfoque que damos en esta sección, cabe mencionar el tratamiento de la referencia [34, 8, pp. 69-72], donde se estudia bajo qué condiciones las medidas de Radon son necesariamente σ-finitas. Aunque utilizando una forma más fuerte de la definición 1.3.1 –donde se pide regularidad interior para todos los conjuntos de Borel–, allí se muestra que el enunciado *toda medida de Radon es σ-finita* es independiente de los axiomas de ZFC, y su veracidad se sigue de un axioma de carácter combinatorio relacionado con el teorema de categoría de Baire.

El inciso (c) de la proposición 3.1.1 es una forma débil de la σ-finitud [13, 215B, p. 44]. Lo escribimos de esta manera porque este resultado nos será de utilidad en la demostración del teorema de Haar inverso del final del capítulo.

Proposición 3.1.2. *Sea X un conjunto, $\mathcal{B}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, y $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ una medida. Si μ es σ-finita, entonces μ satisface la propiedad (c) de la proposición 3.1.1.*[(2)]

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ una familia de conjuntos disjuntos de medida positiva y finita. Como μ es σ-finita, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ donde $X_n \in \mathcal{B}$ y $\mu(X_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que el conjunto $\mathcal{D}(\varepsilon, n) = \{F \in \mathcal{F} \mid \mu(X_n \cap F) > \varepsilon\}$ es finito. Si no fuese así, existiría algún $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\varepsilon, n)$ finito de tamaño $|\mathcal{E}| > \mu(X_n)/\varepsilon$, y luego

$$\mu(X_n) \geq \mu\big(X_n \cap \bigcup \mathcal{E}\big) = \sum_{F\in\mathcal{E}} \mu(X_n \cap F) > |\mathcal{E}|\varepsilon > \mu(X_n),$$

lo cual es absurdo.

Por lo tanto, $\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{F} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\colon \mu(X_n \cap F) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(1/m, n)$ es numerable. Demostraremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$. Si $F \in \mathcal{F}$,

$$0 < \mu(F) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \cap F\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n \cap F)$$

y entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(X_n \cap F) > 0$. $\square$

Las dos proposiciones anteriores nos permiten caracterizar a los grupos topológicos localmente compactos que tienen una medida de Haar σ-finita.

Corolario 3.1.3. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces una medida de Haar en G es σ-finita si y solamente si G es σ-compacto.*

Demostración. Si G es σ-compacto, como la medida de Haar $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ es finita en compactos, entonces μ es σ-finita. Inversamente, supongamos que μ es σ-finita. Veamos que cumple las condiciones de la proposición 3.1.1. Por el corolario 2.2.4, μ es positiva en abiertos no vacíos, por definición es finita en compactos y por la proposición 3.1.2 se satisface la propiedad (c). $\square$

Los grupos localmente compactos y σ-compactos tienen medidas de Haar σ-finitas, y son los únicos con esta propiedad. Vale la pena ponerles un nombre más corto.

---

(2) Inversamente, si una medida es semifinita y satisface la propiedad (c) de la proposición 3.1.1, entonces es σ-finita (ver [13, 215B, p. 44]). Nosotros no usaremos este resultado.

Definición 3.1.4 (σ-compacidad local). Sea X un espacio topológico. Decimos que X es $\boldsymbol{\sigma}$**-localmente compacto** si es, a la vez, localmente compacto y σ-compacto.

Ejemplos 3.1.5. Cualquier grupo topológico compacto, como el grupo circular T (ver ejemplos 1.1.3 (III)), y en general cualquier grupo que herede la topología de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ (como todos los grupos de matrices que enlistamos en 1.1.8) es σ-localmente compacto.

Enfocarse solo en grupos σ-localmente compactos puede parecer restrictivo, pero en realidad, no es así. Para explicar por qué, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1.6 (un grupo localmente compacto que no es σ-compacto). Sea D un grupo discreto y no numerable (por ejemplo, $D = \mathbb{R}$ con la topología discreta). Consideremos el producto $\widetilde{G} = D \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual.

Entonces $\widetilde{G}$ es localmente compacto, pues es el producto de grupos localmente compactos, pero no es σ-compacto. En efecto, si $C \subseteq \widetilde{G}$ es compacto, entonces la proyección $F = \pi_D(C) \subseteq D$ es compacta y discreta, y por lo tanto finita. No existe una cubierta numerable de la forma $\{E \times \mathbb{R} \mid E \subseteq D \text{ finito}\}$ para $\widetilde{G}$, pues su existencia implicaría que D es numerable, y como $C \subseteq F \times \mathbb{R}$, deducimos que no hay cubiertas numerables para $\widetilde{G}$ formadas por conjuntos compactos.

Sin embargo, notemos que el subgrupo $G = \{e_D\} \times \mathbb{R} \subseteq \widetilde{G}$ es cerrado, abierto y sí es σ-compacto, pues es isomorfo topológicamente a $\mathbb{R}$.

Resulta que en cualquier grupo localmente compacto se puede encontrar un subgrupo σ-localmente compacto como el del ejemplo anterior, y además la medida de Haar de todo el grupo se puede reconstruir sencillamente desde la medida de Haar de este subgrupo, sumando sobre sus clases laterales (ver también [12, p. 48]).

Teorema 3.1.7. *Sea $\widetilde{G}$ un grupo localmente compacto. Existe un subgrupo $G \subseteq \widetilde{G}$ abierto, cerrado, σ-localmente compacto y tal que la medida de Haar $\widetilde{\mu}\colon \mathcal{B}(\widetilde{G}) \to [0,\infty]$ se puede obtener a partir de la medida de Haar $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0,\infty]$, trasladándola a las clases laterales xG:*

$$\int_{\widetilde{G}} f(y)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}(y) = \sum_{xG \in S(f)} \int_G f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y),$$

donde $S(f) = \left\{xG \;\middle|\; x \in \widetilde{G}, \int_G f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) \neq 0\right\}$ es finito para cada $f \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{G})$.

Demostración. Sea $C \subseteq \widetilde{G}$ una vecindad compacta de e y $V \subseteq C$ una vecindad abierta y simétrica de e (proposición 1.1.10). Definamos

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n.$$

Es fácil verificar que G es un subgrupo. Evidentemente G es abierto y como $\widetilde{G}\setminus G = \bigcup_{x\in\widetilde{G}\setminus G} xG$ es abierto, también tenemos que G es cerrado. Como $\widetilde{G}$ es localmente compacto, G también lo es. Finalmente, G es σ-compacto pues $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ con $K_n = C^n \cap G$ compactos.

Demostremos la aseveración sobre la medida de Haar. Antes que nada, veamos que la expresión

$$\sum_{xG\in S(f)} \int f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

tiene sentido. Específicamente, debemos verificar tres cosas: (I) para toda $f \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{G})$ y $x \in \widetilde{G}$ la función $({}_xf)|_G$ es medible respecto a $\mathcal{B}(G)$; (II) el valor de la integral $\int f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y)$ no depende del representante x, sino solo de quién es el conjunto xG; (III) el conjunto $S(f)$ es finito y en consecuencia la suma $\sum_{xG\in S(f)} \int f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y)$ en efecto se puede realizar.

(I) Si $f \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{G})$ y $x \in \widetilde{G}$, entonces $({}_xf)|_G$ es continua en G, y además $\operatorname{supp}({}_xf)|_G = \operatorname{supp}({}_xf)\cap G$ es compacto pues G es cerrado y $\operatorname{supp}({}_xf)$ compacto. Por lo tanto $({}_xf)|_G \in \mathcal{C}_0^+(G)$ es medible respecto a $\mathcal{B}(G)$

(II) Supongamos que $xG = x'G$, y veamos que $\int f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int f(x'y)\,\mathrm{d}\mu(y)$. En efecto, como $x^{-1}x' \in G$, usando la invarianza izquierda de μ se tiene que

$$\int f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int f\big(x(x^{-1}x'y)\big)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int f(x'y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

(III) Primero notemos que si $xG\cap\operatorname{supp} f = \emptyset$, entonces ${}_xf(y) = f(xy) = 0$ para todo $y \in G$, pues si $y \in G$, entonces $xy \in xG$ y por lo tanto $xy \notin \operatorname{supp} f$. Esto nos dice que si $xG \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, entonces $\int_G f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) = 0$, es decir, $xG \notin S(f)$. Si definimos

$$C(f) = \big\{xG \;\big|\; x \in \widetilde{G}, xG \cap \operatorname{supp} f \neq \emptyset\big\},$$

hemos demostrado que $S(f) \subseteq C(f)$.

Ahora, el conjunto $\{xG \mid x \in \widetilde{G}\}$ es una cubierta de abiertos disjuntos para el compacto $\operatorname{supp} f$, por lo que existe solo una cantidad finita de conjuntos xG tales que $xG\cap\operatorname{supp} f \neq \emptyset$. Entonces $C(f)$ es finito, y por lo tanto $S(f)$ también.

Para condensar la notación, a continuación escribiremos $\int {}_xf\,\mathrm{d}\mu = \int f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y)$. Para verificar la fórmula del enunciado, utilicemos la unicidad de la integral de Haar. Basta que demostremos que la función $H(f) = \sum_{xG\in S(f)} \int {}_xf\,\mathrm{d}\mu$ es una integral de Haar izquierda en $\widetilde{G}$.

