



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ILUMINACIÓN CON  $k$ -MÓDEMS Y UN ALGORITMO  
 $O(n \log n)$  PARA ILUMINAR EL PLANO EN  
PRESENCIA DE  $n$  SEGMENTOS DE LÍNEAS  
ORTOGONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

EDGAR MENDOZA LEÓN

TUTOR

DR. CARLOS MIGUEL HIDALGO TOSCANO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2021





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis, Dr. Carlos Hidalgo Toscano, por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas y por la dirección y el rigor que ha facilitado a las mismas, por sus consejos y por la atención que tuvo conmigo.

Agradezco también a mis sinodales, el Dr. Canek Peláez Valdés, el Dr. Christian Rubio Montiel el Dr. José David Flores Peñaloza y la Dra. Mucuy-Kak del Carmen Guevara Aguirre por sus comentarios, correcciones y por haber dedicado su tiempo a revisar mi trabajo.

Sin la paciencia y el apoyo de mi familia y del Dr. Sang-Son no hubiera podido terminar este trabajo, a ellos también les agradezco.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Polígonos en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
2.2. Teoría de gráficas . . . . .	19
<b>3. Galerías de arte e iluminación</b>	<b>29</b>
3.1. El problema original de la galería de arte . . . . .	34
3.2. Algunas variantes del problema de la galería de arte . . . . .	35
<b>4. El problema de los <math>k</math>-módems</b>	<b>45</b>
4.1. Iluminando polígonos monótonos con $k$ -módems . . . . .	46
4.2. Iluminando polígonos ortogonales con $k$ -módems . . . . .	50
<b>5. Una cota superior para el problema de los <math>k</math>-módems</b>	<b>59</b>
5.1. Antecedentes . . . . .	59
5.2. Un versión débil del lema de corte . . . . .	61
5.3. Una cota justa para el lema de corte . . . . .	64
5.4. Cotas superiores usando el lema de corte . . . . .	70
5.5. Un algoritmo para iluminar segmentos ortogonales . . . . .	71
5.6. Un algoritmo de iluminación del plano en presencia de $n$ segmentos de líneas ortogonales en $O(n \log n)$ . . . . .	72
5.6.1. El procedimiento OverflowCut . . . . .	72
5.6.2. El procedimiento CrossingCut . . . . .	73
5.6.3. Analizando la complejidad del algoritmo ParticiónEnEscaleras . . . . .	74
<b>A. Notación Asintótica</b>	<b>83</b>
A.1. Cota superior asintótica . . . . .	84
A.2. Cota inferior asintótica . . . . .	85
A.3. Cota asintótica justa . . . . .	85



# Índice de figuras

1.1. Tres fuentes de luz iluminan un conjunto convexo en el plano. . . . .	11
2.1. Polígono simple con 7 vértices. . . . .	16
2.2. El vértice $y$ cubre a $z$ pero no a $x$ . . . . .	16
2.3. Polígono convexo. . . . .	17
2.4. Polígono no convexo. . . . .	17
2.5. Polígono ortogonal. . . . .	17
2.6. Polígono con agujero en color azul. . . . .	17
2.7. Polígono con diagonal en rojo. . . . .	18
2.8. Dos triangulaciones diferentes para el mismo Polígono. . . . .	18
2.9. Vista aérea de una ciudad europea, [Giu05]. . . . .	19
2.10. Gráfica de orden 4 y tamaño 3. . . . .	20
2.11. La gráfica $H$ es una subgráfica de $G$ . . . . .	21
2.12. Gráfica que modela el problema de los puentes de Königsberg. . . . .	22
2.13. Vértice y arista de corte en rojo de la gráfica. . . . .	23
2.14. Gráfica plana en negro y su gráfica dual en azul. . . . .	23
2.15. Árbol con 36 vértices. . . . .	24
2.16. Gráfica con número cromático $\chi(G) = 2$ . . . . .	25
3.1. Polígono que requiere de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias para vigilar completamente su interior. . . . .	29
3.2. Polígono y una de sus posibles triangulaciones. . . . .	30
3.3. El segmento de recta $uv$ es una diagonal de nuestro polígono. . . . .	31
3.4. Los vértices $a, b, c$ son una oreja del polígono. . . . .	32
3.5. Coloración de una triangulación. . . . .	33
3.6. Coloración por vértices de una triangulación . . . . .	33
3.7. El color de $v$ se obtiene de una coloración de la gráfica $G - v$ . . . . .	34
3.8. Modelado de una galería de arte con cuartos rectangulares. . . . .	36
3.9. Esquinas nuevas al remover un rectángulo de la representación gráfica de $S$ . . . . .	39
3.10. $G(T) + a$ y las luces que muestran el apareamiento perfecto que usamos para dar las posiciones de los guardias. . . . .	39
3.11. Polígono ortogonal que requiere de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias para ser vigilado. . . . .	40
3.12. Etiquetado de algunos elementos de importancia de un polígono ortogonal. . . . .	41
3.13. Dos polígonos y la secuencia de giros que permite que se cierren. . . . .	41



3.14. Bajo simetrías, estos son todos los casos cuando $q$ y $q'$ no son vértices de $P$	42
3.15. Caso 3a: Bajo simetrías, $e$ y $f'$ están contenidas en las aristas inferior e izquierda de $R$ .	43
3.16. Caso 3b: $f'$ contiene a la base de $R$ .	43
4.1. Colocar un 1-módem en un vértice nos permite iluminar el polígono con sólo un módem.	47
4.2. Ilustración del procedimiento para dividir un polígono $x$ -monótono.	49
4.3. Partiendo un polígono monótono para iluminarlo con 1-módems.	50
4.4. Ejemplos de <i>polígono que termina en escalera</i> : superior izquierdo, superior derecho, inferior izquierdo e inferior derecho; nombrándolos de izquierda a derecha.	52
4.5. Caso 1: $e_{3b} = e_R$ .	53
4.6. Caso 2: $e_{3b}$ está entre $e_R$ y $e_L$ .	53
4.7. $e_{3b} = e_L$ .	54
4.8. $e_{3b}$ está por debajo de $e_L$ y $e_{3t}$ está por arriba de $e_L$ .	55
4.9. $e_{3t}$ está entre $e_L$ y $f$ .	55
4.10. Ejemplos de construcción de cotas inferiores para polígonos monótonos ortogonales para $k = 2$ y $k = 3$ respectivamente.	57
5.1. Triángulos generalizados y los semiplanos que los acotan.	60
5.2. División del plano en triángulos generalizados.	61
5.3. En rojo las líneas auxiliares y punteado la muestra original de líneas.	63
5.4. El segmento de recta $\overline{xy}$ tiene nivel 2, pero el nivel del punto $x$ es 1.	65
5.5. Arreglo de líneas con el 2-nivel señalado en verde.	66
5.6. 4-simplificación de los segmentos de línea $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$	66
5.7. Descomposición vertical de las cadenas poligonales $P_j$ .	68
5.8. Polígono tipo escalera.	71
5.9. Una línea ortogonal que cruza por completo una escalera la divide en dos escaleras.	72
5.10. Realizando OverflowCut con $k = 7$ cuando no más de $\lfloor k/2 \rfloor$ segmentos intersecan a $\ell$ .	73
5.11. Realizando OverflowCut con $k = 7$ cuando más de $\lfloor k/2 \rfloor$ segmentos intersecan a $\ell$ .	73
5.12. Procesando un conjunto de escaleras atravesadas por un segmento de línea horizontal $s$ .	74
5.13. Línea de barrido encuentra un nuevo segmento vertical.	75
5.14. Línea de barrido encuentra el extremo final de un segmento vertical.	75
5.15. Línea de barrido encuentra un nuevo segmento horizontal.	76
5.16. Caso 1 y Caso 2 respectivamente.	79
5.17. Casos 3,4,5 respectivamente.	79
5.18. Ejemplo de todos los casos en una partición en escaleras y su grafica de adyacencias. [DHT15]	80

---

A.1. La función $f(x)$ pertenece a $O(g(x))$ . . . . .	84
A.2. La función $f(x)$ pertenece a $\Omega(g(x))$ . . . . .	85
A.3. La función $f(x)$ pertenece a $\Theta(g(x))$ . . . . .	86



# Capítulo 1

## Introducción

Los problemas de iluminación siempre han sido populares en matemáticas. Un ejemplo conocido, es que la frontera de cualquier conjunto compacto y convexo  $S$  en el plano puede ser iluminado usando tres fuentes de luz localizadas en el complemento de  $S$ . Podemos ver esto al encerrar a nuestro conjunto convexo y compacto en un triángulo, colocando después una fuente de luz en cada uno de los vértices del triángulo.

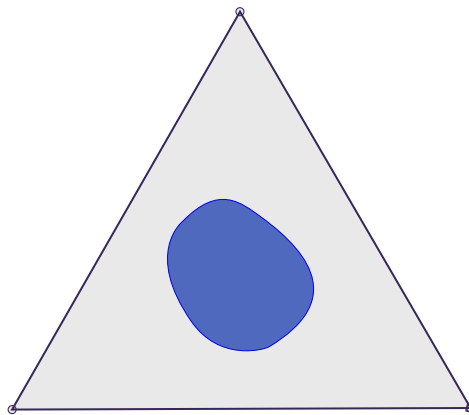


Figura 1.1: Tres fuentes de luz iluminan un conjunto convexo en el plano.

En 1973, Víctor Klee planteó el problema de determinar el número de guardias que son necesarios, además de suficientes, para cubrir el interior de una galería de arte con  $n$  paredes [Hon76].

El planteamiento de este problema fue una respuesta a una petición hecha por Václav Chvátal que en una conferencia realizada en agosto de 1973 en Stanford le solicitó a Klee un interesante problema geométrico. Chvátal pronto establecería lo que hoy conocemos como el *teorema de la galería de arte* u ocasionalmente también como *el teorema del*

*vigilante* que nos dice que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para cubrir un polígono con  $n$  vértices [Chv75]. Esta pregunta de Geometría Combinatoria aunque en principio simple, ha probado estar llena de posibilidades y desde su formulación ha dado lugar a una gran cantidad de artículos, recopilaciones y diversos problemas matemáticos.

En 1987, J. O'Rourke [O'R87] publicó *Art Gallery Theorems and Algorithms*, el primer libro dedicado enteramente al estudio de los problemas de iluminación de los polígonos en el plano, este libro propició un gran interés por los problemas relacionados con el de la galería de arte y algunas variaciones surgidas del mismo. Dos compilaciones surgieron de él: una en 1992 por T. Shermer [She92], y también en 1996 por J. Urrutia [Urr96]. Algunas más tratando diversas variantes y resolviendo problemas expuestos anteriormente seguirían [Urr00] y [TABN15].

Uno de los tantos problemas relacionados con la iluminación de la galería de arte es el problema de los  $k$ -módems que examinaremos en la presente tesis.

En el capítulo uno nos enfocaremos a dar una introducción a algunos conceptos y resultados que nos serán útiles para entender el presente trabajo. Solo se supondrá cierta familiaridad con la notación asintótica. Sin embargo se incluye como apéndice una breve descripción de la misma.

En el capítulo dos daremos la prueba del teorema de la galería de arte además de que hablaremos de algunas variaciones interesantes que resultan al restringir el problema original a ciertas clases de polígonos o al permitir a los guardias moverse en las diagonales o las aristas. Continuamos dando algunas cotas para el número de guardias necesarios para cubrir polígonos simples y finalmente damos algunos resultados para polígonos ortogonales.

En el capítulo tres damos una introducción al problema original de la galería de arte, además de que presentamos algunas variaciones del mismo.

En el capítulo cuatro presentamos una introducción a una generalización del problema de la galería de arte. Consideramos un polígono simple  $P$  y nos preguntamos ¿cuál es el número necesario de puntos  $p_1, \dots, p_k$  que son suficientes para que dado un punto  $p$  en  $P$ , exista un punto  $p_i$  tal que el segmento de línea que une a  $p$  con  $p_i$  cruce a lo más  $k$  aristas de  $P$ ? Este número  $k$  representará el poder de los puntos que aquí nombraremos en vez de guardias como módems. Es decir, representa la capacidad de los módems de superar obstáculos rectilíneos.

En el capítulo cinco tratamos el lema de corte en el plano, dando una versión débil y después una cota justa. Después usamos el lema de corte para dar una cota de  $O(n^2/k^2)$   $k$ -módems para iluminar el plano dado un conjunto de  $n$  líneas y la mejoramos usando la versión de líneas del lema de corte. También tratamos un algoritmo de orden  $6k + 6$  para conjuntos de segmentos ortogonales que no se intersecan entre sí.



## Capítulo 2

# Preliminares

En este capítulo nos enfocaremos en dar los conceptos más importantes para poder estudiar el problema de los  $k$ -módems. Se tratarán temas como visibilidad en polígonos, triangulaciones y colorabilidad junto a resultados muy útiles de teoría de gráficas. En caso de necesitar algún concepto menos recurrente se definirá en el momento que sea necesario.

Con esto esperamos que este trabajo sirva como una introducción a la fascinante colección de problemas en Geometría Combinatoria que se derivan a partir del problema de la galería de arte.

### 2.1. Polígonos en $\mathbb{R}^2$

A pesar de que muchos de estos resultados tienen generalizaciones a dimensiones arbitrarias, como mencionamos en la introducción nuestro enfoque será en el plano. Las siguientes definiciones serán trabajadas en  $\mathbb{R}^2$ , fueron tomadas de los libros de geometría computacional y teoría de gráficas [DOI1], [BS95] y [BM10] respectivamente.

**Definición 1.** Definimos un punto como se hace manera clásica en geometría, es decir, como una ubicación en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ) con coordenadas  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ .

**Definición 2.** Sea  $n$  un número natural tal que  $n \geq 2$ . Un polígono es un conjunto  $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $n + 1$  puntos; un conjunto  $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_0)\}$  de  $n + 1$  segmentos de recta, las cuales unen a dos puntos de  $V$ , y el conjunto acotado por los segmentos de rectas. Al conjunto de segmentos de recta les llamaremos aristas del polígono, al conjunto de puntos les llamaremos vértices de polígono y al subconjunto del plano acotado por las aristas lo llamaremos el interior del polígono. Las aristas unen a un vértice con su sucesor y al último con el primero.



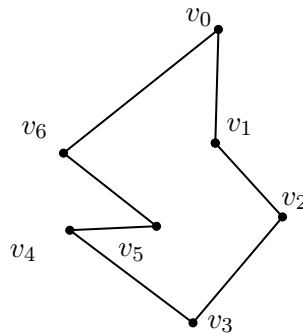


Figura 2.1: Polígono simple con 7 vértices.

**Definición 3.** Un polígono simple es un polígono en el que no hay ninguna intersección entre sus aristas (salvo los vértices en los que inciden ellas).

En esta tesis cuando hablemos de un polígono siempre nos referiremos a un polígono simple.

**Definición 4.** Dado un polígono  $P$ , decimos que un punto  $x \in P$  ve o cubre un punto  $y \in P$  si el segmento de línea  $xy$  es un subconjunto de  $P$ , esto es  $xy \subseteq P$ .

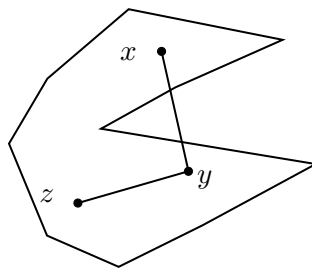


Figura 2.2: El vértice  $y$  cubre a  $z$  pero no a  $x$ .

**Definición 5.** Un polígono convexo  $P$ , es un polígono que tiene todos sus ángulos internos menores a  $\pi$ , o equivalentemente donde para cualesquiera dos puntos interiores  $x, y$ , sucede que  $x$  cubre a  $y$ .

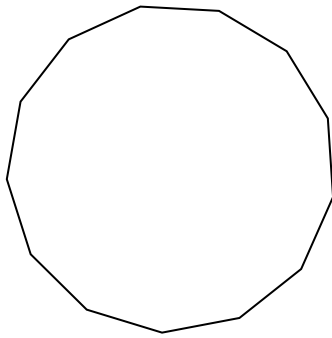


Figura 2.3: Polígono convexo.

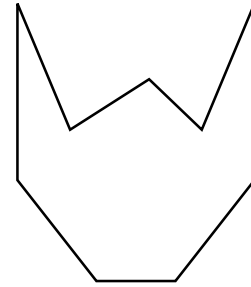


Figura 2.4: Polígono no convexo.

**Definición 6.** Un polígono ortogonal es un polígono en el que dadas dos aristas incidentes en cualquier vértice del polígono, el ángulo interior que forman tiene un valor de  $\frac{\pi}{2}$  o de  $\frac{3\pi}{2}$ . Podemos ver un ejemplo en la figura siguiente.

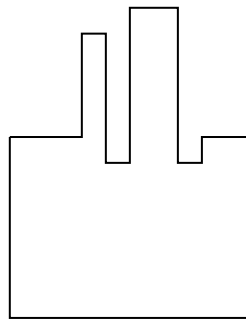


Figura 2.5: Polígono ortogonal.

**Definición 7.** Sea  $P$  un polígono en el plano. Decimos que  $P'$  es un agujero de  $P$  si  $P'$  es un polígono que está al interior de  $P$ .

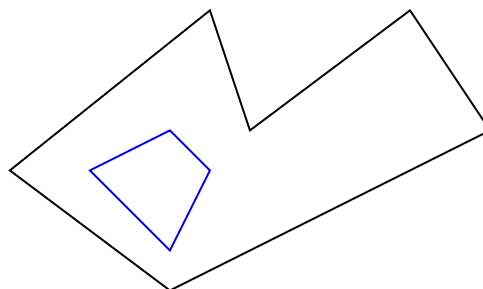


Figura 2.6: Polígono con agujero en color azul.

**Definición 8.** Sea  $P$  un polígono. Una diagonal de  $P$  es un segmento de recta al interior de  $P$  que conecta a dos vértices no consecutivos de  $P$ .

Una técnica común en Geometría Computacional es dividir un polígono en polígonos más pequeños. El fin de dividir un polígono es hacer más fácil el análisis de alguna propiedad del polígono original. Notemos cómo una diagonal divide a un polígono en dos polígonos. Una ilustración de esta técnica es la triangulación de polígonos.

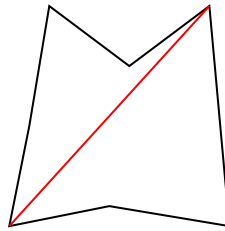


Figura 2.7: Polígono con diagonal en rojo.

**Definición 9.** Un triángulo es un polígono con tres aristas.

**Definición 10.** Una triangulación  $T(P)$  de un polígono  $P$ , es una división del interior de  $P$  en triángulos con interiores mutuamente ajenos, de tal forma que las aristas de estos triángulos solamente pueden ser aristas o diagonales de  $P$ .

Como veremos más adelante, las triangulaciones de polígonos siempre tienen un número de diagonales y de triángulos determinados en función del número de vértices que poseen. Sin embargo las triangulaciones no son únicas.

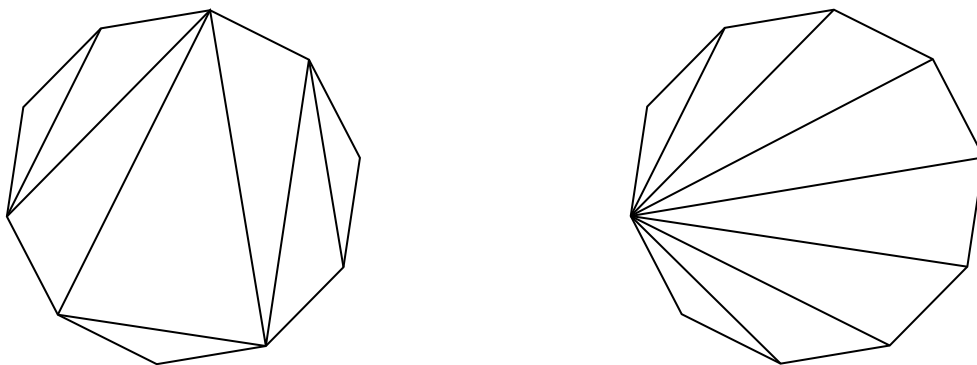


Figura 2.8: Dos triangulaciones diferentes para el mismo Polígono.

## 2.2. Teoría de gráficas

Las gráficas son una herramienta matemática muy útil y su estudio como objeto matemático, clasificado en el área de las matemáticas discretas con fuertes influencias del álgebra y la teoría de matrices, ha derivado en avances en muchas áreas, ya que resulta muy práctica para modelar fenómenos que ocurren en áreas como las ciencias de la computación, la física, la ingeniería, la economía y muchos más [Foul2]. La utilidad de la teoría de gráficas para el diseño de algoritmos de búsqueda en redes, modelado de flujos u optimización de recorridos ha dado origen al análisis de redes [TABN15]. Más aún, la teoría de gráficas ha sido usada en ciencias sociales para el modelado de fenómenos, tales como las relaciones entre personas. Un ejemplo son las redes sociales que modelan a los individuos como vértices y los relaciones entre ellos con aristas [Bar69].

Su origen se encuentra en un trabajo realizado por Leonard Euler en 1736. En *Solutio problematis and geometriam situs pertinentis*, Euler publicaría una solución para el problema de los puentes de Königsberg. Un problema que consistía en recorrer siete puentes que conectan dos islas dentro de un río con sus riberas; con la condición: de que este recorrido se hiciese pasando por todos los puentes sólo una vez y regresando al mismo punto de partida.



Figura 2.9: Vista aérea de una ciudad europea, [Giu05].

Con este problema y considerando además un aumento en el interés por parte de la comunidad científica no sólo matemática, ya que las gráficas trajeron algunas soluciones a problemas científicos mediante su uso para modelar fenómenos de todo tipo, en 1931 el matemático húngaro Köning publicaría *Graphs and matrices*, el primer libro en el área [Kö31].

**Definición 11.** Una gráfica  $G$  es un conjunto finito de vértices  $V$  y un multiconjunto de aristas  $E$  formado por multiconjuntos  $U$  de tamaño dos tal que  $U \subset V$ . La representación de una gráfica es mediante nodos que serán los vértices y segmentos de recta entre dos

vértices que representan a las aristas. Denotaremos a  $G$  como  $G = (V, E)$ . La notación que utilizaremos para una arista será  $e = uv$ , donde  $\{u, v\} \subset V$ , decimos que  $u$  y  $v$  son adyacentes o vecinos.

**Definición 12.** Una gráfica simple  $G$  es un conjunto finito de vértices  $V$  y un conjunto de aristas  $E$  formado por subconjuntos de  $V$  de tamaño dos. La representación de una gráfica es mediante nodos que serán los vértices y segmentos de recta entre dos vértices que representan a las aristas. Denotaremos a  $G$  como  $G = (V, E)$ . La notación que utilizaremos para una arista será  $e = uv$ , donde  $\{u, v\} \subset V$ , decimos que  $u$  y  $v$  son adyacentes o vecinos.

En este trabajo con gráfica nos referiremos a una gráfica simple. Las gráficas pueden ser representadas visualmente: nos basta con dibujar los vértices con puntos y unir los puntos cuando estos pertenecen a la misma arista.

**Definición 13.** El número de vértices en una gráfica  $G$  se llama el orden de la gráfica y el número de aristas es el tamaño de la gráfica.

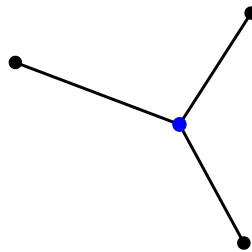


Figura 2.10: Gráfica de orden 4 y tamaño 3.

En ocasiones nos es útil tener alguna manera de referirnos solamente a una parte de la gráfica. Por ejemplo, hay varios teoremas en los cuales tenemos que ver si hay una parte de la gráfica que tenga las mismas relaciones entre sus vértices para decir algo en general de la gráfica. Un ejemplo de esto es que una gráfica no puede ser dibujada en el plano sin que sus aristas se crucen si tiene una subgráfica con 5 vértices todos unidos entre sí. Tampoco puede ser dibujada sin cruzar sus aristas si tiene 6 vértices divididos en dos grupos de tres vértices tal que cada vértice en cada grupo está unido con los tres vértices en el otro grupo.

**Definición 14.** Sea  $G$  una gráfica. Una gráfica  $H$  es una subgráfica de  $G$ ,  $H \subseteq G$ , si  $H$  es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

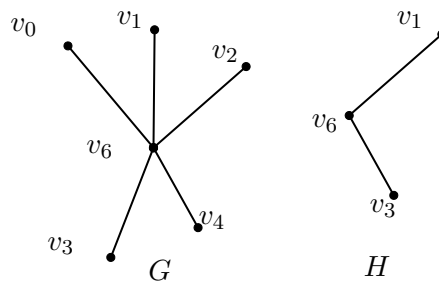


Figura 2.11: La gráfica  $H$  es una subgráfica de  $G$ .

**Definición 15.** Al número de aristas que inciden en un vértice  $v$  de una gráfica  $G$ , se le llama el *grado de  $v$  en  $G$* . El grado de  $v$  se denota por  $\text{grado}(v)$  o simplemente  $d_G(v)$ . Se denotará por  $\Delta(G)$ , al *grado máximo* entre todos los vértices de la gráfica  $G$ , así también denotaremos por  $\delta(G)$ , al *grado mínimo* de entre todos los vértices de la gráfica  $G$ .

