



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Estudio del flujo bifásico en  
un medio poroso sometido a  
una fuerza centrífuga**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

Miguel Tadeo Vázquez Martínez

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Erick Emanuel Luna Rojero



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Aleja de ti esos pensamientos inútiles que,  
por lo menos, te hacen perder el tiempo.*

## Agradecimientos

Aunque esto sólo es un trabajo que sella un proceso de estudio, para mí es algo muy valioso, pues además de lo primero, también marca el inicio de una nueva etapa en mi vida, y quisiera aprovechar este mismo espacio para agradecer a cada uno de los peldaños que me han ayudado a seguir avanzando, y han contribuido— más que a mi aprendizaje— a mi formación como persona. Gracias:

A Dios, porque lo poco que sé y soy, es por Él.

A mi padre, por ser el mejor hombre que la vida me dio, por haber dado tu vida entera por nosotros, por tu incansable apoyo e infinito amor, es un honor llevar tu nombre, papá, esto es nuestro. Te mando un beso hasta el cielo.

A mi madre, por enseñarme a luchar y darme tu amor día a día sin pedir nada a cambio, por ser mi cómplice. Siempre serás mi mejor motivo, mamá.

A Victor, por enseñarme que siempre se puede llegar un paso más lejos y por ser ese eslabón que siempre nos mantiene unidos, gracias hermano.

A Yadira, por alentarme, aguantarme tanto y ser una mujer ejemplar. Te quiero y te admiro, hermanita.

A Erick, porque siempre fui prioridad para ti y por haberme permitido vivir una gran infancia a tu lado, la mejor de todas. Tú me enseñaste casi todos los caminos por los que he andado y siempre te lo agradeceré. No olvides nuestras promesas, hermano.

A mi maestro, el Ing. Juan Ocáriz Castelazo, por darme la oportunidad de conocerlo más allá del aula y por impulsarme siempre a crecer en todos los ámbitos, pero sobretodo por enderezarme en uno en particular. Gracias, maestro.

A Carlos, por hacer de la carrera un librito de aventuras, porque siempre tendremos una anécdota que contar. Gracias por acompañarme en este camino de la serpiente, amigo.

A Tonatiuh, por brindarme tu amistad y lealtad, y ser siempre mi soporte en los momentos más difíciles.

A Gustavo, por ser esa amistad que no necesita frecuentarse a diario para saber que cuento con él en el momento que sea.

A Aquet, por llegar a darme paz, cariño y apoyo incondicional. Gracias por ser tú.

A Erick López y Alejandro Gómez, mis amigos de prepa y ahora dos ingenieros a quienes admiro por su dedicación, inteligencia y perseverancia.

A Ángel Martínez Carranza que, a pesar de habernos distanciado, fuiste un gran apoyo siempre. Espero que te esté yendo muy bien, amigo.

A los doctores del Instituto Mexicano del Petróleo: Erick Luna y Manuel Coronado, por darme la oportunidad de desarrollar este proyecto con ustedes y enseñarme que aún hay mucho por aprender.

A los doctores: Ana Paulina Gómora Figueroa, Rodolfo Gabriel Camacho Vázquez y Victor Leonardo Teja Juárez, por haber aceptado formar parte del jurado y dedicar un espacio de su tiempo a la revisión y corrección de este trabajo.

A los ingenieros Dalia Carreño y Prisciliano Larios, por ser los primeros en abrirme las puertas del IMP y confiar en mí.

A todos los profesores de la Facultad que se esmeran en el aprendizaje de sus alumnos, porque gracias a ellos la calidad de la Universidad permanece y por ellos, muchos de nosotros encontramos motivación e inspiración.

También quiero dar un especial agradecimiento al **Dr. José Joaquín Lizardi del Ángel**, por haberme guiado desde el inicio hasta el final de esta tesis, por haberme enseñado, orientado y animado durante estos dos años. Gracias por su gran ayuda, paciencia y humildad, sin usted esto no habría sido posible. Aún tenemos trabajo pendiente, pero lo primero ya quedó. Gracias, doctor.

Y por último, quiero agradecer infinitamente a mi alma mater la Universidad Nacional Autónoma de México por ser el cerebro de este país y permitirnos crecer como personas y profesionistas. Nunca terminaré de retribuirte todo lo que me has dado, ¡mi querida UNAM!

# Contenido

Resumen.....	iii
Nomenclatura.....	v
Introducción.....	1
Objetivo general.....	2
Objetivos particulares.....	2
Antecedentes.....	3
Capítulo 1. Conceptos básicos.....	8
1.1. Porosidad.....	8
1.2. Saturación.....	9
1.3. Permeabilidad.....	10
1.4. Presión capilar.....	11
1.5. Fuerza centrífuga y fuerza centrípeta.....	12
1.6. Efecto Coriolis.....	13
Capítulo 2. Formulación del problema.....	14
2.1. Modelo conceptual.....	15
2.2. Ecuación de continuidad.....	16
2.3. Ley de Darcy acoplada a medios rotatorios.....	17
2.4. Ecuaciones auxiliares.....	19
Capítulo 3. Análisis del modelo.....	22
3.1. Números y variables adimensionales.....	22
3.2. Análisis de orden de magnitud.....	25
3.3. Modelo matemático.....	32
Capítulo 4. Método numérico.....	35
4.1. Datos iniciales y de frontera.....	35
4.2. Método del elemento finito.....	38
Capítulo 5. Resultados y discusión.....	41
Conclusiones.....	46
Recomendaciones.....	46
Apéndice A. Desarrollo del modelo matemático.....	47
Apéndice B. Comportamiento de las permeabilidades relativas.....	53

Anexo 1. Ecuaciones de conservación de masa para un sistema de flujo multifásico en un medio poroso (Ertekin 2001).....	54
Lista de Tablas.....	57
Lista de Figuras.....	57
Referencias.....	59

## Resumen

Se realizó el modelado matemático de un flujo bifásico (agua y aceite) sometido a una fuerza centrífuga en núcleos de roca de diámetro completo con la finalidad de considerar estructuras completas como vórgulos y fracturas, las cuales no se tienen en las muestras comúnmente caracterizadas por ser pequeños tapones de núcleos (pequeñas partes que se extraen de un núcleo completo).

Para poder centrifugar un núcleo de diámetro completo es necesario utilizar centrifugas industriales, las cuales tienen dimensiones mayores a las centrifugas convencionales, cuya velocidad de giro es menor. Es por eso que para el desarrollo del modelo se consideraron las dimensiones de la máquina, la velocidad de giro y las fuerzas que intervienen en el proceso como la gravedad, presión capilar y fuerza centrífuga, por ejemplo.

El objetivo general de este trabajo fue obtener un modelo teórico-conceptual para establecer los principales parámetros petrofísicos que influyen en el proceso de recuperación de aceite en un flujo bifásico, en dos dimensiones, a través de una centrifuga. Para poder obtenerlo se consideró una muestra cilíndrica que, al ser representada en dos dimensiones, adquiere una forma rectangular formando cuatro caras principales (ver apartado 2.1).

De acuerdo con el diseño de la máquina y la metodología experimental, debía considerarse la entrada de agua a la muestra por todos sus lados, sin embargo los alcances de este trabajo cubren hasta la simulación en 2D, esquematizando la muestra mediante un rectángulo, considerando desplazamiento de aceite con entrada de agua por dos de las cuatro caras de la muestra (ver Fig.19), con la finalidad de mantener la estabilidad del modelo para una primera validación.

El modelo matemático se generó a partir de la combinación y adimensionalización de ecuaciones de flujo, de continuidad y de algunas relaciones complementarias, considerando las fuerzas que intervienen durante el desplazamiento, como la fuerza de gravedad y la fuerza centrífuga, así como la densidad del aceite y las saturaciones residuales. Una vez obtenido el

modelo, se resolvió en *FreeFem++* utilizando el método del elemento finito y realizando corridas para diferentes velocidades de rotación.

Entre los principales resultados destaca la buena respuesta del modelo respecto al comportamiento de la saturación de agua en la muestra conforme se aumenta la velocidad, el papel que juega la fuerza de gravedad, la fuerza centrífuga, la presión capilar y las permeabilidades relativas durante los diferentes tiempos del proceso. Por otro lado cabe mencionar que el modelo obtenido resultó ser general para cualquier proceso similar debido a su adimensionalización, y ajustable en su programación para muestras y máquinas más pequeñas que las utilizadas en este proyecto.

Se recomienda extender el modelo para considerar la entrada de agua por las cuatro caras de la muestra, y ejecutar el proceso inverso a partir del cual se logren determinar las presiones capilares y permeabilidades relativas del sistema con base en las propiedades y volúmenes del aceite extraído. Por último, es importante señalar que el modelo debe ser validado con datos experimentales.

## Nomenclatura

$f$  = Fases w, o

$g$  = Aceleración de la gravedad 9.81 [ $m/s^2$ ]

$k_f$  = Permeabilidad efectiva

$K$  = Permeabilidad absoluta [ $m^2$ ]

$o$  = Aceite

$\bar{P}_c$  = Presión capilar [ $Pa$ ]

$\bar{P}_f$  = Presión para cada fase [ $Pa$ ]

$\bar{r}$  = Longitud de radio efectivo [ $m$ ]

$S_f$  = Saturación para cada fase

$\bar{t}$  = Tiempo [ $s$ ]

$\bar{u}_f$  = Velocidad de Darcy en x [ $m/s$ ]

$\bar{v}_f$  = Velocidad de Darcy en y [ $m/s$ ]

$\bar{w}_f$  = Velocidad de Darcy en z [ $m/s$ ]

$w$  = Agua

$\bar{z}$  = Distancia a cada punto de la canasta en la dirección z [ $m$ ]

$\gamma$  = Ángulo del brazo de la canasta respecto a x [ $^\circ$ ]

$\bar{\mu}_f$  = Viscosidad [ $Pa * s$ ]

$\bar{\rho}_f$  = Densidad [ $kg/m^3$ ]

$\phi$  = Porosidad

$\bar{\omega}$  = Velocidad de rotación [ $rps$ ]

# Introducción

La explotación óptima de yacimientos es una actividad que depende de distintas disciplinas, las cuales se pueden agrupar principalmente en: técnicas, económicas y administrativas. A pesar de que están ligadas entre sí, es importante resaltar que la delimitación y el desarrollo son dos etapas principales en este proceso porque en ellas se determina el volumen original de hidrocarburos y se caracterizan los yacimientos; parámetros que guiarán el diseño de la explotación y los alcances económicos de cada proyecto.

Como parte del desarrollo de los yacimientos, a través de los años se han generado distintos métodos para caracterizarlos tratando de establecer modelos que ayuden a predecir sus propiedades como: la permeabilidad, porosidad, presión, mojabilidad, etc., porque de éstas (en conjunto con las propiedades de los fluidos) depende el comportamiento del flujo de los fluidos a través del medio poroso durante su explotación y además algunas de ellas, como la presión capilar, permiten conocer la saturación de aceite residual, saturación de agua irreducible o distribución del tamaño de poros, por ejemplo.

Uno de los trabajos más conocidos para definir el comportamiento del flujo de fluidos en la roca es el de Henry Darcy que, aunque en un inicio no fue desarrollado para la industria petrolera, ha sido de gran utilidad porque establece una correlación entre presión y permeabilidad. El desarrollo de esta tesis se centra en dichas propiedades para establecer un modelo matemático de flujo bifásico capaz de interpretar los resultados obtenidos de una cámara de imbibición forzada al centrifugar un núcleo de yacimiento de diámetro completo, y así establecer un método general y de mayor precisión para obtener permeabilidades relativas y presiones capilares del sistema roca-fluido a una saturación dada.

## Objetivo general

Obtener un modelo teórico-conceptual en donde se establezcan los principales parámetros petrofísicos que influyen en el proceso de recuperación de aceite de una centrífuga en un flujo bifásico.

## Objetivos particulares

- Desarrollar el modelado matemático de flujo bifásico en un medio poroso sometido a una fuerza centrífuga.
- Utilizar un software de elemento finito para la solución del modelo matemático.
- Realizar corridas numéricas para corroborar la funcionalidad del modelo.

## Antecedentes

El estudio del comportamiento de los fluidos en medios porosos sometidos a rotación no es nuevo, sin embargo, sigue desarrollándose debido a su aplicación en distintos sectores que van desde la medicina hasta la ingeniería. En esta sección se concentran de forma resumida el conjunto de trabajos más destacados que anteceden a éste.

El uso de centrifugas para estudios de laboratorio en los que se simulaban problemas reales escalándolos a experimentos con pequeñas muestras de roca, tuvo origen inicialmente para mecánica de suelos, en donde se buscaba crear escenarios que generaran efectos similares a los ocurridos en un terremoto así como el sometimiento de las muestras a diferentes vibraciones. Evidentemente, no se incluía la intervención de fluidos en los medios porosos (Zienkiewicz y Taylor 2005).

El primer estudio de la presión capilar utilizando una fuerza centrífuga fue realizado por Hassler y Brunner (1945) quienes generaron un modelo muy básico y con poca exactitud respecto a los datos reales, pero es de suma importancia por ser el motor de arranque para los trabajos subsiguientes. De igual forma Hagoort (1980) fue el primero en medir la permeabilidad relativa durante un proceso de drenaje a través de la centrifugación de un medio poroso, asumió una velocidad angular constante a lo largo del núcleo, movilidad infinita para la fase gaseosa, despreció los efectos capilares y asumió una saturación constante de la fase mojante en la cara de la muestra más cercana al centro de giro.

Rapoport y Leas (1953) analizaron el comportamiento del flujo dentro de un medio poroso considerando distintas longitudes del sistema y diferentes gastos de inyección, tomando como antecedente el trabajo de Buckley y Leverett (1942) con flujo lineal y horizontal, añadiendo el efecto provocado por la presión capilar, que no fue considerado por Buckley y Leverett. Sin embargo, por ser flujo lineal horizontal no se utilizó una centrifugación pero es digno de mencionar por ser uno de los primeros trabajos en analizar la incidencia de la presión capilar sobre el desplazamiento de los fluidos en un medio poroso.

El uso de escalamientos en tiempo para predecir el comportamiento del drenaje gravitacional utilizando una centrifuga fue dado por Marx (1956), reduciendo así el tiempo que tomaría dre-

nar totalmente de forma natural una roca solamente con la fuerza de gravedad, pasando de años a horas y utilizando muestras con longitudes de aproximadamente 3 cm y un diámetro de 2 cm.

Durante los años siguientes se continuaron realizando estudios relacionados a trabajos de centrifugación, pero más enfocados en el diseño de las máquinas, y aunque el objetivo principal no era la aplicación en la industria petrolera, fue un buen periodo para mejorar estas herramientas en cuanto a su tamaño y capacidad, las cuales serían utilizadas, posteriormente en este ramo de la ingeniería.

Kyte (1970) presentó un método para predecir la recuperación de aceite de bloques de matriz en yacimientos fracturados por desplazamiento agua-aceite (también válido para desplazamiento gas-aceite). En este trabajo, Kyte destacó la importancia de las fuerzas capilares y gravitacionales señalándolas como las principales responsables del desplazamiento de los fluidos en pruebas con centrífuga, contrario a la presión de flujo que existe en las fracturas. Asimismo, comparó las ventajas de su método contra un método numérico, mencionando algunas desventajas de éste último como las consideraciones que tienen que suponerse en las fronteras, las dificultades para los escalamientos y la poca fidelidad de los resultados al trabajar con núcleos sintéticos.

Luego Bensten y Anli (1977), estudiaron técnicas de estimación de parámetros para obtener curvas de presión capilar a partir de datos obtenidos con una centrífuga, empleando menos horas de trabajo, gracias a la integración de métodos computacionales. A diferencia de los métodos de Hassler y Brunner (1945), quienes utilizaron diferenciaciones numéricas y gráficas que se tenían que analizar manualmente. El primero de los métodos de Bensten y Anli (1977) es una modificación al método de Hassler y Brunner, el segundo es a través de integración numérica y el último utilizando un método de aproximación. Las muestras de núcleos eran de arenas con dimensiones de 1 pulgada de diámetro y 1 ½ pulgadas de longitud aproximadamente.

En septiembre de 1990 Nimmo generó una ecuación para describir el comportamiento de un fluido contenido en un medio poroso sometido a una fuerza centrífuga, siendo así uno de los primeros trabajos similares a esta tesis, con la diferencia de que Nimmo no consideró la saturación total de la muestra y en dicha muestra sólo se contenía agua y aire. Para validar el modelo sometió una muestra de aproximadamente 2.5 cm de diámetro y 3.8 cm de longitud, a diferentes velocidades de rotación, cada una implementada una vez que se alcanzaba el equilibrio hidrostático. Entre sus resultados, destaca la diferencia que hay entre los tiempos esperados con

el modelo teórico y los tiempos reales que se dieron en la parte experimental, siendo menor el tiempo de desplazamiento experimental que el esperado con el modelo teórico.

En el siguiente año, Nimmo y Mello (1991), estudiaron la conductividad hidráulica de un medio poroso saturado con agua, sometido a una fuerza centrífuga. En este trabajo detectaron que al someter la muestra de roca a rotación, ésta sufre una compresión, la cual tiene un impacto directo en la medición de la conductividad. Cabe aclarar que esta compresión se ve favorecida por la ausencia de fluido en la muestra durante la rotación, es decir, la compresión aumenta conforme se extrae el fluido de la muestra.

Nordtvedt et al. (1993), desarrollaron un método para cuantificar las funciones o efectos de la presión capilar y de la permeabilidad relativa a partir de experimentos con flujo transitorio y de múltiples tasas de centrifugación: la curva de presión capilar determina la cantidad producida total de la fase mojante a diferentes velocidades angulares, y la permeabilidad relativa determina principalmente la forma del perfil de producción en el periodo de transición hasta que la producción se detiene.

