



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**FABRICACIÓN DE MICROCAVIDADES ÓPTICAS PARA
SU EMPLEO EN FUENTES DE FOTONES PARA EL
APROVECHAMIENTO DE SUS PROPIEDADES ÓPTICAS
NO LINEALES**

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:
CÉSAR BERTONI OCAMPO

TUTOR PRINCIPAL:
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

COMITÉ TUTOR:
DR. RIGOBERTO CASTRO BELTRÁN
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DR. JESÚS GARDUÑO MEJÍA
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA
CIUDAD DE MÉXICO
ABRIL 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

César Bertoni Ocampo: *Fabricación de microcavidades ópticas para su empleo en fuentes de fotones para el aprovechamiento de sus propiedades ópticas no lineales*,
Tesis de maestría, © Abril 2021

Omniū rerū principia parva sūnt

— Marco Tulio Cicerón

A mis padres

RESUMEN

La creación de fuentes de luz cuantizada de ancho de banda ultra-estrecho es fundamental en el desarrollo de toda una nueva familia de tecnologías que aprovechan las propiedades particulares de este tipo de luz. Este trabajo implementa y describe una fuente de luz fotónica con el ancho de banda más estrecho del que se tenga conocimiento hasta la fecha (550 kHz). Dicha fuente consta de una microcavidad óptica de simetría esférica acoplada a la luz con una fibra óptica estrechada, ambas fabricadas en el laboratorio.

ABSTRACT

The creation of quantum light sources with ultra-narrow spectral bandwidth is fundamental in the development of a new family of technologies that take advantage of the particular properties of quantized light. In this work is implemented and described a photonic light source with the narrowest spectral bandwidth known to date (550 kHz). This source consists of a spherically symmetric optical microcavity coupled to light with a tapered optical fiber, both fabricated in the laboratory.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Entwicklung von quantifizierten Lichtquellen mit ultra-schmaler Bandbreite ist grundlegend für die Entwicklung einer ganz neuen Familie von Technologien, die sich die besonderen Eigenschaften dieser Art von Licht zunutze machen. Diese Arbeit implementiert und beschreibt eine photonische Lichtquelle mit der schmalsten bisher bekannten Bandbreite (550 kHz). Diese Quelle besteht aus einer sphärisch symmetrischen optischen Mikrokavität, die mit einer schmalen optischen Faser an das Licht gekoppelt ist, die beide im Labor hergestellt wurden.

Bien acierta quien sospecha que siempre yerra

— Francisco de Quevedo

AGRADECIMIENTOS

Heme aquí nuevamente ante ustedes con un nuevo trabajo que no habría sido posible sin la existencia de otros a quienes tanto les debo y que, sin su presencia, el camino habría sido cuando menos tortuoso.

A mis padres Elia y Julio que me han seguido acompañando en esta senda, y por la paciencia que me han tenido estos últimos meses. También a mis hermanos Santos y Ana Paola, que en el encierro nos hemos sobrellevado y acercado.

Agradezco también a mi comité tutor que ha estado ahí para ayudarme donde lo he requerido, los doctores Alfred B. U'Ren Cortés, Rigoberto Castro Beltrán y Jesús Garduño Mejía.

Al doctor Héctor Cruz Ramírez que sin su ayuda en el laboratorio este trabajo no habría sido posible de ejecutar. También al maestro Erasto Ortiz Ricardo estimado colega y de quién sigo aprendiendo.

A mis compañeros de laboratorio, en especial a Tonatiuh, Dalia, Mónica y Arturo, cuya ayuda no solo es grata, sino su compañía amena.

Agradezco también a mis amigos caros, si bien pocos, que han estado ahí para soportar a veces mis tontas (o no tanto) iras. Y a mis caseros por tantos años, la señora Irma y el señor José, que ya los considero de la familia.

ÍNDICE GENERAL

I INTRODUCCIÓN

1	INTRODUCCIÓN	3
1.1	Propuesta y Objetivos	5
1.2	Estructura de la Tesis	5

II MARCO TEÓRICO

2	GUIADO DE LUZ EN MICROESFERAS	9
2.1	Soluciones al campo en microesferas	10
2.2	Parámetros de caracterización de las cavidades esféricas . .	15
2.2.1	Rango Espectral Libre	16
2.2.2	Fineza	17
2.2.3	Factor de calidad	18
3	GUIADO DE LUZ EN FIBRA ÓPTICA ESTRECHADA	21
3.1	Regímenes de guiado	26
3.2	Fibra óptica estrechada	28
3.3	Propagación de la luz en fibra al estrecharse	30
3.3.1	Condiciones de adiabaticidad	33
4	SISTEMA ESFERA-FIBRA	35
4.1	Teoría de modos acoplados	35
4.2	Acoplamiento fibra-esfera y esfera-fibra	38
4.2.1	Acoplamiento fibra-esfera	39
4.2.2	Acoplamiento esfera-fibra	40
4.3	Sobre la utilidad de la constante de acoplamiento	40
5	MEZCLADO ESPONTÁNEO DE CUATRO ONDAS	45
5.1	Óptica no lineal	45
5.2	Mezclado Espontáneo de Cuatro Ondas	47
5.3	Coeficiente no lineal	49
5.4	Diagrama de empare de fases.	50
5.5	Estado de dos fotones	52

III DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

6	DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	57
6.1	Fabricación y caracterización de fibra estrechada	57
6.2	Fabricación y caracterización de microesferas	60
6.3	Generación y detección de fotones	69

IV CONCLUSIONES

7	CONCLUSIONES	85
---	--------------	----

V APÉNDICE

A	APÉNDICE MATEMÁTICO DEL CAPÍTULO 2	89
A.1	Solución a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas	89
A.1.1	Soluciones al campo electromagnético en microesferas	99
A.1.2	Ecuaciones modales	101
B	FIGURAS ADICIONALES	109
B.1	Gráficas modales del campo electromagnético para microesferas	109
B.2	Gráficas modales LP del campo eléctrico para fibras.	122
C	DEMOSTRACIONES DEL CAPÍTULO 4	129
C.1	Demostración de la relación de reciprocidad (4.1)	129
C.1.1	Demostración de los coeficientes de acoplamiento	131
C.1.2	Lado izquierdo de la ecuación (4.5)	132
C.1.3	Lado derecho de la ecuación (4.5)	133
D	DEMOSTRACIÓN DE PERFIL EXPONENCIAL EN FIBRA ÓPTICA ESTRECHADA	137
D.1	Ley de distancias y conservación de volumen	138
D.2	Soluciones	139
E	TRANSFORMADA DE FOURIER A CORTO TIEMPO	143
E.1	La Transformada en Tiempo a Frecuencias Cortas	144
E.2	El caso discreto	145
	BIBLIOGRAFÍA	147

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Sistema esférico de coordenadas	9
Figura 2.2	Solución de la ecuación de autovalores de una microesfera para λ y radio dados	14
Figura 2.3	Solución de la ecuación de autovalores de una microesfera para índice l y radio dados	14
Figura 2.4	Esquema de caracterización de resonancias en microesferas	16
Figura 3.1	Coordenadas cilíndricas para una fibra óptica	21
Figura 3.2	Corte transversal de una fibra óptica	22
Figura 3.3	Solución de ec. de autovalores para fibras, modos HE	27
Figura 3.4	Solución de ec. de autovalores para fibras, modos EH	28
Figura 3.5	Índice de refracción efectivo vs. frecuencia normalizada (fuerte)	29
Figura 3.6	Índice de refracción efectivo vs. frecuencia normalizada (débil)	29
Figura 3.7	Perfil longitudinal de una fibra óptica estrechada	30
Figura 3.8	Frecuencia longitudinal de abatimiento vs. longitud de fibra	31
Figura 3.9	Ángulos críticos vs. radio de fibra	33
Figura 4.1	Sistema esfera-fibra	36
Figura 4.2	Ejemplo de campo fibra-esfera	39
Figura 4.3	$ \tilde{\kappa}_{sf} ^2$ vs. r_f	41
Figura 4.4	$ \tilde{\kappa}_{fs} ^2$ vs. r_f	42
Figura 4.5	$ \tilde{\kappa}_{sf} ^2$ vs. r_f , en modo esfera TE	42
Figura 4.6	$ \tilde{\kappa}_{sf} ^2$ vs. r_f , en modo esfera TM	43
Figura 5.1	Diagrama del mezclado de cuatro ondas no degenerado	48
Figura 5.2	Diagrama del mezclado de cuatro ondas degenerado	48
Figura 5.3	Curvas de <i>phase-matching</i>	51
Figura 5.4	Curvas de <i>phase-matching</i>	52
Figura 5.5	Peine de frecuencias y su transformada, para G.	53
Figura 6.1	Proceso de estirado de una fibra óptica	58
Figura 6.2	Señal de potencia vs. tiempo	59
Figura 6.3	Espectrograma de frecuencia de batido normalizada en proceso de estiramiento	59
Figura 6.4	Perfiles de esferas fabricadas	61
Figura 6.5	Micrografía de esfera	61
Figura 6.6	Micrografía de esfera en zona de transición	62

Figura 6.7	Esfera y fibra	63
Figura 6.8	Caracterización de microesfera	65
Figura 6.9	Caracterización de microesfera	65
Figura 6.10	Caracterización de microesfera	66
Figura 6.11	<i>Ringing</i>	67
Figura 6.12	Montaje experimental	68
Figura 6.13	Espectro observado a la salida del segundo <i>CWDM</i> .	70
Figura 6.14	Señal filtrada, dependencia de potencia y tiempos de arribo con y sin retraso	71
Figura 6.15	Datos para λ_p en canal 33, λ_i en canal 47, y diámetro $360 \mu\text{m}$	73
Figura 6.16	Datos para λ_p en canal 33, λ_i en canal 49, y diámetro $360 \mu\text{m}$	74
Figura 6.17	Datos para λ_p en canal 34, λ_i en canal 48, y diámetro $360 \mu\text{m}$	75
Figura 6.18	Datos para λ_p en canal 34, λ_i en canal 49, y diámetro $360 \mu\text{m}$	76
Figura 6.19	Datos para λ_p en canal 33, λ_i en canal 47, y diámetro $270 \mu\text{m}$	77
Figura 6.20	Datos para λ_p en canal 33, λ_i en canal <i>Coarse Wavelength Division Multiplexing (CWDM)</i> centrado en 1530 nm , y diámetro $270 \mu\text{m}$	77
Figura 6.21	Espectros de fotones señal y acompañante	81
Figura 6.22	FSR teórica vs. experimental	81
Figura B.1	Modos de microesfera TE con $l = 81$ y $m = 81$. . .	109
Figura B.2	Modos de microesfera TE con $l = 81$ y $m = 80$. . .	110
Figura B.3	Modos de microesfera TE con $l = 81$ y $m = 79$. . .	111
Figura B.4	Modos de microesfera TE con $l = 81$ y $m = 78$. . .	112
Figura B.5	Modos de microesfera TE con $l = 74$ y $m = 74$. . .	113
Figura B.6	Modos de microesfera TE con $l = 74$ y $m = 73$. . .	114
Figura B.7	Modos de microesfera TE con $l = 74$ y $m = 72$. . .	115
Figura B.8	Modos de microesfera TE con $l = 74$ y $m = 71$. . .	116
Figura B.9	Modos de microesfera TE con $l = 70$ y $m = 70$. . .	117
Figura B.10	Modos de microesfera TE con $l = 70$ y $m = 69$. . .	118
Figura B.11	Modos de microesfera TE con $l = 70$ y $m = 68$. . .	119
Figura B.12	Modos de microesfera TE con $l = 70$ y $m = 67$. . .	120
Figura D.1	Diagrama de posición de puntos de fibra al calentarse	137
Figura D.2	Diagrama de calentamiento y estiramiento de fibra.	141
Figura D.3	Perfil longitudinal de una fibra óptica estrechada .	142

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 6.1	Resumen de resultados	78
Cuadro 6.2	Resultados de experimentos previos	79
Cuadro B.1	Modos LP ₀₁ y LP ₁₁ , y modos vectoriales asociados	122
Cuadro B.2	Modos LP ₁₁ (continuación) y LP ₂₁ , y modos vectoriales asociados	123
Cuadro B.3	Modos LP ₂₁ (continuación) y LP ₀₂ , y modos vectoriales asociados	124
Cuadro B.4	Modos LP ₃₁ y modos vectoriales asociados	125
Cuadro B.5	Modos LP ₁₂ y modos vectoriales asociados	126
Cuadro B.6	Modos LP ₄₂ y modos vectoriales asociados	127

ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS

APD	<i>Avalanche Photodiode</i>
CCD	<i>Charge-Coupled Device</i>
CWDM	<i>Coarse Wavelength Division Multiplexing</i>
DDTE	<i>Distribución de Diferencias de Tiempo de Emisión</i>
DWDM	<i>Dense Wavelength Division Multiplexing</i>
EDFA	<i>Erbium Doped Fiber Amplifier</i>
FC	<i>Ferrule Connector</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FSR	<i>Free Spectral Range</i>
FWHM	<i>Full Width at Half Maximum</i>
FWM	<i>Four Wave Mixing</i>
ICN	<i>Instituto de Ciencias Nucleares</i>
JSA	<i>Joint Spectral Amplitude</i>
JTA	<i>Joint Temporal Amplitude</i>
KTP	<i>Potassium Titanyl Phosphate</i>
LP	<i>Linealmente Polarizado</i>
MC	<i>Monocromador</i>

PC	<i>Polarization Controller</i>
PPKTP	<i>Periodically Poled Potassium Titanyl Phosphate</i>
PPLN	<i>Periodically Poled Lithium Niobate</i>
SFTT	<i>Short-Frequency Time Transform</i>
SFWM	<i>Spontaneous Four Wave Mixing</i>
SPDC	<i>Spontaneous Parametric Down Conversion</i>
SPM	<i>Self-Phase Modulation</i>
STFT	<i>Short-Time Fourier Transform</i>
TE	Transversal Eléctrico
TM	Transversal Magnético
UNAM	Universidad Nacional Autónoma de México
WDM	<i>Wavelength Division Multiplexing</i>
WGM	<i>Whispering Gallery Modes</i>
XPM	<i>Cross-Phase Modulation</i>

Parte I

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Las microcavidades (o microresonadores) ópticas son caminos ópticos cerrados que permiten la resonancia óptica de la luz. Se las emplea como filtros espectrales,[1] compresores de densidad de energía,[2] trampas ópticas (biosensores[3] y detectores de partículas únicas[4]), sensores de campo,[5] en el análisis de películas delgadas y nanopartículas,[6] en metrología,[7-9] así como en cavidades láser,[10-14] entre otras.[15]

Dentro del contexto de la óptica no lineal, que es aquella que depende de la respuesta no lineal de la polarización eléctrica del medio óptico, se pueden aprovechar estos fenómenos en microcavidades ópticas. Por ejemplo, para obtener un aumento coherente en la intensidad de la luz e incrementar la respuesta óptica no lineal de los medios[16], o con bajos umbrales de potencia,[17, 18] en la generación de estados coherentes comprimidos cuánticos,[19] para emplearlas como fuentes de emisión láser, en aplicaciones de espectroscopía y electrodinámica cuántica,[20] para la generación de tercer armónico,[21-23] en su empleo para circuitos fotónicos integrados[24] o como fuentes fotónicas.¹

A las fuentes fotónicas las podemos clasificar en dos categorías según el ordenamiento de la estructura interna del material que las compone, cristalinas y amorfas. Dentro de las primeras encontramos cristales BBO (BaB_2O_4) cuyos efectos de generación dependen de la polarización del medio a segundo orden; mientras que en las segundas se encuentran a las fibras ópticas y los microresonadores ópticos (SiO_2) que dependen de la polarizabilidad del medio a tercer orden. En estas fuentes existen dos formas para producir parejas de fotones mediante procesos paramétricos y que se pueden implementar en conjunto con una configuración de cavidad óptica, ya sea empleando a la Conversión Espontánea Paramétrica Descendente (SPDC)²[26-31] que sucede en materiales con propiedades ópticas no lineales a segundo orden usualmente cristalinos y sin centrosimetría; y el Mezclado de Cuatro Ondas Espontáneo (SFWM)³[32-39] que es un proceso que sucede en medios no lineales a tercer orden normalmente isotrópicos.⁴[41]

1 Se recomienda revisar la siguiente referencia en tanto a los avances en resonadores ópticos no lineales [25].

2 Por las siglas en inglés de *Spontaneous Parametric Down Conversion* (SPDC).

3 Por las siglas en inglés de *Spontaneous Four Wave Mixing* (SFWM).

4 Se pueden observar fenómenos a tercer orden en medios anisotrópicos pero la tasa de conversión en estos es muy baja.[40]

Si el medio de generación de parejas de fotones se encuentra dentro de una cavidad (o se le da forma para que este sea la cavidad misma), empleando luz de bombeo con un ancho espectral ultra delgado, sucederá que características del ancho de banda tanto del bombeo como de los fotones emitidos quedarán determinadas por su resonancia en la cavidad. Esto conduce a que la amplitud espectral conjunta para la pareja de fotones generados, señal (*signal*) y acompañante (*idler*),⁵ puede ser descrita como un peine de frecuencias que es función de la diferencia de frecuencias de los fotones generados, $\omega_s - \omega_i$. Cada pico del peine resultante tendrá un ancho espectral que es inversamente proporcional al factor de calidad de la cavidad, Q ; mientras que la separación entre picos o Rango Espectral Libre (FSR)⁶ será inversamente proporcional al tiempo de vuelta de los fotones dentro de la cavidad.[42, 43] Luego, una cavidad con un alto factor de calidad tendrá la ventaja que los picos del peine tendrán una separación espectral mayor a aquellos generados en cavidades con un factor de calidad inferior, esto permitirá la diferenciación individual de los picos individuales en estos peines.

Por otra parte, que en los procesos de SFWM y SPDC sin cavidad la propagación de frecuencias emitidas sólo se vea principalmente limitada a las restricciones de empate de fases; puede ser útil en condiciones como en señales delgadas de interferencia de Hong-Ou-Mandel que permitan una alta resolución en dispositivos de tomografía de coherencia óptica.[44, 45] Además, el empleo de fuentes de ancho de banda estrecho resulta útil si se desean alcanzar transiciones específicas de sistemas de un solo átomo que requieren que tanto el ancho de banda como la frecuencia de los fotones empaten.[42, 43, 46] Es por lo que estas fuentes fotónicas se han propuesto para su uso en memorias cuánticas;[47, 48] de ahí la motivación para generar fuentes fotónicas de ancho de banda ultraestreo basadas en microresonadores ópticos a través de SFWM. Estas fuentes fotónicas basadas en microcavidades ópticas se plantean como útiles en la miniaturización de las mismas, para su empleo en manipulación óptica y detección en un mismo circuito fotónico.[49, 50]

Si bien, se han empleado como fuentes de fotones mediante SFWM microanillos,[34, 37-39, 49-55] microdiscos y esferas en Conversiones Paramétricas Descendentes;[56, 57] el empleo de microesferas al presentar un alto valor de confinamiento gracias a su alto factor de calidad es promisorio de generar fotones con ancho de banda ultraestreo, a su vez que correlacionados en tiempo y energía. Hemos de notar también avances en fuentes fotónicas por SPDC mejoradas por cavidad con geometrías de microanillos[27], microdiscos[28], con guías de onda no lineales con espejos

5 Nos referiremos a aquello que refiera a los fotones señal y acompañante con los subíndices s e i respectivamente.

6 Por las siglas en inglés de *Free Spectral Range* (FSR).

dieléctricos a sus extremos[31], así como en cavidades en espacio libre.[30, 58-60]

En este trabajo se reporta, al menos hasta donde se tiene conocimiento, a los anchos de banda más delgados para los fotones generados hasta ahora (de alrededor de 0.55 MHz).

1.1 PROPUESTA Y OBJETIVOS

Se propone en este trabajo que los microresonadores ópticos de geometría esférica pueden servir como fuentes de parejas de fotones generadas por SFWM, y se plantean los siguientes objetivos:

- Fabricación de los resonadores ópticos esféricos tales que generen fotones mediante SFWM.
- Caracterización de sus propiedades de generación, acoplamiento y resonancia.

1.2 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Se comenzará hablando en el [Capítulo 2](#) sobre las soluciones modales del campo electromagnético en esferas y se definirán cantidades que nos ayudan a caracterizarlo. En el [Capítulo 3](#), y ya que a las microesferas empleadas se las acopló usando una fibra óptica estrechada, se hablará brevemente de sus soluciones de campo y de su caracterización en el proceso de estirado. En el [Capítulo 4](#) se estudiará al acoplamiento del sistema fibra-microesfera. En el [Capítulo 5](#) se hablará sobre el proceso de generación de fotones en microesferas. En el [Capítulo 6](#) se describirá el experimento preparado y los resultados obtenidos de este, para finalizar con conclusiones en el [Capítulo 7](#). Se incluye como apéndices matemáticos a los capítulos [2](#) y [3](#) a los apéndices [A](#) y [C](#), respectivamente. En particular el [Apéndice D](#) para el capítulo [3](#) tratará sobre la demostración del perfil exponencial de las transiciones de fibra empleadas en el experimento. Finalmente, el [Apéndice B](#) contiene figuras auxiliares que muestran el comportamiento de algunas soluciones modales tanto para microesferas como para fibras.

Parte II

MARCO TEÓRICO

GUIADO DE LUZ EN MICROESFERAS

A continuación, se resumen las soluciones al campo electromagnético en microesferas, el lector ha de remitirse a la [Sección A.1](#) en los apéndices para seguir el desarrollo matemático completo de las soluciones. El sistema coordenado por emplear se puede ver en la figura 2.1.

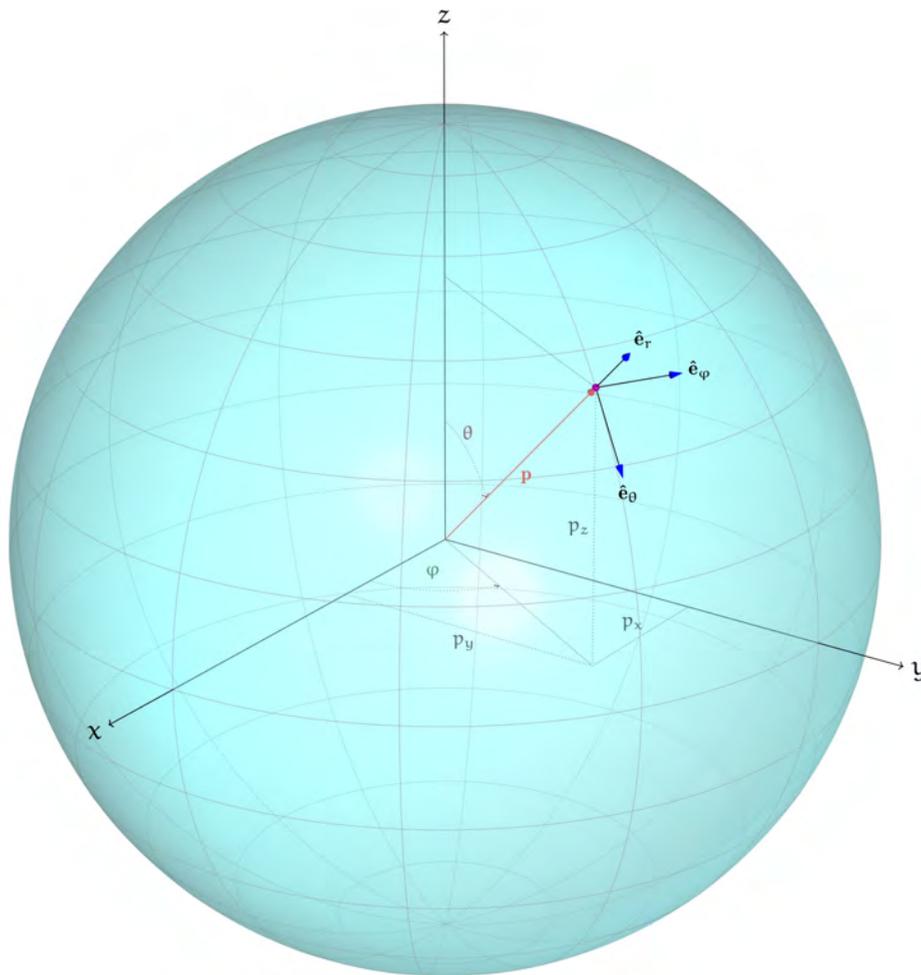


Figura 2.1: Sistema esférico de coordenadas referido para una microesfera, se indican las direcciones de los vectores unitarios de la base de este sistema en la punta del vector de posición \mathbf{P} .

2.1 SOLUCIONES AL CAMPO EN MICROESFERAS

A partir de la ecuación de onda en medios dieléctricos y separando la parte espacial de la temporal en las expresiones de campo, se encuentra que la ecuación a resolver está dada por la ecuación de Helmholtz vectorial, por lo que los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} habrán de cumplir con expresiones de la forma

$$\nabla^2 \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0, \quad (2.2)$$

donde k es el número de onda, y cuya solución directa es difícil de encontrar, por lo que se emplea para ello el método de Hansen[61] que trata de encontrar la solución escalar de dicha ecuación para hallar después una expresión vectorial. Así, la ecuación escalar de Helmholtz a resolver para una función $\Psi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ toma la forma

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) + k^2 \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.3)$$

que se puede resolver mediante el procedimiento estándar de separación de variables.

La ecuación (2.3) tiene como solución general a

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\alpha_l \frac{\varphi_l(kr)}{kr} - \beta_l \frac{\chi_l(kr)}{kr} \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (2.4)$$

donde $l \in \mathbb{Z}^+$ y $m \in \mathbb{Z}$, tal que $-l \leq m \leq l$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$; con α_l y β_l coeficientes constantes complejos, mientras que Y_l^m es el armónico esférico dado por

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi},$$

con P_l^m los polinomios asociados de Legendre cuya fórmula de Rodrigues es

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l,$$

donde si $m < 0$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x);$$

y φ_l y χ_l son las funciones de Bessel-Riccati expresadas mediante

$$\varphi_l(x) = x j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (2.5)$$

$$\chi_l(x) = -x y_l(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x); \quad (2.6)$$

con

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (2.7a)$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (2.7b)$$

donde J_l y Y_l son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo.

En general para cada l y m se puede escribir

$$\psi_l^m(r, \theta, \varphi) = Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (2.8)$$

donde Z_l puede ser la parte que depende de j_l o y_l .

Las soluciones vectoriales de (2.3) están dadas por la combinación lineal de las siguientes funciones:

$$\mathbf{L}_l^m = \nabla \Psi, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{M}_l^m = \mathbf{L}_l^m \times \mathbf{r}, \quad (2.9b) \quad \mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_l^m, \quad (2.9c)$$

que se pueden reescribir en términos de los armónicos esféricos vectoriales

$$\mathbf{Z}_{lm} = Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{Y}_{lm} = r \nabla Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (2.10b)$$

$$\mathbf{X}_{lm} = \nabla Y_l^m(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}. \quad (2.10c)$$

Para soluciones de campo de carácter solenoidal¹ basta expresar al campo en términos de \mathbf{M}_l^m y \mathbf{N}_l^m y se encuentran las siguientes soluciones. [62, 63]

Para el caso Transversal Eléctrico (TE) se tiene

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{cases} A_i^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r \leq R, \\ -A_o^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\underline{\mathbf{B}}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{ik}{\omega} A_i^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \varphi_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r \leq R, \\ -\frac{ik_0}{\omega} A_o^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \chi_l(k_0 r) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0 r)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (2.12)$$

¹ Se dice que un campo es solenoidal cuando tiene divergencia cero, $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$. Para el campo eléctrico sucede en ambientes con densidad de carga nula, $\rho_e = 0$. Dicha consideración es válida en nuestro caso pues empleamos materiales dieléctricos.

Mientras que para el caso Transversal Magnético (TM) se tendrá

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} A_i^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \varphi_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r \leq R, \\ -A_o^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \chi_l(k_0 r) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0 r)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{cases} \frac{ik}{\omega} A_i^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r \leq R, \\ -\frac{ik_0}{\omega} A_o^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r > R, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde R es el radio de la esfera, $k = nk_0$ con $n = n(\omega)$ es el índice de refracción dependiente de la frecuencia angular de la luz,² $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ la longitud de onda del haz y $A_{i/o}^{\text{TE/TM}}$ es la magnitud del campo indicando con el subíndice i u o según sea para dentro o fuera de la esfera respectivamente.³

Las ecuaciones modales estarán dadas por[64]

Ecuación de autovalores
para una microesfera

$$P \frac{\varphi_l'(kR)}{\varphi_l(kR)} = \frac{\chi_l'(kR)}{\chi_l(kR)}, \quad (2.15)$$

donde

$$P = \begin{cases} \frac{k_0}{k} = \frac{1}{n} & \text{si es TM,} \\ \frac{k}{k_0} = n & \text{si es TE.} \end{cases}$$

Empleando relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel J_l y Y_l se puede expresar lo anterior como[65]

$$\frac{Y_{l-\frac{1}{2}}(k_0 R)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(k_0 R)} - P \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(kR)}{J_{l+\frac{1}{2}}(kR)} - l \left(\frac{1}{k_0 R} - \frac{P}{kR} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Así, para obtener las frecuencias o longitudes de onda resonantes o el índice l que sea resonante a una determinada frecuencia, bastará con resolver la anterior ecuación para el caso que interese.

² Dicha dependencia se puede obtener de la ecuación de Sellmeier del material óptico empleado, y está dada por la expresión[40]

$$n(\omega)^2 = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2},$$

donde ω_j es la frecuencia de resonancia j -ésima y B_j es su intensidad. Los coeficientes correspondientes para el SiO_2 amorfo son: $B_1 = 0.6961663$, $B_2 = 0.4079426$, $B_3 = 0.8974794$, $\lambda_1 = 0.0684043 \mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0.1162414 \mu\text{m}$ y $\lambda_3 = 9.896161 \mu\text{m}$, con $\lambda_j = 2\pi c/\omega_j$.

³ Como abreviación del inglés *inside* (dentro) y *outside* (fuera).

Los rangos de las soluciones para resolver los índices l o las longitudes de onda en resonancia están dados por los siguientes criterios. Para l , tomando en cuenta al efecto Goos-Hanchen[63]

$$\frac{2\pi(R + \delta_p)}{\lambda} < l + \frac{1}{2} < n \frac{2\pi(R + \delta_p)}{\lambda}, \quad (2.17)$$

donde

$$\delta_p \approx \frac{\lambda}{2\pi n} \frac{P}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (2.18)$$

Mientras que las longitudes de onda resonantes estarán dentro del rango

$$\frac{2\pi R}{l + \frac{1}{2} - \alpha} < \lambda < \frac{2\pi R n}{l + \frac{1}{2} - \alpha n}, \quad (2.19)$$

con

$$\alpha = \frac{P}{n\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (2.20)$$

La solución a la ecuación de autovalores (2.15) se encuentra de forma numérica, como se aprecia en la figura 2.2; se pueden identificar a las soluciones con un nuevo índice s , que se asociará al orden de la solución, desde el valor más alto de l al más bajo, dadas las condiciones de radio R y longitud de onda λ .

Del mismo modo, en la figura 2.3 se identifican a las soluciones con una cruz negra, dadas las condiciones de radio R e índice l . Estas soluciones también se pueden indizar con s , pues corresponden a soluciones radiales interiores.⁴ Cada una de las soluciones modales encontradas se conocen como Modos de Galería Susurrante⁵ en analogía a las soluciones de ondas acústicas que surgen en geometrías similares, como en las cúpulas de iglesias.⁶

4 Como se muestra en la Sección B.1, conforme el valor del índice s aumenta, así el número de lóbulos en el campo que aparecen hacia dentro de la esfera.

5 Conocidos en inglés como *Whispering Galery Modes (WGM)*.

6 Las soluciones de esta naturaleza fueron descritas por primera vez por Lord Rayleigh en su obra *The Theory of Sound*. [66, pág. 126]

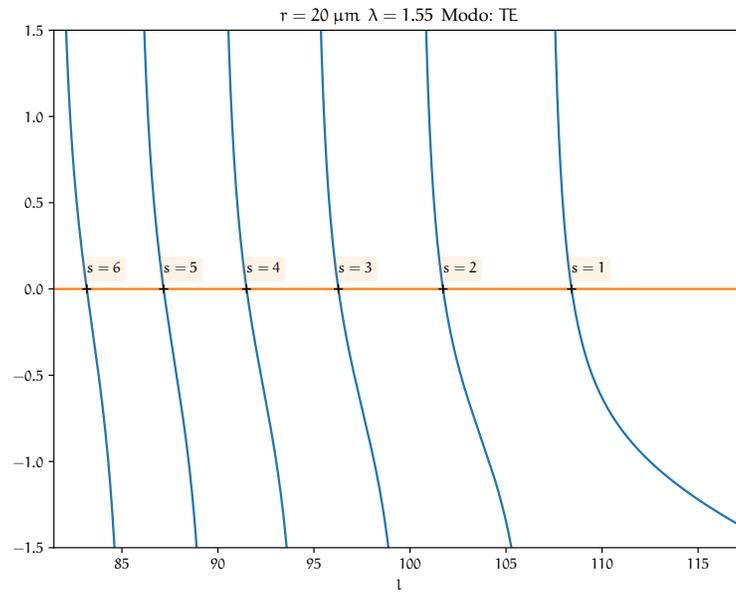


Figura 2.2: Representación gráfica de la solución de la ecuación de autovalores para una microesfera. Para los parámetros de radio y longitud de onda y tipo de modo indicados en el título, se identifican a las abscisas de los puntos de solución a los índices l que resuelven a la ecuación. Por otra parte nótese que el índice s del modo va desde el mayor al menor valor en l , a mayor sea el índice mayor es el orden del modo dirección radial.

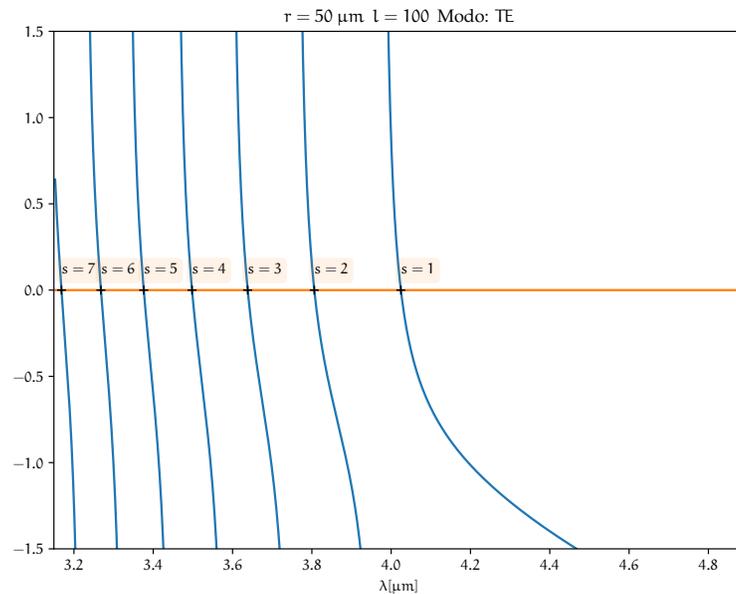


Figura 2.3: Representación gráfica de la solución de la ecuación de autovalores para una microesfera, para parámetros de radio, longitud de onda y tipo de modo indicados en el título de la figura. Se muestra que para determinado índice l del modo, hay una longitud de onda que resuena en dicho modo.

Para el caso de microesferas, se tiene que la constante de propagación longitudinal está dada por

$$\beta_m = \frac{m}{R}, \quad (2.21)$$

pues existen m longitudes de onda resonantes en una circunferencia de radio R . Conforme la diferencia entre índices l y m aumenta, el orden polar así lo hace,⁷ en este caso el camino de propagación (desde la perspectiva geométrica) es a lo largo de una trayectoria zigzagueante y la constante de propagación sobre este es

$$\beta_l = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R},$$

β_m es la proyección de β_l a lo largo de la circunferencia.[67, 68]

Por otra parte, las soluciones para frecuencias angulares resonantes de (2.15) están degeneradas para toda la familia de $2l + 1$ valores posibles de m que existen para cada l , esta degeneración se puede romper, como se muestra en [69], si se considera que la esfera es imperfecta y tiene un radio elipsoide

$$r(\theta) = R\left(1 + \frac{\epsilon}{3}(3\cos^2(\theta) - 1)\right),$$

donde la excentricidad es $\epsilon = \frac{r_p - r_e}{r_e}$, con r_p el radio polar y r_e el radio ecuatorial; con esto se puede llegar a que la relación entre la separación entre frecuencias angulares sin degenerar $\Delta\omega_{\text{disp}}$ y su valor central $\omega_{m,ls}$ está dada por⁸

$$\frac{\Delta\omega_{\text{disp}}}{\omega_{m,ls}} = -\frac{\epsilon}{6} \left(1 - 3\frac{|m|^2}{l(l+1)}\right),$$

que considerando índices m consecutivos, se puede aproximar a la separación de frecuencias como

$$\Delta\omega_{\text{disp}} = |\omega_{m,ls} - \omega_{m+1,ls}| \approx \omega_{m,ls} \epsilon \frac{|m| + \frac{1}{2}}{l(l+1)}. \quad (2.22)$$

2.2 PARÁMETROS DE CARACTERIZACIÓN DE LAS CAVIDADES ESFÉRICAS

Existen parámetros que se emplean para caracterizar el espectro de los modos resonantes⁹ y a las cavidades donde se propagan, servirá de apoyo

⁷ Ver figuras de la Sección B.1, donde en cuanto la diferencia entre índices l y m aumenta, el número de lóbulos debajo y sobre el ecuador también lo hace.

⁸ Ya se hace la identificación del modo con los índices m , l o s que le correspondan.

⁹ Estos parámetros son válidos en general para cualquier resonador óptico con sus respectivas adecuaciones a la geometría del mismo.

a su descripción referirse a la figura 2.4. Esta figura muestra la señal de transmitancia a la salida de una guía óptica que porta un haz láser y que se emplea como medio de acoplamiento de la luz a la esfera, las caídas en la señal de transmitancia indican que ha ocurrido una resonancia que toma energía de la guía óptica y que esta se ha acoplado a algún modo resonante de la esfera. Será en el [Capítulo 4](#) donde se discutirá más a fondo la interacción entre una microesfera y una guía óptica.

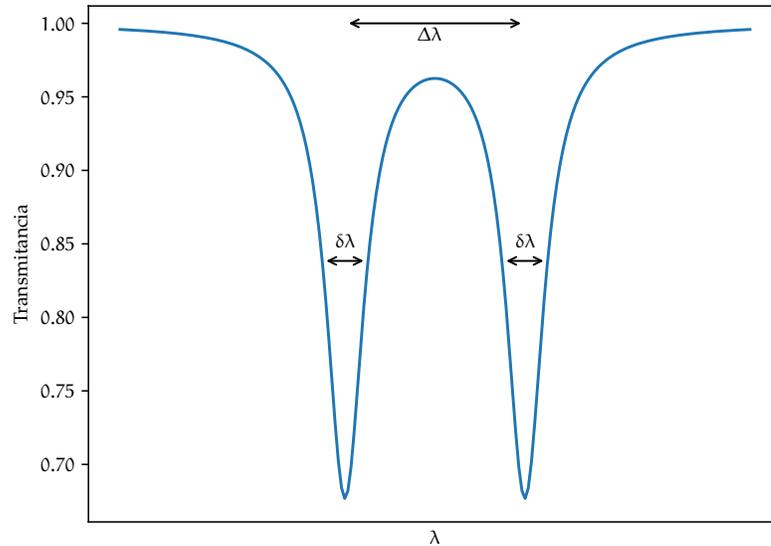


Figura 2.4: Esquema de caracterización de resonancias en microesferas. $\delta\lambda$ es el ancho del pozo de transmitancia hasta su altura media generado por una resonancia, $\Delta\lambda$ es la separación espectral en longitud de onda. Cada pozo en la transmitancia observado en la señal transmitida por la guía de onda que acopla y extrae luz a una cavidad óptica se asocia a un modo resonante.

2.2.1 Rango Espectral Libre

Es una medición de la separación espectral de dos modos resonantes contiguos. Este parámetro se conoce como **FSR**.¹⁰ Sean dos frecuencias resonantes contiguas ω_1 y ω_2 , ie. tales que $\omega T_R = 2m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}^+$, donde T_R es el tiempo de una revolución de un haz en la cavidad; este

¹⁰ Por las siglas inglesas de *Free Spectral Range* (FSR).

tiempo de revolución se relaciona con el índice de refracción efectivo de la siguiente manera[64, 70]

$$T_R = n_{\text{eff}} \frac{L}{c}, \quad L = 2\pi R$$

con L la longitud de la circunferencia.

Se define al FSR como

$$\text{FSR} := \omega_2 - \omega_1, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{T_R}, \\ &= \frac{2\pi c}{Ln_{\text{eff}}}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

de forma equivalente en términos de longitud de onda

$$\text{FSR}_\lambda = \frac{\lambda_0^2}{Ln_{\text{eff}}}.$$

A partir de la ecuación (2.21) se puede mostrar que

$$\text{FSR}_\lambda = \frac{\lambda_0}{m} \quad (2.25)$$

recordando que $m = m(\lambda_0, R)$, con λ_0 una determinada longitud de onda y R el radio de la esfera.

2.2.2 Fineza

Se define como la razón entre el FSR y el ancho a la profundidad media¹¹ (FWHM) del pozo de transmitancia generado por una cavidad resonante sobre la luz transmitida por su medio acoplador[64, 70]¹²

$$\mathcal{F} := \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}},$$

de forma análoga

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\alpha_{\text{dis}} L} = \frac{\pi}{\mathcal{T}^2}, \quad (2.26)$$

donde α_{dis} es una constante de disipación por revolución y \mathcal{T} la transmitividad compleja.

¹¹ Se conoce en inglés como *Full Width at Half Maximum* (FWHM) al ancho de una señal a su altura media, aquí usaremos este mismo término para referirnos a su profundidad por conveniencia.

¹² No solo se puede acoplar luz a una esfera con fibra óptica, puede hacerse con guías ópticas grabadas en sustratos de silicio o con prismas.

2.2.3 Factor de calidad

El factor de calidad Q , se define como el número de ciclos ópticos característicos antes que la cavidad pierda energía. Es decir, la razón de energía almacenada en el resonador con la pérdida de energía por ciclo óptico[64, 70]¹³

$$Q = \omega_0 \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Pérdida de energía}}. \quad (2.27)$$

Si suponemos una intensidad de campo inicial $|E_0|^2$, luego de la cual ya no alimentamos de más energía al resonador y considerando que el decaimiento por vuelta está dado a la n -ésima vuelta por

$$\begin{aligned} |E_n|^2 &= \exp(-\alpha_{\text{dis}}L)|E_{n-1}|^2, \\ &= \exp(-n\alpha_{\text{dis}}L)|E_0|^2, \end{aligned}$$

si $n \gg 1$, se tendrá que en el límite continuo

$$\frac{d|E_n|^2}{dn} = -\alpha_{\text{dis}}L|E_n|^2,$$

así

$$\begin{aligned} Q &= \omega_0 \frac{|E_n|^2}{-\frac{d|E_n|^2}{dn}}, \\ &= \omega_0 \frac{T_R}{\alpha_{\text{dis}}L}, \end{aligned}$$

que en el caso de acoplamiento débil¹⁴ y $\alpha_{\text{dis}} \ll 1$,¹⁵

$$\Delta\omega = \frac{\alpha_{\text{dis}}L}{T_R},$$

¹³ Dadas las soluciones complejas de la ecuación de autovalores, las frecuencias de resonancia complejas que son solución, se asocian a una tasa de decaimiento γ , tales que $\tilde{\omega} = \omega - i\gamma/2$. En términos de la frecuencia angular compleja de resonancia $\tilde{\omega}$, se puede definir la Q matemática, dígase, el valor máximo de Q sin interacción con una guía óptica como

$$Q_{\text{mat}} = \frac{\text{Re}(\tilde{\omega})}{\text{Im}(\tilde{\omega})},$$

este valor no considera correcciones debidas a pérdidas por defectos, termalización o por interacción con una guía óptica.

¹⁴ Dígase cuando la constante de acoplamiento $|\kappa| \ll 1$, el cómo calcular esta constante de acoplamiento se mostrará en el [Capítulo 4](#).

¹⁵ Pocas pérdidas por vuelta.

así

$$Q = \frac{\omega T_R}{T_r \delta \omega},$$

$$= \frac{\omega}{\delta \omega}, \quad (2.28a)$$

$$\approx \frac{\lambda}{\delta \lambda}. \quad (2.28b)$$

De (2.26)

$$Q = \frac{\omega_0 T_R}{2\pi} \mathcal{F},$$

$$\approx \frac{n_{eff} L}{\lambda_0} \mathcal{F},$$

$$= m \mathcal{F},$$

$$\text{Pero } T_R = \frac{L n_{eff}}{c}$$

como el índice m se refiere al número de longitudes de onda que caben en la circunferencia L , entonces $m = n_{eff} L / \lambda_0$.

Naturalmente para acoplar luz a microresonadores ópticos de esta simetría requeriremos de un medio para hacerlo, ya sean puntas de fibra óptica recordada,[71] con el empleo de dispersores de dimensiones de sublongitudes de onda[72], con prismas,[73] con guías de onda grabadas en sustratos[74], o con fibras ópticas estrechadas como lo trataremos en este trabajo. Esta interacción con algún medio de acoplamiento acarreará pérdidas pues dan vía a la luz no solo para poder entrar a la cavidad sino también para salir de ella. Aumentar o disminuir la interacción de la cavidad con el dispositivo de acoplamiento es equivalente a disminuir o aumentar, respectivamente, la reflectividad de los espejos de una cavidad de tipo Fabry-Pérot.

Con esto en mente, si consideramos ahora un número de vueltas N , hasta que el resonador pierda energía hasta llegar a un valor de $1/e$ de su intensidad original, a causa de pérdidas internas y debido a la cercanía de una guía de onda, entonces

$$\exp(-\alpha_{dis} L) = \frac{1}{e},$$

así

$$N = \frac{1}{\alpha L},$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = 2\pi N,$$

y

$$Q = \omega_0 T_R N,$$

es decir, \mathcal{F} representa el número de vueltas por un factor de 2π que hace la luz dentro de la cavidad hasta que su intensidad llega a un $1/e$ de su valor original. Del mismo modo, Q representa el número de oscilaciones de campo a las que la energía almacenada llega a $1/e$ de su valor original.

En el siguiente capítulo trataremos cómo es guiada la luz por el dispositivo que empleamos en los experimentos para acoplar luz a las microcavidades ópticas, una fibra óptica estrechada.

