Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Caracterización de Dendroides por Retracciones sobre Árboles

T E S I S

que para obtener el título de:

matemático

P R E S E N T A :

Ricardo García Martínez

TUTOR

Dr. Alejandro Illanes Mejía

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Hoja de información

1. **Datos del alumno**
   García
   Martínez
   Ricardo
   9512421138
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Licenciatura en Matemáticas
   416062494

2. **Datos del tutor**
   Dr.
   Alejandro
   Illanes
   Mejía

3. **Datos del Sinodal 1**
   Dra.
   Patricia
   Pellicer
   Covarrubias

4. **Datos del Sinodal 2**
   Dr.
   Leobardo
   Fernández
   Román

5. **Datos del Sinodal 3**
   Dr.
   Jorge Marcos
   Martínez
   Montejano

6. **Datos del Sinodal 4**
   Dr.
   Rodrigo Jesús
   Hernández
   Gutiérrez

7. **Datos del Trabajo**
   Caracterización de Dendroides por Retracciones sobre Árboles.
   67 pp.
   2021

Agradecimientos

A mis padres Jaqueline y Eduardo y a mi hermano Carlos por su gran apoyo durante toda mi formación académica y alentarme a dar lo mejor de mí.

A mis profesores por guiarme a través de este maravilloso campo que son las matemáticas.

A mis compañeros y amigos por estar a mi lado a lo largo de estos años, ayudándome a crecer personal y profesionalmente.

Índice general

Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto y conexo con más de un punto. Un **subcontinuo** de un continuo X es un espacio no vacío, compacto y conexo de X. Entonces los conjuntos de un solo punto son subcontinuos.

Los continuos constituyen una clase de espacios topológicos particularmente interesante y también muy extensa. Por muchas razones el continuo más simple es el intervalo $[0,1]$. Otro continuo muy simple es la circunferencia unitaria S^1 centrada en el origen dentro del plano. Un **arco** es un espacio homeomorfo a $[0,1]$ y una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a S^1.

Los siguientes continuos más sencillos son las **gráficas finitas**, las cuales se construyen como sigue: tomamos un número finito de arcos $A_1, \ldots, A_n$. Hacemos $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cup A_2$, donde A_2 se pega a A_1 por uno o los dos extremos de A_2. El continuo B_3 se construye uniendo A_3 a B_2 por uno o los dos extremos de A_3 y entonces $B_3 = B_2 \cup A_3$. Se continúa este proceso hasta obtener $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Las gráficas finitas son todos los continuos B_n que se construyen de esta manera. Dotamos a B_n con la topología donde un conjunto U es abierto si y sólo si, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U \cap A_i$ es abierto en A_i. Dada una gráfica finita G se dice que G es un **árbol** si y sólo si G no contiene curvas cerradas simples.

Otra clase de continuos relativamente simple y popular es la de los dendorides. Un **dendroide** es un continuo arcoconexo tal que la intersección de cada par de subcontinuos es conexa. El arco y las gráficas finitas de tipo árbol son dendroides. La palabra dendroide deriva del griego "déndron"que significa árbol, más adelante explicamos la relación de estos espacios con este nombre. En la Figura 1 mostramos algunos ejemplos de dendroides.

El término dendroide fue utilizado por primera vez por el matemático polaco Bronislaw Knaster en el problema 323 de la revista Colloquium Mathematicum 8, (1962), página 139, donde Knaster pregunta por una caracte-

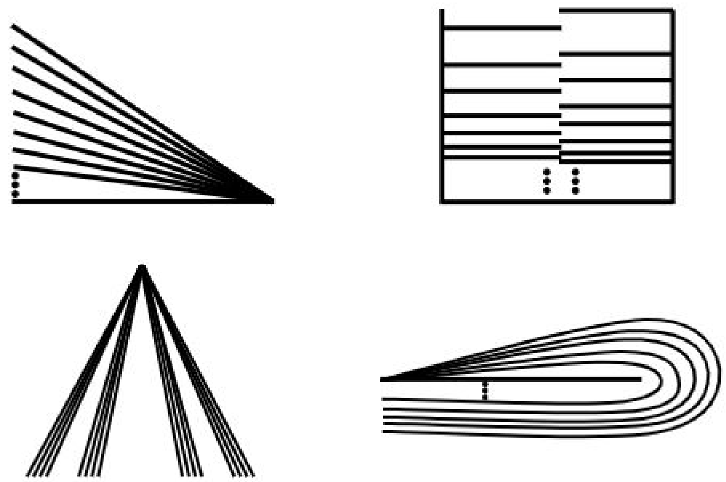


Figura 1: Ejemplos de dendroides

rización interna de los dendroides aplanables. Esta caracterización no se ha conseguido pero sí se saben muchas cosas de los dendroides, como que todos ellos son de dimensión uno y por lo tanto encajables en $\mathbb{R}^3$.

Si bien fue Knaster quien les dio nombre por primera vez, los dendroides ya habían sido considerados por algunos autores antes. Por ejemplo, K. Borsuk ya había probado que tienen la propiedad del punto fijo [3]. Para una buena introducción a los dendroides podemos recomendar el artículo [5] y para conocer problemas abiertos en esta área recomendamos el artículo [12].

Aunque Knaster adoptó la definición que hemos enunciado, la idea geométrica que tenía de ellos es que eran los continuos X con la siguiente propiedad:

Propiedad D Para todo $\epsilon > 0$ existen un árbol $T \subseteq X$ y una función continua $r : X \to T$ tal que $r(p) = p$, para toda $p \in T$ y que además cumple que para toda $p \in T$, el diámetro de $r^{-1}(\{p\})$ es menor a ϵ.

Informalmente podemos enunciar esta propiedad diciendo que para toda $\epsilon > 0$, podemos hallar un árbol T dentro de X tal que X tiene la forma de T. Los dendroides serían entonces continuos "parecidos" a los árboles. De aquí su nombre.

Lo sorprendente e intrigante es que a 60 años de su nacimiento formal no se sabe si los dendroides tienen la propiedad D y éste es uno de los problemas abiertos más importantes de la teoría de continuos.

A principios de la década de 1970, J. B. Fugate "mostró" que los dendroides abanicos [8] y los dendroides suaves [9] tienen la propiedad D. Ponemos comillas en mostró porque las pruebas de Fugate, aún para estas dos clases muy particulares de dendroides son erróneas. De hecho, en su tesis de licenciatura Marcela Ordorica Arango desarrolló la prueba de Fugate para dendroides suaves y mostró que hay al menos un paso en el que esta prueba no se puede aplicar para todos los dendroides de esta clase [14]. Así que lo más amable que se puede decir al respecto es que la prueba está incompleta.

Otro investigador que trabajó fuertemente en el problema de determinar si los dendroides tienen la propiedad D fue el francés Robert Cauty. Sam B. Nadler en su libro [13], en la página 192 comentó respecto a este problema: ”Recently Robert Cauty has announced an affirmative answer". Este libro fue publicado en 1992.

Después de este anuncio no se supo más de Robert Cauty hasta el año 2007 cuando escribió el artículo "Sur l'aproximation des dendroides par des arbres" [4]. Debe haber sido en el "Spring Topology and Dynamics Conference" de 2008 donde se dio la siguiente conversación durante una de las pláticas:

Investigador 1: Cauty ya probó que la conjetura de los dendroides tiene una respuesta positiva.

Investigador 2 (un poco molesto)**:** No podemos creerlo hasta que el trabajo esté perfectamente revisado y publicado. Cauty ya había anunciado esto mismo antes y se había equivocado. Además su costumbre de escribir en francés hace que sus trabajos sean más dificiles de leer y de creer.

Después de esto los especialistas en Teoría de Continuos decidieron esperar a las revisiones del artículo. Lamentablemente Robert Cauty murió el 13 de julio de 2013. En 2014 el editor de la revista a la que el artículo había sido sometido, puso a disposición de los especialistas el artículo e hizo saber que años antes habrían pedido a Cauty que aclarara algunas partes obscuras de su prueba, para que los revisores pudieran determinar su validez. Cauty no hizo este trabajo y hasta el día de hoy no se sabe si su prueba sirve o podría servir.

En la nota bibliográfica [1], escrita en ucraniano, los autores dicen que Cauty resolvió el problema de los dendroides, pero en la bibliografía ponen el artículo en la categoría de "preprint", por lo que creemos que su comentario no tiene fundamento.

Con valentía decidimos abordar el artículo de Robert Cauty para tratar de determinar si la prueba es correcta o tiene algún error irreparable. El francés representa un obstáculo menor, el verdadero problema es la estructura, o mejor dicho la falta de ella, del artículo. Esto impidió que llegáramos más lejos. Lo que ofrecemos en este trabajo es la tercera parte del artículo con una estructura clara y detallada. Cubrimos los conceptos y resultados preliminares del desarrollo de la prueba. Así, si en un futuro, hay algún otro valiente que decida enfrentarse a esta empresa, ya tendrá un escalón importante donde apoyarse.

Para abordar este trabajo necesitaremos los conceptos y resultados básicos de la teoría de continuos, en especial aquellos resultados relacionados con los dendroides. Estaremos trabajando constantemente con arcos y árboles, por lo que es conveniente estar familiarizado con estos espacios y sus propiedades. También es útil conocer algunos conceptos básicos de la teoría de gráficas. En el primer capítulo expondremos todos los resultados necesarios que serán utilizados a lo largo del desarrollo del trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Hiperespacios

Sea X un continuo no degenerado con métrica d. Un **hiperespacio** de X es una familia de subconjuntos de X con alguna característica en especial. Algunos hiperespacios de suma importancia son:

(a) $2^X = \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}$, y

(b) $C(X) = \left\{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\right\}$.

Notemos que $C(X) \subseteq 2^X$, por lo que basta darle una topología a 2^X que $C(X)$ heredará como subespacio.

Definición 1.1.1 *Sean X un continuo $A \subseteq X$ y $\epsilon > 0$, **la nube de radio ϵ alrededor de A** es:*

$$D(A, \epsilon) = \{x \in X \mid \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

Definición 1.1.2 *Sea X un continuo. Dados $A, B \in 2^X$, se define la **métrica de Hausdorff** como:*

$$H(A, B) = inf\,\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq D(B, \epsilon) \text{ y } B \subseteq D(A, \epsilon)\}.$$

La demostración de que H es una métrica puede consultarse en [13, p. 53]. Además con la topología inducida por esta métrica los espacios mencionados 2^X y $C(X)$ resultan conexos y compactos [13, p. 59,61].

Teorema 1.1.3 . *Sean X un continuo con métrica d, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en 2^X tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Entonces:*

(a) si $A_n \subseteq B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subseteq B$,

(b) $\lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B$,

(c) si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración.

(a) Sea $a \in A$. Ya que B es cerrado, bastará con que probemos que $a \in \overline{B}$. Dada $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ y $H(B, B_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos entonces que $A \subseteq D(A_n, \frac{\epsilon}{2})$ y $B_n \subseteq D(B, \frac{\epsilon}{2})$. Como $a \in A$, existe $p \in A_n$ tal que $d(a, p) < \frac{\epsilon}{2}$. Ya que $p \in B_n$, existe $b \in B$ tal que $d(p, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Por la desigualdad de triángulo, $d(a, b) \leq d(a, p) + d(p, b) < \epsilon$. Hemos probado que $a \in \overline{B} = B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

(b) Veamos primero que si $\epsilon > 0$, $C, D, E, F \in 2^X$, $H(C, D) < \epsilon$ y $H(E, F) < \epsilon$, entonces $H(C \cup E, D \cup F) \leq \epsilon$. Para ver esto, tomemos $p \in C \cup E$. Por simetría, podemos suponer que $p \in C$. Como $H(C, D) < \epsilon$, tenemos que $C \subseteq D(D, \epsilon)$. De manera que existe $q \in D$ tal que $d(p, q) < \epsilon$. Esto muestra que $C \cup E \subseteq D(D \cup F, \epsilon)$. Similarmente se muestra que $D \cup F \subseteq D(C \cup E, \epsilon)$. Por lo tanto $H(C \cup E, D \cup F) \leq \epsilon$.

Ahora tomemos $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $H(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ y $H(B, B_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Por el párrafo previo, $H(A \cup B, A_n \cup B_n) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B$.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in A_n \cap B_n$. Puesto que $x_n \in X$, que es un espacio compacto, tenemos que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto $x \in X$. Afirmamos que $x \in A \cap B$. Ya que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $\{x_{n_k}\} \subseteq A_{n_k} \cap B_{n_k}$, por el inciso (a) $\{x\} \subseteq A$ y $\{x\} \subseteq$ B. Por lo tanto $x \in A \cap B$. ■

1.2. Dendroides

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico conexo. Decimos que X es **unicoherente** si para todo par de subcontinuos Y y Z de X, tales que $Y \cup Z =$*

X, se tiene que $Y \cap Z$ es conexo.

Definición 1.2.2 *Un* ***dendroide*** *es un continuo X arco conexo, hereditariamente unicoherente, esto último quiere decir que todo subcontinuo de X es unicoherente.*

Definición 1.2.3 *Sea x un punto de un dendroide X. Decimos que x un es* ***punto terminal*** *si es extremo de cualquier arco de X que lo contiene.*

Definición 1.2.4 *Sean X un dendroide y $x \in X$. Decimos que X* ***es colocalmente conexo en*** *x si para cualquier abierto U de X que contiene a x, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es conexo.*

Lema 1.2.5 *Sean X un dendroide y Y y Z subcontinuos de X. Entonces $Y \cap Z$ es conexo.*

Demostración. Si $Y \cap Z = \emptyset$, entonces es conexo. Si $Y \cap Z \neq \emptyset$, ya que X es hereditariamente unicoherente, entonces $Y \cup Z$ es un subcontinuo de X con la propiedad de ser unicoherente. Por la definición de este propiedad, concluimos entonces que $Y \cap Z$ es conexo. ■

Lema 1.2.6 *Sea X un dendroide, entonces:*

(1) si x y y son dos puntos en X, Y es un subcontinuo de X tal que $x, y \in Y$ y xy es un arco en X que une a x con y, entonces $xy \subseteq Y$,

(2) todo subcontinuo de X es un dendroide,

(3) para todo par de puntos distintos, $p, q \in X$, existe un único arco con extremos p y q al que denotaremos por pq, también definimos $pp = \{p\}$.

Demostración.

(1) Puesto que xy y Y son subcontinuos de X, y X es un dendroide, entonces por el Lema 1.2.5 $xy \cap Y$ es un subconjunto conexo del arco xy que contiene a los puntos x, y. Como el único subconjunto conexo de $[0, 1]$ que contiene a los puntos 0 y 1 es el mismo intervalo $[0, 1]$, tenemos que

$xy \cap Y = xy$. Por lo tanto $xy \subseteq Y$.

(2) Sea Y un subcontinuo de X. Debemos verificar que Y es hereditariamente unicoherente y arco conexo.

Veamos primero que Y es hereditariamente unicoherente. Sean Z un subcontinuo de Y. Puesto que Z es a su vez un subcontinuo de X, entonces Z es unicoherente. Por lo tanto Y es hereditariamente unicoherente.

Veamos ahora que Y es arco conexo. Sean x y y dos puntos distintos en Y. Por ser X arco conexo, existe un arco xy en X que une a x con y. Por el inciso (1) tenemos que $xy \subseteq Y$, por lo tanto Y es arco conexo.

(3) Sean $p, q \in X$. Puesto que X es arco conexo, existe un arco α, con extremos p y q. Veamos que este arco es único. Supongamos que existe otro arco β con extremos p y q. Por el inciso (1), puesto que α es un arco con extremos p y q y β un subcontinuo que contiene a p y a q, tenemos que $\alpha \subseteq \beta$. Análogamente $\beta \subseteq \alpha$. Por lo tanto $\alpha = \beta$. ■

Lema 1.2.7 *Sea x un punto de un dendroide X. Si X es colocalmente conexo en x, entonces x es un punto terminal de X.*

Demostración. Supongamos que x no es terminal. Entonces existe un arco pq de X tal que $x \in pq$ y x es diferente de p y de q. Podemos dar un abierto V de X tal que $x \in V$ y $V \cap \{p, q\} = \emptyset$. Puesto que X es colocalmente conexo en x entonces existe un abierto W de X, tal que $x \in W \subseteq V$ y $X \setminus W$ es conexo.

Como $V \cap \{p, q\} = \emptyset$, entonces p y q pertenecen a $X \setminus W$. Por el Lema 1.2.6(1), $pq \subseteq X \setminus W$, pero $x \in pq \cap W$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto x es un punto terminal. ■

Lema 1.2.8 *Sea X un dendroide, entonces:*

(1) si A es un subcontinuo de X y $p \in X$, existe un único punto $a \in A$ tal que $pa \cap A = \{a\}$ y $pa \setminus \{a\} \subseteq X \setminus A$. Si $p \notin A$, entonces $a \in Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ y el punto a se caracteriza porque, para toda $x \in A$, $a \in px$,

*(2) si Y, Z son subcontinuos de X tales que $Y \cap Z = \emptyset$, entonces existen $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$ tales que, para todo $y \in Y$ y $z \in Z$, el arco z_0y_0 está contenido en el arco zy. Al arco z_0y_0 lo llamaremos el **arco irreducible entre Z y Y**.*

Demostración.

(1) En el caso en que $p \in A$, el punto $a = p$ cumple con ser el único punto de A tal que $pa \cap A = \{a\}$ y $pa \setminus \{a\} \subseteq X \setminus A$. Supongamos ahora que $p \notin A$. Sean $x \in A$ y $\alpha : [0, 1] \to px$ un homeomorfismo entre el intervalo $[0, 1]$ y el arco px tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = x$. Puesto que A es compacto y conexo, tenemos que $\alpha^{-1}(A)$ es un conjunto compacto y no vacío. De manera que existe $t = \min \alpha^{-1}(A)$. Como $\alpha(t) \in A$, $\alpha(1) \in A$ y $\alpha([t, 1])$ es un arco o un conjunto de un solo punto(si $t = 1$), y A es un subcontinuo de X, tenemos que $\alpha([t, 1]) \subseteq A$. Sea $a = \alpha(t)$. Entonces $a \in px$ y $pa \cap A = (\alpha([0, t)) \cap A) \cup (\alpha(\{t\}) \cap A) = \emptyset \cup (\{a\} \cap A) = \{a\}$.

Ya que $pa \cap A = \{a\}$, entonces $pa \setminus \{a\} \subseteq X \setminus A$. Así mismo $a \in \overline{A}$ y pa es un arco, de modo que $a \in \overline{pa \setminus \{a\}} \subseteq \overline{X \setminus A}$. Por lo tanto $a \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = Fr(A)$.

Veamos ahora que el punto a es único. Supongamos por el contrario que existe $b \in A$, tal que $pb \cap A = \{b\}$. Como $pa \cup pb$ es un subcontinuo de X, por el Lema 1.2.5, $(pa \cup pb) \cap A = (pa \cap A) \cup (pb \cap A) = \{a, b\}$ es conexo. De manera que $a = b$ y por lo tanto el punto a es único.

Por último veamos que $a \in px$ para todo $x \in A$. Dado $x \in A$, el arco xa está contenido en A. Ya que $pa \cap A = \{a\}$, entonces $pa \cap xa = \{a\}$, lo que implica que $pa \cup ax$ es un arco que une a p con x, puesto que este arco es único entonces $pa \cup ax = px$, así que $a \in px$.

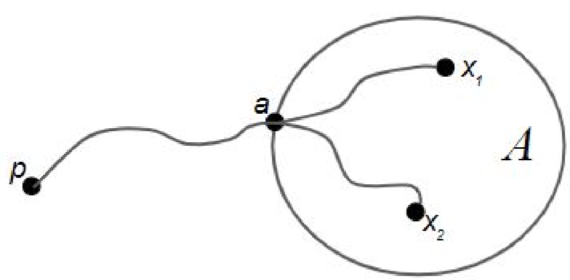


Figura 1.1: El punto a pertenece al arco entre p y cualquier punto de A.

(2) Tomemos un punto $q \in Z$, por el inciso anterior existe un único $y_0 \in Y$ tal que, $qy_0 \cap Y = \{y_0\}$ y para toda $y \in Y$, $y_0 \in qy$. Del mismo modo existe un único $z_0 \in Z$ tal que $y_0z_0 \cap Z = \{z_0\}$, y para toda $z \in Z$, $z_0 \in y_0z$, esto implica que $z_0 \in y_0q$ y $x_0y_0 \subseteq qy_0$. Veamos que el arco y_0z_0 cumple las

condiciones deseadas. Observemos que $y_0z_0 \cap (Y \cup Z) = (y_0z_0 \cap Y) \cup (y_0z_0 \cap Z) = (y_0z_0 \cap y_0q \cap Y) \cup (y_0z_0 \cap Z) = (y_0z_0 \cap \{y_0\}) \cup \{z_0\} = \{y_0, z_0\}$, por lo que $y_0z_0 \setminus \{y_0, z_0\} \subseteq X \setminus (Y \cup Z)$.

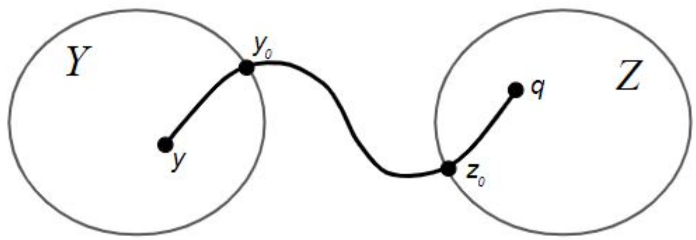


Figura 1.2: Arco irreducible entre dos subcontinuos.

Sean $y \in Y$ y $z \in Z$, entonces $zz_0 \subseteq Z$ y $yy_0 \subseteq Y$, por lo tanto $yy_0 \cap y_0z = \{y_0\}$ y $y_0z_0 \cap z_0z = \{z_0\}$. Entonces $yy_0 \cup y_0z_0 \cup z_0z$ es un arco en X con extremos y y z. Puesto que existe un único arco entre cada par de puntos, entonces $yy_0 \cup y_0z_0 \cup z_0z = yz$ y concluimos que $y_0z_0 \subseteq yz$. ■

Lema 1.2.9 *Sean X un dendroide y V un abierto de X tal que $A = X \setminus V$ es conexo. Si e_1e_2 es un arco en X tal que $e_1e_2 \cap V \neq \emptyset$ entonces:*

(1) $\{e_1, e_2\} \cap V \neq \emptyset$,

(2) para toda $x \in e_1e_2 \cap V$, existe $e \in \{e_1, e_2\}$ tal que $e \in V$ y x pertenece al arco irreducible entre e y A.

Demostración.

(1) Observemos que $e_1e_2 \setminus V = e_1e_2 \cap (X \setminus V)$ es un conjunto conexo. Si $e_1, e_2 \in X \setminus V$, entonces $e_1e_2 \setminus V$ es un subcontinuo de e_1e_2 que contiene a e_1 y a e_2. Por el lema 1.2.6 (1), $e_1e_2 \setminus V = e_1e_2$ y $e_1e_2 \cap V = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{e_1, e_2\} \cap V \neq \emptyset$.

(2) Por (1) alguno de los extremos del arco pertenece a V, podemos suponer que $e_1 \in V$. Analicemos tres posibles casos:

- Caso 1. $\{e_1, e_2\} \cap A \neq \emptyset$.

En este caso, ya que $e_1 \in V$, entonces $e_2 \in A$. Sea $a \in A$ tal que $e_1 a \cap A = \{a\}$. Entonces $a \in e_1 e_2$ y $e_1 e_2 \cap A = a e_2$. Tenemos entonces que $e_1 a$ es el arco irreducible entre e_1 y A y, puesto que $x \in e_1 e_2 \cap V = e_1 e_2 \setminus A = e_1 e_2 \setminus \{a\}$, entonces $x \in e_1 a$.

