UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

CONJUNTOS LIMITES.

-oOo-

TESIS que presenta

ROBERTO VAZQUEZ GARCIA

para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS.

MEXICO. D. F.

1941.

CONJUNTOS LIMITES.

1. INTRODUCCION.

1.1 Conjuntos de puntos.

Cada elemento de un conjunto dado de números reales queda representado por un punto de una recta; de esta manera a todo conjunto de números le corresponde un conjunto de puntos en la recta dada. Aprovechándonos de este hecho llamaremos a todo conjunto en el que cada elemento es un número real, conjunto lineal de puntos.

En forma análoga se pueden definir conjuntos planos y de mayor número de dimensiones. Cada elemento de un conjunto de p dimensiones es la reunión de p números reales $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)})$, y a tal elemento se llama punto en el espacio de p dimensiones.

El contínuo p-dimensional consiste de todos los puntos de tal espacio cuando cada uno de los números $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ toma todos los valores posibles. La teoría de los conjuntos de puntos es esencialmente una teoría aritmética y la terminología y representación geométricas se usan para facilitar el estudio y exposición pero no son indispensables.

Un ejemplo sencillo de conjunto lineal es el conjunto formado por todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$, donde a y b son dos números reales dados. A este conjunto se le denomina intervalo cerrado (a,b).

Si se trata del conjunto cuyos elementos x satisfacen la condición $a < x < b$, se dice que es el intervalo abierto (a,b). Cualquiera de los dos conjuntos para los cuales se verifica que $a \leq x < b$ ó $a < x \leq b$, reciben el nombre de intervalos semicerrados (a,b), abiertos en a ó en b.

Geométricamente puede decirse que el intervalo cerrado (a,b) coincide con el segmento de recta cuyos extremos tengan las abscisas a y b respectivamente.

Un conjunto lineal está acotado si todo elemento de él satisface la condición $|x| \leq \alpha$, donde α es un cierto número positivo.

Estas consideraciones se pueden extender a los conjuntos de cualquier número de dimensiones: por ejemplo para un conjunto plano en el que cada elemento es un par de números reales $(x^{(1)}, x^{(2)})$, llamaremos <u>célula cerrada</u> (<u>closed cell</u>) $a^{(1)}, a^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)})$ al conjunto de puntos $(x^{(1)}, x^{(2)})$ tales que $a^{(1)} \leq x^{(1)} \leq b^{(1)}$; $a^{(2)} \leq x^{(2)} \leq b^{(2)}$. Una <u>célula abierta</u> es el conjunto de puntos $(x^{(1)}, x^{(2)})$ que satisfacen las desigualdades $a^{(1)} < x^{(1)} < b^{(1)}$; $a^{(2)} < x^{(2)} < b^{(2)}$, y será <u>semicerrada</u> si $a^{(1)} \leq x^{(1)} < b^{(1)}$; $a^{(2)} \leq x^{(2)} < b^{(2)}$.

Si se toma como imagen de un elemento $(x^{(1)}, x^{(2)})$ del conjunto plano, el punto de coordenadas $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, la representación geométrica de la célula cerrada será un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

Si existen números positivos $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$ tales que $|x^{(1)}| \leq \alpha^{(1)}$, $|x^{(2)}| \leq \alpha^{(2)}$ se dice que el conjunto plano está acotado y utilizando el lenguaje geométrico tenemos que el conjunto dado está encerrado en un rectángulo con centro en el orígen de coordenadas y de lados (paralelos a los ejes) de longitud $2\alpha^{(1)}$ y $2\alpha^{(2)}$ respectivamente.

Se llamará <u>célula cerrada</u> $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(p)}; b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots b^{(p)})$ en el espacio de <u>p</u> dimensiones al conjunto de puntos $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)})$ tales que $a^{(1)} \leq x^{(1)} \leq b^{(1)}$; $a^{(2)} \leq x^{(2)} \leq b^{(2)}$; ... $a^{(p)} \leq x^{(p)} \leq b^{(p)}$. Si se cumplen las desigualdades $a^{(1)} < x^{(1)} < b^{(1)}$, ... $a^{(p)} < x^{(p)} < b^{(p)}$, la célula es <u>abierta</u> y si $a^{(1)} \leq x^{(1)} < b^{(1)}$, ... $a^{(p)} \leq x^{(p)} < b^{(p)}$ es <u>semicerrada</u>.

El conjunto p-dimensional está acotado si existen números positivos $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots \alpha^{(p)}$ para los cuales $|x^{(1)}| \leq \alpha^{(1)}$, $|x^{(2)}| \leq \alpha^{(2)}, \ldots$ $|x^{(p)}| \leq \alpha^{(p)}$.

A cualquier intervalo cerrado o célula cerrada que contenga a todos los puntos del conjunto dado, se le da el nombre de intervalo ó <u>célula fundamental</u>.

Si para un conjunto no existe intervalo o célula fundamental, se dice que el conjunto <u>no</u> está acotado. Los únicos conjuntos que se consideran en este trabajo son acotados.

1.11 Punto determinado por una sucesión convergente de intervalos o células.

Sea (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_n, b_n), ... una sucesión de intervalos cerrados que satisfacen las dos condiciones siguientes:

1a. Un intervalo cualquiera (a_n, b_n) de la sucesión está comprendido enteramente en el precedente (a_{n-1}, b_{n-1}); es decir, $a_n \geq a_{n-1}$; $b_n \leq b_{n-1}$.

2a. Las longitudes de estos intervalos o sean los números $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, . . . $b_n - a_n$, ... forman una sucesión que converge hacia cero, es decir, dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede encontrar un número h entero y positivo tal que $b_m - a_m < \varepsilon$ para todos los números $m > h$.

Con estas hipótesis es válido el teorema: Existe un punto x y sólo uno, común a todos los intervalos.

Si desde un cierto valor de n se cumple $a_n > a_{n-1}$, $b_n < b_{n-1}$, el punto x es interior a todos los intervalos. Si desde un cierto valor n_1 de n se verifica $a_n = a_{n-1}$, $b_n < b_{n-1}$, el punto x coincide con los extremos $a_{n_1 - 1}$, a_{n_1}, ...

Si se trata de una sucesión (a_1, b_1), . . . (a_n, b_n) .... de intervalos abiertos, no necesariamente existe un punto común a todos ellos, pero en el caso de que se cumpla que $a_n > a_{n-1}$, $b_n < b_{n-1}$ para un número ilimitado de valores de n, el teorema resulta válido.

En un espacio de p dimensiones si tenemos una sucesión de células cerradas del tipo $(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots a_n^{(p)}; b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, \ldots b_n^{(p)})$ satisfaciendo las condiciones $a_n^{(q)} \geq a_{n-1}^{(q)}$, $b_n^{(q)} \leq b_{n-1}^{(q)}$ y $b_n^{(q)} - a_n^{(q)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\left\{1 \leq q \leq p\right\}$ se puede hacer la misma afirmación anterior, a saber: Existe un punto --- $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)})$ que pertenece a todas las células de la sucesión y es único.

Llamamos longitud de un intervalo (a,b) al número positivo b - a; llamaremos diagonal de una célula de p dimensiones al número:-

$\left[\sum_{q=1}^{p}(b^{(q)} - a^{(q)})^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Es suficiente para asegurar que:-

$b_n^{(q)} - a_n^{(q)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ con $1 \leq q \leq p$, el suponer que la diagonal tiende a cero en las mismas condiciones.

1.2 Sistema de redes.

Supongamos que se divide un intervalo cerrado (a,b) en m_1 sub-intervalos por medio de un número finito de puntos interiores, de tal manera que la longitud de cualquiera de estos sub-intervalos no exceda a un cierto número $\delta_1 > 0$; sea D_1 el conjunto de estos sub-intervalos.

Si se agregan nuevos puntos interiores a (a,b) resulta otro conjunto D_2 de m_2 ($m_2 > m_1$) sub-intervalos, comprendidos o coincidiendo con los primeros; y estos nuevos puntos de división pueden elegirse de tal manera que la longitud de los m_2 no exceda a un número $\delta_2 < \delta_1$

Repitiendo el proceso se llega a una sucesión $D_1, D_2, \dots D_n, \dots$ en donde cada elemento D_n es un conjunto finito de sub-intervalos de (a,b), comprendidos o coincidiendo con los sub-intervalos de D_{n-1} y cuya longitud máxima no es mayor que un cierto número δ_n. Supondremos además que la sucesión $\{\delta_n\}$ es decreciente $(\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n > \dots)$ y que converge hacia cero.

A cada uno de los conjuntos $D_1, D_2, \dots D_n, \dots$ se le llama una red (net) y se dice que la sucesión $\{D_n\}$ es un sistema de redes aplicado al intervalo (a,b). A la red D_n se le puede llamar red enésima o de orden n y sus m_n sub-intervalos se les designa con el nombre de mallas (meshes) de esa red. En cada red del sistema se pueden ordenar las mallas de izquierda a derecha en (a,b).

Si D_1 consiste de m mallas de igual longitud, D_2 de m^2 mallas de igual longitud y D_n de m^n mallas de igual longitud, el sistema de redes se llama simétrico.

En la mayor parte de las aplicaciones se consideran las mallas de cada red del sistema como intervalos semicerrados, cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, con excepción de la última malla que se toma como cerrada. Con esta condición resulta la propiedad muy importante de que cualquier punto x de (a,b) está en una y solo una malla de la red D_n, para cualquier valor de n. Las mallas en las que figura el punto x forman una sucesión convergente de intervalos, sucesión que determina al punto x.

En algunos casos puede convenir tomar todas las mallas cerradas. En tales casos un punto x de (a,b) puede pertenecer a dos mallas adyacentes y a todas las subsecuentes del sistema; tal punto quedará determinado por varias sucesiones de intervalos.

Si se trata de células de dos o más dimensiones, el sistema de redes aplicado a ellas se define como sigue:

Tomemos como ejemplo una célula de dos dimensiones $(a^{(1)},a^{(2)};b^{(1)}b^{(2)})$ trazando varias rectas paralelas a los ejes se divide este rectángulo en un conjunto finito D_1 de subcélulas rectangulares cuyas diagonales no exceden a un cierto $\delta_1 > 0$. Con nuevas rectas paralelas a los ejes se determina un nuevo conjunto finito D_2 de subcélulas comprendidas o coincidiendo con las anteriores y cuyas diagonales no sobrepasan a $\delta_2 < \delta_1$

Repitiendo el proceso se obtiene una sucesión D_1, D_2, ... D_n, ... de conjuntos finitos de subcélulas cuyas diagonales son menores o iguales que los correspondientes elementos δ_i de la sucesión δ_1, δ_2, ... δ_n, ... decreciente y que converge a cero.

Como antes, los conjuntos D_n se les llama redes; a cada una de las subcélulas, mallas, y a la sucesión $\{D_n\}$ sistema de redes aplicado a la célula cerrada $(a^{(1)}, a^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)})$.

Supongamos que en D_n se toma cada malla semicerrada o no según este criterio:

1o. Si la malla ($\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \beta^{(1)}, \beta^{(2)}$) no tiene ningún lado común con uno de los lados de ($a^{(1)}, a^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)}$) que no contienen al punto - ($a^{(1)}, a^{(2)}$) (es decir si $\beta^{(1)} < b^{(1)}$ y $\beta^{(2)} < b^{(2)}$) se toma como semicerrada; cualquier punto ($x^{(1)}, x^{(2)}$) de ella debe satisfacer las condiciones - - -
$\alpha^{(1)} \leq x^{(1)} < \beta^{(1)}; \quad \alpha^{(2)} \leq x^{(2)} < \beta^{(2)}$.

2o. Si la malla es de la forma ($\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \beta^{(1)}, b^{(2)}$) con $\beta^{(1)} < b^{(1)}$ o de la forma ($\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; b^{(1)}, \beta^{(2)}$) con $\beta^{(2)} < b^{(2)}$, se toma cerrada a lo largo del lado común con ($a^{(1)}, a^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)}$), pero este lado se toma como semicerrado. En otros términos todo punto ($x^{(1)}, x^{(2)}$) debe satisfacer para la primera célula las desigualdades

$$\alpha^{(1)} \leq x^{(1)} < \beta^{(1)}; \alpha^{(2)} \leq x^{(2)} \leq b^{(2)}$$

y para la segunda

$$\alpha^{(1)} \leq x^{(1)} \leq b^{(1)}; \alpha^{(2)} \leq x^{(2)} < \beta^{(2)}$$

3o. La única célula no comprendida en los casos anteriores es la que - tiene el punto ($b^{(1)}, b^{(2)}$) como uno de los vértices. Esta célula se toma cerrada.