Un resultado muy útil es el siguiente:

**Teorema 1.** Para toda gráfica  $G$ , la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de aristas. Así, si  $G$  es una gráfica con  $p$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_p$  y  $q$  aristas entonces

$$\sum_{i=1}^p d_G(v_i) = 2q.$$

*Demostración.* Al sumar los grados de los vértices de una gráfica  $G$ , contamos cada arista dos veces, una por cada uno de los vértices en que incide la arista.  $\square$

El problema de los puentes de Königsberg o algunos similares pueden ser formalizados usando definiciones como las siguientes:

**Definición 16.** Un *camino* en una gráfica  $G$ , es una secuencia finita de vértices no necesariamente distintos  $v_0, v_1, \dots, v_n$  de  $G$ , donde  $v_i v_{i+1}$  es una arista de  $G$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . La longitud del camino es  $n$ . Un  *$uv$ -camino* en una gráfica  $G$ , es un camino que comienza en el vértice  $u$  y termina en el vértice  $v$ . Un  *$uv$ -paseo* en una gráfica, es un  *$uv$ -camino* que no repite aristas. Una  *$uv$ -trayectoria*, es un  *$uv$ -camino* o ( *$uv$ -paseo*) tal que no repite vértices.

**Definición 17.** Dada un gráfica  $G$  con  $k$  vértices. Un  *$uv$ -paseo* en el cual  $u = v$ , y que contiene al menos tres aristas es llamado *circuito*. Un circuito debe terminar en el mismo vértice en que se empezó. Un circuito que no repite vértices (excepto el primero y el último) es llamado ciclo y si pasa por todos los vértices lo llamamos *ciclo Hamiltoniano*. Un circuito que pasa por todas las aristas es llamado *ciclo Euleriano*.

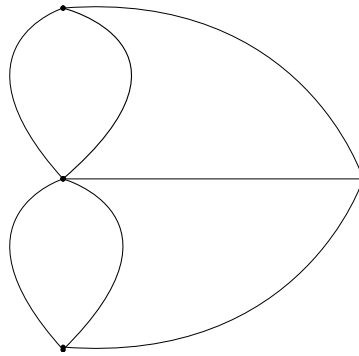


Figura 2.12: Gráfica que modela el problema de los puentes de Königsberg.

No siempre es el caso que exista un camino entre dos vértices, esto motiva las siguientes definiciones.

**Definición 18.** Sea  $G$  una gráfica. Decimos que un par de vértices  $u, v \in V(G)$  están *conectados* si existe un  $uv$ -camino en  $G$ . Y decimos que la gráfica  $G$  es *conexa*, si todo par de vértices de  $G$  están conectados. En otro caso se dice que  $G$  es *disconexa*.

**Definición 19.** Una subgráfica conexa  $H$  de una gráfica  $G$ , es una componente conexa (o simplemente una componente) de  $G$ , si  $H = H'$  siempre que  $H'$  sea una subgráfica conexa de  $G$  que contenga a  $H$ . Es decir, una componente de una gráfica es una subgráfica conexa maximal.

De la definición de gráfica conexa y componente conexa, podemos ver que una gráfica conexa tiene un sólo componente conexo. Denotamos el número de componentes conexos de una gráfica  $G$  con  $C(G)$ .

**Definición 20.** Sea  $G$  una gráfica y  $v$  un vértice de  $G$ .  $G - v$  es una gráfica con conjunto de vértices  $V(G) - \{v\}$  y con multiconjunto de aristas  $E(G) - K$ , con  $K$  definido como el multiconjunto de aristas que inciden en  $v$ .

**Definición 21.** Sea  $G$  una gráfica y  $v, u$  vértices de  $H$ .  $H + uv$  es una gráfica con conjunto de vértices  $V(H) \cup \{u, v\}$  y con multiconjunto de aristas  $E(G) \cup u, v$ .

**Definición 22.** Sea  $G$  una gráfica, se dice que  $v$  es un *vértice de corte* de  $G$ , si  $C(G - v) > C(G)$ . Se dice que  $e$  es una *arista de corte* (o puente) de  $G$ , si  $C(G - e) > C(G)$ .

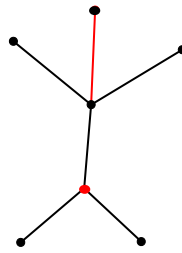


Figura 2.13: Vértice y arista de corte en rojo de la gráfica.

**Definición 23.** Una gráfica es plana si puede dibujarse en el plano de tal forma que los segmentos que representan sus aristas no se intersecan entre sí (excepto en sus extremos).

Una gráfica plana divide al plano en diferentes regiones. Al subconjunto cerrado de cada una de estas regiones se le llama cara. Una gráfica plana siempre tiene una cara no acotada llamada cara exterior. El resto de caras son llamadas caras interiores.

**Definición 24.** Sea  $G$  una gráfica plana, se puede definir a otra gráfica  $G^*$  no necesariamente simple a partir de  $G$  de la siguiente forma: por cada cara  $f$  de  $G$  se tiene un vértice  $f^*$  en  $G^*$ , y por cada arista  $e$  de  $G$ , se consideran las caras  $f$  y  $g$ , incidentes en  $e$ , entonces  $G^*$  tendrá la arista  $e^*$  que conecta a los vértices  $f^*$  y  $g^*$ . Decimos que  $G^*$  es la gráfica dual de  $G$ .

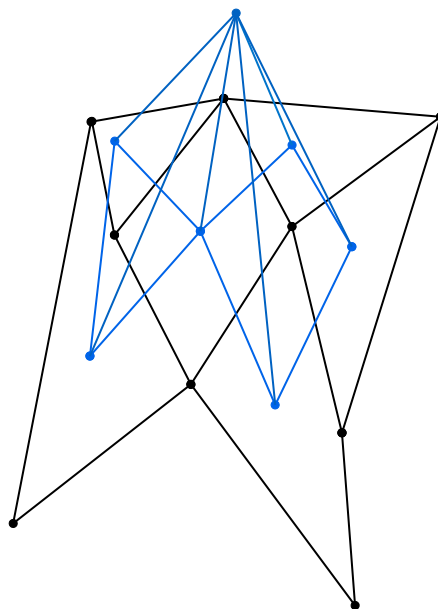


Figura 2.14: Gráfica plana en negro y su gráfica dual en azul.

**Definición 25.** Si  $G$  es una gráfica conexa y tiene una representación plana con una cara,



entonces decimos que  $G$  es un árbol.

**Teorema 2.** Si  $G$  es un árbol con  $n$  vértices,  $G$  tiene  $n - 1$  aristas.

*Demostración.* Notemos primero que si  $G$  es un árbol entonces para cualesquiera dos vértices  $u, v \in G$  hay un único  $uv$ -camino, ya que si hubiera más, la unión de dos de estos formaría un ciclo y por lo tanto tendríamos más de una cara en su representación gráfica. Usemos inducción sobre el número de vértices de  $G$ . Cuando  $n = 1$  el teorema es válido. Por lo tanto consideremos una gráfica  $H$  con  $n > 1$  vértices. Elijamos una arista  $e \in E(H)$  y consideremos la gráfica que resulta de remover  $e$  a la gráfica  $H$ . Esta nueva gráfica tiene dos componentes ya que  $H$  es un árbol y dado que para cualesquiera par de vértices hay un solo camino todos los vértices que usen a  $e$  para ir a otro vértice se dividen en dos componentes. Llamemos a estos componentes  $G_1$  y  $G_2$  y supongamos que el número de vértices de estos son respectivamente  $n_1$  y  $n_2$ . Como estos componentes no tienen ciclos y son conexos, entonces son árboles y por hipótesis de inducción tienen  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$  aristas respectivamente. Por lo tanto  $H$  tiene  $n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$  aristas.  $\square$

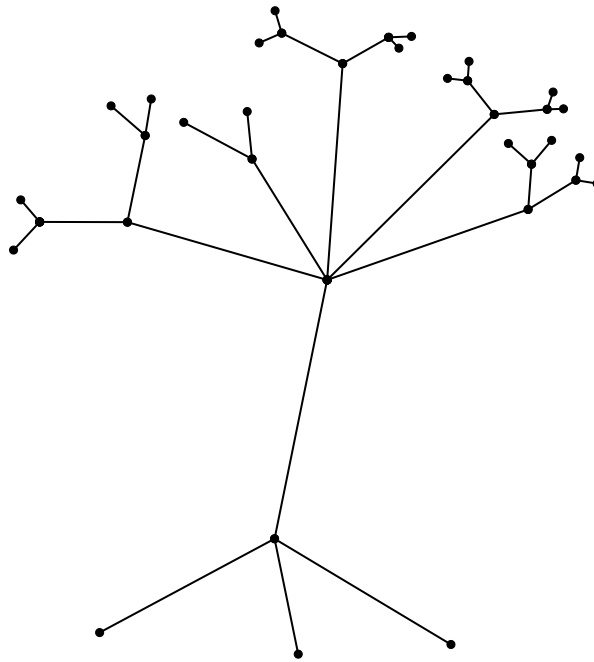


Figura 2.15: Árbol con 36 vértices.

**Teorema 3** (Fórmula de Euler). Si  $G$  es una gráfica conexa plana, entonces el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos, es decir.

$$v + f = e + 2.$$

*Demostración.* Por inducción en  $f$ , el número de caras de  $G$ . Si  $f = 1$ , entonces cada arista de  $G$  es un arista corte ya que la gráfica no tiene circuitos y, por lo tanto,  $G$  es

conexa y un árbol. En este caso  $e = v - 1$ , por el Teorema 2 y el teorema se mantiene claramente.

Ahora, supongamos que es cierto para todas las gráficas planas conexas con menos de  $n$  caras, y dejemos que  $G$  sea una gráfica plana conexa con  $n \geq 2$  caras.

Podemos elegir un arista  $e_0$  de  $G$  que no sea una arista de corte ya que como hay más de una cara entonces esta arista la podemos elegir de un circuito. Entonces  $G - e_0$  es una gráfica plana conexa con  $n - 1$  caras, ya que las dos caras de  $G$  separadas por  $e_0$  se combinan para formar una cara de  $G - e_0$ . Por la hipótesis de inducción

$$v(G - e) - e(G - e_0) + f(G - e_0) = 2$$

y, usando las relaciones

$$\begin{aligned} v(G - e_0) &= v(G), \\ e(G - e_0) &= e(G) - 1 \text{ y} \\ f(G - e_0) &= f(G) - 1, \end{aligned}$$

obtenemos

$$v(G) + f(G) - 1 = e(G) - 1 + 2,$$

es decir

$$v(G) - e(G) + f(G) = 2;$$

Por lo que el teorema es válido para cualquier entero positivo.  $\square$

**Definición 26.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica, una  $k$ -coloración de los vértices de  $G$  es una función  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Una coloración induce una partición de los vértices de  $G$  en conjuntos de la forma  $c_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$ . Estos conjuntos son llamados las *clases cromáticas inducidas por  $c$* . Se dice que una  $k$ -coloración  $c$  de  $G$  es propia, si cualesquiera dos vértices  $u, v$  adyacentes en  $G$ , no tienen la misma coloración. Decimos que una gráfica  $G$  es  $k$ -coloreable si tiene una  $k$ -coloración propia por vértices.

**Definición 27.** El número cromático de una gráfica  $G$  es el menor entero  $k$  tal que  $G$  es  $k$ -coloreable (o bien, tiene una coloración propia con  $m$  colores). A este número se le denota como  $\chi(G)$ , es decir,  $\chi(G) = m$ .

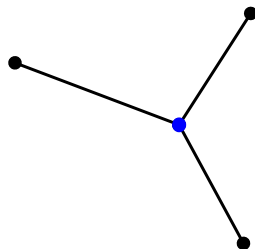


Figura 2.16: Gráfica con número cromático  $\chi(G) = 2$ .

**Teorema 4.** Para cualquier gráfica conexa  $G$  con grado máximo  $\Delta$ , el número cromático de  $G$  es a lo más  $\Delta + 1$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica conexa con grado máximo  $\Delta$  y vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y consideremos los colores  $\{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ . Podemos entonces colorear a los vértices en orden, coloreando el vértice  $v_i$  de un color de entre todos los colores ya que siempre habrá uno disponible, pues a lo más el vértice tiene  $\Delta$  vecinos. Al terminar este procedimiento tendremos una coloración propia para nuestra gráfica y como usamos no más  $\Delta + 1$  colores tenemos que el número cromático de  $G$  es a lo más  $\Delta + 1$ .  $\square$

**Teorema 5.** (Teorema de Brooks)

Para cualquier gráfica conexa  $G$  con grado máximo  $\Delta$ , el número cromático de  $G$  es a lo más  $\Delta$  a menos que  $G$  sea una gráfica completa o un ciclo impar, en cuyo caso el número cromático de  $G$  es  $\Delta + 1$ .

*Demostración.* Si  $\Delta = \Delta(G) = 1$ , como  $G$  es una gráfica conexa, entonces  $G = K_2$  y  $K_2$  se colorea con dos colores.

Si  $\Delta = \Delta(G) = 2$ , podemos elegir un vértice arbitrario  $v \in G$  y como  $G$  es conexa podemos considerar una partición de los vértices de  $G$  en dos conjuntos  $P$  e  $I$ , tal que  $P$  contenga a los vértices a distancia par e  $I$  a los vértices a distancia impar.

Si  $G$  es un ciclo impar  $v, v_1, \dots, v_k, v$  con  $k$  par, podemos colorear a  $P$  con un color, a  $I - v_{\frac{k}{2}}$  con un color distinto y a  $v_{\frac{k}{2}}$  con un tercer color distinto a los anteriores, consiguiendo así una coloración válida y cumpliendo que  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ .

Ahora, si  $G$  no es un ciclo impar entonces coloreando los vértices en  $I$  de un color y los vértices de  $P$  con otro color distinto obtenemos una coloración válida y por lo tanto  $\chi(G) = 2 = \Delta(G)$ .

Por lo tanto supongamos que  $\Delta = \Delta(G) \geq 3$ , y utilicemos inducción sobre  $\Delta$ , y a su vez para cada  $\Delta$ , usemos inducción sobre  $n$ . Si  $n = \Delta + 1$ , el teorema es cierto, ya que si  $|G| = n + 1$  y  $G \neq K_{n+1}$  podemos colorear  $G$  con  $\Delta$  colores usando el color 1 para algunos dos vértices no adyacentes y coloreando los  $n - 1$  vértices restantes de colores distintos entre sí y distintos a 1 usando así no más de  $\Delta$  colores.

Por lo tanto, supongamos que  $n \geq \Delta + 2$ . Hay varios casos que debemos considerar.

**Caso 1.** Hay un vértice de corte  $v$ . Supongamos que las componentes de  $G - v$  son  $C_1, \dots, C_k$ . Consideremos las gráficas inducidas por  $G$  en los conjuntos de vértices  $C_1 \cup \{v\}, \dots, C_k \cup \{v\}$ . Si alguna de estas gráficas es completa o un ciclo impar, su grado máximo debe ser estrictamente menor que  $\Delta$  y por el Teorema 4 cada  $C_i$  con  $i \in \{1, \dots, k\}$ , es  $\Delta$  coloreable. Si coloreamos a  $v$  en todas estas gráficas con el mismo color siempre, entonces la unión de las coloraciones para las gráficas inducidas nos

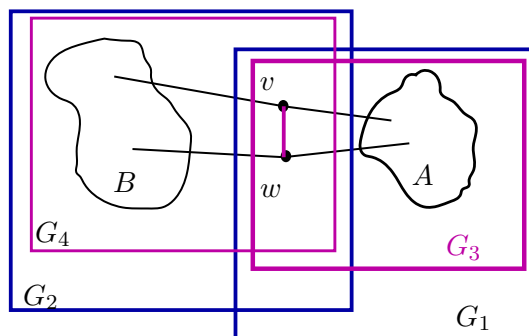
permiten dar una  $\Delta$  coloración para  $G$ .

**Caso 2.**  $G$  no tiene vértices de corte pero existen dos vértices no adyacentes  $v$  y  $w$  tales que  $G - v - w$  es una gráfica no conexa.

Sea  $A$  una componente de  $G - \{v, w\}$ , y sea  $B = V(G) - (V(A) \cup \{v, w\})$ . Notemos que de  $v$  hacia  $A$  existe al menos una arista pues si no es así  $G - w$  sería no conexa, pero por hipótesis este no es el caso. Análogamente, tenemos al menos una arista de  $w$  a  $A$ , de  $v$  a  $B$ , y de  $w$  a  $B$ .

Sean  $G_1 = G - B$  y  $G_2 = G - A$ . Tanto  $v$  como  $w$  tienen tanto en  $G_1$  como en  $G_2$ , un grado menor o igual a  $\Delta - 1$  ya que en otro caso su grado en  $G$  sería mayor al grado máximo de  $G$  lo cual no es posible.

Podemos  $\Delta$ -colorear  $G_3 = G_1 + vw$  y  $G_4 = G_2 + vw$  por hipótesis de inducción, a menos que una de estas gráficas sea una gráfica completa, pueden  $\Delta$ -colorearse (si  $G_3$  o  $G_4$  son ciclos impares, podemos  $\Delta$ -colorearla sin ningún problema, pues  $\Delta > 2$ ). En estas coloraciones, podemos notar que  $v$  y  $w$  tienen que ser de color distinto ya que tanto en  $G_3$  como en  $G_4$  son adyacentes y si tomamos la precaución de colorear a  $v$  con color 1 y  $w$  con color 2 en ambas gráficas podemos unir las coloraciones de  $G_3$  y de  $G_4$  para tener de esta manera un  $\Delta$ -coloración para  $G$ .



Pero ¿qué sucede si por ejemplo  $G_3$  es la gráfica completa en  $\Delta + 1$  vértices? Entonces cada uno de los vértices  $v$  y  $w$  debe tener grado 1 en  $G_2$  (ya que ambos deben tener grado  $\Delta$  en  $G_3$  y  $\Delta - 1$  en  $G_1$ ). En  $G_2$ , podemos combinar  $v$  y  $w$  en un solo vértice  $z$  manteniendo las aristas adyacentes a los vértices  $v$  y  $w$  ahora adyacentes a  $z$ , obteniendo una nueva gráfica  $G_5$ , que por hipótesis de inducción puede ser  $\Delta$ -coloreada. Mientras tanto en  $G_1$  podemos colorear  $A$  con  $\Delta - 1$  colores y colorear  $v$  y  $w$  con el mismo color, ya que en  $G_1$  tanto  $v$  como  $w$  no son adyacentes. Por lo tanto, existe una  $\Delta$  coloración de  $G_1$  y  $G_2$  en los que tanto  $v$  como  $w$  obtienen el mismo color. Al unir las coloraciones obtenemos una  $\Delta$ -coloración de  $G$ .

**Caso 3.**  $G - v - w$  es una gráfica conexa para cada par de vértices no adyacentes  $v$  y

*w*. Seleccionemos un vértice  $u$  de grado máximo  $\Delta$ . Como  $G \neq K_n$ , algún par de vecinos  $v$  y  $w$  de  $u$  no son adyacentes. Etiquetando a  $v = v_1, w = v_2, u = v_n$  y, continuando etiquetando a los vértices con  $v_3$  hasta  $v_{n-1}$ , asegurándonos de que cada  $v_i$  tiene algún vecino en  $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ : esto es posible ya que  $G - \{v, w\}$  es conexa. Ahora, usando colores  $\{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$  asignamos el color 1 a  $v_1$  y a  $v_2$  y así proseguimos siempre usando el color disponible más pequeño. Por lo tanto al finalizar este proceso nunca necesitamos usar el color  $\Delta + 1$  en  $v_3, \dots, v_{n-1}$ , ya que cada  $v_i$  sólo tiene como máximo  $\Delta - 1$  vecinos entre los vértices ya coloreados, pues  $d(v_i) \leq \Delta$ . Finalmente, cuando tenemos que asignar un color para el vértice  $v_n$ , considerando que dos de sus  $\Delta$  vecinos no son adyacentes, entonces hay dos que han recibido el mismo color, en este caso el color 1. Por lo que uno de los colores  $\{1, \dots, \Delta\}$  está disponible para colorear a  $v_n$ . Con esto tenemos una  $\Delta'$  coloración para  $G$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Galerías de arte e iluminación

En 1973 el matemático Víctor Klee planteó el problema de determinar el número de guardias que se requieren para vigilar el interior de una galería de arte. Para definir este problema diremos que en un polígono un punto  $a$  vigila a un punto  $b$ , si el segmento de línea  $\overline{ab}$  que los une, se encuentra completamente contenido en el interior del polígono.

Por lo tanto el problema de la galería de arte se puede plantear de la siguiente forma: Dado un polígono  $P$ , encontrar el conjunto  $G$  de puntos en  $P$  de cardinalidad mínima, tal que todo punto de  $P$  es vigilado desde un punto de  $G$ . Lee y A. Lin [LL86], han demostrado que este problema es  $NP$ -Completo. Václav Chvátal [Chv75] estableció en 1976 que el número de puntos necesarios para vigilar a  $G$  nunca excederá  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  para un polígono de  $n$  lados.

Este problema resultaría prolijo en cuanto al número de resultados y sus variantes. En este capítulo se presentan algunas de las variantes del problema original, así como algunos resultados interesantes del problema de la galería de arte y de algunas de sus variantes.

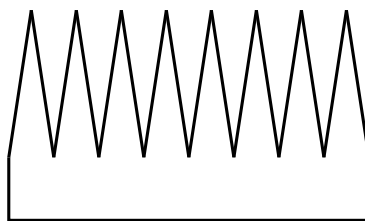


Figura 3.1: Polígono que requiere de  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias para vigilar completamente su interior.

Primero veamos que efectivamente un polígono de  $n$  lados necesita no más de  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias para vigilar completamente su interior, para esto utilizaremos triangulaciones de polígonos. La triangulación de polígonos es una técnica fundamental en Geometría Computacional y como veremos más adelante el poder triangular nuestros polígonos nos será útil para probar el teorema de la galería de arte, reducir la cota sobre el número de  $k$ -módems que necesitamos para iluminar segmentos de líneas ortogonales entre otras cosas más.

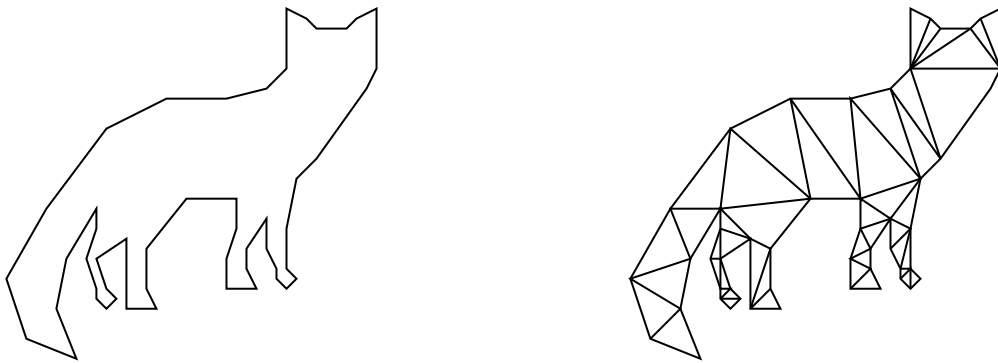


Figura 3.2: Polígono y una de sus posibles triangulaciones.

Dado que en la prueba del teorema de la galería de arte usaremos una triangulación para poder encontrar el número de guardias, nos podemos preguntar si es cierto que todos los polígonos tienen una triangulación, la respuesta a esta interrogante es afirmativa tal como veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 6.** Sea  $P$  un polígono con  $n$  lados, entonces  $P$  siempre tiene una triangulación.

Antes de probar este teorema, veamos que cualquier polígono con más de tres vértices siempre tiene una diagonal.

**Lema 1.** Todo polígono  $P$  con más de tres vértices tiene una diagonal.

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que tomamos un vértice  $v$  de nuestro polígono con coordenada  $y$  mayor a todos los demás vértices, si sus vecinos son los vértices  $a$  y  $b$  nos fijamos en el segmento de recta  $\overline{ab}$ .

Si el segmento de recta  $\overline{ab}$  se encuentra al interior de  $P$  y no toca la frontera del polígono más que en  $a$  y  $b$ , hemos terminado, pues  $\overline{ab}$  es la diagonal que buscábamos.

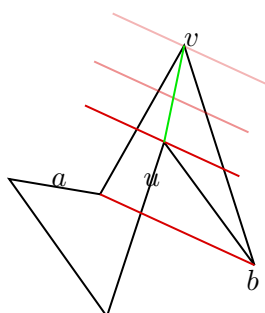


Figura 3.3: El segmento de recta  $uv$  es una diagonal de nuestro polígono.

Por el contrario, si este no es el caso tomamos una línea  $l$  que pase por el vértice  $v$  y que sea paralela al segmento de recta  $\overline{ab}$ . Con el segmento de recta  $l$  barremos hacia el segmento de recta  $\overline{ab}$  siempre manteniéndolo paralelo a  $\overline{ab}$ , eventualmente llegaremos a un vértice  $u$  diferente de  $a, b$  o  $v$  que es tocado por  $l$  cuando realizamos el barrido hacia  $\overline{ab}$ . Como entre  $\overline{va}, \overline{vb}$ , y una línea  $l'$  que pasa por  $u$  paralela a  $l$  no hay más vértices distintos de  $v, a, b$  entonces  $\overline{vu}$  no intercepta a la frontera de  $P$  mas que en sus extremos resulta que nuestra diagonal es  $\overline{uv}$ .  $\square$

Como ya sabemos que todo polígono o es un triángulo o tiene al menos una diagonal entonces ya podemos probar el teorema 6.

*Demostración.* (Teorema 6) Para probar este teorema usaremos inducción en el número de vértices  $n$  de nuestro polígono  $P$ .