GUIADO DE LUZ EN FIBRA ÓPTICA ESTRECHADA¹

Del mismo modo que se resolvió la ecuación de onda electromagnética para las microesferas, al separar la solución temporal del campo se llega a una ecuación de Helmholtz vectorial que en este caso es más fácil resolver y que se puede solucionar componente a componente; dicha ecuación es análoga a la ecuación (2.5) y que escribiremos como

$$(\nabla^2 + k^2)U(r, \varphi, z) = 0 \quad (3.1)$$

a ser resuelta en coordenadas polares cilíndricas. La convención de coordenadas para este sistema se muestra en la figura 3.1, mientras que para la nomenclatura usada para los radios de la fibra se muestra en la figura 3.2.

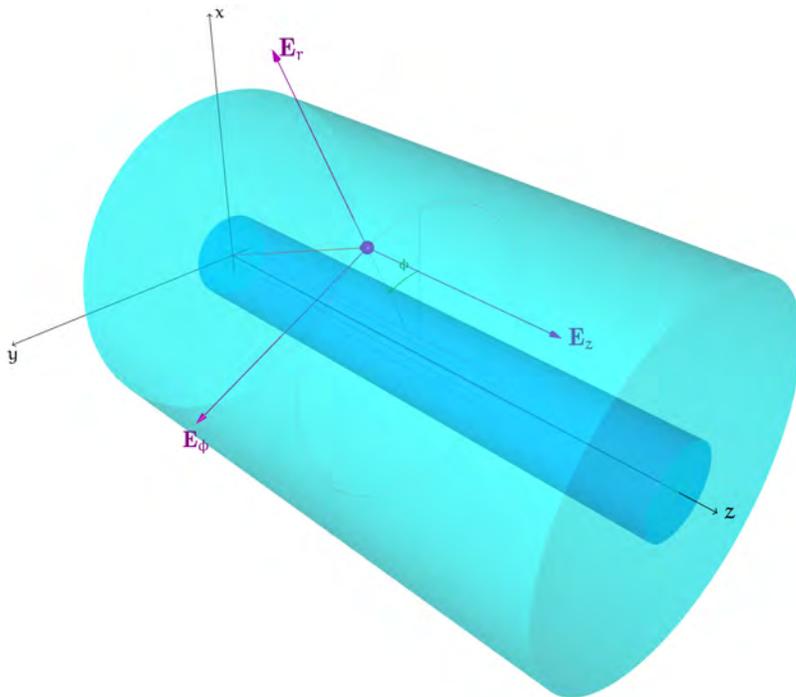


Figura 3.1: Sistema coordenado polar cilíndrico referido para una fibra óptica con dirección de propagación en z . Se indican las direcciones de las componentes de campo. Se distingue del recubrimiento al núcleo con un color azul más oscuro.

¹ Si interesa revisar todo el desarrollo matemático en el cálculo de las soluciones de campo para fibras ópticas se recomienda encarecidamente revisar la referencia [75].

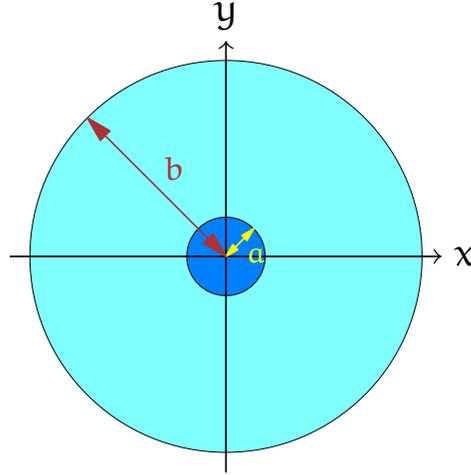


Figura 3.2: Corte transversal de una fibra óptica. Se indica al radio del recubrimiento con b y al del núcleo con a .

Para el caso que nos atañe, que son las fibras ópticas con perfil de índices de refracción escalonado, se puede encontrar que la solución general de la forma funcional U está dada, para una fibra de núcleo de radio a , por

$$U(r, \varphi, z) = \begin{cases} a_1 a_2 A J_m(\eta_1 r) \exp(i(m\varphi - \beta z)), & \text{para } r < a, \\ a_1 a_2 D K_m(\eta_2 r) \exp(i(m\varphi - \beta z)), & \text{para } r > a; \end{cases}$$

donde $\{a_{1,2}, A, D\} \in \mathbb{R}$ y son constantes, $m \in \mathbb{Z}^+$, J_m es la función de Bessel de primer orden m y K_m la función de Bessel modificada de segundo orden m . Se identifica además a β como la constante de propagación de la onda y donde además, si definimos la diferencia de cuadrados entre la constante de propagación y el número de onda en cada región de la fibra, tal que sea positiva

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= k_1^2 - \beta^2, \\ \eta_2^2 &= \beta^2 - k_2^2, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= n_1 k_0, \\ k_2 &= n_2 k_0; \end{aligned}$$

donde $k_0 = 2\pi/\lambda$, n_1 es el índice de refracción del núcleo de la fibra y n_2 el índice de refracción del recubrimiento, se puede mostrar que ha de cumplirse la siguiente condición para un guiado confinado al núcleo

$$n_2 < \frac{\beta}{k_0} < n_1; \quad (3.2)$$

la cantidad β/k_0 se conoce como índice de refracción efectivo n_{eff} , y su valor dependerá de la solución al campo electromagnético al que haga referencia la constante de propagación, es decir, al modo.

Se puede demostrar, a partir de las ecuaciones de Maxwell en materiales dieléctricos, y de las relaciones de divergencia y rotacional para un campo vectorial en coordenadas polares cilíndricas, que las componentes de campo electromagnético que son solución están dadas, para $r < a$ por

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi, z) &= MJ_m(\eta_1 r)e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ E_r(r, \varphi, z) &= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left(\frac{i\omega\mu_1 m}{\beta r} NJ_m(\eta_1 r) + M\eta_1 J'_m(\eta_1 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ E_\varphi(r, \varphi, z) &= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left(\frac{im}{r} MJ_m(\eta_1 r) - \frac{\omega\mu_1}{\beta} N\eta_1 J'_m(\eta_1 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ H_r(r, \varphi, z) &= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left(N\eta_1 J'_m(\eta_1 r) - \frac{i\omega\epsilon_1 m}{\beta r} MJ_m(\eta_1 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ H_\varphi(r, \varphi, z) &= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left(\frac{im}{r} NJ_m(\eta_1 r) + \frac{\omega\epsilon_1}{\beta} M\eta_1 J'_m(\eta_1 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ H_z(r, \varphi, z) &= NJ_m(\eta_1 r)e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}; \end{aligned}$$

y para $r > a$ por

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi, z) &= MJ_m(\eta_1 r)e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ E_r(r, \varphi, z) &= \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left(\frac{i\omega\mu_2 m}{\beta r} PK_m(\eta_2 r) + O\eta_2 K'_m(\eta_2 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi - \beta z)}, \\ E_\varphi(r, \varphi, z) &= \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left(\frac{im}{r} OK_m(\eta_2 r) - \frac{\omega\mu_2}{\beta} P\eta_2 K'_m(\eta_2 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi - \beta z)}, \\ H_z(r, \varphi, z) &= NJ_m(\eta_1 r)e^{i(\omega t + m\varphi + \beta z)}, \\ H_r(r, \varphi, z) &= \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left(P\eta_2 K'_m(\eta_2 r) - \frac{i\omega\epsilon_2 m}{\beta r} OK_m(\eta_2 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi - \beta z)}, \\ H_\varphi(r, \varphi, z) &= \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left(\frac{im}{r} PK_m(\eta_2 r) + \frac{\omega\epsilon_2}{\beta} O\eta_2 K'_m(\eta_2 r) \right) e^{i(\omega t + m\varphi - \beta z)}; \end{aligned}$$

donde $\epsilon_{1,2}$ son las constantes dieléctricas del núcleo y el recubrimiento y del mismo modo $\mu_{1,2}$ son las constantes de permitividad magnética para el núcleo y el recubrimiento, respectivamente.

Considerando continuidad a la frontera se tendrá que las amplitudes M , N , O y P han de formar un sistema de ecuaciones cuya solución no es trivial si el determinante de dicho sistema de ecuaciones iguala a cero, este determinante es una función trascendental de β para cada m , dado un radio del núcleo a

Ecuación de
eigenvalores para una
fibra óptica

$$\left(\frac{J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1 a J_m(\eta_1 a)} + \frac{K'_m(\eta_2 a)}{\eta_2 a J_m(\eta_1 a)} \right) \left(\frac{n_1^2 J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1 a J_m(\eta_1 a)} + \frac{n_2^2 K'_m(\eta_2 a)}{\eta_2 a J_m(\eta_1 a)} \right) = m^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \left(\left(\frac{1}{\eta_1 a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\eta_2 a} \right)^2 \right)^2 \quad (3.3)$$

donde se emplea que para medios dieléctricos las constantes de permitividad para el núcleo y el recubrimiento son aproximadamente iguales a la del vacío, ie. $(\mu_1 \approx \mu_2) \approx \mu_0$.²

Las constantes de propagación β que son solución se pueden encontrar de forma numérica dado un índice m y una frecuencia angular ω dadas.³ Por otra parte se puede resolver que los términos de amplitud M , N , O y P cumplen que

$$\frac{O}{M} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2'}, \quad (3.4)$$

$$\frac{P}{N} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2'}, \quad (3.5)$$

$$\frac{P}{M} = \frac{O}{N} \frac{N}{M'}, \quad (3.6)$$

$$\frac{N}{M} = \frac{\frac{i m \beta}{\omega \mu} \left(\frac{1}{(\eta_1 a)^2} + \frac{1}{(\eta_2 a)^2} \right)}{\frac{J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1 a J_m(\eta_1 a)} + \frac{K'_m(\eta_2 a)}{\eta_2 a J_m(\eta_1 a)}}, \quad (3.7)$$

con $\alpha_1 = J_m(\eta_1 a)$ y $\alpha_2 = -K_m(\eta_2 a)$. Vale notar que N/M es la cantidad relativa entre los campos E_z y H_z dentro del núcleo, O/M la cantidad de campo E_z que hay fuera del núcleo respecto a la que hay dentro de él, y P/N representa también esto último pero para H_z .

Se puede reescribir (3.3) para identificar toda una familia de soluciones, las EH y HE; para las primeras la ecuación de autovalores será

Ecuación de
eigenvalores para
modos EH

$$\delta_1 \frac{J_{m+1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa + \delta_1^2 m - \Gamma, \quad (3.8)$$

mientras que la solución que se asocia a los modos HE será

Ecuación de
eigenvalores para
modos HE

$$\delta_1 \frac{J_{m-1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa + m \delta_1^2 - \Gamma, \quad (3.9)$$

2 En otras palabras, que las constantes de permeabilidad magnética del núcleo μ_1 y de recubrimiento μ_2 son esencialmente iguales a la del vacío al tratarse de materiales con baja interacción magnética.

3 Recordemos que $\omega = 2\pi c/\lambda$, con λ la longitud de onda.

donde

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\right)^2 (\delta_2 \kappa)^2 + \frac{m^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2)^2 \zeta^2}{n_1^2}}, \quad (3.10)$$

con

$$\delta_1 = \frac{1}{\eta_1 a}, \quad (3.11a)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\eta_2 a}, \quad (3.11b)$$

$$\kappa = \frac{K'_m(\eta_2 a)}{K_m(\eta_2 a)}, \quad (3.11c)$$

$$\zeta = \frac{\beta}{k_0}. \quad (3.11d)$$

Cuando $m = 0$, se encuentran dos expresiones para soluciones particulares, la transversal eléctrica (TE)

$$\delta_1 \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = -\delta_2 \frac{K_1(\eta_2 a)}{K_0(\eta_2 a)}, \quad (3.12)$$

Ecuación de eigenvalores para modos TE

y la transversal magnética (TM)

$$\delta_1 \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = -\delta_2 \frac{n_2^2 K_1(\eta_2 a)}{n_1^2 K_0(\eta_2 a)}. \quad (3.13)$$

Ecuación de eigenvalores para modos TM

Para las soluciones TE, $E_r = E_z = H_\phi = 0$, pues $M = O = 0$, mientras que para los modos TM, $E_\phi = H_r = H_z = 0$ pues $N = P = 0$.

Para la evaluación de las anteriores ecuaciones de autovalores vale considerar hacer las siguientes sustituciones, primero definiendo a

$$V := ak_0 NA,$$

Se conoce al parámetro V como «frecuencia normalizada»

donde $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, es la apertura numérica de la fibra; así

$$(\eta_2 a)^2 = V^2 - (\eta_1 a)^2,$$

otra sustitución útil es escribir β como

$$\beta^2 = k_1^2 - \eta_1^2,$$

y

$$\zeta^2 = \frac{(ak_1)^2 - (a\eta_1)^2}{(ak_0)^2},$$

así las ecuaciones a resolver solo dependerán de $\eta_1 a$. Las soluciones a las ecuaciones de autovalores (3.9) y (3.8) las podemos identificar como se muestran en las figuras 3.3 y 3.4 respectivamente. Para hacer esto numeramos con un índice n al orden de aparición de las soluciones modales de menor a mayor, según como aparecen estas en una gráfica de los lados derechos e izquierdos de las ecuaciones de autovalores como funciones de $\eta_1 a$ en el intervalo que va desde cero al parámetro V . Esto lleva a que una solución modal en particular se puede identificar con el tipo de modo que representa (HE, EH), con los índices m y n . En el caso de las soluciones transversales (TE y TM), el primer índice es siempre $m = 0$, como ya se había mostrado. La notación empleada, sin pérdida de generalidad para los otros tipos de soluciones, es de la forma HE_{mn} . Se puede apreciar en la figura 3.3, que siempre existirá una solución HE_{11} sin importar el parámetro de corte,⁴ de ahí que se conozca a este modo como el fundamental. Una fibra que solo soporte este primer modo se la conoce como «monomodal».⁵

3.1 REGÍMENES DE GUIADO

De acuerdo a la diferencia de índices de refracción entre el núcleo y su recubrimiento, se pueden distinguir dos regímenes de guiado, el débil y el fuerte. El primero se identifica cuando la diferencia fraccionaria de los índices de refracción de las partes de la fibra cumplen que[76]

$$\frac{n_1 - n_2}{n_2} \ll 1.$$

Por el contrario, en el régimen fuerte, la diferencia de índices de refracción puede ser tan alta como en el caso donde recubrimiento es el aire que rodea a la fibra.⁶

Como notamos de las figuras 3.5 y 3.6, los valores límite de los índices de refracción efectivos se encuentran entre los valores correspondientes a los índices del núcleo y el recubrimiento, como ya lo predecía la relación (3.2). Además, podemos apreciar que en el régimen débilmente guiado, las soluciones modales del campo están degeneradas, es decir, poseen casi el mismo índice de refracción efectivo; esto da pie a poder simplificar el estudio de las soluciones modales a las combinaciones lineales de los

4 Siempre que este sea distinto de cero.

5 Se puede mostrar que una fibra monomodal es aquella tal que $V < 2.404883$, es decir que sea menor al valor del primer cero de la función de Bessel J_0 .

6 La diferencia máxima formalmente es con el vacío, que tiene índice de refracción 1, sin embargo, en este texto (y dadas las condiciones del experimento) consideraremos al índice de refracción del aire aproximadamente igual al del vacío.

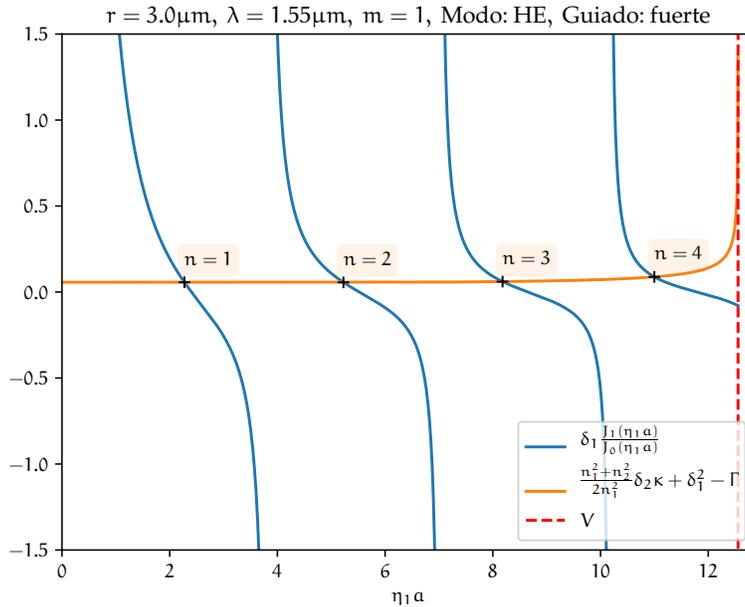


Figura 3.3: Representación gráfica de ambos lados de la ecuación de autovalores para modos HE en guiado fuerte, indicando con una cruz negra la posición de las soluciones. Nótese cómo el segundo índice del modo, n , identifica el orden de las soluciones desde el menor al mayor valor de $\eta_1 a$. Se indica con V al parámetro de corte para esta fibra. Se indican los parámetros de radio, longitud de onda e índice m en el título de la figura. Nótese que la solución HE_{11} siempre aparecerá como solución.

modos HE o EH que les dan origen, estas nuevas soluciones son conocidas como modos Linealmente Polarizados (LPs).⁷

Notamos además que el parámetro de frecuencia de corte mínimo al que aparece toda una familia de soluciones modales en el régimen débil es el mismo, a diferencia de lo que sucede en el régimen fuerte donde el valor mínimo de V al que aparece una nueva solución modal es distinto para cada modo.

Las fibras débilmente guiadas son las típicamente empleadas en telecomunicaciones, gracias a los pocos modos que soportan y a sus bajas pérdidas tanto en transmisión a largas distancias como a la robustez de las señales ante dobleces de la guía.[77]

Es de notar en la figura 3.6, en particular para la curva correspondiente al modo fundamental HE_{11} , que cuando el parámetro de corte V se hace

⁷ En la Sección B.2, se muestran ejemplos para el campo simulado de modos LP, como combinación lineal de modos híbridos. El mote de su designación queda claro al observar el comportamiento de sus componentes transversales.

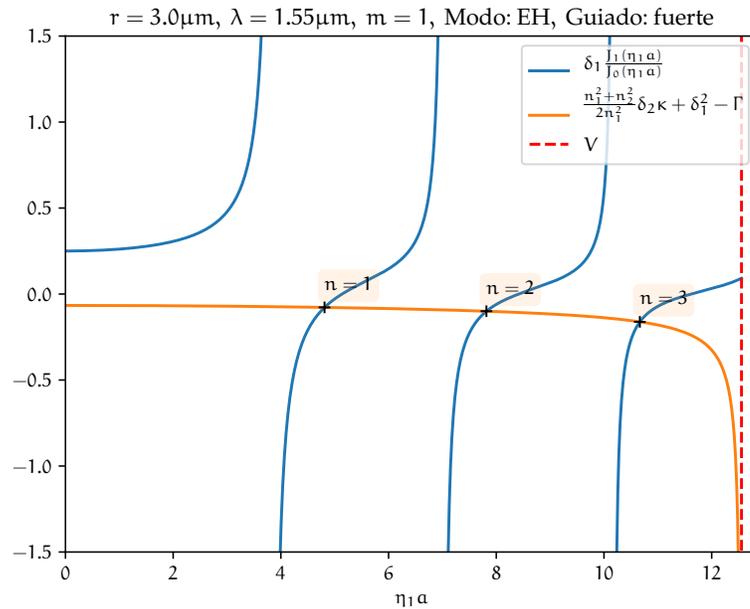


Figura 3.4: Representación gráfica de ambos lados de la ecuación de autovalores para modos EH en guiado fuerte, indicando con una cruz negra la posición de las soluciones. Nótese cómo el segundo índice del modo, n , identifica el orden de las soluciones desde el menor al mayor valor de $\eta_1 a$. Se indica con V al parámetro de corte para esta fibra. Se indican los parámetros de radio, longitud de onda e índice m en el título de la figura.

muy chico, lo cual se puede lograr reduciendo el radio de la fibra, esta curva se corta, lo que indica que ya no es soportada la transmisión de la luz por el núcleo y pasa a ser transmitida por el recubrimiento ahora bajo el régimen fuertemente guiado.

Por otro lado, como se observa de la figura 3.5, una vez que ya no es soportado el modo fundamental en la fibra, dígame, cuando el índice de refracción efectivo del modo es igual que el del ambiente que le rodea, la luz ya no será soportada por la fibra y se fugará.

3.2 FIBRA ÓPTICA ESTRECHADA

La fibra óptica estrechada, coloquialmente conocida como *taper*,⁸ es una clase de micro y nano cable de fibra óptica, un esquema de su perfil se muestra en la figura 3.7. Se las aprovecha por su alto confinamiento, presencia de campo evanescente exterior y por poder presentar un compor-

⁸ Contracción del inglés *tapered fiber*.

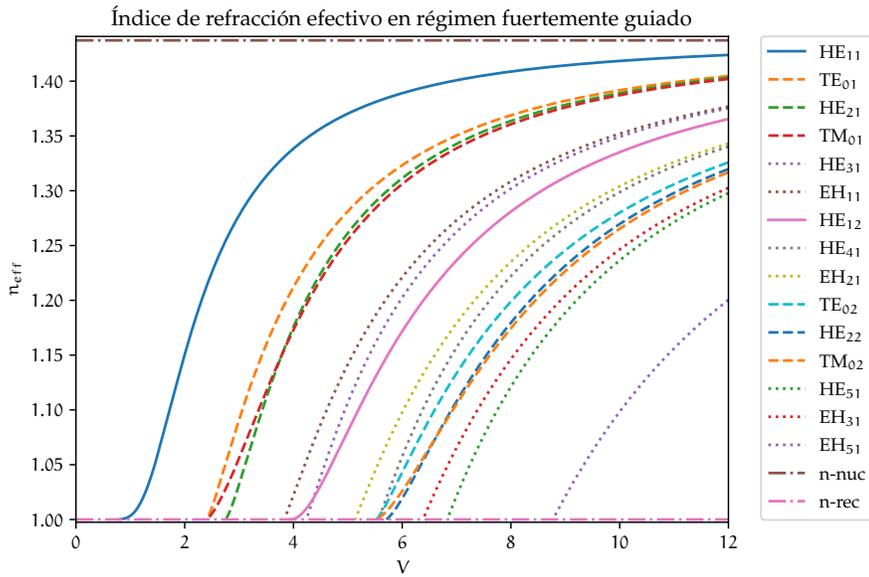


Figura 3.5: Evolución del índice de refracción efectivo de una fibra óptica respecto al parámetro de frecuencia normalizada en el régimen fuertemente guiado.

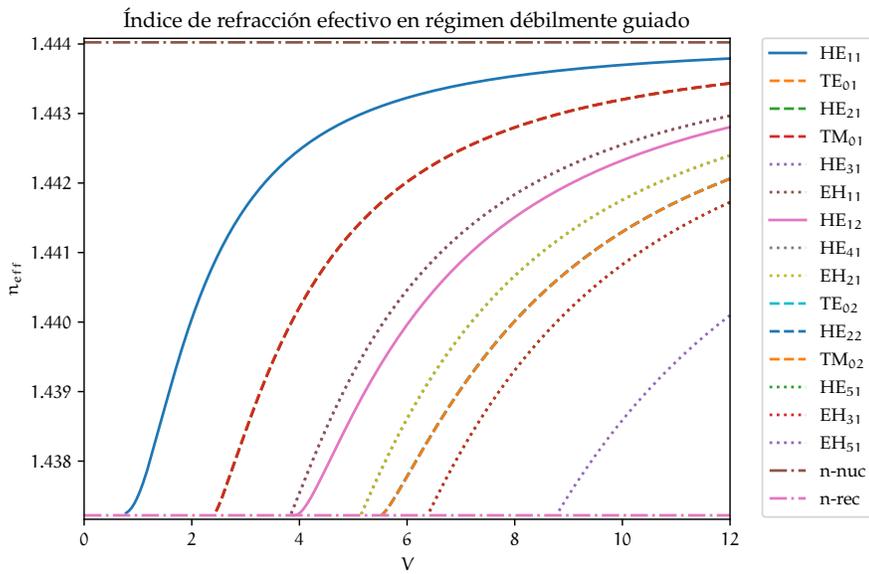


Figura 3.6: Evolución del índice de refracción efectivo de una fibra óptica respecto al parámetro de frecuencia normalizada en el régimen débilmente guiado.

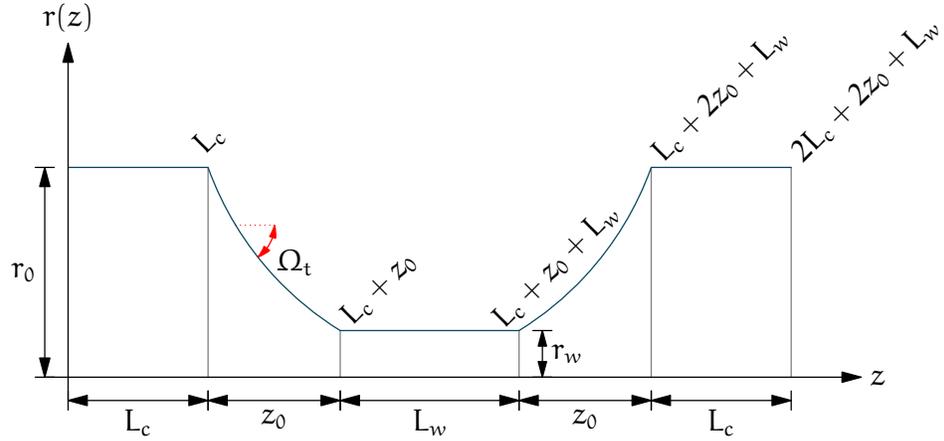


Figura 3.7: Perfil longitudinal de una fibra óptica estrechada. L_c indica las zonas sin estirar, r_0 el radio original, z_0 la longitud de las zonas de transición y, L_w y r_w a la longitud de la cintura y su radio respectivamente. Ω_t es el ángulo de estrechamiento, medido desde la horizontal al perfil de la fibra en dicho punto.

tamiento óptico altamente no lineal. Se las fabrica al estirar una fibra óptica fundida alrededor de su parte media,⁹ dejando inalterados sus extremos lo que facilita su implementación en sistemas ópticos convencionales. En este trabajo se utilizaron este tipo de fibras como medio de acoplamiento de la luz a las cavidades óptica fabricadas al aprovechar la presencia de campo evanescente en la luz guiada. Como se verá más adelante, las condiciones de resonancia para las cavidades empleadas no solo dependen de las características de esta misma, sino también del medio acoplador. El perfil de las zonas de transición se puede escribir como

$$r(z) = r_0 e^{-\frac{z}{L_w}}, \quad (3.14)$$

donde r_0 es el radio original de la fibra, L_w la longitud de la cintura y z la coordenada longitudinal, como se muestra en la figura 3.7.

3.3 PROPAGACIÓN DE LA LUZ EN FIBRA AL ESTRECHARSE

Si bien formalmente las soluciones en las regiones de transición y durante el proceso de estiramiento deben considerar un medio con tres capas (núcleo, recubrimiento y medio externo),^[82, 83] podemos hacer una generalización en el comportamiento del campo durante el proceso de estirado en el cual inicialmente es válida la solución débilmente guiada,

⁹ Si bien existen diversas formas para calentar la fibra,^[78] en este trabajo se optó por el barrido de llama^[79, 80] dada la facilidad de implementación, disponibilidad y experiencia que se tiene en ella en trabajos previos.^[81]

para después pasar a un comportamiento fuertemente guiado. Este tipo de soluciones son las que consideramos en el proceso de estirado, cuyo análisis nos permite monitorear al mismo, para ello primero definiremos cantidades que nos serán útiles a este fin.

LONGITUD DE ABATIMIENTO Sean dos modos con constantes de propagación β_x y β_y , estos intercambian potencia de forma periódica cada longitud de abatimiento, dada por [40, 84]

$$L_B = \frac{2\pi}{|\beta_x - \beta_y|}, \quad (3.15)$$

Longitud de abatimiento

su inverso, $\nu_\beta = L_B^{-1}$, se conoce como frecuencia espacial de abatimiento.

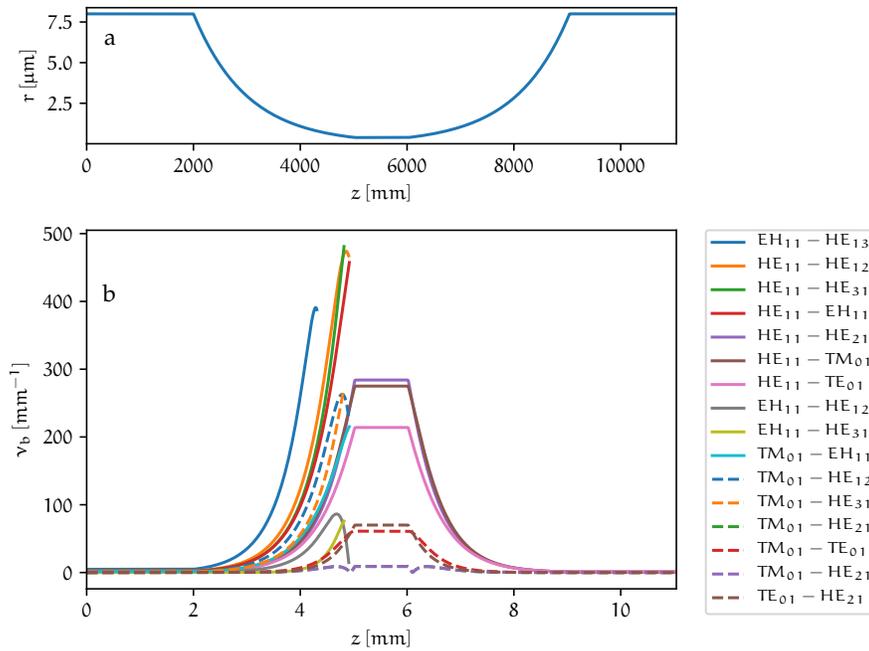


Figura 3.8: La figura a) indica el perfil de radios de una fibra estrechada respecto a la longitud de esta. En b) se muestra para varias combinaciones de modos el parámetro de frecuencia de abatimiento respecto a la longitud de la fibra, nótese cómo algunas combinaciones de modos sobreviven en la cintura de la fibra, mientras que otras se eliminan en cuanto alguno de los modos que baten llega a su condición de corte.

Notemos de la figura 3.8, obtenida de simular el análisis de algunos resultados mostrados en [85], que para el perfil de la fibra adelgazada planteado en estos, solo ciertas combinaciones de modos sobreviven a la transmisión a través de su cintura. Si las líneas se cortan en algún radio, es porque a partir de ese punto alguno de los modos de dicha combinación

han alcanzado la condición de corte y no puede seguir transmitiéndose en radios inferiores.¹⁰

ÁNGULO DE ESTRECHAMIENTO El ángulo Ω_t dado entre el perfil del *taper* y la horizontal como se muestra en la figura 3.7. Este ángulo tiene una longitud asociada, tal que

$$L_t = \frac{R}{\tan(\Omega_t)}, \quad (3.16)$$

con R el radio de la fibra al ángulo Ω_t .

FRECUENCIA ANGULAR ESPACIAL Sean dos modos con constantes de propagación dependientes del radio $\beta_x(r)$ y $\beta_y(r)$, donde $r = r(z)$, con z la coordenada longitudinal sobre las regiones de transición; la fase relativa acumulada se puede escribir como[86]

$$\Phi_{xy}(L) = 2 \left(\int_0^{L/2} \Delta\beta_{xy}(r(z)) dz + \Delta\beta_{xy}(r_w) L_w \right); \quad (3.17)$$

así la frecuencia angular espacial queda como la derivada de Φ_{xy} respecto de L

$$K_{xy} = \frac{d\Phi_{xy}}{dL} = \Delta\beta_{xy} - \frac{r_w}{2} \frac{d}{dr} \Delta\beta_{xy} \Big|_{r_w}, \quad (3.18)$$

Frecuencia angular espacial

donde r_w es el ancho local de la cintura en el proceso de estirado.

Si la fibra óptica es estirada con una velocidad constante v_x , el perfil de radios en el tiempo está dado por¹¹

$$r_w(t) = r_0 e^{\frac{-v_x t}{2L_0}}, \quad (3.19)$$

que puede incorporarse en (3.18) para obtener K_{xy} como función del tiempo. La expresión (3.18) se puede normalizar al multiplicar por el factor $\lambda/(2\pi)$, lo que da la frecuencia espacial normalizada. Esta frecuencia se puede obtener de un espectrograma al realizar una transformada de Fourier a corto tiempo sobre la señal de potencia transmitida durante el proceso de estiramiento.[84, 86, 87] Por completez, en el Apéndice E se coloca una pequeña introducción a este tipo de análisis de señales.

¹⁰ Mediciones directas de este valor se pueden obtener con las técnicas expuestas en la referencia [85].

¹¹ Las demostraciones de las fórmulas (3.14) y (3.19) se encuentran en el Apéndice D.

3.3.1 Condiciones de adiabaticidad

Cuando $L_B \ll L_t$ se dice que la conversión entre modos es adiabática, esto es análogo a decir que [84]

$$\Omega_c \gg \Omega_t, \quad (3.20)$$

teniendo como límite superior a la igualdad. Como se muestra en la figura 3.9, para cada ángulo crítico Ω_c (líneas continuas) de cierta combinación de modos, siempre que este sea mayor al ángulo de la fibra (línea punteada), la conversión entre modos se dará casi sin pérdida de potencia.

Para dos modos con ctes. de propagación β_x y β_y , con longitud de abatimiento L_B ,

$$L_B = \frac{R}{\tan(\Omega_c)}$$

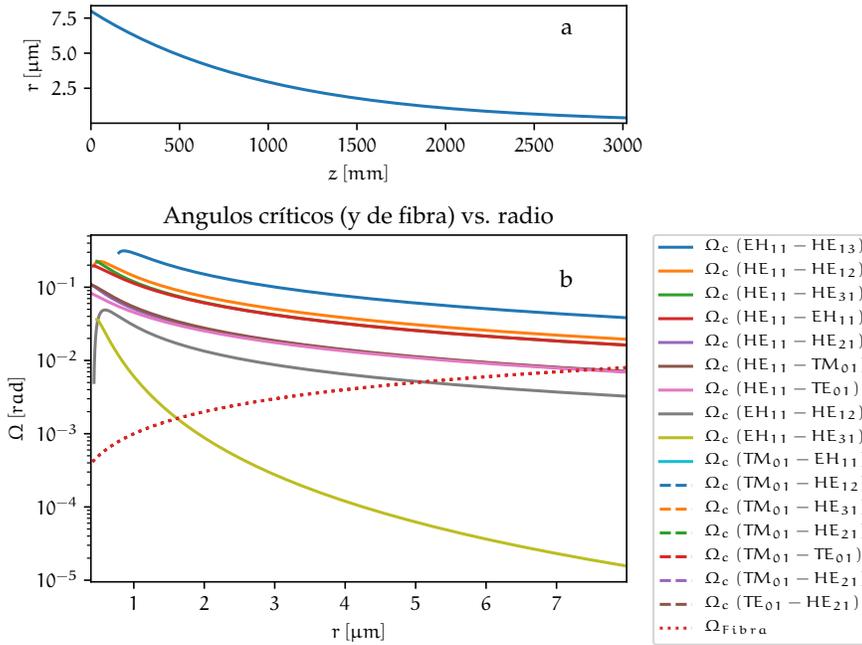


Figura 3.9: Se indica en a) al perfil de radios respecto de la longitud en la zona de transición de una fibra óptica estrechada. En b) se muestra a los ángulos críticos calculados para diferentes combinaciones de modos comparados con el ángulo de la fibra en la misma región.

Estudiadas ya las soluciones de campo electromagnético en fibras ópticas estrechadas y microcavidades esféricas, pasaremos a estudiar la interacción entre ellas en el siguiente capítulo, en particular a lo referente al acoplamiento del campo electromagnético entre estos sistemas.

SISTEMA ESFERA-FIBRA¹

Se presenta ahora el problema de cómo conjuntar las soluciones que ya tenemos para la esfera y la fibra, en otras palabras, cómo los modos de ambos sistemas se acoplan tanto desde la fibra a la esfera y en viceversa, esto se puede lograr con el modelo de modos acoplados.

4.1 TEORÍA DE MODOS ACOPLADOS

La teoría de modos acoplados es un modelo que nos permite cuantificar el acoplamiento de modos entre guías ópticas, suponiendo que ambos son perturbados de forma mínima, *i.e.* que cambian poco su distribución geométrica al interactuar. La relación de reciprocidad de modos a lo largo de un infinitesimal recorrido en la dirección de propagación x está dada por,^{2,3}

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}) dy dz = i\omega(\epsilon_1 - \epsilon_2) \iint \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1 dy dz, \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{E}_{1,2}$ y $\mathbf{H}_{1,2}$ son los campos eléctrico y magnético, respectivamente, de los modos 1 y 2, ω la frecuencia angular de la luz, ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío, y $n_{1,2}$ el índice de refracción que ven cada uno de los modos. Esta relación implica que el flujo de potencia neta entre dos guías de onda ideales es simétrico.[67]

Veamos que la ecuación (4.1) podemos escribirla de una forma más conveniente, para ello antes de continuar consideremos la siguiente expresión para el producto vectorial

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{d}), \quad (4.2)$$

supongamos que escribimos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} en términos de sus componentes longitudinales y transversales $\mathbf{A}^{t,l}$ y $\mathbf{B}^{t,l}$, así mediante la relación anterior, y dada la dirección longitudinal $\hat{\mathbf{I}}$

$$(\mathbf{A}^t + \mathbf{A}^l) \times (\mathbf{B}^t + \mathbf{B}^l) = (\mathbf{A}^t \times \mathbf{B}^t) + (\mathbf{A}^t \times \mathbf{B}^l) + (\mathbf{B}^t \times \mathbf{A}^l) + (\mathbf{A}^l \times \mathbf{B}^l),$$

- 1 Las demostraciones pertinentes a este capítulo se encuentran en el [Apéndice C](#), se recomienda encarecidamente revisarlas.
- 2 Ver la [Sección C.1](#) para ver la deducción de esta fórmula.
- 3 En general se tendrá que $\epsilon_{1,2} = \epsilon_{1,2}(x, y)$, es decir, se prevé la existencia de un perfil de permitividades del medio, mas en nuestro caso tenemos un perfil de índices de refracción escalonado, con lo que podremos sacar de la integral como una constante a estos valores, si bien en general esto no es cierto, por ejemplo, en guías ópticas de índice graduado («*graded index*» en inglés) que poseen un perfil dieléctrico distinto al escalonado.

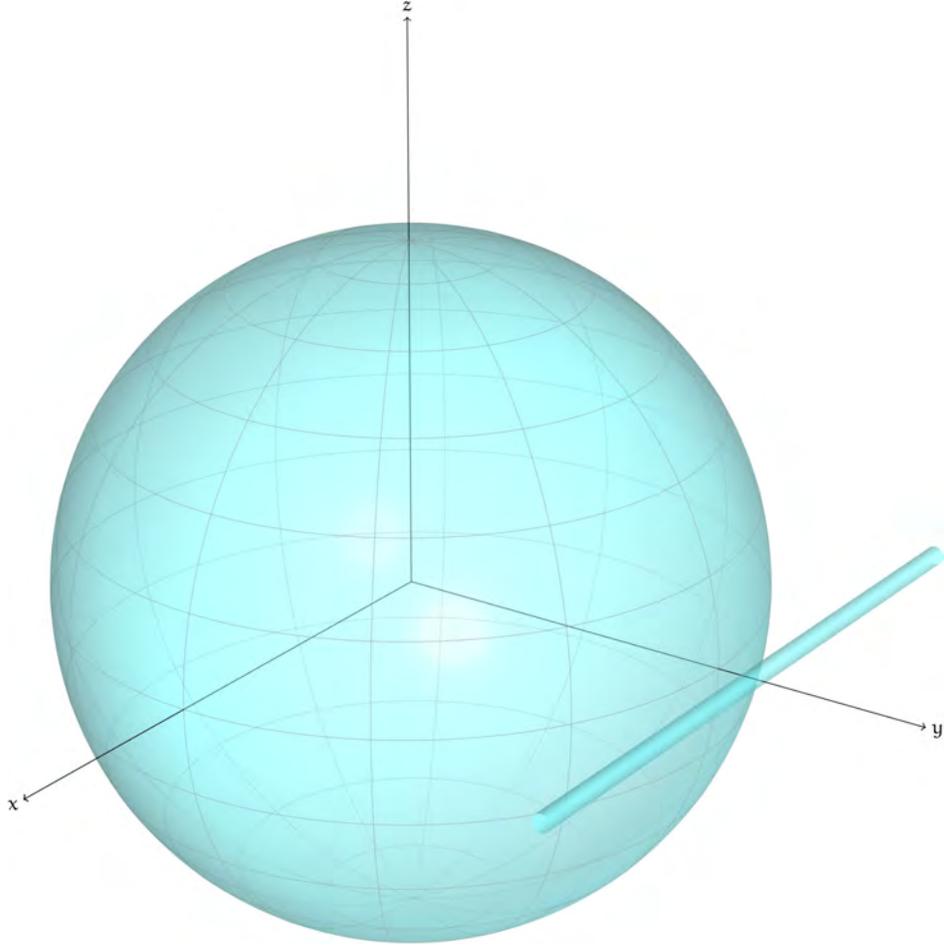


Figura 4.1: Representación gráfica de las orientaciones tanto de la esfera como de la fibra que se emplearon para los cálculos, respecto a los ejes cartesianos. Se aclara que para la fibra la dirección de propagación se cambia a la dirección x por comodidad en el cálculo. La representación aquí mostrada no está a escala del sistema empleado en el experimento.

donde el último término es cero pues $\mathbf{A}^l \parallel \mathbf{B}^l$, si además la anterior relación la proyectamos en $\hat{\mathbf{l}}$, el único término que sobrevive del lado derecho es el primero, ya que $(\mathbf{A}^t \times \mathbf{B}^l) \perp \mathbf{l}$ y $(\mathbf{A}^l \times \mathbf{B}^t) \perp \hat{\mathbf{l}}$, así

$$((\mathbf{A}^t + \mathbf{A}^l) \times (\mathbf{B}^t + \mathbf{B}^l)) \cdot \hat{\mathbf{l}} = (\mathbf{A}^t \times \mathbf{B}^t) \cdot \hat{\mathbf{l}}. \quad (4.3)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^t + \mathbf{A}^l) \cdot \mathbf{B}^t + \mathbf{B}^l &= \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{B}^t + \underbrace{\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{B}^l}_{=0} + \underbrace{\mathbf{A}^l \cdot \mathbf{B}^t}_{=0} + \mathbf{A}^l \cdot \mathbf{B}^l, \\ &= \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{B}^t + \mathbf{A}^l \cdot \mathbf{B}^l, \end{aligned} \quad (4.4)$$

y con esto podemos reescribir (4.1) por (4.3) y (4.4) como

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint (\mathbf{E}_1^t \times \mathbf{H}_2^{t*} + \mathbf{E}_2^{t*} \times \mathbf{H}_1^t) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz = i\omega \iint (\epsilon_1 - \epsilon_2) (\mathbf{E}_1^t \cdot \mathbf{E}_2^{t*} + \mathbf{E}_1^l \cdot \mathbf{E}_2^{l*}) \, dy \, dz. \quad (4.5)$$

Supongamos que perturbamos el modo de una guía a en presencia de otra guía b , esto lo hacemos suponiendo que⁴

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon, \\ \epsilon_2 &= \epsilon_a, \end{aligned}$$

y las componentes de campo transversales

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^t &= a(x)\mathbf{E}_a^t(\mathbf{y}, z) + b(x)\mathbf{E}_b^t(\mathbf{y}, z), \\ \mathbf{H}_1^t &= a(x)\mathbf{H}_a^t(\mathbf{y}, z) + b(x)\mathbf{H}_b^t(\mathbf{y}, z); \end{aligned}$$

y las longitudinales si consideramos una propagación en dirección x , con lo que podemos cambiar el superíndice l por x , así⁵

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^x &= a(x)\frac{\epsilon_a}{\epsilon}\mathbf{E}_a^x(\mathbf{y}, z) + b(x)\frac{\epsilon_a}{\epsilon}\mathbf{E}_b^x(\mathbf{y}, z), \\ \mathbf{H}_1^x &= a(x)\mathbf{H}_a^x(\mathbf{y}, z) + b(x)\mathbf{H}_b^x(\mathbf{y}, z); \end{aligned}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son amplitudes de los modos de las guías a y b en función de la coordenada de propagación. Ahora al campo de la guía perturbada la expresamos con la fase adquirida en x

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_a(\mathbf{y}, z)e^{-i\beta_a x} = (\mathbf{E}_a^t + \mathbf{E}_a^x)e^{-i\beta_a x}, \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_a(\mathbf{y}, z)e^{-i\beta_a x} = (\mathbf{H}_a^t + \mathbf{H}_a^x)e^{-i\beta_a x}. \end{aligned}$$

Lo que suponemos ahora para es una perturbación sobre la guía b en presencia de la guía a , lo hacemos considerando

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon, \\ \epsilon_2 &= \epsilon_b, \end{aligned}$$

y que las componentes del campo transversales son las mismas que el caso anterior, pero que ahora las longitudinales están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_b(\mathbf{y}, z)e^{-i\beta_b x} = (\mathbf{E}_b^t + \mathbf{E}_b^x)e^{-i\beta_b x}, \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_b(\mathbf{y}, z)e^{-i\beta_b x} = (\mathbf{H}_b^t + \mathbf{H}_b^x)e^{-i\beta_b x}. \end{aligned}$$

4 Lo que haremos es suponer primero una guía a perturbada, pero sin que lo esté la otra guía b , luego suponemos la perturbación sobre b , sin que se perturbe a , y al final juntaremos las soluciones.

5 Dependiendo de cuál sea nuestro sistema coordenado, emplearemos otra coordenada, por ejemplo para esferas la coordenada de propagación longitudinal será en dirección φ , mientras que para la fibra la coordenada longitudinal será x .