Considerando de esta manera las células de D_n se llega a la propiedad fundamental de que cualquier punto de ($a^{(1)}, a^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)}$) pertenece a una malla y sólo una de D_n, para cualquier valor de n. Todo punto x queda determinado por una sucesión convergente de mallas perteneciendo cada una de ellas a una red distinta de la sucesión $\{D_n\}$.

Las mallas de una red cualquiera se pueden ordenar de varias maneras; una sería tomando en primer lugar las del primer renglón [las de la forma ($\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \beta^{(1)}, b^{(2)}$.) ordenadas de izquierda a derecha. Después las del segundo renglón, de izquierda a derecha también, etc.

Si las diagonales δ_n de las mallas de D_n son iguales y la relación $\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}$ es independiente de n, el sistema de redes se dice que es simétrico.

Si todas las mallas de D_n, para cualquier valor de n son cerradas, - se les llama simplemente sistema de redes con mallas cerradas. En este - caso un punto $(x^{(1)}, x^{(2)})$ de $(a^{(1)}, a^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)})$ puede quedar determinado por varias sucesiones convergentes de mallas.

1.3 Se llama vecindad de un punto x de un intervalo (a,b) a un intervalo $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_2)$ abierto o cerrado, que descansa enteramente en (a,b); los números positivos ϵ_1 y ϵ_2, no necesariamente iguales, pueden considerarse tan pequeños como se quiera resultando así la vecindad del punto x tan pequeña como se quiera. Un intervalo $(x, x + \epsilon_2)$ se define como - una vecindad de x a la derecha y $(x - \epsilon_1, x)$ como una vecindad de x a la izquierda; ambos pueden ser abiertos o cerrados. A los extremos a y b se les considera únicamente vecindades a la derecha y a la izquierda respectivamente.

En el caso de p dimensiones la vecindad de un punto $(x^{(1)}, \ldots x^{(p)})$ es la célula abierta o cerrada $(x^{(1)} - \epsilon_1^{(1)}, \ldots x^{(p)} - \epsilon_1^{(p)};$ - - - - - - $x^{(1)} + \epsilon_2^{(1)}, \ldots x^{(p)} + \epsilon_2^{(p)})$ donde los números ϵ pueden ser tan pequeños como se quiera.

Un punto $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)})$ es punto de acumulación del conjunto G de p dimensiones, si en toda vecindad de él existen puntos de G distintos de x mismo. Dicho punto x puede o no pertenecer al conjunto.

Un punto aislado del conjunto G es todo punto de G que no es de acumulación de G. Evidentemente existe una vecinda del punto aislado que no contiene más puntos de G que él mismo.

Un punto exterior a G es un punto que no pertenece a G ni es de acumulación de G. Existe una vecindad del punto exterior que no contiene a ningún punto de G.

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de un conjunto dado G recibe el nombre de conjunto derivado de G o primera derivada de G - ~~y se denota por G'. El conjunto derivado de G' se denota por G'' y así suce~~

sivamente.

1.4 Operaciones con conjuntos.

Sean G_1, G_2, ... G_n, n conjuntos del mismo número de dimensiones y teniendo o no puntos comunes. Llamaremos suma de estos conjuntos al conjunto G formado por todos los puntos que pertenecen a cuando menos uno de los conjuntos G_i $(i = 1,2, \ldots n)$. Se emplea la notación $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$.

El conjunto M formado por los puntos comunes a todos los conjuntos G_1, G_2, ... G_n se llama producto de dichos conjuntos y se escribe $M = G_1.G_2 \ldots G_n$.

En el caso de que dos conjuntos dados G_1 y G_2 no tengan ningún punto en común, su producto $G_1.G_2$ no contiene puntos; al conjunto que no contiene puntos se le llama conjurto nulo (null-set) y se denota por 0; así en este caso resultaría $G_1.G_2 = 0$.

La adición y multiplicación de conjuntos tienen las propiedades formales asociativa y conmutativa, y la multiplicación tiene además la distributiva. Por ejemplo para tres conjuntos L, M y N tenemos,

$$L + (M + N) = (L + M) + N; \quad (LM)\,N = L(MN)$$

$$L + M = M + L\ ; \qquad L.M = M.L$$

$$L\,(M + N) = L.M - L.N$$

Como casos particulares importantes:

$$M + M = M\ ;\ M.M = M\ ;\ M + 0 = M\ ;\ M.0 = 0.$$

La diferencia L - M entre dos conjuntos cualesquiera L y M se define como el conjunto de puntos de L que no forman parte de M.

La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción es válida en cualquier caso. Se puede escribir $L(M - N) = L.M - L.N$, donde L,M y N son conjuntos cualesquiera.

No presenta dificultad extender las operaciones de adición y mul -

tiplicación a un número ilimitado de conjuntos. Así, tenemos que la suma $G = G_1 + G_2 + \ldots$ de los conjuntos elementos de la sucesión $\{G_n\}$ es el conjunto formado por todos los puntos que pertenecen a cuando menos uno de los conjuntos G_i. El producto $M = G_1.G_2 \ldots G_n \ldots$ es el conjunto constituído por los puntos comunes a todos los conjuntos G_i.

Aún en este caso de un número ilimitado de factores o sumandos se cumplen las propiedades formales asociativa, conmutativa y distributiva.

1.5 Se usa la notación $M \leq G$ para indicar que todos los puntos de M son puntos de G y se dice que M es parte o componente de G o que G contiene a M.

La notación $M < G$ indica que todos los puntos de M son puntos de G pero que algunos puntos de G no son de M. Evidentemente el conjunto de puntos de G que no son de M es el conjunto $G - M$ que se designa también con el símbolo $C_{\epsilon}(M)$ y se le da el nombre de complemento de M con respecto a G. Si el conjunto G es idéntico a un intervalo o célula fundamentales se dice simplemente que $G - M$ es el complemento $C(M)$ de M y se puede escribir la igualdad $G - M = C(M)$.

A un conjunto G se le llama conjunto cerrado cuando, y sólo cuando contiene a todos sus puntos de acumulación o cuando es finito. Más brevemente cuando $G' \leq G$.

Un conjunto M es aislado cuando todos sus puntos son aislados o lo que es lo mismo, cuando $M.M' = 0$.

Por comodidad de aquí en adelante designaremos con $\underline{x}$ simplemente al punto $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)})$ y con (a,b) a la célula $(a^{(1)}, \ldots a^{(p)}; b^{(1)})$

El conjunto M es denso en el intervalo o célula (a,b) si existe un subintervalo o subcélula (a', B') tal que todos sus puntos son de acumulación de M.

Se deduce de la definición anterior que si un conjunto M no es denso en (a,b), todo subintervalo o subcélula (a', B') contiene un subintervalo o subcélula (a,b), todo subintervalo o subcélula (a',B') contiene un subintervalo o subcélula (a",b") en la que no hay un solo punto del conjunto N.

M es denso en todas partes de (a,b) si todos los puntos de (a,b) son de acumulación de M.

M es denso en sí mismo si todos los puntos de M son acumulación del conjunto. Es decir $M \leq M'$.

Un conjunto H es perfecto cuando es denso en sí mismo y es cerrado. Se debe tener $H = H'$.

Densidad en un conjunto perfecto H. M es denso en H cuando todos los puntos de H contenidos en un cierto intervalo o célula (a',b'), -- son de acumulación de M.

M es denso en todas partes de H si cualquier punto de H es de acumulación de M.

El punto x del conjunto G es punto interior del conjunto si existe una vecindad de x tal que todos sus puntos sean de G. Un punto x de G que esté en la frontera del intervalo o célula fundamentales, se considera como interior a G con respecto a dicho intervalo o célula si -- existe una vecindad de x tal que todo punto de esa vecindad que esté en el intervalo o célula fundamentales, es punto de G. Tal punto no es interior de G con respecto a un intervalo o célula que contengan al intervalo o célula primitivos.

Cuando todo punto de G es punto interior de dicho conjunto, se dice que G es un conjunto abierto. Un conjunto es abierto con respecto a un intervalo o célula si todo punto de el es punto interior con respecto a dicho intervalo o célula.

En las dos últimas definiciones se puede sustituir el intervalo o célula fundamentales por un conjunto perfecto H. En este caso tenemos:

Un punto x de M ($M \leq H$) es interior a M con respecto a H si es un punto de H y existe una vecindad de x tal que todos los puntos de H que figuran en esa vecindad, son puntos de M.

Si todos los puntos de M son interiores con respecto a H, se dice que M es abierto con respecto a H.

A continuación daremos algunos teoremas referentes a los conceptos definidos en este número (1.5).

1.51 Teorema: $C(G_1.G_2 \ldots) = C(G_1) + C(G_2) + \ldots$

Corolario: $C(G_1 + G_2 + \ldots) = C(G_1).C(G_2) \ldots$

1.52 Teorema: La derivada de un conjunto cualquiera, es un conjunto cerrado.

Corolario: El conjunto G + G' es cerrado cualquiera que sea el conjunto G.

1.53 Teorema: Si G es denso en sí mismo, G' es perfecto.

1.54 Teorema: El complemento C(G) de un conjunto cerrado G es un conjunto abierto con respecto al intervalo o célula fundamentales. Recíprocamente el complemento de conjunto abierto simplemente o abierto con respecto al intervalo o célula fundamentales, debe ser cerrado.

1.55 Teorema: El complemento $C_H(G)$ de un conjunto cerrado G($G \leq H$ y H perfecto) es un conjunto abierto con respecto a H. Recíprocamente el complemento de un conjunto abierto con respecto a H es un conjunto cerrado.

1.56 Teorema: La suma de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

1.57 Teorema: El producto de un número infimito o finito de conjuntos cerrados, si no es nulo es cerrado.

Corolario: La suma de un número finito o infinito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

1.58 Teorema: El producto de un número finito de conjuntos abiertos, si es distinto de cero, es abierto.

1.6 Potencia de un conjunto. Conjuntos numerables.

Las correspondencias biunívocas entre los elementos de L y M y entre los de M y N traen consigo la correspondencia biunívoca entre los elementos de L y N. Esto permite definir la potencia de un conjunto de la manera siguiente:

Dos conjuntos tienen la misma <u>potencia</u> cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos.

Como ejemplos de conjuntos que tienen la misma potencia pondremos:

1o. Dos conjuntos finitos de igual número de elementos.

2o. El intervalo (0,1) y un intervalo cualquiera (a,b). Basta hacer $\xi = \dfrac{x-a}{b-a}$ para que a cualquier punto $\underline{x}$ de (a,b) le corresponda un punto ξ de (0,1) y recíprocamente.

3o. La relación $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$ establece una correspondencia biunívoca entre todos los números reales y los puntos de (-1,1).

Entre los conjuntos más importantes figuran los que tienen la misma potencia que el conjunto de los números naturales (1,2,3,...).

A estos conjuntos se les llama, por definición, conjuntos <u>numerables infinitos</u>. Un conjunto que es finito o numerable infinito recibe el nombre de <u>numerable</u>.

La condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea numerable es que se puedan numerar sus elementos, es decir que queden estos ordenados en la forma $a_1, a_2, a_3, \ldots$ habiendo o nó un último elemento en esta ordenación.

Con respecto a los conjuntos numerables tenemos los teoremas:

1.61 Teorema: Toda componente de un conjunto numerable, es numerable.

1.62 Teorema: Un conjunto numerable de conjuntos numerables, es numerable.

Corolario: El conjunto de los números racionales es numerable.

1.63 Teorema: El conjunto K de todos los conjuntos finitos ordenados - de enteros positivos, es numerable.

Corolario 1: El conjunto K de los conjuntos ordenados de p ente - ros positivos es numerable.

Corolario 2: El conjunto F de los puntos de coordenadas racionales en el espacio p-dimensional, es numerable.

1.64 Teorema: El conjunto R de los números reales no es numerable.

Por el teorema anterior vemos que entre los conjuntos infinitos se pueden distinguir dos clases muy importantes:

1a. Los conjuntos numerables infinitos que tienen la misma poten - cia que la sucesión 1,2,3, ..., potencia que se designa con la letra a.

2a. Los conjuntos que tienen la potencia de los números reales o - potencia del contínuo. Esta potencia se representa con la letra c.