Si  $n = 4$  entonces  $P$  es un cuadrilátero simple y dado que un cuadrilátero tiene al menos una diagonal  $d$ , por el lema 1, entonces  $d$  divide a  $P$  en dos triángulos y por lo tanto  $P$  puede ser triangulado.

Sea  $n > 4$  y supongamos que este teorema resulta cierto para polígonos con menos de  $n$  vértices. Sea  $P$  un polígono con  $n$  vértices, por el lema 1 sabemos que todo polígono tiene una diagonal  $d$ , entonces podemos considerar  $P_1$  y a  $P_2$  como los polígonos que se forman al dividir a  $P$  con  $d$ . Como  $P_1$  y  $P_2$  sólo comparten a la arista  $d$  y ambos tienen menos vértices que  $P$  entonces sabemos que tanto  $P_1$  como  $P_2$  pueden ser triangulados y la unión de estas triangulaciones es una triangulación para  $P$ .

Por lo tanto todo polígono  $P$  puede ser triangulado.  $\square$

Si bien las triangulaciones no son siempre únicas, algo que todas las triangulaciones de polígonos con un número igual de vértices comparten es el número de triángulos y de diagonales que tienen:



**Teorema 7.** Toda triangulación  $T$  de un polígono  $P$  con  $n$  vértices tiene  $n - 2$  triángulos y  $n - 3$  diagonales del polígono.

*Demostración.* Para probar este teorema usaremos inducción en el número de vértices  $n$  de nuestro polígono  $P$ .

Si  $n = 3$  entonces  $P$  es un triángulo por lo que el teorema resulta cierto.

Sea  $n > 3$ , supongamos que este teorema resulta cierto para polígonos con menos de  $n$  vértices. Sea  $P$  un polígono con  $n$  vértices, por el lema 1 que  $P$  tiene una diagonal  $d$ . Entonces considerando a los polígonos  $P_1$  y  $P_2$  que resultan al dividir a  $P$  con  $d$ , si  $P_1$  tiene  $n_1$  vértices entonces  $P_2$  tiene  $n - n_1 + 2$  vértices, pues ambos comparten los vértices extremos de  $d$ , entonces por hipótesis de inducción  $P_1$  tiene  $n_1 - 2$  triángulos y  $n_1 - 3$  diagonales y  $P_2$  tiene  $n - n_1$  triángulos y  $n - n_1 - 1$  diagonales. Por lo tanto el número de triángulos en  $P$  es:

$$n_1 - 2 + n - n_1 = n - 2.$$

El número de diagonales en  $P$  es el número de diagonales en  $P_1$  más el número de diagonales en  $P_2$  más  $d$ , es decir:

$$(n_1 - 3) + (n - n_1 - 1) + 1 = n - 3.$$

□

**Definición 28.** Tres vértices consecutivos  $a, b, c$  en un polígono  $P$  forman una oreja, si  $\overline{ac}$  forma una diagonal de  $P$ .

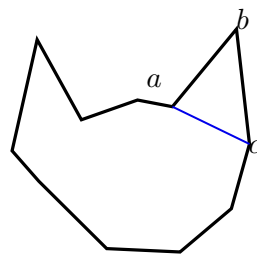


Figura 3.4: Los vértices  $a, b, c$  son una oreja del polígono.

Tras definir lo que es una oreja un corolario del teorema 7 es:

**Corolario 1.** Si  $P$  es un polígono con  $n > 3$  vértices, entonces  $P$  tiene al menos dos orejas.

*Demostración.* Si  $P$  es un polígono con  $n > 3$  vértices, entonces  $P$  tiene una triangulación  $T$  que tiene  $n - 2$  triángulos y cada uno de estos triángulos tiene a lo más dos de sus

aristas en la frontera de  $P$ , como  $P$  tiene  $n$  vértices por el principio de las casillas dos de estos triángulos deben de tener aristas en la frontera de  $P$ , es decir, estos triángulos son orejas de  $P$ .  $\square$

**Definición 29.** Sea  $T$  una triangulación de un polígono, decimos que  $T$  tiene número cromático  $k$  si el número cromático de su gráfica dual es  $k + 1$ .

Una característica también muy importante de las triangulaciones es que su número cromático es siempre acotado por la misma constante, a saber:

**Teorema 8.** Si  $T$  es una triangulación para un polígono  $P$ ,  $T$  siempre tiene número cromático tres.

*Demostración.* Como un triángulo puede tener a lo más tres vecinos en su gráfica dual  $G'$ , entonces  $G'$  cumple con la propiedad de que para cada vértice el grado máximo que puede tener es tres, y por el teorema 5 es 3-colorable.  $\square$

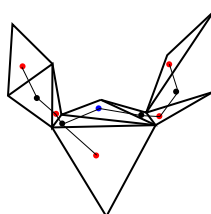


Figura 3.5: Coloración de una triangulación.

**Definición 30.** Una coloración por vértices de una triangulación  $T$ , es una coloración para la gráfica plana que puede ser representada con  $T$ .

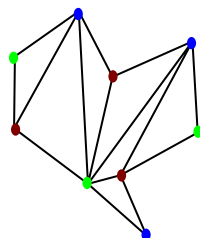


Figura 3.6: Coloración por vértices de una triangulación

### 3.1. El problema original de la galería de arte

Por lo tanto armados ya con las herramientas necesarias podemos dar una prueba para el problema de la galería de arte.

**Teorema 9.** (Galería de arte)

Para cubrir un polígono  $P$  con  $n$  vértices en ocasiones se necesitan  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias para vigilar completamente su interior pero nunca más.

*Demostración.* Sea  $P$  un polígono con  $n$  vértices. Sabemos que  $P$  tiene una triangulación, entonces usemos inducción sobre el número de triángulos de una triangulación  $T$  para  $P$ .

Si el número de triángulos es  $t = 1$ , entonces  $P$  es un triángulo y por lo tanto  $P$  es un polígono convexo, con lo que un solo guardia es necesario.

Ahora, si  $t > 1$  el número de triángulos de una triangulación  $T$  de  $P$  entonces sabemos por el corolario 1 que  $T$  tiene un oreja, y si la quitamos eliminando un vértice  $v$  nos queda una triangulación  $T'$  con  $t - 1$  triángulos, entonces por hipótesis de inducción  $T'$  tiene una tres coloración de sus vértices y si para  $v$  el vértice no presente en  $T'$  elegimos en  $T$  un color distinto al color que tienen sus vecinos en  $T'$ , tenemos que efectivamente  $T$  es 3-coloreable.

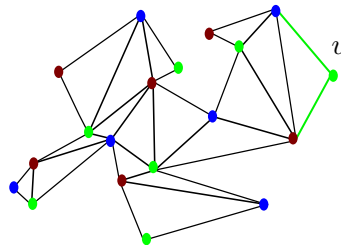


Figura 3.7: El color de  $v$  se obtiene de una coloración de la gráfica  $G - v$ .

Ahora, podemos elegir la clase de color que tenga menos vértices, esta clase contiene a lo más  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  y si colocamos un guardia en los vértices coloreados con tal color cubriremos todo el polígono. Podemos entonces afirmar que siempre  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son suficientes.

Además considerando la figura 3.1 a principio del capítulo notamos que existen polígonos para los cuales  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  guardias son necesarios.  $\square$

### 3.2. Algunas variantes del problema de la galería de arte

El problema de la galería de arte dio lugar a una gran cantidad de variaciones, ya sea modificando como funcionan los “guardias”: permitiendo que sean libres de moverse a través del polígono, sobre una arista o que se limiten los puntos donde pueden ser ubicados, inclusive considerando la topología de los polígonos: trabajando con polígonos ortogonales, con agujeros y demás familias de polígonos.

A continuación hablaremos brevemente sobre algunas de las variaciones más populares y daremos algunos resultados que juzgamos interesantes.

Recordemos que la galería de arte considera un polígono sin imponer menor restricción en su topología y con guardias ubicados en la frontera o el interior del polígono.

Si modificamos la forma en la que los vigilantes funcionan tenemos:

- Puntos guardia: Este es el problema original donde los guardias se colocan en la frontera o en el interior del polígono.
- Vértices guardia: Los guardias se limitan a colocarse sólo en los vértices de un polígono.
- Aristas guardia: Los guardias son móviles y se pueden trasladar libremente sobre las aristas de un polígono.
- Guardias diagonales: Los guardias también son móviles pero se limitan a las diagonales de un polígono.
- Reflectores: Vigilan una zona angular de tamaño  $\alpha$ .
- Radares: Los guardias son reflectores giratorios. Usualmente se considerará que uno o más radares, giran a una misma velocidad constante.
- Módems: Los guardias pueden vigilar a través de un número acotado de paredes (aristas). Un módem  $m$  vigila un punto  $p$ , si el segmento  $\overline{mp}$ , interseca a lo más, un número acotado de objetos.

Ahora, si consideramos la forma de nuestro polígono utilizado para modelar la galería tenemos:

- Galería de arte con cuartos rectangulares: La galería esta formada por un conjunto de habitaciones rectangulares, dentro de un edificio rectangular.
- Galería ortogonal: Se restringe a la galería a ser un polígono ortogonal
- Galería con agujeros: Se consideran polígonos con agujeros para modelarla.

- Jardín de esculturas: En esta variante, lo que se pretende es colocar transmisores emisores de señales, a partir de las cuales se pretende probar si un punto se encuentra dentro o fuera de la galería, en este caso las paredes no interfieren con las señales emitidas por los transmisores.

### Galerías ortogonales y con agujeros.

Una galería de arte con cuartos rectangulares se modela como un rectángulo subdividido en rectángulos. Estos rectángulos se piensan como las salas de la galería y se tiene como convención que entre cada dos habitaciones adyacentes hay una puerta. Podemos ver que colocar los guardias en la puerta es la estrategia más prometedora ya que los rectángulos son convexos y al colocar un guardia en una puerta aseguramos que dos habitaciones sean cubiertas.

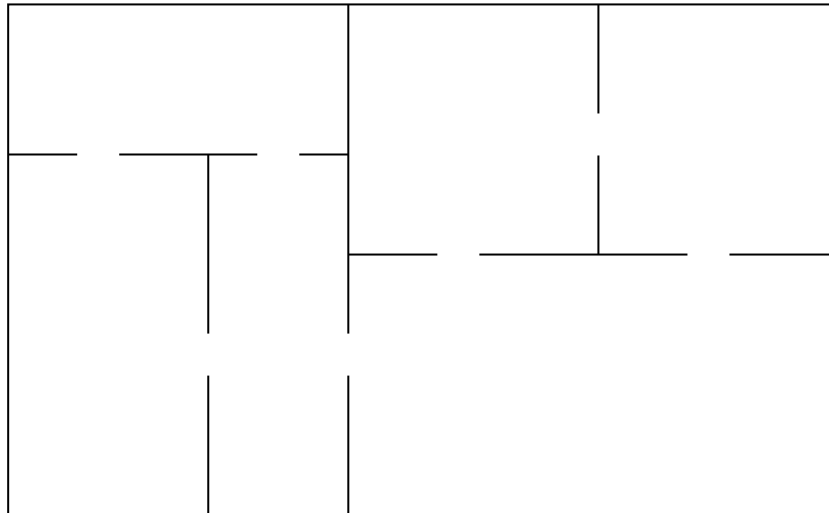


Figura 3.8: Modelado de una galería de arte con cuartos rectangulares.

**Teorema 10.** Cualquier galería de arte tradicional con  $n$  habitaciones puede ser vigilada por exactamente  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias.

Antes de probar el teorema 10 consideremos lo siguiente:

**Definición 31.** Dada una gráfica  $G$  un apareamiento  $M$  es un subconjunto de  $E(G)$  tal que dadas dos aristas cualquiera  $x, y \in M$ ,  $x$  e  $y$  no inciden en algún vértice común.

Decimos que dos vértices  $u, v$  se aparean en un apareamiento  $M$  si  $uv \in M$ .

**Definición 32.** Dada una gráfica  $G$ , un apareamiento perfecto  $M$  es un subconjunto de  $E(G)$  tal que todo vértice en  $G$  es incidente a una arista en  $M$  y dadas dos aristas cualquiera  $x, y \in M$ ,  $x$  e  $y$  no inciden en algún vértice común.

El siguiente teorema lo tomamos del libro *Graph Theory with applications* [BM10].

**Teorema II.** (Teorema de Tutte) Sea  $G$  una gráfica. Entonces  $G$  tiene un apareamiento perfecto si y sólo si para cada subconjunto  $U$  de  $V(G)$ , la gráfica inducida por  $V - U$  tiene a lo más  $|U|$  componentes conexas con un número impar de vértices

*Demostración.* Primero, supongamos que  $G$  tiene un apareamiento perfecto y sea  $U$  un subconjunto arbitrario de  $V(G)$ . Entonces tomemos una componente arbitraria  $C$  con número de vértices impar de  $G - U$ . Sea  $C$  la gráfica inducida por el conjunto de vértices  $V(G) - U$ . Como  $G$  tiene un apareamiento perfecto, al menos un vértice en  $C$  debe de aparearse con un vértice de  $U$ . Por lo que cada componente conexas con un número impar de vértices debe tener un vértice que se aparee con uno de  $U$ . Por lo tanto la gráfica inducida por  $V(G) - U$  tiene a lo más  $|U|$  componentes conexas con un número impar de vértices.

Ahora, consideremos un subconjunto arbitrario  $U$  de los vértices de  $G$ . Supongamos que la gráfica inducida por  $V(G) - U$  tiene a lo más  $|U|$  componentes conexas con un número impar de vértices. Supongamos que  $G$  no tiene un apareamiento perfecto, veamos que esto nos conduce a una contradicción.

Supongamos que  $G$  tiene un apareamiento perfecto si agregamos una nueva arista  $a$  a  $G$ . Esto nos es útil ya que si encontramos un subconjunto  $B$  de  $V(G)$  que no cumpla con que la gráfica inducida por  $V(G) - B$  tiene a lo más  $|B|$  componentes conexas con un número impar de vértices lo mismo será para cualquier gráfica  $H$  con los mismos vértices que  $G$  y con menos aristas que  $G$ : ya que cada componente impar de  $G - B$  en  $H - B$  se dividirá en más componentes, pero el número de componentes con un número de vértices impares no disminuirá.

El caso cuando el número de vértices en  $G$  es impar lo podemos descartar ya que para cualquier gráfica no vacía siempre pasa que el número de componentes de  $G - \emptyset = G$  es mayor a  $|\emptyset| = 0$ . Por lo tanto  $G$  tiene un número par de vértices.

Sea  $B$  el conjunto de vértices con grado  $|V(G)| - 1$ . Supongamos que todos las componentes de  $G - B$  son gráficas completas. Entonces si  $V(G) - B$  tiene a lo más  $|B|$  componentes conexas con un número impar de vértices, podemos hacer un apareamiento perfecto: apareando un vértice de cada componente con un número impar de vértices con uno de  $B$  y los que queden en las componentes y en  $B$ . Como son gráficas completas y ahora todas tienen un número par de vértices deben de tener un apareamiento perfecto.

Ahora, supongamos que  $K$  es una componente de  $G - B$  y tenemos vértices  $x, y \in K$  tales que  $xy$  no es una arista en  $G$ . Consideremos entonces los vértices  $a, b \in K$ , los primeros vértices en un  $xy$ -camino de longitud mínima. Entonces aseguramos que  $xa, ab \in E(G)$  pero  $xb \notin E(G)$ . Como  $a \notin B$  entonces existe un vértice  $c$  que no es incidente al vértice  $a$ , es decir,  $ac \notin E(G)$ . Entonces tenemos que al agregar a la arista  $xa$  tenemos un apareamiento perfecto  $M_1$ . Agregando a la arista  $ab$  también obtenemos un apareamiento perfecto  $M_2$ . Más aún,  $xa \in M_1$  y  $ab \in M_2$ , ya que sin estas aristas no tendríamos un apareamiento perfecto.

Consideremos un camino de tamaño máximo  $P$  que inicie en  $c$  y que vaya alternando una arista en  $M_1$  y otra en  $M_2$ . Sea  $v$  el último vértice de  $P$ . Si la última arista de  $P$  está en  $M_1$ , entonces  $v = a$ , ya que de lo contrario podríamos continuar el camino. En este caso definamos el ciclo  $C = P + ac$ . Notemos que  $C$  es un ciclo de longitud par.

Si por el contrario  $v$ , el último vértice de  $P$ , está en  $M_2$  entonces este vértice es  $x$  o  $b$ . Más aún, por ser  $P$  de tamaño máximo la última arista de  $P$  debe de ser  $xb$ . Por lo tanto definimos el ciclo  $C = P + va + ac$ . En este caso también terminamos con  $C$  de longitud par.

Sea  $M = ((M_1 \cup M_2) - (M_1 \cap M_2))$ . Notemos que  $M$  es justamente  $M_1$  al remplazar las aristas que están en  $C$  con aristas de  $C - M_2$ . Por lo tanto  $M$  es un apareamiento perfecto de  $G \cup C$ , pero como  $M$  no contiene a  $ac$ , entonces  $M$  también es un apareamiento perfecto de  $G$ , contradiciendo nuestra suposición.  $\square$

Ahora, podemos probar el teorema 10 usando como referencia la sección 3 del libro *Art Gallery and Illumination problems* [Urr96].

*Demostración.* Consideremos a  $T$  una habitación rectangular subdividida en recámaras rectangulares con acceso mediante puertas entre ellas si comparten un muro. Consideremos la gráfica  $G(T)$  que se obtiene de hacer  $(V(G(T)))$  a las recámaras y definamos las aristas de  $G(T)$  como  $xy \in E(G(T))$  cuando  $x, y \in V(G(T))$  y hay una puerta entre ellas.

Primero supongamos que  $G(T)$  tiene un número par de nodos. Entonces, si podemos dar un apareamiento perfecto para  $G(T)$ , al colocar el módem en la puerta que conecta a las recámaras que inciden en las aristas del apareamiento perfecto estaríamos efectivamente vigilando todas las recámaras usando efectivamente  $\frac{n}{2}$  vigilantes. Si el número de vértices de  $G(T)$  es impar al dividir a alguna recámaras en dos aseguramos que necesitaremos no más de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  vigilantes si con esta nueva división se tuviese un apareamiento perfecto.

Sea  $S$  un subconjunto de  $V(G(T))$  y denotemos al número de componentes conexas con un número impar de vértices por  $k$ . Por como se construye la gráfica  $G(T)$ , cada componente conexa  $C_i$  de  $G(T) - S$  es una región ortogonal  $O_i$ , por lo mismo cada  $O_i$  tiene al menos 4 esquinas. Entonces el número de esquinas generadas por las  $k$  componentes de  $G(T) - S$  es de al menos  $4k$ .

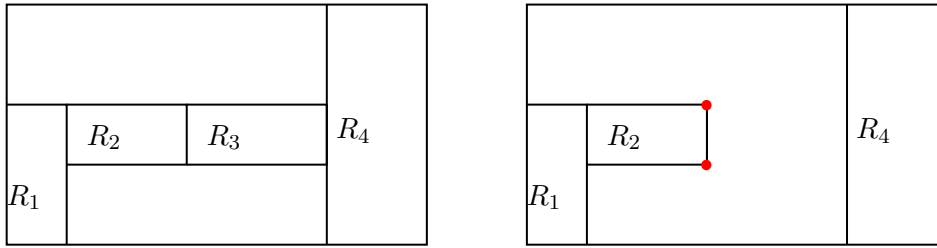


Figura 3.9: Esquinas nuevas al remover un rectángulo de la representación gráfica de  $S$ .

Si eliminamos un rectángulo de la representación gráfica de  $S$  manteniendo siempre la frontera exterior de todo  $T$  nunca agregamos más de 4 esquinas nuevas y si eliminamos de  $T$  los rectángulos en los que dividimos el cuarto completo entonces todas las esquinas generadas por  $G(T) - S$  desaparecerán a excepción de las 4 esquinas de  $T$  el rectángulo original. Por lo tanto el total de esquinas es siempre  $4k \leq 4|S| + 4$ . De donde  $k \leq |S| + 1$ .

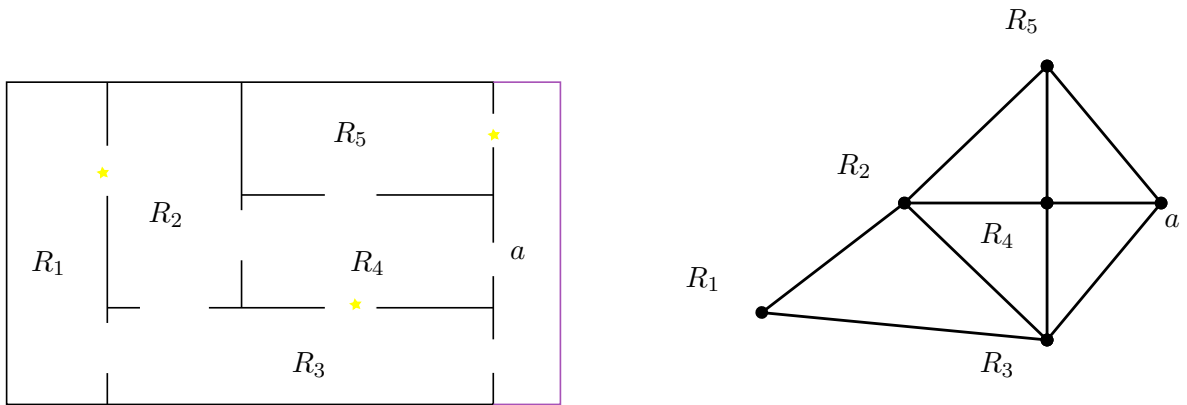


Figura 3.10:  $G(T) + a$  y las luces que muestran el apareamiento perfecto que usamos para dar las posiciones de los guardias.

Como cuando  $k < |S| + 1$  tenemos un apareamiento perfecto por el teorema II tenemos un apareamiento perfecto, supongamos que  $k = |S| + 1$ . Cuando  $S$  es vacío, como completamos al rectángulo en un principio para asegurarnos que tuviese un número par de rectángulos no tenemos ningún problema. Supongamos entonces que  $|S| > 1$ . Tomemos un elemento  $s \in S$ . Notemos que  $s$  es un vértice de corte, ya que si no, entonces tendríamos  $|S - s| + 1 = k$ . Como  $s$  es de corte entonces divide a  $T$  en dos rectángulos  $T_1$  y  $T_2$  divididos en rectángulos con uno de ellos con un número par de rectángulos. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $T_1$  tiene un número par de rectángulos, por lo que por inducción podemos ver que si de  $T_1$  seguimos eliminando elementos que pertenecen a  $|S|$  al final tendremos una componente que tiene un número par de rectángulos.

Entonces dado un subconjunto  $|S|$  de  $G(T)$ , el número de componentes con un número impar de vértices es menor a  $|S|$ . Por el teorema II,  $G$  tiene un apareamiento perfecto y puede vigilarse con  $\frac{n}{2}$  guardias.  $\square$



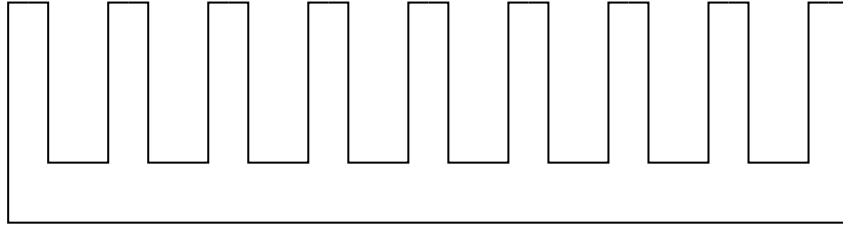


Figura 3.11: Polígono ortogonal que requiere de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias para ser vigilado.

Vimos que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  es el número de guardias que cubren a una galería de arte  $P$  cuando  $P$  es rectangular. Por lo que para galerías ortogonales con otra forma en ocasiones se necesitan menos guardias. En general, para polígonos ortogonales con  $n$  aristas se necesitan  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias, la prueba de esto es muy similar a la prueba de la galería de arte de tradicional. Se obtiene una subdivisión convexa de la galería y esta induce una gráfica que puede colorearse con 4 colores, por lo que tomando la clase más pequeña obtenemos la cota de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ . Lo interesante de este problema es que cuando el caso cuando  $P$  es polígono ortogonal con agujeros la cota de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  se mantiene [AECSU98].

Antes de ver que un polígono ortogonal  $P$  con  $n$  vértices puede ser vigilado siempre por  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias, consideremos:

**Definición 33.** Dado  $P$  un polígono ortogonal, decimos que un vértice es convexo si el ángulo interior que se forma entre las aristas que inciden en él es de  $\frac{\pi}{2}$ . Si el ángulo interior que se forma entre las aristas que inciden en él es de  $\frac{3\pi}{2}$  decimos que el vértice es cóncavo.

**Definición 34.** Sea  $P$  un polígono ortogonal. Un corte horizontal o vertical de  $P$  es la extensión de una arista de  $P$  mediante una línea ortogonal iniciando en un vértice cóncavo hacia el interior de  $P$  hasta que toque la frontera.

**Definición 35.** Un corte (horizontal o vertical) lo llamaremos *corte útil* si separa a  $P$  en dos polígonos no vacíos  $P_1$  y  $P_2$  con  $n_1$  y  $n_2$  vértices respectivamente tal que  $n_1$  o  $n_2$  es igual a  $4k + 2$  para alguna  $k$ .