El hecho de que H es positiva y homogénea es sencillo de verificar. Veamos que es aditiva. Sean $f, g \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{G})$. Dado que ${}_xf,\ {}_xg \geq 0$ para todo $x \in \widetilde{G}$, se tiene

$$\begin{aligned} xG \in S(f+g) &\iff \textstyle\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu + \int {}_xg \,\mathrm{d}\mu \neq 0 \\ &\iff \textstyle\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu \neq 0 \ \text{ o } \ \int {}_xg \,\mathrm{d}\mu \neq 0 \iff xG \in S(f) \cup S(g), \end{aligned}$$

y entonces

$$H(f+g) \quad = \sum_{xG \in S(f+g)} \textstyle\int {}_x(f+g)\,\mathrm{d}\mu \quad = \displaystyle\sum_{xG \in S(f)\cup S(g)} \textstyle\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu + \int {}_xg \,\mathrm{d}\mu.$$

Como $\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu = 0$ si $xG \notin S(f)$ y $\int {}_xg \,\mathrm{d}\mu = 0$ si $xG \notin S(g)$,

$$\begin{aligned} H(f+g) \quad &= \sum_{xG \in S(f)\setminus S(g)} \textstyle\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu \quad + \displaystyle\sum_{xG \in S(g)\setminus S(f)} \textstyle\int {}_xg \,\mathrm{d}\mu \quad + \displaystyle\sum_{xG \in S(f)\cap S(g)} \textstyle\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu + \int {}_xg \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{xG \in S(f)} \textstyle\int {}_xf \,\mathrm{d}\mu \quad + \displaystyle\sum_{xG \in S(g)} \textstyle\int {}_xg \,\mathrm{d}\mu \quad = \quad H(f) + H(g). \end{aligned}$$

Ahora veamos que H es una integral de Haar, es decir, $H({}_zf) = H(f)$ para todo $z \in \widetilde{G}$ y $f \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{G})$. Tenemos

$$xG \in S({}_zf) \iff \textstyle\int {}_zf(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) \neq 0 \iff \int f(zxy)\,\mathrm{d}\mu(y) \neq 0 \iff zxG \in S(f),$$

y con ello

$$H({}_zf) = \sum_{xG \in S({}_zf)} \textstyle\int {}_zf(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) = \displaystyle\sum_{zxG \in S(f)} \textstyle\int f(zx\,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \displaystyle\sum_{xG \in S(f)} \textstyle\int f(xy)\,\mathrm{d}\mu = H(f). \qquad \square$$

El teorema anterior muestra que la información sobre la medida de Haar de un grupo topológico localmente compacto está totalmente contenida en un subgrupo que es σ-localmente compacto. En consecuencia, restringirnos al estudio de medidas de Haar en estos grupos no supone una pérdida de generalidad. Antes de seguir con la siguiente sección, veamos cómo se aplica este teorema a la medida de Haar del grupo que presentamos en el ejemplo 3.1.6.

Ejemplo 3.1.8. Tomando $\widetilde{G} = D \times \mathbb{R}$ como en el ejemplo 3.1.6, es sencillo ver que, si se sigue la construcción de la demostración del teorema 3.1.7, $G = \{e_D\} \times \mathbb{R}$. Por lo tanto, la medida de Haar $\widetilde{\mu}\colon \mathcal{B}(D \times \mathbb{R}) \to [0, \infty]$ se obtiene a través de la medida de Haar $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ de $\mathbb{R} \cong G$ con la fórmula

$$\int_{D\times\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}(y) = \sum_{xG \in S(f)} \int_G f(xy)\,\mathrm{d}\mu(y) = \sum_{\{d\}\times\mathbb{R} \in S(f)} \int_{-\infty}^{\infty} f(d, y)\,\mathrm{d}y,$$

donde $S(f) = \big\{\{d\} \times \mathbb{R} \,\big|\, d \in D, \int_{-\infty}^{\infty} f(d, y)\,\mathrm{d}y \neq 0\big\}$ es finito y $f \in \mathcal{C}_0^+(D \times \mathbb{R})$.

3.2. Grupos medibles

En un grupo topológico, las operaciones de grupo son continuas, es decir, preservan la topología. Si queremos trabajar con medidas en grupos sin topología, lo mínimo que necesitamos es que las operaciones del grupo preserven la mensurabilidad.

Definición 3.2.1 (grupo medible). Sea G un grupo y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de G. Decimos que $(G, \mathcal{A})$ es un **grupo medible**(3) si las funciones $x \mapsto x^{-1}$ y $(x, y) \mapsto xy$ son medibles (de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$, respectivamente).

Ejemplo 3.2.2. Consideremos el grupo de números reales $\mathbb{R}$ con la suma y la σ-álgebra de Borel $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como $\mathbb{R}$ es un grupo topológico, la función $x \mapsto -x$ es continua, y por lo tanto medible respecto a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por lo mismo, la función $(x, y) \mapsto x + y$ es medible de $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ver el ejemplo 1.4.5 y el teorema 1.4.13), se tiene que $(x, y) \mapsto x + y$ es medible de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

Nuestra intención es entender cómo es que las propiedades topológicas de los grupos σ-localmente compactos se reflejan en su estructura de grupo medible. Pero aquí aparece nuestro primer obstáculo. Si bien acabamos de ver que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sí es un grupo medible, existen otros grupos topológicos σ-localmente compactos que no son medibles con los conjuntos de Borel.

Ejemplo 3.2.3 ($(G, \mathcal{B}(G))$ no necesariamente es un grupo medible). Consideremos un grupo compacto G con cardinalidad mayor que la del conjunto de números reales (por ejemplo, el producto directo $G = T^{\mathbb{R}} = \prod_{x \in \mathbb{R}} T$ con $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$). Si $(G, \mathcal{B}(G))$ fuera medible, entonces la función $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = x^{-1}y$ sería medible, pues es la composición de funciones medibles. Es decir, para todo $A \in \mathcal{B}(G)$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{B}(G)$. Como $\{e\} \in \mathcal{B}(G)$, tenemos que

$$D_G = \{(x, x) \mid x \in G\} = f^{-1}(\{e\}) \in \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{B}(G).$$

Pero sabemos que $D_G \notin \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{B}(G)$ (ver ejemplo 1.4.12), por lo que f no puede ser medible.

El problema no está en nuestra definición de grupo medible, sino en el hecho de que, en cierto sentido, puede haber demasiados conjuntos en $\mathcal{B}(G)$. Si somos muy ambiciosos con la cantidad de conjuntos que llamamos *medibles*, rompemos la mensurabilidad del grupo.(4) Aquí es donde los conjuntos de Baire que presentamos en la sección 1.4 vendrán

(3)Esta definición es la que aparece en la referencia [20]. En la referencia [16] se le llaman grupos medibles a objetos con más estructura que esta. A saber, se le llama grupo medible a un grupo medible en nuestro sentido equipado con una medida invariante izquierda y σ-finita.

(4)El mismo fenómeno sucede en espacios topológicos, donde podemos perder la continuidad de una función si incrementamos la cantidad de conjuntos abiertos en su contradominio.

a nuestro rescate. Si G es un grupo topológico σ-localmente compacto, $(G, \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G))$ sí es un grupo medible.(5) Para demostrarlo, requerimos de la siguiente equivalencia.

Proposición 3.2.4. *Sea G un grupo y consideremos $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de G. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(I) *$(G, \mathcal{A})$ es un grupo medible.*

(II) *Las transformaciones $T, T^{-1} : G \times G \to G \times G$ dadas por*

$$T(x,y) = (yx, y) \qquad y \qquad T^{-1}(x,y) = (y^{-1}x, y)$$

son medibles respecto a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. (Condición (M) de Weil(6))

(III) *Las transformaciones $S, S^{-1} : G \times G \to G \times G$ dadas por*

$$S(x,y) = (x, xy) \qquad y \qquad S^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y)$$

son medibles respecto a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. (Condición de Halmos(7))

(IV) *La transformación $Q : G \times G \to G \times G$ dada por $Q(x,y) = (xy, y^{-1})$ es medible respecto a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.*

Demostración.

(I) ⇒(II) Si dos funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon A \to C$ son medibles, entonces el producto cartesiano $(f,g)\colon A \to B \times C$ es medible (respecto a la σ-álgebra producto). Las funciones T y T^{-1} son composiciones y productos cartesianos de las funciones $(x,y) \mapsto xy$, $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x$, $(x,y) \mapsto x$ y $(x,y) \mapsto y$, que son todas medibles si $(G, \mathcal{A})$ es un grupo medible.

(II) ⇒(III) Definamos $R(x,y) = (y,x)$. Si $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, entonces $R(A \times B) = B \times A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, por lo que R es medible. Notemos que

$$S\colon (x,y) \overset{R}{\mapsto} (y,x) \overset{T}{\mapsto} (xy, x) \overset{R}{\mapsto} (x, xy)$$
$$S^{-1}\colon (x,y) \overset{R}{\mapsto} (y,x) \xmapsto{T^{-1}} (x^{-1}y, x) \overset{R}{\mapsto} (x, x^{-1}y).$$

Por lo tanto, si T y T^{-1} son medibles, entonces S y S^{-1} también lo son.

(III) ⇒(IV) Igual que el inciso anterior, ahora utilizando que

$$Q\colon (x,y) \overset{S}{\mapsto} (x, xy) \overset{R}{\mapsto} (xy, x) \xmapsto{S^{-1}} (xy, (xy)^{-1}x) = (xy, y^{-1}).$$

(5) El argumento que dimos en el ejemplo 3.2.3 no funciona para $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$ pues si G es compacto y con cardinalidad mayor que la del conjunto de números reales, $\{e\} \notin \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$.

(6) C.f. [36, p. 141].

(7) C.f. [16, p. 257].

(IV) ⇒(I) Si Q es medible, componiendo con la proyección $(x,y) \mapsto x$ se obtiene que $(x,y) \mapsto xy$ es medible. Similarmente, a través de la composición

$$x \mapsto (e,x) \overset{Q}{\mapsto} (x,x^{-1}) \mapsto x^{-1},$$

obtenemos que $x \mapsto x^{-1}$ es medible. □

Corolario 3.2.5. *Si G es un grupo topológico σ-localmente compacto, $(G, \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G))$ es un grupo medible.*

Demostración. Como $G \times G$ es σ-localmente compacto y $S(x,y) = (x,xy)$ es un homeomorfismo, por la proposición 1.4.11, las transformaciones S y S^{-1} son medibles respecto a $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(G\times G)$. Además, por el teorema 1.4.13, $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(G\times G) = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)\otimes\mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$. Es decir, las transformaciones S y S^{-1} son medibles respecto a la σ-álgebra producto $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(G) \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$. □

En un grupo topológico, si un conjunto A es abierto, entonces A^{-1}, aA y Aa son abiertos para todo elemento a en el grupo. Sucede lo mismo en los grupos medibles, cambiando *abierto* por *medible*.

Teorema 3.2.6. *Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $A \in \mathcal{A}$. Entonces $A^{-1}, aA, Aa \in \mathcal{A}$ para todo $a \in G$.*

Demostración. Para cada $a \in G$, definamos las funciones $i_a, {}_ai, i^*\colon G \to G$ por $i_a(x) = xa$, ${}_ai(x) = ax$ e $i^*(x) = x^{-1}$. Como $A^{-1} = (i^*)^{-1}(A)$, $Aa = (i_{a^{-1}})^{-1}(A)$ y $aA = ({}_{a^{-1}}i)^{-1}(A)$, basta demostrar que estas funciones son medibles. Dado que $(G, \mathcal{A})$ es un grupo medible, i^* es medible. Además, las funciones $x \mapsto (a,x)$ y $x \mapsto (x,a)$ son medibles, por lo que ${}_ai\colon x \mapsto (a,x) \mapsto ax$ e $i_a\colon x \mapsto (x,a) \mapsto xa$ también son medibles. [8] □

Gracias al teorema 3.2.6, los grupos medibles proveen un espacio ideal para trabajar con medidas invariantes.