Todos los conjuntos infinitos de puntos conocidos en la teoría de conjuntos, ya sea lineales o de mayor número de dimensiones, tienen la potencia a ó la c. Sin embargo no se ha demostrado hasta ahora que estas sean las únicas potencias posibles para conjuntos de puntos.

Para los conjuntos de potencia ≠ a tenemos los teoremas:

1.65 Teorema: La potencia de un conjunto no numerable no se altera si se suprime al conjunto cualquier componente numerable.

Corolario: El conjunto de los números irracionales de cualquier intervalo tiene la potencia c.

1.66 Teorema: El contínuo p-dimensional tiene la potencia c.

1.67 Teorema: Si L y M son dos conjuntos tales que L_1 ($L_1 \leq L$) tiene - la misma potencia que M y M_1 ($M_1 \leq M$) tiene la misma potencia que L, deben tener la misma potencia.

Corolario: Todo conjunto de puntos con una componente de potencia - c, debe ser de la potencia c.

1.7 Números transfinitos. Conjuntos bien ordenados.

Postulemos la existencia de números que pueden formarse aplicando los llamados "dos principios de generación de Cantor". Estos principios son:

1o. Todo número tiene un siguiente que se forma agregando al primero la unidad.

2o. Después de cualquier sucesión ilimitada de números, existe otro que es posterior a todos los miembros de esa sucesión y no hay ningún - número que sea su inmediato precedente.

Todos los números que siguen estos dos principios se llaman núme - ros transfinitos ordinales de la segunda clase, o simplemente números - ordinales de la segunda clase. A los números ordinales finitos se les - llama números de la primera clase y se forman partiendo del número 1 de acuerdo con el primer principio.

Ejemplos:

I Después de la sucesión 1, 2, 3, ... n, ... existe un número de - la segunda clase, de acuerdo con el segundo principio. Este número es el primer número ordinal transfinito y se le denota con la letra ω

II Partiendo de ω y aplicando el primer principio, llegamos a los -- números $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... $\omega + n$, ... Estos números constituyen una sucesión, luego existe un número que viene desphés de todos --- ellos, número que denotaremos por $\omega + \omega = \omega .2$

III El número $\omega .2 + \omega = \omega .3$ aparece después de la sucesión - - - $\omega .2 + 1$, $\omega .2 + 2$, ... $\omega .2 + n$, ... El número $\omega (n + 1)$ es el que - se forma inmediatamente después de la sucesión $\omega .n + 1$, $\omega .n + 2$, -- $\omega .n + 3$, ...

IV Después de la sucesión ω, $\omega .2$, $\omega .3$, ... $\omega .n$, ... viene un número que se representa por el símbolo ω^2. Partiendo de este tenemos --

$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \omega^2 + 3, \dots \omega^2 + n, \dots$; el número que viene a continuación es $\omega^2 + \omega$.

En la misma forma se llega a números como $\omega^2 + \omega.2, \omega^2 + \omega.3$, - ... $\omega^2 + \omega.n$, ... a los que sigue inmediatamente el número - - - - $\omega^2 + \omega^2 = \omega^2.2$ Después aparecen números como $\omega^2.2 + \omega.n + p$.

V El número inmediatamente posterior a los números - - - - - - $\omega^2, \omega^2.2, \omega^2.3 \dots \omega^2.n, \dots$ es ω^3. Partiendo de ω^3 se llega a números de la forma $\omega^3 + \omega^2.m + \omega.n + p$.

Los ejemplos anteriores son casos particulares del tipo

$$\omega^n.\, p_n + \omega^{n-1}.\, p_{n-1} + \dots + \omega.\, p_1 + p_0$$

en que los números n, p_n, p_{n-1}, ... p_1, p_0 son números ordinales finitos cualesquiera.

VI Consideremos la sucesión $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots$ El número siguiente es el ω^ω; y partiendo de este último tenemos números de la forma: - - - - $\omega^{\omega^n} p_n + \omega^{n-1}.\, p_{n-1} + \dots + \omega.\, p_1 + p_0$ - - - - Y Después de la sucesión $\omega^\omega, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^3}, \dots \omega^{\omega^n} \dots$ tenemos el número ω^{ω^ω} . Y todavía más, despúes de la sucesión $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots$ - - - - debe existir, por el segundo principio de generación, un número transfinito que puede designarse con ϵ_1.

Como se ve cualquier número de la segunda clase puede denotarse por medio de un número finito de símbolos pero no hay límite superior para el número de símbolos utilizados en las expresiones de tales números.

Los números de la segunda clase se dividen en dos especies; la primera la constituyen los números que tienen un inmediato anterior y que por lo tanto no son límites de ninguna sucesión; por ejemplo los números $\omega + n$, $\omega^2 + \omega.2 + 3$, $\omega^\omega + \omega + 1$. Los de la segunda especie o números límites de una sucesión, vienen inmediatamente después de los elementos de alguna sucesión; por ejemplo $\omega, \omega^4 + \omega^3.2, \omega^\omega$

Un conjunto ordenado está <u>bien ordenado</u> si toda componente de él tie ne un primer elemento. Si se admite que el conjunto de los números de - la primera y segunda clase está bien ordenado, se pueden demostrar los teoremas:

1.71 Teorema: Sea N un conjunto infinito de puntos cuyos elementos ordenados son $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ Vamos a suponer que los índices de todos los elementos de N son todos los números anteriores a un cierto número β de la primera o segunda clase. En estas condiciones es posible asegurar que N es numerable.

1.72 Teorema: Sea N un conjunto numerable que al ordenarlo de cierta manera quedan sus elementos en la forma $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ Entonces existe un número γ de la primera o segunda clase que no aparece entre los índices de los elementos x_i pero cualquier número anterior a γ es índice de un elemento de N.

1.8 Análisis de los conjuntos en general.

Un punto aislado de cualquier conjunto G es tal que en una vecindad suficientemente pequeña de ese punto, no hay otros puntos de G. Por esta razón se dice que un punto aislado es de grado cero en el conjunto.

Si en toda vecindad suficientemente pequeña de un punto de acumulación de G hay un conjunto numerable de puntos de G, se dice que tal punto es de grado numerable en el conjunto o de grado a en el conjunto. Tal punto puede o no pertenecer al conjunto.

En caso de que un punto sea tal que en toda vecindad de él exista - un conjunto de puntos de G con la potencia del contínuo, se dice que es de grado c en el conjunto. Análogamente si en toda vecindad suficientemente pequeña de un punto existe un conjunto, componente de G, de potencia x, se toma tal punto como de grado x en el conjunto.

1.81 Teorema: Si todo punto de G es de grado a en G, este conjunto es - numerable.

1.82 Teorema: Todo conjunto G, no numerable, es la suma de un conjunto numerable (posiblemente nulo) y un conjunto en que cada punto es de -- grado no numerable en el conjunto y que es denso en sí mismo.

2. CONJUNTOS LIMITES.

2.1 Definición de conjunto límite.

Consideremos una sucesión $\{G_n\}$ en la que todos los miembros G_1, G_2, G_3, ... son conjuntos de puntos en un espacio de cualquier número de di - mensiones. Los puntos de estos conjuntos G_i se dividen en dos clases:

1a. Puntos que pertenecen a un solo elemento de $\{G_n\}$ o comunes a un número finito de dichos elementos.

2a. Puntos comunes a un número infinito de miembros de $\{G_n\}$. Algunos puntos de esta clase pueden satisfacer la condición de que figuran en todos los conjuntos G a partir de cierto rango que dependerá en general - de cada punto.

Al conjunto de puntos pertenecientes a esta última clase se le llama conjunto límite completo (*) de la sucesión $\{G_n\}$ y lo designaremos con G_K. El conjunto de puntos de la segunda clase que satisfacen la condición de - figurar en todos los miembros de $\{G_n\}$ a partir de cierto rango, se le -- llama conjunto límite restringido (* *) de $\{G_n\}$ y lo designaremos con G_R; es evidente que $G_R \leq G_K$.

Si en una sucesión se verifica $G_K = G_R$ se dice que dicha sucesión converge y que el conjunto $G = G_K = G_R$ es el conjunto límite de tal sucesión.

En los ejemplos que se dan a continuación, (x) representa el conjunto cuyo único elemento es el punto x.

I Si en $\{G_n\}$ no hay puntos de la segunda clase, $G_K = 0$; $G_R = 0$

(*) Townsend: Functions of Real Variables. Pág. 33

(* *) Townsend: Functions of Real Variables. Pág. 34

y por consiguiente $G = 0$.

II $$G_1 = (1) + (1/3) + (1/5) + \dots + \left(\frac{1}{2m+1}\right) + \dots$$

$$G_2 = (1/2) + (1/4) + (1/6) + \dots + \left(\frac{1}{2m}\right) + \dots$$

$$G_3 = G_1 - (1/3)$$

$$G_4 = G_2 - (1/2)$$

. . . .

$$G_{2n+1} = G_{2n-1} - \left(\frac{1}{4n-1}\right)$$

$$G_{2n+2} = G_{2n} - \left(\frac{1}{4n}\right)$$

. . . .

En este ejemplo tenemos $G_K = (1) + (1/2) + (1/5) + (1/6) + (1/9) + \dots$ y $G_R = 0$. Por lo tanto la sucesión no converge.

III G_1 consta de todos los puntos del intervalo $(0,1)$

G_2 " " " " " " " $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

. . . .

G_n " " " " " " " $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)$

. . . .

Se ve fácilmente (Fe. 1.11) que $G_K = G_R = (1/2)$. Luego $G = (1/2)$

IV $G_1 = (1)$; $G_2 = (1) + (1/2)$; $G_3 = (1) + (1/2) + (1/3)$;

... $G_n = (1) + (1/2) + (1/3) + \dots + (1/n)$.

En este caso resulta $G_K = G_R = G = (1) + (1/2) + (1/3) + \dots + (1/n) \dots$

2.11 Teorema: Los conjuntos G_K y G_R satisfacen las igualdades

$$G_K = (G_1 + G_2 + \dots + G_n + \dots)(G_2 + G_3 + \dots + G_n + \dots)\dots$$

$$G_R = (G_1 . G_2 \dots G_n \dots) + (G_2 . G_3 \dots G_n \dots) + (G_3 . G_4 \dots G_n \dots) + \dots$$

Demostración.- Si únicamente hay puntos de la primera clase en $\{G_n\}$ ambos miembros de cada igualdad son nulos. Si existen puntos de la segunda clase todo punto de G_K figura en cada uno de los conjuntos:

$$(G_1 + G_2 + \dots) \ , \ (G_2 + G_3 + \dots), \ (G_3 + \dots), \ \dots;$$

por consiguiente

$G_K \leq (G_1 + G_2 + \dots)(G_2 + G_3 + \dots) \dots$ Además si x es un punto de la primera clase existe un número p tal que x no figura en - G_p, G_{p+1}, G_{p+2}, ... y por consiguiente tampoco figura en $(G_p + G_{p+1} + \dots)$

$$\therefore (G_1 + G_2 + \dots)(G_2 + G_3 + \dots)\dots \leq G_K$$

$$\therefore G_K = (G_1 + G_2 + \dots)(G_2 + G_3 + \dots)(G_3 + \dots) \dots$$

Cualquier punto de $(G_1 . G_2 \dots) + (G_2 . G_3 \dots) + \dots$ es punto de G_R pues to que si x es punto que no figura en todas las G_i a partir de cierto rango, no esta incluído en ninguno de los conjuntos $(G_1 . G_2 \dots)$, $(G_2 , G_3 \dots)$; ... Luego $G_R \geq (G_1 . G_2 \dots) + (G_2 . G_3 \dots)$

Además cualquier punto x de G_R debe aparecer en todos los conjuntos - a partir de cierto rango p; en consecuencia x aparece en $G_p + G_{p+1} + \dots$ o en otros términos $G_R \leq (G_1 . G_2 \dots) + (G_2 . G_3 \dots) + \dots$ Se concluye - que $G_R = (G_1 . G_2 \dots) + (G_2 . G_3 \dots) + \dots$

2.12 Teorema: El límite completo de la sucesión $\{G_n\}$ es el complemento del límite restringido de la sucesión $\{C(G_n)\}$

Demostración.- Aplicando sucesivamente los teoremas (2.11) y (1.51) - al conjunto límite completo G_K de $\{G_n\}$ obtenemos

$$C(G_k) = C(G_1 + G_2 + \dots) + C(G_2 + G_3 + \dots) + C(G_3 + \dots) + \dots$$

$$= \left[C(G_1).C(G_2)\dots\right] + \left[C(G_2).C(G_3)\dots\right] + \left[C(G_3)\dots\right] + \dots$$

esto último por el corolario de (1.51). Pero el último miembro es el límite restringido de $\{C(G_n)\}$, luego queda demostrado el teorema.