Forbes (1994) propuso dos métodos para convertir los datos de saturación obtenidos por una centrífuga en curvas de presión capilar para procesos de drene y de imbibición, justificando su trabajo, por un lado, con las deficiencias que presentaban métodos anteriores como el suavizado excesivo que se tenía que hacer a los datos para poder obtener una forma analítica general, lo que conducía a errores significativos respecto a los resultados experimentales; y por otro lado, tiene mejora en la reducción del tiempo de cálculo y el aumento en la precisión de los modelos. Además, realizó una recopilación de los diferentes métodos de análisis de datos obtenidos a través de una centrífuga para generar curvas de presión capilar (Forbes 1997), en ese trabajo se condensaron más de diez soluciones diferentes con la finalidad de determinar cuán exactos eran respecto a los resultados experimentales, concluyendo que la mayoría de errores se debían a cuestiones de interpretación o consideraciones al generar los modelos analíticos, y no al proceso experimental. Una de ellas por ejemplo, fue considerar un empuje plano del fluido debido a la fuerza centrífuga y no un perfil curvado. Todos los estudios fueron realizados para analizar muestras de pequeñas dimensiones.

Luego de diez años Garnier et al. (2007) elaboraron un catálogo de leyes de escalamiento para el modelado de procesos en centrífugas geotécnicas, el cual se ha vuelto un referente mundial incluyendo temas como los efectos del tamaño de grano en la estructura de la muestra y en las

interfaces, distribución de la densidad y tensión en modelos de centrífuga, transporte de medios no acuosos en las muestras, transferencia de calor, etc.

En el año 2009 se utilizó un método experimental para generar curvas de presión capilar al centrifugar una muestra de 6 cm de longitud y 4 cm de diámetro (Ferno et al. 2009). Para este método utilizaron un trazador, el cual permitía conocer, en tiempo real, el cambio en la saturación de la roca y relacionarlo con la velocidad angular para calcular la presión capilar, incluyendo correcciones en la velocidad por el aumento de la distancia del centro de giro a cada punto de observación en el avance de saturación.

En ese mismo año, Van Den Berg et al. (2009) publicaron una revisión sobre mediciones de conductividad hidráulica en muestras sometidas a una fuerza centrífuga, mencionando las dimensiones de las máquinas utilizadas en diferentes estudios previos y explicando las bases teóricas para comprender la física del problema, así como efectos secundarios resultantes de la centrifugación como la compresión de la roca y el reacomodo del tamaño de poros por ejemplo. De igual manera hicieron un apartado para las condiciones de frontera a considerar en cada modelo y finalmente entre algunas de sus conclusiones mencionan que los errores de consideraciones matemáticas e interpretación señalados en trabajos como el de Forbes y el de Ferno (2009), se deben principalmente a que al desarrollar los modelos sólo se considera flujo en 1D y no en 2D o 3D, lo cual los haría más fieles a la realidad.

Bauget et al. (2012) compararon la efectividad de medición de la permeabilidad relativa entre el método propuesto por Hagoort (1980) y el experimental generado en su prueba, observando que es necesario considerar los efectos provocados en los tiempos iniciales de rotación, como el acomodo de la muestra hasta alcanzar la posición y velocidad estables, hasta los efectos de la presión capilar, contrario a lo que hizo Hagoort, ya que de no ser así se incide en un gran error en los resultados finales. De igual forma sugirieron realizar la prueba a múltiples velocidades (aunque implique un tiempo de prueba aproximado de 90 horas) para la medición de la presión capilar, y para la permeabilidad relativa hacerlo en un solo evento a velocidad constante. El estudio fue realizado para un desplazamiento entre fases líquido y gas, y para muestras menores a 2.5 cm de longitud y a 4 cm de diámetro.

En 2011 el INL (Laboratorio Nacional de Idaho por sus siglas en inglés) hizo un estudio, a petición del IMP para determinar la presión capilar y permeabilidades relativas de diferentes núcleos naturalmente fracturados de Campeche. Algunas pruebas se realizaron utilizando centrí-

fugas convencionales (de radio de giro pequeño) con tapones de núcleo con longitudes menores a los 5 cm y diámetro menor a 4 cm; y otras, con muestras de hasta 30 cm de longitud, cuyo brazo de giro es de 2 m. Cabe señalar que en el mismo año, Mattson (2011) describió el diseño y funcionamiento de una centrífuga capaz de sostener muestras de hasta 70 x 60 x 50 cm y de 500 kg de masa, con dimensiones mucho mayores a las convencionales usadas hasta ese momento para llevar a cabo estudios relacionados con medios porosos. Este tipo de centrífugas fueron utilizadas por el INL para la medición de las muestras solicitadas por el IMP.

Ese mismo diseño de centrífuga se utilizó como base para el diseño de la que se utilizará en el Instituto Mexicano del Petróleo (IMP), la cual aún se encuentra en la etapa de construcción cuyas dimensiones y funcionamiento fueron consideradas para establecer las premisas del desarrollo del modelo matemático de esta tesis.

Por otro lado, para determinar las propiedades de la presión capilar y permeabilidades relativas se utilizaron modelos como los de Hassler y Brunner, Forbes o la solución de Bentsen y Anli, encontrando algunas discrepancias entre ambas pruebas, principalmente por la manipulación de las muestras previo al proceso experimental. De las conclusiones de este estudio se sugirió establecer un modelo numérico que ayude a describir con mayor claridad lo que sucede dentro de la muestra al someterse a la fuerza centrífuga, así como la colocación de sensores o dispositivos que ayuden a monitorear en tiempo real los cambios en la saturación durante el experimento.

Este trabajo es el antecedente más cercano al intencionado en esta tesis tanto por las dimensiones de las muestras utilizadas como por el diseño y características de la centrífuga.

Estas investigaciones y reportes sirven como base para iniciar el desarrollo de este trabajo, en el que se busca obtener con mayor exactitud las presiones capilares y permeabilidades relativas de la muestra a partir del modelo desarrollado, enfocado a muestras más grandes a las utilizadas normalmente en las pruebas de laboratorio.

# Capítulo 1. Conceptos básicos\*

En este capítulo se definen brevemente los conceptos básicos necesarios para el entendimiento del trabajo desarrollado, con el objetivo de que sea inteligible aún para personas poco familiarizadas con la ingeniería de yacimientos y a su vez, sirva como material de apoyo para quienes se encuentren cursando la carrera o afines.

## 1.1. Porosidad

Para la ingeniería de yacimientos en la etapa de exploración, la porosidad es quizá una de las propiedades más importantes, ya que determina el volumen total de fluidos que pueden estar presentes en un yacimiento o en un volumen de roca, además de que es un factor importante para la determinación del proceso de recuperación de hidrocarburos de acuerdo a su valor o a la comunicación entre cada uno de los poros.

La porosidad se define como la relación que existe entre el volumen total de huecos respecto al volumen total de roca y depende en gran parte del tamaño y de la forma de los granos. Se puede clasificar de acuerdo a la comunicación entre poros y también de acuerdo a la formación del poro.

- *Clasificación según la comunicación entre poros:*

**Porosidad absoluta:** Es la porosidad total existente en la roca, es decir, es el volumen total de huecos respecto al volumen total de la roca (**Fig. 1a**).

**Porosidad efectiva:** Es la porción de poros o huecos intercomunicados con respecto al volumen total de roca (**Fig. 1b**).

- *Clasificación según la formación del poro:*

**Porosidad primaria:** Es la porosidad que tuvo origen conforme se fue depositando el sedimento, es decir, el volumen de huecos que quedaron entre los granos al momento de la sedimentación.

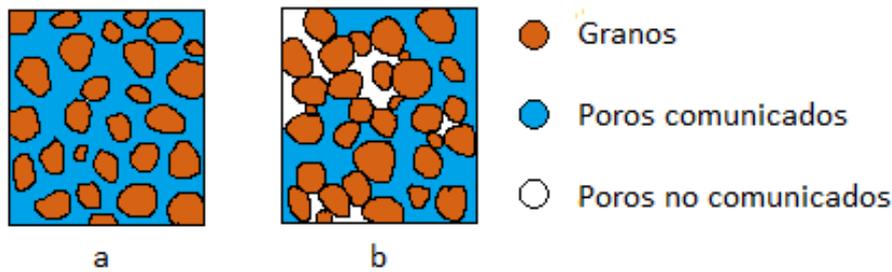
---

\* Fuentes: Serway, R.F., Jewett, J.W. 2004. *Physics for Scientists and Engineers*. Brooks/Cole.// Towler, B.F. 2002. *Fundamental Principles of Reservoir Engineering*. SPE Textbook Series.// Willhite G. P. 1986. *Waterflooding*. SPE Textbook Series Vol.3. (1986).

**Porosidad secundaria:** Es la porosidad que tuvo origen después de la formación del sedimento y ocurre por agentes geológicos y químicos principalmente, como la disolución, el fracturamiento y el fallamiento de la roca.

La porosidad se cuantifica en porcentaje y se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Porosidad}(\%) = 100 \left( \frac{\text{Volumen total de roca} - \text{Volumen de granos}}{\text{Volumen total de roca}} \right)$$



**Fig. 1**—a) Porosidad absoluta b) Porosidad efectiva. Fuente: Elaboración propia.

Nótese que en la expresión anterior no se considera la heterogeneidad de la roca, sino un promedio de la porosidad total. Estas suposiciones suelen hacerse para simplificar el planteamiento y solución de problemas. La porosidad depende de la presión que los fluidos ejercen sobre cada poro y para el interés de la ingeniería de yacimientos, la única porosidad “que importa” es la efectiva porque será la que permita el flujo de fluidos a través de la roca, sin embargo suele asumirse un promedio de ésta y que su valor no cambia con el tiempo.

## 1.2. Saturación

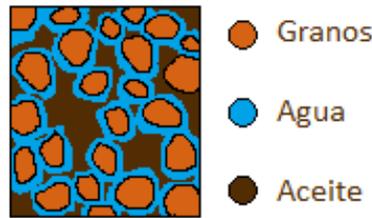
Es el porcentaje de volumen ocupado por un fluido en el espacio poroso de la roca. Se calcula dividiendo el volumen del fluido entre el volumen poroso.

$$S_f = \frac{V_f}{V_p}$$

Para una roca que contiene dos o más fluidos, por ejemplo: agua, aceite y gas, la saturación de cada fluido será la fracción que cada uno ocupa en el espacio poroso, y la suma de las tres debe ser igual a la unidad:

$$S_w + S_o + S_g = 1$$

En un sistema bifásico, la fase mojante se adhiere a las paredes del poro y satura a los poros más pequeños, mientras que la fase no mojante se localiza en el centro de los poros.



**Fig. 2**—Esquema de un medio poroso saturado por agua y aceite donde el agua moja a la roca. Fuente: Elaboración propia.

### 1.3. Permeabilidad

Es la medida de la capacidad de una roca para permitir el paso de un fluido a través de ella mediante un gradiente de presión; puede ser absoluta, efectiva o relativa. Para que exista permeabilidad los poros de la formación deben estar intercomunicados, es por eso que la relación porosidad-permeabilidad no es directamente proporcional, ya que puede haber una formación muy porosa pero poco comunicada, haciéndola en consecuencia poco permeable.

**Permeabilidad absoluta ( $K$ ):** Es la propiedad de la roca que permite el paso de un fluido que la satura al 100%.

**Permeabilidad efectiva ( $K_o$ ,  $K_g$ ,  $K_w$ ):** Indica la facilidad con la que un fluido puede moverse a través de un medio poroso cuando no lo satura al 100%, es decir, cuando el medio poroso contiene más de un fluido:

$$k_o = \frac{q_o \bar{\mu}_o L}{A \Delta P}; k_w = \frac{q_w \bar{\mu}_w L}{A \Delta P}; k_g = \frac{q_g \bar{\mu}_g L}{A \Delta P}$$

Donde:

$K_o$  = permeabilidad efectiva al aceite.

$K_g$  = permeabilidad efectiva al gas.

$K_w$  = permeabilidad efectiva al agua.

**Permeabilidad relativa\*<sup>1</sup> ( $K_{ro}$ ,  $K_{rg}$ ,  $K_{rw}$ ):** Es la razón de la permeabilidad efectiva a la permeabilidad absoluta, a una saturación específica. Depende principalmente de la estructura po-

\*<sup>1</sup> La nomenclatura clásica para esta propiedad es  $K_{rf}$ , sin embargo para el desarrollo del modelo se utilizó simplemente  $k_f$ . (revisar apartado de **Nomenclatura** para no confundir con permeabilidad efectiva).

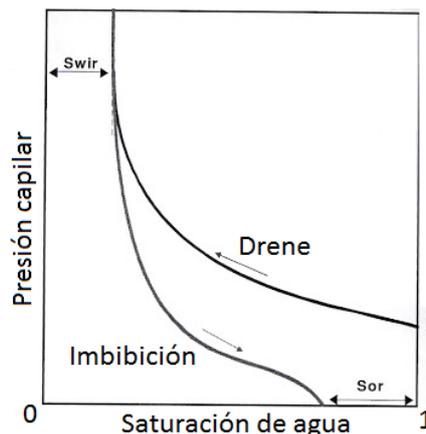
rosa, de las saturaciones y de las viscosidades de las fases presentes, así como de la mojabilidad existente en el sistema roca-fluido.

$$k_{ro} = \frac{k_o}{K}; k_{rw} = \frac{k_w}{K}; k_{rg} = \frac{k_g}{K}$$

Al igual que la porosidad, la permeabilidad es distinta en cada punto de la roca, sin embargo también se consideran valores promedio. Cuando el valor de la permeabilidad varía según el sentido de flujo, se dice que el medio poroso es anisotrópico, por el contrario, cuando el valor es el mismo sin importar el sentido en el que se observe se dice que el medio poroso es isotrópico para esta propiedad.

### 1.4. Presión capilar

La presión capilar existe sólo cuando los poros son saturados por dos o más fases. En un sistema bifásico la presión capilar es, por definición, el resultado de la diferencia de presiones entre la fase no mojante y la fase mojante. La presión capilar es función de la saturación así como de los procesos de drene (desplazamiento de la fase mojante) e imbibición (desplazamiento de la fase no mojante). En la siguiente gráfica se muestra la dependencia que tiene la presión capilar de la saturación de las fases y de los procesos mencionados para un sistema agua-aceite:



**Fig. 3**—Relación entre la presión capilar y los procesos de drene e imbibición.\*<sup>1</sup>

La importancia de la presión capilar radica en que ésta puede evitar o favorecer el desplazamiento de los fluidos debido al efecto de capilaridad. Además, dicha presión está en función de la tensión interfacial y del tamaño promedio de las gargantas de poro, así como de la

\*<sup>1</sup> Fuente: Willhite G. P. 1986. *Waterflooding*. SPE Textbook Series Vol.3.

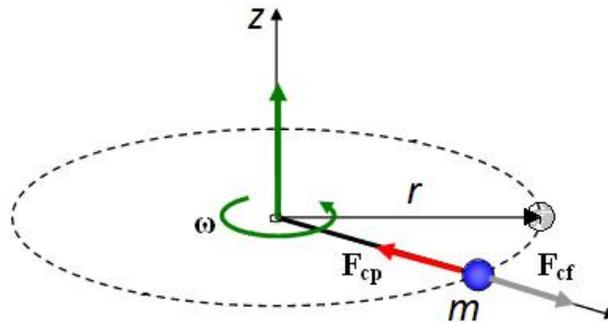
mojabilidad, por lo tanto es una propiedad que depende de la interacción entre la roca y el fluido al igual que la permeabilidad relativa. Una forma sencilla de obtenerla para un sistema agua-aceite donde el agua moja la roca es la siguiente:

$$P_c = P_o - P_w$$

### 1.5. Fuerza centrífuga y fuerza centrípeta

La *fuerza centrífuga* es la responsable de generar una tendencia sobre un cuerpo a alejarse del centro sobre el que gira, a diferencia de la *fuerza centrípeta*, que es la que hace que un cuerpo sometido a rotación describa una trayectoria circular “jalándolo hacia el centro”, evitando que se desplace totalmente hacia afuera de forma lineal (**Fig. 4**).

Es importante tener claro estos conceptos ya que son las fuerzas de principal incidencia en el proceso a estudiar.



**Fig. 4**—Fuerza centrífuga vs fuerza centrípeta de un cuerpo de masa  $m$  sometido a rotación.  
Fuente: Elaboración propia.

$$F_{cf} = m\omega^2 r$$

Donde:

$F_{cf}$  = Fuerza centrífuga

$F_{cp}$  = Fuerza centrípeta

$m$  = Masa

$\omega^2$  = Aceleración angular

$r$  = Posición respecto al eje de rotación

### 1.6. Efecto Coriolis\*1

En medios rotatorios se presenta un efecto en los cuerpos que se encuentran sobre dichos medios, llamado: *efecto Coriolis*. Este efecto se refiere a la desviación de la trayectoria lineal que sufrirá un cuerpo al desplazarse del centro del medio rotatorio hacia la parte exterior. Por ejemplo, imaginemos que se tiene una placa circular en una superficie plana y sin movimiento, luego se coloca un balón en su centro y a éste se le empuja hacia afuera de la placa; el balón describirá una trayectoria recta (**Fig. 5**). Ahora bien, supongamos que la placa circular comienza a rotar en su propio eje y se realiza el mismo experimento: se coloca el balón en el centro y luego se le empuja con la intención de sacarlo de la placa, ahora éste en lugar de describir una trayectoria recta presentará una desviación debida a la rotación de la placa (**Fig. 6**). Este efecto en el cambio de su trayectoria es el “efecto Coriolis”, el cual también se presenta con fluidos sometidos a rotación como en huracanes por ejemplo, y puede ser significativo para los resultados finales de algunos experimentos. Para este trabajo se despreció este efecto porque no afecta de forma significativa a los resultados finales. En el apartado 3.2 se hará un análisis de cada parámetro que interviene en esta prueba en donde se justificará esta simplificación.