• Caso 2. $\{e_1, e_2\} \subseteq V$ y $e_1 e_2 \cap A \neq \emptyset$.

Como $e_1 e_2 \cap A$ es un subcontinuo contenido en el arco $e_1 e_2$, entonces es un arco o un conjunto de un sólo punto. Existen por lo tanto, $a_1, a_2 \in e_1 e_2$ tales que $e_1 e_2 \cap A = a_1 a_2$, con $e_1 < a_1 \leq a_2 < e_2$ (en el orden natural del arco $e_1 e_2$ con $e_1 < e_2$). Dado que $e_1 a_1 \cap A = \{a_1\}$ y $e_2 a_2 \cap A = \{a_2\}$, entonces $e_1 a_1$ y $e_2 a_2$ son los respectivos arcos irreducibles entre e_1 y A y e_2 y A. Notemos que $V \cap e_1 e_2 = (e_1 a_1 \cup e_2 a_2) \setminus \{a_1, a_2\}$. Como $x \notin A$ entonces $x \in e_1 a_1 \cup e_2 a_2$. Si $x \in e_1 a_1$ entonces tomamos $e = e_1$ en caso contrario $x \in e_2 a_2$ y tomamos $e = e_2$.

• Caso 3. $e_1 e_2 \subseteq V$.

Sean $q \in e_1 e_2$ y $a \in A$ tales que qa es el arco irreducible entre $e_1 e_2$ y A (Lema 1.2.8). Entonces $qa \cap A = \{a\}$. Notemos que $x \in e_1 q \cup e_2 q$. Supongamos que $x \in e_1 q$. Puesto que $e_1 q \cap q a_1 = \{q\}$ entonces $e_1 q \cup qa$ es el arco $e_1 a$, además, puesto que $e_1 a \cap A = (e_1 q \cap A) \cup (qa \cap A) = \{a\}$ entonces $e_1 a$ es el arco irreducible entre e_1 y A. Tenemos entonces que $e_1 \in V$, $e_1 a$ es el arco irreducible entre e_1 y A y x pertenece a él, hacemos $e = e_1$. Análogamente si $x \in e_2 q$, entonces $e_2 \in V$, x pertenece al arco irreducible entre e_2 y A y tomamos e_2. ■

Lema 1.2.10 *Sean X un dendroide, A subcontinuo de X, $x \in X \setminus A$ y $a \in A$ tal que xa el arco irreducible de x a A. Sean $p \in xa \setminus \{x, a\}$ y W un abierto de X tales que $p \in W$ y $x \notin \overline{W}$, entonces existe un abierto V de X tal que $x \in V$ y para toda $y \in V$, el arco irreducible entre y y A intersecta a W.*

Demostración. Supongamos que no existe el abierto V. Entonces podemos construir una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, y el arco irreducible de x_n a A, que denotaremos por B_n, no intersecta a W. Como el hiperespacio $C(X)$ es compacto, podemos suponer que la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un subcontinuo B de X. Ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, el arco B_n intersecta a A, entonces B intersecta a A. Notemos que $x \in B$. Entonces $xa \subseteq B$. Como cada B_n está contenido en $X \setminus W$ tenemos que $B \subseteq X \setminus W$.

Esto es absurdo pues $p \in W \cap xa \subseteq W \cap B$. La contradicción termina la prueba de la existencia de V. ■

El conjunto de puntos de X donde X es colocalmente conexo será denotado por $E_X = \{x \in X \mid X \text{ es colocalmente conexo en } x\}$. Cuando no exista confusión acerca del dendroide en que estemos trabajando denotaremos este conjunto simplemente por E. Los matemáticos J. Krasinkiewicz y P. Minc [10] demostraron el siguiente teorema de gran importancia.

Teorema 1.2.11 *(Krasinkiewicz-Minc) Sea X un dendroide. Entonces el conjunto $\{x \in X \mid x \in pq \text{ y } p, q \in E\}$, formado por los puntos pertenecientes a los arcos entre dos puntos en los que X es colocalmente conexo, es denso en X.*

El Teorema 1.2.11 puede encontrarse en la tesis de licenciatura de Marcela Ordorica [14, Capítulo 3], donde ella desarrolla una prueba en español con todos los detalles necesarios. La demostración original de este resultado puede consultarse en [10, Teoremas 3.5 y 4.1].

Lema 1.2.12 *Sea X un dendroide. Entonces el conjunto E_X es finito si y sólo si X es un árbol.*

Demostración. Supongamos primero que X es un árbol. Por el Lema 1.2.7, el conjunto E_X está contenido en el conjunto de puntos terminales de X, el cual es un conjunto finito por ser X un árbol. Por lo tanto E_X es finito.

Supongamos ahora que E_X es finito. Por el Teorema de Krasinkiewicz y Minc, $X_0 = \bigcup\{pq \mid p, q \in E_X\}$ es un conjunto denso en X. Pero X_0 es unión finita de arcos en un dendroide, por lo tanto es unión finita de árboles y en consecuencia es compacto. Por lo tanto, $X_0 = \overline{X_0} = X$ lo que implica que X_0 es conexo y entonces X es un árbol. ■

Lema 1.2.13 *Sean X un dendroide, Y un subcontinuo de X y x un punto de Y. Entonces si X es colocalmente conexo en x, también Y es colocalmente conexo en x.*

Demostración. Sea U un abierto de Y que contiene a x. Ya que Y es un subcontinuo de X, existe un abierto W de X tal que $U = Y \cap W$. Puesto que X es colocalmente conexo en el punto x, existe un abierto O de X que contiene a x, tal que $O \subseteq W$ y que $X \setminus O$ es conexo. Sea $V = O \cap Y$, tenemos entonces que $x \in V$ y $V \subseteq U$. Por último veamos que $Y \setminus V = Y \cap (X \setminus O)$, puesto que Y y $X \setminus O$, son ambos subcontinuos de X, su intersección es también conexa. Por lo tanto, Y es colocalmente conexo en x. ■

1.3. Cubiertas y Nervios

Definición 1.3.1 *Sea X espacio topológico. Una **cubierta** $\mathcal{C}$ de X es una familia de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$.*

Una herramienta útil que nos dará información acerca de una cubierta es su nervio. Antes de definir el nervio de una cubierta conviene recordar algunos conceptos de teoría de Gráficas.

Definición 1.3.2 *Una **gráfica** es un par ordenado $G = (V, A)$, donde V es un conjunto finito y $A \subseteq \{\{a, b\} \mid a, b \in V \text{ y } a \neq b\}$. Los elementos de V son llamados los **vértices** de G y los de A las **aristas** de G. Dados $a, b \in V$ decimos que existe una arista entre a y b en G si $a, b \in A$.*

Cuando nos sea dada una gráfica G denotaremos a los vértices como $V(G)$ y a las aristas como $A(G)$.

Definición 1.3.3 *Sean H y G gráficas. Diremos que H es una **subgráfica** de H si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.*

Definición 1.3.4 *Decimos que una gráfica G es **conexa** si para cualesquiera dos elementos u y v en $V(G)$, existe una secuencia finita $u = v_0, v_1, \ldots, v_n = v$ de elementos en $V(G)$, de forma que, para toda $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, se cumple que $\{v_i, v_{i+1}\} \in A(G)$. Llamaremos a la secuencia $v_0, v_1, ..., v_n$ un **camino** entre v_0 y v_n. Si la secuencia no repite vértices, entonces la llamaremos una **trayectoria**. Si una gráfica no es conexa diremos que es **inconexa**.*

Definición 1.3.5 *Dada una secuencia $\gamma = v_0, v_1, ..., v_n$ de vértices de una gráfica G, con $n \geq 3$. Diremos que γ es un **ciclo** si $v_0 = v_n$, la secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ es una trayectoria en G y $\{v_{n-1}, v_n\} \in A(G)$.*

Definición 1.3.6 *Sea G una gráfica, diremos que G es un **árbol** si es una gráfica conexa y sin ciclos.*

Algunos resultados relevantes acerca de los árboles que nos serán de utilidad son los siguientes.

Teorema 1.3.7 *Dados vértices u y v de un árbol T, existe una única trayectoria entre u y v.*

Teorema 1.3.8 *Sean T un árbol y $e \in A(T)$, entonces la gráfica $T - e$, donde $V(T-e) = V(T)$ y $A(T-e) = A(T) \setminus \{e\}$, es inconexa.*

La demostración del Teorema 1.3.7 puede hallarse en [2, Teorema 2.1, p. 25]. El Teorema 1.3.8 es consecuencia del Teorema 2.3 en [2, p. 27] puesto que un árbol es acíclico. Con esta información estamos listos para definir el nervio de una cubierta.

Definición 1.3.9 *Dados un conjunto no vacío X y una familia finita $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de X, a $\mathcal{F}$ le asociamos una gráfica $N(\mathcal{F})$ a la que llamaremos el* ***nervio*** *de $\mathcal{F}$ de la siguiente manera:*

Los vértices de $N(\mathcal{F})$ son los elementos de $\mathcal{F}$ y las aristas de $N(\mathcal{F})$ son los pares de elementos $\{F, G\}$ de $\mathcal{F}$, tales que $F \neq G$ y $F \cap G \neq \emptyset$.

Diremos que $N(\mathcal{F})$ es un ***árbol*** *si:*

(a) no existen tres elementos diferentes entre sí F, G y J tales que $F \cap G \cap J \neq \emptyset$.

(b) como gráfica, $N(\mathcal{F})$ es un árbol, es decir, es una gráfica conexa que no tiene ciclos.

En general el nervio de una familia de conjuntos es un objeto más complicado. La gráfica que acabamos de definir es sólo lo que se conoce como la parte de dimensión 1 del nervio. Adoptamos esta definición porque esto es todo lo que necesitamos.

En este trabajo usualmente las cubiertas que usaremos serán denotadas en la forma $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Para que todo funcione correctamente supondremos que si $\lambda \neq \gamma$, entonces $F_\lambda \neq F_\gamma$. Otra cosa importante que supondremos es que $F_\lambda \neq \emptyset$ para toda $\lambda \in \Lambda$.

Observación. Puesto que en la gráfica $N(\mathcal{F})$ tenemos que las aristas son pares de elementos diferentes con intersección no vacía, podemos dar la siguiente equivalencia respecto a que $N(\mathcal{F})$ sea conexo. Esta equivalencia nos

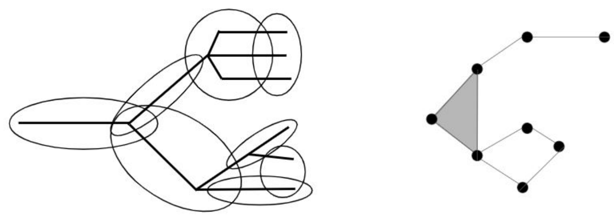


Figura 1.3: El nervio de la cubierta de esta figura no es un árbol, por dos razones: tiene tres elementos distintos entre sí que tienen intersección común y también contiene un ciclo.

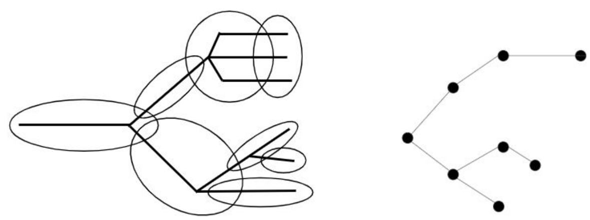


Figura 1.4: El nervio de esta cubierta sí es un árbol a diferencia de la Figura 1.3

será de utilidad puesto que sólo involucra propiedades de la cubierta $\mathcal{F}$.

Dada una cubierta $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de un conjunto X, decimos que el nervio $N(\mathcal{F})$ es ***conexo*** *si para cualesquiera dos elementos F_λ y F_γ en $\mathcal{F}$, existe una secuencia finita $F_\lambda = F_{\lambda_0}, F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n} = F_\gamma$ de elementos en $\mathcal{F}$, de forma que, para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, se cumple que $F_{\lambda_i} \cap F_{\lambda_{i+1}} \neq \emptyset$. Llamaremos a la secuencia $F_{\lambda_0}, F_{\lambda_1}, ..., F_{\lambda_n}$ un* ***camino*** *entre F_{λ_0} y F_{λ_n}. Si la secuencia no repite vértices entonces la llamaremos una* ***trayectoria***.

Definición 1.3.10 *Sean X un dendroide, A un subconjunto de X y $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta de X. Definimos la* ***restricción*** *de $\mathcal{F}$ a A como la familia $\mathcal{F}|A = \{F_\lambda \cap A \mid F_\lambda \cap A \neq \emptyset \text{ y } \lambda \in \Lambda\}$. Notemos que por ser $\mathcal{F}$ una cubierta de X entonces $\mathcal{F}|A$ es una cubierta de A.*

También definimos la ***estrella*** *de A en $\mathcal{F}$, denotada por $St(A, \mathcal{F})$ como la unión de elementos de $\mathcal{F}$ que intersectan a A. Es decir $St(A, \mathcal{F}) = \bigcup\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \text{ y } F_\lambda \cap A \neq \emptyset\}$.*

*La familia $St(\mathcal{F}) = \{St(F_\lambda, \mathcal{F}) \mid \lambda \in \Lambda\}$ será llamada la **estrella** de $\mathcal{F}$ y es una cubierta de X.*

Definición 1.3.11 *Sean $\mathcal{F}$ una cubierta de un espacio X y F un vértice de $N(\mathcal{F})$. El **grado** de F, denotado por $\delta(F)$, es la cantidad de elementos G de $\mathcal{F}$ para los cuales $\{F, G\}$ es una arista de $N(\mathcal{F})$.*

Dado $F \in \mathcal{F}$, si $N(\mathcal{F})$ es un árbol, distinguimos tres tipos de vértices de acuerdo a su grado.

1. *Si $\delta(F) = 1$, diremos que F es un **vértice terminal**.*

2. *Si $\delta(F) = 2$, diremos que F es un **vértice intermedio**.*

3. *Si $\delta(F) \geq 3$, diremos que F es un **vértice de ramificación**.*

*Además, si $R = \{F_0, \ldots, F_n\}$ es una sucesión de vértices de $N(\mathcal{F})$, decimos que R es una **rama** si F_0 y F_n son vértices terminales o de ramificación, los demás vértices son intermedios y $F_0, \ldots, F_n$ es una trayectoria de F_0 a F_n.*

Definición 1.3.12 *Dada una cubierta $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de un conjunto X y dada una familia $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ tal que $G_\lambda \subseteq F_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Diremos que sus nervios **son naturalmente isomorfos** , y escribiremos $N(\mathcal{G}) \cong N(\mathcal{F})$, si la función $h : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ dada por $h(G_\lambda) = F_\lambda$ es un isomorfismo de gráficas. Esto significa que si $\lambda, \gamma \in \Lambda$, entonces $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$ si y sólo si $G_\lambda \cap G_\gamma \neq \emptyset$. Como estamos pidiendo que para toda $\lambda \in \Lambda$, $G_\lambda \subseteq F_\lambda$, entonces la equivalencia mencionada arriba se reduce a la implicación: $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$ implica que $G_\lambda \cap G_\gamma \neq \emptyset$.*

Definición 1.3.13 *Sea $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia finita de conjuntos cerrados de un dendroide X tal que $N(\mathcal{F})$ es un árbol. Diremos que un árbol $T \subseteq X$, contenido en la unión de los elementos de $\mathcal{F}$, está **correctamente colocado** en $\mathcal{F}$ si es posible elegir, para cada $\lambda \in \Lambda$, una componente conexa C_λ de $T \cap F_\lambda$ de manera que $T = \bigcup_\lambda C_\lambda$. Cuando fijemos tales componentes llamaremos a C_λ la **componente distinguida** de $T \cap F_\lambda$.*

Lema 1.3.14 *Sean X un espacio conexo y $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta finita de cerrados (o de abiertos) de X. Entonces el nervio de $\mathcal{F}$ es conexo.*

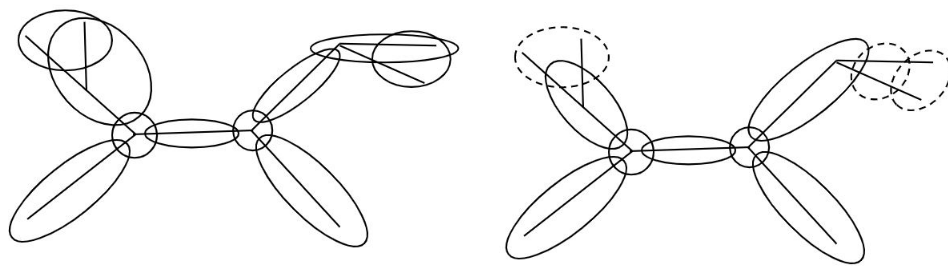


Figura 1.5: En la cubierta de la izquierda el árbol está correctamente colocado, en este caso la elección de las componentes distinguidas es única. Además podemos ver que los elementos de la cubierta no tienen que ser necesariamente conexos. En la cubierta de la derecha el árbol no está correctamente colocado, en los elementos de la cubierta marcados con línea punteada no es posible elegir una única componente de manera que su unión sea todo el árbol.

Demostración. Supongamos que el nervio de $\mathcal{F}$ no es conexo. Entonces existen F_ρ y F_γ para los cuales no existe un camino de elementos de $\mathcal{F}$ entre ellos. Definimos las familias $\mathcal{A} = \{F_\lambda \in \mathcal{F} \mid \text{ existe un camino de } F_\rho \text{ a } F_\lambda\}$ y $\mathcal{B} = \{F_\lambda \in \mathcal{F} \mid \text{ no existe un camino de } F_\rho \text{ a } F_\lambda\}$. Sean $A = \bigcup \mathcal{A}$ y $B = \bigcup \mathcal{B}$, entonces A y B son dos subconjuntos cerrados (o abiertos en el otro caso) de X tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. Además $F_\rho \subseteq A$ y $F_\gamma \subseteq B$, por lo que A y B son no vacíos. Esto implica que X es inconexo, lo cual es una contradicción. ■

Lema 1.3.15 *Sean X un dendroide, $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta cerrada finita de X y T un árbol en X. Supongamos que $N(\mathcal{F})$ es un árbol y que T está correctamente colocado en $\mathcal{F}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea C_λ la componente distinguida de $F_\lambda \cap T$ y sea $\mathcal{C} = \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta de T y $N(\mathcal{C}) \cong N(\mathcal{F})$.*

Demostración. Por definición tenemos que $T = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, así que $\mathcal{C}$ es una cubierta de T. Ya que cada C_λ es una componente conexa de un conjunto cerrado en X, tenemos que cada C_λ es cerrado en X y, por lo tanto, también en T. De modo que $\mathcal{C}$ es una cubierta cerrada finita de un conexo. Por el Lema 1.3.14, el nervio de $\mathcal{C}$ es conexo.

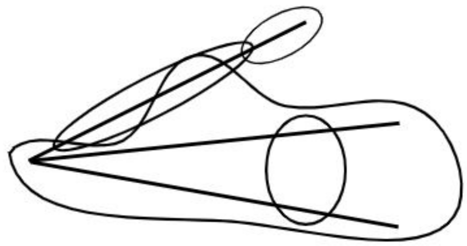


Figura 1.6: En esta cubierta el árbol se encuentra correctamente colocado. En este caso la elección de las componentes distinguidas no es única.

Veamos que los nervios de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{F}$ son naturalmente isomorfos. Sean $\lambda, \gamma \in \Lambda$. Puesto que para toda $\lambda \in \Lambda$, $C_\lambda \subseteq F_\lambda$, entonces si $C_\lambda \cap C_\gamma \neq \emptyset$ se tiene que $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$, pero que $C_\lambda \cap C_\gamma = \emptyset$. Puesto que el nervio de $\mathcal{C}$ es conexo, existe una trayectoria $C_\lambda = C_0, C_1, \ldots, C_n = C_\gamma$ en $N(\mathcal{C})$, con $n \geq 2$. Puesto que para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ entonces $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$, lo que implica que $F_\lambda = F_0, F_1, \ldots, F_n = F_\gamma$ es una trayectoria en $N(\mathcal{F})$ diferente de la arista $\{F_\lambda, F_\gamma\}$. Esto contradice el Teorema 1.3.7, pues $N(\mathcal{F})$ es un árbol.

Por lo tanto $C_\lambda \cap C_\gamma \neq \emptyset$ si y sólo si $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$ y concluimos que $N(\mathcal{F}) \cong N(\mathcal{C})$. ■

El siguiente resultado fundamental fue probado por H. Cook en [6]. La manera de describirlo en palabras es: Todos los dendroides son arbolados.

Lema 1.3.16 *Para cualesquiera dendroide X y $\epsilon > 0$, existe una cubierta abierta finita $\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ tal que el nervio de $\mathcal{V}$ es un árbol y el diámetro de cada V_λ es menor a ϵ.*

Lema 1.3.17 *Sea $\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta finita de abiertos de un dendroide X tal que su nervio es un árbol. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ tal que para toda $\lambda \in \Lambda$, $\overline{U_\lambda} \subseteq V_\lambda$ y $N(\mathcal{U}) \cong N(\mathcal{V})$.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{V}$ es una cubierta finita podemos dar una numeración de sus elementos y escribirla así $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$.

Tomemos el primer elemento V_1. El conjunto $D_1 = X \setminus \bigcup_{i\neq 1} V_i$ es un subconjunto cerrado de X, contenido en el abierto V_1. Por la normalidad de X existe un subconjunto abierto U_1 de X tal que $D_1 \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq V_1$.

Sea $\mathcal{V}_1 = \{U_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Notemos que V_1 es una cubierta abierta de X y por el Lema 1.3.14 su nervio es conexo.

Veamos que el nervio de esta cubierta es naturalmente isomorfo a $N(\mathcal{V})$. Como $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}_1$ coinciden en los elementos $V_2, \ldots, V_n$ y $U_1 \subseteq V_1$, sólo tenemos que probar que si $V_1 \cap V_k \neq \emptyset$ para alguna $k \in \{2, \ldots, n\}$, entonces $U_1 \cap V_k \neq \emptyset$.

Supongamos por el contrario que existe $k \in \{2, \ldots, n\}$ para la cual $V_1 \cap V_k \neq \emptyset$, pero $U_1 \cap V_k = \emptyset$. Como el nervio de $\mathcal{V}_1$ es conexo, existe una trayectoria $U_1 = W_1, \ldots, W_m = V_k$ en $N(\mathcal{V}_1)$ que conecta a U_1 y V_k, donde los conjuntos $W_1, \ldots, W_m$ son distintos entre sí. Notemos que W_2 es diferente de U_1 y V_k. Como $U_1 \subseteq V_1$, tenemos que $V_1 = W_1', \ldots, W_m' = V_k$ es una trayectoria entre V_1 y V_k en el nervio de $\mathcal{V}$ diferente a la trayectoria que consta sólo de V_1 y V_k lo cual es una contradicción pues $N(\mathcal{V})$ es un árbol. Esta contradicción termina la prueba de que los nervios de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}_1$ son isomorfos.