Definición 3.2.7 (medida invariante). Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible. Decimos que una medida $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es **invariante izquierda (derecha)** si $\mu(xA) = \mu(A)$ $(\mu(Ax) = \mu(A))$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y $x \in G$.

Si G es un grupo σ-localmente compacto, llamaremos a la contracción de Baire de una medida de Haar izquierda (derecha) una **medida de Haar-Baire izquierda (derecha).**

---

[8] Notemos que esta demostración es exactamente la misma que la del inciso (I) de la proposición 1.1.6, solo cambiando las palabras *abierto* y *continua* por la palabra *medible*.

Proposición 3.2.8. *Consideremos G un grupo topológico σ-localmente compacto y $\mu\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G) \to [0,\infty]$ una medida de Haar-Baire izquierda (derecha). Entonces μ es una medida invariante izquiera (derecha) y σ-finita en el grupo medible $(G, \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G))$.*

Demostración. La invarianza es evidente. La σ-finitud es una consecuencia de la proposición 3.1.1 y la observación 1.4.19. □

A partir de ahora, trabajaremos solo con invarianza izquierda. Como es de esperarse, todos los resultados son igualmente válidos para el caso derecho, invirtiendo todos los productos apropiadamente.

Recordemos la notación $E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$ y $E^y = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ para las secciones de un conjunto $E \subseteq G \times G$.[9] Las transformaciones T, S y Q que definimos en la proposición 3.2.4 serán nuestra herramienta principal para demostrar propiedades de medidas invariantes en grupos medibles. Primero veamos que las secciones de la imagen de un rectángulo bajo estas transformaciones se pueden expresar en términos de las operaciones del grupo.

Proposición 3.2.9. *Si G es un grupo y $T, S, Q\colon G \times G \to G \times G$ están dadas por*

$$T(x,y) = (yx, y), \qquad S(x,y) = (x, xy) \qquad y \qquad Q(x,y) = (xy, y^{-1}),$$

entonces, para cualesquiera $A, B \subseteq G$, y $x, y \in G$ las secciones de $T(A\times B)$, $S(A\times B)$ y $Q(A \times B)$ son

$$T(A \times B)_x = xA^{-1} \cap B, \qquad T(A \times B)^y = \begin{cases} yA & \text{si } y \in B, \\ \emptyset & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$S(A \times B)_x = \begin{cases} xB & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad S(A \times B)^y = A \cap yB^{-1},$$

$$Q(A \times B)_x = x^{-1}A \cap B^{-1} \qquad y \qquad Q(A \times B)^y = \begin{cases} Ay^{-1} & \text{si } y \in B^{-1}, \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Por medio de las transformaciones inversas $T^{-1}(x,y) = (y^{-1}x, y)$, $S^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y)$ y $Q^{-1}(x,y) = (xy, y^{-1}) = Q(x,y)$ podemos calcular:

$$\begin{aligned} T(A \times B)_x &= \{y \in G \mid (x,y) \in T(A \times B)\} = \{y \in G \mid T^{-1}(x,y) \in A \times B\} \\ &= \{y \in G \mid (y^{-1}x, y) \in A \times B\} = \{y \in G \mid y^{-1}x \in A, y \in B\} \\ &= \{y \in G \mid y \in xA^{-1}, y \in B\} = xA^{-1} \cap B. \end{aligned}$$

[9] C.f. [7, p. 144] o [31, p. 161]

$$\begin{aligned}
T(A\times B)^y &= \{x\in G \mid y^{-1}x\in A, y\in B\} = \{x\in G\mid x\in yA, y\in B\}\\
&= yA \text{ si } y\in B \text{ y } \emptyset \text{ en otro caso.}\\
S(A\times B)_x &= \{y\in G\mid S^{-1}(x,y)\in A\times B\} = \{y\in G\mid (x,x^{-1}y)\in A\times B\}\\
&= \{y\in G\mid x\in A, x^{-1}y\in B\} = \{y\in G\mid x\in A, y\in xB\}\\
&= xB \text{ si } x\in A \text{ y } \emptyset \text{ en otro caso.}\\
S(A\times B)^y &= \{x\in G\mid x\in A, x^{-1}y\in B\} = \{x\in G\mid x\in A, x\in yB^{-1}\}\\
&= A\cap yB^{-1}.\\
Q(A\times B)_x &= \{y\in G\mid Q^{-1}(x,y)\in A\times B\} = \{y\in G\mid (xy,y^{-1})\in A\times B\}\\
&= \{y\in G\mid xy\in A, y^{-1}\in B\} = \{y\in G\mid y\in x^{-1}A, y\in B^{-1}\}\\
&= x^{-1}A\cap B^{-1}.\\
Q(A\times B)^y &= \{x\in G\mid xy\in A, y^{-1}\in B\} = \{x\in G\mid x\in Ay^{-1}, y\in B^{-1}\}\\
&= Ay^{-1} \text{ si } y\in B^{-1} \text{ y } \emptyset \text{ en otro caso.}
\end{aligned}$$ □

Recordemos que si una medida $\mu\colon \mathcal{A}\to[0,\infty]$ es σ-finita, es posible definir una única medida producto $\mu\times\mu\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to[0,\infty]$ tal que para cualesquiera $A,B\in\mathcal{A}$, se satisface $(\mu\times\mu)(A\times B)=\mu(A)\mu(B)$.[10]

Proposición 3.2.10. *Sean $(G,\mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon\mathcal{A}\to[0,\infty]$ una medida invariante izquierda y σ-finita. Las transformaciones*

$$\begin{array}{lll}
T(x,y)=(yx,y), & S(x,y)=(x,xy), & Q(x,y)=(xy,x^{-1}),\\
T^{-1}(x,y)=(y^{-1}x,y), & S^{-1}(x,y)=(x,x^{-1}y) \quad y & R(x,y)=(y,x)
\end{array}$$

preservan la medida producto $\mu^2=\mu\times\mu\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to[0,\infty]$, es decir,

$$\mu^2\circ T=\mu^2\circ S=\mu^2\circ Q=\mu^2\circ T^{-1}=\mu^2\circ S^{-1}=\mu^2\circ R=\mu^2.$$

Demostración. Sea $A\times B\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. Utilizando la proposición 3.2.9 y el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
(\mu^2\circ S)(A\times B) = \mu^2(S(A\times B)) &= \int \mu(S(A\times B)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \chi_A(x)\mu(xB)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int \chi_A(x)\mu(B)\,\mathrm{d}\mu(x) = \left(\int \chi_A(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mu(B) = \mu(A)\mu(B).
\end{aligned}$$

Por la unicidad de la medida producto, $\mu^2\circ S=\mu^2$. Es decir, S preserva la medida producto y por lo tanto S^{-1} lo hace también. Similarmente, como

$$(\mu^2\circ R)(A\times B)=\mu^2(R(A\times B))=\mu^2(B\times A)=\mu(B)\mu(A)=\mu(A)\mu(B),$$

[10] C.f. [7, teo. 5.1.4]

deducimos que R preserva la medida producto junto con S y S^{-1}, y por lo tanto $Q = S^{-1} \circ R \circ S$, $T = R \circ S \circ R$ y $T^{-1} = R \circ S^{-1} \circ R$ lo hacen también. $\square$

Teorema 3.2.11 (del promedio). *Sean $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante izquierda y σ-finita. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, la función $x \mapsto \mu(x^{-1}A \cap B)$ es medible y*

$$\int \mu(x^{-1}A \cap B)\, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\mu(B^{-1}).^{(11)}$$

Demostración. Consideremos la transformación $Q(x, y) = (xy, y^{-1})$ y definamos la función $f \colon G \to [0, \infty]$ por

$$f(x) = \mu(Q(A \times B^{-1})_x) = \int \chi_{Q(A \times B^{-1})}(x, y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

Claramente f es medible, y por la proposición 3.2.9, $f(x) = \mu(x^{-1}A \cap B)$. Por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int \mu(x^{-1}A \cap B)\, \mathrm{d}\mu(x) &= \iint \chi_{Q(A \times B^{-1})}(x, y)\, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= (\mu \times \mu)(Q(A \times B^{-1})). \end{aligned}$$

Pero, como Q preserva la medida producto $\mu \times \mu$ (proposición 3.2.10), tenemos que $(\mu \times \mu)(Q(A \times B^{-1})) = (\mu \times \mu)(A \times B^{-1}) = \mu(A)\mu(B^{-1})$. $\square$

Corolario 3.2.12. *Sean $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante izquierda y σ-finita. Si $A \in \mathcal{A}$ satisface $\mu(A) > 0$, entonces $\mu(A^{-1}) > 0$ y $\mu(Aa) > 0$ para todo $a \in G$.*

Demostración. Por el teorema del promedio (teorema 3.2.11),

$$\int \mu(x^{-1}A \cap A^{-1})\, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)^2 > 0.$$

Por lo tanto, $B = x^{-1}A \cap A^{-1}$ satisface $\mu(B) > 0$ para algún $x \in G$. Esto inmediatamente implica que $\mu(A^{-1}) > 0$.

Aplicando el mismo argumento para $a^{-1}B$ con $\mu(a^{-1}B) = \mu(B) > 0$, existe $y \in G$ tal que $C = y^{-1}a^{-1}B \cap (a^{-1}B)^{-1}$ satisface $\mu(C) > 0$. Dado que $C \subseteq B^{-1}a \subseteq Aa$, concluimos que $\mu(Aa) > 0$. $\square$

(11) Esta fórmula es válida incluso cuando $\mu(A) = \infty$ o $\mu(B^{-1}) = \infty$, tomando la convención de que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

3.3. La topología de Weil

Consideremos un grupo medible $(G, \mathcal{A})$ y una medida invariante izquierda y σ-finita $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$. El objetivo de esta sección es construir una topología localmente acotada para G, de manera que $\mathcal{A}$ contenga a los conjuntos de Baire de la completación localmente compacta para G (c.f. teorema 1.1.15) y la medida de Haar-Baire de esta coincida con μ sobre G. Para ello, deberemos imponerle a μ una propiedad de *separación*[12].

A esta topología se le conoce como la topología de Weil inducida por μ y el teorema que garantiza su existencia se conoce como el teorema de Haar inverso. La construcción que presentamos fue dada originalmente por Weil en el apéndice I de su clásico de 1940 [36] y más tarde refinada por Halmos en el capítulo XII de su libro de 1950 [16]. Halmos utiliza σ-anillos en vez de σ-álgebras en todo su libro. Aquí hemos adaptado este tratamiento para utilizar σ-álgebras, como es más usual actualmente en teoría de la medida. El camino que seguimos sigue siendo en esencia el de Halmos.