**Lema 2.** En cualquier polígono  $P$  ortogonal con  $n$  vértices tenemos exactamente  $\frac{n-4}{2}$  vértices cóncavos.

*Demostración.* Si  $P$  tiene 4 vértices, entonces  $P$  es un cuadrado que no tiene vértices cóncavos. Supongamos que  $P$  es un polígono ortogonal con  $n > 4$  vértices. Podemos encontrar una línea ortogonal que divida a  $P$  en dos polígonos ortogonales y que no incida en algún vértice de  $P$ ,  $P_1$  y  $P_2$  con  $n_1$  y  $n_2$  vértices respectivamente, notemos que esto no modifica el número de vértices cóncavos en  $P_1$  o  $P_2$ . Entonces el número de vértices cóncavos de  $P$  es  $\frac{n_1-4+2}{2} + \frac{n_2-4+2}{2} = \frac{n_1+n_2-4}{2} = \frac{n-4}{2}$ .  $\square$

Ahora, para un polígono ortogonal  $P$  etiquetemos a algunos vértices convexos y aristas de interés según su posición relativa a los demás vertices convexos y aristas. (Ver la figura

3.12)

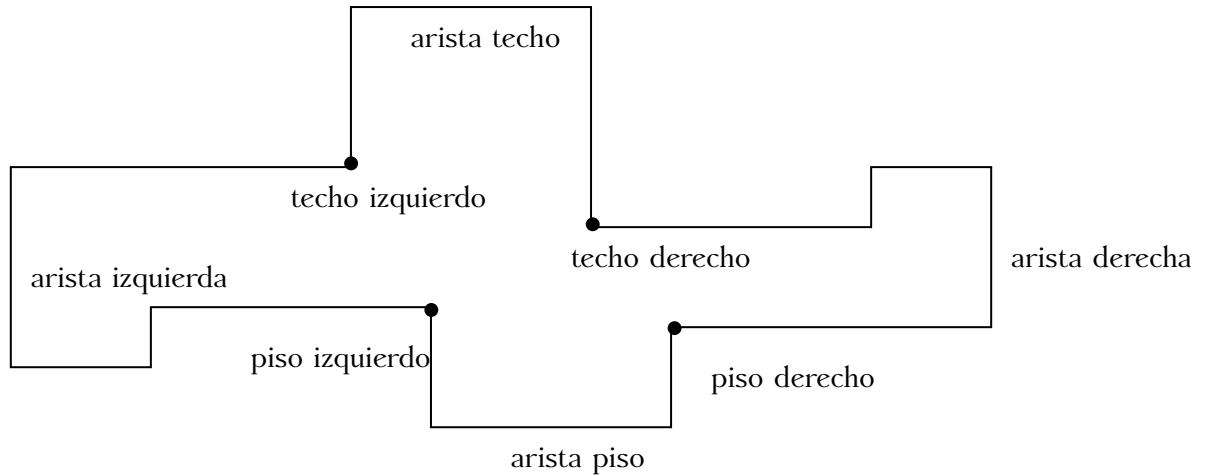


Figura 3.12: Etiquetado de algunos elementos de importancia de un polígono ortogonal.

**Teorema 12.** Cualquier polígono ortogonal  $P$  con  $n$  vértices puede ser vigilado siempre por  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias.

*Demostración.* Por inspección de casos, podemos ver que polígonos ortogonales con 4 o 6 vértices sólo necesitan un guardia para ser vigilados. Por lo que consideremos a  $P$  un polígono con  $n \geq 8$  vértices. Es importante notar que todo polígono ortogonal siempre tiene un número par de vértices ya que si nos colocamos en un vértice y recorremos en dirección horaria tendremos que dar 4 giros a la derecha (D) para “cerrar” el polígono y por cada giro a la izquierda (I) debemos dar uno a la derecha.

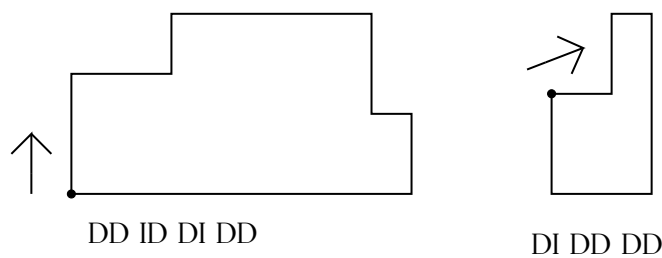


Figura 3.13: Dos polígonos y la secuencia de giros que permite que se cierren.

Por el lema 2,  $P$  tiene  $\frac{n-4}{2}$  vértices cóncavos. Dividamos los vértices cóncavos en dos conjuntos  $S_1$  y  $S_2$ , uno de estos tiene menos de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vértices cóncavos. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $S_1$  tiene menos de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  elementos. Coloquemos un guardia en cada uno de los vértices que contiene  $S_1$ . Si esto basta para vigilar a  $P$  hemos acabado. Si este no es el caso, entonces sea  $p \in P$  que no es vigilado por ningún punto en  $S_1$ . Consideremos la mayor línea horizontal  $\ell$  que pasa por  $p$  contenida en  $P$ . Sean  $e, f$  las

aristas que interseca  $\ell$  de  $P$ . Ahora, consideremos el rectángulo de mayor tamaño que contiene a  $\ell$  y sean  $e'$  y  $f'$  las aristas que intersecan a  $P$  en la parte superior e inferior de  $R$  respectivamente. Como  $p$  no es vigilado por ningún punto de  $S_1$ , entonces  $e$  y  $e'$  coinciden en la esquina superior izquierda de  $R$  y análogamente  $f$  y  $f'$  coinciden en la esquina inferior derecha de  $R$ . Llamemos a la esquina donde inciden  $e'$  y  $f$  como  $q$  y a la esquina donde inciden  $e$  y  $f'$  como  $q'$ . Entonces tenemos 3 casos:

**Caso 1:** Si  $q$  y  $q'$  son vértices de  $P$ , entonces  $P = R$  y no tenemos nada que probar.

**Caso 2:** Si  $q$  y  $q'$  no son vértices de  $P$ , podemos hacer dos cortes horizontales que formen un rectángulo contenido en  $R$  que contenga  $\ell$ , podemos ver que tenemos alguno de los siguientes sub-casos (Ver figura 3.14):

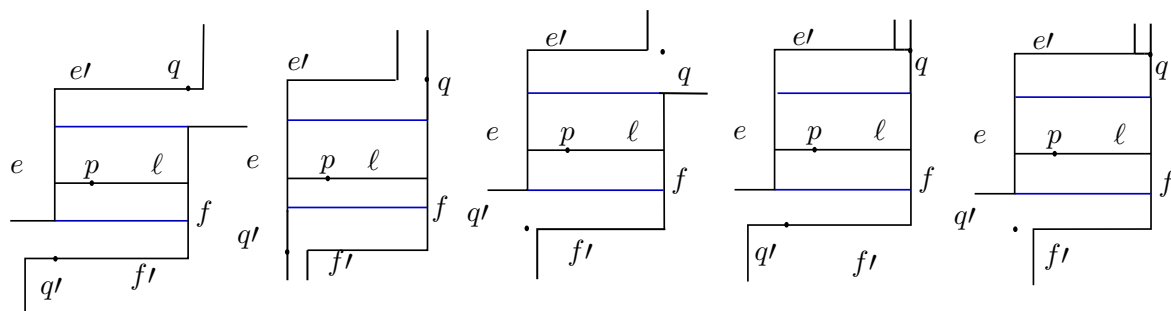


Figura 3.14: Bajo simetrías, estos son todos los casos cuando  $q$  y  $q'$  no son vértices de  $P$

Entonces tenemos que alguno de los cortes es un corte útil, ya que estos cortes aumentan en dos los vertices de un polígono pero del otro no, respectivamente. Esto ya nos garantiza que podemos iluminar  $P$  con  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ , pues podemos usar inducción en los polígonos ortogonales generados por el corte. Tenemos que:  $n_1 + n_2 \leq n + 2$  de donde  $\lfloor \frac{n_1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ , es decir, los vértices necesarios para iluminar  $P$  son menos que  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ .

**Caso 3:** Ahora, supongamos que sólo  $q$  es vértice de  $P$ . Si  $e$  y  $f'$  están contenidos propiamente en las aristas superiores e izquierda de  $R$ , entonces podemos extender la arista de  $P$  que incide en el vértice inferior de  $e$  y también la arista vertical de  $P$  que incide en el vértice izquierdo de  $f'$ . Haciendo esto obtenemos dos polígonos, un polígono  $Q$  con  $n - 4$  vértices y por hipótesis de inducción puede ser vigilado por  $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor$  y un polígono con 4 o 6 vértices que puede ser vigilado por un punto  $q$ , por lo que todo  $P$  puede ser vigilado por los puntos que vigilan  $Q$  más un punto en  $q$ .

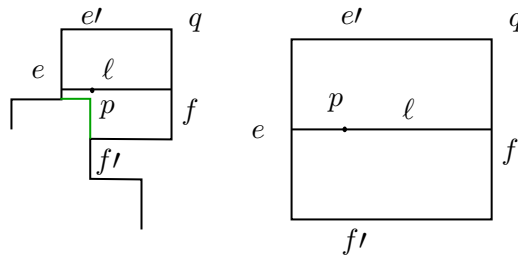


Figura 3.15: Caso 3a: Bajo simetrías,  $e$  y  $f'$  están contenidas en las aristas inferior e izquierda de  $R$ .

Si en cambio es  $f'$  quien contiene propiamente a la arista inferior de  $R$ , podemos considerar un segmento de línea vertical que una el extremo inferior de  $e$  a un punto en la base de  $R$ . Podemos realizar un barrido con este segmento hasta tocar a una arista vertical de  $P$ , el punto izquierdo de  $f'$  o al vértice izquierdo de una arista  $g$  incidente al vértice inferior de  $e$ .

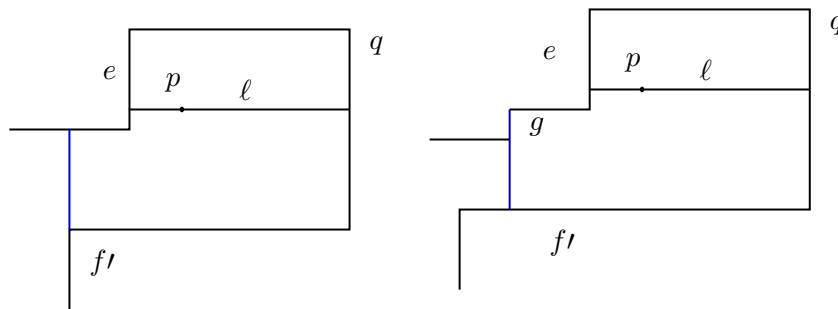


Figura 3.16: Caso 3b:  $f'$  contiene a la base de  $R$ .

Si lo que sucede es que este segmento toca a una arista vertical de  $P$ , sea  $x$  el vértice de  $P$  con la mayor coordenada  $y$  contenida en  $v$ . Por lo que podemos dar dos cortes de  $P$  en  $x$  un corte horizontal  $h$  y uno vertical  $v$ . Entonces sea  $P'$  un sub-polígono de  $P$  a la izquierda de  $v$  obtenido al cortar  $P$  con  $v$  y  $P''$  un sub-polígono arriba de  $h$  obtenido al cortar  $P$  con  $h$ . Si  $P'$  tiene  $m$  vértices, entonces  $P''$  tiene  $m + 2$  por lo que  $h$  o  $v$  son cortes útiles. Y análogo al caso 2 podemos vigilar a  $P$  con  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ .  $\square$

Además en ocasiones son necesarios  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ . Véase la figura 3.11.



## Capítulo 4

# El problema de los $k$ -módems

En este capítulo se da una introducción a una generalización del problema de la galería de arte. Consideramos un polígono simple  $P$  y nos preguntamos ¿cuál es el número necesario de puntos  $p_1, \dots, p_k$  que son suficientes para que dado un punto  $p$  en  $P$ , exista un punto  $p_i$  tal que el segmento de línea que une a  $p$  con  $p_i$  cruce a lo más  $k$  aristas de  $P$ ? Este número  $k$  representara el poder de los puntos que aquí nombraremos en vez de guardias como módems. Es decir, representa la capacidad de los módems de superar obstáculos rectilíneos. Además, para  $k = 0$ , este es el problema original de la galería de arte.

Para desarrollar este capítulo nos basaremos en el artículo *Modem Illumination of monotone polygons* [AFMFP<sup>+</sup>18].

Al igual que sucede con el problema de la galería de arte podemos restringir el estudio para familias de líneas, polígonos ortogonales, conjuntos de segmentos verticales o familias de segmentos horizontales disjuntos o conjuntos de líneas. En [BBB<sup>+</sup>13] se presentan algunas variaciones para el problema de iluminación usando  $k$ -módems, por ejemplo, se dan cotas superiores e inferiores para iluminar el plano en presencia de varios obstáculos, por ejemplo segmentos de línea.

Cabe resaltar que el problema de los  $k$ -módems tiene aún muchas preguntas que no han sido contestadas y que para  $k \geq 1$  casi no se conocen cotas justas para polígonos de varias clases.

### 4.1. Iluminando polígonos monótonos con $k$ -módems

**Definición 36.** Un polígono  $P$  es monótono si existe una línea  $\ell$  tal que cualquier línea ortogonal a  $\ell$  corta a  $P$  en a lo mas dos puntos.

**Definición 37.** Una cadena monótona es un conjunto de aristas adyacentes tal que existe una línea  $\ell$  tal que cualquier línea ortogonal a  $\ell$  corta a  $P$  en a lo mas un punto.

Comenzamos dando algunos resultados para polígonos monótonos. Para facilitarnos el trabajo supondremos que cualesquiera dos aristas en cadenas monótonas distintas del polígono no son paralelas. En la practica sólo basta con “alargar” un poco el eje adyacente a una de estas aristas.

También, podemos suponer que el polígono es monótono en el eje  $x$  y que dos vértices del polígono nunca coinciden en su coordenada  $x$ . Finalmente, con el objetivo de ser más claros en nuestras explicaciones, romperemos la convención que establecimos en el capítulo 2 para numerar los vértices del polígono basándonos en el orden en la frontera del polígono. Ahora, etiquetaremos los vértices de manera ordenada según su coordenada  $x$ .

Como un recurso para revisar que conjuntos de puntos funcionen como  $k$ -módems iluminando un polígono, consideremos la siguiente definición:

**Definición 38.** Dada un punto  $q$  en un polígono  $P$  sea  $\mathcal{R}(q)$  el conjunto de todos los rayos iniciando en  $q$ .

Hay varias observaciones que podemos hacer, por ejemplo si consideramos un polígono simple  $P$ , un punto  $p$  en el interior de  $P$  y  $\mathcal{R}(p)$ . Tenemos que si un rayo  $r \in \mathcal{R}(p)$  interseca la última arista  $e$ ,  $r$  deja el interior del polígono  $P$  y no vuelve a intersecar al polígono.

Podemos notar también que para cualquier punto  $q$  de  $P$  un polígono y cualquier  $r \in \mathcal{R}(q)$ ,  $q$  es una posición válida para un  $k$ -módem para  $P$  en la dirección de  $r$  si y sólo si  $r$  interseca a lo más a  $k + 1$  aristas de  $P$ .

Otra observación de importancia es que en ocasiones es conveniente colocar un  $k$ -módem en la frontera de nuestro polígono. Si distinguimos los rayos según la dirección en la que comienzan, ya sea el interior o el exterior del polígono los rayos cruzan siempre un número par o impar de aristas de  $P$ . Es decir definimos:

**Definición 39.** Dado un punto  $q$  en la frontera de un polígono  $P$  y  $\mathcal{R}(q)$  el conjunto de todos los rayos iniciando en  $q$ , decimos que  $\mathcal{R}^o(q)$  es el subconjunto de rayos de  $\mathcal{R}(q)$  que inician dirigiéndose al interior de  $P$  y  $\mathcal{R}^i(q)$  es el subconjunto de rayos de  $\mathcal{R}(q)$  que

inician dirigiéndose al exterior de  $P$ .

Entonces cada rayo en  $\mathcal{R}^o(q)$  interseca siempre un número par de aristas de  $P$  y cada rayo en  $\mathcal{R}^i(q)$  interseca siempre un número impar de aristas de  $P$ . Esto aceptando la convención de que un rayo no cruza la arista de la frontera en la que se encuentra  $p$ .

Un idea que resulta natural al considerar estas observaciones es calcular cuántas aristas puede tener un polígono para asegurar que sin importar su forma pueda ser cubierto por un  $k$ -módem. La respuesta la obtenemos con la siguiente proposición:

**Proposición 1.** Todo  $(k + 3)$ -gono  $P$  puede iluminarse con un  $k$ -módem colocado en cualquier vértice de  $P$ .

*Demostración.* Si colocamos un  $k$ -módem en una vértice  $v$  de  $P$  un polígono con  $k + 3$  aristas, entonces el número de aristas que los rayos en  $\mathcal{R}^o(q)$  tienen que atravesar es  $k + 1$ , pues el  $k$ -módem no tiene que atravesar a las aristas que se intersecan en  $v$ . Por lo tanto, de acuerdo a nuestras observaciones anteriores,  $v$  es una posición válida para un  $k$ -módem para  $P$ .  $\square$

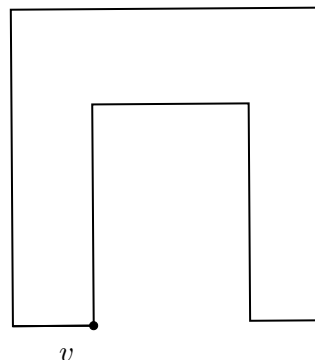


Figura 4.1: Colocar un 1-módem en un vértice nos permite iluminar el polígono con sólo un módem.

Anteriormente, hablamos un poco de triangulaciones de polígonos y de cómo el dividir polígonos nos permite procesarlos, para que trabajar con ellos resulte más fácil. Ahora, haremos lo mismo pero para nuestros polígonos monótonos y usando líneas verticales para dividirlos. Con el fin de hacer más fácil esta discusión consideremos la siguiente definición:

**Definición 40.** Una recta en  $\mathbb{R}^2$  divide al plano en dos partes no acotadas. Cada una de estas es un semiplano. A un semiplano que no incluye a la recta que lo acota se le llama



semiplano abierto, si por el contrario se considera a la recta que lo acota como parte del semiplano, decimos que este es un semiplano cerrado.

**Notación 1.** Dado una línea vertical  $\ell$  definimos a  $H_R(\ell)$  como el semiplano cerrado derecho determinado por  $\ell$ . Análogamente  $H_I(\ell)$  es el semiplano cerrado izquierdo determinado por  $\ell$ .

También denotemos por  $P^\circ$  al interior de un polígono  $P$ .

Ahora, como para cualquier línea  $\ell$  vertical y un polígono  $x$ -monótono respetando la convención de que no tiene vértices que coinciden en la coordenada  $x$ ,  $\ell \cap P^\circ$ , es vacío o un segmento de línea vertical.

Podemos notar que dado un polígono  $P$  y una línea vertical  $\ell$ , la intersección  $(P \cap H_L(\ell)) \cup (\ell \cap P^\circ)$  forma un polígono que no cumple con nuestra convención de polígono  $x$ -monótono, ya que la arista  $\ell \cap P^\circ$  es vertical y por lo tanto los vértices que inciden en sus extremos coinciden en la coordenada  $x$ . Esto podemos resolverlo al perturbar un poco uno de los vértices extremos nuevos que se forman (tal como se muestra en la figura 4.2). Con lo cual ya tendríamos una forma de dividir polígonos  $x$  monótonos en polígonos que igualmente resultarían  $x$  monótonos.

Por como se construyen los nuevos polígonos, según este procedimiento de partición, podemos decir entonces que: si tenemos un conjunto de puntos que iluminan al polígono  $P$ , este conjunto de puntos también iluminará a  $(P \cap H_L(\ell)) \cup (\ell \cap P^\circ)$ .

Todos estas afirmaciones son también válidas para el semiplano cerrado derecho  $H_R(\ell)$ .

A continuación, ilustramos el corte equivalente a cortar primero con una línea vertical y luego perturbar un poco el polígono resultante para obtener un polígono  $x$ -monótono según nuestras convenciones.

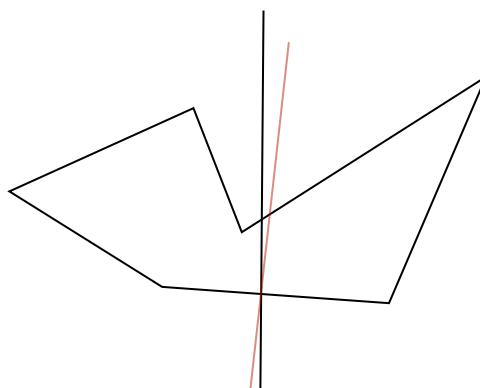


Figura 4.2: Ilustración del procedimiento para dividir un polígono  $x$ -monótono.

Con esto podemos ver, que al menos para polígonos monótonos, podemos afirmar que con un sólo  $k$  módem podemos iluminar un polígono de no sólo  $k + 3$  lados, sino que es posible iluminar un polígono con  $2k + 3$  lados.

**Proposición 2.** Sea  $P$  un polígono monótono con  $2k + 3$  aristas.  $P$  puede ser iluminado con un  $k$ -módem.

*Demostración.* Primero por facilidad rotemos nuestro polígono para que sea monótono en  $x$ , también etiquetemos los vértices ordenados por su coordenada  $x$ .

Ahora, hay algunas observaciones que conviene notar: si  $P$  es un polígono monótono en  $x$  y  $\ell$  es una línea vertical que pasa por el vértice  $v_i$ , para  $1 \leq i \leq n - 2$  se cumple que:

- $P \cap H_L(\ell_i)$  contiene  $i + 1$  aristas de  $P$ .
- $P \cap H_R(\ell_i)$  contiene  $n - i$  aristas de  $P$ .
- Si tanto  $P \cap H_L(\ell_i)$  como  $P \cap H_R(\ell_i)$  están iluminados, entonces  $P$  está iluminado también.

Continuando con la prueba. Si  $m = k + 1$ , consideremos al segmento de línea vertical  $\ell_m$  que pasa por  $v_m$  y a  $s_m = P \cap \ell_m$ . Por las observaciones anteriores, tenemos que el polígono  $(P \cap H_L(\ell_m)) \cup s_m$  contiene, al igual que  $(P \cap H_R(\ell_m)) \cup s_m$ , a  $n - m = k + 2$  aristas de  $P$  más la arista  $s_m$ . Entonces considerando la Proposición 2 tenemos que un

$k$ -módem colocado en el vértice  $v_m = v_{k+2}$  ilumina a los polígonos  $(P \cap H_L(\ell_m)) \cup s_m$  y  $(P \cap H_R(\ell_m)) \cup s_m$  y por lo tanto ilumina a  $P$ .  $\square$

Ya podemos dar una primera cota para el número de  $k$ -módems que son suficientes para iluminar polígonos monótonos.

**Teorema 13.** Sea  $P$  un polígono monótono con  $n$  aristas. Entonces  $\lceil \frac{n-3}{2k} \rceil$   $k$ -módems son suficientes para iluminar  $P$ .

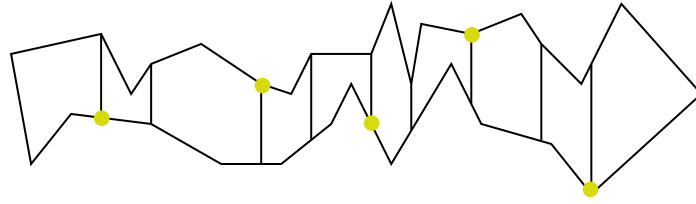


Figura 4.3: Partiendo un polígono monótono para iluminarlo con 1-módems.

*Demostración.* Consideremos los polígonos que resultan de dividir de manera recursiva al polígono  $P$  en un polígono usando una línea vertical  $\ell_{2k+2}$  cada vez. Esto nos da  $\lceil \frac{n-3}{2k} \rceil$  polígonos monótonos, por lo que  $\lceil \frac{n-3}{2k} \rceil$   $k$ -módems son suficientes para iluminar  $P$ .  $\square$

Para mejorar esta cota en [AFMFP<sup>+</sup>18] los autores dan un método para aumentar el tamaño de los polígonos que pueden iluminarse con un solo  $k$ -módem y un método para dividir eficientemente un polígono. Combinando estos dos métodos y apoyados en una familia de polígonos monótonos que requieren  $\lceil \frac{n-2}{2k+3} \rceil$  para ser iluminados, prueban que  $\lceil \frac{n-2}{2k+3} \rceil$  es una cota justa para el número de  $k$ -módems necesarios para iluminar un polígono monótono con  $n$  aristas.

## 4.2. Iluminando polígonos ortogonales con $k$ -módems

En esta sección daremos algunos resultados para polígonos ortogonales. Una motivación importante para estudiar el problema de los  $k$ -módems es el de cubrir eficientemente todos los puntos de un espacio con señal de internet usando la menor cantidad de módems. Es por eso que el modelado de este problema usando polígonos ortogonales es bastante ilustrativo.

Al igual que en el caso anterior con polígonos monótonos, con objeto de facilitarnos un poco la discusión estableceremos algunas convenciones. Etiquetaremos los vértices según su coordenada  $x$  y si existieran algunos vértices que coinciden en esta, entonces el que tenga la coordenada  $y$  mayor es al que le toca la etiqueta más pequeña. También supondremos que a lo más hay dos vértices que coinciden en su coordenada  $x$ .