Al combinar estas soluciones en la ecuación (4.1) llegamos a una expresión del tipo⁶

$$\kappa_{ba} - \kappa_{ab} = \frac{1}{2}(C_{ab}(x) + C_{ba}(x))(\beta_b - \beta_a), \quad (4.6)$$

donde

$$C_{ab}(x) = \frac{1}{2} \iint (\mathbf{E}_b^t \times \mathbf{H}_a^{t*}) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz, \quad (4.7)$$

y

$$\kappa_{ab} = \frac{\omega}{4} \iint (\epsilon - \epsilon_b) \left(\mathbf{E}_b^t \cdot \mathbf{E}_a^{t*} + \frac{\epsilon_a}{\epsilon} E_b^x E_a^{x*} \right) \, dy \, dz, \quad (4.8)$$

estos valores se conocen como coeficientes de acoplamiento; el primero se asocia al probabilidad de un fotón de saltar desde una guía a otra y el segundo con la energía asociada al traslape de modos.[67] Si queremos además considerar en el coeficiente de acoplamiento tanto el empare de fases y el traslape entre los modos, esto lo conseguimos al integrar en la coordenada de propagación de la guía que estemos empleando

$$\tilde{\kappa}_{pq} = \int \kappa_{pq} e^{i(\beta_q - \beta_p)x} \, dx, \quad (4.9)$$

que llamaremos intensidad de traslape.

4.2 ACOPLAMIENTO FIBRA-ESFERA Y ESFERA-FIBRA

Para cada uno de estos acoplamientos lo más indicado es hacer las operaciones en el sistema natural de coordenadas propio de cada guía; ya que esto permite una identificación rápida de los elementos transversales y longitudinales de los campos. Lo que sí es un hecho, es que inevitablemente se deberán escribir campos con coordenadas esféricas en cilíndricas y viceversa, además de calcular los campos con las traslaciones necesarias para que representen cabalmente lo que sucede en la realidad y las operaciones se realicen con éxito. Un ejemplo del comportamiento de los campos en el sistema compuesto para ejecutar el cálculo de las constantes que interesarán en esta sección lo podemos ver en la figura 4.2. Además consideraremos los campos normalizados a través de la siguiente ecuación[88]

$$1 = \frac{1}{2} N_{f(s)}^2 \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \iint n_{f(s)} \|\mathbf{E}\|_{f(s)}^2 \, dy \, dz, \quad (4.10)$$

donde el subíndice $f(s)$ se refiere a seleccionar la normalización para la fibra f o la esfera s . Consideramos de aquí en adelante al término

⁶ Ver la demostración completa en la [Subsección C.1.1](#)

de diferencia de fase como $\Delta\beta = \beta_s - \beta_f$. $N_{f(s)}$ es una constante de normalización del campo de la fibra o esfera, según corresponda, y que se puede obtener de

$$1 = \frac{1}{2} N_{f(s)}^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \iint n_{f(s)}(x, y) |\mathbf{E}|_{f(s)}^2 dx dy$$

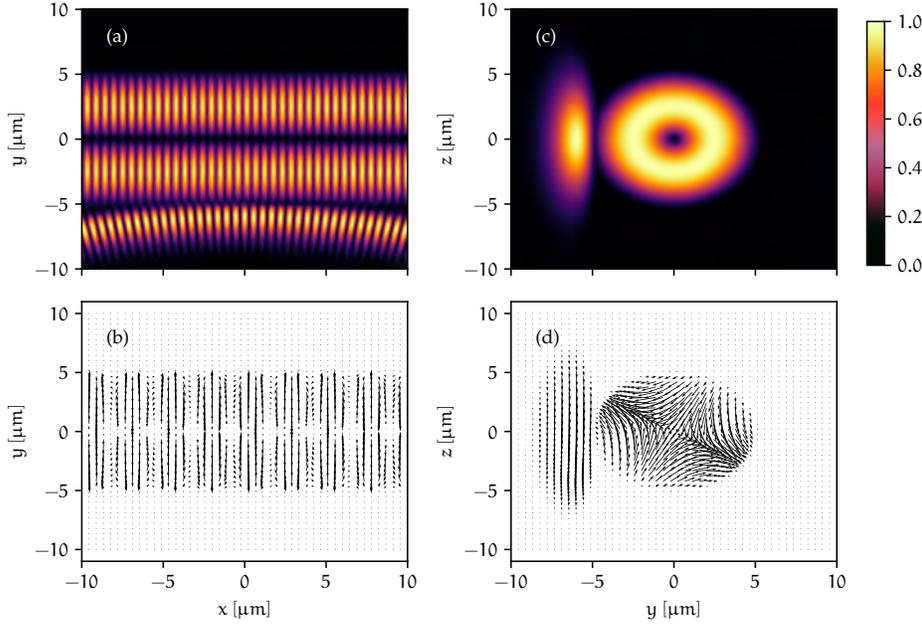


Figura 4.2: Ejemplo del campo esperado en un sistema de fibra y esfera correctamente colocados, para una esfera de $50\mu\text{m}$, longitud de onda a $1.550\mu\text{m}$, y radio de fibra de $5.0\mu\text{m}$. El modo de la esfera es TE fundamental y el de la fibra es el HE_{21} rotado $\pi/3$ radianes. (a) y (b) representan la vista longitudinal de la norma de su parte imaginaria y sus respectivas componentes vectoriales. (c) y (d) lo mismo pero en vista transversal.

4.2.1 Acoplamiento fibra-esfera

A partir de las ecuaciones (4.8) y (4.9), el cálculo se deberá realizar en coordenadas esféricas (r, θ, φ) y la integración sobre el volumen de la esfera V_s , haciendo las sustituciones sobre las constantes de permitividad y sustituyéndolas por expresiones que involucren al perfil de índices de refracción que en nuestro caso es escalonado, ie. seguiremos el perfil de índices de refracción propio de una fibra óptica fuertemente guiada. Así

se puede obtener la siguiente fórmula para la intensidad de acoplamiento desde una fibra a una esfera,

$$\tilde{\kappa}_{sf} = \frac{\omega \epsilon_0}{4} (n_s^2 - n_o^2) N_f N_s \iiint_{V_s} (\mathbf{E}_f^t \cdot \mathbf{E}_s^{t*} + E_f^\varphi E_s^{\varphi*}) e^{-i\Delta\beta r} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi. \quad (4.11)$$

4.2.2 Acoplamiento esfera-fibra

Análogamente al caso anterior y de las mismas ecuaciones y consideraciones, salvo que ahora integramos sobre el volumen de la fibra V_f y por lo tanto en coordenadas polares cilíndricas, podemos obtener la fórmula para la intensidad de acoplamiento ahora desde una esfera a una fibra,

$$\tilde{\kappa}_{fs} = \frac{\omega \epsilon_0}{4} (n_f^2 - n_o^2) N_f N_s \iiint_{V_f} (\mathbf{E}_s^t \cdot \mathbf{E}_f^{t*} + E_s^x E_f^{x*}) e^{i\Delta\beta z} r dr d\theta, dx. \quad (4.12)$$

Cabe aclarar que en cada una de las integrales anteriores si bien se indica que ha de integrarse sobre todo el volumen de una guía, es poco usual que eso sea necesario para encontrar que la integral converge puesto que volumen de interacción entre las guías es típicamente pequeño lo que hace suficiente realizar la integral solo en una región significativa. Si bien hay que considerar, que como se muestra en la [Sección B.1](#) el volumen de los modos es distinto según su índice.⁷

4.3 SOBRE LA UTILIDAD DE LA CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO

Una aplicación más o menos directa de la constante de acoplamiento es en el cálculo de las dimensiones ideales de la fibra para el óptimo acoplamiento hacia y desde la esfera a un determinado modo de esta última. También se puede estimar el distanciamiento óptimo de las guías, sin embargo, no se explorarán estos resultados en el texto, puesto que el problema que nos atañe, relativo a cómo se realizó el experimento, es el caso en que tanto la guía óptica como la cavidad están en contacto. Como se aprecia en las figuras [4.3](#), [4.4](#), [4.5](#) y [4.6](#) el máximo de cada pico se asocia al radio óptimo de fibra para que un determinado modo en fibra acople al modo fundamental en la esfera, es decir, aquel con diferencia de índices $|l - m| = \Delta_{lm}$ igual a cero y $s = 1$. Hay que notar que cada curva alcanza distintos valores máximos según el tipo de acoplamiento

⁷ En este trabajo se estima el volumen sobre el cual se realizan las integrales, haciendo una evaluación del integrando sobre cada coordenada y estimando las cotas de integración cuando la evaluación del integrando alcanza un valor del orden de 1.0×10^{-10} .

estudiado (fibra-esfera o viceversa), lo que sugiere que no siempre existe un acoplamiento simétrico entre la guía de onda y la cavidad. También de resaltar es el hecho que una condición de empate de fases $\Delta\beta = 0$ entre las guías ópticas, no es una condición de acoplamiento máximo (aunque sí de acoplamiento simétrico como se aprecia de (4.6)). Además, el radio óptimo resulta siempre menor al que cumple el empate de las fases, lo cual tiene sentido si no solo la fase juega un papel en el acoplamiento sino también la geometría del modo, en este sentido, la disminución del radio de la fibra permite que exista una mayor proporción de campo evanescente que pueda interactuar con el campo de la esfera, aunque en algún momento llega a ganar el término de fase y el acoplamiento disminuye a causa de la creciente diferencia de estas. Si bien en el estudio de las simulaciones presentadas en las figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6, no se encuentra una relación entre el $\Delta\beta$ correspondiente al punto de máximo acoplamiento, al menos para los modos en estas figuras presentadas, se observa que el radio donde se cumple que $\Delta\beta = 0$, es aproximadamente 1.15 veces mayor al radio de acoplamiento máximo.

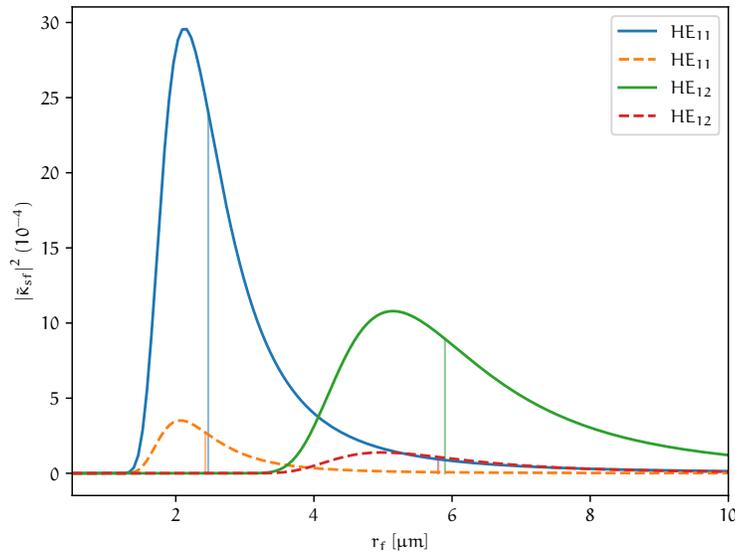


Figura 4.3: Valor de $|\tilde{k}_{sf}|^2$ para diferentes modos y radios de fibra r_f con luz a 1550 nm de longitud de onda y radio de la esfera de 300 μm . Se indica con una línea continua para el modo TE de la esfera y una punteada para el modo TM. Las líneas más claras indican el valor de la función en la condición de empate de fases entre la esfera y la fibra; véase que la condición de acoplamiento óptima no se logra en estas circunstancias. El modo en esfera, para este caso es el fundamental, $\Delta l_m = 0$ y $s = 0$.

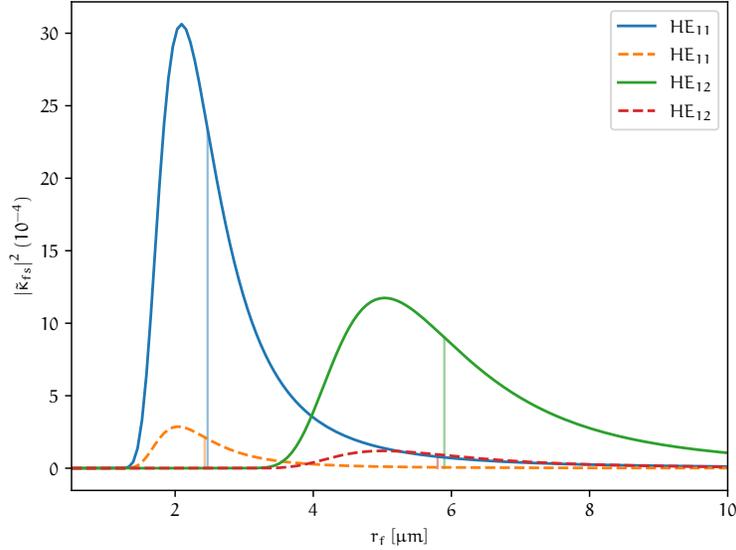


Figura 4.4: Valor de $|\tilde{k}_{fs}|^2$ para diferentes modos y radios de fibra r_f con luz a 1550 nm de longitud de onda y radio de la esfera de 300 μm . Se indica con una línea continua para el modo TE de la esfera y una punteada para el modo TM. Las líneas más claras indican el valor de la función en la condición de empareje de fases entre la esfera y la fibra; véase que la condición de acoplamiento óptimo no se logra en estas circunstancias. El modo en esfera, para este caso es el fundamental, $\Delta_{lm} = 0$ y $s = 0$.

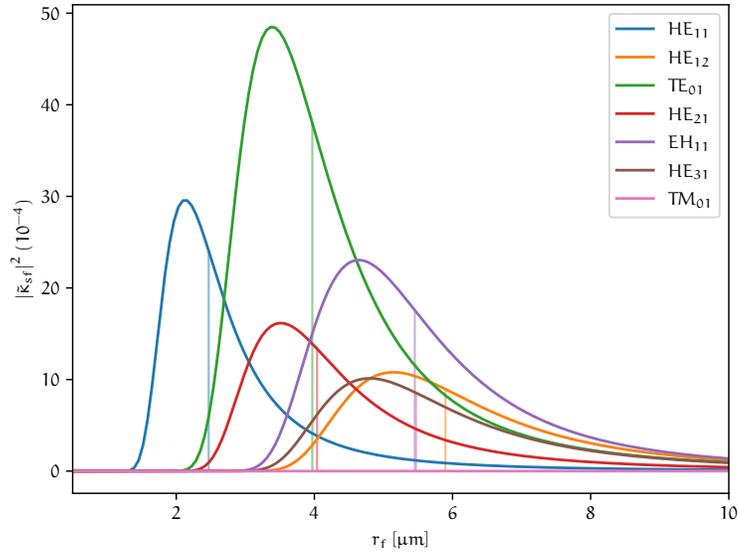


Figura 4.5: Valor de $|\tilde{k}_{sf}|^2$ para una esfera en modo TE vs. el radio de fibra r_f con luz a 1550 nm de longitud de onda y radio de la esfera de 300 μm , se indica en la gráfica el modo de fibra correspondiente. Las líneas más claras indican el valor de la función en la condición de empareje de fases entre la esfera y fibra; véase que la condición de acoplamiento óptimo no se logra en estas circunstancias. El modo en esfera, para caso este es el fundamental, $\Delta_{lm} = 0$ y $s = 0$.

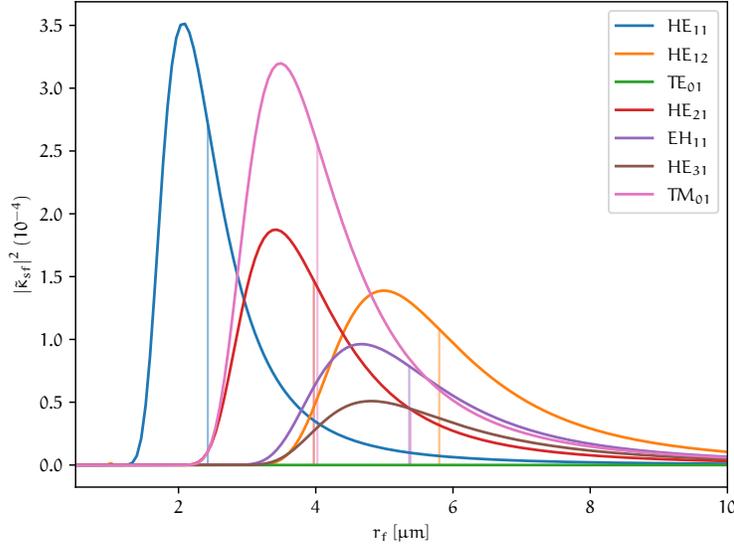


Figura 4.6: Valor de $|\tilde{\kappa}_{sf}|^2$ para una esfera en modo TM vs. el radio de fibra r_f con luz a 1550 nm de longitud de onda y radio de la esfera de $300 \mu\text{m}$, se indica en la gráfica el modo de fibra correspondiente. Las líneas más claras indican el valor de la función en la condición de empate de fases entre la esfera y fibra; véase que la condición de acoplamiento óptima no se logra en estas circunstancias. Apréciase como el modo TE_{01} no acopla con modos TM. El modo en esfera, para este caso es el fundamental, $\Delta_{lm} = 0$ y $s = 0$.

Por otra parte, el cálculo de esta constante es útil para predecir el valor del factor de calidad Q de la microesfera ya que está dado por[67, 89]

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4\pi r_s n_{\text{eff}_s}}{\lambda T_{fs}}, \\ &= \frac{4\pi r_s n_{\text{eff}_s}}{\lambda |\tilde{\kappa}_{fs}|^2}, \\ &= \frac{2m\pi}{|\tilde{\kappa}_{fs}|^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{\text{eff}_s} &= \frac{m\lambda}{r_s \pi}, \\ &= \beta_s \frac{\lambda}{\pi} \end{aligned}$$

Por otra parte el factor de calidad como también puede ser aproximado en términos del tiempo de vida de un haz dentro de la cavidad como[62]

$$\begin{aligned} Q &= \omega T_R N_v, \\ &= \omega_o T_R \frac{T_e}{T_R}, \\ &= \omega_o T_e, \end{aligned}$$

donde T_R es el tiempo de revolución de un haz en la cavidad, N_v el número de vueltas hasta que la intensidad llega a un valor $1/e$ de su valor

original y T_e el tiempo en que llega la intensidad al valor $1/e$ de su valor original. Si consideramos una estadística de tiempo de vida en la cavidad de tipo gaussiana, tendremos que el tiempo de vida medio de un fotón en la cavidad estará dado por

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{m\sqrt{2\ln(2)}}{\nu|\tilde{\kappa}_{fs}|^2}. \quad (4.13)$$

Habiendo estudiado el sistema microesfera-fibra, pasaremos a estudiar el mecanismo de generación de parejas de fotones en cavidades esféricas.

MEZCLADO ESPONTÁNEO DE CUATRO ONDAS

5.1 ÓPTICA NO LINEAL

El Mezclado de Cuatro Ondas¹ pertenece a la familia de los fenómenos ópticos no lineales; estos fenómenos a diferencia de los lineales, no cumplen con el principio de superposición, es decir, la combinación lineal de soluciones a las ecuaciones de campo no son necesariamente solución. Este comportamiento en las soluciones de campo no se aprecia sino hasta intensidades de campo muy altas, ya que los términos no lineales de las soluciones son pequeños, por lo que normalmente no los observamos.²

La no linealidad de un medio se expresa en el cambio de sus propiedades ópticas como función de la intensidad de la luz que lo atraviesa o al hacer incidir una o más ondas de luz. Se pueden diferenciar dos tipos de no linealidades

INTRÍNSECAS: Violaciones al principio de superposición que surgen de respuestas no lineales de moléculas individuales o de celdas unitarias a dos o más ondas. Se pueden presentar incluso para un mismo haz, pues este se puede representar como la suma de haces con la misma polarización, frecuencia y dirección.[92]

EXTRÍNSECAS: Cambio en las propiedades ópticas relacionado con una modificación en la composición del medio resultando en la absorción o emisión de luz. Los cambios se pueden deber al cambio relativo en las poblaciones de los estados excitados y basales o en el número de electrones ópticamente efectivos. El historial de exposición así como la intensidad instantánea a la que es sometido el medio determina su comportamiento óptico.[92]

Este comportamiento no lineal surge de la respuesta anarmónica de los electrones de enlace del material al campo electromagnético de la onda. Esta respuesta se caracteriza mediante la dependencia del momento

¹ Identificado por las siglas en inglés de *Four Wave Mixing (FWM)*.

² Nos referimos a condiciones típicas a aquellas que experimentamos diariamente, y que son útiles en la descripción geométrica de la luz, o en la descripción propia de la óptica física (donde ya es importante considerar la polarización, la longitud de onda y el tamaño de los medios con lo que la luz interactúa), pero donde el papel de la intensidad de la luz no es relevante.[90, 91]

dipolar por unidad de volumen o polarización³ \mathbf{P} , respecto al campo eléctrico \mathbf{E} , en general se tiene[40, 92]

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right), \quad (5.1)$$

con ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío y $\chi^{(j)}$ la susceptibilidad eléctrica del medio de j -ésimo orden y es un tensor de rango $j + 1$.⁴

El índice del término j para χ en la ecuación (5.1) se asocia al orden de interacción del campo, así j igual a 1 se asocia a las interacciones lineales⁵, j igual a 2 a fenómenos ópticos de segundo orden como la generación de segundo armónico, j igual a 3 a procesos ópticos de tercer orden como la generación de tercer armónico y FWM.

Para materia condensada, los términos de la susceptibilidad eléctrica son de los siguientes órdenes[41]

$$\begin{aligned} \chi_{(1)} &= 1, \\ \chi_{(2)} &= 1.94 \times 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}, \\ \chi_{(3)} &= 3.78 \times 10^{-24} \frac{\text{m}^2}{\text{V}^2}, \end{aligned}$$

de ahí que necesitemos campos muy intensos para observar una respuesta no lineal. Sin embargo, hay que recordar que al ser χ una cantidad tensorial, la descripción meramente escalar del problema no es suficiente, pues la respuesta dependerá de la orientación del campo eléctrico como de las condiciones internas del material. Por ejemplo, la respuesta de segundo orden sucede en medios cristalinos sin centrosimetría, mientras que a tercer orden el medio puede o no ser isotrópico.[41]⁶

Por otra parte, el proceso puede darse de forma paramétrica o no paramétrica. Los procesos paramétricos son aquellos donde los estados cuánticos iniciales y finales del sistema son idénticos y donde las susceptibilidades eléctricas pueden escribirse como números reales. Preservan además la energía de los fotones que participan en el proceso, por lo que no hay transferencia de la misma al medio, por otra parte, las poblaciones

³ También conocida como «polarización inducida», se usará uno u otro término en este texto a fin de diferenciar el otro significado de polarización que se emplea en electromagnetismo y que refiere a la dirección de oscilación de los campos.

⁴ Cabe mencionar que cada término \mathbf{E} de la ecuación (5.1) puede tener una distinta longitud de onda, pues podemos expresar a cualquier campo eléctrico incidente como la suma de ondas monocromáticas, para ello se recomienda el estudio de las ecuaciones de onda acopladas; para estos fines resultan convenientes las fuentes [41, 93, 94].

⁵ O mejor dicho a la óptica lineal.

⁶ La observación de fenómenos a segundo orden en medios anisotrópicos es posible, pero de muy baja intensidad, ya que el efecto cuadrupolar y de dipolo magnético presentan una tasa de conversión muy baja. [40]

electrónicas que median el proceso son removidas de su estado basal a uno virtual en un tiempo del orden $\hbar/\delta E$ con δE la diferencia de energía entre el nivel virtual y el real más cercano.

Mientras en los procesos no paramétricos, las poblaciones se mueven entre estados reales, hay transferencia de energía al medio, el valor de las susceptibilidades pertenecen al campo de los números complejos y no conservan la forma del estado cuántico.

5.2 MEZCLADO ESPONTÁNEO DE CUATRO ONDAS

El Mezclado Espontáneo de Cuatro Ondas⁷ es un proceso óptico no lineal paramétrico de tercer orden, por lo que esta asociado al término a tercer orden de la ecuación (5.1) para la polarización inducida

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \epsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}. \quad (5.2)$$

Si consideramos la composición del campo total como la superposición de cuatro campos,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 E_j \exp(i(\beta_j z - \omega_j t)) + \text{c.c.},$$

donde cada uno de los campo está polarizado en dirección $\hat{\mathbf{x}}$, tienen frecuencia ω_j y cuentan con constante de propagación $\beta_j = \tilde{n}_j \omega_j / c$ con \tilde{n}_j es índice de refracción del modo en el que viaja el campo j . Al considerar un mismo eje de polarización para los cuatro campos podemos hacer una aproximación escalar, así \mathbf{P}_{NL} toma la forma

$$P_{\text{NL}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 P_j \exp(i(\beta_j z - \omega_j t)) + \text{c.c.},$$

donde los coeficientes P_j se calculan a través del producto de las normas de los campos eléctricos, en particular el cuarto término de la suma está dado por

$$P_4 = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} [|E_4|^2 E_4 + 2 (|E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2) E_4 + 2E_1 E_2 E_3 \exp(i\theta_+) + 2E_2 E_2 E_3 \exp(i\theta_-) + \dots],$$

con

$$\theta_+ = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4)z - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)t,$$

$$\theta_- = (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)z - (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)t.$$

⁷ Conocido por las siglas en inglés de *Spontaneous Four Wave Mixing* (SFWM).

Los términos θ_+ y θ_- se asocian a los procesos no lineales de suma y resta de frecuencias, la eficiencia de esta conversión de frecuencias dependerá que el desfasamiento de las fases de los campos involucrados sea mínimo. Mientras tanto, el FWM sucede al aniquilarse dos fotones incidentes que dan paso a la creación de otros dos con distintas frecuencias, mas conservando la energía y momento netos de sus fotones padres, dicho proceso se puede dar de forma no degenerada o degenerada, que se resumen en las figuras 5.1 y 5.2 respectivamente.

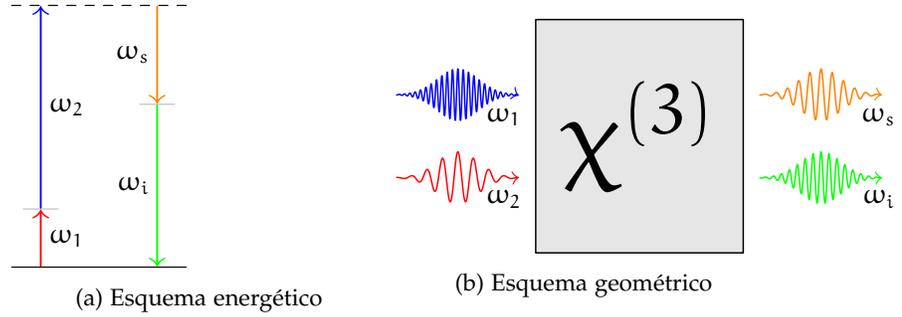


Figura 5.1: Diagrama del mezclado de cuatro ondas no degenerado.

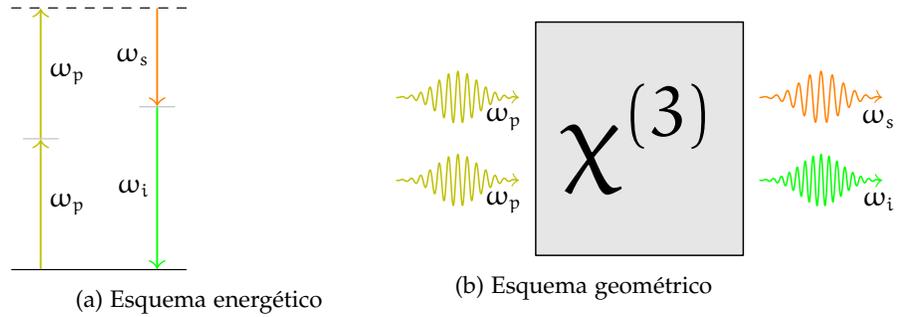


Figura 5.2: Diagrama del mezclado de cuatro ondas degenerado.

Si observamos el término θ_+ , notamos que si $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 (= \omega)$, luego $\omega_4 = 3\omega$, esto se conoce como generación de tercer armónico, por otra parte, θ_- se asocia a la aniquilación de dos fotones con frecuencias ω_1 y ω_2 que dan origen a otros con frecuencias ω_3 y ω_4 tales que

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2.$$

Además, la condición de empare de fase requiere que $\Delta k = 0$ con

$$\begin{aligned} \Delta k &= \beta_3 + \beta_4 - \beta_1 - \beta_2 - NL, \\ &= (\tilde{n}_3\omega_3 + \tilde{n}_4\omega_4 - \tilde{n}_1\omega_1 - \tilde{n}_2\omega_2) - NL, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde \tilde{n}_j es el índice de refracción efectivo para la frecuencia ω_j y NL un término de corrección no lineal que más adelante explicaremos.

Puede suceder que $\omega_1 \neq \omega_2$, caso que se conoce como «no degenerado» y otro en el que $\omega_1 = \omega_2 (= \omega_p)$, llamado «degenerado»⁸, en este último caso se generan dos fotones simétricamente desplazados desde la frecuencia de bombeo ω_p una cantidad conocida como corrimiento espectral Ω_s y que se define como

$$\Omega_s = \omega_p - \omega_3 = \omega_4 - \omega_p.$$

A la señal de mayor frecuencia respecto de la de bombeo se la conoce como «Stokes» y a su pareja de menor frecuencia como «anti-Stokes», también se les llama de forma más común como «señal»⁹ y «acompañante»¹⁰ respectivamente. Al haber conservación de energía se considera al FWM un proceso paramétrico.

5.3 COEFICIENTE NO LINEAL

El término NL de la ecuación (5.3) es un elemento de corrección no lineal que considera la contribución de automodulación de fase¹¹ y modulación de fase cruzada¹² y dicho valor se puede escribir como

$$NL = 2\gamma P_0,$$

donde P_0 es la potencia del haz de bombeo y

$$\gamma \approx \frac{n_2' \omega_p}{c A_{\text{eff}}},$$

con $n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)})$, el índice de refracción no lineal y A_{eff} el área efectiva del modo de bombeo. El punto máximo de ganancia paramétrica para SFWM está dado por

$$g_{\text{máx}} = \gamma P_0 = g_p \frac{P_0}{A_{\text{eff}}},$$

con $g_p = 2\pi n_2' / \lambda$ y $n_2' \approx 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2/W$ donde

$$A_{\text{eff}} = \frac{(\iint_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy)^2}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy},$$

con $F(x, y)$ la distribución transversal del campo.

8 La notación ω_p se refiere a que ambos fotones provienen de una señal de bombeo, *pumping* en inglés.

9 Del inglés *signal*, se identifica con una «s».

10 Del inglés *idler*, se identifica con una «i».

11 *Self-Phase Modulation (SPM)*.

12 *Cross-Phase Modulation (XPM)*.

Considerando que la potencia de circulación dentro de la cavidad está dada por[70, 95]

$$P_{\text{circ}} = \frac{\mathcal{F}}{\pi} P_0,$$

que puede escribirse en términos de Q como

$$\mathcal{F} = Q \frac{\lambda}{n_{\text{eff}} L}$$

$$P_{\text{circ}} = \frac{\lambda_p}{\pi n_{\text{eff}} L} Q,$$

$$= \frac{\lambda_p}{2\pi^2 R n_{\text{eff}}} Q.$$

Así

$$2\gamma P_0 = 2 \left(\frac{n'_2 \omega_p}{c A_{\text{eff}}} \right) \left(\frac{\lambda_p}{2\pi^2 R n_{\text{eff}}} Q \right),$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$= \frac{2n'_2}{\pi A_{\text{eff}} R n_{\text{eff}}} Q.$$

Recordemos que Q se puede calcular a partir de la constante de acoplamiento $\tilde{\kappa}_{fs}$.

5.4 DIAGRAMA DE EMPATE DE FASES.

Podemos explorar bajo qué condiciones espectrales esperaríamos observar fotones generados por SFWM, bajo la salvedad que no considera aún que cualquiera de estos sean resonantes, al graficar a las soluciones de la ecuación (5.3) como función de la frecuencia (longitud) de onda de bombeo y presentar a las soluciones en términos de la frecuencia de desintonización Ω .

El cálculo más sencillo que podemos hacer es suponer que todos los fotones están copolarizados, es decir están todos en modo TE o TM, y que se encuentran en la misma familia de modos radiales y azimutales. Se puede además variar el valor del término no lineal $2\gamma P_0$ y explorar cómo se comporta la frecuencia de desintonización entre los fotones s e i. Todo esto se muestra en las gráficas 5.3 y 5.4

Para una microcavidad esférica de sílice fundida de 160 μm de radio el comportamiento de la condición de empate de fases es que se muestra en las figuras 5.3 y 5.4, al aumentar el valor del término no lineal, se incrementa la separación espectral entre los fotones señal y acompañante, mientras que al incrementar el orden radial (índice s) se disminuye la frecuencia de cero dispersión, y los fotones generados pasan a separarse más abruptamente a frecuencias más bajas, puesto que el punto alrededor del que las curvas de empate de fases se abren abruptamente se relaciona con la frecuencia de cero dispersión para la esfera.

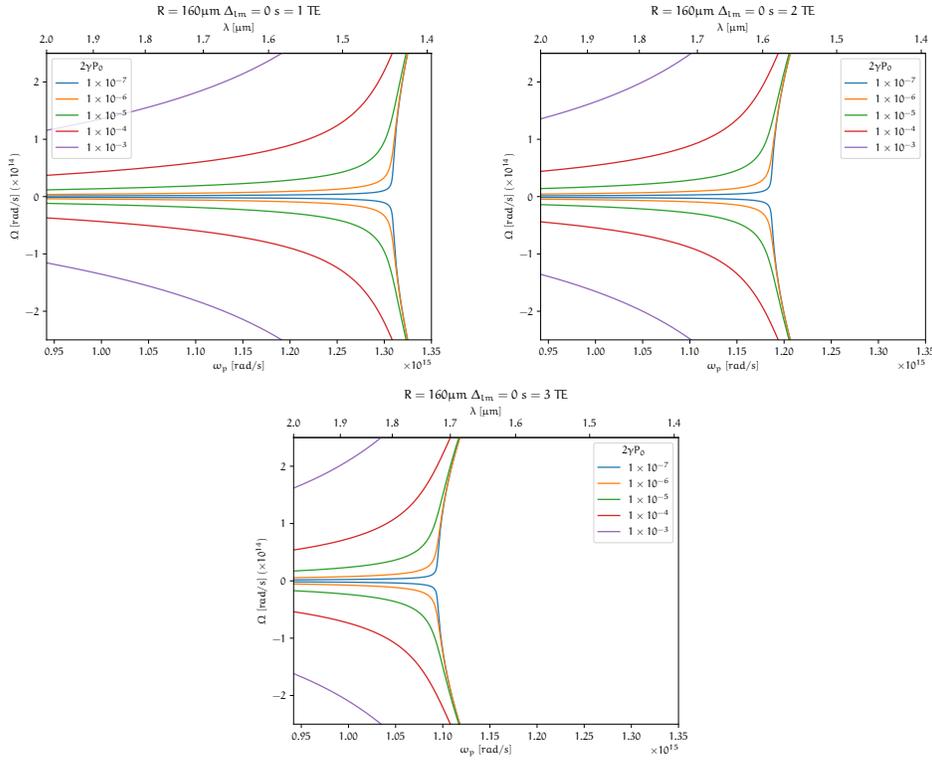


Figura 5.3: Curvas de empate de fases para todos los fotones en modo azimutal fundamental y modos radiales desde el fundamental ($s = 1$) hasta el segundo superior ($s = 3$), para una esfera de $160 \mu\text{m}$ de radio y considerando a todos los fotones en modo TE. Nótese como la separación espectral aumenta rápidamente a partir del punto de cero dispersión. Se indica el valor del término de corrección no lineal para cada pareja de fotones generada, indicado con distinto color.

Si por el contrario modificamos en una misma cantidad el orden azimutal ($\Delta_{lm} = l - m$), no se observará cambio, ya que toda la familia de modos para una determinada l están degenerados en frecuencia.

Por otra parte, si consideramos que los fotones de bombeo están contrapolarizados a los fotones generados no observamos soluciones a la función de empate de fases. Sin embargo, sí pueden observarse soluciones, que presentan un comportamiento similar a las presentadas en las figuras 5.3 y 5.4, si existe una pareja complementaria de fotones bombeo y generado que compartan polarización, por ejemplo, en el caso $[\text{TE}_1, \text{TM}_2, \text{TE}_s, \text{TM}_i]$, donde el subíndice indica el fotón asociado. Finalmente, si sólo uno de los fotones involucrados tiene una polarización distinta a los demás, si bien se pueden observar soluciones, para el espacio de frecuencias de las figuras 5.3 y 5.4, estas aparecerían apenas sobre las esquinas izquierdas de

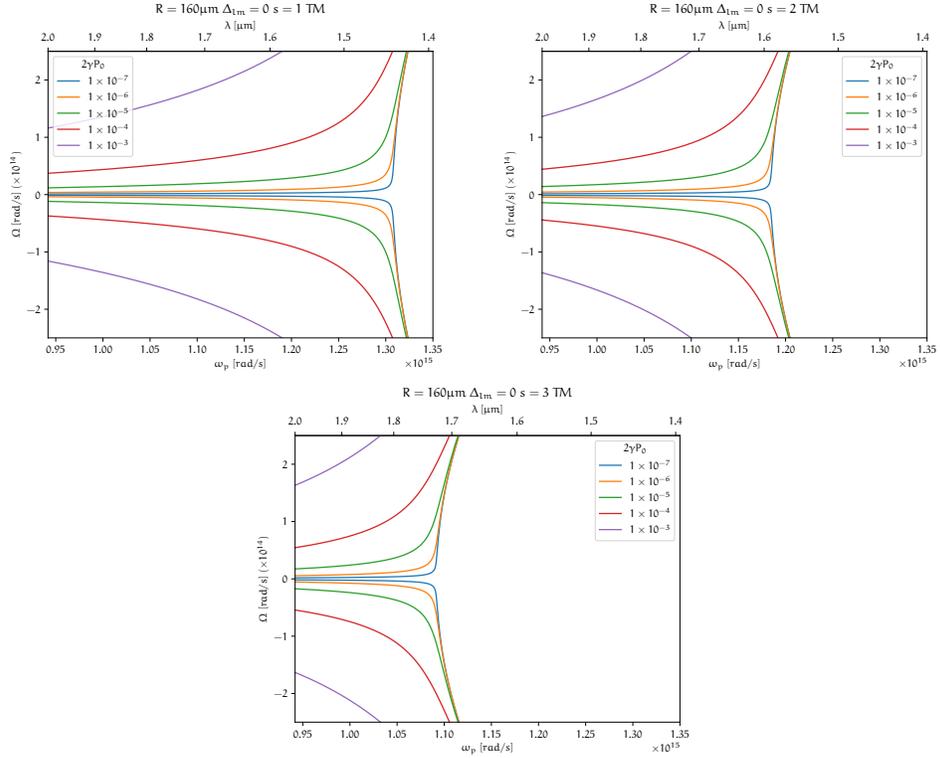


Figura 5.4: Curvas de empare de fases para todos los fotones en modo azimutal fundamental y modos radiales desde el fundamental ($s = 1$) hasta el segundo superior ($s = 3$), para una esfera de $160 \mu\text{m}$ de radio y considerando a todos los fotones en modo TM. Nótese como la separación espectral aumenta rápidamente a partir del punto de cero dispersión. Se indica el valor del término de corrección no lineal para cada pareja de fotones generada, indicado con distinto color.

dichos espacios de graficación, por lo que en la práctica y al menos para las condiciones del experimento preparado, no serían observables.

5.5 ESTADO DE DOS FOTONES

El estado de dos fotones para Mezclado Espontáneo de Cuatro Ondas (SFWM), se puede escribir a través de un análisis perturbativo en el tiempo a primer orden como

$$|\Psi\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i + \eta \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega G(\Omega) |\omega_p + \Omega\rangle_s |\omega_p - \Omega\rangle_i, \quad (5.4)$$

donde ω_p es la frecuencia de bombeo y las frecuencias señal y acompañante están dadas en términos de la frecuencia de desintonización Ω por $\omega_s = \omega_p + \Omega$ y $\omega_i = \omega_p - \Omega$ respectivamente. $G(\Omega)$ es la amplitud

espectral conjunta¹³ y η una constante de eficiencia de generación. La función G puede modelarse como el producto de una función de peine de frecuencias con su respectiva dependencia funcional $f(\Omega)$, multiplicada por una envolvente $F(\Omega)$ (de ancho mayor al de $f(\Omega)$), así

$$G(\Omega) = F(\Omega) \cdot f(\Omega) * \text{comb}_{\delta\Omega}(\Omega), \quad (5.5)$$

donde $*$ indica una operación de convolución, y con la función de peine de Dirac dada por

$$\text{comb}_{\Delta}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - \Delta j).$$

Así, mediante la transformada de Fourier de G , se puede calcular la amplitud temporal conjunta¹⁴

$$\tilde{G}(T) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{1}{\delta\Omega}j\right) \tilde{F}\left(T - \frac{1}{\delta\Omega}j\right), \quad (5.6)$$

donde \tilde{f} y \tilde{F} son las transformadas de Fourier de f y F respectivamente. Con esto, la amplitud temporal conjunta se compone de una función peine en el tiempo T con picos individuales definidos por $\tilde{F}(T)$ y separados cada $1/\delta\Omega$, cuya envolvente ahora está dada por $\tilde{f}(T)$. Es decir, los roles de F y f se invierten en el espacio de Fourier, como se esquematiza en la figura 5.5.¹⁵

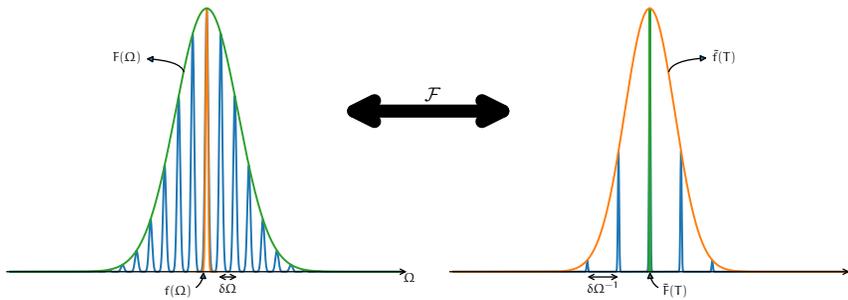


Figura 5.5: A la izquierda, ilustración del peine de frecuencias de la función de amplitud espectral conjunta $G(\Omega)$ para parejas de fotones generadas por SFWM, descrita en términos de la envolvente $F(\Omega)$ y la dependencia funcional de cada pico $f(\Omega)$. A la derecha, peine en el dominio temporal, donde se indican los papeles de las funciones $F(\Omega)$ y $f(\Omega)$ respecto a sus transformadas $\tilde{F}(T)$ y $\tilde{f}(T)$.

¹³ *Joint Spectral Amplitude (JSA)*.

¹⁴ *Joint Temporal Amplitude (JTA)*

¹⁵ En este caso el espacio de Fourier es el de tiempos T .

En el experimento que se expone en el siguiente capítulo, solo se pudieron obtener mediciones de la envolvente de intensidad temporal $|\tilde{f}(\Omega)|^2$, puesto que la estructura del peine correspondiente $|\tilde{F}(\Omega)|^2$ no pudo ser resuelta. Sin embargo, f se puede obtener de la raíz cuadrada de las mediciones asumiendo una contribución de fase plana, y mediante una transformada de Fourier numérica obtener $|f(\omega)|^2$, que es el perfil de intensidad para cada pico del peine de frecuencias. Dicha función representa el perfil espectral de un único fotón acompañante anunciado por la detección de su correspondiente fotón señal, todo esto bajo la suposición que al filtrar espectralmente al modo señal, se hace la selección de un único modo resonante de la cavidad.

Parte III

DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE
RESULTADOS

DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

6.1 FABRICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE FIBRA ESTRECHADA

La fabricación de fibra óptica estrechada se realizó con una máquina disponible en el laboratorio que a través de una llama oscilante permite el calentamiento de una región determinada de la fibra. La amplitud de oscilación de la llama de oxígeno/butano utilizada, con una relación de mezcla de gases de 2.6, empata con la longitud de la región de la cintura esperada; mientras que su velocidad de oscilación permite controlar no solo a la velocidad de estiramiento sino también al perfil de sus zonas de transición. La fibra se coloca sobre monturas especiales motorizadas que se separan a velocidad constante, lo cual junto con el movimiento de la llama, permite controlar tanto el perfil de las regiones de transición como la calidad del estirado. Se muestra el proceso de estirado en la figura 6.1. Se fabricaron fibras con un diámetro del cuello de aproximadamente¹ 1.5 μm , a una rapidez desplazamiento de los motores de 25 mm/min, una rapidez de oscilación del mechero de 5 mm/seg y una longitud del cuello de 20 mm. Bajo estos parámetros, la longitud de cada una de las transiciones fue de 88.45 mm, con lo que la longitud total sumando la longitud del cuello y las transiciones fue de 19.70 mm.² La fibra empleada en todos los casos fue una SFM-28, con un radio de núcleo de 8.2 μm y 125 μm de radio de recubrimiento, con una apertura numérica, NA, entre el núcleo y su recubrimiento de 0.14 a 1550 nm, según valores reportados por el fabricante.[96]

La caracterización de la fibra óptica se logra a través de la medición del perfil longitudinal de la fibra mediante el análisis fotográfico de una serie de micrografías ópticas tomadas a determinadas posiciones longitudinales, que mediante el empleo de un software de detección de bordes³ logra reconstruir su perfil.

-
- ¹ En nuestra experiencia hemos encontrado que existen variaciones del cuello de $\pm 0.1 \mu\text{m}$ respecto a lo que se le solicita a la máquina, esto pensamos es debido al poco aislamiento atmosférico y mecánico del dispositivo, cuyo montaje es todo menos que ideal, un ejemplo de condiciones de fabricación más o menos ideales lo podemos encontrar en esta referencia [80].
 - ² Más 1.5 cm aproximadamente a los extremos de la fibra, a fin de poderla colocar sobre las monturas y en el dispositivo de estiramiento.
 - ³ Desarrollado por el autor.