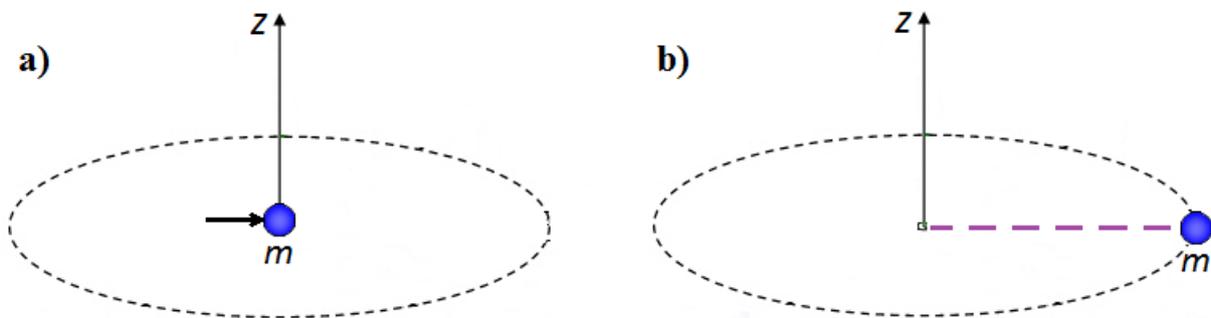


Fig. 5—Trayectoria de un balón sobre una placa estática. Fuente: Elaboración propia.

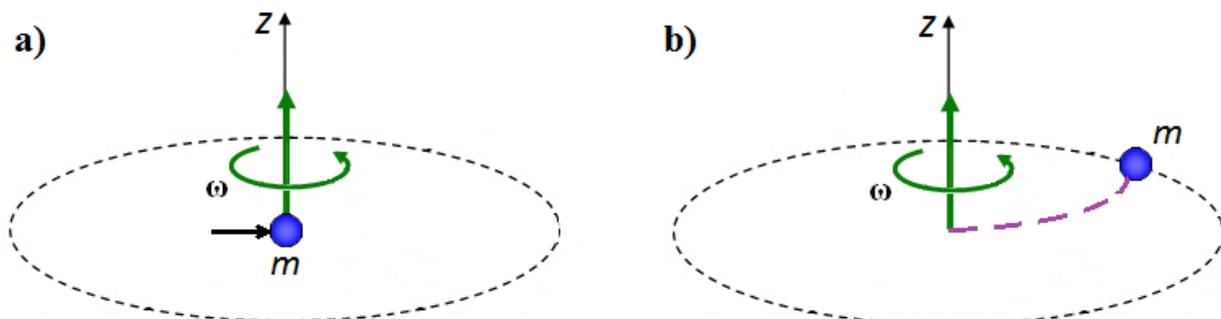


Fig. 6—Trayectoria de un balón descrita por el efecto Coriolis. Fuente: Elaboración propia.

\*1 Fuente: Vadasz, P. et al. 2016. Fluid flow and heat transfer in rotating porous media. Springer.

## Capítulo 2. Formulación del problema

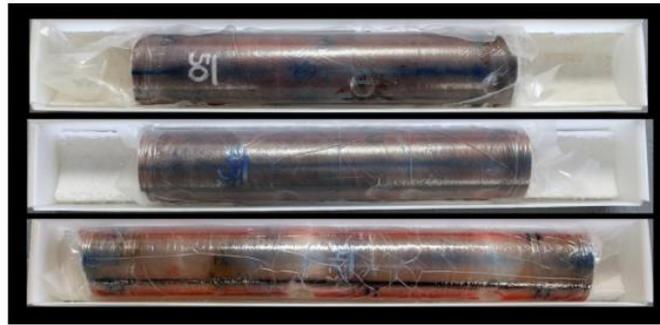
Como se mencionó al principio, la determinación de las propiedades petrofísicas del yacimiento y las propiedades de los fluidos que éste contiene es una tarea fundamental de la ingeniería de yacimientos. A partir de la caracterización adecuada de dichas propiedades es posible proyectar el comportamiento dinámico del yacimiento y así, optimizar su producción y planear futuros métodos de recuperación secundaria y/o mejorada.

Debido a las dimensiones que los yacimientos presentan, resulta difícil caracterizarlos de forma directa, sin embargo, a través de los años se han generado distintos métodos que permiten obtener mejores aproximaciones de las condiciones reales e iniciales del sistema y, continuamente, se hace un esfuerzo por mejorar la precisión de los resultados obtenidos con la finalidad de apearse cada vez más a la realidad.

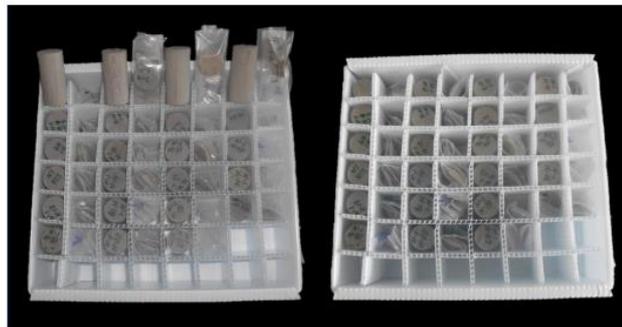
Este trabajo será un apoyo para la interpretación de datos de laboratorio, el punto de mejora respecto a los que le anteceden radica en la diferencia del tamaño de la muestra a analizar, ya que hasta el momento las muestras utilizadas para estudios de laboratorio son pequeños tapones (**Fig. 7**) los cuales en la mayoría de los casos, no contienen estructuras como vóculos o fracturas (más representativas a las que podría contener un tapón de núcleo), disminuyendo la calidad y precisión de los resultados que se obtienen después de estudiarlos. Esto no significa que los métodos existentes arrojen resultados erróneos, pero sí menos representativos que los que se pueden obtener con una muestra más grande como un núcleo de diámetro completo.

En este capítulo se explica el planteamiento teórico del problema así como las ecuaciones base utilizadas, por lo que es importante recordar que para expresar matemáticamente el comportamiento del flujo de fluidos a través de medios porosos es necesario utilizar las leyes y ecuaciones siguientes:

- Ley de la conservación de la masa o ecuación de continuidad.
- Una ecuación que describa el gasto del fluido en movimiento dentro del volumen de control, en este caso, la ecuación de Darcy, que relaciona el gasto de fluido con la diferencia de presión en el medio poroso. Será acoplada para medios porosos sometidos a una fuerza centrífuga.
- Ecuaciones auxiliares que permitan conocer las propiedades de los fluidos en estudio.



a) Núcleo convencional de sal preservado en bolsas de vacío.



b) Muestras de tapones y galletas.

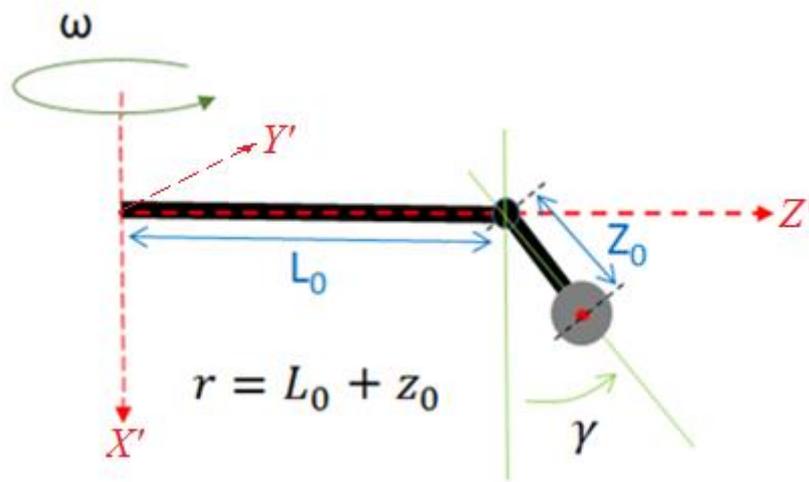
**Fig. 7**—Diferencia entre núcleo de diámetro completo y tapón.\*<sup>2</sup>

## 2.1. Modelo conceptual

Para el desarrollo del modelo matemático se considera una centrífuga con radio de giro,  $r$ , que sostiene en su extremo una canasta de pruebas de longitud,  $z_0$ , que contendrá a la muestra de roca con porosidad constante y a los fluidos tanto desplazante como desplazado (agua-aceite) de densidades,  $\rho_w$  o  $\rho_o$ , e incompresibles (ver **Fig. 8**). La muestra rota a distintas velocidades,  $\omega$ , que se ajustan a diferentes tiempos,  $t$ , con la finalidad de extraer la mayor cantidad de fluidos en el menor tiempo posible. El sistema de referencia definido se escoge tal que gira a la misma velocidad angular de la centrífuga alrededor del eje  $X'$ . Asimismo, se considera el cambio de posición de la canastilla respecto al plano  $xz$ , descrita por el ángulo  $\gamma$ , este cambio de posición ocurre en los primeros pasos de tiempo hasta que el brazo y la canastilla alcanzan su posición de estabilización (aproximada a  $90^\circ$  respecto al eje  $x$ ). Entonces, el ángulo  $\gamma$  se vuelve constante hasta llegar a los últimos tiempos de rotación, donde nuevamente vuelve a su posición inicial.

\*<sup>2</sup> Fuente: *Manual de Entrega de Muestras Físicas*. Litoteca Nacional de la industria de Hidrocarburos. CNIH 2017.

El desplazamiento de los fluidos ocurre debido a un proceso de imbibición forzada generado por la fuerza centrífuga, la fuerza de gravedad, la permeabilidad del medio poroso y la diferencia de presión entre las fases. La saturación de cada fluido en la roca cambia con el tiempo debido a su extracción por del proceso de centrifugación. Sin embargo, el volumen extraído es cuantificado a través de un contenedor conectado directamente a la canastilla; y es a partir de estos datos de saturación vs tiempo, que se realiza la caracterización de la muestra en cuanto a presión capilar y permeabilidades relativas.



**Fig. 8**—Esquema del modelo físico en estudio (centrífuga). La expresión para  $r$  es válida cuando  $\gamma=90^\circ$ . Para cualquier condición diferente se utilizan razones trigonométricas. Fuente: Elaboración propia.

## 2.2. Ecuación de continuidad

La idea básica de un sistema continuo es considerar que todo el espacio del volumen de control está ocupado por materia, además se toma en cuenta solamente un valor promedio de las propiedades físicas del sistema. La ecuación de continuidad es la forma diferencial del principio de conservación de masa (Ertekin 2001), el cual establece que la masa del sistema contenida en un volumen de control se conserva (**Fig. 9**) y matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$m_i - m_o + m_s = m_{ac}$$

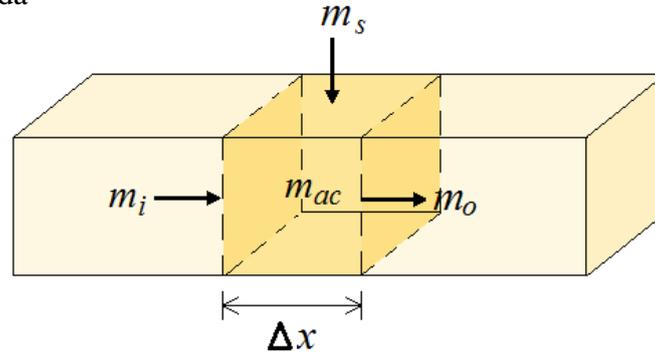
donde:

$m_i$  = Masa que entra

$m_o$  = Masa que sale

$m_s$  = Masa ganada o perdida de una fuente o sumidero respectivamente

$m_{ac}$  = Masa acumulada



**Fig. 9**—Volumen de control para flujo en 1D en coordenadas rectangulares. Fuente: Elaboración propia.

En un yacimiento petrolero se presentan usualmente tres fases de fluidos: gas, aceite y agua; el gas puede estar disuelto en el aceite o bien, libre en yacimientos saturados. Cuando el gas se libera debido a la disminución de la presión del yacimiento, sin lugar a duda esta “generación de masa” a favor del gas debe considerarse al establecer las ecuaciones del modelo final de la ecuación de continuidad (ver **Anexo 1**). Por la naturaleza experimental de este estudio, se asume que el aceite no pierde presión y, por lo tanto, no hay liberación de gas, entonces no se necesita considerar este intercambio de masa y se puede asumir un sistema de fluidos donde el aceite se encuentra saturado y las fases líquidas son incompresibles. Asimismo para este caso tampoco se cuenta con una fuente que esté alimentando al volumen de control, entonces  $m_s = 0$ , quedando la ecuación de continuidad de la siguiente forma para cada fase\*<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial \phi S_w \bar{\rho}_w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{u}_w}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{v}_w}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{w}_w}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial \phi S_o \bar{\rho}_o}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{u}_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{v}_o}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{w}_o}{\partial \bar{z}} = 0$$

### 2.3. Ley de Darcy acoplada a medios rotatorios

La ley de Darcy es una expresión empírica que relaciona al gasto del fluido que pasa por un medio poroso debido a un gradiente de potencial o potencial de flujo (que es el trabajo necesario para que el fluido se desplace). Para un flujo monofásico en una dimensión, la ley de Darcy se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{q}{A_x} = \bar{u}_x = -K \frac{k_x}{\bar{\mu}} \left( \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right)$$

\*<sup>3</sup> Ver apartado de **Nomenclatura** para la definición de cada término de las ecuaciones.

donde  $q$ = gasto del fluido que pasa por el medio poroso,  $A_x$ = área transversal perpendicular a la dirección del flujo,  $u_x$ = velocidad superficial o de Darcy,  $K$ = permeabilidad absoluta de la roca en dirección  $x$  del flujo,  $\mu$ = viscosidad del fluido y la derivada  $dP/dx$  indica el cambio que existe en la presión por cada pequeño segmento de roca en la dirección  $x$  del flujo.

Esta forma de la ley de Darcy implica hacer las siguientes suposiciones:

- El fluido es homogéneo, monofásico y Newtoniano.
- No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso.
- Prevalece un régimen de flujo laminar.
- La permeabilidad es una propiedad del medio poroso, por lo cual no depende de la presión, temperatura ni del fluido.
- No existe efecto de resbalamiento (Klinkenberg).
- No hay efectos electrocinéticos.

Ahora bien, para flujos que contienen más de una fase se requiere considerar las permeabilidades relativas a cada fluido, entonces la ley de Darcy queda expresada de la siguiente manera:

$$\bar{u}_f = K \frac{k_f}{\bar{\mu}_f} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} \right)$$

La expresión anterior es aplicable para una sola dimensión, sin embargo en este trabajo es necesario considerar el potencial de flujo debido a la fuerza de gravedad y el provocado por la fuerza centrífuga. Para esto se hace una adaptación a la ley de Darcy añadiendo los términos que describan tales efectos, quedando de la siguiente forma para cada fase:

$$\bar{u}_w = K_x \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right)$$

$$\bar{v}_w = K_y \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\bar{w}_w = K_z \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right)$$

$$\bar{u}_o = K_x \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right)$$

$$\bar{v}_o = K_y \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{y}} \right)$$

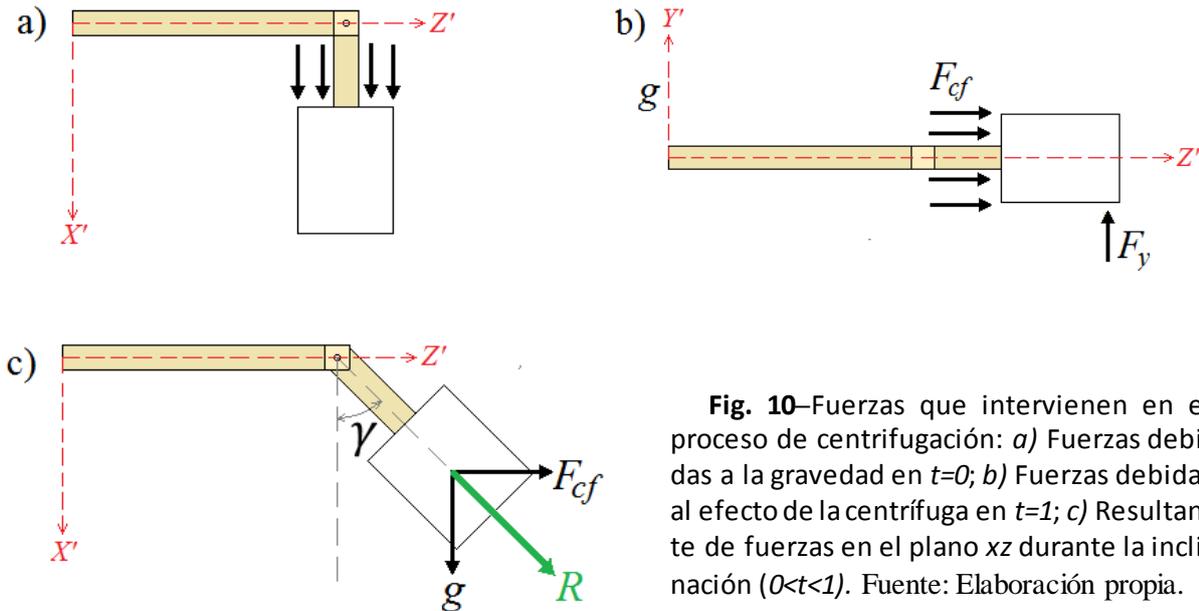
$$\bar{w}_o = K_z \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right)$$

$$c_\gamma = \cos \gamma, s_\gamma = \sin \gamma$$

como puede notarse, se añadieron dos grupos más de términos a la parte del potencial de flujo, donde:

$\bar{\rho}_w g =$  Potencial de flujo gobernado por la densidad del fluido y la fuerza de gravedad.

$\bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) =$  Potencial de flujo debido a la fuerza centrífuga.



**Fig. 10**–Fuerzas que intervienen en el proceso de centrifugación: a) Fuerzas debidas a la gravedad en  $t=0$ ; b) Fuerzas debidas al efecto de la centrifuga en  $t=1$ ; c) Resultante de fuerzas en el plano  $xz$  durante la inclinación ( $0 < t < 1$ ). Fuente: Elaboración propia.

## 2.4. Ecuaciones auxiliares

La mayoría de las ecuaciones siguientes son bastante conocidas en la ingeniería petrolera y en este trabajo se utilizan para realizar sustituciones dentro del desarrollo del modelo, de tal modo que faciliten su simplificación y la representación del proceso físico.

- *Relación de saturaciones:* Establece que la suma de las saturaciones de cada fase contenida en el volumen de control, dadas en porcentaje, es igual a uno. Es decir, que el volumen de control siempre estará lleno ya sea por agua, aceite o ambas:

$$S_w + S_o = 1$$

- *Presión capilar:* La siguiente expresión define a la presión capilar como la diferencia entre la presión de la fase que no moja la roca y la presión de la fase mojante.