2.2 Conjunto límite interior y conjunto límite exterior.

LLamaremos sucesión decreciente de conjuntos $\{G_n\}$ a toda sucesión en la que se verifica $G_1 > G_2 > \dots > G_n > G_{n+1} > \dots$

Si en $\{G_n\}$ sucede completamente a la inversa, es decir, si $G_1 < G_2 < \dots < G_n < G_{n+1} \dots$, diremos que G es creciente. En ambos casos resulta $G_K = G_R$, así que toda sucesión, creciente o decreciente, converge.

Conjunto límite interior es todo conjunto límite de una sucesión decreciente y conjunto límite exterior es todo conjunto límite de una sucesión creciente. Se ve inmediatamente que el conjunto límite interior es igual a $G_1 . G_2 . G_3 \dots$ y el otro es igual a $G_1 + G_2 + \dots$

El conjunto (1/2) del ejemplo III de (2.1) es límite interior y el conjunto G del IV es límite exterior.

2.21 Teorema: El complemento de cualquier conjunto límite exterior es un conjunto límite interior y viceversa.

Demostración:- Si $\{G_n\}$ es una sucesión decreciente, $\{C(G_n)\}$ es una sucesión creciente. Luego $G = \lim \{G_n\}$ es límite interior y $H = \lim \{C(G_n)\}$ es límite exterior.

Por definición $G = G_K$ y $H = H_R$ y aplicando el teorema (2.12) tenemos que $G_K = C(H_R)$; $\therefore G = C(H)$, $H = C(G)$.

2.22 Teorema: El conjunto de los puntos comunes a todos los conjuntos de una sucesión cualquiera $\{H_n\}$ es un conjunto límite interior.

Demostración.- Designamos la sucesión $\{G_n\}$ de esta manera:

$$G_1 = H_1 \ ; \ G_2 = H_1 . H_2 \ ; \ G_3 = H_1 . H_2 . H_3 \ ; \ \dots \ ; \ G_n = H_1 . H_2 . H_3 \dots H_n ; \ \dots$$

Evidentemente $G_1 > G_2 > G_3 > \dots > G_n > \dots$, luego $G = \lim \{G_n\}$ es límite interior. Por otra parte

$$G = G_1 . G_2 . G_3 \dots = (H_1)(H_1 . H_2)(H_1 . H_2 . H_3) \dots = H_1 . H_2 . H_3 \dots$$

lo que demuestra el teorema.

2.23 Teorema: El conjunto $H_1 + H_2 + \dots + H_n + \dots$ es límite exterior, cualquiera que sea la sucesión $\{H_n\}$

Demostración.- Por el corolario de (1.51)

$$C(H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots) = C(H_1).C(H_2) \ldots C(H_n) \ldots$$

Por el teorema anterior $C(H_1).C(H_2) \ldots C(H_n) \ldots$ debe ser límite interior; por lo tanto $H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots$ es límite exterior.

Los dos teoremas anteriores son casos particulares del siguiente

2.24 Teorema: Cualquier conjunto infinito G es límite exterior y límite interior.

Demostración.- Designemos a la célula $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(p)}; b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots b^{(p)})$ por (a,b) simplemente. Sea (a,b) una de las células fundamentales de G; si θ es tal que $0 < \theta < 1$, la célula $(a, \theta b)$ contiene una parte de G que llamaremos G_θ (pueden suceder dos casos extremos $G_\theta = 0$ ó $G_\theta = G$).

Si $\{\theta_n\}$ es una sucesión creciente de valores de θ que converge a uno, los conjuntos $G_{\theta_1}, G_{\theta_2}, \ldots G_{\theta_n}, \ldots$ constituyen una sucesión creciente cuyo límite es G. Se ve de esta manera que G puede considerarse como límite exterior.

También se ve que G es límite interior tomando en cuenta que $G = C\left[C(G)\right]$ y aplicando el teorema (2.21).

NOTA: Para evitar que en la sucesión $\{G_{\theta_n}\}$ a partir de cierto rango $\underline{m}$ suceda que $G_{\theta_m} = G_{\theta_{m+1}} = \ldots = G$, podemos utilizar la célula $(a, \lambda b)$ en donde λ está definido por la cortadura en el campo de los números positivos en que la clase de la izquierda está formada por los números μ tales que fuera de $(a, \mu b)$ hay infinitos puntos de G.

Ahora bien, sean, G_{θ_n} la componente de G en $(a, \theta_n \lambda b)$ y M el conjunto de puntos de G exteriores a $(a, \lambda b)$, entonces la sucesión $\{G_{\theta_n} + M\}$ es del tipo $G_{\theta_1} + M \leq G_{\theta_2} + M \leq \ldots \leq G_{\theta_n} + M \leq \ldots$, pero para un número infinito de valores $p, q, r, \ldots$ de $\underline{n}$ tenemos:

$$G_{\theta_p} + M < G_{\theta_q} + M < G_{\theta_t} + M < \ldots$$

Por lo tanto $G = \lim \left\{ G_{\theta_n} + M \right\}$ resulta límite exterior.

Es posible que en una sucesión decreciente de conjuntos, el límite no contenga puntos; v.gr. si en la sucesión del ejemplo III del (2.1) a cada elemento de ella se le suprime el punto 1/2, resulta todavía una sucesión del mismo tipo pero cuyo límite es el conjunto nulo.

Hay un caso de sucesión decreciente en que se puede asegurar que el límite es distinto de cero; la afirmación de la no nulidad de dicho límite en las condiciones especiales correspondientes constituye el siguiente teorema:

2.25 Teorema: Si $\left\{G_n\right\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados en un espacio de cualquier número de dimensiones, se debe tener $G \neq 0$ y cerrado.

Demostración.- En primer lugar vamos a hacer ver que si se aplica una red D (No. 1.2) al intervalo o célula fundamental de G, red cuyas mallas en número de m las designaremos por d_1, d_2, ... d_m, cuando menos una de estas mallas contiene puntos de G cualquiera que sea el valor de n.

Supongamos que ninguna de las mallas de D cumple con la afirmación anterior; entonces a la malla $d_p \left\{1 \leq p \leq m\right\}$ le corresponde un número n_p tal que d_p no contiene ningún punto de G_{n_p}, $G_{n_{p+1}}$, $G_{n_{p+2}}$ ... Sea N el máximo de los m números n_1, n_2, ... n_m; se debe tener que ninguno de los puntos de G_N, G_{N+1}, G_{N+2}, ... figura en las mallas de la red D lo cual está en contradicción con la propiedad fundamental de una red. Por lo tanto cuando menos una d_i contiene puntos de G_n $(n = 1,2,3, \ldots)$.

Continuando con la demostración del teorema, apliquemos un sistema de redes D_1, D_2, ... D_h, ... al intervalo o célula fundamental que incluye a G. Sea d_1 la primera malla de D que contiene puntos de G_n para - - - -

$n = 1,2,3, \ldots$; la red D_2 tiene varias mallas en d_1 y por lo menos una contiene puntos de todos los conjuntos G; sea d_2 la primera de ellas. - El mismo razonamiento se puede aplicar a D_3 , después a D_4, etc., resultando así una sucesión de mallas d_1, d_2, d_3, ... cada una de las cuales está comprendida en la anterior y conteniendo todas puntos de G_n para - toda n.

Esta sucesión define un punto x (las diagonales de estas mallas tienden a cero) que figura en todas las mallas y es claro que x es punto de - acumulación de G_1, G_2, G_3, ... G_n, ...; por lo tanto ya que estos conjuntos son cerrados, x pertenece a todos ellos y queda demostrado que $G \neq 0$.

Finalmente, si x es punto de acumulación de G, es punto de acumula - ción de G_1, G_2, G_3, ... y por tanto pertenece a cada uno de ellos; luego pertenece a G. Es decir, G es cerrado.

Observación: Cuando la sucesión es de conjuntos abiertos no sucede - cosa análoga pues el límite puede ser nulo o aun cuando sea distinto de cero, no necesariamente es abierto. El límite de una sucesión tal, re - cibe el nombre de límite interior ordinario y sus propiedades se esta - blecerán más adelante.

2.3 Conjuntos de la primera y segunda categorías.

Adoptaremos dos definiciones para conjunto de la primera categoría, a reserva de demostrar después su equivalencia.

Primera definición: Conjunto de la primera categoría (*) es todo - conjunto finito, nulo o límite de una sucesión creciente en la que -- ninguno de los elementos es denso (No. 1.5)

Segunda definición: Si $\{H_n\}$ es una sucesión cualquiera, con la única limitación de que ninguno de sus elementos es denso, el conjunto ---- $H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots$ recibe el nombre de conjunto de la primera ca-

(*) Hobson: Theory of Functions of a Real Variable. Pág. 134.

tegoría. En particular puede suceder que $H_1 + H_2 + \ldots$ sea finito o nulo, o bien que a partir de cierto rango m, $H_m = H_{m+1} = \ldots = 0$, con lo que resulta que cualquier conjunto que no es denso es de la primera categoría.

A todo conjunto que no sea de la primera categoría se le define como de la segunda categoría.

2.31 Equivalencia de las dos definiciones.

1o. Sabemos que si G es límite exterior $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$ por consiguiente todo conjunto de la primera categoría de acuerdo con la primera definición, también es de esta categoría de acuerdo con la segunda definición.

2o. Si $H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots$ definamos una sucesión $\{G_n\}$ como se hizo en (2.22):

$$G_1 = H_1;\ G_2 = H_1 + H_2;\ G_3 = H_1 + H_2 + H_3;\ \ldots\ ;\ G_n = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$$

Si los conjuntos H_i no son densos, los conjuntos G_i tampoco lo son. Por lo tanto si H es de la primera categoría según la definición última, también es de esa categoría de acuerdo con la primera definición.

2.32 Teorema: Si un conjunto es numerable, es de la primera categoría.

La demostración es inmediata utilizando la segunda definición.

2.33 Teorema: La suma de un conjunto numerable de conjuntos de la primera categoría, es de la primera categoría.

Demostración.- Supongamos que todos los conjuntos $E_1, E_2, \ldots E_m, \ldots$ son de la primera categoría, luego

$$E_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + \ldots$$

$$E_2 = A_{21} + A_{22} + A_{23} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_m = A_{m1} + A_{m2} + A_{m3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donde ninguno de los conjuntos A_{ij} es denso. Se sabe por el teorema (1.62) que el conjunto de las A_{ij} es numerable, por consiguiente

$$E_1 + E_2 + \dots + E_m + \dots = A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{13} + A_{22} + \dots$$

es de la primera categoría.

OBSERVACIONES:

1a. Un conjunto de la primera categoría puede ser denso en todas partes. Por ejemplo el conjunto de los números racionales del intervalo (0,1) es un conjunto denso en todas partes de dicho intervalo y por ser numerable es de la primera categoría.

También hay conjuntos de la primera categoría densos en todas partes, no numerables. En efecto apliquemos al intervalo (a,b) un sistema de redes $\{D_n\}$ con mallas cerradas (no. 1.2). Sea $\{H_n\}$ una sucesión de conjuntos determinada de la siguiente manera:

Consideremos en cada malla de D_1 un conjunto no denso y perfecto y sea H la suma de estos conjuntos; en cada malla de D_2 consideremos también un conjunto no denso y perfecto y sea H_2 su suma. En general H_n será igual a la suma de conjuntos no densos y perfectos colocados cada uno en cada malla de D_n. Resulta entonces que todo conjunto H_n no es denso y por consiguiente H = Lím $\{H_n\}$ es de la primera categoría, Pero H es además denso en todas partes de (a,b) puesto que si (c,d) es un subintervalo cualquiera de (a,b), la red D_n para un valor suficientemente grande de n tiene una malla dentro de (c,d) y por lo tanto dentro de este subintervalo hay puntos de H_n; luego todo punto de (a,b) es de acumulación de H. En consecuencia el conjunto H, no numerable, es de la primera categoría y denso en todas partes de un intervalo en que está incluído.

2a. Un conjunto de la primera categoría puede ser de la potencia del contínuo. En efecto un conjunto no denso y perfecto tiene estas características.