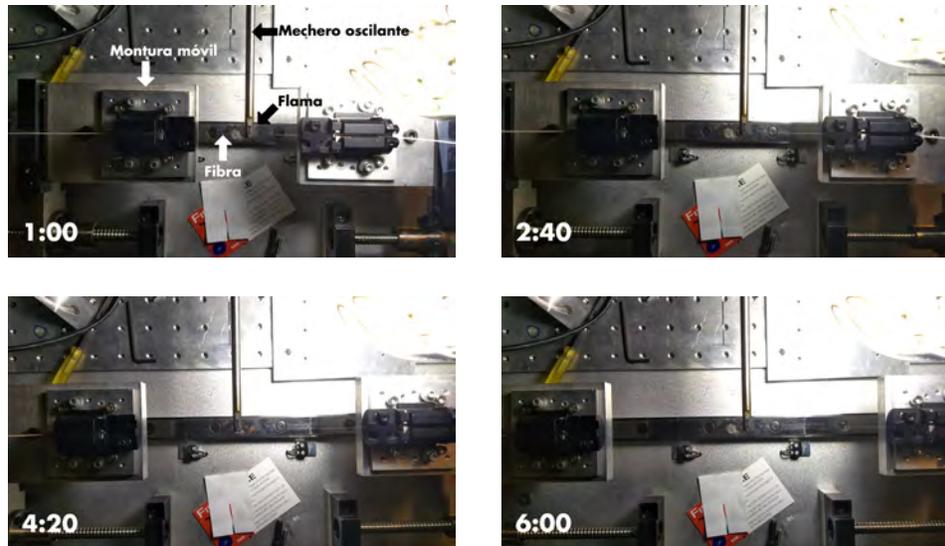


Figura 6.1: Proceso de estrechado realizado la máquina disponible en el laboratorio, se presenta cómo se va elongando la fibra. Se aprecian como se separan las monturas durante el estirado, el mechero y la llama empleados. El tiempo indicado en minutos y segundos desde el inicio de proceso de estirado

Por otra parte, durante el proceso de estiramiento se transmite luz a $1.550 \mu\text{m}$ de longitud de onda a una potencia fija y se mide la transmitancia de la guía durante este proceso; esta señal se emplea no sólo para determinar la calidad del estirado y así saber si vale la pena usar de fibra en el experimento, sino que también se analiza a través de un espectrograma donde se puede obtener información de las frecuencias de abatimiento, lo que a su vez ofrece datos sobre los modos de transmisión que sobreviven al proceso de estirado; además se la emplea para supervisar a las condiciones de adiabaticidad en las zonas transicionales.[84-86]

Un ejemplo de la señal de potencia transmitida lo podemos ver en la figura 6.2, donde para una transmitancia de alrededor del 97%, al finalizar el estiramiento termina con una transmitancia aproximada del 92%. Podemos apreciar que hay un tiempo en que la señal oscila fuertemente, esto es debido a que hay energía que transita de un modo a otro, lo cual nos da información sobre qué modos son los que están batiendo como se muestra en el espectrograma de esta señal en la figura 6.3. Notemos que en esta gráfica hay curvas que se cortan de forma abrupta, esto es indicativo que alguna de las parejas de modos que interactúan ha llegado a su condición de corte al disminuir el radio, por lo que ya no puede ser transmitido.

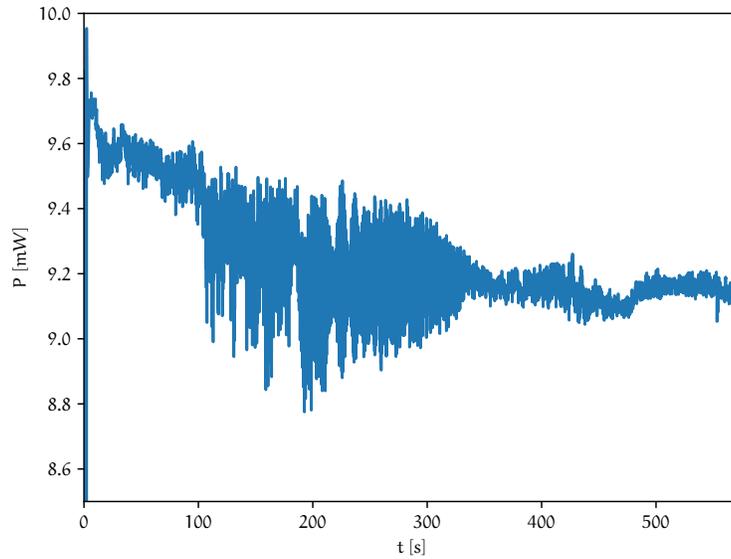


Figura 6.2: Ejemplo de señal de potencia vs. tiempo obtenida durante el proceso de estirado de una fibra óptica.

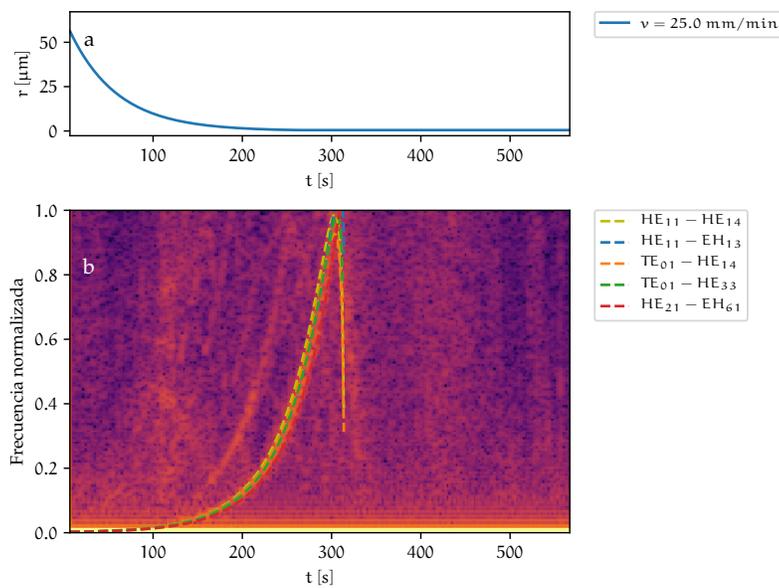


Figura 6.3: En la figura a) se indica la disminución del radio en el tiempo, durante la fabricación de una fibra con transiciones de perfil exponencial hasta que alcanza un radio de $1\mu\text{m}$. En b) se muestra la evolución del espectrograma normalizado de la señal de potencia transmitida durante el proceso de estiramiento para los datos mostrados en la figura 6.2, las curvas estiman algunas combinaciones de modos que dan origen a la señal de batido observada, según la fórmula (3.18).

Por otro lado, se aprecia que al disminuir el radio ya no siguen apareciendo señales de batido, pues se ha alcanzado la condición de transmisión monomodal en régimen fuertemente guiado, por lo que solo sigue transmitiéndose el modo HE_{11} .⁴

6.2 FABRICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE MICROESFERAS

La fabricación de las microesferas se realizó mediante la aplicación de un arco eléctrico en la punta de una fibra SFM-28, la misma que se empleó en la fabricación de fibra estrechada. La microesfera se fabricó con ayuda de una empalmadora de fibra óptica (Fujikura-FSM100P) que posee la función incorporada para tal fin, además que provee la función de medición del perfil de la esfera (ver figura 6.4). Con la fibra disponible y este dispositivo, se pudieron fabricar esferas con diámetros entre 270 μm a 500 μm . El proceso de fabricación si bien está casi completamente automatizado, requiere del ajuste fino en la rapidez de acercamiento de la punta de fibra al arco eléctrico y el control del tiempo y potencia del mismo.

En la figura 6.5, se muestra una micrografía electrónica de una de las esferas fabricadas, resulta interesante que al menos hasta la amplificación explorada no se apreciaran irregularidades en la superficie de estas.⁵

⁴ Se puede mostrar que el perfil estimado para estas fibras es adiabático para la combinación de modos presentada en la figura 6.3, hasta el punto en que se cortan las curvas de frecuencia espacial de abatimiento.

⁵ La microscopía se realizó con la ayuda del microscopio electrónico del Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), no se previó hacer un recubrimiento de oro a fin de no ocultar, de haber, detalles de las irregularidades en la superficie. Con el propósito de no dejar cargada la esfera y permitir una buena toma de imágenes, las esferas fueron colocadas en una cinta adhesiva conductora. Durante el proceso de toma de imágenes se encontró que, debido a la buena regularidad de la superficie, el microscopio electrónico tenía dificultades para encontrar el enfoque óptimo de la imagen a causa de la falta de textura. De ahí que supongamos que de existir irregularidades estas han de tener dimensiones menores a la resolución observada. No se exploraron amplificaciones mayores a causa de problemas técnicos en el dispositivo de adquisición.

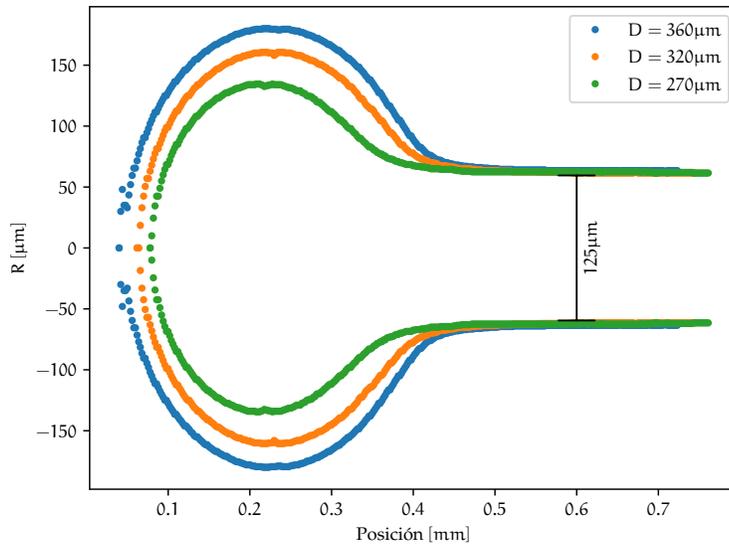


Figura 6.4: Ejemplos de perfiles de diámetros de algunas esferas fabricadas, obtenidos de las mediciones de la máquina empalmadora.

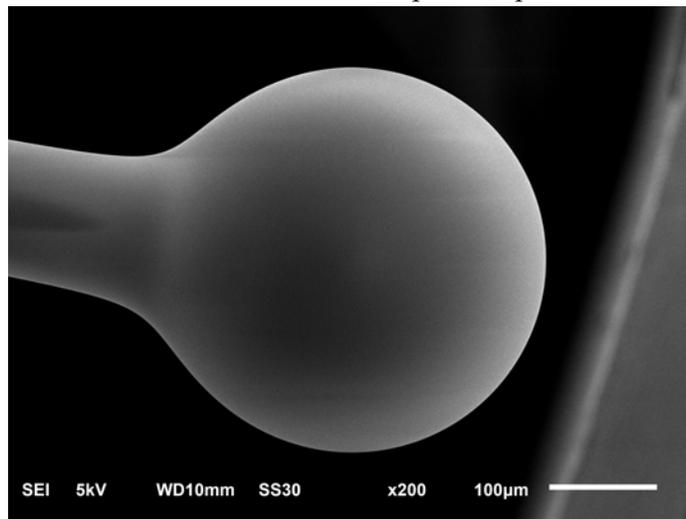


Figura 6.5: Esfera de 360 μm de diámetro, fabricada a partir de la punta de una fibra óptica mediante arco eléctrico.

Hay que destacar que durante el proceso de preparación de la fibra, que involucra no solo su corte, sino la remoción de la capa deacrílico protector que se hace mediante una navaja y alcohol isopropílico, quedan aún residuos que no son apreciables a simple vista, como se aprecia en la figura 6.6, de ahí que la etapa de limpieza sea crucial.⁶

⁶ Esto también es cierto para las fibras óptica estrechadas, pues la existencia de residuos en la superficie puede llevar desde irregularidades en el perfil de la fibra hasta la rotura de la misma.

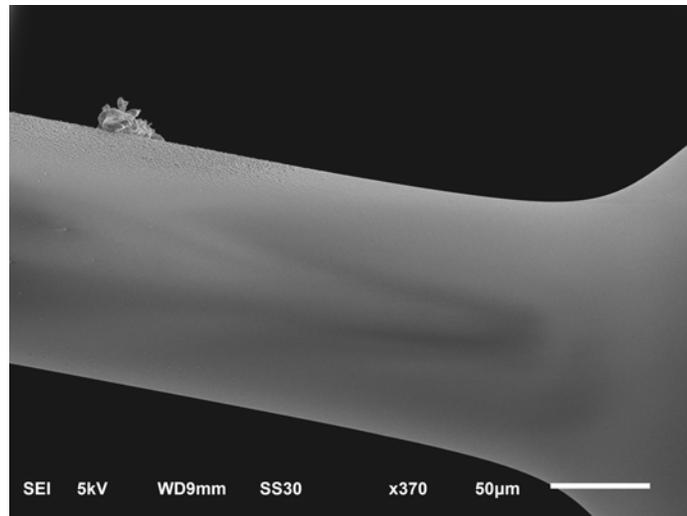


Figura 6.6: Zona de transición para una micro esfera de $360\ \mu\text{m}$ de diámetro, nótese como cualquier irregularidad e impureza remanente del proceso de limpieza manual se elimina dando paso a una superficie lisa. El elemento grande que aparece pegado en la parte superior izquierda de la imagen es un residuo de la cinta conductora con la que se asió la esfera.

La esfera fue colocada en una montura diseñada a tal propósito colocada sobre motores de *Physik Instrumente* con una resolución de $0.7\ \text{nm}$ por paso, tal que permitieran un ajuste en la posición vertical como horizontal, la posición de la esfera fue controlada con un par de cámaras a 90° la una de la otra, a fin de proporcionar referencias para el posicionamiento de la esfera respecto al *taper* al que se buscó acoplar en la zona de radio constante (el radio de la cintura), se procedió primero con un ajuste grueso de la posición de ambas direcciones de desplazamiento para luego ir acercando la esfera a la fibra poco a poco hasta que la distancia entre la fibra y la esfera no fuera discernible con la cámara de control de desplazamiento vertical que empleaba una cámara *Charge-Coupled Device (CCD)* y un objetivo $40\times$. A partir de ese momento el control de posición se hizo midiendo la transmitancia de la fibra. Un ejemplo de posicionamiento de la esfera en su eje horizontal que a la postre era el que nos indicaba la cercanía de la fibra a su ecuador lo encontramos en la figura 6.7

Para esto, el láser empleado en todo el experimento como bombeo fue un láser sintonizable (*New Focus TLB-6730-P*) que posee un rango espectral de $1550\text{-}1630\ \text{nm}$, y un ancho de banda de $200\ \text{kHz}$.⁷ Este láser se puede sintonizar de forma oscilante provyendo al láser de una señal eléctrica periódica, con lo que se puede lograr un corrimiento desde la

⁷ Es decir, el ancho de banda de la región de exploración modulada con una señal triangular, alrededor de los $1550\ \text{nm}$ fue de $0.16016\ \text{nm}$.



Figura 6.7: Ejemplo de las posiciones que cumplían la esfera y la fibra respecto la una de la otra, esta imagen se tomó con la cámara de control de posicionamiento horizontal.

una determinada longitud de onda establecida de 10 GHz/V. Este láser se conectó a unas paletas de control de polarización⁸ y luego mediante un conector de férula⁹ a la sección que posee el estrechamiento la cual no fue desplazada del dispositivo de fabricación debido a la delicadez de su naturaleza. La señal se recuperó conectando a la salida de la fibra con conectores FC a otra fibra, para ser conectada a un fotodiodo rápido infrarrojo de InGaAs conectado a un osciloscopio.

La señal usada para sintonizar al láser fue dividida para seguir proveyendo de señal al fotodiodo rápido conectado al osciloscopio, así se pudo hacer una correlación entre el voltaje aplicado con la longitud de onda suministrada a la fibra y esta a su vez con el tiempo registrado para la señal de transmitancia. Fue así que haciendo un escaneo de las longitudes de onda centrales del láser, y acercando poco a poco la esfera y modificando la polarización de la onda en la fibra al mover las paletas del PC, se observó que en algunas longitudes de onda la señal de transmitancia caía, pues para estas longitudes de onda se había encontrado una resonancia, ya que la energía asociada a esta longitud de onda estaba siendo capturada por la microesfera.

El propósito de sintonizar al láser con una señal exterior tuvo dos fines: el primero fue proporcionar la suficiente resolución en el espectro de bombeo explorado alrededor de los puntos de resonancia, y el segundo fue para evitar la presencia de efectos térmicos sobre la esfera que cambiasen el radio de la misma que, aunque mínimos, son suficientes para sacar

⁸ Llamada en inglés *Polarization Controller (PC)*.

⁹ Conocidos en inglés como *Ferrule Connector (FC)*.

al bombeo de su estado de resonancia. En este sentido, las frecuencias de la onda triangular suministrada rondaron entre los 5 a 200 MHz, aunque para todas mediciones presentadas en este trabajo se empleó una frecuencia de 100 MHz. Así con la obtención de estas señales de transmitancia se pudo medir el factor de calidad asociado a la esfera en una determinada resonancia. Ejemplos en las mediciones del factor de calidad para el bombeo los encontramos en las figuras 6.8, 6.9 y 6.10.

En la figura 6.8, el valor esperado de separación de las posiciones en longitud de onda de las resonancias observadas (con $\epsilon = 1/360 \pm 0.002$) según la fórmula (2.22) es de 4.7 ± 3.3 pm, mucho mayor al observado en dicha gráfica, este fenómeno podría ser explicado a través de la termalización de la posición de la resonancia o por la existencia de dispersión retrógrada.[97] Por otra parte, la separación en longitud de onda de las resonancias observadas en la figura 6.10, empleando igualmente a la ecuación (2.22), se esperaba que fuera de 4.2 ± 3.0 pm,¹⁰ dicha medición se realizó sobre la misma esfera de 360 ± 0.5 μm de diámetro; para esta observación la medición es muy cercana a valores predichos por dicha relación, por lo que se podría explicar a través del desdoblamiento de las resonancias de la misma familia de índice l ,¹¹ a causa de emplear una cavidad no idealmente simétrica.

¹⁰ El alto valor de la incertidumbre sucede a causa de la propagación de las incertidumbres experimentales, en particular, la referente a la resolución de la cámara de la máquina empalmadora que es de pm 0.5 μm . La incertidumbre se estima como el producto de la incertidumbre de la excentricidad por la frecuencia angular estimada, convertida a longitud de onda. La incertidumbre de la excentricidad está dada por $\pm \epsilon dr/r_a$ con r_a el radio mayor.

¹¹ $l(= m) = 1031$, estimado a partir de la solución de la ecuación de autovalores (2.16), para la longitud de onda promedio de los picos observados, un diámetro de esfera 360 μm , asumiendo que el modo observado es fundamental TE.

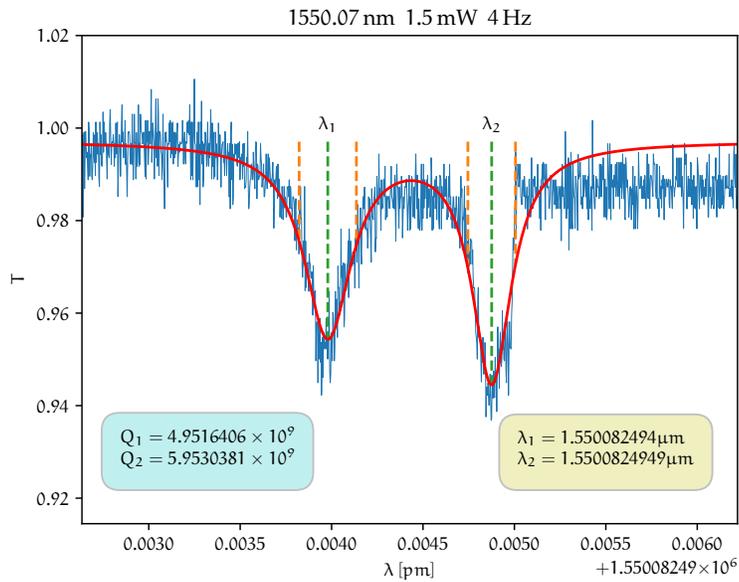


Figura 6.8: Ejemplo de las pruebas de caracterización de una microesfera, se indica el título la longitud de onda central a la que fue sintonizado el láser, su potencia y la frecuencia de la señal de control. Se ajustan curvas lorentzianas a las resonancias. Se indican las longitudes de onda centrales de ambos ajustes y los factores de calidad medidos para cada resonancia observada. Las líneas naranjas representan el ancho del pico a la altura media. El radio de la esfera empleado fue de $360 \mu\text{m}$.

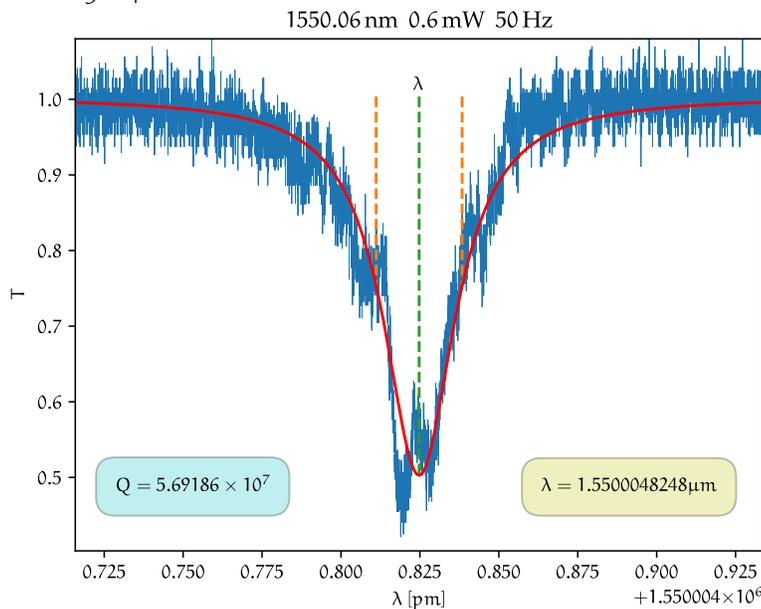


Figura 6.9: Ejemplo de prueba de caracterización de una microesfera. Se indica en el título la longitud de onda central a la que fue sintonizado el láser, su potencia y la frecuencia de la señal de control. Se indican la longitud de onda central del ajuste y el factor de calidad observado. Las líneas naranjas representan el ancho del pico a la altura media. El radio de la esfera empleado fue de $360 \mu\text{m}$. Si bien se aprecia en los datos experimentales la aparición de un posible doblete, este podría ser generado por la termalización de la posición espectral del pozo de resonancia.

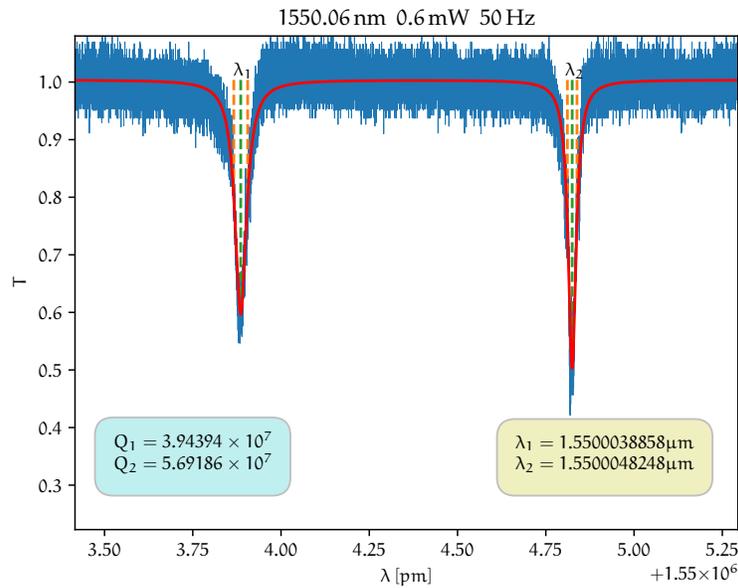


Figura 6.10: Ejemplo de las pruebas de caracterización de una microesfera, se indica el título la longitud de onda central a la que fue sintonizado el láser, su potencia y la frecuencia de la señal de control. Se ajustan curvas lorentzianas a las resonancias. Se indican las longitudes de onda centrales de ambos ajustes y los factores de calidad medidos para cada resonancia observada. Las líneas naranjas representan el ancho del pico a la altura media. El radio de la esfera empleado fue de $360 \mu\text{m}$. Se mide una $\Delta\lambda = 0.9389 \pm 0.0393 \text{ pm}$.

Además, se observó que a partir de los 50 Hz comienza a aparecer un fenómeno conocido como *ringing* o «tañido», que es causado cuando un haz resonante que no se disipó completamente de la cavidad en un ciclo de exploración de frecuencias, se encuentra con otro excitado por el siguiente ciclo de sintonización, esto provoca el batido de ambos, pues hay que recordar que el ancho espectral de las resonancias no es nulo y luego hay componentes espectrales que dan lugar a un batido por interferencia entre las señales. El comportamiento típico de esta señal semeja a un oscilador forzado del lado derecho de la señal mostrada en la figura 6.11, y que se hace patente en las oscilaciones que suben más allá del valor unitario de la transmitancia.

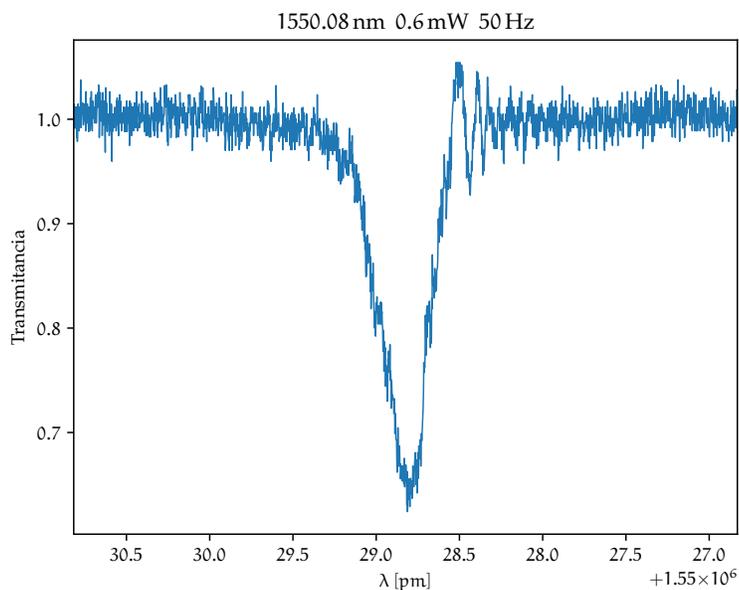


Figura 6.11: Ejemplo de señal de resonancia que presenta *ringing*, se indica el título la longitud de onda central a la que fue sintonizado el láser, su potencia y la frecuencia de la señal de control.

También se ha de mencionar que el láser se colocó en este proceso de acoplamiento una potencia fija¹² menor a 10 mW. Fue así que teniendo todo este sistema preparado se pudo pasar a la detección de fotones, cosa que será discutida en la siguiente sección.

¹² No es trivial el seleccionar una potencia baja, sobre todo al comenzar a montar la esfera, pues si se hiciera de golpe con una potencia muy alta, podemos llegar a saturar nuestros sensores de detección además de romper a la fibra óptica a causa de un choque térmico.

6.3 GENERACIÓN Y DETECCIÓN DE FOTONES

El arreglo experimental se muestra en la figura 6.12. Debido a la presencia de frecuencias parásitas en el espectro del láser este tuvo que ser filtrado con un multiplexador de divisor de onda¹³, pasó luego a un amplificador de fibra dopada con erbio¹⁴ para volver a ser filtrado. Contamos para ello con dos filtros WDM que diferenciamos por el ancho de banda que nos ofrecen, un filtro grueso (*Coarse Wavelength Division Multiplexing (CWDM)*) cuyos canales de transmisión están separados cada 20 nm y tienen un ancho a la altura media de 22 nm, lo que hace que estos se traslapen, y uno denso (*Dense Wavelength Division Multiplexing (DWDM)*) con canales¹⁵ separados cada 0.8 nm y un ancho de banda a la altura media de 0.47 nm, cubriendo las longitudes de onda desde los 1529.65 nm a los 1560.61 nm.¹⁶

La amplificación intermedia tiene el fin de compensar la energía perdida en el primer filtrado con CWDM y también para que compense las pérdidas que se generan en el segundo filtrado del primer DWDM. La potencia usada en este experimento durante las mediciones fue siempre menor a los 7 mW, aunque el EDFA con una amplificación de 24 dB deja una disponibilidad de potencia de hasta 40 mW.

La luz posteriormente pasa a unas paletas de control de polarización (PC), para luego ser acoplada a la fibra estrechada con la esfera ya preparada como se describió en la sección anterior. La luz se encausa ahora a un CWDM que no solo filtre al bombeo del láser, sino que haga el filtrado de los fotones señal ($\lambda_s < \lambda_p$) y acompañante ($\lambda_i > \lambda_p$), así los primeros se extraen del canal centrado a 1530 nm y los segundos del canal centrado a 1570 nm. A fin de observar la señal de SFWM entre estas dos señales se juntaron en una sola fibra empleando un divisor de haz 50:50 y se conectó una de sus salidas a un espectrómetro de rejilla con una cámara de CCD de InGaAs (*Andor Idus*) como sensor, con lo que se pudo obtener una

13 Lo identificaremos con las siglas inglesas de *Wavelength Division Multiplexing (WDM)*.

14 Lo identificaremos con las siglas inglesas de *Erbium Doped Fiber Amplifier (EDFA)*.

15 Estos canales de transmisión DWDM son estándar en aplicaciones de telecomunicaciones y cada canal está separado cada 10 GHz, así el canal 1 corresponde a 190.10 THz, el 2 a 190.20 THz y así sucesivamente hasta el canal 79.5 que está centrado en 197.95 THz (el canal máximo puede ser distinto según el fabricante del dispositivo). Por otra parte los canales CWDM se identifican por la longitud de onda central, están separados cada 20 nm y comienzan desde los 1271 nm hasta los 1611 nm. Se pueden encontrar en línea tablas con los valores centrales de frecuencia o longitud de onda; no se aventura a poner una referencia explícita a alguna de estas tablas debido a su amplia disponibilidad en línea, y a riesgo que la que sea aquí citada no pueda hallarse en línea *larga data*.

16 Si comparamos el ancho espectral de región de exploración del láser, con la del ancho del canal, este último es aproximadamente 2.38 veces más ancho que la región cubierta por el láser. La amplitud de la señal triangular suministrada al láser fue de 1 V, lo que representa 200 pm de ancho de banda explorado.

señal como la mostrada en la figura 6.13 donde se observan tres picos que

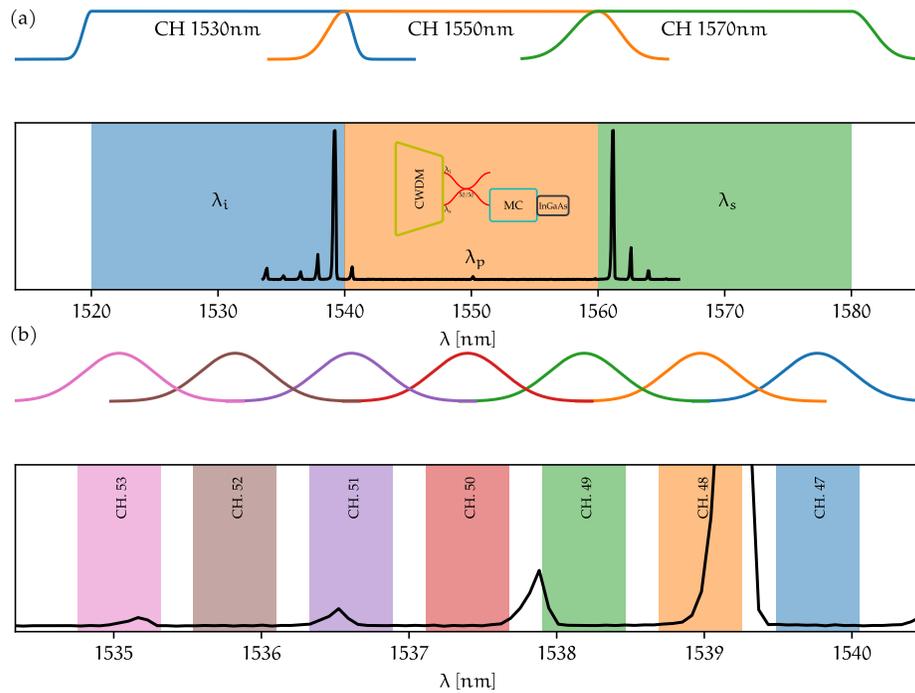


Figura 6.13: (a) Espectro de SFWM que consta de picos en la señal en longitudes de onda que conservan energía, cada uno de los colores de sombreado corresponden a los canales del CWDM, de los que se incluyen sus curvas de transmisión. Se indica además un pequeño esquema del montaje experimental empleado a la salida del segundo CWDM (ver figura 6.12). (b) Picos de emisión individuales para fotones acompañantes ($\lambda_i < \lambda_p$), referenciados según el ancho de banda de los canales DWDM, se incluye la curva de transmisión correspondiente.

conservan energía según lo esperado para el SFWM.^{17,18} Para el esquema de detección de fotones se elimina al divisor de haz de la salida del CWDM ahora que se conoce dónde ocurre la emisión de SFWM, para esto primero se seleccionó a alguna de las parejas de picos detectadas; a causa de la inexistencia de filtros DWDM¹⁹ para los fotones i estos se discriminan mediante un monocromador MC configurado de tal manera que los filtra según lo previsto por la condición de energía del SFWM, cuyos fotones pareja s son filtrados por un determinado canal en el DWDM.

Para supervisar el proceso de generación ya filtrado, las señales provenientes del DWDM y del monocromador son mezcladas nuevamente con

¹⁷ Ver Capítulo 5.

¹⁸ En el acercamiento para los fotones acompañantes se aprecia un cuarto pico sobre el canal 53, pero tan débil que su pareja señal no fue detectada por la cámara InGaAs.

¹⁹ Los fotones siguen saliendo de canales distintos del CWDM y se requiere una postselección.

un divisor de haz 50:50 y una de sus salidas se manda al espectrómetro con cámara CCD ya antes mencionado. El espectro ahora obtenido tiene la forma mostrada en la figura 6.14(b).

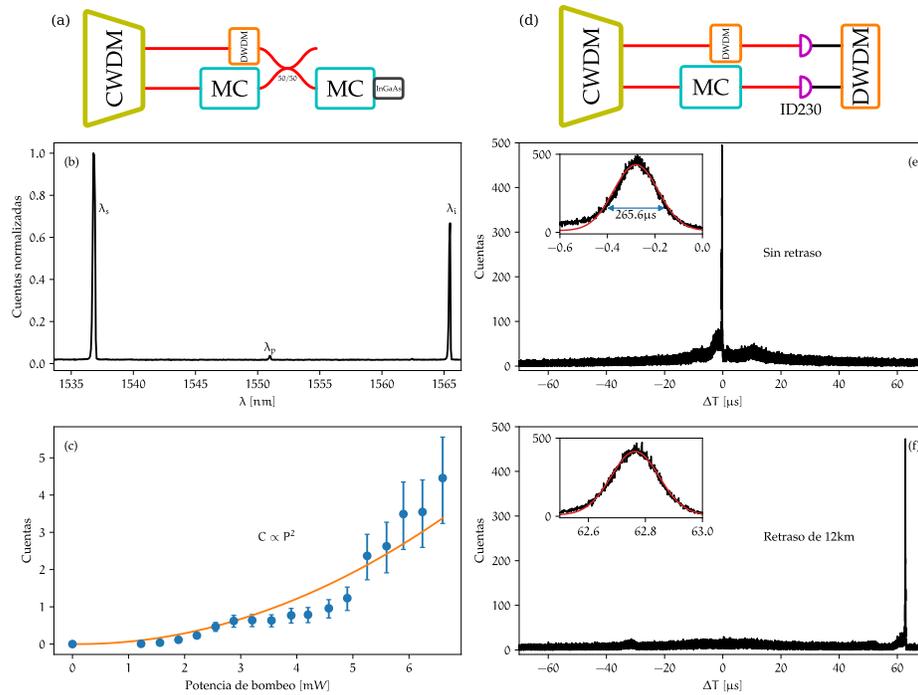


Figura 6.14: (a) Esquema del montaje para la obtención de resultados de las figuras (b) y (c). (b) Aislamiento de los picos más altos que conservan energía, obtenidos de filtrar al fotón señal con un canal DWDM y al fotón acompañante con la rejilla del monocromador, la señal filtrada es la mostrada en la figura 6.13. (c) Flujo integrado de SFWM para fotones señal como función de la potencia de bombeo, junto con un ajuste cuadrático. d) Esquema experimental para la obtención de los resultados de las figuras (e) y (f). (e) Cuentas en coincidencia entre los fotones señal y acompañante como función del retraso de arriba, se observa un pico bien definido, junto con un acercamiento al mismo. (f) Figura similar a la del panel (e) pero incorporando un retraso de 12.8 km de longitud.

Se hace ahora la verificación del comportamiento del número de cuentas registradas por la cámara CCD respecto de la potencia, y el resultado es un comportamiento cuadrático respecto de la potencia aplicada, como cabe esperar en el SFWM [42] y que se muestra en la figura 6.14(c).

Se elimina ahora el divisor de haz que mezclaba los fotones s e i , y las fibras que los guían ahora se conectan cada una a un fotodiodo de

avalancha²⁰ de InGaAs (*IDQuantique* ID230) de funcionamiento de libre.²¹ Los pulsos electrónicos de los APD se mandan a un registrador digital de tiempos (*IDQuantique* ID800) lo que permitió registrar la diferencia en tiempos de arribo, la señal detectada se muestra en las figuras 6.14(e) y 6.14(f)

La medición mostrada en la figura 6.14(e) es la distribución en tiempos de arribo del fotón acompañante espectralmente determinado y condicionado a la detección de un fotón señal seleccionado de un particular canal de DWDM. El pico mostrado en esta señal presenta un ancho de 265.6 ns a $1/e$, y un desplazamiento temporal de 279.8 ns; esto se piensa que es a causa de un desbalance en los valores de Q para cada uno de los fotones generados, es decir que el tiempo de vida de los fotones s e i en la cavidad una vez que son generados, difieren en dicha cantidad.

Para verificar que esta diferencia de tiempos sí es debida a la generación de fotones y no al esquema de detección, se transmitió el fotón s a través de un retraso óptico de 12.8 km de fibra óptica antes de alcanzar su respectivo APD, el resultado mostrado en la 6.14(f), muestra el resultado esperado al solo haber sido desplazado temporalmente el pico de detección.

Ahora, además de resolver temporalmente a los eventos de coincidencias se pasó a seleccionar al espectro del fotón i , es decir, mientras se dejó fija a la selección del fotón s en su salida del DWDM, se sintonizó la salida del monocromador para el fotón i . Esto resulta en una matriz de datos cuyo eje horizontal es la longitud de onda λ_i en la que se seleccionaron los fotones i , y el eje vertical la diferencia de tiempos de arribo. Así para una microesfera de 360 μm un bombeo transmitido por el canal 33, y un fotón s transmitido por el canal 47 se obtiene el espectrograma bidimensional que reporta el número de coincidencias obtenidas en la figura 6.15.

²⁰ Los identificaremos con las siglas inglesas de *Avalanche Photodiode* (APD).

²¹ Modelos anteriores de APD requerían una señal que anunciara la llegada de los fotones, el tipo de detector aquí empleado no requiere una señal que dispare la fotomultiplicación y de ahí el mote de «funcionamiento libre» o *free running* en inglés.

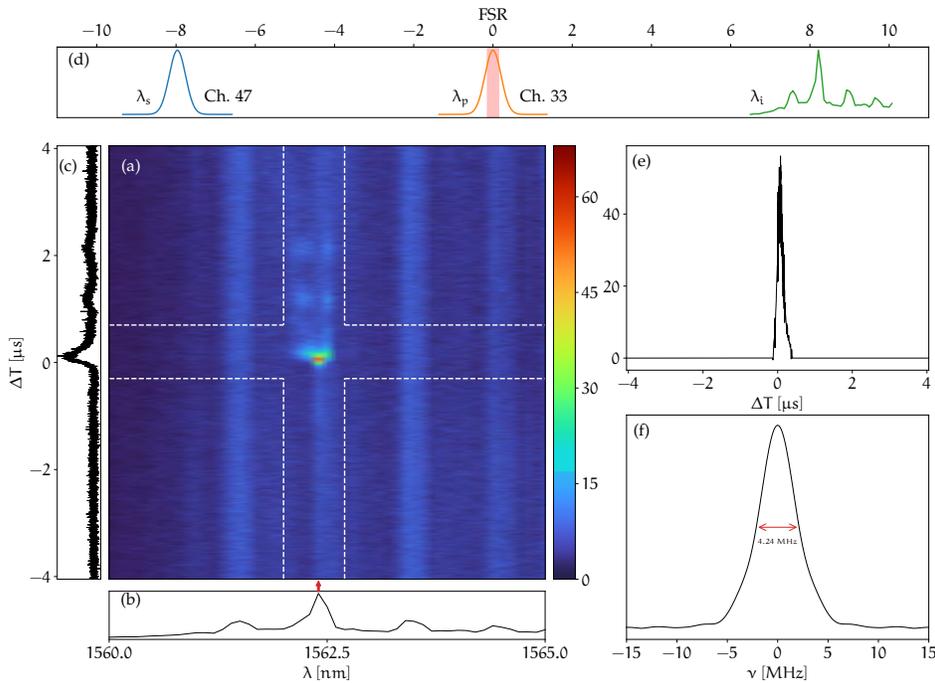


Figura 6.15: Para una microesfera con diámetro de $360 \mu\text{m}$, bombeo transmitido por el canal DWDM 33 y fotón señal por canal el 47. (a) Emisión de fotón único anunciado, en el espacio λ_i vs. ΔT_{s_i} (diferencia de tiempo de emisión entre fotón señal y acompañante), la sombra roja indica el ancho de exploración del láser de bombeo; (b) distribución marginal en λ_i , (c) distribución marginal en ΔT , (d) representación gráfica para las longitudes de onda involucradas, para el bombeo y los fotones señal y acompañante, (e) distribución de diferencia de tiempos de arriba para fotones acompañantes en un corte a la altura de la flecha roja sobre (b), y (f) distribución de intensidad espectral inferida para fotón acompañante único.

En la figura 6.15 se observa que los fotones i cumplen con la condición de conservación de energía esperada para el SFWM, según lo indica el pico de la señal al estar centrado en la posición λ_i esperada. Los otros eventos que se aprecian en el espectrograma tienen una frecuencia que coincide con el FSR de la esfera ($1.4 \pm 0.47 \text{ nm}$).

El cálculo de de las integrales marginales de estos datos,²² al integrar sobre T se obtiene la distribución marginal de longitudes de onda, al integrar sobre λ_i se obtiene la Distribución de Diferencias de Tiempo de Emisión (DDTE).

Eligiendo un determinado canal en el DWDM para el fotón s a fin de medir la DDTE, ha de fijarse en el monocromador la selección del fotón i ,

22 Que en la práctica corresponde a sumar los datos obtenidos en solo una de las dimensiones de la matriz de datos adquiridos.

en este caso en el máximo de coincidencias detectado en el espectrograma, se saca la marginal en T del espectrograma medido, se filtra de forma digital el ruido y se calcula la transformada de Fourier de la *DDTE* medida para obtener al perfil espectral de un solo fotón (como se menciona en la Sección 5.5), este nos da información sobre el ancho de banda para un único fotón i anunciado, que en este caso se midió con un valor de $\Delta\nu = 44.24$ MHz, que corresponde a un alto valor de $Q (= \omega_i/\Delta\omega)$ que para este fotón fue de 4.53×10^7 , dada la frecuencia central del fotón ω_i .

Si seleccionamos al fotón s en otro canal, se observará un corrimiento en el fotón i que le es pareja, como se muestra en la figura 6.16, esto debido a la alta correlación espectral entre ambos fotones. Al cambiar al fotón s del canal 47 al 49, se observa que el fotón i posee un ancho espectral de 5.70 MHz y un parámetro Q de 3.36×10^7 .

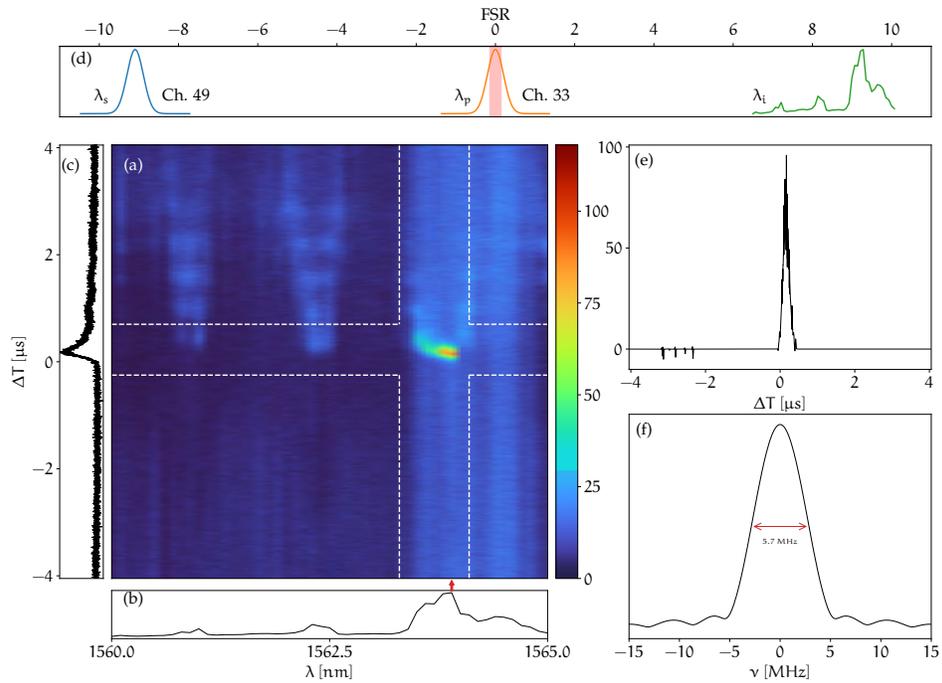


Figura 6.16: Para una microesfera con diámetro de $360 \mu\text{m}$, bombeo transmitido por el canal *DWDM* 33 y fotón señal por canal el 49. (a) Emisión de fotón único anunciado, en el espacio λ_i vs. ΔT_{si} (diferencia de tiempo de emisión entre fotón señal y acompañante), la sombra roja indica el ancho de exploración del láser de bombeo; (b) distribución marginal en λ_i , (c) distribución marginal en ΔT , (d) representación gráfica para las longitudes de onda involucradas, para el bombeo y los fotones señal y acompañante, (e) distribución de diferencia de tiempos de arribo para fotones acompañantes en un corte a la altura de la flecha roja sobre (b), y (f) distribución de intensidad espectral inferida para fotón acompañante único.

Como las características de emisión dependen principalmente de la longitud de onda de bombeo y del radio de la esfera, se preparan otras mediciones cambiando de canal al bombeo y manteniendo las condiciones de acoplamiento,²³ la selección espectral del fotón s y del radio de la esfera, los resultados que presentados en las figuras 6.15, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19 y 6.20 que se sintetizan en el cuadro 6.1. Baste apreciar que los espectrogramas de tiempos de arribo aparecen sombras de otros picos no seleccionados por el canal DWDM en cada experimento y que estos picos aparecen cada FSR longitudes de onda.