De manera similar al análisis de la sección anterior, tenemos que cada rayo en  $\mathcal{R}^o(q)$  interseca siempre un número par de aristas de  $P$  y cada rayo en  $\mathcal{R}^i(q)$  interseca siempre

un número impar de aristas de  $P$ . Esto aceptando la convención de que el rayo no cruza la arista de la frontera en la que se encuentra  $p$ . Además de que aquí cada polígono ortogonal tiene al menos cuatro aristas “extremas”: las que poseen una coordenada mayor o menor a todas las demás. Las denotaremos a la superior con  $e_t$ , a la inferior  $e_b$ , a la más a la derecha como  $e_r$  y a la más a la izquierda como  $e_l$ . Como son aristas “extremas” para cualquier punto en  $P$  cualquier elemento de  $\mathcal{R}(q)$  cruza a lo más a una de ellas. Considerando lo anterior podemos ver que:

**Lema 3.** Sea  $P$  un polígono ortogonal con a lo más  $k + 3$  vértices. Entonces  $P$  puede ser iluminado con un  $k$ -módem colocado en cualquier punto fuera de  $P$ .

*Demostración.* Como cualquier segmento de línea con un punto extremo fuera de  $P$  y otro con un punto en  $P^\circ$  cruza a lo más una arista “extrema” de  $P$  entonces tal segmento de línea cruza a lo más  $k$  aristas de  $P$ . Por lo que el punto extremo fuera de tal segmento es una posición válida para un  $k$ -módem que ilumina todo  $P$ .  $\square$

**Lema 4.** Sea  $P$  un polígono ortogonal con a lo más  $k + 4$  vértices. Entonces  $P$  puede ser iluminado por un  $k$ -módem colocado en el interior o la frontera de  $P$ .

*Demostración.* Para ver esto, consideremos que dado que cualquier rayo de un punto al interior o en la frontera de  $P$  cruza a lo más a  $k + 1$  aristas y por lo tanto un  $k$ -módem colocado al interior o en la frontera ilumina a  $P$ .  $\square$

**Lema 5.** Sea un polígono ortogonal  $P$  con a lo más  $k + 5$  vértices. Existe un punto  $q_l$  en la arista más a la izquierda  $e_l$  y un punto  $q_r$  en la arista más a la derecha  $e_r$  que lo ilumina.

*Demostración.* Supongamos que colocamos a nuestro  $k$ -módem en  $q_l$ . Entonces si  $P$  tiene a lo más  $k + 4$  vértices por el lema 5  $P$  es iluminado sólo con el  $k$ -módem en  $q_l$ . Si por el contrario  $P$  tiene  $k + 5$  vértices entonces  $k$  es impar ya que un polígono ortogonal tiene siempre un número par de vértices. Ahora, fijémonos en  $e_l$  si este es incidente a una arista horizontal distinta de  $e_b$  o  $e_t$ , a saber  $f$ . Si en cambio  $e_l$  incide en una arista extrema horizontal, hagamos  $f$  cualquier otra arista distinta de  $e_b$  o  $e_t$  que por el número de aristas siempre existe. En cualquier caso sea  $\ell(f)$  una línea horizontal que pasa por  $f$  y sea  $q_l = \ell(f) \cap e_l$ . Como cada rayo de  $\mathcal{R}(q_l)$  cruza a lo más  $k + 2$  aristas, además de que ningún rayo de  $\mathcal{R}(q_l)$  cruza a  $f$  y como  $f$  no es una arista extrema de  $P$  entonces cada rayo en  $\mathcal{R}(q_l)$  cruza a lo más  $k + 1$  aristas y por lo tanto un módem en  $q_l$  ilumina  $P$ .  $\square$

Una familia particular de polígonos es la de polígonos que terminan en escalera, estos polígonos se definen como sigue:

**Definición 41.** Un polígono que termina en escalera es un polígono ortogonal con  $n$  aristas que tiene a  $v_0v_2$ ,  $v_{n-4}v_{n-2}$ ,  $v_1v_3$  o  $v_{n-3}v_{n-1}$  como arista.

A estos polígonos los podemos llamar *polígono que termina en escalera* izquierdo, derecho, superior o inferior según el vértice que contengan.

Los lemas anteriores son ciertos para polígonos ortogonales, pero el siguiente lema sólo lo es para polígonos que terminan en escalera. Con la siguiente imagen esperamos que esto sea un poco más claro.

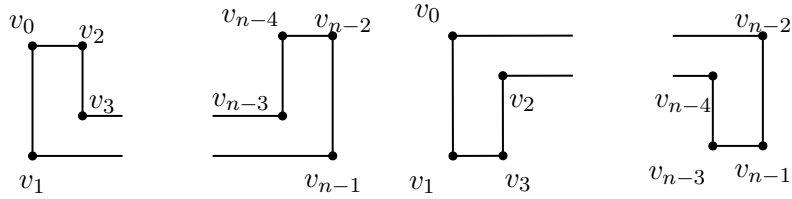


Figura 4.4: Ejemplos de *polígono que termina en escalera*: superior izquierdo, superior derecho, inferior izquierdo e inferior derecho; nombrándolos de izquierda a derecha.

**Lema 6.** Sea  $P$  un polígono que termina en escalera con  $k+7$  vértices, con  $k \geq 3$  impar. Si  $P$  es (superior o inferior) izquierdo entonces existe un punto  $q_l$  en su arista más a la izquierda  $e_l$  que ilumina a  $P$  con un  $k$ -módem. Lo mismo puede decirse si  $P$  es (superior o inferior) derecho. Entonces existe un punto  $q_r$  en la arista  $e_r$  que ilumina a  $P$  al colocar en él un  $k$ -módem.

*Demostración.* Por simetría, sólo es necesario revisar un caso. Veamos entonces que el lema es cierto para un polígono que termina en escalera superior derecha. Sea  $f$  la arista horizontal que contiene a  $v_{n-1}$  y sea  $f'$  la arista vertical que incide con  $f$  a la izquierda. Además sea  $e_R = v_{n-4}v_{n-2}$ ,  $e_m = v_{n-4}v_{n-3}$ ,  $e_L$  la arista horizontal que incide en  $v_{n-3}$  y  $e'_L$  la arista vertical que incide en el lado izquierdo de  $e_L$ .

Podemos ordenar las aristas horizontales por su coordenada  $y$  de arriba a abajo y cuando dos aristas coinciden en coordenada  $y$  etiquetamos a la arista a la derecha con la etiqueta mayor. También consideremos a  $e_{3t}$  la tercer arista horizontal contando de arriba hacia abajo y a  $e_{3b}$  la tercera arista horizontal contando a partir de  $n-1$  contando de abajo hacia arriba. Como  $e_{3b}$  no puede estar arriba de  $e_R$  y  $e_{3t}$  no está por debajo de  $f$  tenemos cinco casos:

**Caso 1:**  $e_{3b} = e_R$  (Ver figura 4.5).

En este caso elijamos  $q_r = v_{n-2}$ , y sea  $\ell(e_R)$  la línea que pasa por  $e_R$ , sea  $r^a \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo arriba de  $\ell(e_R)$ , y  $r^b \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por debajo de  $\ell(e_R)$ . Es importante notar que en este caso  $e_R$  no es una arista extrema de  $P$ . Como  $r^a$  cruza no más de  $k+4$  aristas y en particular  $r^a$  no cruza las aristas  $e_R$ ,  $e_m$ , o  $e_L$ , a lo más puede cruzar  $k+1$  aristas.

Como  $e_{3b} = e_R$ , sólo tenemos 3 aristas horizontales,  $e_L$ ,  $e_R$ , y  $f$ , abajo o sobre  $\ell(e_R)$  y por lo tanto sólo 4 aristas verticales  $e'_L$ ,  $f'$ ,  $e_m$ , y  $e_r$ , abajo de  $\ell(e_R)$ . Pero de estas aristas  $r^b$  no cruza a  $e_R$ . De hecho  $r^b$  puede cruzar a lo más una arista de entre  $e_r$ ,  $f$ , y  $f'$ , y no

más de dos aristas de entre  $e_m, e_L$ , y  $e'_L$ . Por lo que  $r^b$  tiene que cruzar no más de  $k + 1$  aristas para iluminar  $P$  por lo que  $q_r$  es una posición válida para un  $k$ -módem para  $P$ .

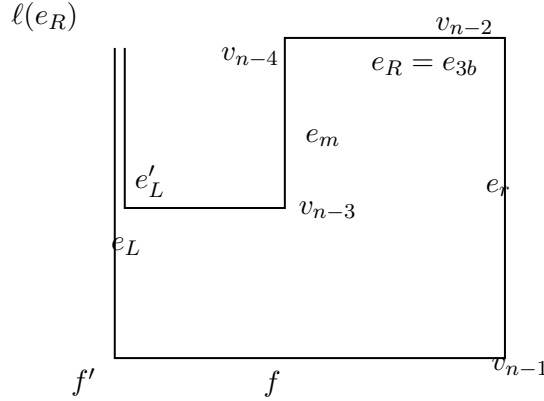


Figura 4.5: Caso 1:  $e_{3b} = e_R$ .

**Caso 2:**  $e_{3b}$  está entre  $e_R$  y  $e_L$  (Ver figura 4.6):

Si  $\ell(e_{3b})$  es la línea que pasa por  $e_{3b}$  tomemos  $q_r = \ell(e_{3b}) \cap e_r$ . Sea  $r^a \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo arriba de  $\ell(e_{3b})$ , y  $r^b \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por debajo de  $\ell(e_{3b})$ . Si  $e_R = e_t$ , entonces  $r^a$  cruza sólo a  $e_R$  o no cruza a  $e_R$ . Además,  $r^a$  cruza no más de una arista de entre  $e_r, e_b, e_l$ , y la segunda arista horizontal. Si  $e_R \neq e_t$ , entonces  $r^a$  cruza no más de  $k + 4$  aristas, y por lo tanto  $r^a$  no cruza más de una arista de entre  $e_R$  y  $e_m$ . En cualquier caso  $r^a$  no cruza las aristas  $e_{3b}$  y  $e_L$ , por lo que le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar.

Al igual al caso anterior sólo hay 3 aristas horizontales debajo o sobre  $\ell(e_{3b})$  a saber  $e_L, e_{3b}$ , y  $f$  debajo o sobre  $\ell(e_{3b})$  y por lo tanto sólo hay 4 aristas verticales  $e'_L, f', e_m$  y  $e_r$  debajo de  $\ell(e_{3b})$ . Por lo tanto,  $r^b$  puede cruzar más de una arista de entre  $e_r, f$  y  $f'$  y no más de dos aristas de entre  $e_m, e_L$  y  $e'_L$ . Por lo que  $r^b$  tiene que cruzar no más de  $k + 1$  aristas para iluminar  $P$ . Por lo tanto colocando un  $k$  módem en  $q_r$  iluminamos a  $P$ .

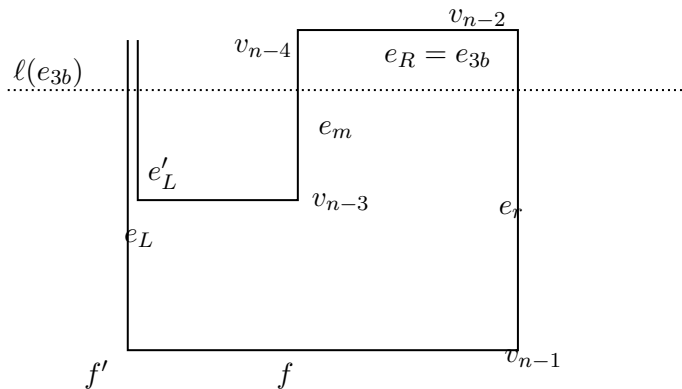


Figura 4.6: Caso 2:  $e_{3b}$  está entre  $e_R$  y  $e_L$ .

**Caso 3:**  $e_{3b} = e_L$  (Ver figura 4.7)

Sea  $\ell(e_L)$  la línea que pasa por  $e_L$  y  $q_r = \ell(e_L) \cap e_r$ . Además sea  $r^a \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por arriba de  $\ell(e_L)$  y  $r^b \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por debajo de  $\ell(e_L)$ . Si  $e_R = e_t$ , entonces  $r^a$  cruza  $e_R$  o no cruza  $e_R$ . Más aún,  $r^a$  cruza sólo una arista de entre  $e_r, e_b, e_l$  y la segunda arista horizontal. Si  $e_R \neq e_t$ , entonces  $r^a$  cruza a lo más  $k + 4$  aristas y de manera similar a los casos anteriores  $r^a$  cruza a lo más a una arista de entre  $e_R$  y  $e_m$ . En cualquier caso,  $r^a$  no cruza  $e_L$  ni la penúltima arista horizontal, por lo que sólo quedan  $k + 1$  aristas por cruzar y por lo tanto  $r^b$  cruza no más de  $k + 4$  aristas. Además,  $r^b$  no puede cruzar  $e_m, e_L$ , y la segunda arista horizontal, por lo que le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar y entonces si colocamos un  $k$ -módem en el punto  $q_r$  podemos iluminar  $P$ .

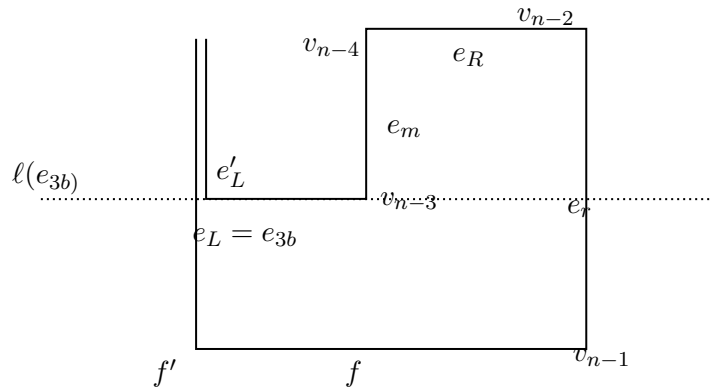


Figura 4.7:  $e_{3b} = e_L$ .

**Caso 4:**  $e_{3b}$  está por debajo de  $e_L$  y  $e_{3t}$  está por arriba de  $e_L$  (Ver figura 4.8).

Sea  $\ell(e_L)$  una línea que pasa por  $e_L$  y  $q_r = \ell(e_L) \cap e_r$ . Sea  $r^a \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por arriba de  $\ell(e_L)$ , y  $r^b \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por debajo de  $\ell(e_L)$ . Como  $r^a$  cruza no más de  $k + 4$  aristas y  $r^a$  no cruza  $e_L$ , la penúltima arista horizontal y  $e_{3b}$ , a  $r^a$  le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar. Además  $r^b$  no cruza más de  $k + 4$  aristas y  $r^b$  no cruza  $e_L$ , la penúltima arista horizontal o  $e_{3t}$  por lo que le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar. Por lo tanto si colocamos un  $k$ -módem en el punto  $q_r$  podemos iluminar  $P$ .

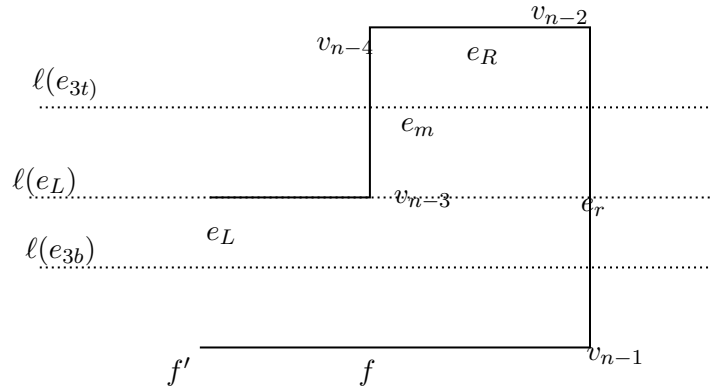


Figura 4.8:  $e_{3b}$  está por debajo de  $e_L$  y  $e_{3t}$  está por arriba de  $e_L$ .

**Caso 5:**  $e_{3t}$  está entre  $e_L$  y  $f$  (Ver figura 4.9)

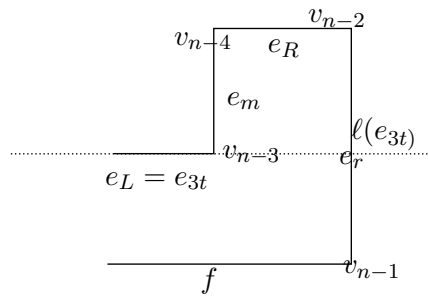


Figura 4.9:  $e_{3t}$  está entre  $e_L$  y  $f$ .

Sea  $\ell(e_{3t})$  la línea que pasa por  $e_{3t}$  y  $q_r = \ell(e_{3t}) \cap e_r$ . Sea  $r^a \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por arriba de  $\ell(e_{3t})$ , y sea  $r^b \in \mathcal{R}(q_r)$  cualquier rayo por debajo de  $\ell(e_{3t})$ . Si  $e_R = e_i$  tenemos que  $r^a$  cruza  $e_R$  o no lo hace. Como además  $r^a$  sólo cruza una arista de entre  $e_r$ ,  $e_b$ ,  $e_l$  y la segunda arista horizontal, entonces a  $r^a$  le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar. Si  $e_R \neq e_f$ , tenemos que  $r^a$  cruza no más de  $k + 4$  aristas, pero  $r^a$  no cruza más de una arista de entre  $e_R$  y  $e_m$ . Como  $r^a$  no cruza  $e_{3r}$  o la penúltima arista. A  $r^a$  le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar. Similarmente  $r^b$  no cruza más de  $k + 4$  aristas y no puede cruzar  $e_{3r}$ , la segunda arista horizontal o  $e_m$  por lo que a  $r^b$  le quedan  $k + 1$  aristas por cruzar. Por lo tanto si colocamos un  $k$ -módem en el punto  $q_r$  podemos iluminar  $P$ . Con esto terminamos nuestra prueba.  $\square$

Al igual que en el capítulo anterior podemos usar menos módems para iluminar a nuestro polígono  $P$ . Debemos de subdividir a  $P$  en sub-polígonos. Para hacer esto consideremos lo siguiente: Sea  $3 \leq i \leq n - 3$  par. Separando  $P$  mediante la línea vertical  $\ell_{i-1}$  que pasa por  $v_{i-1}$  nos da como resultados polígonos ortogonales monótonos en  $x$ . Llamémoslos  $P_L$  y  $P_R$ . Notemos que  $\ell_{i-1}$  es una línea vertical que pasa por la arista vertical de  $P$  cuyos extremos son  $v_{i-2}$  y  $v_{i-1}$ . Ahora, sea  $f$  la arista horizontal de  $P$  atravesada por  $\ell_{i-1}$  en el punto  $p_{i-1}$ .



Si la arista horizontal de  $P$  que incide en  $v_{i-2}$  pertenece a  $H_L(\ell_i)$ ,  $P_L = P \cap H_L(\ell_i)$  agregando la arista  $s_L = v_{i-3}p_{i-1}$ , y  $P_R = P \cap H_R(\ell_i)$  agregando la arista  $s_R = v_{i-1}p_{i-1}$ .  
 O  $P_L = P \cap H_L(\ell_i)$  agregando la arista  $s_L = v_{i-1}p_{i-1}$ , y  $P_R = P \cap H_R(\ell_i)$  añadiendo la arista  $s_R = v_{i-1}p_{i-1}$ .

Por como fueron construidos a partir de  $P$  tanto  $P_L$  como  $P_R$  son polígonos ortogonales, monótonos en  $x$  y no tienen más de dos vértices que coinciden en su coordenada  $x$ . Además sin considerar a  $\ell_i$  ambos polígonos son disjuntos, por lo que para iluminar a  $P$  podemos unir un conjunto de puntos que iluminen a  $P_L$  y a un conjunto de puntos que iluminen a  $P_R$ . De igual forma un conjunto de puntos que iluminen a  $P$  también iluminarían a  $P_L$  y a  $P_R$ .

**Lema 7.** Cada polígono ortogonal monótono  $P$  en  $x$  con  $2k + 6$  vértices puede ser iluminado con un solo  $k$ -módem.

*Demostración.* Si  $k$  es par, al separar a  $P$  apoyándonos en el vértice  $v_{k+3}$  tenemos dos polígonos ortogonales monótonos con  $k + 4$  vértices y entonces un  $k$ -módem colocado en  $v_{k+3}$  ilumina ambos. Si por el contrario  $k$  es impar, separando verticalmente a  $P$  apoyándonos en el vértice  $v_{k+2}$  tenemos que el polígono  $P_L$  tiene  $k + 3$  vértices y el otro dos vértices más es decir,  $k + 5$  vértices con lo que dado que la arista más a la izquierda en  $P_R$  está contenido en la línea que lo separa y por el lema 6 existe un punto  $q$  en la arista más a la izquierda en  $P_R$  tal que colocando un  $k$ -módem ilumina a  $P_R$ . Pero este punto también ilumina a  $P_L$ , esto por los Lemas 4 y 5.  $\square$

**Teorema 14.** Dado un polígono ortogonal con  $n$  vértices  $P$ , bastan  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems para iluminarlo.

*Demostración.* Podemos rotar a  $P$  con el fin de que sea  $x$ -monótono. Entonces lo dividimos de forma recursiva. Sea  $i = 2k + 4$ . Separando  $P$  mediante la línea vertical  $\ell_{i-1}$  que pasa por  $v_{i-1}$ . Notemos que  $P_L$  tiene  $2k + 6$  vértices y  $P_R$  tiene  $n - (2k - 6) + 2$  vértices, por lo tanto dividiendo así nuestro polígono tenemos que al final de nuestro proceso recursivo el número de sub-polígonos será de  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$  todos estos con no más de  $2k + 6$  vértices cada uno. Por el lema 7, cada polígono necesita sólo un módem para iluminarse. Por lo tanto dado un polígono ortogonal con  $n$  vértices  $P$  bastan  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems.  $\square$

La cota de  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$  es justa, veamos un ejemplo mostrado en [AFMFP<sup>+</sup>18].

**Lema 8.** Para toda  $k$  par, existe un polígono monótono ortogonal en  $x$  que requiere  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems para ser iluminado. Para toda  $k$  impar, existe un polígono monótono ortogonal en  $x$  que requiere  $\lceil \frac{n-2}{2k+6} \rceil$   $k$ -módems para ser iluminado.

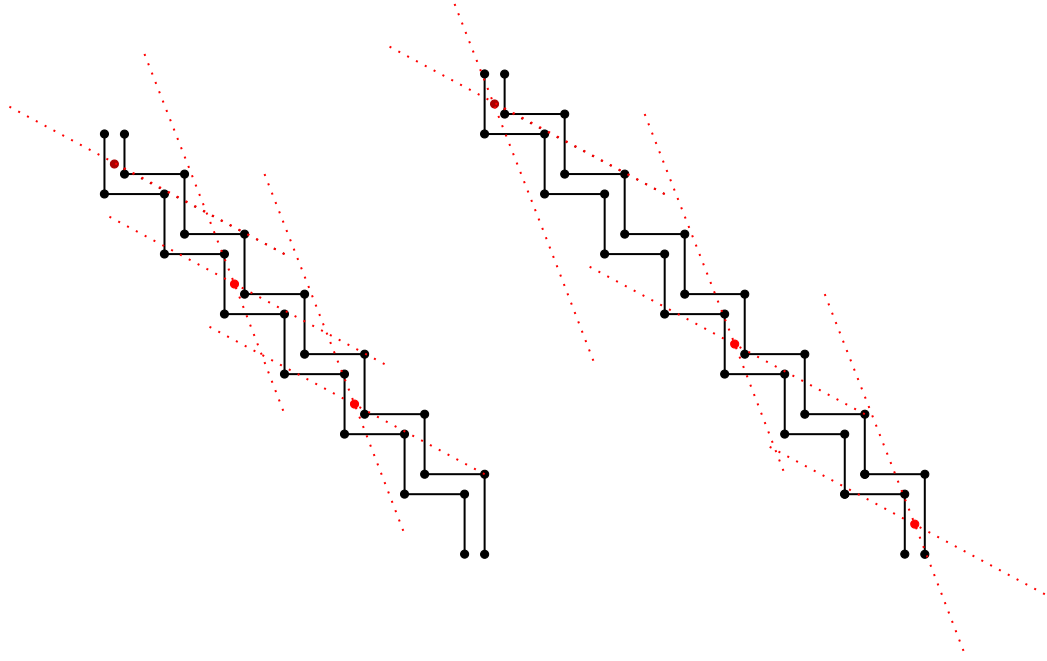


Figura 4.10: Ejemplos de construcción de cotas inferiores para polígonos monótonos ortogonales para  $k = 2$  y  $k = 3$  respectivamente.

*Demostración.* Usando métodos similares a los de la figura 4.10 (el izquierdo para  $k$  pares y el derecho para  $k$  impares) podemos dar construcciones similares para polígonos ortogonales monótonos en  $x$ . De aquí en adelante consideraremos a un corredor como el espacio al interior de un polígono monótono ortogonal delimitado por la frontera y dos líneas paralelas que pasen por aristas paralelas.

Ahora, para cada  $k$  colocamos un conjunto de puntos auxiliares de tal manera que las regiones en las cuales estos puntos auxiliares son colocados sean distintas. Por lo tanto, al menos necesitaremos  $t$   $k$ -módems para iluminar a nuestro polígono.