Definición 3.3.1. Dada una σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ y una medida $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definimos los conjuntos $\mathcal{A}_{\mu>0} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) > 0\}$, $\mathcal{A}_{\mu<\infty} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) < \infty\}$ y $\mathcal{A}_{0<\mu<\infty} = \mathcal{A}_{\mu>0} \cap \mathcal{A}_{\mu<\infty}$.

Recordemos una medida es **semifinita** si todo conjunto de medida infinita tiene un subconjunto de medida finita y positiva.

Proposición 3.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida.*

(I) *Si μ es no nula, entonces $\mathcal{A}_{\mu>0} \neq \emptyset$.*

(II) *Si μ es semifinita, entonces $\mathcal{A}_{\mu<\infty} \neq \emptyset$.*

(III) *Si μ es no nula y semifinita, entonces $\mathcal{A}_{0<\mu<\infty} \neq \emptyset$.*

Demostración.

(I) Si μ es no nula, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) \neq 0$ y entonces $A \in \mathcal{A}_{\mu>0}$.

(II) Si μ es semifinita, entonces o bien $X \in \mathcal{A}_{\mu<\infty}$, o existe $A \subseteq X$ con $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty} \subseteq \mathcal{A}_{\mu<\infty}$.

(III) Si μ es no nula existe $A \in \mathcal{A}_{\mu>0}$. Si μ es semifinita y no ocurre que $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$, entonces existe $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$. □

[12] Ver la definición 3.3.7.

Lema 3.3.3. *Sean $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una medida. Para $A, B \in \mathcal{A}_{\mu<\infty}$, definimos $d_\mu(A,B) = \mu(A \triangle B)$, donde $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ es la diferencia simétrica de conjuntos. Entonces la función $d_\mu\colon \mathcal{A}_{\mu<\infty} \times \mathcal{A}_{\mu<\infty} \to [0,\infty)$ es una seudométrica, es decir, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(I) $d_\mu(A,A) = 0$.

(II) $d_\mu(A,B) = d_\mu(B,A)$.

(III) $d_\mu(A,C) \leq d_\mu(A,B) + d_\mu(B,C)$.

Si adicionalmente $(X,\mathcal{A})$ es un grupo medible y la medida μ es invariante izquierda, entonces se tiene $d_\mu(A,B) = d_\mu(xA,xB)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Las primeras dos propiedades son evidentes. La tercera se sigue de que

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

y la subaditividad de la medida. Finalmente, si la medida es invariante izquierda, se tiene

$$d_\mu(xA,xB) = \mu(xA \triangle xB) = \mu(x(A \triangle B)) = \mu(A \triangle B) = d_\mu(A,B). \qquad \square$$

A la función $d_\mu(A,B) = \mu(A \triangle B)$ se le conoce como la **seudométrica de Frechet-Nikodym** [4, p. 53]. Se puede convertir en una métrica de la manera usual, haciendo el cociente con la clase de equivalencia $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$, aunque nosotros no utilizaremos este hecho. La seudométrica de Frechet-Nikodym nos permitirá construir una topología a partir de una medida invariante, con la que demostraremos el teorema de Haar inverso que ya hemos anunciado.

Definición 3.3.4. Sean $(G,\mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una medida. Para cada $A \in \mathcal{A}_{\mu<\infty}$ y $x \in G$ escribimos

$$|||x|||_\mu^A = d_\mu(xA,A)/2.$$

Si μ es invariante izquierda, es fácil notar que $|||x|||_\mu^A = \mu(xA \setminus A) = \mu(A) - \mu(A \cap xA)$ para todo $A \in \mathcal{A}_{\mu<\infty}$ y $x \in G$.

Lema 3.3.5. *Sean $(G,\mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una medida invariante izquierda. Para cada $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ y cualquier par de puntos $x, y \in G$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

(I) $|||e|||_\mu^A = 0$.

(II) $|||x|||_\mu^A = |||x^{-1}|||_\mu^A$. (Simetría)

(III) $|||xy|||_\mu^A \leq |||x|||_\mu^A + |||y|||_\mu^A$. (Desigualdad del triángulo)

Demostración.

(I) Tenemos $|||e|||_\mu^A = d_\mu(A, A)/2 = 0$.

(II) Utilizando la invarianza y la simetría de la seudométrica de Frechet-Nikodym obtenemos

$$\begin{aligned} |||x|||_\mu^A &= \frac{d_\mu(xA, A)}{2} = \frac{d_\mu(x^{-1}xA, x^{-1}A)}{2} = \frac{d_\mu(A, x^{-1}A)}{2} = \frac{d_\mu(x^{-1}A, A)}{2} \\ &= |||x^{-1}|||_\mu^A. \end{aligned}$$

(III) Con la desigualdad del triángulo para la seudométrica de Frechet-Nikodym podemos calcular

$$\begin{aligned} |||xy|||_\mu^A &= \frac{d_\mu(xyA, A)}{2} = \frac{d_\mu(yA, x^{-1}A)}{2} \leq \frac{d_\mu(yA, A)}{2} + \frac{d_\mu(x^{-1}A, A)}{2} \\ &= |||x^{-1}|||_\mu^A + |||y|||_\mu^A = |||x|||_\mu^A + |||y|||_\mu^A. \end{aligned}$$ □

A las funciones reales $|||\cdot|||$ de un grupo que cumplen las propiedades (I), (II) y (III) del lema 3.3.5 se les conoce como **seudonormas de grupo**(13) [26]. Hemos construido una familia de seudonormas $\{|||\cdot|||_\mu^A \,|\, A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}\}$ para G. Se le pone el prefijo *seudo* porque, usualmente, si se define una norma $\|\cdot\|$ en un grupo, se pide, además de las propiedades del lema 3.3.5, que $\|x\| = 0$ ocurra solo para $x = e$. En el caso de las seudonormas que hemos definido aquí, pueden existir elementos $x \neq e$ tales que $|||x|||_\mu^A = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$.

Ejemplo 3.3.6. Consideremos un grupo topológico σ-localmente compacto G (por ejemplo, $G = \mathbb{R}$). Es sencillo verificar que el producto directo $G^2 = G \times G$ con la σ-álgebra

$$\mathcal{A} = \{B \times G \mid B \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)\}$$

es un grupo medible. Sea $\mu_G \colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G) \to [0, \infty]$ la medida de Haar-Baire de G y definamos la medida $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ por $\mu(B \times G) = \mu_G(B)$. Entonces μ es invariante izquierda, pues

$$\mu\big((x, y)(B \times G)\big) = \mu(xB \times yG) = \mu(xB \times G) = \mu_G(xB) = \mu_G(B) = \mu(B \times G)$$

para cualquier par $(x, y) \in G^2$.

(13)La referencia [1, sec. 3.3] contiene un tratamiento extenso sobre seudonormas de grupo, aunque se refiere a ellas como *prenormas de grupo*.

Para cada $x \in G$, incluso si $x \neq e_G$, y $B \times G \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$, se tiene

$$|||(e_G, x)|||_\mu^{B\times G} = \mu(B \times G) - \mu\big((B \times G) \cap (e_G B \times xG)\big) = \mu(B \times G) - \mu(B \times G) = 0.$$

Sin embargo, es posible imponer una condición sobre μ para que por lo menos exista algún $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ tal que $|||x|||_\mu^A > 0$ si $x \neq e$.

Definición 3.3.7 (medida separadora). Sea $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida en un grupo medible $(G, \mathcal{A})$. Decimos que μ es **separadora** si para cada $x \in G \setminus \{e\}$, existe $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ con $\mu(A) > \mu(A \cap xA)$.

Proposición 3.3.8. *Sean $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante izquierda y separadora. Si $|||x|||_\mu^A = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$, entonces $x = e$.*

Demostración. Si $x \neq e$, existe $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ con $|||x|||_\mu^A = \mu(A) - \mu(A \cap xA) > 0$. □

La medida que construimos en el ejemplo 3.3.6 no es separadora. Sin embargo, las medidas de Haar-Baire en grupos topológicos σ-localmente compactos siempre lo son. Esto está relacionado con el hecho de que los grupos topológicos siempre son de Hausdorff.

Proposición 3.3.9. *Consideremos un grupo topológico G σ-localmente compacto y una medida de Haar-Baire izquierda o derecha $\mu\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G) \to [0, \infty]$. Entonces μ es una medida separadora en el grupo medible $(G, \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G))$.*

Demostración. Como G es de Hausdorff, para cada $x \in G \setminus \{e\}$, existen vecindades $V_x, V_e \subseteq G$ de x y e, respectivamente, con $V_x \cap V_e = \emptyset$. Por la proposición 1.4.7 podemos suponer que V_x y V_e son compactas y G_δ. Así, $A = V_e \cap x^{-1}V_x \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$ es una vecindad compacta de e. Como μ es una medida de Baire, $\mu(A) < \infty$, y por el corolario 2.2.4, $\mu(A) > 0$. Más aún, $A \cap xA \subseteq V_e \cap V_x = \emptyset$ y por lo tanto $\mu(A) > 0 = \mu(xA \cap A)$. □

La familia de seudonormas $|||\cdot|||_\mu^A$ induce, de la manera usual, una familia de bolas[14] centradas en e.

Definición 3.3.10. Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida. Para $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ y $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \mu(A)$, escribimos

$$B_\mu(\varepsilon, A) = \{x \in G \mid |||x|||_\mu^A < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_\mu = \{B_\mu(\varepsilon, A) \mid A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}, 0 < \varepsilon < \mu(A)\}.$$

Las bolas $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$ serán vecindades para e en la topología que buscamos.

[14] En realidad *seudobolas*, dado que tenemos seudonormas y no normas.