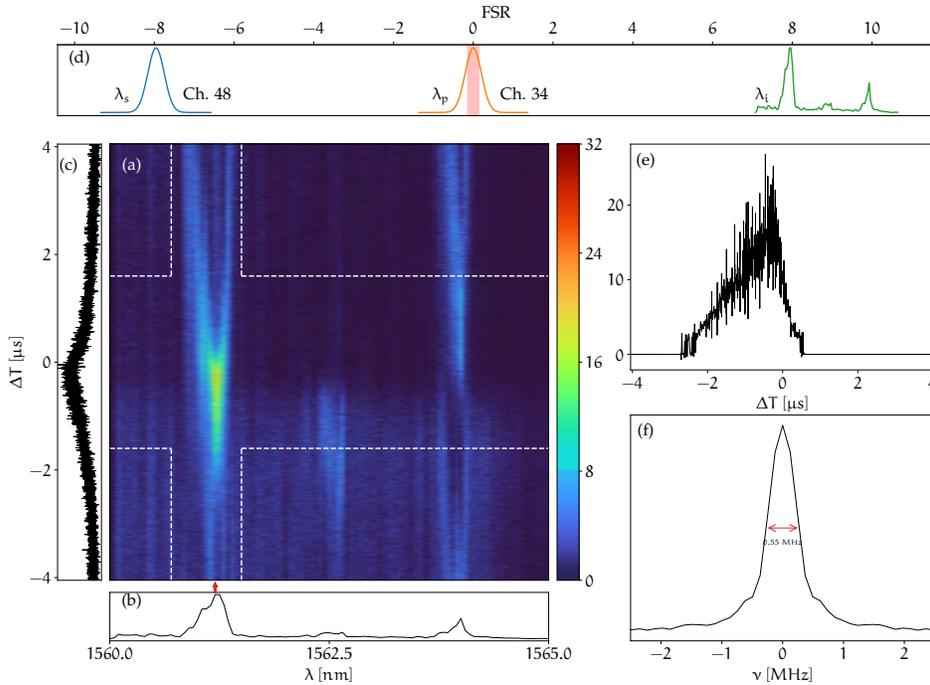


Figura 6.17: Para una microesfera con diámetro de 360 μm , bombeo transmitido por el canal DWDM 34 y fotón señal por canal el 48. (a) Emisión de fotón único anunciado, en el espacio λ_i vs. ΔT_{s_i} (diferencia de tiempo de emisión entre fotón señal y acompañante), la sombra roja indica el ancho de exploración del láser de bombeo; (b) distribución marginal en λ_i , (c) distribución marginal en ΔT , (d) representación gráfica para las longitudes de onda involucradas, para el bombeo y los fotones señal y acompañante, (e) distribución de diferencia de tiempos de arribo para fotones acompañantes en un corte a la altura de la flecha roja sobre (b), y (f) distribución de intensidad espectral inferida para fotón acompañante único.

²³ La posición de los PC y de la fibra respecto a la esfera.

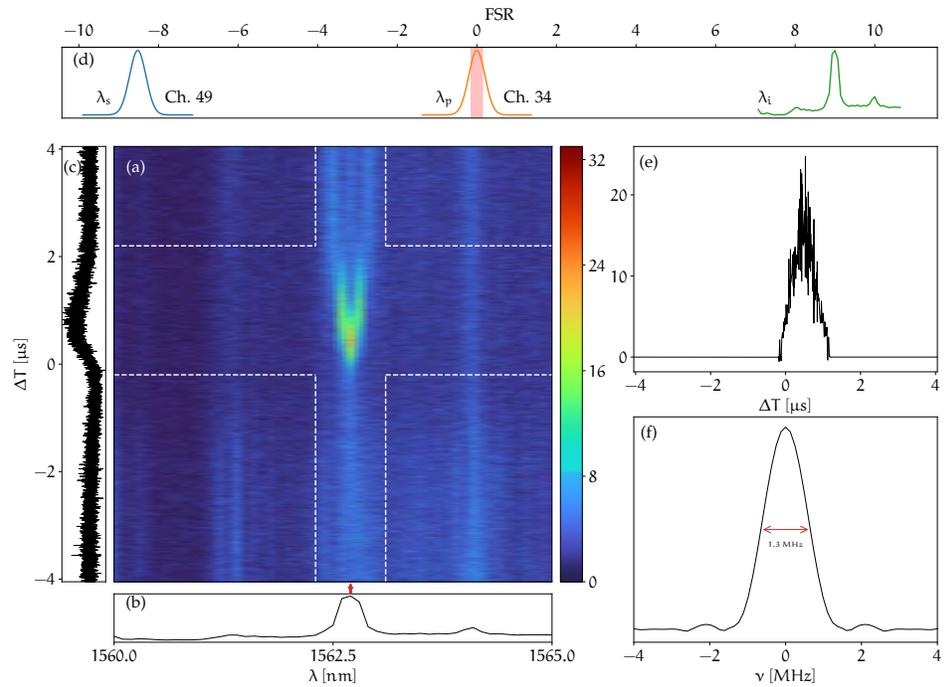


Figura 6.18: Para una microesfera con diámetro de $360 \mu\text{m}$, bombeo transmitido por el canal DWDM 34 y fotón señal por canal el 49. (a) Emisión de fotón único anunciado, en el espacio λ_i vs. ΔT_{s_i} (diferencia de tiempo de emisión entre fotón señal y acompañante), la sombra roja indica el ancho de exploración del láser de bombeo; (b) distribución marginal en λ_i , (c) distribución marginal en ΔT , (d) representación gráfica para las longitudes de onda involucradas, para el bombeo y los fotones señal y acompañante, (e) distribución de diferencia de tiempos de arribo para fotones acompañantes en un corte a la altura de la flecha roja sobre (b), y (f) distribución de intensidad espectral inferida para fotón acompañante único.

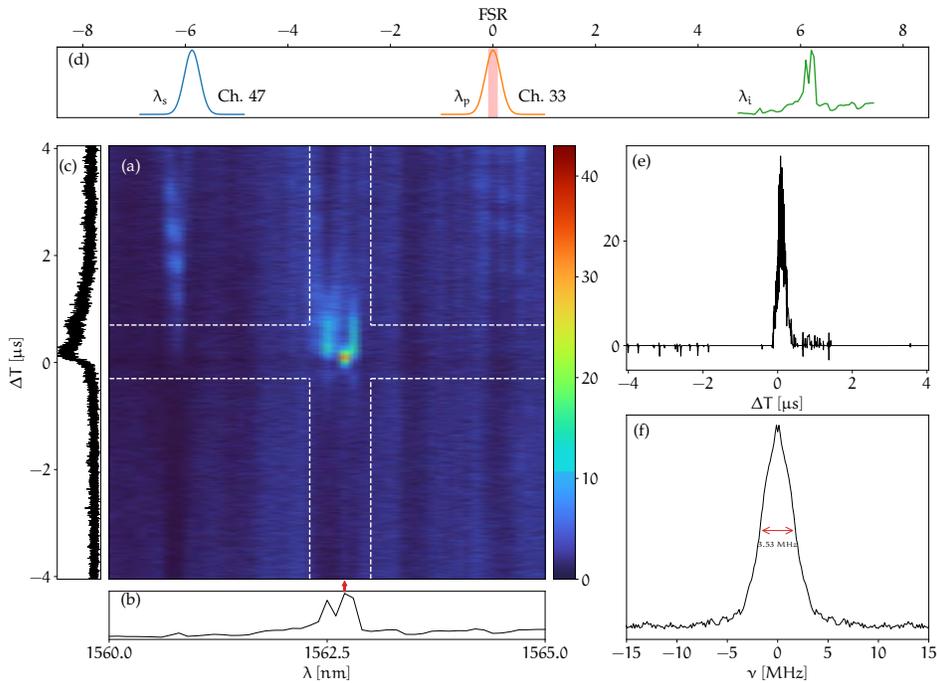


Figura 6.19: Para una microesfera con diámetro de $270 \mu\text{m}$, bombeo transmitido por el canal DWDM 33 y fotón señal por canal el 47. (a) Emisión de fotón único anunciado, en el espacio λ_i vs. $\Delta T_{s,i}$ (diferencia de tiempo de emisión entre fotón señal y acompañante), la sombra roja indica el ancho de exploración del láser de bombeo; (b) distribución marginal en λ_i , (c) distribución marginal en ΔT , (d) representación gráfica para las longitudes de onda involucradas, para el bombeo y los fotones señal y acompañante, (e) distribución de diferencia de tiempos de arriba para fotones acompañantes en un corte a la altura de la flecha roja sobre (b), y (f) distribución de intensidad espectral inferida para fotón acompañante único.

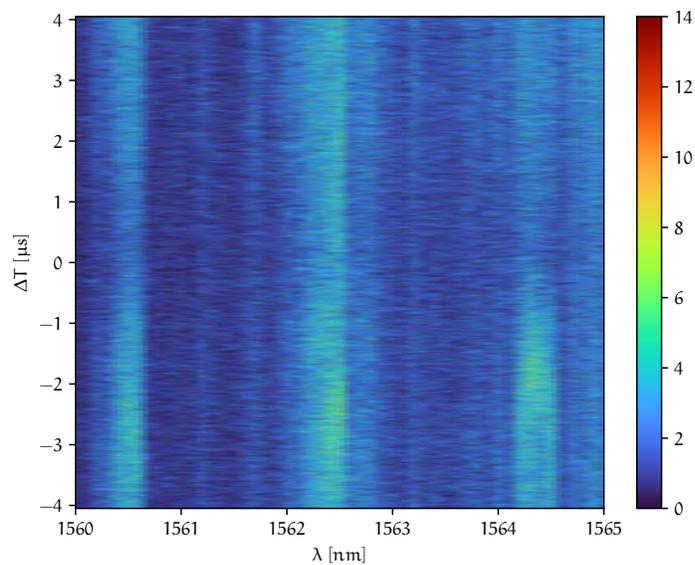


Figura 6.20: Para una microesfera con diámetro de $270 \mu\text{m}$, bombeo transmitido por el canal DWDM 33 y fotón señal por el canal CWDM centrado en 1530 nm . Emisión de fotón único anunciado, en el espacio λ_i vs. $\Delta T_{s,i}$ (diferencia de tiempo de emisión entre fotón señal y acompañante).

DIÁMETRO [μm]	λ_p [nm]	λ_s [nm]	λ_i [nm]	FSR [nm]	$\Delta\nu$ [MHz]	Q [$\times 10^7$]	Q_{te0} [$\times 10^8$]
360	Ch. 33 [1550.903]	Ch. 47 [1539.750]	1562.4	1.41 \pm 0.47	4.24	4.53	2.082
360	Ch. 33 [1550.903]	Ch. 49 [1538.170]	1563.9	1.41 \pm 0.47	5.70	3.36	2.084
360	Ch. 34 [1550.100]	Ch. 48 [1538.959]	1561.2	1.41 \pm 0.47	0.55	34.91	2.108
360	Ch. 34 [1550.100]	Ch. 49 [1538.170]	1562.7	1.41 \pm 0.47	1.3	14.76	2.990
270	Ch. 33 [1550.903]	Ch. 48 [1538.959]	1562.7	1.91 \pm 0.23	3.53	5.43	4.099 ($\times 10^7$)
270	Ch. 33 [1550.903]	CWDM [1530]	sin definir	1.9 \pm 0.23	sin definir	sin definir	sin definir

Cuadro 6.1: Resumen de resultados. Se señala los canales WDM con su respectiva longitud de onda central.^{a,b}

^a El valor de Q_{te0} se calculó considerando la teoría mostrada en el [Capítulo 2](#), suponiendo que la mayor contribución a la medición la da primer modo superior azimutal ($\Delta l_m = 1$), fundamental en modo radial y la longitud de onda del fotón i .

^b La FSR experimental para una esfera de 320 μm de diámetro fue de 1.62 \pm 0.12 nm, a esta esfera no se le pudo obtener una medición de tiempos de arribo.

Vale la pena notar cómo la Q teórica calculada es aproximadamente del orden de magnitud de la observada, para el primer modo superior azimutal y modo HE_{11} en fibra,²⁴ lo cual está de acuerdo a lo mostrado en las curvas de empate de fases 5.3 y 5.4, pues todas las curvas de empate de fases están degeneradas para una familia de resonancias con la misma diferencia de índices Δ_{lm} . El que la Q teórica sea mayor a la experimental es esperado, en tanto que el cálculo de esta Q no considera otros procesos como pérdidas por dispersión de superficie, que corrijan dicho valor. Por otra parte puede existir una contribución aditiva entre más modos de la cavidad y no solo restringirse al aquí explorado.

Cabe resaltar que estos datos representan, al menos hasta donde se tiene conocimiento a la fecha, del ancho de banda más corto para un fotón único anunciado, como se muestra en cuadro 6.2. Notemos que el resultado previo más cercano a la mejor medición que se obtiene en este trabajo es más ancho por 110 MHz que el aquí reportado. Este trabajo presenta la ventaja de no requerir el empleo de cristales especiales o de una cavidad al aire, que resulte voluminosa. Mientras que las otras mediciones están del orden de las mejores obtenidas en sistemas abiertos.

$\Delta\nu$	TIPO DE FUENTE	REFERENCIA	FECHA
153 GHz	Microanillo	[51]	2012
28.6 GHz	Microanillo	[38]	2015
13 GHz	Microanillo	[32]	2015
1.1 GHz	Microanillo	[27]	2016
931 MHz	Microdisco	[55]	2019
800 MHz	Microanillo	[50]	2017
110 MHz	Microanillo	[39]	2016
320 MHz	Microanillo	[49]	2015
270 MHz	Microanillo	[34]	2017
160 MHz	Microanillo	[37]	2019
48 MHz	Espacio libre (PPLN)	[59]	2015
7.2 MHz	Espacio libre (PPKTP-KTP)	[30]	2011
1.6 MHz	Espacio libre (PPLN)	[60]	2013
666 KHz	Espacio libre (PPKTP)	[58]	2016

Cuadro 6.2: Resultados de experimentos previos en la materia, ordenados de mayor a menor ancho de banda medido para fotones individuales.

²⁴ Como se mencionó antes y se muestra en la figura 6.3, el único modo que sobrevive en la fibra al ser reducida es el fundamental.

Finalmente se analizaron las características espectrales de toda la luz emitida, esto se midió con un analizador de espectro óptico (Anritsu MS9740B) que toma toda la luz proveniente a la salida de la fibra estrechada que lleva consigo tanto a los fotones de bombeo como a los s e i . Lo que se observa es todo un peine de frecuencias generado por todos los modos señal y acompañante que genera y soporta la esfera y ; se observa además, que el valor de FSR para los diámetros de la esfera de $360\ \mu\text{m}$, $320\ \mu\text{m}$ y $270\ \mu\text{m}$ son de $1.9\ \text{nm}$, $1.6\ \text{nm}$ y $1.4\ \text{nm}$ respectivamente, como se muestra en la figura 6.21. El hecho que se observen estos peines se debe al desplazamiento estadístico de las resonancias a causa de efectos térmicos y se relaciona con el comportamiento oscilante de la frecuencia de bombeo. También se pueden explicar a través de la ruptura de degeneración causada por una excentricidad distinta de cero en la circunferencia de la esfera, lo que permite la medición de resonancias en modos superiores. Ambos procesos simultáneos dan origen a los espectros observados en la figura 6.21. Se muestra en la figura 6.22 la comparación entre la FSR , con la esperada por la fórmula (2.25), y se muestra que la FSR medida está acorde a la teoría dentro de su respectiva incertidumbre.

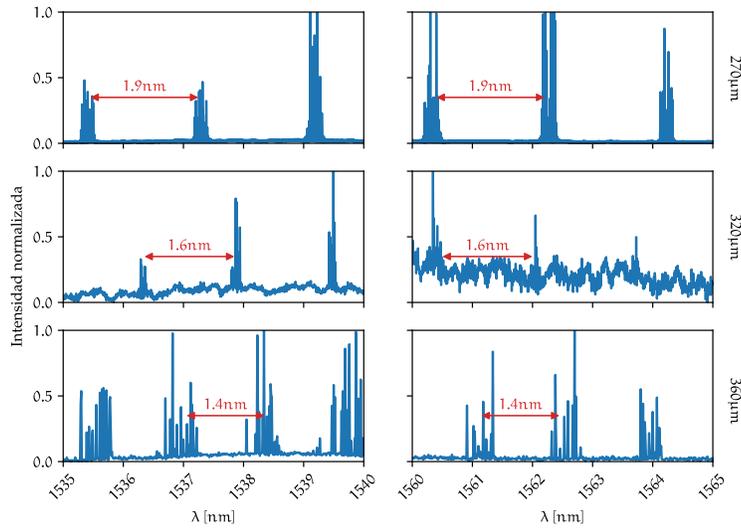


Figura 6.21: Espectros de los fotones señal (columna izquierda) y acompañante (columna derecha) para diámetros de microesfera de 360 μm , 320 μm y 270 μm .

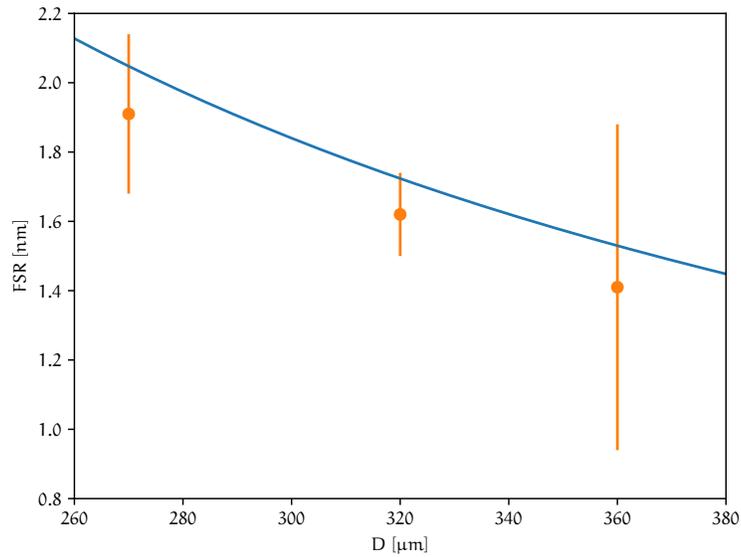


Figura 6.22: FSR del espectro de pares de fotones generados por SFWM, según lo medido de la figura 6.21.

Parte IV

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró la factibilidad de implementar una fuente de parejas de fotones en una cavidad resonante de geometría esférica fabricada de sílice fundido, con diámetros desde los 270 μm a 360 μm .

Se fabricó y caracterizó una fibra óptica estrechada para el acoplamiento posterior de esta a una microcavidad óptica esférica.

Se demostró la existencia de generación de SFWM, mostrando la dependencia cuadrática de la intensidad de las señales medidas respecto a la intensidad de campo de bombeo suministrada. Además, se mostró la existencia de un picos de detección bien diferenciados en la medición de coincidencias por tiempos de arribo. Y también se mostró que los fotones presentan una correlación en tiempo y energía, al modificarse el número de coincidencias en tiempo de arribo de los fotones al detector, al efectuar previamente sobre estos una selección espectral.

Se mostró además la existencia de retraso entre los tiempos de llegada de los fotones generados, y que tal no se muestra afectada por la aplicación de un retraso óptico de 12 Km de fibra. Se caracterizaron también las propiedades espectrales de los fotones acompañados únicos y anunciados, con una emisión espectral cumpliendo condiciones de conservación de energía.

Se mostró que la Q calculada para los fotones acompañantes observados, están de acuerdo en su orden de magnitud para el primer modo superior azimutal con los valores experimentales reportados. Además, que la separación espectral de los fotones involucrados se relaciona con el parámetro FSR propio de la esfera empleada y que la estimación de este concuerda con la experimental dentro de su rango de incertidumbres. Se observó que los peines de frecuencias generados, pueden ser ocasionados por la naturaleza oscilatoria del espectro de bombeo aunado a rupturas de degeneración de resonancias causadas por defectos en la esfericidad de la cavidad. Lo que puede hacer a la fuente implementada en este trabajo útil en sistemas que aprovechen una multitud de frecuencias lumínicas bien diferenciadas, por ejemplo, para la multiplexación de señales en canales de ancho de banda ultraestrecha.

Se mostró la existencia de una correlación espectral entre los fotones señal y acompañante. Y mediante la medición de la DDTE, se mostró que los altos valores de Q medidos llevan a asegurar, hasta donde se tiene conocimiento, que se logró una medición récord en la delgadez de ancho de banda para fotones únicos anunciados con un ancho de banda 110

KHz más delgado respecto al valor más estrecho anteriormente reportado. Finalmente cabe agregar, que la capacidad de tener una fuente fotónica de ancho de banda ultraestrecha la hace apropiada, en principio, para su inclusión en experimentos de memorias cuánticas. Bajo la salvedad que habrá que optimizar dicha fuente a los requerimientos espectrales que requiera dicho sistema.¹

¹ Por ejemplo, las memorias cuánticas de átomos alcalinos trabajan con espectros en el rango óptico, por lo que sería necesario explorar las propiedades de generación del tipo de fuente desarrollada en este trabajo sobre dicho rango de espectros, con el fin de verificar que se mantienen sus propiedades de generación. Por no decir que las dimensiones tanto del resonador como de la guía óptica que la acoplan deberán estar optimizadas tal que la fuente fotónica cumpla las condiciones espectrales necesarias para operar en conjunción con estos sistemas de memorias cuánticas.

Parte V

APÉNDICE

APÉNDICE MATEMÁTICO DEL CAPÍTULO 2

En este apéndice se colocarán las aclaraciones matemáticas necesarias en cuanto a las operaciones realizadas a lo largo del documento, y que en pos de preservar su concisión y fluidez, son colocadas en esta sección de apéndices.

A.1 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ EN COORDENADAS ESFÉRICAS

A partir de la ecuación de onda, para una función Ψ , al separar su parte temporal, se encuentra a la ecuación de Helmholtz vectorial dada por

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) + k^2 \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

con

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

El laplaciano en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2},$$

metiendo al laplaciano la función Ψ y ya considerando la separación de variables

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\Theta \Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R \Phi}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

Dividiendo entre Ψ

$$\frac{\nabla^2 \Psi}{\Psi} = \frac{1}{r^2} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2},$$

considerando lo anterior en la ecuación de Helmholtz dividida entre Ψ se tendría que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 \Psi}{\Psi} + k^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0. \end{aligned}$$

Separaremos a la parte en Φ , primero multipliquemos todo por $r^2 \sin^2(\theta)$

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 r^2 \sin^2(\theta) = 0,$$

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2(\theta) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}. \quad (\text{A.2})$$

R , Θ y Φ dependen de variables independientes, así que podemos igualar cada una de las dependencias de la ecuación anterior a constantes. Igualando el lado derecho de la ecuación anterior a una constante, tendremos la ecuación para Φ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= -m, \\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= -m\Phi, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

que tiene por solución general, considerando que hemos de tener simetría en φ cada 2π , es decir, que tenemos una condición periódica,

$$\Phi(\varphi) = c_1 e^{-im\varphi} + c_2 e^{im\varphi}.$$

Ahora separaremos R y Θ , para eso sustituimos (A.3) en (A.2)

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \sin(\theta) \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2(\theta) = m^2,$$

dividimos entre $\sin^2(\theta)$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k^2 r^2 = \frac{m^2}{\sin^2(\theta)},$$

reagrupamos a la izquierda lo que dependa de r

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right),$$

si igualamos cada lado a una constante λ

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = \lambda, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{m^2}{\sin^2(\theta)} - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \lambda, \quad (\text{A.5})$$

de (A.4) multiplicando por R

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R = \lambda R, \tag{A.6}$$

y de (A.5) multiplicando por Θ

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \Theta - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= \lambda \Theta, \\ \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \Theta - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \lambda \Theta &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \theta} &= -\sin(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $t = \cos(\theta)$ y $\Theta \rightarrow P(t)$

$$\begin{aligned} -\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{d}{dt} \left(-\sin^2(\theta) \frac{dP}{dt} \right) - \frac{m^2}{1-t^2} - \lambda P &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{dP}{dt} \right) - \frac{m^2}{1-t^2} - \lambda P &= 0, \\ -2t \frac{dP}{dt} + (1-t^2) \frac{d^2P}{dt^2} - \frac{m^2}{1-t^2} - \lambda P &= 0. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Ecuación asociada de Legendre

La solución a la ecuación (A.7) está dada por las funciones asociadas de Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l,$$

con $l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $-l \leq m \leq l$ En el caso de $m < 0$ equivalentemente

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x),$$

y cumplen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lm},$$

de dicha condición se puede ahora regresar a las soluciones en θ

$$\Theta_{lm}(\cos(\theta)) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)).$$

La solución de Φ tal que cumpla condiciones de ortogonalidad es

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi},$$

con $m \in \mathbb{Z}$, donde

$$\int_0^{2\pi} [\Phi_m(\varphi)]^* \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = \delta_{mm'}.$$

Al producto de Θ_{lm} y Φ_m se conoce como armónico esférico

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi},$$

y son ortonormales sobre la superficie de una esfera

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta [Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi)]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

Por otra parte, de la ecuación (A.6) ¹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R - \lambda R &= 0, \\ r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - l(l+1)) R &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

y considerando la siguiente sustitución

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.9})$$

se tendría

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} \right) &= \frac{kZ'(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} - \frac{k}{2} \frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.10}) \\ \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} \right) &= \frac{k^2 Z''(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} - \frac{k^2}{2} \frac{Z'(kr)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2}{2} \frac{Z'(kr)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} k^2 \frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{5}{2}}}, \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

sustituyendo (A.10) y (A.11) en (A.8)

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{k^2 Z''(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} - k^2 \frac{Z'(kr)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4} k^2 \frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{5}{2}}} \right) + 2r \left(k \frac{Z'(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} - \frac{k}{2} \frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ + \left(k^2 r^2 - l(l+1) \right) \frac{Z(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} = 0, \end{aligned}$$

y multiplicando por $(kr)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} r^2 \left(k^2 Z''(kr) - k^2 \frac{Z'(kr)}{kr} + \frac{3}{4} k^2 \frac{Z(kr)}{(kr)^2} \right) + 2r \left(kZ'(kr) - \frac{k}{2} \frac{Z(kr)}{kr} \right) \\ + (k^2 r^2 - l(l+1)) Z(kr) = 0, \end{aligned}$$

¹ Se puede mostrar que [98]

$$\lambda = l(l+1),$$

como eigenvalores de la ecuación (A.7).

dividiendo entre k^2

$$r^2 \left(Z''(kr) - \frac{Z'(kr)}{kr} + \frac{3}{4} \frac{Z(kr)}{(kr)^2} \right) + 2r \left(\frac{Z'(kr)}{kr} - \frac{1}{2k} \frac{Z(kr)}{(kr)} \right) + (k^2 r^2 - l(l+1)) \frac{Z(kr)}{k^2} = 0, \quad (\text{A.12})$$

operando sobre los términos marcados en rojo

$$-\frac{Z'(kr)}{kr} r^2 + 2r \frac{Z'(kr)}{k} = -\frac{Z'(kr)}{k} r + 2r \frac{Z'(kr)}{k} = r \frac{Z'(kr)}{k};$$

y ahora sobre los términos en azul

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \frac{Z(kr)}{k^2} - \frac{1}{k^2} Z(kr) + (k^2 r^2 - l(l+1)) \frac{Z(kr)}{k^2} &= \frac{Z(kr)}{k^2} \left(\frac{3}{4} - 1 + k^2 r^2 - l(l+1) \right), \\ &= \frac{Z(kr)}{k^2} \left(k^2 r^2 - l^2 - l - \frac{1}{4} \right), \\ &= \frac{Z(kr)}{k^2} \left(k^2 r^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right); \end{aligned}$$

así la ecuación (A.12) quedaría

$$r^2 Z''(kr) + r \frac{Z'(kr)}{k} + \left(k^2 r^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \frac{Z(kr)}{k^2} = 0. \quad (\text{A.13})$$

A la expresión (A.13) se conoce como ecuación de Bessel de orden $l + 1/2$, que tiene como soluciones generales a las funciones de Bessel esféricas²

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{A.14a})$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{A.14b})$$

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)} = j_l(x) + iy_l(x), \quad (\text{A.14c})$$

$$h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)} = j_l(x) - iy_l(x), \quad (\text{A.14d})$$

donde

$$y_n(x) = -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \left(\frac{1}{2} - n\right)_s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s},$$

$$j_n(x) = \frac{x^n}{(2n+1)!!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \left(n + \frac{3}{2}\right)_s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}.$$

$(a)_n$ se conoce como símbolo de Pochhammer, donde $(a)_1 = a$ y $(a)_{n+1} = a(a+1) \cdots (a+n)$.

² J_ν y Y_ν son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo respectivamente. $h_l^{(1)}$ y $h_l^{(2)}$ son las funciones de Hankel de primera y segunda especie.

En general la solución para la ecuación (A.13) se puede ver como la combinación lineal (en \mathbb{R}) de (A.14a) y (A.14b)

$$Z_l(kr) = \alpha_l j_l(kr) + \beta_l y_l(kr),$$

así (A.9) se puede escribir como

$$R_l(kr) = \alpha_l \frac{j_l(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} + \beta_l \frac{y_l(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.15})$$

Introduciendo ahora a las funciones de Bessel-Riccati

$$\varphi_l(x) = x j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{A.16})$$

$$\chi_l(x) = -x y_l(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{A.17})$$

se puede reescribir R como

$$R_l(kr) = \alpha_l \frac{\varphi_l(kr)}{kr} - \beta_l \frac{\chi_l(kr)}{kr}. \quad (\text{A.18})$$

La solución general de la ecuación (A.1) se puede ver como la combinación lineal de las ecuaciones encontradas

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l (\alpha_l j_l(kr) + \beta_l y_l(kr)) Y_l^m(\theta, \varphi), \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\alpha_l \frac{\varphi_l(kr)}{kr} - \beta_l \frac{\chi_l(kr)}{kr} \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

en general para cada l y m

$$\psi_l^m(r, \theta, \varphi) = Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{A.19})$$

donde Z_l puede ser la parte que depende de j_l o y_l .

Las soluciones vectoriales están dadas en términos de los armónicos esféricos vectoriales

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_l^m &= \nabla \Psi_l^m, \\ &= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \Psi_l^m + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_l^m, \\ &= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} Z_l(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin(\theta)} Z_l(kr) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_l^m &= \mathbf{L}_l^m \times \mathbf{r}, \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ L_{lr}^m & L_{l\theta}^m & L_{l\varphi}^m \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\
 &= L_{l\varphi}^m r \hat{\mathbf{e}}_\theta - L_{l\theta}^m \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\
 &= \frac{Z_l(kr)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\theta - Z_l(kr) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_l^m &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_l^m, \\
 &= \frac{1}{k} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} (M_{l\varphi}^m \sin(\theta)) - \frac{\partial M_{l\theta}^m}{\partial \varphi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r \sin(\theta)} \right. \\
 &\quad + \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial M_{lr}^m}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\varphi}^m) \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\theta}^m) - \frac{\partial M_{lr}^m}{\partial \varphi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r} \right], \\
 &= \frac{1}{k} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} (M_{l\varphi}^m \sin(\theta)) - \frac{\partial M_{l\theta}^m}{\partial \varphi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r \sin(\theta)} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\varphi}^m) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\theta}^m) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r} \right].
 \end{aligned}$$

Ahora pasamos a calcular las componentes de \mathbf{N}_l^m

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\theta}^m) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{Z_l(kr)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \right), \\
 &= \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)), \\
 &\Rightarrow \\
 N_{l\varphi}^m &= \frac{1}{kr \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\varphi}^m) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) Z_l(kr) \right), \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)), \\
 &\Rightarrow \\
 N_{l\theta}^m &= \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi).
 \end{aligned}$$

La componente $N_{l,r}^m$ se calcula considerando las expresiones sin desarrollar de \mathbf{M}_l^m en términos de Ψ_l^m , así

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_l^m &= L_{l\varphi}^m r \hat{\mathbf{e}}_\theta - L_{l\theta}^m r \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\ &= \frac{r}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_l^m \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{r}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_l^m \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \hat{\mathbf{e}}_\varphi,\end{aligned}$$

con esto

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}_l^m)_r &= \left(\frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_l^m \right)_r = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (M_{l\varphi}^m \sin(\theta)) - \frac{\partial M_{l\theta}^m}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r \sin(\theta)}, \\ &= \frac{1}{rk \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \sin(\theta) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_l^m \right) \right), \\ &= -\frac{1}{rk \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial \varphi^2} \right), \\ &= -\frac{r}{k} \left(\frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{A.20})\end{aligned}$$

Notemos que de la expresión del laplaciano en coordenadas esféricas para una función escalar ζ , se tiene

$$\nabla^2 \zeta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{A.21})$$

que podemos sustituir en (A.20) por el laplaciano de Ψ_l^m menos la parte que depende de r , así y ya metiendo el signo correspondiente queda

$$(\mathbf{N}_l^m)_r = \frac{r}{k} \left(-\nabla^2 \Psi_l^m + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right) \right),$$

pero de (A.1) tenemos: $\nabla^2 \Psi_l^m = -k^2 \Psi_l^m$, con lo que

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{N}_l^m)_r &= \frac{r}{k} \left(-k^2 \Psi_l^m + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right) \right), \\
 &= kr \Psi_l^m + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right), \\
 &= kr \Psi_l^m + \frac{1}{kr} \left(2r \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial r^2} \right), \\
 &= \frac{1}{k} \left(2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial r^2} \right) + kr \Psi_l^m, \\
 &\stackrel{N.1}{=} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi_l^m) + k^2 r \Psi_l^m \right), \\
 &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r Z_l(kr)) + k^2 r Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \\
 &\stackrel{(A.19)}{=} \frac{1}{k} \left(2 \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 Z_l(kr)}{\partial r^2} + k^2 r Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \\
 &\stackrel{N.2}{=} \frac{1}{kr} \left(2r \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 Z_l(kr)}{\partial r^2} + k^2 r^2 Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \\
 &\stackrel{(A.8)}{=} \frac{1}{kr} \left(\cancel{2r \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r}} - \cancel{2r \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r}} - [\cancel{k^2 r^2} - l(l+1)] Z_l(kr) \right. \\
 &\quad \left. + \cancel{k^2 r^2} Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \varphi),
 \end{aligned}$$

Nota 1.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi_l^m) \\
 &= \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Psi_l^m + r \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right. \\
 &\quad \left. + r \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial r^2} \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial r^2} \right)
 \end{aligned}$$

Nota 2.

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r Z_l) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(Z_l + r \frac{\partial Z_l}{\partial r} \right) \\
 &= 2 \frac{\partial Z_l}{\partial r} + r \frac{\partial^2 Z_l}{\partial r^2}
 \end{aligned}$$

con lo que se tendría

$$(\mathbf{N}_l^m)_r = \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Definimos a los armónicos esféricos vectoriales como

$$\mathbf{Z}_{lm} = Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (A.22a)$$

$$\mathbf{Y}_{lm} = r \nabla Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (A.22b)$$

$$\mathbf{X}_{lm} = \nabla Y_l^m(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}. \quad (A.22c)$$

Desarrollemos las expresiones para \mathbf{Y}_{lm} y \mathbf{X}_{lm}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{lm} &= \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} Y_l^m(\theta, \varphi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \right) r, \\
 &= \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \right) r, \\
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_l^m &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned}$$

Notemos que podemos reescribir a \mathbf{L}_l^m , \mathbf{M}_l^m y \mathbf{N}_l^m en términos de los armónicos esféricos vectoriales, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_l^m &= \frac{\partial}{\partial r} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{Z_l(kr)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad + \frac{Z_l(kr)}{r} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\ &= \frac{\partial}{\partial r} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{Z_l(kr)}{r} \mathbf{Y}_l^m. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l^m &= Z_l(kr) \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \right), \\ &= Z_l(kr) \mathbf{X}_{lm}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l^m &= \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{kr \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\ &= \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} \\ &\quad + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \right), \\ &= \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} \\ &\quad + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \right), \\ &= \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) (\nabla Y_l^m(\theta, \varphi)), \\ &= \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) (r \nabla Y_l^m(\theta, \varphi)), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

con lo que

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm}.$$

Así la solución general de la versión vectorial de la ecuación (A.1), $\nabla^2 \mathbf{c}(\mathbf{x}) + k^2 \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0$, estará dada por

$$\mathbf{c}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m \mathbf{L}_l^m(r, \theta, \varphi) + \beta_l^m \mathbf{M}_l^m(r, \theta, \varphi) + \gamma_l^m \mathbf{N}_l^m(r, \theta, \varphi),$$

donde $\alpha_l^m, \alpha_l^m, \alpha_l^m \in \mathbb{C}$ y son constantes.

Por otra parte, $\mathbf{L}_l^m, \mathbf{M}_l^m$ y \mathbf{N}_l^m cumplen que

$$\nabla \times \mathbf{L}_l^m = 0, \quad (\text{A.26a})$$

$$\nabla \times \mathbf{M}_l^m = 0, \quad (\text{A.26b})$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_l^m = 0, \quad (\text{A.26c})$$

$$\mathbf{M}_l^m = \mathbf{L}_l^m \times \mathbf{r}, \quad (\text{A.26d})$$

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_l^m, \quad (\text{A.26e})$$

$$\mathbf{M}_l^m = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}_l^m. \quad (\text{A.26f})$$

A.1.1 Soluciones al campo electromagnético en microesferas

Para soluciones de carácter solenoidal, basta expresar al campo en términos de \mathbf{M}_l^m y \mathbf{N}_l^m y se encuentran dos tipos de soluciones

- Transversal Eléctrica (TE), donde \mathbf{E} es colineal a \mathbf{M}_l^m

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = A_{i/o}^{\text{TE}} \mathbf{M}_l^m,$$

donde $A_{i/o}^{\text{TE}}$ es una amplitud compleja, i refiere a dentro de la esfera (*inside*) y o fuera de ella (*outside*).

- Transversal Magnética (TM) donde \mathbf{E} es colineal a \mathbf{N}_l^m

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = A_{i/o}^{\text{TM}} \mathbf{M}_l^m,$$

donde $A_{i/o}^{\text{TM}}$ es una amplitud compleja, con la notación siguiendo el esquema ya descrito.

Para el campo magnético, $\underline{\mathbf{B}} \stackrel{\text{N.3}}{=} \frac{i}{\omega} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}$, así en el caso TE

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi) &= \frac{i}{\omega} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}, \\ &= \frac{i}{\omega} A_{i/o}^{\text{TE}} \nabla \times \mathbf{M}_l^m, \\ &\stackrel{(\text{A.26e})}{=} \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{\text{TE}} \mathbf{N}_l^m; \end{aligned}$$

y en el caso TM

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \theta, \varphi) &= \frac{i}{\omega} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}, \\ &= \frac{i}{\omega} A_{i/o}^{\text{TM}} \nabla \times \mathbf{N}_l^m, \\ &\stackrel{(\text{A.26f})}{=} \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{\text{TM}} \mathbf{M}_l^m. \end{aligned}$$

Nota 3.

$$\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ &\Rightarrow \\ &e^{i\omega t} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \\ &+ i\omega \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} = 0 \\ &\Rightarrow \\ &\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{i}{\omega} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Notemos que N_l^m y M_l^m se pueden expresar en términos de funciones Bessel-Riccati, a través de las ecuaciones (A.16) y (A.17), sin embargo hemos de notar el comportamiento de estas, para φ_l valen cero en $x = 0$ mientras que χ_l diverge en $x = 0$. Requerimos una solución no divergente dentro de la esfera y una que decaiga a cero (o no diverja fuera), luego dentro de la esfera nos sirve φ_l , mientras que fuera χ_l , o j_l dentro y y_l fuera.

Pasemos a expandir las expresiones del campo, en el caso TE para el campo eléctrico

$Z_l \rightarrow r_l$
salvo por el signo, ver
(A.16) a (A.18).
 r_l es el Riccati-Bessel
correspondiente

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) \stackrel{(A.24)}{=} A_{i/o}^{\text{TE}} Z_l(kr) \mathbf{X}_{lm}, \quad (\text{A.27})$$

por las consideraciones anteriores

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{cases} A_i^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r \leq R, \\ -A_o^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(k_0r)}{k_0r} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

$Z_l(kr) = \frac{r_l(kr)}{kr}$

Mientras que para el campo magnético

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{B}}(r, \theta, \varphi) &\stackrel{(A.25)}{=} \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{kr} \frac{r_l(kr)}{kr} \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right), \\ &= \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} r_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

k_0 ya que no valen
las condiciones
internas de la esfera,
sino las de su
exterior que
igualamos al vacío

por las consideraciones ya expuestas

$$\underline{\mathbf{B}}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{ik}{\omega} A_i^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \varphi_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r \leq R, \\ -\frac{ik_0}{\omega} A_o^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \chi_l(k_0r) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k_0r} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0r)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Ahora para el caso TM del campo eléctrico

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) \stackrel{(A.25)}{=} A_{i/o}^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} r_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right), \quad (\text{A.31})$$

nuevamente por las consideraciones ya explicadas

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} A_i^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \varphi_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r \leq R, \\ -A_o^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \chi_l(k_0r) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k_0r} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0r)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r > R; \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

y para el campo magnético

$$\underline{\mathbf{B}}(r, \theta, \varphi) \stackrel{(A.24)}{=} \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{TE} r_l(kr) \mathbf{X}_{lm}, \quad (A.33)$$

y por lo anteriormente expuesto

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{cases} \frac{ik}{\omega} A_i^{TE} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r \leq R, \\ -\frac{ik_0}{\omega} A_o^{TE} \frac{\varphi_l(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (A.34)$$

A.1.2 Ecuaciones modales

Falta ahora tomar en cuenta las condiciones a la frontera en la interfaz de la esfera. Atendiendo a las condiciones de continuidad para las ecuaciones de Maxwell en un medio isotrópico, lineal y homogéneo, ha de suceder que (en la frontera de medios)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\ \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \rho_s, \\ \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} &= -\mathbf{j}_\Sigma, \end{aligned}$$

donde \mathbf{j}_Σ es la densidad de corriente superficial, ρ_s la densidad superficial de carga y $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal a la superficie. Para el caso dieléctrico que nos ocupa $\rho_s = 0$ y $\mathbf{j}_\Sigma = 0$ en $r = R$ (el radio de la esfera), con lo que se tiene

$$\mathbf{E}(R, \theta, \varphi) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{o}, \quad (A.35a)$$

$$\mathbf{B}(R, \theta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0, \quad (A.35b)$$

$$\mathbf{E}(R, \theta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0, \quad (A.35c)$$

$$\mathbf{B}(R, \theta, \varphi) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{o}, \quad (A.35d)$$

estas condiciones valen en general para cualquier interfaz bajo estas consideraciones.

A.1.2.1 Ecuación modal para modos TE

Notemos las expresiones (A.27) y (A.29) de los campos

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) &= A_{i/o}^{TE} Z_l(kr) \mathbf{X}_{lm}, \\ \underline{\mathbf{B}}(r, \theta, \varphi) &= \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{TE} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} r_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right). \end{aligned}$$

La condición (A.35c) implica que $\mathbf{X}_{lm} \perp \hat{\mathbf{e}}_r$, por otra parte, (A.35a) ha de cumplirse siempre, lo que implica que

$$A_{i/o}^{\text{TE}} Z_l(kR) = A_{i/o}^{\text{TE}} \frac{r_l(kR)}{kR} = 0, \quad (\text{A.36})$$

y ha de satisfacerse a ambos lados de la frontera

$$A_i^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kR)}{kR} = -A_o^{\text{TE}} \frac{\chi_l(k_o R)}{k_o R}. \quad (\text{A.37})$$

La condición (A.35b) sobre la expresión de \mathbf{B} implica que

$$\begin{aligned} \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{\text{TE}} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 R^2} r_l(kR) \mathbf{Z}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \right) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, \\ A_{i/o}^{\text{TE}} \frac{l(l+1)}{kR^2} r_l(kR) \mathbf{Z}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{A_{i/o}^{\text{TE}}}{R} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, \\ \frac{l(l+1)}{R} \underbrace{A_{i/o}^{\text{TE}} \frac{r_l(kR)}{kR}}_{\stackrel{(\text{A.36})}{=0}} \mathbf{Z}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{A_{i/o}^{\text{TE}}}{R} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, \\ A_{i/o}^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, \end{aligned}$$

como ha de valer sobre cualquier punto sobre la frontera, entonces

$$A_{i/o}^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} = 0,$$

y se ha de cumplir a ambos lados de la frontera con lo que

$$A_i^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_l(kr) \Big|_{r=R} = A_o^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial r} \chi_l(kr) \Big|_{r=R}. \quad (\text{A.38})$$

Se tiene además que (A.37) y (A.38) forman un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_i^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kR)}{kR} + \frac{\chi_l(k_o R)}{k_o R} A_o^{\text{TE}} = 0, & (\text{A.39a}) \\ A_i^{\text{TE}} \varphi_l'(kR) + A_o^{\text{TE}} \chi_l'(k_o R) = 0. & (\text{A.39b}) \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales si el determinante del sistema es cero, donde las variables a resolver son A_i^{TE} y A_o^{TE} , las amplitudes de campo dentro y fuera. Así el determinante de (A.39) queda

$$\frac{\varphi_l(kR)}{kR} \chi_l'(k_o R) - \frac{\chi_l(k_o R)}{k_o R} \varphi_l'(kR) = 0,$$

Usaremos de aquí en adelante el abuso de notación

$$r_l'(rk) \Big|_{r=R} = r_l'(kR)$$

donde sea necesario.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_l(kR) k_o R}{kR \varphi_l'(kR)} &= \frac{\chi_l(k_o R)}{\chi_l'(k_o R)}, \\ \frac{k_o}{k} \frac{\varphi_l(kR)}{\varphi_l'(kR)} &= \frac{\chi_l(k_o R)}{\chi_l'(k_o R)}, & (\text{A.40}) \end{aligned}$$

Ecuación modal para modos TE

$$\frac{k_o}{k} \frac{\varphi_l(kR)}{\chi_l(kR)} = \frac{\varphi_l'(k_o R)}{\chi_l'(k_o R)}. \quad (\text{A.41})$$

Despejando (A.39b) para A_o^{TE} se tiene

$$A_o^{TE} = -A_i^{TE} \frac{\varphi_l'(kR)}{\chi_l'(k_0R)},$$

$$A_o^{TE} \stackrel{(A.41)}{=} -A_i^{TE} \frac{k_0}{k} \frac{\varphi_l(kR)}{\chi_l(k_0R)}.$$

A.1.2.2 Ecuación modal para modos TM

Notemos las expresiones (A.31) y (A.33) de los campos

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) = A_{i/o}^{TM} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} r_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right),$$

$$\underline{\mathbf{B}}(r, \theta, \varphi) = \frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{TM} \frac{r_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm},$$

la condición (A.35b) sobre la expresión de $\underline{\mathbf{B}}$ implica que $\mathbf{X}_{lm} \perp \mathbf{e}_r$, por otra parte (A.35d) ha de cumplirse siempre, por lo que

$$\frac{ik}{\omega} A_{i/o}^{TM} Z_l(kR) = 0,$$

$$\Rightarrow A_{i/o}^{TM} \frac{r_l(kR)}{kR} = 0, \quad (A.42)$$

y ha de satisfacerse a ambos lados de la frontera

$$A_i^{TM} \varphi_l(kR) = -A_o^{TM} \chi_l(kR). \quad (A.43)$$

Ya se eliminó kR del denominador por (A.42)

Ahora la condición (A.35a) sobre la expresión de $\underline{\mathbf{E}}$ implica que

$$A_{i/o}^{TM} \left(\frac{l(l+1)}{k^2 r^2} r_l(kR) \mathbf{Z}_{lm} \times \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kR) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \times \hat{\mathbf{e}}_r \right) = 0,$$

$$\frac{l(l+1)}{kR} \underbrace{A_{i/o}^{TM} \frac{r_l(kR)}{kR}}_{\stackrel{(A.42)}{=} 0} \mathbf{Z}_{lm} \times \hat{\mathbf{e}}_r + A_{i/o}^{TM} \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \times \mathbf{e}_r = 0,$$

$$A_{i/o}^{TM} \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} \mathbf{Y}_{lm} \times \mathbf{e}_r = 0.$$

Como ha de valer siempre en la frontera, entonces

$$A_{i/o}^{TM} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} r_l(kr) \Big|_{r=R} = 0,$$

y se debe de cumplir a ambos lados de la frontera

$$A_i^{TM} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_l(kr) \Big|_{r=R} = -A_o^{TM} \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial r} \chi_l(k_0 r) \Big|_{r=R},$$

$$k_0 A_i^{TM} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_l(kr) \Big|_{r=R} = -k A_o^{TM} \frac{\partial}{\partial r} \chi_l(kr) \Big|_{r=R}. \quad (A.44)$$

Las expresiones (A.43) y (A.44) forman un sistema de ecuaciones para A_o^{TM} y A_i^{TM}

$$\begin{cases} A_i^{TM} \varphi_l(kR) + A_o^{TM} \chi_l(k_0R) = 0, & (A.45a) \\ A_i^{TE} k_0 \varphi_l'(kR) + A_o^{TE} k \chi_l'(k_0R) = 0, & (A.45b) \end{cases}$$

que tiene soluciones no triviales si el determinante del sistema es cero. Así el determinante queda

$$k \varphi_l(kR) \chi_l'(k_0R) - k_0 \varphi_l'(kR) \chi_l(k_0R) = 0,$$

así

$$\frac{k \varphi_l(kR)}{k_0 \varphi_l'(kR)} = \frac{\chi_l(k_0R)}{\chi_l'(k_0R)}, \quad (A.46)$$

despejando (A.45b) para A_o^{TM}

$$\begin{aligned} A_o^{TM} &= -\frac{k_0 A_i^{TM} \varphi_l'(kR)}{k \chi_l'(k_0R)}, \\ A_o^{TM} &\stackrel{(A.46)}{=} -\frac{k_0}{k} A_i^{TM} \frac{k \varphi_l(kR)}{k_0 \chi_l(k_0R)}, \end{aligned}$$

así

$$A_o^{TM} = -A_i^{TM} \frac{\varphi_l(kR)}{\chi_l(k_0R)}.$$

Podemos agrupar a (A.40) y (A.46) en una sola expresión

*Ecuación de autovalores
para microesferas*

$$P \frac{\varphi_l'(kR)}{\varphi_l(kR)} = \frac{\chi_l'(k_0R)}{\chi_l(k_0R)}, \quad (A.47)$$

donde

$$P = \begin{cases} \frac{k_0}{k} = \frac{1}{N} & \text{si es TM,} \\ \frac{k}{k_0} = N & \text{si es TE,} \end{cases}$$

con $N = N(\omega)$, el índice de refracción de la esfera.