Si  $k$  es par, colocamos nuestro punto auxiliar en medio del  $(k+2)$ -ésimo corredor y así vamos avanzando. Notemos que la región que puede ser cubierta con un  $k$ -módem se extiende a los  $\frac{k}{2}$  corredores vecinos y a una parte del  $(\frac{k+2}{2})$  corredor que se extiende hasta un poco antes de la mitad. Por lo que siguiendo de esta manera, las regiones desde las cuales dos puntos auxiliares pueden ser iluminadas son distintas. Si para un polígono  $P$  se usan  $t$  puntos auxiliares, entonces  $P$  tiene al menos  $1 + (k+2)(t-1)$  corredores. Por lo que,  $n \geq 2(1 + (k+2)(t-1)) + 2$ . Por lo tanto para iluminar a  $P$ , al menos se

requieren  $\left\lceil \frac{n+2k}{2k+4} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-3}{2k+4} \right\rceil$   $k$ -módems. Considerando además que si  $n - 3$  es impar y  $2k + 4$  es par,  $P$  necesita al menos de  $\left\lceil \frac{n-2}{2k+4} \right\rceil$   $k$ -módems.

Si en cambio  $k$  es impar, podemos colocar un punto auxiliar en el  $(k+3)$  corredor e ir así avanzando por el polígono. Como la región que puede ser iluminada por un  $k$ -módem es la misma que con el caso de  $k$  par, sólo añadiendo una arista al  $\left(\frac{k+1}{2}\right)$ -ésimo corredor en ambas direcciones (izquierda y derecha). Análogamente la región acaba un poco antes de la mitad del  $\left(\frac{k+3}{2}\right)$ -ésimo corredor. Por lo que siguiendo de esta manera, las regiones desde las cuales dos puntos auxiliares pueden ser iluminadas son distintas y similarmente al caso con  $k$  par. Si para un polígono  $P$  se usan  $t$  puntos auxiliares, entonces  $P$  tiene al menos  $1 + (k+3)(t-1)$  corredores. Por lo que,  $n \geq 2(1 + (k+3)(t-1)) + 2$  y para iluminar a  $P$  se requieren al menos del máximo valor que puede tomar  $t$ , es decir  $\left\lceil \frac{n+2k+2}{2k+6} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-3}{2k+6} \right\rceil$   $k$ -módems. Considerando además que si  $n - 3$  es impar y  $2k + 6$  es par,  $P$  necesita al menos de  $\left\lceil \frac{n-2}{2k+6} \right\rceil$   $k$ -módems.  $\square$

En [AFMFP<sup>+</sup>18] los autores prueban además que:

**Lema 9.** Existe un polígono ortogonal monótono en  $x$  con  $n$  vértices que requiere de  $\left\lceil \frac{n-2}{6} \right\rceil$  1-módems para ser iluminado.

**Lema 10.** Para  $k \geq 3$  impar y un polígono ortogonal monótono en  $x$  con  $2k + 8$  vértices, existe un punto  $q \in P$  tal que  $P$  es iluminado por un  $k$ -módem si colocamos un  $k$ -módem en  $q$ .

Por los lemas 10, 8 y 7 junto al teorema 14 podemos concluir que:

**Teorema 15.** Sea  $P$  un polígono ortogonal monótono en  $x$ . Para  $k = 1$  y para todo  $n$  par,  $\left\lceil \frac{n-2}{2k+4} \right\rceil$   $k$ -módems son en ocasiones necesarios y siempre suficientes para iluminar  $P$ . Para  $n \geq 3$  impar,  $\left\lceil \frac{n-2}{2k+6} \right\rceil$   $k$ -módems son en ocasiones necesarios y siempre suficientes para iluminar  $P$ .

## Capítulo 5

# Una cota superior para el problema de los $k$ -módems

### 5.1. Antecedentes

En esta sección trataremos el lema de corte en  $\mathbb{R}^2$ . Para su prueba utilizaremos el método probabilístico, una técnica que nos sirve para probar la existencia de objetos que puedan interesarnos. Este método a grandes rasgos consiste en que para probar la existencia de objetos con ciertas propiedades, damos una muestra de un espacio de objetos en la cual la probabilidad de que seleccionemos aleatoriamente un objeto sea positiva, lo que nos indica que el espacio muestra debe de contener un objeto que cumpla con la propiedad que buscamos. Un ejemplo es que si existe una probabilidad positiva de recuperarse de complicaciones de una enfermedad, entonces debe de haber personas que se recuperan de complicaciones de dicha enfermedad.

Las ideas que mostramos en este capítulo pueden rastrearse a algunos de los primeros artículos de Clarkson [CS89]. La primera prueba del lema de corte sería presentada por Chazelle y Friendman e independiente, por Matoušek [Mat93]. La primera de ellas, la prueba de Chazelle y Friendman [CF90] presentaba un lema de corte óptimo para cualquier dimensión. En este capítulo presentamos una prueba que ilustra los mismos principios que se exponen en [CF90], sin embargo no puede generalizarse a dimensiones arbitrarias, esta prueba sería presentada en principio por Matoušek en [Mat93].

Primero necesitamos dar algunas definiciones:

**Definición 42.** Decimos que un triángulo generalizado es el espacio geométrico en el plano, que se encuentra definido por la intersección de tres semiplanos cerrados.

Notemos que un triángulo generalizado puede ser acotado o no, o incluso ser sólo un punto.

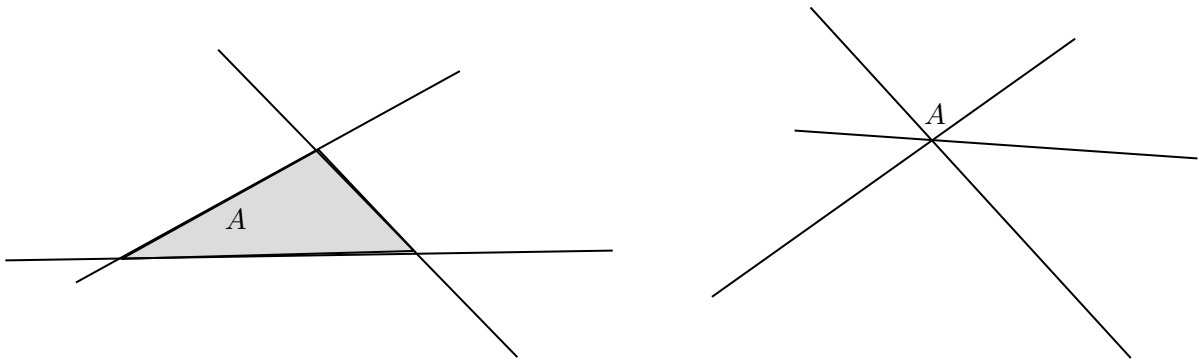


Figura 5.1: Triángulos generalizados y los semiplanos que los acotan.

**Definición 43.** Un corte en  $\mathbb{R}^2$  es una subdivisión del plano en triángulos generalizados.

Sin más, el lema de corte trata de:

**Lema 11 (lema del corte).** Sea  $L$  un conjunto de  $n$  líneas en el plano y sea  $r$  un parámetro que cumple con,  $1 < r < n$ . Entonces el plano puede dividirse en  $t$  triángulos generalizados  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t$  de forma que cada  $\Delta_i$  sea intersecado por a lo más  $\frac{n}{r}$  líneas de  $L$  y además  $t \in O(r^2)$ .

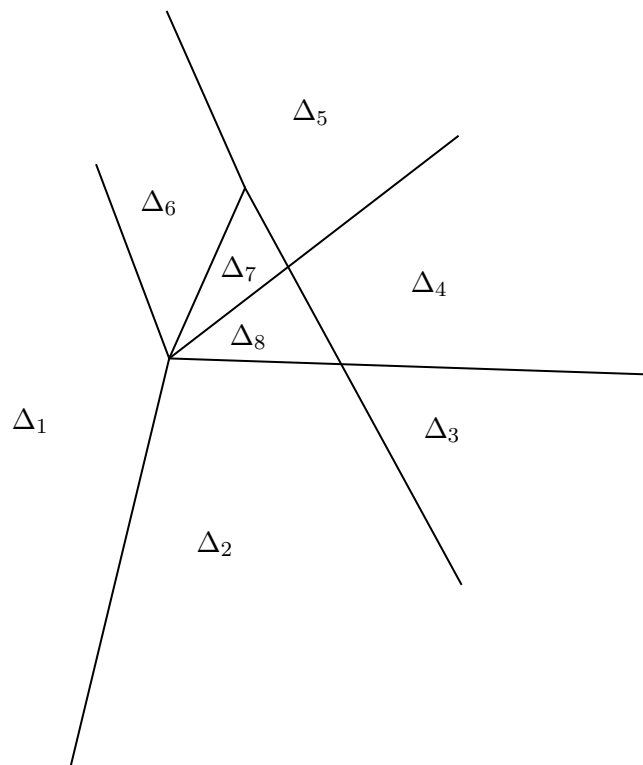


Figura 5.2: División del plano en triángulos generalizados.

## 5.2. Un versión débil del lema de corte

Para comenzar con la prueba del lema de corte primero probaremos una versión del mismo con una cota sobre el número de triángulos generalizados un poco más débil, esto usando el método probabilístico. Aquí probaremos que cada conjunto de  $n$  líneas tiene un  $\frac{1}{r}$ -corte que tiene  $O(r^2 \log^2 n)$  triángulos.

Veamos primero por que necesitamos al menos  $\Omega(r^2)$  triángulos.

**Teorema 16.** El lema de corte es asintóticamente óptimo cuando  $r \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Consideremos  $n$  líneas en posición general, esto es, que tres líneas distintas no coinciden en un punto y no hay líneas paralelas. Si añadimos un punto en el infinito, entonces tenemos que esta es una gráfica en una esfera, como cada línea interseca a las demás y nunca 3 o más se intersecan en un punto, tenemos que hay  $V = \frac{n(n+1)}{2} + 1$  vértices (uno por cada par de líneas y el punto que agregamos), además el número de aristas es  $A = n^2$ , ya que cada línea es dividida en  $n$  partes por las demás líneas.

Usando la fórmula de Euler el número de caras  $f$  es:

$$\begin{aligned}
 f &= a - v + 2 \\
 &= n^2 - \left( \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) + 2 \\
 &= n^2 - \frac{n^2 - n}{2} + 1 \\
 &= \frac{n^2 + n}{2} + 1 \\
 &\geq \frac{n^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Considerando ahora al triángulo  $\Delta_i$  cuyo interior es intersecado por  $k \leq \frac{n}{r}$  líneas ( $k \geq 1$ ), con un razonamiento análogo al anterior, podemos ver que  $\Delta_i$  puede dividirse a lo más en  $\binom{k}{2} + k + 1 \leq 2k^2$  celdas. Y como cada triángulo  $\Delta_i$ , de nuestra división tiene al menos una celda en su interior, usando el teorema 5.1 y el hecho de que hay  $\binom{k}{2} + k + 1 \leq 2k^2$  celdas, el número de triángulos debe de ser al menos  $n^2/4k^2 = \Omega(r^2)$ . Por lo que el lema de corte es asintóticamente óptimo para  $r \rightarrow \infty$

□

Ahora, de nuestro conjunto de líneas  $\mathcal{L}$  podemos seleccionar una muestra aleatoria  $S \subset \mathcal{L}$ . Haciendo  $s$  selecciones aleatorias con remplazo tomando una línea en cada prueba. Por lo tanto como una línea puede ser seleccionada mas de una vez,  $|S| \leq s$ .

Consideremos el arreglo de líneas  $S$ . Para tener un arreglo conformado únicamente por triángulos generalizados podemos agregar a  $S$  algunas diagonales como se muestra a continuación:

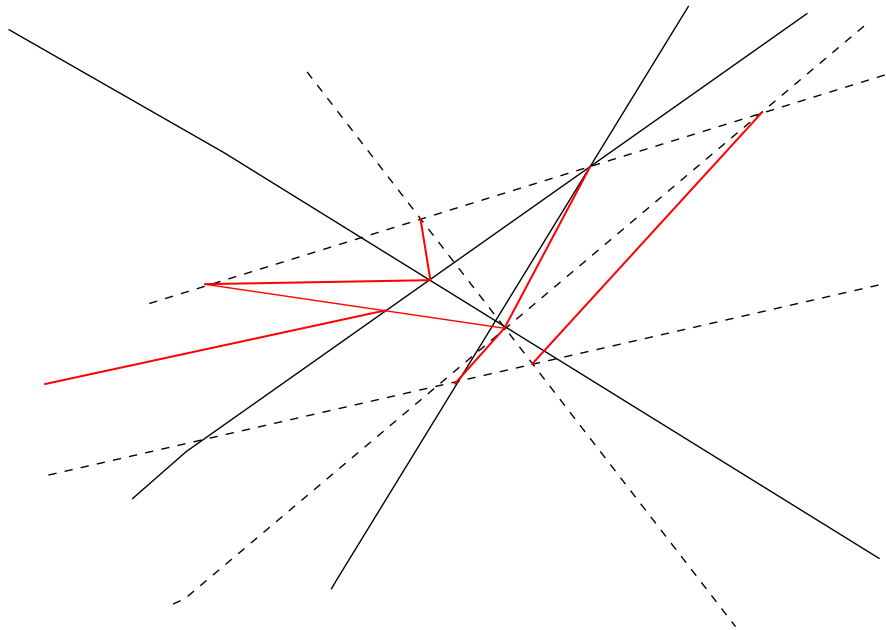


Figura 5.3: En rojo las líneas auxiliares y punteado la muestra original de líneas.

Este procedimiento crea  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t$  triángulos generalizados con  $t = O(s^2)$  (por un argumento similar a la prueba del teorema 5.1).

**Lema 12.** Para  $s = 6r \ln n$ , lo siguiente se cumple con probabilidad positiva:  $\Delta_i$  es un  $\frac{1}{r}$ -corte para  $\mathcal{L}$ ; es decir, el interior de cada  $\Delta_i$  no es intersecado más de  $\frac{n}{r}$  líneas de  $\mathcal{L}$ .

Para probar el lema 12 definamos unos triángulos auxiliares que nos servirán para probar la existencia de una muestra de líneas que es el corte que necesitamos:

**Definición 44.** Decimos que un triángulo  $T$  es peligroso si su interior es intersecado por al menos  $k = n/r$  líneas de  $\mathcal{L}$ .

**Definición 45.** Decimos que un triángulo  $T$  es interesante para un conjunto de  $n$  líneas  $\mathcal{L}$  si puede aparecer en la triangulación de una muestra  $S \subseteq \mathcal{L}$ .

*Demostración.* Si fijamos un triángulo peligroso arbitrario  $T$ , la probabilidad de que ninguna línea de  $S$  intercepte el interior de  $T$  es a lo más  $(1 - \frac{k}{n})^s$ . Usando la desigualdad  $1 + x \leq e^x$ , tenemos que:

$$1 - \frac{k}{n} \leq e^{-\frac{k}{n}}. \quad (5.2)$$



Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^s &\leq e^{-\frac{ks}{n}} = \\ &= e^{-6lkn} \\ &= n^{-6}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Además dado que cualquier triángulo formado por el arreglo de líneas  $\mathcal{L}$  tiene sus lados formados por líneas o segmentos de líneas de  $\mathcal{L}$  el número de triángulos es menor a  $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} < n^6$ .

Por lo tanto existe una muestra aleatoria  $S_0$  con probabilidad positiva que interseca los interiores de todos los triángulos peligrosos simultáneamente, es decir ninguno de los triángulos formados por la muestra  $S_0$  es peligroso.

□

Este lema implica la versión débil del lema de corte, pues dada la probabilidad de que la muestra  $S_0$  es positiva, entonces existe al menos una muestra  $S$  que nos de la colección de triángulos que queremos. Por lo tanto podemos concluir que:

**Lema 13** (lema del corte). Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de  $n$  líneas en el plano y sea  $r$  un parámetro que cumple con,  $1 < r < n$ . Entonces el plano puede dividirse en  $t$  triángulos generalizados  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t$  de forma que cada  $\Delta_i$  sea intersecado por a lo más  $\frac{n}{r}$  líneas de  $L$ , y además  $t \in O(r^2)$ .

Como mencionamos anteriormente el lema de corte fue probado en [Mat93] para  $r \log r$ , por lo que sólo basta con elegir a  $s = m(r \log r)$  en vez de  $m(r \log n)$ , para una constante apropiada  $m$  y también con probabilidad positiva existe una muestra  $S_0$  que cumple con no tener triángulos peligrosos en la triangulación derivada. Esta cota es muy útil para  $r$  pequeña, por ejemplo  $r$  constante, dado que nos muestra que el número de triángulos en un  $\frac{1}{r}$ -corte es acotado independientemente del número de líneas  $n$ .

### 5.3. Una cota justa para el lema de corte

Ahora, veamos que efectivamente el número de triángulos que necesitamos es de orden  $O(r^2)$ , es decir, el lema de corte nos proporciona una cota justa para el número de triángulos que nos dan un  $n/k$ -corte para nuestras líneas. Supongamos que lidiamos con un conjunto  $\mathcal{L}$  de  $n$  líneas que se encuentra en posición general. (Si este no es el caso, podemos modificar el conjunto de líneas, construir nuestro  $\frac{1}{r}$ -corte, regresar las  $n$  líneas a su posición original, obteniendo de esta manera un  $\frac{1}{r}$ -corte para el conjunto  $\mathcal{L}$  de líneas).

También necesitamos dar algunas definiciones y observaciones que nos serán de gran utilidad.

**Definición 46.** Dado  $L$  un conjunto fijo de  $n$  líneas en el plano; supongamos que no tenemos líneas verticales en  $\mathcal{L}$ . El nivel de un punto  $x \in \mathbf{R}^2$  es el número de líneas en  $L$  que se encuentran estrictamente debajo de  $x$ .

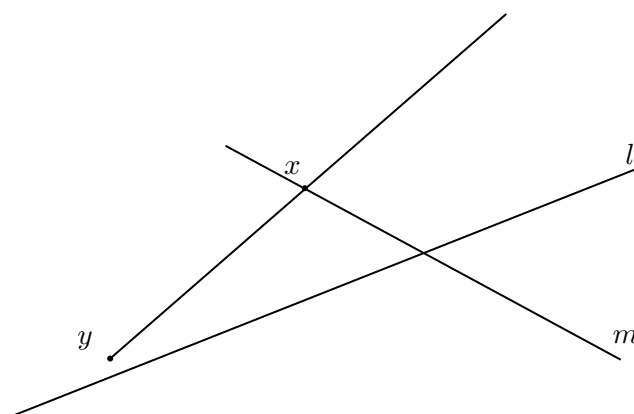


Figura 5.4: El segmento de recta  $\overline{xy}$  tiene nivel 2, pero el nivel del punto  $x$  es 1.

Es importante notar que el nivel de los puntos de una celda abierta del arreglo de  $n$  líneas  $\mathcal{L}$  es el mismo, también pasa lo mismo para un segmento de recta abierto relativo. Además se puede dar el caso que el nivel de los extremos de un segmento de recta difiera del de la parte abierta relativa del segmento, pues puede suceder por ejemplo que una línea que se encontraba debajo del segmento sea la que define el punto extremo al intersecarla.

**Definición 47.** Definimos el nivel  $k$  del arreglo de  $n$  líneas  $\mathcal{L}$ , donde  $0 \leq k < n$ , como el conjunto  $E_k$  de segmentos de rectas o aristas del arreglo  $\mathcal{L}$  con nivel exactamente  $k$  sin considerar los extremos.

Podemos observar que el nivel  $k$  se forma girando cada vez que se llega a un punto extremo de una arista.

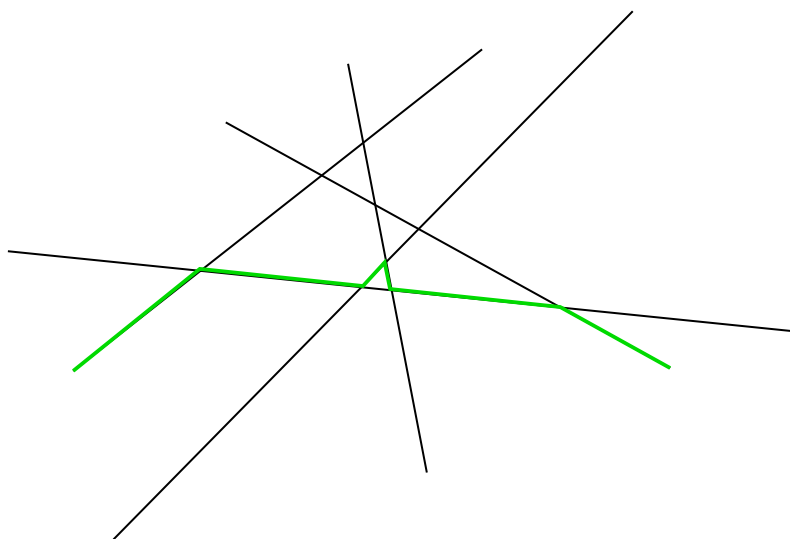


Figura 5.5: Arreglo de líneas con el 2-nivel señalado en verde.

Las aristas de  $E_k$  más sus puntos extremos forman una línea poligonal  $\mathcal{M}$  monótona respecto al eje  $x$ , por lo tanto cada línea vertical que interseca a  $\mathcal{M}$  lo hace sólo en un punto.

**Definición 48.** Si numeramos  $e_0, e_1, \dots, e_t$  a las aristas de  $E_k$  de tal manera que las aristas estén ordenadas respecto a su coordenada  $x$ ; tenemos que  $e_0$  y  $e_t$  son rayos no acotados. Podemos fijar un punto  $p_i$  en el interior de  $e_i$ . Para un parámetro  $2 \leq q \in \mathbb{Z}$ , definimos la  $q$ -simplificación del nivel  $k$  como la línea poligonal que contiene la parte izquierda de  $e_0$  hasta el punto  $p_0$ , los segmentos de línea  $p_0p_q, p_qp_{2q}, \dots, p_{[(t-1)/q]}p_t$ , y la parte a la derecha de  $e_t$  a partir del punto  $p_t$ .

Una observación importante es que la  $q$ -simplificación no tiene más de  $\frac{t}{q} + 2$  aristas. Abajo mostramos una  $q$ -simplificación con  $t = 4, q = 4$ .

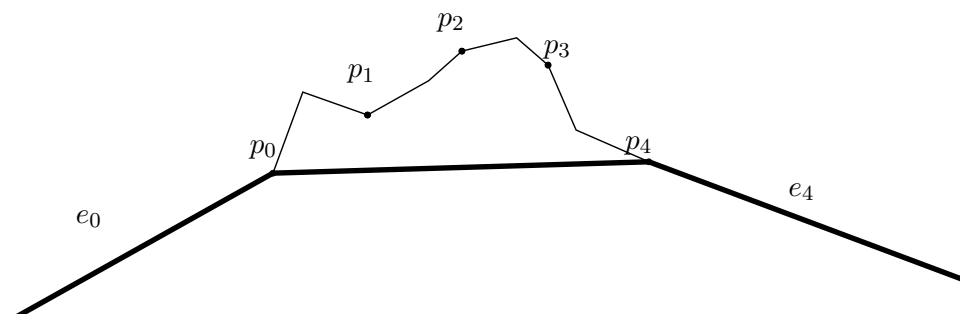


Figura 5.6: 4-simplificación de los segmentos de línea  $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$

Con estas definiciones y observaciones podemos probar los siguiente lemas que nos serán de gran utilidad.

**Lema 14.** [N1] La porción  $\Pi$  del nivel  $k$  (vista como línea poligonal) entre los puntos  $p_j$  y  $p_{j+q}$  es intersecada a lo más por  $q + 1$  líneas de  $L$ .

*Demostración.* Como cada línea de  $L$  que interseca a  $\Pi$  contiene una de las aristas  $e_j, e_{j+1}, \dots, e_{j+q}$ , entonces  $\Pi$  es intersecada a lo más por  $q + 1$  líneas de  $L$ .  $\square$

**Lema 15.** [N2] El segmento  $p_j p_{j+q}$  es intersecado a lo más por  $q + 1$  líneas de  $L$ .

*Demostración.*  $\Pi$  es conexo, entonces las líneas intersecando su cierre convexo deben de intersecar también a  $\Pi$ , puesto que esta cadena poligonal cumple con que sus extremos pertenecen a la frontera del cierre convexo, ya que  $\Pi$  es monótono respecto al eje  $x$ . Además de que  $p_j p_{j+q}$  está contenido en el cierre convexo de  $\Pi$ .  $\square$

**Lema 16.** [N3] La  $q$ -simplificación del nivel  $k$  está contenido en el subconjunto del plano que se encuentra entre los niveles  $k - \lceil q/2 \rceil$  y  $k + \lceil q/2 \rceil$ .

*Demostración.* Si recorremos algún segmento  $p_j p_{j+q}$  de la  $q$ -simplificación comenzamos en un punto extremo, que tiene nivel  $k$ . Nuestro nivel se modifica únicamente cuando cruzamos por líneas de  $L$ . Más aún cuando llegamos a  $p_{j+q}$  volvemos al nivel  $k$ . Por lo tanto, para ir del nivel  $k$  al nivel  $k + i$  y regresar al nivel  $k$  necesitamos haber realizado al menos  $2i$  cruces de líneas de  $L$ . Con esto y considerando al lema 15 tenemos que:

$$2i \leq q + 1$$

y por lo tanto tenemos nuestro resultado, dado que:

$$i \leq \lfloor (q + 1)/2 \rfloor = \lceil q/2 \rceil.$$

Con lo que la  $q$ -simplificación del nivel  $k$  está contenido en la cinta que se encuentra entre los niveles  $k - \lceil q/2 \rceil$  y  $k + \lceil q/2 \rceil$ .  $\square$

Con las definiciones y lemas que hemos presentado podemos ahora probar el lema de corte para líneas en posición general.