Para un sistema compuesto por agua y aceite donde el agua moja a la roca, queda expresada de la siguiente forma:

$$\bar{P}_c = \bar{P}_o - \bar{P}_w$$

- *Velocidad característica:* Esta velocidad se ha definido exclusivamente para este trabajo y relaciona la distancia que recorre el fluido por unidad de tiempo debido a la fuerza centrífuga. En ella se involucran propiedades de la roca y del fluido así como la velocidad máxima de rotación y la longitud del radio efectivo de la centrifuga.

$$u_c = \frac{K\rho_w\omega_{\max}^2 z_0 r}{\mu_w}$$

donde:

$$\begin{aligned} K &= [m^2] \\ \bar{\rho}_w &= \left[ \frac{kg}{m^3} \right] \\ \bar{\omega}_{\max}^2 &= \left[ \frac{1}{s^2} \right] \\ \bar{r} &= [m] \\ z_0 &= [m] \\ \bar{\mu}_w &= [cP] \end{aligned}$$

- *Saturación efectiva:* Es la fracción de agua contenida en la porosidad efectiva. Dicho de otra forma es la cantidad de agua que puede moverse libremente a través de los poros comunicados y se define como:

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}}$$

donde  $S_{rw}$  y  $S_{ro}$  son las saturaciones residuales de agua y aceite respectivamente.

- *Relaciones de Brooks & Corey modificadas:* Son relaciones que permiten actualizar los valores de las permeabilidades relativas y de la presión capilar de acuerdo al cambio en la saturación de cada fase respecto al tiempo, dentro del medio poroso:

$$K_{rw} = K_{rw0} S_e^{n_w}$$
$$K_{ro} = K_{ro0} (1 - S_e)^{n_o}$$
$$\bar{P}_c = \bar{P}_u S_e^{-\frac{1}{\theta}}$$

Donde:

$K_{rw}$  = Permeabilidad relativa al agua

$K_{ro}$  = Permeabilidad relativa al aceite

$S_e$  = Saturación efectiva

$P_c$  = Presión capilar

$P_u$  = Presión de umbral

$n$  = Parámetro que indica el nivel de acomodo de los granos en la muestra

$\theta$  = Parámetro relacionado a la adherencia del agua en la roca

## Capítulo 3. Análisis del modelo

A partir del modelo conceptual descrito en el **Capítulo 2** y combinando, desarrollando y simplificando las ecuaciones descritas, se llegó a dos ecuaciones finales que se muestran en el último apartado de este capítulo y se desarrollan en el **Apéndice A**. De igual forma durante el tratamiento de las ecuaciones se adimensionalizaron las variables y se identificaron los grupos de propiedades físicas que forman números adimensionales, registrados anteriormente en la literatura, y se identificaron los fenómenos físicos que representa cada propiedad. En este capítulo también se explica la naturaleza, finalidad y función de dichos fenómenos, así como el análisis de orden de magnitud para las partes que intervienen en la construcción del modelo.

### 3.1. Números y variables adimensionales

Los *grupos o números adimensionales* surgen de forma natural durante la agrupación de términos en el desarrollo de las ecuaciones y son adimensionales por la simplificación dimensional de cada una de las variables que los conforman.

En un estudio previo realizado por Vadasz et al. (2016) se reporta un grupo de estos números y se identifican de acuerdo con el efecto físico que provocan en el medio poroso sometido a rotación. Dichos números se enlistan a continuación:

- *Número de Ekman*: Es un número que caracteriza la relación entre fuerzas viscosas y la fuerza de Coriolis debidas a la rotación, principalmente en medios sometidos a rotación en su mismo eje como huracanes o tornados. Se define como:

$$E_k = \frac{\bar{\mu}_w}{\bar{\omega}_{\max} \bar{\rho}_w l_c^2}$$

- *Número de Froude*: Es un número adimensional que relaciona el efecto de las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad que actúan sobre un fluido:

$$Fr = \frac{K \bar{\rho}_w g}{u_c \bar{\mu}_w}$$

- *Número de presión*: Relaciona la presión en el medio debida a la velocidad de rotación y a las propiedades del fluido:

$$N_p = \frac{K\bar{\rho}_w\bar{\omega}_{\max}^2\bar{r}}{u_c\bar{\mu}_w}$$

- *Número de centrífuga*: Similar al número de presión con la diferencia de que en éste se considera la distancia a cada punto de la muestra en estudio, denotada por la diferencia  $r - z$ :

$$C_n = \frac{K\bar{\rho}_w\bar{\omega}^2(\bar{r}-\bar{z})}{u_c\bar{\mu}_w}$$

Durante el tratamiento de las ecuaciones puede ser que estos números se simplifiquen al grado de desaparecer en el modelo final, sin embargo, son de gran utilidad porque al surgir e identificarlos en el desarrollo, se verifica que se está siguiendo el camino correcto y que el modelo generado está describiendo realmente el problema que se busca solucionar.

Por otro lado, las *variables adimensionales* no surgen de forma natural, sino que se provoca su adimensionalización dividiendo cada variable de interés (como el tiempo por ejemplo) entre un valor característico de la misma variable determinado a partir del análisis del proceso. La finalidad de este proceso es lograr que el rango de valores arrojados para los resultados esté entre 0 y 1, donde 1 es el valor máximo para cualquier problema, haciendo que el modelo final sea universal y al mismo tiempo, simplificar el tratamiento de las ecuaciones.

Cabe aclarar que los símbolos testados representan a las variables con dimensiones, mientras que los símbolos no testados muestran a las mismas variables pero ahora adimensionalizadas.

En la **Tabla 1** se enlista la definición y descripción de cada variable y en la **Tabla 2** se explican sus valores característicos.

**Tabla 1**—Variables adimensionales.

Variable adimensional	Definición	Descripción
Presión para cada fase	$P_f = \frac{\bar{p}_f}{(\rho_c \bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) l_c}$	Relaciona la presión dimensional de las fases agua y aceite con la presión característica del sistema donde $f= w$ u $o$ .
Tiempo	$\tau = \frac{\bar{t} u_c}{z_0}$	Relaciona cada tiempo dimensional de la prueba con el tiempo característico definido por la velocidad.
Distancia en el eje $x$	$\mathcal{X} = \frac{\bar{x}}{z_0}$	Desplazamiento adimensional de cada punto en el eje coordenado $x$ .
Distancia en el eje $z$	$\mathcal{Z} = \frac{\bar{z}}{z_0}$	Desplazamiento adimensional de cada punto en el eje coordenado $z$ en la canasta.
Radio de giro $r$	$r = \frac{\bar{r}}{z_0}$	Adimensionalización para el radio de giro efectivo $r$ .
Densidad para cada fase	$\rho_f = \frac{\bar{\rho}_f}{\bar{\rho}_w}$	Valor adimensional de la densidad de las fases agua y aceite donde $f= w$ u $o$ .
Viscosidad para cada fase	$\mu_f = \frac{\bar{\mu}_f}{\bar{\mu}_w}$	Valor adimensional de la viscosidad de las fases agua y aceite donde $f= w$ u $o$ .
Aceleración gravitacional	$\alpha = \frac{g}{\bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}}$	Adimensionalización de la aceleración de gravedad respecto a la aceleración centrífuga máxima del sistema.
Aceleración debida al giro	$\omega^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_{\max}^2}$	Adimensionalización de cada aceleración debida al giro respecto a la aceleración máxima del sistema.

**Tabla 2—Valores característicos.**

Nombre	Nomenclatura	Valor	Descripción
Velocidad característica	$u_c$	$\frac{K\rho_w\omega_{\max}^2 z_0 r}{\mu_w}$	Velocidad de flujo máxima que alcanzará el sistema.
Longitud característica	$l_c$	$z_0$	Distancia igual a la longitud de la muestra.
Tiempo característico	$t_c$	$\frac{z_0}{u_c}$	Tiempo obtenido a partir de la relación $v=d/t$ tomando como distancia la longitud de la muestra y como velocidad, la característica.
Densidad característica	$\rho_c$	$\rho_w$	Valor de la densidad del agua= 1000 kg/m <sup>3</sup> .
Viscosidad característica	$\mu_c$	$\mu_w$	Valor de la viscosidad del agua= 1 cP.
Aceleración característica	$\bar{\omega}_{\max}^2$	$\bar{\omega}_{\max}^2$	Capacidad máxima de rotación del sistema.

### 3.2. Análisis de orden de magnitud

Un análisis de orden de magnitud es aquel que permite conocer, como su nombre lo dice, el “tamaño” ya sea de cada variable o de un grupo de variables que constituyen al modelo a través de la asignación de valores reales del problema en estudio a cada término que lo conforma. Al hacer esto se pueden llegar a discriminar algunos términos, o bien, simplemente notar qué efecto de todos los considerados tendrá más influencia sobre los resultados finales.

Para este trabajo el análisis se realiza tanto para la velocidad característica como para los grupos de variables que constituyen la velocidad de Darcy, con la finalidad de identificar qué factores tienen mayor influencia en el problema real.

#### a) Análisis para la velocidad característica $u_c$

De la definición establecida en la sección 3.1 para la velocidad característica se puede notar que casi todos los valores de las componentes son constantes excepto uno: la permeabilidad, por lo tanto el valor de la velocidad característica está principalmente en función de ésta:

$$u_c = \frac{K\rho_w\omega_{\max}^2 z_0 r}{\mu_w}$$

En la **Fig. 11** se muestra el comportamiento de la velocidad característica respecto al cambio de la permeabilidad, notando la dependencia lineal que tiene la velocidad característica respecto a la permeabilidad absoluta del sistema. Los datos utilizados son los siguientes:

$$K_{ini} = 1[mD] = 9.8632 \times 10^{-16}[m^2]$$

$$K_n = 530[mD] = 4.9346 \times 10^{-13}[m^2]$$

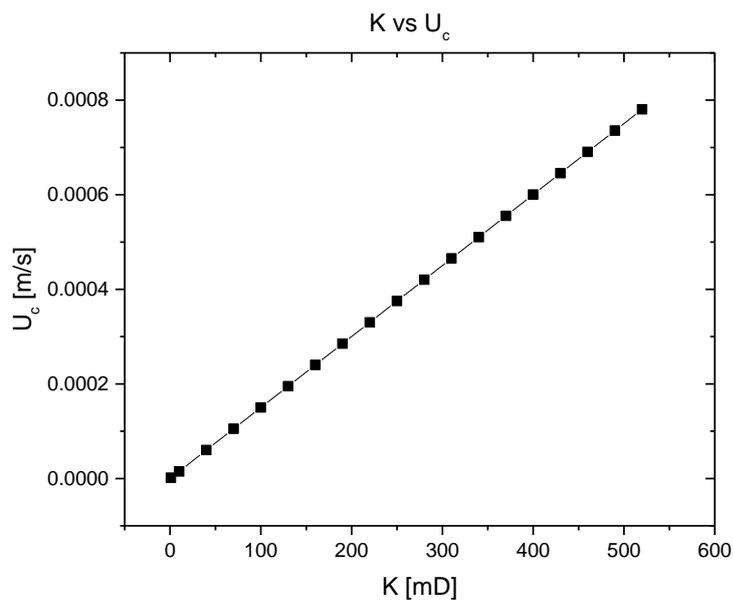
$$\bar{\rho}_w = 1000 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

$$\bar{\omega}_{\max} = 130 \left[ \frac{rev}{min} \right]$$

$$z_0 = 0.30[m]$$

$$r = 3[m]$$

$$\bar{\mu}_w = 0.01[Poise]$$



**Fig. 11**—Análisis del comportamiento de  $u_c$  contra los cambios de permeabilidad.

**b) Análisis del orden de magnitud para la velocidad de Darcy en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ .**

Retomando las expresiones para las velocidades de Darcy escritas en el Capítulo 2 donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las velocidades en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente y considerando  $K_x=K_y=K_z=K$ :

$$\bar{u}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right)$$

$$\bar{v}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\bar{w}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right)$$

$$\bar{u}_o = K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right)$$

$$\bar{v}_o = K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\bar{w}_o = K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right)$$

Se nota que para  $v$  no se escriben los términos de potencial de flujo debidos a la fuerza centrífuga y a la gravedad porque no intervienen para esa dirección y además, la presión de agua y aceite se considera constante, entonces:

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\bar{v}_f = K \frac{k_f}{\bar{\mu}_f} \left( \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\bar{v}_f = 0$$

Por lo tanto las ecuaciones de velocidad finales para el agua son:

$$\bar{u}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right)$$

$$\bar{w}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right)$$

y para el aceite son:

$$\begin{aligned}\bar{u}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \\ \bar{w}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right)\end{aligned}$$

Luego para analizar el orden de magnitud de cada grupo de variables basta con trabajar con las velocidades para cualquiera de las dos fases debido a la similitud de las expresiones, en este caso se trabaja con las velocidades para el agua. Además sabemos que:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_w &= 1 \\ c_\gamma &= \cos \gamma, s_\gamma = \sin \gamma\end{aligned}$$

entonces las ecuaciones a analizar son:

$$\begin{aligned}\bar{u}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - g c_\gamma \right) \\ \bar{w}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - g s_\gamma \right)\end{aligned}$$

Para el análisis se reescriben las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{u}_w &= A \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - B_c - g_c \right) \\ \bar{w}_w &= A \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - B_s - g_s \right)\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}A &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \\ B_c &= \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma, B_s = \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma \\ g_c &= g c_\gamma, g_s = g s_\gamma\end{aligned}$$

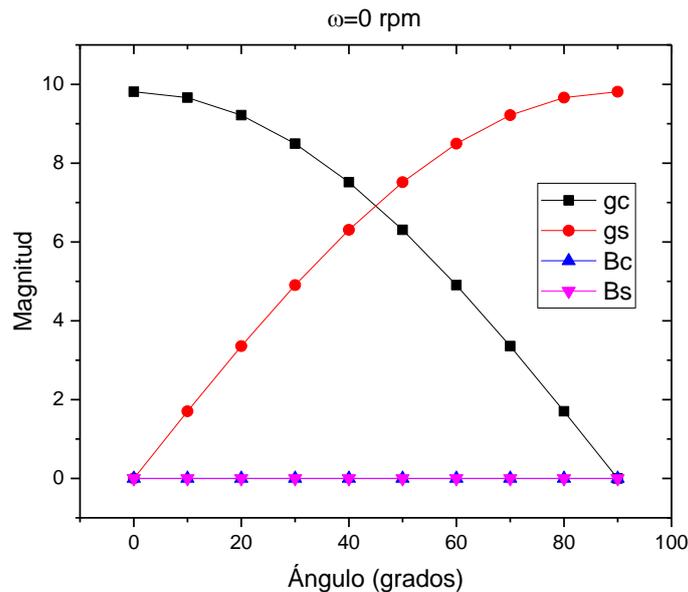
Y como la intención de esta sección no es solucionar la ecuación sino simplemente analizar el tamaño de cada elemento que la conforma, es posible simplificar aún más las expresiones para cada velocidad teniendo en cuenta que  $A$  es un valor constante para ambas expresiones y sólo funciona como un escalar que incrementa o disminuye el valor de los otros tres términos, entonces:

$$\bar{u}_w = \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - B_c - g_c$$

$$\bar{w}_w = \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - B_s - g_s$$

La parte diferencial es la que se resolverá numéricamente, representando los cambios de presión respecto a las direcciones  $x$  y  $z$ , ambas presiones se reescribirán en función de la presión capilar más adelante para poder dar solución al modelo. Esta es la razón por la que el análisis de orden de magnitud sólo se realiza para los términos  $B_c$ ,  $B_s$ ,  $g_c$  y  $g_s$  desde un tiempo 0 donde  $\gamma$  será igual a  $0^\circ$  hasta un tiempo máximo igual a 1 donde  $\gamma = 90^\circ$ , a diferentes velocidades de rotación y considerando el cambio de posición de la canastilla respecto al ángulo  $\gamma$ .

Se considera un radio  $r = 3$  m y la longitud de la muestra  $z = 0.3$  m con un cambio constante de  $10^\circ$  en el ángulo  $\gamma$  hasta llegar a  $90^\circ$  (**Fig.8**). A continuación se muestran los resultados:



**Fig. 12**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=0$ .

Tomando en cuenta que los términos  $B_s$  y  $B_c$  corresponden a la presión debida al giro, y que  $g_c$  y  $g_s$  son los términos asociados a la fuerza de gravedad, en la **Fig. 12** se observa que cuando el sistema se encuentra estático, el factor que gobierna el desplazamiento de los fluidos es la gravedad, lo cual resulta evidente porque al no estar girando no hay influencia del término relacionado a la fuerza centrífuga.

$$A = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w}$$

$$B_c = \bar{\omega}^2(\bar{r} - \bar{z})c_\gamma, B_s = \bar{\omega}^2(\bar{r} - \bar{z})s_\gamma$$

$$g_c = gc_\gamma, g_s = gs_\gamma$$

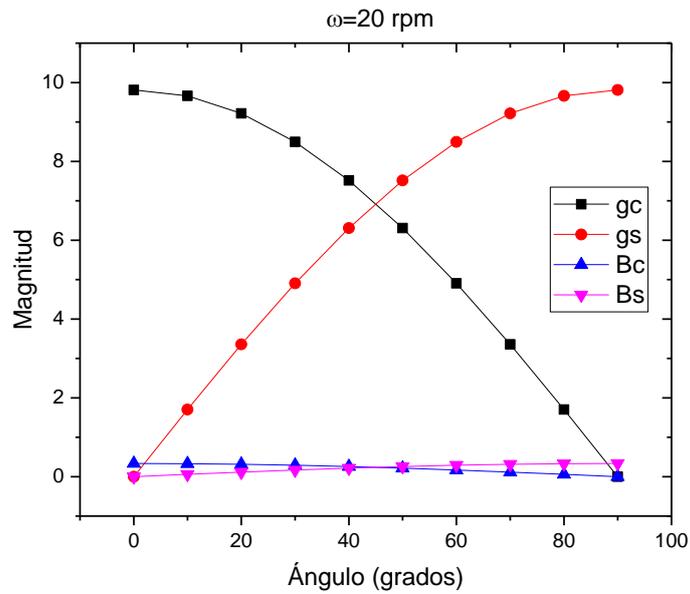


Fig. 13—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=20$  rpm.