Podemos abrir la expresión (A.47) empleando las fórmulas (A.16) y (A.17)

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \\ \chi_l(x) &= -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x), \end{aligned}$$

derivamos respecto de x

$$\begin{aligned}\varphi_1'(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J'_{l+\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \\ &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J'_{l+\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x);\end{aligned}\tag{A.48}$$

de forma análoga

$$\chi_1(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y'_{l+\frac{1}{2}}(x) - \sqrt{\frac{\pi}{8x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x),\tag{A.49}$$

y sustituimos (A.48) y (A.49) en la ecuación (A.47), sean $x = kR$ y $x_0 = k_0R$

$$\begin{aligned}P \frac{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} J'_{l+\frac{1}{2}}(x) + \sqrt{\frac{\pi}{8x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)} &= \frac{\sqrt{\frac{\pi x_0}{2}} Y'_{l+\frac{1}{2}}(x_0) + \sqrt{\frac{\pi}{8x_0}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}{\sqrt{\frac{\pi x_0}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}, \\ P \frac{\sqrt{x} J'_{l+\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x} J_{l+\frac{1}{2}}(x)} &= \frac{\sqrt{x_0} Y'_{l+\frac{1}{2}}(x_0) + \frac{1}{2} \sqrt{x_0} Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}{\sqrt{x_0} Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}, \\ P \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(x)}{J_{l+\frac{1}{2}}(x)} + \frac{P}{2x} &= \frac{Y'_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)} + \frac{1}{2x_0}, \\ P \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(x)}{J_{l+\frac{1}{2}}(x)} - \frac{Y'_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)} &= \frac{1}{2x_0} - \frac{P}{2x}, \\ \frac{Y'_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)} - P \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(x)}{J_{l+\frac{1}{2}}(x)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{P}{x} - \frac{1}{x_0} \right),\end{aligned}$$

así

$$\frac{Y'_{l+\frac{1}{2}}(x_0)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(x_0)} - P \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(x)}{J_{l+\frac{1}{2}}(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{x} - \frac{1}{x_0} \right).\tag{A.50}$$

Ahora consideraremos las relaciones de recurrencia^{3 4}

$$J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) = J'_{\nu}(x),$$

$$Y_{\nu-1}(x_0) - \frac{\nu}{x_0} Y_{\nu}(x_0) = Y'_{\nu}(x_0),$$

donde si $\nu = l + 1/2$, quedan

$$J'_{l+1/2}(x) = J_{l-1/2}(x) - \frac{l+1/2}{x} J_{l+1/2}(x), \quad (\text{A.51a})$$

$$Y'_{l+1/2}(x_0) = Y_{l-1/2}(x_0) - \frac{l+1/2}{x_0} Y_{l+1/2}(x_0), \quad (\text{A.51b})$$

y sustituimos las expresiones anteriores en la ecuación (A.50)

$$\frac{Y_{l-1/2}(x_0) - \frac{l+1/2}{x_0} Y_{l+1/2}(x_0)}{Y_{l+1/2}(x_0)} - P \frac{J_{l-1/2}(x) - \frac{l+1/2}{x} J_{l+1/2}(x)}{J_{l+1/2}(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{x} - \frac{1}{x_0} \right),$$

$$\frac{Y_{l-1/2}(x_0)}{Y_{l+1/2}(x_0)} - \frac{l+1/2}{x_0} - P \frac{J_{l-1/2}(x)}{J_{l+1/2}(x)} + P \frac{l+1/2}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{x} - \frac{1}{x_0} \right),$$

$$\frac{Y_{l-1/2}(x_0)}{Y_{l+1/2}(x_0)} - P \frac{J_{l-1/2}(x)}{J_{l+1/2}(x)} = \frac{l+1/2}{x_0} - P \frac{l+1/2}{x},$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{P}{x} - \frac{1}{2x_0},$$

$$= \frac{l}{x_0} + \frac{1}{2x_0} - \frac{Pl}{x},$$

$$- \frac{P}{2x} + \frac{P}{2x} - \frac{1}{2x_0},$$

$$= l \left(\frac{1}{x_0} - \frac{P}{x} \right),$$

con lo que

$$\frac{Y_{l-1/2}(k_0 R)}{Y_{l+1/2}(k_0 R)} - P \frac{J_{l-1/2}(kR)}{J_{l+1/2}(kR)} = l \left(\frac{1}{k_0 R} - \frac{P}{kR} \right),$$

3 De la fórmula (14.12) de [98]

$$J_n(x) = \pm J'_{n\pm 1}(x) + \frac{n \pm 1}{x} J_{n\pm 1}(x)$$

si $n = \nu - 1$

$$J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) = J'_{\nu}(x)$$

4 De [98, pág. 672] $\frac{Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x)}{+ Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) = 2Y'_n(x)}$ simplificando y ordenando da

$$\frac{2Y_{n-1}}{2Y_{n-1}} = \frac{2n}{x} Y_n(x) + 2Y'_n(x)$$

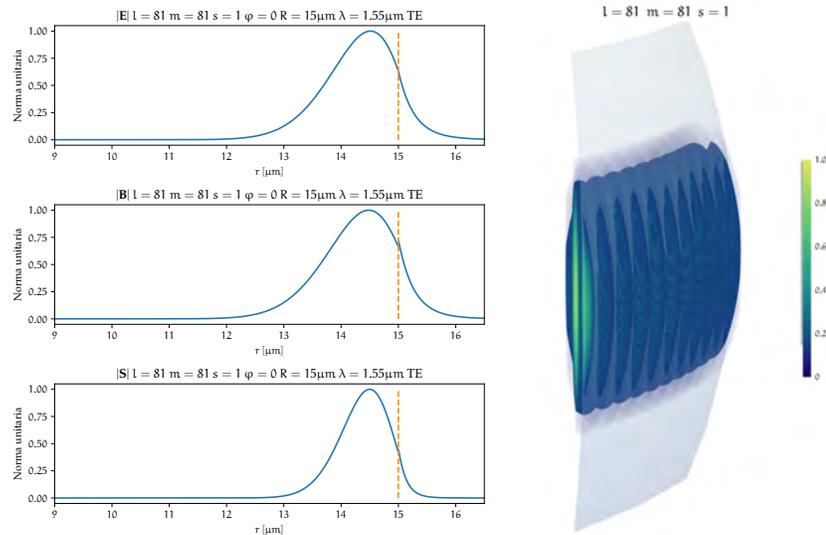
$$Y_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x) = Y'_n(x).$$

así es que buscaremos los ceros tanto en ω (o para λ) y l que resuelvan a la ecuación

$$\frac{Y_{l-\frac{1}{2}}(k_0 R)}{Y_{l+\frac{1}{2}}(k_0 R)} - P \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(kR)}{J_{l+\frac{1}{2}}(kR)} - l \left(\frac{1}{k_0 R} - \frac{P}{kR} \right) = 0. \quad (\text{A.52})$$

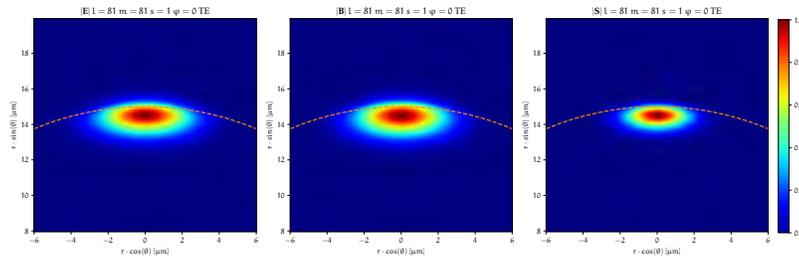
FIGURAS ADICIONALES

B.1 GRÁFICAS MODALES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PARA MICROESFERAS



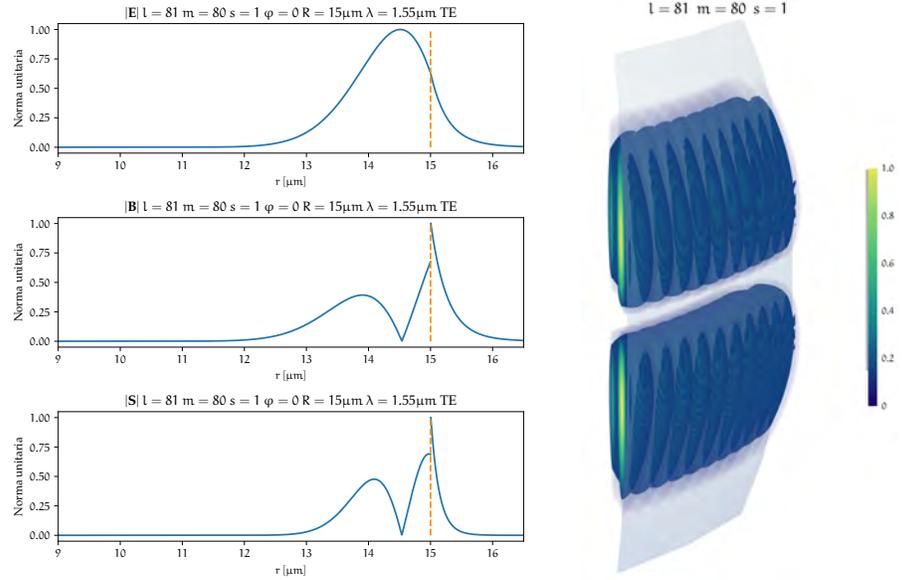
(a) Dependencia radial de la norma de los campos.

(b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).

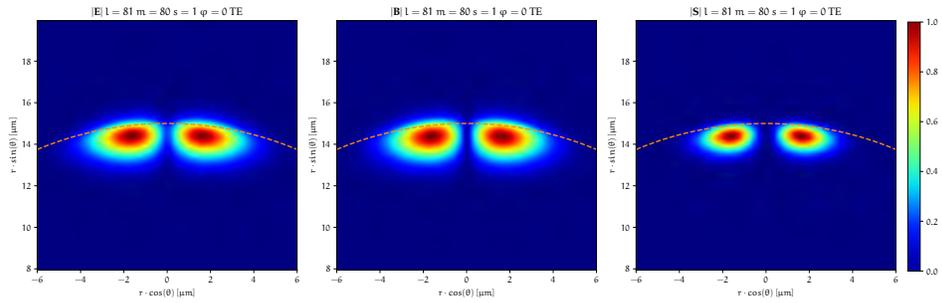


(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.1: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.1c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.1a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.1b es un corte al rededor del ecuador de la esfera. Se indican en las barras de color la escalas correspondientes a las normas del campo.



(a) Dependencia radial de la norma de los campos. (b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).



(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.2: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.2c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.2a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.2b es un corte al rededor del ecuador de la esfera. Se indican en las barras de color las escalas correspondientes a las normas del campo.

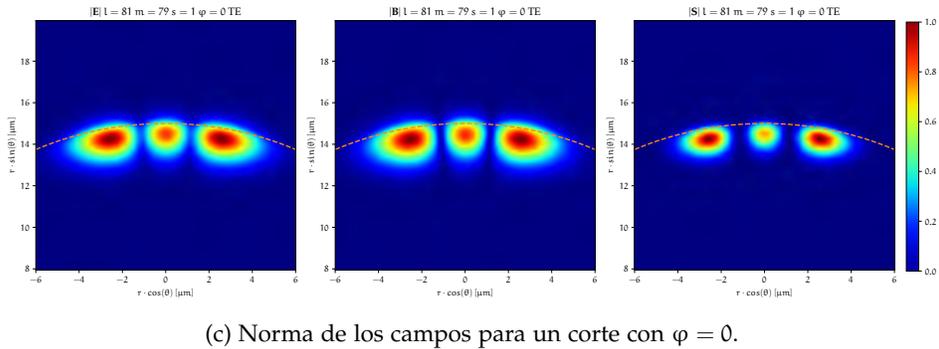
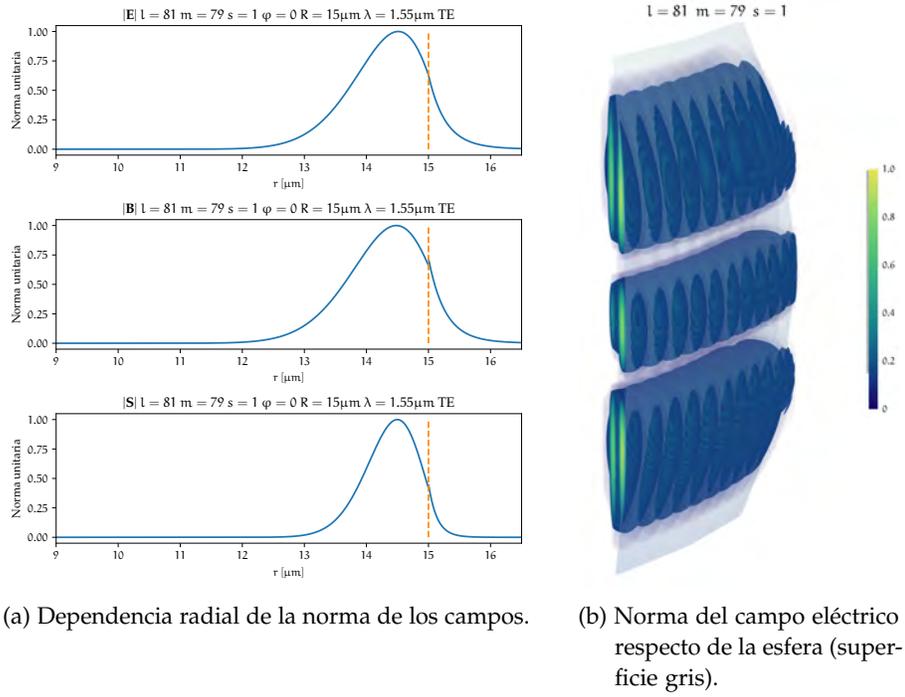
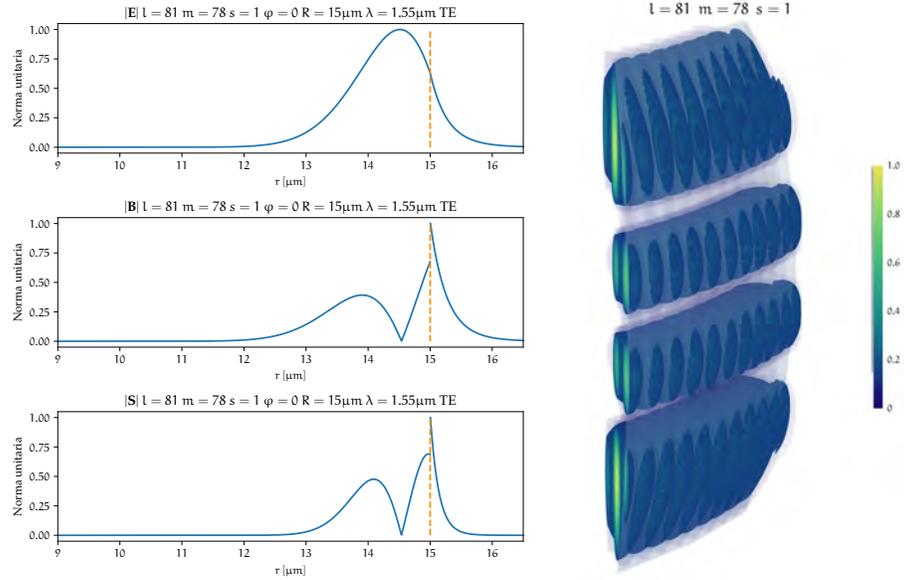
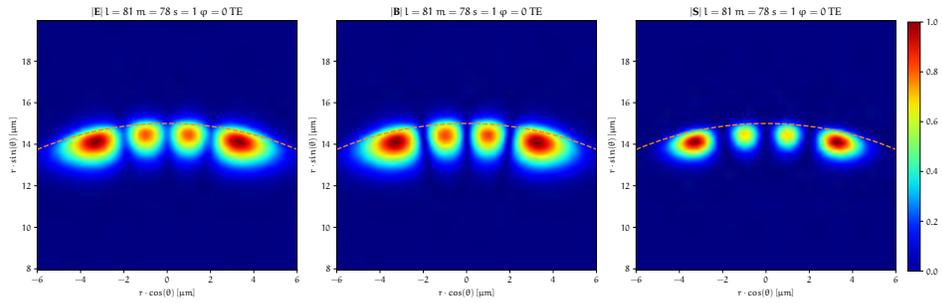


Figura B.3: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.3c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.3a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.3b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color la escalas correspondientes a las normas del campo.

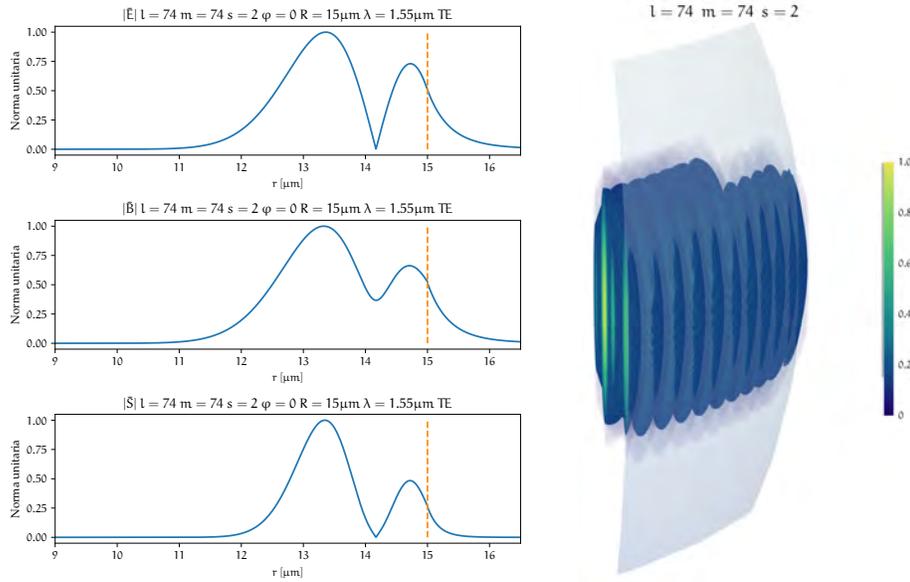


(a) Dependencia radial de la norma de los campos. (b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).



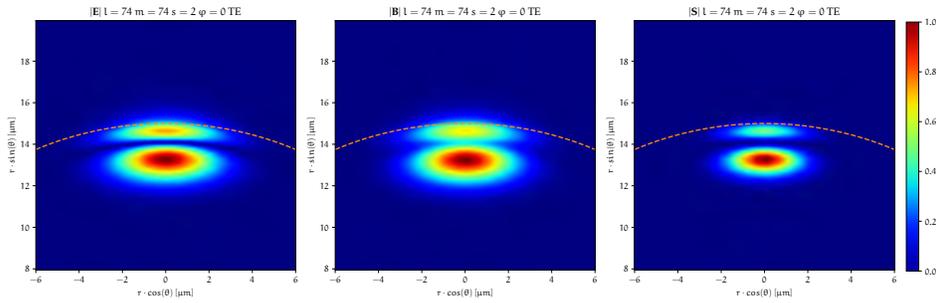
(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.4: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.4c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.4a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.4b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color las escalas correspondientes a las normas del campo.



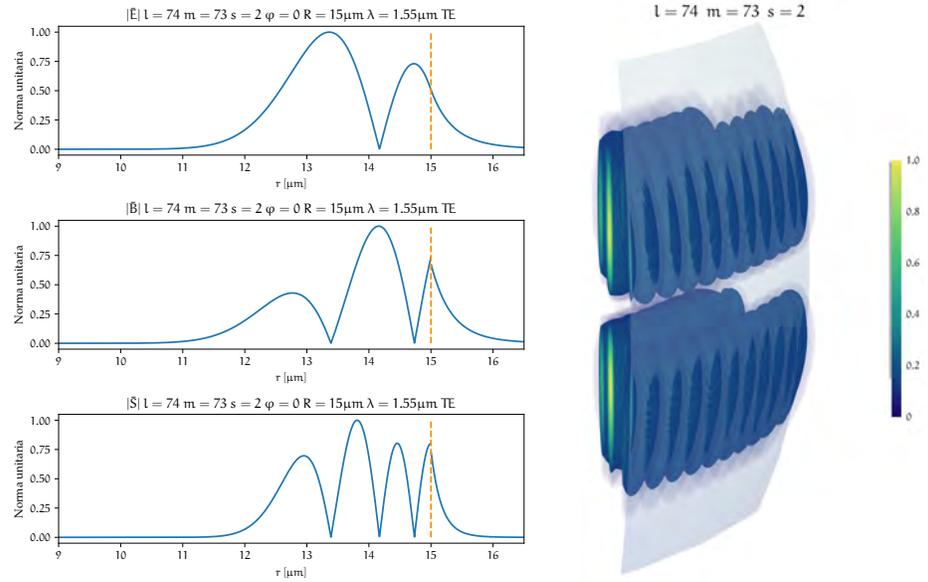
(a) Dependencia radial de la norma de los campos.

(b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).

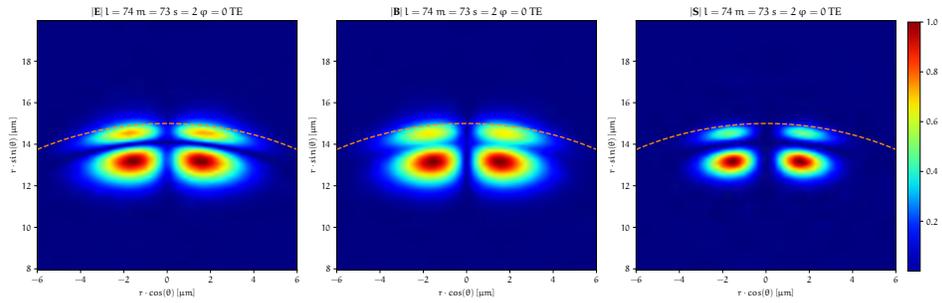


(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.5: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.5c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.5a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.5b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color la escalas correspondientes a las normas del campo.

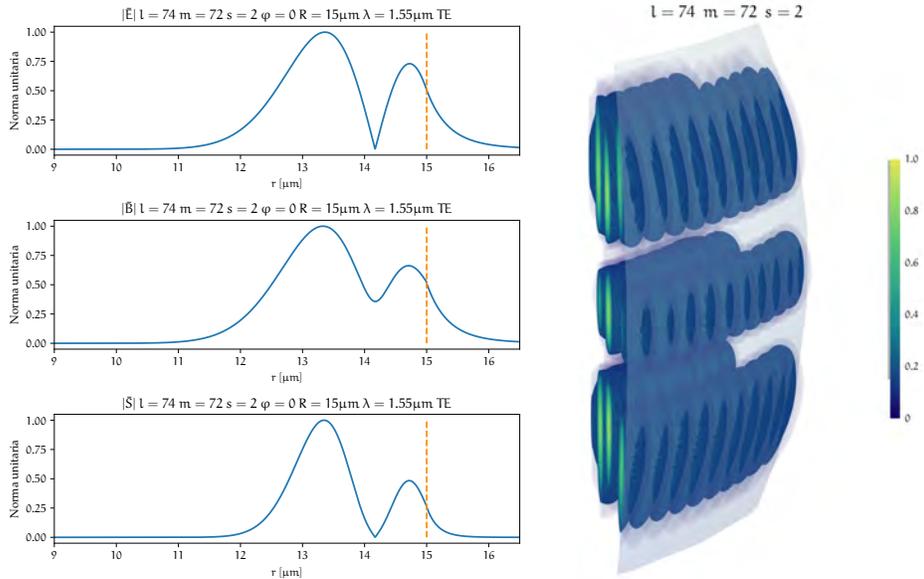


(a) Dependencia radial de la norma de los campos. (b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).



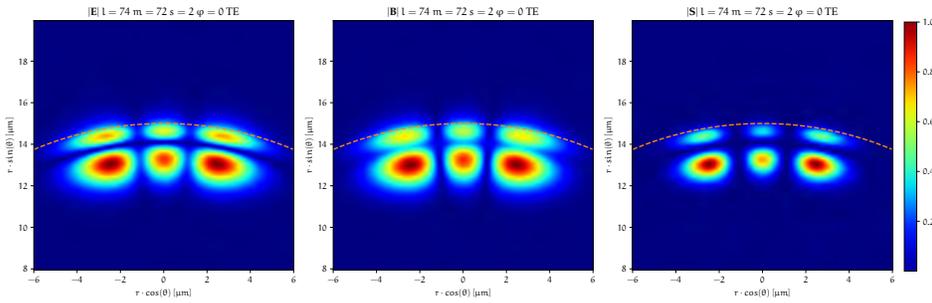
(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.6: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.6c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.6a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.6b es un corte al rededor del ecuador de la esfera. Se indican en las barras de color las escalas correspondientes a las normas del campo.



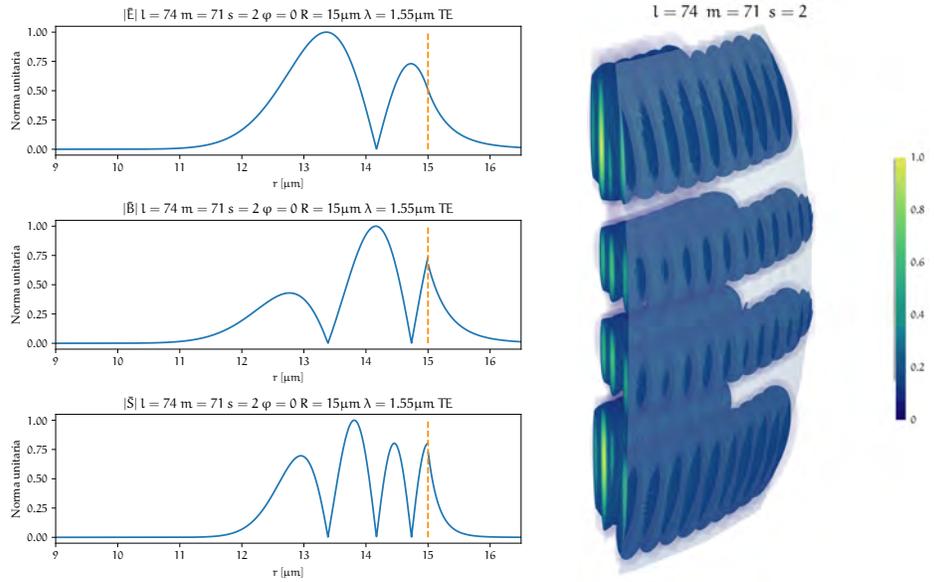
(a) Dependencia radial de la norma de los campos.

(b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).

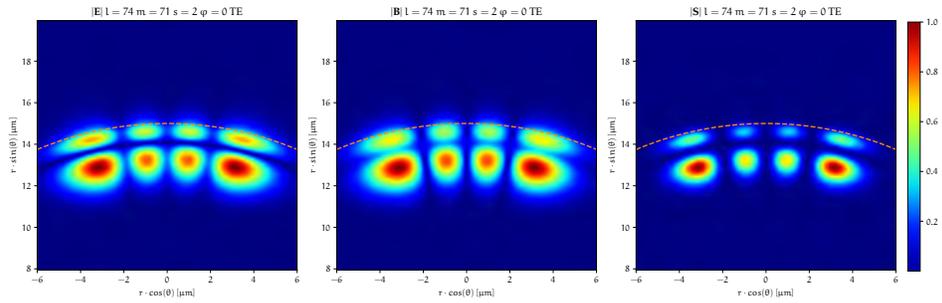


(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.7: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.7c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.7a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.7b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color la escalas correspondientes a las normas del campo.

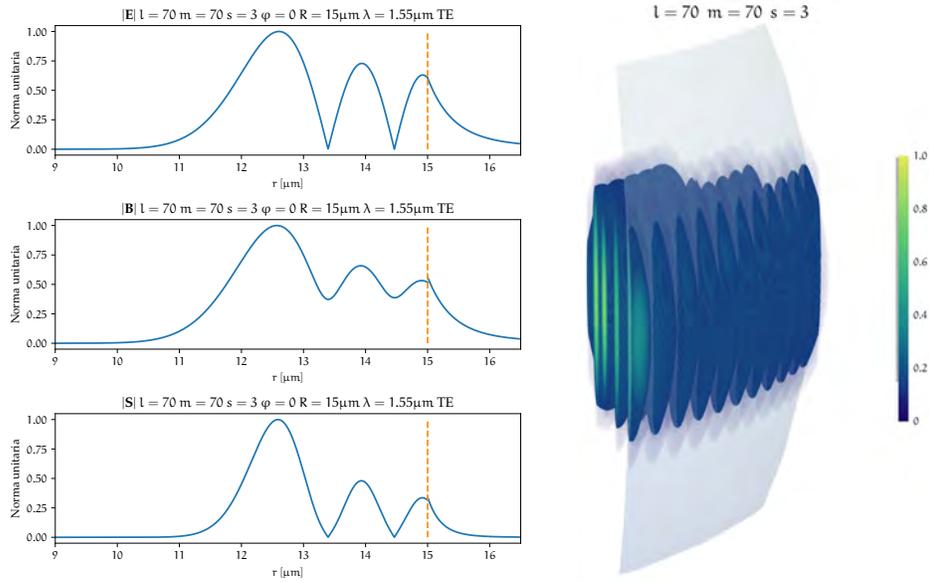


(a) Dependencia radial de la norma de los campos. (b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).



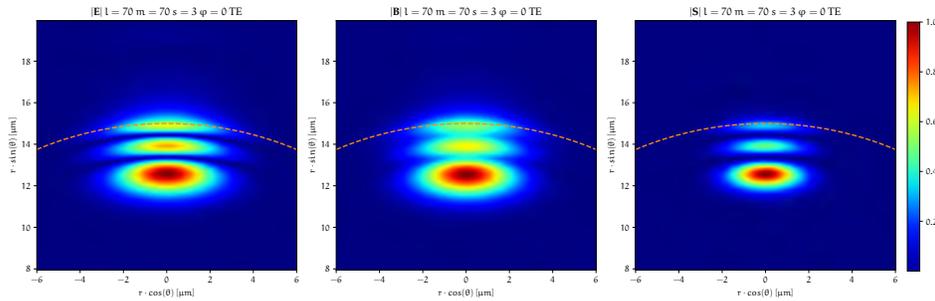
(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.8: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.8c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.8a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.8b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color las escalas correspondientes a las normas del campo.



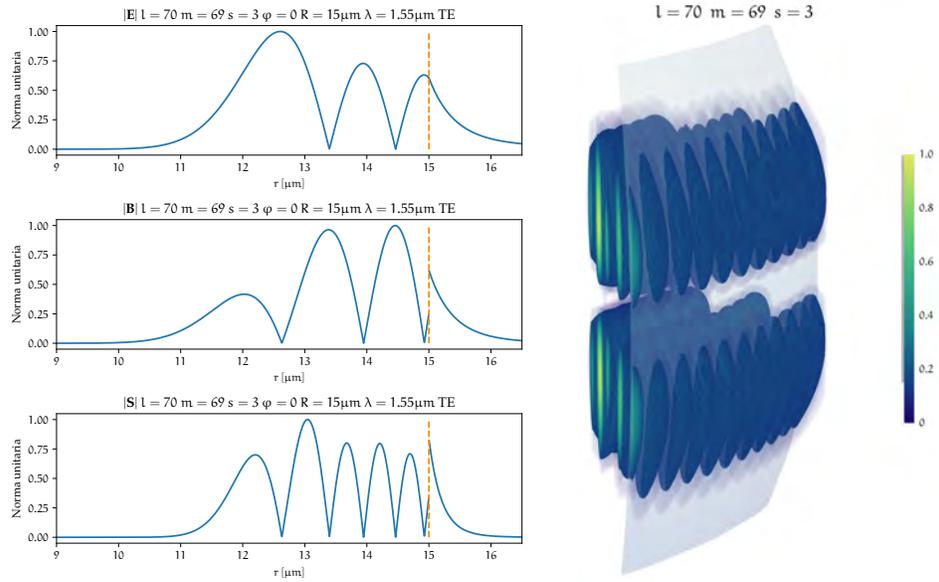
(a) Dependencia radial de la norma de los campos.

(b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).

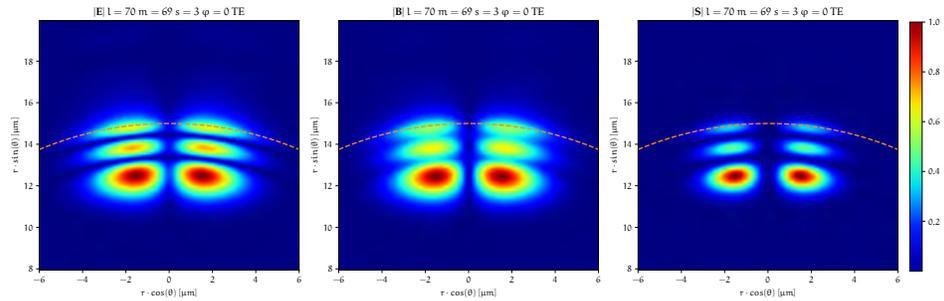


(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.9: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.9c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.9a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.9b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color la escalas correspondientes a las normas del campo.

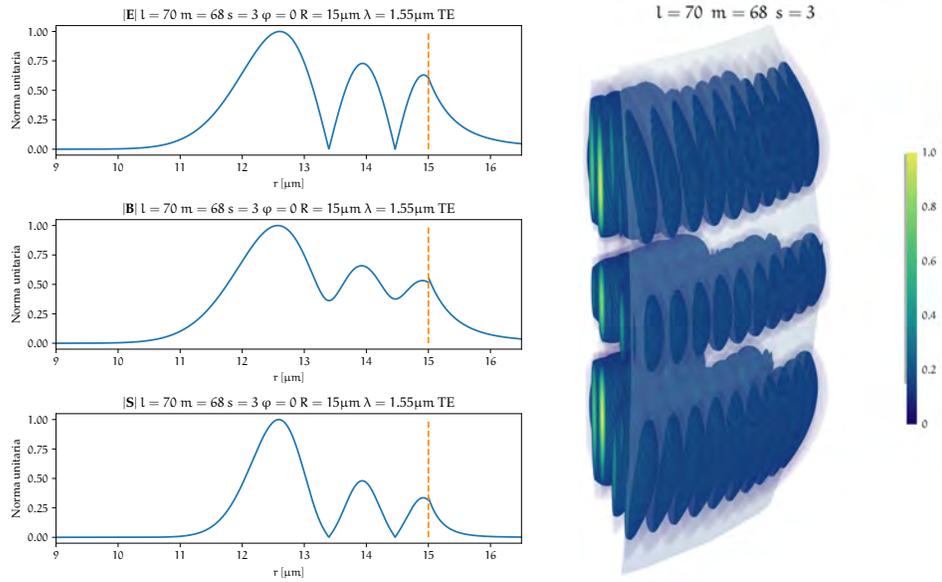


(a) Dependencia radial de la norma de los campos. (b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).



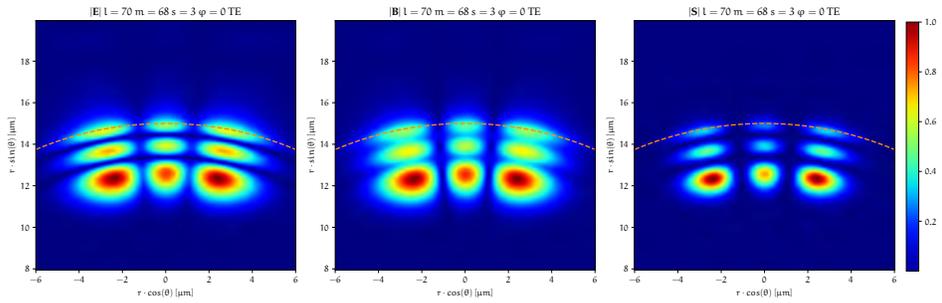
(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.10: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.10c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.10a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.10b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color las escalas correspondientes a las normas del campo.



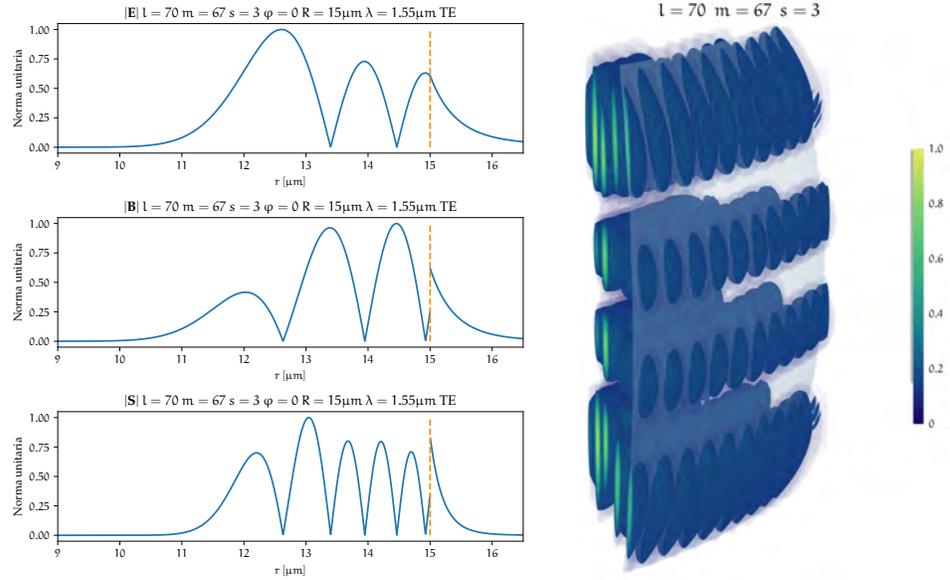
(a) Dependencia radial de la norma de los campos.

(b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).



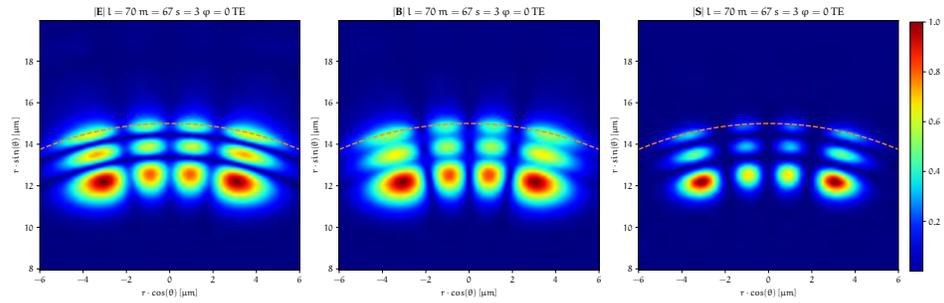
(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.11: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.11c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.11a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.11b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color la escalas correspondientes a las normas del campo.



(a) Dependencia radial de la norma de los campos.

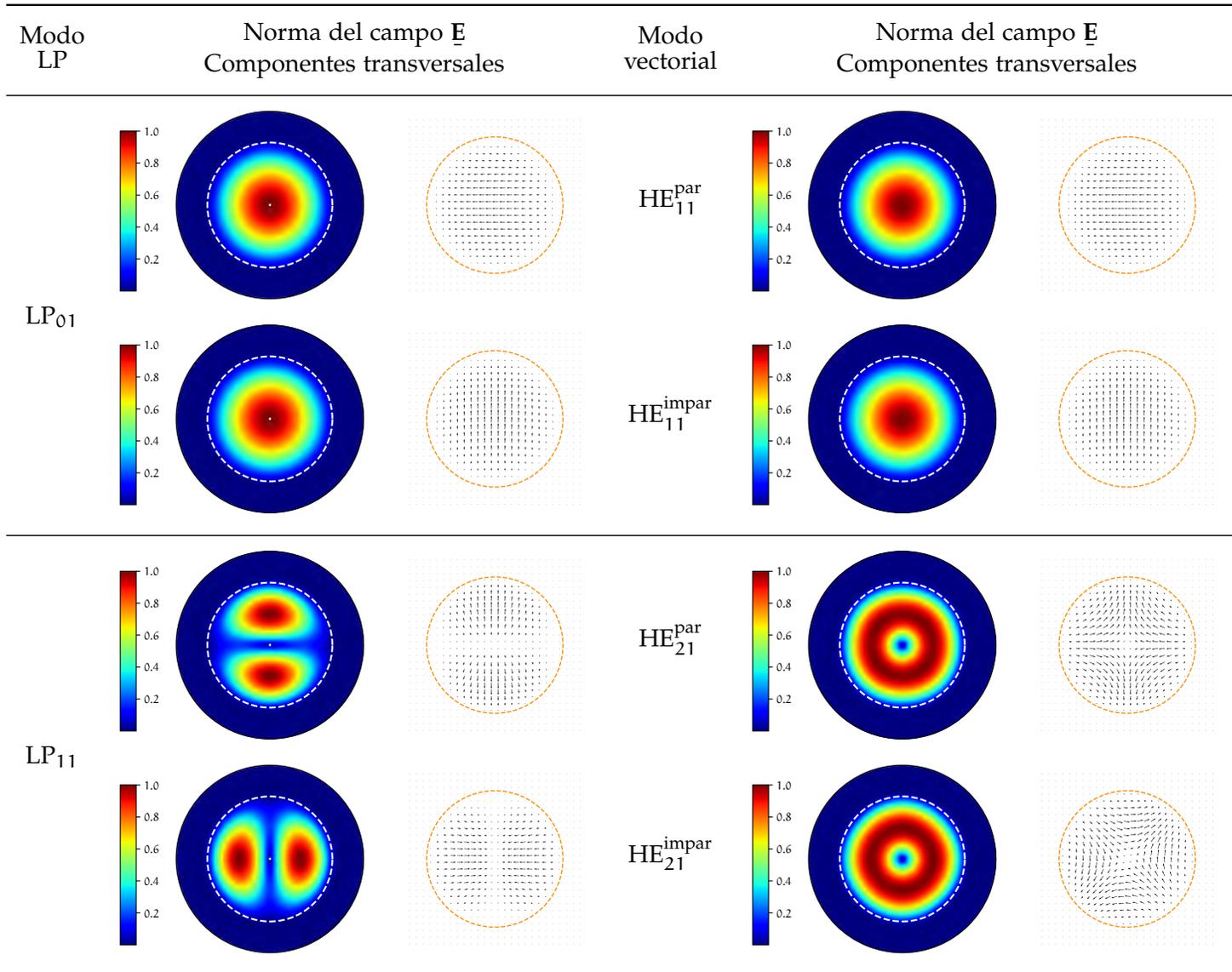
(b) Norma del campo eléctrico respecto de la esfera (superficie gris).