Proposición 3.3.11. *Sean* $(G, \mathcal{A})$ *un grupo medible y* $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *una medida invariante izquierda y* σ*-finita. Si* $A, B \in \mathcal{A}_{\mu<\infty}$ *y* $0 < \varepsilon < \mu(A) + \mu(B)$*, entonces*

$$\{x \in G \mid d_\mu(xA, B) < \varepsilon\} \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Sea $f(x) = \mu(xA \cap B)$. Esta función es medible pues es la composición de funciones medibles $x \mapsto x^{-1} \mapsto \mu(xA \cap B)$; la primera porque $(G, \mathcal{A})$ es un grupo medible y la segunda por el teorema del promedio (teorema 3.2.11). Entonces

$$\begin{aligned} \big\{x \in G \bigm| d_\mu(xA, B) < \varepsilon\big\} &= \big\{x \in G \bigm| \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(xA \cap B) < \varepsilon\big\} \\ &= \Big\{x \in G \Bigm| f(x) > \frac{1}{2}\big(\mu(A) + \mu(B) - \varepsilon\big)\Big\} \in \mathcal{A}. \qquad \square \end{aligned}$$

La proposición 3.3.11 implica que si μ es invariante izquierda y σ-finita, $\mathcal{W}_\mu \subseteq \mathcal{A}$, pues para todo $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ y $0 < \varepsilon < \mu(A)$ se tiene $B_\mu(\varepsilon, A) = \{x \in G \mid d_\mu(xA, A) < \varepsilon'\}$, donde $\varepsilon' = 2\varepsilon < \mu(A) + \mu(A)$. A continuación, veremos que además $\mathcal{W}_\mu \subseteq \mathcal{A}_{\mu>0}$.

Lema 3.3.12. *Sean* $(G, \mathcal{A})$ *un grupo medible y* $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *una medida invariante izquierda y* σ*-finita. Si* $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$*, entonces:*

(I) $B_\mu(\varepsilon, A) \subseteq AA^{-1}$.

(II) *Dado* $F \in \mathcal{A}_{\mu>0}$*, existe* $E \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ *tal que* $E \subseteq F$ *y* $EE^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$.

Al inciso (II) se le conoce como el **lema de fragmentación de Weil** [3, 16].

Demostración.

(I) De la definición, tenemos que $\varepsilon < \mu(A)$, y de la proposición 1.1.5 se sigue que

$$B_\mu(\varepsilon, A) = \{x \in G \mid \mu(A) - \mu(xA \cap A) < \varepsilon\} \subseteq \{x \in G \mid xA \cap A \neq \emptyset\} = AA^{-1}.$$

(II) Supongamos primero que $\mu(F^{-1}) < \infty$. Sea $T(x, y) = (yx, y)$ la función medible definida en la proposición 3.2.4 (II). Como μ es invariante izquierda y σ-finita, la proposición 3.2.10 garantiza que T preserva la medida producto $\mu^2 = \mu \times \mu$. Así, $T(A \times F^{-1}) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ con $\mu^2(T(A \times F^{-1})) = \mu(A)\mu(F^{-1}) < \infty$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $M = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$ satisface[15]

$$\mu^2(M \mathbin{\triangle} T(A \times F^{-1})) = \mu^2\big(M \setminus T(A \times F^{-1}) \cup T(A \times F^{-1}) \setminus M\big) < \frac{\varepsilon}{2}\mu(F^{-1}).$$

Por la proposición 3.2.9, $\chi_{T(A\times F^{-1})}(x, y) = \chi_{(T(A\times F^{-1})^y)}(x) = \chi_A(y^{-1}x)\chi_{F^{-1}}(y)$

[15] La existencia de esta familia de rectángulos está garantizada porque la medida producto es la medida exterior generada por el teorema de extensión de Carathéodory a partir de la premedida $\mu(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$ definida sobre el semianillo de rectángulos $\{A \times B \mid A, B \in \mathcal{A}\}$. [16, 21]

para cualesquiera $x, y \in G$, y es sencillo verificar que, entonces,

$$\chi_{M \,\triangle\, T(A\times F^{-1})}(x,y) = \big|\chi_M(x,y) - \chi_A(y^{-1}x)\chi_{F^{-1}}(y)\big|.$$

Aplicando el teorema de Fubini obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu(F^{-1})\frac{\varepsilon}{2} &> \iint \big|\chi_M(x,y) - \chi_A(y^{-1}x)\chi_{F^{-1}}(y)\big| \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\geq \int \chi_{F^{-1}}(y) \int \big|\chi_M(x,y) - \chi_A(y^{-1}x)\big| \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int f(y)\,\mathrm{d}\mu(y),\end{aligned}$$

donde $f\colon G \to [0,\infty)$ está dada por

$$f(y) = \chi_{F^{-1}}(y) \int \big|\chi_M(x,y) - \chi_A(y^{-1}x)\big| \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Sea

$$C = \big\{y \in G \;\big|\; f(y) \geq \varepsilon\big\} \subseteq F^{-1},$$

cuya medida es

$$\mu(C) = \int \chi_C(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \leq \frac{\mu(F^{-1})}{2}.$$

y por lo tanto, $\mu(F^{-1} \setminus C) \geq \mu(F^{-1})/2 > 0$. Además, para cualquier $y \in G$,

$$f(y) = \chi_{F^{-1}}(y)\,\mu(yA \,\triangle\, M^y) = \chi_{F^{-1}}(y)\, d_\mu(yA, M^y)$$

con $M^y = \bigcup\limits_{i\in I(y)} A_i$, donde $I(y) = \{i \in \{1,\dots,n\} \mid y \in B_i\}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}F^{-1}\setminus C = \big\{y \in F^{-1} \;\big|\; f(y) < \varepsilon\big\} &= \big\{y \in F^{-1} \;\big|\; d_\mu\big(yA, \bigcup_{i\in I(y)} A_i\big) < \varepsilon\big\}\\ &\subseteq \bigcup_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} \big\{y \in F^{-1} \;\big|\; d_\mu\big(yA, \bigcup_{i\in I} A_i\big) < \varepsilon\big\}.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon < \mu(A) \leq \mu(A) + \mu(\bigcup_{i\in I} A_i)$, la proposición 3.3.11 garantiza que los conjuntos $\{y \in G \mid d_\mu(yA, \bigcup_{i\in I} A_i) < \varepsilon\}$ $(I \subseteq \{1,\dots,n\})$ son todos elementos de $\mathcal{A}$, y dado que $\mu(F^{-1}\setminus C) > 0$, al menos uno de ellos intersecta a $F^{-1}\setminus C$ en un conjunto de medida positiva. Sea $I_0 \subseteq \{1,\dots,n\}$ tal que

$$E^{-1} = \big\{y \in G \;\big|\; d_\mu\big(yA, \bigcup_{i\in I_0} A_i\big) < \varepsilon\big\} \cap F^{-1}\setminus C$$

tenga medida positiva.

Afirmamos que E es el conjunto buscado. Es decir, $EE^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$. Sean $x, y \in E$. Entonces

$$|||xy^{-1}|||_\mu^A = \frac{1}{2} d_\mu\big(x^{-1}A, y^{-1}A\big) \leq \frac{1}{2}\Big(d_\mu\big(x^{-1}A, \bigcup_{i\in I_0} A_i\big) + d_\mu\big(y^{-1}A, \bigcup_{i\in I_0} A_i\big)\Big) < \varepsilon,$$

es decir, $xy^{-1} \in B_\mu(\varepsilon, A)$.

En el caso en el que $\mu(F^{-1}) = \infty$, como μ es σ-finita, entonces es semifinita, y por lo tanto existe un conjunto $F_0 \subseteq F$ tal que $F_0^{-1} \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ al cual le podemos aplicar el argumento anterior. □

Teorema 3.3.13. *Sean $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante izquierda y σ-finita, y $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$. Entonces $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{A}_{\mu>0}$. Más aún, si $\mu(A^{-1}) < \infty$, entonces $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$.*

Demostración. Por el lema 3.3.12 (II), existe $E \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ con $EE^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$. Luego para cualquier $x \in E$, $Ex^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$ y entonces, por el corolario 3.2.12,

$$\mu\big(B_\mu(\varepsilon, A)\big) \geq \mu(Ex^{-1}) > 0.$$

Ahora, si además $\mu(A^{-1}) < \infty$, dado que

$$B_\mu(\varepsilon, A) = \{x \in G \mid \mu(x^{-1}A \cap A) > \mu(A) - \varepsilon\},$$

del teorema del promedio (teorema 3.2.11) se sigue que

$$\mu\big(B_\mu(\varepsilon, A)\big) = \int \chi_{B_\mu(\varepsilon,A)}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int \frac{\mu(x^{-1}A \cap A)}{\mu(A) - \varepsilon}\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{\mu(A)\mu(A^{-1})}{\mu(A) - \varepsilon},$$

y entonces $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$. □

Corolario 3.3.14. *Sean $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante izquierda, σ-finita y no nula. Entonces $\mathcal{W}_\mu \cap \mathcal{A}_{0<\mu<\infty} \neq \emptyset$.*

Demostración. Como μ es σ-finita, es semifinita, y entonces del inciso (III) de la proposición 3.3.2 deducimos que existe $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$. Si ocurre que $\mu(A^{-1}) < \infty$, entonces por el teorema 3.3.13 se tiene $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ para cualquier $\varepsilon \in (0, \mu(A))$. Por otro lado, si $\mu(A^{-1}) = \infty$, la semifinitud de μ garantiza la existencia de $A' \subseteq A^{-1}$ tal que $A' \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$. Como $A'^{-1} \subseteq A$, tenemos $\mu(A'^{-1}) \leq \mu(A) < \infty$ y entonces $B_\mu(\varepsilon, A') \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ para cualquier $\varepsilon \in (0, \mu(A'))$. □

Estamos listos para demostrar que si μ es una medida no nula, σ-finita, invariante izquierda y separadora en un grupo medible, la familia $\mathcal{W}_\mu$ forma una base local de vecindades abiertas para e en alguna topología para el grupo. Evidentemente, estas medidas son especiales, por lo que llevan un nombre.

Definición 3.3.15 (medida de Weil). Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible. Decimos que una medida $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es una **medida de Weil** si es no nula, σ-finita, invariante izquierda y separadora.

Las proposiciones 3.2.8 y 3.3.9 garantizan que si G tiene una topología σ-localmente compacta y $\mu\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G) \to [0,\infty]$ es una medida de Haar-Baire izquierda, entonces μ es una medida de Weil en el grupo medible $(G, \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G))$. Lo que veremos es que, en realidad, todas las medidas de Weil son medidas de Haar-Baire izquierdas en cierta topología.

Teorema 3.3.16. *Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una medida de Weil. La familia $\mathcal{W}_\mu(x) = \{xW \mid W \in \mathcal{W}_\mu\}$ es una base local de vecindades abiertas para cada $x \in G$ en una única topología con la cual G es un grupo topológico.*

Demostración. Notemos que $\mathcal{W}_\mu \neq \emptyset$ por el corolario 3.3.14. Verifiquemos las propiedades (a) - (f) de la proposición 1.1.12.