En la Fig. 13 se nota la influencia que empieza a tener la fuerza centrífuga a una velocidad de rotación de 20 rpm, pero aún mucho menor que el efecto provocado por la gravedad.

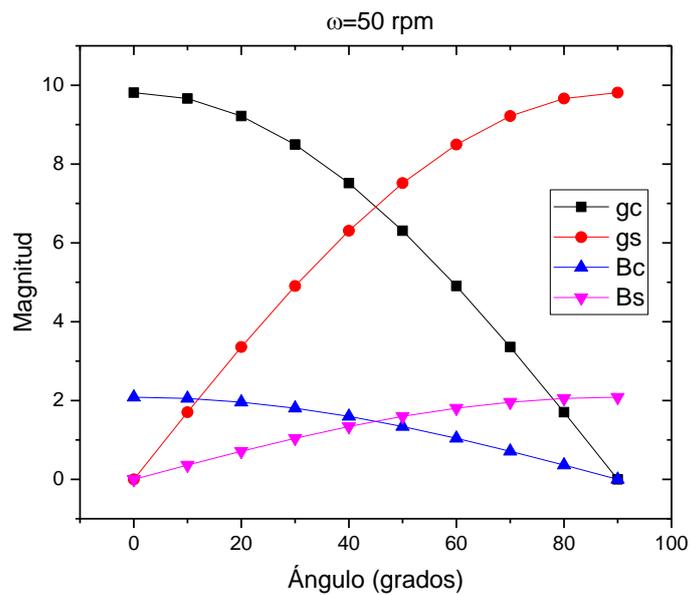
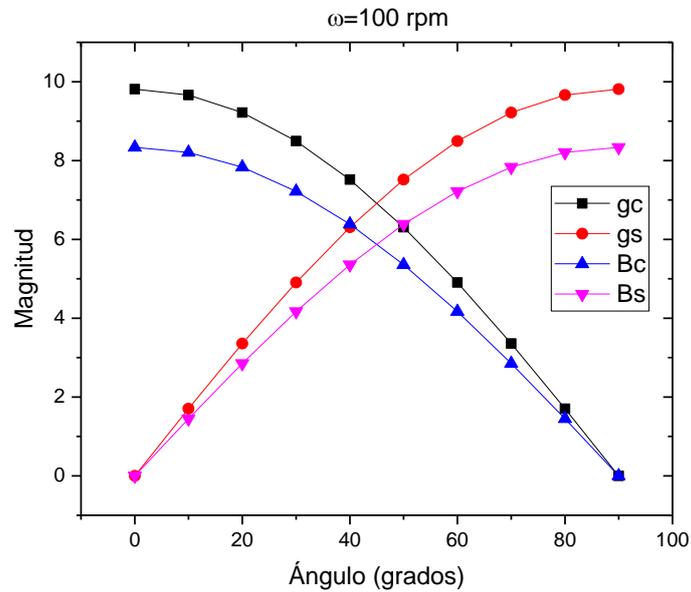


Fig. 14—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=50$  rpm.

Para este caso el término correspondiente a la fuerza centrífuga ya casi alcanza la mitad de la velocidad máxima a la que se puede llegar, sin embargo la magnitud de su efecto aún no se acerca a la magnitud del efecto provocado por la gravedad.



**Fig. 15**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=100$  rpm.

En la **Fig. 15** se observa que para una velocidad igual a 100 rpm los efectos provocados por la fuerza centrífuga ya se empiezan a acercar a los efectos causados por la fuerza de gravedad, sin embargo, es hasta una velocidad de 109 rpm cuando los efectos entre ambas fuerzas se igualan (**Fig. 16**).

En la **Fig. 17** se muestra la magnitud del término relacionado a la fuerza centrífuga a una velocidad máxima igual a 130 rpm en donde los efectos provocados por ésta, ya vencen a los efectos provocados por la gravedad.

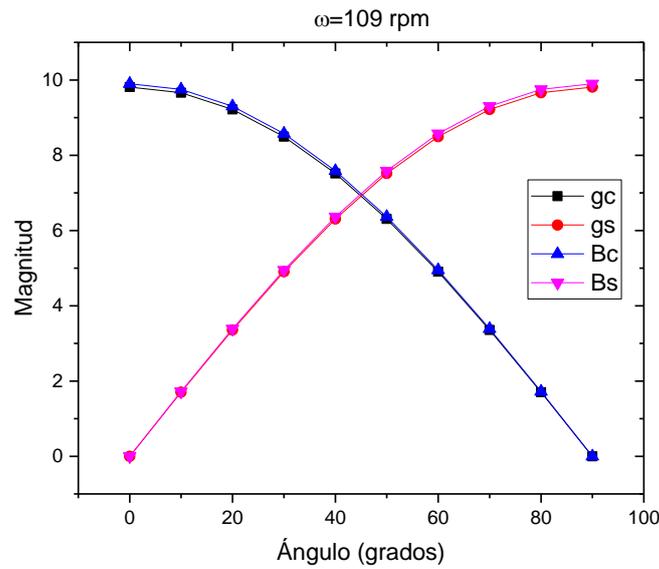


Fig. 16—Momento en que los efectos de la gravedad y de la centrífuga son casi iguales.

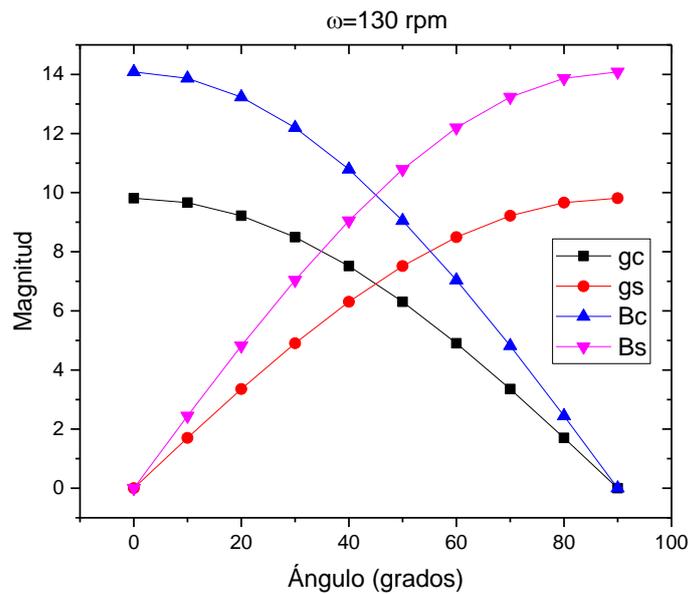


Fig. 17—Análisis de orden de magnitud para ω=130 rpm.

### 3.3. Modelo matemático

Como se explicó anteriormente (apartado 3.2) el término de la velocidad en  $y$ , se simplifica derivado del análisis de orden de magnitud, ya que el efecto provocado en la muestra por la velocidad en esta dirección es despreciable comparado con los efectos provocados en las direcciones  $x$  y  $z$ . Asimismo se nota que los términos correspondientes al efecto de la gravedad en la velocidad de Darcy no pueden despreciarse para el sistema, confirmando la recomendación

hecha por Bauguet en el 2012 donde mencionó que es necesario considerar los efectos y procesos ocurridos en los primeros tiempos de rotación, así como Van Den Berg (2009) quien dijo que para obtener resultados más fieles a la realidad sería necesario considerar un flujo, por lo menos, en dos dimensiones.

Para el modelado del problema planteado en esta tesis, se realiza una combinación de ecuaciones adaptándolas a las fases agua y aceite, partiendo de la ecuación de continuidad, la cual conjunta a la saturación de cada fase y a las velocidades de Darcy para cada dirección, las cuales se muestran a continuación:

$$\frac{\partial \phi S_w \bar{\rho}_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{u}_w}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{w}_w}{\partial \bar{z}} = 0 \dots (3-1)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \bar{\rho}_o}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{u}_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{w}_o}{\partial \bar{z}} = 0 \dots (3-2)$$

Luego se sustituyen las velocidades de Darcy en las ecuaciones 3-1 y 3-2 donde:

$$\bar{u}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right)$$

$$\bar{w}_w = K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right)$$

$$\bar{u}_o = K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right)$$

$$\bar{w}_o = K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right)$$

Durante el tratamiento de las ecuaciones se utilizan también las que se definen como auxiliares en el apartado 2.4 y se lleva a cabo la adimensionalización de las variables con la intención de simplificar el modelo general sin perder de vista la naturaleza del problema, y llegar a la forma más sencilla del modelo, de tal manera que se obtengan las permeabilidades y la presión capilar (propiedades prioritarias en el desarrollo de este trabajo) así como el cambio en la saturación. El desarrollo del modelo puede verse a detalle en el **Apéndice A**, en donde se obtienen las ecuaciones 3-3 y 3-4 como modelo final.

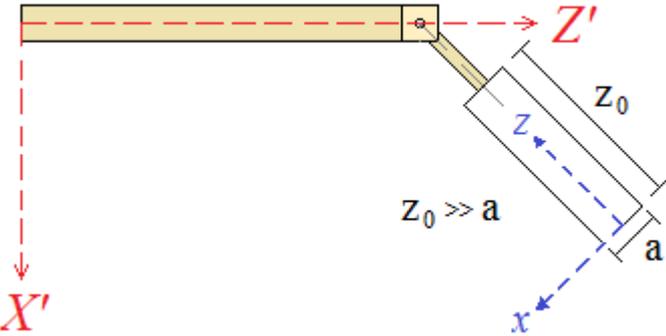
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial P_o}{\partial x} \left[ k_w + \frac{k_o}{\mu_o} \right] - k_w \left[ \frac{\partial P_c}{\partial x} + \omega^2 \left( 1 - \frac{z}{r} \right) c_\gamma + \alpha c_\gamma \right] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o} \left[ \omega^2 \left( 1 - \frac{z}{r} \right) c_\gamma + \alpha c_\gamma \right] \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial P_o}{\partial z} \left[ k_w + \frac{k_o}{\mu_o} \right] - k_w \left[ \frac{\partial P_c}{\partial z} + \omega^2 \left( 1 - \frac{z}{r} \right) s_\gamma + \alpha s_\gamma \right] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o} \left[ \omega^2 \left( 1 - \frac{z}{r} \right) s_\gamma + \alpha s_\gamma \right] \right] = 0 \dots \dots \dots (3-3)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_w \left( \frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} - \omega^2 \left( 1 - \frac{z}{r} \right) c_\gamma - \alpha c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_w \left( \frac{\partial P_o}{\partial z} - \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - \omega^2 \left( 1 - \frac{z}{r} \right) s_\gamma - \alpha s_\gamma \right) \right] = 0 \dots \dots \dots (3-4)$$

En ambas ecuaciones se encuentran las permeabilidades relativas para cada fase, y una relación de movilidad, además, se expresa el cambio en la saturación de agua dentro de la muestra (que está directamente relacionado con el volumen de aceite extraído), así como los cambios de la presión del aceite, la presión capilar en las direcciones  $x$  y  $z$ , la velocidad de rotación y una porosidad constante.

Las partes a resolver para el modelo son las correspondientes a las derivadas, es decir; presiones y saturación de agua.

Para este trabajo se idealiza el análisis de un núcleo tal que su longitud  $z_0$  es mucho mayor que su longitud en los ejes  $x$  o  $y$ . Esto tiene como consecuencia que las variaciones en  $x$  o  $y$  sean muy pequeñas comparadas con las variaciones en  $z$ .



**Fig. 18**—Representación gráfica del núcleo y la diferencia de magnitudes ente su longitud y el diámetro visto desde el plano  $xz$ . Fuente: Elaboración propia.

En el siguiente capítulo se resuelven las ecuaciones y se explica el método numérico que se utiliza para tal efecto.

## Capítulo 4. Método numérico

Un evento natural puede describirse con ayuda de las leyes de la Física y de herramientas matemáticas a través de ecuaciones que se generan a partir de suposiciones referentes al funcionamiento de tal evento, y deben resolverse con ayuda de métodos numéricos y una computadora para evaluar el modelo matemático y así estimar las características del proceso. Los métodos numéricos proporcionan soluciones aproximadas a los modelos matemáticos, y existe una gran variedad de ellos, con los cuales se puede resolver desde una derivada hasta sistemas de miles de ecuaciones.

En este trabajo se utilizó el *método del elemento finito* para dar solución al modelo matemático con el código generado por el Dr. José Joaquín Lizardi del Ángel\* en el software libre *FreeFem++*. En este capítulo se da una breve descripción del método numérico y del software, con el fin de mostrar la filosofía del método y del programa. También se establecieron los datos iniciales y las condiciones de frontera utilizadas para la simulación del proceso.

### 4.1. Datos iniciales y de frontera

Antes de explicar en qué consiste el método del elemento finito es necesario recordar que para programar un proceso físico se requiere establecer condiciones en las fronteras del volumen de control y datos de entrada o iniciales. Para este trabajo los datos iniciales se muestran en la **Tabla 3**. Algunos de los valores enlistados como las saturaciones irreducibles o la porosidad, son constantes por definición; las propiedades de los fluidos de densidad y viscosidad también lo son, ya que no intervienen transferencias de calor en el proceso. En la Tabla 3 se enlistan todas las propiedades relevantes para el modelo con la intención de tener disponible la información de forma sintetizada. Por último vale la pena aclarar que todas estas propiedades se utilizaron sólo para comprobar que el modelo generado es correcto, sin embargo, pueden ser manipuladas en el código para cualquier otro caso.

---

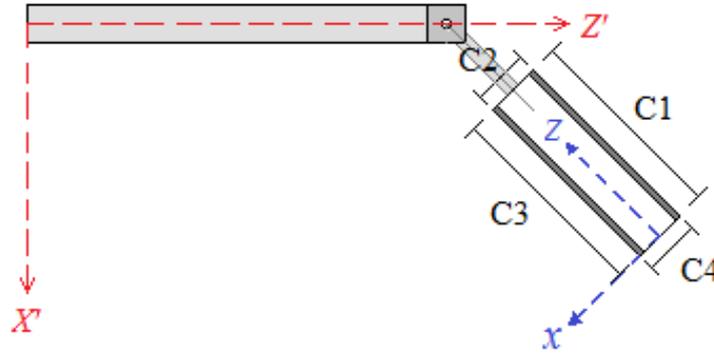
\* No publicado aún, por seguir en proceso de validación, por lo cual no se coloca referencia formal.

**Tabla 3**—Datos iniciales para comenzar a correr el programa.

Propiedad	Símbolo en el código	Valor	Unidades
Saturación de agua irreducible	srw	0.1	[-]
Saturación de aceite residual	sro	0.2	[-]
Viscosidad del agua	viscw	0.001	[Pa*s]
Viscosidad del aceite	visco	0.005	[Pa*s]
Porosidad	phi	0.4	[-]
Densidad del agua	rhow	1000	[kg/m <sup>3</sup> ]
Densidad del aceite	rhoo	800	[kg/m <sup>3</sup> ]
Radio total del brazo de la centrífuga	lon	3.5	[m]
Longitud de la muestra	size	0.15	[m]
Permeabilidad absoluta	permea	1x10 <sup>-12</sup>	[m <sup>2</sup> ]
Presión de umbral	pu	250000	[Pa]

Para las permeabilidades relativas y presiones capilares se utilizaron las relaciones de Brooks & Corey modificadas (ver Capítulo 2) utilizando los siguientes valores:  $n_w=3$ ,  $n_o=2$ ,  $\vartheta=2$ .

Por otro lado, para las condiciones de frontera se establecieron valores constantes de saturación de agua en dos de las cuatro caras del volumen de control (**Fig. 19**), donde las caras C1 y C3 siempre están totalmente cerradas, mientras que la cara C4 tiene una saturación de agua constante de 0.8, y para la cara C2 se establece una  $S_{rw}=0.1$  y una  $S_{wi}=0.3$ .



**Fig. 19**—Representación gráfica para las fronteras del sistema.

Dicho de otro modo, para C4 se tienen las siguientes condiciones:

$$S_w|_{z=0} = 1 - S_{ro}$$

$$\bar{P}_o|_{z=0} = \rho_w \omega^2 r_{\max}^2$$

Y para C2:

$$S_w|_{z=1} = S_{rw}$$

$$\bar{P}_o|_{z=1} = \rho_w \omega^2 (r_{\max} - z_0)^2$$

Mientras que para C1 se tiene:

$$S_w|_{x=-\frac{a}{2}} = 1 - S_{ro}$$

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{a}{2}} = 0$$

Y para C3:

$$\frac{\partial S_w}{\partial x} \Big|_{x=\frac{a}{2}} = 1 - S_{ro}$$

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} \Big|_{x=\frac{a}{2}} = 0$$

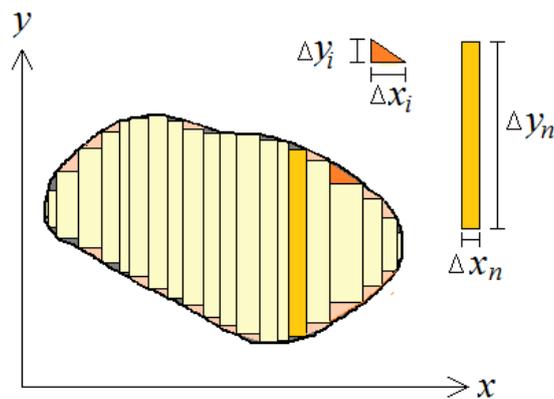
La programación del modelo se desarrolló en el software *FreeFem++* cuya sintaxis se basa en el lenguaje *C*, utilizando el método del elemento finito por representar de una forma más preci-

sa a la Física del problema dentro del volumen de control en comparación con otros métodos, por ejemplo el método de diferencias finitas.

