



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OPTIMIZACIÓN DE ALGORITMOS PARA LA
EVALUACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE LAS
SUPERFICIES CÓNCAVAS DE FORMA LIBRE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER BAUTISTA CLEMENTE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MANUEL CAMPOS GARCÍA



Ciudad Universitaria, CD. MX. , 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Propietario: Dr. José Rufino Díaz Uribe
Propietaria: Dra. Gabriela Murguía Romero
Propietario: Dr. Manuel Campos García
Tutor
Suplente: Dr. Maximino Avendaño Alejo
Suplente: Dr. Fermín Salomón Granados Agustín

TUTOR DE TESIS:

Dr. Manuel Campos García

*A mi familia, padres y hermanos.
Es gran parte es gracias a ustedes que es posible este trabajo.
En verdad, gracias.
Francisco Javier.*

Reconocimientos

Quiero agradecer:

A mis padres quienes me dieron vida, educación y apoyo incondicional.

A mis amigos, con los que se que puedo contar siempre.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por darme la oportunidad de realizar mis estudios de licenciatura.

Al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT) por permitirme utilizar sus instalaciones para realizar este trabajo.

Al “Laboratorio de los gordos”, donde trabaje junto a mis compañeros, con los cuales reí, discutí, jugué, me fui de parranda y viví muy gratos recuerdos.

Al Dr. Manuel Campos por ser mi guía en este proceso formativo.

A mi comité tutor y mis sinodales, por sus valiosos comentarios y observaciones para mejorar mi trabajo.

Esta investigación fue posible gracias a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA-UNAM) bajo el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) No: IT101218: “Evaluación óptica de superficies no convencionales”, Investigador participante, 1 enero de 2018 al 31 de diciembre de 2019. Del cual recibí una beca de estudiante.

De igual forma gracias a los proyectos siguientes que permitieron al Laboratorio de Metrología Óptica adquirir equipo que utilice para realizar de este trabajo.

DGAPA-PAPIME 2020 No. PE101120: "Herramientas didácticas para la enseñanza de la óptica", Investigador Responsable, 1 enero de 2020 al 31 de diciembre de 2020.

DGAPA-PAPIIT 2019 No. TA100519: "Topografía Corneal basada en pantallas nulas: Desarrollo y caracterización de prototipos", Investigador Responsable, 1 enero de 2019 al 31 de diciembre de 2020.

DGAPA-PAPIME 2019 No. PE110419: "Herramientas adicionales sobre el curso de óptica", Investigador Responsable, 1 enero de 2019 al 31 de diciembre de 2019.

DGAPA-PAPIIT 2019 No. TA100319: "Evaluación de Superficies de forma libre", Investigador participante, 1 enero de 2019 al 31 de diciembre de 2020.

DGAPA-PAPIME 2018 No. PE110518: "Óptica: Notas del curso y otras herramientas de aprendizaje", Investigador Responsable, 1 enero de 2018 al 31 de diciembre de 2018.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

FRANCISCO JAVIER BAUTISTA CLEMENTE.
Ciudad Universitaria, CD. MX. , 2021

Resumen

En el presente trabajo se presentara la realización de una prueba óptica a un espejo cóncavo E213-2 de la marca Opti-Forms, mediante una prueba óptica denominada pantallas nulas, el cual ha sido puesto a prueba varias veces dando resultados confiables.

El trabajo consta de un desarrollo de cinco capítulos en los cuales se presenta cada paso para llevar acabo la prueba del espejo. En el capítulo uno se presenta a manera de introducción algunas de las pruebas ópticas usadas para probar superficies más comúnmente usadas y de los distintos tipos de superficies que existen.

En el capítulo dos se muestra la teoría y ecuaciones necesarias para llevar acabo una prueba de pantallas nulas, desde lo que es una pantalla nula, pasando por su construcción, análisis de datos y la reconstrucción de la superficie bajo prueba.

La construcción y desarrollo del montaje experimental es desarrollado en el capítulo tres mientras que el análisis de resultados y reconstrucción de la superficie se presentan en el capítulo cuatro. Finalmente las conclusiones de el trabajo realizado son presentadas en el capítulo cinco y final.

Contenido

Índice de Figuras	xiii
Índice de Tablas	xix
1 Superficies y Pruebas Ópticas	1
1.1 Superficies y su Representación	2
1.1.1 Superficies Asféricas	2
1.1.2 Superficies Polinomiales	6
1.1.3 Superficies de Forma Libre	8
1.2 Pruebas Ópticas Geométricas	9
1.2.1 Prueba de Ronchi	11
1.2.2 Prueba de Hartmann	15
1.3 Pruebas Ópticas Interferométricas	17
1.3.1 Interferómetro de Fizeau	18
1.3.2 Interferómetro de Twyman-Green	18
1.3.3 Como se mide el frente de onda	20
1.3.4 Pruebas interferométricas nulas	23
1.3.5 Compensadores nulos	23
1.3.6 Holograma de una superficie esférica de referencia: holo- gramas reales	25
1.3.7 Hologramas generados por computadora: hologramas sintéticos	26
1.3.8 Hologramas generados por computadora y óptica nula	27
1.4 Conclusión	28
2 Pantallas Nulas	31
2.1 Método de Pantallas Nulas	31
2.2 Diseño de la Pantalla Nula Cilíndrica	33
2.3 Breve Análisis de Algunas Variables.	43
2.4 Formación de Imágenes.	46

CONTENIDO

2.5	Reconstrucción de la Superficie	51
2.5.1	Cálculo de las Normales	53
2.5.2	Evaluación de la Superficie	55
2.5.3	Nueva Ecuación de Ajuste	58
2.5.4	Forma cuádrica de la ecuación de ajuste	62
2.5.5	Método Iterativo	65
2.6	Resumen del Capítulo	70
3	Prueba Experimental	71
3.1	Patrón de Referencia de la Pantalla Nula	71
3.2	Montaje del Dispositivo Experimental	75
3.2.1	Características de las componentes	75
3.2.2	Parámetros de Diseño de la Pantalla Nula	79
3.3	Corrección por Distorsión a la Lente	83
3.3.1	Corrección por Distorsión en la Práctica	84
3.4	Alineación del dispositivo experimental y enfoque	90
4	Análisis de Resultados	97
4.1	Centroides de la imagen obtenida de la CCD	97
4.2	Resultados de la Evaluación de la Superficie	102
4.2.1	Comparación de Resultados	108
4.3	Representación polinomial de las superficies ajustadas	112
5	Conclusiones	119
A	Corrección de la Distorsión Para Una Lente	121
	Referencias	125

Índice de Figuras

1.1	Representación de un casquete esférico de radio 1m	3
1.2	Representación de una asfera con $r = 0.7$ y $k = 0.5$ y las constantes $A_i = 1$	4
1.3	Representación de un casquete de una superficie cónica con $r = 0.7$ y $k = 0.5$	5
1.4	Superficie generada a partir del polinomio radial de Zernike R_4^0	7
1.5	Ejemplo de superficie de forma libre. Rostro generado en el programa Blender (imagen tomada de https://cloud.blender.org/p/blenderella/)	8
1.6	Figura explicativa de la aberración del frente de onda y la aberración del rayo.	10
1.7	Arreglo experimental de la prueba de Ronchi.	11
1.8	(a) Esquema de una rejilla de Ronchi lineal, (b) ronchigrama de una rejilla de Ronchi lineal para un frente de onda esférico. Tomada de <i>Optical shop testing</i> [5].	12
1.9	Cálculo de la aberración transversal $T(\rho)$ a partir de un ronchigrama.	13
1.10	(a) Rejilla nula de Ronchi, (b) imagen de una rejilla lineal de Ronchi, (c) imagen de una rejilla nula de Ronchi correspondiente a una superficie esférica. Imágenes tomadas de <i>Optical shop testing</i> [5].	14
1.11	(a) Esquema de una rejilla cuadrada de Ronchi, (b) imagen experimental de una rejilla cuadrada, tomada de "Ronchi test with a square grid" [15].	15
1.12	Configuración experimental de la prueba de Hartmann.	15
1.13	Pantalla de Hartmann cuadrada en (a), radial (b), y espiral (c). Las pantallas en (b) y (c) son usadas para evaluar espejos primarios de telescopios. Imágenes tomadas de <i>Optical shop testing</i> [5].	16
1.14	Imagen del plano de detección de la prueba de Hartmann.	17

ÍNDICE DE FIGURAS

1.15	Configuración del interferómetro de Fizeau para probar superficies convexas para una superficie de referencia cóncava en (a) y una superficie de referencia plana (b).	19
1.16	Configuración del interferómetro de Twyman-Green para probar superficies esféricas convexas.	20
1.17	(a) Interferograma de una superficie de prueba (Imágenes tomadas de <i>Optical shop testing</i> [5]), (b) cálculo de las deformaciones de la superficie.	21
1.18	Franjas de interferencia correspondientes a una superficie plana para superficies de prueba convexas en a) ; aquí las franjas se curvan hacia la porción angosta de la cuña, y cóncavas b); las franjas se curvan hacia la parte ancha	22
1.19	Pruebas de Hindle para probar un hiperboloide convexo.	24
1.20	Configuración del interferómetro Mach-Zehnder modificado para la prueba nula de una superficie esférica mediante un holograma real.	25
1.21	Resultados interferométricos obtenidos de la prueba de una superficie esférica sin CGH, y con CGH. Imágenes tomadas de <i>Optical shop testing</i> [5].	27
1.22	La placa de prueba holográfica consiste de una superficie esférica de referencia sobre la cual se dibuja un patrón de anillos izquierda. El haz de prueba es reflejado por la superficie de prueba y regresa a través del CGH a orden cero, el haz de referencia es reflejado por el holograma a orden -1 (derecha).	28
2.1	Diferentes formas de pantallas nulas con diversas configuraciones convenientes para evaluar distintos tipos de superficie.	32
2.2	Variables involucradas en el diseño de una pantalla nula cilíndrica	34
2.3	Reflexión del vector \mathbf{v}_i sobre \mathbf{n}	36
2.4	El punto colocado sobre la pantalla nula en z_o formara un punto imagen en z_i , el cual servirá de objeto a la lente	39
2.5	Simulación del proceso matemático para construir una pantalla nula.	42
2.6	Se muestra la fase inicial en (a) y la fase final en (b) del proceso para crear la pantalla nula. La escala en ambas gráficas está en milímetros.	42
2.7	Se muestran el comportamiento de algunas de las variables involucradas en la construcción de una pantalla nula para una lente con una distancia focal de 8mm.	44

2.8	Se muestran el comportamiento de algunas de las variables involucradas en la construcción de una pantalla nula para una lente con una distancia focal de 3mm.	46
2.9	Patrón que se quiere obtener	47
2.10	Se muestra el resultado de las pantallas nulas (a), (b) requeridas para obtener el patrón en 2.9 para lentes de distancia focal 8mm. y 3.5mm respectivamente, se puede observar el efecto mostrado en la gráfica 2.7(d) en (a).	47
2.11	Un espejo esférico cóncavo, forma una imagen real de P en que está sobre el eje óptico, la imagen es formada en P' y los rayos se perciben como si provinieran de P'	48
2.12	Diagrama para determinar posición, orientación y altura de una imagen formada por un espejo esférico cóncavo, tanto para el caso de una imagen real (a) y una virtual (b).	49
2.13	Construcción para determinar posición, orientación y altura de la imagen formada por una superficie esférica cóncava, de los puntos sobre una pantalla nula.	50
2.14	Figura explicativa de la deducción de la Ecuación de la forma de la superficie.	51
2.15	Figura explicativa de la evaluación de las normales	54
2.16	Figura ilustrativa de la regla del trapecio para siete intervalos.	56
2.17	Trayectoria de puntos discretos sobre una superficie.	56
2.18	Método iterativo para la evaluación de la superficie. El valor de ϵ es determinado de acuerdo a la precisión que se requiera obtener.	69
3.1	Patrones usados radial por secciones en a) y circular uniforme en b).	72
3.2	Patrón de diseño en a) y mancha del patrón ampliada en b).	73
3.3	Arreglo de puntos usado para construir la pantalla nula.	74
3.4	Instrumentos usados para la alineación y construcción del dispositivo experimental.	75
3.5	Instrumentos usados para la alineación y construcción del dispositivo experimental.	77
3.6	Captura de uEye Cockpit	77
3.7	Especificaciones del Espejo a probar.	78
3.8	Pantalla nula a partir del arreglo de puntos presentado en la figura 3.3 y las características de las componentes del dispositivo experimental.	82
3.9	Arreglo experimental, armado con todas las componentes descritas.	82

ÍNDICE DE FIGURAS

3.10	Corrección de la imagen por distorsión a un plano de 12.00mm de distancia del diafragma.	84
3.11	Arreglo de puntos usado para corregir la distorsión.	85
3.12	Formación de imágenes de los puntos sobre una pantalla nula.	86
3.13	Arreglo experimental usado para corregir la distorsión de la lente.	87
3.14	Corrección por distorsión a un plano de 210mm de distancia del pinhole.	88
3.15	Interpolaciones de E y M_T a las distancias a las que se formarán las imágenes presentadas en la figura 3.12.	89
3.16	Alineación de la lente y la base XYZ.	91
3.17	Alineación del cilindro en a) y la alineación del espejo para que se vea el patrón generado por la pantalla nula en b).	92
3.18	Plantilla para colocar el espejo a la distancia correcta en a) e implementación del procedimiento en b).	93
3.19	Arreglo experimental final para probar el espejo en rojo se muestra el valor experimental y en azul el valor teórico del diafragma hacia el vértice del espejo.	94
3.20	Fotografía del reflejo de la pantalla nula sobre el espejo.	95
4.1	En a) se muestra la imagen binaria en blanco y negro, en rectángulos verdes se marcan las manchas que sobrepasan la cota mínima de píxeles para ser consideradas como una mancha generada por la pantalla nula, y en rojo las que no sobrepasan la cota establecida. En b) se muestran las manchas con su respectivo centro de masa marcado con un punto.	98
4.2	Se muestran las posiciones de los centroides de las manchas teóricas en azul y en verde las calculadas experimentalmente.	99
4.3	Imagen de los centroides obtenidos de una prueba de pantallas nulas sobre el mismo espejo bajo prueba tomada de <i>La ecuación de la forma de la superficie y generalización de las ecuaciones de Rayces</i> [26].	101
4.4	Comparación que muestra el desplazamiento de la intercepción del rayo de la imagen sobre el espejo, dependiendo de la lente usada. En azul se muestra el caso para $f_l = 3.5\text{mm}$ y en verde para $f_l = 8\text{mm}$	102
4.5	Caminos de integración escogidos para resolver la integración numérica.	103
4.6	Graficas de los valores de r en (a) y k en (b) para los ajustes realizados durante el proceso iterativo. Se aprecia en ambas graficas el comportamiento creciente de los valores de k como de r después de alcanzar un mínimo.	107

4.7	Mapas de contorno de las diferencias de sagita entre los valores de la superficie medida y la superficie de mejor ajuste, tomando el primer criterio de convergencia a), b) y el segundo criterio en c) y d).	111
4.8	Mapas de contorno de las diferencias de sagita entre los valores de la superficie medida y la superficie de mejor ajuste por Zernike, tomando el primer criterio de convergencia a), b) y el segundo criterio en c) y d).	114
4.9	Mapas de contorno de las diferencias de sagita entre los valores de la superficie medida y la superficie de mejor ajuste por polinomios de Legendre, tomando el primer criterio de convergencia a), b) y el segundo criterio en c) y d).	117
A.1	Formación de una imagen por una lente ideal.	121
A.2	Tipos de distorsión	122

Índice de Tablas

1.1	Valores de las constantes cónicas de las superficies de revolución.	4
2.1	Valores de las variables involucradas para la construcción de una pantalla nula cilíndrica para una superficie cóncava.	41
2.2	Tabla de valores de las variables involucradas para el diseño de una pantalla nula cilíndrica para una superficie cóncava, tomadas de <i>Prueba de un espejo elipsoidal concavo en eje (F/0.273)</i> [24]	43
3.1	Tabla de valores de los parámetros de construcción del espejo E213-2.	78
3.2	Valores de los parámetros para construir la pantalla nula.	81
3.3	Valores de D calculados a partir de la imagen tomada para alinear el espejo, en azul se muestran los valores ideales.	92
4.1	Tabla que muestra el valor interpolado de E y M_T para la distancia teórica z_t a la cual estarán los centroides de las manchas de cada línea circular, empezando por la de menor radio hasta la de mayor de forma descendente en la tabla.	100
4.2	Resultados obtenidos en las iteraciones ajustando la ecuación (2.45).	105
4.3	Resultados obtenidos en las iteraciones ajustando la nueva ecuación propuesta (2.46).	106
4.4	Comparación de las superficies ajustadas con la superficie de diseño, en azul se muestran los resultados para el segundo criterio de convergencia.	108
4.5	Valores de los descentramientos correspondientes a cada una de las superficies obtenidas al reconstruir la superficie, en color azul se muestran los valores para el segundo criterio de convergencia.	109

ÍNDICE DE TABLAS

4.6	Valores RMS correspondiente a cada una de las superficies obtenidas al reconstruir la superficie antes de aplicar la transformación de cambio de ejes (RMSE) y despues de aplicarla (RMSrt). En color azul se muestran los valores para el segundo criterio de convergencia.	110
4.7	Valores del ajuste usando polinomios de Zernike, en color azul se muestran los valores correspondientes a las superficies escogidas en el segundo criterio de convergencia.	113
4.8	Valores RMS, intervalo pico valle del ajuste con los polinomios de Zernike, en azul se muestran los valores de los datos de las superficies escogidas bajo el segundo criterio de convergencia. .	113
4.9	Valores del ajuste con los polinomios de Legendre, en rojo se muestran los valores de los datos de las superficies escogidas bajo el segundo criterio de convergencia.	115
4.10	Valores RMS, intervalo pico valle del ajuste con los polinomios de Legendre, en azul se muestran los valores de los datos de las superficies escogidas bajo el segundo criterio de convergencia. .	115

Capítulo 1

Superficies y Pruebas Ópticas

Una prueba óptica es el arte de usar cualquier método disponible ya sea mecánico u óptico para determinar de manera precisa las propiedades de un componente o sistema óptico. Una prueba óptica es de vital importancia en la construcción de componentes ópticas dado que no se puede construir aquello que no se puede probar [1].

Actualmente existe una gran variedad de métodos y/o técnicas para probar superficies ópticas, los cuales pueden ser mecánicos u ópticos. Los métodos ópticos a diferencia de los métodos mecánicos, son más rápidos de implementar en cierta forma, precisos y sobre todo no se tiene contacto con la superficie de prueba. A su vez los métodos ópticos que recuperan la forma de la superficie de prueba se clasifican en interferométricos y geométricos. Las pruebas interferométricas son adecuadas cuando se requiere probar asferas que difieren poco de una esfera. Para poder probar superficies esféricas más rápidas (es decir que su derivada cambie muy rápido) se requiere de usar elementos ópticos adicionales en el sistema óptico de prueba para compensar la asfericidad del sistema de prueba; en otras palabras, se requiere transformar el frente de onda esférico en uno esférico que se ajuste a la superficie de prueba y que posteriormente vuelva a convertir el haz que ha sido reflejado por la superficie o ha sido atravesado por el sistema óptico bajo prueba en uno esférico si la superficie o el sistema son perfectos. Las deformaciones del frente de onda serán debidas a aberraciones y defectos del sistema bajo prueba.

Por otra parte, las superficies a probar pueden ser esféricas, esféricas, basadas en polinomios o de forma libre. Las superficies esféricas son las más comunes, y como dice su nombre están basadas en una esfera. Por su lado las superficies esféricas están basadas en una superficie de revolución la cual puede tener por base una curva cónica, las superficies polinomiales están basadas en

polinomios los cuales son rotados o trasladados para formar una superficie, mientras que las superficies de forma libre en su caso más general no están basadas en ninguna expresión analítica.

Para tener un campo de visión más extenso se realizará una revisión de las pruebas ópticas que guardan una relación directa con el método propuesto en este trabajo. Para esto, se revisarán las pruebas ópticas geométricas tradicionales como lo son la prueba de Ronchi y la prueba de Hartmann, ya que en ambas se emplean pantallas para realizar la prueba. Cabe mencionar, que la principal aplicación de estas pruebas geométricas se halla en la prueba de superficies esféricas cóncavas. Para probar superficies esféricas convexas existe una gran variedad de pruebas interferométricas, aquí revisaremos aquellas que corrigen el frente de onda esférico, utilizando como corrector esférico un CGH (Computer Generated Hologram) [2], [3] el cual se utiliza con un interferómetro que puede ser de tipo Twyman-Green o un Fizeau.

1.1 Superficies y su Representación

Para poder estudiar y probar los distintos tipos de superficie es conveniente tener una forma de representarlas por medio de expresiones matemáticas analíticas que permitan un mejor manejo de estas. En el caso de las superficies esféricas (figura 1.1) que son las más simples de todas y que como su nombre lo dice están basadas en una esfera por lo que su representación matemática es la siguiente.

$$z = \frac{cS^2}{1 + [1 - c^2S^2]^{1/2}} \quad (1.1)$$

siendo $S = x^2 + y^2$ y $c = 1/r$ siendo r el radio de curvatura y c la curvatura de la esfera en la cual está basada la superficie.

1.1.1 Superficies Esféricas

Entre el tipo de superficies las de tipo esférico, son superficies que no son esféricas ni superficies planas. Una esfera tiene un sólo parámetro que define su forma, el radio de curvatura r ; pero las superficies cónicas tienen dos,

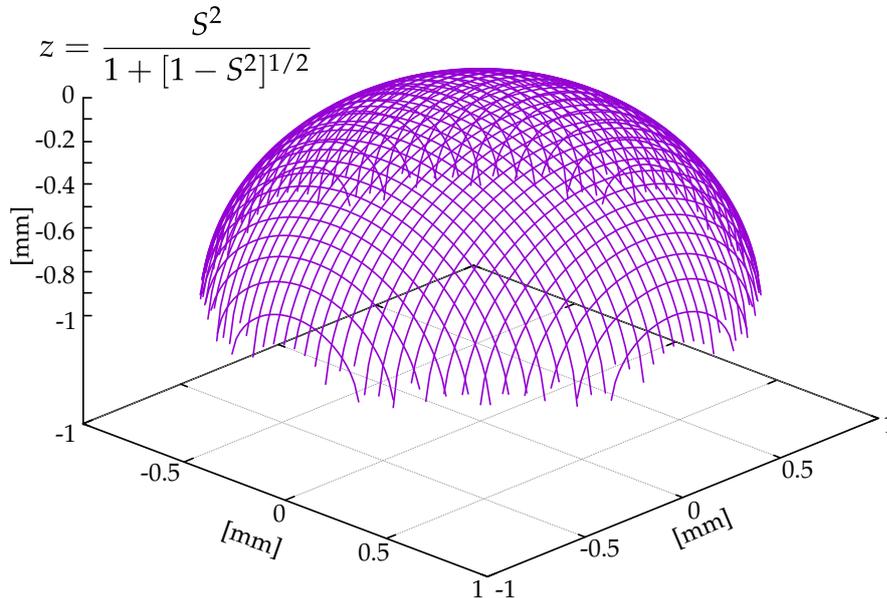


Figura 1.1: Representación de un casquete esférico de radio 1m .

su radio de curvatura en el vértice r y la constante de conicidad k , la cual es una función de su excentricidad y esta varía según la cónica que se tenga como se muestra en la tabla 1.1. Una asfera más general, puede tener en principio un número grande de parámetros que definan su forma [4]. Por otra parte, una superficie esférica rápida es aquella que tiene diámetro D grande en comparación a la distancia focal f , es decir, números F pequeños ($F/\# = f/D < 1$).

La demanda de superficies esféricas ha aumentado constantemente, así como nuevas aplicaciones han surgido, debido a que algunos problemas ópticos se resuelven con mayor facilidad cuando se utilizan asferas en los sistemas ópticos y otros pueden ser resueltos cuando sólo se emplean asferas. Así, por ejemplo, una superficie esférica puede reemplazar a varias superficies esféricas, y cierto tipo de aberraciones pueden ser removidas o controladas cuando se utilizan sólo superficies esféricas [1]. Lo anterior ofrece ventajas significativas como: uso de pocas componentes ópticas, reducción del peso de los sistemas ópticos, menos luz esparcida, mejor funcionamiento y un empaque más reducido del sistema. A todo esto se debe tomar en cuenta que; se aumenta la complejidad en el diseño, fabricación y prueba de estas componentes.

Matemáticamente una superficie esférica de revolución es generada rotando

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

Tipo de Cónica	Valor de la constante cónica
Esfera	$k = 0$
Esferoide Oblato (<i>Elipse que gira sobre su eje menor</i>)	$k > 0$
Esferoide Prolato (<i>Elipse que gira sobre su eje mayor</i>)	$-1 < k < 0$
Hiperboloide	$k < -1$
Paraboloide	$k = -1$

Tabla 1.1: Valores de las constantes cónicas de las superficies de revolución.

una curva plana con simetría axial en torno a su eje. En particular, una superficie esférica con simetría rotacional generada por la rotación de un arco cónico en torno a su eje. Usualmente, las superficies esféricas figura 1.2 se representan mediante

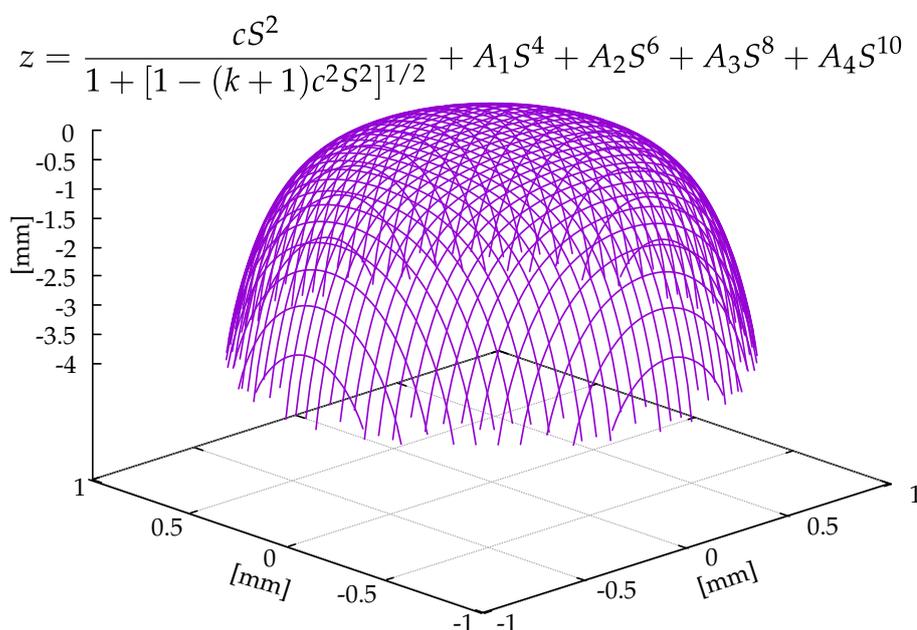


Figura 1.2: Representación de una asfera con $r = 0.7$ y $k = 0.5$ y las constantes $A_i = 1$.

$$z = \frac{cS^2}{1 + [1 - (k + 1)c^2S^2]^{1/2}} + A_1S^4 + A_2S^6 + A_3S^8 + A_4S^{10} \quad (1.2)$$

donde $S = x^2 + y^2$ y $c = 1/r$ siendo c la curvatura. Además A_1, A_2, A_3, A_4 son conocidas como constantes de deformación esférica y k es conocida como constante de conicidad de la cónica la cual está en función de la excentricidad de la cónica ($k = -e^2$). Es fácil ver que el primer termino de esta ecuación representa a una superficie de revolución con una base cónica.

Otra forma de representar una superficie cónica (figura 1.3) de revolución es la siguiente

$$z = \frac{r - \sqrt{r^2 - (k + 1)S^2}}{k + 1}. \quad (1.3)$$

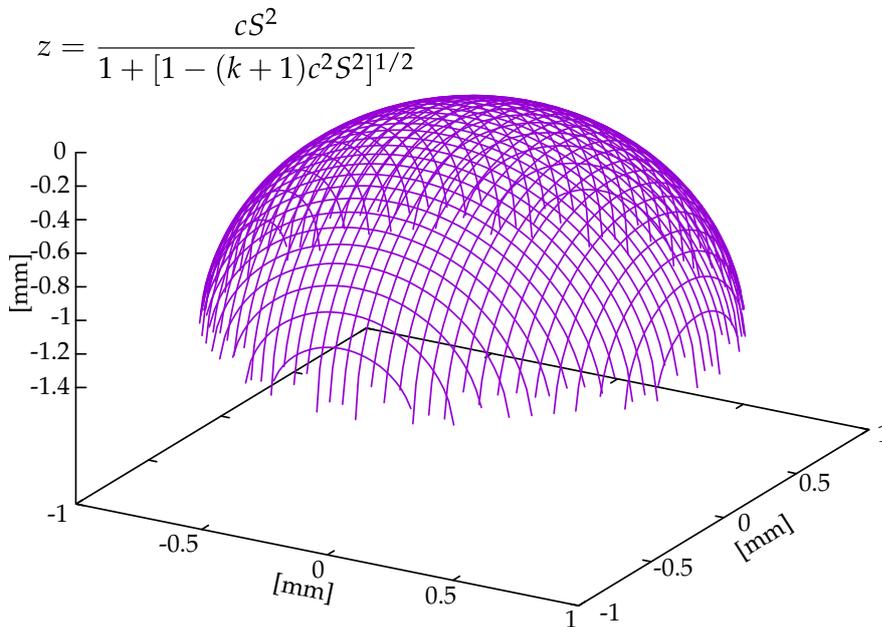


Figura 1.3: Representación de un casquete de una superficie cónica con $r = 0.7$ y $k = 0.5$.

Esta expresión sirve para todas las cónicas excepto para el paraboloide donde

$$z = \frac{S^2}{2r}. \quad (1.4)$$

La ecuación (1.3) como el primer término de la ecuación (1.2) se derivan de la expresión

$$z^2(k+1) + r^2 - 2rz = 0 \quad (1.5)$$

que es la ecuación de una cónica con su vértice en el origen y abre hacia el eje positivo de z . Se puede notar que la ecuación (1.3) es la solución de la ecuación para z , mientras que la deducción del primer término de la ecuación (1.2) es más laborioso pero si lo desarrollamos podemos llevarlo a la forma de la ecuación (1.5), mostrando que son equivalentes.

En algunas ocasiones las superficies esféricas son representadas como la suma de una esfera y algunos términos de deformación como se describe en la siguiente expresión.

$$z = \frac{cS^2}{1 + [1 - c^2S^2]^{1/2}} + B_1S^4 + B_2S^6 + B_3S^8 + B_4S^{10} \quad (1.6)$$

donde los términos B son los coeficientes de deformación esféricos. En general el orden del polinomio de grado par corresponde al grado de aberración que se desee corregir.

1.1.2 Superficies Polinomiales

Las superficies polinomiales, son como su nombre lo indica superficies que están basadas en polinomios (ver figura 1.4) pudiendo ser estos de cualquier tipo, incluyendo a las bases de polinomios ortonormales como son los polinomios de Legendre, Hermite, Laguerre, Zernike, etcétera, estas bases polinomiales tienen ventajas pues se pueden generar por medio de formulas de recurrencia, son ortogonales y resuelven problemas físicos, en particular los polinomios de Zernike tienen gran uso en el campo de la Óptica [4].

Cabe mencionar que dado que las superficies polinomiales tienen una representación mas compleja su construcción y posteriormente sus pruebas se comienzan a complicar pues pueden presentar varios puntos de inflexión cambiando

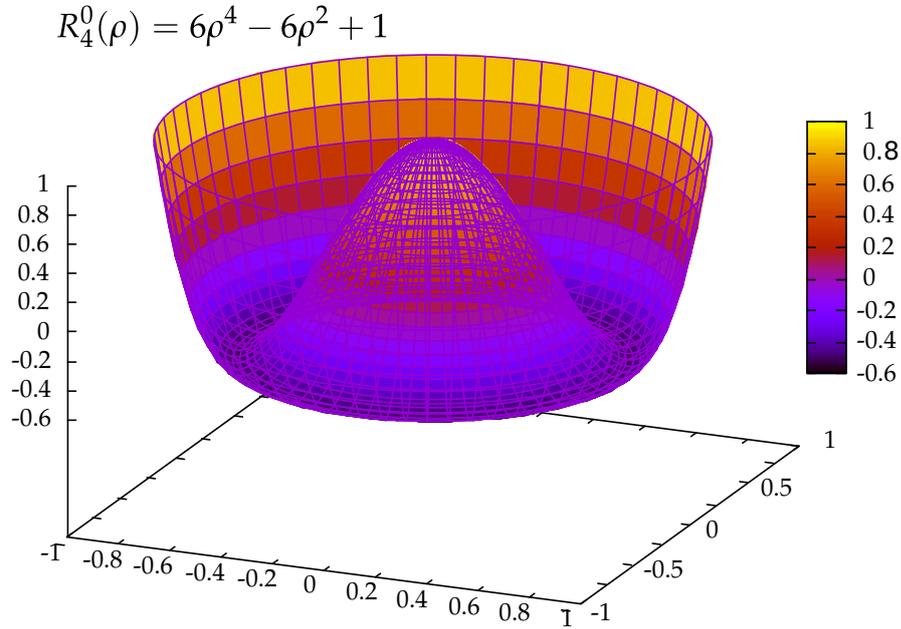


Figura 1.4: Superficie generada a partir del polinomio radial de Zernike R_4^0 .

de cóncavas a convexas varias veces.

Algunas bases polinomiales son las siguientes:

polinomios de Hermite;

$$H_n(x) = (-1)^{n/2} \sqrt{2} x e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (1.7)$$

donde n es un número entero.

Polinomios radiales pares de Zernike

$$Z_n^m(\rho, \phi) = R_n^m(\rho) \cos(m\phi) \quad (1.8)$$

polinomios radiales impares de Zernike

$$Z_n^{-m}(\rho, \phi) = R_n^m(\rho) \sin(m\phi) \quad (1.9)$$

siendo

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{(n-m)}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}, \quad (1.10)$$

siendo n y m números naturales con $n \geq m$, ϕ el ángulo azimutal, $\rho \in (0, 1)$ representa la distancia radial y además los polinomios de Zernike tienen la propiedad que $|Z_n^{\pm m}(\rho, \phi)| \leq 1$.

1.1.3 Superficies de Forma Libre

Como se ha dicho antes las superficies de forma libre (figura 1.5) en su definición más práctica son superficies que no están basadas en ninguna expresión matemática analítica aunque esto no significa que no se les pueda ajustar una.

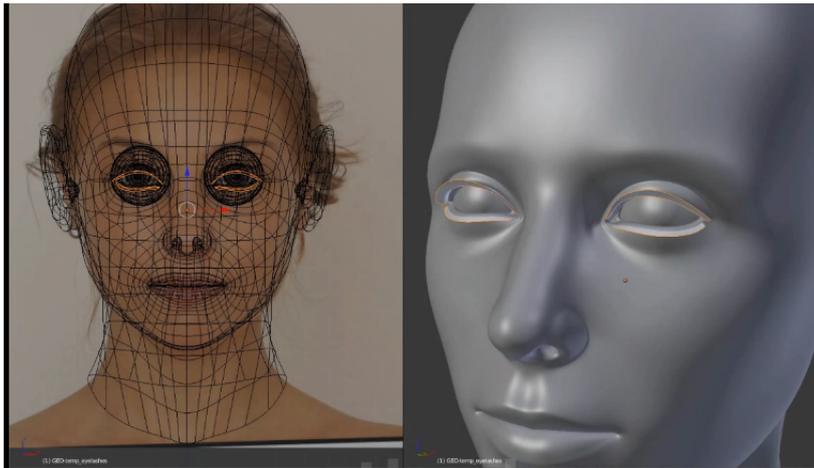


Figura 1.5: Ejemplo de superficie de forma libre. Rostro generado en el programa Blender (imagen tomada de <https://cloud.blender.org/p/blenderella/>)

El diseño de superficies de forma libre nace de la necesidad práctica de algunos sectores industriales como la aeronáutica y la automovilística, esto supuso el comienzo de la descripción [5] matemática de superficies de forma libre. En la actualidad el estudio de estas superficies así como su representación son de gran importancia en arquitectura, escaneo 3D y en técnicas de metrología. Como se ha dicho antes dado que su diseño no está basado en una expresión matemática que intente describirlas su representación muchas veces no puede

ser descrita por una sola expresión matemática así como su diseño. Se comprendió que no era posible conseguir la flexibilidad que requiere el diseño de formas tridimensionales actual utilizando sólo superficies clásicas.

La mayoría de las técnicas de diseño de superficies de forma libre hacen uso de curvas conocidas. Algunos de estos métodos sirven de herramientas de creación de superficies de forma libre que existen actualmente los programas de modelado paramétrico tridimensional como se muestra en la figura 1.5.

Las representaciones más usuales de las superficies de forma libre son las superficies de Bézier la cual es una generalización en tres dimensiones de las curvas del mismo nombre, las superficies B-Spline (basis spline) o las superficies NURBS (Non Uniform Rational B-spline)[5].

1.2 Pruebas Ópticas Geométricas

Previo al uso extendido de los interferómetros, las pruebas geométricas eran más comunes. En síntesis las pruebas geométricas miden la pendiente del frente de onda o las aberraciones transversales del rayo. Entre las ventajas de las pruebas geométricas están: su implementación es simple, su bajo costo, son altamente sensibles y son insensibles a vibraciones. Sin embargo, también presentan desventajas: la gran mayoría proporciona sólo información cualitativa de la topografía de la superficie, dan información sólo de ciertas zonas y son un tanto difíciles de analizar [1].

En lo que respecta a esta sección analizaremos aquellas pruebas ópticas que se basan en un trazo exacto de rayos a través del sistema de prueba y proporcionan información sobre la pendiente de la superficie bajo prueba. Las más populares y comúnmente utilizadas son las pruebas de Ronchi [6] y Hartmann [7], en ambas se utiliza una fuente puntual para iluminar, una pantalla (con líneas u orificios) que actúa como filtro para los rayos y de un medio de registro como un sensor electrónico. En la prueba de Ronchi se asume que los rayos son obstruidos por la rejilla (pantalla con líneas) después de ser reflejados por la superficie de prueba, y por otra parte en el método de Hartmann los rayos son obstruidos antes y/o después de que se reflejen sobre la superficie. Estas pruebas son relativamente simples y no requieren de ningún sistema óptico auxiliar, únicamente de la lente de enfoque de la cámara. Desde el punto de vista del trazo de rayos no hay diferencia entre una y otra prueba;

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

sin embargo, desde el punto de vista de la óptica física, existen diferencias ya que las imágenes obtenidas, ronchigramas y hartmanngramas, corresponden a patrones virtuales y reales, respectivamente, éstos son similares a imágenes virtuales y reales [8].

La ventaja que existe al utilizar una fuente puntual para la iluminación del sistema de prueba es que se puede medir directamente la aberración transversal y con esta obtener la aberración del frente de onda figura 1.6 (diferencia entre un frente de onda esférico y el frente de onda aberrado). La relación entre estas cantidades fue deducida por Rayces en 1964 [9] e independientemente por M.Born y E.Wolf en 1959 [10] y está dada por

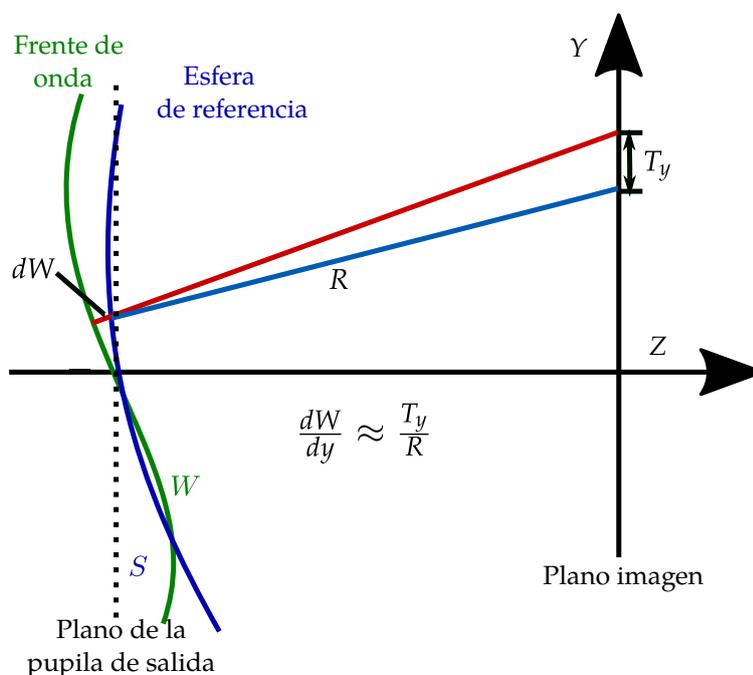


Figura 1.6: Figura explicativa de la aberración del frente de onda y la aberración del rayo.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{T_x}{R}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{T_y}{R}, \quad (1.11)$$

donde $W(x, y)$ es la aberración del frente de onda, R es el radio de una esfera de referencia (el radio del frente de onda esférico) y T_x, T_y , son las componentes transversales de la aberración de rayo, como se muestra en la figura 1.6.