(a) Se tiene $e \in B_\mu(\varepsilon, A)$ para todo $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$, pues

$$|||x|||_\mu^A = \mu(A) - \mu(A \cap eA) = 0 < \varepsilon.$$

(b) Sean $B_\mu(\varepsilon, A), B_\mu(\varepsilon', A') \in \mathcal{W}_\mu$. Por el lema 3.3.12 (ii), existen $E, E' \in \mathcal{A}_{\mu>0}$ con $E \subseteq A$, $E' \subseteq A'$, $EE^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$, y $E'E'^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon', A')$.

Por el corolario 3.2.12, $E'^{-1} \in \mathcal{A}_{\mu>0}$. Luego $\mu(E'^{-1})\mu(E) > 0$. Por el teorema del promedio (teorema 3.2.11), $x^{-1}E'^{-1} \cap E^{-1} \in \mathcal{A}_{\mu>0}$ para algún $x \in G$. Sea $F = E'x \cap E = (x^{-1}E'^{-1} \cap E^{-1})^{-1} \in \mathcal{A}_{\mu>0}$. Como μ es semifinita, existe $B \subseteq F$ tal que $B \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$. Si $\delta \in (0, \mu(B))$, por el lema 3.3.12 (i),

$$\begin{aligned} B_\mu(\delta, B) \subseteq BB^{-1} \subseteq FF^{-1} = FF^{-1} \cap (Fx^{-1})(Fx^{-1})^{-1} \subseteq EE^{-1} \cap E'E'^{-1} \\ \subseteq B_\mu(\varepsilon, A) \cap B_\mu(\varepsilon', A'). \end{aligned}$$

(c) Sean $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$ y $x \in B_\mu(\varepsilon, A)$. Tomemos $\delta = \varepsilon - |||x|||_\mu^A \in (0, \mu(A))$. Si $y \in B_\mu(\delta, A)$, del lema 3.3.5 (iii) se tiene

$$|||xy|||_\mu^A \leq |||x|||_\mu^A + |||y|||_\mu^A < |||x|||_\mu^A + \delta = \varepsilon,$$

y entonces $xy \in B_\mu(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $xB_\mu(\delta, A) \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$.

(d) Tomemos $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$. Se tiene $B_\mu(\varepsilon/2, A)B_\mu(\varepsilon/2, A)^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$, pues si $x \in B_\mu(\varepsilon/2, A)B_\mu(\varepsilon/2, A)^{-1}$, entonces $x = ab^{-1}$ para ciertos $a, b \in B_\mu(\varepsilon/2, A)$. Por el lema 3.3.5 (iii),

$$|||x|||_\mu^A \leq |||a|||_\mu^A + |||b|||_\mu^A < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

y por lo tanto $x \in B_\mu(\varepsilon, A)$.

(e) Sean $x \in G$ y $B_\mu(\varepsilon, A) \in \mathcal{W}_\mu$. Por el lema 3.3.12 (II), existe $E \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ con $E \subseteq A$ y $EE^{-1} \subseteq B_\mu(\varepsilon, A)$. Por el inciso (I) del mismo lema, tomando $\delta \in (0, \mu(xE))$,

$$B_\mu(\delta, xE) \subseteq (xE)(xE)^{-1} = xEE^{-1}x^{-1} \subseteq xB_\mu(\varepsilon, A)x^{-1}.$$

(f) Sea $x \in G \setminus \{e\}$. Por la proposición 3.3.8, existe $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ con $|||x|||_\mu^A > 0$. Definamos $\varepsilon = |||x|||_\mu^A \in (0, \mu(A))$. Entonces se tiene que $x \notin B_\mu(\varepsilon, A)$. Notemos que este es el único inciso para el cual utilizamos que la medida es separadora.

$\square$

Definición 3.3.17 (topología de Weil). Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida de Weil. A la topología τ_μ con base local de vecindades abiertas $\mathcal{W}_\mu(x)$ la llamamos la **topología de Weil** inducida por μ. [16]

Observación 3.3.18. Por el lema 3.3.12, la familia $\{xEE^{-1} \mid E \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}\}$ es una base local para $x \in G$ en la topología de Weil inducida por μ.

Teorema 3.3.19. *Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida de Weil. Entonces (G, τ_μ) es localmente acotado.*

Demostración. Por el corolario 3.3.14, existe $W \in \mathcal{W}_\mu$ tal que $\mu(W) < \infty$. Como hicimos en el inciso (d) de la demostración del teorema 3.3.16, podemos encontrar encontrar $V \in \mathcal{W}_\mu$ con $VV^{-1} \subseteq W$. Demostraremos que V es totalmente acotado. Por contradicción, supongamos que existe una vecindad U de e tal que para todo $F \subseteq G$ finito, $V \not\subseteq FU$. Recursivamente definamos

$$x_1 = e \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} \in V \setminus \{x_1, \dots, x_n\}U$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por el lema 3.3.12 (II), existe $E \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ con $E \subseteq V^{-1}$ y $EE^{-1} \subseteq U$. Si $n > m$, $x_n \notin x_mU \supseteq x_mEE^{-1}$, y por la proposición 1.1.5, $x_nE \cap x_mE = \emptyset$. Es decir, los conjuntos x_nE y x_mE son ajenos si $n \neq m$. Además

$$x_nE \subseteq x_nV^{-1} \subseteq VV^{-1} \subseteq W$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\mu(W) \geq \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_nE\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_nE) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) = \infty,$$

lo cual contradice que $\mu(W) < \infty$. $\square$

Teorema 3.3.20 (de Haar inverso de Weil).
Sea $(G, \mathcal{A})$ un grupo medible y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida de Weil. Existe un grupo topológico σ-localmente compacto $\widehat{G}$ tal que:

(I) *(G, τ_μ) es un subgrupo denso de $\widehat{G}$.*

(II) *Si $\widehat{A} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$, entonces $A = \widehat{A} \cap G \in \mathcal{A}$ y $\widehat{\mu}\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G}) \to [0, \infty]$ dada por $\widehat{\mu}(\widehat{A}) = \mu(A)$ es una medida de Haar-Baire izquierda en $\widehat{G}$.*

(III) *Para toda $f \in \mathcal{C}_0^+(\widehat{G})$, $f|_G$ es medible en $\mathcal{A}$ y*

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\widehat{G}} f(x)\,\mathrm{d}\widehat{\mu}(x).$$

Demostración. Por los teoremas 3.3.19 y 1.1.15, existe un grupo topológico localmente compacto $\widehat{G}$ que satisface el inciso (I).

Notemos que el enunciado (III) es una consecuencia directa del (II). En efecto, la primera parte del inciso (II) nos dice que la función inclusión $i\colon (G, \mathcal{A}) \hookrightarrow (\widehat{G}, \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G}))$ es medible, pues $i^{-1}(\widehat{A}) = \widehat{A} \cap G \in \mathcal{A}$ para cada $\widehat{A} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$. Como $f \in \mathcal{C}_0^+(\widehat{G})$ es medible en $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$, entonces $f|_G = f \circ i$ es medible en $\mathcal{A}$. La segunda parte del inciso (II) define $\widehat{\mu} = \mu \circ i^{-1}$, de lo cual se sigue que

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (f \circ i)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\widehat{G}} f(x)\,\mathrm{d}(\mu \circ i^{-1})(x) = \int_{\widehat{G}} f(x)\,\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^+(\widehat{G})$.

Resta verificar el inciso (II) y el hecho de que $\widehat{G}$ es σ-compacto. Lo haremos con las siguientes tres afirmaciones.

Afirmación 1. *Si $\widehat{A} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$, entonces $\widehat{A} \cap G \in \mathcal{A}$.*

En efecto, definamos

$$\mathcal{S} = \{\widehat{A} \subseteq \widehat{G} \mid \widehat{A} \cap G \in \mathcal{A}\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra. Para verificar que $\mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G}) \subseteq \mathcal{S}$, por la proposición 1.4.10, basta ver que $\mathcal{S}$ contiene una base para la topología de $\widehat{G}$.

Sea $\widehat{x} \in \widehat{G}$ y $\widehat{U} \subseteq \widehat{G}$ una vecindad de e. Buscamos un abierto $\widehat{A} \in \mathcal{S}$ tal que $\widehat{x} \in \widehat{A} \subseteq \widehat{x}\widehat{U}$. Por la proposición 1.1.10, existe una vecindad simétrica $\widehat{V} \subseteq \widehat{G}$ de e tal que $\widehat{V}^2 \subseteq \widehat{U}$. Como $V = \widehat{V} \cap G$ es una τ_μ-vecindad de e, existe $W \in \mathcal{W}_\mu \subseteq \mathcal{A}_{\mu>0}$ (teorema 3.3.13) con $W \subseteq V$. Dado que $W \in \tau_\mu$, existe un abierto $\widehat{W} \subseteq \widehat{V}$ con $W = \widehat{W} \cap G$ y por la densidad de G en $\widehat{G}$, existe $x \in \widehat{x}\widehat{W}^{-1} \cap G$. Sea $\widehat{A} = x\widehat{W}$.

Entonces $A = \widehat{A} \cap G = xW \in \mathcal{A}$, pues $W \in \mathcal{A}$ y $x \in G$. Por lo tanto $\widehat{A} \in \mathcal{S}$. Más aún $\widehat{x} \in x\widehat{W} = \widehat{A}$ y

$$\widehat{A} = x\widehat{W} \subseteq \widehat{x}\widehat{W}^{-1}\widehat{W} \subseteq \widehat{x}\widehat{V}^2 \subseteq \widehat{x}\widehat{U}. \qquad \blacksquare$$

Definamos $\widehat{\mu}\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G}) \to [0, \infty]$ por $\widehat{\mu}(\widehat{A}) = \mu(\widehat{A} \cap G)$ para todo $\widehat{A} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$, como en el inciso (II). Es fácil ver que $\widehat{\mu}$ es una medida.

Afirmación 2. *$\widehat{G}$ es σ-compacto y $\widehat{\mu}$ es una medida de Baire en $\widehat{G}$.*

En efecto, verifiquemos que $\widehat{\mu}$ satisface las propiedades (a), (b) y (c) de la proposición 3.1.1.