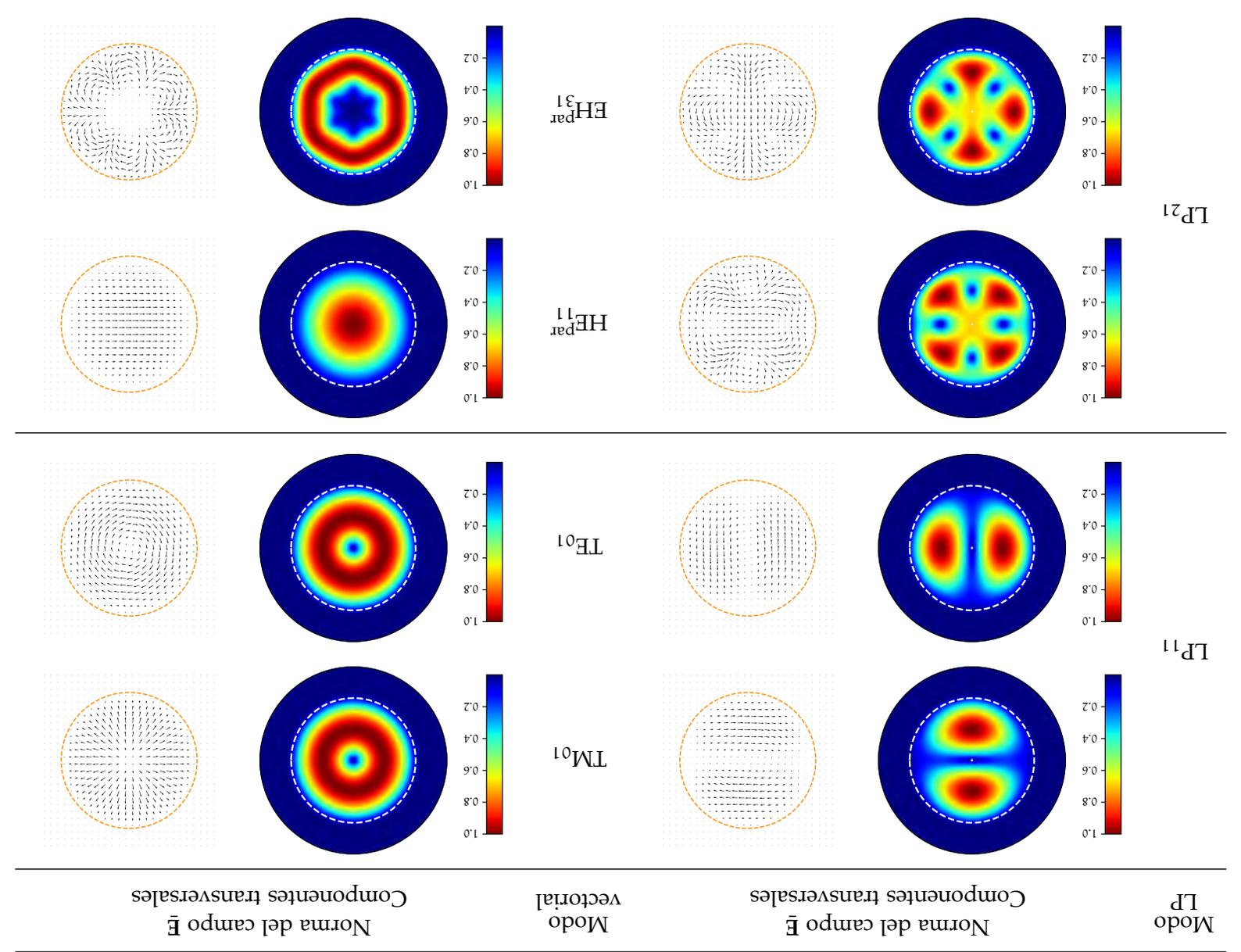


(c) Norma de los campos para un corte con $\varphi = 0$.

Figura B.12: Se indican en el título de la gráfica los índices l , m y s correspondientes. El radio de la esfera se indica con una línea punteada anaranjada en la figura B.12c. La discontinuidad en el campo magnético como se muestra en la figura B.12a, se debe a que es el campo transversal a la superficie dieléctrica el que se mantiene continuo, para un modo TE, es el campo eléctrico. La figura B.12b es un corte al rededor del ecuador de la esfera.. Se indican en las barras de color las escalas correspondientes a las normas del campo.

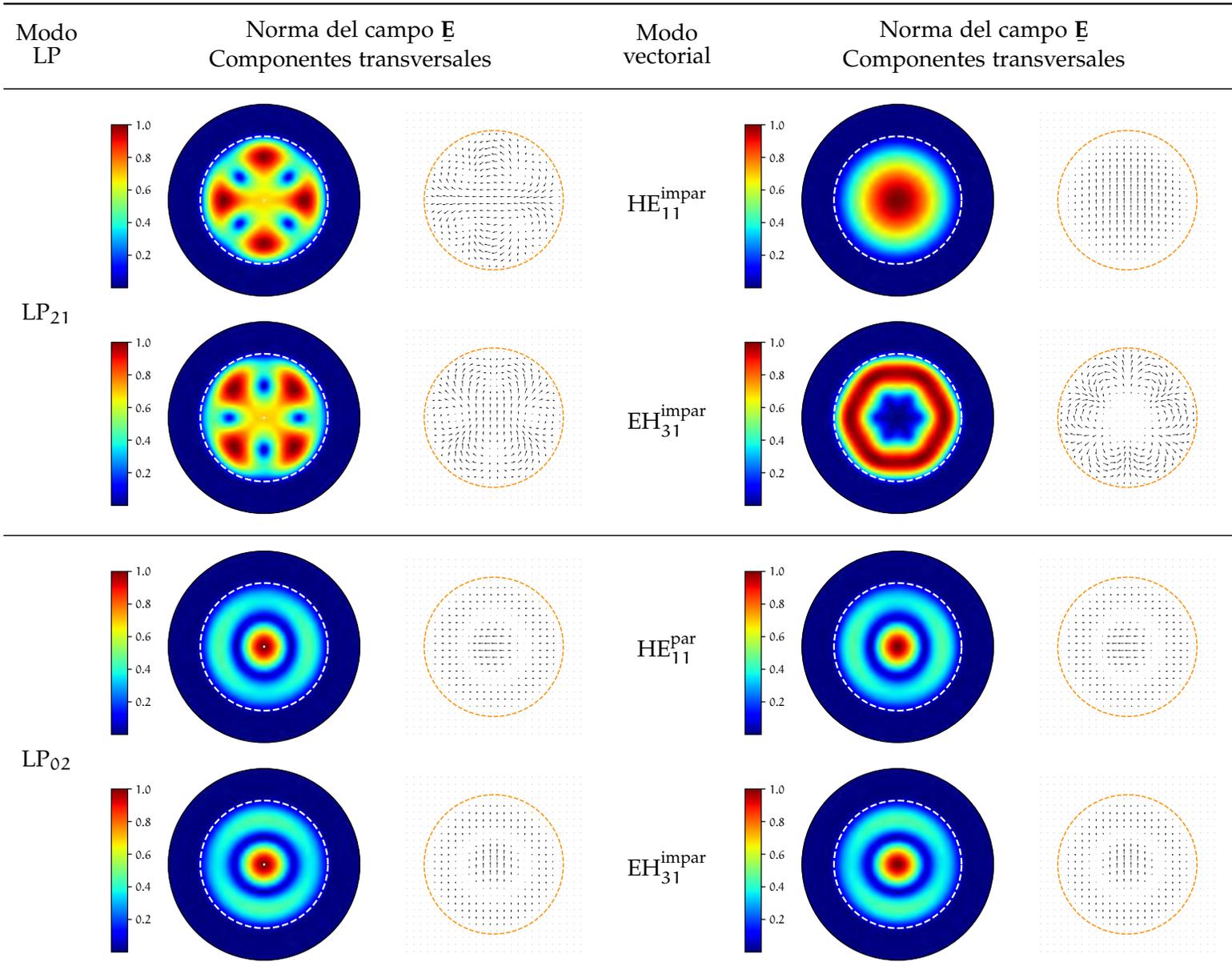
B.2 GRÁFICAS MODALES LP DEL CAMPO ELÉCTRICO PARA FIBRAS.

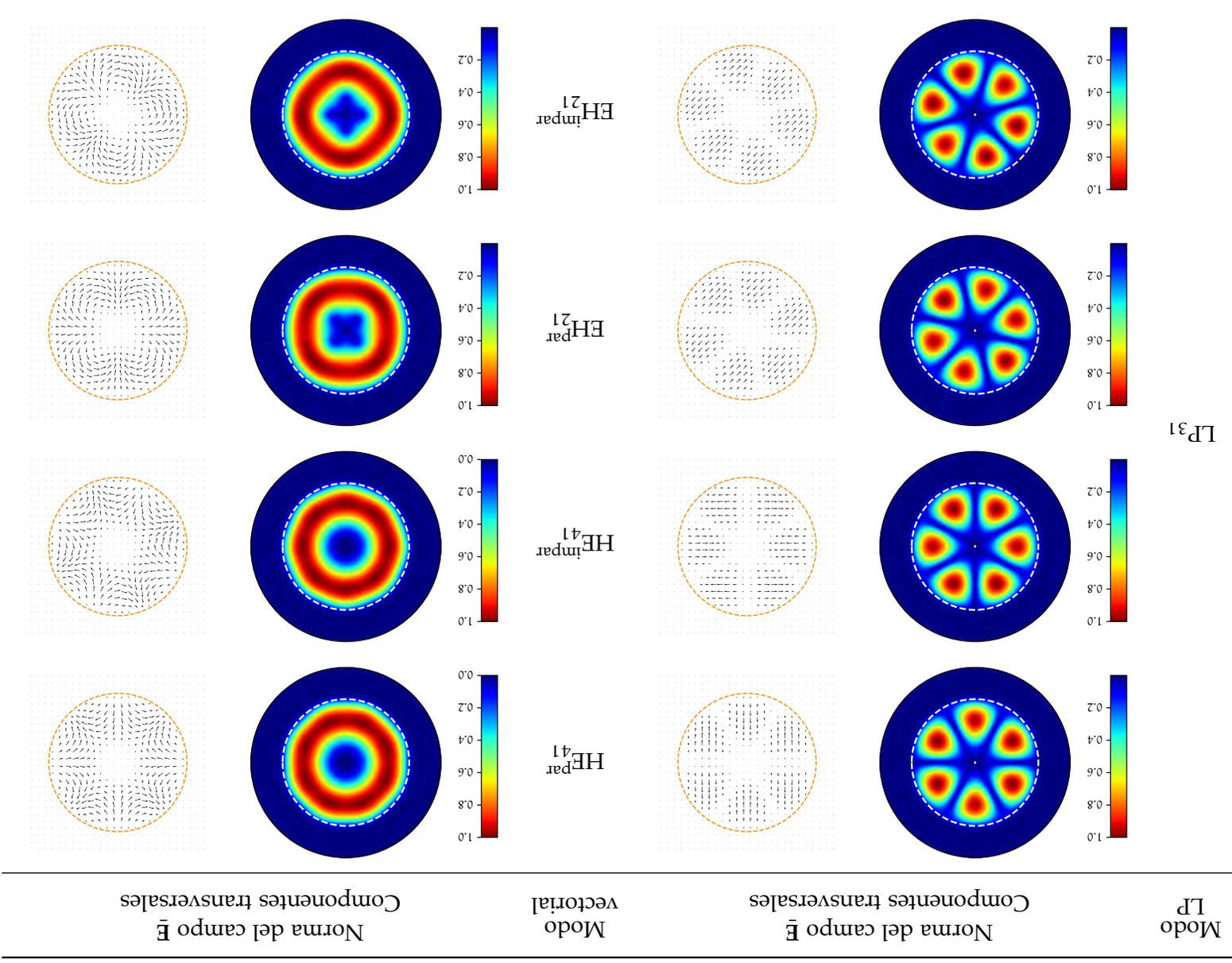
Cuadro B.1: Modos LP_{01} y LP_{11} , y modos vectoriales asociados. La barra de color indica la escala del valor del campo.



Cuadro B.2: Modos LP₁₁ (continuación) y LP₂₁, y modos vectoriales asociados. La barra de color indica la escala del valor del campo.

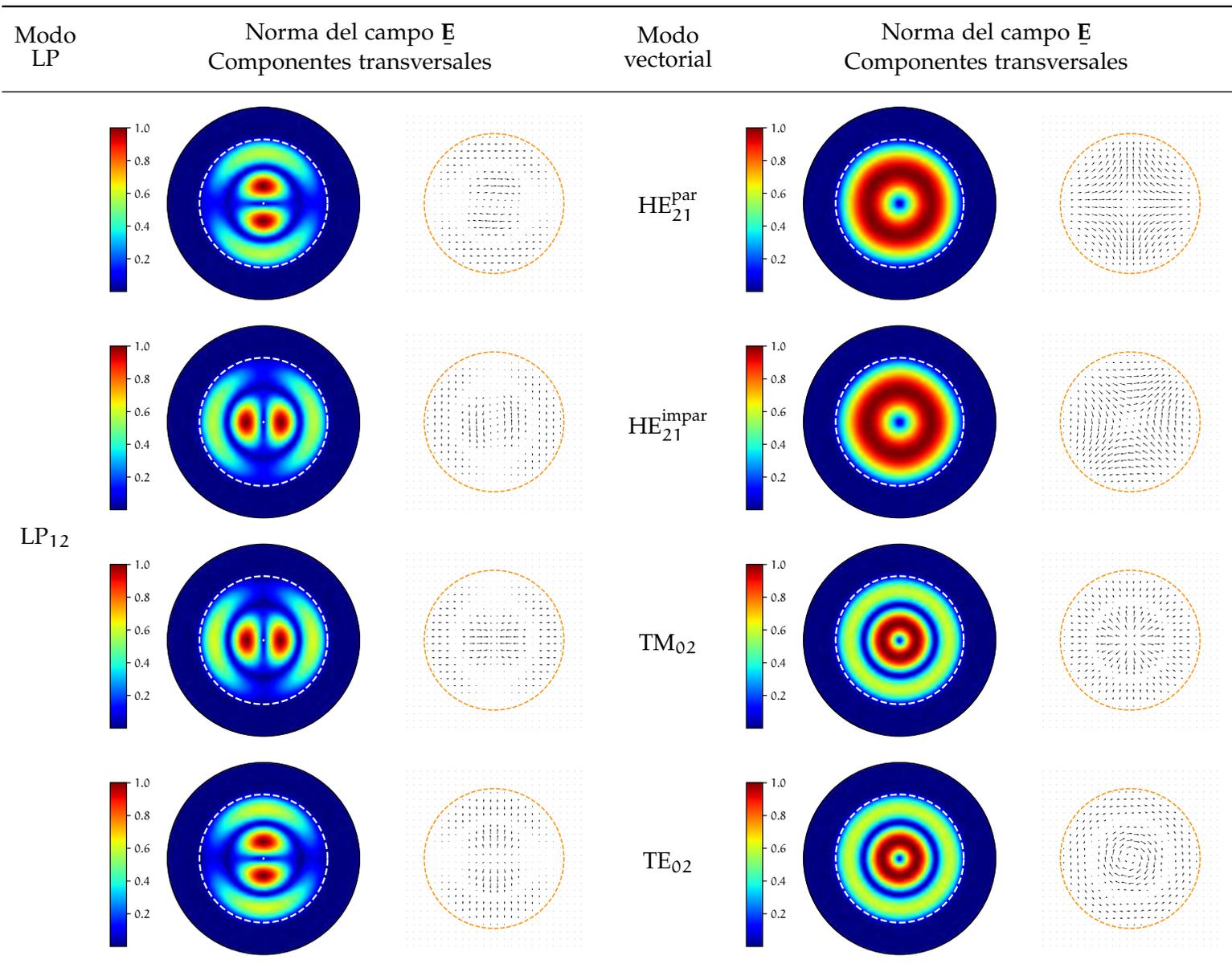
Cuadro B.3: Modos LP_{11} (continuación) y LP_{21} , y modos vectoriales asociados. La barra de color indica la escala del valor del campo.

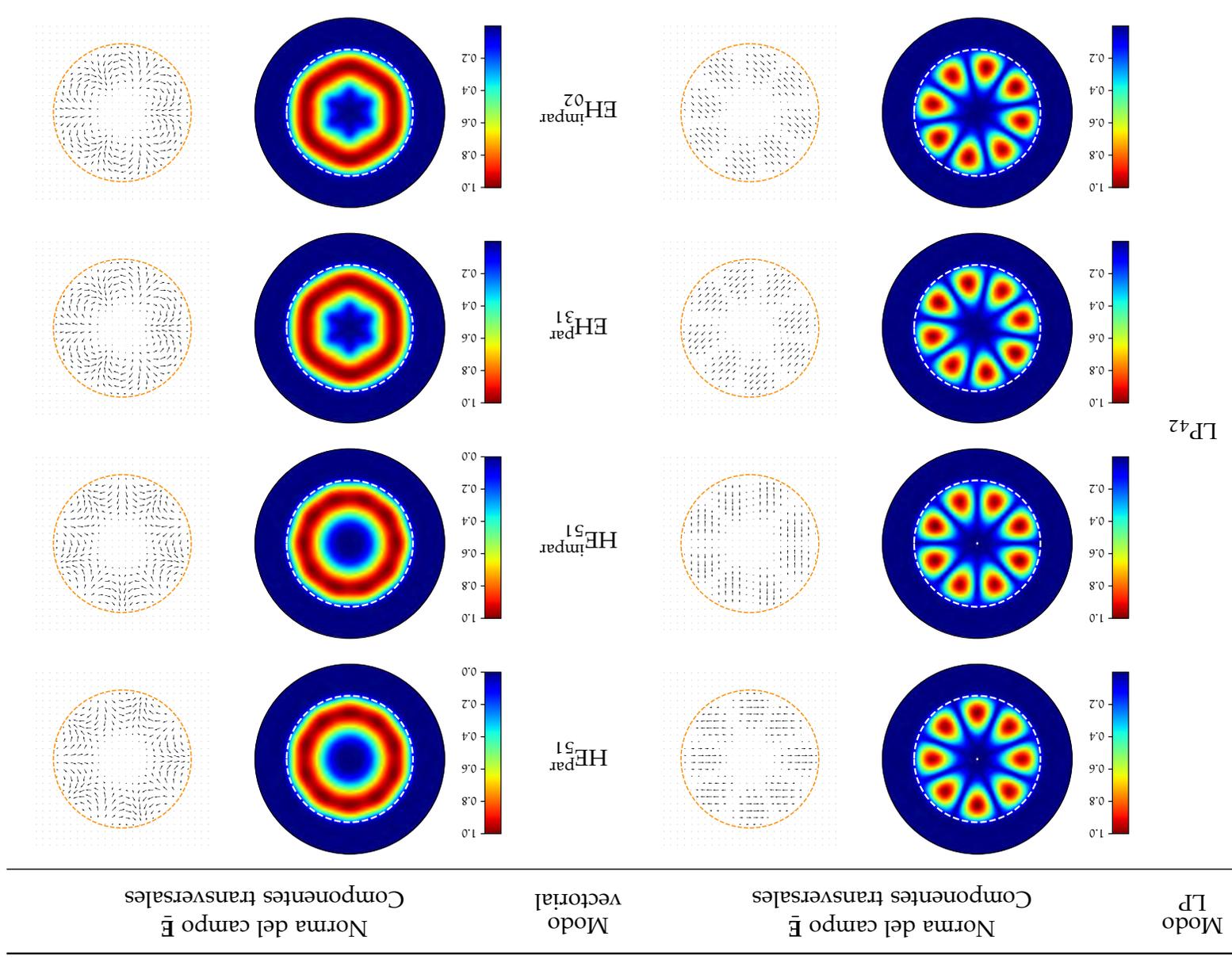




Cuadro B.4: Modos LP_{31} y modos vectoriales asociados. La barra de color indica la escala del valor del campo.

Cuadro B.5: Modos LP_{12} y modos vectoriales asociados. La barra de color indica la escala del valor del campo.





Cuadro B.6: Modos LP₄₂ y modos vectoriales asociados. La barra de color indica la escala de valor del campo.

DEMOSTRACIONES DEL CAPÍTULO 4

C.1 DEMOSTRACIÓN DE LA RELACIÓN DE RECIPROCIDAD (4.1)

Comenzamos a partir de las ecuaciones de Maxwell en materia

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{C.1a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{C.1b})$$

donde el campo de inducción magnética \mathbf{B} se relaciona con el de intensidad magnética \mathbf{H} a través de la constante de permeabilidad magnética del material μ , y la densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} con el campo eléctrico mediante la constante de permitividad eléctrica del material ϵ . En la ecuación (C.1b), \mathbf{J} es la densidad de corriente. Además, como sabemos que estamos trabajando con soluciones tipo onda que tienen la forma funcional $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$, entonces $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{U}$ que para medios dieléctricos sabemos que cumplen con $\mu_0 \approx \mu$, lo que podemos reescribir en (C.1) como

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\frac{\omega}{\mu} \mathbf{H}, \quad (\text{C.2a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\omega \epsilon \mathbf{E}. \quad (\text{C.2b})$$

Utilizaremos además la siguiente relación vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (\text{C.3})$$

Primero calculamos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*) &= \nabla \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \left(\frac{i\mu}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}_2^* \right) \right) \\ &= \frac{i\mu}{\omega} ((\nabla \times \mathbf{E}_2^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_2^*))), \\ &= \frac{i\mu}{\omega} \left(\left(-\frac{i\omega}{\mu} \right)^2 \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \left(\nabla \times \left(-\frac{i\omega}{\mu} \mathbf{E}_2^* \right) \right) \right), \\ &= \frac{i\mu}{\omega} \left(-\frac{\omega^2}{\mu^2} \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{i\omega}{\mu} \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_2^*) \right), \\ &= \frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{J}_2^* + i\omega \epsilon_2 \mathbf{E}_2^*), \\ &= \frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* - i\omega \epsilon_2 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*; \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

y ahora

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) &= \nabla \cdot \left(\mathbf{E}_2^* \times \left(-i \frac{\mu}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}_1 \right) \right), \\
&= -\frac{i\mu}{\omega} ((\nabla \times \mathbf{E}_1) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_2^* \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1))), \\
&= \frac{i\mu}{\omega} \left(-\left(\frac{i\omega}{\mu} \right)^2 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^* - \mathbf{E}_2^* \cdot \left(\nabla \times \left(\frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_1 \right) \right) \right), \\
&= -\frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^* - \mathbf{E}_2^* \cdot (\mathbf{J}_1 - i\omega\epsilon_1 \mathbf{E}_1), \\
&= -\frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^* - \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1 + i\omega\epsilon_1 \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1; \tag{C.5}
\end{aligned}$$

sumemos (C.4) y (C.5),¹

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) &= \frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{H}_1 - \frac{i\omega}{\mu} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^* \\
&\quad - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* + \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1) \\
&\quad + i\omega(\epsilon_1 - \epsilon_2) \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1,
\end{aligned}$$

si no hay fuentes de carga, como en nuestro caso, entonces $\mathbf{J}_{1,2} = 0$, así

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) = i\omega(\epsilon_1 - \epsilon_2) \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1. \tag{C.6}$$

Recordemos que el índice de refracción de un medio se puede escribir en términos de la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética relativas, dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \\
\mu_r &= \frac{\mu}{\mu_0},
\end{aligned}$$

¹ Esta expresión la sacamos del siguiente teorema

Teorema 1 (de reciprocidad de Lorentz) Sean las corrientes $\mathbf{J}_{1,2}$ que producen los campos $\mathbf{E}_{1,2}$ y $\mathbf{H}_{1,2}$, tales que los tres sean periódicos y con frecuencia angular ω , entonces, para algún volumen V y superficie arbitraria S

$$\int_V (\mathbf{J}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_2) dV = \oint_S (\mathbf{E}_1^* \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*) \cdot d\mathbf{S},$$

o de forma equivalente a través del teorema de Green

$$\mathbf{J}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_2 = \nabla \cdot (\mathbf{E}_1^* \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*).$$

de la siguiente manera²

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \\ &\approx \sqrt{\epsilon_r}, \\ &\Rightarrow \\ n^2 &= \epsilon_r, \\ &\Rightarrow \\ n^2 \epsilon_0 &= \epsilon. \end{aligned}$$

Así la ecuación (C.6) se puede reescribir en términos de los índices de refracción de los medios,

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) = i\omega\epsilon_0(n_1^2 - n_2^2)\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1, \quad (\text{C.7})$$

que en su forma integral sobre una infinitesimal longitud en la dirección de propagación se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}) dx dy = i\omega\epsilon_0(n_1^2 - n_2^2) \iint \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1 dx dy. \quad (\text{C.8})$$

C.1.1 Demostración de los coeficientes de acoplamiento³

Pasaremos a calcular los términos internos de la integral (4.5), se indican en cada apartado las condiciones de perturbación que se emplean y que ya están escritas en la [Sección 4.1](#).

Se emplearán en el desarrollo las siguientes sustituciones⁴

$$\alpha = \alpha'(x) + \alpha(x)(i\beta_a), \quad (\text{C.9a})$$

$$\beta = \beta'(x) + \beta(x)(i\beta_a), \quad (\text{C.9b})$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha'(x) + \alpha(x)(i\beta_b), \quad (\text{C.9c})$$

$$\tilde{\beta} = \beta'(x) + \beta(x)(i\beta_b), \quad (\text{C.9d})$$

$$\vec{\gamma}_{pq} = \mathbf{E}_p^t \times \mathbf{H}_q^{t*}, \quad (\text{C.9e})$$

$$\vec{\zeta}_{pq}^t = \mathbf{E}_p^t \cdot \mathbf{E}_q^{t*}, \quad (\text{C.9f})$$

$$\vec{\zeta}_{pq}^x = \mathbf{E}_p^x \cdot \mathbf{E}_q^{x*}. \quad (\text{C.9g})$$

² En este desarrollo se deja de usar el término \approx y se sustituye una por igualdad, cosa que, aunque no es estrictamente cierta, lo hacemos para evitar cargar el símbolo en los desarrollos posteriores y porque en los cálculos teóricos así lo considero.

³ Para la elaboración de esta sección se consultaron las fuentes [67, 88, 99-101].

⁴ Una disculpa de antemano al lector por usar β como otra variable, esperando que no se confunda en esta ocasión con una constante de propagación.

C.1.2 Lado izquierdo de la ecuación (4.5)⁵PERTURBACIÓN EN a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^t \times \mathbf{H}_2^{t*} &= (a(x)\mathbf{E}_a^t + b(x)\mathbf{E}_b^t) \times \mathbf{H}_a^{t*} e^{i\beta_a x}, \\ &= a(x)e^{i\beta_a x} \mathbf{E}_a^t \times \mathbf{H}_a^{t*} + b(x)e^{i\beta_a x} \mathbf{E}_b^t \times \mathbf{H}_a^{t*}, \\ &= e^{i\beta_a x} (a(x)\vec{\gamma}_{aa} + b(x)\vec{\gamma}_{ba}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{t*} \times \mathbf{H}_1^t &= \mathbf{E}_a^{t*} e^{i\beta_a x} \times (a(x)\mathbf{H}_a^t + b(x)\mathbf{H}_b^t), \\ &= e^{i\beta_a x} (a(x)\mathbf{E}_a^{t*} \times \mathbf{H}_a^t + b(x)\mathbf{E}_a^{t*} \times \mathbf{H}_b^t), \\ &= e^{i\beta_a x} (a(x)\vec{\gamma}_{aa}^* + b(x)\vec{\gamma}_{ab}^*). \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones y agrupando

$$\mathbf{E}_1^t \times \mathbf{H}_2^{t*} + \mathbf{E}_2^{t*} \times \mathbf{H}_1^t = e^{i\beta_a x} (a(x)(\vec{\gamma}_{aa} + \vec{\gamma}_{aa}^*) + b(x)(\vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}^*)),$$

sustituyendo a la anterior ecuación del lado izquierdo de la fórmula (4.5), abriendo las derivadas y evaluando la derivada parcial en x da

$$\begin{aligned} &(a'(x) + a(x)(i\beta_a)) e^{i\beta_a x} \iint \vec{\gamma}_{aa} + \vec{\gamma}_{aa}^* \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz \\ &+ (b'(x) + b(x)(i\beta_a)) e^{i\beta_a x} \iint \vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}^* \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz \\ &= \left(\alpha \iint (\vec{\gamma}_{aa} + \vec{\gamma}_{aa}^*) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz + \beta \iint (\vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}^*) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz \right) e^{i\beta_a x}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

PERTURBACIÓN EN b

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^t \times \mathbf{H}_2^{t*} &= (a(x)\mathbf{E}_a^t + b(x)\mathbf{E}_b^t) \times \mathbf{H}_b^{t*} e^{i\beta_b x}, \\ &= a(x)e^{i\beta_b x} \mathbf{E}_a^t \times \mathbf{H}_b^{t*} + b(x)e^{i\beta_b x} \mathbf{E}_b^t \times \mathbf{H}_b^{t*}, \\ &= e^{i\beta_b x} (a(x)\vec{\gamma}_{ab} + b(x)\vec{\gamma}_{bb}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{t*} \times \mathbf{H}_1^t &= \mathbf{E}_b^{t*} e^{i\beta_b x} \times (a(x)\mathbf{H}_a^t + b(x)\mathbf{H}_b^t), \\ &= e^{i\beta_b x} (a(x)\mathbf{E}_b^{t*} \times \mathbf{H}_a^t + b(x)\mathbf{E}_b^{t*} \times \mathbf{H}_b^t), \\ &= e^{i\beta_b x} (a(x)\vec{\gamma}_{ba}^* + b(x)\vec{\gamma}_{bb}^*). \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones y agrupando

$$\mathbf{E}_1^t \times \mathbf{H}_2^{t*} + \mathbf{E}_2^{t*} \times \mathbf{H}_1^t = e^{i\beta_b x} (a(x)(\vec{\gamma}_{ab} + \vec{\gamma}_{ba}^*) + b(x)(\vec{\gamma}_{bb} + \vec{\gamma}_{bb}^*)),$$

⁵ En las siguientes cuentas omitimos la notación de dependencia espacial por brevedad.

sustituyendo a la anterior ecuación del lado izquierdo de la fórmula (4.5), abriendo las derivadas y evaluando la derivada parcial en x da

$$\begin{aligned}
& (a'(x) + a(x)(i\beta_b)) e^{i\beta_b x} \iint \vec{\gamma}_{ab} + \vec{\gamma}_{ba}^* \cdot \hat{x} \, dy \, dz \\
& + (b'(x) + b(x)(i\beta_b)) e^{i\beta_b x} \iint \vec{\gamma}_{bb} + \vec{\gamma}_{bb}^* \cdot \hat{x} \, dy \, dz \\
& = \left(\tilde{\alpha} \iint (\vec{\gamma}_{ab} + \vec{\gamma}_{ba}^*) \cdot \hat{x} \, dy \, dz + \tilde{\beta} \iint (\vec{\gamma}_{bb} + \vec{\gamma}_{bb}^*) \cdot \hat{x} \, dy \, dz \right) e^{i\beta_b x}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Notemos que los términos de la forma $\vec{\gamma}_{pp}$ y $\vec{\gamma}_{pp}^*$ son colineales a la dirección de propagación o del vector de Poynting correspondiente, empero en dirección contraria por lo que las integrales de superficie con la forma $\int_S \vec{\gamma}_{pp} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \vec{\gamma}_{pp}^* \cdot d\mathbf{S}$ se anularán una a la otra y como se verá más adelante⁶ solo sobreviven los términos

$$\beta \iint (\vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}^*) \cdot \hat{x} \, dy \, dz, \tag{C.12}$$

y

$$\tilde{\alpha} \iint (\vec{\gamma}_{ab} + \vec{\gamma}_{ba}^*) \cdot \hat{x} \, dy \, dz, \tag{C.13}$$

que sumando (C.12) con el complejo conjugado de (C.13) tenemos

$$\begin{aligned}
& \beta \iint (\vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}^*) \cdot \hat{x} \, dy \, dz + \tilde{\alpha}^* \iint (\vec{\gamma}_{ab}^* + \vec{\gamma}_{ba}) \cdot \hat{x} \, dy \, dz \\
& = 2(\beta + \tilde{\alpha}^*) \iint (\vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}) \cdot \hat{x} \, dy \, dz, \\
& = 2(b'(x) + a'(x) + i\omega(b(x)\beta_a - a(x)\beta_b)) \iint (\vec{\gamma}_{ba} + \vec{\gamma}_{ab}) \cdot \hat{x} \, dy \, dz.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

C.1.3 Lado derecho de la ecuación (4.5)

PERTURBACIÓN EN \mathbf{a}

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1^t \cdot \mathbf{E}_2^{t*} & = (a(x)\mathbf{E}_a^t + b(x)\mathbf{E}_b^t) \cdot \mathbf{E}_a^{t*} e^{i\beta_a x}, \\
& = a(x)e^{i\beta_a x} \mathbf{E}_a^t \cdot \mathbf{E}_a^{t*} + b(x)e^{i\beta_a x} \mathbf{E}_b^t \cdot \mathbf{E}_a^{t*}, \\
& = e^{i\beta_a x} \left(a(x)\vec{\zeta}_{aa}^t + b(x)\vec{\zeta}_{ba}^t \right).
\end{aligned}$$

⁶ Aquí se está adelantando que el término exponencial en las ecuaciones (C.10) y (C.11), con sus parejas correspondientes al evaluar el lado derecho de la ecuación (4.5) se elimina.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1^l \cdot \mathbf{E}_2^{l*} &= \left(a(x) \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \mathbf{E}_a^x + b(x) \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \mathbf{E}_b^x \right) \cdot \mathbf{E}_a^{x*} e^{i\beta_a x} \\
&= a(x) \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \mathbf{E}_a^x \cdot \mathbf{E}_a^{x*} e^{i\beta_a x} + b(x) e^{i\beta_a x} \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \mathbf{E}_b^x \cdot \mathbf{E}_a^{x*} \\
&= e^{i\beta_a x} \left(a(x) \bar{\zeta}_{aa}^x \frac{\epsilon_a}{\epsilon} + b(x) \bar{\zeta}_{ba}^x \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \right)
\end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones y agrupando

$$\mathbf{E}_1^t \cdot \mathbf{E}_2^{t*} + \mathbf{E}_1^l \cdot \mathbf{E}_2^{l*} = e^{i\beta_a x} \left(a(x) \left(\bar{\zeta}_{aa}^t + \bar{\zeta}_{aa}^x \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) + b(x) \left(\bar{\zeta}_{ba}^t + \bar{\zeta}_{ba}^x \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \right) \right),$$

sustituyendo la expresión anterior del lado derecho de la ecuación (4.5) obtenemos el término

$$i\omega e^{i\beta_a x} \iint (\epsilon - \epsilon_a) \left(a(x) \left(\bar{\zeta}_{aa}^t + \bar{\zeta}_{aa}^x \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) + b(x) \left(\bar{\zeta}_{ba}^t + \bar{\zeta}_{ba}^x \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \right) \right) dy dz, \quad (\text{C.15})$$

observe que el término exponencial eventualmente se cancelará con el de la ecuación (C.10) correspondiente a esta perturbación.

PERTURBACIÓN EN b

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1^t \cdot \mathbf{E}_2^{t*} &= \left(a(x) \mathbf{E}_a^t + b(x) \mathbf{E}_b^t \right) \cdot \mathbf{E}_b^{t*} e^{i\beta_b x}, \\
&= a(x) e^{i\beta_b x} \mathbf{E}_a^t \cdot \mathbf{E}_b^{t*} + b(x) e^{i\beta_b x} \mathbf{E}_b^t \cdot \mathbf{E}_b^{t*}, \\
&= e^{i\beta_b x} \left(a(x) \bar{\zeta}_{ab}^t + b(x) \bar{\zeta}_{bb}^t \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1^l \cdot \mathbf{E}_2^{l*} &= \left(a(x) \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \mathbf{E}_a^x + b(x) \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \mathbf{E}_b^x \right) \cdot \mathbf{E}_b^{x*} e^{i\beta_b x}, \\
&= a(x) \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \mathbf{E}_a^x \cdot \mathbf{E}_b^{x*} e^{i\beta_b x} + b(x) e^{i\beta_b x} \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \mathbf{E}_b^x \cdot \mathbf{E}_b^{x*}, \\
&= e^{i\beta_b x} \left(a(x) \bar{\zeta}_{ab}^x \frac{\epsilon_a}{\epsilon} + b(x) \bar{\zeta}_{bb}^x \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \right).
\end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones y agrupando

$$\mathbf{E}_1^t \cdot \mathbf{E}_2^{t*} + \mathbf{E}_1^l \cdot \mathbf{E}_2^{l*} = e^{i\beta_b x} \left(a(x) \left(\bar{\zeta}_{ab}^t + \bar{\zeta}_{ab}^x \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) + b(x) \left(\bar{\zeta}_{bb}^t + \bar{\zeta}_{bb}^x \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \right) \right),$$

sustituyendo la expresión anterior del lado derecho de la ecuación (4.5) obtenemos el término

$$i\omega e^{i\beta_b x} \iint (\epsilon - \epsilon_b) \left(a(x) \left(\bar{\zeta}_{ab}^t + \bar{\zeta}_{ab}^x \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) + b(x) \left(\bar{\zeta}_{bb}^t + \bar{\zeta}_{bb}^x \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \right) \right) dy dz, \quad (\text{C.16})$$

observe que el término exponencial eventualmente se cancelará con el de la ecuación (C.10) correspondiente a esta perturbación.

Pasemos ahora a hacer las mismas operaciones que realizamos con las ecuaciones (C.12) y (C.13), es decir sumaremos a (C.15) el complejo conjugado de (C.16), lo que luego de considerar que los términos con subíndices repetidos son pequeños en comparación⁷ y despreciables[100] nos da

$$i\omega \iint (\epsilon - \epsilon_a) b(x) \left(\bar{\zeta}_{ba}^t + \bar{\zeta}_{ba}^t \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) - i\omega \iint (\epsilon - \epsilon_b) a(x) \left(\bar{\zeta}_{ab}^{t*} + \bar{\zeta}_{ab}^{t*} \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right). \quad (\text{C.17})$$

Si consideramos $x = 0$ entonces $b(0) = 1$ y $b'(0) = 0$ para campos normalizados y $a(0) = 1$ y $a'(0) = 0$, si consideramos que el máximo del campo se halle en esta posición como abría de esperar. Tomando esto en consideración e igualando (C.14) con (C.17) llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} & 2i\omega \iint (\bar{\gamma}_{ba} + \bar{\gamma}_{ab}) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz \\ &= i\omega \iint (\epsilon - \epsilon_a) b(x) \left(\bar{\zeta}_{ba}^t + \bar{\zeta}_{ba}^t \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) \\ & - i\omega \iint (\epsilon - \epsilon_b) a(x) \left(\bar{\zeta}_{ab}^{t*} + \bar{\zeta}_{ab}^{t*} \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

donde si definimos⁸

$$\kappa_{pq} = \frac{\omega}{4} \iint (\epsilon - \epsilon_q) \left(\mathbf{E}_q^t \cdot \mathbf{E}_p^{t*} + \frac{\epsilon_p}{\epsilon} E_q^x E_p^{x*} \right) \, dy \, dz, \quad (\text{C.19a})$$

$$C_{pq} = \frac{1}{2} \iint (\mathbf{E}_q^t \times \mathbf{H}_p^{t*}) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dy \, dz, \quad (\text{C.19b})$$

así (C.18) se puede escribir como

$$\kappa_{ba}(x) - \kappa_{ab}(x) = \frac{1}{2} (C_{ab}(x) + C_{ba}(x)) (\beta_b - \beta_a). \quad (\text{C.20})$$

⁷ Dígase de los términos de la forma κ_{pp} .

⁸ No en todas las fuentes aparecen los factores de escala 1/2 y 1/4 como en [101].

DEMOSTRACIÓN DE PERFIL EXPONENCIAL EN FIBRA ÓPTICA ESTRECHADA

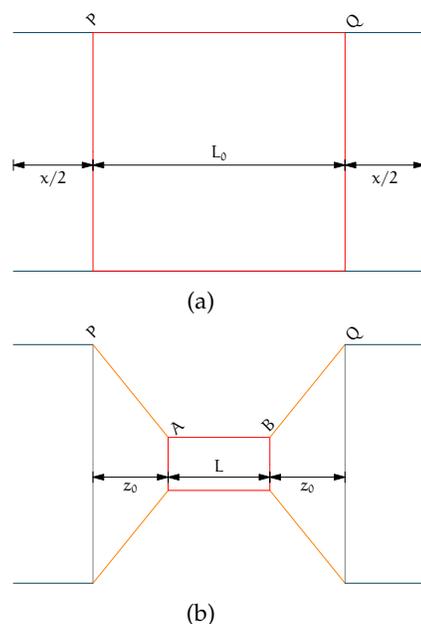


Figura D.1: a) Fibra al inicio del proceso de estirado ($t = 0$), donde una sección \overline{PQ} de longitud L_0 es calentada. b) Fibra en el proceso de estirado al tiempo $t > 0$, los puntos P y Q se separan por una distancia x , y la distancia entre estos puntos es $2z_0 + L$. Figuras no a escala.

En este capítulo se mostrará la deducción del perfil exponencial para una fibra estirada simétricamente a velocidad constante.¹ Supondremos un material cuya viscosidad no depende de la velocidad de desplazamiento del material y que no sea compresible, a su vez se considera que el material no se calienta lo suficiente como para que se deforme por efecto de la gravedad, a fin de poder analizar al sistema mediante una ecuación de conservación de masa.²

¹ Se estudian las soluciones pertinentes a las fibras ópticas estrechadas que se usaron en el experimento, se analiza el desarrollo mostrado en [102], en esta misma referencia se pueden consultar los casos cuando no se tiene un calentamiento uniforme o el cálculo de perfil de fibras de adiabaticidad óptima, sobre este mismo tema se recomienda la referencia [103].

² Como la densidad del material se considerará constante, bastará analizar la conservación de volumen.

El sistema por analizar se esquematiza en la figura D.1, donde suponemos una fibra que es simétricamente estirada por sus extremos, una región caliente (en rojo) uniforme y cilíndrica. El radio original de la fibra lo identificamos como r_0 , la longitud de la cintura como l_w y el radio de esta como r_w . Las regiones de transición que consideraremos simétricas tienen una longitud de z_0 y su radio local como función de la coordenada longitudinal z , lo podemos describir como una función $r = r(z)$; así considerando $z = 0$ al inicio de cada zona de transición, $r(0) = r_0$ y $r(z_0) = r_w$.

La extensión total del *taper* x es la distancia total de estiramiento en la figura D.1, la longitud del segmento \overline{PQ} después del estiramiento menos \overline{PQ} antes del proceso de estirado. Podemos relacionar x con la rapidez de estiramiento v_x . La longitud final del *taper* luego de ser estirado se denotará con x_0 .

D.1 LEY DE DISTANCIAS Y CONSERVACIÓN DE VOLUMEN

Notemos a la figura D.2 y sea una zona caliente de longitud L al tiempo t entre los puntos AB dentro de la cual el medio es suave como para ser estrechado, mas no tanto como para deformarse bajo la acción de su propio peso, y que fuera de la cual el material es sólido y frío.

Ahora estiremos al cilindro, así al tiempo $t + \delta t$ el radio de este disminuye y la sección caliente ahora mide $L + \delta x$.³ Así luego de este estiramiento, las secciones AA' y BB' salen de la zona caliente y forman zonas de transición, ahora habrá una nueva sección caliente $A'B'$. Ha de suponerse que $L \geq 0$ y que $\frac{dL}{dx} \leq 1$, primero porque no puede haber secciones calientes de longitud negativa; y segundo, para no recalentar zonas de las transiciones. Apreciemos que la longitud instantánea de la cintura l_w tendrá una longitud igual a la de la zona caliente al tiempo t , es decir

$$l_w(t) = L(t). \quad (D.1)$$

Considerando que el material no cambie su densidad en el proceso, la conservación de masa se da a través de una simple preservación del volumen entre AB , así antes y después del proceso instantáneo de estirado los volúmenes correspondientes se relacionarán por la igualdad

$$\pi r_w^2 L = \pi (r_w + \delta r_w)^2 (L + \delta x), \quad (D.2)$$

³ Estrictamente $\delta x \neq \delta L$, podríamos cambiar la longitud de la zona caliente de forma distinta a lo que estiramos al cilindro en una cantidad δx , si bien $\delta x > 0$, no existe restricción en que $\delta L \leq \delta x$.

donde δr_w es el cambio instantáneo en el radio de la cintura. Para hacer el estudio de la forma diferencial (cuando $\delta t \rightarrow 0$), primero desarrollemos (D.2)

$$\cancel{\pi r_w^2 L} = \pi \left(\cancel{r_w^2 L} + 2r_w L \delta r_w + L \cancel{\delta r_w^2} + r_w^2 \delta r_w + 2r_w \delta r_w \delta x + \cancel{\delta r_w^2 \delta x} \right),$$

así

$$0 = 2r_w L \delta r_w + r_w^2 \delta x,$$

con esto en mente

$$\frac{\partial r_w}{\partial x} = \frac{dr_w}{dx} = -\frac{r_w^2}{2r_w L},$$

así ⁴

$$\frac{dr_w}{dx} = -\frac{r_w}{2L}. \quad (\text{D.3})$$

Ley de volumen

Relacionemos ahora a la longitud de transición z con la extensión del *taper* x . Para ello hay que comparar la longitud de la distancia del segmento \overline{PQ} antes y después del proceso de estirado. Así de la D.2, se tendrá que

$$2z_0 + L = x + L_0,$$

con $L(x)$ tal que $L(0) = L_0$.⁵ Como $r = r(z)$, una función a lo largo de la longitud de la zona de transición, debe ser igual a $r_w(x)$, en el punto que va saliendo de la zona caliente, entonces $z_0 = z$, y podemos escribir la ley de distancias como

$$2z_0 = x + L_0 - L, \quad (\text{D.4})$$

Ley de distancias

donde x es la extensión a la que el punto z se extrae de la región caliente.

D.2 SOLUCIONES

Supongamos que conocemos $L(x)$ y x_0 , por lo que quedarán l_w , r_w , z_0 y r_z por ser resueltos, de (D.1) se tendrá que

$$l_w = L(x_0). \quad (\text{D.5})$$

Mientras, a $r_w(x)$ se lo obtendrá integrando la ley de volumen (D.3), considerando la condición inicial $r_w(0) = r_0$

$$\int_{r_0}^{r_w} \frac{dr'_w}{r'_w} = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx'}{L(x')}. \quad (\text{D.6})$$

⁴ Recordemos que en general $x = x(t)$ y $L = L(t)$.

⁵ Como $L = L(t) \Rightarrow \exists x = x(t)$.