1.2.1 Prueba de Ronchi

La prueba de Ronchi [6] es un método sencillo dentro de las pruebas ópticas. La configuración de la prueba consiste en utilizar una rejilla de Ronchi, la cual está conformada principalmente de un arreglo de líneas claras y oscuras igualmente espaciadas y perfectamente paralelas, además de una fuente de luz que puede ser extendida o puntual. La rejilla se coloca en el centro de curvatura del espejo bajo prueba (esto da idea que se trata de superficies lentas). La fuente es colocada fuera de eje e ilumina el arreglo de franjas en forma tal que la imagen del arreglo de franjas se superpone con las franjas originales, figura 1.7. La forma del patrón de franjas obtenido en el plano de observación tras la rejilla, depende de las aberraciones del sistema óptico y puede explicarse usando óptica geométrica donde se interpretan las franjas como sombras de las líneas de la rendija; también se pueden explicar mediante argumentos de óptica física donde las franjas se interpretan como si fueran producidas por interferencia de la luz difractada por las rejillas de Ronchi, consideradas como rejillas de difracción.

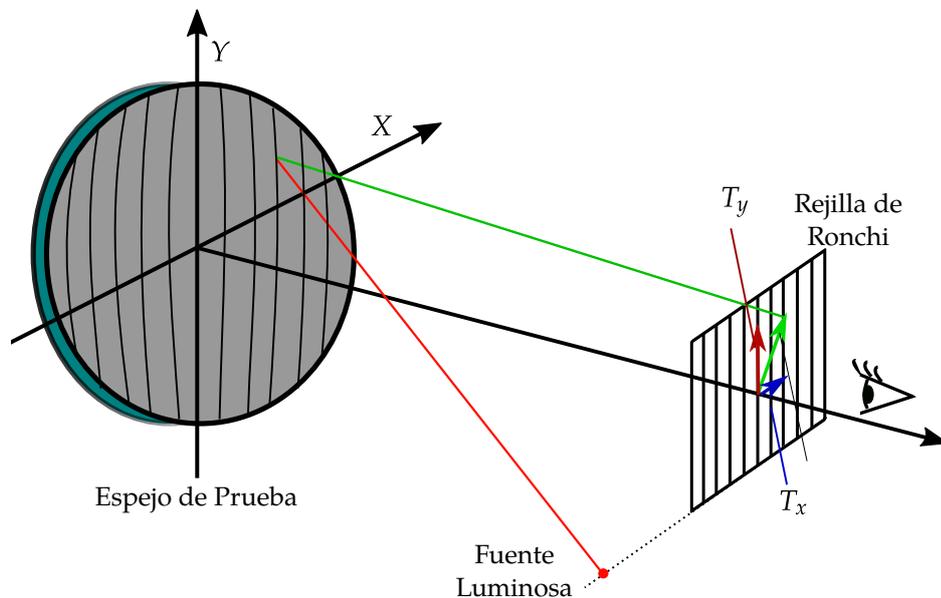


Figura 1.7: Arreglo experimental de la prueba de Ronchi.

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

La principal ventaja de la prueba de Ronchi es su aplicación y diseño simple ya que todo lo que se requiere es una rejilla de líneas rectas y una fuente de luz blanca (extendida o puntual), por lo que, no se requiere de ningún sistema óptico especial sólo la lente de enfoque. Su principal desventaja se encuentra en la dificultad para interpretar cuantitativamente los patrones de franjas observados [1].

La prueba de Ronchi con rejillas lineales es muy útil para probar superficies esféricas ya que la rejilla proyecta sobre el espejo líneas rectas si la superficie de prueba es perfectamente esférica, figura 1.8. Asimismo, se utiliza para probar superficies asféricas [11]; en este caso, como las franjas no son rectas figura 1.10(b), su forma debe ser calculada de forma teórica. Así, los errores de la superficie se obtienen de las diferencias entre las franjas observadas y las calculadas.

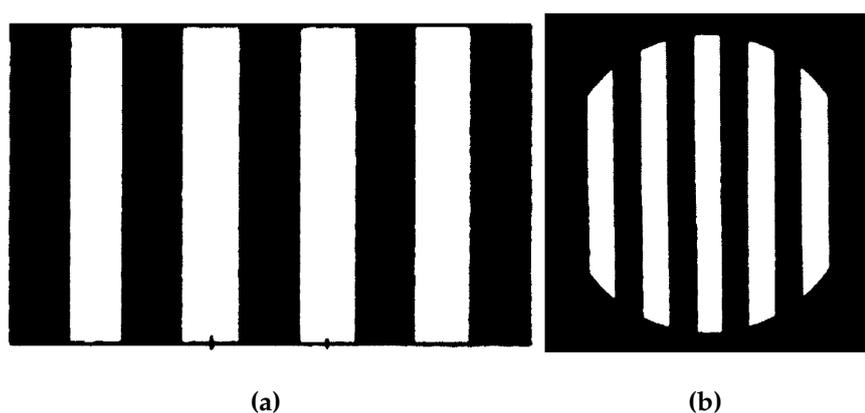


Figura 1.8: (a) Esquema de una rejilla de Ronchi lineal, (b) ronchigrama de una rejilla de Ronchi lineal para un frente de onda esférico. Tomada de *Optical shop testing* [5].

Para superficies con simetría de rotación es posible determinar la forma del frente de onda con una rejilla de Ronchi con $\varphi = 0^\circ$. De esta forma, si se miden las aberraciones transversales las deformaciones de la superficie pueden ser medidas mediante

$$W(\rho) = \frac{-1}{R} \int_0^\rho T(\rho) d\rho \quad (1.12)$$

donde W es la aberración del frente de onda y $T(\rho)$ es la aberración transversal, ambos asociados a las deformaciones de la superficie; y ρ es la distancia del centro del patrón a la intersección de la franja con el eje x , figura 1.9. Luego, el objetivo es poder obtener la aberración transversal $T(\rho)$ a partir de la deformación de las franjas [4]. En la figura 1.9, las manchas largas sólidas corresponden a la diferencia entre las franjas reales sobre un espejo imperfecto, y las franjas ideales para una superficie perfecta, las cuales deben ser calculadas. Si se asume que las franjas ideales sobre el espejo no son necesariamente rectas sino curvas, el cambio en la aberración transversal se obtiene de

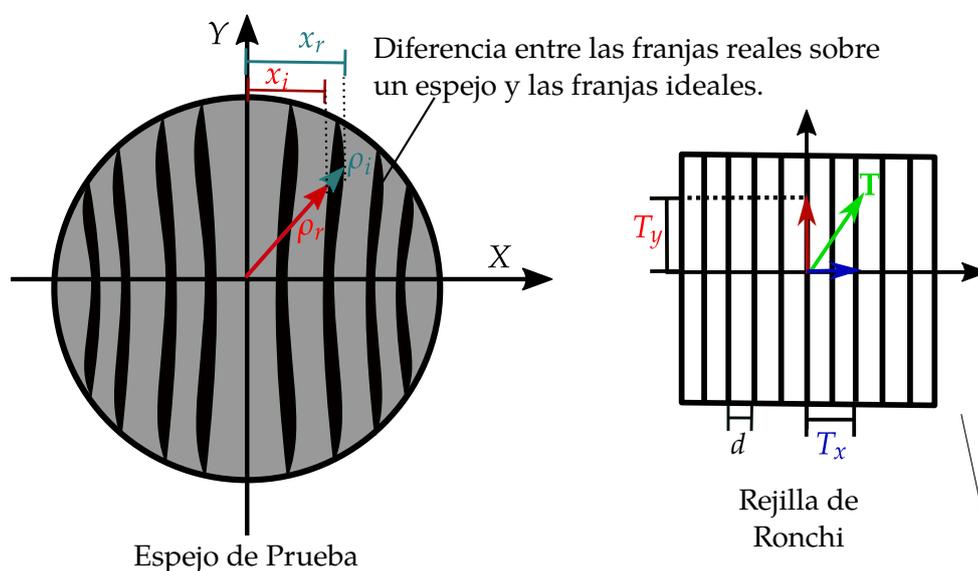


Figura 1.9: Cálculo de la aberración transversal $T(\rho)$ a partir de un ronchigrama.

$$T(\rho) = T_r(\rho) - T_i(\rho) \quad (1.13)$$

donde $T_r(\rho)$ es la aberración transversal real para la superficie y $T_i(\rho) = md$ es la aberración transversal ideal calculada (donde d es el período de la rejilla y m el número de franja).

Cabe mencionar que el procedimiento anterior tiene desventajas debido a que es difícil emparejar las franjas curvas con las líneas teóricas, además como las franjas son curvas, los efectos de difracción hacen que las franjas sean difusas produciendo que las mediciones sean imprecisas [12].

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

Los problemas anteriores se pueden resolver si se utiliza una configuración nula de la prueba. Esto es, se diseña una rejilla de Ronchi que contenga líneas curvas en tal forma que en el plano imagen se obtenga una serie de líneas rectas paralelas, figura 1.10. La desventaja de la configuración nula es que se tiene que crear el patrón específico para la superficie que se requiere probar, en este caso es necesario utilizar una fuente puntual y la alineación del sistema de prueba es crítica [1].

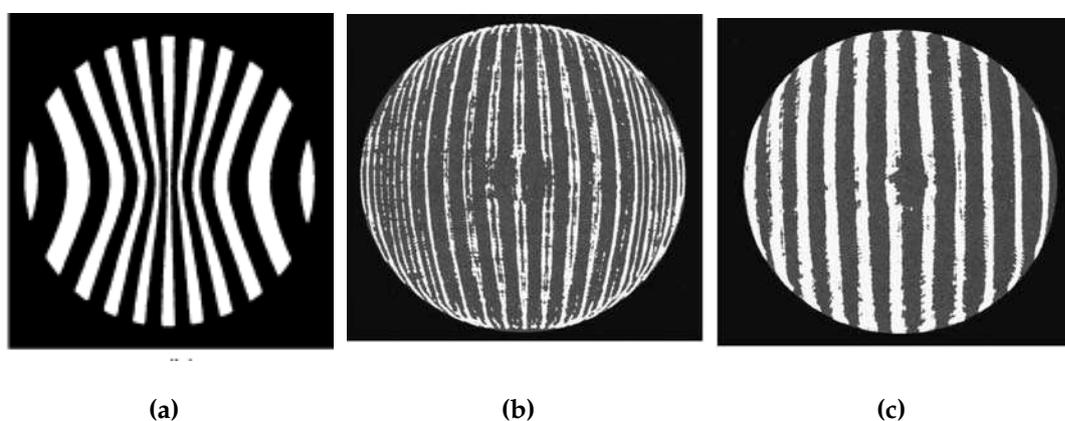


Figura 1.10: (a) Rejilla nula de Ronchi, (b) imagen de una rejilla lineal de Ronchi, (c) imagen de una rejilla nula de Ronchi correspondiente a una superficie esférica.

Imágenes tomadas de *Optical shop testing* [5].

Una desventaja de las configuraciones presentadas anteriormente es que sólo se obtiene información de las deformaciones en una dirección. Para poder obtener las deformaciones del frente de onda en dos direcciones son necesarias dos imágenes perpendiculares de la rejilla. Estas imágenes cruzadas se pueden obtener con una sola rejilla (en este caso se obtiene una imagen con la rejilla orientada en una dirección y después se rota la rejilla 90° y se obtiene la segunda imagen [13]). Una manera más fácil para realizar las mediciones es utilizando una rejilla cuadrada [14], la cual se considera como la intersección de dos rejillas cruzadas, figura 1.11. El patrón de la rejilla cuadrada obtenido se puede considerar equivalente a la intersección de dos patrones cruzados obtenidos con una rejilla sencilla.

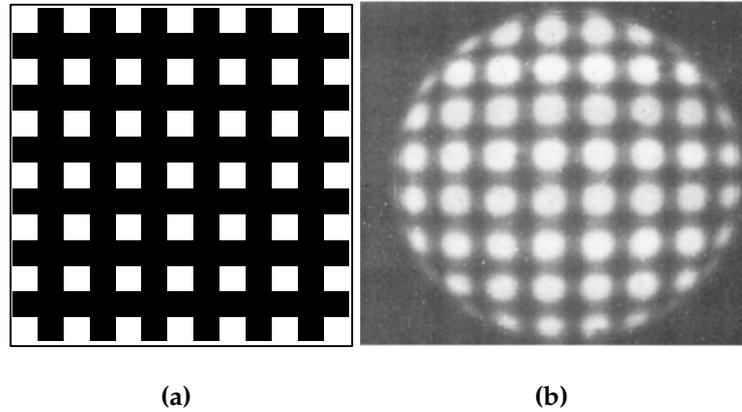


Figura 1.11: (a) Esquema de una rejilla cuadrada de Ronchi, (b) imagen experimental de una rejilla cuadrada, tomada de "Ronchi test with a square grid" [15].

1.2.2 Prueba de Hartmann

La prueba de Hartmann es otro método de prueba óptica geométrica que hace uso de una pantalla [7]. La configuración de la prueba básicamente consiste de una pantalla usualmente metálica con agujeros que se coloca frente a la superficie (principalmente espejos) de prueba, de una fuente puntual colocada cerca del centro de curvatura del espejo y de un medio de registro que puede ser un sensor electrónico, figura 1.12.

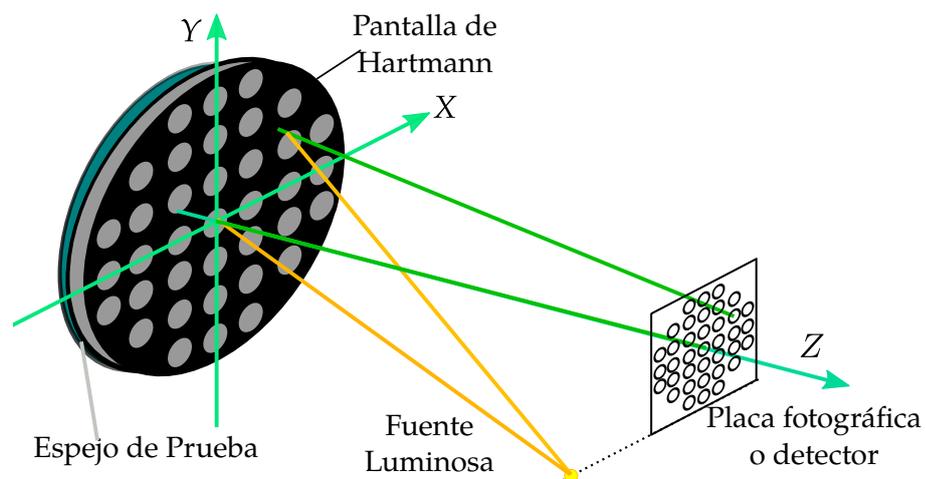


Figura 1.12: Configuración experimental de la prueba de Hartmann.

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

Existen tres configuraciones básicas del patrón de agujeros de las pantallas de Hartmann: radial, espiral y cuadrada. Una desventaja que presentan las pantallas radiales y espirales es que la densidad de agujeros no es uniforme puesto que la densidad de puntos disminuye radialmente. Por su parte, con un arreglo cuadrado se obtiene una mayor uniformidad y cantidad de puntos véase figura 1.13.

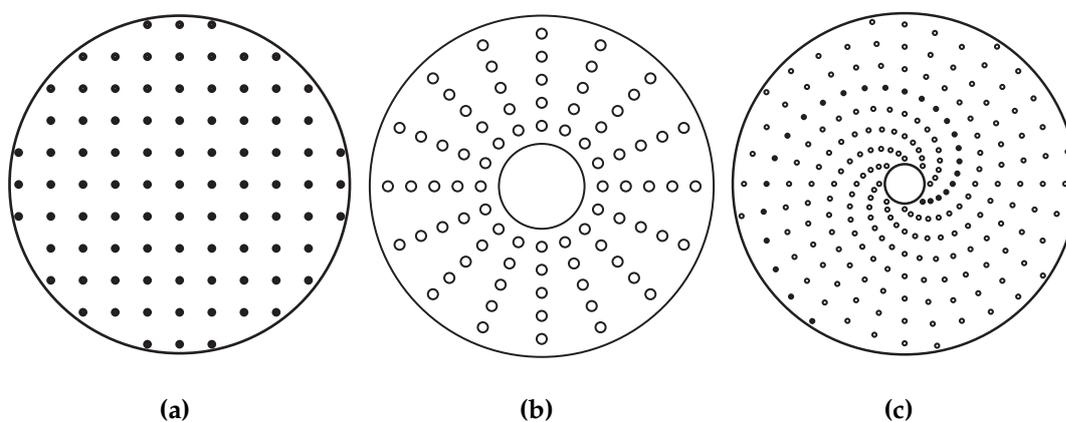


Figura 1.13: Pantalla de Hartmann cuadrada en (a), radial (b), y espiral (c). Las pantallas en (b) y (c) son usadas para evaluar espejos primarios de telescopios. Imágenes tomadas de *Optical shop testing* [5].

Cuando se observa en el plano de detección la pantalla de Hartmann (con agujeros, de diámetro muy pequeño comparada con el diámetro del espejo), se produce un diagrama de manchas luminosas, figura 1.14 Las aberraciones transversales ($T_x T_y$) se calculan a partir de las diferencias de las coordenadas entre los centroides de las manchas luminosas y sus correspondientes posiciones ideales las cuales se obtienen mediante un trazo exacto de rayos [13]. Con estas aberraciones transversales se obtiene la aberración del frente de onda mediante integración de la ecuación (1.11) [7].

Existen tres factores principales que limitan el uso de las pantallas de Hartmann que son: los efectos de difracción los cuales limitan el tamaño de los agujeros de la pantalla, la rapidez de la superficie, y la descripción adecuada de la superficie de prueba está limitada por el grado de rugosidad de la superficie, ya que esta al ser una deformación de alta frecuencia sus efectos son visibles en la forma de la superficie que es una deformación de baja frecuencia. Además, la pantalla debe centrarse con precisión sobre la abertura del espejo,

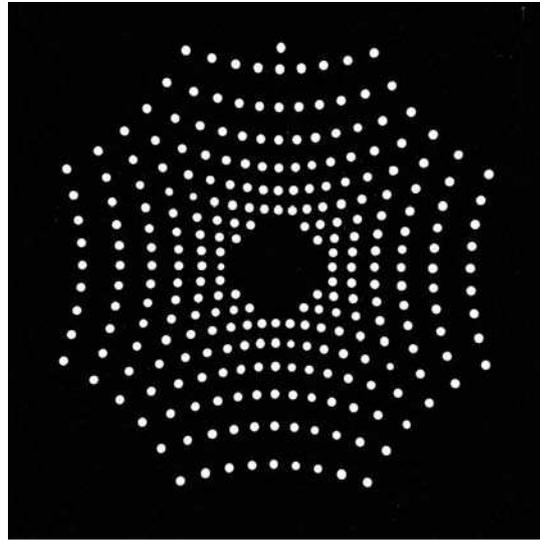


Figura 1.14: Imagen del plano de detección de la prueba de Hartmann.

la fuente puntual debe centrarse adecuadamente para evitar la introducción de aberraciones fuera de eje y el detector debe ser colocado perpendicular al eje óptico [13].

Así como en el caso de la prueba de Ronchi, la prueba de Hartmann también tiene una configuración nula para probar superficies esféricas, para lo que se diseña la pantalla de Hartmann en forma tal que su imagen proporcione una serie de puntos en un arreglo cuadrado. Si el arreglo no es cuadrado, se deberá a deformaciones de la superficie [15].

1.3 Pruebas Ópticas Interferométricas

Las pruebas interferométricas son un método muy común para probar superficies esféricas y asféricas que no difieren mucho de una esfera, pero uno de los problemas que presentan es la adaptación del frente de onda del interferómetro con la superficie esférica de prueba.

Los métodos convencionales para medir interferométricamente una superficie esférica son pruebas nulas que utilizan sistemas de compensación del frente de onda. Estos compensadores pueden ser reflectivos, refractivos o difractivos. El diseño y construcción de estas configuraciones nulas suele ser muy costoso.

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

Las principales ventajas de este tipo de pruebas es que no son de contacto, son rápidas de realizar, se puede tener una densidad grande de puntos a evaluar, son bastante precisas y repetibles. En las subsecciones siguientes se discutirá principalmente sobre los arreglos interferométricos utilizados para probar superficies esféricas convexas.

Existen varias configuraciones interferométricas que se usan en pruebas ópticas, casi todas ellas son sistemas de dos haces, por ejemplo los interferómetros de Fizeau y Twyman-Green. Estos interferómetros producen un interferograma (patrón de franjas) mediante la superposición de dos frentes de onda, uno de los cuales es un frente de onda de referencia conocido y el otro un frente de onda distorsionado cuya forma es la que se quiere conocer. Las franjas en estos interferómetros son franjas de igual espesor. Estos interferómetros son muy útiles para probar superficies planas, cóncavas y convexas.

1.3.1 Interferómetro de Fizeau

El interferómetro de Fizeau [16] [17] es un instrumento óptico que utiliza una fuente puntual monocromática para iluminar el sistema, una lente colimadora y una superficie de referencia. La superficie de referencia puede ser plana o curva. En la figura 1.15 se muestran dos configuraciones del interferómetro para probar superficies convexas; en el arreglo del inciso (a) se utiliza una superficie de referencia cóncava cuyo centro de curvatura coincide con el centro de curvatura de la superficie a probar; en la otra inciso (b) la superficie de referencia es plana, en este caso se utiliza una lente correctora de alta calidad para enfocar el haz. Nótese como este tipo de configuraciones es útil para probar superficies esféricas o esféricas que difieren poco de una esfera; y además las superficies de prueba no pueden ser demasiado rápidas puesto que sería difícil recolectar los rayos reflejados para su análisis.

1.3.2 Interferómetro de Twyman-Green

El interferómetro de Twyman-Green es otra configuración interferométrica muy utilizada para probar superficies ópticas [16]. Este interferómetro consiste de un láser, un expansor de haz o una fuente puntual monocromática y un colimador, una superficie de referencia y un divisor de haz. En la figura 1.16 se muestra una configuración para probar superficies convexas, esta configuración también es utilizada para probar lentes convergentes siendo el espejo

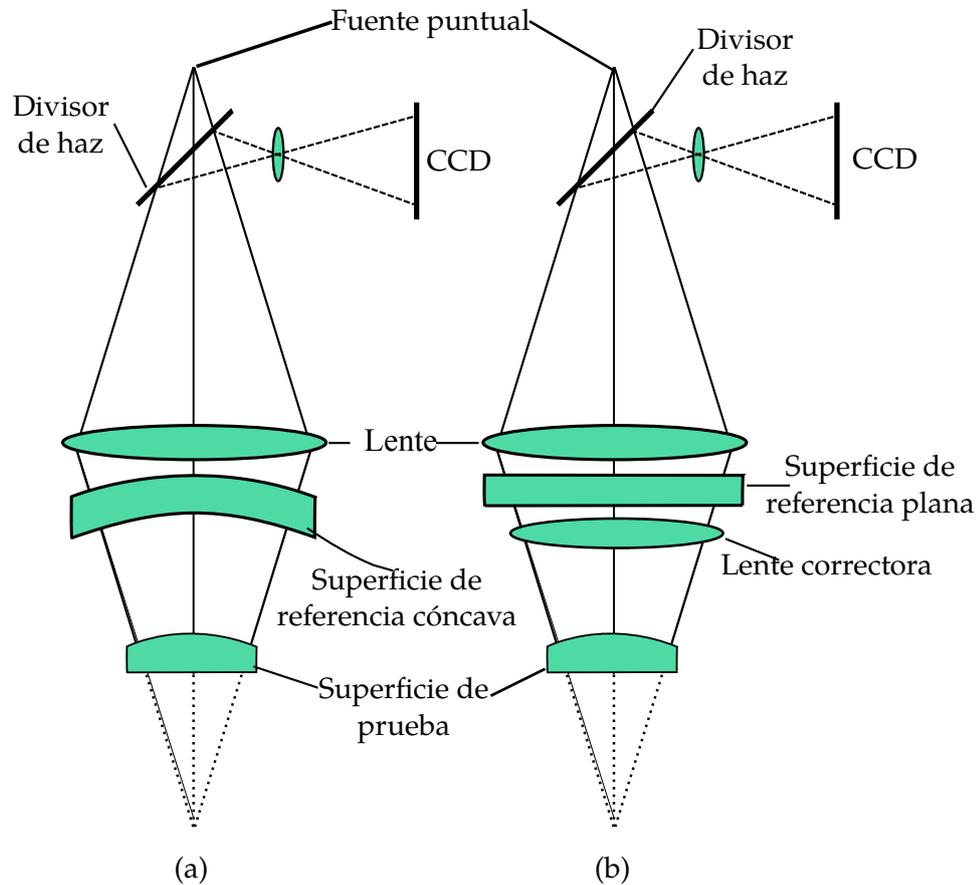


Figura 1.15: Configuración del interferómetro de Fizeau para probar superficies convexas para una superficie de referencia cóncava en (a) y una superficie de referencia plana (b).

convexo una superficie auxiliar. En general, esta configuración es adecuada para probar superficies ópticas esféricas o asféricas convexas que no difieren mucho de una esfera al igual que el interferómetro de Fizeau. Para esto el interferómetro se ajusta de forma que el centro de curvatura de la superficie de prueba coincida con el foco de la lente convergente. Si la superficie de prueba es perfecta, cuando es iluminada por el haz incidente, todos los rayos del haz serán normales a la superficie de prueba, de esta forma, el haz reflejado regresará por la misma trayectoria del haz incidente y cuando ambos haces interfieren en el plano de observación se obtendrán franjas de igual espesor; las líneas serán rectas si se produce inclinación en el espejo de referencia y circulares si hay desenfoque. Al igual que en el interferómetro de Fizeau, aquí la

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

superficie de prueba no puede ser demasiado rápida.

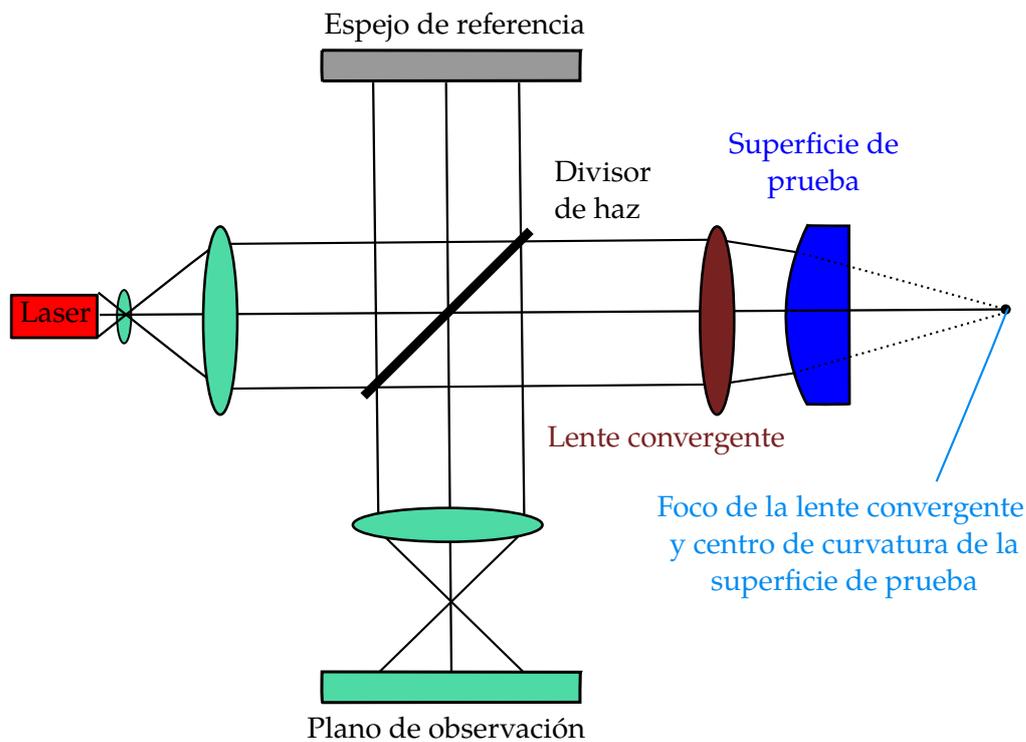


Figura 1.16: Configuración del interferómetro de Twyman-Green para probar superficies esféricas convexas.

1.3.3 Como se mide el frente de onda

Para medir la fase en un plano de un interferómetro de dos haces (como el Fizeau y el Twyman-Green) se requiere de la señal de interferencia en forma de un interferograma o patrón de franjas. Estos interferogramas, consisten de un patrón de franjas de igual espesor llamadas franjas de Fizeau, estos llevan la información de la fase, la cual corresponde a la diferencia entre el frente de onda de referencia y el de prueba. Las variaciones de fase a través del plano pueden representar la forma de la superficie, homogeneidad o grosor de los materiales o calidad de las componentes ópticas de prueba.

Una forma simple de obtener las variaciones de fase es producir una inclinación entre los frentes de onda de prueba y de referencia en los interferómetros. Así, si los frentes de onda de prueba y de referencia son planos e iguales las franjas de interferencia serán líneas rectas e igualmente espaciadas. Las variaciones de fase se observan como desviaciones de una línea recta en el patrón de franjas, lo que significa que el frente de onda de referencia no es plano, figura 1.17a). Las deformaciones del frente de onda pueden estimarse si son examinadas visualmente estas desviaciones respecto a una línea recta. En los dos interferómetros más utilizados, el Fizeau y el Twyman-Green, el espaciamiento S entre dos franjas vecinas corresponden a variaciones en la forma de la superficie de $1/2$ de la longitud de onda λ de la luz usada en la prueba (1 franja = $\lambda/2$). Así, los errores E_s en la forma de la superficie están dados por

$$E_s = \frac{\lambda \Delta(x, y)}{2S} \quad (1.14)$$

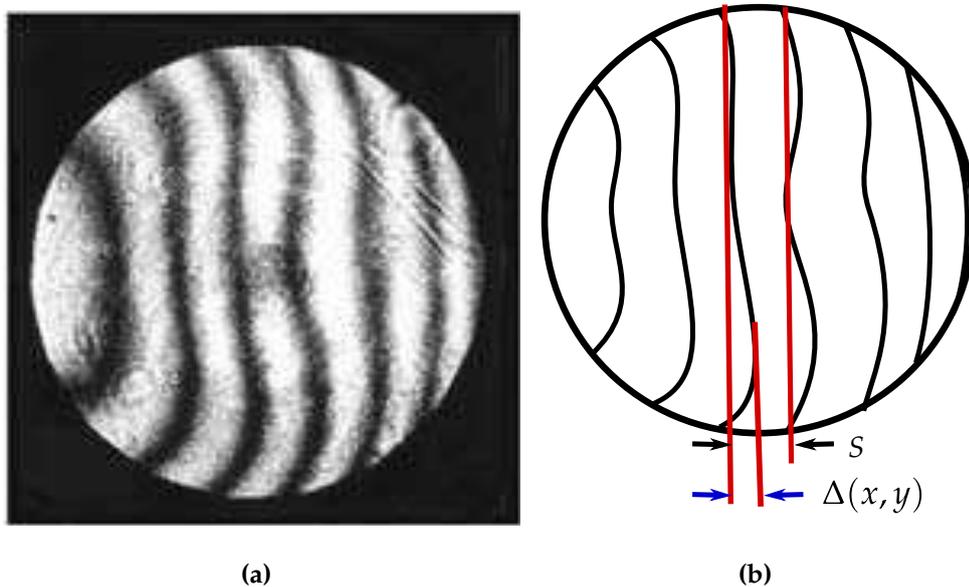


Figura 1.17: (a) Interferograma de una superficie de prueba (Imágenes tomadas de *Optical shop testing* [5]), (b) cálculo de las deformaciones de la superficie.

donde $\Delta(x, y)$ es la desviación relativa de la franjas respecto a una línea recta, figura 1.17b). De forma general, la relación entre la distancia entre franjas

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

y las deformaciones o errores en la superficie no sólo dependen de la longitud de onda utilizada de la prueba sino también en la configuración del interferómetro y los índices de refracción de los componentes por los cuales pasa el haz. El método visual proporciona una precisión que depende de las habilidades de la persona que realiza las mediciones que en el mejor de los casos se puede aproximar a $\lambda/20$ [18].

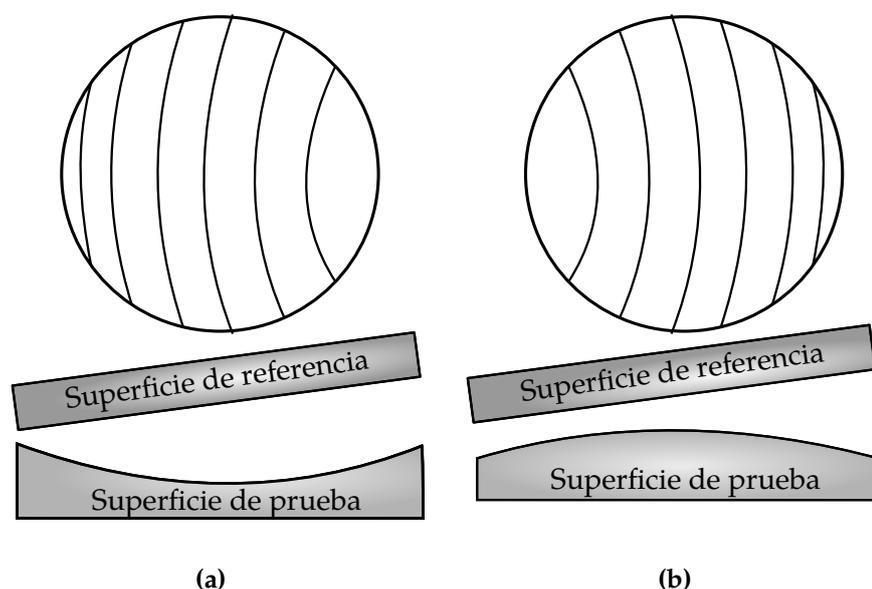


Figura 1.18: Franjas de interferencia correspondientes a una superficie plana para superficies de prueba convexas en a) ; aquí las franjas se curvan hacia la porción angosta de la cuña, y cóncavas b); las franjas se curvan hacia la parte ancha

El método más utilizado para analizar interferogramas cuantitativamente es el método de seguimiento de franjas [19]. El seguimiento de franjas consiste en registrar las posiciones de los máximos y mínimos de intensidad de las franjas en un interferograma; el resto de los datos son interpolados con el propósito de crear un mapa de fase en el plano de medición. El seguimiento de franjas requiere que las franjas estén ordenadas con el propósito de observar cambios en la fase entre franjas, el proceso se simplifica si se introduce inclinación entre los frentes de onda de referencia y de prueba. La dirección de la inclinación debe ser conocida previamente con el fin de determinar correctamente la forma de la superficie de prueba; si la superficie es convexa las franjas se curvan hacia la parte más angosta de la cuña formada por la inclinación (figura 1.18a)), si la

superficie es cóncava las franjas se curvan hacia la parte más ancha de la cuña, figura 1.18b). Si por otra parte, se obtienen franjas cerradas en el interferograma, entonces el ordenamiento de éstas requiere de un conocimiento previo de la superficie que se está probando.

Una vez que los valores de las deformaciones del frente de onda se han obtenido para varios puntos del interferograma, se tiene que realizar una interpolación entre puntos para estimar o encontrar la forma del frente de onda completo. Esto último se puede lograr mediante ajuste polinomial, usando interpolación lineal o usando un ajuste de splines. Uno de los métodos más utilizados para la interpolación es el de ajuste polinomial por mínimos cuadrados, el cual es un método de ajuste de puntos global debido a que sólo se utiliza una función para representar el frente de onda de todo el interferograma [18].

1.3.4 Pruebas interferométricas nulas

Si la superficie a probar difiere demasiado de una esfera los rayos incidentes sobre ella no serán normales necesariamente y en consecuencia los rayos reflejados no seguirán a su regreso la misma trayectoria que los incidentes; esto se deberá a que el frente de onda reflejado no será esférico. Como solución, se utiliza un sistema óptico tal que produzca un frente de onda esférico que se ajuste a la superficie de prueba, entonces se tendrá una condición nula [20]. En otras palabras, se tiene que construir un sistema óptico tal que convierta al frente de onda esférico en un frente de onda plano. Entonces, si la superficie de prueba es una superficie esférica perfecta, cuando el haz pase por el corrector después de haber sido reflejado por la superficie de prueba será un haz perfectamente colimado y después se formarán franjas rectas de igual espesor cuando el haz de prueba interfiera con el haz de referencia. Así, cualquier desviación de las franjas de su forma lineal será una medida de los errores de la superficie esférica de prueba.

1.3.5 Compensadores nulos

Un compensador nulo es un sistema óptico auxiliar diseñado de forma tal que, en combinación con una superficie esférica, forma la imagen estigmática de una fuente puntual. Así, si se coloca un interferómetro en uno de los puntos estigmáticos y la superficie de referencia es alineada apropiadamente en el otro punto, se produce un interferograma nulo [1]. Los compensadores son

1. SUPERFICIES Y PRUEBAS ÓPTICAS

muy útiles para probar superficies esféricas cónicas cóncavas y convexas. [21]. Para el caso de una superficie convexa se tiene que satisfacer que el corrector tenga al menos un elemento óptico que sea mayor a ésta.

Un ejemplo de compensador nulo es la esfera de Hindle (1.19a) y el llamado cascarón de Hindle (1.19b), ambas se usan para probar superficies esféricas convexas [21]. La prueba de la esfera de Hindle se basa en que una superficie hiperbólica produce un frente de onda esférico convergente como si proviniera de su foco cercano cuando la superficie es iluminada con un frente de onda esférico divergente proveniente de su foco lejano debido a su geometría. Si se coloca una superficie esférica con su radio de curvatura coincidente con el foco cercano de la hipérbola, el frente de onda se refleja sobre si mismo hacia el plano objeto original, figura 1.19(a). Si la superficie hiperbólica de prueba y la esfera de Hindle son perfectas, se formará una imagen estigmática en el plano objeto.

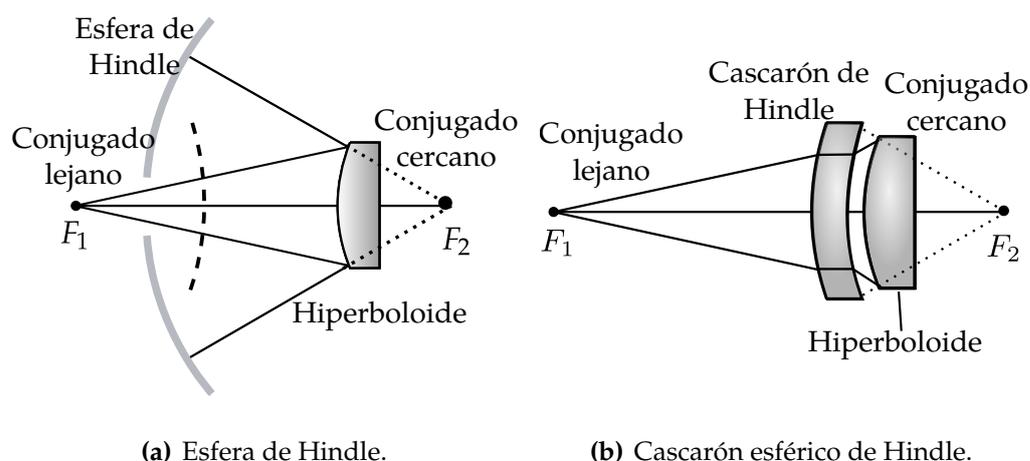


Figura 1.19: Pruebas de Hindle para probar un hiperboloide convexo.

La desventaja de esta prueba es que la esfera de Hindle debe ser de alta calidad óptica, su diámetro debe ser superior al de la superficie de prueba y además debe ser el doble de rápida ya que los rayos reflejados por la superficie de prueba deben incidir normalmente [22]. Si la superficie de prueba es muy grande o rápida, se utiliza una modificación a la prueba de Hindle en la cual se utiliza un menisco esférico transparente, llamado cascarón de Hindle (1.19b). La superficie cóncava externa del cascarón de Hindle sirve como esfera de Hindle.

1.3.6 Holograma de una superficie esférica de referencia: hologramas reales

Otra forma de realizar una prueba nula a sistemas ópticos es por medio de la holografía debido a que un holograma es un interferograma con un ángulo de inclinación grande entre los frentes de onda de referencia y de prueba. Si se tiene superficie esférica perfecta de referencia, se puede crear un holograma con el frente de onda producido con esta superficie. Las franjas de interferencia formadas por el frente de onda producido por la superficie esférica perfecta de referencia y el frente de onda plano son las que se almacenan en el holograma, después el frente de onda almacenado en el holograma se puede utilizar para probar interferométricamente superficies esféricas que sean supuestamente idénticas a la superficie de referencia perfecta [20].

En la figura 1.20, se muestra un arreglo interferométrico para hacer un holograma real de un espejo cóncavo. El holograma se hace en un plano conjugado al espejo de prueba. Los hologramas pueden ser grabados o almacenados en placas fotográficas, materiales termoplásticos o en cristales fotorefractivos.