3a. Un conjunto de la primera categoría no es necesariamente cerrado. El conjunto de los racionales de (0,1) es un ejemplo y daremos a continuación otro de un conjunto no numerable en estas condiciones.

Sea δ_1, δ_2, ... δ_n, ... una sucesión de intervalos o células abiertas de cualquier número de dimensiones, cada una de ellas conteniendo a la siguiente y tales que dicha sucesión determine un punto único $\underline{x}$ interior a todas las δ_i. Formemos la sucesión $\{H_n\}$ de conjuntos en donde H_i es un conjunto en la frontera de δ_i y por consiguiente no denso en el intervalo o célula fundamental. Es claro que $H = H_1 + H_2 + \ldots$ es un conjunto de la primera categoría que tiene el punto $\underline{x}$ por punto de acumulación, pero como $\underline{x}$ no pertenece a ningún H_n, tampoco pertenece a H. Por lo tanto H no es cerrado. Se demostrará después que si un conjunto de la primera categoría es cerrado, no puede ser denso.

2.34 Teorema: Todo intervalo o célula (a,b) es un conjunto de la segunda categoría.

Demostración.- Supongamos que (a,b) es de la primera categoría. Utilizando la primera definición resulta que (a,b) es igual a $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$, donde $\{S_n\}$ es una sucesión creciente de conjuntos no densos.

Apliquemos a (a,b) un sistema de redes $\{D_n\}$ con mallas cerradas y sean, $\underline{x}_1$ un punto cualquiera de (a,b) y δ_{p_1} la primera malla que lo contiene; existe un conjunto S_{n_1} que es el primero que contiene a $\underline{x}$ y como no es denso, hay un intervalo o célula I_1 dentro de δ_{p_1} que no contiene ningún punto de S_{n_1}.

Sean, δ_{p_2} la primera malla que está comprendida íntegramente en I_1 y $\underline{x}_2$ el centro de ella; existe un conjunto S_{n_2} que es el primero que contiene a $\underline{x}_2$ y debe ser $n_2 > n_1$ puesto que $\underline{x}_2$ no figura en S_{n_1}. A su vez existirá otro intervalo o célula I_2 análogo a I_1 y otra malla δ_{p_3} y así sucesivamente. Es decir hay una sucesión $\{\delta_{p_n}\}$ de mallas, cada una de las cuales está comprendida en la anterior; la malla $\delta_{\rho_{m+1}}$ no contiene puntos de - S_{n_m} y tiene como centro un punto $\underline{x}_{m+1}$ que figura en el conjunto - $S_{n_{m+1}}$ pero no en el S_{n_m}, así que $n_{m+1} > n_m$.

La sucesión de las mallas $\{\delta_{\rho_n}\}$ tiene como límite un punto $\underline{x}$ de (a,b) contenido en todas estas mallas; si este punto figurara en S_{n_m} no estaría contenido en $\delta_{\rho_{m+1}}$, luego no figura en ninguno de los conjuntos de la -- sucesión S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, ... ; por consiguiente no figura en la sucesión S_1, S_2, S_3, ... lo que contradice a la suposición de que (a,b) es de la primera categoría y por lo tanto queda demostrado el teorema.

Corolario: El complemento de un conjunto de la primera categoría es un conjunto de la segunda categoría.

Demostración.- Sea G un conjunto de la primera categoría; si C(G) fuera también de la primera, por el teorema (2.33) el conjunto C + C(G) resultaría de esta categoría, pero G + C(G) constituye el intervalo o cé - lula fundamental de G que por el teorema anterior es de la segunda categoría. Se concluye que C(G) forzozamente es de la segunda categoría.

2.35 Teorema: Si G es de la primera categoría, toda parte $\underline{g}$ de G, es de la primera categoría.

Demostración:- Por hipótesis $G = G_1 + G_2 + \dots$ donde los G_i no son den - sos. Por otra parte

$g = g.G = gG_1 + gG_2 + \dots + gG_n + \dots$ y estos conjuntos $g.G_i$ no - son densos, luego $\underline{g}$ es de la primera categoría.

Corolario 1: El complemento de un conjunto G de la primera categoría es denso en todas partes del intervalo o célula fundamental de G.

Demostración.- Si C(G) no fuera denso en todas partes del intervalo o célula fundamental (a,b) de G, existiría un subintervalo o subcélula - - (a', b') de (a,b) en la que no hubiera puntos de C(G); en otras palabras, todos los puntos de (a',b') serían de G y por el teorema anterior - - (a', b') sería de la primera categoría en contradicción con el teorema (2.34). Se concluye que C(G) debe ser denso en todas partes de (a,b)

Corolario 2: Si un conjunto G de la primera categoría es cerrado, no puede ser denso.

Demostración.- Si G es denso, existe un subintervalo o subcélula - - (a', b') en la que G es denso en todas partes, y como por hipótesis es cerrado, también lo sería en (a',b') y por consiguiente todos los puntos de (a',b') serían de G, en contradicción con lo que se ha visto antes. En consecuencia G no es denso.

Observación: Aunque todo conjunto de la primera categoría tiene como complemento uno de la segunda, no todo conjunto de la segunda categoría tiene como complemento uno de la primera. Para hacer ver esto último, - basta con un ejemplo: consideremos el conjunto lineal H incluído en el intervalo (0,2) y formado por los puntos irracionales de (0,1) y por - los puntos racionales de (1,2); luego H no puede ser de la primera categoría puesto que tiene por componente a los irracionales de (0,1) y C(H) tampoco es de la primera porque tiene como parte al conjunto de - los irracionales de (1,2).

Se llama conjunto residual (*) a todo conjunto complemento de uno de - la primera categoría. Por lo que se ha visto antes resulta que todo conjunto residual no puede ser numerable y debe ser denso en todas partes; además se puede hacer la siguiente afirmación:

2.36 Teorema: Todo conjunto residual es de la potencia del contínuo.

Demostración.- Sea (a,b) el intervalo o célula fundamental de un -- conjunto G de la primera categoría y sea L = C(G) el conjunto residual correspondiente; se sabe que $G = G_1 + G_2 + \ldots$ donde para ningún valor de n, G_n es denso en (a,b).

(*) Hobson: Obra citada. Pág. 136

Apliquemos un sistema de redes $\{D_n\}$ a (a,b); se puede asegurar que existe un subintervalo de (a,b) que no contiene puntos de G_1 y una red D_{n_1} que es la primera que contiene dos mallas (o más) incluídas en -- ese subintervalo. Designemos por δ_0 y δ_1 la primera y segunda mallas - de D_{n_1} en esas condiciones. Análogamente se puede afirmar que existe - una red D_{n_2} que es la primera que contiene mallas en δ_0 y δ_1 (dos por - lo menos en cada una), mallas que no contienen puntos de G_2; expreso - mos con δ_{00} y δ_{01} la primera y segunda incluídas en δ_0 y por δ_{10} y δ_{11} - la primera y segunda incluídas en δ_1 . Es evidente que estas mallas - $\delta_{00}, \delta_{01}, \delta_{10}$, y δ_{11} no contienen puntos ni de G_1 ni de G_2 .

Procediendo de esta manera se llegará a determinar un conjunto de mallas de la forma $\delta_{u_1 u_2 \ldots u_m}$ en donde u_1, u_2, ... u_m toman los valores 0 o 1. La malla $\delta_{u_1 u_2 \ldots u_m}$ que pertenece a la red D_{n_m} está incluída en la malla $\delta_{u_1 u_2 \ldots u_{m-1}}$ y contiene a su vez a las dos mallas $\delta_{u_1 u_2 \ldots u_m 0}$ y $\delta_{u_1 u_2 \ldots u_m 1}$; además dicha malla $\delta_{u_1 u_2 \ldots u_m}$ no contiene ningún - punto de los conjuntos G_1, G_2, ... G_m. Como $n_{m+1} > n_m$, la diagonal de todas estas mallas tiende hacia cero cuando $m \to \infty$

Se concluye que toda sucesión formada por mallas del conjunto men - cionado, y en que se cumpla que cada malla está incluída en la anterior, determina un punto y sólo uno que no pertenece a ningún G_n para ningún valor de n, es decir, determina un punto de L. Así que una sucesión - - $\delta_{u_1}, \delta_{u_1 u_2}, \delta_{u_1 u_2 u_3}, \ldots \delta_{u_1 u_2 \ldots u_m}, \ldots$ --- determina un punto x, y uno sólo de L; los números u_1, u_2, ... u_m ... son 0 o 1. Luego el conjunto de sucesiónes de la forma $\delta_{u_1}, \delta_{u_1 u_2}, \ldots \delta_{u_1 u_2 \ldots u_m}, \ldots$ corresponde biunívocamente un conjunto de puntos x que forma parte de L.

Elijamos del conjunto de sucesiones de ese tipo aquellas en que el - conjunto de índices correspondientes u_1, u_2, ... u_m, ... contiene un número ilimitado de unos ; a este conjunto le corresponde biunívocamente -

un conjunto $L_1 < L$. Pero toda sucesión de índices satisfaciendo las - condiciones anteriores es la representación de un número del intervalo (0,1) en el sistema de base 2 y recíprocamente a todo número de (0,1) le corresponde una y sólo una representación de la forma $u_1, u_2, \dots u_m \dots$ en donde u_m es 0 o 1 y el número de unos es ilimitado. Por lo tanto el conjunto L_1 tiene la misma potencia que el (0,1) o sea la potencia c; aplicando el corolario del teorema (1.67) resulta L de la potencia del contínuo.

2.37 Teorema: El producto de un conjunto numerable de conjuntos residuales $H_1, H_2, \dots H_n, \dots$ es un conjunto residual.

Demostración.- Sea $G_n = C(H_n)$ el conjunto de la primera categoría - que corresponde al conjunto residual H_n. Se sabe que

$$H_1 . H_2 \dots H_m \dots = C\left[C(H_1) + C(H_2) + \dots + C(H_n) + \dots\right]$$
$$= C(G_1 + G_2 + \dots + G_n + \dots);$$

pero por el teorema (2.33) el conjunto $G_1 + G_2 + \dots$ debe ser de la primera categoría, por consiguiente el conjunto $H_1 . H_2 \dots H_m \dots$ es un conjunto residual.

2.37 El concepto de conjunto de la primera categoría puede ampliarse -- sustituyendo por un conjunto perfecto el intervalo o célula fundamental. En esta forma los conjuntos de las dos categorías y el conjunto residual quedan definidos ~~como~~ sigue (*):

Si $\{P_n\}$ es una sucesión de conjuntos no densos en el conjunto perfecto H, el conjunto $P_1 + P_2 + \dots + P_m + \dots$ se define como conjunto de la primera categoría con respecto a H. Un conjunto que no sea de la primera categoría con respecto a H se considera como de la segunda con respecto - a H. Un conjunto que tenga como complemento en H a un conjunto de la primera categoría con respecto a H, se define como conjunto residual relativamente a H.

(*) Hobson: Obra citada. Pág. 137

Observaciones:

1a. Un conjunto de la primera categoría con respecto a un conjunto - perfecto resulta de la primera categoría con respecto al intervalo o célula fundamental del conjunto perfecto.

2a. Podemos adoptar dos definiciones de conjunto de la primera cate - goría con respecto a un conjunto perfecto H.

Primera: $\{F_n\}$ debe ser creciente.

Segunda: $\{F_n\}$ puede ser cualquiera.

La equivalencia de las dos definiciones se demuestra como se hizo en (2.31).

3a. El teorema (2.33) es aplicable todavía al caso de que en lugar - del intervalo o célula fundamental se suponga un conjunto perfecto H. - La demostración es idéntica a la de dicho teorema.

4a. El teorema (2.34) también es válido para esta ampliación de concepto de conjuntos de la primera categoría. El enunciado puede escribirse en esta forma: Todo conjunto perfecto H es de la segunda categoría - con respecto a sí mismo. La demostración es la misma que la del teorema (2.34) con estas consideraciones adicionales.

Los puntos $\underline{x}_{m+1}$ (pertenecientes a H) no son necesariamente centros de las mallas δ_{m+1} sino únicamente puntos de ellas. La sucesión de mallas $\delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \ldots \delta_{p_n}, \ldots$ tiene como límite un punto $\underline{x}$ que evidentemente es punto de acumulación de H, y como este es perfecto, $\underline{x}$ pertenece a H.