Por otra parte, para las longitudes de transición de la ley de distancias (D.4)

$$z(x) = \frac{1}{2}(x - L_0 - L(x)), \quad (\text{D.7})$$

donde la longitud de transición final z_0 estará dada por $z(x_0)$. A fin de obtener $r(z)$ invirtamos (D.7) con lo que se obtiene

$$r(z) = r_w(x(z)).$$

Para el caso de las fibras estrechadas que fabricamos en el experimento, la región caliente se puede considerar de longitud constante, es decir

$$\begin{aligned} L(x) &= L_0, \\ \stackrel{(\text{D.5})}{\Rightarrow} l_w &= L_0, \end{aligned}$$

y de (D.6)

$$r_w = r_0 e^{-\frac{x}{2l}}, \quad (\text{D.8})$$

con un radio final de $r_w(x_0)$. Con todo esto, la ley de distancias (D.4) quedaría como

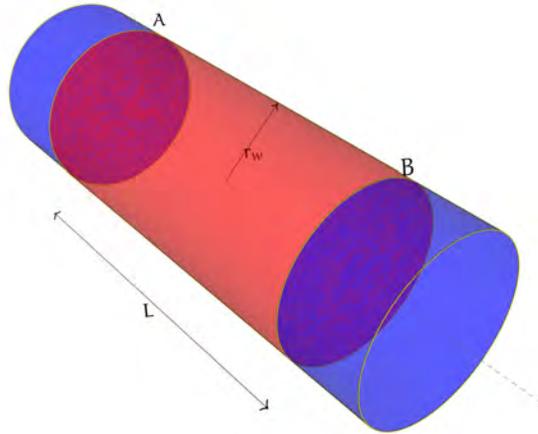
$$z(x) = x/2,$$

así $z_0 = x_0/2$ y $x = 2z$, por lo que al sustituir en (D.8),

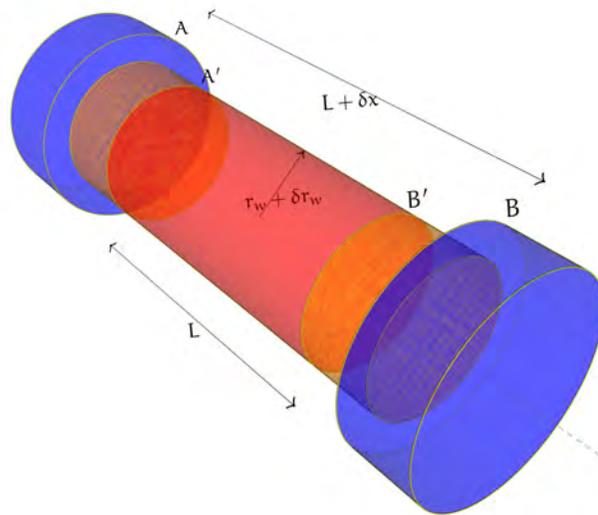
$$r(z) = r_0 e^{-\frac{z}{l_0}}, \quad (\text{D.9})$$

Finalmente, si consideramos una rapidez de estiramiento v_x simétrica, entonces

$$r_w(t) = r_0 e^{\frac{-v_x t}{2l_0}}. \quad (\text{D.10})$$



(a) Fibra uniformemente calentada en el segmento AB, en rojo, al tiempo t



(b) Fibra estirada luego de un tiempo δt , donde se muestra una reducción del radio δr_r , al ser estirada una distancia δx .

Figura D.2: Diagrama del proceso diferencial de estirado al tiempo t (a), y al tiempo $t + \delta t$. En azul las regiones frías, en naranja las zonas de transición y en rojo la región caliente.

Finalmente, el perfil resultante se resume en la figura D.3.

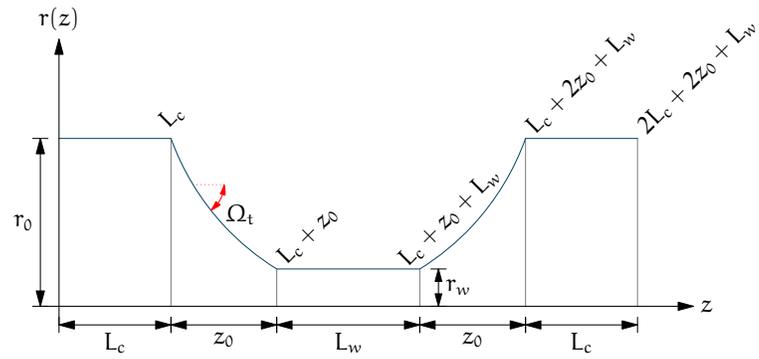


Figura D.3: Perfil longitudinal de una fibra óptica estrechada. L_c indica las zonas sin estirar, r_0 el radio original, z_0 la longitud de las zonas de transición, L_w y r_w a la longitud de la cintura y su radio respectivamente.

TRANSFORMADA DE FOURIER A CORTO TIEMPO¹

Para analizar el espectro de frecuencias de una señal que varía en el tiempo, podemos seccionar a esta en intervalos más pequeños que su duración total y hacer un análisis al espectro de cada uno de estos segmentos. Esta es la idea general de la Transformada de Fourier a Corto Tiempo.²

El proceso de división de la señal en intervalos de tiempo cada vez más cortos no puede (ni debe) hacerse *ad infinitum*; esto se debe a que señales cortas tienen anchos de banda largos, lo que hará que el espectro de señales demasiado cortas no tenga nada que ver con la señal original. Por otra parte, las propiedades de estas señales cortas también se mezclarán con las de la función de ventana empleada como medio para cortar a la señal.

Para analizar una función s al tiempo t , habrá que multiplicarla por una función de ventana h centrada al tiempo t , que suprima los valores de la señal lejos del tiempo t ,

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t),$$

donde t es el tiempo de interés y τ el tiempo de «corrida». La ventana debe dejar a la función de interés más o menos inalterada alrededor del tiempo t y suprimirlas lejos de este

$$s_t(\tau) \sim \begin{cases} s(\tau) & \text{para } \tau \text{ cerca de } t, \\ 0 & \text{para } \tau \text{ lejos de } t. \end{cases}$$

La transformada de Fourier de la función modificada representará la distribución de frecuencias alrededor del tiempo t .

$$\begin{aligned} S_t(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} s_t(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} s(\tau) h(\tau - t) d\tau, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

¹ Para la elaboración de este apéndice se consultaron las referencias [104, 105]. Se recomienda ampliamente además si interesa profundizar los detalles del análisis de señales empleando estas técnicas la consulta de la referencia [106], pues aunque su énfasis es en el procesamiento de señales musicales, dichas técnicas tienen un amplios márgenes de aplicación, por no decir que los materiales suplementarios y ejemplos de programación (disponibles en <https://www.audiolabs-erlangen.de/resources/MIR/FMP/C0/C0.html>) son muy buenos para profundizar en dicho tema.

² Conocida en inglés como *Short-Time Fourier Transform* (STFT).

y el espectro de densidad de energía estará dado por

$$P_{sp}(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2.$$

El total de los espectros calculados para cada t es la distribución de tiempo-frecuencia P_{sp} ; esto se conoce típicamente como «espectrograma».

Al estimar las propiedades temporales de una determinada frecuencia, se utilizan ventanas anchas, es decir, al ganar resolución temporal se pierde esta en frecuencia y viceversa.

E.1 LA TRANSFORMADA EN TIEMPO A FRECUENCIAS CORTAS

La **STFT** enfatiza el estudio de propiedades espectrales al tiempo t , sin embargo, podemos interesarnos en estudiar las propiedades temporales de una frecuencia particular. Para ello pesaremos a un espectro $S(\omega)$, con una función de ventana de frecuencias $H(\omega)$, y tomaremos la transformada temporal, es decir, esto es la transformada Fourier inversa de la **STFT**, y se conoce como Transformada en Tiempo a Frecuencias Cortas.³ La definimos como

$$s_\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega't} S(\omega') H(\omega - \omega') d\omega'. \quad (\text{E.2})$$

Si seleccionamos a la función de ventana temporal $h(t)$ con la función de ventana en frecuencias $H(\omega)$ por

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(t) e^{i\omega t} dt,$$

entonces

$$S_t(\omega) = e^{-i\omega t} s_\omega(t),$$

por lo que bajo esta consideración, la **STFT** es lo mismo que la **SFTT** salvo por un factor de fase $e^{i\omega t}$, término que se elimina al calcular la distribución, es decir

$$P(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = |s_\omega(t)|^2.$$

Con lo que el espectrograma puede emplearse para analizar el comportamiento de las propiedades temporales a una determinada frecuencia. Esto se logra eligiendo una $H(\omega)$ delgada, o de forma equivalente una $h(t)$ gruesa.

³ Conocida en inglés como Short-Frequency Time Transform (**SFTT**).

E.2 EL CASO DISCRETO

Sea una serie de datos discreta de longitud N , tal que $s[n]$ es el valor de la amplitud de una señal al n -ésimo tiempo, la **STFT** al momento m como función de la frecuencia n -ésima estará dado por

$$S[m, n] = \sum_{k=0}^{L-1} s[k]g[k - m]e^{i2\pi nk/L}, \quad (\text{E.3})$$

donde la ventana g es discreta y se representa por un arreglo de L valores. La función inversa o **SFTT** estará dada por

$$s[k] = \sum_m \sum_n S[m, n]g[k - n]e^{i2\pi nk/L}. \quad (\text{E.4})$$

De forma práctica, se puede calcular a partir de una transformada rápida de Fourier,⁴⁵ multiplicada por alguna función discreta de ventana. Afortunadamente existe paquetería que nos permite hacer todo esto de forma automática. En este trabajo, se empleó la librería `DSP.jl`⁶ que proporciona rutinas para el análisis digital de señales y que internamente implementa a la librería `FFTW.jl`,⁷ que porta al lenguaje de programación Julia,⁸ la librería de C del mismo nombre y que declara las rutinas numéricas de la **FFT**. Para esta librería hay que definir el número de puntos como ancho de la ventana y el salto en puntos de la ventana entre intervalos, además de alimentar a la función correspondiente del arreglo de datos a analizar.

⁴ Conocida con las siglas inglesas de Fast Fourier Transform (**FFT**).

⁵ El cálculo directo de la ecuación (E.3) no suele ser eficiente, por ello que de forma típica se empleó alguna forma de **FFT**.

⁶ Código fuente y acceso a documentación en <https://github.com/JuliaDSP/DSP.jl>.

⁷ Código fuente y acceso a documentación en <https://github.com/JuliaMath/FFTW.jl>.

⁸ Si existe interés en conocer este lenguaje de programación vale la pena dar una visita al sitio <https://julia.org/>. La versión empleada para la realización de este trabajo fue la 1.5.3.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. M. Beggs, M. A. Kaliteevski, S. Brand y R. A. Abram. «Optimization of an optical filter with a square-shaped passband based on coupled microcavities». En: *Journal of Modern Optics* 51.3 (2004), págs. 437-446. DOI: [10.1080/09500340408235535](https://doi.org/10.1080/09500340408235535). eprint: <https://doi.org/10.1080/09500340408235535>. URL: <https://doi.org/10.1080/09500340408235535>.
- [2] Ewelina Obrzud, Steve Lecomte y Tobias Herr. «Temporal solitons in microresonators driven by optical pulses». En: *Nature Photonics* 11.9 (ago. de 2017), págs. 600-607. DOI: [10.1038/nphoton.2017.140](https://doi.org/10.1038/nphoton.2017.140). URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2017.140>.
- [3] Miguel A. Santiago-Cordoba, Murat Cetinkaya, Svetlana V. Boriskina, Frank Vollmer y Melik C. Demirel. «Ultrasensitive detection of a protein by optical trapping in a photonic-plasmonic microcavity». En: *Journal of Biophotonics* 5.8-9 (2012), págs. 629-638. DOI: [10.1002/jbio.201200040](https://doi.org/10.1002/jbio.201200040). eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/jbio.201200040>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jbio.201200040>.
- [4] Bei-Bei Li, William R. Clements, Xiao-Chong Yu, Kebin Shi, Qihuang Gong y Yun-Feng Xiao. «Single nanoparticle detection using split-mode microcavity Raman lasers». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111.41 (2014), págs. 14657-14662. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.1408453111](https://doi.org/10.1073/pnas.1408453111). eprint: <https://www.pnas.org/content/111/41/14657.full.pdf>. URL: <https://www.pnas.org/content/111/41/14657>.
- [5] Amir R. Ali y Mohamed A. Kamel. «Mathematical Model for Electric Field Sensor Based on Whispering Gallery Modes Using Navier's Equation for Linear Elasticity». En: *Mathematical Problems in Engineering* 2017 (2017), págs. 1-8. DOI: [10.1155/2017/9649524](https://doi.org/10.1155/2017/9649524). URL: <https://doi.org/10.1155/2017/9649524>.
- [6] Soheil Soltani, Vinh M Diep, Rene Zeto y Andrea M Armani. «Stimulated Anti-Stokes Raman Emission Generated by Gold Nanorod Coated Optical Resonators». En: *ACS Photonics* 5.9 (2018), págs. 3550-3556. DOI: [10.1021/acsp Photonics.8b00296](https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.8b00296). eprint: <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.8b00296>. URL: <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.8b00296>.

- [7] Albert Schliesser y Tobias J. Kippenberg. «Chapter 5 - Cavity Optomechanics with Whispering-Gallery Mode Optical Microresonators». En: *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Ed. por Paul Berman, Ennio Arimondo y Chun Lin. Vol. 58. Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics. Academic Press, 2010, págs. 207 -323. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1049-250X\(10\)05810-6](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(10)05810-6). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X10058106>.
- [8] Scott B. Papp, Katja Beha, Pascal Del'Haye, Franklyn Quinlan, Hansuek Lee, Kerry J. Vahala y Scott A. Diddams. «Microresonator frequency comb optical clock». En: *Optica* 1.1 (2014), págs. 10-14. DOI: [10.1364/OPTICA.1.000010](https://doi.org/10.1364/OPTICA.1.000010). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-1-1-10>.
- [9] Tara E. Drake y col. «Terahertz-Rate Kerr-Microresonator Optical Clockwork». En: *Phys. Rev. X* 9 (3 2019), pág. 031023. DOI: [10.1103/PhysRevX.9.031023](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.9.031023). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031023>.
- [10] Daniel J. Gargas, Michael C. Moore, Adrian Ni, Shu-Wei Chang, Zhaoyu Zhang, Shun-Lien Chuang y Peidong Yang. «Whispering Gallery Mode Lasing from Zinc Oxide Hexagonal Nanodisks». En: *ACS Nano* 4.6 (2010), págs. 3270-3276. DOI: [10.1021/nn9018174](https://doi.org/10.1021/nn9018174). eprint: <https://doi.org/10.1021/nn9018174>. URL: <https://doi.org/10.1021/nn9018174>.
- [11] Paula Inti Cutipa Giménez. «Efectos no lineales en microresonadores de polímero: el caso de microláseres de anillo». Tesis de mtría. Centro de Investigaciones en Óptica, 2017.
- [12] Sindy K. Y. Tang, Ratmir Derda, Qimin Quan, Marko Lončar y George M. Whitesides. «Continuously tunable microdroplet-laser in a microfluidic channel». En: *Opt. Express* 19.3 (2011), págs. 2204-2215. DOI: [10.1364/OE.19.002204](https://doi.org/10.1364/OE.19.002204). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-19-3-2204>.
- [13] Rui Chen, Van Duong Ta y Handong Sun. «Bending-Induced Bidirectional Tuning of Whispering Gallery Mode Lasing from Flexible Polymer Fibers». En: *ACS Photonics* 1.1 (2014), págs. 11-16. DOI: [10.1021/ph400084s](https://doi.org/10.1021/ph400084s). eprint: <https://doi.org/10.1021/ph400084s>. URL: <https://doi.org/10.1021/ph400084s>.
- [14] Fuxing Gu, Fuming Xie, Xing Lin, Shuangyi Linghu, Wei Fang, Heping Zeng, Limin Tong y Songlin Zhuang. «Single whispering-gallery mode lasing in polymer bottle microresonators via spatial pump engineering». En: *Light: Science & Applications* 6.10 (mar. de

- 2017), e17061-e17061. DOI: [10.1038/lsa.2017.61](https://doi.org/10.1038/lsa.2017.61). URL: <https://doi.org/10.1038/lsa.2017.61>.
- [15] Shancheng Yang, Yue Wang y Handong Sun. «Advances and Prospects for Whispering Gallery Mode Microcavities». En: *Advanced Optical Materials* 3.9 (2015), págs. 1136-1162. DOI: [10.1002/adom.201500232](https://doi.org/10.1002/adom.201500232). eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/adom.201500232>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adom.201500232>.
- [16] Kerry J. Vahala. «Optical microcavities». En: *Nature* 424.6950 (ago. de 2003), págs. 839-846. DOI: [10.1038/nature01939](https://doi.org/10.1038/nature01939). URL: <https://doi.org/10.1038/nature01939>.
- [17] Xingchen Ji, Felipe A. S. Barbosa, Samantha P. Roberts, Avik Dutt, Jaime Cardenas, Yoshitomo Okawachi, Alex Bryant, Alexander L. Gaeta y Michal Lipson. «Ultra-low-loss on-chip resonators with sub-milliwatt parametric oscillation threshold». En: *Optica* 4.6 (2017), págs. 619-624. DOI: [10.1364/OPTICA.4.000619](https://doi.org/10.1364/OPTICA.4.000619). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-6-619>.
- [18] Xiaoqin Shen, Rigoberto Castro Beltran, Vinh M. Diep, Soheil Soltani y Andrea M. Armani. «Low-threshold parametric oscillation in organically modified microcavities». En: *Science Advances* 4.1 (2018). DOI: [10.1126/sciadv.aao4507](https://doi.org/10.1126/sciadv.aao4507). eprint: <https://advances.sciencemag.org/content/4/1/eaao4507.full.pdf>. URL: <https://advances.sciencemag.org/content/4/1/eaao4507>.
- [19] M. G. Banaee y Jeff F. Young. «Squeezed state generation in photonic crystal microcavities». En: *Opt. Express* 16.25 (2008), págs. 20908-20919. DOI: [10.1364/OE.16.020908](https://doi.org/10.1364/OE.16.020908). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-25-20908>.
- [20] Wolf von Klitzing, Romain Long, Vladimir S Ilchenko, Jean Hare y Valérie Lefèvre-Seguin. «Tunable whispering gallery modes for spectroscopy and CQED experiments». En: *New Journal of Physics* 3 (2001), págs. 14-14. DOI: [10.1088/1367-2630/3/1/314](https://doi.org/10.1088/1367-2630/3/1/314). URL: <https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F3%2F1%2F314>.
- [21] Daniele Farnesi, Andrea Barucci, Simone Berneschi, Giancarlo C. Righini, Silvia Soria y Gualtiero Nunzi Conti. «Multicolour emission in silica whispering gallery mode microspherical resonators». En: *Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XVI*. Ed. por Alexis V. Kudryashov, Alan H. Paxton, Vladimir S. Ilchenko, Lutz Aschke y Kunihiro Washio. Vol. 8960. International Society for Optics y Photonics. SPIE, 2014, págs. 21-28. DOI: [10.1117/12.2039745](https://doi.org/10.1117/12.2039745). URL: <https://doi.org/10.1117/12.2039745>.

- [22] D. Farnesi, A. Barucci, G. C. Righini, S. Berneschi, S. Soria y G. Nunzi Conti. «Optical Frequency Conversion in Silica-Whispering-Gallery-Mode Microspherical Resonators». En: *Phys. Rev. Lett.* 112 (9 2014), pág. 093901. DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.093901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.093901). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.093901>.
- [23] Akitoshi Chen-Jinnai, Takumi Kato, Shun Fujii, Takuma Nagano, Tomoya Kobatake y Takasumi Tanabe. «Broad bandwidth third-harmonic generation via four-wave mixing and stimulated Raman scattering in a microcavity». En: *Opt. Express* 24.23 (2016), págs. 26322-26331. DOI: [10.1364/OE.24.026322](https://doi.org/10.1364/OE.24.026322). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-23-26322>.
- [24] Jiakun He, Bryn A. Bell, Alvaro Casas-Bedoya, Yanbing Zhang, Alex S. Clark, Chunle Xiong y Benjamin J. Eggleton. «Ultracompact quantum splitter of degenerate photon pairs». En: *Optica* 2.9 (2016), págs. 779-782. DOI: [10.1364/OPTICA.2.000779](https://doi.org/10.1364/OPTICA.2.000779). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-2-9-779>.
- [25] Dmitry V Strelakov, Christoph Marquardt, Andrey B Matsko, Harald G L Schwefel y Gerd Leuchs. «Nonlinear and quantum optics with whispering gallery resonators». En: *Journal of Optics* 18.12 (2016), pág. 123002. DOI: [10.1088/2040-8978/18/12/123002](https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/12/123002). URL: <https://doi.org/10.1088%2F2040-8978%2F18%2F12%2F123002>.
- [26] Enrico Pomarico, Bruno Sanguinetti, Nicolas Gisin, Robert Thew, Hugo Zbinden, Gerhard Schreiber, Abu Thomas y Wolfgang Sohler. «Waveguide-based OPO source of entangled photon pairs». En: *New Journal of Physics* 11.11 (2009), pág. 113042. DOI: [10.1088/1367-2630/11/11/113042](https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/11/113042). URL: <https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F11%2F11%2F113042>.
- [27] Xiang Guo, Chang ling Zou, Carsten Schuck, Hojoong Jung, Risheng Cheng y Hong X Tang. «Parametric down-conversion photon-pair source on a nanophotonic chip». En: *Light: Science & Applications* 6.5 (nov. de 2016), e16249-e16249. DOI: [10.1038/lsa.2016.249](https://doi.org/10.1038/lsa.2016.249). URL: <https://doi.org/10.1038/lsa.2016.249>.
- [28] J. U. Fürst, D. V. Strelakov, D. Elser, A. Aiello, U. L. Andersen, Ch. Marquardt y G. Leuchs. «Quantum Light from a Whispering-Gallery-Mode Disk Resonator». En: *Phys. Rev. Lett.* 106 (11 2011), pág. 113901. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.113901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.113901). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.113901>.
- [29] Michael Förtsch, Josef U. Fürst, Christoffer Wittmann, Dmitry Strelakov, Andrea Aiello, Maria V. Chekhova, Christine Silberhorn, Gerd Leuchs y Christoph Marquardt. «A versatile source of single photons for quantum information processing». En: *Nature Com-*

- munications* 4.1 (mayo de 2013). DOI: [10.1038/ncomms2838](https://doi.org/10.1038/ncomms2838). URL: <https://doi.org/10.1038/ncomms2838>.
- [30] David Höckel, Lars Koch y Oliver Benson. «Direct measurement of heralded single-photon statistics from a parametric down-conversion source». En: *Phys. Rev. A* 83 (1 2011), pág. 013802. DOI: [10.1103/PhysRevA.83.013802](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.013802). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.013802>.
- [31] Kai-Hong Luo, Harald Herrmann y Christine Silberhorn. «Temporal correlations of spectrally narrowband photon pair sources». En: *Quantum Science and Technology* 2.2 (2017), pág. 024002. DOI: [10.1088/2058-9565/aa6b8e](https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa6b8e). URL: <https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa6b8e>.
- [32] Davide Grassani, Stefano Azzini, Marco Liscidini, Matteo Galli, Michael J. Strain, Marc Sorel, J. E. Sipe y Daniele Bajoni. «Micrometer-scale integrated silicon source of time-energy entangled photons». En: *Optica* 2.2 (2015), págs. 88-94. DOI: [10.1364/OPTICA.2.000088](http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-2-2-88). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-2-2-88>.
- [33] Steven Rogers, Daniel Mulkey, Xiyuan Lu, Wei C. Jiang y Qiang Lin. «High Visibility Time-Energy Entangled Photons from a Silicon Nanophotonic Chip». En: *ACS Photonics* 3.10 (oct. de 2016), págs. 1754-1761. DOI: [10.1021/acsp Photonics.6b00423](https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.6b00423). URL: <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.6b00423>.
- [34] Jose A. Jaramillo-Villegas, Poolad Imany, Ogaga D. Odele, Daniel E. Leaird, Zhe-Yu Ou, Minghao Qi y Andrew M. Weiner. «Persistent energy-time entanglement covering multiple resonances of an on-chip biphoton frequency comb». En: *Optica* 4.6 (2017), págs. 655-658. DOI: [10.1364/OPTICA.4.000655](http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-6-655). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-6-655>.
- [35] Stefan F. Preble, Michael L. Fanto, Jeffrey A. Steidle, Christopher C. Tison, Gregory A. Howland, Zihao Wang y Paul M. Alsing. «On-Chip Quantum Interference from a Single Silicon Ring-Resonator Source». En: *Phys. Rev. Applied* 4 (2 2015), pág. 021001. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.4.021001](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.4.021001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.4.021001>.
- [36] Xiyuan Lu, Wei C. Jiang, Jidong Zhang y Qiang Lin. «Biphoton Statistics of Quantum Light Generated on a Silicon Chip». En: *ACS Photonics* 3.9 (jul. de 2016), págs. 1626-1636. DOI: [10.1021/acsp Photonics.6b00204](https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.6b00204). URL: <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.6b00204>.

- [37] Xiyuan Lu, Qing Li, Daron A. Westly, Gregory Moille, Anshuman Singh, Vikas Anant y Kartik Srinivasan. «Chip-integrated visible–telecom entangled photon pair source for quantum communication». En: *Nature Physics* 15.4 (ene. de 2019), págs. 373-381. DOI: [10.1038/s41567-018-0394-3](https://doi.org/10.1038/s41567-018-0394-3). URL: <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0394-3>.
- [38] J. W. Silverstone, R. Santagati, D. Bonneau, M. J. Strain, M. Sorel, J. L. O'Brien y M. G. Thompson. «Qubit entanglement between ring-resonator photon-pair sources on a silicon chip». En: *Nature Communications* 6.1 (ago. de 2015). DOI: [10.1038/ncomms8948](https://doi.org/10.1038/ncomms8948). URL: <https://doi.org/10.1038/ncomms8948>.
- [39] Lucia Caspani y col. «Multifrequency sources of quantum correlated photon pairs on-chip: a path toward integrated Quantum Frequency Combs». En: *Nanophotonics* 5.2 (2016), págs. 351 -362. URL: <https://www.degruyter.com/view/journals/nanoph/5/2/article-p351.xml>.
- [40] Govind Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. 5.^a ed. Academic Press, Elsevier, 2013. ISBN: 9780123970237.
- [41] Robert Boyd. *Nonlinear Optics*. 3.^a ed. Academic Press, Elsevier, 2018. ISBN: 9780123694706.
- [42] K Garay-Palmett, Y Jeronimo-Moreno y A B U'Ren. «Theory of cavity-enhanced spontaneous four wave mixing». En: *Laser Physics* 23.1 (2012), pág. 015201. DOI: [10.1088/1054-660x/23/1/015201](https://doi.org/10.1088/1054-660x/23/1/015201). URL: <https://doi.org/10.1088/1054-660x/23/1/015201>.
- [43] Y. Jeronimo-Moreno, S. Rodriguez-Benavides y A. B. U'Ren. «Theory of cavity-enhanced spontaneous parametric downconversion». En: *Laser Physics* 20.5 (2010), págs. 1221-1233. DOI: [10.1134/s1054660x10090409](https://doi.org/10.1134/s1054660x10090409).
- [44] Malvin Carl Teich, Bahaa E. A. Saleh, Franco N. C. Wong y Jeffrey H. Shapiro. «Variations on the theme of quantum optical coherence tomography: a review». En: *Quantum Information Processing* 11.4 (ago. de 2011), págs. 903-923. DOI: [10.1007/s11128-011-0266-6](https://doi.org/10.1007/s11128-011-0266-6). URL: <https://doi.org/10.1007/s11128-011-0266-6>.
- [45] Pablo Yepiz Graciano, Alí Michel Angulo Martínez, Dorilian Lopez-Mago, Gustavo Castro-Olvera, Martha Rosete-Aguilar, Jesús Garduño-Mejía, Roberto Ramírez Alarcón, Héctor Cruz Ramírez y Alfred B. U'Ren. «Interference effects in quantum-optical coherence tomography using spectrally engineered photon pairs». En: *Scientific Reports* 9.1 (2019). DOI: [10.1038/s41598-019-45088-0](https://doi.org/10.1038/s41598-019-45088-0).

- [46] Yunfei Wang, Jianfeng Li, Shanchao Zhang, Keyu Su, Yiru Zhou, Kaiyu Liao, Shengwang Du, Hui Yan y Shi-Liang Zhu. «Efficient quantum memory for single-photon polarization qubits». En: *Nature Photonics* 13.5 (mar. de 2019), págs. 346-351. DOI: [10.1038/s41566-019-0368-8](https://doi.org/10.1038/s41566-019-0368-8). URL: <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0368-8>.
- [47] K. F. Reim, J. Nunn, V. O. Lorenz, B. J. Sussman, K. C. Lee, N. K. Langford, D. Jaksch e I. A. Walmsley. «Towards high-speed optical quantum memories». En: *Nature Photonics* 4.4 (mar. de 2010), págs. 218-221. DOI: [10.1038/nphoton.2010.30](https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.30). URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.30>.
- [48] Alexander I. Lvovsky, Barry C. Sanders y Wolfgang Tittel. «Optical quantum memory». En: *Nature Photonics* 3.12 (dic. de 2009), págs. 706-714. DOI: [10.1038/nphoton.2009.231](https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.231). URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.231>.
- [49] Christian Reimer y col. «Cross-polarized photon-pair generation and bi-chromatically pumped optical parametric oscillation on a chip». En: *Nature Communications* 6.1 (sep. de 2015). DOI: [10.1038/ncomms9236](https://doi.org/10.1038/ncomms9236). URL: <https://doi.org/10.1038/ncomms9236>.
- [50] Michael Kues y col. «On-chip generation of high-dimensional entangled quantum states and their coherent control». En: *Nature* 546.7660 (jun. de 2017), págs. 622-626. DOI: [10.1038/nature22986](https://doi.org/10.1038/nature22986). URL: <https://doi.org/10.1038/nature22986>.
- [51] Stefano Azzini, Davide Grassani, Michael J. Strain, Marc Sorel, L. G. Helt, J. E. Sipe, Marco Liscidini, Matteo Galli y Daniele Bajoni. «Ultra-low power generation of twin photons in a compact silicon ring resonator». En: *Opt. Express* 20.21 (2012), págs. 23100-23107. DOI: [10.1364/OE.20.023100](http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-21-23100). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-21-23100>.
- [52] Zachary Vernon. «Microresonators for nonlinear quantum optics». Tesis doct. University of Toronto, 2017.
- [53] Jing Suo, Shuai Dong, Wei Zhang, Yidong Huang y Jiangde Peng. «Generation of hyper-entanglement on polarization and energy-time based on a silicon micro-ring cavity». En: *Opt. Express* 23.4 (2015), págs. 3985-3995. DOI: [10.1364/OE.23.003985](http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-23-4-3985). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-23-4-3985>.
- [54] Davide Grassani y col. «Energy correlations of photon pairs generated by a silicon microring resonator probed by Stimulated Four Wave Mixing». En: *Scientific Reports* 6.1 (abr. de 2016). DOI: [10.1038/srep23564](https://doi.org/10.1038/srep23564). URL: <https://doi.org/10.1038/srep23564>.

- [55] Steven D. Rogers, Austin Graf, Usman A. Javid y Qiang Lin. «Coherent quantum dynamics of systems with coupling-induced creation pathways». En: *Communications Physics* 2.1 (ago. de 2019). DOI: [10.1038/s42005-019-0193-x](https://doi.org/10.1038/s42005-019-0193-x). URL: <https://doi.org/10.1038/s42005-019-0193-x>.
- [56] Jingming Cao y Jolly Xiaver II. «The entangled photons generation in third order nonlinearity of spontaneous parametric down conversion by whispering gallery mode resonator». En: *AOPC 2017: Laser Components, Systems, and Applications*. Ed. por Shibin Jiang, Lijun Wang, Lan Jiang y Long Zhang. Vol. 10457. International Society for Optics y Photonics. SPIE, 2017, págs. 720-742. DOI: [10.1117/12.2285365](https://doi.org/10.1117/12.2285365). URL: <https://doi.org/10.1117/12.2285365>.
- [57] M Akbari y A A Kalachev. «Third-order spontaneous parametric down-conversion in a ring microcavity». En: *Laser Physics Letters* 13.11 (2016), pág. 115204. DOI: [10.1088/1612-2011/13/11/115204](https://doi.org/10.1088/1612-2011/13/11/115204). URL: <https://doi.org/10.1088/1612-2011/13/11/115204>.
- [58] Markus Rambach, Aleksandrina Nikolova, Till J. Weinhold y Andrew G. White. «Sub-megahertz linewidth single photon source». En: *APL Photonics* 1.9 (2016), pág. 096101. DOI: [10.1063/1.4966915](https://doi.org/10.1063/1.4966915). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.4966915>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4966915>.
- [59] Oliver Slattery, Lijun Ma, Paulina Kuo y Xiao Tang. «Narrow-linewidth source of greatly non-degenerate photon pairs for quantum repeaters from a short singly resonant cavity». En: *Applied Physics B* 121.4 (ago. de 2015), págs. 413-419. DOI: [10.1007/s00340-015-6198-6](https://doi.org/10.1007/s00340-015-6198-6). URL: <https://doi.org/10.1007/s00340-015-6198-6>.
- [60] Julia Fekete, Daniel Rieländer, Matteo Cristiani y Hugues de Riedmatten. «Ultrannarrow-Band Photon-Pair Source Compatible with Solid State Quantum Memories and Telecommunication Networks». En: *Phys. Rev. Lett.* 110 (22 2013), pág. 220502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.220502](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.220502). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.220502>.
- [61] Stratton Julius Adams. *Electromagnetic Theory*. en. Google-Books-ID: H2t8CgAAQBAJ. Read Books Ltd, abr. de 2013. ISBN: 9781446549155.
- [62] A. Chiasera, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, Y. Jestin, G. Nunzi Conti, S. Pelli, S. Soria y G.C. Righini. «Spherical whispering-gallery-mode microresonators». En: *Laser & Photonics Reviews* 4.3 (2010), págs. 457-482. DOI: [10.1002/lpor.200910016](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/lpor.200910016). eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/lpor.200910016>.

- URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/lpor.200910016>.
- [63] François Treussart. «Étude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions néodyme». Thèse de Doctorat. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Département de Physique de l'École Normale Supérieure, 2018.
- [64] G. C. Righini, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, G. Nunzi Conti, D. Ristic y S. Soria. «Whispering gallery mode microresonators: Fundamentals and applications». En: *La Rivista del Nuovo Cimento* 34.7 (2011), págs. 435-488. ISSN: 1826-9850. DOI: [10.1393/ncr/i2011-10067-2](https://doi.org/10.1393/ncr/i2011-10067-2). URL: <https://doi.org/10.1393/ncr/i2011-10067-2>.
- [65] Stéphane Balac y Patrice Féron. *Whispering gallery modes volume computation in optical micro-spheres*. Research Report. FOTON, UMR CNRS 6082, dic. de 2014. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01279396>.
- [66] John Rayleigh. *The Theory of Sound*. Second. Vol. II. Macmillan y Co., 1896. URL: <https://archive.org/details/theoryofsound02raylrich>.
- [67] Michael Joseph Humphrey. «CALCULATION OF COUPLING BETWEEN TAPERED FIBER MODES AND WHISPERING-GALLERY MODES OF A SPHERICAL MICROLASER». Tesis doct. Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University, 2004.
- [68] Tobias Jan August Kippenberg. «Nonlinear Optics in Ultra-high-Q Whispering-Gallery Optical Microcavities». en. Tesis doct. 2004. DOI: [10.7907/T5B6-9R14](https://doi.org/10.7907/T5B6-9R14).
- [69] H. M. Lai, P. T. Leung, K. Young, P. W. Barber y S. C. Hill. «Time-independent perturbation for leaking electromagnetic modes in open systems with application to resonances in microdroplets». En: *Physical Review A* 41.9 (1990), págs. 5187-5198. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.5187>.
- [70] John Heebner, Rohit Grover y Tarek Ibrahim. *Optical Microresonators*. Springer New York, 19 de dic. de 2007. ISBN: 978-0-387-73068-4. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-73068-4>. URL: https://www.ebook.de/de/product/24984100/john_heelbner_rohit_grover_tarek_ibrahim_optical_microresonators.html.
- [71] Vladimir S. Ilchenko, X. Steve Yao y Lute Maleki. «Pigtailing the high-Q microsphere cavity: a simple fiber coupler for optical whispering-gallery modes». En: *Optics Letters* 24.11 (1999), pág. 723. DOI: [10.1364/OL.24.000723](https://doi.org/10.1364/OL.24.000723).

- [72] Yong-Chun Liu, Yun-Feng Xiao, Xue-Feng Jiang, Bei-Bei Li, Yan Li y Qihuang Gong. «Cavity-QED treatment of scattering-induced free-space excitation and collection in high-Q whispering-gallery microcavities». En: *Physical Review A* 85.1 (2012), pág. 013843. DOI: [10.1103/PhysRevA.85.013843](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.013843).
- [73] Arturo Bianchetti, Alejandro Federico, Serge Vincent, Sivaraman Subramanian y Frank Vollmer. «Refractometry-based air pressure sensing using glass microspheres as high-Q whispering-gallery mode microresonators». En: *Optics Communications* 394 (2017), págs. 152-156. DOI: [10.1016/j.optcom.2017.03.009](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2017.03.009).
- [74] Giancarlo Righini y Silvia Soria. «Biosensing by WGM Microspherical Resonators». En: *Sensors* 16.6 (2016), pág. 905. DOI: [10.3390/s16060905](https://doi.org/10.3390/s16060905).
- [75] César Bertoni Ocampo. «Sintonización en fibra óptica birrefringente mediante su estrechamiento, variación de temperatura y aplicación de estrés longitudinal, del espectro del estado de dos fotones generado por mezclado de cuatro ondas espontáneo». Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2018.
- [76] D. Gloge. «Weakly Guiding Fibers». En: *Applied Optics* 10.10 (1971), pág. 2252. DOI: <https://doi.org/10.1364/AO.10.002252>.
- [77] Rüdiger Paschotta. «Fibers». En: *RP Photonics Encyclopedia* (Accesado al 1/7/20). URL: <https://www.rp-photonics.com/fibers.html>.
- [78] H. L. Sørensen, E. S. Polzik y J. Appel. «Heater Self-Calibration Technique for Shape Prediction of Fiber Tapers». En: *Journal of Lightwave Technology* 32.10 (2014), págs. 1886-1891. ISSN: 1558-2213. DOI: [10.1109/JLT.2014.2314319](https://doi.org/10.1109/JLT.2014.2314319).
- [79] Yingxin Xu, Wei Fang y Limin Tong. «Real-time control of micro/nanofiber waist diameter with ultrahigh accuracy and precision». En: *Opt. Express* 25.9 (2017), págs. 10434-10440. ISSN: 1094-4087. DOI: [10.1364/oe.25.010434](https://doi.org/10.1364/oe.25.010434). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-25-9-10434>.
- [80] J. E. Hoffman, S. Ravets, J. A. Grover, P. Solano, P. R. Kordell, J. D. Wong-Campos, L. A. Orozco y S. L. Rolston. «Ultrahigh transmission optical nanofibers». En: *AIP Advances* 4.6 (2014), pág. 067124. DOI: [10.1063/1.4879799](https://doi.org/10.1063/1.4879799).
- [81] E Ortiz-Ricardo, C Bertoni-Ocampo, Z Ibarra-Borja, R Ramirez-Alarcon, D Cruz-Delgado, H Cruz-Ramirez, K Garay-Palmett y A B U'Ren. «Spectral tunability of two-photon states generated by spontaneous four-wave mixing: fibre tapering, temperature variation

- and longitudinal stress». En: *Quantum Science and Technology* 2.3 (2017), pág. 034015. DOI: [10.1088/2058-9565/aa7a37](https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa7a37).
- [82] Charles Y. H. Tsao, David N. Payne y W. Alec Gambling. «Modal characteristics of three-layered optical fiber waveguides: a modified approach». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 6.4 (1989), págs. 555-563. DOI: [10.1364/JOSAA.6.000555](https://doi.org/10.1364/JOSAA.6.000555). URL: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-6-4-555>.
- [83] M. Kong y B. Shi. «Field Solution and Characteristics of Cladding Modes of Optical Fibers». En: *Fiber and Integrated Optics* 25.4 (2006), págs. 305-321. DOI: [10.1080/01468030600692859](https://doi.org/10.1080/01468030600692859). eprint: <https://doi.org/10.1080/01468030600692859>. URL: <https://doi.org/10.1080/01468030600692859>.
- [84] S. Ravets, J. E. Hoffman, P. R. Kordell, J. D. Wong-Campos, S. L. Rolston y L. A. Orozco. «Intermodal energy transfer in a tapered optical fiber: optimizing transmission». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 30.11 (2013), págs. 2361-2371. DOI: [10.1364/JOSAA.30.002361](https://doi.org/10.1364/JOSAA.30.002361). URL: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-30-11-2361>.
- [85] Fredrik K. Fatemi, Jonathan E. Hoffman, Pablo Solano, Eliot F. Fenton, Guy Beadie, Steven L. Rolston y Luis A. Orozco. «Modal interference in optical nanofibers for sub-Angstrom radius sensitivity». En: *Optica* 4.1 (2017), págs. 157-162. DOI: [10.1364/OPTICA.4.000157](https://doi.org/10.1364/OPTICA.4.000157). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-1-157>.
- [86] Fedja Orucevic, Valérie Lefèvre-Seguin y Jean Hare. «Transmittance and near-field characterization of sub-wavelength tapered optical fibers». En: *Optica* 15 (2007), pág. 13624. ISSN: 1094-4087. DOI: [10.1364/oe.15.013624](https://doi.org/10.1364/oe.15.013624).
- [87] Mary C. Frawley, Alex Petcu-Colan, Viet Giang Truong y Síle Nic Chormaic. «Higher order mode propagation in an optical nanofiber». En: *Optics Communications* 285.23 (oct. de 2012), págs. 4648-4654. DOI: [10.1016/j.optcom.2012.05.016](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.05.016). URL: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.05.016>.
- [88] Michael J. Humphrey, Elijah Dale, A.T. Rosenberger y D.K. Bandy. «Calculation of optimal fiber radius and whispering-gallery mode spectra for a fiber-coupled microsphere». En: *Optics Communications* 271.1 (2007), págs. 124-131. DOI: [10.1016/j.optcom.2006.10.018](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.10.018).
- [89] Shahab Bakhtiari Gorajoobi, Ganapathy Senthil Murugan y Michalis N. Zervas. «Efficient excitation and phase matching of fiber-coupled degenerate whispering gallery modes». En: *Journal of the Optical Society of America B* 36.9 (2019), pág. 2452. DOI: [10.1364/josab.36.002452](https://doi.org/10.1364/josab.36.002452).

- [90] Eugene Hecht. *Óptica*. Madrid: Addison Wesley, 2000. ISBN: 9788478290253.
- [91] Leno Pedrotti. «Basic Physical Optics». En: *Fundamentals of Photonics*. SPIE, págs. 117-168. DOI: [10.1117/3.784938.ch4](https://doi.org/10.1117/3.784938.ch4).
- [92] George C. Baldwin. *An Introduction to Nonlinear Optics*. Springer US, 30 de abr. de 1974. 168 págs. ISBN: 030620004X.
- [93] Y. R. Shen. *The principles of nonlinear optics*. New York: J. Wiley, 1984. ISBN: 9780471889984.
- [94] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing y P. S. Pershan. «Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric». En: *Physical Review* 127.6 (1962), págs. 1918-1939. DOI: [10.1103/PhysRev.127.1918](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.1918).
- [95] Reza Hodajerdi. «Production Cavity and Central Optics for a Light Shining through a Wall Experiment». Tesis doct. Universität Hamburg, 2014.
- [96] Corning® SFM-28® Ultra Optical Fiber. PI1424. Product Information. Corning Incorporated. 2019. URL: <https://www.corning.com/media/worldwide/coc/documents/Fiber/PI-1424-AEN.pdf>.
- [97] Stéphane Trebaol, Yannick Dumeige y Patrice Féron. «Ringling phenomenon in coupled cavities: Application to modal coupling in whispering-gallery-mode resonators». En: *Phys. Rev. A* 81 (4 2010), pág. 043828. DOI: [10.1103/PhysRevA.81.043828](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.043828). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.043828>.
- [98] George Arfken. *Mathematical methods for physicists : a comprehensive guide*. Waltham, MA: Academic Press is an imprint of Elsevier, 2013. ISBN: 9780123846556.
- [99] Shun-Lien Chuang. «A coupled mode formulation by reciprocity and a variational principle». En: *Journal of Lightwave Technology* 5.1 (1987), págs. 5-15. DOI: [10.1109/JLT.1987.1075409](https://doi.org/10.1109/JLT.1987.1075409).
- [100] Allan W. Snyder y John D. Love. *Optical Waveguide Theory*. Springer US, 1984. DOI: [10.1007/978-1-4613-2813-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2813-1).
- [101] A. Hardy y W. Streifer. «Coupled mode theory of parallel waveguides». En: *Journal of Lightwave Technology* 3.5 (1985), págs. 1135-1146. DOI: [10.1109/jlt.1985.1074291](https://doi.org/10.1109/jlt.1985.1074291).
- [102] T. A. Birks e Y. W. Li. «The shape of fiber tapers». En: *Journal of Lightwave Technology* 10.4 (1992), págs. 432-438. ISSN: 1558-2213. DOI: [10.1109/50.134196](https://doi.org/10.1109/50.134196).
- [103] Freja Thilde Knudsen Solvej Pedersen. «Producing adiabatic fiber tapers, Numerical simulations and measurements». Bachelor thesis. University of Copenhagen, Faculty of Science, 2014.

- [104] Leon Cohen. *Time Frequency Analysis: Theory and Applications*. PRENTICE HALL, 1 de dic. de 1994. 320 págs. ISBN: 978-0135945322. URL: https://www.ebook.de/de/product/3624814/leon_cohen_time_frequency_analysis_theory_and_applications.html.
- [105] Nasser Kehtarnavaz. *Digital signal processing system-level design using LabVIEW*. Oxford: Elsevier/Newnes, 2005. ISBN: 0-7506-7914-X.
- [106] Meinard Mller. *Fundamentals of Music Processing*. Springer-Verlag GmbH, 21 de jul. de 2015. ISBN: 978-3-319-21945-5.

COLOFÓN

Este documento se compuso utilizando la apariencia tipográfica `classicthesis` desarrollada por André Miede e Ivo Pletikosić. El estilo fue inspirado por el libro fundamental de tipografía *The Elements of Typographic Style*.

El paquete `classicthesis` y su documentación está disponible para \LaTeX en:

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

Las marcas y modelos comerciales mencionados en este texto son propiedad de sus respectivos dueños.

Versión final al 20 de abril de 2021 (`classicthesis v4.6`).