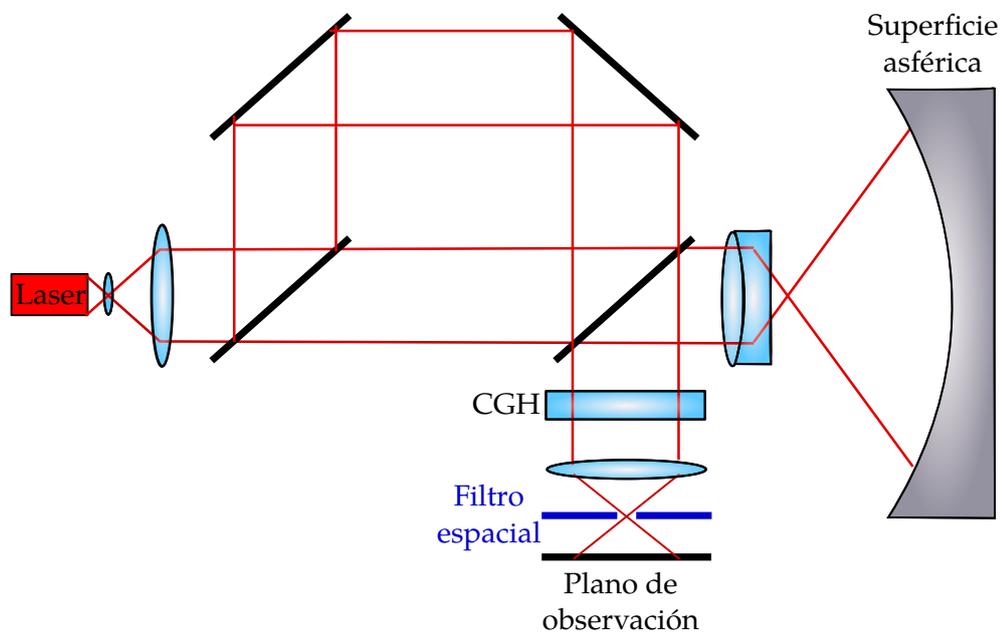


Figura 1.20: Configuración del interferómetro Mach-Zehnder modificado para la prueba nula de una superficie esférica mediante un holograma real.

Después de procesar el holograma se le coloca en su posición original y la superficie esférica perfecta es reemplazada por el espejo esférico a probar. Así, el frente de onda almacenado en el holograma se compara interferométricamente con el frente de onda producido por el espejo de prueba. Cabe mencionar que debido a que el holograma produce varios ordenes de difracción, es necesario seleccionar uno de ellos con ayuda de un filtro espacial. Aquí, el filtro espacial y la lente que forma la imagen del holograma sólo son necesarios en la reconstrucción.

1.3.7 Hologramas generados por computadora: hologramas sintéticos

Existen ocasiones, que no se tiene a disposición una superficie esférica perfecta de referencia para fabricar un holograma real, por lo que una solución a este problema es construir un holograma sintético generado por computadora o CGH (Computer Generated Hologram por sus siglas en inglés) [2] [20]. Un CGH es un corrector nulo que proporciona una representación binaria de un interferograma real (holograma), este holograma se obtiene haciendo interferir matemáticamente un frente de onda esférico ideal con un frente de onda plano inclinado. El CGH transforma un frente de onda colimado en un frente de onda esférico apropiado. Después de reflejarse por la superficie de prueba, el frente de onda esférico regresa para ser convertido en un frente de onda colimado si la superficie es perfecta. De esta forma, para el interferómetro, la combinación entre el CGH y la superficie de prueba parecerá una superficie plana. En general, el holograma se coloca en el plano imagen de la superficie a probar, que es la misma posición en donde se colocaría un medio de registro para fabricar un holograma real donde se hace interferir el frente de onda esférico producido por la superficie de prueba con el frente de onda de referencia. Al igual que en un holograma real, cuando se coloca el CGH dentro del interferómetro, este y las franjas de interferencia producen un patrón de Moiré que proporciona las diferencias entre el CGH y las franjas de interferencia. En la figura 1.21 se muestran los resultados obtenidos de una prueba CGH.

Las principales ventajas de utilizar un CGH es que se pueden generar pruebas nulas para probar gran variedad de superficies, sin la necesidad de contar con una superficie de referencia perfecta para generar el holograma. Sus principales desventajas es que son difíciles de construir, su costos y toma tiempo construirlos. Las principales fuentes de error involucradas en el uso de un

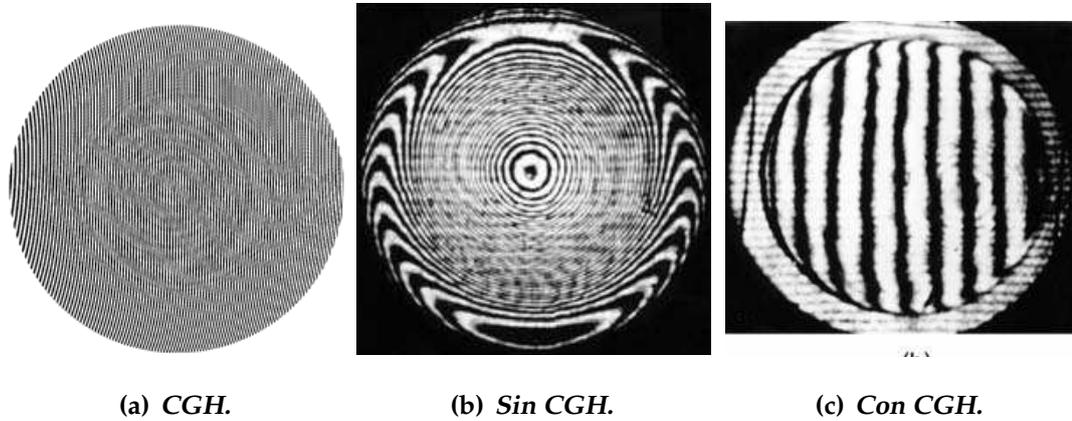


Figura 1.21: Resultados interferométricos obtenidos de la prueba de una superficie esférica sin CGH, y con CGH. Imágenes tomadas de *Optical shop testing* [5].

CGH son defectos e imprecisión en su construcción.

1.3.8 Hologramas generados por computadora y óptica nula

Para probar superficies esféricas convexas se utiliza la combinación de un CGH y óptica nula simple; es decir, se tiene un sistema híbrido nulo. A esta combinación se le denota como placa de prueba holográfica [1][3]. Para probar dichas superficies, se utiliza una superficie cóncava esférica. La asfericidad del espejo convexo de prueba es compensada con un CGH, el cual es fabricado sobre la superficie esférica cóncava. Para diseñar el holograma se necesita calcular las posiciones de los anillos que proporcionan la fase deseada del frente de onda de referencia. La configuración de la prueba se realiza colocando la placa holográfica muy cerca de la superficie a probar, como se muestra en la figura 1.22.

Esta prueba utiliza la interferencia entre el frente de onda de referencia y el de prueba del cual se requiere determinar la forma de la superficie. La luz difractada por el holograma sobre la superficie esférica forma el frente de onda de referencia y la luz reflejada por la superficie convexa proporciona el frente de onda de prueba, figura 1.22. La placa de prueba holográfica es diseñada de forma tal que la luz incida normal sobre la superficie esférica de prueba.

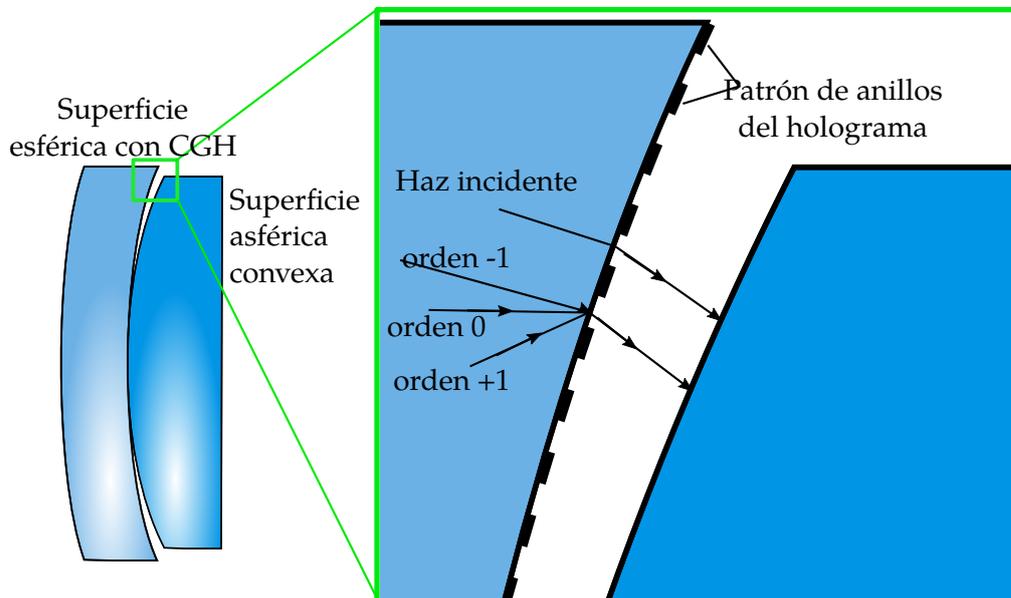


Figura 1.22: La placa de prueba holográfica consiste de una superficie esférica de referencia sobre la cual se dibuja un patrón de anillos izquierda. El haz de prueba es reflejado por la superficie de prueba y regresa a través del CGH a orden cero, el haz de referencia es reflejado por el holograma a orden -1 (derecha).

Una dificultad evidente para llevar a cabo esta prueba es lo complicado que es construir superficies de referencia de alta precisión, reducir las aberraciones de tal forma que se asegure que la luz regresara a través del interferómetro.

1.4 Conclusión

En este capítulo se ha discutido la importancia de la representación matemática de superficies en el desarrollo de sistemas ópticos de alta calidad. Se ha mencionado que para construir una superficie se tiene que probar de algún modo. Se han revisado varios métodos para probar superficies asféricas que van desde métodos geométricos hasta los interferométricos, los cuales tienen ventajas y limitaciones por lo que se puede concluir que la elección del método a usar depende principalmente del tipo de superficie a probar y la precisión con la que se requiere conocer la calidad de la superficie.

Los métodos mencionados en este capítulo son muy efectivos para probar superficies esféricas aunque muestran complicaciones al momento de probar superficies rápidas. En los últimos años se ha desarrollado un nuevo método de prueba de superficies reflectoras el cual es conocido como método de *paneles nulos* que ha mostrado ser eficaz para evaluar superficies rápidas. En el capítulo siguiente se explicará a detalle sus bases teóricas, así como su aplicación experimental.

Capítulo 2

Pantallas Nulas

En el presente capítulo se abordará de la forma más general posible para nuestros propósitos lo correspondiente a la prueba de pantallas nulas, la cual se empleará para probar y evaluar una superficie esférica cóncava, es decir determinar la forma de la superficie y comparar esta con la superficie de diseño de ésta. Empezando primeramente por describir el método de forma general, posteriormente se explicará de forma detallada como se diseña la pantalla nula para nuestra prueba en específico, y por último el procedimiento para recuperar la forma de la superficie que se está probando.

2.1 Método de Pantallas Nulas

El método de pantallas nulas consiste en un diseño de un arreglo o patrón de puntos(manchas) o líneas específico tal que al ser reflejado en una superficie de prueba produce un patrón o arreglo ordenado. A dicho diseño se le denomina pantalla nula y se crea a partir de un trazo exacto de rayos, de forma inversa es decir se crea primero el patrón que se quiere que produzca el reflejo de la superficie de prueba, posteriormente, cada rayo de luz de éste se hace pasar por un único punto (pinhole o diafragma) hasta intersectarlo con un modelo matemático(superficie de diseño), que esté próximo a la superficie de prueba para por ultimo, usando la ley de reflexión, se encuentra el rayo reflejado y se interseca con una segunda superficie (cilindros, conos y planos) la cual será nuestra pantalla nula.

Una vez que se ha construido la pantalla nula y se ha colocado en la posición correcta respecto a la superficie, ésta debe producir un patrón igual al deseado y diseñado en el primer paso del párrafo anterior si no es así entonces la su-

2. PANTALLAS NULAS

perficie de prueba difiere de la superficie de diseño y se dice que la superficie presenta deformaciones y/o desalineaciones. La forma de la pantalla nula suele ser principalmente, plana, cilíndricas o cónica, esto dependerá de la superficie de prueba, la posición en que se coloque y la aplicación que se desee como se muestra en la figura 2.1.

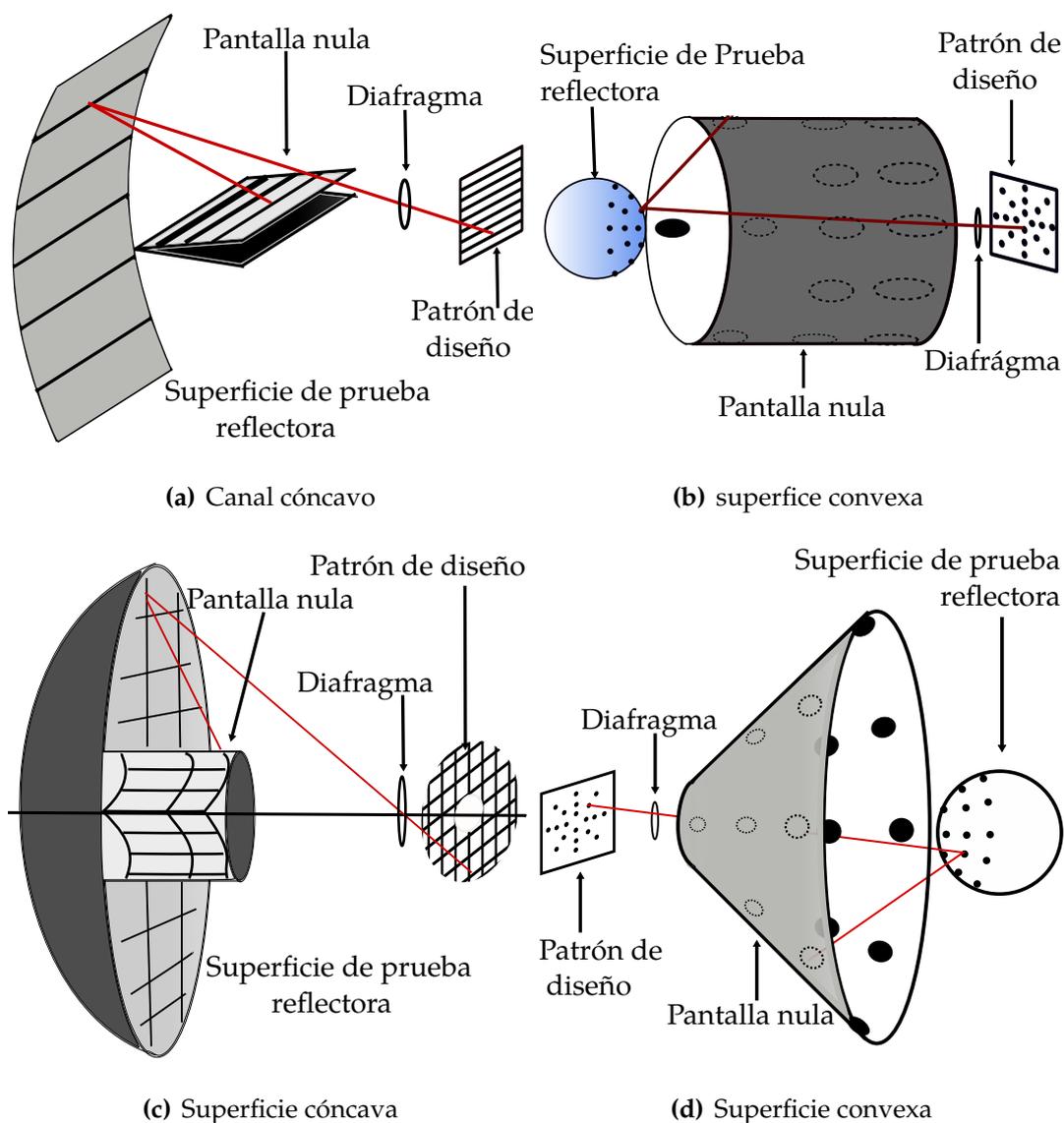


Figura 2.1: Diferentes formas de pantallas nulas con diversas configuraciones convenientes para evaluar distintos tipos de superficie.

El método de pantallas nulas permite evaluar superficies rápidas ya sean cóncavas o convexas (ver figura 2.1) y se ha aplicado en la evaluación de colectores solares parabólicos, espejos de canales parabólicos, superficies esféricas y asféricas así como en córneas humanas.

Para el fin buscado en este trabajo es conveniente usar una pantalla cilíndrica para una configuración de superficie cóncava de revolución.

2.2 Diseño de la Pantalla Nula Cilíndrica

Dado que la superficie de prueba en este trabajo está basada en un elipsoide de revolución con la cara cóncava reflectora se planteó usar una configuración como la expuesta en la figura 2.1c). Por lo tanto en el presente apartado se explica cómo diseñar la pantalla nula conveniente a nuestros propósitos.

Como se ha mencionado antes, el diseño de la pantalla nula se realiza mediante un trazo exacto de rayos inverso, por lo que es preciso comenzar diseñando el patrón que se quiere obtener. Aunque en este apartado se presentará sin pérdida de generalidad, la proyección para un punto de cualquier patrón que se desee construir.

Tomando en cuenta la figura 2.1 c) partimos del hecho que para definir una pantalla nula se necesita una superficie de referencia que se acerque a nuestra superficie de prueba, en este caso elegimos como superficie de referencia representada por $f(x, y, z) = 0$ la cual es una superficie de revolución que tiene por generatriz una sección cónica con vértice en el origen y su correspondiente ecuación es la siguiente.

$$f(x, y, z) = z^2Q + \rho^2 - 2rz. \quad (2.1)$$

En la ecuación(2.1), tenemos que $Q = k + 1$, siendo $k = -e^2$, donde e es la excentricidad; r el radio de curvatura de la superficie y $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Tomando en cuenta que la superficie f es una superficie de revolución, sin pérdida de generalidad, podemos tomar la proyección sobre cualquier plano meridional, es decir, que pase por el eje Z y tomar un punto $P_1 = (\rho_1, b + a)$ del patrón de diseño en dicho plano, ver figura 2.2. Estrictamente el punto P_1

2. PANTALLAS NULAS

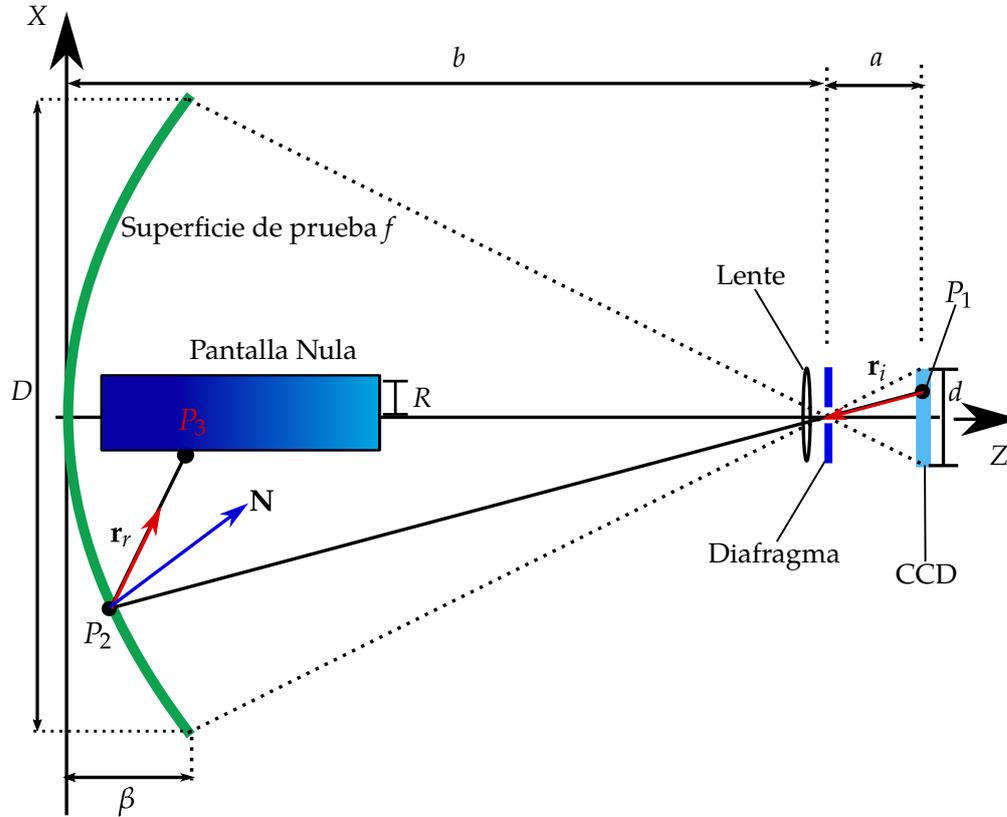


Figura 2.2: Variables involucradas en el diseño de una pantalla nula cilíndrica

es $(\rho_1, \theta_1, b + a)$, en coordenadas cilíndricas, en adelante se omitirá la coordenada angular pues se trabajará siempre sobre el mismo plano con $\theta = 0$.

La recta que pasa por los puntos $P_1 = (\rho_1, z_1)$ (siendo $z_1 = b + a$) y $P_2 = (\rho_2, z_2)$ en dicho plano también pasa por el diafragma que está en las coordenadas $(0, b)$ y tiene la dirección del rayo incidente, $\mathbf{r}_i = (\rho_1, a)$ por lo tanto, tiene por ecuaciones las siguientes:

$$P = P_1 + t\mathbf{r}_i \quad (2.2)$$

$$z = \frac{a}{\rho_1}\rho + b \quad (2.3)$$

Entonces el punto P_2 donde se interseca la recta de la ecuación (2.2) y la función

f , tiene por coordenadas:

$$\rho_2 = \frac{a(r - Qb) - \sqrt{a^2r^2 - \rho_1^2b(2r - bQ)}}{a^2Q + \rho_1^2} \rho_1 \quad (2.4)$$

$$z_2 = b + a \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.5)$$

Estas ecuaciones se obtienen despejando ρ de la ecuación (2.3) y sustituyéndola en la ecuación (2.1) para encontrar el valor de intersección en la coordenada z y posteriormente encontrar la expresión de ρ_2 , finalmente en la ecuación (2.5) se deja z_2 en términos de ρ_2 .

El siguiente paso consiste en encontrar las coordenadas del punto de intersección de la recta que tiene dirección \mathbf{r}_r del rayo reflejado y pasa por el punto P_2 para ello necesitamos conocer el vector normal a la superficie f en el punto P_2 . Usando algunos conceptos de cálculo de varias variables se sabe que si S es una superficie descrita por F , el vector normal a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) es $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Aplicando este concepto a la función f de la ecuación (2.1) tenemos que $F = Qz^2 + \rho^2 - 2rz$ y

$$\nabla F = 2(Qz - r, \rho), \quad (2.6)$$

Y por lo tanto el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ tiene la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(Qz - r, \rho)}{\sqrt{(Qz - r)^2 + \rho^2}} \quad (2.7)$$

Evaluando la expresión anterior en el punto (ρ_2, z_2) toma la siguiente expresión,

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{(Qz_2 - r, \rho_2)}{\sqrt{(Qz_2 - r)^2 + \rho_2^2}}. \quad (2.8)$$

Ahora bien, sabemos por la ley de reflexión que el ángulo de \mathbf{r}_i y $\hat{\mathbf{N}}$, es igual que entre \mathbf{r}_r y $\hat{\mathbf{N}}$, por lo que podemos hacer uso de la expresión para un punto reflejado sobre una recta usando un poco de Geometría Analítica. Entonces si queremos reflejar un punto P_i sobre una recta que tiene dirección \mathbf{v}_i en una recta que tiene por dirección el vector \mathbf{n} y ambas se intersecan en un punto P' el vector director \mathbf{v}_r (ver figura 2.3) de la recta que contiene al punto reflejado

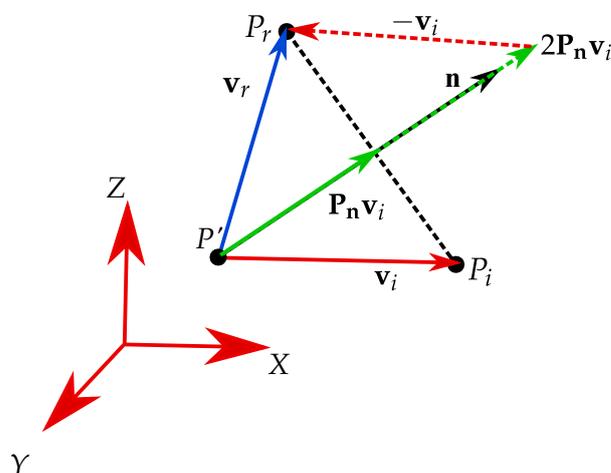


Figura 2.3: Reflexión del vector \mathbf{v}_i sobre \mathbf{n} .

P_r y pasa por P' tiene dirección:

$$\mathbf{v}_r = 2\mathbf{P}_n \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i \quad (2.9)$$

El término $\mathbf{P}_n \mathbf{v}_i$ es la proyección de \mathbf{v}_i sobre \mathbf{n} definida como:

$$\mathbf{P}_n \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}}{n^2} \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

Para el caso de la pantalla nula, usando las ecuaciones (2.9) y (2.10) para reflejar \mathbf{r}_i sobre el vector normal a la superficie \mathbf{N} , obtenemos que \mathbf{r}_r tiene la siguiente expresión.

$$\mathbf{r}_r = -2 \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{N}}{N^2} \mathbf{N} + \mathbf{r}_i. \quad (2.11)$$

Mientras que la recta \mathcal{L} que pasa por el punto P_2 y tiene dirección \mathbf{r}_r tiene por ecuación.

$$P = P_2 + t_2 \mathbf{r}_r. \quad (2.12)$$

Donde $P = (\rho, z)$, $P_2 = (\rho_2, z_2)$ y $\mathbf{r}_r = (r_{r\rho}, r_{rz})$ que son las coordenadas en radial y azimutal de \mathbf{r}_r . Si llevamos a la ecuación (2.12) a su forma punto-pendiente tenemos que,

$$\rho = (z - z_2) \frac{r_{r\rho}}{r_{rz}} + \rho_2. \quad (2.13)$$

La recta \mathcal{L} se interseca con el cilindro en el que está la pantalla nula en $\rho = R$ siendo R el radio del cilindro y por consiguiente:

$$R = (z - z_2) \frac{r_{r\rho}}{r_{rz}} + \rho_2$$

Por tanto se obtiene que las coordenadas del punto P_3 son:

$$\rho_3 = R, \quad (2.14)$$

$$z_3 = (R - \rho_2) \frac{r_{rz}}{r_{r\rho}} + z_2. \quad (2.15)$$

Donde

$$\frac{r_{rz}}{r_{r\rho}} = \frac{a\rho_2^2 - a(Qz_2 - r)^2 + 2\rho_1\rho_2(Qz_2 - r)}{\rho_1\rho_2^2 - \rho_1(Qz_2 - r)^2 - 2a\rho_2(Qz_2 - r)}. \quad (2.16)$$

Es fácil notar que tanto las coordenadas angulares θ_2, θ_3 , pertenecientes a la coordenada angular de los puntos P_2 y P_3 tienen el mismo valor que θ_1 pues todo el tiempo se ha trabajado sobre el mismo plano como f es una superficie de revolución no reflejara la luz fuera del plano en el que esté el rayo incidente, que tiene por dirección \mathbf{r}_1 .

Como hemos mostrado ahora ya se tiene las ecuaciones que nos darán los valores de los puntos P_1, P_2, P_3 sólo falta determinar los parámetros a y b que dependerán del valor de los diámetros (d y D), las propiedades de la superficie y la distancia focal f_l de la lente con que se enfocará la imagen de la pantalla nula generada por la superficie. Los valores d y f_l corresponden a la cámara que se usará para captar la imagen reflejada por la superficie, compuesta principalmente por un CCD (por sus siglas del inglés charge-coupled device) y una lente que se enfoca manualmente.

Como dijimos antes los parámetros a y b dependen de las propiedades de la superficie y de la cámara que se usara para captar la imagen y una forma de deducirlos se discute a continuación.

2. PANTALLAS NULAS

Tomando en cuenta la semejanza que existe entre el triángulo que tiene por catetos $D/2$, $b - \beta$ y el que tiene catetos a y $d/2$ podemos deducir que,

$$\frac{b - \beta}{D} = \frac{a}{d} \quad (2.17)$$

de donde se sigue que

$$b = \frac{Da}{d} + \beta. \quad (2.18)$$

De la figura 2.2 observamos que β corresponde al valor máximo de la sagita de la superficie también llamada sagita máxima, la cual podemos obtener despejando z de la ecuación (2.1) y reduciéndola hasta llegar a la siguiente expresión,

$$z = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - Qc^2\rho^2}} \quad (2.19)$$

donde $c = 1/r$ es la curvatura en el vértice. Evaluando $z = \beta$ obtenemos

$$\beta = \frac{c(D/2)^2}{1 + \sqrt{1 - Qc^2(D^2/4)}}. \quad (2.20)$$

Ahora bien, a corresponde directamente a la distancia a la cual se formará la imagen producida por la lente, para esto sabemos que la pantalla nula producirá una imagen en z_o la cual será reflejada por la superficie reflectora representada por la ecuación (2.1) y formará una imagen en z_i como se ve en la figura 2.4. El valor de $|z_i|$ es la distancia de z_i al vértice de la superficie, por lo que tomando en cuenta la aproximación paraxial de la formación de imágenes para espejos cóncavos tenemos que;

$$\frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f_s}, \quad (2.21)$$

donde $f_s = r/2$, siendo f el foco de la superficie y r el radio de curvatura en el vértice. Despejando z_i en términos de z_o y r tenemos,

$$z_i = \frac{rz_o}{2z_o - r}. \quad (2.22)$$

Después la imagen formada por la superficie reflectora servirá como objeto para la lente que formará una última imagen a una distancia a de ella en el

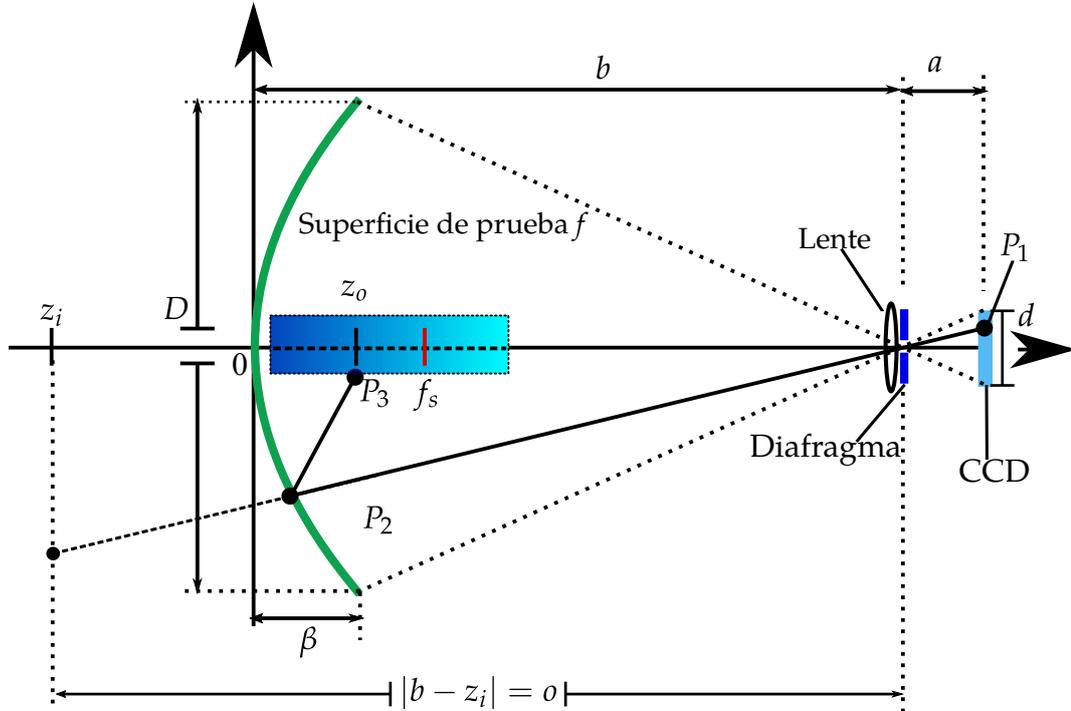


Figura 2.4: El punto colocado sobre la pantalla nula en z_0 formara un punto imagen en z_i , el cual servirá de objeto a la lente

CCD, una vez sea enfocada. Así que de igual forma de la aproximación paraxial de lentes convergentes tenemos.

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f_l} \quad (2.23)$$

Donde o es la distancia de la lente al objeto, i es la distancia de la lente a la imagen y f_l es el foco de la lente.

Como z_0 es la distancia del objeto al vértice de la superficie y estamos tomando en cuenta la aproximación paraxial tenemos que elegir un valor de z_0 lo más cercano posible al vértice de la superficie, para que z_0 sea menor a la distancia focal de la superficie. Ahora bien la imagen formada por la superficie tendrá una distancia respecto de la lente de $o = |-z_i + b|$ por lo que sustituyendo o en (2.23) y posteriormente la expresión de b obtenida en la ecuación (2.18) para tomar en cuenta las condiciones que dieron origen a la ecuación (2.18), en la

2. PANTALLAS NULAS

ecuación (2.23) obtenemos:

$$\frac{1}{|-z_i + \beta + \frac{aD}{d}|} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_l}. \quad (2.24)$$

Como elegimos z_o muy cerca del vértice entonces la imagen formada por la superficie es virtual y z_i es negativa por lo que podemos quitar el valor absoluto de la ecuación (2.24), posteriormente procedemos a despejar a y hacemos el cambio de variable $s = \beta - z_i$, entonces tenemos:

$$\frac{D}{df_l} a^2 + \left(\frac{s}{f_l} - 1 - \frac{D}{d} \right) a - s = 0. \quad (2.25)$$

La última ecuación es una ecuación de segundo grado de a la cual no tiene variables desconocidas por lo que resolviéndola tenemos que la expresión final de a es la siguiente.

$$a = \frac{-s + f_l \left(\frac{D}{d} + 1 \right) \pm \left[s^2 + f_l^2 \left(1 + \frac{D}{d} \right)^2 + 2f_l s \left(\frac{D}{d} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}}{2\frac{D}{d}} \quad (2.26)$$

Obsérvese que el termino de la ecuación (2.26) que tiene radical siempre es positivo y mayor a s , intuitivamente a tomará valores que cercanos a f_l , si tomamos el valor con el radical negativo obtendríamos un valor de a negativo y con un valor absoluto más grande que a , pero si tomamos el valor positivo del termino con radical obtenemos un valor positivos de a y cercano al valor de f_l .

Tomando como valor de a la solución que tiene al valor de la raíz cuadrada positivo en la ecuación (2.26) y sustitullendola en la ecuación (2.18) obtenemos el valor del parámetro b . Se puede ver que si la imagen formada por la superficie en z_i está a una distancia relativamente lejana a la lente entonces a se aproximará a f_l (si $|b - x_i| \gg f_l \Rightarrow a \approx f_l$).

Una vez conocidos los parámetros a y b se puede diseñar la pantalla nula partiendo, como ya se ha dicho del patrón de diseño que se quiere obtener para posteriormente deducir de cada punto P_1 las coordenadas correspondientes de P_2 y P_3 , tanto angulares como radiales. Después de asignarle un punto P_3 a cada punto P_1 , los puntos P_3 se acomodarán sobre un cilindro de radio R . A los puntos P_3 sobre este cilindro se les aplicará una transformación para pasar a dichos puntos a un plano; dicho de otra forma se requiere de una transfor-

mación que desenrolle el cilindro.

Sabemos que un $P_3 = (\rho_3, \theta_3, z_3)$ en coordenadas cilíndricas y que está sobre un cilindro de radio R y para cada punto P_3 su coordenada angular esta entre el intervalo $(0, 2\pi)$, por lo que una forma intuitiva de llevar los puntos del cilindro a un plano conservando la distancia medida sobre la superficie de un cilindro, entre cualesquiera dos puntos sobre el mismo, es asignar un punto $P_4 = (x_4, z_4)$ sobre un plano siendo x_4, z_4 las siguientes funciones:

$$x_4 = R\theta_3, \quad (2.27)$$

$$z_4 = z_3. \quad (2.28)$$

Una vez conseguido el plano que contenga a los puntos P_4 podremos imprimirlos en una hoja de papel para formar la pantalla nula cilíndrica y posteriormente montar el diseño experimental. Una simulación del proceso hecha con los valores de la tabla 2.1 en MATLABTM se muestra en la figura 2.5, se puede notar que el diseño del patrón que se quiere obtener es muy pequeño comparado con la superficie a probar, en la figura 2.6(b) se muestra la pantalla nula que generará el patrón que se quiere obtener.

Elemento	Símbolo	Valor
Radio de curvatura de la superficie	r	72.2mm.
Diámetro de la superficie	D	164mm.
Longitud del CCD	d	4.2mm.
Constante cónica	k	-0.5
Radio del cilindro de la pantalla nula	R	12.5mm.
Longitud de la lente	f_l	3.5mm.
Parámetro a	a	-3.5
Parámetro b	b	180.3mm.

Tabla 2.1: Valores de las variables involucradas para la construcción de una pantalla nula cilíndrica para una superficie cóncava.

2. PANTALLAS NULAS

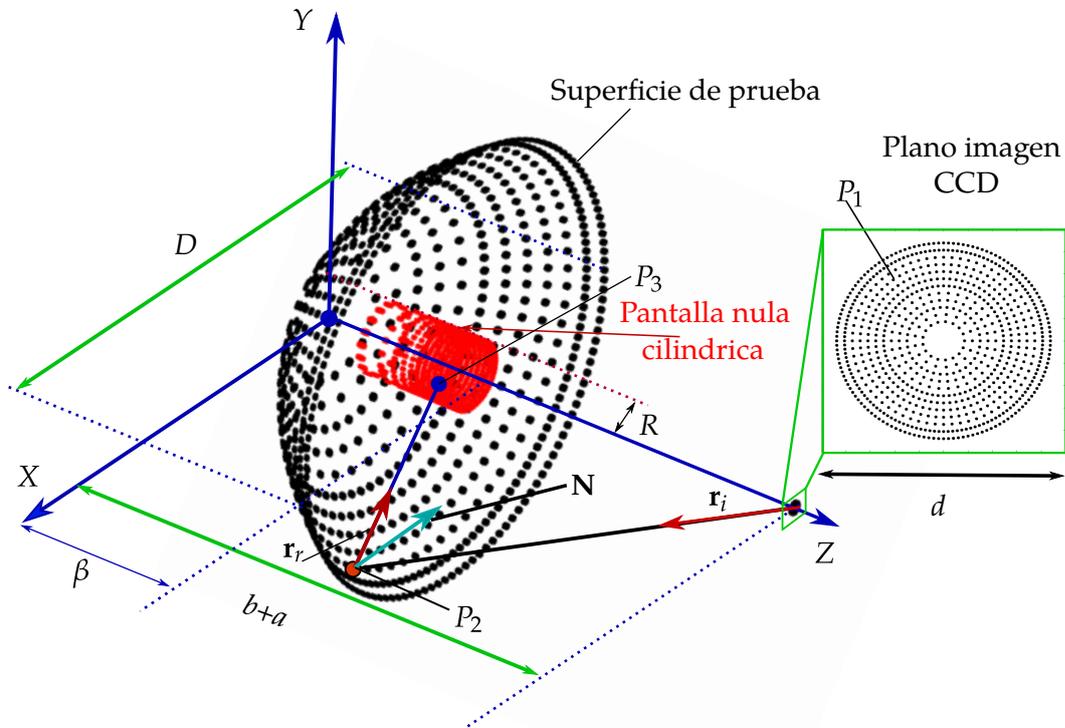


Figura 2.5: Simulación del proceso matemático para construir una pantalla nula.

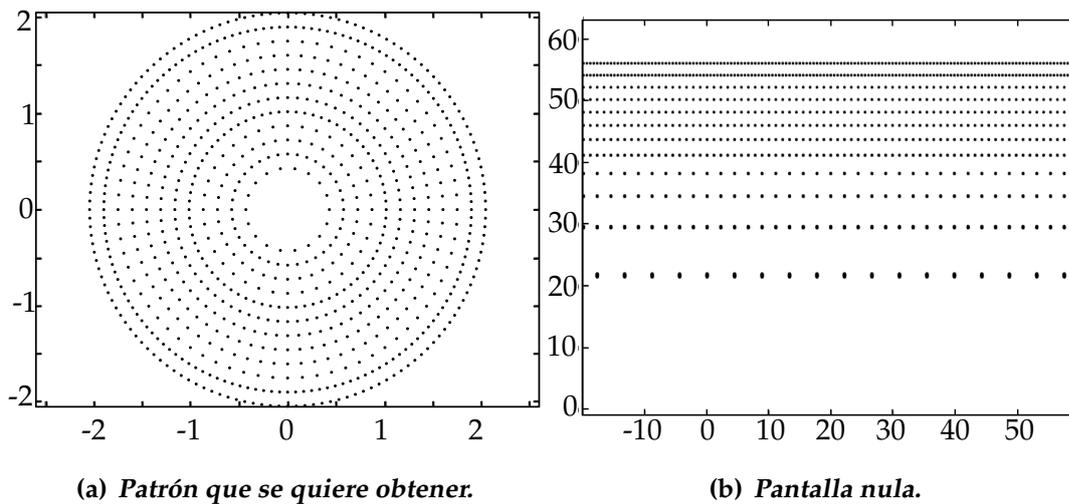


Figura 2.6: Se muestra la fase inicial en (a) y la fase final en (b) del proceso para crear la pantalla nula. La escala en ambas gráficas está en milímetros.