5a. Se ve inmediatamente que son válidos el teorema (2.35) y sus corolarios para este caso más amplio y por lo tanto también es válido el corolario del teorema (2.34)

6a. Un conjunto de la primera categoría con respecto al intervalo o célula fundamental puede no ser de esa categoría con respecto a un conjunto perfecto del cual es componente. Por ejemplo un conjunto perfecto y no denso en (a,b) es de la primera con respecto a (a,b) pero de la segunda con respecto a sí mismo.

En el caso de que un conjunto L sea de la segunda categoría en (a,b), será de la segunda con respecto a cualquier conjunto perfecto en el que esté incluído, porque si L es de la segunda en (a,b) y de la primera en H (incluído en (a,b), L sería de la primera en (a,b) por la primera observación.

7a. En (2.36) se demostró que todo conjunto residual es de la potencia del contínuo; si se sigue ese razonamiento cuando el conjunto L es residual relativamente a un conjunto perfecto H, se llega a que --- $x = \lim \left\{ \delta_{v_1 v_2 \cdots v_n} \right\}$ es necesariamente un punto de acumulación de H y por consiguiente pertenece a H: pero no puede pertenecer a ninguno de los conjuntos G_1, G_2, ... , así es que pertenece a $L = C_H(G)$. Se concluye que el teorema (2.36) es válido también para este caso más general.

2.4 Conjuntos límites ordinarios.

El conjunto límite de una sucesión decreciente de conjuntos <u>abiertos</u> se define como <u>conjunto límite interior ordinario</u> (*).

El conjunto límite de una sucesión creciente de conjuntos cerrados, es por definición, un <u>conjunto límite exterior ordinario.</u>

Podemos hacer desde luego algunas consideraciones sobre los conjuntos límites ordinarios:

Por los teoremas (2.21) y (1.54), el complemento de cualquier conjunto límite interior ordinario (abreviadamente lím. int. ord.) es un conjunto límite exterior ordinario.

Todo conjunto abierto es lím. int. ord. En efecto, sea G el conjunto dado incluído en el intervalo o cèlula (a,b) y H el conjunto abierto -- <u>formado por todos los puntos interiores a un intervalo o célula (c,d)</u> --

(*) Hobson: Obra citada Pág. 139

que no tiene ningún punto común con (a,b); definamos ahora la sucesión de conjuntos abiertos $\{G + H_n\}$ donde el conjunto H_n está formado por todos los puntos de H que sean interiores a $(c,\theta_n \; d)$. Los números θ_n se suponen constituír una sucesión decreciente $1 > \theta_1 > \theta_2 > \cdots \theta_n > \cdots$ en donde $\theta_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Es claro que la sucesión $\{G + H_n\}$ es decreciente y tiene a G por límite, con lo que queda justificada la afirmación anterior.

El conjunto nulo pertenece a la clase de los conjuntos lím. int. ord. de acuerdo con la definición dada, pues es posible construir en un espacio de cualquier número de dimensiones una sucesión decreciente de conjuntos abiertos que tenga por límite 0.

Supongamos que G es un conjunto cualquiera y que a todo punto x de G se le asocia una sucesión de intervalos o células $\delta_1(x), \delta_2(x) \ldots \delta_n(x), \ldots$ satisfaciendo a estas dos condiciones:

1a. <u>x</u> es interior a cualquiera de las $\delta_n(x)$

2a. cada intervalo o célula $\delta_n(x)$ comprende al siguiente.

Debe tomarse en cuenta que la amplitud o diagonal de $\delta_1(x)$ no necesariamente es igual para todos los puntos x de G; llamemos d_1 al extremo superior de las diagonales de $\delta_1(x)$, y, en general, d_n al extremo superior de las diagonales de $\delta_n(x)$. Sea Δ_n el conjunto de los puntos interiores a todos los intervalos o células $\delta_n(x)$, correspondientes a todos los puntos x de G para ese valor de n. Supongamos como última hipótesis que la sucesión $\{d_n\}$ es decreciente y converge hacia cero, es decir, $d_1 > d_2 > \ldots > d_n > \ldots$ y $d_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Se ve inmediatamente que los conjuntos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, \ldots$ son abiertos y que forman una sucesión $\{\Delta_n\}$ decreciente y su límite H, que por definición, es lím. int. ord., tiene como componente al conjunto dado G.

Se verá después por un ejemplo, que no siempre coinciden H y G, pero sí se puede asegurar que todo punto z de H que no pertenece a G, es punto de acumulación de G; porque si z pertenece a H debe ser común a todos los conjuntos Δ_n, luego debe ser interior a algún $\delta_n(x)$ para todo valor de n, y si no pertenece a G, al figurar en $\delta_n(x)$ distará de al menos un punto de G (el x precisamente) un valor no mayor de d_n, pero se ha supuesto que $d_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, así que z debe ser punto de acumulación de G.

Como corolario del resultado anterior podemos afirmar que si G es finito, resulta lím. int. ord. En efecto si G es finito y existen puntos z de H que no figuran en G, z debe ser punto de acumulación de G lo cual no es posible; o en otros términos, no hay puntos de H que no sean de G. Por consiguiente H y G coinciden.

El conjunto de puntos de G' que no pertenecen a G pero que figuran en H dependerá de la manera en que se hagan corresponder, a cada punto x de G, los intervalos $\delta_n(x)$. Si el conjunto dado G es lím. int. ord. debe ser posible encontrar una ley que haga corresponder a todo punto x, una sucesión $\{\delta_n(x)\}$ tal que el límite de $\{\Delta_n\}$ no contenga ningún punto de G' que no sea de G.

Si todos los intervalos o células $\delta_n(x)$ se toman con centro en el punto x correspondiente y tienen igual longitud $2c_n$ y se supone que $c_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, todo punto de G' figura en H porque todo punto w de G' es interior a un $\delta_m(x)$ por grande que sea el valor de n y entonces estará comprendido en H, así que en este caso tenemos $H = G'$

Se deduce inmediatamente que si G es cerrado, H = G, o lo que es lo mismo, todo conjunto cerrado es lím. int. ord.

A continuación daremos un ejemplo (*) en el que se ve que H no coincide con G.

Sea G el conjunto de los racionales comprendidos entre 0 y 1. A to-

(*) Hobson: Obra citada. Pág. 141.

do número racional $\frac{p}{q}$ de G se le asocia un conjunto de intervalos de la forma $\left(\frac{p}{q}-\frac{\lambda_n}{q^3}, \frac{p}{q}+\frac{\lambda_n}{q^3}\right)$ donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > \cdots$ y $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; es evidente que en esta sucesión de intervalos cada uno de ellos comprende al siguiente.

Llamemos, como antes, Δ_n al conjunto de puntos interiores a todos los intervalos $\left(\frac{p}{q}-\frac{\lambda_n}{q^3}, \frac{p}{q}+\frac{\lambda_n}{q^3}\right)$ correspondientes a todos los números racionales $\frac{p}{q}$ del intervalo abierto (0,1), y sea $H = \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdots \Delta_n \ldots$ el conjunto lím. int. ord. correspondiente que, según se sabe, contiene al conjunto G.

Consideremos ahora los puntos x definidos por

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{n!}} + \cdots$$

donde cada $a \leq 9$ y hay un número infinito de aes que son distintas de cero. Liouville ha demostrado que estos números, que están en el intervalo (0,1), son trascendentes.

Vamos a demostrar ahora que cualquier número x figura en H:

Sean, x uno cualquiera de los trascendentes mencionados y Δ_m un conjunto cualquiera de $\{\Delta_n\}$. Se puede encontrar un valor de n suficientemente grande para que $\frac{1}{10^{n!(n-3)}} < \lambda_m$ y hagamos corresponder al número x el racional $\frac{p}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{n!}}$ en donde las aes tienen el mismo valor que las n primeras del desarrollo de dicho número x.

Se ve fácilmente que $q = 10^{n!}$ y por consiguiente

$$x - \frac{p}{q} = \frac{a_{n+1}}{10^{(n+1)!}} + \frac{a_{n+2}}{10^{(n+2)!}} + \cdots = \frac{1}{q^n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \cdots\right)$$

por otra parte se debe tener que

$$\frac{\lambda_m}{q^3} = \frac{\lambda_m}{10^{3.n!}} > \frac{\lambda_m}{10^{n!\,n}} = \frac{\lambda_m}{q^n} \qquad \therefore \left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{q^n} < \frac{\lambda_m}{q^3}$$

es, decir, x dista de un cierto racional $\frac{p}{q}$ elegido convenientemente un valor menor que $\frac{\lambda_m}{q^3}$. Entonces es interior al intervalo $\left(\frac{p}{q}-\frac{\lambda_m}{q^3}, \frac{p}{q}+\frac{\lambda_m}{q^3}\right)$ y por lo tanto forma parte del conjunto Δ_m

Pero ya que Δ_m es arbitrario, x debe figurar en todos los conjuntos de $\{\Delta_n\}$ así que debe pertenecer a H.

Se concluye que H, además de contener a G, contiene también a todos los números x.

2.41 Teorema: El producto de un conjunto numerable de conjuntos abiertos es un conjunto lím. int. ord.

Demostración:- Sean L_1, L_2, ... L_m, ... los conjuntos abiertos dados. Si son en número finito su producto será un conjunto abierto -- (teorema 1.59) o nulo y por consiguiente lím. int. ord. como se vió - antes. Si son en número infinito repitamos el razonamiento seguido en (2.22) definiendo una sucesión auxiliar $\{\Delta_n\}$ en la forma:

$$\Delta_1 = L_1;\ \Delta_2 = L_1.L_2;\ \Delta_3 = L_1.L_2.L_3;\ \dots\ \Delta_n = L_1.L_2 \dots L_n;\ \dots$$

y resulta $L_1.L_2 \dots L_n \dots = \Delta_1.\Delta_2.\Delta_3 \dots$; pero esta sucesión $\{\Delta_n\}$ es decreciente y formada por conjuntos abiertos únicamente, con lo que queda demostrado el teorema.

2.42 Teorema: El producto de un conjunto numerable de conjuntos lím. - int. ord. es un conjunto lím. int. ord.

Demostración:- ~~Sea~~ Sea H_1, H_2, ... un conjunto numerable de conjuntos - lím. int. ord.; de acuerdo con la definición podemos escribir

$$H_1 = \Delta_1^{(1)} \cdot \Delta_2^{(1)} \dots \Delta_n^{(1)} \dots$$

$$H_2 = \Delta_1^{(2)} \cdot \Delta_2^{(2)} \dots \Delta_n^{(2)}$$

. . . .

donde todos los conjuntos $\Delta_n^{(p)}$ son abiertos y $\Delta_n^{(p)} > \Delta_{n+1}^{(p)}$.

El producto $H_1.H_2$ ... es igual al producto $\Delta_1^{(1)} \cdot \Delta_2^{(1)} \cdot \Delta_1^{(2)} \cdot \Delta_3^{(1)} \dots$

y este último tiene como factores en número infinito numerable a conjuntos abiertos únicamente, luego por el teorema (2.41) ese producto es lím. int. ord.

2.43 Teorema: La suma de un número finito de conjuntos límites interiores ordinarios es un conjunto lím. int. ord.

Demostración.- Sean $G_1, G_2, \ldots G_m$; m conjuntos lím. int. ord.

$$\therefore \quad G_1 = \Delta_1^{(1)} \cdot \Delta_2^{(1)} \cdots \Delta_n^{(1)} \cdots$$
$$G_2 = \Delta_1^{(2)} \cdot \Delta_2^{(2)} \cdots \Delta_n^{(2)} \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$G_m = \Delta_1^{(m)} \cdot \Delta_2^{(m)} \cdots \Delta_n^{(m)} \cdots$$

Si x no es punto de G_1, existe un entero positivo p_1 tal que ninguno de los conjuntos $\Delta_{p_1}^{(1)}, \Delta_{p_1+1}^{(1)}, \Delta_{p_1+2}^{(1)}, \ldots$ lo contiene; generalizando, si x no es punto de G_i existe un entero positivo p_i tal que ninguno de los conjuntos $\Delta_{p_i}^{(i)}, \Delta_{p_i+1}^{(i)}, \ldots$ lo contiene. Sea p el máximo de los números $p_1, p_2, \ldots p_m$; si el punto x no forma parte de $G_1 + G_2 + \ldots + G_m$ con seguridad no aparece en $\Delta_K^{(i)}$ $(1 = 1,2,\ldots m)$ y $K \geq p$. Por lo tanto el conjunto lím. int. ord.

$$\left(\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)} + \ldots + \Delta_1^{(m)}\right)\left(\Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)} + \ldots + \Delta_2^{(m)}\right) \cdots \left(\Delta_n^{(1)} + \Delta_n^{(2)} + \ldots + \Delta_n^{(m)}\right) \cdots$$

debe ser igual a $G_1 + G_2 + \ldots + G_n$.