En la misma forma en que reemplazamos V_1 por U_i, podemos sucesivamente reemplazar cada uno de los abiertos V_i por un abierto U_i que satisfaga $\overline{U_i} \subseteq V_i$ de tal forma que al final se obtenga una cubierta $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ que satisfaga las condiciones deseadas. ■

1.4. Retracciones

Definición 1.4.1 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un **retracto** de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que para toda $a \in A$, $r(a) = a$, o equivalentemente $r|_A = id_A$. La función r es llamada una **retracción** de X sobre A.*

Definición 1.4.2 *Sean $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta de un espacio topológico X y Y un subconjunto de X. Decimos que una retracción $r : X \to Y$ es una **$\mathcal{F}$-retracción** si para toda $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\{x, r(x)\} \subseteq F_\lambda$.*

Definición 1.4.3 *Sean Y un subconjunto de un espacio métrico X con métrica d y $r : X \to Y$ una retracción de X sobre Y. Dada $\epsilon > 0$, decimos que r es una **ϵ-retracción** si para toda $x \in X$, $d(x, r(x)) < \epsilon$*

Definición 1.4.4 *Sea A un continuo. Decimos que A es un **retracto absoluto** si para cada continuo X, para el que existe una función inyectiva continua $f : A \to X$, $f(A)$ es retracto de X.*

Definición 1.4.5 *Sea A un continuo. Decimos que A es un* ***extensor absoluto*** *si siempre que tenemos un continuo X, un cerrado $Y \subseteq X$, y una función continua $f : Y \to A$, existe una función continua $F : X \to A$ tal que $F|_Y = f$.*

Ejemplo. Por el Teorema de Extensión de Tietze [7, p. 149], el intervalo $[0, 1]$ es un extensor absoluto.

Lema 1.4.6 *Sea $X = \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$, donde J es un conjunto a lo más numerable y para cada $\alpha \in J$, X_α es un extensor absoluto. Entonces X es un extensor absoluto.*

Demostración. Como definimos la noción de extensor absoluto sólo para continuos, tenemos que decir por qué X es un continuo. Para esto se pidió que J sea a lo más numerable, pues de esta manera tenemos que X es metrizable. Además X es compacto y conexo porque cada factor del producto lo es. Sean Z un continuo, A un subconjunto cerrado de Z y $f : A \to \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ una función continua.

Para cada $\beta \in J$, sea $\pi_\beta : \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$ la proyección natural sobre X_β. Para cada $\beta \in J$, definimos la función $f_\beta : A \to X_\beta$ como $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. Puesto que π_β y f son funciones continuas, tenemos que f_β es una función continua de A en el extensor absoluto X_β. Por lo tanto existe una función continua $F_\beta : Z \to X_\beta$ tal que $F_\beta|_A = f_\beta$.

Definamos $F : Z \to \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ como $(F(x))_\alpha = F_\alpha(x)$ para toda $\alpha \in J$. Es decir, en la coordenada α, F toma el valor F_α. La función F es continua pues cada una de sus funciones coordenadas lo es y si $a \in A$, entonces $(F(a))_\alpha = F_\alpha(a) = f_\alpha(a) = (f(a))_\alpha$. Por lo tanto $F|_A = f$ y $X = \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ es un extensor absoluto. ■

Observación: Puesto que $[0, 1]$ es un extensor absoluto, entonces el Lema 1.4.6 implica que el cubo de Hilbert $Q = \Pi_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$ es un extensor absoluto.

Lema 1.4.7 *Ser retracto absoluto y extensor absoluto son propiedades topológicas*

Demostración. Sean Z un espacio topológico y Y un espacio homeomorfo a Z con $h : Z \to Y$ homeomorfismo.

Supongamos que Z es retracto absoluto. Sea X un continuo tal que existe $f : Y \to X$ continua e inyectiva, entonces $f \circ h : Z \to X$ es una función continua e inyectiva. Como Z es retracto absoluto existe una función continua $r : X \to f(h(Z)) = f(Y)$ tal que para toda $x \in f(h(Z)) = f(Y)$, $r(x) = x$. Entonces r es una retracción de X sobre $f(Y)$, por lo tanto Y es retracto absoluto.

Supongamos ahora que Z es un extensor absoluto. Sean X un continuo, $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Notemos que $g = h^{-1} \circ f$ es una función continua de A en Z, por lo que existe una función continua $G : X \to Z$ tal que $G|_A = g$. Sea $F = h \circ G$. Entonces F es una función continua de X en Y y si $a \in A$, tenemos que $F(a) = h(G(a)) = h(g(a)) = h(h^{-1}(f(a))) = f(a)$. De donde $F|_A = f$. Por lo tanto, Y es extensor absoluto. ■

Lema 1.4.8 *Sea A un extensor absoluto. Si $B \subseteq A$ es un retracto de A, entonces B es un extensor absoluto.*

Demostración. Sean X un continuo, $Y \subseteq X$ cerrado y $f : Y \to B$ una función continua. Tomemos $r : A \to B$ una retracción de A sobre B. Observemos que f es también una función de Y en A, por lo tanto existe una función continua $G : X \to A$ tal que $G|_Y = f$. Sea $F = r \circ G$. Ésta es una función de X en B continua y si $y \in Y$, entonces $F(y) = r(G(y)) = r(f(y)) = f(y)$ pues $f(y) \in B$. Por lo tanto $F|_Y = f$ y B es extensor absoluto. ■

Lema 1.4.9 *Sea A un continuo. Entonces A es retracto absoluto si y sólo si A es extensor absoluto.*

Demostración. Supongamos que A es retracto absoluto. Sabemos que todo continuo puede ser encajado en el cubo de Hilbert ($\mathcal{Q}$) [14, Lema 1.34, p.10] que es extensor absoluto. Entonces A es retracto de $\mathcal{Q}$ y por el Lema 1.4.8, A es extensor absoluto.

Supongamos ahora que A es extensor absoluto. Sea Z un continuo para el cual existe $f : A \to Z$ continua e inyectiva. La función $f^{-1} : f(A) \to A$ es continua y como $f(A)$ es cerrado en Z, por ser A compacto y ser A extensor absoluto, existe $g : Z \to A$ tal que $g|_{f(A)} = f^{-1}$. La función $f \circ g : Z \to f(A)$ es una función continua y si $y \in f(A)$, entonces $f(g(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$. Por lo tanto $f(A)$ es retracto de Z. Por tanto A es retracto absoluto. ■

Lema 1.4.10 *Sean X un continuo y X_1, X_2 subcontinuos de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Supongamos que $X_1 \cap X_2, X_1$ y X_2 son retractos absolutos. Entonces X es retracto absoluto.*

Demostración. Supongamos que Y es un continuo con métrica d y que $X \subseteq Y$. Dados $p \in Y$ y $A \subseteq Y$, con $A \neq \emptyset$, definimos $d(p, A) = inf\{d(p, a) \mid a \in A\}$.

Definimos los conjuntos $Y_1 = \{p \in Y \mid d(p, X_1) \leq d(p, X_2)\}$ y $Y_2 = \{p \in Y \mid d(p, X_2) \leq d(p, X_1)\}$. Tenemos entonces que $Y_1 \cap Y_2 = \{p \in Y \mid d(p, X_1) = d(p, X_2)\}$. Notemos que Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son todos cerrados de Y.

Como $X_1 \cap X_2$ es retracto absoluto existe una retracción $r_0 : Y \to X_1 \cap X_2$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, definimos la siguiente función $f_i : (Y_1 \cap Y_2) \cup X_i \to X_i$ como:

$$f_i(p) = \begin{cases} r_0(p), & si \quad p \in Y_1 \cap Y_2, \\ p, & si \quad p \in X_i. \end{cases}$$

Observemos que si $p \in (Y_1 \cap Y_2) \cap X_i$, entonces $d(p, X_1) = d(p, X_2)$ y $d(p, X_i) = 0$. Esto implica que $p \in X_1 \cap X_2$ y por lo tanto $r_0(p) = p$. Por lo tanto la función f_i está bien definida y es una función continua.

Por el Lema 1.4.9, X_i es extensor absoluto. Así que existe una extensión continua $r_i : Y \to X_i$ de la función f_i. Definimos $r : Y \to X$ como

$$r(p) = \begin{cases} r_1(p), & si \quad p \in Y_1, \\ r_2(p), & si \quad p \in Y_2. \end{cases}$$

Observemos que si $p \in Y_1 \cap Y_2$, entonces $r_1(p) = f_1(p) = r_0(p) = f_2(p) = r_2(p)$, por lo que r está bien definida y es continua. Dada $p \in X$, $p \in X_i$ para alguna $i \in \{1, 2\}$. Entonces $r(p) = r_i(p) = f_i(p) = p$. Por lo tanto r es una retracción de Y sobre X, lo que termina la prueba. ■

Corolario 1.4.11 *Todo árbol T es retracto absoluto.*

Demostración. Puesto que T es un árbol, existe un conjunto finito de puntos $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y una colección de arcos $\{A_1, \ldots, A_m\}$ entre los puntos de V tales que, para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $A_i \cap A_k$ es vacío o bien es un único punto $p \in V$ y $T = \bigcup_{i=1}^{m} A_k$.

Puesto que T es conexo entonces existe A_k tal que $A_1 \cap A_k \neq \emptyset$. Podemos suponer que $k = 2$. Sea $T_2 = A_1 \cup A_2$. Puesto que A_1, A_2 y $A_1 \cap A_2$ son retractos absolutos, entonces por el Lema 1.4.10, T_2 es retracto absoluto.

Nuevamente existe un arco A_k, $k \neq 1, 2$ tal que $T_2 \cap A_k \neq \emptyset$. Podemos suponer que $k = 3$. Sea $T_3 = T_2 \cup A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Entonces T_3 es un subcontinuo de T, por lo tanto es un árbol. Como $T_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$ está contenido en los extremos de A_3, entonces consiste de 1 o 2 puntos. Si $T_2 \cap A_3 = \{a, b\}$, con $a \neq b$, entonces a y b son los extremos de A_3 y $ab = A_3$. Así que existe un arco $ab \subseteq T_2$ lo cual no es posible puesto que T_3 es un árbol y es únicamente arcoconexo. Por lo tanto $T_2 \cap A_3$ es un único punto y un retracto absoluto. Por el Lema 1.4.10, T_3 es retracto absoluto.

Repetimos este proceso. Si hemos construido $T_i = T_{i-1} \cup A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_i$ que es retracto absoluto, entonces podemos suponer que $A_{i+1} \cap T_i \neq \emptyset$ y hacemos $T_{i+1} = T_i \cup A_{i+1} = A_1 \cup \ldots \cup A_{i+1}$. Tenemos que $T_{i+1} \subseteq T$ y que $A_{i+1} \cap T_i$ está contenido en los extremos de A_{i+1}, por lo tanto como T_{i+1} es un árbol, entonces $A_{i+1} \cap T_i$ es un único punto y un retracto absoluto. Por el Lema 1.4.10, T_{i+1} es un retracto absoluto.

Al final tendremos que $T = T_m = T_{m-1} \cup A_m$, donde T_{m-1}, A_m y $T_{m-1} \cap A_m$ son retractos absolutos. Por lo tanto, por el Lema 1.4.10, T es un retracto absoluto. ■

Teorema 1.4.12 *Sea $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta finita de cerrados de un dendroide X, tal que $N(\mathcal{F})$ es un árbol y sea T un árbol contenido en X. Si T está correctamente colocado en $\mathcal{F}$, entonces existe una $St(\mathcal{F})$-retracción de X sobre T.*

Demostración. Como T está correctamente colocado en $\mathcal{F}$, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una componente distinguida C_λ de $T \cap F_\lambda$. Sea $\mathcal{C} = \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Por el Lema 1.3.15, sabemos que $N(\mathcal{F}) \cong N(\mathcal{C})$. Dada una arista $\sigma = \{F_\lambda, F_\gamma\}$ en $N(\mathcal{F})$ tenemos que $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$ de manera que $C_\lambda \cap C_\gamma \neq \emptyset$ y por lo tanto $C_\lambda \cup C_\gamma$ es un subcontinuo de T, por lo que también es un árbol y por el Corolario 1.4.11 y el Lema 1.4.9 es extensor absoluto.

Veamos que $F_\lambda \cap F_\gamma \cap T \subseteq C_\lambda \cup C_\gamma$. Dada $x \in F_\lambda \cap F_\gamma \cap T$, existe $\mu \in \Lambda$ tal que $x \in C_\mu \subseteq F_\mu$. Esto implica que $x \in F_\lambda \cap F_\gamma \cap F_\mu$. Como $N(\mathcal{F})$ es un árbol, entonces $\mu = \lambda$ o $\mu = \gamma$. Con esto hemos probado que $F_\lambda \cap F_\gamma \cap T \subseteq C_\lambda \cup C_\gamma$.

Como $C_\lambda \cup C_\gamma$ es un extensor absoluto existe una función continua $r_\sigma : F_\lambda \cap F_\gamma \to C_\lambda \cup C_\gamma$ tal que, para toda $x \in F_\lambda \cap F_\gamma \cap T$, $r_\sigma(x) = x$.

Tomemos $\lambda \in \Lambda$. Dada $\gamma \in \Lambda$ tal que $F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset$, tenemos que $\sigma = \{F_\lambda, F_\gamma\}$ es una arista de $\mathcal{N}$ y $r_\sigma(F_\lambda \cap F_\gamma) \subseteq C_\lambda \cup C_\gamma \subseteq St(C_\lambda, \mathcal{C})$. Dada $p \in F_\lambda \cap T$, existe $\zeta \in \Lambda$ tal que $p \in C_\zeta$. Entonces $p \in F_\lambda \cap F_\zeta \cap T \subseteq C_\lambda \cup C_\gamma \subseteq St(F_\lambda, \mathcal{F})$.

Definimos la siguiente función $g_\lambda : \bigcup_{\gamma\in\Lambda\setminus\{\lambda\}}(F_\lambda \cap F_\gamma) \cup (T \cap F_\lambda) \to St(C_\lambda, \mathcal{C})$ por:

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} r_\sigma(x) & \text{si } x \in F_\lambda \cap F_\gamma,\ \gamma \neq \lambda \text{ y } F_\lambda \cap F_\gamma \neq \emptyset \\ x & \text{si } x \in F_\lambda \cap T. \end{cases}$$

Para verificar que la función está bien definida recordemos que si λ, γ y β son tres elementos diferentes de Λ entonces $F_\lambda \cap F_\gamma \cap F_\beta = \emptyset$. Tomemos entonces una x en $F_\lambda \cap F_\gamma \cap T$ con $\lambda \neq \gamma$. Por definición $g_\lambda(x) = r_\sigma(x) = x$ ($\sigma = \{F_\lambda, F_\gamma\}$). Por lo tanto g_λ está bien definida y es una función continua.

Dada $\lambda \in \Lambda$, el dominio de la función g_λ es un subconjunto cerrado de F_λ y su contradominio es el subcontinuo $St(C_\lambda, \mathcal{C})$ de T que es un extensor absoluto. Por lo tanto existe una función continua $r_\lambda : F_\lambda \to St(C_\lambda, \mathcal{C})$ que extiende a g_λ.

Definimos la función $r : X \to T$ como $r(x) = r_\lambda(x)$, cuando $x \in F_\lambda$. Para ver que esta función está bien definida tomemos dos elementos diferentes λ y γ en Λ y $x \in F_\lambda \cap F_\gamma$. Sea $\sigma = \{F_\lambda, F_\gamma\}$, entonces $r_\lambda(x) = g_\lambda(x) = r_\sigma(x) = g_\gamma(x) = r_\gamma(x)$. Por tanto r está bien definida y es continua.

Dada $p \in T$, sea $\lambda \in \Lambda$ tal que $p \in C_\lambda$. Entonces $p \in F_\lambda \cap T$, por lo que $r(p) = r_\lambda(p) = g_\lambda(p) = p$. De manera que r es una retracción de X sobre T.

Dada $p \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $p \in F_\lambda$. Entonces $r(p) = r_\lambda(p) \in St(C_\lambda, \mathcal{C}) \subseteq St(F_\lambda, \mathcal{F})$. Esto implica que $\{p, r(p)\} \subseteq St(F_\lambda, \mathcal{F})$ y por lo tanto r es una $St(\mathcal{F})$-*retracción* de X sobre T. ■

Capítulo 2

La propiedad P(S)

En este capítulo iniciamos con la solución del problema que motivó este trabajo. El Teorema 1.4.12 nos da algunas condiciones bajo las que podemos asegurar la existencia de un retracción de un dendroide X sobre un árbol T. En este capítulo buscaremos condiciones para asegurar que un dendroide X, una cubierta $\mathcal{F}$ de X y un árbol T, satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4.12. Antes de comenzar necesitamos establecer algunas definiciones.

En lo sucesivo X denotará un dendroide con métrica d.

2.1. Reducción de la demostración

En esta sección explicamos el camino propuesto por Cauty para demostrar el gran Teorema(2.1.5). Para esto necesitamos un par de definiciones y algunos resultados previos.

Definición 2.1.1 *Sea $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta finita de cerrados de X. Decimos que $\mathcal{F}$ es una **cubierta adecuada de** X si su nervio es un árbol y para todo $\lambda \in \Lambda$, existe un abierto U_λ de X, de modo que $\overline{U_\lambda} \subseteq int(F_\lambda)$ y que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.*

Ejemplo. Para el intervalo $[0, 1]$ la cubierta formada por los conjuntos $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, 0\right]$ es una cubierta adecuada. Por otra parte la familia $\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$ no es una cubierta adecuada para el intervalo, pues no existen conjuntos abiertos A y B, contenidos en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ respectivamente, tales que $A \cup B$ cubra al intervalo.

Lema 2.1.2 *Para todo dendroide X y toda $\epsilon > 0$, existe una cubierta adecuada de X tal que el diámetro de cada uno de sus elemento es menor que ϵ.*

Demostración. Por el Lema 1.3.16 existe una cubierta de abiertos de X, $\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, tal que su nervio es un árbol y que el diámetro de cada V_λ es menor a ϵ. Por el Lema 1.3.17 existe una cubierta $\mathcal{U}' = \{U'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\overline{U'_\lambda} \subseteq V_\lambda$ y $N(\mathcal{U}') \cong N(\mathcal{V})$. Puesto que $\mathcal{U}'$ es una cubierta abierta, podemos aplicar nuevamente el Lema 1.3.17 para encontrar una cubierta abierta de X, $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\overline{U_\lambda} \subseteq U'_\lambda$ y $N(\mathcal{U}) \cong N(\mathcal{U}')$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ hacemos $F_\lambda = \overline{U'_\lambda}$ y construimos la cubierta $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Puesto que, para toda $\lambda \in \Lambda$, se tiene la contención $U'_\lambda \subseteq F_\lambda \subseteq V_\lambda$ y $N(\mathcal{U}') \cong N(\mathcal{V})$, entonces $N(\mathcal{F}) \cong N(\mathcal{V})$. Tenemos entonces que $N(\mathcal{F})$ es un árbol y para toda $\lambda \in \Lambda$, $\overline{U_\lambda} \subseteq U'_\lambda \subseteq int(F_\lambda)$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una cubierta adecuada de X. ■

A partir de ahora supondremos que $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una cubierta adecuada de X y que tenemos elegidos los conjuntos U_λ, para cada $\lambda \in \Lambda$ como en la Definición 2.1.1. También tomaremos un árbol fijo S contenido en X.

Definición 2.1.3 *Sea $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$ una cubierta de cerrados de X, donde M es un conjunto finito. Decimos que $\mathcal{G}$ es un* ***refinamiento especial*** *de $\mathcal{F}$ si:*

(I) *$N(\mathcal{G})$ es un árbol,*

(II) *existe una función $\pi : M \to \Lambda$ tal que, para todo $\mu \in M$, G_μ es unión de componentes de $F_{\pi(\mu)}$.*

Cuando sea útil fijar la función π para la que se verifica la condición (ii), hablaremos del refinamiento especial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}$.

El siguiente teorema es la parte central en la prueba de Cauty. Si este teorema se cumple, entonces el gran problema estará resuelto.

Teorema 2.1.4 *Sean X un dendroide, S un árbol contenido dentro de X y $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta cerrada finita de X que satisface lo siguiente:*

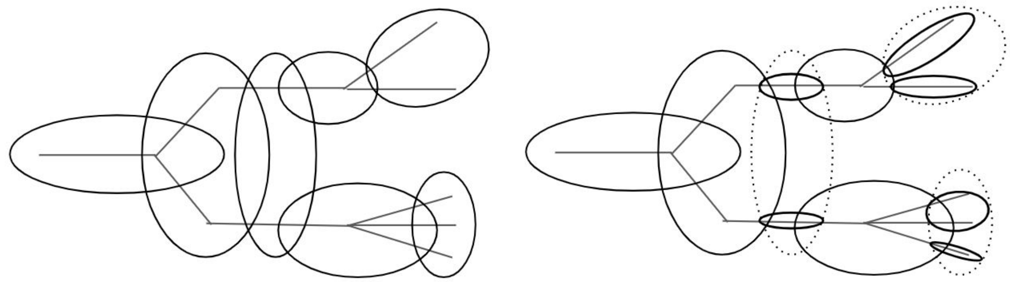


Figura 2.1: Un refinamiento especial separa elementos de una cubierta en uniones de sus componentes. La cubierta de la derecha es refinamiento especial de la de la izquierda. En este caso, el árbol no está correctamente colocado en ninguna de las cubiertas.

(a) $N(\mathcal{F})$ *es un árbol,*

(b) los interiores de los elementos de $\mathcal{F}$ *cubren a* X*.*

Entonces existe un refinamiento especial $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$ *y un árbol* T *de* X *que contiene a* S *y que está correctamente colocado en* $\mathcal{G}$*.*

Veamos que la solución al gran problema se seguirá del Teorema 2.1.4.

Teorema 2.1.5 *Sean* X *un dendroide,* $\epsilon > 0$ *y* S *un árbol contenido en* X*. Entonces existen un árbol* T*, contenido en* X *y que contiene a* S*, y una* ϵ*-retracción de* $r : X \to T$*.*

Demostración. Sea d una métrica para X. El primer paso es usar el teorema de H. Cook que dice que los dendroides son arbolados. Este resultado, enunciado en el Lema 1.3.16, combinado con el Lema 1.3.17 nos permite construir una cubierta finita de cerrados, $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ del dendroide X tal que $N(\mathcal{F})$ es un árbol, los interiores de F_λ cubren a X y de modo que para toda $\lambda \in \Lambda$, el diámetro de F_λ es menor a $\frac{\epsilon}{3}$.

Por el Teorema 2.1.4, existe un refinamiento especial $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ y un árbol T contenido en X tal que $S \subseteq T \subseteq X$ y que T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$. Entonces por el Teorema 1.4.12, existe una $St(\mathcal{G})$-retracción de $r : X \to T$.

Ya que cada elemento de $\mathcal{G}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{F}$ entonces el diámetro de cada conjunto de $\mathcal{G}$ es menor a $\frac{\epsilon}{3}$. Por lo tanto el diámetro de cada elemento de $St(\mathcal{G})$ es menor a ϵ y r es una ϵ-retracción. ■

La prueba del gran teorema se reduce entonces a probar el Teorema 2.1.4. En el resto de este trabajo se tratan resultados dirigidos a probar este teorema. En la siguiente sección empezamos con este largo camino.

2.2. Definición de la Propiedad P(S)

La siguiente definición es de suma importancia en este trabajo y jugará un papel muy importante en la prueba del Teorema 2.1.4. A lo largo de esta sección exploraremos algunas características de esta propiedad y de los dendroides que la tienen.

Definición 2.2.1 *Sea S un árbol contenido en X. Decimos que un subcontinuo Y de X, que contiene al árbol S, tiene la* ***propiedad P(S)*** *si existen un refinamiento especial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}|Y$, donde $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$ y un árbol T contenido en Y que contiene a S de modo que:*

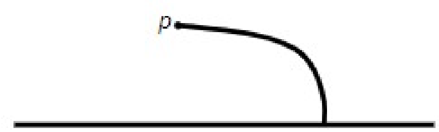
(I) T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$,

(II) $Y = \bigcup_{\mu \in M}(G_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$.