*Demostración.* Sea  $r$  nuestro parámetro. Si  $r$  es al menos proporcional al número de líneas  $n$  de  $L$  es decir,  $r = \Omega(n)$ , podemos realizar un 0-corte de  $\mathcal{L}$  triangulando las celdas que son delimitadas por  $\mathcal{L}$ . Esta triangulación tiene  $O(n^2)$  triángulos, ya que podemos pensar las celdas como intersecciones de semiplanos, por lo que las celdas son convexas y el número de diagonales necesarias para triangular un polígono convexo es menor al número de vértices que son a lo más  $\binom{n}{2}$ .

Por lo tanto supongamos que  $r$  es mucho más pequeño que  $n$ .

Sea  $q = \lceil n/10r \rceil$ . Dividamos los niveles  $E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$  en  $q$  grupos: esto es dividir los niveles de tal manera que el  $i$ -ésimo grupo contenga los niveles  $E_j$  con  $j$  congruente a  $i$  módulo  $q$ .

Como el número total de aristas es  $n^2$ , existe un índice  $i$  con la propiedad de que el  $i$ -ésimo grupo contiene no más de  $n^2/q$  aristas. Supongamos que dejamos fijo a tal  $i$ . Ahora, consideremos sólo a los niveles  $i, q+i, 2q+i, \dots$  y usemos estos niveles para construir nuestro  $\frac{1}{r}$ -corte.

Sea  $P_j$  nuestra  $q$ -simplificación del nivel  $jq+i$ . Si  $E_{jq+i}$  tiene  $m_j$  aristas, entonces  $P_j$  tiene a lo más  $m_j/q + 3$  aristas, además el número total de aristas de la  $q$ -simplificación  $P_j$  con  $j = 0, 1, \dots, \lfloor (n-1)/q \rfloor$ , puede estimarse con  $n^2/q^2 + 3(n/q + 1) = O(n^2/q^2)$ .

Notemos que las cadenas poligonales  $P_j$  y  $P_{j+1}$  con  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-2}{q} \rfloor$ , nunca se intersecan más allá de coincidir en sus vértices: si se intersecaran más allá de sus vértices, entonces existiría una  $j = 0, 1, \dots, \lfloor (n-1)/q \rfloor$  y un vértice  $p \in P_j$ , con un nivel  $qj+i$ , arriba de la cadena poligonal  $P_{j+1}$ , contradiciendo el lema 16.

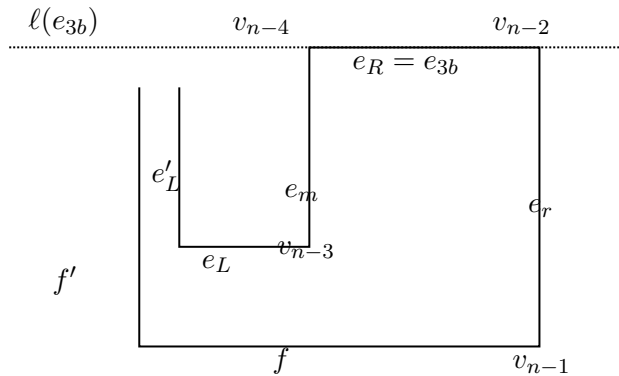


Figura 5.7: Descomposición vertical de las cadenas poligonales  $P_j$ .

Ahora, formemos la descomposición vertical de las cadenas  $P_j$ . Es decir, extendamos segmentos de líneas verticales en los vértices de  $P_j$  hacia arriba y abajo hasta que lleguemos a las cadenas poligonales  $P_{j-1}$  y  $P_{j+1}$ .

Podemos observar que al extender los vértices hacia arriba la parte superior de la cadena superior  $P_{\frac{n-1}{q}}$  se divide en una unidad más del número de vértices que contiene, como el número de vértices que contiene es  $O(n^2/q^2)$  entonces el número de triángulos generalizados también es  $O(n^2/q^2)$ . Lo mismo sucede con la tira inferior abajo de  $P_0$ .

Ahora, consideremos una tira distinta de la superior o inferior, supongamos que está delimitada por las cadenas poligonales  $P_j$  y  $P_{j+1}$ . El número de trapecoides es a lo más el número de vértices de  $P_j$  más el número de vértices  $P_{j+1} + 1$ , es decir, es  $O(n^2/q^2)$ . Como tenemos un número constante de tiras este procedimiento nos da que el número total de trapecoides es también  $O(n^2/q^2) = O(r^2)$ .

Ahora, veamos cuántas líneas intersecan a cada trapecoide. Afirmamos que las líneas de  $\mathcal{L}$  que lo intersecan no pasan de  $\frac{n}{r}$ .

Para probar la afirmación anterior demos un vistazo a un trapecoide  $T$  en la tira que se encuentre entre  $P_j$  y  $P_{j+1}$  con  $j \in 0, \dots, \lfloor (n-1)/q \rfloor$ . Por el lema 16 se encuentra entre los niveles  $qj + i - \lceil q/2 \rceil$  y  $q(j+1) + i + \lceil q/2 \rceil$ , por lo que sus lados verticales no intersecan a más de  $3q$  líneas.

La parte superior de  $T$  es parte de una arista de  $P_j$ , y por el lema 14 es intersecado por no más de  $q + 1$  líneas. Lo mismo sucede para la parte inferior de  $T$ .

Con lo que tenemos que el número de líneas que intersecan al trapecoide  $T$  es menor a

$$3q + 3q + 2q + 2q = 10q \leq \frac{n}{r}.$$

Para concluir podemos dar nuestro  $\frac{1}{r}$  corte al dividir cada uno de nuestros trapecoides en triángulos añadiendo su diagonal en el caso de las tiras superior e inferior, estos ya son triángulos generalizados.

Por lo tanto esto concluye nuestra prueba del lema del corte. □

## 5.4. Cotas superiores usando el lema de corte

Ahora que hemos probado el lema de corte para el plano, podemos empezar a usarlo para acotar el número de  $k$ -módems que necesitamos para iluminar el plano en presencia de  $n$  segmentos de líneas.

**Teorema 17.** Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de  $n$  líneas en el plano y  $r > 0$ . El número de  $k$ -módems para iluminar el plano en presencia de  $\mathcal{L}$  es  $O(n^2/k^2)$ .

*Demostración.* Por el lema del corte, tenemos que existe un  $\frac{1}{(n/k)}$ -corte para el conjunto de líneas  $\mathcal{L}$  con un tamaño  $O(n^2/k^2)$ . Como cada triángulo sólo es intersecado por a lo más  $k$  líneas, un  $k$ -módem es suficiente para iluminarlo. Por lo tanto el número de  $k$ -módems que necesitamos para iluminar el plano es  $O(n^2/k^2)$ .  $\square$

Ahora que ya hemos dilucidado una cota para el número de  $k$ -módems necesarios para iluminar el plano en presencia de  $n$  líneas, es importante preguntarnos si existe una mejor cota o si podemos acotar el número de  $k$ -módems para el caso de polígonos.

Consideremos el caso de un polígono  $\mathcal{P}$  con  $n$  lados si extendemos sus aristas hasta formar líneas por el teorema anterior necesitamos  $O(n^2/k^2)$   $k$ -módems para iluminarlo, sin embargo podemos dar una mejor cota si consideramos la versión para líneas del lema de corte con esta podemos ver que necesitamos  $O(n/k)$   $k$ -módems. En [BS95] los autores usan representación de subconjuntos de  $R^2$  que tienen como propiedades que el espacio que usan y el tiempo que toma localizar de puntos e intersecciones de líneas son de complejidad asintótica  $O(1)$ .

**Teorema 18.** Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de  $n$  líneas en el plano con un total de  $\mathcal{A}$  intersecciones y  $r > 0$ . Entonces existe un  $\frac{1}{r}$ -corte para el conjunto  $\mathcal{L}$  de tamaño  $O\left(r + A\left(\frac{r}{n}\right)^2\right)$ .

*Demostración.* La prueba puede consultarse en [BS95].  $\square$

Por lo tanto si consideramos a un polígono  $\mathcal{P}$  como un conjunto de  $n$  segmentos de líneas que se intersecan en sus extremos, por el teorema 18 tenemos un  $\frac{1}{(n/k)}$ -corte de tamaño  $O\left(\frac{n}{k} + n\left(\frac{n^2}{k^2} \frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{n}{k}\right)$ .

Considerando además que las cajas usadas para probar el teorema 18 son trapezoides generalizados y que solo hace falta un  $k$ -módem para iluminar cada trapezoide obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 19.** Sea  $\mathcal{P}$  un polígono con  $n$  vértices. El número de  $k$ -módems necesarios para iluminar  $\mathcal{P}$  es a lo más  $O(n/k)$ .

## 5.5. Un algoritmo para iluminar segmentos ortogonales

Es momento de presentar un algoritmo  $O(n \log n)$  para iluminar el plano con  $k$ -módems en la presencia de  $\mathcal{L}$  un conjunto de  $n$  segmentos ortogonales de líneas que no se intersecan.

Para esto supongamos que nuestro conjunto  $\mathcal{L}$  está contenido en un rectángulo  $\mathcal{R}$ . Lo que pretendemos es dar una partición de  $\mathcal{R}$  en polígonos escalera, donde cada uno de estos polígonos no tenga más de un  $k$ -módem, ya que como veremos un  $k$ -módem basta para iluminar estos polígonos. Definamos entonces a un polígono escalera.

**Definición 49.** Un polígono escalera o simplemente una escalera es un polígono ortogonal  $\mathcal{P}$  tal que  $\mathcal{P}$  es acotado debajo por un segmento horizontal que llamaremos *Piso*( $\mathcal{P}$ ).  $\mathcal{P}$  es acotado por la derecha por un segmento vertical llamado *Elevación*( $\mathcal{P}$ ). Además el punto extremo izquierdo de *Piso*( $\mathcal{P}$ ) y el punto extremo superior de *Elevación*( $\mathcal{P}$ ) están unidos por una cadena poligonal a la que nombraremos *Escalones*( $\mathcal{P}$ ).

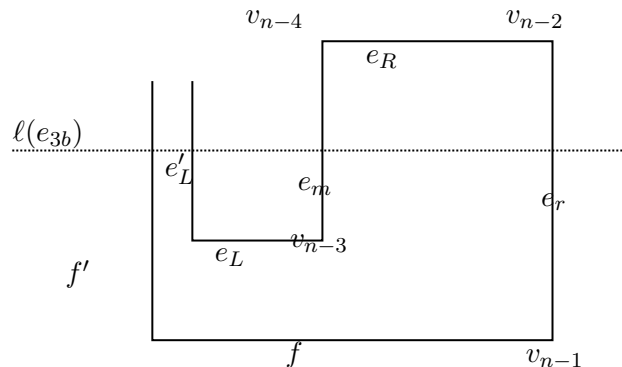


Figura 5.8: Polígono tipo escalera.

Es importante notar que cualquier línea paralela al eje  $x$  o al eje  $y$  si cruza por completo a una escalera  $\mathcal{P}$  entonces la parte en dos escaleras.

**Definición 50.** Denotamos  $\text{Arriba}(\mathcal{P}, \ell)$  a la escalera formada por la intersección de  $\mathcal{P}$  con el semiplano superior definido por  $\ell$ , donde  $\ell$  es un línea horizontal. Denotamos  $\text{Abajo}(\mathcal{P}, \ell)$  a la escalera formada por la intersección de  $\mathcal{P}$  con el semiplano inferior definido por  $\ell$ , donde  $\ell$  es un línea horizontal.



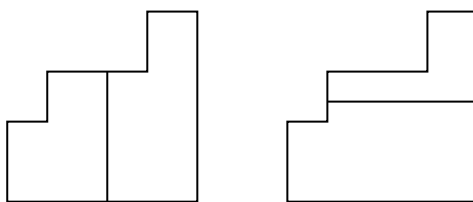


Figura 5.9: Una línea ortogonal que cruza por completo una escalera la divide en dos escaleras.

**Definición 51.** Denotamos  $Derecha(P, \ell)$  a la escalera formada por la intersección de  $P$  con el semiplano derecho definido por  $\ell$ , donde  $\ell$  es una línea vertical. Denotamos  $Izquierda(P, \ell)$  a la escalera formada por la intersección de  $P$  con el semiplano izquierdo definido por  $\ell$ , donde  $\ell$  es una línea vertical.

## 5.6. Un algoritmo de iluminación del plano en presencia de $n$ segmentos de líneas ortogonales en $O(n \log n)$

Sea  $E$  el conjunto de puntos extremos de los segmentos en  $\mathcal{L}$ , sin incluir los puntos extremos derechos de los segmentos horizontales. El algoritmo  $ParticiónEnEscaleras(\mathcal{L})$  toma como entrada un rectángulo  $\mathcal{R}$  que contenga a  $\mathcal{L}$  y produce como resultado una partición de  $\mathcal{R}$  en escaleras.

Inicialmente  $R$  es la única escalera en nuestra partición, usamos una línea de barrido horizontal  $\ell$  que va de arriba a abajo, iniciando en la parte superior de  $R$  y va deteniéndose en cada punto de  $E$  para revisar si es necesario refinar la partición.

El algoritmo funciona de tal forma que las líneas que no son intersecadas por la línea de barrido y que se encuentran arriba de esta ya han sido procesadas y sólo falta procesar las restantes partes en la parte inferior.

Para procesar las escaleras usamos dos procedimientos a los que llamaremos  $CrossingCut$  y  $OverflowCut$ .

### 5.6.1. El procedimiento $OverflowCut$

Una de las razones por las cuales nos vemos obligados a partir una escalera es que el número de segmentos de  $\mathcal{L}$  que intersecan a la escalera es muy alto, esto es cuando el número de segmentos que interseca a nuestra escalera es más de  $k$ , entonces en este caso el procedimiento  $OverflowCut$  es llamado.

Supongamos  $P$  es nuestra escalera y llegamos a un punto donde  $k$  segmentos de  $\mathcal{L}$  la intersecan.

OverflowCut primero inicia reemplazando  $P$  por  $\text{Arriba}(P, \ell)$ .

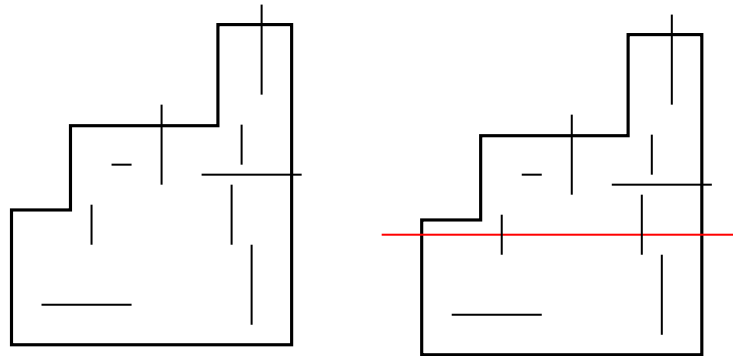


Figura 5.10: Realizando OverflowCut con  $k = 7$  cuando no más de  $\lfloor k/2 \rfloor$  segmentos intersecan a  $\ell$ .

Si es más de  $\lfloor k/2 \rfloor$  segmentos intersecan a  $\ell$ , lo que se hace es que se buscan líneas verticales que dividan la parte de abajo en escaleras que en su parte superior contengan menos de  $\lfloor k/2 \rfloor$  intersecciones con segmentos de  $\mathcal{L}$ .

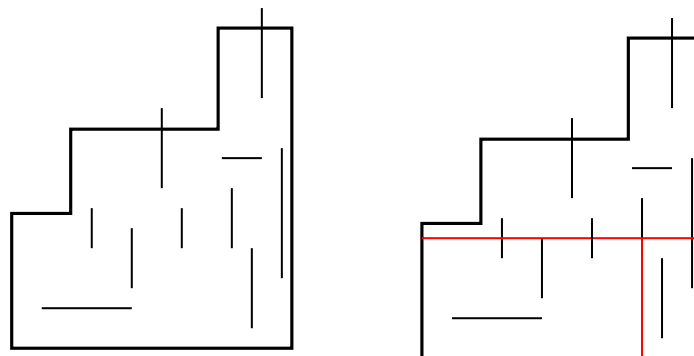


Figura 5.11: Realizando OverflowCut con  $k = 7$  cuando más de  $\lfloor k/2 \rfloor$  segmentos intersecan a  $\ell$ .

### 5.6.2. El procedimiento CrossingCut

Ahora, si cuando llegamos al siguiente punto a procesar todavía no intersecamos  $k$  o más segmentos pero nos topamos con el segmento  $s \in \mathcal{L}$  que cruza a nuestra escalera  $P$  de nuestra partición (es decir, interseca al menos a 3 escaleras); Supongamos que las escaleras que interseca son  $P_1, P_2, \dots, P_m$  para  $2 \leq i \leq m - 1$  y unir a  $\text{Abajo}(P_i, l)$  con  $P_m$ . Lo que hacemos en este caso es dejar la escalera más a la izquierda intacta y a las escaleras  $P_2, P_3, \dots, P_{m-1}$  las partimos usando la línea  $s$  dejando a las escaleras  $\text{Arriba}(P_2, s), \text{Arriba}(P_3, s), \dots, \text{Arriba}(P_{m-1}, s)$  intactas mientras que unimos a

$\text{Abajo}(P_2, s), \text{Abajo}(P_3, s), \dots, \text{Abajo}(P_{m-1}, s)$  con  $P_m$ . Podemos notar que el número de escaleras no cambia. Un ejemplo es el de la figura 5.12.

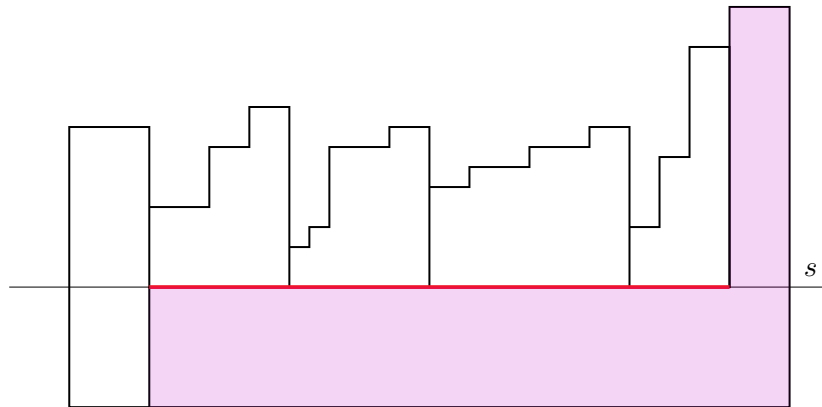


Figura 5.12: Procesando un conjunto de escaleras atravesadas por un segmento de línea horizontal  $s$ .

### 5.6.3. Analizando la complejidad del algoritmo ParticiónEnEscaleras

Comenzamos con  $R$  un rectángulo que encierra a los segmentos de líneas ortogonales, encontrar este rectángulo no resulta muy difícil, pues sus límites son dados por las coordenadas extremas de nuestros segmentos es decir, es  $O(n)$ .

Un punto importante a considerar es que siempre mantenemos a los segmentos en  $\mathcal{L}$  ordenados de derecha a izquierda y manteniendo una distinción entre los que se encuentran intersectando a nuestra línea de barrido en todo momento y los demás segmentos que no la intersectan.

Para procesar cada una de las paradas de nuestro algoritmo tenemos tres casos.

**CASO I:** La línea de barrido se detiene en un punto superior de una línea vertical, en este caso añadimos este segmento a nuestros segmentos que intersectan a nuestra escalera  $P$ . Si los segmentos que intersectan a  $P$  son  $k$ , usamos entonces a nuestro procedimiento `OverflowCut` para procesar la escalera.

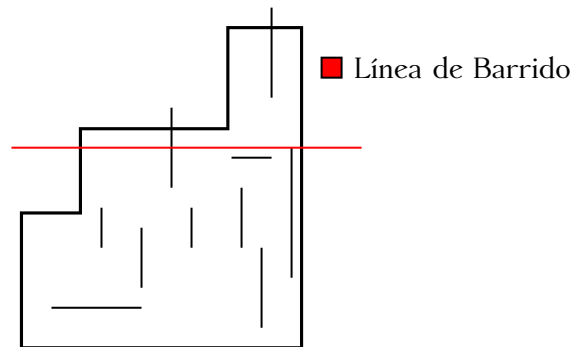


Figura 5.13: Línea de barrido encuentra un nuevo segmento vertical.

**CASO 2:** En este caso lo que sucede es que nuestra línea de barrido se detiene en la parte inferior de una vertical y basta con actualizar el conjunto de líneas en  $P$  que intersecan a la línea de barrido.

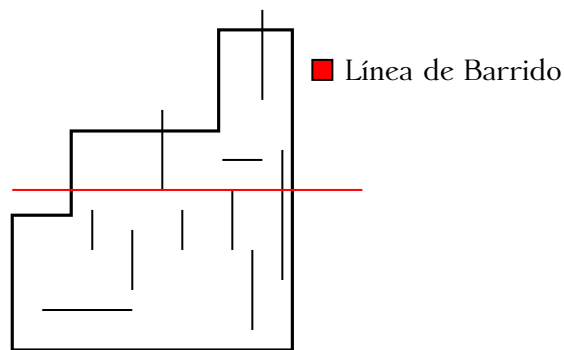


Figura 5.14: Línea de barrido encuentra el extremo final de un segmento vertical.

**CASO 3:** La línea de corte se detiene en un segmento horizontal, es decir detecta un punto izquierdo de un segmento. Nos fijamos en el segmento y determinamos a cuántas escaleras interseca si son más de tres entonces realizamos un CrossingCut y de ser necesario realizamos un OverflowCut si se requiere no solo en  $P$  sino en cualquier otra escalera con puntos extremos de  $s$ .

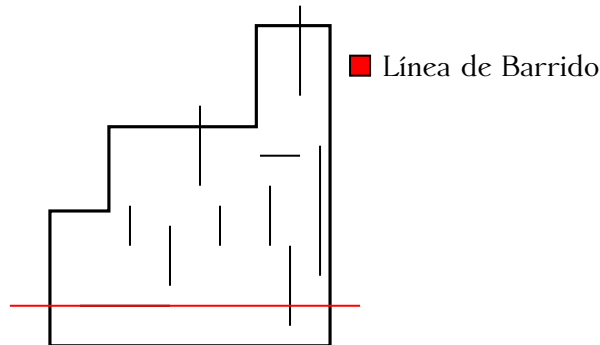


Figura 5.15: Línea de barrido encuentra un nuevo segmento horizontal.

Afirmamos que este algoritmo nos da una partición en escaleras de tal forma que cada una de estas escaleras no es intersecado por más de  $k$  segmentos de  $\mathcal{L}$ , con lo cual bastaría un  $k$ -módem en la intersección del piso y la elevación de cada escalera para iluminarlo.

**Lema 17.** Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de  $n$  segmentos ortogonales que no se intersecan y sea  $\mathcal{P}'$  el conjunto de los puntos extremos de  $\mathcal{L}$ , exceptuando el punto izquierdo de los segmentos verticales. Entonces el número de veces que se ocupa OverflowCut por el algoritmo ParticiónEnEscaleras( $\mathcal{L}$ ) es a lo más  $|\mathcal{P}'|/\lceil k/2 \rceil$ .

*Demostración.* Consideremos a una escalera  $P$  formada tras ejecutar ParticiónEnEscaleras( $\mathcal{L}$ ). Como  $P$  fue creado después de ejecutar un OverflowCut, entonces Escalones( $P$ ) era intersecado por no más de  $\lfloor k/2 \rfloor$  segmentos verticales de  $\mathcal{L}$ .

Otras modificaciones realizadas a  $P$  fueron hechas mediante repeticiones del procedimiento CrossingCut, que agrega aristas a Escalones( $P$ ). Estas aristas horizontales que se agregan a los Escalones( $P$ ) son segmentos o partes de segmentos pertenecientes a  $\mathcal{L}$ , con lo que podemos asegurar que no son intersecados por otro segmento. Por lo que a lo más  $\lfloor k/2 \rfloor$  segmentos verticales de  $\mathcal{L}$  cruzan por completo a  $P$ .

Además si OverflowCut es llamado para procesar a  $P$ , Arriba( $P, \ell$ ) se convierte en una escalera de la partición y ya no se modifica más.

Por lo que estos segmentos también intersecan a Arriba( $P, \ell$ ) y de estos no más de  $\lfloor k/2 \rfloor$  lo cruzan completamente. Por lo tanto al menos  $\lceil k/2 \rceil$  puntos en  $\mathcal{P}'$  están contenidos en Arriba( $P, \ell$ ) y consecuentemente el número total de llamadas a OverflowCut es a lo más  $|\mathcal{P}'|/\lceil k/2 \rceil$ .  $\square$

**Teorema 20.** Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de  $n$  segmentos ortogonales que no se intersecan. Entonces el número de  $k$ -módems necesarios para iluminar el plano en presencia de  $\mathcal{L}$  es a lo más  $6\frac{n}{k} + 1$ . Los puntos donde deben de colocarse los  $k$ -módems se pueden encontrar en  $O(n \log n)$ .

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el número de segmentos verticales en  $\mathcal{L}$  es menor que  $n/2$ , ya que si no simplemente podemos rotar el plano  $\pi/2$ .

Sea  $\mathcal{P}'$  el punto conjunto de puntos extremos de  $\mathcal{L}$ , sin considerar a los extremos inferiores de los segmentos verticales.