Observación: En el razonamiento anterior es indispensable que el número de sumandos G_i sea finito, para poder hablar del máximo de $p_1, p_2, \ldots p_m$. En el caso de un número ilimitado de sumandos el conjunto de los números $p_1, p_2, \ldots$ puede no estar acotado superiormente y en ese caso el conjunto $(\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)} + \ldots)(\Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)} + \ldots) \cdots$ puede contener, además de los puntos de $G_1 + G_2 + \ldots$, otros puntos. Por ejemplo un conjunto numerable infinito es la suma de un número infinito de conjuntos límites int. ord. (cada uno de sus puntos) pero no es lím. int. ord. a menos que carezca de parte densa en sí misma, como se verá después.

2.44 Teorema: Si G es lím. int. ord. y H un conjunto cualquiera, teniendo o no puntos en común con G, la condición necesaria y suficiente para que G - H sea límite int. ord. es que los puntos de G - H que -- sean puntos de acumulación de H, constituyan un conjunto lím.int. ord. Es decir si T = (G - H)H', T y G - H deben ser simultáneamente lím. -- int. ord.

Demostración.- Si G - H es lím. int. ord. el producto (G - H)H' lo es también (teorema 2.42) ya que su segundo factor H', por ser cerrado, es lím. int. ord. Por consiguiente la condición es necesaria.

Para demostrar que la condición es suficiente consideraremos dos casos:

1o. T = 0.

Por hipótesis G = $\Delta_1 . \Delta_2 . . . \Delta_n . . .$donde los Δ son abiertos y $\Delta_{n+1} < \Delta_n$. Sea $\delta_n = \Delta_n$ - (H + H') ; evidentemente δ_n no contiene cualquiera que sea n, a ningún punto de H + H' y se deduce que contiene a todos los - puntos de G - H puesto que (G - H)(H + H') = (G - H)H' = T = 0.

Por otra parte se debe tener C(δ_n) = C(Δ_n) + H + H'; pero - - - C(Δ_n) y H + H' son cerrados (teorema 1.54 y corolario del 1.52) por - consiguiente C(δ_n) es cerrado (teorema 1.56) y en consecuencia δ_n es abierto.

Además por ser $\delta_n < \Delta_n$, forzozamente $\delta_1 . \delta_2 . . . < \Delta_1 . \Delta_2 . . .$ así que g - H resulta igual a $\delta_1 . \delta_2 . . .$, o lo que es lo mismo, G - H es lím. int. ord. (teorema 2.41).

2o. T $\neq$ 0.

Utilizaremos la igualdad T + $\left[G - (T + H)\right]$ = G - H. El conjunto - G = (T + H) debe ser lím. int. ord. por el caso anterior puesto que ningún punto de G - (T + H) puede ser de acumulación de T + H. Por lo tanto $G - H$, suma de dos conjuntos lím. int. ord. T y $G - (T + H)$, es también un conjunto lím. int. ord.

Corolario: Si G es lím. int. ord. y $M = M_1 + M_2 + \ldots$ un conjunto cualquiera, la condición necesaria y suficiente para que $G - M$ sea lím. int. ord. es que $(G - M)M'_i$ $(i = 1,2,3, \ldots)$ sea lím. int. ord.

Demostración.- Se deduce del teorema (2.42) que la condición es necesaria. Para demostrar que la condición es suficiente tomemos en cuenta que los puntos de $G - (M_i + M'_i.M)$ que son de acumulación de $M_i + M'_i.M$ forman el conjunto $(G - M)M'_i$, lím. int. ord. por hipótesis. Luego, por el teorema anterior, $G - (M_i + M'_i.M)$ es lím. int. ord. y $G - M = \left[G - (M_1 + M'_1.M)\right] \left[G - (M_2 + M'_2.M)\right] \ldots$ lo es también.

2.45 Teorema: Si G es lím. int. ord. y S una parte de G tal que ningún punto de $G - S$ es de acumulación de S, dicha parte es un conjunto lím. int. ord.

Demostración.- Por hipótesis $(G - S)S' = 0$

$$\therefore \quad G.S' = S.S'$$

$$\therefore \quad G(S + S') = G.S + G.S' = S + S.S' = S;$$

pero tanto G como $S + S'$ son lím. int. ord., luego S lo es también.

Vemos pues que las operaciones de adición y multiplicación entre conjuntos lím. ~~int.~~ ord. dan por resultado conjuntos lím. int. ord. siempre que, tratándose de la primera, el número de sumandos sea finito; la multiplicación no tiene limitación alguna en cuanto al número de factores.

En la sustracción de conjuntos se ha obtenido que si G es lím. int. ord. la condición necesaria y suficiente para que $G - N$ sea lím. int. ord. es que $T = (G - N)N'$ sea a su vez lím. int. ord. En consecuencia -

no siempre será posible que la diferencia entre dos conjuntos lím. int. ord. sea otro lím. int. ord; en cambio en algunos casos la diferencia G - N puede ser lím. int. ord. a pesar de que el sustraendo N no lo sea, o en otros términos, M + N (M lím. int. ord) puede ser lím. int. ord., aunque N no lo sea.

Existen casos en que la suma de un número ilimitado de conjuntos lím. int. ord. es de esta clase de conjuntos; por ejemplo consideremos el siguiente teorema:

2.46 Teorema: Sea G una sucesión de conjuntos lím. int. ord. en estas condiciones: si $m < n$, todos los puntos de G_n son de acumulación de G_m y ningún punto de G_m es de acumulación de G_n ; en particular todos los puntos de G_{p+1} , G_{p+2} , ... son de acumulación de G_p . Con estas hipótesis se puede afirmar que $G = G_1 + G_2 + \dots G_n + \dots$ es lím. int. ord.

Demostración:- Sea H el conjunto de puntos de acumulación de G que no pertenecen a G. Debido a que todos los puntos de G_n ($n = 2,3, \dots$) son de acumulación de G_1 , cualquier punto de H es de acumulación de G_1 y posiblemente de algunos otros elementos de $\{G_n\}$. Además todo punto de H que no sea punto de acumulación de un número finito de conjuntos G, debe ser de acumulación de todos los G.

Designemos por P_m a los puntos de H que sean de acumulación de $G_1 + G_2 + \dots + G_m$ únicamente. El conjunto G + H es lím. int. ord. y de las hipótesis se deduce que ningún punto de $G_1 + G_2 + \dots + G_m + P_m$ es de acumulación del resto de los puntos de G + H; aplicando el teorema (2.44) se encuentra que el conjunto $G + H - (G_1 + \dots + G_m + P_m)$ es lím. int. ord. Por consiguiente el conjunto $\left[G + H - (G_1 + \dots + G_m + P_m)\right] + (G_1 + \dots + G_m) = G+H - P_m$ es lím.int.ord. para cualquier valor de m ya que $G_1 + \dots + G_m$ lo es.

Sea $M = (G + H - P_1)(G + H - P_2) \ldots (G + H - P_m) \ldots$; por el teorema (2.42) este conjunto debe ser lím. int. ord. Es claro que M contiene al conjunto G y los únicos puntos que aparecen en M no pertenecientes a G, serán los de acumulación de todos los elementos de G; si designamos por K el conjunto de estos puntos podemos escribir $M = G + K$; pero es claro que ningún punto de G es de acumulación de K; aplicando el teorema (2.44) nuevamente, G resulta lím. int. ord.

El recíproco de este teorema es válido, así que tenemos:

2.47 Teorema: Si G es lím. int. ord. y se puede descomponer en un conjunto numerable de partes $G_1, G_2, \ldots G_n, \ldots$ tales que si $m < n$ todo punto de G_n es de acumulación de G_m y ningún punto de G_m es de acumulación de G_n, cualquiera de estas partes G_i es un conjunto lím. int. ord.

Demostración:- Supongamos que un cierto conjunto G_m no sea lím. int. ord. Podemos dividir G en dos partes: la primera que sea $G_1 + G_2 + \ldots + G_m$; la segunda $G_{m+1} + \ldots$; como ningún punto de la primera puede ser de acumulación de la segunda, tenemos por el teorema (2.44) que $G_1 + G_2 + \ldots + G_m$ debe ser lím. int. ord. Pero ningún punto de $G_1 + G_2 + \ldots + G_{m-1}$ es de acumulación de G_m, por consiguiente este debe ser lím. int. ord. (teorema 2.45), lo que está en contradicción con la suposición que hemos hecho. Se concluye que cualquier G_i es lím. int. ord.

Los dos teoremas anteriores se pueden generalizar como se ve a continuación.

2.48 Teorema: Si los conjuntos lím. int. ord. $G_1, G_2, \ldots G_n, \ldots$ donde los índices $1, 2, \ldots n, \ldots$ son todos los números anteriores a un número α de la primera o segunda clase (número 1.7), satisfacen la condición de que para $\beta < \gamma$ todo punto de G_γ es de acumulación de G_β y ningún --

punto de G_β es de acumulación de G_γ, el conjunto $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \ldots$ es lím. int. ord.

Demostración.- Designemos por S_β la suma de los conjuntos G_i cuyos índices son todos los números anteriores al número β; es claro que para algunos valores de β, S_β es conjunto lím. int. ord.

Si $G = S_\alpha$ no es lím. int. ord., podemos dividir los índices - - - 1, 2, ... n, ... en dos partes: la primera contiene a los índices β tales que S_β es lím. int. ord. y la segunda los restantes.

Ya que el conjunto de los números transfinitos está bien ordenado la segunda parte tiene un primer elemento λ. Si existe $\lambda-1$ tenemos que - S_λ no es lím. int. ord. y $S_{\lambda-1}$ sí lo es, pero $S_\lambda = S_{\lambda-1} + G_{\lambda-1}$ lo que contradice lo anterior. Si no existe $\lambda-1$, habrá una sucesión de números finitos o transfinitos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$ tales que $\lambda = \text{lím}\{\gamma_n\}$; y $S_\lambda = S_{\gamma_1} + G_{\gamma_1} + G_{\gamma_2} + \ldots + G_{\gamma_n} + \ldots$ y por (2.46) el conjunto - $G_{\gamma_1} + G_{\gamma_2} + \ldots + G_{\gamma_n} + \ldots$ debe ser lím. int. ord. y por lo tanto -- S_λ resulta lím. int. ord. Queda demostrado por reducción al absurdo que G debe ser lím. int. ord.

Recíprocamente tenemos:

2.49 Teorema: Si la suma $G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \ldots$ de un número finito o infinito de términos cuyos índices son <u>todos</u> los números anteriores a un cierto número α finito o transfinito, es un conjunto lím. int. ord. y - se satisface la condición de que si $\beta < \gamma$ todos los puntos de G_γ son de acumulación de G_β , cualquiera de estos conjuntos G es lím. int. ord.

Demostración:- La demostración es completamente análoga a la del teorema (2.47) o sea: supongamos que un cierto conjunto G_λ no es lím. int. ord., donde λ es finito o transfinito. Al conjunto $G = G_1 + G_2 + \ldots$ - lo podemos descomponer en dos partes, la primera igual a $G_1 + \ldots + G_\lambda$

y la segunda igual a $G_{\lambda+1} + G_{\lambda+2} + \ldots$ Ningún punto de la primera - parte puede ser de acumulación de la segunda; aplicando el teorema -- (2.44), $G_1 + \ldots + G_\lambda$ resulta lím. ánt. ord; además ningún punto de - esta última parte que no pertenezca a G_λ puede ser de acumulación de G_λ, por lo tanto al aplicar (2.45) G_λ debe ser lím. int. ord. en -- contradicción con la suposición hecha al principio.

Algunas propiedades de los conjuntos límites interiores ordinarios.

1a. Si G es lím. int. ord. y N es un conjunto numerable cualquiera, G - N es lím. int. ord.

Demostración:- Sean $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ los puntos integrantes de N. Por lo tanto $N = (x_1) + (x_2) + \ldots + (x_n) + \ldots$ Evidentemente los sumandos de N satisfacen la condición del corolario del teorema (2.44), o sea, $(G - N)(x_i)' = 0$.

Con ayuda de la propiedad anterior se puede generalizar el teorema (2.45). Esta generalización tiene por enunciado: Si G es lím. int. ord. y S una parte de G tal que los puntos de G - S que sean de acumulación de S constituyen un conjunto numerable, esa parte S es lím. int. ord.