2.3 Breve Análisis de Algunas Variables.

En este apartado se expondrá un breve análisis del comportamiento de algunas variables involucradas en la construcción de la pantalla nula, tomando en cuenta los parámetros necesarios para su construcción, los cuales dependen de la superficie y la cámara que se usará para captar la imagen .

La superficie que se requiere probar es un elipsoide de revolución con un radio de curvatura $r = 72.20\text{mm}$ y constante cónica $k = -0.4966$, los demás parámetros usados para realizar el análisis se muestran en la tabla 2.2, estos fueron tomados de [23].

Las gráficas mostradas en la figura 2.7 corresponden a los resultados de usar una lente de distancia focal f_l de 8mm y muestran el comportamiento de z_2, z_3, ρ_2 . Se realizaron en un programa en el software Mathematica de computación técnica y los siguientes valores de las variables corresponden a un elipsoide de revolución que sirvió de guía para analizar la superficie que evaluaremos más adelante.

Elemento	Símbolo	Valor
Radio de curvatura de la superficie	r	72.2026mm.
Diámetro de la superficie	D	164mm.
Longitud del CCD	d	4.6mm.
Constante cónica	k	-0.49668
Radio del cilindro de la pantalla nula	R	12.65mm.

Tabla 2.2: Tabla de valores de las variables involucradas para el diseño de una pantalla nula cilíndrica para una superficie cóncava, tomadas de *Prueba de un espejo elipsoidal concavo en eje (F/0.273)* [24]

La gráfica 2.7a) corresponde a la generatriz del elipsoide es decir a $z(\rho)$ en el intervalo $(-D/2, D/2)$ de donde obtenemos que $\beta = 53.61\text{mm}$, $a = 8.3052\text{mm}$ y $b = 349.388\text{mm}$. Una vez hecho esto se puede encontrar los valores para z_2, ρ_2, z_3 como función de ρ_1 .

2. PANTALLAS NULAS

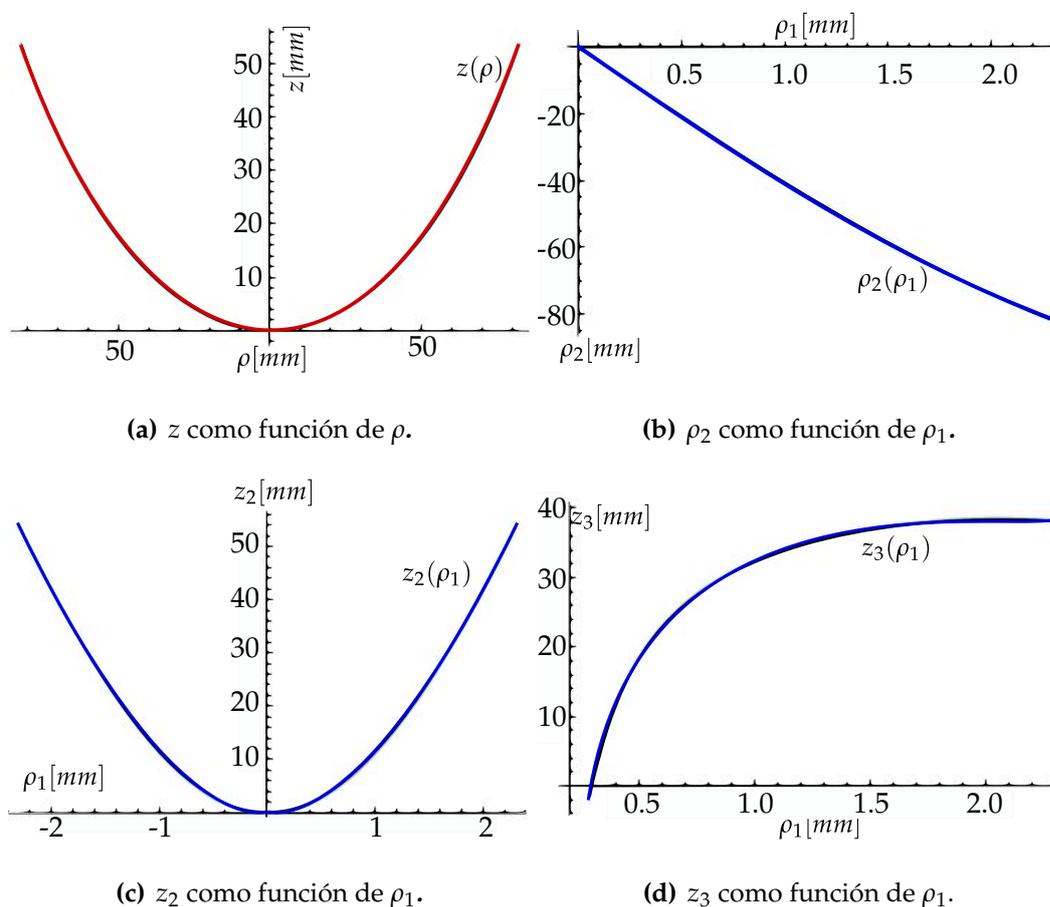


Figura 2.7: Se muestran el comportamiento de algunas de las variables involucradas en la construcción de una pantalla nula para una lente con una distancia focal de 8mm.

Una vez calculados los valores de $\rho_2(\rho_1)$ para el intervalo $(0, d/2)$, vemos que ρ_2 crece hasta alcanzar un valor de $-D/2$ siendo casi una línea recta. La tercer gráfica (figura 2.7c) muestra la posición de $z_2(\rho_1)$, en el intervalo $(-d/2, d/2)$, esta gráfica muestra que la sagita de los puntos P_2 aumentará conforme el valor de ρ_1 crezca.

En la cuarta y última grafica, figura 2.7d) se muestra a z_3 en función de ρ_1 en el intervalo $(0, d/2)$, vemos que la función es creciente, creciendo muy rápido al principio y cada vez más lento conforme ρ_1 tiende a 2, entonces z_3 alcanza un

máximo y comienza a decrecer, este comportamiento implica que la función no es biyectiva en el intervalo y un punto z_3 puede venir de dos elementos del intervalo $(0, d/2)$, éste efecto ocasionará que no se pueda evaluar toda la superficie usando una lente de $f_l = 8\text{mm}$ y una CCD del tamaño propuesto.

Ahora veamos el caso para una lente con distancia focal $f_l = 3.5\text{mm}$ figura 2.8. Tenemos un valor de $a = 3.55\text{mm}$ y un valor de $b = 180.28\text{mm}$. Las gráficas para estos nuevos valores son las siguientes; la gráfica en 2.8a) es la misma que en el caso anterior, mientras que en la gráfica para ρ_2 en función de ρ_1 podemos observar que $|\rho_2|$ crece hasta alcanzar un valor de $D/2$ y a diferencia de la gráfica de ρ_2 para $f_l = 8\text{mm}$ esta presenta una curva más pronunciada.

En la tercer gráfica para $f_l = 3.5\text{mm}$ (figura 2.8(c)), vemos que z_2 crece rápido en el intervalo $(-1, 1)$ que en la gráfica de la misma variable para el caso de $f_l = 8\text{mm}$, después de 1 vemos crece de forma más lenta. Finalmente tenemos que la cuarta gráfica correspondiente a z_3 en función de ρ_1 (figura 2.8d)), muestra que para este caso z_3 no alcanza un máximo para el intervalo $(0, d/2)$, lo que nos garantiza que z_3 como función de ρ_1 es biyectiva en el intervalo, además vemos que se comporta de forma creciente, creciendo más rápido cerca del cero y más lento una vez pasado uno, se observa también que z_3 alcanza valores que rondan cerca de 60mm mientras que para el primer caso se puede observar que z_3 no sobrepasa de 40mm .

En la figura 2.10(b) se ve el efecto de z_3 en función de ρ_1 para el caso de una lente con distancia focal de 8mm . Una vez construida la pantalla nula para el patrón de puntos en 2.9, se puede ver que cerca de los 40mm , los puntos comienzan a sobreponerse, hasta que la última fila de puntos comienza a decrecer una vez que z_3 ha alcanzado su máximo. En el caso de una lente con $f_l = 3.5\text{mm}$ representado en 2.10(c) observamos que no se presenta esta sobreposición de puntos, dado que en este caso z_3 no alcanza un punto de inflexión, pero vemos que bastantes filas de puntos tienen un valor z_3 mayor a la distancia focal de la superficie $f_s = 36.1\text{mm}$ lo cual podría ocasionar que la superficie genere imágenes reales de estos puntos los cuales no podríamos enfocar con una lente o ver su reflejo. Aunque el resultado no es éste, sino que la superficie no generará imágenes reales de los puntos sobre la pantalla más grande, la explicación del problema será abordado en la siguiente sección.

2. PANTALLAS NULAS

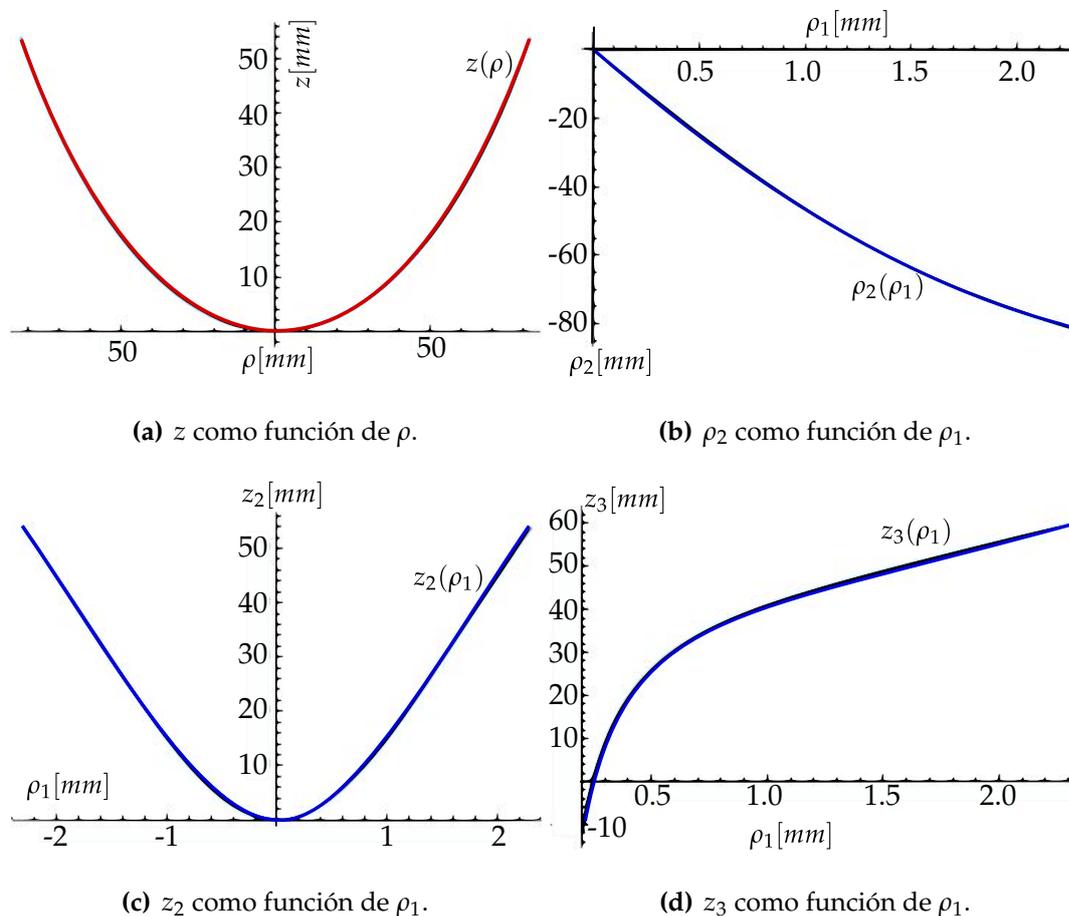


Figura 2.8: Se muestran el comportamiento de algunas de las variables involucradas en la construcción de una pantalla nula para una lente con una distancia focal de 3mm.

2.4 Formación de Imágenes.

Como hemos visto en el sección 2.2 para el cálculo de los parámetros a y b se toma en cuenta la aproximación paraxial para la formación de imágenes, esta construcción es válida para ángulos pequeños. Si consideramos el caso de una superficie cóncava reflectora como en la figura 2.11, y se toma en cuenta el siguiente teorema de geometría plana; un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. Aplicando este teorema a los triángulos de vértices PBC y $P'CB$ se deduce que:

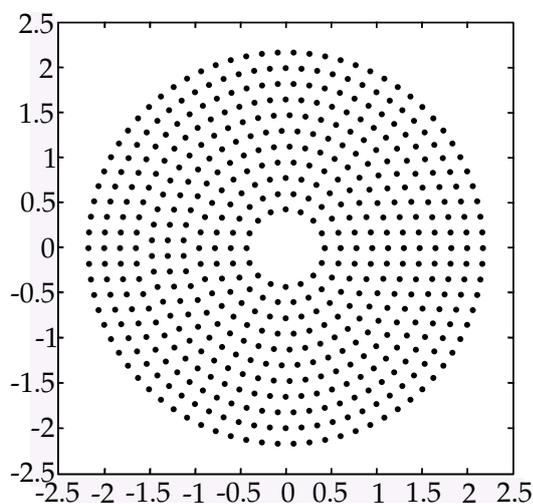


Figura 2.9: Patrón que se quiere obtener

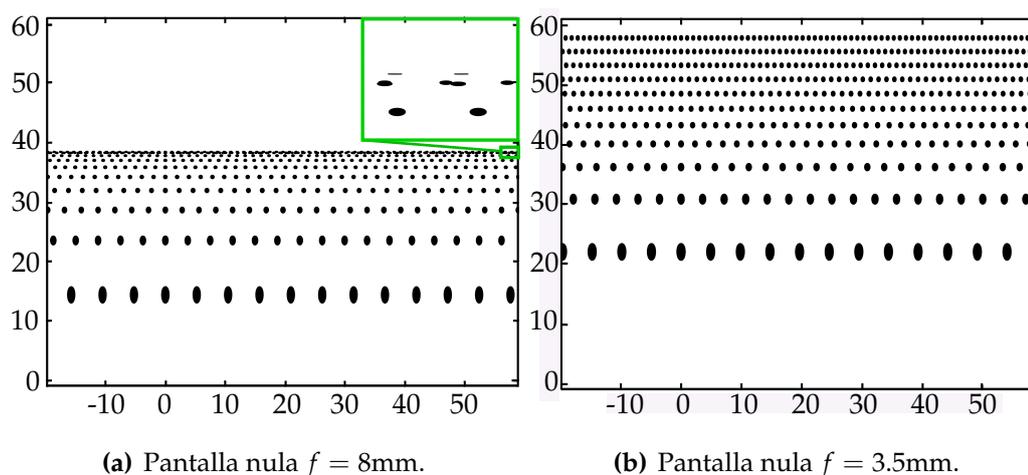


Figura 2.10: Se muestra el resultado de las pantallas nulas (a), (b) requeridas para obtener el patrón en 2.9 para lentes de distancia focal 8mm. y 3.5mm respectivamente, se puede observar el efecto mostrado en la gráfica 2.7(d) en (a).

$$\alpha + \theta = \phi \quad \phi + \theta = \beta$$

Despejando ϕ de la segunda ecuación y sumandola a la primera obtenemos

2. PANTALLAS NULAS

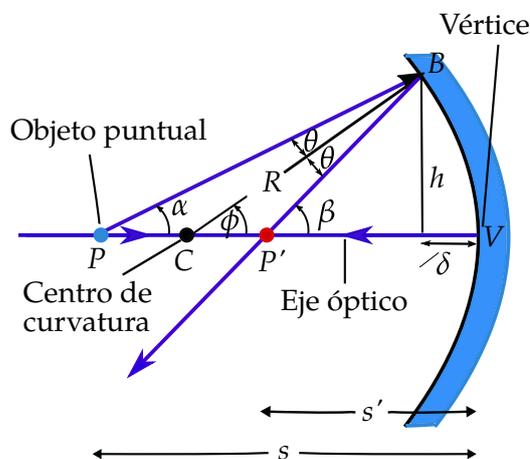


Figura 2.11: Un espejo esférico cóncavo, forma una imagen real de P en que está sobre el eje óptico, la imagen es formada en P' y los rayos se perciben como si provinieran de P' .

$$\alpha + \beta = 2\phi \quad (2.29)$$

De ésta tomando en cuenta los valores de las tangentes correspondientes a cada ángulo y la condición de que estos ángulos sean muy pequeños para que dichos ángulos sean casi igual a su tangente (esta aproximación es más precisa para ángulos menores a 0.1 radianes unos 5°) se deduce una relación general entre s , s' y r , también conocida como fórmula de Gauss para superficies reflectantes.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad (2.30)$$

Como esta ecuación no depende de α todos los rayos que forman ángulos pequeños con el eje óptico se intersectan en P' . Dado que estos rayos son muy cercanos al eje y casi paralelos por eso reciben el nombre de rayos paraxiales.

Como se sabe de la formación de imágenes en espejos si s' es negativa la imagen formada por el espejo en P' será virtual mientras que si s es positiva la imagen será real como se aprecia en la figura 2.12. Para la formación de imágenes paraxiales de espejos curvos se siguen las siguientes reglas:

1. Un rayo paralelo al eje óptico es desviado por el espejo directo al foco del espejo, de forma contraria un rayo que pasa por el foco es reflejado como un rayo paralelo por el espejo.
2. un rayo que pasa por el vértice del espejo con un ángulo θ respecto al eje óptico es desviado $-\theta$ respecto al eje óptico.
3. Un rayo que pasa por el centro de curvatura no sufre desviación alguna y es reflejado en dirección contraria.

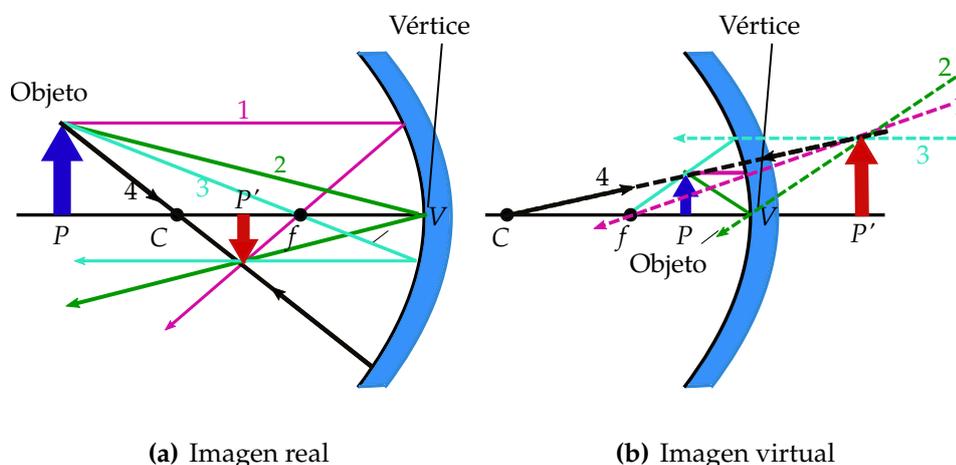


Figura 2.12: Diagrama para determinar posición, orientación y altura de una imagen formada por un espejo esférico cóncavo, tanto para el caso de una imagen real (a) y una virtual (b).

Estas reglas nos permiten encontrar la posición de las imágenes formadas por el espejo y saber si la imagen formada por el espejo es real o virtual, se puede deducir que un espejo cóncavo formara imágenes virtuales es decir que se formarán atrás del espejo siempre y cuando el objeto a reflejar esté en una posición entre el vértice del espejo y el foco de este.

En la construcción de pantallas nulas nos interesa que las imágenes formadas por el espejo sean virtuales para que puedan ser enfocadas por una lente. Si sólo tomamos en cuenta la teoría de formación de imágenes resultante únicamente de los rayos paraxiales nos damos cuenta que tenemos un problema, un ejemplo esta en el segundo caso expuesto en la sección 2.3, donde las dimensiones sagitales de la pantalla nula exceden el valor del foco de la superficie,

2. PANTALLAS NULAS

¿Qué pasa en estos casos? ¿Dónde se forma las imágenes correspondientes de las manchas? ¿Éstas imágenes son virtuales o reales? ¿Las manchas en la pantalla nula cumplen con los requerimientos necesarios para aplicar la teoría paraxial? En el contenido restante de esta sección se tratará de responder estas preguntas.

Para conocer la posición de las imágenes formadas por la pantalla nula comenzaremos tomando un punto P_o sobre la pantalla, y supongamos como es el segundo caso de la sección 2.3 que no cumple con las condiciones de la teoría paraxial, es decir los rayos de luz no pasan cerca del eje óptico, la superficie es muy rápida (cambia de radio de curvatura rápidamente conforme se aleja de su vértice) y el punto P_o está situado más allá del foco de la superficie f_s . En general los puntos y la superficie de prueba no cumplen con la teoría paraxial.

La figura 2.13 muestra una superficie esférica basada en una cónica con centro de curvatura en el vértice en r al igual que una circunferencia que correspondería a un espejo esférico con el mismo radio y centro de curvatura, una pantalla nula y un CCD que capta las imágenes formadas por el espejo esférico.

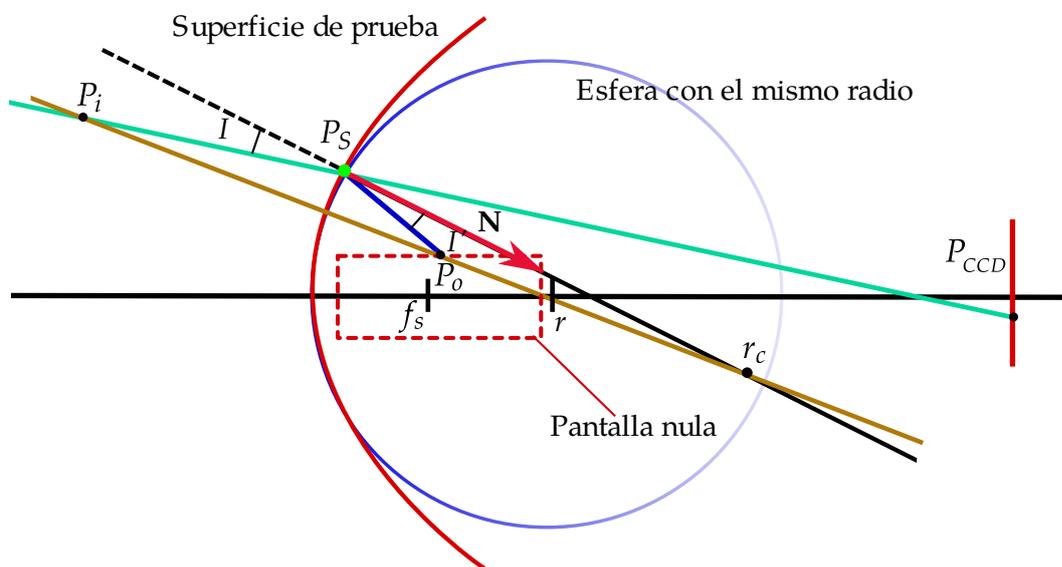


Figura 2.13: Construcción para determinar posición, orientación y altura de la imagen formada por una superficie esférica cóncava, de los puntos sobre una pantalla nula.

Tomando el rayo que va de la CCD que pasa por el punto P_{CCD} y P_s , sabemos que pasa un rayo de luz por estos dos puntos, por la forma en que fue diseñada la pantalla nula, este rayo proviene directamente del punto imagen P_i , pero para saber en donde se formara P_i necesitamos un segundo rayo y para eso escogeremos el rayo que pasa por P_o y el centro de curvatura para el punto P_s es decir el punto r_c que además está en la recta normal a la superficie. Como la superficie es muy rápida el radio de curvatura en P_s es más grande que el radio en el vértice y P_o está situado a una distancia respecto de P_s menor que $1/2d(P_s, r_c)$, por lo que alrededor de P_s sobre el espejo, P_o formara una imagen virtual en P_i , la cual será enfocada por una lente y captada por nuestro CCD.

2.5 Reconstrucción de la Superficie

En este apartado describiremos el método para recuperar o reconstruir la forma de la superficie a partir de los puntos obtenidos en la CCD y los situados sobre la pantalla nula. Para esto se hará uso de la Ecuación de la forma de la superficie, ecuación (2.35) de la cual se deducirá también en este apartado.

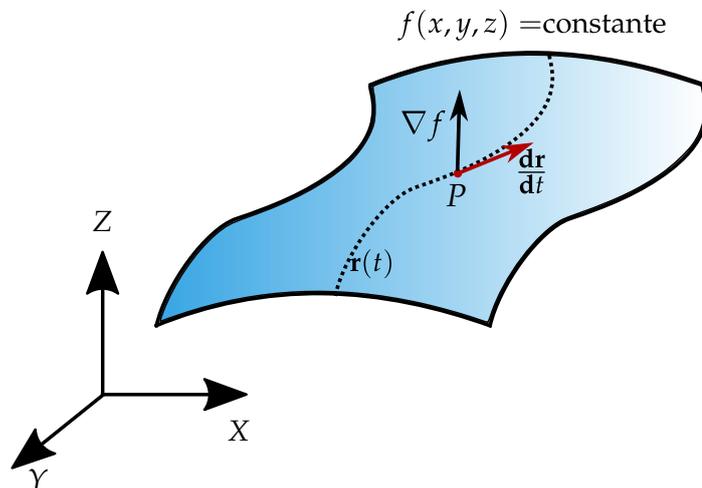


Figura 2.14: Figura explicativa de la deducción de la Ecuación de la forma de la superficie.

Como sabemos si tenemos una superficie, ésta puede ser representada como la función f de la ecuación (2.1), es decir f es constante, y además es suave y

2. PANTALLAS NULAS

continua entonces el vector normal \mathbf{N} a la superficie está dado por ∇f . Ahora supongamos que la superficie se puede parametrizar por una función $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que describa una trayectoria para un parámetro t , entonces podemos escribir a f como:

$$f(\mathbf{r}(t)) = 0 \quad (2.31)$$

puesto que todos los puntos sobre la trayectoria formada por \mathbf{r} están sobre la superficie si derivamos f respecto a t obtendremos que

$$\frac{df(\mathbf{r}(t))}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0 \quad (2.32)$$

La expresión anterior es el resultado de aplicar la regla de la cadena a la función $f(t)$. Por lo general ∇f y $d\mathbf{r}$ son distintos de cero por lo que la única forma de que el producto escalar de ambos sea cero es que ambos sean ortogonales lo cual es de esperar pues $\mathbf{r}(t)$ está sobre la superficie y su derivada es tangente a la curva que forma, por lo tanto también es tangente a la superficie f y ∇f es normal a la superficie por lo que ambas sean ortogonales. Si tomamos la diferencial de f tenemos que

$$df(\mathbf{r}(t)) = \nabla f \cdot d\mathbf{r}(t) = 0 \quad (2.33)$$

por lo que desarrollando el lado derecho de esta última ecuación, y recordando que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y que $\mathbf{N} = \nabla f$ tenemos

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}(t) = N_x dx + N_y dy + N_z dz, \quad (2.34)$$

despejando la diferencial dz tenemos la **“Ecuación de la forma de la superficie”** [24]

$$dz = - \left(\frac{N_x}{N_z} dx + \frac{N_y}{N_z} dy \right). \quad (2.35)$$

La última ecuación nos permite conocer la forma de la superficie conociendo las normales. Si integramos a lo largo de una trayectoria obtenemos

$$z - z_0 = - \int_C \left(\frac{N_x}{N_z} dx + \frac{N_y}{N_z} dy \right), \quad (2.36)$$

esta integral es una expresión exacta de la forma de la superficie pero en la

práctica no podemos conocer todos los puntos sobre la superficie y sus respectivas normales, sólo podemos obtener puntos discretos sobre la superficie, por lo que para resolver la ecuación (2.36) se usan métodos de integración numérica.

2.5.1 Cálculo de las Normales

Para estimar el cálculo de las normales hacemos uso de la ecuación (2.11) de esta se puede deducir que

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_i|}. \quad (2.37)$$

Los vectores \mathbf{r}_r y \mathbf{r}_i en la práctica son distintos a los calculados para el diseño de la pantalla nula, además para este caso es preciso aclarar que \mathbf{r}_i es el vector que va del punto sobre la pantalla nula a la superficie y \mathbf{r}_r va del punto de incidencia sobre la superficie al captado por la CCD, véase figura 2.15. El trazo de rayos lleva la dirección contraria al sentido que tenían cuando se diseñó la pantalla.

En la figura 2.15 conocemos la posición del diafragma y la posición de los puntos centrales de cada mancha sobre la pantalla nula P_n , estos puntos están fijos sin importar el tipo o forma de la superficie que se esté evaluando, los puntos en P_c corresponden a los centroides de las manchas de la pantalla una vez que se han reflejado sobre la superficie y han sido captados por el CCD estos puntos se pueden conocer una vez analizadas las imágenes tomadas por el CCD. Los puntos sobre la superficie P_s son los puntos de incidencia donde se reflejan el rayo incidente, este punto no se conoce y por lo tanto tampoco se conoce la normal a la superficie \mathbf{N}_s pero se puede aproximar usando una superficie de referencia para aproximar el punto P_s y así poder calcular una normal de referencia de la superficie \mathbf{N}_r .

Se puede usar como superficie de referencia la usada para diseñar la pantalla nula, el error que se comete al hacer esto es mínimo siempre que la superficie de prueba no difiera mucho de la superficie usada para diseñar la pantalla.

Como las coordenadas de P_c son bien conocidas y el diafragma está colocado a una distancia a de la imagen formada por la lente se puede deducir que el vector

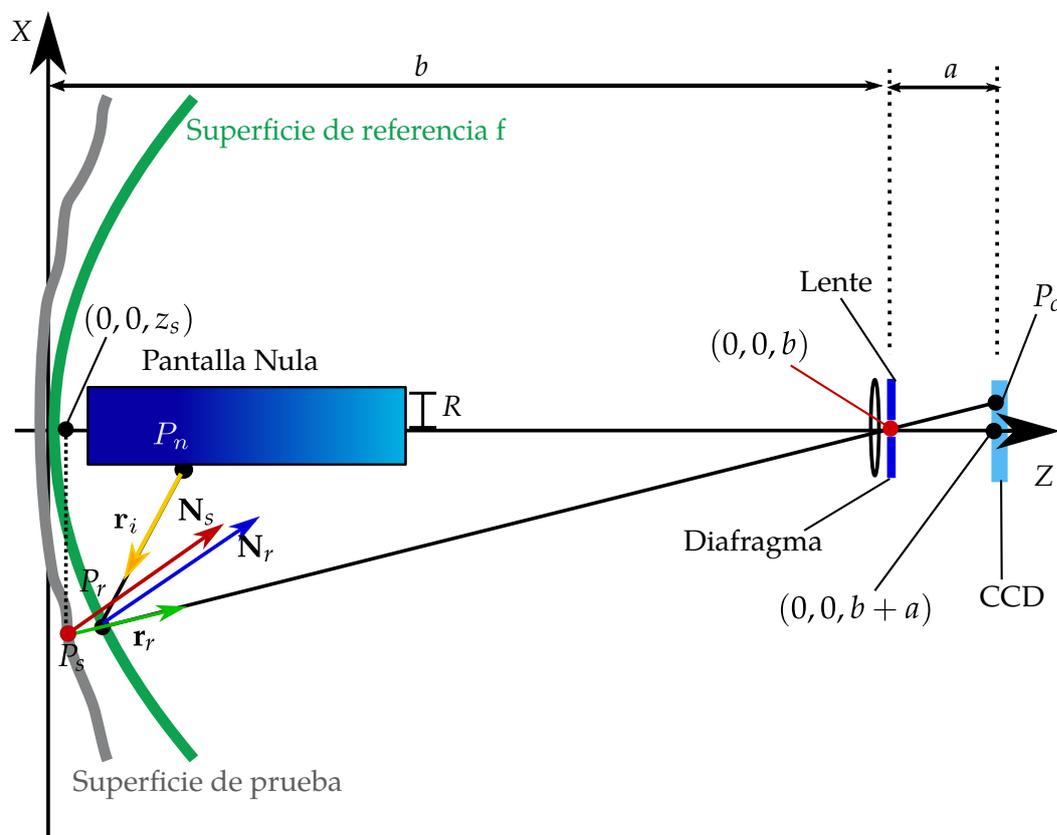


Figura 2.15: Figura explicativa de la evaluación de las normales

$$\mathbf{r}_r = \frac{(X_c, Y_c, a)}{\sqrt{(X_c^2 + Y_c^2 + a^2)}}. \quad (2.38)$$

Para el vector \mathbf{r}_i tenemos sólo la posición del punto P_n correspondiente a las coordenadas del punto P_3 del diseño de la pantalla, por lo que los valores de la coordenadas para los puntos P_s son aproximados usando la intersección de la superficie de diseño de la pantalla nula y la recta que contiene al punto $P_c = (X_c, Y_c, Z_c)$, y tiene dirección \mathbf{r}_r . De esta forma usando las ecuaciones (2.4) y (2.5) obtenemos una aproximación para los valores de las coordenadas de $P_s = (x_s, y_s, z_s)$ siendo:

$$x_s = \frac{a(Qb - r) - \sqrt{a^2 r^2 + b(X_c^2 + Y_c^2)(Qb - 2r)}}{Qa^2 + X_c^2 + Y_c^2} X_c, \quad (2.39a)$$

$$y_s = \frac{a(Qb - r) - \sqrt{a^2r^2 + b(X_c^2 + Y_c^2)}(Qb - 2r)}{Qa^2 + X_c^2 + Y_c^2} Y_c, \quad (2.39b)$$

$$z_s = \frac{a(Qb - r) - \sqrt{a^2r^2 + b(X_c^2 + Y_c^2)}(Qb - 2r)}{Qa^2 + X_c^2 + Y_c^2} a + b. \quad (2.39c)$$

Una vez aproximadas las coordenadas del punto P_s se puede por fin obtener las entradas del vector \mathbf{r}_i obteniendo la siguiente expresión.

$$\mathbf{r}_i = \frac{(x_s - x_3, y_s - y_3, z_s - z_3)}{(x_s - x_3)^2 + (z_s - z_3)^2 + (z_s - z_3)^2}. \quad (2.40)$$

Finalmente una vez obtenidos los vectores \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_r podemos aproximar las normales \mathbf{N} de la superficie.

2.5.2 Evaluación de la Superficie

Una vez obtenidas las normales proseguimos a resolver la ecuación (2.36) por un método numérico, con el fin de encontrar el valor de la sagita z , de esta forma obtener un conjunto de puntos que nos permitan reconstruir la forma de la superficie. Un método de integración numérica común es la regla del trapecio, la cual calcula el valor de una integral definida usando la aproximación lineal de la función en un intervalo conocido. Su expresión más útil es la conocida comúnmente como “**regla del trapecio compuesta**” [25] la cual se basa en aproximar una integral definida por medio de n trapecios, como en la figura 2.16, obteniendo la siguiente expresión.

$$\int f dx \approx \sum_{k=1}^n [f(x_{k+1}) + f(x_k)] \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2}. \quad (2.41)$$

aplicando la última ecuación a cada una de las dos variables de la ecuación (2.36) obtenemos que la integral puede ser aproximada como

$$z_n - z_0 \approx \sum_{j=1}^{n-1} \left[\left(\frac{N_{x_j}}{N_{z_j}} dx + \frac{N_{x_{j+1}}}{N_{z_{j+1}}} \right) \frac{\Delta x_j}{2} + \left(\frac{N_{y_j}}{N_{z_j}} + \frac{N_{y_{j+1}}}{N_{z_{j+1}}} \right) \frac{\Delta y_j}{2} \right], \quad (2.42)$$

siendo n el número de puntos a lo largo de la trayectoria de integración, las N_{x_j} , N_{y_j} , N_{z_j} son las componentes del vector normal en la posición j -ésima del

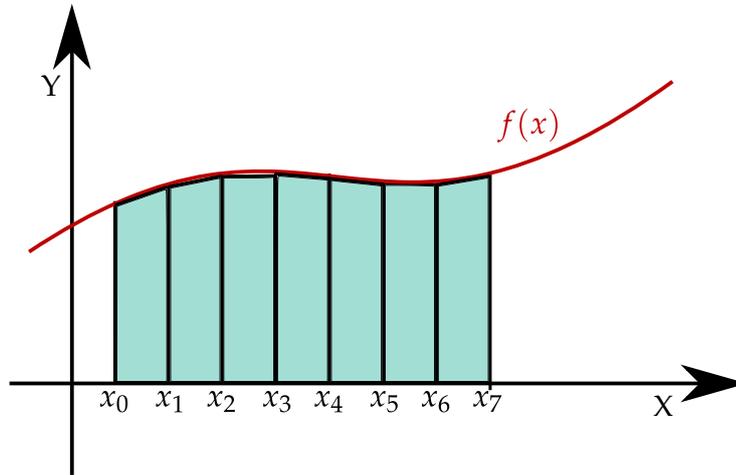


Figura 2.16: Figura ilustrativa de la regla del trapecio para siete intervalos.

la trayectoria de integración, de igual forma que x_j, y_j, z_j corresponden las coordenadas del punto j -ésimo del intervalo de integración y $\Delta x_j = (x_{j+1} - x_j)$ y $\Delta y_j = (y_{j+1} - y_j)$. En la figura 2.17 se presenta una trayectoria discreta de puntos sobre una superficie.

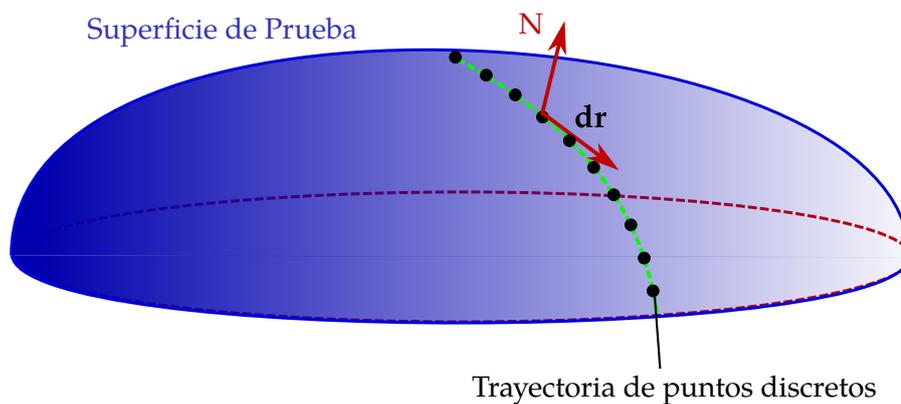


Figura 2.17: Trayectoria de puntos discretos sobre una superficie.

La ecuación (2.42) nos permite calcular la coordenada en Z perteneciente a la sagita de la superficie, usando las coordenadas x_s, y_s y z_s de una primera aproximación anterior, para tener una mejor aproximación de las coordenadas

x_s y y_s se pueden calcular estas nuevamente usando los valores de z_s calculados por la ecuación (2.42), usando las siguientes expresiones.

$$x_s = \frac{X_c}{a}(z_s - b), \quad (2.43a)$$

$$y_s = \frac{Y_c}{a}(z_s - b). \quad (2.43b)$$

Donde a y b corresponden a los parámetros de diseño de la pantalla nula. La deducción de estas ecuaciones proviene de la semejanza del triángulo que tienen por vértices los puntos P_s , $(0, 0, z_s)$, $(0, 0, b)$ y el de vértices en $(0, 0, a + b)$, $(0, 0, b)$, P_c de la figura 2.15.

Para poder analizar con más detalle la evaluación de la superficie los datos obtenidos correspondientes a los puntos P_s son ajustados a una superficie cónica de revolución trasladada y rotada respecto a los ejes X y Y, que puede ser bien alguna de las tres siguientes.

$$z = \frac{r - \sqrt{r^2 - Q[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}}{Q} + Ax + By + z_0, \quad (2.44)$$

$$z = \frac{r - \sqrt{r^2 - Q[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}}{Q} + z_0 + T_x(x - x_0) + T_y(y - y_0), \quad (2.45)$$

o

$$z = \frac{-(Ex + Fy + I) - \sqrt{(Ex + Fy + I)^2 + C(x^2 + y^2 + Gx + Hy + J)}}{C}. \quad (2.46)$$

Estas tres ecuaciones representan cualquier cónica de revolución rotada y descentrada a excepción de un paraboloides las dos primeras se han usado con anterioridad en diversos trabajos y publicaciones como [26],[27] por poner algunos ejemplos, mientras que la tercera ecuación está desarrollada para este trabajo por vez primera. A continuación se ahondara más en cada una de ellas especialmente en las dos últimas.

Para la deducción de las ecuaciones (2.44) y (2.45) se puede ver que están basadas a partir de la ecuación (1.3) misma que se puede obtener de la ecuación (2.1) resolviendo para la coordenada z , dicha ecuación es la siguiente:

$$z = \frac{r_c - \sqrt{r_c^2 - Q_c(x^2 + y^2)}}{Q}. \quad (2.47)$$

Es preciso recordar que en esta ecuación r_c representa el radio de curvatura y $Q_c = k + 1$, donde k es la constante de conicidad. En la ecuación (2.44) se busca aplicar una rotación y una translación a la ecuación (2.47), como se puede apreciar al añadir los términos x_0 , y_0 y z_0 se obtendrá una translación de la superficie mientras que los términos Ax y By buscan generar una rotación en los ejes X y Y si estos términos son pequeños es decir muy menores a 1 el parámetro r de (2.44) tenderá al parámetro r_c de (2.47), pero si A y B tienen valores grandes r se alejara de r_c .

En la ecuación (2.45) es una mejora de la ecuación (2.44) salvo que en esta ecuación los términos de rotación T_x , T_y buscan afectar a la translación al incluir el producto $T_x(x - x_0)$ y el análogo con la variable y . Esta ecuación se puede concebir como una translación en los tres ejes de la ecuación (2.47) y posteriormente aplicar una rotación a la nueva coordenada $(z - z_0)$ alrededor de los ejes X y Y . A diferencia de la ecuación (2.44) la cual se obtiene de aplicar una rotación a la coordenada z alrededor de los ejes X y Y y posteriormente una translación en las tres coordenadas.

Se puede apreciar que las ecuaciones (2.44) y (2.45) son esencialmente la misma pues se puede partir de de una a la otra haciendo $A = T_x$, $B = T_y$ y z_0 de (2.44) igual a $(z_0 - T_x x_0 - T_y y_0)$ de la ecuación (2.45). De igual forma si el valor de T_x y T_y son muy menores a 1 $r \rightarrow r_c$ y $Q \rightarrow Q_c$.

Por otro lado la ecuación (2.46) se deduce de aplicar una rotación alrededor de los ejes X y Y a la ecuación de la cónica descrita por (2.1), posteriormente se realiza una translación en las tres coordenadas, y bajo la suposición de que la rotación de ejes es menor a 0.1 radianes se pueden eliminar términos cruzados de dicha expresión para finalmente despejar la coordenada z de dicha ecuación y obtener la ecuación (2.46). Los detalles de su deducción se presentan en la siguiente subsección.

2.5.3 Nueva Ecuación de Ajuste

En este apartado se presentará el desarrollo y deducción de la ecuación (2.46) para ajustar los datos obtenidos de la integración numérica para evaluar una

superficie por el método de pantallas nulas. Exponiendo sus ventajas respecto a las dos ecuaciones anteriormente utilizadas.

Recordemos que la ecuación de una superficie de revolución que tiene como generatriz una cónica que gira alrededor del eje Z positivo y tiene su vértice en el origen está representada por la ecuación (2.1) es:

$$Qz^2 - 2rz + x^2 + y^2 = 0, \quad (2.48)$$

recordemos que $Q = k + 1$, siendo $k = -e^2$ donde e es la excentricidad y r es el radio de curvatura en el vértice.

El modelo propuesto se basa en ajustar una superficie de revolución rotada alrededor de los ejes X y Y y trasladada en los mismos además del eje Z. Para esto haremos uso de las matrices de rotación y translación las cuales son las siguientes.

Matriz de rotación alrededor del eje X un ángulo θ .

$$R_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Matriz de rotación alrededor del eje Y un ángulo ϕ .

$$R_{y,\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

A las matrices de rotación se les aumento el renglón inferior y una columna a la derecha de la identidad de 4×4 con el único propósito de poder realizar una composición con la matriz de translación de un vector de coordenadas $v_0 = (x_0, y_0, z_0, 1)$.

$$T_{v_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Para la deducción de la ecuación (2.46) lo primero es aplicar una composición

2. PANTALLAS NULAS

de transformaciones de la siguiente manera $T_{v_0}[R_{x,\theta}(R_{y,\phi})]$ a la superficie representada por (2.48), es decir primero rotar la superficie alrededor del eje Y , posteriormente alrededor del eje X y finalmente aplicar una translación en v_0 . Haciendo el siguiente cambio de variables para simplificar las expresiones resultantes $\cos(\theta) = A$, $\sin(\theta) = B$, $\cos(\phi) = C$ y $\sin(\phi) = D$ además recordando que la matriz asociada a una composición de una transformaciones es igual a la multiplicación matricial de cada una de sus matrices asociadas tenemos que;

$$[T_{v_0}R_{x,\theta}R_{y,\phi}]v^t \quad (2.52)$$

siendo

$$T_{v_0}R_{x,\theta}R_{y,\phi} = \begin{pmatrix} C & 0 & D & x_0 \\ BD & A & -BC & y_0 \\ -AD & B & AC & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

por lo que aplicando la transformación de la matriz (2.53) a un punto $v = (x, y, z, 1)$ en el espacio tenemos que las coordenadas del punto imagen $v' = (x', y', z', 1)$ son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx + Dz + x_0 \\ BDx + Ay - BCz + y_0 \\ -ADx + By + ACz + z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

En adelante se omitira la cuarta coordenada, pues su valor nunca cambia y su proposito ha (componer la matrices de translación y rotación) sido cumplido. Si θ y ϕ son muy pequeños del orden de 0.1 radianes (aproximadamente 5 grados) o menos, entonces $BD \sim 0$ y $AC \sim 1$, entonces la expresión v' será

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx + Dz + x_0 \\ Ay - BCz + y_0 \\ -ADx + By + z + z_0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

sustituyendo las expresiones de (x', y', z') en la ecuación (2.48) se obtiene una primera aproximación para una superficie rotada y trasladada.

$$Q(-ADx + By + z + z_0)^2 - 2r(-ADx + By + z + z_0) + (Ay - BCz + y_0)^2 + (Cx + Dz + x_0)^2 = 0. \quad (2.56)$$

Desarrollando la ultima expresión y agrupando términos podemos llevarla a su forma cuádrica general que tendría la siguiente expresión.

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1xy + 2E_1xz + 2F_1yz + G_1x + H_1y + 2I_1z + J_1 = 0 \quad (2.57)$$

siendo

$$A_1 = QA^2D^2 + C^2 \quad (2.58a)$$

$$B_1 = QB^2 + A^2, \quad (2.58b)$$

$$C_1 = Q + D^2 + B^2C^2, \quad (2.58c)$$

$$D_1 = -2ABDQ, \quad (2.58d)$$

$$E_1 = CD - ADQ, \quad (2.58e)$$

$$F_1 = BQ - ABC, \quad (2.58f)$$

$$G_1 = 2(-ADQz_0 + ADr + Cx_0), \quad (2.58g)$$

$$H_1 = 2(BQz_0 - Br + Ay_0), \quad (2.58h)$$

$$I_1 = Qz_0 - r + Dx_0 - BCy_0, \quad (2.58i)$$

$$J_1 = (Qz_0 - 2rz_0 + x_0^2 + y_0^2). \quad (2.58j)$$

Recordando que $0 \approx B \approx D$ y $A \approx C \approx 1$ tenemos que $A_1 \approx 1$, $B_1 \approx 1$ y $D_1 \approx 0$ tenemos que la ecuación (2.57) se reduce a

$$x^2 + y^2 + C_1z^2 + 2E_1xz + 2F_1yz + G_1x + H_1y + 2I_1z + J_1 = 0 \quad (2.59)$$

ahora bien agrupando términos y resolviendo para z tenemos que

$$z = \frac{-(E_1x + F_1y + I_1) - \sqrt{(E_1x + F_1y + I_1)^2 + C_1(x^2 + y^2 + G_1x + H_1y + J_1)}}{C_1}, \quad (2.60)$$

que es la ecuación (2.46) salvo por los subíndices en los parámetros.

La ecuación (2.60) es una nueva ecuación propuesta para hacer el ajuste, de primera vista parece más complicada de analizar y comprender que las ecuaciones usadas en trabajos anteriores, pero esta ecuación nos permiten volver a llevarla a su forma cuádrlica general expresada en la ecuación (2.59) de forma rápida, dada la forma en que fue desarrollada, de esta forma se puede obtener mayor información sobre la superficie de forma más fácil, sobre todo para calcular con mayor precisión la constante de conicidad y el radio de curvatura, además de que se puede obtener de forma más rápida las rotaciones de la superficie y sus translaciones. En las ecuaciones (2.44) y (2.45) esto se torna más complicado pues para conocer con exactitud los parámetros de la superficie es necesario llevar dichas ecuaciones a su forma cuádrlica general.

2.5.4 Forma cuádrlica de la ecuación de ajuste

Es necesario recordar que una superficie cuádrlica o simplemente cuádrlica es una superficie determinada por una ecuación polinomial del tipo $P(x, y, z) = 0$ de segundo grado en x, y, z [28]. Como se ha mencionado antes obtener la forma cuádrlica de las ecuaciones de ajuste es importante puesto que nos permiten determinar de forma más precisa el radio de curvatura de la superficie, y una representación de estas superficies una vez se hayan eliminado las rotaciones y translaciones de la ecuación de ajuste, por esta razón en este apartado se determinará la forma cuádrlica de las ecuaciones de ajuste de la superficie. La forma cuádrlica de la superficie de la nueva ecuación de ajuste está representada en la ecuación (2.59), mientras que la forma cuádrlica de la ecuación (2.45) la desarrollaremos a continuación.

La ecuación (2.45) tiene la siguiente forma

$$z = \frac{r - \sqrt{r^2 - Q[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}}{Q} + z_0 + T_x(x - x_0) + T_y(y - y_0).$$

Para pasar esta ecuación a su forma cuádrica general, se procede a eliminar el radical del lado derecho de la ecuación y desarrollar todos los términos para posteriormente agrupar los factores comunes de los términos cuadrados, cruzados y lineales.

$$\left\{ Q \left[\underbrace{(z - z_0) + T_x(x - x_0) + T_y(y - y_0)}_{\mu} \right] - r \right\}^2 = \underbrace{r^2 - Q[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}_{\nu} \quad (2.61)$$

si desarrollamos el lado izquierdo tenemos que:

$$\left\{ Q \left[\underbrace{(z - z_0) + T_x(x - x_0) + T_y(y - y_0)}_{\mu} \right] - r \right\}^2 = Q^2 \mu^2 - 2Q\mu r + r^2. \quad (2.62)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mu^2 = & z^2 + T_x^2 x^2 + T_y^2 y^2 + 2T_x T_y xy - 2T_x xz - 2T_y yz \\ & + 2(T_x^2 x_0 - T_x T_y y_0 + T_x z_0)x + 2(T_y^2 y_0 - T_x T_y x_0 + T_y z_0)y + 2(T_x x_0 - z_0 + T_y y_0)z \\ & + [z_0^2 + T_x^2 x_0^2 + T_y^2 y_0^2 + 2(T_x T_y x_0 y_0 - T_x z_0 x_0 - T_y z_0 y_0)] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -2Q\mu r = & 2Q(rz + T_x rx + T_y ry) \\ & + 2Q(rz_0 - T_x r x_0 - T_y r y_0), \end{aligned}$$

por lo tanto

2. PANTALLAS NULAS

$$\begin{aligned}
Q^2\mu^2 - 2Q\mu + r^2 &= Q^2z^2 + Q^2T_x^2x^2 + Q^2T_y^2y^2 + 2Q^2T_xT_yxy - 2Q^2T_xxz - 2Q^2T_yyz \\
&\quad + [2Q^2(T_x^2x_0 - T_xT_yy_0 + T_xz_0) + 2QT_xr]x \\
&\quad + [2Q^2(T_y^2y_0 - T_xT_yx_0 + T_yz_0) + 2QT_yr]y \\
&\quad + [2Q^2(T_xx_0 - z_0 + T_yy_0) - 2Qr]z \\
&\quad + Q^2[z_0^2 + T_x^2x_0^2 + T_y^2y_0^2 + 2(T_xT_yx_0y_0 - T_xz_0x_0 - T_yz_0y_0)] \\
&\quad + 2Q(rz_0 - T_xrx_0 - T_yry_0) + r^2 \\
&= \underbrace{r^2 - Qx^2 + 2Qx_0x - Qx_0 - Qy^2 + 2Qy_0y - Qy_0}_v
\end{aligned}$$

Ahora podemos agrupar los términos correspondientes a cada una de las variables de la ecuación para llevarla a su forma cuádrica general

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (2.63)$$

donde

$$A = Q^2T_x^2 + Q, \quad (2.64a)$$

$$B = Q^2T_y^2 + Q, \quad (2.64b)$$

$$C = Q^2, \quad (2.64c)$$

$$D = 2Q^2T_xT_y, \quad (2.64d)$$

$$E = 2Q^2T_x, \quad (2.64e)$$

$$F = -2Q^2T_y, \quad (2.64f)$$

$$G = 2Q^2(T_x^2x_0 - T_xT_yy_0 + T_xz_0) + 2Q(T_xr - x_0), \quad (2.64g)$$

$$H = 2Q^2(T_y^2y_0 - T_xT_yx_0 + T_yz_0) + 2Q(T_yr - y_0), \quad (2.64h)$$

$$I = 2Q^2(T_xx_0 - z_0 + T_yy_0) - 2Qr, \quad (2.64i)$$

$$\begin{aligned}
J &= +Q^2(z_0^2 + T_x^2x_0^2 + T_y^2y_0^2) + 2Q^2(T_xT_yx_0y_0 - T_xz_0x_0 - T_yz_0y_0) \\
&\quad + 2Qr(z_0 - T_xx_0 - T_yy_0) + Q(x_0^2 + y_0^2). \quad (2.64j)
\end{aligned}$$

2.5.5 Método Iterativo

Una vez ajustados los puntos P_s a alguna de las tres ecuaciones presentadas se prosigue a repetir el proceso de encontrar las normales pero esta vez usando la forma de la superficie de ajuste elegida, S_1 por lo que las ecuaciones (2.39) no servirán esta vez para encontrar los nuevos puntos sobre la superficie P_{s1} , pero estos se pueden calcular del mismo modo que se obtuvieron las ecuaciones 2.39 tomamos la recta que tiene por dirección el vector \mathbf{r}_r (correspondiente al vector de los rayos reflejados por la superficie que son los únicos que conocemos experimentalmente) y pasa por (X_c, Y_c, Z_c) (los valores de los centroides de las manchas captadas por el CCD) y la intersectamos con la superficie ajustada.

Para calcular los puntos P_s sobre la superficie de ajuste es necesario conocer los centroides de las manchas sobre la pantalla nula P_n y los centroides de las manchas capturadas por la CCD (X_c, Y_c, Z_c) . De esta forma se puede calcular el vector del rayo reflejado y conocer la intersección del rayo con la superficie de ajuste.

Ahora bien, resolvamos primero para la ecuación (2.45). El vector del rayo reflejado tiene coordenadas,

$$\mathbf{v}_r = (X_c, Y_c, a) \quad (2.65)$$

por lo que la recta que pasa por el punto $P_c = (X_c, Y_c, a + b)$ de las coordenadas donde se encuentran los centroides de las manchas capturadas por el CCD y tiene la dirección del rayo reflejado está representado por la ecuación:

$$P = P_c + t\mathbf{v}_r, \quad (2.66)$$

con las siguientes ecuaciones paramétricas.

$$x = X_c + tX_c, \quad (2.67a)$$

$$y = Y_c + tY_c, \quad (2.67b)$$

$$z = a + b + ta. \quad (2.67c)$$

Para conocer la intersección de la recta y la ecuación (2.45) sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en dicha ecuación de ajuste

2. PANTALLAS NULAS

$$a + b + ta = \frac{r - \sqrt{r^2 - Q[(X_c + tX_c - x_0)^2 + (Y_c + tY_c - y_0)^2]}}{Q} + z_0 + T_x(X_c + tX_c - x_0) + T_y(Y_c + tY_c - y_0). \quad (2.68)$$

Despejando para eliminar el radical del lado derecho tenemos

$$\left\{ \underbrace{[a + b + ta - z_0 - T_x(X_c + tX_c - x_0) - T_y(Y_c + tY_c - y_0)]Q - r}_{\xi} \right\}^{1/2} = \sqrt{r^2 - Q \underbrace{[(X_c + tX_c - x_0)^2 + (Y_c + tY_c - y_0)^2]}_o} \quad (2.69)$$

Ahora bien ξ puede expresarse como

$$\xi = \underbrace{(a - T_x X_c - T_y Y_c)Q}_A t + \underbrace{[a + b - z_0 - T_x(X_c - x_0) - T_y(Y_c - y_0)]Q - r}_B \quad (2.70)$$

\Rightarrow

$$\xi = At + B. \quad (2.71)$$

Del lado derecho de la igualdad tenemos que

$$r^2 - Qo = r^2 - Q[(X_c^2 t^2 + 2X_c(X_c - x_0)t + (X_c - x_0)^2] \quad (2.72)$$

$$+ (Y_c^2 t^2 + 2Y_c(Y_c - y_0)t + (Y_c - y_0)^2]. \quad (2.73)$$

agrupando términos podemos escribir

$$r^2 - Qo = Ct^2 + Dt + E \quad (2.74)$$

siendo

$$C = -Q(X_c^2 + Y_c^2), \quad (2.75a)$$

$$D = -2Q[X_c(X_c - x_0) + Y_c(Y_c - y_0)], \quad (2.75b)$$

$$E = r^2 - Q[(X_c - x_0)^2 + (Y_c - y_0)^2]. \quad (2.75c)$$

Por lo que la ecuación en (2.69) queda expresada como:

$$(At + B)^2 = Ct^2 + Dt + E \quad (2.76)$$

\Rightarrow

$$A^2t^2 + 2ABt + B^2 = Ct^2 + Dt + E, \quad (2.77)$$

\Rightarrow

$$\underbrace{(A^2 - C)}_{a_1} t^2 + \underbrace{(2AB - D)}_{b_1} t + \underbrace{(B^2 - E)}_{c_1} = 0 \quad (2.78)$$

Esta última expresión es una ecuación de segundo grado para t la cual es muy fácil de resolver.

$$t = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}. \quad (2.79)$$

Para resolver el mismo problema para la ecuación (2.46), es decir saber donde el rayo reflejando intersecara a la superficie de ajuste, se sigue un proceso similar, aunque resulta más fácil resolver este problema usando la ecuación cuádrica, la cual tiene la siguiente forma,

$$x^2 + y^2 + Cz^2 + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + 2Iz + J = 0 \quad (2.80)$$

recordemos que la ecuación de la recta que representa el rayo reflejado es

$$(x, y, z) = (X_c, Y_c, Z_c) + t\mathbf{v}_r$$

y sus ecuaciones paramétricas son

$$x = X_c + tv_x, \quad (2.81a)$$

$$y = Y_c + tv_y, \quad (2.81b)$$

$$z = Z_c + tv_z. \quad (2.81c)$$

Si se sustituyen las ecuaciones paramétricas en la ecuación (2.80) tenemos

2. PANTALLAS NULAS

$$\begin{aligned}
0 = & v_x^2 t^2 + 2X_c v_x t + X_c^2 \\
& + v_y^2 t^2 + 2Y_c v_y t + Y_c^2 \\
& + C(v_z^2 t^2 + 2Z_c v_z t + Z_c^2) \\
& + 2E[v_x v_z t^2 + (v_x Z_c + v_z X_c)t + X_c Z_c] \\
& + 2F[v_y v_z t^2 + (v_y Z_c + v_z Y_c)t + Y_c Z_c] \\
& + Gv_x t + GX_c \\
& + Hv_y t + HY_c \\
& + 2Iv_z t + 2IZ_c \\
& + J.
\end{aligned}$$

Agrupando los términos podemos escribir la anterior ecuación como

$$A_1 t^2 + B_1 t + C_1 = 0 \quad (2.82)$$

siendo

$$A_1 = v_x^2 + v_y^2 + Cv_z^2 + 2Ev_x v_z + 2Fv_y v_z, \quad (2.83a)$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & 2(X_c v_x + Y_c v_y + CZ_c v_z) + 2E(v_x Z_c + v_z X_c) \\
& + 2F(v_y Z_c + v_z Y_c) + Gv_x + Hv_y + 2Iv_z, \quad (2.83b)
\end{aligned}$$

$$C_1 = X_c^2 + Y_c^2 + CZ_c^2 + 2EX_c Z_c + 2FY_c Z_c + GX_c + HY_c + 2IZ_c + J. \quad (2.83c)$$

por lo tanto

$$t = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1}. \quad (2.84)$$

Una vez obtenidos los puntos P_{s1} se calculan nuevamente las normales por el método expuesto en la subsección 2.5.1, se vuelve a realizar la integración numérica para recuperar la forma de la superficie, se ajusta una superficie des-centrada S_2 , y se calculan nuevos puntos de intersección P_{s2} , este proceso se repite de forma iterativa hasta que la superficie de ajuste del n -ésima S_n no

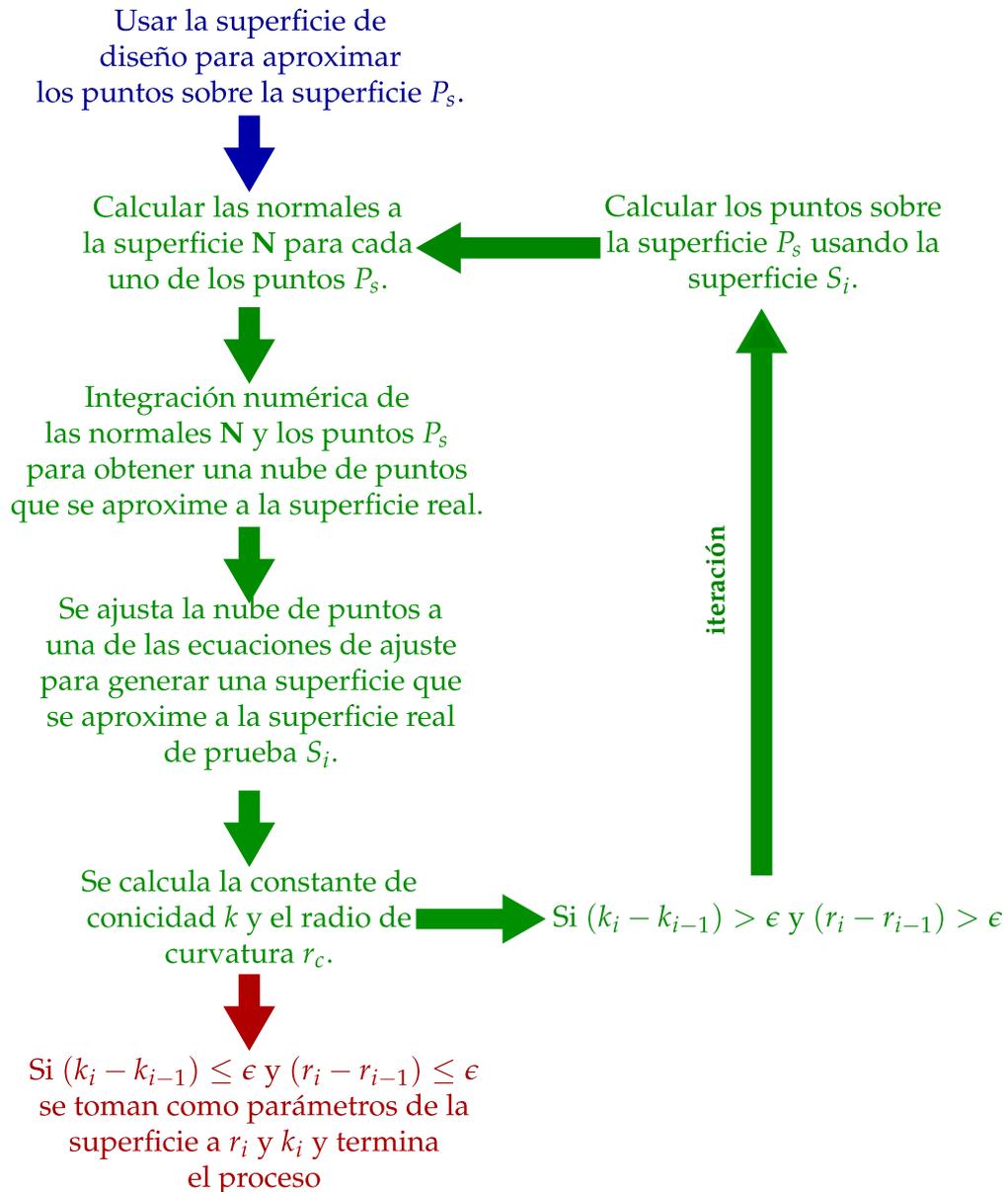


Figura 2.18: Método iterativo para la evaluación de la superficie. El valor de ϵ es determinado de acuerdo a la precisión que se requiera obtener.

difiera en gran medida de la $n-1$ -ésima, es decir que la superficie de ajuste converja. Un diagrama del método iterativo es presentado en la figura 2.18.

Dado que el ajuste de la superficie y en general el método iterativo depende de muchas variables, la superficie de ajuste puede converger o diverger dependiendo del número de iteraciones que se realicen, en el capítulo 4 se explicará el criterio de convergencia a tomar en cuenta para elegir la mejor superficie.

2.6 Resumen del Capítulo

En este capítulo se ha mostrado con gran cantidad de detalles el procedimiento para construir una pantalla nula para una superficie cóncava reflectora, así como el estudio y análisis de los parámetros involucrados en su diseño y la formación de las imágenes por la superficie. También se ha hecho mención del procedimiento teórico para recuperar la forma de la superficie, a partir de las imágenes y datos que se puedan obtener de la imagen de la superficie con el reflejo de la pantalla nula, recogidos por un CCD o algún otro tipo de herramienta que nos permita capturar la imagen en un experimento. En este mismo capítulo se ha expuesto el desarrollo de una nueva ecuación para ajustar los datos obtenidos al recuperar la forma de la superficie.

En el siguiente capítulo se describirá con los detalles más significativos el desarrollo experimental de una prueba por el método de pantallas nulas a un espejo cóncavo con el fin de recuperar la forma de dicha superficie.

Capítulo 3

Prueba Experimental

En este capítulo se expone el montaje del dispositivo experimental usado para la realización de la prueba de un espejo cóncavo por el método de pantalla nula, así como las características de las componentes usadas que se necesiten para la construcción del dispositivo experimental, la correcta alineación del dispositivo y la elección de la pantalla nula a usar.

3.1 Patrón de Referencia de la Pantalla Nula

En este apartado se expondrán los criterios usados para la selección del patrón de referencia para construir la pantalla nula, el patrón de referencia es el arreglo de puntos que nos permitirá construir la pantalla nula, por medio del trazo inverso de rayos. Primero que nada se debe elegir un patrón que cubra la mayor cantidad de área posible y sea fácil de reconocer una vez capturado por la cámara, es de esperar que el patrón de diseño esté limitado por las características de la cámara que se usará para capturar las imágenes, pues no puede tener dimensiones que superen las del CCD de la cámara. Además también existe la limitación del número de píxeles de la cámara como de su tamaño pues los puntos que forman el patrón de diseño no podrán tener dimensiones menores al tamaño de píxel de la CCD, pues no se podrían distinguir y se perderían con cualquier sombra captada por la CCD, por lo que deberán estar conformadas por un número de píxeles que permitan poder calcular su centroide.

Durante el proceso de investigación se trabajaron con dos tipos de patrones mostrados en la figura 3.1, lo que se busca con estos dos patrones es cubrir la

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

mayor cantidad de área posible y de forma uniforme, puede verse que ambos patrones tienen un círculo en blanco en la parte central debido al área donde se colocará la pantalla nula.

El patrón mostrado en la figura 3.1a) lo designaremos como "patrón radial por secciones" debido a que el aumento de manchas circulares se mantiene por varias líneas circulares, lo que lo hace ver como si tuviera varias secciones donde el número de puntos se mantiene constante entre cada línea circular y presenta mayores líneas radiales conforme el radio de cada línea circular aumenta. Para diseñar este patrón se seleccionó primero el número n de líneas circulares las cuales deben estar igualmente espaciadas una distancia l y en base a esto se calcula la diferencia de arco que a que deberán estar espaciadas las líneas radiales de la línea circular de radio más pequeña procurando que la distancia de un punto a otro en la línea circular más pequeña sea lo más próxima posible a la distancia que existe entre las líneas circulares, a partir de esta primera línea circular, se genera la segunda línea circular que es semejante a la primera pero de radio mayor este proceso continúa hasta que la distancia entre los puntos de una línea circular es mayor a $(5/3)l$ el número de puntos en esa línea circular se incrementará al doble, lo que generará una nueva sección. El factor $(5/3)l$ bien puede cambiar, dependerá de la densidad y cantidad de puntos con los que se quiera construir una pantalla nula.

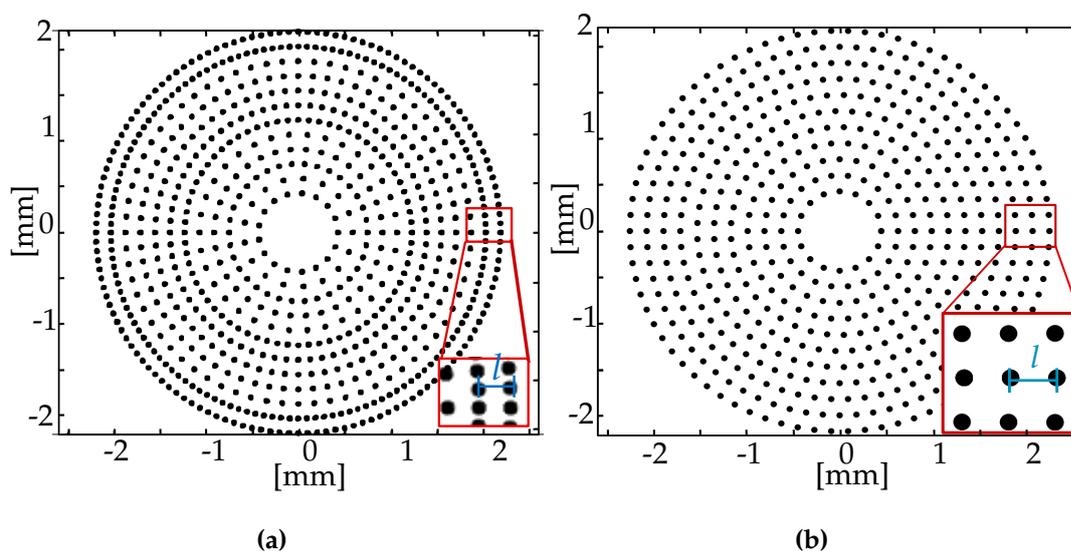


Figura 3.1: Patrones usados radial por secciones en a) y circular uniforme en b).

Por otra parte el patrón mostrado en la figura 3.1b) se genera al igual que el primero, se selecciona un número n de líneas circulares que se desee entre un radio r_m y un radio r_M lo que generara un número n de puntos igualmente espaciados una distancia l de igual forma se generará un conjunto de radios r_i correspondiente a la distancia de cada punto al origen, la longitud de cada circunferencia generada por cada uno de estos radios se dividirá entre la distancia l y el resultado es redondeado al menor entero más cercano, lo que determinará el número de puntos en cada línea circular del patrón. Este patrón de diseño muestra una densidad más uniforme de puntos que el presentado en b) por lo que se le denominara "patrón circular uniforme".

Finalmente para cada uno de los patrones de puntos se crean manchas circulares de radio r_{mancha} con centro en cada uno de los puntos generados en los pasos anteriormente descritos. Estas manchas pueden ser generadas por circunferencias rellenas o por un conjunto de líneas radiales de puntos, figura 3.2. El radio r_{mancha} dependerá de el tamaño de píxel de la CCD. En el proceso experimental se usará una CCD de 18.1Mp de 6.14×4.605 mm y con píxeles cuadrados de $1.25\mu\text{m}$ de lado por lo que un valor de r_{mancha} superior a 5 veces la longitud del píxel es aceptable.

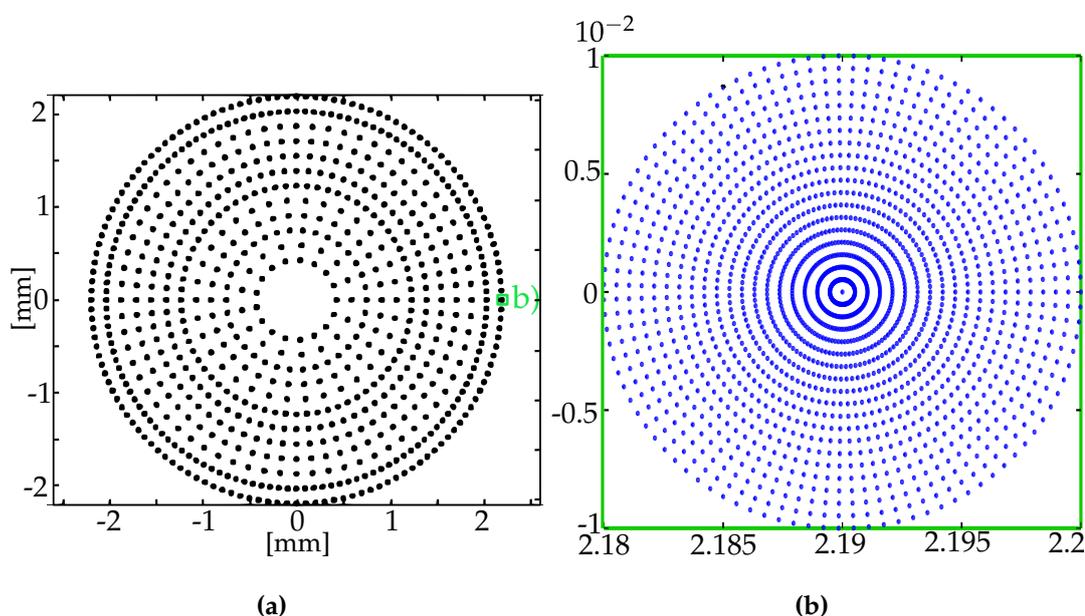


Figura 3.2: Patrón de diseño en a) y mancha del patrón ampliada en b).

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

Un factor determinante para seleccionar el patrón de diseño es la precisión que nos entregará una vez que recuperemos la forma de la superficie en este caso el patrón mostrado en la figura 3.1a) es más preciso que el mostrado en b) de acuerdo a un trabajo previo presentado en la referencia [29], en el que se realizaron simulaciones de la recuperación de la superficie tomando varios arreglos de puntos y los arreglos con secciones radiales mostraron tener un mayor grado de precisión. Por esta razón se eligió un "patrón radial por secciones" para realizar la prueba de la superficie en este trabajo.

El "patrón radial por secciones" usado en este trabajo figura 3.3 se construyó de forma que presentara más ejes de simetría, lo que facilita la alineación de la pantalla en el proceso experimental. El radio inferior del patrón r_m es de 0.43mm y el radio superior más grande es de 2.04mm, tiene 12 líneas circulares y la primera sección de líneas circulares tiene 18 líneas radiales, la segunda 36, la tercera 72 y la cuarta 154. El patrón de diseño tiene un total de 846 manchas y cada mancha tiene un radio de 0.006mm ($6\mu\text{m}$), lo que da una mancha formada con 72 píxeles.

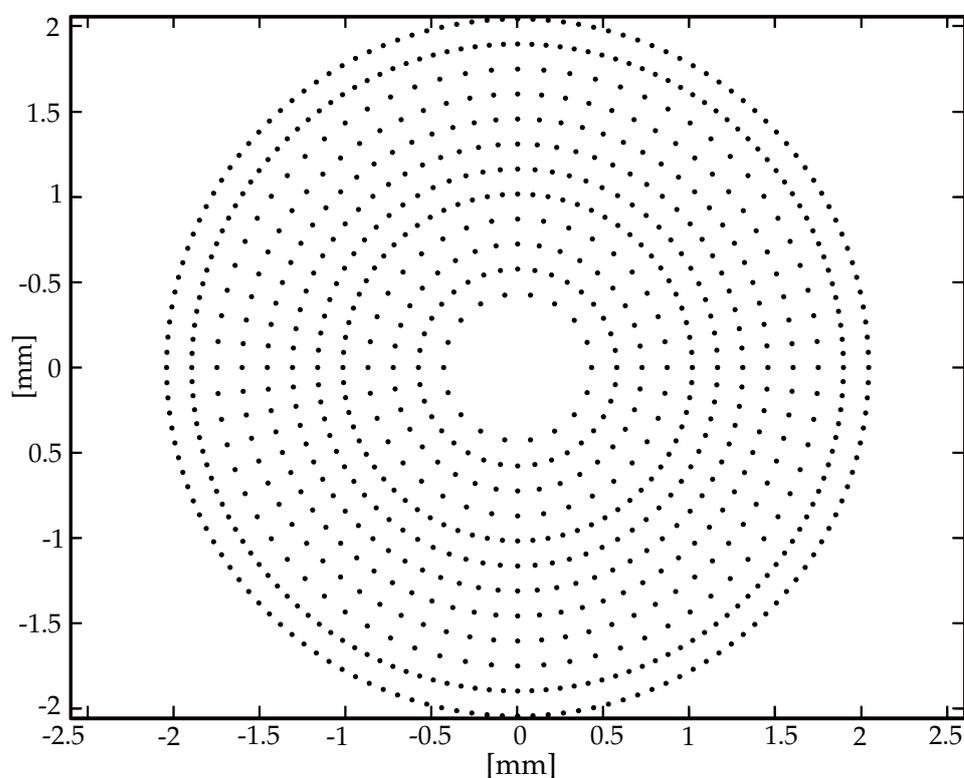


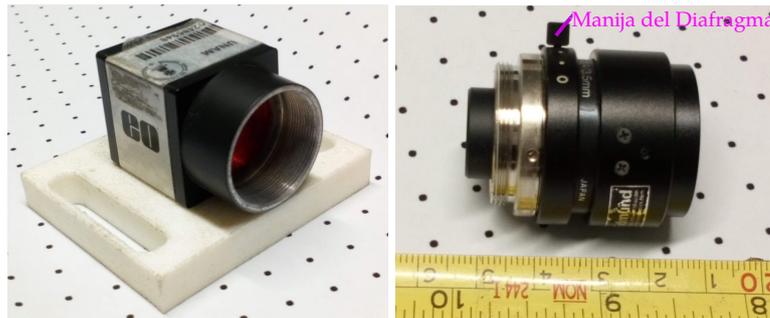
Figura 3.3: Arreglo de puntos usado para construir la pantalla nula.

3.2 Montaje del Dispositivo Experimental

Para construir el dispositivo experimental es preciso basarse en el diagrama de la figura 2.2 del capítulo 2 para esto se necesitará conocer los valores de los parámetros de construcción de los materiales a usar y algunas especificaciones del espejo. Esto nos permitirá conocer la distancias a y b expuestas en el diagrama de la figura 2.2.

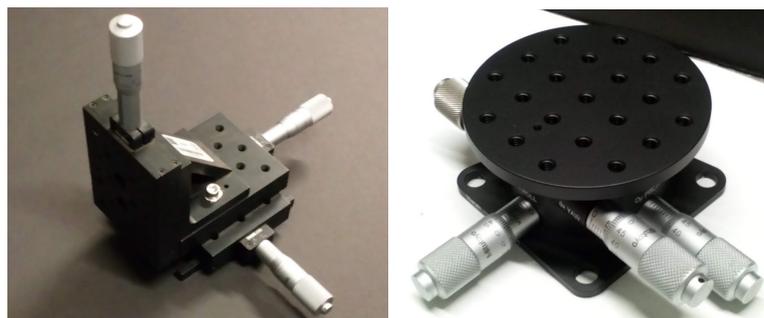
3.2.1 Características de las componentes

Cámara EO-18112 de Edmund Optics con una resolución de 18.1 Mp(Mega Píxeles) y un tamaño de píxel de $1.25 \times 1.25 \mu\text{m}$ mostrada en la figura 3.4a).



(a) Cámara

(b) Lente



(c) Platina XYZ

(d) Platina rotación-inclinación

Figura 3.4: Instrumentos usados para la alineación y construcción del dispositivo experimental.

El sensor CCD de esta cámara tiene una dimensión de píxeles de (HxV) 4912x3684

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

y un área sensible de 6.14 x 4.605 mm.

Para completar el dispositivo óptico de la cámara se necesitará de una lente, que en nuestro caso será una lente de distancia focal ajustada y compacta de la marca Edmund Optics 68-672 de distancia focal de 3.5mm, esta lente permite trabajar a distancias pequeñas y soporta vibraciones sin que se altere el enfoque de la lente, ver figura 3.4b). La apertura del diafragma tiene un rango de (f/#) f/1.4-f/1.6 y la distancia óptima de trabajo está en el rango de (200mm- ∞). La lente cuenta con un dispositivo que permite manejar la distancia de enfoque. Se decidió usar esta lente puesto que cubre una mayor cantidad de área y de acuerdo a la sección 2.3 no presenta una doble reflexión, es decir, los reflejos de las manchas no se superponen entre si.

Se usaron dos platinas de traslación XYZ con micrómetros estándar de la marca ThorLabs, configurados para moverse en tres ejes X, Y y Z con un desplazamiento de 1.00" y una graduación mínima de 0.001", figura 3.4c) y una base inclinación y rotación con rango de inclinación de $\pm 5^\circ$ para los ejes X e Y y resolución de 0.036° y rango de rotación de $\pm 10^\circ$ y resolución de 0.03° , figura 3.4d).

Además se uso una base cilíndrica de un radio de 12.5mm para colocar la pantalla nula, figura 3.5a), dos platinas con movimiento vertical y horizontal para mover el espejo hacia arriba y a los lados, figura 3.5b), dos bases que permitían sujetar dichas platinas hechas especialmente para cumplir esa función con una impresora 3D (figura 3.5c)), y un sistema de iluminación compuesto por dos lámparas comerciales cilíndricas de fluorescentes de techo.

La cámara funciona con el software **uEye Cockpit**, el cual cuenta con una serie de herramientas que permiten manipular la calidad de la imagen, como lo es disminuir el ruido, resaltar colores etcétera además de tomar puntos de herramienta de gran utilidad al momento de alinear el eje óptico de la lente a un plano que se desee capturar como se muestra en la figura 3.6.

El espejo a probar es el espejo E213-2 de la marca Opti-Forms con un eje menor de 107.444mm y un eje mayor de 151.409mm (datos proporcionados por el fabricante). En la figura 3.7 se muestra un diagrama del espejo y en la tabla 3.1 se muestran los valores correspondientes a cada parámetro del mismo.

3.2 Montaje del Dispositivo Experimental

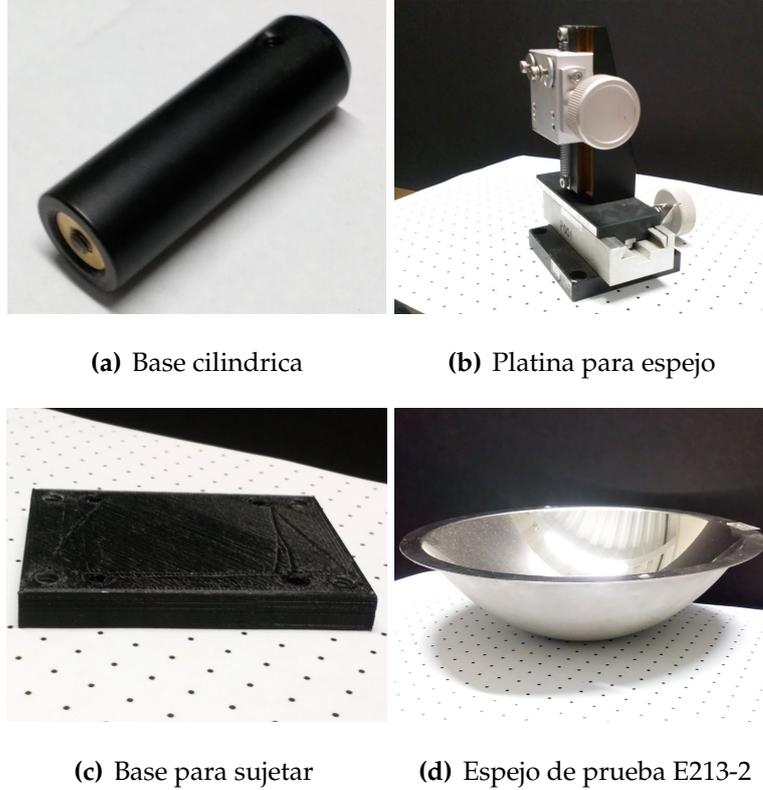


Figura 3.5: Instrumentos usados para la alineación y construcción del dispositivo experimental.

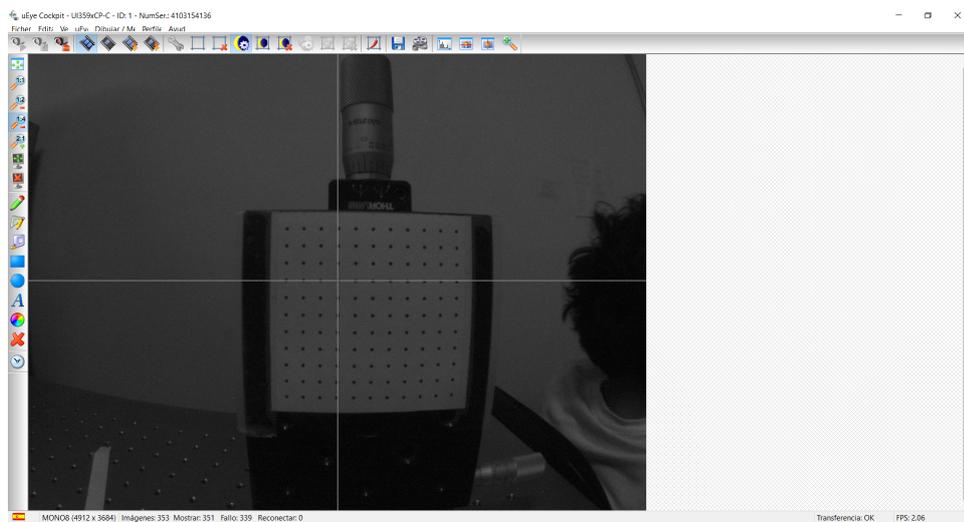


Figura 3.6: Captura de uEye Cockpit.

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

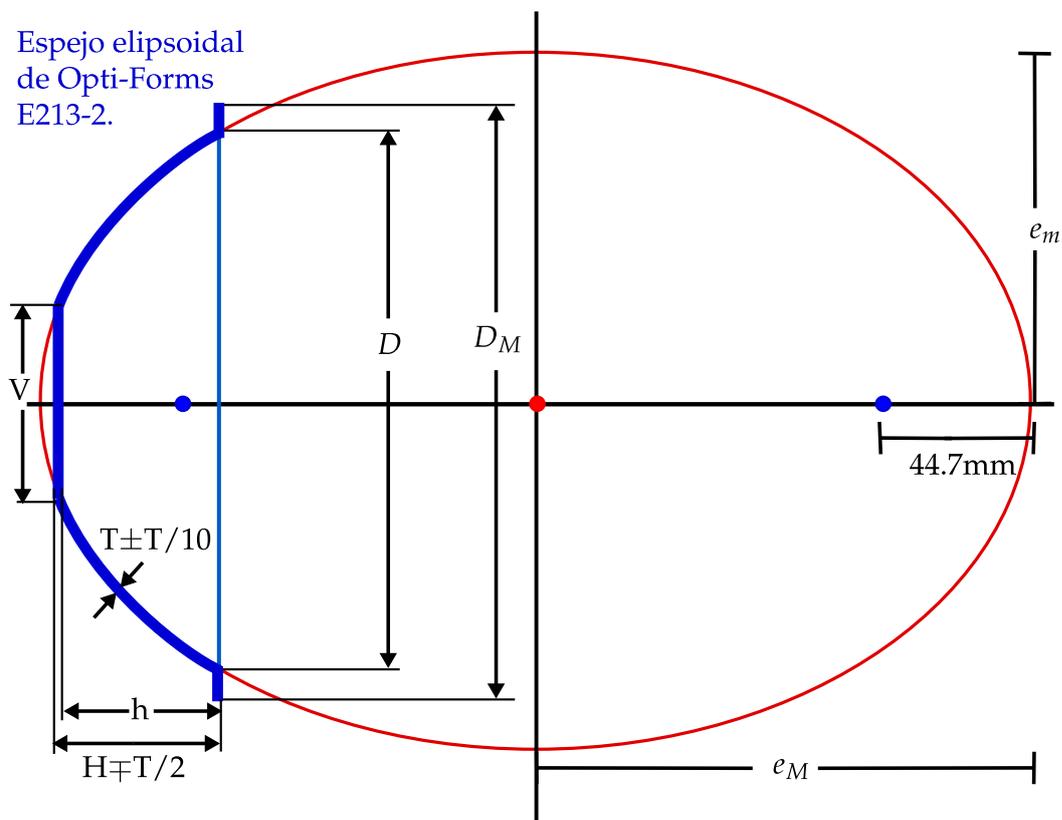


Figura 3.7: Especificaciones del Espejo a probar.

Parámetro	Símbolo	Valor
Eje menor	e_m	107.444mm
Eje mayor	e_M	151.409mm
Diámetro del espejo	D	164.010mm
Diámetro de la base del espejo	D_M	184.150mm
Diámetro trasero	V	31.750mm
Espesor de la lamina	T	1.016mm
Profundidad de la superficie	h	51.918mm
Profundidad total del espejo	H	52.959mm

Tabla 3.1: Tabla de valores de los parámetros de construcción del espejo E213-2.

3.2.2 Parámetros de Diseño de la Pantalla Nula

Una vez conocidas las especificaciones de las componentes a usar para construir el montaje experimental, se necesita deducir los parámetros involucrados en la construcción de una pantalla nula mostrados en la figura 2.2, el radio de curvatura y la constante de conicidad k de la superficie.

Antes que nada empecemos calculando el radio de curvatura r de la superficie. Es sabido que el radio de curvatura de una curva cualquiera en un punto dado puede ser representada por la siguiente expresión [30].

$$r(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{T}|}{|\mathbf{N}|}. \quad (3.1)$$

Donde \mathbf{T} es un vector tangente unitario y \mathbf{N} un vector normal a la curva, en el punto \mathbf{x} , para poder aplicar esta ecuación es necesario parametrizar la curva como una función de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si tenemos una curva que se puede expresar y como función de x entonces podemos representarla como una función de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera;

$$f : (x, y) = (x, y(x)). \quad (3.2)$$

Ahora bien entonces

$$\mathbf{T} = \frac{\frac{df}{dx}}{\left| \frac{df}{dx} \right|} = \frac{(1, y'(x))}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3.3)$$

y dado que \mathbf{T} tiene una norma constante entonces podemos deducir \mathbf{N} a partir de \mathbf{T} como sigue:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{dx} = \left(0, \frac{y''(1 + y'^2)^{1/2} - (1 + y'^2)^{-1/2} y' y''}{1 + y'^2} \right) \quad (3.4)$$

por lo que r puede expresarse como

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}. \quad (3.5)$$

Para el caso de la elipse tenemos que

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

$$y = -\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad (3.6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}, \quad (3.8)$$

y el radio de curvatura en el vértice es decir en el punto $(0, b)$ es

$$r = \frac{a^2}{b}. \quad (3.9)$$

Para nuestro caso $a = e_m$ y $b = e_M$ por lo que $r = 76.2457\text{mm}$.

La constante de conicidad k es mas fácil de calcular pues para una elipse la excentricidad es:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \quad (3.10)$$

y por como está definido k tenemos

$$k = -e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (3.11)$$

por lo que para nuestra superficie

$$k = \frac{e_m^2 - e_M^2}{e_M^2} = -0.49643.$$

Los parámetros faltantes para la construcción de la pantalla nula mostrados en 2.2 corresponden a las características del espejo y los materiales las cuales son mas fáciles de identificar: el parámetro D corresponde al parámetro de la tabla 3.1, el d corresponde al diámetro menor de la CCD de la cámara que es de 4.6mm y R al radio del cilindro que se usara de soporte para la pantalla nula más el grosor del papel (ronda los 0.17mm) es decir 12.50mm+0.175mm.

Con estos valores podemos calcular la sagita del espejo usando la ecuación (2.20), para posteriormente calcular el parámetro a (figura 2.2) para la construcción de la pantalla nula usando la ecuación (2.26) y finalmente calcular el valor del parámetro b involucrado en la construcción de una pantalla nula usando la ecuación (2.18). Los valores de los parámetros calculados se muestran en la tabla 3.2

Elemento	Símbolo	Valor
Radio de curvatura de la superficie	r	76.245mm
Constante cónica	k	-0.4964
Diámetro de la superficie	D	164.010mm
Radio del cilindro de la pantalla nula	R	12.675mm
Longitud del CCD	d	4.6050mm
Distancia focal de la lente	f_s	3.5mm
Distancia lente imagen	a	3.557mm
Distancia lente vértice del espejo	b	180.289mm

Tabla 3.2: Valores de los parámetros para construir la pantalla nula.

Una vez calculados los valores de los parámetros para la construcción de la pantalla nula ahora podemos construirla de acuerdo a la sección 2 (figura 3.8) y montar el dispositivo experimental de acuerdo al diagrama presentado en la figura 2.2 como se muestra en la figura 3.9 con los materiales y dispositivos ya descritos.

La pantalla nula fue impresa en papel Bond. La imagen final de la pantalla nula fue hecha en un formato de gráficos vectoriales (.svg) con el fin de tener una mayor resolución de la imagen y perder en la menor medida las dimensiones ideales de la pantalla nula.

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

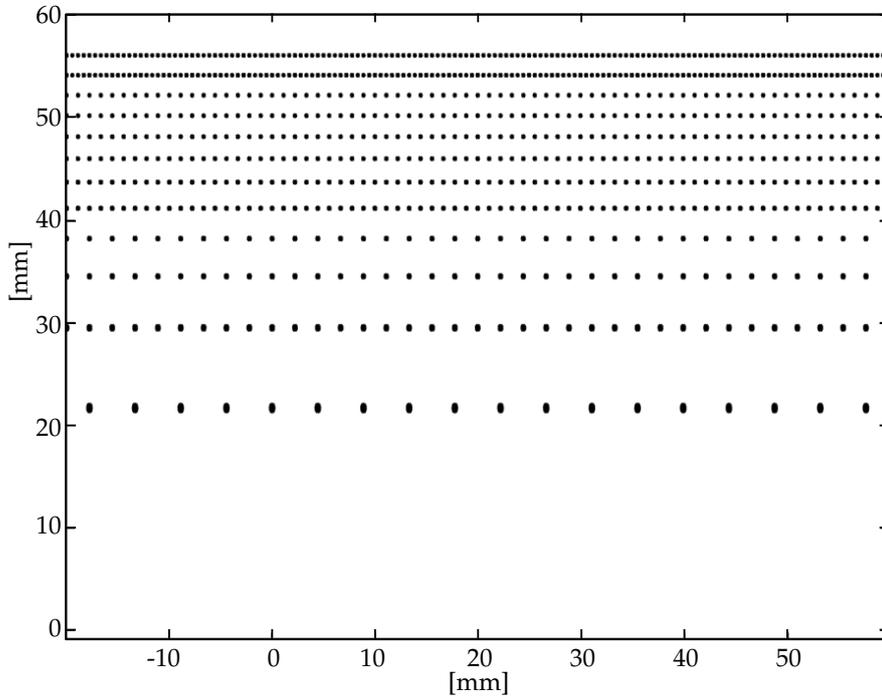


Figura 3.8: Pantalla nula a partir del arreglo de puntos presentado en la figura 3.3 y las características de las componentes del dispositivo experimental.

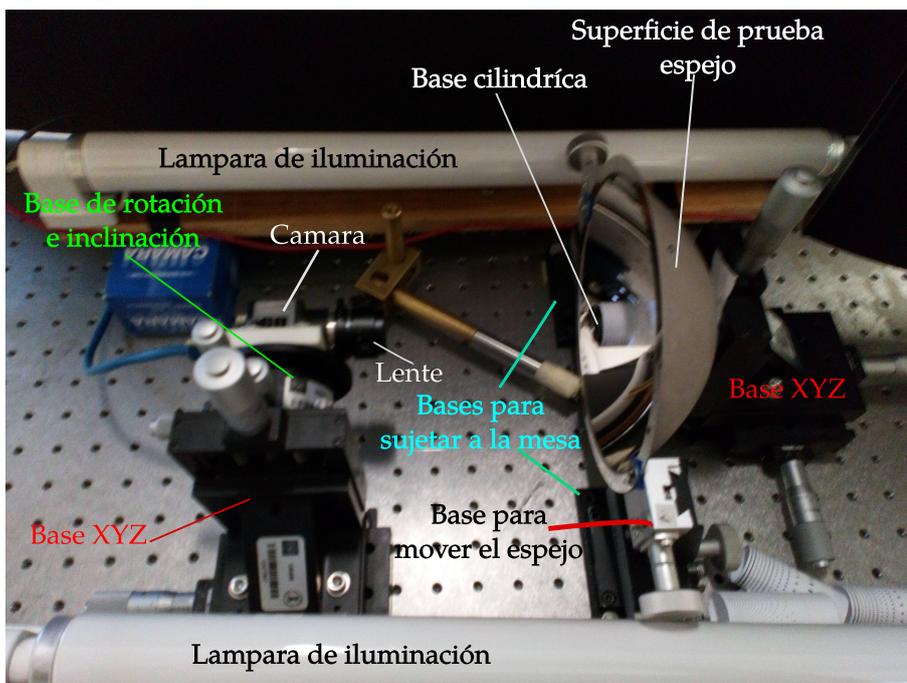


Figura 3.9: Arreglo experimental, armado con todas las componentes descritas.

3.3 Corrección por Distorsión a la Lente

En esta sección se explicará la caracterización de la lente que se usara para la construcción de la pantalla nula. La caracterización de la lente es de gran importancia pues esta puede presentar algunas aberraciones, principalmente las que cambian las distancias en la imagen formada, como lo es la distorsión.

Para corregir la distorsión haremos uso de la teoría presentada en el apéndice A partiendo de la siguiente ecuación

$$\rho_o = \frac{\rho_d}{M_T} - \frac{E}{M_T^4} \rho_d^3. \quad (3.12)$$

Siendo ρ_o el tamaño del objeto enfocado por la lente, ρ_d el tamaño de la imagen formada por la lente con distorsión, M_T la amplificación transversal de la lente y E el coeficiente de distorsión. La expresión que relaciona la imagen formada por una lente sin distorsión y una con distorsión se obtiene de la siguiente tomando la siguiente relación,

$$\rho_i = M_T \rho_o, \quad (3.13)$$

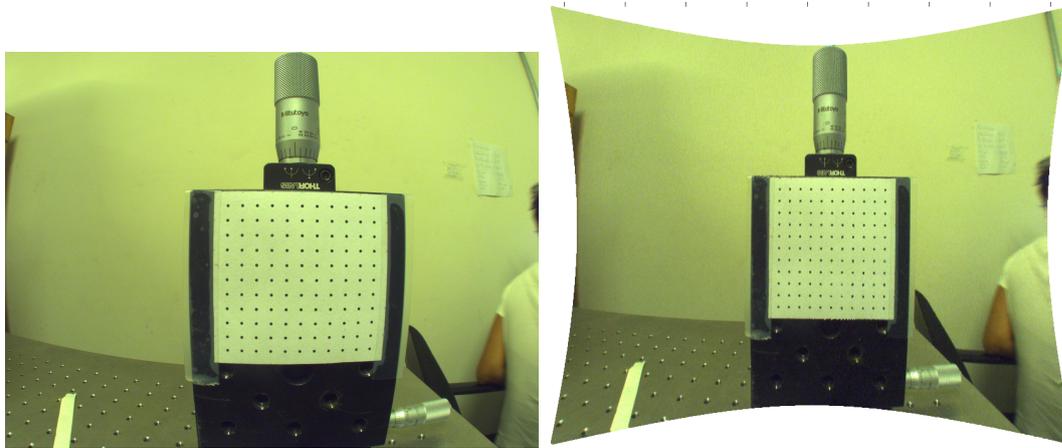
donde ρ_i es la imagen formada por una lente sin distorsión. Despejando ρ_o de esta ultima expresión y sustituyéndola en la ecuación 3.12, obtenemos una ecuación que nos relaciona el tamaño de una imagen con distorsión y una sin distorsión.

$$\rho_i = \rho_d - \frac{E}{M_T^3} \rho_d^3. \quad (3.14)$$

Esta ultima expresión nos permite tomar las coordenadas de una imagen con distorsión y transfórmala a una imagen sin distorsión, como se aprecia en la figura 3.10. El procedimiento para corregir la lente por distorsión se reduce a seguir los siguientes pasos:

1. Se enfoca la lente a un plano que sea perpendicular al eje óptico de la lente, el cual debe tener objetos cuya distancia al eje óptico ρ_o sean perfectamente conocidos.
2. Se captura una imagen de dicho plano, las imágenes de los objetos en el plano estarán distanciadas del eje óptico una distancia ρ_d .

3. PRUEBA EXPERIMENTAL



(a) imagen con distorsión

(b) imagen sin distorsión

Figura 3.10: Corrección de la imagen por distorsión a un plano de 12.00mm de distancia del diafragma.

3. Los datos ρ_d se ajustan como una función de ρ_o usando la ecuación (3.12), para determinar el valor del coeficiente de distorsión E y la amplificación transversal M_T .
4. Se usa la ecuación (3.14) para corregir la distorsión de la imagen tomada.

3.3.1 Corrección por Distorsión en la Práctica

Para corregir la distorsión de la lente en la práctica se realizó un montaje experimental haciendo uso del material descrito antes y agregando dos mesas de elevación micrométricas. Se realizaron varias pruebas antes de realizar la prueba descrita en este apartado, en estas pruebas se pudo observar que el coeficiente de distorsión y la amplitud transversal variaban en función de la distancia respecto a la lente, otra cosa a observar es que la distancia teórica a la cual debe estar colocado el diafragma o pinhole (parámetro b) del diseño de la pantalla nula no corresponde a la distancia física experimental pues nuestra lente no corresponde a una lente simple sino más bien a un sistema de varias lentes de las cuales no tenemos información del fabricante. Estos hechos ocasionan que el valor teórico del parámetro b no concuerden con el valor experimental.

Para poder alinear el espejo para la prueba de pantallas nulas, sabiendo todo lo anterior necesitaremos encontrar la distancia experimental óptima a la cual los demás parámetros de diseño de la prueba de pantallas nulas no cambien, es decir, encontrar la distancia del diafragma de la lente al espejo, para lograr esto necesitaremos de un banco de datos del coeficiente de distorsión E y la amplitud transversal M_T que nos permitan encontrar el valor del coeficiente E y M_T para cualquier distancia de un plano hacia la lente. Cabe aclarar que este hecho podría ser omitido si el valor de b , y/o la distancia de enfoque fuera mucho más grande que la longitud de la lente.

Para corregir la distorsión de la lente se siguieron los cuatro pasos descritos anteriormente usando como plano de prueba un arreglo de puntos cuadrangular de 20x24cm cuyos puntos distaban 1cm entre cada uno de ellos y tenían un diámetro de 0.75mm como se muestra en la figura 3.11. El arreglo de puntos estaba formado por un total de 480 puntos, y se imprimió en una hoja tamaño carta. Dicho arreglo se colocó a una distancia de 218mm de la manija que mueve el diafragma de la lente, se escogió esta distancia pues se realizó un programa usando los parámetros teóricos para la construcción de la pantalla nula calculados en la sección anterior y se determinó de acuerdo a la sección 2.4 que las imágenes formadas por el espejo estarán en un rango de 211mm y 265mm, ver figura 3.12.

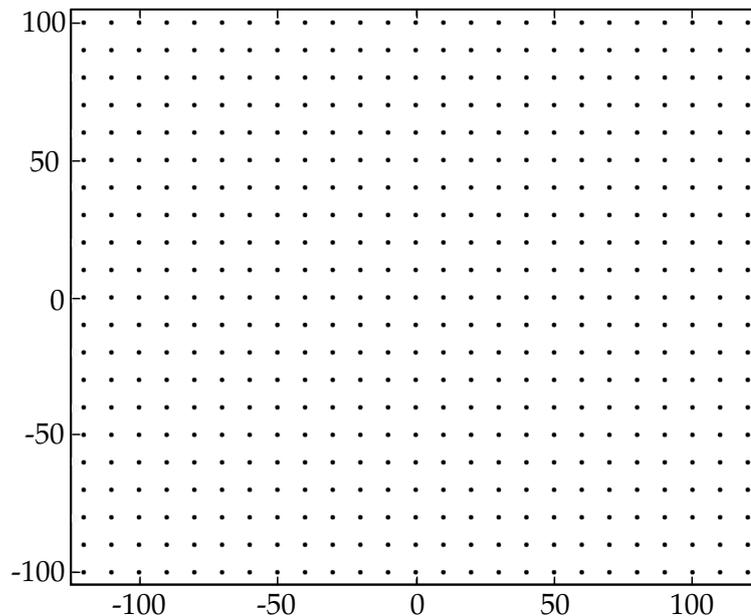


Figura 3.11: Arreglo de puntos usado para corregir la distorsión.

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

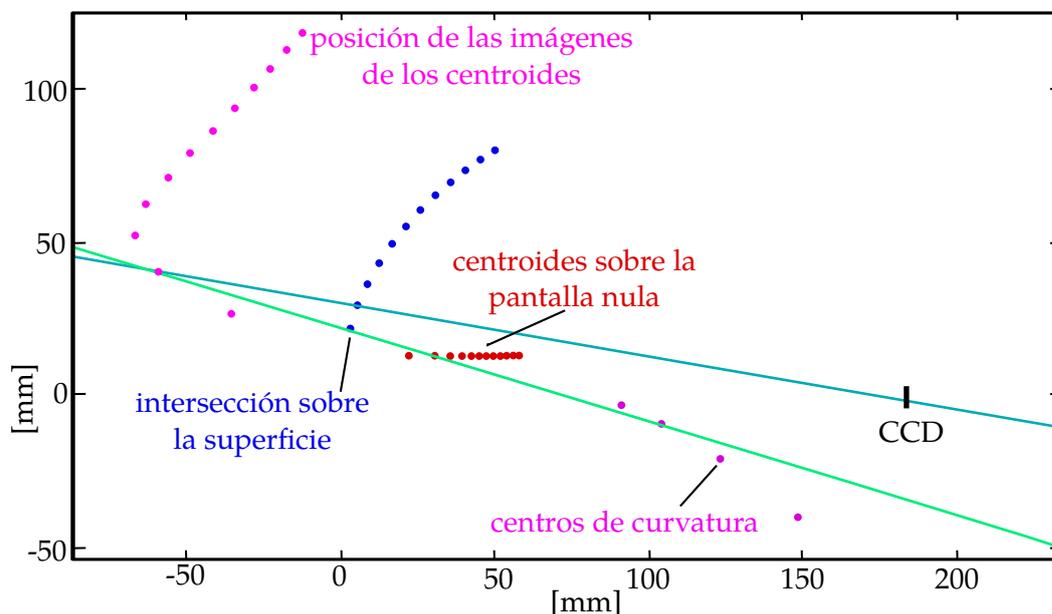


Figura 3.12: Formación de imágenes de los puntos sobre una pantalla nula.

Se enfocó la lente a la distancia la cual se encontraba el arreglo cuadrangular de puntos, manteniendo el diafragma abierto al máximo, con el fin de que no interviniera en el enfoque. Se acomodó la cámara hasta que el plano que contenía el arreglo cuadrangular fuera perpendicular al eje óptico de la lente y este interceptara al centro del rectángulo de puntos, con ayuda de las líneas de referencia del software de la cámara, posteriormente se tomaron imágenes desde 120mm hasta 263mm cada 5mm, para tener un banco de datos del coeficiente de distorsión y la amplitud transversal. Se eligió el rango de 120-160mm pues teóricamente la distancia del diafragma de la lente al espejo es de alrededor de 125mm, y conocer la distorsión a ese valor es prioritario para la alineación del espejo.

Para montar el arreglo experimental que nos permitiera desplazar la cámara en el intervalo de (120,263) milímetros de forma vertical se colocó la cámara con la lente en la platina de rotación-inclinación y posteriormente esta platina se montó en una platina XYZ y ésta se colocó en una mesa de elevación, la cual se colocó en una segunda mesa de elevación más grande, este arreglo nos permitió desplazar la cámara en un mismo eje sin que se moviera en otros y la platina rotación-inclinación nos permite alinear el eje óptico de la cámara. Las fotografías tomadas se hicieron en blanco y negro con el fin de obtener un mayor contraste de los puntos. En la figura 3.13 se muestra una imagen del arreglo experimental.

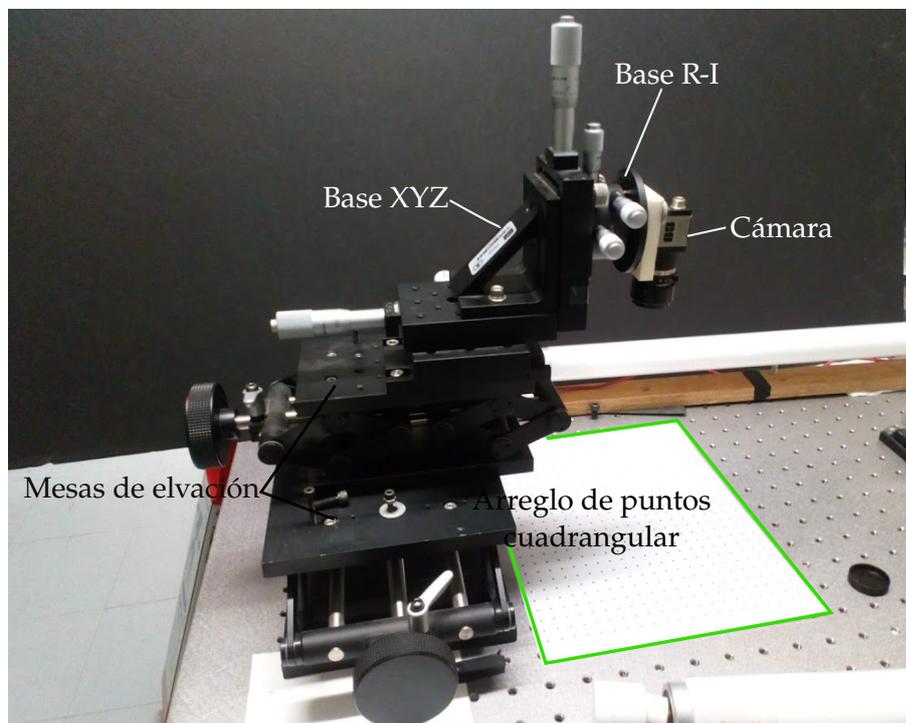


Figura 3.13: Arreglo experimental usado para corregir la distorsión de la lente.

Para tratar las imágenes tomadas del arreglo de puntos y poder determinar la distancia ρ_d de cada uno de ellos se realizó un programa en Matlab™ que realiza una binarización a la imagen, de acuerdo a un criterio en base del valor de gris de la imagen creando un mayor contraste de la imagen capturada entre los objetos de negro y el resto, realizando una inversión de contraste. Posteriormente dicho programa encuentra el centro de masa de cada mancha de píxeles blancos y las discriminaba por tamaño eliminando las manchas formadas por un número menor a una cota de píxeles determinada el cual rondaba de los 80 a los 100 píxeles, con el fin de tomar sólo las manchas correspondientes a las imágenes de cada uno de los puntos del arreglo cuadrangular usado para corregir la distorsión. En la figura 3.14b) se muestran en color rojo las manchas que no sobrepasan la cota de píxeles establecida, esta cota permite eliminar cualquier mancha proveniente de algún objeto indeseable en el arreglo cuadrangular de puntos como podrían ser manchas de polvo, cabello, etcétera. Como las imágenes tomadas se encuentran en unidades de píxeles, las coordenadas de cada centro de masa deben ser convertidas a unidades que permitan compararlas con el arreglo cuadrangular de puntos, en este caso trabajaremos

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

con milímetros.

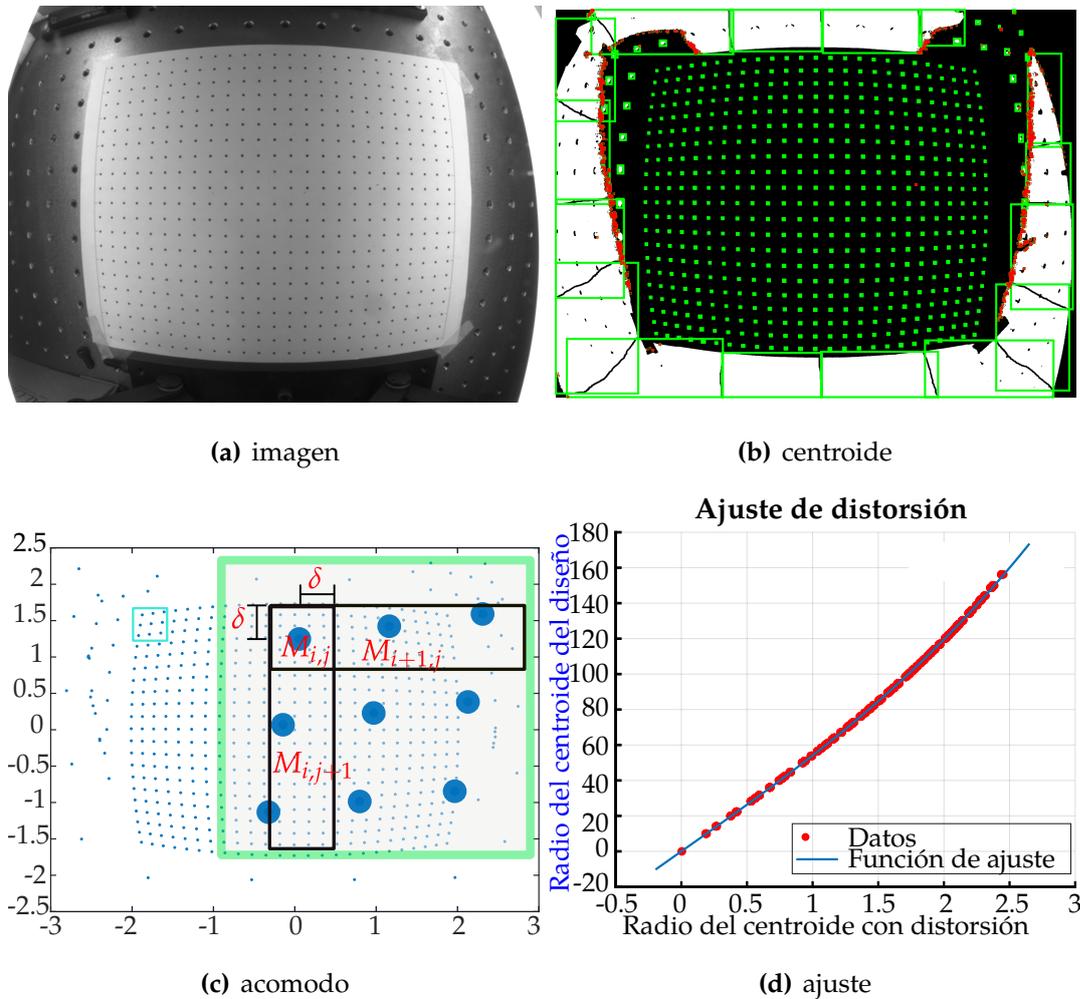


Figura 3.14: Corrección por distorsión a un plano de 210mm de distancia del pinhole.

Posteriormente para poder encontrar el coeficiente de distorsión E y la amplitud transversal M_T se realizó otro programa que asignara a cada ρ_d de cada punto su respectivo ρ_o en el arreglo rectangular de puntos impreso en la hoja, para esto se acomodaron los valores de las coordenadas del centro de masa de las manchas en una matriz de m por n ($M_{m,n}$) donde cada fila i corresponda a la fila i del arreglo cuadrangular de puntos de izquierda a derecha y cada columna j corresponda a la columna j del arreglo cuadrangular de arriba hacia

abajo. La entrada (1,1) de la matriz se introduce de forma manual y tomando un criterio de vecindades de radio δ en el eje Y alrededor de este primer elemento se escoge de entre todos los centros de masa de una lista el que esté más cerca y dentro de la vecindad de radio δ en Y y se asigna la entrada (1,2), el proceso se repite en este nuevo elemento hasta completar la fila y posteriormente se hace lo mismo con estos elementos para completar las columnas pero esta vez tomando una vecindad de radio δ en el eje X , figura 3.14c). El arreglo cuadrangular de puntos se acomoda de la misma manera en una matriz $M_{m,n}$ de igual forma, para que la posición de un punto en el arreglo cuadrangular corresponda a la misma entrada en la matriz que el centroide de la mancha correspondiente a su imagen.

Para finalizar el proceso se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de ρ_o en función de ρ_d usando la ecuación (3.12), para encontrar el coeficiente de distorsión E y la amplitud transversal M_T como se muestra en la figura 3.14d). Este procedimiento se realizó para cada una de las 25 imágenes tomadas de 120-263 milímetros.

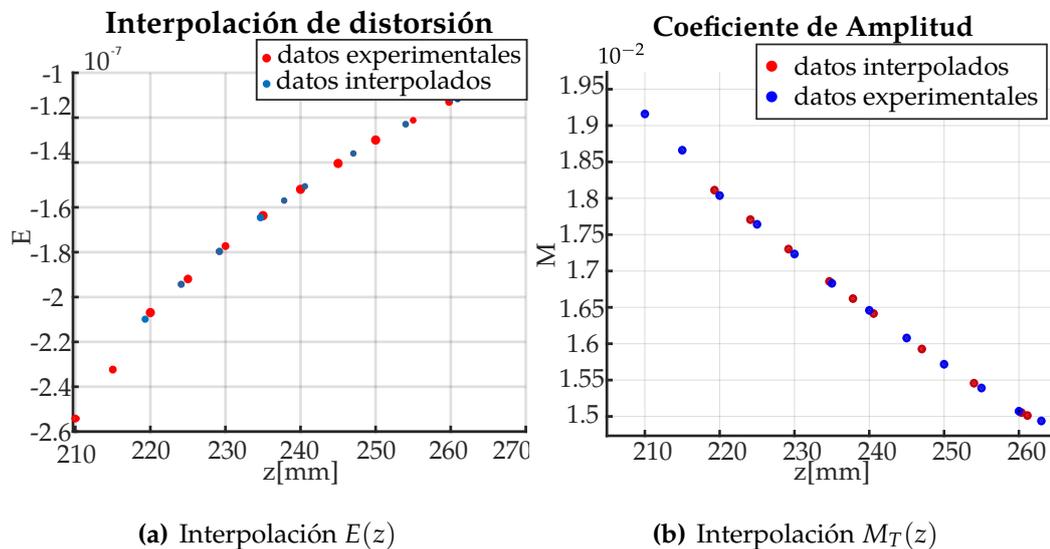


Figura 3.15: Interpolaciones de E y M_T a las distancias a las que se formarán las imágenes presentadas en la figura 3.12.

Una vez encontrados la amplitud transversal M_T y el coeficiente de distorsión E para cada una de las imágenes tomadas en los distintos planos de prueba de

los 120mm a los 263mm se puede realizar una interpolación para aproximar los valores de M_T y E en distancias entre cada uno de los planos en los que fueron calculados como se muestra en la figura 3.15.

3.4 Alineación del dispositivo experimental y enfoque

Como se dijo en la sección anterior la lente de la cámara fue enfocada a una distancia de 218mm pues las imágenes de los puntos sobre la pantalla nula se formarían en un rango de 211mm a 265mm. Después de esto se alinearon las demás componentes del arreglo experimental respecto al eje óptico de la cámara usando las líneas de referencia del software de la misma.

La manera en que se alineó fue la siguiente; se pegó un arreglo de puntos cuadrado figura 3.16a) sobre la base XYZ sobre la cual se acomodaría la base cilíndrica que sostendría la pantalla nula, la cruz de las marcas de referencia de la cámara se centró en un punto cercano al centro del arreglo cuadrado y se alejó todo lo posible de la lente de la cámara, se movió la inclinación y rotación de la platina de inclinación-rotación para volver a centrar las líneas de referencia en el punto inicial, posteriormente se acercó el arreglo de puntos cuadrado todo lo permitido por las bases XYZ en el eje Z (movimiento vertical correspondiente paralelo a la base del espejo y que corre a lo largo del eje óptico de la lente) y se movieron los ejes X e Y de las bases XYZ hasta volver a centrar lo más posible el punto inicial, se volvió a alejar y se repitió el procedimiento hasta que el punto inicial y los puntos en la misma fila y columna que este no se alejaran de las líneas de referencia del software, figura 3.16b) lo que nos permitió tener el plano totalmente perpendicular al eje óptico de la lente, este procedimiento se hizo de igual forma para alinear el eje óptico de forma perpendicular al arreglo cuadrado de puntos en el experimento para corregir la distorsión de la lente.

Para alinear la base cilíndrica respecto al eje óptico solo se buscó que ésta fuera perpendicular a la base XYZ, con ayuda de un círculo dibujado con el software de la cámara centrado en el centro de la imagen tomada. La base cilíndrica se atornilló a la base XYZ y se le calzaron algunos trozos de papel hasta que la base superior coincidiera con el círculo dibujado por el software figura 3.17a).

Para alinear el espejo respecto al eje óptico de la lente se colocó la pantalla nula

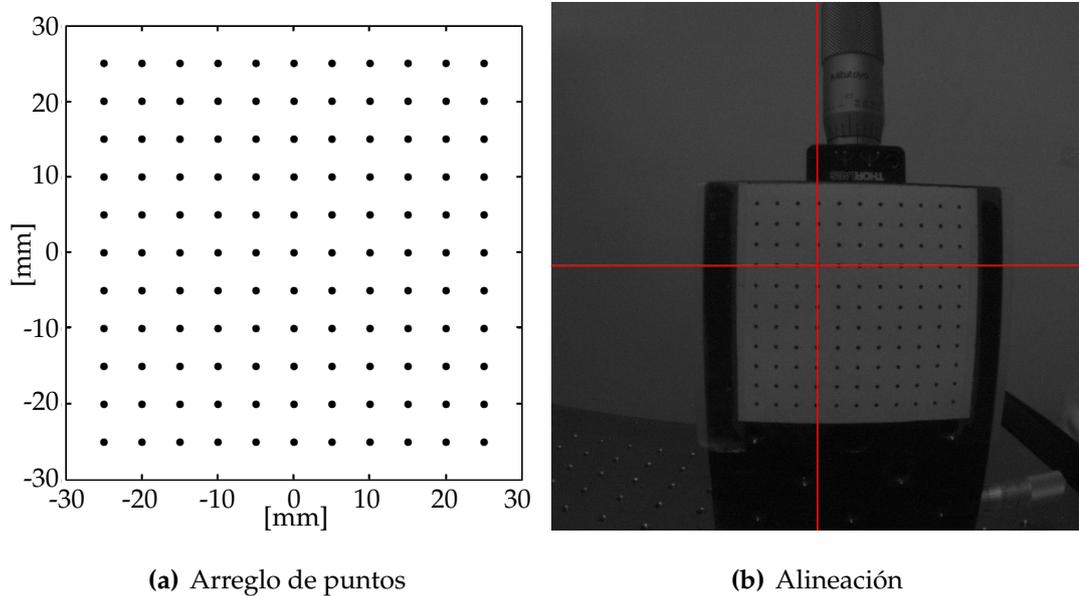


Figura 3.16: Alineación de la lente y la base XYZ.

sobre la base cilíndrica, y posteriormente el espejo se atornilló en las bases que le permiten moverse en los ejes X e Y y para variar la inclinación se usó dos postes y una nuez, la pantalla nula se colocó de tal forma que el cero de ella sobresaliera unos 2mm del agujero trasero del espejo pues es cercano a lo que es la sagita del diámetro trasero (1.662mm). Después se movió la cámara hasta que el reflejo de la pantalla nula coincidiera con el patrón de diseño de la misma, también se movió la inclinación y la posición del espejo para que el reflejo de la pantalla nula fuera lo más simétrico posible (3.17b).

Para colocar el espejo a la distancia a la cual las imágenes de la base con diámetros D y D_M del espejo midieran lo requerido, es decir, que las medidas de la imagen del diámetro D del espejo coincidieran con las del diseño de la pantalla nula se colocó una hoja impresa con dos círculos de diámetros D y D_M frente a la base del espejo figura 3.18, para tener una mejor referencia de la circunferencias de la base del espejo sobre todo la de diámetro D , pues el espejo tiene una ligera curvatura en el borde de esta. Se midió la distancia de la base del espejo a la manija del diafragma de la lente, se interpoló el valor de E y M_T a esta distancia y se calculó el valor de la altura de la imagen formada por la base del espejo. El procedimiento se repitió hasta que el valor del diámetro de la imagen de la circunferencia de diámetro D se acercara lo más posible al valor de diseño del espejo lo cual sucedió a los 202.555mm de

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

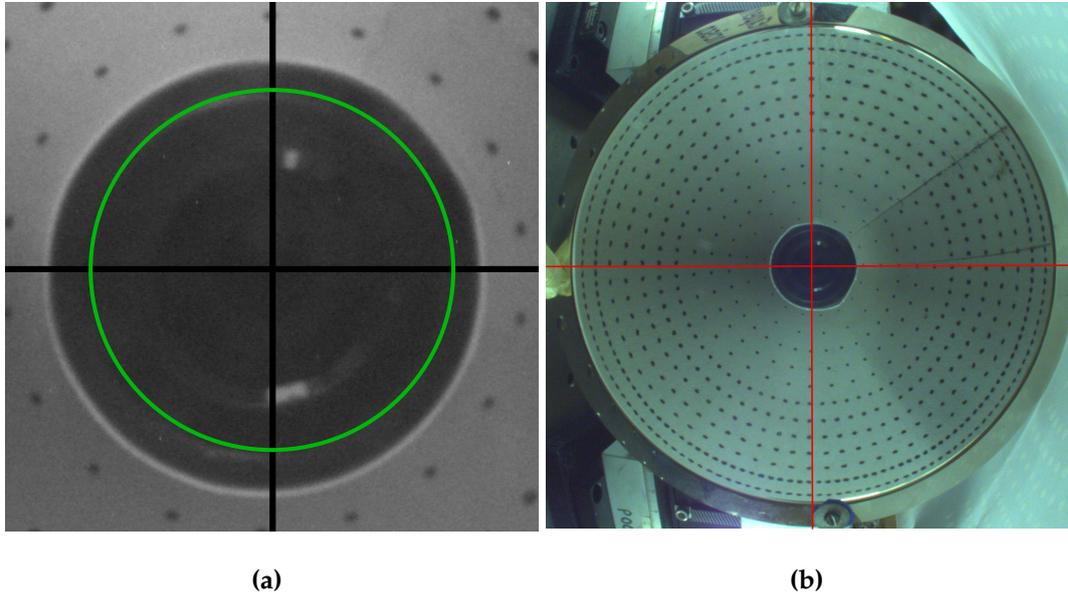


Figura 3.17: Alineación del cilindro en a) y la alineación del espejo para que se vea el patrón generado por la pantalla nula en b).

distancia del vértice del espejo a la manija del diafragma o a 149.944mm de la base del espejo a la manija. En la tabla 3.2 se muestran algunos de los valores de la alineación del espejo.

Distancia [mm]	radio de la imagen [mm]	diámetro de la base [mm]
X	2.3025	164.00
202.555	2.2992	163.26
202.809	2.2935	163.29
203.190	2.2885	163.33
202.555	2.300	163.32

Tabla 3.3: Valores de D calculados a partir de la imagen tomada para alinear el espejo, en azul se muestran los valores ideales.

Es de notar que el valor teórico del parámetro b (180.289mm) no corresponde a la distancia que se colocó el diafragma en el experimento (202.555mm), puesto

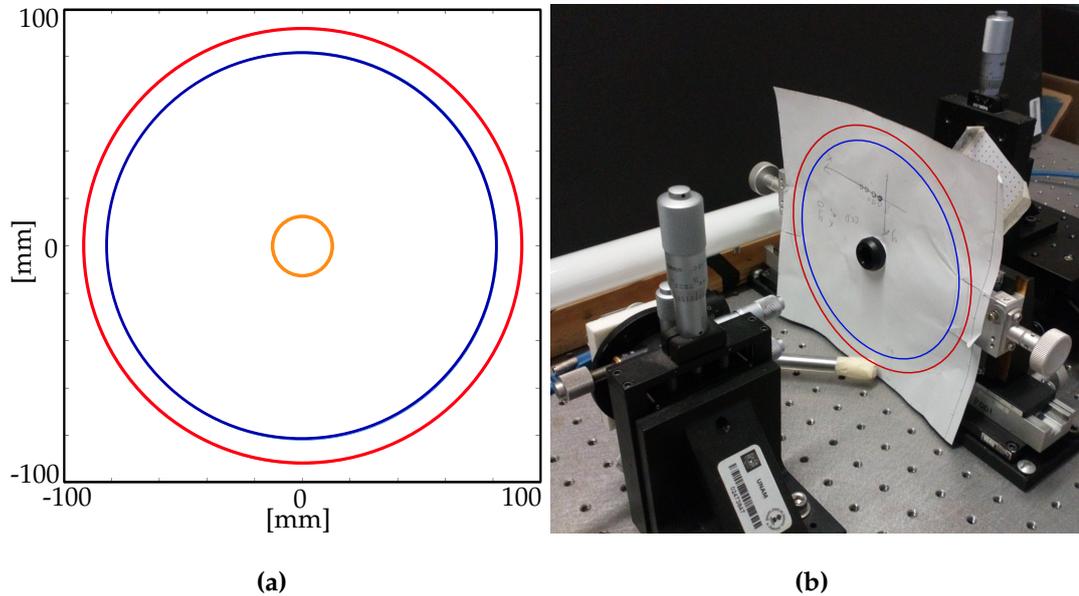


Figura 3.18: Plantilla para colocar el espejo a la distancia correcta en a) e implementación del procedimiento en b).

que si suponemos que el diafragma de la lente está justo donde debajo de la manija que lo controla, existe una diferencia de 22.265mm entre ambas. Podría ser que el diafragma de la lente se encuentre más adelante, o en cualquier caso se puede considerar un diafragma hipotético más adelante en la lente.

Finalmente se colocó en la posición correcta la pantalla nula para esto se realizó el mismo procedimiento para colocar el espejo a la distancia correcta pero esta vez se tomó en cuenta el radio de los puntos de la circunferencia más pequeña en el patrón generado por la pantalla nula. Tomando en cuenta la distancia a la cual teóricamente forma la imagen el espejo (234.494mm) además de sumarle los 22.2mm de la alineación del espejo, se interpoló el valor de E y M_T a dicha distancia (252.837mm) y se movió la pantalla nula hasta que los valores de los radios de la imagen de la segunda circunferencia ya corregidos con los parámetros E y M_T coincidieran lo más cercano posible con el valor teórico que es de 0.5882mm. El resultado más próximo obtenido fue de 0.5871mm y la razón por la que se tomó la segunda circunferencia fue por si la primera se cubría con la base cilíndrica sobre la cual estaba la pantalla nula. Otra razón para considerar estas circunferencias es que en la parte central el espejo se asemeja más a una esfera.

3. PRUEBA EXPERIMENTAL

Una vez alineado el cilindro que soporta la pantalla nula el espejo y puestos a la distancia correcta tanto el espejo como la pantalla, (figura 3.19) se pueden tomar las imágenes que servirán para recuperar la forma de la superficie.

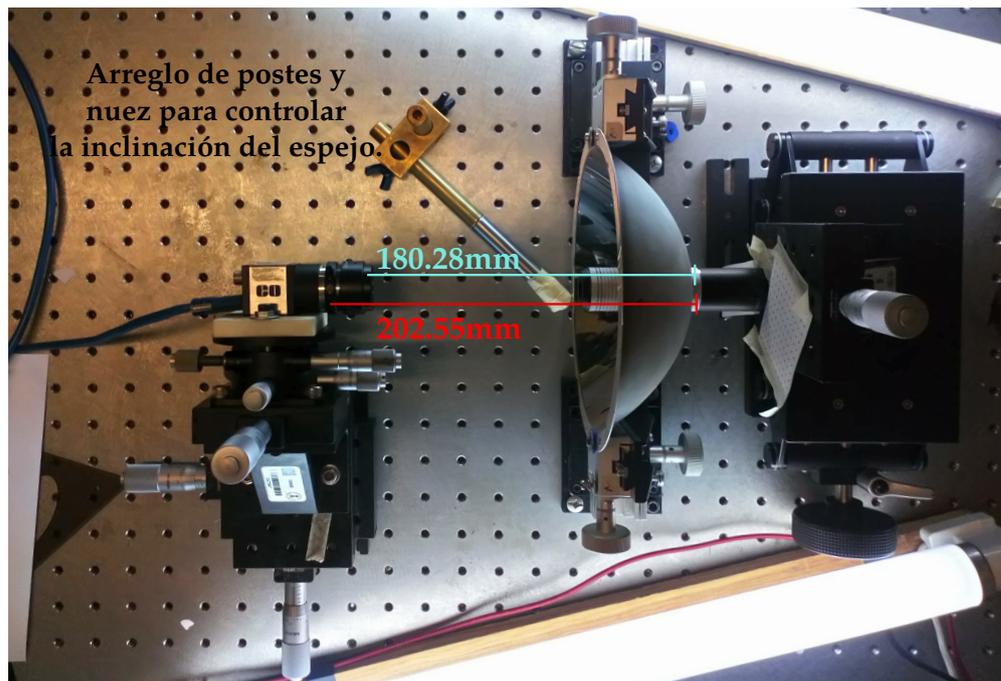


Figura 3.19: Arreglo experimental final para probar el espejo en rojo se muestra el valor experimental y en azul el valor teórico del diafragma hacia el vértice del espejo.

En la figura 3.20 se muestra una imagen en blanco y negro del reflejo de la pantalla nula sobre el espejo, una vez que se han alineado todas las componentes del dispositivo experimental, esta imagen puede ser usada para recuperar la forma de la superficie reflectora (espejo), usando la teoría expuesta en el Capítulo 2 Sección 2.5.

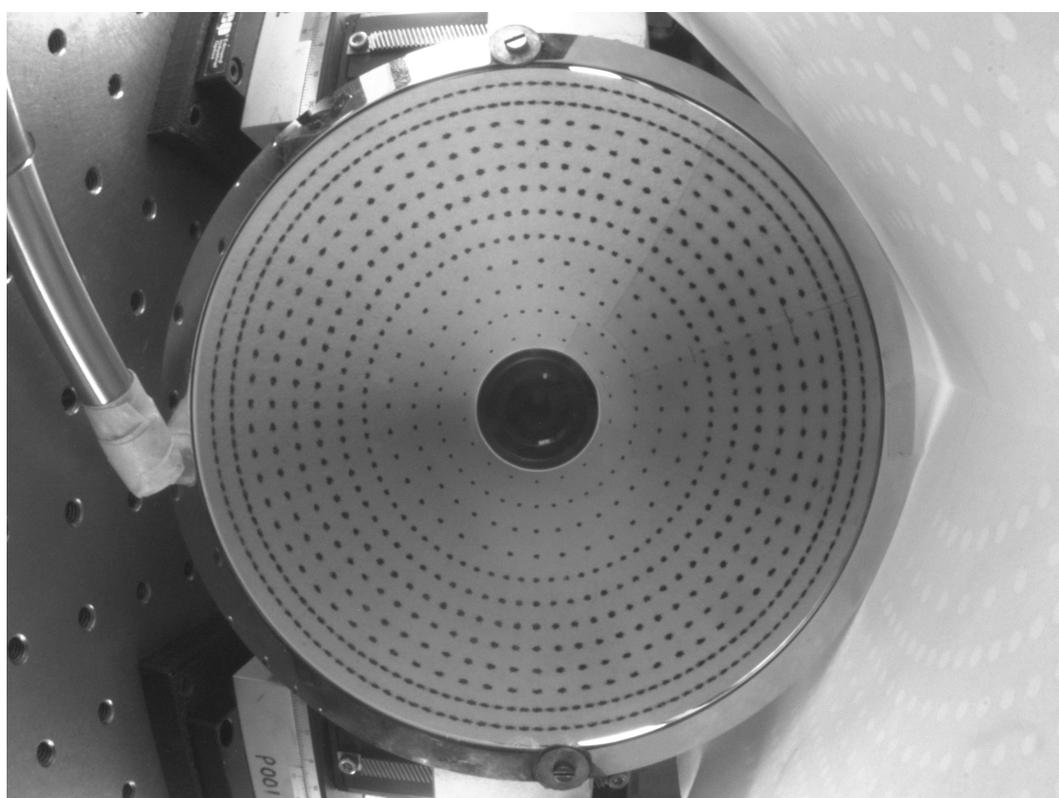


Figura 3.20: Fotografía del reflejo de la pantalla nula sobre el espejo.

Capítulo 4

Análisis de Resultados

En este capítulo se presentarán los resultados de la prueba experimental y los resultados de la posterior evaluación y recuperación de la superficie, se analizarán los resultados obtenidos con el método teórico propuesto en el Capítulo 2 sección 2.5 y se propondrá una representación de superficies similares a la evaluada.

4.1 Centroides de la imagen obtenida de la CCD

Una vez que se ha obtenido una imagen del reflejo de la pantalla nula sobre la superficie se puede realizar el procedimiento analítico para la reconstrucción de la imagen expuesto en la sección 2.5 del Capítulo 2. Antes de realizar el procedimiento dicho debemos encontrar el centroide de cada mancha capturada por la CCD de la cámara, para esto se realizará un procedimiento similar al usado para corregir por distorsión a la lente expuesto en el Capítulo 3.

Para encontrar el centroide de cada mancha primero se realizó un programa en Matlab™ que binariza la imagen en un sólo nivel de blanco y negro figura 4.1, dependiendo del valor de gris de cada píxel se le asignará un valor blanco o uno negro, posteriormente dicho programa encontraba el centroide correspondiente a cada mancha de la imagen binarizada, después discriminaba las manchas o conjuntos de píxeles de acuerdo al número que los conformaban, eliminando los centroides de las manchas que no correspondieran a las manchas producidas por el reflejo de la pantalla nula sobre la superficie. El centro de masa o centroide de cada mancha es calculado de igual forma que se calcula el centro de masa en mecánica estática.

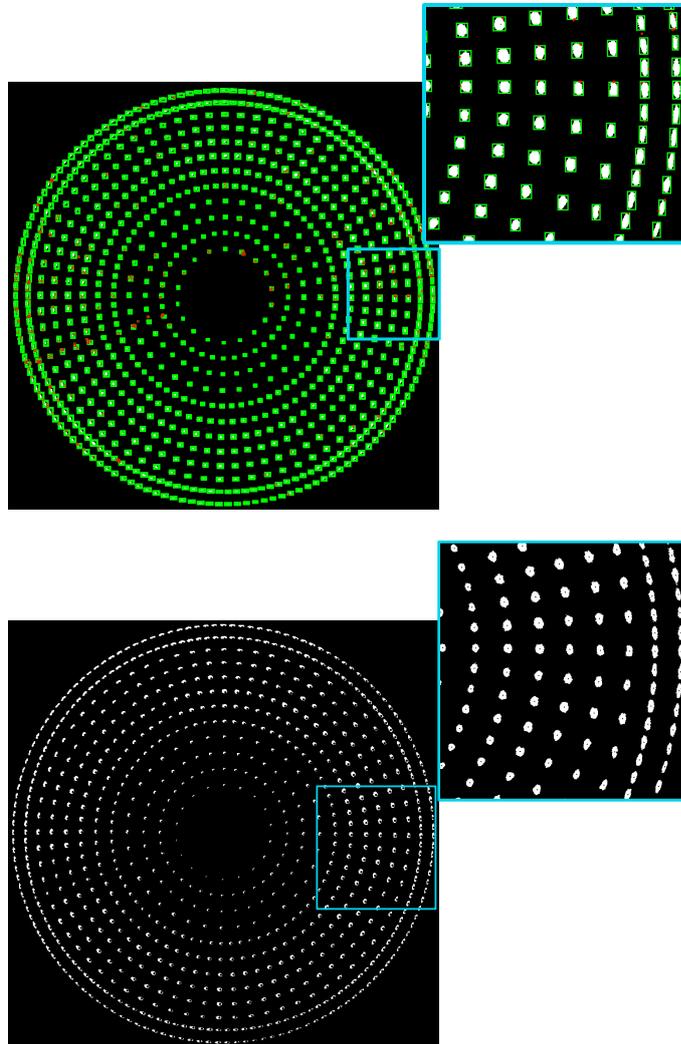


Figura 4.1: En a) se muestra la imagen binaria en blanco y negro, en rectángulos verdes se marcan las manchas que sobrepasan la cota mínima de píxeles para ser consideradas como una mancha generada por la pantalla nula, y en rojo las que no sobrepasan la cota establecida. En b) se muestran las manchas con su respectivo centro de masa marcado con un punto.

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{L} \sum_{i,j} l_{i,j} \cdot \mathbf{r}_{i,j} \quad (4.1)$$

En esta ecuación L es el número total de píxeles de cada mancha $l_{i,j}$ corresponde al nivel de gris del píxel en la posición (i, j) que forma la mancha y $\mathbf{r}_{i,j}$ corresponde a la posición de dicho píxel.

Una vez encontrados los centroides de cada mancha se corrigió la distorsión producida por la lente en la posición de cada centroide de las manchas, para tener la posición correcta del centroide figura 4.2. La corrección por distorsión a los centroides se realizó por cada fila circular, es decir, las manchas que tienen un radio similar usando los valores de E y M_T para cada distancia teórica a la cual se formaría la imagen de cada fila circular. E y M_T se obtuvieron de la función de interpolación del proceso para corregir la distorsión de la imagen explicado en la sección 3.3.

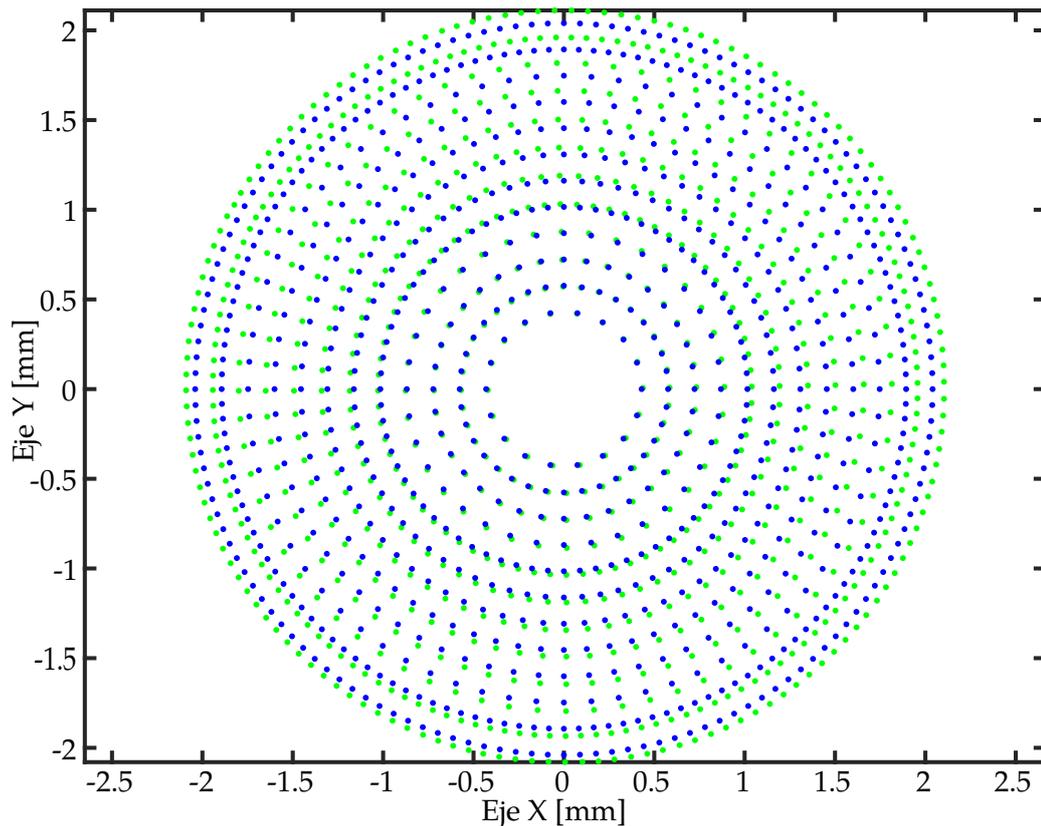


Figura 4.2: Se muestran las posiciones de los centroides de las manchas teóricas en azul y en verde las calculadas experimentalmente.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

z_t [mm]	$E \cdot 10^{-7}$ [mm ⁻³]	M_T
237.82	-1.57	0.01662
260.35	-1.125e	0.015053
268.92	-1.1197e	0.014984
267.22	-1.0982e	0.014916
261.14	-1.1151e	0.015012
254	-1.2292e	0.015457
247.03	-1.3597e	0.015927
240.58	-1.5062e	0.016415
234.66	-1.6456e	0.016857
229.2	-1.7966e	0.017301
224.11	-1.9432e	0.017707
219.31	-2.0988e	0.018112

Tabla 4.1: Tabla que muestra el valor interpolado de E y M_T para la distancia teórica z_t a la cual estarán los centroides de las manchas de cada línea circular, empezando por la de menor radio hasta la de mayor de forma descendente en la tabla.

En la figura 4.2 se muestra una gráfica comparativa de los centroides de las manchas obtenidas experimentalmente y los calculados teóricamente se puede apreciar que los centroides calculados experimentalmente se alejan bastante relativamente, de los valores teóricos si comparamos los resultados obtenidos con trabajos realizados anteriormente [24], [23] figura 4.3.

Una explicación al alejamiento relativo de los centroides experimentales y los teóricos en la figura 4.2 es en primera instancia que se debe a las deformaciones propias del espejo. En la figura 4.3 pareciera que los centroides teóricos y experimentales no se alejan tanto como en la figura 4.2, esto se puede explicar debido a la distancia a la cual fue colocada la cámara del vértice del espejo, es decir, el parámetro b para la construcción de la pantalla nula con la que fue probado el espejo en ambos casos ($b \approx 180\text{mm}$ para la prueba realizada en

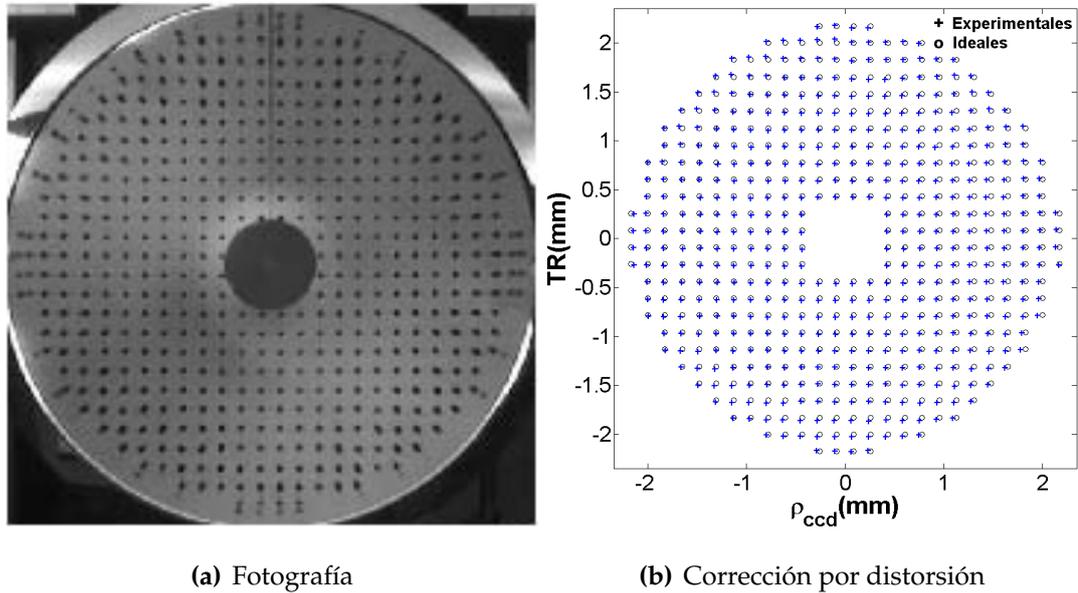


Figura 4.3: Imagen de los centroides obtenidos de una prueba de pantallas nulas sobre el mismo espejo bajo prueba tomada de *La ecuación de la forma de la superficie y generalización de las ecuaciones de Rayces* [26].

este trabajo y 327mm en [24]), para el caso expuesto en este trabajo se tiene una distancia corta lo que hace que las deformaciones en el espejo que alteran la posición de los centroides sean más visibles figura 4.4. Esta distancia b se debe principalmente a la distancia focal de la lente empleada f_l dado que a un menor valor de f_l se tendrá una mayor amplitud de campo.

En la figura 4.4 se puede apreciar una comparativa de la posición de las imágenes de los centroides de las manchas de la pantalla nula formados por la superficie y la intersección de un rayo procedente de dichas imágenes, para formar una línea de 12 puntos igualmente espaciados en el intervalo (0.43,2.04) milímetros en un CCD, para los casos de una lente con 8mm de distancia focal y de 3.5mm (usada en este trabajo). Podemos observar que en el caso de la lente de $f_l = 3.5\text{mm}$ los puntos sobre la superficie se distancian más del centro del espejo, provocando que se pueda evaluar una mayor área de la superficie, debido a la mayor amplitud de campo de la lente.

En la figura 4.2 se puede apreciar como los centroides obtenidos de forma experimental se alejan de forma proporcional al radio de su posición de los

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

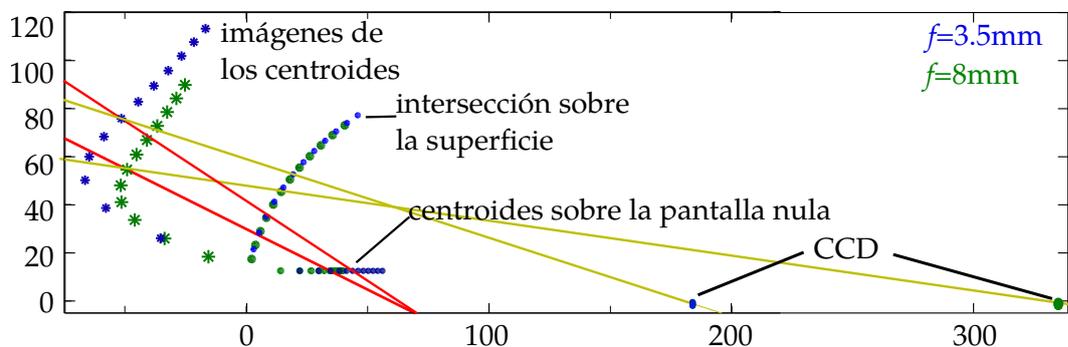


Figura 4.4: Comparación que muestra el desplazamiento de la intersección del rayo de la imagen sobre el espejo, dependiendo de la lente usada. En azul se muestra el caso para $f_l = 3.5\text{mm}$ y en verde para $f_l = 8\text{mm}$.

centroides teóricos, esto es un indicio que el espejo o la superficie tiende a deformarse de forma radial y estas deformaciones son mayores en las orillas, o conforme se alejan de la parte central del espejo.

4.2 Resultados de la Evaluación de la Superficie

Una vez obtenidos los centroides de la imagen y su posterior posición con la distorsión corregida, proseguimos a recuperar la forma de la superficie de acuerdo a la sección 2.5 aplicando el método iterativo mejor explicado en el diagrama de la figura 2.18. El método iterativo fue aplicado 13 veces para la ecuación de ajuste (2.45) que ha sido usada en múltiples trabajos previos [27], [31], [32] y de igual forma el método iterativo se aplicó 13 veces a la nueva ecuación de ajuste propuesta (2.46).

Para obtener los datos experimentales se prosiguió a resolver la integral numérica de la ecuación (2.42), tomando los caminos de integración mostrados en la figura 4.5, se usó como punto de inicio al punto representado por la estrella azul y a partir de este se calculó el valor de la sagita correspondiente a los demás puntos, se evitó que los caminos de integración siguieran trayectorias diagonales, permitiéndoles sólo desplazarse de forma radial o angular de forma exclusiva.

Para ajustar cada una de las dos ecuaciones a los datos experimentales encon-

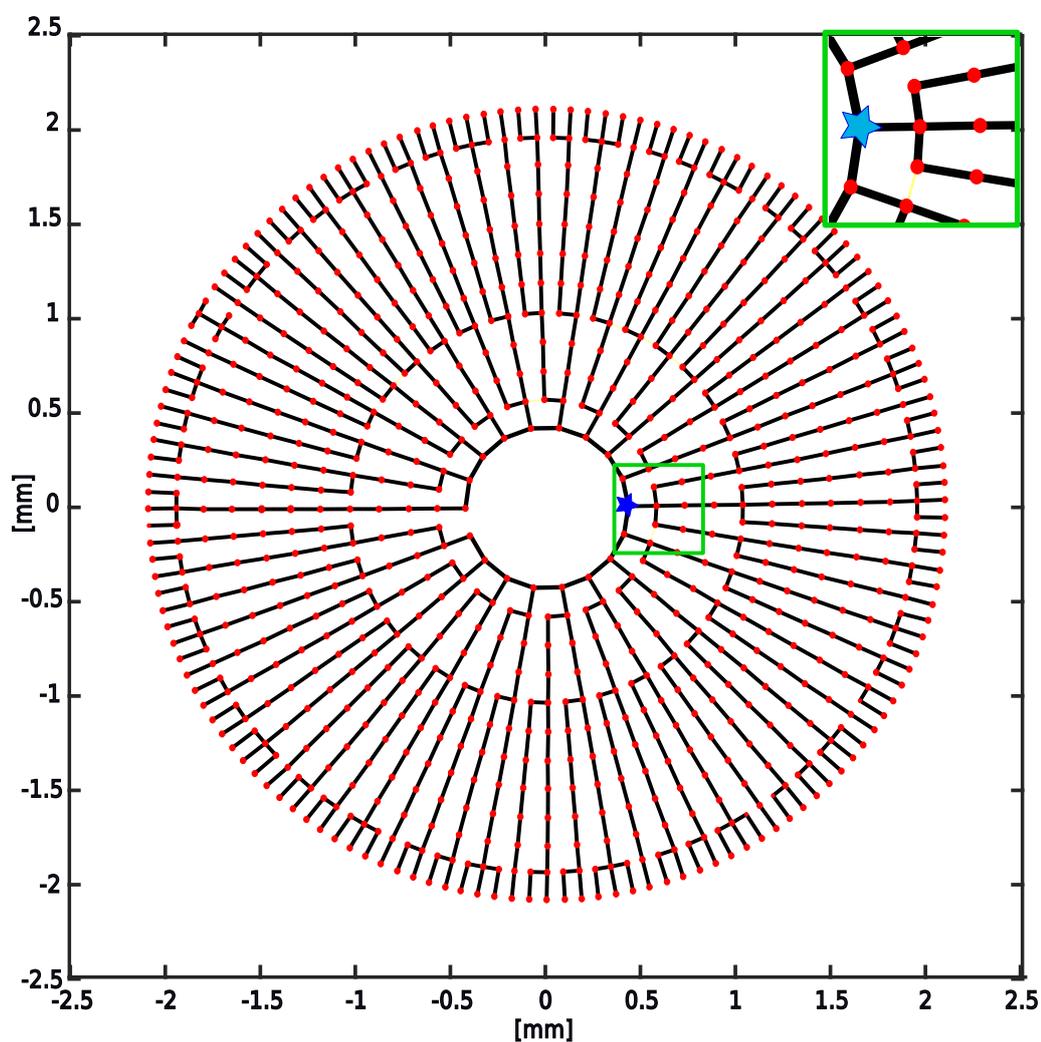


Figura 4.5: Caminos de integración escogidos para resolver la integración numérica.

trados en cada una de las iteraciones, se usó el programa *cftool* de Matlab™, que permitió realizar un ajuste por el método de mínimos cuadrados. Para encontrar el radio de curvatura r_c y la constante de conicidad k se necesitó realizar un cambio de ejes para esto se llevó a ambas ecuaciones de ajuste a su forma cuadrática general y su posterior representación matricial para realizar un cambio de base usando algo de álgebra lineal.

La ecuación general de segundo grado en tres variables es:

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz. \quad (4.2)$$

Esta ecuación determina un único valor de F para tres números cualesquiera y representa una superficie en tres dimensiones para las tercias (x, y, z) para las que $F = cte$. Los términos en xy, xz, yz representan rotaciones de la superficie y los términos lineales representan una traslación [33].

La ecuación (4.2) se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$F(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (g, h, i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

o

$$F(x, y, z) = \mathbf{v}^t A \mathbf{v} + G \mathbf{v} \quad (4.4)$$

Donde A se denomina la matriz asociada a la forma cuadrática. Como A es una matriz simétrica, se puede diagonalizar ortogonalmente por medio de una matriz ortogonal Q , ($Q^t = Q^{-1}$) cuyas columnas son los vectores característicos (Teoremas de algebra lineal) ortonormales de A , es decir

$$A = QDQ^t \quad (4.5)$$

reemplazando a A en la ecuación (4.4) tenemos

$$\mathbf{v}^t QDQ^t \mathbf{v} + G \mathbf{v} = F \quad (4.6a)$$

$$(\mathbf{v}^t Q)D(Q^t \mathbf{v}) + G \mathbf{v} = F \quad (4.6b)$$

Si $\mathbf{w} = Q^t \mathbf{v}$ entonces, $\mathbf{v} = Q\mathbf{w}$; y la última ecuación se transforma en

$$\mathbf{w}^t D \mathbf{w} + GQ\mathbf{w} = F \quad (4.7)$$

Que representa la ecuación en los nuevos ejes donde la superficie no está rotada. Completando los cuadrados en la ecuación (4.7) se encuentra la traslación de la cuádrica. Donde los vectores ortonormales de la matriz Q son los nuevos ejes correspondientes a la rotación. Es recomendable que el determinante de

Q sea 1 para que la rotación sea como usualmente se trabaja, es decir, en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Una vez completado los cuadrados de la ecuación (4.7) se obtiene una ecuación de la siguiente forma

$$\frac{\rho^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{b_1^2} = 1. \quad (4.8)$$

Siendo a_1 y b_1 son los semiejes del elipsoide ajustado y $\rho = x^2 + y^2$. Con esta última ecuación es más sencillo calcular el radio de curvatura r y la constante de conicidad. Los resultados de las iteraciones realizadas se muestran en las tablas 4.2 y 4.3. Las ecuaciones de ajuste fueron ajustadas usando el programa de Matlab™ *cftool*, para posteriormente encontrar el radio de curvatura y constante cónica correspondiente a la superficie de cada iteración.

Iteración	r [mm]	k	a_1 [mm]	b_1 [mm]
1	76.161	-0.4668	104.301	142.838
2	75.898	-0.4955	106.856	150.442
3	76.301	-0.4752	105.325	145.391
4	76.191	-0.4873	106.407	148.607
5	76.415	-0.4792	105.888	146.727
6	76.4254	-0.4835	106.341	147.968
7	76.575	-0.4803	106.222	147.346
8	76.645	-0.4815	106.442	147.822
9	76.756	-0.4802	106.462	147.665
10	76.846	-0.4804	106.608	147.896
11	76.957	-0.4797	106.690	147.910
12	77.059	-0.4794	106.800	148.019
13	77.175	-0.4789	106.909	148.101

Tabla 4.2: Resultados obtenidos en las iteraciones ajustando la ecuación (2.45).

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Iteración	r [mm]	k	a_1 [mm]	b_1 [mm]
1	76.068	-0.4668	104.174	142.665
2	75.775	-0.4955	106.683	150.199
3	76.157	-0.4751	105.117	145.089
4	76.008	-0.4873	106.153	148.252
5	76.205	-0.4792	105.596	146.323
6	76.194	-0.4835	106.020	147.521
7	76.303	-0.4802	105.834	146.793
8	76.303	-0.4802	105.834	146.793
9	76.343	-0.4817	106.042	147.295
10	76.432	-0.4801	106.003	147.014
11	76.432	-0.4801	106.003	147.014
12	76.482	-0.4804	106.103	147.195
13	76.563	-0.4797	106.143	147.152

Tabla 4.3: Resultados obtenidos en las iteraciones ajustando la nueva ecuación propuesta (2.46).

Para determinar la superficie a la cual convergerá las iteraciones realizadas, se tomaron en cuenta dos criterios de convergencia.

Primero: consiste en escoger la superficie que sea producto de la iteración n tal que su radio de curvatura R difiera menos de una milésima de la superficie proporcionada por la iteración $(n - 1)$ siempre que la constante de conicidad de ambas superficies difiera menos de una centésima.

Segundo: criterio de convergencia tiene que ver con el comportamiento de los valores de los radios de curvatura y las constantes de conicidad que se generan con cada iteración realizada. Se puede ver (tablas 4.2, 4.3) que el valor de r y k varía en cada iteración realizada subiendo y bajando sus valores, hasta que llega un punto donde su comportamiento es totalmente creciente, este comportamiento es mejor observado en la figura 4.6. El segundo criterio de convergencia consiste en tomar como superficie de convergencia la que corres-

ponda a los valores proporcionados por la iteración en la cual los valores de r comienzan a tener comportamiento creciente.

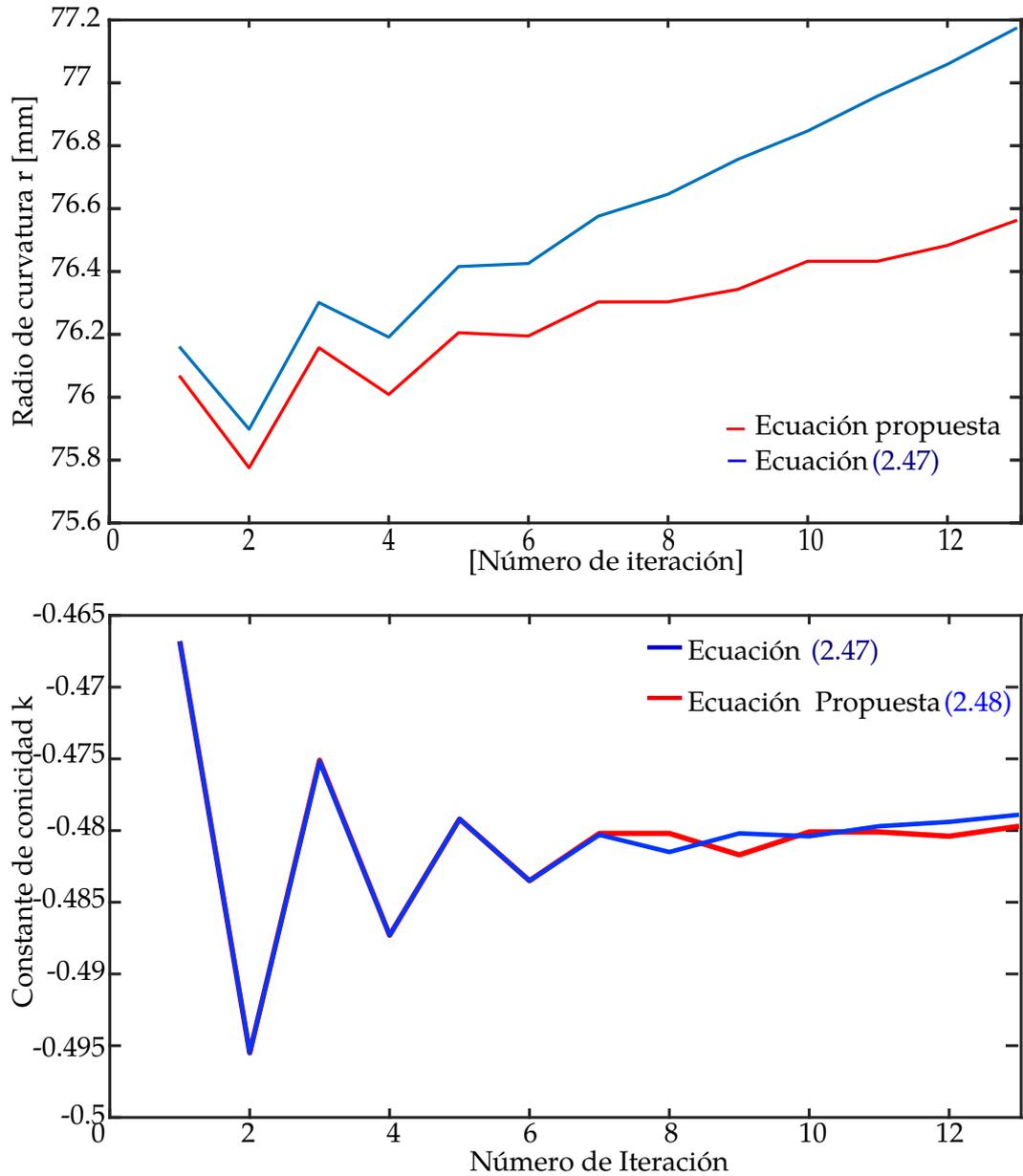


Figura 4.6: Graficas de los valores de r en (a) y k en (b) para los ajustes realizados durante el proceso iterativo. Se aprecia en ambas graficas el comportamiento creciente de los valores de k como de r después de alcanzar un mínimo.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los valores de convergencia de acuerdo con el primer criterio corresponden a la iteración 6 para el caso de la ecuación (2.45), mientras que para la nueva ecuación propuesta (2.46) corresponden a la iteración 8. Para el segundo criterio de convergencia se tiene que para la ecuación (2.45) el valor de convergencia corresponde con la iteración 4 y para la nueva ecuación propuesta (2.46) para la 6. De esta manera se tienen cuatro resultados finales.

4.2.1 Comparación de Resultados

La tabla 4.4 muestra los parámetros de las superficies ajustadas en comparación con los parámetros de la superficie de diseño S_d , basada en los valores dados por el fabricante de la superficie bajo prueba y un trabajo desarrollado previamente presentado en [27] S_{Pv} . Se designará a la superficie ajustada por la ecuación (2.45) como S_1 , y a la ajustada por la ecuación (2.46) como S_2 , correspondiente a la nueva ecuación de ajuste propuesta y a la superficie de diseño como S_d . Podemos notar en la tabla 4.4 que el radio de curvatura S_1 y S_2 difieren menos de 0.2mm respecto de S_d para los cuatro casos, mientras que S_{Pv} difiere poco más de 0.9mm.

Superficie	r [mm]	k	a_1 [mm]	b_1 [mm]
S_d	76.245	-0.4964	107.444	151.409
S_1	76.191	-0.4873	106.407	148.607
S_2	76.194	-0.4835	106.020	147.521
S_1	76.425	-0.4835	106.341	147.968
S_2	76.303	-0.4802	105.834	146.793
S_{Pv}	75.333	-0.5100	107.904	154.148

Tabla 4.4: Comparación de las superficies ajustadas con la superficie de diseño, en azul se muestran los resultados para el segundo criterio de convergencia.

En las tablas 4.5 y 4.6 se muestran los parámetros de cada una de las superficies escogidas con los dos criterios de convergencia así como las propiedades de la superficie ajustada antes de aplicarle la transformación de cambio de ejes para calcular los valores de r y k correspondientes. En la tabla 4.5 se muestran

los valores correspondientes a la translación en X , Y y Z y los valores de los términos cruzados en XZ y YZ . En la tabla 4.6 se muestra el valor del error cuadrático medio RMS correspondiente al las diferencias entre los valores experimentales calculados a partir de la ecuación (2.36) y la superficie ajustada. También podemos observar el valor RMSrt correspondiente al valor cuadrático medio de las medidas experimentales resultantes de la ecuación (2.36) y la superficie ajustada, una vez que se les ha aplicado la transformación de cambio de ejes, eliminando todo tipo de rotaciones y translaciones.

Superficie	z_0 [mm]	$x_0 10^{-1}$ [mm]	$y_0 10^{-1}$ [mm]	Dxz 10^{-4}	Dyz 10^{-4}
S_d	//	//	//	//	//
S_1	-0.158	1.001	2.910	1.82	5.73
S_2	-0.333	1.282	2.765	2.14	5.72
S_1	-0.117	1.453	2.757	1.79	5.58
S_2	-0.298	1.330	2.742	2.11	5.76
S_{pv}	-0.166	-7.42	-1.113	-110.17	-260.10

Tabla 4.5: Valores de los descentramientos correspondientes a cada una de las superficies obtenidas al reconstruir la superficie, en color azul se muestran los valores para el segundo criterio de convergencia.

Se puede observar que los valores RMS antes de aplicarles una transformación a los datos cambian una vez se hecha la transformación, para el caso de la S_1 tenemos que en ambos criterios de convergencia disminuyen llegando a un valor de $127\mu m$ para el segundo criterio, mientras que para S_2 estos valores aumentan pasando de valores cercanos a $200\mu m$ a $608\mu m$. Una hipótesis acerca de este comportamiento es que en el desarrollo de la ecuación (2.46) se forzó a algunos parámetros a que tomaran valores de 0 o 1 según convenía, lo que muy probablemente afecto al cálculo.

Se puede apreciar también que para ambas superficies el valor de pico valle aumenta del orden de $150\mu m$ después de aplicar la transformación tanto a los datos como a la superficie, además de que para los cuatro casos el valor pico valle es muy similar una vez aplicada la transformación. Esta diferencia tan

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Superficie	RMSE [mm]	D(p-v) [mm]	RMSrt [mm]	Drt(p-v) [mm]
S_d	//		//	//
S_1	0.197	1.158	0.175	1.307
S_2	0.196	1.158	0.608	1.307
S_1	0.197	1.158	0.127	1.304
S_2	0.196	1.157	0.416	1.313

Tabla 4.6: Valores RMS correspondiente a cada una de las superficies obtenidas al reconstruir la superficie antes de aplicar la transformación de cambio de ejes (RMSE) y después de aplicarla (RMSrt). En color azul se muestran los valores para el segundo criterio de convergencia.

marcada del valor pico valle que sobrepasa un milímetro, puede ser explicada por los errores de la integral numérica y por los caminos de integración escogidos. La diferencia pico-valle puede verse de forma más evidente en los mapas de nivel de la figura 4.7 donde se aprecia un claro contraste del lado izquierdo de cada mapa, cambiando de una tonalidad roja a una tonalidad verde.

Por otro lado se puede apreciar que los resultados obtenidos de r y k usando el segundo criterio son más similares para las dos ecuaciones de ajuste que los resultados obtenidos usando el primer criterio de convergencia.

En la figura 4.7 se muestran los mapas de nivel correspondientes a las diferencias de sagita entre las medidas obtenidas de forma experimental P_s mediante la integración numérica, una vez aplicados la transformación de cambio de ejes y la superficie S ajustada a estos datos ($S - P_s$), cada mapa de nivel corresponde a las superficies escogidas con anterioridad, usando los dos criterios de convergencia. Se puede apreciar que para la S_2 en ambos criterios de convergencia los valores de las diferencias se encuentran alrededor de 0.5mm, teniendo un aumento marcado en sentido hacia las manecillas del reloj. También se ve un aumento de las tonalidades verdes y una caída en sentido antihorario no tan pronunciada, que se aprecia en un ligero cambio de tonalidades de amarillo a rojo. Para el caso de S_1 se tiene un mayor cambio de tonalidades de rojo a

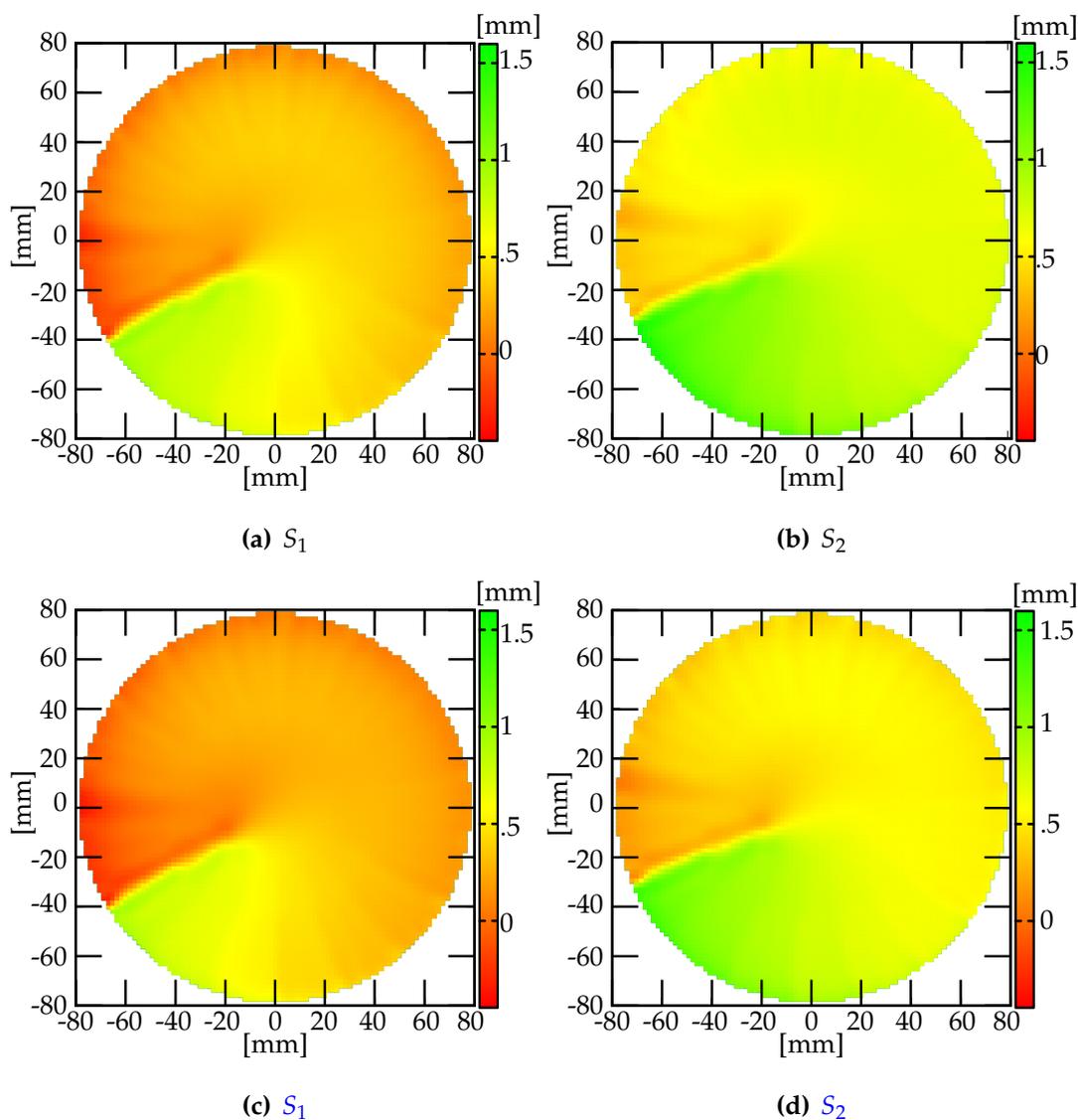


Figura 4.7: Mapas de contorno de las diferencias de sagita entre los valores de la superficie medida y la superficie de mejor ajuste, tomando el primer criterio de convergencia a), b) y el segundo criterio en c) y d).

amarillo, dado que el rango de diferencias alcanza valores menores que con S_2 , se puede apreciar que la mayoría de los valores están entre (0,0.6) milímetros.

4.3 Representación polinomial de las superficies

ajustadas

Una vez obtenidas las ecuaciones de las superficies que mejor se ajustan, se realizó una representación polinomial de la superficie bajo prueba utilizando los valores de los puntos sobre la superficie obtenidos por medio de la ecuación (2.36), que dieron como resultado las cuatro superficies escogidas en la sección anterior, con el fin de encontrar una mejor representación de la superficie bajo prueba o que se asemeje más a ésta. Estas representaciones polinomiales se realizaron ajustando polinomios por el método de mínimos cuadrados a los valores P_s (puntos sobre la superficie) una vez que se les había aplicado el cambio de ejes correspondiente, dado por la cónica mejor ajustada a estos datos que son las descritas por S_1 y S_2 en la tabla 4.5.

Se realizaron dos tipos de ajuste polinomial, uno usando los primeros seis polinomios radiales de Zernike y el otro usando los cuatro primeros polinomios pares de Legendre. Las ecuaciones ajustadas fueron las siguientes

$$h(x, y) = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - Qc^2(x^2 + y^2)}} + Z_1 + Z_2 2x + Z_3 2y \quad (4.9)$$

$$+ Z_4 xy + Z_5 \sqrt{3}(2(x^2 + y^2) - 1) + Z_6(x^2 - y^2) \quad (4.10)$$

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^3 A_i P_{2k} \quad (4.11)$$

Los valores de los coeficientes del ajuste usando polinomios de Zernike se muestran en la tabla 4.7, mientras que algunos datos estadísticos del ajuste se muestran en la tabla 4.8. En esta tabla podemos observar que el valor RMS perteneciente al ajuste disminuyó considerablemente respecto del valor RMS ajustando sólo una superficie cónica mostrado en la tabla 4.5, siendo hasta menos de una quinta parte de este último y rondando los $23\mu m$. Se puede observar de igual forma que la diferencia pico valle disminuyó en este nuevo ajuste pasando de valores de 1.3mm para cuatro superficies escogidas a 1.13mm en los cuatro casos en los que se realizó el ajuste por polinomios de Zernike.

4.3 Representación polinomial de las superficies ajustadas

	S_1	S_2	S_1	S_2
c	0.015256	0.015186	0.016421	0.015246
Q	0.351588	0.355252	0.290018	0.352204
Z_1	-0.413987	-0.661997	-0.291249	-0.555052
$Z_2(10^{-5})$	-25.8	1.35	-25.1	-0.106
Z_3	0.001663	0.001713	0.001608	0.001748
$Z_4(10^{-5})$	-3.84	-5.21	-3.80	-5.38
Z_5	-0.000320	-0.000314	-0.000490	-0.000319
$Z_6(10^{-5})$	3.38	2.86	3.41	2.80

Tabla 4.7: Valores del ajuste usando polinomios de Zernike, en color azul se muestran los valores correspondientes a las superficies escogidas en el segundo criterio de convergencia.

	ECM [mm]	Intervalo (<i>min</i> , <i>max</i>)	P-V [mm]
S_1	0.023	(-0.522, 0.613)	-1.136
S_2	0.023	(-0.517, 0.613)	-1.130
S_1	0.023	(-0.523, 0.611)	-1.134
S_2	0.023	(-0.518, 0.618)	-1.136

Tabla 4.8: Valores RMS, intervalo pico valle del ajuste con los polinomios de Zernike, en azul se muestran los valores de los datos de las superficies escogidas bajo el segundo criterio de convergencia.

En la figura 4.8 se muestran los mapas de nivel de las diferencias de sagita entre las superficies ajustadas por polinomios de Zernike con los datos experimentales, y se puede observar una mínima diferencia entre los cuatro mapas, se puede ver que la mayoría de las diferencias se encuentra en el intervalo $(-0.2, 0.2)$ y conforme en la zona donde se presenta la caída en cada una de las gráficas se tiene un crecimiento rápido en sentido horario.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

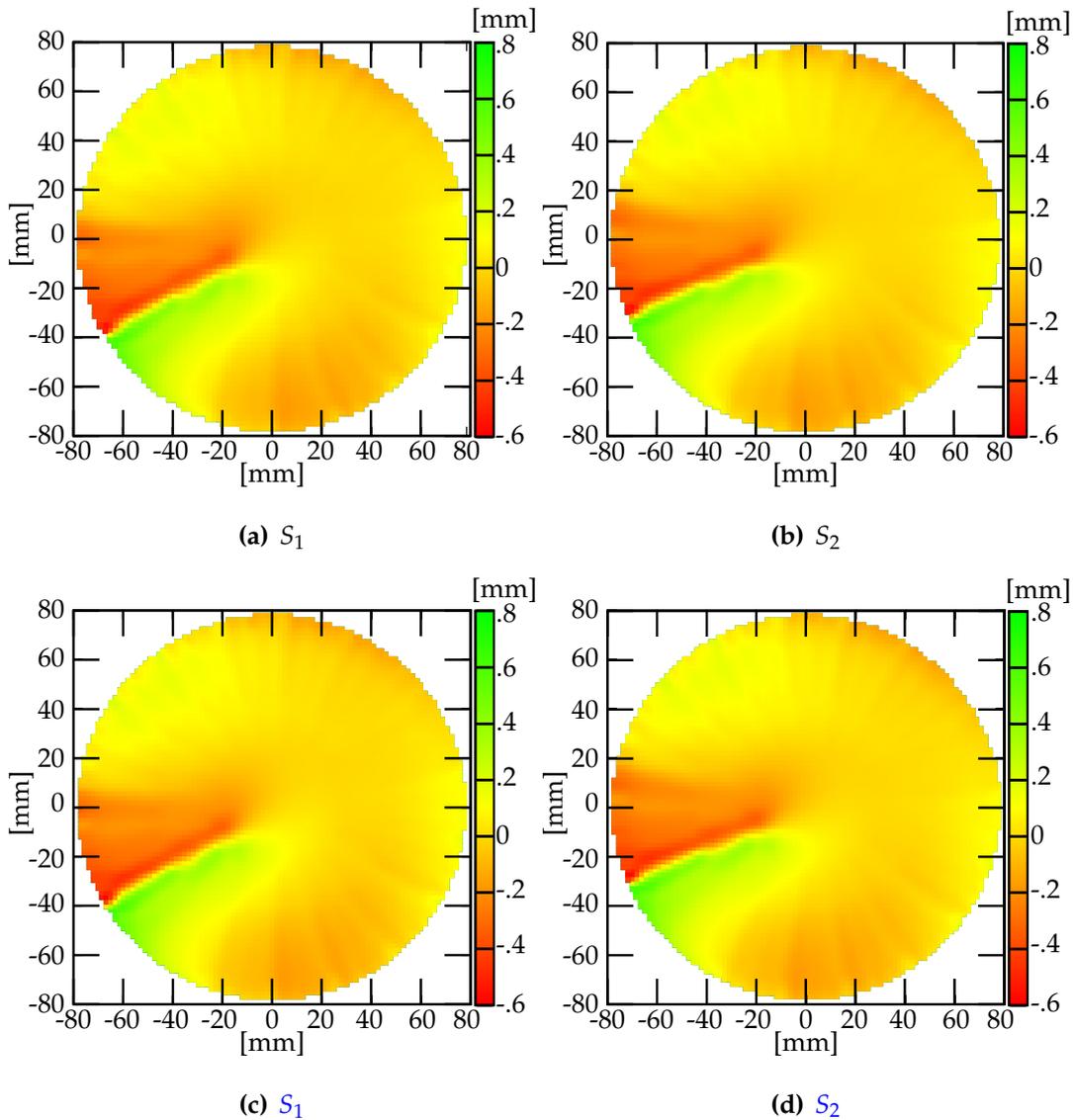


Figura 4.8: Mapas de contorno de las diferencias de sagita entre los valores de la superficie medida y la superficie de mejor ajuste por Zernike, tomando el primer criterio de convergencia a), b) y el segundo criterio en c) y d).

Observando los mapas de nivel de las diferencias y tomando en cuenta el valor RMS del ajuste se confirma que esta representación polinomial es más cercana a la superficie real, tomando cualquiera de las superficies escogidas con

cualquiera de los dos criterios de convergencia.

En la tabla 4.9 se muestran los valores A_i de el ajuste por polinomios de Legendre, como se ha dicho sólo se usaron los primeros cuatro polinomios pares de Legendre por lo que la función total de ajuste es una función par respecto al origen y tiene simetría de revolución. En la tabla 4.10 se muestran los valores RMS del ajuste, el valor pico valle de las diferencias y el intervalo en que se encuentran los valores de la diferencias, entre la función ajustada y los datos obtenidos de forma experimental con la ecuación (2.36).

	S_1	S_2	S_1	S_2
A_0	0.18038	0.17402	0.18390	0.17691
A_1	-0.33736	-0.33678	-0.33809	-0.33741
A_2	0.19667	0.19607	0.19661	0.19664
A_3	0.00373	0.00375	0.00365	0.00375

Tabla 4.9: Valores del ajuste con los polinomios de Legendre, en rojo se muestran los valores de los datos de las superficies escogidas bajo el segundo criterio de convergencia.

	ECM [mm]	Intervalo (<i>min</i> , <i>max</i>)	P-V [mm]
S_1	0.061	(-0.558, 0.749)	-1.308
S_2	0.061	(-0.543, 0.761)	-1.305
S_1	0.059	(-0.560, 0.744)	-1.304
S_2	0.063	(-0.548, 0.763)	-1.312

Tabla 4.10: Valores RMS, intervalo pico valle del ajuste con los polinomios de Legendre, en azul se muestran los valores de los datos de las superficies escogidas bajo el segundo criterio de convergencia.

Se puede observar en la tabla 4.10 que los valores pico-valle en los 4 casos

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

rondan los 1.3mm similar a los valores encontrados en el caso de ajustar una superficie cónica solamente, y los valores del error cuadrático medio o RMS toman valores alrededor de $60\mu m$, es decir cerca de 3 veces los valores RMS con el ajuste por polinomios de Zernike, aunque se debe tomar en cuenta que se ajusto un número menor de polinomios en este caso. Por otro lado el valor RMS es menor que sólo ajustando una superficie cónica.

En la figura 4.9 se pueden observar los mapas de elevación o contorno correspondiente a las diferencias de sagita entre la superficie ajustada y los datos experimentales, se puede apreciar que todos los mapas presentan una gran similitud y una caída marcada visiblemente reconocida en el cambio de tonalidades de verde a rojo de forma repentina, como ya se ha dicho antes esta caída es debida a los errores acumulados al realizar la integración numérica. De igual forma que en el ajuste por polinomios de Zernike la mayoría de los valores tomados por las diferencias están en el intervalo $(-0.2, 0.2)$.

Se puede concluir que en el ajuste por polinomios de Legendre se necesitan menos polinomios para converger a un ajuste que presente un valor RMS del orden de decenas de micras, teniendo resultados convincentes.

4.3 Representación polinomial de las superficies ajustadas

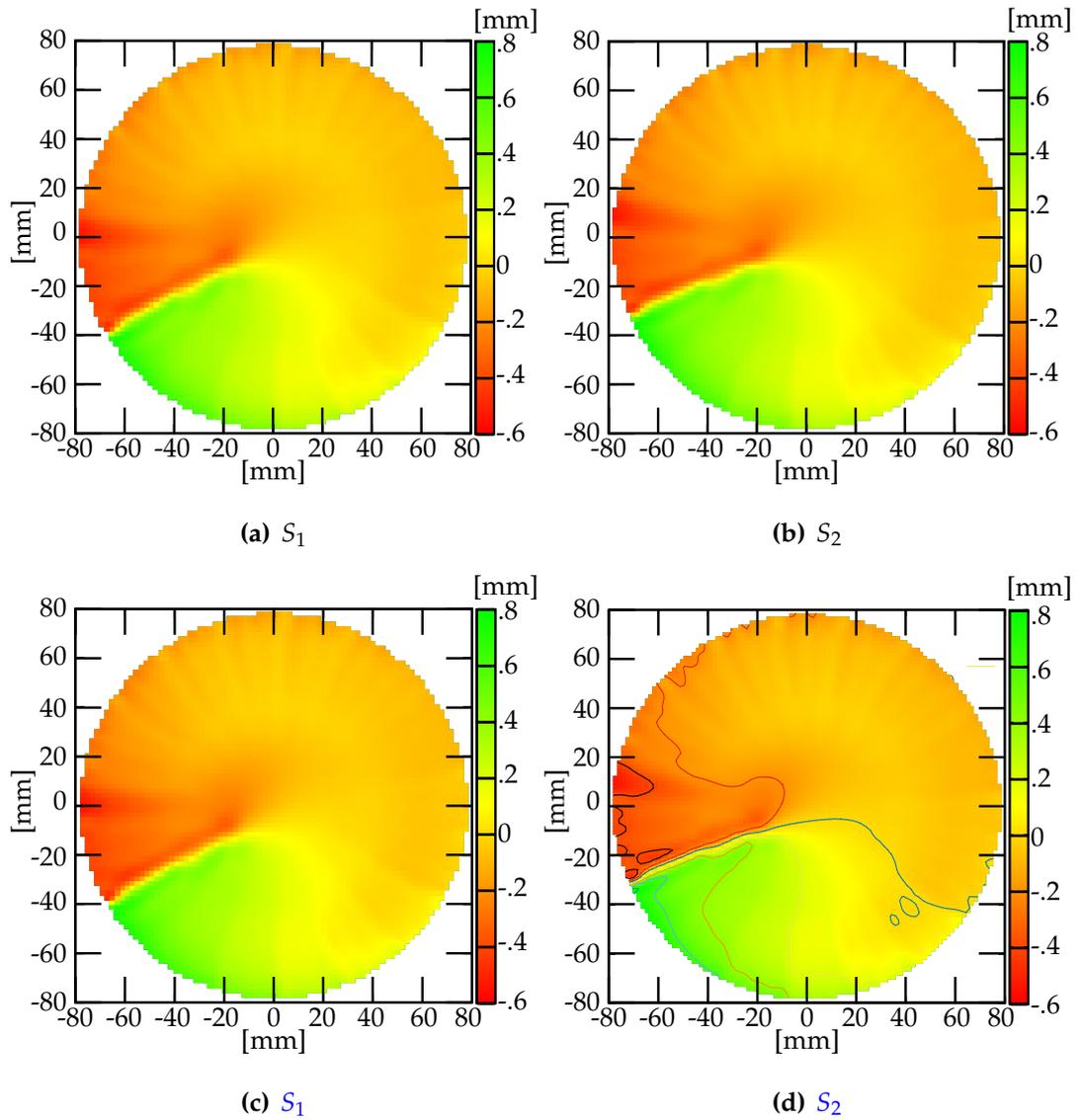


Figura 4.9: Mapas de contorno de las diferencias de sagita entre los valores de la superficie medida y la superficie de mejor ajuste por polinomios de Legendre, tomando el primer criterio de convergencia a), b) y el segundo criterio en c) y d).

Capítulo 5

Conclusiones

El propósito de este trabajo era optimizar algoritmos para evaluar una superficie reflejante cóncava de forma libre por el método de pantallas nulas, para lograr esto se evaluó la superficie elíptica cóncava como una primera aproximación.

Se incluyó una técnica o procedimiento para corregir, de una mejor forma, la distorsión debida a la lente de la cámara, permitiendo usar lentes con un ancho angular grande, como fue el caso expuesto en este trabajo, obteniendo, de igual forma este procedimiento para medir la distorsión nos permite alinear de mejor manera el dispositivo experimental.

En la parte de teórica se propuso una nueva ecuación para ajustar la superficie cónica que más se asemeja a la forma real de la superficie obteniendo valores RMS de las diferencias pico valle del orden de 0.19mm, similares a los obtenidos con ecuaciones previamente usadas en trabajos anteriores. Esta nueva ecuación (2.46) nos permite calcular de una forma más rápida los parámetros geométricos de la superficie como el radio de curvatura y la constante de conicidad. Para los cuatro casos obtenidos de S_1 y S_2 el radio de curvatura difiere aproximadamente 0.25% del radio de curvatura de diseño.

Se propuso un procedimiento para encontrar el valor del radio de curvatura y la constante de conicidad de la cónica de mejor ajuste, usando un cambio de base para eliminar las rotaciones y translaciones que pueda presentar el sistema.

Para representar la superficie bajo prueba se realizaron dos ajustes polinomiales los cuales dieron buenos resultados para representar la forma de la superficie, concluyendo que los polinomios de Legendre convergen de una forma

5. CONCLUSIONES

más rápida que si se usan polinomios de Zernike además que dichas representaciones se acercan más a la superficie bajo prueba que una representación cónica.

Los logros descritos en los párrafos anteriores permiten tener un mejor resultado si se aplican al método de pantallas nulas para probar superficies rápidas que presenten deformaciones o anomalías.

A modo de autocrítica los resultados obtenidos con los caminos de integración propuestos ocasionaban un error acumulado que llegaba a presentar una gran diferencia al momento de realizar las diferencias de las superficies ajustadas y los datos procedentes de la integración, sería recomendable usar otros caminos de integración o otro método de integración que produzca un menor error.

Para un trabajo futuro propongo realizar una prueba usando dos cámaras o moviendo la cámara de forma perpendicular a la base de la superficie para poder triangular la posición de los centroides de las manchas en el espejo, de esta forma se tendrá otro rayo reflejado conocido. También se propone probar superficies que tengan un mayor grado de deformaciones, para tener un mayor acercamiento a las superficies de forma libre.

Appendix A

Corrección de la Distorsión Para Una Lente

En las lentes de las cámaras CCD se presentan distintos tipos de aberraciones ópticas una de ellas y la más importante es la **distorsión**, ésta es una aberración monocromática primaria [34][23][32], debida a que las lentes reales difieren en gran medida de la óptica paraxial, la distorsión en una lente se presenta como una variación de la amplitud transversal fuera del eje óptico, es decir, la amplitud transversal varía dependiendo de la distancia de una imagen hacia el eje óptico. Usualmente la distorsión depende de la distancia y dirección a la que se observa el objeto.

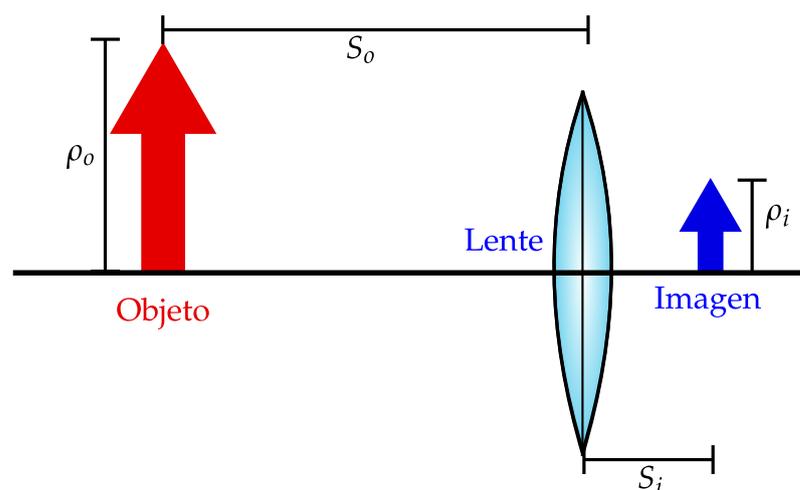


Figura A.1: Formación de una imagen por una lente ideal.

A. CORRECCIÓN DE LA DISTORSIÓN PARA UNALENTE

Para una lente ideal en óptica paraxial la amplificación transversal M_T es una constante y depende únicamente de la distancia objeto-lente S_o y lente-imagen S_i figura A.1 como se muestra a continuación.

$$M_T = \frac{-S_i}{S_o} = \frac{\rho_i}{\rho_o}. \quad (\text{A.1})$$

Por lo que la distancia del eje óptico de un punto imagen formado por la lente ρ_i está dada por;

$$\rho_i = M_T \rho_o \quad (\text{A.2})$$

En una lente con distorsión, ρ_i no es una función lineal respecto a ρ_o , pues se puede presentar generalmente dos tipos distorsión de barril y de corset o cojín. La distorsión de barril generalmente se presenta a distancias cortas (menores a 35mm) y la distancia de cojín suele presentarse a distancias grandes.

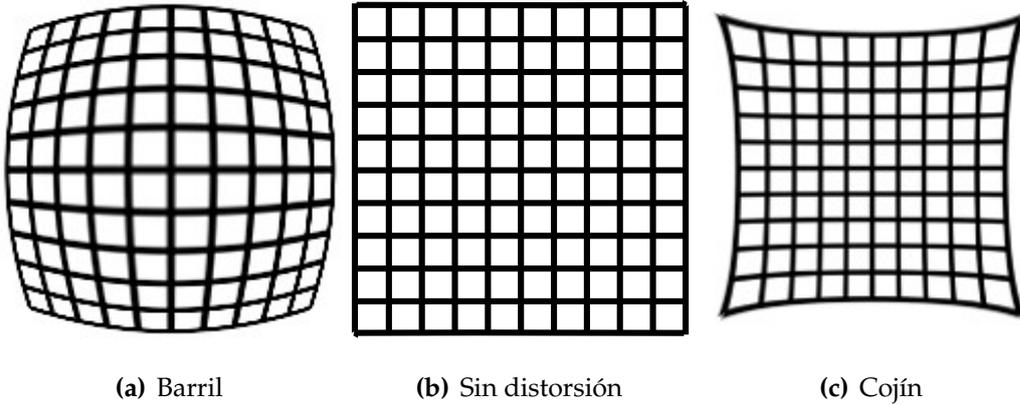


Figura A.2: Tipos de distorsión

Existen varios modelos matemáticos para describir la distorsión en una lente, algunos usan funciones logarítmicas, trigonométricas o series polinomiales, aquí nos limitaremos a un modelo polinomial usando un polinomio de tercer orden para describir la distorsión.

Para una lente que sufre distorsión la distancia de un punto imagen al eje óptico ρ_d , puede ser descrita como

$$\rho_d = \rho_i + E\rho_o^3 = \rho_o M_T + E\rho_o^3 \quad (\text{A.3})$$

Experimentalmente se puede obtener ρ_d y con esto encontrar el valor de ρ_o , esto se puede hacer si se representa a ρ_o en función de ρ_d , en otras palabras realizar una inversión del polinomio, para lo cual $\rho_o(\rho_d)$ debe ser un polinomio de tercer grado el cual se puede representar como

$$\rho_o(\rho_d) = A\rho_d + B\rho_d^2 + C\rho_d^3. \quad (\text{A.4})$$

Si se sustituye la ecuación A.4 en A.3 se tiene que

$$\rho_d = M_T A\rho_d + M_T B\rho_d^2 + (M_T C + EA^3)\rho_d^3. \quad (\text{A.5})$$

Para que esta ultima expresión tenga sentido tenemos que

$$A = \frac{1}{M_T}, \quad (\text{A.6a})$$

$$B = 0, \quad (\text{A.6b})$$

$$C = -\frac{E}{M_T^4}. \quad (\text{A.6c})$$

Ahora bien con esto la ecuación A.4 queda como

$$\rho_o = \frac{\rho_d}{M_T} - \frac{E}{M_T^4}\rho_d^3. \quad (\text{A.7})$$

Con esta ecuación es posible corregir la distorsión de una lente conociendo los valores de la distancia hacia el eje óptico de la imagen con distorsión ρ_d y el objeto ρ_o .

Referencias

- [1] Stahl, H.P., "Testing of aspheric components", Short Courses Notes , SPIE 's 42nd Annual Meeting on Optica Science, Engineering, and Instrumentation, 27 July to 1 August, 1997. [1](#), [3](#), [9](#), [12](#), [14](#), [23](#), [27](#)
- [2] Creath, K., C. Wyant, "Holographic and Speckle Test", in Optical Shop Testing, 2nd ed. D. Malacara, ed., (Wiley, New York, 1992), p. 559-651. [2](#), [26](#)
- [3] Tiziani, H. L, "State of the art and development of aspheric surface measurements", in Proceedings of International Symposium on Photonics in Measurement, (VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, Germany, 2002), p.155-160. [2](#), [27](#)
- [4] Daniel Malacara *Optical shop testing*, 3rd ed.(Wiley-Interscience, 2006) cap. 9, 10, 12, 18. [3](#), [6](#), [13](#)
- [5] Álvaro Barreiro Barba. *Panelización de superficies de forma libre en arquitectura: de la idea a su construcción*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid, 2018. [8](#), [9](#)
- [6] A. Cornejo-Rodriguez, "Ronchi Test", in Optical Shop Testing, 2nd ed. (Wiley, New York, 1992), p. 317-348. [9](#), [11](#)
- [7] I. Ghozeil, "Hartmann and other screen test", in Optical Shop Testing, 2nd ed. (Wiley, New York, 1992), p. 367-369. [9](#), [15](#), [16](#)
- [8] Cordero-Davila, A., A. Cornejo-Rodriguez, O. Cardona-Nuñez, "Ronchi and Hartmann test with the same mathematical theory", *Appl. Opt.* **31**, 2370-2376 (1992). [10](#)
- [9] Rayces, J.L., "Exact relation between wave aberration and ray aberration", *Opt. Acta*, **11**, 85-88 (1964). [10](#)

REFERENCIAS

- [10] Born, M., E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th (expanded) edition (Cambridge University Press, New York, 1999). [10](#)
- [11] Malacara, D., "Geometrical Ronchi test of aspherical mirrors", *Appl. Opt.* **4**,1371-1374 (1965). [12](#)
- [12] Malacara, D., A. Cornejo, "Null Ronchi test for aspherical surfaces", *Appl. Opt.* **13**, 1778-1780 (1974). [13](#)
- [13] Cornejo-Rodriguez, A., A. Cordero-Davila, "Wavefront slope measurements in optical testing", in *Handbook of Optical Design*, D. Malacara, B.J. Thompson ed., (Marcel Dekker, Inc., New York, 2001). p. 311-337. [14](#), [16](#), [17](#)
- [14] Cordero-Davila, A., E. Luna-Aguilar, S. Vazquez-Montiel, S. Zarate-Vazquez, M.E. Percino-Zacarias, "Ronchi test with a square grid", *Appl. Opt.* **37**, 672-675 (1998). [14](#)
- [15] Cordero-Davila, A., A. Cornejo-Rodriguez, O. Cardona-Nunez, "Null Hartmann and Ronchi- Hartmann test", *Appl. Opt.* **29**, 4618-4621 (1990). [17](#)
- [16] Malacara, D. "Basic Interferometers", in *Handbook of Optical Design*, D. Malacara, B.J. Thompson eds., (Marcel Dekker, Inc., New York, 2001). p. 339-371. [18](#)
- [17] Mantravadi, M.V "Newton, Fizeau, and Haidinger Interferometers", in *Optical Shop Testing*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1992), p. 1-49. [18](#)
- [18] Malacara, D., M. Servín, Z. Malacara, *Interferogram analysis for optical testing*, (Marcel Dekker, Inc., New York, 1998). p. 89-111. [22](#), [23](#)
- [19] Manuel Campos García. *Prueba de Superficies Asféricas Rápidas con Pantallas Nulas*. Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México. Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, México, D.F., 2005. [22](#)
- [20] Wyant, J.C., V.P. Bennet, "Using computer generated holograms to test aspheric wavefronts, *Appl. Opt.* **11**,2833-2839 (1972) [23](#), [25](#), [26](#)
- [21] Offner, A., D. Malacara, "Null tests using compensators", in *Optical Shop Testing*, 2nd ed. D. Malacara, ed., (Wiley, New York, 1992), p. 446-452. [24](#)
- [22] Parks, R.E., L.Z. Shao, "Testing large hyperbolic secondary mirrors", *Opt. Eng.* **27**, 1057-1062 (1988). [24](#)

-
- [23] R. Bolado. *Prueba de un espejo elipsoidal concavo en eje (F/0.273) por medio de una pantalla nula cilíndrica*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias, México, D.F., 2005. [43](#), [100](#), [121](#)
- [24] O. Huerta. *La ecuación de la forma de la superficie y generalización de las ecuaciones de Rayces*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias, México, D.F., 2014. [52](#), [100](#), [101](#)
- [25] S. Chapra R. Canale. *Numerical Methods For Engineers*, 5a edición, (McGraw-Hill, 2005). [55](#)
- [26] Manuel Campos-García, Cesar Cossio-Guerrero, Víctor Iván Moreno-Oliva, Oliver Huerta-Carranza "Surface shape evaluation with a corneal topographer based on a conical null-screen with a novel radial point distribution", *Appl. Opt.* **54**, 5411-5519 (2015) [57](#)
- [27] M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe "Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen" , *Appl. Opt.* **47**, 849-859, (2008). [57](#), [102](#), [108](#)
- [28] Lehmann, Charles H. *Geometría Analítica*. 1a. ed., 1a. reimp. México: (Limusa/Noriega Editores, 1993), Cap 16 [62](#)
- [29] A. Osorio-Infante *Desarrollo y caracterización de un topógrafo corneal cónico basado en el método de pantallas nulas* Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico. México, Ciudad de México, 2017, Cap.3. [74](#)
- [30] Haaser Norman B. *Análisis Matemático 2:curso intermedio*, 2a ed. (Trillas, 2003), Cap. 3, p 143-160. [79](#)
- [31] Víctor Iván Moreno-Oliva, Manuel Campos-García, Edwin Román-Hernández, Agustín Santiago-Alvarado, "Design of a single flat null-screen for testing a parabolic trough solar collector", *Opt. Eng.* **53**, 114108 (2014). [102](#)
- [32] C. Cossío. *Evaluación de la topografía corneal con pantallas nulas cónicas*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias, México, Ciudad de México, 2016. [102](#), [121](#)
- [33] Sergio Andrés Sánchez Jaimes, *Superficies Cuádricas Rotadas y Vectores Característicos*, Monografía para optar título de Licenciado en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 2004. [104](#)
-

REFERENCIAS

- [34] Oliver Huerta Carranza. *Desarrollo de un algoritmo para corregir los errores en topografía corneal debido a desalineaciones*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017. [121](#)