(a) Si $\widehat{U} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$ es abierto y no vacío, entonces, como G es denso, $\widehat{U} \cap G$ es abierto y no vacío en G. Por lo tanto, existen $W \in \mathcal{W}_\mu$ y $x \in G$ tales que $xW \subseteq \widehat{U} \cap G$. Luego

$$\widehat{\mu}(\widehat{U}) = \mu(\widehat{U} \cap G) \geq \mu(xW) = \mu(W) > 0.$$

(b) Sea $\widehat{C} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$ compacto. Por el corolario 3.3.14, existe $W \in \mathcal{W}_\mu$ tal que $\mu(W) < \infty$. Sea $U \subseteq G$ una vecindad abierta y simétrica de e tal que $U^2 \subseteq W$. Como G es subespacio de $\widehat{G}$, existe $\widehat{U} \subseteq \widehat{G}$ una vecindad abierta de e la cual satisface $U = \widehat{U} \cap G$. Por compacidad, existen $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n \in \widehat{G}$ tales que $\widehat{C} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \widehat{x}_i\widehat{U}$. Además, como G es denso, existe $x_i \in G \cap \widehat{x}_i\widehat{U}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, $\widehat{x}_i \in x_i\widehat{U}^{-1}$ y por lo tanto

$$G \cap \widehat{x}_i\widehat{U} \subseteq G \cap x_i\widehat{U}^{-1}\widehat{U} = x_iU^{-1}U \subseteq x_iW.$$

Luego $G \cap \widehat{C} \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iW$ y entonces

$$\widehat{\mu}(\widehat{C}) = \mu(G \cap \widehat{C}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_iW) = n\,\mu(W) < \infty.$$

Con este inciso, hemos probado que $\widehat{\mu}\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G}) \to [0, \infty]$ es una medida de Baire.

(c) Sea $\widehat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$ una familia de conjuntos disjuntos de medida $\widehat{\mu}$ positiva y finita. Entonces

$$\mathcal{F} = \{\widehat{A} \cap G \mid \widehat{A} \in \widehat{\mathcal{F}}\} \subseteq \mathcal{A}$$

es una familia de conjuntos disjuntos de medida μ positiva y finita. Por la proposición 3.1.2, como μ es σ-finita, $\mathcal{F}$ es numerable, y por lo tanto $\widehat{\mathcal{F}}$ también. $\blacksquare$

Afirmación 3. *La medida $\widehat{\mu}$ es invariante izquierda. Es decir, para cualesquiera $\widehat{x} \in \widehat{G}$ y $\widehat{A} \in \mathcal{B}\boldsymbol{a}(\widehat{G})$, se tiene $\widehat{\mu}(\widehat{x}\widehat{A}) = \widehat{\mu}(\widehat{A})$.*

En efecto, por la regularidad interior de $\widehat{\mu}$ (teorema 1.4.16), basta que lo verifiquemos para $\widehat{A}$ compacto y G_δ. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces, por la regularidad exterior de $\widehat{\mu}$, existe $\widehat{U} \supseteq \widehat{x}\widehat{A}$ abierto y σ-compacto tal que $\widehat{\mu}(\widehat{U}) - \widehat{\mu}(\widehat{x}\widehat{A}) < \varepsilon$. Por la proposición 1.1.11, existe una vecindad compacta $\widehat{C} \subseteq \widehat{G}$ de e tal que $\widehat{C}\widehat{x}\widehat{A} \subseteq \widehat{U}$. Como $\widehat{C}\widehat{x}$ es vecindad de $\widehat{x}$ y G es denso, existe $x \in G \cap \widehat{C}\widehat{x}$. Entonces $x\widehat{A} \subseteq \widehat{C}\widehat{x}\widehat{A} \subseteq \widehat{U}$ y por lo tanto,

$$\widehat{\mu}(\widehat{A}) = \mu(\widehat{A} \cap G) = \mu(x\widehat{A} \cap G) \leq \mu(\widehat{U} \cap G) = \widehat{\mu}(\widehat{U}) < \widehat{\mu}(\widehat{x}\widehat{A}) + \varepsilon.$$

Como ε fue arbitrario, se tiene $\widehat{\mu}(\widehat{A}) \leq \widehat{\mu}(\widehat{x}\widehat{A})$. Repitiendo el argumento con $\widehat{x}' = \widehat{x}^{-1}$ y $\widehat{A}' = \widehat{x}\widehat{A}$, se obtiene que $\widehat{\mu}(\widehat{A}) \geq \widehat{\mu}(\widehat{x}\widehat{A})$, dándonos la igualdad. $\blacksquare$

Por el teorema 1.4.17 y la afirmación 2, $\widehat{\mu}$ se extiende a una única medida de Radon en $\mathcal{B}(\widehat{G})$. Por la unicidad del teorema de Haar para medidas (corolario 2.2.3), la afirmación 3, y el hecho de que $\widehat{\mu}$ es no nula (pues μ es no nula), esta medida debe ser una medida de Haar izquierda en $\widehat{G}$. Esto muestra que $\widehat{\mu}$ es una medida de Haar-Baire izquierda. $\square$

Con el teorema anterior, podemos construir estructuras topológicas a partir de estructuras de medida. Es natural preguntarse: si en un inicio la medida de Weil es la inducida por una medida de Haar, ¿la topología de Weil coincide con la topología original? Es decir, si iniciamos con una medida de Haar en un grupo σ-localmente compacto, hacemos la contracción de Baire, y nos fijamos en la topología de Weil inducida, ¿recuperamos la topología original? La respuesta es afirmativa. Para demostrarlo, requerimos del teorema de Steinhaus-Weil [32, 36].

Teorema 3.3.21 (de Steinhaus-Weil). *Sea G un grupo topológico localmente compacto y $\mu\colon \mathcal{B}(G) \to [0,\infty]$ una medida de Haar izquierda. Si $A \in \mathcal{B}(G)$ satisface $0 < \mu(A) < \infty$, entonces $e \in \operatorname{int}(AA^{-1})$*

Demostración (Stromberg [33]). Por la regularidad de μ, existe un compacto $C \in \mathcal{B}(X)$ y un abierto $U \in \mathcal{B}(X)$ con $C \subseteq A \subseteq U$ y $\mu(U) < \mu(C) + \varepsilon$ y $\mu(C) > 0$, con $\varepsilon = \mu(C)$. Por la proposición 1.1.11, existe una vecindad compacta N de e con $NC \subseteq U$. Veamos que $N \subseteq CC^{-1}$. Sea $x \in N$. Entonces

$$xC \cup C \subseteq NC \cup C \subseteq U,$$

y por lo tanto

$$\mu(U) \geq \mu(xC) + \mu(C) - \mu(xC \cap C) \geq \varepsilon + \mu(C) - \mu(xC \cap C) > \mu(U) - \mu(xC \cap C).$$

Luego $\mu(xC \cap C) > 0$ y entonces $xC \cap C \neq \emptyset$. Por la proposición 1.1.5, $x \in CC^{-1}$. Así, tenemos $e \in \operatorname{int} N \subseteq \operatorname{int}(CC^{-1}) \subseteq \operatorname{int}(AA^{-1})$. □

Teorema 3.3.22. *Sea (G, τ) un grupo σ-localmente compacto y $\mu\colon \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G) \to [0, \infty]$ una medida de Haar-Baire izquierda. Entonces $\tau = \tau_\mu$.*

Demostración. Por simplicidad, escribamos $\mathcal{A} = \mathcal{B}\boldsymbol{a}(G)$.

Veamos que $\tau \subseteq \tau_\mu$. Por la observación 3.3.18, basta verificar que toda τ-vecindad de e contiene un conjunto de la forma AA^{-1} con $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$. Sea V una τ-vecindad de e. Por la proposición 1.1.10, existe $U \subseteq G$ una τ-vecindad simétrica de e tal que $U^2 \subseteq V$. Como G es localmente compacto respecto a τ, por la proposición 1.4.7, existe una τ-vecindad $A \subseteq U$ de e que es compacta y G_δ respecto a τ. Como μ es medida de Baire, $\mu(A) > 0$, y el por corolario 2.2.4, $\mu(A) < \infty$. Es decir, $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$ satisface $AA^{-1} \subseteq U^2 \subseteq V$.

Ahora veamos que $\tau_\mu \subseteq \tau$. Por la observación 3.3.18, basta verificar que para todo conjunto $A \in \mathcal{A}_{0<\mu<\infty}$, el conjunto AA^{-1} es una τ-vecindad de e. Pero esto es justamente lo que establece el teorema de Steinhaus-Weil (teorema 3.3.21) al aplicarlo a la topología τ. □

Si G es un grupo σ-localmente compacto, su topología se puede codificar completamente en la medida de Haar-Baire. Conociendo solamente los conjuntos de Baire y su medida de Haar, podemos reconstruir la topología completa a través de la topología de Weil. Si inicialmente nuestro grupo solo es localmente compacto, a través del teorema 3.1.7, podemos conseguir un subgrupo σ-localmente compacto que esencialmente carga toda la estructura topológica y aplicarle el argumento anterior. De cierta manera, en grupos localmente compactos, la topología no es más que una estructura *de medida*.

Referencias adicionales

En su artículo de 1946, Oxtoby [25] presenta algunas propiedades peculiares que pueden tener algunas medidas invariantes en grupos que no son localmente compactos. También analiza las razones por las que estas medidas no satisfacen el teorema inverso de Haar.

Existe una condición dada por Mackey en 1957 [22] para que la topología de Weil sea directamente localmente compacta. Una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es numerablemente separable si existe una familia numerable $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ diferentes, existe $n \in \mathbb{N}$ con $x \in A_n$ y $y \notin A_n$. Se dice que $\mathcal{A}$ es analítica si es numerablemente separable y es la imagen de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M)$ de un espacio separable y completamente metrizable M bajo una función medible $f\colon M \to X$, es decir, tal que $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(M)$ si $A \in \mathcal{A}$ y $f(A) \in \mathcal{A}$ si $A \in \mathcal{B}(M)$. Mackey demostró que, si añadimos la suposición de que el dominio de la medida de Weil sea una σ-álgebra analítica $\mathcal{A}$, la topología de Weil es la única topología localmente compacta cuya σ-álgebra de Borel coincide con $\mathcal{A}$ (c.f. [22, teo. 7.1]).

En la referencia [3] del 2018, se estudian generalizaciones de la topología de Weil y la conexión que tienen con ciertas propiedades de tipo Steinhaus-Weil (ver teorema 3.3.21) en diferentes grupos topológicos.

Apéndice

Demostración del teorema de Hall

Tomamos la siguiente demostración de la referencia [8, teo. 5.18, p. 137].

Demostración del teorema de Hall (2.1.18).

(I) ⇒ (II) Sea $\sigma\colon A \to B$ una función inyectiva tal que para todo $a \in A$, $\sigma(a) \in B_a$ y tomemos $C \subseteq A$ arbitrario. Entonces tenemos que $\sigma(C) \subseteq \bigcup_{a\in C} B_a$ y por la inyectividad $|C| = |\sigma(C)| \leq |\bigcup_{a\in C} B_a|$.