#### 4.2. Método del elemento finito

Para algunos métodos numéricos resulta complicado trabajar con dominios geométricos complejos, a diferencia del método del elemento finito que permite dividir el dominio principal en subdominios más pequeños llamados “elementos finitos” (**Fig. 20**), los cuales son generalmente formas geométricas regulares como triángulos, rectángulos, o bien, una combinación de ambos.

La selección de cada elemento y la discretización del dominio principal dependen de la geometría, de la exactitud que se quiere tener en la solución del problema, y de la capacidad computacional con la que se cuenta, ya que para cada elemento finito se resuelve una ecuación propia de ese subdominio, contemplando sus condiciones de frontera y de comunicación con sus elementos contiguos, permitiendo así trabajar con medios heterogéneos.

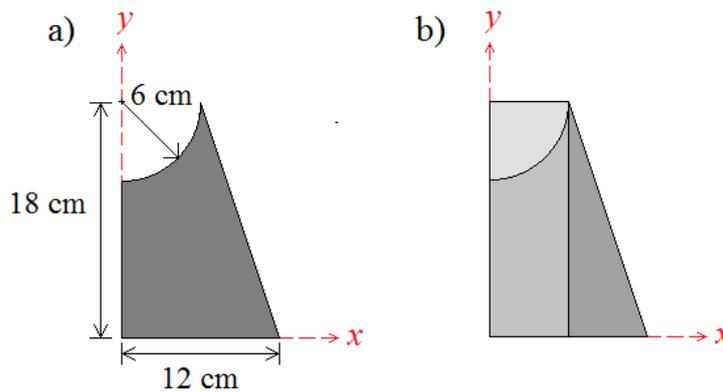


**Fig. 20**—Subdivisión de un dominio en elementos finitos.

Los tres pasos fundamentales del elemento finito son (Salazar 1999):

- 1) Dividir el total en partes para representar la geometría y solución del problema.
- 2) Buscar una aproximación a la solución como una combinación de valores nodales y funciones aproximación sobre cada parte.
- 3) Generar las relaciones algebraicas entre los valores nodales de la solución para cada parte y ensamblar las partes o pequeñas soluciones para obtener la solución del total.

Por ejemplo, para explicar la forma en la que trabaja este método, a continuación se describe la determinación del centroide de un cuerpo asimétrico (dominio). Primero, se divide en la menor cantidad posible de figuras geométricas regulares (subdominios o elementos finitos) cuyas coordenadas del centroide resultan más fáciles de hallar. Después se obtienen los momentos estáticos de cada parte respecto a los ejes coordenados (ecuación por elemento) y al final se divide la suma de los momentos estáticos entre la longitud, área o volumen del cuerpo en estudio (ensamble para la solución total). La **Fig. 21** ejemplifica lo descrito anteriormente.



**Fig. 21**—Descomposición de una figura irregular en formas regulares para obtener las coordenadas de su centroide. Ocáriz 2016.

El área de la figura irregular se divide en tres superficies: un rectángulo de 18x6 cm, un triángulo de 18 cm de altura por 6 de base, y un cuadrante de círculo de 6 cm de radio. Luego se obtienen las coordenadas en  $x$  y en  $y$  de cada uno de sus centroides y, por último, el promedio de los tres para obtener las coordenadas de la placa completa.

Parte	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i A_i$	$y_i A_i$
	108	3	9	324	972
	54	8	6	432	324
	-28.3	2.55	15.45	-72	-437
	133.7			684	859

$$\bar{x} = \frac{B_y^A}{A} = \frac{684}{133.7} = 5.12 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{B_x^A}{A} = \frac{859}{133.7} = 6.42$$

$$\boxed{G(5.12, 6.42)[cm]}$$

Con el ejemplo anterior (Ocáriz 2016), se explica de una forma más ilustrativa el funcionamiento del método, sin embargo, es importante señalar que las ecuaciones a resolver son generalmente ecuaciones diferenciales, las cuales muy difícilmente pueden aislarse para cada elemento ya que son afectadas por las condiciones iniciales y de frontera. Asimismo, la exactitud y convergencia de la solución del elemento finito dependen de la ecuación diferencial, su forma integral y el elemento usado\*.

Debido a lo anterior se recomienda, al igual que en otros métodos, utilizar el menor número posible de ecuaciones, ya que entre más divisiones se realicen al dominio se tendrán que resolver más ecuaciones y se ocupará más tiempo computacional.

En resumen, en el método del elemento finito un dominio dado es dividido en subdominios, llamados “elementos finitos”, para los cuales se desarrolla una solución aproximada del problema de forma “individual”. La subdivisión del dominio tiene dos ventajas principales:

- Permite una representación exacta de geometría compleja y la inclusión de medios heterogéneos.
- Da lugar a una representación de solución exacta dentro de cada elemento para conocer efectos locales.

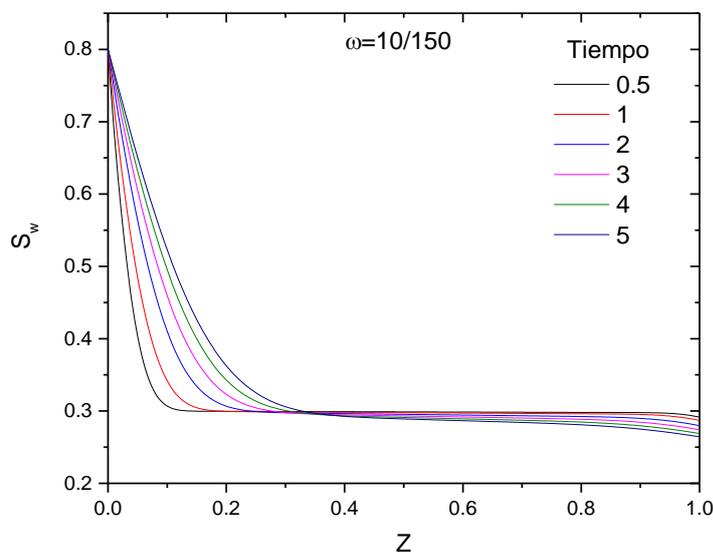
---

\* Exactitud se refiere a la diferencia entre la solución exacta y la obtenida por el método numérico, mientras que la convergencia hace referencia a la exactitud de la solución conforme se incrementen el número de elementos en el que se subdivide el dominio).

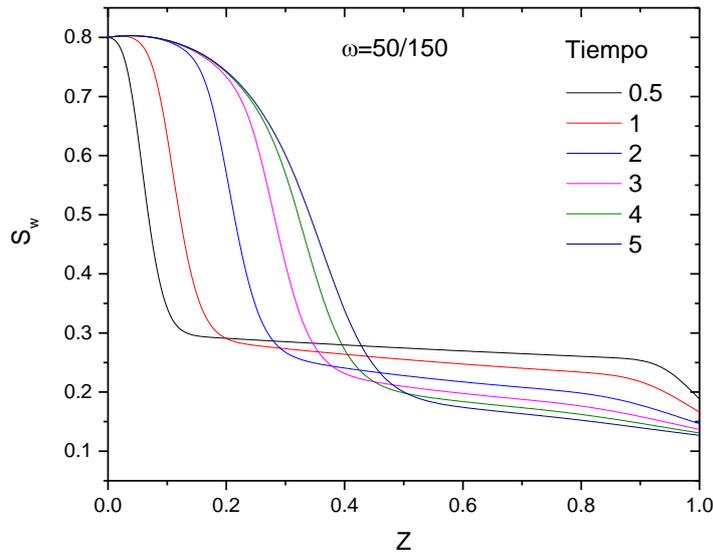
## Capítulo 5. Resultados y discusión

El modelo se probó para 6 velocidades diferentes: 1, 10, 20, 50, 100 y 150 rpm. En este capítulo se muestran las gráficas de los resultados obtenidos para la velocidad inicial, final, y aquellas velocidades intermedias que mostraron cambios significativos, a diferentes pasos de tiempo, capturando en cada una datos diferentes como el cambio en la saturación de la muestra, el momento en que se vence a la presión capilar, el comportamiento de las permeabilidades relativas para cada fase y el comportamiento de la presión capilar.

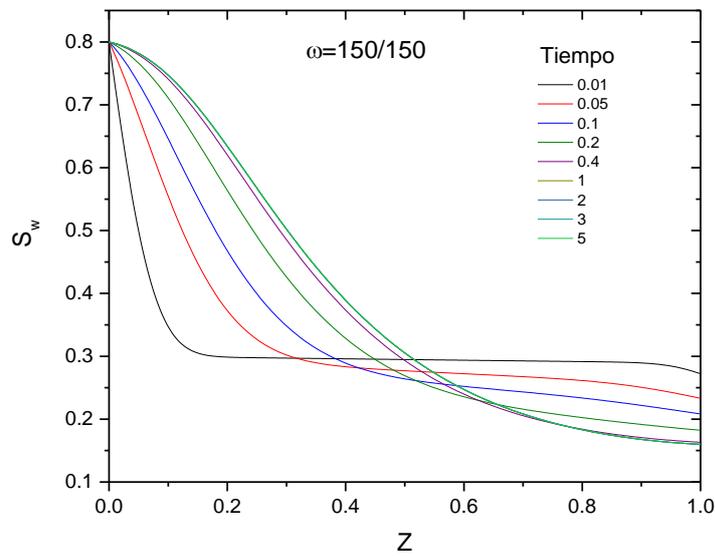
Es importante resaltar que el trato del modelo siempre fue adimensional, por lo que la longitud de la muestra ( $z$ ) mostrada en las figuras (22 –28) va de 0 a 1, donde 1 corresponde a la longitud máxima. Para la velocidad se muestran valores escritos como fracciones, recordando que la velocidad máxima fue de 150 rpm, donde el 1 adimensional corresponderá al valor 150/150.



**Fig. 22**—Desplazamiento de agua a diferentes tiempos para  $\omega=10$ .



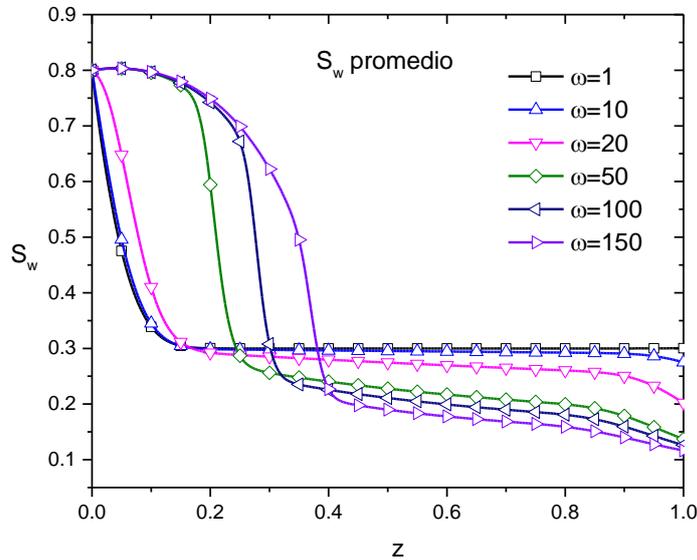
**Fig. 23**—Desplazamiento de agua a diferentes tiempos para  $\omega=50$ .



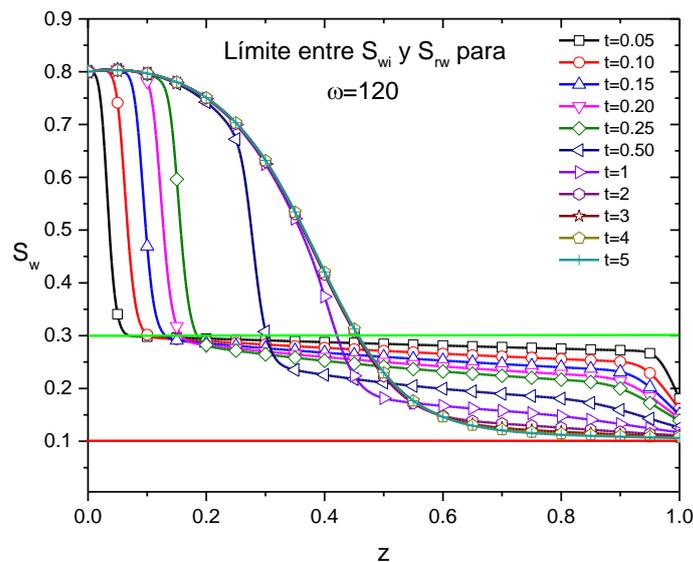
**Fig. 24**—Desplazamiento de agua a diferentes tiempos para  $\omega=150$ .

De la **Fig. 22** a la **24** se observa el comportamiento de la saturación de agua en la muestra conforme se incrementa la velocidad y el tiempo de rotación. Nótese que para  $\omega=10$  el avance del agua es lento comparado con el avance en  $\omega=150$  en donde en un tiempo igual a 0.05 ya se alcanzó el avance al que se llegó con  $\omega=10$  en un tiempo igual a 5. Esto corrobora lo esperado: a mayor velocidad, mayor desplazamiento de fluidos.

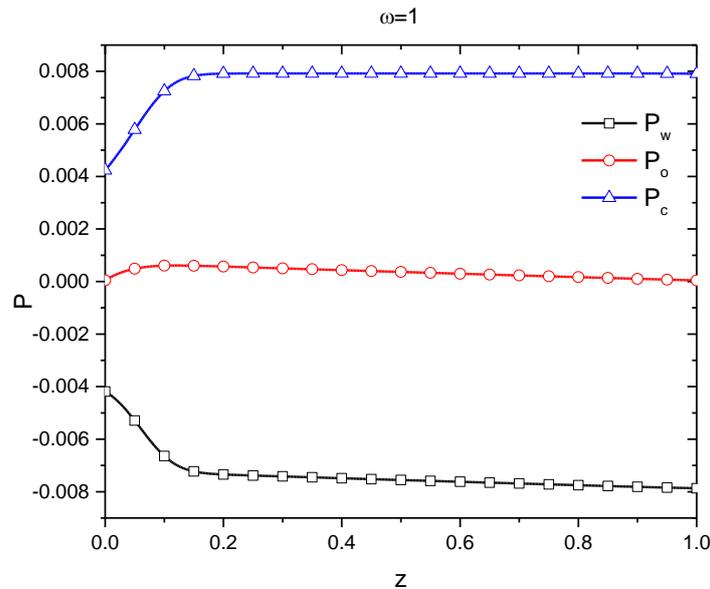
Ahora bien, para ver de una manera más clara lo anterior, se generó la gráfica siguiente que muestra las saturaciones promedio para cada velocidad de rotación desde  $\omega=1$  hasta  $\omega=150$ :



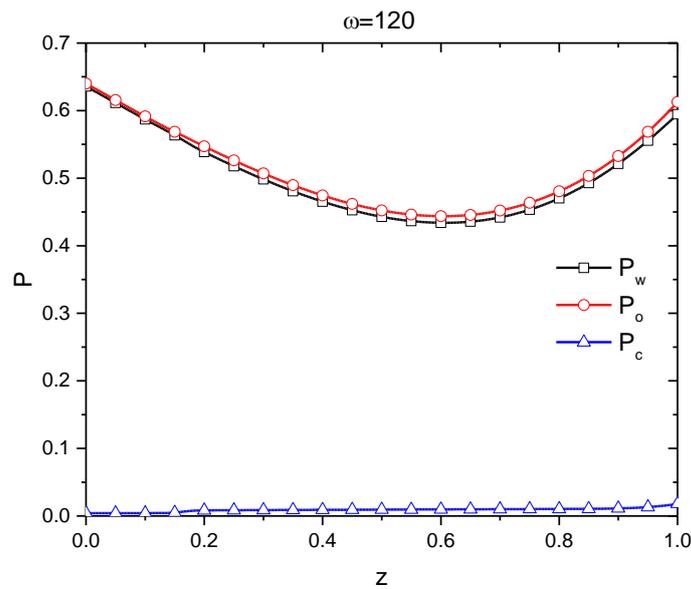
En cada una de las gráficas anteriores se puede notar una tendencia de la saturación hacia su valor residual, lo cual corrobora nuevamente que el modelo está representando de forma correcta la Física del problema, en la **Fig. 26** se muestran la  $S_{wi}$  (cota verde en  $S_w$ ) y la  $S_{rw}$  (cota roja en  $S_w$ ) para una  $\omega=120$  con la intención de ilustrar de mejor forma lo explicado anteriormente:



En las **Fig. 27** y **28** se muestra el comportamiento de la  $P_c$  en los tiempos iniciales y finales de la prueba. Para una velocidad  $\omega=1$  la  $P_c$  es mayor que  $P_o$  y  $P_w$ , por lo cual es esta quien gobierna el desplazamiento de los fluidos al inicio; pero para una velocidad  $\omega=120$  la  $P_c$  queda ya muy por debajo de  $P_o$  y  $P_w$ , mostrando de esta manera (a partir de la definición de la presión capilar) que las presiones del agua y del aceite durante la prueba son grandes pero casi iguales una y otra, quedando gobernado el movimiento de los fluidos por la presión derivada de los efectos centrífugos.