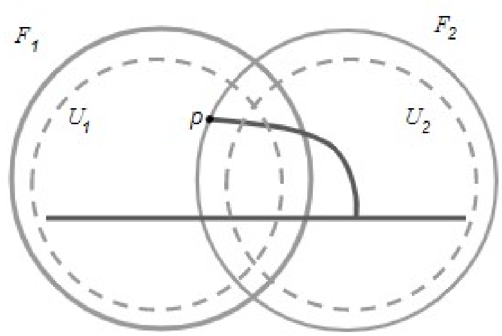
La prueba del Teorema 2.1.4, consiste en mostrar que para toda cubierta $\mathcal{F}$ y para todo árbol S contenido en X, X tiene la propiedad $P(S)$. Observemos que la propiedad $P(S)$ no sólo depende de S sino también de $\mathcal{F}$. La condición (II) en la Definición 2.2.1 es una condición técnica que casi parece de sobra pues por la definición de refinamiento especial, $\mathcal{G}$ cubre a Y y para cada $\mu \in M$, $G_\mu \subseteq F_{\pi(\mu)}$. Pero recordemos que cada conjunto $U_{\pi(\mu)}$ es un subconjunto de $F_{\pi(\mu)}$. De manera que lo que se está pidiendo puede decirse informalmente que la unión de los interiores de los conjuntos G_μ también cubre a Y.

La estrategia para probar que X tiene la propiedad $P(S)$ esencialmente consiste en suponer que esto no ocurre. Entonces se prueba que existe un subcontinuo mínimo Z de X que no tiene la propiedad $P(S)$. A partir de esto se estudian las propiedades de Z buscando una contradicción. En este capítulo avanzamos mostrando un buen número de estas propiedades. Antes de continuar mostraremos algunos ejemplos para ilustrar la propiedad $P(S)$.

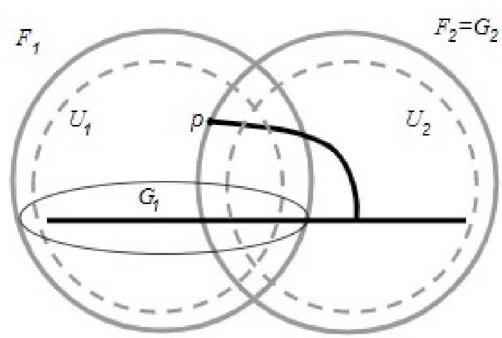
En el ejemplo de la Figura 2.1, el refinamiento cumple la condición (II) pero el árbol no está correctamente colocado. Veamos ahora un ejemplo de una cubierta donde no se cumple la condición (II). Consideremos el siguiente espacio. Llamaremos p al punto extremo del arco en el que se señala.



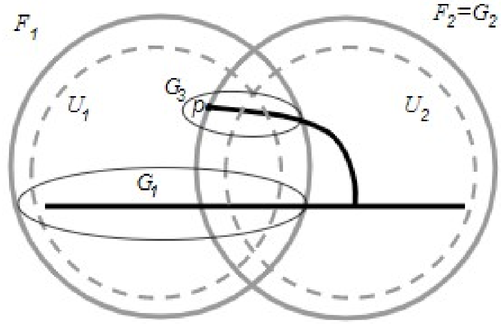
Damos la siguiente cubierta $\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$ con sus respectivos U_1 y U_2. Podemos verificar fácilmente que la cubierta dada es una cubierta adecuada y que el árbol está correctamente colocado en la cubierta. Con esta cubierta $p \in Fr(F_2)$ y $p \in U_1$.



Tomamos el siguiente refinamiento especial $\{G_1, G_2 = F_2\}$. La función del refinamiento está dada por $\pi(1) = 1$ y $\pi(2) = 2$. Notemos que cada elemento G_i es conexo y una componente de F_1 está contenida en G_2. Tenemos que p sólo pertenece a G_2 y sólo pertenece a U_1, por lo tanto $p \notin G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$ para ninguna $\mu \in \{1, 2\}$.



Si ahora tomamos el siguiente refinamiento, con $\pi(3) = 1$, entonces $p \in G_3 \cap U_{\pi(3)}$. Con este refinamiento sí se cumple la condición (II) de la Definición 2.2.1.



Lema 2.2.2 *Sean Y un subcontinuo de X y S un árbol contenido en Y. Si Y es un árbol, entonces tiene la propiedad $P(S)$.*

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{C} = \{V \subset X \mid V$ es componente de un conjunto de la forma $Y \cap U_\lambda\}$. Como $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, cada punto de Y pertenece a algún U_λ y por lo tanto, a una componente de $Y \cap U_\lambda$. Ya que Y es localmente conexo y los conjuntos de la forma $Y \cap U_\lambda$ son abiertos en Y, tenemos que los elementos de $\mathcal{C}$ son abiertos en Y. La compacidad de Y implica que este conjunto puede ser cubierto por un número finito de elementos $V_1, \ldots, V_m$ de $\mathcal{C}$. Escogemos m de manera que sea mínima.

Dada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $\lambda_i \in \Lambda$ tal que V_i es componente de $Y \cap U_{\lambda_i}$ y sea G_i la componente de $F_{\lambda_i} \cap Y$ que contiene a V_i. Sea $\mathcal{G} = \{G_i \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Notemos que podría ocurrir que existan $i, j \in \{1, ..., m\}$ tales que $i \neq j$ y $G_i = G_j$, pues podría ocurrir que los dos conjuntos V_i y V_j , estén contenidos en la misma componente de $Y \cap F_{\lambda_i}$, de hecho, en tal caso también se tendría que $\lambda_i = \lambda_j$. Entonces vamos a suponer que $G = \{G_1, ..., G_k\}$, donde los elementos $G_1, ..., G_k$ son diferentes entre sí. Con esto, supondremos que cada uno de los conjuntos $G_{k+1}, ..., G_m$ es igual a alguno de los conjuntos $G_1, ..., G_k$. Como $Y \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_m \subseteq G_1 \cup \ldots \cup G_m = G_1 \cup \ldots \cup G_k \subseteq Y$ tenemos que $\mathcal{G}$ es una cubierta finita de Y. Probaremos que $\mathcal{G}$ es un refinamiento especial de $\mathcal{F}|Y$.

Puesto que, para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, G_i es una componente de $F_{\lambda_i} \cap Y$, entonces cada elemento de $\mathcal{G}$ es cerrado en Y. Definimos $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \Lambda$, como $\pi(i) = \lambda_i$. Entonces G_i es una componente de $F_{\pi(i)} \cap Y$.

Veamos ahora que el nervio de $\mathcal{G}$ es un árbol. Como $\mathcal{G}$ es una cubierta de cerrados de Y que es un espacio conexo, entonces por el Lema 1.3.14, $N(\mathcal{G})$ es conexo.

Sean i_1, i_2, i_3 tres elementos diferentes de $\{1, ..., k\}$. Si $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3}$ son diferentes entre sí, entonces $G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap G_{i_3} \subseteq F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3} = \emptyset$. Si dos de los respectivos λ_i son iguales, por ejemplo $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$, como $G_{i_1} \neq G_{i_2}$, tenemos que G_{i_1} y G_{i_2} son diferentes componentes de $Y \cap F_{\lambda_{i_1}} = Y \cap F_{\lambda_{i_2}}$, por lo que $G_{i_1} \cap G_{i_2} = \emptyset$ y entonces $G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap G_{i_3} = \emptyset$.

Si $N(\mathcal{G})$ tiene un ciclo $G_{i_0}, ..., G_{i_n}, G_{i_0}$, entonces G_{i_n} y $G_{i_0} \cup G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_{n-1}}$ son dos subcontinuos de Y cuya intersección es el conjunto $(G_{i_n} \cap G_{i_0}) \cup (G_{i_n} \cap G_{i_{n-1}})$. Notemos que esta unión es inconexa pues cada uno de los uniendos son cerrados, ajenos y no vacíos. Entonces en el árbol Y hay dos subcontinuos cuya intersección es inconexa. Como esto es imposible concluimos que $N(\mathcal{G})$ no tiene ciclos y con esto terminamos la prueba de que $N(\mathcal{G})$ es un árbol. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es un refinamiento especial de $\mathcal{F}|Y$.

Tomamos $T = Y$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea $C_i = G_i$, entonces $T = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ lo que implica que T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$. Finalmente, como para toda $i \in \{1, \dots, m\}$, $V_i \subseteq G_i \cap U_{\lambda_i} \subseteq Y$, tenemos que $Y \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_m \subseteq (G_1 \cap U_{\lambda_1}) \cup \dots \cup (G_m \cap U_{\lambda_m}) = (G_1 \cap U_{\lambda_1}) \cup \dots \cup (G_k \cap U_{\lambda_k}) \subseteq Y$. Concluimos entonces que $Y = \bigcup_{i=1}^{m} (G_i \cap U_{\lambda_i})$ y por lo tanto Y tiene la propiedad $P(S)$. ■

Lema 2.2.3 *Sean Z un espacio métrico compacto y G un cerrado de Z que es unión de componentes de Z. Entonces:*

(I) *si U es abierto de Z y $G \subseteq U$, existe un subconjunto cerrado y abierto K de Z tal que $G \subseteq K \subseteq U$,*

(II) *existe una sucesión de conjuntos abiertos y cerrados $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} \subseteq G_n$ y de modo que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.*

Demostración.

(I) Consideremos los conjuntos cerrados y ajenos, G y $Z \setminus U$ de Z. Como G es unión de componentes de Z, ninguna componente de Z intersecta tanto a G como a $Z \setminus U$. Por el teorema del cable cortado [13, p. 72], existen cerrados ajenos $K, L \subseteq Z$ tales que $Z = K \cup L$, $G \subseteq K$ y $Z \setminus U \subseteq L$. Como $K \cap L = \emptyset$, $K \subseteq Z \setminus L \subseteq U$. Por lo tanto K es abierto y cerrado en Z y $G \subseteq K \subseteq U$.

(II) Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = D(G, \frac{1}{n})$, por la parte (i) de este lema existe un subconjunto cerrado y abierto K_n de Z tal que $G \subseteq K_n \subseteq U_n$. Sea $G_n = \bigcap_{i=i}^{n} K_i$. Entonces G_n es cerrado y abierto por ser intersección finita de cerrados y abiertos. Además, $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $G \subseteq G_n \subseteq K_n \subseteq U_n$. Sea $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Dada $n \in \mathbb{N}$, $p \in G_n \subseteq U_n$. De manera que existe $q \in G$ tal que $d_Z(p,q) < \frac{1}{n}$. Esto prueba que $p \in \overline{G} = G$. Por lo tanto $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ y en consecuencia $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. ■

Proposición 2.2.4 *Sean Y un subcontinuo de X y $(\mathcal{G}, \pi)$ un refinamiento especial de $\mathcal{F}|Y$, donde $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$. Para cada $\epsilon > 0$, sea $\mathcal{D}(\epsilon) = \{D(G_\mu, \epsilon) \mid \mu \in M\}$, entonces:*

(I) *existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $N(\mathcal{D}(\epsilon_1)) \cong N(\mathcal{G})$,*

(II) *si además, para toda $\mu \in M$, G_μ es abierto y cerrado en $F_{\pi(\mu)} \cap Y$, entonces existe $\epsilon_2 > 0$ tal que, para toda $\mu \in M$, $G_\mu = D(G_\mu, \epsilon_2) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$.*

Demostración.

(I) Para cada $\mu \in M$, sea $L_\mu = \{\lambda \in M \mid G_\mu \cap G_\lambda = \emptyset\}$. Consideremos $H_\mu = \bigcup_{\lambda \in L_\mu} G_\lambda$. Los conjuntos G_μ y H_μ son cerrados ajenos, por lo tanto existe $\epsilon_\mu > 0$ tal que $D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap D(H_\mu, \epsilon_\mu) = \emptyset$.

Sea $\epsilon = min\{\epsilon_\mu \mid \mu \in M\}$. Si $G_\mu \cap G_\lambda = \emptyset$, por la elección de ϵ tenemos que $\epsilon \leq \epsilon_\mu$ y $G_\lambda \subseteq H_\mu$, por lo que $D(G_\mu, \epsilon) \cap D(G_\lambda, \epsilon) \subseteq D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap D(G_\lambda, \epsilon_\mu) \subseteq D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap D(H_\mu, \epsilon_\mu) = \emptyset$. Como $G_\mu \subseteq D(G_\mu, \epsilon)$, concluimos que $G_\mu \cap G_\lambda \neq \emptyset$ si y sólo si $D(G_\mu, \epsilon) \cap D(G_\lambda, \epsilon) \neq \emptyset$.

Veamos que no hay tres elementos diferentes de $\mathcal{D}(\epsilon)$ que tengan un elemento en común. Supongamos que μ, λ y γ son tres elementos distintos de M, tales que $D(G_\mu, \epsilon) \cap D(G_\lambda, \epsilon) \cap D(G_\gamma, \epsilon) \neq \emptyset$. En particular, $D(G_\lambda, \epsilon) \cap D(G_\gamma, \epsilon) \neq \emptyset$, lo que implica que $G_\gamma \cap G_\lambda \neq \emptyset$. Del mismo modo, $G_\lambda \cap G_\mu \neq \emptyset$ y $G_\mu \cap G_\gamma \neq \emptyset$. Esto es absurdo porque $N(\mathcal{G})$ es un árbol. Por lo tanto $N(\mathcal{D}(\epsilon))$ es un árbol y $N(\mathcal{G}) \cong N(\mathcal{D}(\epsilon))$.

(II) Dada $\mu \in M$ y $\epsilon > 0$, G_μ está contenido en cada uno de los conjuntos $D(G_\mu, \epsilon), Y$ y $F_{\pi(\mu)}$. Por hipótesis, el conjunto G_μ es abierto y cerrado en $Y' = Y \cap F_{\pi(\mu)}$ por lo que los conjuntos G_μ y $Y' \setminus G_\mu$ son dos cerrados ajenos. Por lo tanto existe $\epsilon_\mu > 0$ tal que $D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap (Y' \setminus G_\mu) = \emptyset$. Dada

$x \in D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$, tenemos que $x \notin (Y \cap F_{\pi(\mu)}) \setminus G_\mu$, lo cual implica $x \in G_\mu$. Esto muestra que $D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)} \subseteq G_\mu$. Como también se tiene la contención contraria entonces$G_\mu = D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$.

Tomando $\epsilon_2 = min\{\epsilon_\mu \mid \mu \in M\}$ tenemos que, para toda $\mu \in M$, $G_\mu \subseteq D(G_\mu, \epsilon_2) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)} \subseteq D(G_\mu, \epsilon_\mu) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)} = G_\mu$. Por lo tanto $G_\mu = D(G_\mu, \epsilon_2) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$. ■

Tenemos todo preparado para mostrar que en la Definición 2.2.1, cada elemento G_μ de la familia G puede ser tomado abierto y cerrado en su respectivo $F_{\pi(\mu)} \cap Y$.

Lema 2.2.5 *Sean $S \subseteq X$ un árbol y $Y \subseteq X$ un subcontinuo con la propiedad $P(S)$. Entonces existen un árbol T y un refinamiento especial, $(\mathcal{K}, \pi)$, de $\mathcal{F}|Y$ tales que: $S \subseteq T \subseteq Y$; $\mathcal{K} = \{K_\mu \mid \mu \in M\}$; K_μ es abierto y cerrado en $F_{\pi(\mu)} \cap Y$, T está correctamente colocado en $\mathcal{K}$ y $Y = \bigcup_{\mu \in M}(K_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$.*

Demostración. Como Y tiene la propiedad $P(S)$, existen un refinamiento especial $(\mathcal{G}, \pi)$, de $\mathcal{F}|Y$ y un árbol T en Y, tales que: $S \subseteq T \subseteq Y$; $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$; T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$ y $Y = \bigcup_{\mu \in M}(G_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$.

Puesto que cada G_μ es unión de componentes de $F_{\pi(\mu)} \cap Y$, por el Lema 2.2.3 podemos encontrar, para cada $\mu \in M$ una sucesión decreciente $\left\{G_\mu^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos y cerrados de $F_{\pi(\mu)} \cap Y$ tal que $G_\mu = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_\mu^{(n)}$. Definimos $\mathcal{G}_n = \left\{G_\mu^{(n)} \mid \mu \in M\right\}$.

Por la Proposición 2.2.4, podemos hallar $\epsilon_1 > 0$ tal que $N(\mathcal{D}(\epsilon_1)) \cong N(\mathcal{G})$. Para cada $\mu \in M$, existe $N_\mu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\mu$, entonces $G_\mu^{(n)} \subseteq D(G_\mu, \epsilon_1)$. Sea $N = max_{\mu \in M}\{N_\mu\}$. Entonces para toda $\mu \in M$, $G_\mu \subseteq G_\mu^{(N)} \subseteq D(G_\mu, \epsilon_1)$. Como los nervios de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}(\epsilon_1)$ son naturalmente isomorfos tenemos que $N(\mathcal{G}) \cong N(\mathcal{G}_N)$.

Puesto que todo conjunto, $G_\mu^{(N)}$, es abierto y cerrado en $F_{\pi(\mu)} \cap Y$, tenemos que $G_\mu^{(N)}$ es unión de componentes de $F_{\pi(\mu)} \cap Y$ y, por lo tanto, $\mathcal{G}_N$ es un refinamiento especial de $\mathcal{F}|Y$.

Ya que T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$, para cada $\mu \in M$ existe la componente distinguida C_μ de $T \cap G_\mu$, con lo que se cumple que $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu$. Si $C_\mu^{(N)}$ es la componente de $G_\mu^{(N)} \cap T$ que contiene a C_μ, entonces $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu \subseteq \bigcup_{\mu \in M} C_\mu^{(N)} \subseteq T$. Por lo tanto, T está correctamente colocado en $\mathcal{G}_N$.

De la misma manera, $Y = \bigcup_{\mu\in M}(G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}) \subseteq \bigcup_{\mu\in M}(G_\mu^{(N)} \cap U_{\pi(\mu)}) \subseteq \bigcup_{\mu\in M}(Y \cap U_{\pi(\mu)}) \subseteq Y$. Tomando $\mathcal{K} = \mathcal{G}_N$, tenemos que $\mathcal{K}$ cumple las condiciones requeridas. ■

Lema 2.2.6 *Sean $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de subcontinuos de X que contienen un árbol S y $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$. Si Y tiene la propiedad $P(S)$, entonces existe un entero N tal que, para todo $n \geq N$, Y_n tiene la propiedad $P(S)$.*

Demostración. Como Y tiene la propiedad $P(S)$ existen un árbol T en Y y un refinamiento especial $(\mathcal{G}, \pi)$ de $\mathcal{F}|Y$ y T, tales que $S \subseteq T \subseteq Y$ y $Y = \bigcup_{\mu\in M} G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$. Por el Lema 2.2.5 podemos suponer que, para todo $\mu \in M$, G_μ es abierto y cerrado en $Y \cap F_{\pi(\mu)}$. Por la Proposición 2.2.4, existe $\epsilon > 0$ tal que:

(1) $N(\mathcal{D}(\epsilon))$ es naturalmente isomorfo a $N(\mathcal{G})$,

(2) $G_\mu = D(G_\mu, \epsilon) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$ para toda $\mu \in M$.

Como $Y = \bigcup_{\mu\in M} G_\mu$, el conjunto $V = \bigcup_{\mu\in M} D(G_\mu, \epsilon)$ es un abierto de X que contiene a Y, por lo tanto existe N_0 tal que, si $n > N_0$, entonces $Y_n \subseteq V$. Para cada $n > N_0$ y $\mu \in M$, sean $G_\mu^{(n)} = Y_n \cap F_{\pi(\mu)} \cap D(G_\mu, \epsilon)$ y $\mathcal{G}_n = \left\{G_\mu^{(n)} \mid \mu \in M\right\}$. Para todo $\mu \in M$, tenemos que $G_\mu \subseteq G_\mu^{(n)} \subseteq D(G_\mu, \epsilon)$, lo que implica que $N(\mathcal{G}_n) \cong N(\mathcal{G})$.

Veamos que existe $N_1 > N_0$ tal que, si $n > N_1$, entonces para todo $\mu \in M$, $G_\mu^{(n)}$ es unión de componentes de $F_{\pi(\mu)} \cap Y_n$, es decir, $\mathcal{G}_n$ es refinamiento especial de $\mathcal{F}|Y_n$.

Si no ocurriera, como M es finito, existirían $\mu \in M$ y una sucesión creciente de naturales $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$, tales que, para toda $i \in \mathbb{N}$, existe una componente, K_i, de $F_{\pi(\mu)} \cap Y_{n_i}$ para la que se cumple que $G_\mu^{(n_i)} \cap K_i \neq \emptyset$ pero $K_i \nsubseteq G_\mu^{(n_i)}$. Llamemos λ a $\pi(\mu)$. Notemos que $\emptyset \neq K_i \cap G_\mu^{(n_i)} \subseteq K_i \cap D(G_\mu, \epsilon)$. Ya que $K_i \subseteq F_\lambda \cap Y_{n_i}$ y K_i no está contenido en $G_\mu^{(n_i)} = Y_{n_i} \cap F_{\pi(\mu)} \cap D(G_\mu, \epsilon)$, tenemos que K_i intersecta a $D(G_\mu, \epsilon)$ y a su complemento en X, por lo tanto intersecta también a su frontera en X.

Por la compacidad de $C(X)$ podemos suponer que la sucesión $\{K_i\}_{i=0}^{\infty}$ converge a un subcontinuo K de X. Como para toda $i \in \mathbb{N}$, $K_i \subseteq Y_{n_i} \cap F_\lambda$, el conjunto K está contenido en $Y \cap F_\lambda$. Dada $i \in \mathbb{N}$, K_i intersecta a la frontera de $D(G_\mu, \epsilon)$ en X y a $G_\mu^{(n_i)}$. Como $G_\mu = D(G_\mu, \epsilon) \cap Y \cap F_{\pi(\mu)}$, concluimos que K también intersecta a la frontera de $D(G_\mu, \epsilon)$ en X y a G_μ. Ya que G_μ es unión de componentes de $Y \cap F_\lambda$ y K es un subcontinuo de $F_\lambda \cap Y$ que intersecta a G_μ, concluimos que $K \subseteq G_\mu$. Esto es absurdo pues K intersecta a la frontera en X de $D(G_\mu, \epsilon)$. Hemos mostrado la existencia de N_1 y si $n > N_1$, entonces $\mathcal{G}_n$ es refinamiento especial de $\mathcal{F}|Y_n$.

Como T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$, para cada $\mu \in M$, tenemos elegida la componente distinguida C_μ de $T \cap G_\mu$. Para cada $n > N_1$, sea $C_\mu^{(n)}$ la componente de $T \cap G_\mu^{(n)}$ que contiene a la componente C_μ de $G_\mu \cap T$, entonces $C_\mu \subseteq C_\mu^{(n)} \subseteq T$, lo que implica que $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu^{(n)}$. Por lo tanto T está correctamente colocado en $\mathcal{G}_n$.

Veamos ahora que existe N_2 tal que, si $n > N_2$, entonces $Y_n = \bigcup_{\mu \in M}(G_\mu^{(n)} \cap U_{\pi(\mu)})$. Sabemos que $\bigcup_{\mu \in M}(G_\mu^{(n)} \cap U_{\pi(\mu)}) \subseteq Y_n$. Supongamos que no existe un natural N_2 a partir del cual se cumple la igualdad. Entonces podemos hallar una sucesión creciente de naturales, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $y_i \in Y_{n_i} \setminus (\bigcup_{\mu \in M} G_\mu^{(n_i)} \cap U_{\pi(\mu)})$. Por la compacidad de X podemos suponer que la sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a un punto $y \in X$. Como la sucesión $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a Y, tenemos que $y \in Y$

Como existe $\mu \in M$ tal que $y \in G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$, entonces $U_{\pi(\mu)} \cap D(G_\mu, \epsilon)$ es un abierto en X contenido en $F_{\pi(\mu)}$ que contiene a y. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in Y_{n_k} \cap U_{\pi(\mu)} \cap D(G_\mu, \epsilon) = U_{\pi(\mu)} \cap G_\mu^{(n_k)}$, lo cual es una contradicción.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$, si $n > N$, concluimos que Y_n tiene la propiedad $P(S)$. ■

Corolario 2.2.7 *Sean S un árbol contenido en X y Y un subcontinuo de X que contiene a S pero que no tiene la propiedad $P(S)$. Entonces existe un subcontinuo Z de Y, que contiene a S, tal que Z no tiene la propiedad $P(S)$ y cada uno de sus subcontinuos propios sí tiene dicha propiedad.*

Demostración. Vamos a aplicar el Principio de Reducción de Brouwer [11, Teorema 4.18, p. 34] para obtener un subcontinuo mínimo que no tiene la propiedad $P(S)$. Tomamos entonces una sucesión de subcontinuos

$\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Y tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $S \subseteq Y_n$, $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ y Y_n no tiene la propiedad $P(S)$. Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$. Entonces A es un subcontinuo de Y que contiene a S. Por el Lema 2.2.6, A no tiene la propiedad $P(S)$, y $A \subseteq Y_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que A es una cota inferior de la cadena $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$. Por el Principio de Reducción de Brouwer , existe un subcontinuo Z de Y tal que $S \subseteq Z$ y que es minimal respecto a no tener la propiedad $P(S)$. Es decir Z no tiene la propiedad $P(S)$ pero todo subcontinuo propio de Z sí la tiene. ■

A continuación estudiaremos cómo son los continuos minimales que no tienen la propiedad $P(S)$. Por el Lema 2.2.2, si Z es un continuo minimal respecto a no tener la propiedad $P(S)$, entonces Z no es un árbol.

Recordemos que el conjunto E_Z contiene los puntos donde el continuo Z es colocalmente conexo. Dado que Z no es un árbol, por el Lema 1.2.12 el conjunto E_Z es infinito. Por el Lema 1.2.13, $E_Z \cap S$ está contenido en E_S, el cual, por el Lema 1.2.12, es un conjunto finito. Por lo tanto $E_Z \setminus S$ es infinito y en particular distinto del vacío.

2.3. Propiedades del continuo minimal Z

A lo largo de esta sección seguiremos suponiendo que X es un dendroide; $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una cubierta adecuada de X y que hemos elegido y fijado los conjuntos U_λ; S es un árbol en X y Z un subcontinuo minimal con respecto a no tener la propiedad $P(S)$.

Afirmación 1 *Sea $e \in E_Z \setminus S$. Entonces existe una vecindad abierta V de e en X tal que $V \cap S = \emptyset$ y que satisface:*

(1) $\overline{V} \cap F_\lambda = \emptyset$ para toda $\lambda \in \Lambda$ tal que $e \notin F_\lambda$,

(2) $\overline{V} \subseteq U_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$ tal que $e \in U_\lambda$,

(3) $A = Z \setminus V$ es conexo.

Para probar la Afirmación 1, sean $F = \bigcup\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \text{ y } e \notin F_\lambda\}$ y $U = \bigcap\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \text{ y } e \in U_\lambda\}$. Puesto que Λ es finito, tenemos que F es cerrado en X, de manera que $U \setminus F$ es un abierto en X que tiene a e.

Sea V_1 abierto en X tal que $e \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U \setminus (F \cup S)$. Como Z es colocalmente conexo en e, entonces existe un abierto V_0 en Z tal que $e \in V_0 \subseteq V_1$ y $Z \setminus V_0$ es conexo. Sea V_2 abierto en X tal que $V_0 = Z \cap V_2$, entonces $Z \setminus V_0 = Z \setminus V_2$. Sea $V = V_1 \cap V_2$. Entonces $V \cap Z = V_1 \cap V_2 \cap Z = V_1 \cap V_0 = V_0$. De manera que $Z \setminus V = Z \setminus V_0$ es conexo. Como $V \subseteq V_1$, V satisface las condiciones requeridas.

El conjunto A obtenido en la Afirmación 1 es conexo y por lo tanto es un subcontinuo propio de Z. La minimalidad con la que se definió Z implica que A tiene la propiedad $P(S)$. De manera que existe un refinamiento especial $\mathcal{G} = \{G_\mu \mid \mu \in M\}$ de $\mathcal{F}|A$ y un árbol T, con $S \subseteq T \subseteq A$, tales que T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$ y $A = \bigcup_{\mu \in M}(G_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$. Para el resto de la sección fijaremos el punto e y el conjunto A.

Afirmación 2 *Para cada $\mu \in M$, sea H_μ la unión de las componentes de $F_{\pi(\mu)} \cap Z$ que intersectan a G_μ. Entonces H_μ es un conjunto cerrado tal que $H_\mu \cap A = G_\mu$ y $G_\mu \subseteq H_\mu$.*

Para probar la Afirmación 2, sea $\mu \in M$. Veamos que H_μ es cerrado. Sea $x \in \overline{H_\mu}$. Entonces existe una sucesión, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $x_n \in H_\mu$, para toda $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dada $n \in \mathbb{N}$, existe una componente C_n de $F_{\pi(\mu)} \cap Z$ tal que $x_n \in C_n$ y C_n intersecta a G_μ. Por la compacidad de $C(Z)$ podemos suponer que la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un subcontinuo C de Z. Entonces $C \subseteq F_{\pi(\mu)} \cap Z$, $C \cap G_\mu \neq \emptyset$ y $x \in C$. Tomando la componente K_0 de $F_{\pi(\mu)} \cap Z$ que contiene a C, tenemos que x pertenece a $K_0 \subseteq H_\mu$. Por lo tanto H_μ es cerrado.

Sea K una componente de $F_{\pi(\mu)} \cap Z$ tal que $K \cap G_\mu \neq \emptyset$. Entonces $K \subseteq H_\mu$. Como $(\mathcal{G}, \pi)$ es un refinamiento especial de $\mathcal{F}|A$, tenemos que G_μ es unión de componentes de $F_{\pi(\mu)} \cap A$. Ya que $K \cap A$ es un subcontinuo de $A \cap F_{\pi(\mu)}$ que intersecta a G_μ, tenemos que $K \cap A \subseteq G_\mu$. Dado que K es un uniendo cualquiera de los que conforman H_μ, concluimos que $H_\mu \cap A \subseteq G_\mu$. Por otra parte, dado un punto $p \in G_\mu \subseteq F_{\pi(\mu)} \cap A \subseteq F_{\pi(\mu)} \cap Z$, tenemos que p pertenece a una componente de $F_{\pi(\mu)} \cap Z$ que intersecta a G_μ. Por lo tanto $G_\mu \subseteq H_\mu$ y $H_\mu \cap A = G_\mu$.

Afirmación 3 *Sea $\mathcal{H} = \{H_\mu \mid \mu \in M\}$. Entonces el nervio de $\mathcal{H}$ es naturalmente isomorfo al nervio de $\mathcal{G}$.*

Como $G_\mu \subseteq H_\mu$, para toda $\mu \in M$, para probar la Afirmación 3 basta verificar que si $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\} \subseteq M$ y $\bigcap_{i=1}^r H_{\mu_i} \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{i=1}^r G_{\mu_i} \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^r H_{\mu_i}$. Si $x \in A$, por la Afirmación 2, $x \in \bigcap_{i=1}^r H_{\mu_i} \cap A = \bigcap_{i=1}^r G_{\mu_i}$. Supongamos ahora que $x \notin A$, como $x \in Z$ entonces $x \in V$. Por el Lema 1.2.8, existe un punto $a \in A$ tal que $xa \cap A = \{a\}$.

Dada $i \in \{1, ..., r\}$, sea K_i la componente de $F_{\pi(\mu_i)} \cap Z$, que contiene a x. Ya que $x \in H_{\mu_i}$, tenemos que $\emptyset \neq K_i \cap G_{\mu_i} \subseteq K_i \cap A$ y $K_i \subseteq H_{\mu_i}$. Como K_i es un dendroide y $K_i \cap A \neq \emptyset$ es un subcontinuo de K_i, el arco $xa \subseteq K_i$. Por lo tanto $a \in A \cap (\bigcap_{i=1}^r H_{\mu_i}) \subseteq \bigcap_{i=1}^r G_{\mu_i}$.

Afirmación 4 *El árbol T está correctamente colocado en $\mathcal{H}$.*

Como T está correctamente colocado en $\mathcal{G}$, para cada $\mu \in M$ podemos escoger una componente C_μ de $T \cap G_\mu$ de tal forma que $T = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu$. Dada $\mu \in M$, como $H_\mu \cap T = H_\mu \cap A \cap T = G_\mu \cap T$, entonces C_μ también es una componente de $H_\mu \cap T$ y por lo tanto, T está correctamente colocado en $\mathcal{H}$.

Afirmación 5 *$V \cap Z$ no está contenido en $\bigcup_{\mu \in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$.*

Supongamos por el contrario que $V \cap Z \subseteq \bigcup_{\mu \in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$. Como $A = \bigcup_{\mu \in M}(G_\mu \cap U_{\pi(\mu)}) \subseteq \bigcup_{\mu \in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$, tenemos que $Z \subseteq \bigcup_{\mu \in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$. Por otra parte, cada H_μ se tomó contenida en Z, de manera que $Z = \bigcup_{\mu \in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$ y $\mathcal{H} = \{H_\mu \mid \mu \in M\}$ es una cubierta de Z.

Por la Afirmación 3, $N(\mathcal{H})$ es un árbol y por construcción, cada H_μ es unión de componentes de $Z \cap F_{\pi(\mu)}$. De modo que se cumple lo necesario para afirmar que $\mathcal{H}$ es un refinamiento especial de $\mathcal{F}|Z$. Por la Afirmación 4 , el árbol T está correctamente colocado en $\mathcal{H}$ y como $Z = \bigcup_{\mu \in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$, concluimos que Z tiene la propiedad $P(S)$. Esto contradice la elección de Z y termina la prueba de la Afirmación 5.

Afirmación 6 *Existen λ_0 y λ_1 en Λ tales que $e \in U_{\lambda_1} \cap (F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0})$. En particular $\overline{V} \subseteq U_{\lambda_1}$.*

Probemos la Afirmación 6. Veamos primero que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $e \in F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0}$. Supongamos por el contrario que para toda $\lambda \in \Lambda$, $e \notin$

$F_\lambda \setminus U_\lambda$. Mostraremos que esto implica $Z \cap V \subseteq \bigcup_{\mu\in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$, con lo que contradiremos la Afirmación 5.

Sean $x \in V \cap Z$ y xa el arco irreducible entre x y A. Por el Lema 1.2.8 sabemos que $xa \cap A = \{a\}$, y $a \in \overline{Z \setminus A} = \overline{V}$. Como $A = \bigcup_{\mu\in M}(G_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$, existe $\mu_0 \in M$ tal que $a \in G_{\mu_0} \cap U_{\pi(\mu_0)} \subseteq F_{\pi(\mu_0)}$. Entonces $\overline{V} \cap F_{\pi(\mu_0)} \neq \emptyset$. Por (1) en la Afirmación 1 tenemos que $e \in F_{\pi(\mu_0)}$. Estamos suponiendo que $e \notin F_{\pi(\mu)} \setminus U_{\pi(\mu)}$, así que $e \in U_{\pi(\mu_0)}$. Por (2) en la Afirmación 1 tenemos que $\overline{V} \subseteq U_{\pi(\mu_0)}$ y por lo tanto $x \in U_{\pi(\mu_0)}$.

El arco xa es un subconjunto conexo de $Z \cap \overline{V} \subseteq Z \cap U_{\pi(\mu_0)} \subseteq Z \cap F_{\pi(\mu_0)}$ e intersecta a G_{μ_0} ($a \in G_{\mu_0}$). Por la definición de H_{μ_0}, tenemos que $x \in H_{\mu_0}$. Por lo tanto $x \in H_{\mu_0} \cap U_{\pi(\mu_0)}$. Con esto hemos probado que $Z \cap V \subseteq \bigcup_{\mu\in M}(H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$. Esto contradice la Afirmación 5, por lo tanto existe λ_0 tal que $e \in F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0}$.

Ya que $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una cubierta de X, tenemos que existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $e \in U_{\lambda_1}$. Por lo tanto $e \in (F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0}) \cap U_{\lambda_1}$, lo que termina la prueba de la Afirmación 6.

Afirmación 7 *Si $\overline{V} \cap F_\lambda \neq \emptyset$, entonces $\lambda \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$.*

Probemos la Afirmación 7. La propiedad (1) de la Afirmación 1 implica que si $\overline{V} \cap F_\lambda \neq \emptyset$, entonces $e \in F_\lambda$. Por la Afirmación 6, $e \in U_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_0} \subseteq F_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_1}$. Si $\overline{V} \cap F_\lambda \neq \emptyset$, entonces $e \in F_\lambda \cap F_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_1}$, así que dos de los índices λ, λ_0 y λ_1 deben ser iguales. Ya que $e \in U_{\lambda_1} \setminus U_{\lambda_0}$, entonces $\lambda_0 \neq \lambda_1$. Por lo tanto $\lambda \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$.

Afirmación 8 *Sea $p \in V \cap Z$ tal que Z es colocalmente conexo en p, entonces $p \in U_{\lambda_1} \cap (F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0})$.*

Probemos la Afirmación 8. Como $V \cap S = \emptyset$ y $p \in E_Z \cap V$, entonces $p \in E_Z \setminus S$. Podemos entonces aplicar la Afirmación 1 a p para obtener un abierto W de X con las propiedades (1), (2) y (3) de tal afirmación y que cumpla $p \in W$. Podemos pedir además que $W \subseteq V$. Es posible entonces realizar el mismo desarrollo al que hicimos para e y V para concluir con una propiedad correspondiente con la Afirmación 6. Por lo tanto existen γ_0 y γ_1 en Λ para las cuales $p \in U_{\gamma_1} \cap (F_{\gamma_0} \setminus U_{\gamma_0})$.

Puesto que $p \in V$, por la Afirmación 7, $\gamma_0 \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$. Ya que $p \in V \cap (U_{\gamma_1} \setminus U_{\gamma_0}) \subseteq U_{\lambda_1} \cap (U_{\gamma_1} \setminus U_{\gamma_0})$, tenemos que $\lambda_1 \neq \gamma_0$, así que $\gamma_0 = \lambda_0$. Del mismo modo, como $p \in V \cap F_{\gamma_1}$, entonces $\gamma_1 \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$. Ya que $p \in U_{\gamma_1} \setminus U_{\gamma_0} = U_{\gamma_1} \setminus U_{\lambda_0}$, $\gamma_1 \neq \lambda_0$, así que $\gamma_1 = \lambda_1$. Por lo tanto $p \in U_{\lambda_1} \cap (F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0})$.

Afirmación 9 *Dada $x \in (Z \cap V) \setminus \bigcup_{\mu \in M} (H_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$, sea L_x la componente de $F_{\lambda_1} \cap Z$ que contiene a x. Entonces $L_x \setminus V$ está contenido en U_{λ_0}.*

Para probar la Afirmación 9, supongamos por el contrario que existe un punto $y \in (L_x \setminus V) \setminus U_{\lambda_0}$. Como $A = Z \setminus V$ es un continuo y X es un dendroide, el conjunto $L_x \setminus V = L_x \cap (Z \setminus V)$ es un continuo. Sea xz el arco irreducible entre x y $L_x \setminus V$. Como $y \in L_x \setminus V$, por el Lema 1.2.8, $z \in xy$. Dado que $x, y \in L_x$, tenemos que $xy \subseteq L_x$. Entonces $xz \subseteq L_x$ y dada $w \in xz \setminus \{z\}$, tenemos que $w \in L_x$ y $w \notin L_x \setminus V$, así que $w \in V$. Esto prueba que $xz \setminus \{z\} \subseteq V$.

Como $z \in L_x \setminus V \subseteq Z \setminus V = A = \bigcup_{\mu \in M} (G_\mu \cap U_{\pi(\mu)})$, existe $\mu \in M$ tal que $z \in G_\mu \cap U_{\pi(\mu)} \subseteq F_{\pi(\mu)}$. Como $x \in V$, $x \neq z$, así que $z \in \overline{xz \setminus \{z\}} \subseteq \overline{V}$. Por la Afirmación 7 , $\pi(\mu) \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$.

Si $\pi(\mu) = \lambda_1$, entonces L_x es una componente de $F_{\pi(\mu)} \cap Z$ y $z \in L_x \cap G_\mu$. Por la definición de H_μ, tenemos que $x \in L_x \subseteq H_\mu$ y como $\overline{V} \subseteq U_{\lambda_1}$, concluimos que $x \in H_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$. Esto contradice la manera en que se escogió x y prueba que $\pi(\mu) = \lambda_0$. Por tanto $z \in (L_x \setminus V) \cap U_{\lambda_0}$. Así que la componente se ve como en la Figura 2.2.

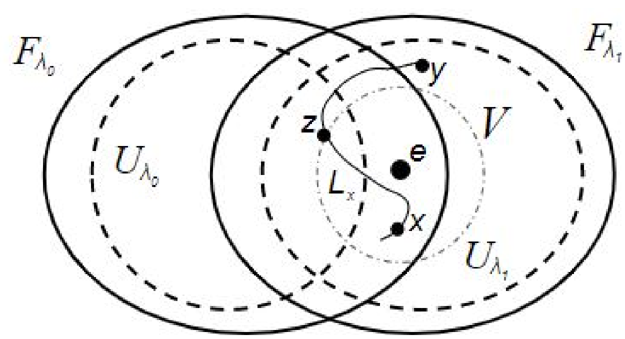


Figura 2.2: El punto z pertenece a U_{λ_0}

Sea $\Gamma = \{\nu \in \Lambda \setminus \{\lambda_1\} \mid U_\nu \cap (L_x \setminus V) \neq \emptyset\}$. Aseguramos que $L_x \setminus V \subseteq \bigcup_{\nu \in \Gamma} U_\nu$ y que $\Gamma = \{\lambda_0\}$.

Para mostrar la primera parte, supongamos por el contrario que existe un punto $w \in (L_x \setminus V) \setminus (\bigcup_{\nu \in \Gamma} U_\nu)$, como $w \in Z \setminus V = A$, existe $\mu \in M$ tal que $w \in G_\mu \cap U_{\pi(\mu)} \subseteq G_\mu \cap F_{\pi(\mu)}$. Por la definición de Γ, $\pi(\mu) = \lambda_1$. Entonces L_x es una componente de $F_{\lambda_1} \cap Z$ que intersecta a G_μ ($w \in L_x \cap G_\mu$). Por la definición de H_μ, tenemos que $L_x \subseteq H_\mu$. Entonces $x \in H_\mu$. Como $e \in U_{\lambda_1}$, tenemos que $V \subseteq U_{\lambda_1} = U_{\pi(\mu)}$. De manera que $x \in H_\mu \cap U_{\pi(\mu)}$, lo que contradice la elección de x y prueba que $L_x \setminus V \subseteq \bigcup_{\nu \in \Gamma} U_\nu$.

Ahora supongamos que $\Gamma \setminus \{\lambda_0\} \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{\nu \in \Gamma \setminus \{\lambda_0\}} U_\nu \cap (L_x \setminus V)$ y $U_{\lambda_0} \cap (L_x \setminus V)$ son dos abiertos no vacíos, cuya unión es igual al conjunto conexo $L_x \setminus V$ y por lo tanto su intersección es no vacía, así que existe $\nu \in \Gamma \setminus \{\lambda_0\}$, tal que $\emptyset \neq U_\nu \cap U_{\lambda_0} \cap (L_x \setminus V) \subseteq F_\nu \cap F_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_1}$, pues $L_x \subseteq F_{\lambda_1}$. Esto es absurdo pues ν, λ_0 y λ_1 son distintos entre sí. Por lo tanto $\Gamma = \{\lambda_0\}$ y $L_x \setminus V \subseteq U_{\lambda_0}$. La componente se ve entonces como en la Figura 2.3.

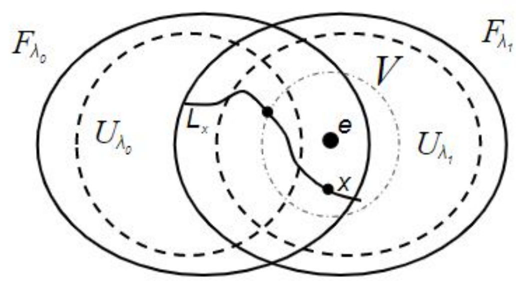


Figura 2.3: .

Afirmación 10 *$\overline{Z \cap V}$ está contenido en $\overline{U_{\lambda_0}}$.*

Supongamos que la Afirmación 10 es falsa. Entonces existe un punto $p \in \overline{Z \cap V} \cap (X \setminus \overline{U_{\lambda_0}})$. Como $X \setminus \overline{U_{\lambda_0}}$ es abierto en X, tenemos que el conjunto $W = Z \cap V \cap (X \setminus \overline{U_{\lambda_0}}) \neq \emptyset$. Observemos que $W = (Z \cap V) \setminus \overline{U_{\lambda_0}}$. Por el teorema de Krasinkiewicz y Minc (Teorema 1.2.11), existen dos puntos e_1 y e_2, en los que Z es colocalmente conexo, tales que $e_1e_2 \cap W \neq \emptyset$, como se muestra en la Figura 2.4.

Sea $w \in e_1e_2 \cap W$. Entonces $w \in e_1e_2 \cap W \subseteq e_1e_2 \cap V$ y $A = Z \setminus V$ es conexo. Por el Lema 1.2.9, podemos suponer que $e_1 \in V$ y que w pertenece al arco irreducible e_1a, donde $e_1a \cap A = \{a\}$.

Como W es abierto en Z, $w \in e_1a$ y $e_1 \neq a$, tenemos que $W \cap e_1a$ es infinito, por lo que podemos suponer que $w \notin \{e_1, a\}$. la imagen hasta ahora se ve como en la Figura 2.5.

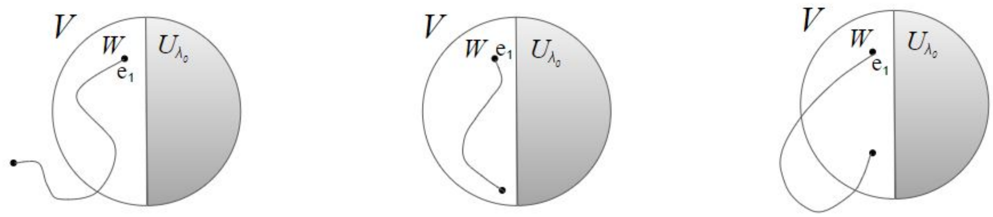


Figura 2.4: Posible formas del arco e_1e_2.

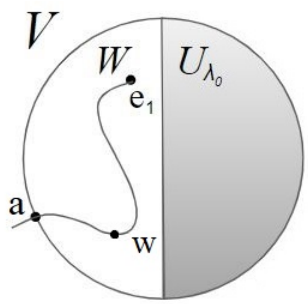


Figura 2.5: Arco irreducible entre e_1 y $Z \setminus V$

Sea W_1 un abierto de Z tal que $w \in W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq W$ y $e_1 \notin \overline{W_1}$ (ver Figura 2.6). Por el Lema 1.2.10 existe un abierto O' de Z tal que $e_1 \in O'$, $O' \cap \overline{W_1} = \emptyset$ y para toda $x \in O'$ el arco irreducible entre x y A intersecta a W_1. Sea $O = O' \cap V$. Entonces O tiene las mismas propiedades que O' y además $O \subseteq V$.

Como Z es colocalmente conexo en e_1, existe un abierto V_2 de Z tal que $e_1 \in V_2 \subseteq O$ y $Z \setminus V_2$ es conexo.

Sean V_3 y O_1, abiertos en X tales que $V_2 = V_3 \cap Z$ y $O = O_1 \cap Z$. Como $O \subseteq V$, tenemos que $O = O_1 \cap V \cap Z$. Cambiando O_1 por $O_1 \cap V$, podemos suponer que $O_1 \subseteq V$.

Sea $V_1 = V_3 \cap O_1$ (ver Figura 2.7). Entonces $V_1 \subseteq O \subseteq V \subseteq U_{\lambda_1}$, $V_1 \cap Z \subseteq O$, $V_1 \cap \overline{W_1} = V_1 \cap (Z \cap \overline{W_1}) \subseteq V_2 \cap \overline{W_1} \subseteq O \cap \overline{W_1} \subseteq O' \cap \overline{W_1} = \emptyset$ y $Z \setminus V_1 = Z \setminus (V_1 \cap Z) = Z \setminus (V_3 \cap Z \cap O_1 \cap Z) = Z \setminus (V_2 \cap O) = Z \setminus V_2$ es conexo.

Por tanto V_1 es abierto en X, $V_1 \subseteq U_{\lambda_1}$, $V_1 \cap Z \subseteq O$, $V_1 \cap \overline{W_1} = \emptyset$ y $Z \setminus V_1 = Z \setminus V_2$ es conexo. Veamos que V_1 y e_1 cumplen las condiciones de la

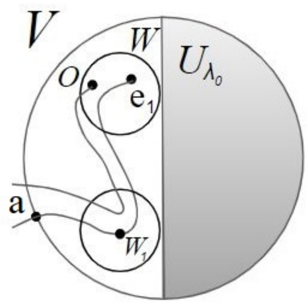


Figura 2.6:

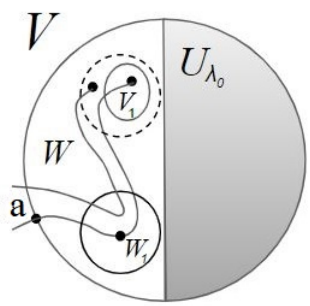


Figura 2.7:

Afirmación 1.

(1) Sea $\lambda \in \Lambda$ tal que $e_1 \notin F_\lambda$. Si $e \in F_\lambda$, por la Afirmación 7, $\lambda \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$. Por la Afirmación 8, como $e_1 \in V_1 \cap Z \subseteq V \cap Z$, tenemos que $e_1 \in F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_0}$, de manera que $e_1 \in F_\lambda$. Como esto es absurdo concluimos que $e \notin F_\lambda$. Por lo tanto $\overline{V} \cap F_\lambda = \emptyset$ y en consecuencia, $\overline{V_1} \cap F_\lambda = \emptyset$. Por tanto e_1 y V_1 cumplen (1). Notemos que probamos que si $e \in F_\lambda$, entonces $e_1 \in F_\lambda$, de manera que $e_1 \in F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_0}$.

(2) Sea $\lambda \in \Lambda$ tal que $e_1 \in U_\lambda$. Entonces $e_1 \in \overline{V} \cap F_\lambda$. Por la Afirmación 7, $\lambda \in \{\lambda_0, \lambda_1\}$. Por la Afirmación 8, $e_1 \in U_{\lambda_1} \cap (F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0})$. De manera que $\lambda = \lambda_1$. Como $e \in U_{\lambda_1}$, tenemos que $\overline{V_1} \subseteq \overline{V} \subseteq U_{\lambda_1} = U_\lambda$. Por tanto, también e_1 y V_1 cumplen (2). Observemos que probamos que si $e_1 \in U_\lambda$, entonces $\lambda = \lambda_1$. Esto implica que $e_1 \notin U_{\lambda_0}$ y que $e_1 \in U_{\lambda_1}$.

(3) Ya vimos que $A_1 = Z \setminus V_1$ es conexo.

En este punto tenemos para e_1, V_1 y A_1 las condiciones que teníamos para e, V y A cuando terminamos la Afirmación 1. De manera que podemos desarrollar las propiedades correspondientes a todas las que hemos desarrollado. Para empezar, existen un refinamiento especial $(\mathcal{J}, \alpha)$ de $\mathcal{F}|A_1$, donde $\mathcal{J} = \{J_\eta \mid \eta \in N\}$, y un árbol R con $S \subseteq R \subseteq A_1$ tales que R está correctamente colocado en $\mathcal{J}$ y $A_1 = \bigcup_{\eta \in N}(J_\eta \cap U_{\alpha(\eta)})$.

Para cada $\eta \in N$, sea K_η la unión de componentes de $F_{\alpha(\eta)} \cap Z$ que intersectan a J_η. Por la Afirmación 2, K_η es cerrado en X, $K_\eta \cap A_1 = J_\eta$ y $J_\eta \subseteq K_\eta$. Por las Afirmaciones 3 y 4, el nervio de $\mathcal{K} = \{K_\eta \mid \eta \in N\}$ es naturalmente isomorfo al nervio de $\mathcal{J}$ y el árbol R está correctamente colocado en $\mathcal{K}$. Por la Afirmación 5, existe un punto $x_0 \in (V_1 \cap Z) \setminus \bigcup_{\eta \in N}(K_\eta \cap U_{\alpha(\eta)})$.

En las pruebas de que e_1 y V_1 satisfacen (1) y (2), vimos que $e_1 \in U_{\lambda_1} \cap (F_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0})$. De manera que los índices garantizados por la Afirmación 6 para e_1 son también λ_1 y λ_0.

Como $x_0 \in V_1 \subseteq V \subseteq U_{\lambda_1}$, podemos tomar la componente L_{x_0} de $F_{\lambda_1} \cap Z$ que contiene a x_0. Por la Afirmación 9, $L_{x_0} \setminus V_1 \subseteq U_{\lambda_0}$.

Sea $a_1 \in A$ tal que $x_0 a_1 \cap A = \{a_1\}$. Como $x_0 \in V_1 \subseteq V$, tenemos que $x_0 \neq a_1$. Entonces $x_0 a_1 \setminus \{a_1\}$ es un conjunto conexo, con más de un punto, contenido en $V \subseteq U_{\lambda_1} \subseteq F_{\lambda_1}$. Ya que $x_0 \in V_1 \subseteq O_1 \subseteq O'$, la elección de O' implica que $x_0 a_1 \cap W_1 \neq \emptyset$. Dado que W_1 es abierto en Z, también tenemos que $(x_0 a_1 \setminus \{a_1\}) \cap W_1 \neq \emptyset$. Como $x_0 a_1 \setminus \{a_1\}$ es un subconjunto conexo de $F_{\lambda_1} \cap Z$, tenemos que $x_0 a_1 \setminus \{a_1\} \subseteq L_{x_0}$. Esto muestra que $L_{x_0} \cap W_1 \neq \emptyset$. Por otra parte, como $W_1 \subseteq Z \setminus V_1$, tenemos que $L_{x_0} \cap W_1 \subseteq L_{x_0} \setminus V_1 \subseteq U_{\lambda_0}$. Sin embargo construimos W_1 de tal forma que $W_1 \subseteq W \subseteq V \setminus U_{\lambda_0}$. Tenemos entonces que $L_{x_0} \cap W_1 \subseteq V \setminus U_{\lambda_0}$. Por tanto $\emptyset \neq L_{x_0} \cap W_1 \subseteq U_{\lambda_0} \cap (V \setminus U_{\lambda_0})$, lo cual es absurdo. Esto termina la prueba de la Afirmación 10.

Las afirmaciones aquí enunciadas nos dan información importante acerca de un continuo minimal respecto a no tener la propiedad $P(S)$. Particularmene las Afirmaciones 9 y 10 tendrán un papel importante en la prueba propuesta por Cauty. Trataremos de explicar brevemente el camino a seguir.

Junto con el resultado principal del siguiente capítulo, las afirmaciones de esta sección permitirán construir una sucesión de árboles $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ y dendroides $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, que satisfagan la siguiente condición:

$$S = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \dots T_n \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X_1 \subseteq X_0 \subseteq X$$

A partir de la cubierta $\mathcal{F}$, para $n > 0$, se construirán cubiertas adecuadas $\mathcal{F}_n$ para los continuos X_{n-1}. A grandes rasgos el proceso es como sigue. Si suponemos que X no tiene la propiedad $P(T_0)$ entonces X_0 será un continuo minimal que no tenga esta propiedad.

Tomamos un árbol T_1 que contenga a T_0 de forma que X_1 no tenga la propiedad $P(T_1)$, usando la cubierta $\mathcal{F}_1|X_1$. Entonces podemos hallar un subcontinuo X_1 de X_0 que no tenga la propiedad $P(T_1)$ y se continúa con este proceso. La construcción de los árboles, cubiertas y continuos es una tarea complicada que no alcanzamos a explicar en este trabajo. A partir de esta construcción, usando las afirmaciones de esta sección y el Teorema 3.0.17 del siguiente capítulo, Cauty afirma que se llega a una contradicción que termina la prueba. Para llegar a ese punto aún queda un largo e intrincado camino por recorrer, pero ya hemos avanzado un buen trecho.

Capítulo 3

Arcos y cadenas

En este capítulo presentamos varios resultados llamados auxiliares por Cauty. El trabajo de este capítulo va dirigido a probar el Teorema 3.0.17, el cual nos permite encontrar un abierto de un dendroide cuyos elementos cumplen ciertas características, que explicamos a lo largo del capítulo, respecto a un árbol contenido en el dendroide. Este teorema es de utilidad más adelante en la prueba de Cauty.

Sea Y un subcontinuo de X y T un árbol contenido propiamente en Y. Continuamos usando la cubierta adecuada $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de X y los conjuntos U_λ que habíamos utilizado en el capítulo anterior. Recordemos que X es un dendroide y que por ser $\mathcal{F}$ una cubierta adecuada, su nervio es un árbol.

Para todo $x \in Y$, sea $xq(x)$ el arco irreducible entre x y T. Puesto que los conjuntos U_λ cubren a X, y el arco $xq(x)$ es localmente conexo entonces puede ser cubierto por un número finito de componentes de los conjuntos de la forma $U_\lambda \cap xq(x)$.

Lema 3.0.1 *Sea $\alpha = ab$ un arco en Y. Entonces existen una cantidad finita de elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente diferentes entre sí) de Λ y, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, una componente L_i de $F_{\lambda_i} \cap Y$ tales que*

(1) $a \in L_1$,

(2) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$,

(3) $b \in L_n$.

(4) Si n *es el menor número natural para el que existe la familia* $\{L_1, \ldots, L_n\}$ *entonces para toda* $i < n$, $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$.

Demostración. Para cada $\lambda \in \Lambda$, tal que $ab \cap U_\lambda \neq \emptyset$, el conjunto $ab \cap U_\lambda$ es un abierto del arco ab. Como ab es localmente conexo, las componentes de esta intersección (cuando no es vacía) son subintervalos abiertos de ab. Ya que $\mathcal{U}$ cubre a X, también cubre a ab, de manera que las componentes de los conjuntos $ab \cap U_\lambda$ (variando λ) también cubren a ab. Por tanto, la familia $\mathcal{K} = \{C :$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que C es una componente de $ab \cap U_\lambda\}$ es una cubierta abierta de ab.

Puesto que el arco es compacto podemos extraer una subcubierta finita $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{K}$. Sean A y B elementos de la $\mathcal{K}'$ que contienen a a y b, respectivamente. Puesto que $\mathcal{K}'$ es una cubierta finita de abiertos del arco ab, por el Lema 1.3.14, el nervio de esta cubierta es una gráfica conexa. Por lo tanto existe una secuencia $C_1, \ldots, C_n$ de elementos de $\mathcal{K}'$ tal que $C_1 = A$, $C_n = B$ y para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.

Cada elemento C_i es componente de algún conjunto de la forma $ab \cap U_{\lambda_i} \subseteq Y \cap F_{\lambda_i}$. Sea L_i la componente de $Y \cap F_{\lambda_i}$ que contiene a C_i, entonces $a \in L_1$, $b \in L_m$ y $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Ahora supongamos que n es mínimo y que $i < n$. Entonces $L_i \neq L_{i+1}$ pues en caso contrario podríamos omitir a L_i, obteniendo una familia con menos elementos. Como $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ no puede ocurrir que $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ pues tendríamos dos componentes distintas del mismo conjunto cuya intersección es no vacía. Por lo tanto $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$. ■

Definición 3.0.2 *La secuencia de pares ordenados* $\{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^n$ *que cumple las condiciones del Lema 3.0.1 será llamada una* ***cadena****. Las parejas* (L_i, λ_i) *serán llamadas* ***elementos de la cadena*** *y las componentes* L_i ***eslabones****.*

En el caso en que el número n *sea mínimo, diremos que la secuencia* $\{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^m$ *es una* ***cadena mínima del arco*** *ab.*

El siguiente resultado nos muestra que las cadenas mínimas tienen condiciones más fuertes que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 3.0.3 *Sea* $\{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^m$ *una cadena mínima de un arco ab, entonces:*

(1) $a \in L_1 \setminus \bigcup_{i \neq 1} L_i$,

(2) $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i - j| \leq 1$, *y*

(3) $b \in L_m \setminus \bigcup_{i \neq m} L_i$.

Demostración.
(1) Si a pertenece a algún otro elemento L_k con $1 < k \leq m$ entonces $L_k, L_{k+1}, \ldots, L_m$ es una cadena que cumple las condiciones del Lema 3.0.1 y que tiene menos de m eslabones, lo que contradice la minimalidad de m.

(2) Supongamos que existen índices i y j en $\{1, ..., m\}$ tales que $i < j$, $|j - i| > 1$ y $L_i \cap L_j \neq \emptyset$. Entonces la cadena $L_1, \ldots L_i, L_j, \ldots L_m$ satisface las condiciones del Lema 3.0.1 y tiene menos de m elementos lo cual es una contradicción.

(3) Si b pertenece a algún otro elemento L_k con $1 \leq k < m$, entonces $L_1, \ldots, L_{k-1}, L_k$ es una cadena que cumple las condiciones del Lema 3.0.1 y que tiene menos de m eslabones, lo que contradice la minimalidad de m. ■

Lema 3.0.4 *Sean ab un arco en Y y m el menor entero para el cual existe una cadena del arco ab con m eslabones. Si $m \geq 2$, entonces existe una única cadena mínima de ab.*

Demostración. La prueba de este lema consiste en caracterizar las parejas (L, λ) que forman parte de una cadena mínima. Sea $\{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^{m}$ una cadena mínima del arco ab. Definimos la familia:

$$\mathcal{K} = \{(L, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda, L \text{ es una componente de } F_\lambda \cap Y \text{ y } ab \cap (L_\lambda \setminus \bigcup_{\gamma \neq \lambda} F_\gamma) \neq \emptyset\}$$

Éstas son las componentes que tienen puntos del arco ab que no están en ningún otro elemento de la cubierta $\mathcal{F}|Y$. Si quitamos una de estas componentes, entonces retiramos puntos del arco ab que no pueden ser reemplazados añadiendo más eslabones. Mostraremos que los elementos de $\mathcal{K}$ son exactamente las parejas (L_i, λ_i) con $1 \leq i \leq m$, de la cadena mínima, es decir, $\mathcal{K} = \{(L_i, \lambda_i) \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$.
Si $(L, \lambda) \in \mathcal{K}$, entonces existe un punto $x \in ab \cap (L_\lambda \setminus \bigcup_{\gamma \neq \lambda} F_\gamma)$, puesto que $x \in ab$ entonces existe $i \in \{1, \ldots, m\}$, tal que $x \in L_i$ que es componente

de $F_{\lambda_i}\cap Y$. Puesto que el punto x pertenece únicamente a F_λ, entonces $\lambda = \lambda_i$ y por lo tanto $L_i = L$. Esto muestra que toda pareja en la familia $\mathcal{K}$ es un elemento de la cadena mínima.

Veamos ahora que para cada $1 \leq i \leq m$, la pareja $(L_i, \lambda_i) \in \mathcal{K}$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un número $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $(L_i, \lambda_i) \notin \mathcal{K}$. Entonces $ab \cap (L_i \setminus \bigcup_{\gamma\neq\lambda_i} F_\gamma) = \emptyset$, lo cual implica $ab \cap L_i \subseteq \bigcup_{\gamma\neq\lambda_i} F_\gamma$.

Tenemos entonces que la restricción de $\mathcal{F}\setminus\{F_{\lambda_i}\}$ a $ab\cap L_i$, $\mathcal{F}\setminus\{F_{\lambda_i}\}|ab\cap L_i$ es una cubierta para $ab \cap L_i$. Si esta cubierta tiene más de dos elementos distintos, puesto que $ab \cap L_i$ es conexo, entonces existen γ y η en Λ tales que $\emptyset \neq F_\gamma \cap F_\eta \cap L_i \cap ab \subseteq L_i$. Esto implica que $F_\gamma \cap F_\eta \cap F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ lo que es una contradicción ya que el nervio de $\mathcal{F}$ es un árbol. Por lo tanto la cubierta $\mathcal{F} \setminus \{F_{\lambda_i}\}|ab \cap L_i$ tiene un único elemento distinto del vacío. De modo que existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\gamma \neq \lambda_i$ y $ab \cap L_i \subseteq F_\gamma$.

Como cada L_j es un subcontinuo de X, tenemos que los conjuntos $K_0 = L_1 \cup \ldots \cup L_{i-1}$ y $K_1 = L_{i+1} \cup \ldots \cup L_m$ son subcontinuos de X. De manera que $K_0 \cap ab$ es el conjunto vacío o es un subcontinuo de ab que contiene a a y $K_1 \cap ab$ es el conjunto vacío o es un subcontinuo de ab que contiene a b.

Analicemos el caso en que $1 < i < m$. Los casos $i = 0$ e $i = m$ son similares. En este caso $K_0 \cap ab = ac$ y $K_1 \cap ab = eb$, para algunos $c, e \in ab$. Como estamos tomando una cadena mínima para ab, entonces $L_1\cup\ldots\cup L_{i-1}\cup L_{i+1} \cup \ldots \cup L_m$ no contiene al arco ab. Esto implica que, si tomamos el orden natural en ab donde $a < b$, se tiene que $c < e$. Entonces $ce \setminus \{c, e\} \subseteq L_i$. y en consecuencia $ce \subseteq L_i \subseteq F_\gamma$. Puesto que $c \in ac = K_0 \cap ab$, existe $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ tal que $c \in L_j \subseteq F_{\lambda_j}$. Entonces $c \in F_{\lambda_i}\cap F_{\lambda_j}\cap F_\gamma$. Ya que el nervio de $\mathcal{F}$ es un árbol, tenemos que $\gamma \in \{\lambda_i, \lambda_j\}$ y como escogimos $\gamma \neq \lambda_i$, entonces $\gamma = \lambda_j$. Como $ce \subseteq L_i \subseteq F_\gamma = F_{\lambda_j}$, tenemos que ce es un conjunto conexo de $F_{\lambda_j} \cap Y$ que intersecta a L_j ($c \in ce \cap L_j$), así que $ce \subseteq L_j$. Esto es absurdo ya que $L_j \subseteq K_0$, $e \in K_1$ y $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ así que $e \notin L_j$. Esto termina la prueba de que cada elemento de la cadena mínima pertenece a K.

Hemos probado que dada cualquier cadena mínima se tiene que $\mathcal{K} = \{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^m$ por lo tanto existe una única cadena mínima de ab. Notemos que usamos que $m \geq 2$ para que exista el subarco ce. En el caso en que $m = 1$, el Lema 3.0.4 puede fallar cuando el arco ab está contenido en la intersección de dos conjuntos U_λ y U_γ, pues en este caso podemos tomar $F_\lambda \cap ab$ o $F_\gamma \cap ab$ y las dos son cubiertas mínimas. ■

Una cadena mínima nos dice en cuantos "pasos" un punto a alcanza al

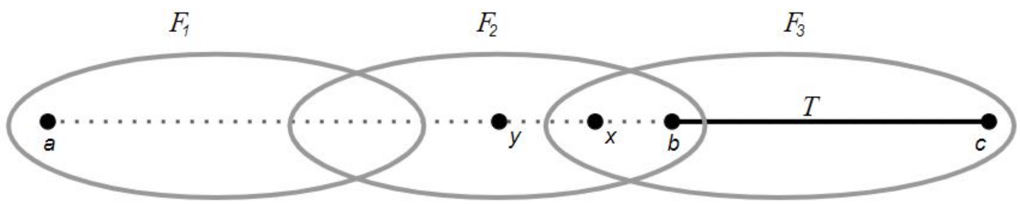


Figura 3.1: Tomemos como Y al arco ac y como T al arco bc con la cubierta que se muestra. Los puntos x y y alcanzan "en un paso" al árbol T. Para el punto x existen dos posibles elecciones de cadenas para el arco xT: la componente de x en F_3 o su componente en F_2. Por otra parte para el punto y la elección sí es única, pues sólo podemos tomar su componente en F_2.

punto b.

Para el árbol T y un punto $x \in X$ que no pertenece a T sea $q(x) \in T$ el punto tal que $xq(x)$ es el arco irreducible entre x y T. Denotamos $m(x,T)$ el menor entero m para el cual existen secuencias $\{L_i\}_{i=1}^m$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ que cumplen las condiciones del Lema 3.0.1 para el arco $xq(x)$. En el caso en que $m(x,T) > 1$, la cadena mínima es de $m(x,T)$ eslabones. Dado un $x \in X$, si $m(x,T) > 1$, la cadena mínima garantizada por el Lema 3.0.4 será denotada por $\{(L_i^x, \lambda_i^x)\}_{i=1}^{m(x,T)}$, donde $x \in L_1^x$ y $q(x) \in L_{m(x,T)}^x$. En el caso en que $m(x,T) = 1$, existe un $\lambda_1^x \in \Lambda$ tal que $xq(x) \subseteq L_1^x \subseteq F_{\lambda_1^x}$. Hemos observado que podría haber dos índices λ_1^x con esta propiedad. De manera que en ocasiones el caso $m(x,T) = 1$ será tratado de manera especial.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los siguiente subconjuntos de Y: $R_n = \{x \in Y \mid m(x,T) = n\}$ y $S_n = \bigcup_{k=1}^n R_k$, equivalentemente $S_n = \{x \in Y \mid m(x,T) \leq n\}$.

Lema 3.0.5 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de puntos en R_n que converge a un punto x. Entonces existen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$, una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ y para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ una componente L_i de $F_{\lambda_i} \cap Y$, tales que para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i^{x_{m_k}} = \lambda_i$. Además la familia $\{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^n$ satisface que:*

(1) $x \in L_1$,

(2) $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ *si* $|i-j| \leq 1$,

(3) $L_n \cap T \neq \emptyset$ *y*

(4) $xq(x) \subseteq L_1 \cup \ldots \cup L_n$.

Demostración. Consideremos la sucesión $L = \{(\lambda_1^{x_m}, \ldots, \lambda_n^{x_m})\}_{m=1}^{\infty}$. Dado que el conjunto Λ es finito, el conjunto Λ^n también es finito, entonces existe una secuencia $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ que se repite infinitamente en L. Tomando los elementos de la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ para los cuales $(\lambda_1^{x_m}, \ldots, \lambda_n^{x_m}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, tenemos una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que, para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i^{x_{m_k}} = \lambda_i$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $y_k = x_{m_k}$. Como X es un continuo, podemos suponer que para cada índice i, con $1 \leq i \leq n$, la sucesión $\{L_i^{y_k}\}_{k=1}^{\infty}$, formada por componentes de $F_{\lambda_i} \cap Y$, converge hacia un subcontinuo K_i contenido en $F_{\lambda_i} \cap Y$.

Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea L_i la componente de $F_{\lambda_i} \cap Y$ que contiene a K_i. Dado que para toda $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in L_1^{y_k}$ y $L_n^{y_k} \cap T \neq \emptyset$, tenemos que $x \in K_1 \subseteq L_1$ y $K_n \cap T \neq \emptyset$ lo que implica $L_n \cap T \neq \emptyset$.

Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $L_i^{y_k} \cap L_{i+1}^{y_k} \neq \emptyset$, lo cual implica que $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ y en consecuencia $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$. Por lo tanto $L_1 \cup \ldots \cup L_n$ es un continuo que contiene a x e intersecta a T, lo que implica que contiene al arco irreducible $xq(x)$. ■

Lema 3.0.6 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, el conjunto* S_n *es cerrado en* Y*.*

Demostración. Sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de S_n que converge a un punto x. Probaremos que $x \in S_n$.

Puesto que para toda $j \in \mathbb{N}$, $m(x_j, T) \leq n$, entonces existe $r \in \{1, \ldots, n\}$ para el que una infinidad de elementos de la sucesión cumplen $m(x_j, T) = r$. Por lo tanto podemos tomar una subsucesión $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ contenida en R_r que converge a x.

Por el Lema 3.0.5 existen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ y una subsucesión, que podemos suponer que es la misma $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, tales que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $m(x_{j_k}, T) = r$ y para todo $i \in \{1, \ldots r\}$ y toda $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i^{x_{j_k}} = \lambda_i$. Existe también, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, una componente L_i de $F_{\lambda_i} \cap Y$ de tal manera que la familia $\{L_i, \lambda_i\}_{i=1}^{r}$ se satisface las condiciones (1), (2), (3) y (4) del Lema 3.0.5.

Sea s el menor entero para el cual el arco $xq(x)$ está contenido en el conjunto $L_1 \cup \ldots \cup L_s$, entonces las parejas $(L_1, \lambda_1), \ldots, (L_s, \lambda_s)$ cumplen las condiciones del Lema 3.0.1. De modo que $\{(L_i, \lambda_i)\}_{i=1}^{s}$ es una cadena del arco de x a T y por lo tanto $m(x, T) \leq s \leq n$, lo que implica que $x \in S_n$ y concluimos que S_n es cerrado. ■

Para el siguiente lema recordemos que E_Y es el conjunto de puntos en los que Y es colocalmente conexo.

Lema 3.0.7 *Sean $e \in E_Y \setminus T$ y V una vecindad de e en Y tal que $Y \setminus V$ es conexo y $T \subseteq Y \setminus V$. Sean $m_V = sup\{m(x, T) \mid x \in V\}$ y $m'_V = sup\{m(x, T) \mid x \in V \cap E_Y\}$. Entonces $m_V = m'_V$.*

Demostración. Puesto que $V \cap E_Y \subseteq V$, entonces $m'_V \leq m_V$. Si m'_V es infinito, entonces m_V también lo es y por lo tanto $m_V = m'_V$.

Supongamos entonces que m'_V es finito y probemos que $m'_V \geq m_V$. Sea $x \in V$, por el teorema de Krasinkiewicz y Minc (Teorema 1.2.11), x es el límite de una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que, para toda $i \in \mathbb{N}$, x_i pertenece a un arco $e_i f_i$, donde e_i y f_i son puntos de E_Y. Puesto que V es abierto de Y y $x \in V$, podemos suponer que $x_i \in V$, para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por el Lema 1.2.9, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $a_i \in \{e_i, f_i\}$ tal que $a_i \in V$ y x_i pertenece al arco $a_i b_i$, donde b_i es tal que $a_i b_i \cap (Y \setminus V) = \{b_i\}$. Sea $z_i \in T$ tal que $a_i z_i \cap T = \{z_i\}$. Como $z_i \in T \subseteq Y \setminus V$, por el Lema 1.2.9(1), $b_i \in a_i z_i$.

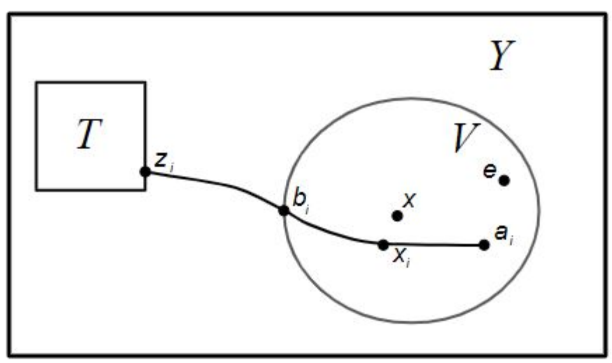


Figura 3.2: El punto x_i pertenece al arco irreducible entre a_i y T.

Por lo tanto, dado que $x_i \in a_i z_i$, entonces $x_i q(x_i) \subseteq a_i q(a_i)$ y tenemos que $m(x_i, T) \leq m(a_i, T) \leq m'_V < \infty$.

Hemos probado que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in S_{m'_V}$. El Lema 3.0.6 implica que $x \in S_{m'_V}$ y por lo tanto $m(x,T) \leq m'_V$. De aquí concluimos que $m_V \leq m'_V$ y por lo tanto $m_V = m'_V$. ■

Lema 3.0.8 *Sean e un punto y V un abierto de Y que cumplen las hipótesis del Lema 3.0.7. Entonces:*

1. *si m_V es finito, existe un punto $e_1 \in E_Y$ y un abierto U de Y tal que $e_1 \in U$, $\overline{U} \subseteq V$, $Y \setminus U$ es conexo, y para toda $x \in \overline{U}$, $m(x,T) = m_V$.*

2. *si m_V es infinito, existe un punto $e_1 \in E_Y$ y un abierto U de Y tal que $e_1 \in U$, $\overline{U} \subseteq V$, $Y \setminus U$ es conexo y para toda $x \in U$, $m(x,T) > m(e,T)$.*

Demostración.

1. Como m_V es finito, por el Lema 3.0.7, existe $e_1 \in E_Y \cap V$ tal que $m_V = m(e_1,T)$. Hacemos $D = S_{m_V-1}$ si $m_V \geq 2$ y $D = \emptyset$ si $m_V = 1$. Entonces D es cerrado en Y. Así que $Y \setminus D$ es un abierto de Y que contiene a e_1. Por lo tanto existe un abierto U_1 de Y tal que $e_1 \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq (Y \setminus D) \cap V$. Puesto que $e_1 \in E_Y$, entonces existe una abierto U de Y tal que $e_1 \in U \subseteq U_1$ y $Y \setminus U$ es conexo.

   Tenemos entonces que $\overline{U} \subseteq \overline{U_1} \subseteq V \cap (Y \setminus D)$. Por lo tanto $\overline{U} \subseteq V$ y para toda $x \in \overline{U}$, $m_V - 1 < m(x,T) \leq m_V$, si $m_V \geq 2$ y $1 \leq m(x,T) \leq 1$, si $m_V = 1$. Por lo tanto $m(x,T) = m_V$.

2. Dado que m_V es infinito, existe $e_1 \in V \cap E_Y$ tal que $m(e_1,T) > m(e,T)$. Por el Lema 3.0.6, $S_{m(e,T)}$ es cerrado, por lo que $(Y \setminus S_{m(e,T)}) \cap V$ es un abierto de Y que contiene a e_1. Entonces podemos encontrar un abierto U_1 de Y tal que $e_1 \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq V \cap (Y \setminus S_{m(e,T)})$. Como además $e_1 \in E_Y$, entonces existe una vecindad U de e_1 en Y tal que $U \subseteq U_1$ y $Y \setminus U_1$ es conexo.

   Tenemos entonces que $\overline{U} \subseteq \overline{U_1} \subseteq V \cap (Y \setminus S_{m(e,T)})$. Por lo tanto $\overline{U} \subseteq V$ y para toda $x \in \overline{U}$, $m(x,T) > m(e,T)$. ■

Lema 3.0.9 *Sean U un abierto no vacío de Y tal que $Y \setminus U$ es conexo y W un abierto de $\overline{U}$ que es unión de componentes de $\overline{U}$, entonces $W \cap U \cap E_Y \neq \emptyset$.*

Demostración. Puesto que W es un abierto de $\overline{U}$, existe un abierto O de Y tal que $W = O \cap \overline{U}$. El teorema de Krasinkiewicz y Minc implica que existe un arco a_1a_2, con $a_1, a_2 \in E_Y$, tal que $a_1a_2 \cap (O \cap U) \neq \emptyset$. Sea x un punto en $a_1a_2 \cap O \cap U \neq \emptyset$. Ya que $a_1a_2 \setminus U = a_1a_2 \cap (Y \setminus U)$ es conexo y $x \in a_1a_2 \cap U$, entonces por el Lema 1.2.9 alguno de los extremos del arco a_1a_2, supongamos que a_1, está en U y x pertenece al arco irreducible entre a_1 y $Y \setminus U$, por lo que el arco a_1x está contenido en U. Ya que $x \in O \cap U \subseteq W$ y W es unión de componentes de $\overline{U}$, el arco a_1x está contenido en W y por lo tanto $a_1 \in W \cap U \cap E_Y$. ■.

Lema 3.0.10 *Sea $m > 1$ un entero. Para cada $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda^m$, definimos $H_s = \{x \in R_m \mid \lambda_i^x = \lambda_i$ para toda $1 \leq i \leq m\}$. Entonces H_s es un conjunto cerrado y abierto de R_m. Además $R_m \subseteq \bigcup_{s \in \Lambda^m} H_s$ y si $s \neq r$, entonces $H_s \cap H_r = \emptyset$.*

Demostración. Veamos que H_s es cerrado en R_m. Sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en $H_s \subseteq R_m$ que converge a un punto $x \in R_m$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos suponer que la sucesión $\{L_i^{x_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de componentes de $F_{\lambda_i} \cap Y$ converge a un subcontinuo K_i contenido en $F_{\lambda_i} \cap Y$. Dada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea L_i^x la componente de $F_{\lambda_i} \cap Y$ que contiene a K_i, entonces $\{(L_i^x, \lambda_i)\}_{i=1}^{m}$ cumple las condiciones del Lema 3.0.1, por lo que es una cadena del arco $xq(x)$ y puesto que $m(x, T) = m$, entonces es una cadena mínima. Por lo tanto $x \in H_s$. Hemos probado que H_s es cerrado.

Puesto que, para toda $x \in R_m$, $m(x, T) = m$, entonces $R_m \subseteq \bigcup_{s \in \Lambda^m} H_s$. Por la unicidad de las cadenas mínimas, si $s \neq r$, entonces $H_s \cap H_r = \emptyset$. Ya que para toda $s \in \Lambda^m$, H_s es cerrado, entonces $R_m \setminus H_s = \bigcup_{r \in \Lambda^m \setminus \{s\}} H_r$ es unión finita de cerrados. Por lo tanto H_s es abierto en R_m. ■

Corolario 3.0.11 *Sean $m > 1$ y A un subconjunto de R_m. Entonces para toda $s \in \Lambda^m$, $A \cap H_s$ es abierto y cerrado en A y por lo tanto es unión de componentes de A*

El siguiente paso es definir conjuntos del tipo H_s cuando $m = 1$. Notemos que R_1 es el conjunto de puntos x tales que existe $\lambda \in \Lambda$ y existe una componente L de F_λ tal que $xq(x) \subseteq L$. Esto es equivalente a decir que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $xq(x) \subseteq F_\lambda$.

Observemos que es posible que existan dos de estos índices λ. Precisamente cuando el arco $xq(x)$ está contenido es una intersección del tipo $F_\lambda \cap F_\gamma$, con $\lambda \neq \gamma$. No pueden existir tres índices con esta propiedad pues el nervio de $\mathcal{F}$ es un árbol.

Para esto debemos distinguir entre dos tipos de puntos en R_1. Aquellos para los cuales existe un único indice λ_1^x, tal que $xq(x) \subseteq L_1^x \subseteq F_{\lambda_1^x}$ y aquellos para los cuales existen dos. Si x es un punto del primer tipo, no hay lugar a confusión. Nos concentraremos entonces en aquellos puntos para los que existe más de una posible cadena mínima.

Como Λ es un conjunto finito podemos fijar un orden $<_\Lambda$ y entonces podemos hablar del mínimo de cada uno de sus subconjuntos no vacíos.

Definición 3.0.12 *Dada $s = (\lambda) \in \Lambda^1$, definimos el conjunto:*

$H_s = \{x \in R_1 \mid \lambda$ *es el mínimo elemento de* Λ *tal que* $xq(x) \subseteq F_\lambda\}$.

En el caso en que $x \in H_s = H_{(\lambda)}$, definimos $\lambda_1^x = \lambda$ y L_1^x como la componente de $F_{\lambda_1^x}$ que contiene a $xq(x)$.

Con esta elección los conjuntos H_s, cuando $s \in \Lambda$, están bien definidos y tienen dos a dos intersección vacía. A diferencia del Lema 3.0.10 no podemos asegurar que estos conjuntos sean cerrados en R_1.

Lema 3.0.13 *Sean $\lambda \in \Lambda$ y $x \in Y$. Supongamos que $xq(x) \nsubseteq F_\lambda$. Entonces existe un subconjunto abierto W de Y tal que $x \in W$ y para toda $y \in W$, $yq(y) \nsubseteq F_\lambda$.*

Demostración. Supongamos que no existe tal conjunto W. Entonces es posible encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n q(x_n) \subseteq F_\lambda$. Tomando una subsucesión si hiciera falta, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} x_n q(x_n) = L$, para algún subcontinuo L de X. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n q(x_n) \subseteq Y \cap F_\lambda$ y $x_n q(x_n) \cap T \neq \emptyset$, tenemos que $L \subseteq Y \cap F_\lambda$ y $L \cap T \neq \emptyset$. Esto implica que $xq(x) \subseteq L \subseteq Y \cap F_\lambda$ lo que es una contradicción. Esto termina la prueba de este Lema. ■

Lema 3.0.14 *Sean m un entero positivo, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ y A un abierto de Y tal que $A \subseteq \overline{A} \subseteq H_s$. Entonces para todo abierto W de Y, el conjunto $V_W = \{y \in \overline{A} \mid L_k^y \subseteq W\}$ es un abierto de $\overline{A}$.*

Demostración. Mostraremos que $\overline{A} \setminus V_W$ es cerrado de $\overline{A}$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\overline{A} \setminus V_W \subseteq H_s$ que converge a un punto $x \in \overline{A}$. Puesto que cada $x_n \in \overline{A} \setminus V_W \subseteq \overline{A}$, tenemos que $x \in \overline{A} \subseteq H_s$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $L_k^{x_n} \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$.

Dada $i \in \{1, \ldots, m\}$, consideramos la sucesión $\{L_i^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Ésta es una sucesión de subcontinuos de Y. Tomando las subsucesiones correspondientes, si hiciera falta, podemos suponer que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, esta sucesión converge a un subcontinuo C_i de Y. Como cada $L_i^{x_n}$ está contenido en $F_{\lambda_i} \cap Y$, tenemos que $C_i \subseteq F_{\lambda_i} \cap Y$. Sea D_i la componente de $F_{\lambda_i} \cap Y$ que contiene a C_i. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $x_n \in L_1^{x_n}$, $L_m^{x_n} \cap T \neq \emptyset$ y $L_i^{x_n} \cap L_{i+1}^{x_n} \neq \emptyset$, tenemos que $x \in C_1$, $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ y $C_m \cap T \neq \emptyset$. Así que los conjuntos $D_1, \ldots, D_m$ también tienen dichas propiedades. Como $x \in \overline{A} \subseteq H_s \subseteq R_m$, $\{D_i, \lambda_i\}_{i=1}^m$ es una cadena mínima para el arco $xq(x)$. Si $m > 1$, por la unicidad de estas cadenas, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $D_i = L_i^x$.

Ahora supongamos que $m = 1$. Ya que x pertenece a $\overline{A} \subseteq H_s$, tanto a los puntos x_n como a x se le asocia el índice λ. Puesto que D_1 es una componente de $F_s \cap Y$ que contiene a x e intersecta a T, concluimos que $D_1 = L_1^x$.

En particular $C_k \subseteq L_k^x$. Ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, $L_k^{x_n} \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$, tenemos que $L_k^x \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in \overline{A} \setminus V_W$ y V_W es abierto en $\overline{A}$. ■

Corolario 3.0.15 *Sean $m \in \mathbb{N}$, $x \in R_m$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $s = (\lambda_1^x, \ldots, \lambda_m^x)$ y A un abierto de Y tal que $x \in A \subseteq \overline{A} \subseteq H_s$. Entonces para todo abierto W de Y que contiene a L_k^x, existe un abierto $V \subseteq A$ de Y, que contiene a x y tal que para toda $y \in V$, $L_k^y \subseteq W$.*

Demostración. Por el Lema 3.0.14, V_W es un abierto de $\overline{A}$ que contiene a x. Sea U un abierto de Y tal que $V_W = \overline{A} \cap U$. Tomemos $V = A \cap U \subseteq V_W$, entonces V es un abierto de Y, $x \in V$ y para toda $y \in V$, $y \in V_W$ lo que implica que $L_k^y \subseteq W$. ■

Antes de probar el resultado principal de este capítulo, debemos probar el siguiente lema, que nos dice que podemos construir una vecindad abierta de un árbol contenido en otro como se muestra en la Figura 3.3

Lema 3.0.16 *Sean S y T árboles en un espacio X y sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que $S \subseteq T$. Entonces existe un conjunto abierto V de T que contienee a S y tal que $V \setminus S$ es de la forma $\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$, donde los elementos de la familia $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ son arcos abiertos ($(x, y) = xy \setminus \{x, y\}$) ajenos dos a dos y para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\lambda_k \in \Lambda$ tal que (a_k, b_k) está contenido en un conjunto U_{λ_k}.*

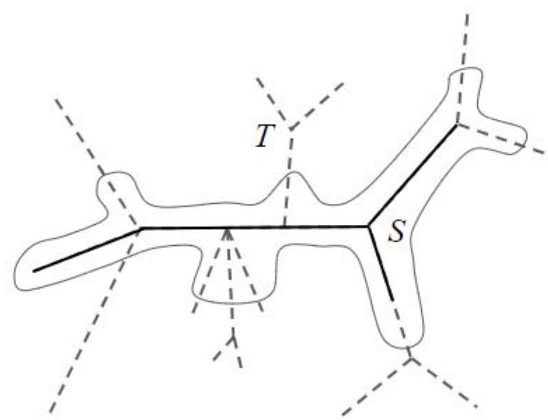


Figura 3.3: Vecindad abierta del árbol S en el árbol T

Demostración. Sean $v_1, \ldots, v_m$, los vértices (puntos terminales o de ramificación) de T que no pertenecen a S. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Sea W la componente de $T \setminus B$ que contiene a S. Como T es localmente conexo, tenemos que se cumplen dos propiedades: (a) W es abierto en T y (b) $Fr_T(W) \subseteq Fr_T(B) \subseteq B$. De manera que podemos suponer que $Fr_T(W) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ donde $n \leq m$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $a_i \in S$ tal que $v_i a_i \cap S = \{a_i\}$ ($v_i a_i$ es el arco irreducible entre v_i y S).

Veamos que si $i \neq j$ e $i, j \leq n$, entonces los arcos abiertos (v_i, a_i) y (v_j, a_j) son ajenos. Primero veamos que $(v_i, a_i) \subseteq W$. Dada $p \in (v_i, a_i)$, sea U un abierto conexo tal que $v_i \in U$ y $U \cap a_i p = \emptyset$. Como $v_i \in Fr_T(W)$, existe $w \in U \cap W$. Como W es conexo por arcos, existe un único $x \in S$ tal que $wx \cap S = \{x\}$ y el arco wx está contenido en W. Observemos que el conjunto $v_i w \cup wx$ es un subcontinuo que contiene a v_i e intersecta a S. Por lo tanto, el arco $v_i a_i \subseteq v_i w \cup wx$. Esto implica que $p \in v_i w \cup wx$. Ya que elegimos U de forma que sea conexo, $v_i, w \in U$ y $p \notin U$ entonces $p \in wx$. Por tanto $p \in W$ y $(v_i, a_i) \subseteq W$. Dado un vértice v de T, si $v \notin S$, tenemos que $v \in B$, de manera que $v \notin W$ así que $v \notin (v_i, a_i)$. En el caso en que $v \in S$, como $(v_i, a_i) \cap S = \emptyset$, tenemos también que $v \notin (v_i, a_i)$. Con esto hemos probado que (v_i, a_i) no tiene vértices de T. Similarmente, (v_j, a_j) no tiene vértices de T.

Si suponemos que $(v_i, a_i) \cap (v_j, a_j) \neq \emptyset$, como no hay puntos de ramificación de T en $(v_i, a_i) \cup (v_j, a_j)$, esto implica que $v_i a_i \cap v_j a_j$ es un arco. De manera que $v_i \in v_j a_j$ o $v_j \in v_i a_i$. Supongamos, por ejemplo, que $v_i \in v_j a_j$.

Como $v_i \notin W$, tenemos que $v_i \notin (v_j, a_j)$ y $v_i \neq a_j$, de modo que $v_i = v_j$, lo que es una contradicción.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\lambda_i \in \Lambda$ tal que $a_i \in U_{\lambda_i}$, y como U_{λ_i} es abierto, existe $b_i \in (a_i, v_i)$ tal que $a_i b_i \subseteq U_{\lambda_i}$.

Veamos que $W = S \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, v_i))$. Ya sabemos que $S \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, v_i)) \subseteq W$. Dada $p \in W \setminus S$, como W es conexo y T es un árbol, W es conexo por arcos, así que el arco mínimo que conecta p con un punto de S está contenido en W. Sea $q \in S$ tal que $pq \cap S = \{q\}$. Como $p \notin S$, tenemos que $p \neq q$. Entonces podemos prolongar el arco pq, en la dirección de p hasta encontrar un punto terminal de T. Sea v el primer vértice que nos encontramos cuando prolongamos el arco. Entonces $p \in qv$ y $qv \cap B = \{v\}$. Notemos que el arco semiabierto $[q, v)$ intersecta a S y no intersecta a B. Como $[q, v)$ es conexo, concluimos que $[q, v) \subseteq W$. Como T es un árbol, $v \notin S$, así que $v \notin W$. Por tanto $v \in Fr_T(W)$ y $v = v_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $p \in W$ y $v \notin W$, tenemos que $p \in [q, v)$ y $q = a_i$. Por tanto $p \in (a_i, v_i)$. Esto termina la prueba de que $W = S \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, v_i))$.

Entonces el conjunto $V = W \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} b_i v_i) = S \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i))$, es abierto en T y satisface las propiedades pedidas. ■

Teorema 3.0.17 *Sean un punto $a \in E_Y \setminus T$ y una vecindad O de a en Y tal que $\overline{O} \cap T = \emptyset$. Entonces existen un punto $e \in Y \setminus T$, una vecindad abierta V de e en Y contenida en O y un entero $m > 0$, tales que:*

- (I) *$e \in E_Y$,*
- (II) *para todo $x \in \overline{V}$, $m(x, T) = m$,*
- (III) *para toda $1 \leq i \leq m$ se tiene que $\lambda_i^x = \lambda_i^y$ para cualesquiera $x, y \in \overline{V}$,*
- (IV) *se cumple alguna de la siguientes dos propiedades para todo $x \in \overline{V}$: $L_m^x = L_m^e$; o existen $\gamma \neq \lambda_m^e$ y una componente C_γ de $T \cap F_\gamma$ tales que $L_m^x \cap T \subseteq C_\gamma \cap U_\gamma$.*

Demostración. Puesto que $a \in E_Y \setminus T$, existe una vecindad abierta V_0 de a en Y, contenida en O, tal que $Y \setminus V_0$ es conexo. Sea $m_0 = m_{V_0} = sup\{m(x, T) \mid x \in V_0 \cap E_Y\}$.

Por el Lema 3.0.8, si $m_0 < \infty$, existe un punto $a_1 \in E_Y \cap V_0$ y un abierto W_1 de Y tal que $a_1 \in W_1$ y $\overline{W_1} \subseteq V_0$, $Y \setminus W_1$ es conexo, y para toda $x \in \overline{W_1}$, $m(x, T) = m_0 = m(a_1, T)$. Entonces a_1, m_0 y W_1 cumplen las condiciones (I) y (II)

Supongamos ahora que m_0 es infinito. Por el Lema 3.0.8, existen $e_1 \in V_0 \cap E_Y$ y una vecindad abierta V_1 de e_1 en Y tal que $\overline{V_1} \subseteq V_0$, $Y \setminus V_1$ es conexo y $m(x,T) > m(a,T)$ para todo $x \in V_1$. Sea $m_1 = m_{V_1}$. Si $m_1 < \infty$ entonces, por el Lema 3.0.8, existen $a_1 \in E_Y \cap V_0$ y un abierto W_1 de Y tal que $a_1 \in W_1$, $\overline{W_1} \subseteq V_0$ y $Y \setminus W_1$ es conexo y de modo que a_1, m_1 y W_1 satisfacen las condiciones (I) y (II).

Si m_1 es infinito, aplicamos nuevamente el Lema 3.0.8 para encontrar un punto $e_2 \in V_1 \cap E_Y$ y una vecindad V_2 de e_2 en Y tales que $m(e_2,T) > m(e_1,T)$, $V_2 \subseteq V_1$, $Y \setminus V_2$ es conexo y para todo $x \in V_2$, $m(x,T) > m(e_1,T)$.

Repetimos este proceso para $m_2 = m_{V_2}$. Es decir, analizamos los dos posibles casos: si m_2 es finito, nos detenemos y si m_2 es infinito, continuamos construyendo puntos e, abiertos V y naturales m. En realidad queremos probar que este proceso se detiene en un número natural N. Supongamos que el proceso no se detiene. Entonces se puede repetir para toda n. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $e_n \in V_n \cap E_Y$, donde V_n es abierto en Y tales que:$V_{n+1} \subseteq V_n$, $Y \setminus V_n$ es conexo, $m_n = m_{V_n}$ es infinito y para toda $x \in V_{n+1}$, $m(x,T) > m(e_n,T)$. En particular, $m(e_{n+1},T) > m(e_n,T)$. De manera que la sucesión $\{m(e_n,T)\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada. Esto implica que:

Sea $p \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{V_n}$. Entonces $m(p,T) > m(e_n,T)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice el hecho de que la sucesión $\{m(e_n,T)\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada.

Esta contradicción nos muestra que existe $N \in \mathbb{N}$ para el que $m_N < \infty$ y por el Lema 3.0.8, existen un punto $a_1 \in E_Y$ y una vecindad W_1 de a_1 en Y tal que $Y \setminus W_1$ es conexo, $\overline{W_1} \subseteq V_N \subseteq V_0 \subseteq O$ y para todo $x \in \overline{W_1}$, $m(x,T) = m_N$. Hacemos $m = m_N$.

Ahora que hemos encontrado un punto a_1, un entero m y una vecindad W_1 que cumplen las condiciones (I) y (II) encontraremos un abierto $W_2 \subseteq W_1$ que además cumpla las partes (III) y (IV). Por la Afirmación 1, podemos suponer que W_1 satisface las siguientes condiciones.

(a) $\overline{W_1} \cap F_\lambda = \emptyset$ para toda λ tal que $a_1 \notin F_\lambda$

(b) $W_1 \subseteq U_\lambda$ para toda λ tal que $a_1 \in U_\lambda$.

(c) $Y \setminus W_1$ es conexo.

Analizamos dos casos.

Caso 1. $m = 1$. En este caso, consideramos dos subcasos.

Subcaso 1. Existe un único $\lambda \in \Lambda$ tal que $a_1q(a_1) \subseteq F_\lambda$.

En este subcaso, por el Lema 3.0.13, para cada $\gamma \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, existe un abierto O_γ de Y tal que $a_1 \in O_\gamma$ y para toda $y \in O_\gamma$, el arco $yq(y) \nsubseteq F_\gamma$. Tomemos $W_2 = W_1 \cap \bigcap_{\gamma\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} O_\gamma$. El conjunto W_2 es un abierto de Y por ser intersección finita de abiertos, está contenido en W_1 y es no vacío pues $a_1 \in W_2$. Dado que $a_1 \in E_Y$ podemos pedir que $Y \setminus W_2$ sea conexo.

Sea $x \in W_2$, entonces $x \in W_2 \subseteq W_1$, por lo que $m(x,T) = 1$. Así que existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $xq(x) \subseteq F_\gamma$. Ya que $x \in \bigcap_{\gamma\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} O_\gamma$, la única posibilidad es que $xq(x) \subseteq F_\lambda$. Por definición $x \in H_{(\lambda)}$ lo que implica que $\lambda_1^x = \lambda = \lambda_1^{a_1}$. Así las condiciones (I), (II) y (III) se satisfacen para a_1, W_2 y λ.

Subcaso 2. Existen dos elementos distintos $\lambda, \gamma \in \Lambda$ tales que $a_1q(a_1) \subseteq F_\lambda \cap F_\gamma$ y $\lambda <_\Lambda \gamma$.

En este subcaso $\lambda_1^{a_1} = \lambda$ y $a_1 \in H_\lambda$. Si $W_1 \subseteq H_\lambda$, entonces hacemos $W_2 = W_1$. Como el nervio de $\mathcal{F}$ es un árbol y W_1 satisface la condiciones (a) y (b), tenemos que F_λ y F_γ son los únicos elementos de $\mathcal{F}$ que intersectan a W_1. Dado $x \in W_1$, como $m(x,T) = 1$, tenemos que el arco $xq(x)$ está contenido en alguno de los conjuntos F_λ o F_γ y no puede estar contenido en ningún otro. Así que consideramos dos opciones.

Opción 1. Para toda $x \in W_1$, $xq(x) \subseteq F_\lambda$. En esta opción, como $\lambda <_\Lambda \gamma$ tenemos que para toda $x \in W_1$, $\lambda_1^x = \lambda$ y $x \in H_{(\lambda)}$. Por lo tanto se cumplen las condiciones (I), (II) y (III) para a_1, W_1 y $m = 1$.

Opción 2. Existe un punto $x_0 \in W_1$ tal que $x_0q(x_0) \nsubseteq F_\lambda$.

En esta opción, por el Lema 3.0.13, existe un abierto W_0 de Y tal que $x_0 \in W_0 \subseteq W_1$ y para toda $y \in W_0$, $yq(y) \nsubseteq F_\lambda$. Por el Teorema de Krasinkiewicz y Minc existen dos puntos $b, c \in E_Y$ tales que $bc \cap W_0 \neq \emptyset$. Escogemos un punto $x_1 \in W_0 \cap bc \subseteq W_1 \cap bc$. Ya que $Y \setminus W_1$ es conexo, por el Lema 1.2.9, aplicado a W_1, bc y x_1, podemos suponer que $b \in W_1$ y que x_1 pertenece al arco irreducible entre b y $Y \setminus W_1$.

Como $b \in W_1$, $m(b,T) = 1$ por lo que existe $\delta \in \Lambda$ tal que $bq(b) \subseteq F_\delta$. Por las propiedades de W_1 y como $b \in W_1$, $\delta \in \{\lambda, \gamma\}$. Ya que $T \subseteq Y \setminus W_1$ y $q(b) \in T$, entonces el arco irreducible entre b y $Y \setminus W_1$ está contenido en el arco $bq(b)$, y por lo tanto $x_1 \in bq(b) \cap W_0$. Ya que el arco $bq(b)$ es un subcontinuo de Y que contiene a x_1 e intersecta a T entonces $x_1q(x_1) \subseteq bq(b)$. Esto implica que $bq(b) \nsubseteq F_\lambda$ y por lo tanto $bq(b) \subseteq F_\gamma$. Por el Lema 3.0.13, existe un abierto W_2 de Y tal que $b \in W_2 \subseteq W_1$ y para toda $y \in W_2$, $yq(y) \nsubseteq F_\lambda$, de modo que $yq(y) \subseteq F_\gamma$. De manera que $y \in H_{(\gamma)}$ y $\lambda_1^y = \gamma = \lambda_1^b$. Ya que $b \in E_Y$ podemos suponer que $Y \setminus W_2$ es conexo. Por lo tanto se cumplen las propiedades (I), (II) y (III) para $a_2 = b$, W_2 y $m = 1$.

Esto termina la prueba del caso $m = 1$.

Caso 2. $m > 1$. Sea $s = (\lambda_i, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda^m$ tal que $H_s \cap W_1 \neq \emptyset$, como H_s es abierto y cerrado en R_m, $H_s \cap \overline{W_1}$ es abierto y cerrado en $\overline{W_1}$ y por el Corolario 3.0.11 es unión de componentes de $\overline{W_1}$. Entonces, por el Lema 3.0.9, existe $a_2 \in H_s \cap\ W_1 \cap E_Y$ y como $H_s \cap W_1$ es abierto en W_1 que es abierto en Y, existe una vecindad W_2 de a_2 en Y tal que $\overline{W_2} \subseteq H_s \cap W_1$ y $Y \setminus W_2$ es conexo. Por lo tanto para todo $x \in \overline{W_2}$ se tiene que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\lambda_i^x = \lambda_i$ lo que prueba la condición (III).

Hasta este punto hemos encontrado un punto $a_2 \in E_Y$, un entero m, una vecindad abierta W_2 de a_2 y una secuencia $s = (\lambda_i, \ldots, \lambda_m) \in \Lambda^m$ que cumplen las condiciones (I)-(III), además de que la vecindad W_2 tiene las propiedades (a), (b) y (c). Si existe una vecindad W_3 de a_2 contenida en W_2 tal que para toda $x \in \overline{W_3}$, $L_m^x = L_m^{a_2}$, entonces tomamos $e = a_2$ y $V = W_3$ y también se cumple la condición (IV) y hemos terminado la prueba.

Supongamos entonces que no existe tal vecindad W_3 de a_2. Entonces tenemos que para toda vecindad W de a_2 en W_2 existe un punto $x \in W$ tal que $L_m^x \neq L_m^{a_2}$. Notemos que $L_m^{a_2} \cap T$ es una componente de $F_{\lambda_m} \cap T$ por lo que es un árbol contenido en T y su frontera relativa a T es finita. Dado un punto $x \in Fr_T(F_{\lambda_m} \cap T)$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in U_\lambda$. Por la conexidad local de T, existe un abierto conexo W_0 de T tal que $x \in W_0 \subseteq U_\lambda$. Si ocurriera que $\lambda = \lambda_m^{a_2}$, tendríamos que $(L_m^{a_2} \cap T) \cup W_0$ es un subconjunto conexo de $F_{\lambda_m} \cap T \subseteq F_{\lambda_m} \cap Y$, y como $L_m^{a_2}$ es componente de este último conjunto, tenemos que $(L_m^{a_2} \cap T) \cup W_0 \subseteq L_m^{a_2}$. Entonces $x \in W_0 \subseteq L_m^{a_2} \cap T$, lo que contradice que $x \in Fr_T(F_{\lambda_m} \cap T)$. Por lo tanto $\lambda \neq \lambda_m^{a_2}$.

Por el Lema 3.0.16 podemos tomar una vecindad abierta O de $L_m^{a_2} \cap T$ en T tal que $O \setminus L_m^{a_2}$ es de la forma $\bigcup_{k=0}^n (a_k, b_k)$ donde los intervalos (a_k, b_k) son ajenos dos a dos y para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $(a_k, b_k) \subseteq U_{\lambda_k}$ para alguna $\lambda_k \neq \lambda_m^{a_2}$.

Sea P una vecindad abierta de $L_m^{a_2}$ en Y tal que $P \cap T = O$. Por el Corolario 3.0.15, existe una vecindad abierta W de a_2 en Y tal que $W \subseteq W_2$ y para toda $x \in \overline{W}$, $L_m^x \subseteq P$.

Sea $x_0 \in W$ tal que $L_m^{x_0} \neq L_m^{a_2}$. Como ambos conjuntos son componentes de $F_{\lambda_m} \cap Y$, tenemos que $L_m^{x_0} \cap L_m^{a_2} = \emptyset$. Entonces $L_m^{x_0} \cap T$ es conexo y está contenido en $(P \cap T) \setminus L_m^{a_2} = O \setminus L_m^{a_2}$. Por lo tanto existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $L_m^{x_0} \cap T \subseteq (a_k, b_k)$.

Sabemos que existe $\gamma \neq \lambda_m^{a_2}$ tal que $(a_k, b_k) \subseteq U_\gamma$. Sea C_γ la componente de $F_\gamma \cap T$ que contiene a (a_k, b_k). Puesto que (a_k, b_k) es abierto de T, entonces existe un abierto Q_1 de Y tal que $(a_k, b_k) = Q_1 \cap T$. Sea Q_2 un abierto de Y que contiene a $L_m^{x_0}$, entonces $Q = (Q_2 \setminus T) \cup Q_1$ es un abierto de Y que contiene a $L_m^{x_0}$ y tal que $Q \cap T = Q_1 \cap T = (a_k, b_k)$.

Sea $M = \{x \in \overline{W_2} \mid L_m^x \subseteq Q\}$, por el Lema 3.0.14, M es un abierto de $\overline{W_2}$. Veamos que M es unión de componentes de $\overline{W_2}$. Sea $x \in M$ y K la componente de $\overline{W_2}$ que contiene a x. Recordemos que $\overline{W_2} \subseteq H_s$, donde $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Dado que para toda $x \in \overline{W_2}$, $x \in L_1^x$, tenemos que $\overline{W_2} \subseteq F_{\lambda_1} \cap Y$, lo que implica $K \subseteq L_1^x$. Para toda $y \in K$, tenemos que $y \in L_1^x$. Entonces $\{(L_i^x, \lambda_i)\}_{i=1}^m$ es la cadena mínima del arco $yq(y)$ lo cual implica que $L_m^y = L_m^x$ y en consecuencia $y \in M$. Por lo tanto $K \subseteq M$ y M es unión de componentes de $\overline{W_2}$.

Puesto que M es abierto y es unión de componentes de $\overline{W_2}$, el Lema 3.0.9 nos dice que existe un punto $e \in M \cap W_2 \cap E_Y$. Sea V un abierto de Y tal que $e \in V$, $Y \setminus V$ es conexo y $\overline{V} \subseteq M$. Entonces, para toda $x \in \overline{V}$, $L_m^x \cap T \subseteq Q \cap T \subseteq (a_k, b_k) \subseteq C_\gamma \cap U_\gamma$. Por lo tanto la condición (IV) se cumple y hemos terminado la prueba. ■

Terminaremos este capítulo ilustrando la condición (IV) del Teorema 3.0.17. Para ello consideramos los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Empezaremos con un ejemplo en donde para toda $x \in \overline{V}$, $L_m^x = L_m^e$. Tomemos como Y un abanico armónico con vértice p y tal que ap es la barra límite. Sea $\mathcal{F}$ la cubierta y T el árbol como se muestran en la Figura 3.4. Los puntos donde Y es colocalmente conexo son los puntos terminales de los arcos máximos que tienen como extremo en común a p.

Dados a y O como se muestran en la figura, observemos que $m(a, T) = 3$, pero existe una infinidad de puntos $x \in E_Y$ tales que $m(x, T) = 4$. Sin embargo para cada punto $x \in E_Y \setminus \{a\}$, podemos tomar una vecindad W de x tal que W sea un arco contenido en el arco xp. De esta forma, tomando e y V como se muestra en la Figura 3.4, tenemos que $e \in E_Y$, $V \subseteq R_4$, $V \subseteq H_{(4,3,2,1)}$ y para toda $x \in V$, $L_4^x = L_4^e$.

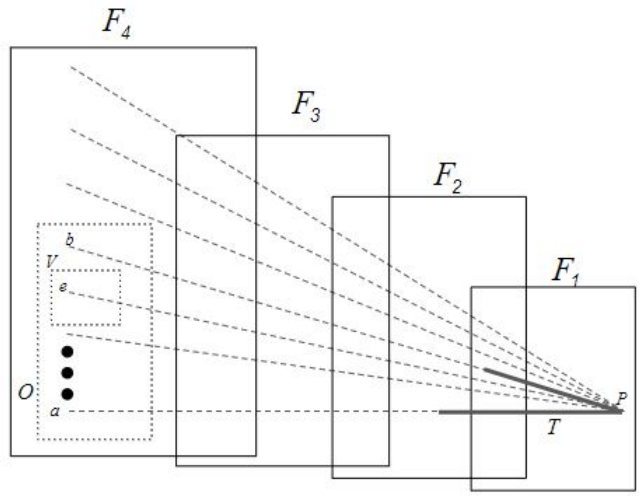


Figura 3.4:

Ejemplo. Ahora veamos un ejemplo en el que existen $\gamma \neq \lambda_m^e$ y una componente C_γ de $T \cap F_\gamma$ tal que $L_m^x \cap T \subseteq C_\gamma \cap U_\gamma$ para todo $x \in \overline{V}$. Para esto consideramos el siguiente espacio. Sea C un conjunto de Cantor construido a partir del intervalo $[0,1]$. Tomamos $Y = (C \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$ y observemos que $E_Y = C \times \{1\}$.

Construimos la cubierta $\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$ de Y como se muestra en la Figura 3.5. Tomamos $p \in (0,1)$ y construimos $F_1 = (C \times [0,p]) \cup ([0,1] \times \{0\})$ y $F_2 = C \times [0,1]$. Tomando $a, b \in [0,1]$ tales que $0 < a < b < p < 1$ podemos tomar $U_1 = (C \times [0,b)) \cup ([0,1] \times \{0\})$ y $U_2 = C \times (a,1]$. Entonces esta cubierta es una cubierta adecuada. Observemos además que las componentes de F_2 son de la forma $\{c\} \times [0,1]$, para algún $c \in C$.

Sea $T = [0,1] \times \{0\}$. Entonces $T \subseteq U_1$. Tomemos el punto $q = (0,1)$ y O una vecindad de q contenida en U_2, como se muestra en la Figura 3.6.

Notemos que $q \in E_Y$ y $O \subseteq R_1$. Sin embargo, para cualquier $y \in E_Y \cap O$ y cualquier abierto W de Y que contenga a y y que $W \subseteq O$, existe $x \in E_Y \cap W$, tal que $x \neq y$. Esto implica que $L_2^x \neq L_2^y$. Por lo tanto no existen $e \in E_Y$ y V un abierto de Y que contiene a e que satisfacen las condiciones (I), (II) y (III) del Lema 3.0.17 y tal que para toda $x \in \overline{V}$, $L_m^x = L_m^e$.

Veamos que entonces se verifica la segunda de las opciones. Mostraremos

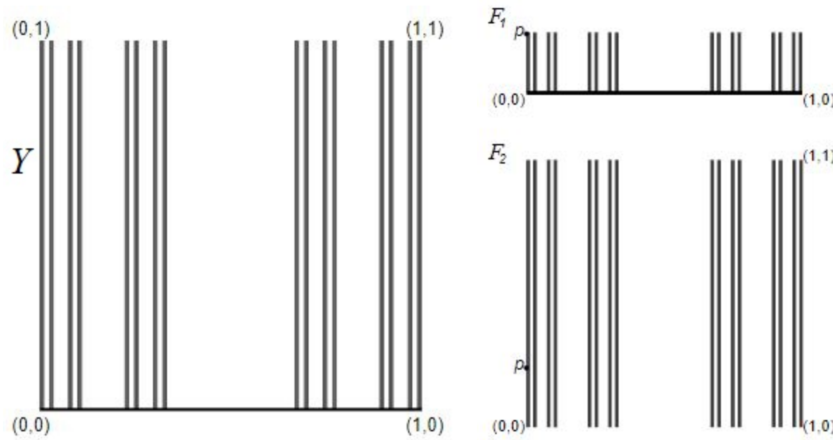


Figura 3.5: El espacio Y y la cubierta $\mathcal{F}$

que q y V satisfacen esta condición. Observemos que para toda $x \in \overline{O}$, $L_2^x \cap T$ es un único punto $c_x \in C \times [0,1] \subseteq T \subseteq U_1$. Tomemos entonces $\gamma = 1$ y $C_\gamma = T$. Tenemos que para toda $x \in \overline{O}$, $L_2^x \cap T \subseteq C_\gamma \cap U_\gamma$. Entonces se cumple la segunda de las posibilidades de la condición (IV).

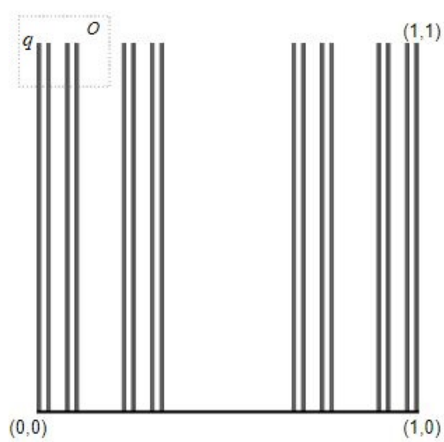


Figura 3.6:

Índice de definiciones

Bibliografía

[1] BASILEVICH, L.E. , BANAKH T.O., B.M, ET AL.,*Robert Cauty (November 13, 1946 - July 8, 2013)*, (Ukranian) Mat. Stud. **40** (2013), no. 2, 216-221.

[2] BONDY, J.A., MURTY, U.S.R., *Graph theory with applications*, vol 290. Macmillan London, 1976.

[3] BORSUK, K., *A theorem on fixed points*, Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. Math. Astronom. Phys. **2** (1954), 17-20.

[4] CAUTY R., *Sur l'aproximation des dendroides par des arbres* (2007) Recuperado el 14 de agosto de 2020 de https://api.semanticscholar.org/CorpusID:172129372

[5] CHARATONIK, J.J., *On acyclic curves. A survey of results and problems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **3** vol 1 (1995), 1-39.

[6] COOK, H., *Tree-likeness of dendroids and λ-dendroids*, Fundamenta Mathematicae, **68** (1970), 19-22.

[7] DUGUNDJI, J., *Topology*, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney 1978.

[8] FUGATE, J.B. *Retracting fans onto finite fans*, Fundamenta Mathematicae, **71** (1971), no 2, 113-125.

[9] FUGATE, J.B. *Small retractions of smooth dendroids onto trees*, Fundamenta Mathematicae, **71** (1971), 255-262.

[10] KRASINKIEWICZ, J. y MINC, P., *Dendroids and their endpoints*, Fundamenta Mathematicae, **99** (1978), 227-244.

[11] Martínez de la Vega, V., *El espacio de continuos con la topología producto*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1998.

[12] Martínez de la Vega, V. y Martínez Montejano, J.M., *Open problems on dendroids*, Open Problems in Topology II, Ed. Pearl E., Elsevier, 2007, 318-334.

[13] Nadler, S., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol 158, Marcel Dekker, Inc. New York, N. Y., 1992.

[14] Ordorica Arango, M., *Aproximación de dendroides por árboles*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2018.