(II) ⇒ (I) Procedemos por inducción sobre el número de elementos en A. Si $A = \{a\}$ satisface la condición de Hall, tomando $C = A$, se obtiene $a \in B_a$. Así, $\sigma\colon a \mapsto a$ es el deseado.

Ahora, supongamos que el teorema de Hall es válido para A de tamaño menor que $n \in \mathbb{N}$, y pensemos que $|A| = n$ y B_a $(a \in A)$ satisfacen la condición de Hall.

Afirmación 1. *Si $C, C' \subseteq A$ satisfacen $|C| = \left|\bigcup_{a\in C} B_a\right|$ y $|C'| = \left|\bigcup_{a\in C'} B_a\right|$, entonces*

$$|C \cup C'| = \left|\bigcup_{a\in C\cup C'} B_a\right|.$$

En efecto, por la condición de Hall el lado izquierdo es menor o igual que el derecho. Y por otro lado, usando de nuevo la condición de Hall para $C \cap C'$,

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{a\in C\cup C'} B_a\right| &\leq \left|\bigcup_{a\in C} B_a\right| + \left|\bigcup_{a\in C'} B_a\right| - \left|\bigcup_{a\in C\cap C'} B_a\right| \\ &\leq |C| + |C'| - |C \cap C'| = |C \cup C'|.\end{aligned}$$ ■

Fijemos algún $\alpha \in A$ y definamos $\widetilde{A} = A \setminus \{\alpha\}$.

Caso 1: Existe algún $\beta \in B_\alpha$ tal que los conjuntos

$$\widetilde{B}_a = B_a \setminus \{\beta\} \quad (a \in \widetilde{A})$$

satisfacen la condición de Hall. Por la hipótesis de inducción, existe $\widetilde{\sigma} \colon \widetilde{A} \to B$ inyectiva tal que para todo $a \in \widetilde{A}$, $\widetilde{\sigma}(a) \in \widetilde{B}_a$. En este caso, podemos definir $\sigma(\alpha) = \beta$ y $\sigma|_{\widetilde{A}} = \widetilde{\sigma}$ y terminamos.

Caso 2: Para todo $\beta \in B_\alpha$, los conjuntos $\widetilde{B}_a = B_a \setminus \{\beta\}$ no satisfacen la condición de Hall. Es decir, siempre existe $C_\beta \subseteq \widetilde{A}$ tal que $|\bigcup_{a \in C_\beta} \widetilde{B}_a| < |C_\beta|$. Luego, $|\bigcup_{a \in C_\beta} \widetilde{B}_a| + 1 \leq |C_\beta|$. Pero sabemos, por hipótesis, que $|\bigcup_{a \in C_\beta} B_a| \geq |C_\beta|$. Entonces

$$|C_\beta| \leq \left| \bigcup_{a \in C_\beta} B_a \right| \leq \left| \bigcup_{a \in C_\beta} \widetilde{B}_a \cup \{\beta\} \right| \leq \left| \bigcup_{a \in C_\beta} \widetilde{B}_a \right| + 1 \leq |C_\beta|$$

y por lo tanto,

$$|C_\beta| = \left| \bigcup_{a \in C_\beta} B_a \right|.$$

Sea $\widetilde{C} = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} C_\beta \subseteq \widetilde{A}$. Por la afirmación 1, tenemos que

$$|\widetilde{C}| = \left| \bigcup_{a \in \widetilde{C}} B_a \right|.$$

Además $B_\alpha \subseteq \bigcup_{a \in \widetilde{C}} B_a$, pues si existiera $\beta \in B_\alpha \setminus \bigcup_{a \in \widetilde{C}} B_a$, entonces tendríamos que los conjuntos $\widetilde{B}_a = B_a \setminus \{\beta\} = B_a \quad (a \in \widetilde{A})$ satisfacen la condición de Hall con C_β, lo cual estamos suponiendo no sucede.

Sea $C = \widetilde{C} \cup \{\alpha\}$. Entonces

$$|C| = |\widetilde{C}| + 1 = \left| \bigcup_{a \in \widetilde{C}} B_a \right| + 1 = \left| \bigcup_{a \in \widetilde{C}} B_a \cup B_\alpha \right| + 1 = \left| \bigcup_{a \in C} B_a \right| + 1,$$

lo cual contradice la condición de Hall. Por lo tanto, este caso nunca sucede. □

Referencias

[1] Arkhangelskii, Alexander V. y Tkachenko, Mikhail. *Topological Groups and Related Structures*. Francia: Atlantis Press, 2008. ISBN: 9789491216350.

[2] Baire, René-Louis. "Sur les fonctions de variables réelles". Tesis doct. Francia, 1899. URL: `https://archive.org/details/surlesfonctions00bairgoog`.

[3] Bingham, Nicholas H. y Ostaszewski, Adam J. "Beyond Lebesgue and Baire IV: Density topologies and a converse Steinhaus–Weil theorem". En: *Top. and its Apps.* 239 (2018), págs. 274-292. DOI: `10.1016/j.topol.2017.12.029`. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864117306971`.

[4] Bogachev, Vladimir I. *Measure Theory*. Vol. 1. Alemania: Springer, 2007. ISBN: 9783540345138.

[5] Bredon, Glen E. "A new treatment of the Haar integral". En: *The Michigan Math. Jour.* 10.4 (1963), págs. 365-373. DOI: `10.1307/mmj/1028998972`. URL: `https://projecteuclid.org/euclid.mmj/1028998972`.

[6] Cartan, Henri. "Sur la mesure de Haar". En: *C. R. Acad. Sci. Paris* 211 (1940), págs. 759-762.

[7] Cohn, Donald. *Measure Theory*. 2.ª ed. Estados Unidos: Birkhäuser, 2013. ISBN: 9781461469551.

[8] Diestel, Joe y Spalsbury, Angela. *The Joys of Haar Measure*. Estados Unidos: American Mathematical Society, 2014. ISBN: 9781470414115.

[9] Dugundji, James. *Topology*. Estados Unidos: Allyn y Bacon, 1966. ISBN: 978069-7068897.

[10] Engelking, Ryszard. *General Topology*. Alemania: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 9783885380061.

[11] Folland, Gerald B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2.ª ed. PAM. Wiley, 1999. ISBN: 9780471317166.

[12] Folland, Gerald B. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Estados Unidos: CRC Press, Taylor & Francis, 2016. ISBN: 9781498727150.

[13] Fremlin, David H. *Measure Theory*. Vol. 2. Reino Unido: Torres Fremlin, 2000. ISBN: 0953812928.

[14] Haar, Alfred. "Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen". En: *The Ann. of Math.* 34.1 (1933), pág. 147. DOI: 10.2307/1968346. URL: https://www.jstor.org/stable/1968346.

[15] Hall, Philip. "On representatives of subsets". En: *Jour. of the London Math. Soc.* s1-10.1 (1935), págs. 26-30. DOI: 10.1112/jlms/s1-10.37.26. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s1-10.37.26.

[16] Halmos, Paul. *Measure Theory*. Estados Unidos: Springer Science, 1950. ISBN: 9780387900889.

[17] Hewitt, Edwin y Ross, Kenneth A. *Abstract Harmonic Analysis*. Vol. 1. Estados Unidos: Springer, 1979. ISBN: 9780387941905.

[18] Husain, Taqdir. *Introduction to Topological Groups*. Japón: W.B. Sanders Company, 1966.

[19] Kakutani, Shizuo. "Concrete representation of abstract (M)-spaces". En: *The Ann. of Math.* 42.4 (1941), pág. 994. DOI: 10.2307/1968778. URL: https://www.jstor.org/stable/1968778.

[20] Kallenberg, Olav. *Random Measures, Theory and Applications*. Suiza: Springer, 2017. ISBN: 9783319415963.

[21] Klenke, Achim. *Probability Theory : A Comprehensive Course*. Reino Unido: Springer, 2013. ISBN: 9781447153603.

[22] Mackey, George W. "Borel structure in groups and their duals". En: *Trans. of the American Math. Soc.* 85.1 (1957), págs. 134-134. DOI: 10.1090/s0002-9947-1957-0089999-2. URL: https://www.ams.org/journals/tran/1957-085-01/S0002-9947-1957-0089999-2/.

[23] Markov, Andrey. "On mean values and exterior densities". En: *Rec. Math. Moscou* 4 (1938), págs. 165-190. URL: https://zbmath.org/?q=0020.10804.

[24] Mendelson, Bert. *Introduction to Topology*. 3.ª ed. Estados Unidos: Dover Publications, 1990. ISBN: 9780486663524.

[25] Oxtoby, John C. "Invariant measures in groups which are not locally compact". En: *Trans. of the American Math. Soc.* 60.2 (1946), págs. 215-237. ISSN: 00029947. URL: http://www.jstor.org/stable/1990145.

[26] Pettis, Billy James. "On continuity and openness of homomorphisms in topological groups". En: *The Ann. of Math* 52.2 (1950), pág. 293. DOI: `10.2307/1969471`. URL: `https://www.jstor.org/stable/1969471`.

[27] Radon, Johann. "Theorie und Anwendungen der absolut additiv Mengenfunktionen". En: *S.-B. Math.-Natur. Kl. Kais. Akad. Wiss. Wien* 122.IIa (1913), pág. 1295.

[28] Riesz, Frigyes. "Sur les opérations fonctionnelles linéaires". En: *C. R. Acad. Sci. Paris.* 149 (1909), págs. 974-977.

[29] Rotman, Joseph. *Advanced Modern Algebra*. Estados Unidos: Prentice Hall, 2002. ISBN: 9780130878687.

[30] Royden, Halsey L. *Real analysis*. 3.ª ed. Estados Unidos: Collier-MacMillan, 1988. ISBN: 0024041513.

[31] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*. Estados Unidos: McGraw-Hill, 1987. ISBN: 9780070542341.

[32] Steinhaus, Hugo. "Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive". En: *Fund. Mathematicae* 1.1 (1920), págs. 93-104. DOI: `10.4064/fm-1-1-93-104`. URL: `https://doi.org/10.4064/fm-1-1-93-104`.

[33] Stromberg, Karl. "Shorter notes: An elementary proof of Steinhaus's Theorem". En: *Proc. of the American Math. Soc.* 36.1 (1972), pág. 308. DOI: `10.2307/2039082`. URL: `https://www.jstor.org/stable/2039082`.

[34] Todorcevic, Stevo y Farah, Ilijas. *Some Applications of the Method of Forcing*. Rusia: Yenisei, 1995. ISBN: 5886230149.

[35] Weil, André. *Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Générale*. Francia: Hermann, 1937.

[36] Weil, André. *L'Intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*. Francia: Hermann, 1940. ISBN: 9782705611453.