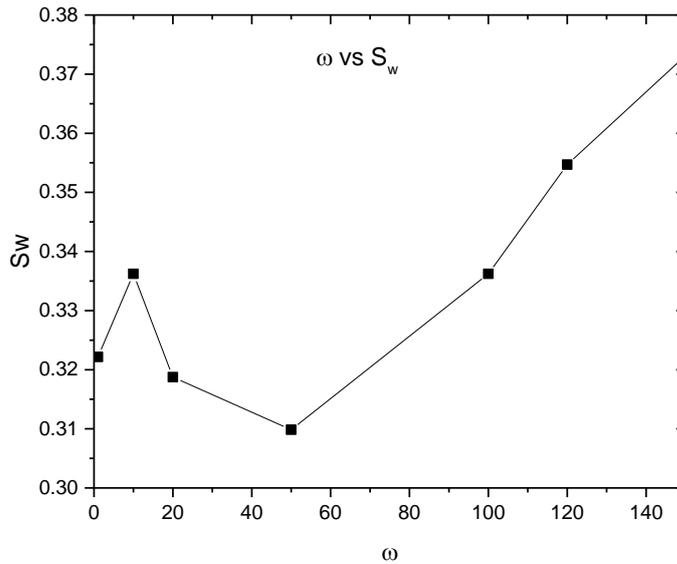


**Fig. 27**—  $P_c$  vs  $P_o$  y  $P_w$  para  $\omega=1$ .

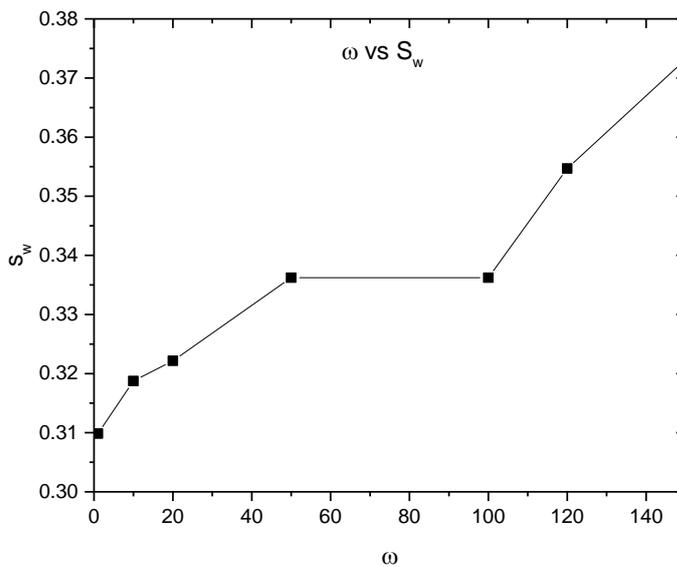


**Fig. 28**—  $P_c$  vs  $P_o$  y  $P_w$  para  $\omega=120$ .

Por otro lado, se obtuvo una primera relación de velocidad vs saturación, la cual se muestra en la **Fig. 29**, sin embargo el comportamiento que se espera tener es el mostrado en la **Fig. 30** porque para cada velocidad se espera alcanzar un tiempo de equilibrio en el que para continuar extrayendo el fluido, es necesario aumentar la velocidad, mostrando un comportamiento escalonado.



**Fig. 29**—Relación  $\omega$  vs  $S_w$  con base en los promedios de las saturaciones.



**Fig. 30**—Comportamiento de la relación  $\omega$  vs  $S_w$  esperado.

## Conclusiones

1. El modelo generado representa de forma adecuada la Física del problema para flujo bifásico agua-aceite contenido en un medio poroso sometido a rotación.
2. El modelo es general para cualquier problema que implique centrifugación de medios porosos con flujo bifásico agua-aceite, y es computacionalmente acoplable para cualquier tipo de dimensiones (tamaños).
3. El modelo permite conocer el volumen de aceite extraído durante el proceso así como el tiempo que tardará en estabilizarse el flujo a diferentes velocidades.
4. No es necesario generar un modelo en tres dimensiones para este problema ya que, debido a las dimensiones tanto de la centrífuga como de la muestra, los efectos ocurridos en la dirección de rotación (“y” para este caso) no son areales ni volumétricos, sino unidimensionales, es decir, para los efectos en y el volumen de control puede ser considerado como una partícula y no como un cuerpo.
5. Para estudios analíticos si es posible considerar el cambio en el ángulo de la canastilla hasta su acoplamiento, sin embargo, para efectos prácticos esto no será necesario tanto por la rapidez con la que el brazo alcanzará su estabilización, como por la relación de dimensiones *radio de la centrífuga-longitud de la muestra*.

## Recomendaciones

Para la continuación del proyecto se sugiere:

1. Establecer las condiciones de frontera de tal forma que permitan tomar en cuenta la entrada de agua por todos los lados de la muestra.
2. Realizar el proceso inverso para obtener datos de  $K_r$  y  $P_c$  a partir del volumen de aceite recuperado.
3. Automatizar los cambios de velocidad una vez alcanzada la estabilización de flujo.
4. Optimizar la máxima recuperación de fluido del sistema.

## Apéndice A. Desarrollo del modelo matemático.

Partiendo de la ecuación de continuidad donde la masa del sistema se conserva y el medio poroso tiene una porosidad constante, y considerando que la permeabilidad absoluta  $K=K_x=K_y=K_z$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi S_w \bar{\rho}_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{u}_w}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{v}_w}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{w}_w}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{\partial \phi S_o \bar{\rho}_o}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{u}_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{v}_o}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{w}_o}{\partial \bar{z}} &= 0\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\bar{u}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \\ \bar{v}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{y}} \right) \\ \bar{w}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \\ \bar{u}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \\ \bar{v}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{y}} \right) \\ \bar{w}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right)\end{aligned}$$

$$c_\gamma = \cos \gamma, s_\gamma = \sin \gamma$$

Se tienen como ecuaciones auxiliares las siguientes:

$$\begin{aligned}S_w + S_o &= 1 \\ \bar{P}_c &= \bar{P}_o - \bar{P}_w \\ u_c &= \frac{K \bar{\rho}_w \bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}}{\bar{\mu}_w} \\ S_e &= \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}}\end{aligned}$$

Se reescriben las velocidades en dos dimensiones derivado del análisis del orden de magnitud (ver 3.2b):

$$\begin{aligned}\bar{u}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \\ \bar{w}_w &= K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \\ \bar{u}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \\ \bar{w}_o &= K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right)\end{aligned}$$

Se reduce la ecuación de continuidad a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi S_w \bar{\rho}_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{u}_w}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w \bar{w}_w}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{\partial \phi S_o \bar{\rho}_o}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{u}_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o \bar{w}_o}{\partial \bar{z}} &= 0\end{aligned}$$

Se sustituyen los valores de  $u$  y  $w$  en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \phi S_w \bar{\rho}_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_w}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial \bar{\rho}_w}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] = 0 \dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \bar{\rho}_o}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_o}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial \bar{\rho}_o}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right) \right] = 0 \dots (2)$$

Ahora igualando  $S_o = 1 - S_w$  en la Ec. 2:

$$\frac{\partial \phi S_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] = 0 \dots (3)$$

$$- \frac{\partial \phi S_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right) \right] = 0 \dots (4)$$

Sumando las Ecs. 3 y 4:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right) \right] \\ &= 0 \dots \dots \dots (5)\end{aligned}$$

Agrupando términos y sustituyendo  $P_w = P_o - P_c$ :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial (\bar{P}_o - \bar{P}_c)}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial (\bar{P}_o - \bar{P}_c)}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right) \\ &= 0 \dots \dots \dots (5 - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_o g c_\gamma \right) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_o g s_\gamma \right) \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (5-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{x}} - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \bar{\rho}_w g c_\gamma + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \bar{\rho}_o g c_\gamma \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{z}} - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \bar{\rho}_w g s_\gamma + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \bar{\rho}_o g s_\gamma \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (5-3)
 \end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \right] \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left[ \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma + \bar{\rho}_w g c_\gamma \right] - K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} [\bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma + \bar{\rho}_o g c_\gamma] \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} + K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} \right] \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left[ \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{z}} + \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma + \bar{\rho}_w g s_\gamma \right] - K \frac{k_o}{\bar{\mu}_o} [\bar{\rho}_o \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma + \bar{\rho}_o g s_\gamma] \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

Se retoman los términos sin dimensiones para comenzar a adimensionalizar la ecuación:

$$\begin{aligned}
 u_w u_c &= \bar{u}_w, P_w (\rho_c \bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) l_c = \bar{P}_w, \frac{\tau z_0}{u_c} = \bar{t}, z_0 x = \bar{x}, z_0 z = \bar{z}, \\
 \rho_w &= \frac{\bar{\rho}_w}{\bar{\rho}_w} = 1, \alpha = \frac{g}{\bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}}, z_0 r = \bar{r}, \bar{\mu}_{wc} \mu_w = \bar{\mu}_w = 1, \mu_o \bar{\mu}_{wc} = \bar{\mu}_o, \\
 \bar{\rho}_w \rho_o &= \bar{\rho}_o, P_o (\rho_c \bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) z_0 = \bar{P}_o, \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 = \bar{\omega}^2, (\bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) \alpha = g
 \end{aligned}$$

Dividiendo entre K y sustituyendo términos en la Ec.6:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial z_0 x} \left[ \begin{aligned} & \left[ k_w + \frac{k_o}{\mu_o} \right] \frac{\partial P_o (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r)}{\partial z_0 x} \\ & - k_w \left[ \frac{\partial P_c (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r)}{\partial z_0 x} + \bar{\rho}_{wc} \rho_w \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 (z_0 r - z_0 z) c_\gamma + \bar{\rho}_{wc} \rho_w (\bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r) \alpha c_\gamma \right] \\ & - \frac{k_o}{\mu_o} \left[ \begin{aligned} & \bar{\rho}_{wc} \rho_o \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 (z_0 r - z_0 z) c_\gamma \\ & + \bar{\rho}_{wc} \rho_o (\bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r) \alpha c_\gamma \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z_0 z} \left[ \begin{aligned} & \left[ k_w + \frac{k_o}{\mu_o} \right] \frac{\partial P_o (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r)}{\partial z_0 z} \\ & - k_w \left[ \frac{\partial P_c (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r)}{\partial z_0 z} + \bar{\rho}_{wc} \rho_w \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 (z_0 r - z_0 z) s_\gamma + \bar{\rho}_{wc} \rho_w (\bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r) \alpha s_\gamma \right] \\ & - \frac{k_o}{\mu_o} \left[ \begin{aligned} & \bar{\rho}_{wc} \rho_o \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 (z_0 r - z_0 z) s_\gamma \\ & + \bar{\rho}_{wc} \rho_o (\bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r) \alpha s_\gamma \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (6-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{z_0 \partial x} \left[ \begin{aligned} & r \frac{\partial P_o}{\partial x} [(\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0) [k_w + \frac{k_o}{\mu_o}]] \\ & -k_w (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0) [r \frac{\partial P_c}{\partial x} + \rho_w \omega^2 (r-z) c_\gamma + \rho_w r a c_\gamma] \\ & - \frac{k_o (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0) \rho_o}{\mu_o} [\omega^2 (r-z) c_\gamma + r a c_\gamma] \end{aligned} \right] \\
 & + \frac{\partial}{z_0 \partial z} \left[ \begin{aligned} & [k_w + \frac{k_o}{\mu_o}] \frac{r \partial P_o (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0)}{\partial z} \\ & -k_w (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0) [r \frac{\partial P_c}{\partial z} + \rho_w \omega^2 (r-z) s_\gamma + \rho_w r a s_\gamma] \\ & - \frac{k_o (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0) \rho_o}{\mu_o} [\omega^2 (r-z) s_\gamma + r a s_\gamma] \end{aligned} \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (6-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0)}{z_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial P_o r}{\partial x} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}}] \\ & -k_w [ \frac{\partial P_c r}{\partial x} + \rho_w \omega^2 (r-z) c_\gamma + \rho_w r a c_\gamma ] \\ & - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}} [\omega^2 (r-z) c_\gamma + r a c_\gamma] \end{aligned} \right] \\
 & + \frac{(\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2 z_0)}{z_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial P_o r}{\partial z} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}}] \\ & -k_w [ \frac{\partial P_c r}{\partial z} + \rho_w \omega^2 (r-z) s_\gamma + \rho_w r a s_\gamma ] \\ & - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}} [\omega^2 (r-z) s_\gamma + r a s_\gamma] \end{aligned} \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (6-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial P_o r}{\partial x} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}}] - k_w [ \frac{\partial P_c r}{\partial x} + \rho_w \omega^2 (r-z) c_\gamma + \rho_w r a c_\gamma ] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}} [\omega^2 (r-z) c_\gamma + r a c_\gamma] \right] \\
 & + (\bar{\rho}_{wc} \bar{\omega}_{\max}^2) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial P_o r}{\partial z} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}}] - k_w [ \frac{\partial P_c r}{\partial z} + \rho_w \omega^2 (r-z) s_\gamma + \rho_w r a s_\gamma ] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o \bar{\mu}_{wc}} [\omega^2 (r-z) c_\gamma + r a s_\gamma] \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (6-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ r \frac{\partial P_o}{\partial x} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o}] - k_w [ r \frac{\partial P_c}{\partial x} + \omega^2 (r-z) c_\gamma + r a c_\gamma ] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o} [\omega^2 (r-z) c_\gamma + r a c_\gamma] \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ r \frac{\partial P_o}{\partial z} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o}] - k_w [ r \frac{\partial P_c}{\partial z} + \omega^2 (r-z) c_\gamma + r a s_\gamma ] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o} [\omega^2 (r-z) c_\gamma + r a s_\gamma] \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (6-5)
 \end{aligned}$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial P_o}{\partial x} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o}] - k_w [ \frac{\partial P_c}{\partial x} + \omega^2 (1 - \frac{z}{r}) c_\gamma + a c_\gamma ] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o} [\omega^2 (1 - \frac{z}{r}) c_\gamma + a c_\gamma] \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial P_o}{\partial z} [k_w + \frac{k_o}{\mu_o}] - k_w [ \frac{\partial P_c}{\partial z} + \omega^2 (1 - \frac{z}{r}) s_\gamma + a s_\gamma ] - \frac{k_o \rho_o}{\mu_o} [\omega^2 (1 - \frac{z}{r}) s_\gamma + a s_\gamma] \right] \\
 & = 0 \dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

Ahora para la saturación de agua se trabajará con la Ec. 1:

$$\frac{\partial \phi S_w \bar{\rho}_w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_w}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] + \frac{\partial \bar{\rho}_w}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] = 0$$

Simplificando la densidad y aplicando la igualdad  $P_w = P_o - P_c$ :

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) c_\gamma - \bar{\rho}_w g c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial \bar{P}_o}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{P}_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial \bar{z}} - \bar{\rho}_w \bar{\omega}^2 (\bar{r} - \bar{z}) s_\gamma - \bar{\rho}_w g s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8 - 1) \end{aligned}$$

Se sustituyen los términos dimensionales:

$$\begin{aligned} u_w u_c &= \bar{u}_w, P_w (\rho_c \bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) l_c = \bar{P}_w, \frac{\tau z_0}{u_c} = \bar{t}, z_0 x = \bar{x}, z_0 z = \bar{z}, \\ \rho_w &= \frac{\bar{\rho}_w}{\rho_w} = 1, \alpha = \frac{g}{\bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}}, z_0 r = \bar{r}, \bar{\mu}_{wc} \mu_w = \bar{\mu}_w = 1, \mu_o \bar{\mu}_{wc} = \bar{\mu}_o, \\ \bar{\rho}_w \rho_o &= \bar{\rho}_o, P_o (\rho_c \bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) z_0 = \bar{P}_o, \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 = \bar{\omega}^2, (\bar{\omega}_{\max}^2 \bar{r}_{\max}) \alpha = g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z_0 x} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o (\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r_{\max}) z_0}{\partial z_0 x} - \frac{\partial P_c (\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r_{\max}) z_0}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z_0 x} - \rho_w \bar{\rho}_w \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 (r_{\max} - z) c_\gamma - \bar{\rho}_w \rho_w (\bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r_{\max}) \alpha c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z_0 z} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o (\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r_{\max}) z_0}{\partial z_0 z} - \frac{\partial P_c (\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r_{\max}) z_0}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z_0 z} - \rho_w \bar{\rho}_w \omega^2 \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 (r_{\max} - z) s_\gamma - \bar{\rho}_w \rho_w (\bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r_{\max}) \alpha s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8 - 2) \end{aligned}$$

Factorizando términos semejantes:

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0}{1} \frac{\partial}{\partial z_0 x} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o (r_{\max}) z_0}{\partial z_0 x} - \frac{\partial P_c (r_{\max}) z_0}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z_0 x} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r_{\max} - z) c_\gamma - \bar{\rho}_w (r_{\max}) \alpha c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0}{1} \frac{\partial}{\partial z_0 z} \left[ K \frac{k_w}{\bar{\mu}_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o (r_{\max}) z_0}{\partial z_0 z} - \frac{\partial P_c (r_{\max}) z_0}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z_0 z} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r_{\max} - z) s_\gamma - \bar{\rho}_w (r_{\max}) \alpha s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8 - 3) \end{aligned}$$

Simplificando  $z_0$ :

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{k_w}{\mu_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o(r)}{\partial x} - \frac{\partial P_c(r)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r-z) c_\gamma - \bar{\rho}_w(r) \alpha c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2}{1} \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{k_w}{\mu_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o(r)}{\partial z} - \frac{\partial P_c(r)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r-z) s_\gamma - \bar{\rho}_w(r) \alpha s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8-4) \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor adimensional del tiempo:

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial \tau} + \frac{z_0 \rho_w \bar{\omega}_{\max}^2}{u_c} \frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{k_w}{\mu_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o(r)}{\partial x} - \frac{\partial P_c(r)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r-z) c_\gamma - \bar{\rho}_w(r) \alpha c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0}{u_c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{k_w}{\mu_w \bar{\mu}_w} \left( \frac{\partial P_o(r)}{\partial z} - \frac{\partial P_c(r)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r-z) s_\gamma - \bar{\rho}_w(r) \alpha s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8-5) \end{aligned}$$

Reemplazando  $u_c$ :

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_w \left( \frac{\partial P_o(r)}{\partial x} - \frac{\partial P_c(r)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r-z) c_\gamma - \bar{\rho}_w(r) \alpha c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\bar{\mu}_w \rho_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0}{\bar{\rho}_w \bar{\omega}_{\max}^2 z_0 r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_w \left( \frac{\partial P_o(r)}{\partial z} - \frac{\partial P_c(r)}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - \bar{\rho}_w \omega^2 (r-z) s_\gamma - \bar{\rho}_w(r) \alpha s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (8-6) \end{aligned}$$

Factorizando  $K$ , simplificando términos y sabiendo que la viscosidad del agua es igual a 1:

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial S_w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_w \left( \frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} - \omega^2 \left(1 - \frac{z}{r}\right) c_\gamma - \alpha c_\gamma \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_w \left( \frac{\partial P_o}{\partial z} - \frac{\partial P_c}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - \omega^2 \left(1 - \frac{z}{r}\right) s_\gamma - \alpha s_\gamma \right) \right] \\ & = 0 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

## Apéndice B. Comportamiento de las permeabilidades relativas.

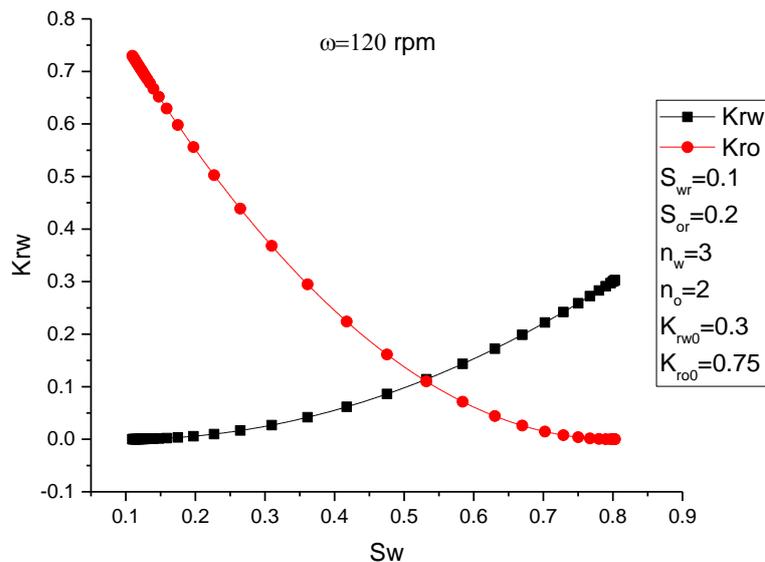
Para cada velocidad se generan también datos del comportamiento de las permeabilidades relativas respecto al cambio en la saturación utilizando las relaciones de Brooks & Corey modificadas, sin embargo los únicos datos que vale la pena graficar son aquellos generados a la velocidad máxima, que es en donde se llega a la saturación de agua irreducible.