Demostración:- Llamemos σ al conjunto (numerable) de puntos de G - S que son de acumulación de S. Por la propiedad mencionada, $G - \sigma$ debe - ser lím. int. ord.; pero $(G - \sigma) - S$ no contiene ningún punto de acumulación de S, así que aplicando (2.45), el conjunto S debe ser lím. int. ord.

2a. Todo conjunto reducible es lím. int. ord. (G es reducible cuando G' es numerable).

Demostración:- Se sabe que G + G' es cerrado y por lo tanto lím. int. ord; se puede escribir G = G + G' - N donde $N \leq G'$ y por lo tanto nume - rable. Entonces por la primera propiedad, G resulta lím. int. ord.

3a. Si N es un conjunto numerable incluído en un conjunto lím. int. ord. G, los puntos de G - N que son de acumulación de N constituyen un conjunto lím. int. ord.

Demostración.- Por la primera propiedad, G - N es lím. int. ord. -- luego por el teorema (2.44) lo es también el conjunto T = (G - N)N' lo que demuestra esta propiedad.

En particular (✱) los puntos de acumulación de N que no pertenecen a N forman un conjunto lím. int. ord. Porque sea (a,b) un intervalo o célula fundamental de N; los puntos de (a,b) constituyen un conjunto M -- que es lím. int. ord., luego M - N lo es también y por consiguiente - - (M - N)N' es de esa clase de conjuntos; pero (M - N)N' es el conjunto - de puntos de acumulación de N que no pertenecen a M.

4a. Todo conjunto aislado es lím. int. ord.

Demostración.- Sea G un conjunto aislado cualquiera. En el conjunto cerrado G + G' se tiene G.G' = 0. Luego ningún punto de G es de acumulación de G', así que por el teorema (2.44), G es lím. int. ord.

5a. El complemento $C_H(G)$ con respecto a un conjunto perfecto H de un conjunto G lím. int. ord. y denso en todas partes de H, es un conjunto de la primera categoría con respecto a H.

Demostración.- Sea $\{\Delta_n\}$ la sucesión que define a G; consideremos la sucesión de conjuntos $\{P_n\}$ siguiente:

$$P_1 = H.C(\Delta_1)$$

$$P_2 = H.C(\Delta_2)$$

. . . .

$$P_n = H.C(\Delta_n)$$

. . . .

$$C(C) = P + P + \dots + P_n + \dots$$

(✱) Para una demostración directa de este caso particular, véase Hobson. Pág. 142.

Pero los conjuntos P_n deben ser cerrados puesto que son productos de dos conjuntos cerrados, por consiguiente ninguno de estos puede -- ser denso en H porque si P_n lo fuera en H, habría un subintervalo o subcélula que contendría únicamente puntos de P_n y entonces G no sería denso en H en contradicción con la hipótesis.

Se deduce que el conjunto $C_H(G)$ es de la primera categoría con respecto a H.

6a. Si L y M son dos conjuntos tales que H = L + M es un conjunto - perfecto y L y M son densos en todas partes de H, estos conjuntos no - pueden ser simultáneamente lím. int. ord.

Demostración.- Si L es lím. int. ord., por la propiedad anterior M es de la primera categoría con respecto a H. Si M es también lím. int. ord., L es de la primera categoría con respecto a H y entonces H = L + M resulta de la primera categoría con respecto a H lo que es falso (observación 4a. del número 2.37).

Nota: Se acaba de demostrar que L y M no pueden ser ambos, lím. int. ord.; puede preguntarse si es posible que ninguno de los dos sea lím. - int. ord.; el siguiente ejemplo aclara la cuestión: El conjunto H es el intervalo cerrado (0,2); L está formado por todos los irracionales de - (0,1) y los racionales de (1,2) y M por los racionales de (0,1) y los - irracionales de (1,2). Si L es lím. int. ord. M es de la primera cate - goría y por el teorema (2.35) los irracionales de (1,2) formarían un -- conjunto de la primera categoría, lo que es falso. Si M es lím. int. -- ord., se hace el mismo razonamiento anterior y se llega también a un -- absurdo. Por lo tanto se ve por este ejemplo que es posible en algunos casos que ni L ni M sean lím. int. ord.

7a. Si G es lím. int. ord. y denso en todas partes de un conjunto perfecto H, es condición necesaria para que $C_H(G)$ sea lím. int. ord. el que $C_H(G)$ no sea denso en H.

Demostración.- Si $C_H(G)$ fuera denso en H, existiría un intervalo - o célula δ en el que todos los puntos de H serían de acumulación de $C_H(G)$, o lo que es lo mismo $G_H(G)$ sería denso en todas partes de H_1, designando por H_1 (perfecto) al conjunto de puntos de H contenidos -- en δ. Pero G_1, la parte de G en δ, también es densa en todas partes de H_1 y por el teorema (2.45), $C_{H_1}(G_1)$ y G_1 son lím. int. ord. lo que es falso por la propiedad 6a. Luego la suposición de que $C_H(G)$ - es denso en H conduce a un absurdo y por lo tanto está demostrada la propiedad.

Como consecuencia inmediata de la propiedad anterior tenemos que el conjunto de los racionales en un intervalo o célula (a,b) no es lím. - int. ord. En efecto si llamamos R al conjunto de los racionales de -- (a,b), por la primera propiedad, C(R) es lím. int. ord. y si R lo fuera también, por la propiedad anterior debería ser no-denso en (a,b), - lo que es falso.

8a. Todo conjunto lím. int. ord. de <u>cualquier número de dimensiones</u> (*) es numerable o de la potencia del contínuo.

Demostración.- Si un conjunto G no tiene parte densa en sí misma, - es numerable. Por consiguiente el único caso que hay que analizar es - aquel en que G tiene una parte K densa en sí misma.

Si P = G.K', L = K + P debe ser denso en sí mismo y ningún punto de G - L es de acumulación de K + P; luego por el teorema (2.45), L debe ser lím. int. ord. Se sabe que L es denso en todas partes del conjunto

---

(*) En Hobson (pág. 140) se puede ver una demostración para el caso <u>particular</u> de conjuntos <u>lineales</u>.

perfecto L' y por la propiedad 5a, L es un conjunto residual con respecto a L' y en consecuencia de la potencia del contínuo (observación 7a. del 2.37). Aplicando el corolario del teorema 1.67, resulta G de la potencia c.

Nota: Un conjunto numerable que tenga una parte densa en sí misma no puede ser lím. int. ord.

9a. La condición necesaria y suficiente para que un conjunto numerable N, de cualquier número de dimensiones (*), es que N no tenga componente densa en sí misma.

Demostración.- Que la condición es necesaria se acaba de ver; queda únicamente por demostrar que la condición es suficiente.

Sea K el conjunto de todos los puntos de acumulación de N que no pertenecen a N; por lo tanto N + K es conjunto cerrado y por consiguiente lím. int. ord.

Descompongamos los conjuntos N y K en número finito o infinito de partes N', N^2, ... y K', K^2, ... , siguiendo este criterio:

N^n está formado por todos los puntos de N^{n-1} que son de acumulación de K^{n-1}; y K^n está formado por todos los puntos de K^{n-1} que son de acumulación de N^n.

En esta descomposición no es posible que para un cierto valor m, $N^m = N^{m-1}$ porque entonces tendríamos, de acuerdo con el criterio anterior, que todos los puntos de N^m serían de acumulación de K^{m-1} y todos los puntos de K^{m-1} serían de acumulación de $N^{m-1} = N^m$, o sea que N^m resultaría un conjunto denso en sí mismo en contradicción con la Hipótesis. Se llegaría al mismo absurdo si se supusiera que $K^{m-1} = K^m$.

(*) Una demostración para el caso de que N sea lineal, se puede ver en Hobson (Pág. 143).

Si no son nulos los conjuntos N^n para todo valor finito de n, se designará por N^ω al límite de $\{N^n\}$ y, en general, si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números de la primera o segunda clase y $\beta = \lim\{\alpha_n\}$, N^β representa el límite de la sucesión $\{N^{\alpha_n}\}$ siempre que sean distintos de cero todos estos conjuntos N^{α_n}

Un resultado que se deduce inmediatamente es que el conjunto $N^\alpha + K^\alpha$ es cerrado, siendo α un número cualquiera, de la primera o segunda -- clase.

Definamos ahora los conjuntos N_n y K_n en esta forma:

$$N_n = N^{n-1} - N^n \quad ; \quad K_n = K^{n-1} - K^n$$

Con respecto a estos conjuntos N_n y K_n se puede afirmar que:

a) Todo punto de K_n es de acumulación de N_n.

b) Ningún punto de N_n es de acumulación de K_n.

c) Ningún punto de N_{n-1} es de acumulación de N_n.

d) Todo punto de N_n es de acumulación de N_{n-1}.

Ahora bien la descomposición debe tener fin porque de lo contrario existirían $N_1, N_2, \ldots N_\omega, \ldots N_\gamma, \ldots$, sin puntos comunes y cuyos índices son todos los números de la primera y segunda clase; y todos los puntos de estos conjuntos N_α son de N, numerable, lo que está en contradicción con el teorema (1.72)

Al tener fin esta descomposición, hay dos posibilidades:

$N^\gamma = N^{\gamma-1}$ ó $N^\gamma = 0$; se vió ya que la primera conduce a un absurdo, por consiguiente existe un número γ de la primera o segunda -- clase tal que $N = N_1 + N_2 + \ldots$, donde los índices de los sumandos N_α son todos los números menores que γ.

Sea $\alpha < \gamma$; por ser cerrado $N^\alpha + K^\alpha$, el conjunto - - - - - - - - -

$M = N + K - (N^\alpha + K^\alpha)$ es lím. Int. ord. y por lo anterior se -

puede asegurar que $N_\alpha + K_\alpha < M$, es tal que ningún punto de - - - - $M - (N_\alpha + K_\alpha)$ es de acumulación de $N_\alpha + K_\alpha$, así que por el teorema (2.45), $N_\alpha + K_\alpha$ es lím. int. ord. y por b) resulta N_α lím. - int. ord. (teorema 2.44)

En consecuencia los conjuntos N_α satisfacen las condiciones del - teorema 2.48 Luego el conjunto N es lím. int. ord.

10a. Si un conjunto no numerable de puntos es lím. int. ord., es - necesario que no contenga puntos cuyos grados en el conjunto sean distintos de <u>0</u>, <u>a</u> ó <u>c</u> y no debe contener componente densa en sí misma -- cuyos puntos sean de grado <u>a</u> en el conjunto.

Demostración.- Sea G el conjunto considerado; si hubiera un punto <u>u</u> de grado <u>x</u> en G se podría señalar una vecindad cerrada de <u>u</u> que encerrara una componente G_x de G, de potencia <u>x</u> (Número 1.8). Como ningún punto de $G - G_x$ es de acumulación de G_x, este resultaría lím. -- int. ord. (teorema 2.45) en contradicción con la 8a. propiedad.

Si G tiene una componente G_a, densa en sí misma y cuyos puntos fueran de grado <u>a</u> en el conjunto, existen, un punto <u>u</u> de grado <u>a</u> en G y - una vecindad cerrada de <u>u</u> conteniendo un conjunto numerable denso en - sí mismo N_a, formado con puntos de G_a o sea de G. Este conjunto N_a debería ser lím. int. ord. contradiciendo la propiedad 8a.

-oOo-

oc

B I B L I O G R A F I A.

E. W. Hobson: The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series. Volume I. Third Edition. 1927.

M. H. A. Newman: Elements of the Topology of Plane Sets of Points. 1939.

E. J. Townsend: Functions of Real Variables. 1928.

E. Borel: Lecons sur la Theorie des Fonctions. Troisieme - Edition. 1928

E. Borel: Lecons sur les Fonctions de Variables Reelles et - les Developments en Series de Polynomes. Deuxieme Edition. 1928.

A. Denjoy: Introduction a la Theorie des Fonctions de Variables Reelles. Volume 1. 1937.

R. Baire: Les Fonctions Discontinues. 1905.

W. Sierpinski: Lecons sur les Nombres Transfinis. 1928.

H. Lebesgue: Lecons sur l'Integration et la Recherche des Fonctions Primitives. 1928.

C. de la Valle Poussin: Integrales de Lebesgue. 1934.

N. Lusin: Lecons sur les Ensembles Analyitiques et leurs - - - aplications. 1930.

- - - - -

-oOo-

(oc)