Con lo cual tenemos que  $|\mathcal{P}'| \leq 3n/2$ . `ParticiónEnEscaleras( $\mathcal{L}$ )` agrega escaleras a la partición sólo cuando se llama al procedimiento `OverflowCut`. Las escaleras añadidas son a lo más dos, la escalera superior y la inferior.

Por el lema 17 tenemos que el número de escaleras es a lo más.

$$2 \lceil |\mathcal{P}'| / \lceil k/2 \rceil \rceil + 1 \leq 6 \frac{n}{k} + 1.$$

Como en cada una de ellas es iluminada solamente por un  $k$ -módem ubicado en la esquina que observa a todos los puntos dentro del polígono. Esto nos hace ver que necesitamos no más de  $6 \frac{n}{k} + 1$   $k$ -módems

Ahora, hay que ver que los puntos en dónde estos módems deben colocarse se puede encontrar en  $O(n \log n)$ , esto es equivalente a dar la partición de  $\mathcal{L}$ .

Para cada escalera en la partición mantenemos las coordenadas de los segmentos verticales y horizontales de arriba a abajo y de izquierda a derecha respectivamente. Por lo tanto podemos encontrar `Arriba( $P, l$ )` y `Abajo( $P, l$ )` en  $O(\log n)$ . Lo mismo sucede con `Derecha( $P, l'$ )` e `Izquierda( $P, l'$ )` en  $O(\log n)$ .

Como el procedimiento `OverflowCut` crea a lo más dos nuevas escaleras a raíz de una, el número de llamadas a este método es a lo más  $O(n/k)$ , esto hace que el total de tiempo requerido por el método sea de  $O(\frac{n}{k} \log n)$ .

Ahora, dado  $m$  escaleras  $P_1, \dots, P_m$  intersecadas por un segmento  $s$ , el número de cortes y uniones entre las escaleras realizadas por el procedimiento `CrossingCut` es de  $(m-2)O(\log n)$ . Las  $m-2$  partes superiores ya no serán procesadas nuevamente y como hay  $O(n/k)$  escaleras, el número total de uniones y separaciones de escaleras mediante `CrossingCut` es  $O(n/k)$ .

Como cada par de unión y separación de escaleras toma  $O(\log n)$ , el tiempo total de las operaciones de `CrossingCut` es  $O(\frac{n}{k} \log n)$ .

Además a partir del tiempo requerido por los procedimientos `CrossingCut` y `OverflowCut` también podemos encontrar en dónde ubicar los  $k$ -módems en no más de  $O(\log n)$ , dado que podemos llevar el orden de las escaleras en la línea de corte.

Por lo tanto el tiempo total de ejecución del algoritmo es:

$$O\left(n \log n + \frac{n}{k} \log n\right) = O(n \log n).$$

□

Veamos ahora cómo podemos aprovechar la posición y la forma de las escaleras devueltas por el procedimiento *ParticiónEnEscaleras* para utilizar  $k$ -módems más efectivamente, en particular si tenemos  $n$  segmentos de líneas necesitamos no más de  $4\frac{n}{k} + \frac{5}{3} k$ -módems y por lo tanto también bastan  $4\frac{n}{k} + \frac{5}{3} k$ -módems para iluminar el plano en presencia de  $n$  segmentos de líneas ortogonales.

Supongamos entonces que  $R$  es un rectángulo que contiene nuestros  $n$  segmentos de recta ortogonales y que al procesarlo con el método *ParticiónEnEscaleras*( $R$ ) resulta en una partición en escalera que llamaremos  $\mathcal{R}$ . Examinando algunos casos en una escalera  $E$  identifiquemos un punto al que llamaremos  $luz(E)$  según la manera en que se creó  $Piso(E)$ .

Tenemos cinco casos:

**Caso 1:** Tenemos que existe una escalera  $E'$  tal que  $Piso(E)$  es la arista horizontal superior de  $E'$ . Este caso lo obtenemos cuando  $Piso(E)$  resulta del método OverflowCut y  $Piso(E)$  interseca no más de  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  segmentos de nuestro conjunto de segmentos de líneas. Denotamos por  $luz(E)$  al punto en  $Piso(E)$  a una distancia  $\epsilon$  suficientemente pequeña a la izquierda del punto extremo inferior derecho de la escalera  $E$ .

**Caso 2:** En este caso tenemos dos escaleras  $E_1$  y  $E_2$  en  $\mathcal{R}$  de manera que  $Piso(E)$  es igual a la unión de la arista horizontal superior tanto de  $E_1$  como de  $E_2$ . Este caso lo obtenemos cuando  $Piso(E)$  es obtenido del método OverflowCut y  $Piso(E)$  interseca más de  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  segmentos de nuestro conjunto de segmentos de líneas. Denotamos por  $luz(E)$  al punto en  $Piso(E)$  en la intersección de  $E_1$  y  $E_2$  con  $E$ .

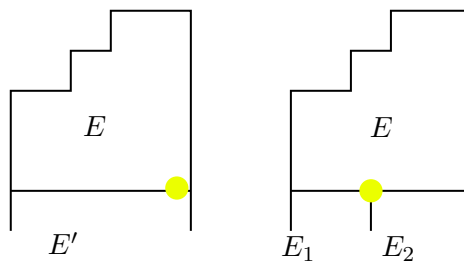


Figura 5.16: Caso 1 y Caso 2 respectivamente.

**Caso 3:** Tenemos que existe una escalera  $E'$  tal que  $Piso(E)$  es un sub-segmento en los escalones de  $E'$  y el extremo inferior derecho de  $E$  coincide con el punto extremo derecho de un escalón de  $E'$ . Este caso lo obtenemos cuando  $Piso(E)$  resulta del método CrossingCut. Denotamos por  $luz(E)$  al punto donde el segmento inferior derecho de  $E$  coincide con el punto extremo derecho de un escalón de  $E'$ .

**Caso 4:** Tenemos que existe una escalera  $E'$  tal que  $Piso(E)$  es un sub-segmento en los escalones de  $E'$  y el extremo inferior derecho de  $E$  no coincide con el punto extremo derecho de un escalón de  $E'$ . Este caso lo obtenemos cuando  $Piso(E)$  resulta del procedimiento CrossingCut. Denotamos por  $luz(E)$  al punto en  $Piso(E)$  a una distancia  $\epsilon$  suficientemente pequeña a la izquierda del punto extremo inferior derecho de la escalera  $E$ .

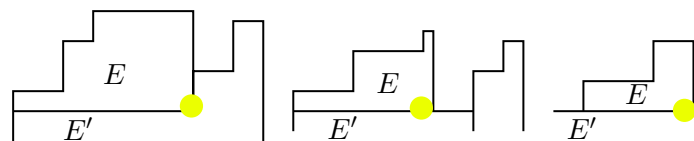


Figura 5.17: Casos 3,4,5 respectivamente.



**Caso 5:** En este caso  $Piso(E)$  es un sub-segmento del segmento horizontal más abajo (con coordenada  $y$  menor) de  $R$ . Este caso se tiene cuando  $Piso(E)$  no resulta de ningún método. Denotamos por  $luz(E)$  al punto en  $Piso(E)$  a una distancia  $\epsilon$  suficientemente pequeña a la derecha del punto extremo inferior izquierdo de la escalera  $E$ .

Al conjunto de todas las luces para las escaleras en  $\mathcal{R}$  lo llamaremos *conjuntoLumínico*( $\mathcal{R}$ ). Con esto establecido podemos pasar ahora a probar que efectivamente si  $m$  es el número de escaleras devueltas por  $ParticiónEnEscaleras(\mathcal{R})$  necesitamos no más de  $\frac{2}{3}m + 1$   $k$ -módems para iluminar el plano.

**Lema 18.** Sea  $m$  el número de escaleras en  $\mathcal{R}$ . Entonces existe un subconjunto de *conjuntoLumínico* con no más de  $\frac{2}{3}m + 1$  de puntos tal que podemos iluminar el plano colocando  $k$ -módem en cada uno de estos puntos.

*Demostración.* Consideremos dos puntos  $p, q$  en *conjuntoLumínico*( $\mathcal{R}$ ). Decimos que  $p$  y  $q$  son adyacentes si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (C1) Existe una escalera  $E$  en  $\mathcal{R}$  tal que  $p$  y  $q$  están en la frontera de  $E$ .
- (C2) Existen segmentos horizontales  $s, r$  en  $E$  que contengan a  $p$  y a  $q$  respectivamente. Cumpliendo que no existan puntos del *conjuntoLumínico* en  $s$  a la derecha de  $p$  y no existan puntos del *conjuntoLumínico* en  $r$  a la izquierda de  $q$ .
- (C3) Los segmentos  $s$  y  $r$  son consecutivos en el conjunto de segmentos horizontales cuando los ordenamos de arriba hacia abajo.

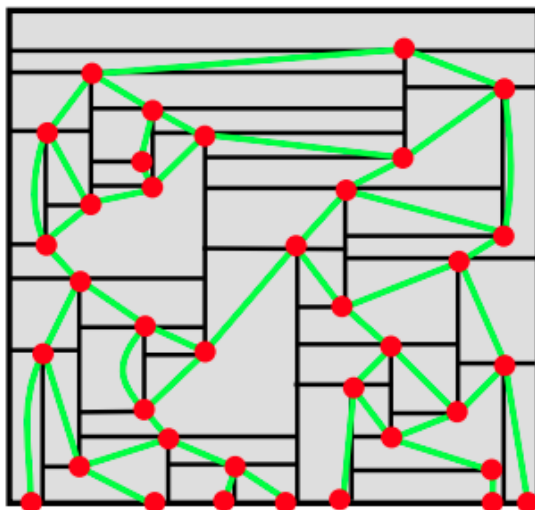


Figura 5.18: Ejemplo de todos los casos en una partición en escaleras y su grafica de adyacencias. [DHT15]

Ahora, podemos formar una gráfica  $G$  cuyos vértices sean los elementos del *conjuntoLumínico*( $\mathcal{R}$ ) y las aristas que indican cuáles vértices son adyacentes. Esta gráfica tiene características interesantes, por ejemplo el conjunto de elementos del *conjuntoLumínico*( $\mathcal{R}$ ) correspondientes a una escalera dada inducen siempre un camino. También dado un punto  $p$  en *conjuntoLumínico*( $\mathcal{R}$ ), este punto como vértice en  $G$  tiene un grado no mayor a 3 y entonces por el teorema de Brooks  $G$  es 3-coloreable.

Consideremos  $H$  una subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de puntos de una escalera  $E$  distinta de la escalera cuyo escalón superior es mayor (respecto a la coordenada  $y$ ). Sea  $S$  el conjunto de vértices de  $H$  menos un conjunto de aristas  $I$  tal que si  $e$  y  $d$  son aristas distintas de  $I$ , entonces  $e$  y  $d$  no inciden en algún vértice. Por construcción podemos ver que si colocamos un  $k$ -módem en cada punto de  $S$  podemos iluminar  $E$ .

Por lo tanto, dada una 3-coloración de  $G$ , podemos iluminar cada escalera (distinta de la escalera cuyo escalón superior está en la parte superior del rectángulo  $\mathcal{R}$ ) colocando  $k$ -módems en el conjunto que resulta de remover la clase cromática con mayor número de elementos.  $\square$

**Teorema 21.** Dado un conjunto de  $n$  segmentos ortogonales distintos  $\mathcal{L}$ , el número de  $k$ -módems necesarios para iluminar el plano en presencia de  $\mathcal{L}$  es de no más de  $4\frac{n}{k} + \frac{5}{3}$ . Y encontrar los puntos donde deben de colocarse tales módems no toma más de  $O(n \log n)$ .

*Demostración.* Usando el algoritmo *ParticiónEnEscaleras* obtenemos una partición con no más de  $6\frac{n}{k} + 1$  escaleras y por el lema 18 podemos obtener un conjunto con no más de  $4\frac{n}{k} + \frac{5}{3}$  puntos tales que iluminen el plano al colocar  $k$ -módems en ellos.

Si  $G$  es una gráfica como la referida en la prueba del lema 18 y dado que *ParticiónEnEscaleras* toma  $O(n \log n)$ , tenemos que ver que efectivamente encontrar este conjunto toma  $O(n \log n)$  necesitamos encontrar una 3-coloración en  $O(n \log n)$ . Para hacer esto basta considerar una gráfica dirigida  $D$  donde  $v$  es un vértice de  $D$  si  $v$  pertenece también a *conjuntoLumínico*( $\mathcal{R}$ ) y  $\vec{vw}$  es una arista de  $D$  si  $vw$  es una arista de  $G$  y  $v$  está arriba de  $w$  en  $\mathcal{R}$ . Notemos que el ingrado de esta gráfica dirigida es 2 y por lo tanto podemos dar una 3-coloración en  $O(n)$ .<sup>1</sup>  $\square$

---

<sup>1</sup>Para ver esto podemos mezclar un algoritmo "greedy" recorriendo la gráfica resultante con un algoritmo BDF.[CLRS09]



## Apéndice A

# Notación Asintótica

Cuando hablamos de algoritmos, en particular de algoritmos computacionales es importante tener métodos para compararlos. A los algoritmos los podemos comparar de muchas maneras, por ejemplo: la dificultad para implementarlos en un lenguaje particular de programación, el tiempo que toman en realizar su labor, el espacio en memoria que ocupan o el número de operaciones fundamentales que toman.

Es difícil calcular los recursos exactos que toma cierto algoritmo, pues para este fin hay que considerar que un algoritmo que se ejecuta en dos máquinas distintas no usa el mismo número de recursos, razones para esto pueden ser que la implementación del algoritmo es distinto, por ejemplo los recursos que toma programar un arreglo en el lenguaje C es diferente a los recursos que toma programarlo en Python; esta dificultad entre muchas otras, son para fines teóricos despreciables, por lo que usamos para este propósito el análisis de algoritmos.

El análisis de algoritmos nos brinda herramientas para hacer aproximaciones a los recursos que toman los algoritmos para ejecutarse, esto de entrada nos brinda una manera de buscar mejores algoritmos.

Una herramienta fundamental en el análisis de algoritmos es la notación asintótica, esta notación nos sirve para analizar el algoritmo considerando operaciones en general. Cuando usamos notación asintótica nos preocupamos del uso de recursos de acuerdo a la relación que existe entre el tamaño de la entrada que recibe el algoritmo y su desempeño, dejando de lado los recursos de la máquina, el modelo de computación empleado, etc.

El análisis teórico de los algoritmos usa el análisis asintótico que considera entradas suficientemente grandes de datos donde se ignoran constantes y términos de menor orden. Este enfoque si bien es útil con propósitos teóricos no siempre lo es con los prácticos, por ejemplo las personas que realmente usan los algoritmos o los implementan usan medidas exactas. Podemos ver esto en algoritmos usados en el diseño de motores

gráficos de videojuegos o algoritmos usados para realizar el análisis de cadenas de ADN, donde una constante puede significar tiempos de ejecución adicionales de días o incluso meses.

Podemos analizar una función, o un algoritmo, usando notación asintótica de muchas maneras diferentes. Algunas maneras de realizar esto es analizar un algoritmo por su mejor caso, su peor caso, o el caso promedio. Lo más común es analizar un algoritmo por su peor caso. Por lo general, no se evalúa el mejor caso, porque no tiene mucho sentido planear un algoritmo para esta situación.

Un buen ejemplo de esto son los algoritmos de ordenamiento y búsqueda; específicamente, si tenemos un algoritmo para buscar un elemento en un arreglo. El mejor caso para la mayoría de los algoritmos podría ser tan bajo que sólo requiriese una sola operación. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el elemento que se busca tendrá que ser buscado en el arreglo, incluso podría ser que no estuviera en el arreglo y si no podemos garantizar que nuestro arreglo este ordenado podríamos tener que buscar al elemento en todos los índices. Este es el peor de los casos y para estos casos es que planeamos los algoritmos.

## A.1. Cota superior asintótica

Una cota inferior asintótica para una función  $f$  es una función  $g$  que sirve de cota inferior para  $f$  cuando el argumento tiende a infinito.

Formalmente esto es:

$$O(g(x)) = \{ f(x) : \text{existen } x_0, c > 0 \text{ tales que } \forall x \geq x_0 : 0 \leq |f(x)| \leq c|g(x)| \}$$

es decir, una función  $f(x)$  pertenece a  $O(g(x))$  cuando existe una constante positiva  $c$  tal que a partir de un valor  $x_0$ ,  $f(x)$  no sobrepasa a  $cg(x)$ .

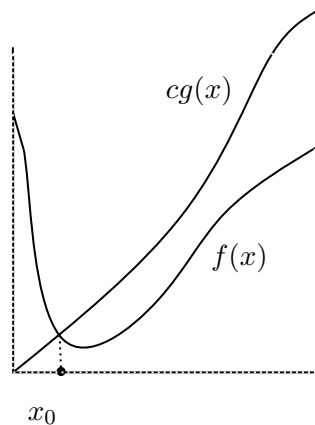


Figura A.1: La función  $f(x)$  pertenece a  $O(g(x))$ .

## A.2. Cota inferior asintótica

Una cota superior asintótica para una función  $f$  es una función  $g$  que sirve de cota inferior para  $f$  cuando el argumento tiende a infinito.

Formalmente esto es:

$$\Omega(g(x)) = \{f(x): \text{existen } x_0, c > 0 \text{ tales que } \forall x \geq x_0 : 0 \leq c|g(x)| \leq |f(x)|\}$$

es decir, una función  $f(x)$  pertenece a  $\Omega(g(x))$  cuando existe una constante positiva  $c$  tal que a partir de un valor  $x_0$ ,  $f(x)$  sobrepasa a todo valor de  $cg(x)$ .

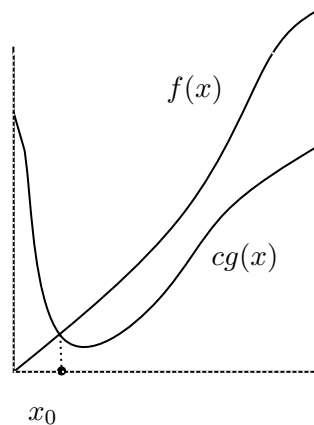


Figura A.2: La función  $f(x)$  pertenece a  $\Omega(g(x))$

## A.3. Cota asintótica justa

La cota ajustada asintótica relaciona a las cotas inferiores y superiores, ya que:

$$f(x) = \Theta(g(x)) \text{ si y sólo si } f(x) = O(g(x)) \text{ y } f(x) = \Omega(g(x))$$

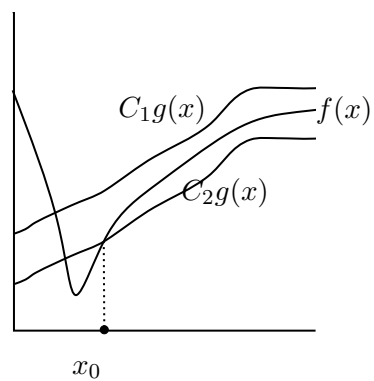


Figura A.3: La función  $f(x)$  pertenece a  $\Theta(g(x))$

# Bibliografía

- [AECSU98] James Abello, Vladimir Estivill-Castro, Thomas Shermer, and Jorge Urrutia. Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlights. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 08(01):25–38, feb 1998.
- [AFMFP<sup>+</sup>18] Oswin Aichholzer, Ruy Fabila-Monroy, David Flores-Peñaloza, Thomas Hackl, Jorge Urrutia, and Birgit Vogtenhuber. Modern illumination of monotone polygons. *Computational Geometry*, 68:101–118, March 2018.
- [Agu13] Joel Aguilar. Iluminación de polígonos ortogonales y simples con birradares. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [Ald13] Israel Aldana. *Vigilancia de galerías de arte con reflectores giratorios*. PhD Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [Ald20] Israel Aldana. Algunas variantes modernas del problema de la galería de arte. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2020.
- [Bar69] J. A. Barnes. Graph Theory and Social Networks: A Technical Comment on Connectedness and Connectivity. *Sociology*, 3(2):215–232, May 1969.
- [BBB<sup>+</sup>10] Brad Ballinger, Nadia Benbernou, Prosenjit Bose, Mirela Damian, Erik D. Demaine, Vida Dujmovi, Robin Flatland, Ferran Hurtado, John Iacono, Anna Lubiw, Pat Morin, Vera Sacristán, Diane Souvaine, and Ryuhei Uehara. Coverage with  $k$ -Transmitters in the Presence of Obstacles. In Weili Wu and Ovidiu Daescu, editors, *Combinatorial Optimization and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, pages 1–15, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer.
- [BBB<sup>+</sup>13] Brad Ballinger, Nadia Benbernou, Prosenjit Bose, Mirela Damian, Erik D. Demaine, Vida Dujmovi, Robin Flatland, Ferran Hurtado, John Iacono, Anna Lubiw, Pat Morin, Vera Sacristán, Diane Souvaine, and Ryuhei Uehara. Coverage with  $k$ -transmitters in the presence of obstacles. *J Comb Optim*, 25(2):208–233, February 2013.
- [BCHM12] Antonio Bajuelos, Santiago Canales, Gregorio Hernandez, and Mafalda Martins. A Hybrid Metaheuristic Strategy for Covering with Wireless Devices. *JOURNAL OF UNIVERSAL COMPUTER SCIENCE*, page 27, 2012.



- [BCKO08] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, and Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer Science & Business Media, March 2008.
- [BM10] Adrian Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, New York, 2008 edition, November 2010.
- [BS95] Mark De Berg and Otfried Schwarzkopf. Cuttings and applications. *Int. J. Comput. Geom. Appl.*, 05(04):343-355, December 1995.
- [CF90] B. Chazelle and J. Friedman. A deterministic view of random sampling and its use in geometry. *Combinatorica*, 10(3):229-249, September 1990.
- [Chv75] V. Chvatal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18(1):39-41, February 1975.
- [CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Third Edition*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.
- [CRCS+94] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, and J. Zaks. Guarding rectangular art galleries. *Discrete Applied Mathematics*, 50(2):149-157, May 1994.
- [CS89] Kenneth L. Clarkson and Peter W. Shor. Applications of random sampling in computational geometry, II. *Discrete Comput Geom*, 4(5):387-421, October 1989.
- [DHT15] Frank Duque and Carlos Hidalgo-Toscano. An Upper Bound on the k-Modem Illumination Problem. *Int. J. Comput. Geom. Appl.*, 25(04):299-308, December 2015.
- [DO11] Satyan L. Devadoss and Joseph O'Rourke. *Discrete and Computational Geometry*. Princeton University Press, Princeton, N.J, May 2011.
- [Foul2] L. R. Foulds. *Graph Theory Applications*. Springer Science & Business Media, December 2012.
- [Gho10] Subir Kumar Ghosh. Approximation algorithms for art gallery problems in polygons. *Discrete Applied Mathematics*, 158(6):718-722, March 2010.
- [Giu05] Bogdan Giuc. Aerial view of berna switzerland. *Public Domain*, 2005.
- [Her17] Alejandro Hernandez. Galerías de arte : polígonos ortogonales y una implementación para iluminar el plano. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.
- [Hof90] Frank Hoffmann. On the rectilinear art gallery problem. In Michael S. Paterson, editor, *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, pages 717-728, Berlin, Heidelberg, 1990. Springer.

- [Hon76] Ross Honsberger. *Mathematical gems 2*. The Dolciani mathematical expositions. Mathematical Assoc. of America, Washington, 1976.
- [Jim19] Mazay Jimenez. Iluminación de poliedros en  $\mathbb{R}^3$  y transversales. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [KMMPUI2] Evangelos Kranakis, Fraser MacQuarrie, Oscar Morales-Ponce, and Jorge Urrutia. Uninterrupted Coverage of a Planar Region with Rotating Directional Antennae. In Xiang-Yang Li, Symeon Papavassiliou, and Stefan Ruehrup, editors, *Ad-hoc, Mobile, and Wireless Networks*, Lecture Notes in Computer Science, pages 56–68, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer.
- [Kö31] D. König. Graphs and matrices. *Mat. Lapok*, 1931.
- [LL86] D. Lee and A. Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(2):276–282, March 1986.
- [LL90] D. T. Lee and Arthur K. Lin. Computational Complexity of Art Gallery Problems. In Ingemar J. Cox and Gordon T. Wilfong, editors, *Autonomous Robot Vehicles*, pages 303–309. Springer, New York, NY, 1990.
- [Mat93] Jiří Matoušek. Epsilon-Nets and Computational Geometry. Algorithms and Combinatorics, pages 69–89. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [Mat99] Jiri Matousek. *Geometric Discrepancy: An Illustrated Guide*. Algorithms and Combinatorics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [Mat02] Jiri Matousek. *Lectures on Discrete Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [noa] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis - Wikisource.
- [O'R87] Joseph O'Rourke. *Art gallery theorems and algorithms*. Oxford University Press, Inc., USA, 1987.
- [She92] T. C. Shermer. Recent results in art galleries (geometry). *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1384–1399, September 1992.
- [Sol14] Erick Solis. Iluminación de polígonos ortogonales con reflectores de 180 giratorios colocados en aristas. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
- [TABN15] Krishnaiyan Thulasiraman, S. Arumugam, Andreas Brandstadt, and Tako Nishizeki. *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*. Taylor & Francis, December 2015.
- [Urr96] Jorge Urrutia. Art Gallery and Illumination Problems. In *Handbook of Computational Geometry*, pages 973–1027. Elsevier, 1996.

- [Urr00] Jorge Urrutia. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Elsevier, 2000.
- [Urr12] Jorge Urrutia. Art Galleries,  $k$ -modems, and  $k$ -convexity. In Evangelos Kranakis, Danny Krizanc, and Flaminia Luccio, editors, *Lecture Notes in Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, pages 3-3, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.