A continuación se muestran las relaciones de Brooks & Corey modificadas y la gráfica para las permeabilidades relativas:

$$K_{rw} = K_{rw0} S_e^{n_w}$$

$$K_{ro} = K_{ro0} (1 - S_e)^{n_o}$$

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}}$$



**Fig. B-1**—Comportamiento de la  $k_r$  para  $\omega=120 \text{ rpm}$ .

Además de la  $S_{wr}$  es perceptible la facilidad que tiene el aceite para desplazarse ( $k_{ro}$ ) a altas velocidades de giro. Esta última gráfica corrobora también la certeza del funcionamiento del modelo, mostrando un comportamiento coherente de los fluidos respecto al cambio de velocidad.

## Anexo 1. Ecuaciones de conservación de masa para un sistema de flujo multifásico en un medio poroso (Ertekin 2001).

La ecuación de balance de materia para un componente  $c$  que pasa a través de un volumen de control durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$(m_i)_c - (m_o)_c + s_c = (m_a)_c \quad (\text{A.1})$$

donde el volumen de control se encuentra en coordenadas rectangulares (Fig. 9),  $(m_i)_c$ = masa total del componente  $c$  que entra y atraviesa la superficie ubicada en  $x-\Delta x/2$ ,  $y-\Delta y/2$ , y  $z-\Delta z/2$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ ;  $(m_o)_c$ = masa total del componente  $c$  que sale y atraviesa la superficie ubicada en  $x+\Delta x/2$ ,  $y+\Delta y/2$ , y  $z+\Delta z/2$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ ;  $s_c$ = cantidad total de la masa generada o perdida del componente  $c$  debido a una fuente o sumidero durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ ; y  $(m_a)_c$ = masa acumulada.

Para un componente  $c = o, w, fg$  y  $sg$ , estos términos pueden expresarse como:

$$(m_i)_c = \left[ (\dot{m}_{cx}A_x)_{x-\Delta x/2} + (\dot{m}_{cy}A_y)_{y-\Delta y/2} + (\dot{m}_{cz}A_z)_{z-\Delta z/2} \right] \Delta t \quad (\text{A.2})$$

$$(m_o)_c = \left[ (\dot{m}_{cx}A_x)_{x+\Delta x/2} + (\dot{m}_{cy}A_y)_{y+\Delta y/2} + (\dot{m}_{cz}A_z)_{z+\Delta z/2} \right] \Delta t \quad (\text{A.3})$$

$$s_c = (q_{mtc} + q_{mc})\Delta t \quad (\text{A.4})$$

$$(m_o)_c = V_b[(m_{vc})_{t+\Delta t} - (m_{vc})_t] \quad (\text{A.5})$$

donde  $\dot{m}_c$ = flujo másico;  $A$ = área perpendicular al flujo;  $m_{vc}$ = masa por unidad de volumen del medio poroso;  $q_{mtc}$ = gasto de transferencia de masa entre las fases, positivo si se genera y negativo si se pierde;  $q_{mc}$ = gasto aportado por la fuente o sumidero, positivo cuando se inyecta, negativo cuando se extrae; y  $V_b$ = volumen bruto del volumen de control.

Sustituyendo las Ecs. A.2 hasta A.5 en la Ec. A.1 y reordenando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & - \left[ -(\dot{m}_{cx}A_x)_{x-\Delta x/2} + (\dot{m}_{cx}A_x)_{x+\Delta x/2} \right] \Delta t \\
 & - \left[ -(\dot{m}_{cy}A_y)_{y-\Delta y/2} + (\dot{m}_{cy}A_y)_{y+\Delta y/2} \right] \Delta t \\
 & - \left[ -(\dot{m}_{cz}A_z)_{z-\Delta z/2} + (\dot{m}_{cz}A_z)_{z+\Delta z/2} \right] \Delta t + (q_{mt_c} + q_{m_c}) \Delta t \\
 & = V_b [(m_{v_c})_{t+\Delta t} - (m_{v_c})_t]
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

donde  $c=o, w, fg$  y  $sg$ .

Dividiendo la ecuación A.6 por  $\Delta t$  y multiplicando cada término del lado izquierdo de la ecuación por las unidades  $\Delta x/\Delta x$ ,  $\Delta y/\Delta y$  y  $\Delta z/\Delta z$ , respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{(\dot{m}_{cx}A_x)_{x+\Delta x/2} - (\dot{m}_{cx}A_x)_{x-\Delta x/2}}{\Delta x} \right] \Delta x \\
 & - \left[ \frac{(\dot{m}_{cy}A_y)_{y+\Delta y/2} - (\dot{m}_{cy}A_y)_{y-\Delta y/2}}{\Delta y} \right] \Delta y \\
 & - \left[ \frac{(\dot{m}_{cz}A_z)_{z+\Delta z/2} - (\dot{m}_{cz}A_z)_{z-\Delta z/2}}{\Delta z} \right] \Delta z + q_{mt_c} + q_{m_c} \\
 & = V_b \left[ \frac{(m_{v_c})_{t+\Delta t} - (m_{v_c})_t}{\Delta t} \right]
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Tomando el límite para los elementos entre corchetes cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, y sustituyendo según la definición de derivadas parciales, tenemos:

$$- \frac{\partial(\dot{m}_{cx}A_x)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial(\dot{m}_{cy}A_y)}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial(\dot{m}_{cz}A_z)}{\partial z} \Delta z = V_b \frac{\partial(m_{v_c})}{\partial t} - q_{mt_c} - q_{m_c} \tag{A.8}$$

donde  $c= o, w, fg$  y  $sg$ ;  $\Delta x \neq 0$ ,  $\Delta y \neq 0$ ,  $\Delta z \neq 0$ ; y  $V_b \neq 0$ .

La expresión anterior es útil cuando el área de flujo va cambiando a lo largo del volumen de control. Cuando se tiene un volumen de control con grosor uniforme, es decir, que ninguna de las áreas por donde pasa el flujo cambia de magnitud en cada una de las direcciones, se asume entonces que  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  son independientes de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y la expresión A.8 puede simplificarse de la siguiente manera:

$$- \frac{\partial \dot{m}_{cx}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{m}_{cy}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{m}_{cz}}{\partial z} = V_b \frac{\partial(m_{v_c})}{\partial t} - q_{mt_c} - q_{m_c} \tag{A.9}$$

Cuando los componentes  $c$  del sistema son: agua, aceite y gas libre, el flujo másico se puede expresar como el producto de la densidad del fluido por la velocidad de Darcy; la masa por el volumen  $V_b$  como el producto de la porosidad, saturación de la fase y la densidad de la fase.

De este modo la Ec. A.9 se reescribirá como:

$$-\frac{\partial \rho_c u_c}{\partial x} - \frac{\partial \rho_c v_c}{\partial y} - \frac{\partial \rho_c w_c}{\partial z} = \frac{\partial \phi S_c \rho_c}{\partial t} - q_{mtc} - q_{mc} \quad (\text{A.10})$$

donde  $c = o, w, fg$ ;  $\rho_c$  = densidad de cada fase;  $u_c, v_c$  y  $w_c$  es la velocidad de Darcy en las direcciones  $x, y$  y  $z$  respectivamente;  $\phi$  = porosidad de la roca; y  $S_c$  = saturación del componente  $c$ .

Ahora bien, dado que en el problema que analizamos en este trabajo no existen fuentes que suministren ni extraigan masa del sistema, los términos  $q_{mtc}$  y  $q_{mc}$  son iguales a 0. Del mismo modo el ejemplo sólo se analiza en el plano  $xz$ , por lo cual el término correspondiente al eje  $y$  no se considera, quedando entonces la ecuación de continuidad de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \phi S_c \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_c u_c}{\partial x} + \frac{\partial \rho_c w_c}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.11})$$

## Lista de Tablas

**Tabla 1**—Variables adimensionales.

**Tabla 2**—Valores característicos.

**Tabla 3**—Datos iniciales.

## Lista de Figuras

**Fig. 1**—Porosidad absoluta y porosidad efectiva.

**Fig. 2**—Esquema de un medio poroso mojado por agua.

**Fig. 3**—Relación entre la presión capilar y los procesos de drene e imbibición.

**Fig. 4**—Fuerza centrífuga vs fuerza centrípeta de un cuerpo sometido a rotación.

**Fig. 5**—Trayectoria de un balón sobre una placa estática.

**Fig. 6**—Trayectoria de un balón descrita por el efecto Coriolis.

**Fig. 7**—Diferencia entre núcleo de diámetro completo y tapón.

**Fig. 8**—Esquema del modelo físico en estudio. Centrífuga.

**Fig. 9**—Volumen de control para flujo en 1D en coordenadas rectangulares.

**Fig. 10**—Fuerzas que intervienen en el proceso de centrifugación.

**Fig. 11**—Análisis del comportamiento de  $uc$  contra los cambios de permeabilidad.

**Fig. 12**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=0$ .

**Fig. 13**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=20$  rpm.

**Fig. 14**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=50$  rpm.

**Fig. 15**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=100$  rpm.

**Fig. 16**—Momento en que los efectos de la gravedad y de la centrífuga son casi iguales.

**Fig. 17**—Análisis de orden de magnitud para  $\omega=130$  rpm.

**Fig. 18**—Representación gráfica del núcleo y la diferencia de magnitudes entre su longitud y el diámetro visto desde el plano  $xz$ .

**Fig. 19**—Representación gráfica para las fronteras del sistema.

**Fig. 20**—Subdivisión de un dominio en elementos finitos.

**Fig. 21**—Descomposición de una figura irregular en formas regulares para obtener las coordenadas de su centroide.

**Fig. 22**—Desplazamiento de agua a diferentes tiempos para  $\omega=10$ .

**Fig. 23**—Desplazamiento de agua a diferentes tiempos para  $\omega=50$ .

**Fig. 24**—Desplazamiento de agua a diferentes tiempos para  $\omega=150$ .

**Fig. 25**— $S_w$  promedio por cada velocidad  $\omega$ .

**Fig. 26**—Límite entre  $S_{wi}$  y  $S_{rw}$  para  $\omega=120$ .  $S_{rw}=0.1$ ,  $S_{wi}=0.3$ .

**Fig. 27**— $P_c$  vs  $P_o$  y  $P_w$  para  $\omega=1$ .

**Fig. 28**— $P_c$  vs  $P_o$  y  $P_w$  para  $\omega=120$ .

**Fig. 29**—Relación  $\omega$  vs  $S_w$  con base en los promedios de las saturaciones.

**Fig. 30**—Comportamiento de la relación  $\omega$  vs  $S_w$  esperado.

**Fig. B-1**— Comportamiento de la  $kr$  para  $\omega= 120$  rpm.

## Referencias

- Bauget, F., Gautier, S., Lenormand, R. et al. 2012. Gas-Liquid Relative Permeabilities from One-Step and Multi-Step Centrifuge Experiments. Paper presented at the International Symposium of the Society of Core Analysts held in Aberdeen, Scotland, UK, 27-30. SCA2012-13.
- Bentsen, R. G., Anli, J. et al. 1977. Using parameter estimation techniques to convert centrifuge data into a capillary-pressure curve. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 17(01), 57–64. SPE-5026-PA. <https://doi.org/10.2118/5026-PA> .
- Buckley, S. E., Leverett, Mc. et al. 1942. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, 146(01), 107–116. SPE-942107-G. <https://doi.org/10.2118/942107-G> .
- Burden, R. L., and Faires, J. D. 2002. *Análisis numérico*. Thomson Learning.
- Diaz-Viera, M. A., Lopez-Falcon, D. A. et al. 2008. COMSOL implementation of a multiphase fluid flow model in porous media. In *Proceedings of the COMSOL Conference*.
- Ding, M., Torsæter, O., and Jelmert, T. A. 1999. Developments in centrifuge measurements of relative permeability and capillary pressure hysteresis. *Society of Core Analysts*. SCA-9943.
- Dormand, J. R. 2018. *Numerical methods for differential equations: a computational approach*. CRC Press.
- Ertekin, T., Abou-Kassem, J. H., and King, G. R. 2001. *Basic applied reservoir simulation*. Richardson, Texas: Society of Petroleum Engineers.
- Fernø, M. A., Bull, Ø., Sukka, P. O. et al. 2009. Capillary pressures by fluid saturation profile measurements during centrifuge rotation. *Transport in Porous Media*, 80(2), 253. <https://doi.org/10.1007/s11242-009-9355-8> .
- Forbes, P. et al. 1994. Simple and accurate methods for converting centrifuge data into drainage and imbibition capillary pressure curves. *The Log Analyst*, 35(04). SPWLA-1994-v35n4a3.
- Forbes, P., 1997. Centrifuge Data Analysis Techniques: An SCA Survey on The Calculation of Drainage Capillary Pressure Curves from Centrifuge Measurements. Paper presented at the SCA 1997 conference, Calgary, Canada. SCA 9714.
- Garnier, J., Gaudin, C., Springman, S. M. et al. L. 2007. Catalogue of scaling laws and similitude questions in geotechnical centrifuge modelling. *International Journal of Physical Modelling in Geotechnics*, 7(3), 1.
- Hagoort, J. et al. 1980. Oil recovery by gravity drainage. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 20(03), 139–150. SPE-7424-PA. <https://doi.org/10.2118/7424-PA> .

- Hassler, G. L., Brunner, E. et al. 1945. Measurement of capillary pressures in small core samples. *Trans. AIME*, 160(1), 114–123. SPE-945114-G. <https://doi.org/10.2118/945114-G> .
- Joseph, P. G., Einstein, H. H., and Whitman, R. V. 1988. *A literature review of geotechnical centrifuge modeling with particular emphasis on rock mechanics*.
- Kyte, J. R., et al. 1970. A centrifuge method to predict matrix-block recovery in fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 10(02), 164–170. SPE-2729-PA. <https://doi.org/10.2118/2729-PA> .
- Mattson, E. D., 2011. Characterization of fractured campeche reservoir marine cores. Idaho National Laboratory , Idaho.
- Mattson, E. D., Paler, C. D., Smith, R. W. et al. 2010. *Centrifuge techniques and apparatus for transport experiments in porous media*. Unites States.
- Marx, J. W. et al. 1956. Determining gravity drainage characteristics on the centrifuge. SPE-545-G.
- Nimmo, J. R. 1990. Experimental testing of transient unsaturated flow theory at low water content in a centrifugal field. *Water Resources Research*, 26(9), 1951–1960. <https://doi.org/10.1029/WR026i009p01951> .
- Nimmo, J. R., and Mello, K. A. 1991. Centrifugal techniques for measuring saturated hydraulic conductivity. *Water Resources Research*, 27(6), 1263–1269. <https://doi.org/10.1029/91WR00367> .
- Nordtvedt, J. E., Mejia, G., Yang, P.-H. et al. 1993. Estimation of capillary pressure and relative permeability functions from centrifuge experiments. *SPE Reservoir Engineering*, 8(04), 292–298. SPE-20805-PA. <https://doi.org/10.2118/20805-PA> .
- Ocáriz, J. 2016. *Mecánica: Curso básico para estudiantes de ingeniería*. Ciudad Universitaria, México.
- Rapoport, L. A., Leas, W. J. et al. 1953. Properties of linear waterfloods. *Journal of Petroleum Technology*, 5(05), 139–148. SPE-213-G. <https://doi.org/10.2118/213-G> .
- Saeedi, M., and Pooladi-Darvish, M. 2011. Revisiting the drainage relative permeability measurement by centrifuge method using a forward--backward modeling scheme. *Transport in Porous Media*, 86(1), 49–71.
- Salazar, A. 1999. *El método del elemento finito aplicado en la solución de problemas de transferencia de calor en una dimensión*. Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Serway, R.F., Jewett, J.W. 2004. *Physics for Scientists and Engineers*. Brooks/Cole.
- Towler, B.F. 2002. *Fundamental Principles of Reservoir Engineering*. SPE Textbook Series.
- Vadasz, P. et al. 2016. *Fluid flow and heat transfer in rotating porous media*. Springer.

Van den Berg, E. H. et al. 2009. Unsaturated hydraulic conductivity measurements with centrifuges: A review. *Vadose Zone Journal*, 8(3), 531–547.

Willhite G. P. 1986. *Waterflooding*. SPE Textbook Series Vol.3.

Zambrano-Narvaez, G., and Chalaturnyk, R. 2014. The new GeoREF geotechnical beam centrifuge at the University of Alberta, Canada.

Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L. 2005. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier.